

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Elifaleth Rego Sabino

**Problemas elípticos com não linearidade descontínua
envolvendo o expoente crítico de Sobolev**

BELÉM

2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Elifaleth Rego Sabino

**Problemas elípticos com não linearidade descontínua
envolvendo o expoente crítico de Sobolev**

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

ORIENTADORA: Prof^ª. Dr^ª. Rúbia Gonçalves Nascimento

BELÉM

2010

Sabino, Elifaleth Rego

Problemas elípticos com não linearidade descontínua envolvendo o expoente crítico de Sobolev / (Elifaleth Rego Sabino); orientadora, Rúbia Gonçalves Nascimento.- 2010.

121 f. il. 28cm

Dessertação (Mestrado)- Universidade Federal do Pará. Instituto de Ciências Exatas e Naturais. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística. Belém ,2010

1. Equações Diferenciais Elípticas.I.Nascimento, Rúbia Gonçalves, orient. II.Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística.

III. Título

CDD 22. ed. 515.3533

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Elifaleth Rego Sabino

Problemas elípticos com não linearidade descontínua envolvendo o expoente crítico de Sobolev

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Data da defesa: 24 de fevereiro de 2010.

Conceito: _____

Banca Examinadora

Prof^a. Dr^a. Rúbia Gonçalves Nascimento (Orientadora)
PPGME - UFPA

Prof^o. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
PPGME - UFPA

Prof^o. Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues
DM-UFSCar

Prof^o. Dr. Valcir João da Cunha Farias
PPGME - UFPA

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

À Deus, pela saúde e força.

À minha família em especial a minha irmã, Elizabeth Sabino, por todo o apoio e carinho.

À professora Rúbia Gonçalves Nascimento, por todo apoio, orientação e compreensão dado durante o mestrado.

Ao Professor Giovany de Jesus Malcher Figueiredo, pelo apoio, e sugestão e compreensão dado durante o período da Pós-Graduação, e disposição nesta tarefa de me avaliar fazendo parte da banca examinadora.

Aos colegas da pós-graduação (UFPa).

Aos funcionários do ICEN/ UFPa.

Aos amigos, que estiveram comigo nas horas difíceis.

A Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudaremos a existência, multiplicidade e regularidade de soluções, para a seguinte classe de problemas elípticos.

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x)H(u-a)u^q + u^{2^*-1} \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $\lambda, a > 0$ são parâmetros reais, $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ e H são funções satisfazendo certas condições a serem apresentadas ao longo deste estudo e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev com $N \geq 3$ e $0 \leq q < 2^* - 1$. Utilizaremos métodos variacionais aplicados a funcionais localmente lipschitziano, usaremos Análise Convexa, Cálculo Subdiferencial, Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente lipschitziano e o Princípio Variacional de Ekeland.

Abstract

In this paper we study the existence, multiplicity and regularity of solutions, we use variational methods applied to locally lipschitziano functionals, for the following class of elliptic problems

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x)H(u-a)u^q + u^{2^*-1} \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

where $\lambda, a > 0$ are parameters, $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ and H is the function Heaviside, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ is the critical Sobolev exponent with $N \geq 3$ and $0 \leq q < 2^* - 1$.

Conteúdo

Introdução	1
1 Resultados Abstratos	6
2 Sobre um problema elíptico com não linearidade descontínua	13
2.1 Lema 2.1	15
2.2 Lema 2.2	22
2.3 Lema 2.3	30
2.4 Lema 2.4	73
3 Resultado Principal	85
A Resultados Importantes	103
B Funcionais Diferenciáveis	107
Bibliografia	115

Introdução

Neste trabalho vamos considerar a seguinte classe de problemas elípticos

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x)H(u-a)u^q + u^{2^*-1} \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $\lambda, a > 0$, $a \in \mathbb{R}$ são parâmetros, h é uma função não negativa e integrável em \mathbb{R}^N , H é a função Heaviside, isto é,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

$2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente de Sobolev com $N \geq 3$ e $0 \leq q < 2^* - 1$ e Δ é o **operador Laplaciano**

dado por $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

O espaço que vamos trabalhar será o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, o qual é definido por

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$$

que é o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ em relação a norma

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

O espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Essa classe de problemas, denominado problemas com não linearidade descontínua vem, ao longo dos últimos anos, sendo estudado por vários autores e várias técnicas foram aplicadas

para estudar os mesmos, tais como: técnicas variacionais para funcionais não diferenciáveis, sub e super solução, bifurcação global etc.

Particularmente, o problema (P) apresenta algumas combinações que, ao menos para o nosso conhecimento, parece ser relevantes. De fato, no problema (P) temos a presença do operador laplaciano que aparece em várias áreas da ciência como Astronomia, Glaciologia e Engenharia do Ambiente. Além disso, problemas envolvendo não linearidade descontínua aparecem em alguns ramos relacionados a física-matemática como por exemplo: são modelos para a condutividade do calor em meios elétricos, modelos de soluções estacionárias para fenômenos químicos e biológicos e é bem conhecido que problemas com não linearidade descontínua aparecem em situações relevantes da Física do Plasma. Ver em [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] e suas referências.

O estudo do problema (P), foi baseado no artigo de Alves, Bertone e Gonçalves [2], onde os autores usaram técnicas variacionais para funcionais não diferenciáveis afim de estudar sobre existência, multiplicidade e regularidade de soluções.

As soluções do problema (P) serão obtidas através do estudo do funcional energia $I_{\lambda,a} : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, associado a ele, o qual é dado por

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx$$

onde $F(u) = \int_0^u f(t)dt$, $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$ é uma função não decrescente e $u^+ = \max\{0, u\}$.

Observamos que esse funcional não é diferenciável, pois a parcela $\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx$ não é diferenciável, uma vez que o problema (P) envolve a função Heaviside, o qual é descontínua.

Dessa forma, foi desenvolvida por Chang [14] a teoria dos pontos críticos para funcionais não diferenciáveis, mais especificamente Chang desenvolveu a teoria dos pontos críticos para funcionais localmente lipschitzianos e essa teoria foi baseada na Análise Convexa e no Cálculo Subdiferencial devido a Clarke [15].

Para uma melhor compreensão, esta dissertação está assim desenvolvida:

No capítulo 1 apresentamos alguns resultados da teoria dos pontos críticos para funcionais localmente lipschitzianos devido a Chang [14], onde seguindo a dissertação de [23] e a tese de [10] abordaremos algumas definições, observações e propriedades importantes, que serão úteis para a demonstração dos teoremas e lemas apresentados em capítulos posteriores.

No capítulo 2 iniciaremos apresentando algumas preliminares onde enunciaremos e demonstraremos lemas que serão muito úteis na demonstração do resultado principal.

Os principais resultados deste capítulo são:

Lema 2.1 *Seja h satisfazendo a hipótese (H). Então $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ para cada $\lambda, a > 0$. Além disso, $I_{\lambda,a}$ satisfaz a geometria do passo da montanha nas seguintes condições:*

ii) $0 \leq q \leq 1, a > 0$ e $\lambda \in (0, \lambda_0)$ para algum $\lambda_0 > 0$

ii) $1 < q < 2^* - 1, a > 0$ e $\lambda > 0$.

Lema 2.2 *Seja h satisfazendo a hipótese (H), $0 \leq q < 2^* - 1$. Se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $w \in \partial\Phi(u)$ então*

$$w(x) \in [h(x)\underline{f}(u), h(x)\bar{f}(u)] \quad q.t.p \text{ em } \mathbb{R}$$

onde $\bar{f}(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(t + \delta)$, $\underline{f}(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(t - \delta)$ e $f(t) = H(t - a)(t^+)^q$.

Lema 2.3 *Seja h satisfazendo a hipótese (H) e $0 \leq q \leq 2^* - 1$. Então $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ desde que satisfaça as condições abaixo :*

i) $0 \leq q \leq 1$ e $0 < c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$

ii) $1 < q < 2^* - 1$ e $0 < c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

Lema 2.4 *Seja h satisfazendo (H) e $0 \leq q < 2^* - 1$. Se, além disso, $\rho > 0$ é a constante da geometria do passo da montanha dado pelo Teorema 1.1 e no Lema 2.1, então o nível c do Passo da Montanha satisfaz:*

i) $\rho \leq c < \frac{1}{N}S^{\frac{1}{N}} + M_\lambda$ para $0 \leq q \leq 1, \lambda \in (0, \lambda_1)$ e $a \in (0, a_{*1})$ para algum $\lambda_1 > 0$ e $a_{*1} > 0$

ii) $\rho \leq c < \frac{1}{N}S^{\frac{1}{N}}$ para $1 < q < 2^* - 1, \lambda, a > 0$.

No capítulo 3 mostraremos a existência de três soluções para o problema (P) usando o Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente lipschitzianos (uma versão devido a Chang) e o Princípio Variacional de Ekeland.

O resultado principal deste capítulo e da dissertação é dado pelo seguinte resultado:

Teorema 3.3 *Seja h satisfazendo (H) e assumamos $0 \leq q < 2^* - 1$, $\lambda, a > 0$. Então,*

i) Se $0 \leq q \leq 1$ existem $\lambda_ > 0$ e $a_* > 0$, tal que para $\lambda \in (0, \lambda_*)$ e $a \in (0, a_*)$ existe uma função positiva $u_i = u_i(\lambda, a) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W_{loc}^{2,2^*}(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, 2$ satisfazendo*

$$(i)_1 \quad -\Delta u_i = \lambda h(x)H(u_i - a)u_i^q + u_i^{2^*-1} \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N$$

$$(i)_2 \quad \text{med}(\{u_i > a\}) > 0$$

$$(i)_3 \quad I_{\lambda,a}(u_2) < 0 < I_{\lambda,a}(u_1)$$

ii) Se $1 < q < 2^ - 1$, então existe uma função positiva $u_0 = u_0(\lambda, a) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W_{loc}^{2,2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$(ii)_1 \quad -\Delta u_0 = \lambda h(x)H(u_0 - a)u_0^q + u_0^{2^*-1} \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N$$

$$(ii)_2 \quad \text{med}(\{u_0 > a\}) > 0$$

$$(ii)_3 \quad I_{\lambda,a}(u_0) > 0.$$

Para completar este estudo colocamos nos apêndices alguns resultados e demonstrações que serão usados no corpo desta dissertação.

No apêndice A colocamos alguns resultados que envolvem a teoria de análise funcional, medida e integração e sobre espaços de Sobolev utilizados em nosso estudo. No apêndice B enunciaremos alguns resultados básicos que estão sendo usados na dissertação.

Para uma maior clareza deste trabalho repetiremos o problema e os enunciados dos principais resultados nos seus respectivos capítulos.

Notações:

- $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^N)}$
- $|\cdot|_{2^*} = |\cdot|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}$
- $|\cdot|_* = |\cdot|_{(D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*}$
- $|\cdot|_\alpha = |\cdot|_{L^\alpha(\mathbb{R}^N)}$
- $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$: denota o espaço dos funcionais localmente lipschitzianos
- $med(A)$: é a medida de Lebesgue do conjunto A
- \rightharpoonup : convergência fraca.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: par de dualidade.
- $u = u(x)$.
- $v = v(x)$.
- $(u > a)$: o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N; u(x) > a\}$

Resultados Abstratos

Neste capítulo apresentaremos algumas propriedades envolvendo funcionais localmente lipschitziano e Gradiente Generalizado da teoria dos pontos críticos desenvolvida por Clarke [15] e Chang [14], colocaremos algumas definições e propriedades importantes que serão muito úteis no desenvolvimento desta dissertação.

Definição 1.1 *Seja X um espaço de Banach e $I : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que I é um funcional localmente lipschitziano ($I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$) se dado $u \in X$, existir uma vizinhança $V = V_u \subset X$ de u e uma constante $k = k_V > 0$ tal que*

$$\|I(v_2) - I(v_1)\| \leq k\|v_2 - v_1\|, \quad v_i \in V, i = 1, 2. \quad (1.1)$$

Definição 1.2 *A Derivada Direcional Generalizada de um funcional $I : X \rightarrow \mathbb{R}$, em um ponto $u \in X$ na direção de $v \in X$, denotado por $I^0(u; v)$ é definida por*

$$I^0(u; v) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{I(u + h + \lambda v) - I(u + h)}{\lambda}, \quad v \in X.$$

Definição 1.3 *O Gradiente Generalizado de $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ no ponto $u \in X$ é o conjunto $\partial I(u) \subset X^*$, onde X^* é o dual topológico de X , definido por*

$$\partial I(u) = \{\mu \in X^*; I^0(u; v) \geq \langle \mu, v \rangle_{X^* \times X}, \quad \forall v \in X\}$$

onde \langle, \rangle é o par de dualidade entre X^* e X .

Desde que $I^0(u; 0) = 0$, segue-se que $\partial I(u) = \partial I^0(u; 0)$.

Uma propriedade importante do gradiente generalizado é a seguinte: Se $u \in X$ então $\partial I(u)$ é um conjunto convexo, não vazio e fraco*-compacto.

Definimos

$$m(u) = \min\{|w|_*; w \in \partial I(u)\}.$$

Em particular, como $\partial I(u)$ é o conjunto convexo, não vazio e fraco*-compacto existe $w \in \partial I(u) \subset X^*$ tal que

$$m(u) = \min\{|w|_*; w \in \partial I(u)\}.$$

Note que $\partial I(u) = \{I'(u)\}$ quando $I \in C^1(X; \mathbb{R})$.

Definição 1.4 *Uma sequência $(u_n) \subset X$ é uma sequência Palais-Smale no nível c $((PS)_c)$ se*

onde $m(u_n) = \min\{|\omega_n|_*; \omega \in \partial I(u_n)\} \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.5 *Um funcional $I \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição $(PS)_c$, se toda sequência $(PS)_c$ possui uma subsequência fortemente convergente.*

A seguir iremos mostrar algumas propriedades da Derivada Direcional Generalizada, as quais podem também ser encontradas em [23]

- (A_1) $I^0(u; \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ é subaditiva e homogênea positiva, isto é, para todo $u \in X$ temos
 - (a) $I^0(u; v_1 + v_2) \leq I^0(u; v_1) + I^0(u; v_2), \forall v_1, v_2 \in X$
 - (b) $I^0(u; kv) = kI^0(u; v), \forall v \in X, k \geq 0$
- (A_2) $|I^0(u; v)| \leq k\|v\|$, onde k satisfaz (1.1) e depende do conjunto aberto $V = V_u$, para cada $u \in X$.
- (A_3) $|I^0(u; v) + I^0(u; t)| \leq k\|v - t\|$, para todo $v, t \in X$, isto é, $I^0(u; \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$, com constante k .
- (A_4) $|I^0(u; v)| \leq k\|v\|$, onde k satisfaz (1.1) e depende do conjunto aberto V_u , para cada $u \in X$.

Demonstração: Vamos mostrar a propriedade (A_3) . As A_1, A_2 e A_4 estão demonstradas em [23]:

Observe que de (A_1)

$$I^0(u; v) = I^0(u; v - t + t) \leq I^0(u; v - t) + I^0(u; t)$$

e

$$I^0(u; t) = I^0(u; t - v + v) \leq I^0(u; t - v) + I^0(u; v).$$

Assim,

$$I^0(u; v) - I^0(u; t) \leq I^0(u; v - t) \leq |I^0(u; v - t)|$$

e por (A_2)

$$I^0(u; v) - I^0(u; t) \leq k\|v - t\|. \tag{1.2}$$

Por outro lado,

$$I^0(u; v) - I^0(u; t) \leq I^0(u; t - v) \leq |I^0(u; t - v)|$$

donde segue de (A_2)

$$I^0(u; t) - I^0(u; v) \leq k\|t - v\| = \|v - t\|. \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3)

$$|I^0(u; v) - I^0(u; t)| \leq k\|v - t\|.$$

Lema 1.1 *Dados $u, v \in X$, tem-se $I^0(u; v) = \max\{\langle \mu, v \rangle; \mu \in \partial I(u)\}$.*

Demonstração: De fato, dados $u, v \in X$, defina o seguinte funcional:

$$\begin{aligned}\gamma_u : \langle v \rangle &\rightarrow \mathbb{R} \\ w = tv &\mapsto \langle \gamma_u, w \rangle = tI^0(u; v).\end{aligned}$$

Afirmamos que γ_u é um funcional linear, pois dado $w_1, w_2 \in \langle v \rangle$, com $w_1 = t_1v$ e $w_2 = t_2v$ e $c \in \mathbb{R}$, temos $w_1 + cw_2 = (t_1 + ct_2)v$, ou seja,

$$\langle \gamma_u, (w_1 + cw_2) \rangle = (t_1 + ct_2)I^0(u; v),$$

isto é,

$$\langle \gamma_u, (w_1 + cw_2) \rangle = t_1I^0(u; v) + ct_2I^0(u; v) = \langle \gamma_u, w_1 \rangle + c \langle \gamma_u, w_2 \rangle.$$

Por um raciocínio análogo usado no Lema A.3 (apêndice A) mostra-se que

$$\langle \gamma_u, w \rangle \leq I^0(u; w), \quad \forall w \in \langle v \rangle.$$

Donde segue-se, pelo Teorema de Hahn-Banach (apêndice A) e de (A_1) , que existe um funcional linear γ_u^* definido em X tal que

$$\langle \gamma_u^*, w \rangle \leq I^0(u; w), \quad \forall w \in X \tag{1.4}$$

e

$$\langle \gamma_u^*, w \rangle = tI^0(u; v), \quad \forall tv \in \langle v \rangle,$$

assim

$$\langle \gamma_u^*, v \rangle = I^0(u; v). \tag{1.5}$$

De (1.5) e (1.4)

$$\langle \gamma_u^*, w \rangle \leq k|w|, \quad \forall w \in X,$$

mostrando que γ_u^* é um funcional linear contínuo, isto é, $\gamma_u^* \in X^*$. Sendo assim, segue de (1.4), que $\gamma_u^* \in \partial I(u)$. De (1.5)

$$\langle \gamma_u^*, v \rangle \leq \langle \gamma, v \rangle, \quad \forall \gamma \in \partial I(u).$$

Logo, $\langle \gamma_u^*, v \rangle$ é uma cota superior do conjunto $\{\langle \gamma, v \rangle; \gamma \in \partial I(u)\}$ e $\langle \gamma_u^*, v \rangle \in \{\langle \gamma, v \rangle; \gamma \in \partial I(u)\}$, pois $\gamma_u^* \in X^*$ e satisfaz a desigualdade (1.4).

Sendo assim, podemos concluir que

$$I^0(u; v) = \langle \gamma_u^*, v \rangle = \max\{\langle \gamma, v \rangle; \gamma \in \partial I(u)\}, \quad \forall v \in X,$$

demonstrando o Lema. ■

Lema 1.2 *Para cada $u \in X$, existe $\xi_0 \in \partial I(X)$ tal que*

$$|\xi_0|_* = \min\{|\xi|^*; \xi \in \partial I(u)\}.$$

Demonstração: Para mostrar este lema, basta mostrar que o ínfimo do conjunto

$$A = \{|\xi|^*; \xi \in \partial I(u)\} \subset \mathbb{R}$$

é atingido. Primeiramente, observe que o conjunto A é limitado inferiormente, pois

$$|\xi|^* \geq 0, \quad \forall \xi \in \partial I(u).$$

Definamos

$$c_I(u) = \inf\{|\xi|^*; \xi \in \partial I(u)\}.$$

Logo, $c_I(u)$ é ponto aderente do conjunto A , e assim existe uma sequência $(\xi_n) \subset \partial I(u)$ tal que

$$|\xi_n|^* \rightarrow c_I(u). \tag{1.6}$$

Note que $(\xi_n) \subset \partial I(u) \subset \overline{B_{k(u)}(0)} \subset X$, onde $\overline{B_{k(u)}(0)}$ compacto na topologia *fraca**. Segue, pelo fato de $(\xi_n) \subset \overline{B_{k(u)}(0)}$, que existe uma subseqüência (ξ_{n_j}) de (ξ_n) e $\xi_0 \in X^*$ tal que

$$\xi_{n_j} \xrightarrow{*} c_I(u). \quad (1.7)$$

Sendo $\partial I(u)$ fechado *fraca**, concluímos que $\xi_0 \in \partial I(u)$. Defina agora a seguinte função

$$\begin{aligned} \varphi : X^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \varphi(\xi) = |\xi|_* . \end{aligned}$$

De (1.7)

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\xi_n) \geq \varphi(\xi), \quad (1.8)$$

para toda seqüência $(\xi_n) \subset X^*$ tal que

$$\xi_n \xrightarrow{*} \xi \text{ em } X^* .$$

De (1.6), (1.7) em (1.8), temos

$$c_I(u) = \liminf_{n_j \rightarrow +\infty} |\xi_{n_j}|_* \geq |\xi_0|_* .$$

Donde segue-se, pelo fato de $c_I(u) = \inf A$, que

$$c_I(u) = |\xi_0|_* ,$$

pois $\xi_0 \in \partial I(u)$, mostrando que o ínfimo do conjunto A é atingido. ■

Como foi dito na introdução, na demonstração do resultado principal desta dissertação usaremos uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente lipschitziano, o qual foi demonstrado por Chang [14], usando uma variante apropriada do Lema de Deformação, tal resultado pode ser encontrado também em [18].

