

Tese de Doutorado

**Excitações do tensor de
Weyl na cosmologia
e questões de estabilidade**

Érico Goulart de Oliveira Costa

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Março de 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

*Este trabalho é dedicado a
querida Maria Borba e as
doces emanações do acaso*

Agradecimentos

Mais uma vez agradeço ao professor, amigo e eterno mestre Mário Novello por toda a paciência e dedicação ao longo dos últimos cinco anos. Que a minha geração possa levar adiante a empreitada que ele começou;

Aos colegas do ICRA/BR no CBPF. Em especial às grandes figuras Nelson Pinto Neto, José Martins Salim e Luís Alberto de Oliveira. A música, a filosofia, a literatura os jantares, as controvérsias sobre o ensino e os assuntos correlatos que pude compartilhar com vocês estarão comigo para sempre;

Aos velhos camaradas da casa de madeira em Vargem Grande: André, Fabrício, Jean e Priscila. Podem saber que vai ser muito difícil morar sozinho algum dia (se bem que nem tanto). Ao hoplita das noites cariocas mais tenebrosas Rômulo Abreu e seu conjugado em Copacabana;

A família Goulart Costa em Ouro Branco: Fernando (papai), Théa (mamãe), Clarice, Caio e Sueli. Acho que não preciso dizer muito mais uma vez que um pouco de vocês já está em cada página do trabalho. Obrigado por tudo;

A família Lessa Pinto em Santa Teresa: Bia, Dani, Lucas, Luana, Clara, Julinha, Noé, Bel e Helô. São tantas emoções...Amo vocês muito;

Aos amigos que estão ou passaram pela lendária sala 509: Felipe Tovar, Maria Borba, Nilton Medeiros, Rafael Perez, Rafael Aranha, Gabriel, Diego González, Emanuel Pinho etc. Aos nossos vizinhos da 508 Marcela Campista, Felipe Poulis, Martin Aparicio e mais alguém que eu não me lembre agora.

Aos amigos do CBPF: Baiano, Gabriel Guerrer, Rafael Davi, Alexis, Eduardo, Miriam e Ricardo, Regininha...Ao pessoal da psicologia da UFRJ em particular o grande violonista e compositor Rômulo Death Metal. Ao professor Aloysio Neves por todos os conselhos apaixonados sobre música experimental e de improvisação.

Ao grande amigo Wanderson Costa e Silva pelos ótimos momentos regados à cerveja, jazz, fusion, progressivo, funk, música eletrônica, instrumental, latina, africana, do Afeganistão, da Polônia, erudita, acima ou abaixo do equador, folheações holomorfas, teoremas, corolários, relatividade geral, fofocas e etc...

Ao Boiúna pelas mesmas razões do parágrafo anterior e pelo grande companheiro que ele se mostrou durante estes anos de CBPF.

Aos velhos camaradas de Ouro Branco Fabiano, Edgard, Adib. Companheiros dos pecados da primeira infância;

Ao novo círculo de amigos, companheiros de cervejas às terças, quintas ou esporadicamente: Nando Saliby, Marianas, Sofia, João Paulo, Dinei, Flávio, Clarice, Júlia, Gracindo. Me esqueci de alguém?

Etc, etc, etc...

Ao CNPq

Sumário

Introdução	1
Capítulo 1 – Preliminares	9
1.1 – Campo de Observadores.....	10
1.2 – Substantivação do tensor conforme.....	20
1.3 – Atributos da matéria.....	23
Capítulo 2 – Sobre o formalismo quasi-maxwelliano	26
2.1 – As identidades de Bianchi e a propagação das E.E.....	28
2.2 – As equações quasi-maxwellianas da gravitação.....	31
2.3 – Os invariantes algébricos do tensor de conforme	34
Capítulo 3 – Modelo de mundo homogêneo e isotrópico	37
3.1 – Cinemática do elemento de linha.....	39
3.2 – Dinâmica do elemento de linha.....	40
3.3 – Propriedades conformes das soluções.....	44
Capítulo 4 – A teoria de perturbações revisitada	49
4.1 – Propriedades básicas das perturbações.....	51
4.2 – Decomposição em autofunções de Helmholtz.....	54
4.3 – Equações de movimento.....	60
Capítulo 5 – Estabilidade, dissipação conforme e evolução estroboscópica do retrato de fases	66
5.1 – Sistemas não autônomos e redutibilidade.....	67
5.2 – Autonomia, autovalores e curvas integrais.....	70
5.3 – O teorema da divergência e os critérios de dissipação.....	74