A seguir enunciaremos tal resultado:

Teorema 1.1 (*Teorema do Passo da Montanha*) (ver [2]) Seja X um espaço de Banach e $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional $Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e suponhamos que

(i) Existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que $I(u) \geq \rho$ se $\|u\| = \alpha$.

(ii) Existe $e \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $\|e\| > \alpha$ tal que $I(e) \leq 0$.

Seja

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], X); \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$.

Então, $c \geq \rho$ e existe alguma sequência $(u_n) \in X$ tal que

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ e } m(u_n) \rightarrow 0.$$

Sobre um problema elíptico com não linearidade descontínua

Neste capítulo, enunciaremos e demonstraremos alguns lemas, nos quais usaremos técnicas variacionais associadas a funcionais localmente lipschitzianos, afim de obter existência, multiplicidade e regularidade de soluções para o seguinte problema:

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x)H(u-a)u^q + u^{2^*-1} \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $\lambda, a > 0$ são parâmetros reais, $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função não negativa e integrável em \mathbb{R}^N , satisfazendo a seguinte condição

$$h \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{onde } \alpha = \frac{2^*}{2^* - (q+1)}, \quad (H)$$

H é a função Heaviside, a qual recordamos que é dada por

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

e $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev para $N \geq 3$ e $0 \leq q < 2^* - 1$.

Para obtermos existência, multiplicidade e regularidade de soluções para o problema (P), vamos fazer a distinção de dois casos para o expoente q , a saber: $0 \leq q \leq 1$ e $1 < q < 2^* - 1$.

Como foi dito na introdução, vamos trabalhar com o espaço de Hilbert

$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); |\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ e o funcional energia $I_{\lambda,a} : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, associado ao problema (P), o qual é definido por

$$I_{\lambda,a}(u) = Q(u) - \lambda\Phi(u) - \Psi(u), \quad (2.1)$$

onde Q, Φ e Ψ são funcionais dados por

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx \quad e \quad \Psi(u) = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx,$$

e $F(u) = \int_0^u f(t)dt$, com $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$ sendo função não decrescente e $u^+ \equiv \max\{u, 0\}$.

Desde que estamos trabalhando com o espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ recordemos que a única imersão que temos é a seguinte imersão contínua

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$$

e a melhor constante desta imersão é denotada por S e definida por

$$S = \inf \left\{ \frac{\int |\nabla u|^2 dx}{|u|_{2^*}^2}; u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), u \neq 0 \right\}.$$

Para $0 \leq q \leq 1$, vamos considerar $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$g(t) = \frac{S}{N}t^2 + \lambda \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1} \right) |h|_\alpha t^{q+1}.$$

Fazendo $M_\lambda = \min_{t \in [0, \infty)} g(t)$ notemos que

$$M_\lambda = \begin{cases} -\widehat{M}\lambda^{\frac{2}{1-q}} & \text{se } 0 \leq q < 1 \\ 0 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

onde \widehat{M} é uma constante positiva dependente de $q, |h|_\alpha$ e N , $M_\lambda \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$.

2.1 Lema 2.1

Nesta seção vamos mostrar que o funcional $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e satisfaz a geometria do passo do montanha para funcionais $Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Lema 2.1 *Seja h satisfazendo a hipótese (H). Então $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ para cada $\lambda, a > 0$. Além disso, $I_{\lambda,a}$ satisfaz a geometria do passo da montanha nas seguintes condições:*

(i) $0 \leq q \leq 1$, $a > 0$ e $\lambda \in (0, \lambda_0)$ para algum $\lambda_0 > 0$

(ii) $1 < q < 2^* - 1$, $a > 0$ e $\lambda > 0$.

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ para cada $\lambda, a > 0$. De fato, recordemos que

$$I_{\lambda,a}(u) = Q(u) - \lambda\Phi(u) - \Psi(u)$$

onde

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx \quad e \quad \Psi(u) = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx.$$

Consideremos $V = V_{\bar{u}} \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma vizinhança de $\bar{u} \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Assim, para todo $u, v \in V$ temos

$$\begin{aligned} |\Phi(u) - \Phi(v)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(v)dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left(\int_0^u f(t)dt \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left(\int_0^v f(t)dt \right) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left(\int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt \right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left(\int_0^v H(t-a)(t^+)^q dt \right) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left(\int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt - \int_0^v H(t-a)(t^+)^q dt \right) dx \right|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
|\Phi(u) - \Phi(v)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left(- \left(\int_u^0 H(t-a)(t^+)^q dt + \int_0^v H(t-a)(t^+)^q dt \right) \right) dx \right| \\
&= \left| - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left(\int_u^v H(t-a)(t^+)^q dt \right) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left| \int_u^v H(t-a)(t^+)^q dt \right| dx.
\end{aligned}$$

Sendo $H(t-a) \leq 1$ obtemos,

$$\begin{aligned}
|\Phi(u) - \Phi(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_u^v |(t^+)^q| dt dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \frac{|t|^{q+1}}{q+1} \Big|_u^v dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \frac{|v|^{q+1} - |u|^{q+1}}{q+1} dx. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Considere $f : [u(x), v(x)] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em $(u(x), v(x))$ então pelo Teorema do Valor Médio (apêndice (B)) existe $\xi \in (u(x), v(x))$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(v(x)) - f(u(x))}{v(x) - u(x)}. \tag{2.3}$$

Tomando $f(t) = |t|^{q+1}$, de (2.3) temos que

$$(q+1) \cdot |\xi|^q = \frac{|v(x)|^{q+1} - |u(x)|^{q+1}}{v(x) - u(x)}.$$

Assim,

$$(v(x) - u(x)) \cdot |\xi|^q = \frac{|v(x)|^{q+1} - |u(x)|^{q+1}}{q+1}.$$

Substituindo em (2.2) teremos

$$\begin{aligned} |\Phi(u) - \Phi(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(v(x) - u(x)) \cdot |\xi|^q dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|v(x) - u(x)| |\xi|^q dx. \end{aligned}$$

Tomando $\xi(x)^q \leq \max\{|u(x)|^q - |v(x)|^q\} = |w(x)|^q$ obtemos,

$$|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|w(x)|^q |v(x) - u(x)| dx.$$

Desde que $h \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, $w \in L^{\frac{2^*}{q}}(\mathbb{R}^N)$ e $(v - u) \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ com $\alpha \leq \frac{2^*}{q} \leq 2^*$ e $\frac{1}{\alpha} = \frac{q}{2^*} = \frac{1}{2^*} = 1$, e $h \cdot w \cdot (v - u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pela desigualdade de Hölder (apêndice A) temos que

$$\begin{aligned} |\Phi(u) - \Phi(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|w(x)|^q |v(x) - u(x)| dx \\ &\leq |h|_\alpha |w|_{2^*}^q |v - u|_{2^*}. \end{aligned}$$

Usando a imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ para $N \geq 3$ segue-se,

$$|v - u|_{2^*} \leq k \|v - u\|.$$

Assim, existe uma vizinhança limitada, $V = V_{\bar{u}} \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ de \bar{u} tal que

$$|\Phi(u) - \Phi(v)| \leq k |h|_\alpha \sup_{w \in V} (|w(x)|_{2^*}^q) \|v - u\| \leq \bar{K} \|v - u\|,$$

onde $\bar{K} = k |h|_\alpha \sup_{w \in V} (|w(x)|_{2^*}^q)$.

Assim, $\Phi \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e desde que $Q, \Psi \in C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ (apêndice A) segue que $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ para cada $\lambda, a > 0$.

Mostraremos agora que $I_{\lambda,a}$ satisfaz a geometria do passo da montanha. De fato, temos que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt dx - \frac{1}{2^*} |u|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como $H \leq 1$, temos

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt dx \leq \frac{\lambda}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) |u|^{q+1} dx.$$

Desde que $u^{q+1} \in L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq \alpha \leq \frac{2^*}{q+1} < \infty$ então, $h \cdot u^{q+1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, logo usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\frac{\lambda}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) |u|^{q+1} dx \leq \frac{\lambda}{q+1} |h|_\alpha |u|_{2^*}^{q+1}.$$

Assim,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt dx \leq \frac{\lambda}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) |u|^{q+1} dx \leq \frac{\lambda}{q+1} |h|_\alpha |u|_{2^*}^{q+1}. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.5) em (2.4) segue-se que

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} |h|_\alpha |u|_{2^*}^{q+1} - \frac{1}{2^*} |u|_{2^*}^{2^*}. \quad (2.6)$$

Agora, desde que S é a melhor constante de Sobolev na imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$S \leq \frac{\|u\|^2}{|u|_{2^*}^2}$$

assim,

$$|u|_{2^*} \leq S^{-\frac{1}{2}} \|u\|$$

daí,

$$|u|_{2^*}^{q+1} \leq S^{-\frac{q+1}{2}} \|u\|^{q+1} \quad (2.7)$$

e

$$|u|_{2^*}^{2^*} \leq S^{-\frac{(2^*)}{2}} \|u\|^{2^*}. \quad (2.8)$$

De (2.7) e (2.8) em (2.6) resulta que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}|h|_{\alpha} S^{-\frac{(q+1)}{2}} \|u\|^{q+1} - \frac{1}{2^*} S^{-\frac{(2^*)}{2}} \|u\|^{2^*} \\
&= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}|h|_{\alpha} S^{-\frac{(q+1)}{2}} \|u\|^{q-1} \|u\|^2 - \frac{1}{2^*} S^{-\frac{(2^*)}{2}} \|u\|^{2^*-2} \|u\|^2 \\
&\geq \|u\|^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{q+1}|h|_{\alpha} S^{-\frac{(q+1)}{2}} \|u\|^{q-1} - \frac{1}{2^*} S^{-\frac{(2^*)}{2}} \|u\|^{2^*-2} \right).
\end{aligned}$$

Fazendo

$$\delta = \frac{S^{-\frac{(q+1)}{2}}}{q+1} |h|_{\alpha} \quad e \quad \beta = \frac{S^{-\frac{(2^*)}{2}}}{2^*}.$$

temos

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \|u\|^2 \left(\frac{1}{2} - \lambda\delta \|u\|^{q-1} - \beta \|u\|^{2^*-2} \right).$$

Agora vamos fazer a distinção entre os dois casos abaixo:

Caso (i) $0 \leq q \leq 1$ e $\lambda \in (0, \lambda_0)$ para algum $\lambda_0 > 0$.

Considere $p(s) = \frac{1}{2} - \beta s^{2^*-2}$ e observe que $p(s) > \frac{1}{4}$ se $s \leq r \leq \left(\frac{1}{4\beta}\right)^{\frac{N-2}{4}}$. De fato, note que

$$\frac{1}{2} - \beta s^{2^*-2} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow -s^{2^*-2} > \frac{\beta}{4} - \frac{\beta}{2} = \frac{-1}{4\beta} \Leftrightarrow s^{2^*-2} < \frac{1}{4\beta} \Leftrightarrow s < \left(\frac{1}{4\beta}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Desde que $2^* = \frac{2N}{N-2}$ obtemos

$$s < \left(\frac{1}{4\beta}\right)^{\frac{N-2}{4}}.$$

Assim,

$$p(s) - \lambda\delta s^{q-1} > \frac{1}{8} \text{ se } \lambda \leq \lambda_0 = \frac{1}{8\delta r^{q-1}}.$$

Observe que

$$p(s) - \lambda\delta s^{q-1} > \frac{1}{4} - \lambda\delta \left(\left(\frac{1}{4\beta}\right)^{\frac{N-2}{4}} \right)^{q-1} = \frac{1}{4} - \lambda\delta \left(\frac{1}{4\beta}\right)^{\frac{N-2}{4}(q-1)}$$

note que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} - \lambda \delta \left(\left(\frac{1}{4\beta} \right)^{\frac{(N-2)}{4}} \right)^{q-1} > \frac{1}{8} &\Leftrightarrow -\lambda \delta \left(\left(\frac{1}{4\beta} \right)^{\frac{(N-2)}{4}} \right)^{q-1} > -\frac{1}{8} \\
&\Leftrightarrow -\lambda \delta r^{q-1} > -\frac{1}{8} \\
&\Leftrightarrow -\lambda > -\frac{1}{8\delta r^{q-1}} \\
&\Leftrightarrow \lambda < \frac{1}{8\delta r^{q-1}} = \lambda_0.
\end{aligned}$$

Logo, $\|u\| = r$ temos

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u) &\geq r^2 \left(\frac{1}{2} - \lambda \delta r^{q-1} - \beta r^{2^*-2} \right) \\
&\geq r^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8\delta r^{q-1}} \delta r^{q-1} - \beta r^{2^*-2} \right) \\
&\geq r^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \beta r^{2^*-2} \right) \\
&\geq r^2 \left(p(s) - \frac{1}{8} \right) \\
&\geq r^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \\
&\geq \frac{r^2}{8}.
\end{aligned}$$

tomando $\rho = \frac{r^2}{8}$ temos que

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \rho \text{ quando } \|u\| = r$$

para $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Agora seja $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ fixado com $\varphi > 0$.

Considere $\gamma > 0$ e faça $u = \gamma\varphi$ em (2.4). Assim,

$$I_{\lambda,a}(\gamma\varphi) = \frac{\gamma^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^{\gamma\varphi} H(t-a)(t^+)^q dt dx - \frac{\gamma^{2^*}}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi^+)^{2^*} dx.$$

Desde que $H \geq 0$ ($-H \leq 0$) então

$$I_{\lambda,a}(\gamma\varphi) \leq \frac{\gamma^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 dx - \frac{\gamma^{2^*}}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi^+)^{2^*} dx$$

e como $1 < 2 < 2^*$ teremos

$$I_{\lambda,a}(\gamma\varphi) \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad \gamma \rightarrow +\infty.$$

Logo, existe $e = \gamma_0\varphi$ tal que

$$I_{\lambda,a}(e) < 0 \quad \text{com} \quad \|e\| > r.$$

Portanto, para $0 \leq q \leq 1$ existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o funcional $I_{\lambda,a}$ satisfaz a geometria do passo da montanha.

Caso(ii) $1 < q < 2^* - 1$, $a > 0$ e $\lambda > 0$.

Considere $p(s) = \lambda\delta s^{q-1} + \beta s^{2^*-2}$, segue que

$$p(s) \rightarrow 0$$

quando

$$s \rightarrow 0$$

assim, existe $r > 0$ tal que $p(r) < \frac{1}{4}$. Daí ,

$$\frac{1}{2} - p(r) > \frac{1}{4}$$

para $\|u\| = r$ assim,

$$\frac{1}{2} - p(\|u\|) > \frac{1}{4}.$$

Dessa maneira,

$$I_{\lambda,a}(u) \geq r^2 \left(\frac{1}{2} - \lambda\delta r^{q-1} - \beta r^{2^*-2} \right) = r^2 \left(\frac{1}{2} - p(r) \right) > \frac{r^2}{4}.$$

Assim,

$$I_{\lambda,a}(u) > \frac{r^2}{4},$$

fazendo $\rho = \frac{r^2}{4} > 0$ então,

$$I_{\lambda,a}(u) > \rho, \quad \forall \|u\| = r.$$

Agora seja, $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi > 0$ fixado e considere $\gamma > 0$. Fazendo $u = \gamma\varphi$ em (2.4), desde que $H \geq 0$ ($-H \leq 0$), segue-se que

$$I_{\lambda,a}(\gamma\varphi) \leq \frac{\gamma^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 dx - \frac{\gamma^{2^*}}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi^+)^{2^*} dx.$$

Como $2 < 2^* = \frac{2N}{N-2}$, para $N \geq 3$ temos

$$I_{\lambda,a}(\gamma\varphi) \longrightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad \gamma \longrightarrow +\infty.$$

Portanto existe $e = \gamma_0\varphi$ tal que

$$I_{\lambda,a}(e) \leq 0 \quad \text{com} \quad \|e\| > r \quad \text{para algum} \quad e \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \gamma_0 > 0.$$

Dessa forma $I_{\lambda,a}$ satisfaz a geometria do passo da montanha para $1 < q < 2^*$ e $a, \lambda > 0$. ■

2.2 Lema 2.2

Nesta seção iremos enunciar e demonstrar o seguinte lema técnico, o qual é de grande importância para as seções posteriores.

Lema 2.2 *Seja h satisfazendo a hipótese (H), $0 \leq q < 2^* - 1$. Se $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $w \in \partial\Phi(u)$ então*

$$w(x) \in [h(x)\underline{f}(u), h(x)\bar{f}(u)] \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N$$

onde $\bar{f}(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(t + \delta)$, $\underline{f}(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(t - \delta)$ e $f(t) = H(t - a)(t^+)^q$.

Demonstração: Seja $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mu_n \rightarrow 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $\delta_n \rightarrow 0^+$ tal que

$$\Phi^0(u, v) = \limsup_{\mu_n \rightarrow 0 \ \delta_n \downarrow 0^+} \frac{\Phi(u + \mu_n + \delta_n v) - \Phi(u + \mu_n)}{\delta_n} \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \quad (2.9)$$

ou seja,

$$\Phi^0(u, v) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(u + \mu_n + \delta_n v) - \Phi(u + \mu_n)}{\delta_n}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Por definição de Φ temos

$$\Phi(u + \mu_n + \delta_n v) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u + \mu_n + \delta_n v) dx \quad (2.10)$$

e

$$\Phi(u + \mu_n) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u + \mu_n) dx. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.10) e (2.11) em (2.9) obtemos

$$\Phi^0(u, v) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u + \mu_n + \delta_n v) dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u + \mu_n) dx}{\delta_n}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

logo,

$$\Phi^0(u, v) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} h(x) (F(u + \mu_n + \delta_n v) - F(u + \mu_n)) dx}{\delta_n}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Podemos escrever

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) (F(u + \mu_n + \delta_n v) - F(u + \mu_n)) dx$$

da seguinte maneira

$$\Phi^0(u, v) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\{v>0\}} h(x) G_n(v(x)) dx + \int_{\{v<0\}} h(x) G_n(v(x)) dx \right] \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \quad (2.12)$$

onde

$$G_n(v(x)) = \frac{1}{\delta_n} (F(u + \mu_n + \delta_n v) - F(u + \mu_n)).$$

Desde que $\mu_n \rightarrow 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, da imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos a menos de subsequência que

$$\mu_n \rightarrow 0 \text{ em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Além disso,

$$\mu_n(x) \rightarrow 0 \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Assim, para cada $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $v(x) > 0$ obtemos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta(x) \in (u(x) + \mu_n(x), u(x) + \mu_n(x) + \delta_n(x)v(x))$ tal que

$$F'(\theta(x)) = \frac{F(u(x) + \mu_n(x) + \delta_n v(x)) - F(u(x) + \mu_n(x))}{\delta_n v(x)}.$$

Logo,

$$f(\theta(x))v(x) = \frac{F(u(x) + \mu_n(x) + \delta_n(x)v(x)) - F(u(x) + \mu_n(x))}{\delta_n v(x)},$$

ou seja,

$$G_n(v(x)) = f(\theta(x))v(x).$$

Desde que

$$u(x) + \mu_n(x) < \theta(x) < u(x) + \mu_n(x) + \delta_n v(x)$$

passando ao limite de $n \rightarrow +\infty$ e como $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ segue-se que

$$\theta(x) = u(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$G_n(v(x)) = f(u(x))v(x)$$

e sendo f não decrescente, temos

$$G_n(v(x)) = f(u(x))v(x) \leq f(u(x) + \delta_n)v(x).$$

Então,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h(x)G_n(v(x)) \leq h(x)\bar{f}(u(x))v(x) \quad q.t.p \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} |h(x)G_n(v(x))| &= \left| \frac{h(x)}{\delta_n} [F(u(x) + \mu_n(x) + \delta_n v(x)) - F(u(x) + \mu_n(x))] \right| \\ &= \left| \frac{h(x)}{\delta_n} \int_0^{u(x) + \mu_n(x) + \delta_n v(x)} H(t - a)(t^+)^q dt - \frac{h(x)}{\delta_n} \int_0^{u(x) + \mu_n(x)} H(t - a)(t^+)^q dt \right| \\ &= \frac{h(x)}{\delta_n} \left| \int_{u(x) + \mu_n(x)}^{u(x) + \mu_n(x) + \delta_n v(x)} H(t - a)(t^+)^q dt \right|. \end{aligned}$$

Como $H \leq 1$ obtém-se

$$\begin{aligned} |h(x)G_n(v(x))| &\leq \frac{h(x)}{\delta_n} \int_{u(x) + \mu_n(x)}^{u(x) + \mu_n(x) + \delta_n v(x)} |t|^q dt \\ &\leq \frac{h(x)}{(q+1)} \left[\frac{|u(x) + \mu_n(x) + \delta_n v(x)|^{q+1} - |u(x) + \mu_n(x)|^{q+1}}{\delta_n} \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Seja $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = h(x)|u(x) + \mu_n(x) + t\delta_n v(x)|^{q+1}.$$

Como g é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$ então pelo Teorema do Valor Médio dado $0 < |\delta_n| < 1$, existe $\theta_n \in (0, 1)$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\theta_n)(1 - 0).$$