5.4 – A topologia do retrato de fases.....	76
5.5 – Algumas propriedades do conjunto mínimo de observáveis.....	77
5.6 – Considerações sobre a estabilidade gravitacional/mecânica dos fluidos.....	84
Capítulo 6 – Estabilidade conforme do modelo euclidiano.....	87
6.1 – Análise qualitativa.....	88
6.2 – Recursos estroboscópicos para o estudo das perturbações.....	90
6.3 – Dos particulares aos universais.....	99
6.4 – Os fluidos convencionais e a solução geral.....	112
Apêndice.....	118
Conclusão.....	123
Referências.....	128

Introdução

Nós, cosmólogos – cientistas da totalidade, da origem e da transformação –, estamos particularmente interessados no que bem poderia ser chamado de arquitetura cósmica. O arquiteto convencional entende seu cenário de estudo como um processo de organização das coisas e dos objetos de forma estruturada e, talvez, harmônica no espaço tridimensional ao longo do tempo. Sua grande preocupação é, uma vez dados o ambiente físico e a matéria

disponível, distribuir coerentemente as estruturas respeitando a funcionalidade e estabelecendo desta forma relações de proporção entre as diferentes partes. Se o resultado final é compatível com a estética, tanto melhor. Já o cosmólogo procura avaliar os mecanismos físicos e a seqüência de eventos correlacionados que, possivelmente (por causa de uma cascata de fenômenos envolvendo a gravidade) culminaram nas grandes distribuições de matéria (luminosa ou não) “observadas” no universo e como elas se influenciam mutuamente. Estas enormes ilhas de substância apresentam-se de maneiras muito variadas envolvendo tamanho, forma, disposição no espaço e quantidade de matéria [1-3]. A substância pode manifestar-se através de partículas conhecidas em laboratórios, campos eletromagnéticos sob a forma de radiação ou em nuvens colossais de átomos em movimento interagindo pela gravidade. Dependendo das pretensões de entendimento do cientista, ou da propensão para manter a coerência dos pressupostos, estará também em aberto a possibilidade de inclusão de uma nova ontologia material. Nesta nova ontologia poderão estar presentes objetos escuros de várias espécies [4,5], campos exóticos com comportamentos inusitados [6-7], eletrodinâmicas não-lineares [8], bem como partículas consideradas como exóticas [9].

Na macro-arquitetura do cosmólogo as estruturas encontram-se já dispostas. Restamos a possibilidade de um entendimento remoto de como elas vieram a ser uma vez no tempo. Entender as sutilezas de sua formação em cada uma das escalas (incluindo galáxias, aglomerados, superaglomerados vácuos etc.), como elas se influenciam mutuamente e com a propagação da radiação cósmica de fundo tornou-se um dos grandes desafios da cosmologia relativista. No entanto, também na ciência, assim como na arte, estaremos sempre sujeitos aos modismos da época e também a um sem número de pressupostos que nos são muito caros. Por causa da extrema isotropia da radiação cósmica de fundo¹ e de certa bagagem inicial de arbitrariedades [10] pensamos o universo observável (em larga escala) como um todo

¹ Tomada em conjunto com a distribuição espacial de galáxias relativamente próximas, mapas do céu em faixas de raio X etc. Para uma análise detalhada das sutilezas relacionadas à questão da homogeneidade ver [11].