Observe que

$$(a) \quad g(1) = h(x)|u(x) + \mu_n(x) + \delta_n v(x)|^{q+1}$$

$$(b) \quad g(0) = h(x)|u(x) + \mu_n(x)|^{q+1}$$

$$(c) \quad g'(\theta_n) = (q+1)h(x)|u(x) + \mu_n(x) + \theta_n \delta_n v(x)|^q |\delta_n v(x)|.$$

Considerando por um momento a seguinte notação $\mu_n(x) = \mu_n$ e $u(x) = u$ e $v(x) = v$ então,

$$\frac{h(x) \left(|u + \mu_n + \delta_n v|^{q+1} - |u + \mu_n|^{q+1} \right)}{(q+1) \cdot |\delta_n|} = h(x) |u + \mu_n + \theta_n \delta_n v|^q |v|. \quad (2.14)$$

Substituindo (2.14) em (2.13) obtemos

$$|h(x)G_n(v(x))| \leq h(x) |u(x) + \mu_n(x) + \theta_n \delta_n v(x)|^q |v(x)|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u(x) + \mu_n(x) + \theta_n \delta_n v(x)|^q &\leq (3 \max\{u(x), \mu_n(x), \theta_n \delta_n v(x)\})^q \\ &\leq 3^q \max\{u(x)^q, \mu_n(x)^q, (\theta_n \delta_n v(x))^q\} \\ &\leq 3^q u(x)^q + 3^q \mu_n(x)^q + 3^q (\theta_n \delta_n v(x))^q \\ &\leq 3^q (|u(x)|^q + |\mu_n(x)|^q + |\theta_n \delta_n v(x)|^q) \\ &= 3^q (|u(x)|^q + |\mu_n(x)|^q + |\theta_n|^q |\delta_n|^q |v(x)|^q). \end{aligned}$$

Como $\theta_n \in (0, 1)$ e $0 < |\delta_n| < 1$ então $|\theta_n| |\delta_n| < 1$, implicando que $|\theta_n|^q |\delta_n|^q < 1$. Logo,

$$\begin{aligned} |h(x)G_n(v(x))| &\leq 3^q h(x) (|u(x)|^q + |\mu_n(x)|^q + |v(x)|^q) |v(x)| \\ &= 3^q h(x) (|u(x)|^q |v(x)| + |\mu_n(x)|^q |v(x)| + |v(x)|^{q+1}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$|h(x)G_n(v(x))| \leq C(h(x)|u(x)|^q |v(x)| + h(x)|\mu_n(x)|^q |v(x)| + h(x)|v(x)|^{q+1}).$$

Desde que $\mu_n \rightarrow 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, então a menos de subsequência $\mu_n \rightarrow 0$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, $\mu_n \rightarrow 0$ q.t.p. \mathbb{R}^N e existe $\tau \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que $|\mu_n(x)| \leq \tau(x)$ q.t.p em \mathbb{R}^N , assim,

$$|h(x)G_n(v(x))| \leq C(h(x)|u(x)|^q |v(x)| + h(x)|\tau(x)|^q |v(x)| + h(x)|v(x)|^{q+1}).$$

Como $h \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$, $|u|^q \in L^{\frac{2^*}{q}}(\mathbb{R}^N)$, $|v| \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $|\tau|^q \in L^{\frac{2^*}{q}}(\mathbb{R}^N)$ com $\frac{2^*-(q+1)}{2^*} + \frac{q}{2^*} + \frac{1}{2^*} = 1$. Pela desigualdade de Hölder

$$h \cdot |u|^q \cdot |v| \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ e } |v| \cdot h \cdot |\mu|^q \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, como $|v|^{q+1} \in L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$, $h \in L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{q+1}{2^*} + \frac{2^*-(q+1)}{2^*} = 1$ usando novamente a desigualdade de Hölder

$$|v|^{q+1} \cdot h \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Portanto,

$$h|u|^q|v| + h|\mu|^q|v| + h|v|^{q+1} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Desde que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} h(x)G_n(v(x)) \leq \bar{f}(u(x))v(x),$$

segue do Lema de Fatou (apêndice A)

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{v>0\}} h(x)G_n(v(x))dx &\leq \int_{\{v>0\}} \limsup_{n \rightarrow \infty} h(x)G_n(v(x))dx \\ &\leq \int_{\{v>0\}} \bar{f}(u(x))v(x)dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{v>0\}} h(x)G_n(v(x))dx \leq \int_{\{v>0\}} \bar{f}(u(x))v(x)dx. \quad (2.15)$$

Usando um raciocínio análogo feito anteriormente temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{v<0\}} h(x)G_n(v(x))dx \leq \int_{\{v<0\}} \underline{f}(u(x))v(x)dx. \quad (2.16)$$

Portanto de (2.15) e (2.16) segue de (2.12)

$$\Phi^0(u, v) \leq \int_{\{v>0\}} \bar{f}(u(x))v(x)dx + \int_{\{v<0\}} \underline{f}(u(x))v(x)dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Desde que $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^N)}$, para todo $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ existe $(v_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$v_n \rightarrow v \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Note que

$$\Phi^0(u, v_n) \rightarrow \Phi^0(u, v), \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

De fato, sabemos que $\Phi^0(u; \cdot) : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitziana com constante k . Daí,

$$|\Phi^0(u; v_n) - \Phi^0(u; v)| \leq k \|v_n - v\| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Assim, por densidade obtemos

$$\Phi^0(u, v) \leq \int_{\{v>0\}} h(x) \bar{f}(u(x)) v(x) dx + \int_{\{v<0\}} h(x) \underline{f}(u(x)) v(x) dx \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \quad (2.17)$$

Considere $\omega \in \partial I(u) \subset (L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N))^*$ e suponhamos, por contradição que existe $A \subset \mathbb{R}^N$ com $med(A) > 0$ tal que

$$\omega(x) < h(x) \underline{f}(u(x)) \text{ em } A.$$

Então,

$$\int_A \omega(x) dx < \int_A h(x) \underline{f}(u(x)) dx. \quad (2.18)$$

Assim, existe $B \subset A$ tal que $0 < med(B) < +\infty$ ou seja,

$$\int_B \omega(x) dx < \int_B h(x) \underline{f}(u(x)) dx.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \omega(x) (-\chi_B) dx = - \int_B \omega(x) dx \quad (2.19)$$

onde χ_B é a função característica de B e $-\chi_B \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Desde que $\omega \in (L^{2^*}(\mathbb{R}^N))^*$, pelo Teorema da Representação de Riesz (apêndice A) existe um único $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\langle \omega, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u.v dx, \quad \forall v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Em particular fazendo $v = -\chi_B$ e como $\omega \in \partial\Phi(u)$ então

$$\langle \omega, -\chi_B \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u.(-\chi_B) dx.$$

Por identificação obtemos

$$\langle \omega, -\chi_B \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \omega.(-\chi_B) dx \tag{2.20}$$

Da definição de $\partial\Phi(u)$ temos

$$\langle \omega, -\chi_B \rangle \leq \Phi^0(u, -\chi_B). \tag{2.21}$$

De (2.17),(2.19),(2.20) e (2.21) obtemos

$$\begin{aligned} - \int_B \omega(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \omega(x)(-\chi_B) dx \\ &= \langle \omega, -\chi_B \rangle \\ &\leq \Phi^0(u, -\chi_B) \\ &\leq \int_{\{-\chi_B < 0\}} h(x) \underline{f}(u(x))(-\chi_B) dx + \int_{\{-\chi_B > 0\}} h(x) \bar{f}(u(x))(-\chi_B) dx. \end{aligned}$$

Então,

$$- \int_B \omega(x) dx \leq \int_{\{-\chi_B < 0\}} h(x) \underline{f}(u(x))(-\chi_B) dx, \tag{2.22}$$

ou seja,

$$-\int_B \omega(x) dx \leq \int_{\{-\chi_B < 0\}} h(x) \underline{f}(u(x)) (-\chi_B) dx = -\int_{\{-\chi_B < 0\}} h(x) \underline{f}(u(x)) dx.$$

Logo,

$$-\int_B \omega(x) dx \leq -\int_B h(x) \underline{f}(u(x)) dx,$$

isto é,

$$-\int_B h(x) \underline{f}(u(x)) dx \leq \int_B \omega(x) dx.$$

O que é uma contradição. Logo,

$$\omega(x) \geq h(x) \underline{f}(u(x)) dx \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Usando um raciocínio análogo feito anteriormente temos

$$\omega(x) \leq h(x) \bar{f}(u(x)) dx \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Portanto $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $\omega \in \partial\Phi(u)$ de onde concluímos que

$$\omega(x) \in [h(x) \underline{f}(u), h(x) \bar{f}(u)] \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

■

2.3 Lema 2.3

Nesta seção demonstraremos que o funcional $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ sob certas condições e para tal usaremos os Lema 2.1 e 2.2.

Lema 2.3 *Seja h satisfazendo a hipótese (H) e $0 \leq q \leq 2^* - 1$. Então $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ desde que satisfaça as condições abaixo :*

$$(i) \ 0 \leq q \leq 1 \text{ e } 0 < c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$$

$$(ii) \ 1 < q < 2^* - 1 \text{ e } 0 < c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$$

onde $M_\lambda = \min_{t \in [0, \infty)} g(t)$, $g(t) = \frac{S}{N}t^2 - \lambda(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1})|h|_\alpha t^{q+1}$.

Demonstração: Seja $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$I_{\lambda,a}(u_n) \rightarrow c \quad , \quad m(u_n) \rightarrow 0.$$

Recorde que

$$I_{\lambda,a}(u) = Q(u) - \lambda\Phi(u) - \Psi(u),$$

onde

$$Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad \Phi(u) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx, \quad \Psi(u) = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx.$$

Observe que

$$Q'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx \quad e \quad \Psi'(u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1} \varphi dx.$$

Considere $(w_n) \subset \partial I_{\lambda,a}(u_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$ tal que $m(u_n) = |w_n|_*$, existe $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$ satisfazendo

$$w_n = Q'(u_n) - \lambda\rho_n - \Psi'(u_n), \tag{2.23}$$

o que implica

$$\langle w_n, \varphi \rangle = Q'(u_n)\varphi - \lambda \langle \rho_n, \varphi \rangle - \psi'(u_n)\varphi, \quad \forall \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Mostraremos agora que (u_n) é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Em primeiro lugar, de (2.17) temos

$$\Phi^0(u_n, \varphi) \leq \int_{\{\varphi < 0\}} h(x) \underline{f}(u_n(x)) \varphi(x) dx + \int_{\{\varphi > 0\}} h(x) \overline{f}(u_n(x)) \varphi(x) dx,$$

para todo $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Daí, como $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$, por definição de $\partial\Phi(u_n)$ temos

$$\langle \rho_n, \varphi \rangle \leq \Phi^0(u_n; \varphi) \leq \int_{\{\varphi < 0\}} h(x) \underline{f}(u_n(x)) \varphi(x) dx + \int_{\{\varphi > 0\}} h(x) \overline{f}(u_n(x)) \varphi(x) dx$$

Vamos considerar que $\varphi \leq 0$ então,

$$\int_{\{\varphi > 0\}} h(x) \overline{f}(u_n(x)) \varphi(x) dx = 0$$

Logo,

$$\langle \rho_n, \varphi \rangle \leq \Phi^0(u_n; \varphi) \leq \int_{\{\varphi < 0\}} h(x) \underline{f}(u_n(x)) \varphi(x) dx$$

e desde que

$$\underline{f}(u_n) \varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(u_n - \delta) \varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H(u_n - \delta - a) (u_n^+)^q \cdot \varphi = H(u_n - a) (u_n^+)^q,$$

e $H \leq 1$ temos

$$\underline{f}(u_n) \varphi \leq (u_n^+)^q \varphi,$$

desde que, $(u_n^+)^q \geq 0$ e $\varphi \leq 0$. Então,

$$\underline{f}(u_n) \varphi \leq (u_n^+)^q \varphi \leq 0$$

Logo,

$$\langle \rho_n, \varphi \rangle \leq \Phi^0(u_n, \varphi) \leq \int_{\{\varphi < 0\}} h(x) \underline{f}(u_n) \varphi dx \leq 0.$$

Portanto,

$$\langle \rho_n, \varphi \rangle \leq \Phi^0(u_n, \varphi) \leq 0 \quad \text{para } \varphi \leq 0.$$

De (2.23) temos

$$\begin{aligned} \langle w_n, u_n^- \rangle &= Q'(u_n).u_n^- - \langle \lambda \rho_n, u_n^- \rangle - \Psi'(u_n).u_n^- \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla u_n^- dx + \lambda \langle \rho_n, -u_n^- \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} u_n^- dx. \end{aligned}$$

Iremos fazer os cálculos das parcelas.

Pela ortogonalidade das seqüências de funções u_n^+ e u_n^- , a integral

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} u_n^- dx = 0.$$

Além disso, $u_n = u_n^+ - u_n^-$ assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla u_n^- dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla (u_n^+ - u_n^-) \cdot \nabla u_n^- dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^+ \cdot \nabla u_n^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n^- \cdot \nabla u_n^- dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n^-|^2 dx = -\|u_n^-\|^2. \end{aligned}$$

Observe que

$$\lambda \langle \rho_n, -u_n^- \rangle \leq \lambda \Phi^0(u_n, -u_n^-) \leq 0 \quad \text{para } -u_n^- \leq 0.$$

Logo,

$$\langle w_n, u_n^- \rangle \leq -\|u_n^-\|^2 + \lambda \Phi^0(u_n, -u_n^-) \leq -\|u_n^-\|^2.$$

Daí,

$$\langle w_n, u_n^- \rangle \leq -\|u_n^-\|^2.$$

Além disso,

$$\|u_n^-\|^2 \leq -\langle w_n, u_n^- \rangle = (-\langle w_n, u_n^- \rangle) \leq |\langle w_n, u_n^- \rangle| \leq |w_n|_* \|u_n^-\|.$$

Assim,

$$\|u_n^-\|^2 \leq |w_n|_* \|u_n^-\|.$$

Recorde que $|w_n|_* = m(u_n) \rightarrow 0$, então existe $C_2 > 0$ tal que $|w_n|_* \leq C_2$. Portanto, $\|u_n^-\| \leq C_2$.

Suponhamos por contradição que

$$\|u_n^-\| \rightarrow L > 0$$

e $0 < \epsilon < L$ tal que $|w_n|_* < \epsilon$ para n suficientemente grande. Desde que

$$\|u_n^-\|^2 \leq |w_n|_* \|u_n^-\|$$

então,

$$\|u_n^-\|^2 - |w_n|_* \|u_n^-\| \leq 0,$$

ou seja,

$$\|u_n^-\|^2 - \epsilon \|u_n^-\| \leq \|u_n^-\|^2 - |w_n|_* \|u_n^-\| \leq 0.$$

Agora passando ao limite de $n \rightarrow +\infty$ encontramos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n^-\|^2 - \epsilon \|u_n^-\|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^-\|^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon \|u_n^-\| = L^2 - L\epsilon \leq 0$$

Logo,

$$L \leq \epsilon.$$

O que é uma contradição.

Portanto,

$$\|u_n^-\| \rightarrow 0.$$

De (2.23) obtemos

$$w_n + \lambda\rho_n = Q'(u_n) - \Psi'(u_n).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle w_n + \lambda\rho_n, u_n \rangle &= Q'(u_n) \cdot u_n - \Psi'(u_n) \cdot u_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} u_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} u_n dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n + \lambda\rho_n, u_n \rangle &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n) dx \\ &\quad - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} u_n dx. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Recorde que $u_n = u_n^+ - u_n^-$. Logo,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n + \lambda\rho_n, u_n \rangle &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n) dx \\ &\quad - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} (u_n^+ - u_n^-) dx. \end{aligned}$$

Pela ortogonalidade das funções u_n^+, u_n^- a integral

$$\frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} u_n^- dx = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u_n) dx \\
&\quad - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx \\
&= \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u_n) dx.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{N-2}{2N} = \frac{1}{N} \quad e \quad \Phi(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u_n) dx.$$

Temos,

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \Phi(u_n).$$

Desde que (u_n) é uma sequência $(PS)_c$, existe $C_3 > 0$ tal que

$$|I_{\lambda,a}(u_n)| \leq C_3 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle &= I_{\lambda,a}(u_n) + \frac{1}{2^*} [-\langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle] \\
&\leq C_3 + \left| \frac{1}{2^*} [-\langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle] \right| \\
&\leq C_3 + \left| \frac{1}{2^*} \langle w_n, u_n \rangle \right| + \left| \frac{1}{2^*} \langle \lambda \rho_n, u_n \rangle \right| \\
&\leq C_3 + C_4 \|u_n\| + \frac{\lambda}{2^*} |\langle \rho_n, u_n \rangle|.
\end{aligned}$$

Como $(\rho_n) \subset \partial \Phi(u_n)$, conclui-se

$$\langle \rho_n, v \rangle \leq \Phi^0(u_n; v), \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Assim, da desigualdade (2.17) do Lema 2.2 como $(u_n) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e fazendo $v = u_n$ obtemos

$$\Phi^0(u_n; u_n) \leq \int_{\{u_n < 0\}} h(x) \underline{f}(u_n) u_n dx + \int_{\{u_n > 0\}} h(x) \overline{f}(u_n) u_n dx.$$

Lembrando que

$$h(x) \underline{f}(u_n) \leq h(x) \overline{f}(u_n) \leq h(x) (u_n^+)^q,$$

temos,

$$\Phi^0(u_n; u_n) \leq \int_{\{u_n < 0\}} h(x) (u_n^+)^q u_n dx + \int_{\{u_n > 0\}} h(x) (u_n^+)^q u_n dx.$$

Recorde que $v_n = u_n - u$, logo

$$\Phi^0(u_n; u_n) \leq \int_{\{u_n < 0\}} h(x) (u_n^+)^q (u_n^+ - u_n^-) dx + \int_{\{u_n > 0\}} h(x) (u_n^+)^q (u_n^+ - u_n^-) dx.$$

Como a primeira integral está definida para $\{u_n < 0\}$ então,

$$\int_{\{u_n < 0\}} h(x) (u_n^+)^q (u_n^+ - u_n^-) dx = 0.$$

Assim,

$$\Phi^0(u_n; u_n) \leq \int_{\{u_n > 0\}} h(x) (u_n^+)^{q+1} dx - \int_{\{u_n > 0\}} h(x) (u_n^+) u_n^- dx.$$

Consequentemente,

$$\Phi_0(u_n; u_n) \leq \int_{\{u_n > 0\}} h(x) (u_n^+)^{q+1} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x) |u_n|^{q+1} dx.$$

Portanto,

$$|\langle \rho_n, u_n \rangle| \leq |\Phi^0(u_n; u_n)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} h(x) |u_n|^{q+1} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |h(x)| |u_n|^{q+1} dx.$$

Como $h \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$, $(u_n^{q+1}) \subset L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{\alpha} + \frac{q+1}{2^*} = 1$ então da desigualdade de Hölder $(h \cdot u_n^{q+1}) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x) \cdot |u_n|^{q+1}| dx \leq |h|_\alpha |u_n|_{2^*}^{q+1}.$$

Assim, das imersões contínuas temos $|u_n|_{2^*}^{q+1} \leq S^{-\frac{q+1}{2}} \|u_n\|^{q+1}$. Logo,

$$|\langle \rho_n, u_n \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |h(x) \cdot |u_n|^{q+1}| \leq |h|_\alpha |u_n|_{2^*}^{q+1} \leq |h|_\alpha S^{-\frac{q+1}{2}} \|u_n\|^{q+1}$$

e daí,

$$\frac{\lambda}{2^*} |\langle \rho_n, u_n \rangle| \leq \frac{\lambda}{2^*} |h|_\alpha S^{-\frac{q+1}{2}} \|u_n\|^{q+1}.$$

Portanto,

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n + \rho_n, u_n \rangle \leq C_3 + C_4 \|u_n\| + \frac{\lambda}{2^*} S^{-\frac{q+1}{2}} |h|_\alpha \|u_n\|^{q+1},$$

onde

$$\frac{1}{N} \|u_n\|^2 - \lambda \Phi(u_n) = I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle.$$

Recordemos que no Lema 2.1,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^u H(t-a)(t^+)^q dt dx \leq \frac{\lambda}{q+1} S^{-\frac{q+1}{2}} |h|_\alpha \|u_n\|^{q+1}$$

Daí,

$$-\lambda \Phi(u_n) \geq -\frac{\lambda}{q+1} S^{-\frac{q+1}{2}} |h|_\alpha \|u_n\|^{q+1}.$$

Assim,

$$\frac{1}{N} \|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} S^{-\frac{q+1}{2}} |h|_\alpha \|u_n\|^{q+1} \leq \frac{1}{N} \|u_n\|^2 - \lambda \Phi(u_n) = I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n - \rho_n, u_n \rangle.$$

Daí,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}S^{-\frac{q+1}{2}}|h|_\alpha\|u_n\|^{q+1} \leq C_3 + C_4\|u_n\| + \frac{\lambda}{2^*}S^{-\frac{q+1}{2}}|h|_\alpha\|u_n\|^{q+1}.$$

Logo,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \left(\frac{\lambda S^{-\frac{q+1}{2}}}{q+1}|h|_\alpha + \frac{\lambda S^{-\frac{q+1}{2}}}{2^*}|h|_\alpha \right) \|u_n\|^{q+1} \leq C_3 + C_4\|u_n\|.$$

Fazendo

$$C_5 = \frac{\lambda S^{-\frac{q+1}{2}}}{q+1}|h|_\alpha + \frac{\lambda S^{-\frac{q+1}{2}}}{2^*}|h|_\alpha = \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{2^*} \right) \left(\lambda S^{-\frac{q+1}{2}}|h|_\alpha \right),$$

obtemos

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - C_5\|u_n\|^{q+1} \leq C_3 + C_4\|u_n\|. \quad (2.25)$$

Mostraremos agora que a sequência $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é limitada dividindo nos seguintes casos,

- **Caso** $0 \leq q < 1$

Suponhamos, por contradição, que a sequência $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ não seja limitada, assim existe uma subsequência que ainda denotaremos por (u_n) tal que

$$\|u_n\| \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Logo de (2.25) temos:

$$\frac{1}{N} \leq \frac{C_5}{\|u_n\|^{-(q+1)}\|u_n\|^2} + \frac{C_3}{\|u_n\|^2} + \frac{C_4}{\|u_n\|} = \frac{C_5}{\|u_n\|^{2-(q+1)}} + \frac{C_3}{\|u_n\|^2} + \frac{C_4}{\|u_n\|}.$$

Agora passando ao limite com $n \rightarrow \infty$ na desigualdade acima obtemos:

$$\frac{1}{N} \leq 0,$$

o que é uma contradição, logo (u_n) é uma sequência limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e portanto existe $C_6 > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq C_6, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

• **Caso $q = 1$**

Temos,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1}S^{-\frac{q+1}{2}}|h|_\alpha\|u_n\|^{q+1} \leq C_3 + C_4\|u_n\| + \frac{\lambda}{2^*}S^{-\frac{q+1}{2}}|h|_\alpha\|u_n\|^{q+1}.$$

Assim,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{2}S^{-1}|h|_\alpha\|u_n\|^2 \leq C_3 + C_4\|u_n\| + \frac{\lambda}{2^*}S^{-1}|h|_\alpha\|u_n\|^2,$$

isto é,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 - \left(\frac{\lambda}{2}S^{-1}|h|_\alpha + \frac{\lambda}{2^*}S^{-1}|h|_\alpha\right)\|u_n\|^2 \leq C_3 + C_4\|u_n\|.$$

Logo,

$$-\left(\frac{1}{N} - \frac{\lambda}{2}S^{-1}|h|_\alpha + \frac{\lambda}{2^*}S^{-1}|h|_\alpha\right)\|u_n\|^2 \leq C_3 + C_4\|u_n\|.$$

Temos

$$\frac{1}{N} - \frac{\lambda}{2}S^{-1}|h|_\alpha - \frac{\lambda}{2^*}S^{-1}|h|_\alpha = \frac{1}{N} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^*}\right)(\lambda S^{-1}|h|_\alpha) = \frac{1}{N} - \left(\frac{N-1}{N}\right)(\lambda S^{-1}|h|_\alpha).$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} - \left(\frac{N-1}{N}\right)(\lambda S^{-1}|h|_\alpha) > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{N} > \left(\frac{N-1}{N}\right)(\lambda S^{-1}|h|_\alpha) \\ &\Leftrightarrow \frac{N}{N(N-1)} > \lambda S^{-1}|h|_\alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{S}{(N-1)|h|_\alpha} > \lambda. \end{aligned}$$

Escolhendo $\lambda_2 = \frac{S}{2(N-1)|h|_\alpha}$ temos para cada $\lambda \in (0, \lambda_2)$, que

$$\left(\frac{1}{N} - \frac{\lambda}{2} S^{-1}|h|_\alpha + \frac{\lambda}{2^*} S^{-1}|h|_\alpha \right) > 0.$$

e portanto fazendo $C_5 = -\frac{1}{N} - \frac{\lambda}{2} S^{-1}|h|_\alpha - \frac{\lambda}{2^*} S^{-1}|h|_\alpha$ obtemos

$$C_5 \|u_n\|^2 \leq C_3 + C_4 \|u_n\|.$$

Vamos supor, por contradição que a sequência $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ não seja limitada, então a menos de subsequência

$$\|u_n\| \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty.$$

Assim

$$C_5 \leq \frac{C_3}{\|u_n\|^2} + \frac{C_4}{\|u_n\|}.$$

Passando ao limite de $n \rightarrow +\infty$ temos

$$C_5 \leq 0,$$

o que é um absurdo, pois $C_5 > 0$. Portanto, (u_n) é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

- **Caso** $1 < q < 2^* - 1$

Observe que

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q+1} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u_n) dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx \\ &\quad - \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q+1} \langle u_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u_n) dx \\
&+ \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Note que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u_n) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dt dx.$$

Além disso, desde que podemos escrever $\mathbb{R}^N = \{u_n > a\} \cup \{u_n \leq a\}$ temos

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u_n) dx &= \lambda \int_{\{u_n \leq a\}} h(x) \int_0^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dt dx \\
&+ \lambda \int_{\{u_n > a\}} h(x) \int_0^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dt dx.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_0^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dt = 0, \quad \forall t \leq a,$$

então,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u_n) dx = \lambda \int_{\{u_n > a\}} h(x) \left[\int_0^a H(t-a)(t^+)^q dt + \int_a^{u_n} H(t-a)(t^+)^q dt \right] dx$$

e pelo fato de $H(t-a) = 1 \quad \forall t > a$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u_n) dx &= \lambda \int_{\{u_n > a\}} h(x) \int_a^{u_n} (t^+)^q dt dx \\
&= \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x) ((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1}) dx. \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Veja que, desde que $1 < q < 2^* - 1 \Leftrightarrow 2 < q + 1 < 2^* \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{q + 1} > \frac{1}{2^*}$ temos,

$$\left(\frac{1}{q + 1} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx \geq \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx = 0. \quad (2.28)$$

Portanto, de (2.27) e (2.28) e de (2.26) obtemos

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q + 1} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle \geq \frac{q - 1}{2(q + 1)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \frac{\lambda}{q + 1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} - a^{q+1} dx. \quad (2.29)$$

Por outro lado,

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q + 1} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle = I_{\lambda,a}(u_n) + \frac{1}{q + 1} [-\langle w_n, u_n \rangle] - \frac{1}{q + 1} \langle \lambda \rho_n, u_n \rangle.$$

Sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ temos que $|I_{\lambda,a}(u_n)| \leq C_3$ e assim obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q + 1} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle &\leq C_3 + \frac{1}{q + 1} [-\langle w_n, u_n \rangle] - \frac{1}{q + 1} \langle \lambda \rho_n, u_n \rangle \\ &\leq C_3 + \frac{1}{q + 1} |\langle w_n, u_n \rangle| - \frac{1}{q + 1} \langle \lambda \rho_n, u_n \rangle. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q + 1} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle \leq C_3 + \frac{1}{q + 1} |w_n|_* \|u_n\| - \frac{1}{q + 1} \langle \lambda \rho_n, u_n \rangle.$$

Lembrando que $m(u_n) = |w_n|_* \rightarrow 0$, segue que $|w_n|_*$ é limitada e daí, $|w_n|_* \leq \widehat{C}$. Logo, $\frac{1}{q + 1} |w_n|_* \leq C_4$ então,

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q + 1} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle \leq C_3 + C_4 \|u_n\| - \frac{1}{q + 1} \langle \lambda \rho_n, u_n \rangle. \quad (2.30)$$

Usando novamente $u_n = u_n^+ - u_n^-$, temos

$$\frac{\lambda}{q + 1} \langle \rho_n, u_n \rangle = \frac{\lambda}{q + 1} \langle \rho_n, u_n^+ \rangle + \frac{\lambda}{q + 1} \langle \rho_n, -u_n^- \rangle \leq \frac{\lambda}{q + 1} \langle \rho_n, u_n^+ \rangle.$$

Como $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$ pela Lema 2.2 obtemos

$$h(x)\underline{f}(u_n) \leq \rho_n(x) \leq h(x)\underline{f}(u_n) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\underline{f}(u_n)u_n^+ dx \leq \langle \rho_n, u_n^+ \rangle \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)\bar{f}(u_n)u_n^+ dx.$$

Recordando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\underline{f}(u_n)(u_n^+)^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^+ \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H(u_n - \delta - a)(u_n^+)^q dx.$$

Para $u_n \leq a$ e tomando $\delta \rightarrow 0^+$ tal que $u_n - \delta \leq a$. Então,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} H(u_n - \delta - a) = H(u_n - \delta - a) = 0.$$

Agora para $u_n > a$ com $\delta \rightarrow 0^+$ tal que $u_n - \delta > a$. Logo,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} H(u_n - \delta - a) = H(u_n - a) = 1.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)\underline{f}(u_n)(u_n^+)^q dx = \int_{\{u_n > a\}} h(x)u_n^+(u_n^+)^q dx = \int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx \leq \langle \rho_n, u_n^+ \rangle.$$

Daí,

$$-\frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx \geq -\frac{\lambda}{q+1} \langle \rho_n, u_n^+ \rangle.$$

Assim de (2.30)

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{q+1} \langle w_n + \lambda \rho_n, u_n \rangle &\leq C_3 + C_4 \|u_n\| - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x) (u_n^+)^{q+1} dx \\
&\leq C_3 + C_4 \|u_n\| \\
&\quad - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x) ((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1}) dx. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

De (2.29) e (2.31) temos

$$\begin{aligned}
\frac{(q-1)}{2(q+1)} \|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x) ((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1}) dx &\leq C_3 + C_4 \|u_n\| \\
&\quad - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x) ((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1}) dx
\end{aligned}$$

implicando que

$$\frac{(q-1)}{2(q+1)} \|u_n\|^2 \leq C_3 + C_4 \|u_n\|.$$

Suponha por contradição que a sequência $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ não seja limitada então, a menos de subsequência,

$$\|u_n\| \longrightarrow \infty \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow \infty,$$

daí,

$$\frac{(q-1)}{2(q+1)} \leq \frac{C_3}{\|u_n\|^2} + \frac{C_4}{\|u_n\|}.$$

Passando ao limite de $n \rightarrow +\infty$ encontramos

$$\frac{(q-1)}{2(q+1)} \leq 0,$$

o que é um absurdo, pois $\frac{(q-1)}{2(q+1)} \geq 0$.

Portanto, (u_n) é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para $0 \leq q < 2^* - 1$.

Note que podemos assumir que $u_n \geq 0$. De fato, sendo

$$u_n = u_n^+ - u_n^- \quad e \quad \|u_n^-\| \rightarrow 0$$

temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{\lambda,a}(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{\lambda,a}(u_n^+ - u_n^-) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_{\lambda,a}(u_n^+)$$

e

$$\begin{aligned} \langle w_n, u_n \rangle &= \|u_n\|^2 - \lambda \langle \rho_n, u_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx \\ &= \|u_n^+ - u_n^-\|^2 - \lambda \langle \rho_n, u_n^+ - u_n^- \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx \\ &= \langle u_n^+ - u_n^-, u_n^+ - u_n^- \rangle - \lambda \langle \rho_n, u_n^+ \rangle - \lambda \langle \rho_n, -u_n^- \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx \\ &= \|u_n^+\|^2 + \|u_n^-\|^2 - \lambda \langle \rho_n, u_n^+ \rangle - \lambda \langle \rho_n, -u_n^- \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx \\ &= \|u_n^+\|^2 - \lambda \langle \rho_n, u_n^+ \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx + \|u_n^-\|^2 - \lambda \langle \rho_n, -u_n^- \rangle \\ &= \langle w_n, u_n^+ \rangle + o_n(1), \end{aligned}$$

isto é,

$$\langle w_n, u_n \rangle = \langle w_n, u_n^+ \rangle + o_n(1).$$

Dessa forma (u_n^+) é uma sequência $(PS)_c$ e assim podemos considerar $u_n \geq 0$.

Assim, desde que $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert e reflexivo, (u_n) é uma sequência limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ a menos de uma subsequência existe $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

e

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Afirmção 2.1 (ρ_n) é limitada em $(D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^* \subset L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$

De fato, como $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$ e $\rho_n(x) \subset [0, h(x)u_n^q(x)]$ q.t.p. em \mathbb{R}^N .

$$|\rho_n(x)| \leq |h(x)u_n^q(x)|,$$

então,

$$|\rho_n(x)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \leq |h(x)u_n^q(x)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}. \quad (2.32)$$

De onde segue

$$\begin{aligned} |\rho_n(x)|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\rho_n|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)u_n^q(x)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{\frac{2^*}{2^*-1}}(x) |u_n|^{\frac{2^*q}{2^*-1}}(x) dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}. \end{aligned}$$

Observe que $h^{\frac{2^*}{2^*-1}} \in L^{\frac{2^*-1}{2^*-(q+1)}}(\mathbb{R}^N)$ e $u_n^{\frac{2^*q}{2^*-1}} \in L^{\frac{2^*}{2^*-(q+1)}}(\mathbb{R}^N)$, $\frac{1}{\frac{2^*-1}{2^*-(q+1)}} + \frac{1}{\frac{2^*}{2^*-(q+1)}} = 1$, pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |h|^{\frac{2^*}{2^*-1}}(x) |u_n|^{\frac{2^*q}{2^*-1}}(x) dx &\leq |h|^{\frac{2^*}{2^*-1}}|_{L^{\frac{\alpha}{2^*/2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \cdot |u_n|^{\frac{2^*q}{2^*-1}}|_{L^{\frac{2^*}{2^*q/2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h|^{\frac{2^*}{2^*-1}}|^{\frac{\alpha}{2^*/2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*/2^*-1}{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{\frac{2^*q}{2^*-1}}|^{\frac{2^*}{2^*q/2^*-1}} dx \right)^{\frac{2^*q/2^*-1}{2^*}} \\ &= \left(\left[\int_{\mathbb{R}^N} |h|^\alpha dx \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\frac{2^*}{2^*-1}} \left(\left[\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx \right]^{\frac{1}{2^*}} \right)^{\frac{2^*q}{2^*-1}} \\ &= |h|_{\frac{2^*}{\alpha}}^{\frac{2^*}{2^*-1}} |u_n|_{2^*}^{\frac{2^*q}{2^*-1}}, \end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{2^*}{2^*-(q+1)}$. Logo, teremos

$$|\rho_n(x)|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \left(\int |h|^{\frac{2^*}{2^*-1}}(x) |u_n|^{\frac{2^*q}{2^*-1}}(x) dx \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \leq \left(|h|_{\frac{2^*}{\alpha}}^{\frac{2^*}{2^*-1}} |u_n|_{2^*}^{\frac{2^*q}{2^*-1}} \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} = |h|_{\alpha} |u_n|_{2^*}^q.$$

Pela imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ existe $\tilde{c} > 0$ tal que

$$|\rho_n(x)|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq |h|_\alpha |u_n|_{2^*}^q \leq \tilde{c} |h|_\alpha \|u_n\|^q \leq K$$

onde $0 < K = \tilde{c}|h|_\alpha$, é uma constante a qual existe pois $\|u_n\|$ é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Assim, (ρ_n) é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$. Como $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^* \subset L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ então (ρ_n) é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Mostrando a afirmação. Como (ρ_n) é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ então a menos de subsequência

$$\rho_n \rightharpoonup \rho_0 \text{ em } L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0 \varphi dx, \forall \varphi \in (L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N))^*.$$

Como

$$w_n = Q'(u_n) - \lambda \rho_n - \Psi'(u_n),$$

segue-se que

$$\langle \omega_n, v \rangle = \langle Q'(u_n), v \rangle - \lambda \langle \rho_n, v \rangle - \langle \Psi'(u_n), v \rangle \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Note que, desde que $(\rho_n) \subset (L^{2^*}(\mathbb{R}^N))^*$ pelo teorema da Representação de Riesz (apêndice A) existe $(\bar{\rho}_n) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\langle \rho_n, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{\rho}_n v dx, \quad \forall v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Por identificação,

$$\langle \rho_n, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n v dx, \quad \forall v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N),$$

portanto,

$$\langle \omega_n, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v_n dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n v dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v dx, \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Então,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0 v dx - \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1} v dx, \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Afirmção 2.2 $\rho_0(x) \in [h(x)\underline{f}(u), h(x)\bar{f}(u)]$ q.t.p em \mathbb{R}^N .

De fato, desde que (ρ_n) é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ segue-se

$$\rho_n \rightharpoonup \rho_0 \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\rho_n(x) \rightarrow \rho_0(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Observe que $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$ então

$$\rho_n(x) \in [h(x)\underline{f}(u_n), h(x)\bar{f}(u_n)] \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Note que

$$\underline{f}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H(t - \delta - a)(t^+)^q.$$

Para $t > a$, tomando $\delta \rightarrow 0^+$ tal que $t - \delta > a$ temos

$$H(t - \delta - a) = 1 = H(t - a) \Rightarrow f(t - a) = (t^+)^q.$$

Para $t < a$, tomando $\delta \rightarrow 0^+$ tal que $t - \delta < a$ obtemos

$$H(t - \delta - a) = 0 = H(t - a) \Rightarrow f(t - a) = 0.$$

Para $t = a$, tomando $\delta \rightarrow 0^+$ tal que $t - \delta = a$ temos

$$H(t - \delta - a) = H(-\delta) = 0 = H(t - a) \Rightarrow f(t - a) = 0.$$

Conclusão

$$h(x)\underline{f}(t) = \begin{cases} h(x)(t^+)^q & \text{se } a < t \\ 0 & \text{se } a = t \\ 0 & \text{se } a > t \end{cases}$$

Assim com um raciocínio análogo

$$h(x)\bar{f}(t) = \begin{cases} h(x)(t^+)^q & \text{se } a < t \\ h(x)(t^+)^q & \text{se } a = t \\ 0 & \text{se } a > t \end{cases}$$

Dessa forma

$$[h(x)\underline{f}(u_n), h(x)\bar{f}(u_n)] = \begin{cases} h(x)(u_n^+)^q & \text{se } a < u_n \\ [0, h(x)(u_n^+)^q] & \text{se } a = u_n \\ 0 & \text{se } a > u_n \end{cases}$$

Portanto,

$$\rho_n(x) \in [h(x)\underline{f}(u_n), h(x)\bar{f}(u_n)] = \begin{cases} \rho_n(x) = h(x)(u_n^+)^q & \text{se } a < u_n \\ \rho_n(x) \in [0, h(x)(u_n^+)^q] & \text{se } a = u_n \\ \rho_n(x) = 0 & \text{se } a > u_n \end{cases}$$

Logo, se

$$\rho_n(x) \rightarrow \rho_0(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N,$$

desde que

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N$$

temos:

Para $u(x) > a$, temos que $u_n(x) > a$ quando $n \rightarrow +\infty$, daí

$$\rho_0 = h(x)u^q(x) \text{ se } u(x) > a.$$

Para $u(x) < a$ temos que $u_n(x) < a$ quando $n \rightarrow +\infty$, assim temos que

$$\rho_0 = 0 \text{ se } u(x) < a.$$

Agora para $u(x) = a$, temos que $0 \leq \rho_n(x) \leq h(x)u_n(x)^q$ quando $n \rightarrow +\infty$. Assim

$$0 \leq \rho_0(x) \leq h(x)u(x)^q.$$

Então,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_0(x) = h(x)(u^+)^q & \text{se } a < u \\ \rho_0(x) \in [0, h(x)(u^+)^q] & \text{se } a = u \\ \rho_0(x) = 0 & \text{se } a > u \end{array} \right.$$

Como

$$\rho_0(x) \in [h(x)\underline{f}(u), h(x)\bar{f}(u)] = \left\{ \begin{array}{ll} h(x)(u^+)^q & \text{se } a < u \\ [0, h(x)(u^+)^q] & \text{se } a = u \\ 0 & \text{se } a > u \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Segue-se que

$$\rho_0(x) \in [h(x)\underline{f}(u), h(x)\bar{f}(u)] \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N. \quad \blacksquare$$

A seguir mostraremos que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

De fato, considere $v_n = u_n - u$ e assumamos que

$$\|v_n\|^2 \rightarrow l > 0.$$

Temos

$$\langle w_n, v_n \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v_n dx - \lambda \langle \rho_n, v_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n dx. \quad (2.34)$$

Lembrando que

$$0 \leq h(x) \underline{f}(u_n) \leq h(x) \bar{f}(u_n) \leq h(x) (u_n^+)^q$$

e

$$\rho_n(x) \in [h(x) \underline{f}(u_n), h(x) \bar{f}(u_n)] \quad q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

temos

$$\rho_n \leq [0, h(x) (u_n^+)^q] \quad q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Isto é,

$$0 \leq \rho_n \leq h(x) (u_n^+)^q \quad q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N. \quad (2.35)$$

Desde que $\rho_n \in \partial\Phi(u_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$, então existe $\bar{\rho}_n \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que pelo Teorema da Representação de Riesz

$$\langle \rho_n, v_n \rangle = \int \bar{\rho}_n(x) v_n(x) dx, \quad \forall \bar{\rho}_n \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Por identificação

$$\langle \rho_n, v_n \rangle = \int \rho_n(x) v_n(x) dx, \quad \forall \rho_n \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Logo, por (2.35)

$$\int \rho_n(x) v_n(x) dx \leq \int h(x) u_n^+(x)^q v_n(x) dx.$$

Sendo assim

$$\langle \rho_n, v_n \rangle \leq \int h(x) u_n^+(x)^q v_n(x) dx.$$

Como $v_n = u_n - u = (u_n^+ - u_n^-) - u$, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n dx &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q (u_n^+ - u_n^- - u) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q u_n^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q u_n^- dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q u_n^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q u dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle \rho_n, v_n \rangle \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx,$$

pois $v_n^+ = u_n^+ - u$.