praticamente homogêneo, apesar de dinâmico, permeado por inúmeras estruturas de superaglomerados de galáxias que evoluíram – por causa da gravitação – a partir de pequenas perturbações em um mundo primordial essencialmente equivalente em todos os pontos (de um ponto de vista espacial apenas) [12]. Neste mundo representado pelas geometrias de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), seja por causa da teoria quântica de campos ou por outra razão qualquer ainda não inventada/conhecida, o espectro de perturbações tornou-se não nulo em uma dada hiper-superfície do tipo espaço com uma forma inicial específica. Seria precisamente esta forma inicial a principal responsável pelas pequenas anisotropias observadas na radiação cósmica de fundo (oriundas de um extenso plasma primordial) bem como pela hierarquia observada na distribuição de matéria uma vez propagada pelas equações da relatividade geral [13]. Não há dúvidas outras possibilidades de descrição dentre muitas variantes possíveis estão, e permanecerão talvez, em aberto. No entanto, o que nos preocupa - e também nos interessa, viabilizando o trabalho - é saber até onde podemos caminhar utilizando uma proposta simples, satisfatória sob a ótica das predições, capaz de satisfazer provisoriamente nossa curiosidade e afastá-la para territórios cada vez mais distantes. Esta preocupação nos leva a assumir as geometrias de FRW como um bom ponto de partida.

De um ponto de vista técnico podemos dizer que a investigação dos mecanismos de formação de estruturas em larga escala nas geometrias de FRW, e inclusive da arquitetura que dela resulta, reside no território da teoria de perturbações cosmológicas [12]. Estas perturbações, em seu nível mais elementar, operam-se sobre as distribuições, assumidas como homogêneas e isotrópicas, de matéria no universo primordial. Espera-se, portanto, que, por causa das instabilidades geradas pelo caráter essencialmente atrativo da gravidade, as estruturas comecem a se despontar e desenvolver na medida em que o universo evolui. Este ponto de vista – analisado newtonianamente por Laplace, Poincaré e Jeans – adquire uma conotação totalmente nova em termos de geometria no contexto da relatividade geral. As perturbações de uma dada configuração de matéria passam a ser entendidas como

perturbações nas relações métricas definidas pelo tensor $g_{\mu\nu}$ da variedade FRW. Neste sentido as perturbações passam a ser entendidas como campos infinitesimais definidos sobre uma dada solução (M_0) das equações de Einstein. Em geral procura-se entender as propriedades de estabilidade/instabilidade de uma dada solução sob certo regime específico das perturbações (escalares ou não, lineares ou não, para tempos longos e etc.).

No formalismo tradicional e imediato da teoria de perturbações a noção de estabilidade/instabilidade refere-se aos incrementos $\delta g_{\mu\nu}$ [12]. A evolução destes incrementos é então governada pelas equações de Einstein perturbadas. À medida que $\delta g_{\mu\nu}$ evolui, o background homogêneo de FRW configura-se em uma nova geometria determinada do ponto de vista métrico por $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ onde faz sentido falar em estruturas gravitacionais no sentido local. Esta abordagem imediata do problema de perturbações foi desenvolvida por Lifshitz [14] nos anos 40 e aperfeiçoada em seus aspectos mais sutis nas próximas décadas no que se refere ao problema de calibre, limite de métrica e natureza física das perturbações [15-19]. O problema básico desta abordagem é que as perturbações do tensor métrico misturam deformações autênticas da variedade com transformações infinitesimais de coordenadas, o conhecido problema de calibre da teoria. A menos que a condição de calibre seja completamente especificada os modos de evolução de uma dada quantidade acabam representando grandezas não físicas de difícil interpretação. Resultados aparentemente satisfatórios para o problema de uma formulação invariante de calibre em termos de potenciais associados ao tensor métrico podem ser encontrados nos trabalhos de Vishniac, Press [20] e de Bardeen [21]. A formulação de Bardeen tornou-se canônica na comunidade e tem vantagens em uma série de situações de interesse apesar de que muitas das variáveis envolvidas na análise não apresentam um significado geométrico claro uma vez que elas são definidas com relação a uma carta específica.