Assim,

$$\lambda \langle \rho_n, v_n \rangle \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx. \quad (2.36)$$

Usando um raciocínio análogo para $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} v_n dx$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} v_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} v_n^+ dx. \quad (2.37)$$

Substituindo (2.36) e (2.37) em (2.34) obtemos,

$$\langle w_n, v_n \rangle \geq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v_n dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n^+ dx.$$

Como $v_n = u_n - u$, tem-se que $u_n = v_n + u$, então,

$$\langle w_n, v_n \rangle \geq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(v_n + u) \nabla v_n dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n^+ dx,$$

isto é,

$$\langle w_n, v_n \rangle \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v_n dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n^+ dx.$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (u_n - u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_n dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u dx$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \varphi dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Fazendo $\varphi = u$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u dx.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v_n dx = o_n(1).$$

Além disso,

$$\langle w_n, v_n \rangle = |\langle w_n, v_n \rangle| \leq |w_n|_* \|v_n\|,$$

então,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle w_n, u_n \rangle \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |w_n|_* \|v_n\| = 0$$

pois $|w_n|_* \rightarrow 0$ e $\|v_n\|$ é limitada. Logo,

$$\langle w_n, v_n \rangle = o_n(1).$$

Portanto, desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla u dx - \langle w_n, v_n \rangle \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) (u_n^+)^q v_n^+ dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n^+ dx,$$

segue-se que

$$l + o_n(1) \leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) (u_n^+)^q v_n^+ dx + \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^{2^*-1}) v_n^+ dx. \quad (2.38)$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx = \int_{\{u_n > u\}} h(x)(u_n^+)^q (u_n^+ - u) dx + \int_{\{u_n \leq u\}} h(x)(u_n^+)^q (u_n^+ - u) dx.$$

Como $u_n \leq u$, temos que $u_n^+ \leq u$, logo $u_n^+ - u \leq 0$ e sendo $h \geq 0$ e $(u_n^+)^q \geq 0$ temos

$$h(x)(u_n^+)^q \cdot (u_n^+ - u) \leq 0.$$

Assim,

$$\int_{\{u_n \leq u\}} h(x)u_n^q (u_n^+ - u) dx \leq 0.$$

Logo,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^q v_n^+ dx \leq \lambda \int_{\{u_n > u\}} h(x)(u_n^+)^q (u_n^+ - u) dx. \quad (2.39)$$

Usando um raciocínio análogo segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n^+ dx \leq \int_{\{u_n > u\}} (u_n^+)^{2^*-1} (u_n^+ - u) dx. \quad (2.40)$$

Substituindo (2.39) e (2.40) em (2.38) obtemos

$$\begin{aligned} l + o_n(1) &\leq \lambda \int_{\{u_n > u\}} h(x)(u_n^+)^q v_n dx + \int_{\{u_n > u\}} (u_n^+)^{2^*-1} (u_n^+ - u) dx \\ &\leq \lambda \int_{\{u_n > u\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx - \lambda \int_{\{u_n > u\}} h(x)(u_n^+)^q u dx + \int_{\{u_n > u\}} (u_n^+)^{2^*} dx \\ &\quad - \int_{\{u_n > u\}} (u_n^+)^{2^*-1} u dx. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Lembrando que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u_n^q (u_n^+ - u) dx - \lambda \int_{\{u_n > u\}} h(x)u_n^q (u_n^+ - u) dx = \lambda \int_{\{u_n \leq u\}} h(x)u_n^q (u_n^+ - u) dx,$$

temos

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\{u_n > u\}} h(x) u_n^q (u_n^+ - u) dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^{q+1} dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q u dx \\ &\quad - \lambda \int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u_n^{q+1} dx + \lambda \int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u_n^q u dx. \end{aligned} \quad (2.42)$$

De maneira análoga

$$\begin{aligned} \int_{\{u_n > u\}} u_n^{2^*-1} (u_n^+ - u) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx - \int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*} dx \\ &\quad + \int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*-1} u dx. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Substituindo (2.43) e (2.42) em (2.41) resulta que

$$\begin{aligned} l + o_n(1) &\leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^{q+1} dx - \lambda \int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u_n^{q+1} dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q u dx \\ &\quad + \lambda \int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u_n^q u dx + \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*} dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx + \int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*-1} u dx. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Afirmação 2.3 $\int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^{q+1} dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u^{q+1} dx$ quando $n \rightarrow +\infty$.

De fato, note que $(u_n^{q+1}) \subset L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$ pois,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{q+1}|^{\frac{2^*}{q+1}} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx \leq c^{2^*} \|u_n\|^{2^*}.$$

Pela imersão contínua $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ existe uma constante $C_2 > 0$ tal que,

$$\|u_n\|_{2^*} \leq C_2 \|u_n\| \quad (2.45)$$

assim,

$$\begin{aligned} |u_n^{q+1}|_{L^{2^*/q+1}(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{q+1}|^{\frac{2^*}{q+1}} dx \right)^{\frac{q+1}{2^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{q+1}{2^*}} = \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \right]^{q+1} \\ &= |u_n|_{2^*}^{q+1} \leq C^{q+1} \|u_n\|^{q+1} \leq C_1. \end{aligned}$$

Logo, (u_n^{q+1}) é uma seqüência limitada em $L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$ e desde que $L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach reflexivo temos a menos de subsequência, que

$$u_n^{q+1} \rightharpoonup u^{q+1} \text{ em } L^{\frac{2^*}{q+1}}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$u_n^{q+1}(x) \rightarrow u^{q+1}(x) \text{ q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Pelo Lema de Brézis e Lieb (apêndice A)

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^{q+1} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u^{q+1} dx \quad \forall h \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \text{ com } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\frac{2^*}{q+1}} = 1$$

mostrando a Afirmação 2.3

De maneira análoga mostramos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u^q dx \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \quad (2.46)$$

Afirmação 2.4 $\int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u_n^{q+1} dx \rightarrow \int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u^{q+1} dx$ quando $n \rightarrow +\infty$.

De fato, observe que a seqüência $(u_n^{q+1}) \subset L^{\frac{2^*}{q+1}}(\{u_n \leq u\})$ pois,

$$\int_{\{u_n \leq u\}} |u_n^{q+1}|^{\frac{2^*}{q+1}} dx = \int_{\{u_n \leq u\}} |u_n|^{2^*} dx \leq c^{2^*} \|u_n\|^{2^*}.$$

De (2.45)

$$\begin{aligned}
|u_n^{q+1}|_{L^{2^*/q+1}(\mathbb{R}^N)} &= \left(\int_{\{u_n \leq u\}} |u_n^{q+1}|^{\frac{2^*}{q+1}} dx \right)^{\frac{q+1}{2^*}} \\
&= \left(\int_{\{u_n \leq u\}} |u_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{q+1}{2^*}} \\
&= \left[\left(\int_{\{u_n \leq u\}} |u_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \right]^{q+1} \\
&= |u_n|_{2^*}^{q+1} \leq C_2^{q+1} \|u_n\|^{q+1} \leq K.
\end{aligned}$$

Logo, (u_n^{q+1}) é limitada em $L^{\frac{2^*}{q+1}}(\{u_n \leq u\})$ segue-se que

$$u_n^{q+1} \rightharpoonup u^{q+1} \text{ em } L^{\frac{2^*}{q+1}}(\{u_n \leq u\})$$

e

$$u_n^{q+1}(x) \rightarrow u^{q+1}(x) \text{ q.t.p em } \{u_n \leq u\}.$$

Pelo Lema de Brézis e Lieb

$$\int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u_n^{q+1} dx \rightarrow \int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u^{q+1} dx \quad \forall h \in L^\alpha(\mathbb{R}^N) \text{ com } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\frac{2^*}{q+1}} = 1$$

provando da Afirmação 2.4

De modo análogo prova-se que

$$\int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u_n^q dx \rightarrow \int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u^{q+1} dx \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \quad (2.47)$$

Afirmação 2.5 $\int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*} dx \rightarrow \int_{\{u_n \leq u\}} u^{2^*} dx$ quando $n \rightarrow +\infty$.

De fato, como a sequência (u_n) é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, então

$$u_n \rightarrow u \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p em } (\{u_n \leq u\}).$$

Logo,

$$u_n^{2^*}(x) \rightarrow u^{2^*}(x) \text{ q.t.p em } (\{u_n \leq u\}).$$

Como

$$|u_n(x)| \leq u(x) \text{ q.t.p. em } (\{u_n \leq u\}).$$

Logo,

$$|u_n^{2^*}(x)| \leq u^{2^*}(x) \text{ q.t.p. em } (\{u_n \leq u\}).$$

e $u^{2^*} \in L^1(\{u_n \leq u\})$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (apêndice A)

$$\int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*}(x) dx \rightarrow \int_{\{u_n \leq u\}} u^{2^*}(x) dx$$

provando a Afirmação 2.5.

Afirmação 2.6 $\int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*-1} u dx \rightarrow \int_{\{u_n \leq u\}} u^{2^*} dx$ quando $n \rightarrow +\infty$.

De fato, observe que a sequência $(u_n^{2^*-1}) \subset L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\{u_n \leq u\})$ pois,

$$\int_{\{u_n \leq u\}} |u_n^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} dx = \int_{\{u_n \leq u\}} |u_n|^{2^*} dx \leq c^{2^*} \|u_n\|^{2^*}.$$

Segue de (2.45)

$$\begin{aligned} |u_n^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\{u_n \leq u\})} &= \left(\int_{\{u_n \leq u\}} |u_n^{2^*-1}|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} = \left(\left[\int_{\{u_n \leq u\}} |u_n|^{2^*} \right]^{\frac{1}{2^*}} \right)^{2^*-1} \\ &\leq C^{2^*-1} \|u_n\|^{2^*-1} \leq K. \end{aligned}$$

Logo, $(u_n^{2^*-1})$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\{u_n \leq u\})$, então

$$u_n^{2^*-1} \rightharpoonup u^{2^*-1} \text{ em } L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\{u_n \leq u\})$$

e

$$u_n^{2^*-1}(x) \rightarrow u^{2^*-1}(x) \text{ q.t.p em } \{u_n \leq u\}.$$

Pelo Lema de Brézis e Lieb

$$\int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*-1} u dx \rightarrow \int_{\{u_n \leq u\}} u^{2^*} dx \quad \forall u \in L^{2^*}(\{u_n \leq u\}) \text{ com } \frac{1}{2^*} + \frac{1}{\frac{2^*}{2^*-1}} = 1.$$

Mostrando a Afirmação 2.6

Usando um raciocínio análogo podemos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*} dx \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \quad (2.48)$$

Afirmação 2.7 $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx = |v_n|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} + o_n(1).$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx = |u_n|_{2^*}^{2^*} - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx. \quad (2.49)$$

Usando o Teorema de Brézis e Lieb (apêndice A.1) temos

$$|u_n|_{2^*}^{2^*} - |u|_{2^*}^{2^*} = |u_n - u|_{2^*}^{2^*} + o_n(1).$$

Daí,

$$|u_n|_{2^*}^{2^*} = |u_n - u|_{2^*}^{2^*} + |u|_{2^*}^{2^*} + o_n(1). \quad (2.50)$$

Substituindo (2.50) em (2.49) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx &= |u_n - u|_{2^*}^{2^*} + |u|_{2^*}^{2^*} + o_n(1) - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx \\ &= |u_n - u|_{2^*}^{2^*} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx - |u|_{2^*}^{2^*} \right) + o_n(1) \end{aligned}$$

da Afirmação 2.48 resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*} dx = |u|_{2^*}^{2^*}.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx - |u|_{2^*}^{2^*} = o_n(1).$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx = |v_n|_{2^*}^{2^*} + o_n(1)$$

pois, $v_n = u_n - u$. Provando a Afirmação 2.7

Das Afirmações 2.3-2.7 temos

- $\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^{q+1} dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q u dx = o_n(1)$ (Afirmações 2.3 e (2.46))
- $\lambda \int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u_n^{q+1} dx - \lambda \int_{\{u_n \leq u\}} h(x) u_n^q u dx = o_n(1)$ (Afirmações 2.4 e (2.47))
- $\int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*} dx - \int_{\{u_n \leq u\}} u_n^{2^*-1} u dx = o_n(1)$ (Afirmações 2.5 e 2.6)
- $\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx = |v_n|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*} + o_n(1)$ (Afirmação 2.7).

Assim, de (2.44)

$$l + o_n(1) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx + o_n(1).$$

Logo,

$$l^{\frac{2}{2^*}} + o_n(1) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + o_n(1).$$

Desde que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} S \leq \|v_n\|^2$$

então,

$$l^{\frac{2}{2^*}} S + o_n(1) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} S + o_n(1) \leq \|v_n\|^2 + o_n(1).$$

Logo,

$$l^{\frac{2}{2^*}} S + o_n(1) \leq \|v_n\|^2 + o_n(1).$$

Passando ao limite na desigualdade acima encontramos

$$l^{\frac{2}{2^*}} S \leq l,$$

dessa maneira,

$$\begin{aligned} l^{2/\frac{2N}{N-2}} \cdot S \leq l &\Leftrightarrow Sl^{\frac{N-2}{N}} \leq l \\ &\Leftrightarrow Sl l^{-\frac{2}{N}} \leq l \\ &\Leftrightarrow \frac{S \cdot l}{l^{\frac{2}{N}}} \leq l \\ &\Leftrightarrow S \leq l^{\frac{2}{N}} \\ &\Leftrightarrow S^{\frac{N}{2}} \leq l. \end{aligned}$$

Para mostrarmos que o funcional $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ vamos considerar dois casos:

(i) **Caso** $0 \leq q \leq 1$ e $0 < c \leq \frac{S^{N/2}}{N} + M_\lambda$.

Desde que

$$w_n = Q'(u_n) - \lambda \rho_n - \Psi'(u_n)$$

e recordando que $\langle w_n, u_n \rangle = o_n(1)$ temos,

$$I_{\lambda,a}(u_n) = I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n, u_n \rangle + o_n(1).$$

Lembrando que

$$I_{\lambda,a}(u_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx$$

e

$$\langle w_n, u_n \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \langle \rho_n, u_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n, u_n \rangle + o_n(1) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx \\ &\quad - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx + \frac{\lambda}{2^*} \langle \rho_n, u_n \rangle + \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*} dx + o_n(1) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{2^*} \langle \rho_n, u_n \rangle + o_n(1) \\ &= \frac{1}{N} \|u_n\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx + \frac{\lambda}{2^*} \langle \rho_n, u_n \rangle + o_n(1). \end{aligned}$$

Recordando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_n)dx = \frac{1}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx.$$

Segue-se

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n, u_n \rangle + o_n(1) &= \frac{1}{N} \|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1})dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{2^*} \langle \rho_n, u_n \rangle + o_n(1). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Usando a definição de $v_n = u_n - u$, o Lema 2.2 e o fato que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x)u^{q+1} dx + o_n(1)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\|u_n\|^2 &= \frac{1}{N}\langle v_n + u, v_n + u \rangle \\ &= \frac{1}{N}\langle v_n, v_n \rangle + \frac{2}{N}\langle v_n, u \rangle + \frac{1}{N}\langle u, u \rangle \\ &= \frac{1}{N}\|v_n\|^2 + \frac{2}{N}\langle v_n, u \rangle + \frac{1}{N}\|u\|^2. \end{aligned}$$

Como $(v_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{2}{N}\langle v_n, u \rangle &= \frac{2}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla u dx = \frac{2}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u_n - u) \nabla u dx \\ &= \frac{2}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u dx - \frac{2}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u dx \end{aligned}$$

desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ então,

$$\frac{2}{N}\langle v_n, u \rangle = \left(\frac{2}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u dx - \frac{2}{N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u dx \right) = o_n(1)$$

daí,

$$\frac{1}{N}\|u_n\|^2 = \frac{1}{N}\|v_n\|^2 + \frac{1}{N}\|u\|^2 + o_n(1). \quad (2.52)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1}) dx &= \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx \\ &\quad - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)a^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Como $h \geq 0$ e $a \geq 0$ resulta que

$$\frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x) a^{q+1} dx \geq 0,$$

então,

$$\frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x) ((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1}) dx \leq \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x) ((u_n^+)^{q+1}) dx.$$

Logo,

$$-\frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x) ((u_n^+)^{q+1} - a^{q+1}) dx \geq -\frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x) ((u_n^+)^{q+1}) dx. \quad (2.53)$$

Sendo $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$, pelo Lema 2.2 temos que

$$h(x) \underline{f}(u_n) \leq \rho_n(x) \leq h(x) \bar{f}(u_n) \quad q.t.p. \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Então, existe $\bar{\rho}_n \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, tal que pelo Teorema da Representação Riesz

$$\langle \rho_n, u_n \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{\rho}_n u_n dx \quad \forall \bar{\rho}_n \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

e por identificação

$$\langle \rho_n, u_n \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n dx \quad \forall \rho_n \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \underline{f}(u_n) u_n dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n u_n dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \bar{f}(u_n) u_n dx,$$

logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \underline{f}(u_n) u_n dx \leq \langle \rho_n, u_n \rangle \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \bar{f}(u_n) u_n dx.$$

Lembrando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \underline{f}(u_n) u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n \lim_{\delta \rightarrow 0} H(u_n - \delta - a) u_n^q dx.$$

Observe que, para $u_n \leq a$ tomando $\delta \rightarrow 0^+$ tal que $u_n - \delta \leq a$ segue,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} H(u_n - \delta - a) = H(t - a) = 0.$$

Agora para $u_n > a$, tomando $\delta \rightarrow 0^+$ tal que $u_n - \delta > a$ temos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} H(u_n - \delta - a) = H(t - a) = 1.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \underline{f}(u_n) u_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n \lim_{\delta \rightarrow 0} H(u_n - \delta - a) u_n^q dx = \int_{\{u_n > a\}} h(x) u_n^{q+1} dx.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \underline{f}(u_n) u_n dx = \int_{\{u_n > a\}} h(x) u_n^{q+1} dx \leq \langle \rho_n, u_n \rangle. \quad (2.54)$$

De (2.52),(2.53),(2.54) e (2.51) obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) &= I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n, u_n \rangle + o_n(1) \\ &\geq \frac{1}{N} \|v_n\|^2 + \frac{1}{N} \|u\|^2 + \frac{\lambda}{2^*} \int_{\{u_n > a\}} h(x) u_n^{q+1} dx - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x) u_n^{q+1} dx + o_n(1) \end{aligned}$$

Assim,

$$I_{\lambda,a}(u_n) \geq \frac{1}{N} \|v_n\|^2 + \frac{1}{N} \|u\|^2 + \lambda \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1} \right) \int_{\{u_n > a\}} h(x) u_n^{q+1} dx + o_n(1).$$

Desde que $\frac{1}{q+1} > \frac{1}{2^*}$ então,

$$\lambda \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1} \right) \int_{\{u_n > a\}} h(x) u_n^{q+1} dx \geq \lambda \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^{q+1} dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) &\geq \frac{1}{N} \|v_n\|^2 + \frac{1}{N} \|u\|^2 + \lambda \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^{q+1} dx + o_n(1) \\ &= \frac{1}{N} \|v_n\|^2 + \frac{1}{N} \|u\|^2 + \lambda \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u^{q+1} dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e das imersões contínuas resulta

$$I_{\lambda,a}(u_n) \geq \frac{1}{N} \|v_n\|^2 + \frac{S}{N} |u|_{2^*}^2 + \lambda \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1} \right) |h|_\alpha |u|_{2^*}^{q+1} + o_n(1).$$

Lembrando que

$$g(t) = \frac{S}{N} t^2 + \lambda \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1} \right) |h|_\alpha t^{q+1},$$

fazendo $t = |u|_{2^*}$ resulta,

$$g(|u|_{2^*}) = \frac{S}{N} |u|_{2^*}^2 + \lambda \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1} \right) |h|_\alpha |u|_{2^*}^{q+1}.$$

Daí,

$$I_{\lambda,a}(u_n) \geq \frac{1}{N} \|v_n\|^2 + g(|u|_{2^*}) + o_n(1).$$

Como

$$g(|u|_{2^*}) \geq \min g(|u|_{2^*}) = M_\lambda.$$

Teremos

$$I_{\lambda,a}(u_n) \geq \frac{1}{N} \|v_n\|^2 + M_\lambda + o_n(1).$$

Passando ao limite na desigualdade acima obtemos

$$c \geq \frac{1}{N}l + M_\lambda \geq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + M_\lambda.$$

O que é um absurdo pois $0 < c < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + M_\lambda$. Portanto, $l = 0$ e assim $u_n \rightarrow u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Caso (ii) $1 < q < 2^* - 1$ e $0 < c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