O presente trabalho aborda a questão das perturbações cosmológicas de um ponto de vista alternativo proposto por Hawking [15] na década de sessenta e pode ser entendido como consequência de alguns estudos desenvolvidos pelo grupo de cosmologia e relatividade do CBPF desde a década de 80 [22-27] nesta mesma linha. Nestes estudos construiu-se de forma auto-consistente as bases teóricas necessárias para uma teoria de perturbações sob a ótica de objetos *invariantes de calibre* com sentido geométrico/físico absolutamente explícito. O entendimento da física envolvida e de algumas propriedades interessantes relacionada ao acoplamento das variáveis utilizadas foi realizado parcialmente em alguns contextos. Estes contextos envolvem as perturbações escalares, vetoriais e tensoriais e certa ênfase foi dada à questão da quantização das perturbações. Nosso interesse aqui é levar adiante a análise de alguns pontos relacionados à dinâmica das grandezas invariantes de calibre, entender seu comportamento assintótico em regimes diferenciados e classificar as etapas de evolução do sistema de maneira suficientemente clara. Nossa abordagem tem como ponto de partida as equações quasi-maxwellianas da gravitação (QM) desenvolvidas por Jordan, Ehlers, Lichnerowicz e outros [28] e almeja uma descrição do problema unicamente em termos de grandezas diretamente observáveis, com sentido operacional explícito.

S. Hawking, ao aplicar o formalismo QM pela primeira vez à teoria de perturbações, inaugura simultaneamente a possibilidade de entender a questão da formação de estruturas nos universo de FRW em termos de grandezas relacionadas à estrutura conforme da variedade. Neste cenário os potenciais $\delta g_{\mu\nu}$ cedem lugar às projeções do tensor de Weyl $\delta E_{\mu\nu}$ e $\delta H_{\mu\nu}$. Estas duas projeções descrevem, em sentido restrito, o quão distante está a variedade perturbada de uma configuração conformalmente plana. Reduz-se portanto a questão da arquitetura cósmica – pelo menos em parte – à análise da estabilidade conforme das geometrias do tipo FRW. Uma vez que estas geometrias são conformalmente planas as perturbações do tensor de Weyl, por causa do lema de Stewart [16], podem ser entendidas

enquanto perturbações autênticas, *invariantes de calibre*. Ademais segue que as equações de Einstein não determinam as componentes sem traço do tensor de Riemann. Estas são apenas parcialmente restritas pelas identidades de Bianchi. Pode-se pensar, portanto, em uma infinidade de geometrias compatíveis com a equação de Einstein para uma mesma distribuição específica de momento e energia. Entender o quão estável é cada tipo de geometria sob este ponto de vista torna-se uma questão de princípio importante para qualquer modelo cosmológico satisfatório. Embora esta última análise seja válida para praticamente todo tipo de geometria satisfazendo as equações de Einstein, como é o caso das geometrias de Kasner e Schwarzschild nós analisaremos a evolução das perturbações apenas no contexto dos universos de FRW.

Nossa abordagem sobre a estabilidade do tensor de Weyl restringe-se à parte escalar das perturbações e ao regime linear. Assumimos como fonte do background um único fluido perfeito com equação de estado arbitrária podendo, inclusive, tomar valores negativos. Os casos envolvendo uma coleção de fluidos não interagentes seguem imediatamente e sem muita dificuldade da nossa análise. Assumiremos em todo trabalho o vetor de fluxo de calor q_{μ} do fluido perturbado como nulo. Esta hipótese não restringe a natureza das perturbações uma vez que uma escolha adequada do campo de observadores pode sempre aniquilar este vetor. Embora nossa atenção esteja direcionada para os modelos de FRW euclidianos os outros dois tipos de trisecção também são analisados em alguns pontos interessantes.