Sabemos que

$$I_{\lambda,a}(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^{q+1} - a^{q+1})dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_n\|^2 &= \frac{1}{2} \langle u_n, u_n \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle v_n + u, v_n + u \rangle \\ &= \frac{1}{2} [\langle v_n, v_n \rangle + \langle v_n, u \rangle + \langle u, u \rangle] \\ &= \frac{1}{2} \|v_n\|^2 + \langle v_n, u \rangle + \frac{1}{2} \|u\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|v_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla u dx + \frac{1}{2} \|u\|^2. \end{aligned}$$

De (2.53) obtemos,

$$-\frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx \leq -\frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^{q+1} - a^{q+1}) dx$$

Temos

$$I_{\lambda,a}(u_n) \geq \frac{1}{2} \|v_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla u dx + \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx.$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (u_n - u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u dx - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u dx = o_n(1),$$

pois $u_n \rightarrow u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Assim,

$$I_{\lambda,a}(u_n) \geq \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx + o_n(1).$$

De (2.54) temos

$$\int_{\{u_n > a\}} h(x)(u_n^+)^{q+1} dx \leq \langle \rho_n, u_n \rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) &\geq \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \langle \rho_n, u_n \rangle - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx + o_n(1) \\ &\frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \langle \rho_n, v_n \rangle - \frac{\lambda}{q+1} \langle \rho_n, u \rangle - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \langle w_n, v_n \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla v_n dx - \lambda \langle \rho_n, v_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(v_n + u) \nabla v_n dx - \lambda \langle \rho_n, v_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} (u_n - u) dx \\ &= \|v_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v_n dx - \lambda \langle \rho_n, v_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx + o_n(1). \end{aligned}$$

Segue-se

$$\langle w_n, v_n \rangle = \|v_n\|^2 - \lambda \langle \rho_n, v_n \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx + o_n(1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n, v_n \rangle &\geq \frac{1}{2} \|v_n\|^2 + \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \langle \rho_n, v_n \rangle - \frac{\lambda}{q+1} \langle \rho_n, u \rangle - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx \\
&\quad - \frac{1}{2^*} \|v_n\|^2 + \frac{\lambda}{2^*} \langle \rho_n, v_n \rangle + \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*} dx + \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx + o_n(1) \\
&= \frac{1}{N} \|v_n\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*} \right) \langle \rho_n, v_n \rangle + \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{q+1} \langle \rho_n, u \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Desde que

$$\rho_n(x) \in [0, h(x)(u_n(x)^+)^q] \quad q.t.p \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$, segue do Teorema da Representação Riesz que

$$\langle \rho_n, v_n \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x) v_n(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+(x))^q v_n(x) dx.$$

Logo,

$$-\lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*} \right) \langle \rho_n, v_n \rangle \geq -\lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} h(x)(u_n^+(x))^q v_n(x) dx.$$

Além disso, do fato que $q+1 < 2^*$ segue que

$$-\frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx \geq -\frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n, v_n \rangle &\geq \frac{1}{N} \|v_n\|^2 - \lambda \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q v_n dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{q+1} \langle \rho_n, u \rangle - \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ então

$$\langle u, u_n \rangle \rightarrow \langle u, u \rangle, \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

$$\langle u, u_n \rangle = \langle u, u \rangle + o_n(1).$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_n dx = \|u\|^2 + o_n(1),$$

e desde que $2 < q + 1$, temos

$$\frac{1}{2} \|u\|^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_n dx + o_n(1) \geq \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla u dx + o_n(1).$$

Notando que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q v_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q (u_n - u) dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^{q+1} dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q u dx.$$

Da Afirmação 2.3 e de (2.46) temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q v_n dx &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^{q+1} dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q u dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u^{q+1} dx + o_n(1) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u^{q+1} dx + o_n(1) \end{aligned}$$

de onde segue

$$-\lambda \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} h(x) u_n^q v_n dx = o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n, v_n \rangle &\geq \frac{1}{N} \|v_n\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{q+1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_n dx - \lambda \langle \rho_n, u \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx \right) + o_n(1). \end{aligned}$$

Observando que

$$\langle w_n, u \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla u_n dx - \lambda \langle \rho_n, u \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} u dx,$$

e desde que

$$\langle w_n, u \rangle = |\langle w_n, u \rangle| \leq \|w_n\|_* \|u\| = m(u_n) \|u\|.$$

Segue-se que $\langle w_n, u \rangle = o_n(1)$ e assim,

$$I_{\lambda,a}(u_n) - \frac{1}{2^*} \langle w_n, v_n \rangle \geq \frac{1}{N} \|v_n\|^2 + o_n(1).$$

Pela definição de $v_n = u_n - u$

$$\frac{1}{2^*} \langle w_n, v_n \rangle = \frac{1}{2^*} \langle w_n, u_n \rangle - \frac{1}{2^*} \langle w_n, u \rangle = o_n(1).$$

Passando ao limite na última desigualdade obtemos

$$c \geq \frac{l}{N}.$$

Além disso, como $l \geq S^{\frac{N}{2}}$ temos

$$c \geq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N},$$

o que é um absurdo pois $c < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$. Portanto $l = 0$ daí $u_n \rightarrow u$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Concluindo assim a demonstração do Lema 2.3 ■

2.4 Lema 2.4

Lema 2.4 *Seja h satisfazendo (H) e $0 \leq q < 2^* - 1$. Se, além disso, $\rho > 0$ é a constante da geometria do passo da montanha dado pelo Teorema 1.1 e no Lema 2.1, então o nível c do Passo da Montanha satisfaz*

(i) $\rho \leq c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$ para $0 \leq q \leq 1$, $\lambda \in (0, \lambda_1)$ e $a \in (0, a_{*1})$ para algum $\lambda_1 > 0$ e $a_{*1} > 0$.

(ii) $\rho \leq c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$, para $1 < q < 2^* - 1$, $\lambda, a > 0$.

Demonstração: Segue da prova do Lema 2.1 que dado $\epsilon > 0$ e fazendo

$$\varphi = \omega_\epsilon = \frac{(N(N-2)\epsilon)^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}},$$

com $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ fixo e $x \in \mathbb{R}^N$, então existe $e = t_\epsilon \omega_\epsilon$ para algum $t_\epsilon > 0$ onde

$$\|t_\epsilon \omega_\epsilon\| > r \text{ tal que } I_{\lambda,a}(t_\epsilon \omega_\epsilon) \leq 0$$

e

$$I_{\lambda,a}(u) \geq \rho \text{ quando } \|u\| = r,$$

isto é, a geometria do passo da montanha é satisfeita.

Agora vamos utilizar a seguinte relação entre S e ω_ϵ (ver [?])

$$\|\omega_\epsilon\|^2 = |\omega_\epsilon|^{2^*} = S^{\frac{N}{2}} \quad \epsilon > 0. \quad (2.55)$$

Vamos mostrar, primeiramente caso ii).

Caso ii) $\rho \leq c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$ $1 < q < 2^* - 1$ para $\lambda, a > 0$.

Temos que

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx,$$

com $F(u) = \int_0^u f(t)dt$ onde $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$.

Logo,

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) &= \frac{1}{2}\|\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon)dx - \frac{1}{2^*}|\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{\widehat{t}_\epsilon^2}{2}\|\omega_\epsilon\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon)dx - \frac{\widehat{t}_\epsilon^{2^*}}{2^*}|\omega_\epsilon|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Usando (2.55) em (2.56) temos

$$I_{\lambda,a}(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) = \frac{\widehat{t}_\epsilon^2}{2}S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon)dx - \frac{\widehat{t}_\epsilon^{2^*}}{2^*}S^{\frac{N}{2}}. \quad (2.57)$$

Mostraremos que

$$\max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) = I_{\lambda,a}(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon).$$

Desde que $I_{\lambda,a}$ é contínua então g é contínua.

Observe que $g(0) = 0$, isto é,

$$g(0) = I_{\lambda,a}(0\omega_\epsilon) = 0$$

e existe $t_0 \in (0, \infty)$ tal que $g(t_0) > 0$.

Da definição de g temos que

$$g(t_0) = I_{\lambda,a}(t_0\omega_\epsilon)$$

logo,

$$I_{\lambda,a}(t_0\omega_\epsilon) > 0 \text{ para } t_0 \in (0, +\infty).$$

Além disso,

$$I_{\lambda,a}(t_0\omega_\epsilon) \rightarrow -\infty \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Agora vamos restringir a função g ao intervalo $[0, \bar{t}]$.

Considere a função $g : [0, \bar{t}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon)$.

Desde que a função g é contínua, num intervalo compacto e assume valores reais, então atinge o máximo.

Logo existe $\widehat{t}_\epsilon \in [0, \bar{t}]$ tal que

$$g(\widehat{t}_\epsilon) = \max_{t \in [0, \bar{t}]} g(t).$$

Pela geometria do passo da montanha, sabemos que existe $\bar{t} \in (0, +\infty)$, tal que $g(t) \leq 0$. Logo,

$$g(\widehat{t}_\epsilon) = \max_{t \geq 0} g(t).$$

Assim,

$$I_{\lambda,a}(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) = \max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t \omega_\epsilon). \quad (2.58)$$

De (2.57) e (2.58) obtemos

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t \omega_\epsilon) &= \frac{\widehat{t}_\epsilon^2}{2} S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) dx - \frac{\widehat{t}_\epsilon^{2^*}}{2^*} S^{\frac{N}{2}} \\ &= \left(\frac{\widehat{t}_\epsilon^2}{2} - \frac{\widehat{t}_\epsilon^{2^*}}{2^*} \right) S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) dx. \end{aligned}$$

Fazendo $\vartheta(t) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*} \right)$, $t \geq 0$ temos,

$$\max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t \omega_\epsilon) = \vartheta(\widehat{t}_\epsilon) S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) dx. \quad (2.59)$$

De fato, derivando a função ϑ , tem-se $\vartheta'(t) = t - t^{2^*-1}$. Note que $(0, +\infty) = (0, 1] \cup [1, +\infty)$.

Temos que, para todo $t \in (0, 1]$ como $1 < 2^* - 1$ tem-se que $t > t^{2^*}$. Assim, $\vartheta'(t) > 0$ logo, a função ϑ é crescente no intervalo $(0, 1]$.

Agora, para todo $t \in [1, +\infty)$, como $1 < 2^* - 1$ obtemos $t < t^{2^*-1}$. Assim, a derivada $\vartheta'(t) < 0$ para todo $t \in [1, +\infty)$. Logo, a função ϑ é decrescente no intervalo $t \in [1, +\infty)$.

Portanto, 1 é o ponto de máximo para a função ϑ . Note que $\vartheta'(1) = 0$ e

$$\vartheta(1) = \frac{1^2}{2} - \frac{1^{2^*}}{2^*}.$$

Como $2^* = \frac{2N}{N-2}$ obtemos

$$\vartheta(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{2N}{N-2}} = \frac{1}{2} - \frac{N-2}{2N} = \frac{N-N+2}{2N} = \frac{1}{N}.$$

Portanto,

$$\max_{t \geq 0} \vartheta(t) = \vartheta(1) = \frac{1}{N}. \quad (2.60)$$

De (2.60) em (2.59) obtemos

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &\leq \max \vartheta(\widehat{t}_\epsilon) S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) dx \\ &= \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) dx. \end{aligned}$$

Pela geometria do passo da montanha e por (2.58), existe $t_0 > 0$ tal que $\widehat{t}_\epsilon \geq t_0$ para um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Queremos mostrar que para o mesmo ϵ tem-se que $\omega_\epsilon(0) > \frac{a}{t_0}$. Note que,

$$\omega_\epsilon(x) = \frac{[N(N-2)\epsilon]^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}} \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (\epsilon > 0).$$

Tomando $x = 0$ temos

$$\omega_\epsilon(0) = \frac{[N(N-2)\epsilon]^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Assim,

$$\omega_\epsilon(0) = \frac{[N(N-2)\epsilon]^{\frac{N-2}{4}}}{(\epsilon)^{\frac{N-2}{2}}} = N(N-2)^{\frac{N-2}{4}} \cdot \epsilon^{\frac{N-2}{4}} \cdot \epsilon^{-\frac{N-2}{2}} = N(N-2)^{\frac{N-2}{4}} \cdot \epsilon^{-\frac{N+2}{4}}.$$

Como $N \geq 3$, obtemos

$$-N \leq -3 \Leftrightarrow \frac{2-N}{4} \leq -\frac{1}{4},$$

ou seja, quando $\epsilon \rightarrow 0$, $\omega_\epsilon(0) > \frac{a}{t_0}$ com $t_0 > 0$.

Queremos mostrar, agora que

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(t_0 \omega_\epsilon) dx.$$

Recorde que $F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) = \int_0^{\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon} f(t) dt$ e desde que, f é uma função não decrescente tem-se para $x \geq y$ temos

$$f(y) \leq f(x)$$

daí,

$$\int_0^y f(t) dt \leq \int_0^x f(t) dt.$$

Como $h \geq 0$ e $h \not\equiv 0$ então, existe um conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ de medida positiva tal que $\int_A h > 0$ e como $\widehat{t}_\epsilon \geq t_0$ temos que $t_0 \omega_\epsilon \leq \widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon$.

Assim,

$$\int_0^{\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon} f(t) dt \geq \int_0^{t_0 \omega_\epsilon} f(t) dt$$

pela definição da F temos,

$$F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) \geq F(t_0 \omega_\epsilon)$$

então,

$$h(x)F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) \geq h(x)F(t_0 \omega_\epsilon),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) dx &\geq \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t_0 \omega_\epsilon) dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^{t_0 \omega_\epsilon} H(t-a)t^q dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_a^{t_0 \omega_\epsilon} t^q dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \left[\frac{(t_0 \omega_\epsilon)^{q+1}}{q+1} - \frac{a^{q+1}}{q+1} \right] dt dx \\ &\geq \int_A h(x) \frac{(t_0 \omega_\epsilon)^{q+1}}{q+1} dx > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$-\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(\widehat{t}_\epsilon \omega_\epsilon) dx \leq -\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t_0 \omega_\epsilon) dx < 0. \quad (2.61)$$

De (2.60) e (2.61) temos

$$\max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Consequentemente $c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$. Do Teorema do Passo da Montanha temos $c \geq \rho$ então,

$$\rho \leq c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} \text{ se } 1 < q < 2^* - 1 \text{ para } \lambda, a > 0.$$

Mostraremos agora o item i)

Caso (i) $\rho \leq c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$ para $0 \leq q \leq 1$ $(\lambda, a) \in (0, \lambda_1) \times (0, a_{*1})$ para algum $\lambda_1 > 0$ e $a_{*1} > 0$

Dividiremos o item (i) em dois casos

• **Caso** $q = 1$

De modo semelhante ao caso em que $1 < q < 2^* - 1$ temos

$$\max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}.$$

Neste momento lembremos que a função M_λ foi definida por

$$M_\lambda = \begin{cases} -\widehat{M}\lambda^{\frac{2}{1-q}} & \text{se } 0 \leq q < 1 \\ 0 & \text{se } q = 1. \end{cases}$$

Desde que $q = 1$ então $M_\lambda = 0$ assim

$$\max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}} + 0,$$

ou seja,

$$\max_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda.$$

Consequentemente $c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$. Pelo Teorema do Passo da Montanha $\rho \leq c$ então,

$$\rho \leq c < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda \quad \text{quando } q = 1.$$

• **Caso $0 \leq q < 1$**

Observe que

$$I_{\lambda,a}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u)dx - \frac{1}{2^*}|u|_{2^*}^{2^*}.$$

Seja $t > 0$ e fazendo $u = t\omega_\epsilon$, assim

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) = \frac{t^2}{2}\|\omega_\epsilon\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}|\omega_\epsilon|_{2^*}^{2^*}.$$

Novamente de (2.55)

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}\right)S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx = \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx.$$

De (2.60)

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx.$$

Existe $t_0 > 0$ e para $t \in [0, t_0]$

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} + M_\lambda$$

para algum $\epsilon > 0$. Agora, tome $\epsilon > 0$ tal que $\omega_\epsilon(0) > \frac{a}{t_0}$. Assim para $t \geq t_0$, $\Omega_a = \{t_0\omega_\epsilon > a\} \subset \{t\omega_\epsilon > a\}$ e

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &= \frac{1}{2}\|t\omega_\epsilon\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (t\omega_\epsilon)^{2^*} dx \\ &= \frac{t^2}{2}\|\omega_\epsilon\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}|\omega_\epsilon|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

Usando (2.55) obtemos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &\leq \frac{t^2}{2}S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx - \frac{t^{2^*}}{2^*}S^{\frac{N}{2}}. \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}\right)S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx. \end{aligned}$$

Desde que $\vartheta(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^{2^*}}{2^*}$ obtemos

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) = \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx. \quad (2.62)$$

Note que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx \geq \lambda \int_{\Omega_a} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx.$$

Assim,

$$-\lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx \leq -\lambda \int_{\Omega_a} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx. \quad (2.63)$$

Logo, de (2.63) em (2.62) temos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &\leq \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\Omega_a} h(x)F(t\omega_\epsilon)dx \\ &= \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\Omega_a} h(x) \int_0^{t\omega_\epsilon} H(t-a)(t^+)^q dt dx \\ &= \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\Omega_a} h(x) \left(\int_0^a H(t-a)(t^+)^q dt + \int_a^{t\omega_\epsilon} H(t-a)(t^+)^q dt \right) dx \\ &\leq \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \lambda \int_{\Omega_a} h(x) \int_a^{t\omega_\epsilon} (t^+)^q dt dx \\ &= \vartheta(t)S^{\frac{N}{2}} - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x)((t\omega_\epsilon)^{q+1} - (a)^{q+1})dx. \end{aligned}$$

Usando, o fato que

$$\max_{t \geq 0} \vartheta(t) = \vartheta(1) = \frac{1}{N} \quad (\max_{t \geq 0} \vartheta(t) \geq \vartheta(t) \geq \vartheta(t_0)),$$

obtemos para $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &\leq \max_{t \geq 0} \vartheta(t) S^{\frac{N}{2}} - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) ((t\omega_\epsilon)^{q+1} - a^{q+1}) dx \\ &\leq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) ((t\omega_\epsilon)^{q+1} - (a)^{q+1}) dx. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Observe que

$$-\frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) ((t\omega_\epsilon)^{q+1} - a^{q+1}) dx \leq -\frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) \left((\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1} \right) dx.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) ((t\omega_\epsilon)^{q+1} - a^{q+1}) dx &= -\frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) \left((t\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{t_0}{t_0} a\right)^{q+1} \right) dx \\ &= -\frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) (t\omega_\epsilon)^{q+1} dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) \left(\frac{t_0}{t_0} a\right)^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Sabemos que $t > t_0$ assim

$$-\frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) (t\omega_\epsilon)^{q+1} dx \leq -\frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) (t_0\omega_\epsilon)^{q+1} dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) ((t\omega_\epsilon)^{q+1} - a^{q+1}) dx &\leq -\frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) (\omega_\epsilon)^{q+1} dx \\ &\quad + \frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) \left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1} dx. \end{aligned}$$

Obtemos,

$$-\frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) ((t\omega_\epsilon)^{q+1} - a^{q+1}) dx \leq -\frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) \left((\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1} \right) dx. \quad (2.65)$$

De (2.65) em (2.64) temos

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \leq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \frac{\lambda}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x)(t\omega_\epsilon)^{q+1} dx + \frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) \left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1} dx.$$

Logo,

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) \leq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) \left((\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1} \right) dx.$$

Agora afirmamos que existe $\lambda_3 > 0$ satisfazendo

$$\lambda c_1 > \widehat{M} \lambda^{\frac{2}{1-q}} \text{ para } \lambda \in (0, \lambda_3). \quad (2.66)$$

onde

$$c_1 = c_1(a) = \left(\frac{t_0^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) \left((\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{a}{t_0}\right)^{q+1} \right) dx \right)$$

e \widehat{M} é uma constante positiva que depende de q, N e $|h|_\alpha$.

Como $c_1(0) > 0$, existe $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \xi < c_1(0)$.

Considerando

$$\theta(a) = c_1(a) - \xi$$

e sendo $c_1 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, segue que $\theta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então existe $a_{*1} > 0$ tal que

$$\theta(a) > 0 \quad \forall a \in (0, a_{*1}),$$

isto é,

$$c_1(a) - \xi > 0 \Leftrightarrow c_1(a) > \xi \quad \forall a \in (0, a_{*1}).$$

Tomando

$$\lambda < \left(\frac{\xi}{\widehat{M}} \right)^{\frac{1-q}{1+q}} \equiv \lambda_3 < \left(\frac{c_1}{\widehat{M}} \right)^{\frac{1-q}{1+q}} \text{ para todo } a \in (0, a_{*1})$$

temos,

$$\lambda < \left(\frac{\xi}{\widehat{M}} \right)^{\frac{1-q}{1+q}},$$

ou seja,

$$\lambda^{\frac{1+q}{1-q}} < \left(\frac{\xi}{\widehat{M}} \right)$$

daí,

$$\frac{\lambda^{\frac{2}{1-q}}}{\lambda} < \frac{\xi}{\widehat{M}}$$

como $c_1(a) > \xi$

$$\frac{\lambda^{\frac{2}{1-q}}}{\lambda} < \frac{\xi}{\widehat{M}} < \frac{c_1(a)}{\widehat{M}}.$$

Logo,

$$\lambda^{\frac{2}{1-q}} \widehat{M} < \lambda c_1(a).$$

Mostrando que (2.66) é verdadeira. Portanto,

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) &\leq \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \frac{\lambda t_0^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega_a} h(x) \left((\omega_\epsilon)^{q+1} - \left(\frac{a}{t_0} \right)^{q+1} \right) dx \\ &= \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \lambda c_1(a) < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - \lambda^{\frac{2}{1-q}} \widehat{M} = \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} - M_\lambda, \end{aligned}$$

isto é,

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + M_\lambda \text{ para } t \geq t_0.$$

Fazendo $\lambda_1 = \min\{\lambda_2, \lambda_3\}$ encontramos

$$I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + M_\lambda \text{ para todo } \lambda \in (0, \lambda_1).$$

Daí,

$$\sup_{t \geq 0} I_{\lambda,a}(t\omega_\epsilon) < \frac{S^{\frac{N}{2}}}{N} + M_\lambda \text{ para todo } \lambda \in (0, \lambda_1).$$

Concluimos assim a demonstração do lema. ■

Resultado Principal

Neste capítulo mostraremos um resultado de existência, multiplicidade e regularidade de soluções para o problema (P) usando o Princípio Variacional de Ekeland, o Teorema Min-Max de Ky-Fan e o Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente lipschitziano . Iniciaremos enunciando os seguintes teoremas.

Teorema 3.1 (*Princípio Variacional de Ekeland*)(ver [16]) *Seja $(X, d) \equiv X$ um espaço métrico completo e $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ e um funcional semicontínuo inferiormente (l.s.c). Assim dado $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in X$ tal que*

$$I(u_\epsilon) \leq \inf I + \epsilon \quad e \quad I(u_\epsilon) < I(u) + \epsilon d(u_\epsilon, u) \quad \text{com } u \neq u_\epsilon.$$

Teorema 3.2 (*Min-max de Ky-Fan*)(ver [13]) *Seja X um espaço de Hilbert e $A, B \subset X$ conjuntos convexos. Se $F : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz*

$$\{v \in X \mid -F(u, v) < c\} \quad \text{for } \text{convexo} \quad \forall u \in A, c \in \mathbb{R},$$

$$\{u \in X \mid F(u, v) < c\} \quad \text{for } \text{convexo} \quad \forall v \in B, c \in \mathbb{R},$$

$$F(., v) \text{ é semicontinua inferiormente em } A, \quad \forall v \in B,$$

$$-F(u, .) \text{ é l.s.c em } B \cap X_n \quad \forall u \in A,$$

onde

$$X_n \subset X, \quad \dim X_n < \infty$$

existe $\tilde{v} \in B$ e $\lambda > \sup_A \inf_B F(u, v)$ tal que $\{u \in A; F(u, \tilde{v}) \leq \lambda\}$ é compacto. Então,

$$\sup_B \inf_A F(u, v) = \inf_A \sup_B F(u, v).$$

Enunciaremos e demonstraremos agora o resultado principal da nossa dissertação.

Recordemos, primeiramente o problema (P) o qual é dado por

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = \lambda h(x)H(u-a)u^q + u^{2^*-1} \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde $\lambda, a > 0$ são parâmetros reais $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função integrável em \mathbb{R}^N ,

$$h \in L^\alpha(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{onde } \alpha = \frac{2^*}{2^* - (q+1)}. \quad (H)$$

H é a função Heaviside, isto é,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente de Sobolev com $N \geq 3$ e $0 \leq q < 2^* - 1$.

Teorema 3.3 *Seja h satisfazendo (H) e assumamos $0 \leq q < 2^* - 1$, $\lambda, a > 0$. Então,*

i) Se $0 \leq q \leq 1$ existem $\lambda_ > 0$ e $a_* > 0$, tal que para $\lambda \in (0, \lambda_*)$ e $a \in (0, a_*)$ existe uma função positiva $u_i = u_i(\lambda, a) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W_{loc}^{2,2^*}(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, 2$ satisfazendo*

$$(i)_1 \quad -\Delta u_i = \lambda h(x)H(u_i - a)u_i^q + u_i^{2^*-1} \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

$$(i)_2 \quad \text{med}(\{u_i > a\}) > 0$$

$$(i)_3 \quad I_{\lambda,a}(u_2) < 0 < I_{\lambda,a}(u_1)$$

ii) Se $1 < q < 2^ - 1$, então existe uma função positiva $u_0 = u_0(\lambda, a) \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W_{loc}^{2,2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$(ii)_1 \quad -\Delta u_0 = \lambda h(x)H(u_0 - a)u_0^q + u_0^{2^*-1} \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

$$(ii)_2 \quad \text{med}(\{u_0 > a\}) > 0$$

$$(ii)_3 \quad I_{\lambda,a}(u_0) > 0.$$

Demonstração: Vamos considerar primeiramente

Caso (i) $0 \leq q \leq 1$.

Primeira solução :(Teorema do Passo da Montanha)

Seja $\lambda_0, \lambda_1, a_{*1}$ dados pelos Lemas 2.1 e 2.3. Tomando $\lambda_* = \min\{\lambda_0, \lambda_1\}$ então $\lambda \in (0, \lambda_*)$, $a \in (0, a_{*1})$. Vimos pelo Lema 2.1 que $I_{\lambda,a} \in Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ e satisfaz a geometria do passo da montanha. Assim, pelo Teorema do Passo da Montanha existe uma sequência $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I_{\lambda,a}(u_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad m(u_n) \rightarrow 0,$$

onde $(w_n) \subset \partial I_{\lambda,a}(u_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$ com $m(u_n) = |w_n|_*$ satisfazendo

$$w_n = Q'(u_n) - \lambda \rho_n - \Psi'(u_n)$$

com $(\rho_n) \subset \partial \Phi(u_n)$.

Usando um argumento análogo da prova do Lema 2.3 concluímos que a menos de subsequência

$$u_n \rightharpoonup u_1 \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

$$u_n(x) \rightarrow u_1(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

para algum $u_1 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $u_1 \geq 0$.

Utilizando o raciocínio feito no Lema 2.3 temos

$$\rho_n \rightharpoonup \rho_0 \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

$$\rho_n(x) \rightarrow \rho_0(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

para algum $\rho_0 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\rho_0 \geq 0$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0 \varphi dx \quad \forall \varphi \in (L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N))^*$$

e assim para todo $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ em (2.23) obtemos

$$\langle w_n, \varphi \rangle = Q'(u_n)\varphi - \langle \lambda \rho_n, \varphi \rangle - \Psi'(u_n)\varphi.$$

Desde que $(\rho_n) \subset \partial\Phi(u_n)$ então $(\rho_n) \subset (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^* \subset (L^{2^*}(\mathbb{R}^N))^*$. Pelo Teorema da Representação Riesz

$$\langle \rho_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi dx \text{ para todo } \varphi \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Em particular,

$$\langle \rho_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi dx \text{ para todo } \varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle w_n, \varphi \rangle &= Q'(u_n)\varphi - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi dx - \Psi'(u_n)\varphi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \nabla \varphi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{2^*-1} \varphi dx.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Como, $u_n \rightharpoonup u_1$, e $|w_n|_* = m(u_n) \rightarrow 0$. passando ao limite em (3.1) obtemos

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_1 \nabla \varphi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0 \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} (u_1^+)^{2^*-1} \varphi dx.$$

Logo, u_1 é solução fraca para a equação

$$-\Delta u_1 = \lambda \rho_0 + u_1^{2^*-1}.$$

Assim,

$$-\Delta u_1 - u_1^{2^*-1} = \lambda \rho_0.$$

Desde que $\rho_0 \in (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^* \subset L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ pelo Teorema de Agnom-Douglas-Nirenberg (apêndice A) existe uma única $u_1 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \cap W_{loc}^{2,2^*}(\mathbb{R}^N)$.

Prova de $(i)_1$ $-\Delta u_1 = \lambda h(x)H(u_1 - a)u_1^q + u_1^{2^*-1}$ *q.t.p. em \mathbb{R}^N .*

Pelo Lema 2.2 temos que

$$\rho_0(x) \in [h(x)\underline{f}(u_1), h(x)\overline{f}(u_1)] \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Logo,

$$\lambda \rho_0(x) \in \lambda [h(x)\underline{f}(u_1), h(x)\overline{f}(u_1)] \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$-\Delta u_1 - u_1^{2^*-1} \in \lambda [h(x)\underline{f}(u_1), h(x)\overline{f}(u_1)] \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{3.2}$$

Além disso, o Lema 2.3 mostra que $u_n \rightarrow u_1$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e pela continuidade de $I_{\lambda,a}$ temos $I_{\lambda,a}(u_n) \rightarrow I_{\lambda,a}(u_1)$ então,

$$I_{\lambda,a}(u_1) = c > 0 \quad (3.3)$$

e $u_1 \not\equiv 0$.

Consideremos agora o conjunto,

$$\Gamma_a(u_1) = \{x \in \mathbb{R}^N; u_1(x) = a\}.$$

Afirmamos que

$$med(\Gamma_a(u_1)) = 0. \quad (3.4)$$

Suponha por contradição que $med(\Gamma_a(u_1)) > 0$ então do Teorema de Morrey-Stampacchia ([21])

$$-\Delta u_1(x) = 0 \text{ q.t.p. em } \Gamma.$$

De (3.2) temos,

$$-u_1^{2^*}(x) \in \lambda[h(x)\underline{f}(u_1), h(x)\overline{f}(u_1)] \text{ q.t.p. em } \Gamma.$$

Observe que

$$0 \leq \underline{f}(u_1) \leq \overline{f}(u_1) \leq u_1^q(x) \text{ q.t.p. em } \Gamma.$$

Então,

$$0 \leq \lambda h(x)\underline{f}(u_1) \leq \lambda h(x)\overline{f}(u_1) \leq \lambda h(x)u_1^q(x) \text{ q.t.p. em } \Gamma.$$

Assim,

$$0 \leq \lambda h(x) \underline{f}(u_1) \leq -u_1^{2^*-1}(x) \leq \lambda h(x) \bar{f}(u_1) \leq \lambda h(x) u_1^q(x) \text{ q.t.p. em } \Gamma,$$

ou seja,

$$0 \leq -u_1^{2^*-1}(x) \leq \lambda h(x) u_1^q(x) \text{ q.t.p. em } \Gamma.$$

Como $u_1(x) = a$ para x em Γ obtemos

$$0 \leq -a^{2^*-1} \leq \lambda h(x) (a)^q \text{ q.t.p. em } \Gamma.$$

Logo,

$$a^{2^*-1} \leq 0 \leq \lambda h(x) (a)^q + a^{2^*-1} \text{ q.t.p. em } \Gamma,$$

isto é,

$$0 \in [a^{2^*-1}, \lambda h(x) a^q + a^{2^*-1}] \text{ q.t.p. em } \Gamma.$$

O que é uma contradição.

Logo, $med(\Gamma_a(u_1)) = 0$.

De (3.2), (3.4) e (2.33) podemos concluir que

$$-\Delta u_1 = h(x) H(u_1 - a) u_1^q + u_1^{2^*-1} \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

Prova de (i)₂ $med(\{u_1 > a\}) > 0$.

De fato, suponha por contradição que $med(\{u_1 > a\}) = 0$.

Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u_1) = 0$$

logo,

$$I_{\lambda,a}(u_1) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx$$

é diferenciável.

Daí,

$$I'_{\lambda,a}(u_1)u_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx$$

assim u_1 é ponto crítico de $I'_{\lambda,a}(u_1) = 0$.

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx.$$

Além disso, usando a definição de S , temos,

$$S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|u_1\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx.$$

Lembremos que S é a melhor constante de imersão $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\begin{aligned} S \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|u_1\|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} \\ S \left(\|u_1\|_{2^*}^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq |u_1|_{2^*}^{2^*} \\ S \left(\|u_1\|_{2^*}^{2^*} \right)^{2 \cdot \frac{N-2}{2N}} &\leq |u_1|_{2^*}^{2^*} \\ S \left(\|u_1\|_{2^*}^{2^*} \right)^{\frac{N-2}{N}} &\leq |u_1|_{2^*}^{2^*} \\ S &\leq \frac{|u_1|_{2^*}^{2^*}}{\left(|u_1|_{2^*}^{2^*} \right)^{\frac{N-2}{N}}} = \left(|u_1|_{2^*}^{2^*} \right)^{1 - \frac{N-2}{N}} \\ S &\leq \left(|u_1|_{2^*}^{2^*} \right)^{\frac{2}{N}} \\ S^{\frac{2}{N}} &\leq \left(|u_1|_{2^*}^{2^*} \right) = \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_{\lambda,a}(u_1) = \frac{1}{2} \|u_1\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) F(u_1) dx - \frac{1}{2^*} \|u_1\|_{2^*}^{2^*}.$$

Daí,

$$I_{\lambda,a}(u_1) = \frac{1}{2}\|u_1\|^2 - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx.$$

Como,

$$\|u_1\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx.$$

Temos

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_1) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx \\ &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} u_1^{2^*} dx \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, $I_{\lambda,a}(u_1) \geq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$.

Observe que a última desigualdade contradiz o Lema 2.3 em que $I_{\lambda,a}(u_1) = c < \frac{1}{N} S^{\frac{N}{2}}$.

Portanto, $med(\{u_1 > a\}) > 0$.

Provamos assim que u_1 é uma solução do problema (P).

Segunda solução:(Princípio Variacional de Ekeland)

Prova de $I_{\lambda,a}(u_2) < 0$.

Para mostrarmos a existência de u_2 definimos uma função auxiliar.

$$v_\tau(x) = \begin{cases} \tau a, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 2\tau a(1 - |x|), & \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde $\tau > (q+2)^{\frac{1}{q+1}}$.

Note que $v_\tau \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\begin{aligned}
\|v_\tau\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\tau|^2 dx = \int_{\{|x| \leq 1\}} |\nabla v_\tau|^2 dx + \int_{\{|x| > 1\}} |\nabla v_\tau|^2 dx \\
&= \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} |\nabla(\tau a)|^2 dx + \int_{\{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}} |\nabla \cdot (2\tau a(1 - |x|))|^2 dx + \int_{\{|x| \geq 1\}} |\nabla 0|^2 dx \\
&= \int_{\{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}} |\nabla 2\tau a(1 - |x|)|^2 dx \\
&= \int_{\{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}} (2\tau a)^2 |\nabla 1 - \nabla |x||^2 dx \\
&= (2\tau a)^2 \int_{\{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}} |\nabla 1 - \nabla |x||^2 dx \\
&= (2\tau a)^2 \int_{\{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}} |-\nabla |x||^2 dx \\
&= (2\tau a)^2 \int_{\{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}} |\nabla |x||^2 dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável

$$x = \alpha_N r, \quad \alpha_N \in S^{N-1} \quad \Rightarrow \quad dx = r^{N-1} ds(\alpha) dr,$$

temos $|x| = r$. Logo $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$, implicando em $|\nabla r| = 1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|v_\tau\|^2 &= 4\tau^2 a^2 \int_{\{\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1\}} |\nabla(|x|)|^2 dx \\
&\leq 4\tau^2 a^2 \int_{\{|x| \leq 1\}} |\nabla(|x|)|^2 dx \\
&\leq 4\tau^2 a^2 \int_0^1 \int_{S^{N-2}} |\nabla|\alpha_N r||^p r^{N-1} ds r dr \\
&\leq 4\tau^2 a^2 \int_0^1 \int_{S^{N-2}} r^{N-1} ds \alpha dr \\
&\leq 4\tau^2 a^2 \alpha_N \int_0^1 r^{N-1} dr \\
&\leq 4\tau^2 a^2 \alpha_N \frac{1}{N} = 4\tau^2 a^2 \omega_N.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|v_\tau\|^2 \leq 4\tau^2\omega_N \quad (3.5)$$

onde ω_N é a área da esfera unitária e α_N é o volume da bola unitária. Se

$$\begin{aligned} a < \frac{\sqrt{r}}{2\tau\sqrt{\omega_N}} = a_1 &\Leftrightarrow 2\tau a\sqrt{\omega_N} < \sqrt{r} \\ &\Leftrightarrow 4\tau a^2\omega_N < r \end{aligned}$$

então,

$$\|v_\tau\| \leq r^{\frac{1}{2}} < r,$$

onde r é dado pela geometria do passo da montanha, temos $v_\tau \in B_r$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(v_\tau)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^{v_\tau} f(t)dt dx \\ &= \int_{\{|x|\leq 1\}} h(x) \int_0^{v_\tau} f(t)dt dx + \int_{\{\frac{1}{2}\leq |x|\leq 1\}} h(x) \int_0^{v_\tau} f(t)dt dx \\ &\quad + \int_{\{|x|\geq 1\}} h(x) \int_0^{v_\tau} f(t)dt dx. \end{aligned}$$

Recorde que $f(t) = H(t-a)(t^+)^q$ então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^{v_\tau} H(t-a)(t^+)^q dt dx &= \int_{\{|x|\leq 1\}} h(x) \int_0^{v_\tau} H(t-a)(t^+)^q dt dx \\ &\quad + \int_{\{\frac{1}{2}\leq |x|\leq 1\}} h(x) \int_0^{v_\tau} H(t-a)(t^+)^q dt dx \\ &\quad + \int_{\{|x|\geq 1\}} h(x) \int_0^{v_\tau} f(t) = H(t-a)(t^+)^q dt dx. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^{v_\tau} H(t-a)(t^+)^q dt dx &\geq \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) \int_0^{v_\tau} H(t-a)(t^+)^q dt dx \\
&= \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) \int_0^a H(t-a)(t^+)^q dt dx \\
&\quad + \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) \int_a^{v_\tau} H(t-a)(t^+)^q dt dx \\
&\geq \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) \int_a^{\tau a} (t^+)^q dt dx \\
&= \frac{1}{q+1} \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) ((\tau a)^{q+1} - a^{q+1}) dx \\
&= \frac{1}{q+1} ((\tau a)^{q+1} - a^{q+1}) \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^{v_\tau} H(t-a)(t^+)^q dt dx \geq \frac{a^{q+1}(\tau^{q+1} - 1)}{q+1} \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) dx. \quad (3.6)$$

Então,

$$I_{\lambda,a}(v_\tau) = \frac{1}{2} \|v_\tau\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^{v_\tau} H(t-a)(t^+)^q dt dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (v_\tau^+)^{2^*} dx$$

Desde que

$$\frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (v_\tau^+)^{2^*} dx \geq 0,$$

pois $v_\tau \geq 0$ temos

$$I_{\lambda,a}(v_\tau) \leq \frac{1}{2} \|v_\tau\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x) \int_0^{v_\tau} H(t-a)(t^+)^q dt dx.$$

De (3.5) e (3.6)

$$I_{\lambda,a}(v_\tau) \leq 4\omega_N \tau^2 a^2 - \lambda a^{q+1} \frac{(\tau^{q+1} - 1)}{q+1} \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) dx,$$

ou seja,

$$I_{\lambda,a}(v_\tau) \leq a^{q+1} \left(4\omega_N \tau^2 a^{1-q} - \lambda \frac{(\tau^{q+1} - 1)}{q+1} \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) dx \right).$$

Note que

$$4\omega_N \tau^2 a^{1-q} - \lambda \frac{(\tau^{q+1} - 1)}{q+1} \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) dx \leq 0$$

se e somente se,

$$4\omega_N \tau^2 a^{1-q} \leq \lambda \frac{(\tau^{q+1} - 1)}{q+1} \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) dx$$

isto é,

$$a^{1-q} \leq \frac{1}{4\omega_N \tau^2} \cdot \lambda \frac{(\tau^{q+1} - 1)}{q+1} \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) dx.$$

Fazendo

$$C_{2,\tau} = \frac{1}{4\omega_N \tau^2} \quad e \quad C_{1,\tau} = \frac{(\tau^{q+1} - 1)}{q+1} \int_{\{|x| \leq \frac{1}{2}\}} h(x) dx.$$

Então,

$$I_{\lambda,a}(v_\tau) < 0 \text{ se } a^{1-q} < \lambda \frac{C_{1,\tau}}{C_{2,\tau}} = a_2^{1-q}.$$

Observe que

$$a_1 = \frac{\sqrt{r}}{2\tau\sqrt{\omega_N}}, \quad a_2 = \left(\frac{\lambda C_{1,\tau}}{C_{2,\tau}} \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad e \quad a_{*1} > 0.$$

Considerando $a_*(\lambda) = \min\{a_1, a_2, a_{*1}\}$. Note que no Lema 2.3, $I_{\lambda,a}$ satisfaz a condição $(PS)_c$, além disso $v_\tau \in B_r$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $I_{\lambda,a}(v_\tau) < 0$ segue-se

$$\inf_{\overline{B_r}} I_{\lambda,a}(u) \leq \inf_{B_r} I_{\lambda,a}(u) < 0$$

daí,

$$-\infty < \inf_{\overline{B_r}} I_{\lambda,a} < 0 \text{ para } a \in (0, a_*).$$

Seja $I_{\lambda,a} : \overline{B_r} \rightarrow \mathbb{R}$ pelo Princípio Variacional de Ekeland existe $u_\epsilon \in \overline{B_r}$ tal que

$$I_{\lambda,a}(u_\epsilon) \leq \inf_{\overline{B_r}} I_{\lambda,a} + \epsilon \quad e \quad I_{\lambda,a}(u) < I_{\lambda,a}(u) + \epsilon \|u - u_\epsilon\| \quad u \neq u_\epsilon \quad \forall u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \quad (3.7)$$

Considerando $\epsilon > 0$ tal que

$$0 < \epsilon < \inf_{\partial B_r} I_{\lambda,a} - \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a}$$

temos

$$\epsilon + \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} < \inf_{\partial B_r} I_{\lambda,a}.$$

De (3.7) obtemos

$$I_{\lambda,a}(u_\epsilon) < \inf_{\partial B_r} I_{\lambda,a}.$$

Assim $u_\epsilon \in B_r^0$, pois caso contrário, se $u_\epsilon \notin B_r^0$ então $u_\epsilon \in \partial B_r$ daí,

$$\inf_{u_\epsilon \in \partial B_r} I_{\lambda,a}(u_\epsilon) < I_{\lambda,a}(u_\epsilon).$$

Seja $\|u_\epsilon\| = d$ e $\delta < r - d > 0$ suficientemente pequeno $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$ tal que $u_\delta = u_\epsilon + \delta v \in \overline{B}_r$.