Como conseqüência dos trabalhos [22, 23] temos que as perturbações escalares – sob hipóteses razoáveis – são governadas por um dado conjunto mínimo e fechado de observáveis envolvendo apenas a parte elétrica do tensor de Weyl $E_{\alpha\beta}$ e o tensor de deformação da congruência $\sigma_{\alpha\beta}$. Este conjunto reduz-se a uma coleção infinita de sistemas dinâmicos planares e não autônomos indexados por um comprimento de onda característico. A

dependência explícita do tempo na dinâmica sugere uma análise do retrato de fases das soluções em termos de seções transversais onde a variável temporal é fixa. Sob esta ótica nós estudamos de um ponto de vista estroboscópico a evolução das perturbações associadas a um dado comprimento para poeira, radiação e um modelo governado por fluido exótico ($p = -(1/3)\rho$). A extrapolação para qualquer outro tipo de fluido é imediata.

Analisamos de um ponto de vista qualitativo, em algumas circunstâncias de interesse, as propriedades básicas de evolução da parte elétrica do tensor conforme e desenvolvemos uma abordagem pictórica, onde muitos resultados interessantes podem ser obtidos sem resolver exatamente o sistema dinâmico. É importante lembrar que para as triseções não euclidianas, inclusive, o problema das perturbações para fluidos arbitrários não tem solução analítica conhecida. Torna-se vital a construção de métodos alternativos para um melhor entendimento do problema sem apelar diretamente para a análise numérica. Para tal estudamos a topologia das trajetórias de fase em torno do ponto fixo (background) utilizando algumas técnicas da teoria de sistemas dinâmicos. Mostramos que o sistema de equações constitui uma estrutura dissipativa para os modelos em expansão. Estudamos todos os tipos de transições possíveis no retrato e classificamos os tipos de regimes associados à estabilidade ou instabilidade. Toda esta abordagem envolve uma espécie de competição entre a pressão, a expansão e o comprimento de onda. Analisamos em algum detalhe a questão da instabilidade de modelos com equações de estado exóticas. Esta análise é particularmente importante uma vez que atravessamos uma era delicada de modelamento da energia escura e ainda desconhecemos em detalhe suas propriedades de aglomeração. Reconstruímos finalmente a solução exata do problema das perturbações escalares no caso euclidiano e mostramos que para fluidos convencionais a parte elétrica do tensor de Weyl é assintoticamente estável sob perturbações lineares. As excitações lineares da estrutura conforme são, portanto,

reabsorvidas pelo background para tempos suficientemente grandes. Estes resultados são igualmente válidos para os invariantes algébrico do tensor de Weyl.

Capítulo 1

Preliminares

Talvez não seja exagerado afirmar que a teoria da relatividade geral constitui uma sistematização conjunta e implícita dos fenômenos gravitacionais enquanto geometria, dos campos de matéria e dos observadores em potencial. Neste capítulo introdutório nós iremos colecionar algumas propriedades básicas relacionadas à caracterização destes três aspectos básicos da teoria, além de definir de forma consistente a notação empregada no trabalho.

Utilizaremos sempre assinatura (+ - - -), a velocidade da luz $c = 1$ e as equações de Einstein sem constante cosmológica.