De fato

$$\|u_\delta\| = \|u_\epsilon + \delta v\| \leq \|u_\epsilon\| + \delta\|v\| \leq d + \delta < r.$$

De (3.7)

$$\begin{aligned} I_{\lambda,a}(u_\epsilon) &< I_{\lambda,a}(u_\delta) + \epsilon\|u_\delta - u_\epsilon\| \\ &< I_{\lambda,a}(u_\epsilon + \delta v) + \epsilon\delta\|v\|. \end{aligned}$$

Então,

$$I_{\lambda,a}(u_\epsilon + \delta v) + \epsilon\delta\|v\| - I_{\lambda,a}(u_\epsilon) > 0.$$

Daí,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} (-\epsilon\|v\|) \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{I_{\lambda,a}(u_\epsilon + \delta v) - I_{\lambda,a}(u_\epsilon)}{\delta} \leq I_{\lambda,a}^0(u_\epsilon; v).$$

Logo,

$$-\epsilon\|v\| \leq I_{\lambda,a}^0(u_\epsilon; v).$$

Desde que $u_\epsilon, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema 1.1 tem-se

$$I_{\lambda,a}^0(u_\epsilon; v) = \max_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v \rangle \quad \forall \quad u_\epsilon, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Portanto,

$$-\epsilon\|v\| \leq I_{\lambda,a}^0(u_\epsilon, v) = \max_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v \rangle.$$

Assim,

$$-\epsilon\|v\| \leq \max_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v \rangle.$$

Trocando v por $-v$ obtemos

$$-\epsilon\|v\| \leq \max_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, -v \rangle = - \min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, -v \rangle.$$

Assim,

$$-\epsilon\|v\| \leq - \min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v \rangle.$$

Daí,

$$\min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v \rangle \leq \epsilon\|v\| \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Como $\|v\| \leq 1$, concluímos que

$$\min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v \rangle \leq \epsilon.$$

Portanto,

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \langle \omega, v \rangle \leq \epsilon.$$

Pelo Teorema Min-max Ky-Fan obtemos

$$\min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \sup_{\|v\| \leq 1} \langle \omega, v \rangle \leq \epsilon,$$

como

$$\min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} \sup_{\|v\| \leq 1} \langle \omega, v \rangle = \min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} |w|_*.$$

Logo,

$$\min_{\omega \in \partial I_{\lambda,a}(u_\epsilon)} |w|_* < \epsilon.$$

Isto, juntamente com (3.7), implica que existe $(u_n) \in \overline{B}_r$ fazendo $\epsilon = \frac{1}{n}$ tal que

$$\inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} < I_{\lambda,a}(u_n) < \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} + \frac{1}{n}.$$

Passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$I_{\lambda,a}(u_n) \longrightarrow \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} = \widehat{c}$$

e

$$m(u_n) = |w|_* \longrightarrow 0.$$

Logo (u_n) é uma sequência $(PS)_c$.

Portanto, pelo Lema 2.3 existe uma função $u_2 \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e a menos de subsequência de u_n tal que

$$u_n \longrightarrow u_2 \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

como $I_{\lambda,a}$ é $Lip_{loc}(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ então

$$I_{\lambda,a}(u_n) \longrightarrow I_{\lambda,a}(u_2).$$

Pela unicidade do limite

$$I_{\lambda,a}(u_2) = \inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a}.$$

Como $\inf_{\overline{B}_r} I_{\lambda,a} < 0$ então,

$$I_{\lambda,a}(u_2) < 0. \quad (3.8)$$

Prova de (i)₃ De (3.3) e (3.8) segue que

$$I_{\lambda,a}(u_2) < 0 < I_{\lambda,a}(u_1).$$

Prova de (i)₂ $med(\{u_2 > a\}) > 0$. De fato suponhamos por contradição que $med(\{u_2 > a\}) = 0$.

Logo,

$$I_{\lambda,a}(u_2) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_2|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx$$

pois,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_2)dx = 0$$

quando $med(\{u_2 > a\}) = 0$. Daí, $I_{\lambda,a}(u_2)$ se torna um funcional diferenciável e u_2 é ponto crítico de $I_{\lambda,a}$, então $I'_{\lambda,a}(u_2) = 0$.

Logo

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_2|^2 dx = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx.$$

Como

$$S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_2|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_2|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx.$$

Assim,

$$S \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_2|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \Leftrightarrow S^{\frac{N}{2}} \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx.$$

Temos,

$$I_{\lambda,a}(u_2) = \frac{1}{2} \|u_2\|^2 - \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx$$

pois $\int_{\mathbb{R}^N} h(x)F(u_2)dx = 0$ e como $\|u_2\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx$, obtemos,

$$I_{\lambda,a}(u_2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*} \right) \int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} u_2^{2^*} dx \geq \frac{1}{N} S^{\frac{1}{N}}.$$

Portanto,

$$I_{\lambda,a}(u_2) \geq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} \text{ e } I_{\lambda,a}(u_2) = c.$$

então $c \geq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$ e pelo Lema 2.3 temos $c \leq \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$, o que é uma contradição, portanto $med(\{u_2 > a\}) > 0$.

Seguindo as mesmas idéias feita para a demonstração da primeira solução, segue que u_2 é também uma solução do problema (P) e usando os mesmos argumentos explorados para que u_1 satisfizesse $(i)_1$, temos também u_2 satisfaz $(i)_1$. A demonstração para o caso $1 < q < 2^* - 1$, segue o mesmo raciocínio da demonstração de u_1 .

Finalizando a prova do Teorema. ■

Resultados Importantes

Neste apêndice enunciaremos alguns lemas e teoremas. Esses resultados foram usados para obter soluções do problema (P) no capítulo 2 e no capítulo 3.

Teorema A.1 (Brézis e Lieb)(ver [24]) *Seja Ω um subconjunto aberto do \mathbb{R}^N e seja $(u_n) \subset L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Se*

(i) *(u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$*

(ii) *$u_n \rightarrow u$ q.t.p em Ω , então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(|u_n|_{L^p(\Omega)}^p - |u_n - u|_{L^p(\Omega)}^p \right) = |u|_{L^p(\Omega)}^p$$

Lema A.1 (Brézis e Lieb)(ver [12]) *Seja Ω um subconjunto de aberto do \mathbb{R}^N e $(f_n) \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p$. Suponha que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω e que existe $C > 0$, tal que*

$$\int_{\Omega} |f_n|^p dx \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então,

$$\int_{\Omega} f_n \varphi dx \longrightarrow \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \forall \varphi \in L^q(\Omega),$$

onde, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lema A.2 (*Lema de Fatou*)(ver [17]) *Seja (f_n) uma sequência de funções mensurável e g, h são funções integráveis então*

$$a) f_n \leq g \text{ q.t.p. para todo } n \Rightarrow \int \limsup f_n \geq \limsup \int f_n.$$

$$b) f_n \geq h \text{ q.t.p. para todo } n \Rightarrow \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Teorema A.2 (*Teorema da Convergência Dominada de Lesbeque*)(ver [11]) *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis que convergem em quase todo ponto para função mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que*

$$|f_n| \leq g \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema A.3 (*Desigualdade de Hölder*)(ver [11]) *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, onde $1 \leq p < +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$fg \in L^1(\Omega) \text{ e } \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Uma consequência muito útil da desigualdade de Hölder é a seguinte. Sejam $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ funções tais que

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), 1 \leq i \leq k \text{ com } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então o produto

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_k \in L^p(\Omega)$$

e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, então $f \in L^s(\Omega)$ para todo $p \leq s \leq q$ e se verifica a desigualdade de interpolação

$$\|f\|_{L^s(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|f\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} \text{ com } \frac{1}{s} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Teorema A.4 (Teorema da Representação de Riesz)(ver [11]) Seja $1 < p < \infty$ e $\varphi : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe uma função $g \in L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} g f d\mu, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso, $\|\varphi\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|g\|_{L^q(\Omega)}$.

Teorema A.5 (Teorema de Agnom- Douglas - Niremberg)(ver [19])

Seja $f \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. Então existe uma única $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ que é solução fraca do da equação,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante C independente de f e u tal que $\|u\|_{W^{2,p}} \leq C\|f\|_p$.

Teorema A.6 (ver [11]) Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se (x_n) é uma sequência limitada em X , então existem uma subsequência $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ e $x \in X$ tais que

$$x_{n_j} \rightarrow x \text{ em } X.$$

Teorema A.7 (ver [11]) Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que

$$f_n \rightarrow f \text{ em } L^p(\Omega).$$

Então, a menos de subsequência,

$$(1) f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ q.t.p em } \Omega$$

$$(2) |f_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p em } \Omega, \text{ onde } g \in L^p(\Omega).$$

Teorema A.8 (*Teorema do Valor Médio*)(ver [20]) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f for derivável em (a, b) , então existe $\lambda \in (a, b)$ tal que*

$$f'(\lambda) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Lema A.3 (ver [23]) *O Gradiente Generalizado de uma função $f \in Lip_{loc}(X, \mathbb{R})$ ($\partial f(x)$) é sempre um conjunto diferente do vazio.*

Teorema A.9 (*Teorema de Hahn- Banach, 2ª Forma Geométrica*) (ver[11]) *Sejam $A, B \subset X$ convexos, não vazios e disjuntos. Suponha que A é fechado e B é compacto. Então, existe um hiperplano fechado que separa no sentido estrito os conjuntos A e B .*

Funcionais Diferenciáveis

Definição B.1 (ver [24], pg 07) Seja X um espaço normado e $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que J é Gâteaux diferenciável em u quando,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + th) - J(u)}{t}$$

existe.

Definição B.2 (ver [24], pg 07) Seja X um espaço normado e $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que J é Frechet diferenciável em $u \in X$ se existir $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que

$$\frac{J(u + h) - J(u) - L(h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|h\| \rightarrow 0.$$

Proposição B.1 (ver [24], pg 08) Se a diferencial de J no sentido de Gateaux é contínua em X , então $J \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Afirmção B.1 O funcional Ψ é de classe $C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

De fato, seja a função

$$\begin{aligned} \Psi : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Psi(u) = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Inicialmente, vamos mostrar que a função Ψ está bem definido. De fato, desde que $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $u^+ \leq |u|$ então

$$\Psi(u) = \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{2^*} dx \leq \frac{1}{2^*} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = \frac{1}{2^*} \|u\|_{2^*}^{2^*} < +\infty.$$

Mostraremos que Ψ é Gateaux diferenciável. Sem perder a generalidade podemos supor que $u \geq 0$, $u^+ = u$.

Além disso, considere $t \in \mathbb{R}$ com $0 < |t| < 1$. Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(s) = \frac{1}{2^*} (u + stv)^{2^*}$ para todo $u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, com t fixado.

Desde que a função f é contínua em $[0, 1]$ e derivável em $(0, 1)$ do Teorema do Valor Médio, existe θ tal que

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(\theta)$$

ou seja,

$$\frac{1}{2^*} (u + tv)^{2^*} - \frac{1}{2^*} u^{2^*} = (u + \theta tv)^{2^*-1} tv$$

Passando ao limite na expressão acima com $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2^*} (u + tv)^{2^*} - \frac{1}{2^*} u^{2^*}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (u + \theta tv)^{2^*-1} \cdot v$$

Note que $|(u + \theta tv)^{2^*-1} v| = (|u + \theta tv|)^{2^*-1} |v| \leq (|u| + |v|)^{2^*-1} |v|$, pois $|t| < 1$ e com $\theta \in (0, 1)$ implica que $|\theta| \cdot |t| < 1$. Logo,

$$|(u + \theta tv)^{2^*-1} v| \leq (|u| + |v|)^{2^*-1} |v|.$$

Observe que $|v| \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e $(|u| + |v|)^{2^*-1} \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{2^*} + \frac{1}{\frac{2^*}{2^*-1}} = 1$ assim pela desigualdade de Hölder

$$|v| (|u| + |v|)^{2^*-1} \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lesbegue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\frac{1}{2^*} (u + tv)^{2^*} - \frac{1}{2^*} u^{2^*}}{t} dx = \int_{\mathbb{R}^N} uv dx.$$

Note que o primeiro membro da igualdade é justamente a derivada de Gateaux de Ψ . Assim, $\int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1} \cdot v dx$ é o candidato natural para ser $\Psi'(u)v$.

Vamos mostrar que $\Psi'(u)$ é contínua no dual $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. De fato, seja $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$$

pela imersão contínua de Sobolev $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ temos

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$$

então a menos de subsequência

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N \tag{B.1}$$

e existe $g \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$|u_n(x)| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \tag{B.2}$$

Decorre de (B.1) e (B.2) que

$$u_n^{2^*-1}(x) \rightarrow u^{2^*-1}(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

$$|u_n^{2^*-1}(x)| \leq |g^{2^*-1}(x)| \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Assim se $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tem-se que

$$u_n^{2^*-1}(x)v(x) \rightarrow u^{2^*-1}(x)v(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$|u_n^{2^*-1}(x)v(x)| \leq |g^{2^*-1}v| \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Observe que $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, $g^{2^*-1} \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{2^*} + \frac{1}{\frac{2^*}{2^*-1}} = 1$, assim pela desigualdade de Hölder

$$|g^{2^*-1}|v| \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

de onde segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1} v dx \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \left| \Psi'(u_n)v - \Psi'(u)v \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_n^{2^*-1} v dx - \int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*-1} v dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}) v dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}| |v| dx. \end{aligned}$$

Como $(u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}) \in L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ pela desigualdade de Hölder temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}| |v| dx \leq \|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{2^*}.$$

Usando as imersões contínua de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Obtemos

$$\|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{2^*} \leq C \|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \|v\|.$$

Desde que $\|v\| \leq 1$, $\forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, segue-se

$$C \|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \|v\| \leq C \|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)}.$$

Portanto,

$$\sup_{\|v\| \leq 1} \left| \Psi'(u_n)v - \Psi'(u)v \right| \leq C \|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}\|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)}.$$

Desde que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$$

então,

$$u_n^{2^*-1} \rightarrow u^{2^*-1} \text{ em } L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N).$$

Logo,

$$|u_n^{2^*-1} - u^{2^*-1}|_{L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Mostrando que $\Psi'(u)$ é contínua no $(D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^* \subset L^{\frac{2^*}{2^*-1}}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, o funcional $\Psi \in C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.

Afirmção B.2 *O funcional Q é de classe $C^1(D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$.*

De fato, seja a função

$$\begin{aligned} Q : D^{1,2}(\mathbb{R}^N) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto Q(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Além disso,

$$Q'(u)v = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N).$$

Primeiro mostraremos que Q é Gâteaux diferenciável. Sejam $u, v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$

$$\frac{\partial Q}{\partial v}(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q(u+tv) - Q(u)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \langle u+tv, u+tv \rangle - \frac{1}{2} \langle u, u \rangle}{t}$$

ou seja,

$$\frac{\partial Q}{\partial v}(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \langle u, v \rangle - t^2 \langle u, u \rangle}{t} = \langle u, v \rangle.$$

Assim, $\langle u, v \rangle$ é o candidato natural para ser $Q'(u)v$. Observe que Q é diferenciável a Fréchet, pois

$$\frac{Q(u+v) - Q(u) - \langle u, v \rangle}{\|v\|} = \frac{\frac{1}{2} \langle u+v, u+v \rangle - \frac{1}{2} \|u\|^2 - \langle u, v \rangle}{\|v\|} = \frac{\|v\|}{2}.$$

Passando ao limite $\|v\| \rightarrow 0$ obtemos

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \left(\frac{Q(u+v) - Q(u) - \langle u, v \rangle}{\|v\|} \right) = \lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|v\|}{2} = 0.$$

Mostrando que Q é diferenciável a Fréchet. Afirmamos que Q é contínua. Observe que $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n \rightarrow u \text{ em } D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \quad (\text{B.3})$$

Para mostrar que Q' é contínuo, devemos verificar que

$$Q'(u_n) \rightarrow Q'(u) \text{ em } (D^{1,2}(\mathbb{R}^N))^*$$

isto é,

$$\|Q'(u_n) - Q'(u)\|_* = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle Q'(u_n) - Q'(u), v \rangle| \rightarrow 0.$$

Dado $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$ temos

$$\begin{aligned} |\langle Q'(u_n) - Q'(u), v \rangle| &= |\langle Q'(u_n), v \rangle - \langle Q'(u), v \rangle| \\ &= |\langle u_n, v \rangle - \langle u, v \rangle| \\ &= |\langle u_n - u, v \rangle| \\ &\leq \|u_n - u\| \|v\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\langle Q'(u_n) - Q'(u), v \rangle| \leq \|u_n - u\| \|v\|$$

para todo $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com $\|v\| \leq 1$.

Donde segue que

$$F \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle Q'(u_n) - Q'(u), v \rangle| \leq \|u_n - u\|.$$

Passando ao limite $n \rightarrow \infty$, obtemos de (B.3)

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |\langle Q'(u_n) - Q'(u), v \rangle|_* = 0.$$

Mostrando que $Q \in C^1(D^{1,2}(\mathbb{R})^N, \mathbb{R})$.

Bibliografia

- [1] Alves C. O e Bertone A. M., *A discontinuous problem involving the p -Laplacian operator and critical exponent in \mathbb{R}* , Electronic J. Diff. Eqs, Vol. 2003 (2003), No. 42, pp. 1-10.
- [2] Alves C. O. ; Bertone A. M. e Gonçalves J. V., *A variational approach to discontinuous problems with Critical Sobolev exponents*, J. Math. Anal. App., 265 (2002) 103-127.
- [3] Ambrosetti A. Calahorrano M. e Dobarro F., *Global branching for discontinuous problems*, Comm. Math., 31 (1990)213-222.
- [4] Ambrosetti A. and Turner R., *some discontinuous variational problems*, Differential Integral Equations., 1, N° 3(1988) 341-349.
- [5] Arcoya A. and Calahorrano M.,*some discontinuous variational problems with a quasilinear operator*, J. Math. Anal. 187 (1994), 1059-1072.
- [6] Badiale M.,*Critical exponent and discontinuous nonlinearities*, Differential Integral Equations 6 (1993), 1173-1185.
- [7] Badiale M.,*Some remarks on elliptic problems with discontinuous nonlinearities*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 51 (1993), 331-342.
- [8] Badiale M.,*Some existence results for sublinear elliptic problems in \mathbb{R}^N* , Funkcialaj Ekvacioj, 39 (1996), 183-202.
- [9] Badiale M. and Tarantello. G,*Existence and multiplicity results for elliptic problems with critical growth and discontinuous nonlinearities*, Nonlinear Analysis, 26 (1997), 639-677.
- [10] Bertone A. M., *Problemas elípticos com não linearidades descontínuas: princípios variacionais e o método de sub e supersoluções*, tese de doutorado, UFPb, 1998

- [11] Brézis H., *Análisis Funcional*, Teoria y Aplicaciones, Versión española de Juan Ramón Esteban, Alianza Editorial, 1984.
- [12] Brézis H. e Lieb.E., *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc, 88(1983), 486-490 .
- [13] Brézis H. Nirenberg L. e Stampacchia G., *Remarks on Ky Fan's min-max theorem*, Boll. Un. Math. Ital. 6 (1972), 293-300.
- [14] Chang K.C., *Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. 80 (1981), 102-129.
- [15] Clarke F.H., *Generalized gradients and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), 247-262.
- [16] Ekeland I., *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974), 324-353.
- [17] Fenandez P. J., *Medida e Integração*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976
- [18] Grossinho M. R. e Tersian S.A., *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations*, 2001
- [19] Kavian O., *Introduction a la Théorie des Points Critiques*, Springer-Verlag, 1993.
- [20] Lima E. L. *Curso de Análise*, Vol 1, (10ª edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [21] Morry C. B. *Multiple integrals in calculus of variational*, Springe, Berlim, 1966.
- [22] Nascimento R. G., *Problemas elípticos não-locais do tipo p-kirchhoff*, Campinas, tese de doutorado, S. P. 2008
- [23] Santos J. A., *Teorema minimax para funcionais localmente lipschitz e aplicações*, dissertação de mestrado, CCT-UFCG, 2007.
- [24] Willem M., *Minimax Theorems*, Progressin Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, 1996.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)