1.1 – Campos de Observadores e Correlatos

No cenário colocado pela teoria da relatividade para a cinemática de sistemas discretos (partículas) bem como contínuos (campos), a descrição de certas quantidades físicas de interesse passou a ser convenientemente representada em termos de projeções tensoriais. Na teoria da gravitação em particular – talvez por herança dos formalismos empregados na mecânica dos meios contínuos e da elasticidade – estas projeções desempenham um papel de extrema relevância e costumam referir-se ao que se convencionou chamar: *campo (ou congruência) de observadores*. O campo de observadores pode cobrir apenas parcialmente a variedade (se, por exemplo, o alvo de estudo for um fluido confinado) ou ser estendido para todas as instâncias do espaço-tempo em questão. No contexto da cosmologia, onde a noção do imenso faz-se forçosamente presente e nossa imaginação persiste sempre em abraçar o todo, acabaremos utilizando congruências definidas em todos os pontos do contínuo quadridimensional riemanniano (exceto talvez em regiões excepcionais denominadas *singularidades*). É com relação a esses observadores que as grandezas da cosmologia passam a ter sentido mensurável e as simetrias envolvidas na descrição dos aglomerados de pontos materiais ganham significado.

Para nós uma *congruência de observadores* é um campo vetorial $V^\mu(x)$ arbitrário, do tipo tempo, e normalizado à unidade, ou seja $g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = 1$. Esta condição implica que, neste cenário, as curvas integrais estarão sempre parametrizadas pelo tempo próprio s . Desta

forma, podemos também caracterizar o campo por uma coleção de curvas Γ satisfazendo às equações diferenciais acopladas

$$\frac{dx^\mu}{ds} = V^\mu (\{x^\alpha (s)\}), \quad (1.1)$$

onde cada solução particular $x^\alpha (s, \{x^\beta_0\})$ deve ser identificada com uma possível linha de universo de um dado observador satisfazendo a condição de contorno x^β_0 para um dado valor s_0 do parâmetro. De um ponto de vista geral, vale lembrar que a obtenção das soluções do sistema dinâmico acima pode ser muito complicada dependendo da estrutura do campo vetorial em questão e do nível de acoplamento estabelecido pelas componentes. O objetivo dos próximos parágrafos é, no entanto, o de estabelecer a caracterização cinemática do *fluxo* definido por estas curvas independentemente de sua solução. Esta caracterização desempenhará papel fundamental no formalismo de 3ª ordem (ou quasi-maxwelliano) das equações de Einstein desenvolvido no próximo capítulo.

O conjunto de vetores perpendiculares a V^μ no ponto P constituem um espaço vetorial \square_p do tipo espaço, de dimensão 3 (no caso), denominado *referencial inercial local* em P . \square_p é, na verdade, um subespaço do espaço tangente em P denominado \square_p . A projeção de tensores em \square_p pode ser construída por meio do objeto

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu. \quad (1.2)$$

As seguintes propriedades seguem diretamente:

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}, \quad h_{\mu\nu} V^\nu = 0, \quad h^\mu{}_\alpha h^\alpha{}_\nu = h^\mu{}_\nu. \quad (1.3)$$

Através do vetor V^μ e do projetor $h_{\alpha\beta}$ podemos definir a derivada com relação ao tempo próprio e também os gradientes espaciais de grandezas em \square_p . Para um dado tensor $A^{\alpha \dots \beta}{}_{\mu \dots \nu}$ completamente ortogonal à V^μ temos, então:

$$\dot{A}^{\alpha \dots \beta}{}_{\mu \dots \nu} \equiv A^{\alpha \dots \beta}{}_{\mu \dots \nu}{}_{;\zeta} V^\zeta \quad (1.4)$$

$${}^{(3)}\nabla_\tau A^{\alpha \dots \beta}{}_{\mu \dots \nu} \equiv h_\tau{}^\zeta h^\alpha{}_\varepsilon \dots h^\beta{}_\gamma \dots h_\mu{}^\varpi \dots h_\nu{}^\lambda A^{\varepsilon \dots \gamma}{}_{\varpi \dots \lambda}{}_{;\zeta}.$$

Notemos que o operador ${}^{(3)}\nabla_\alpha$ define uma espécie de conexão no espaço de repouso local.

Suponhamos agora que uma das curvas (Γ) da congruência tenha sido particularmente escolhida e que estejamos interessados em analisar o comportamento do fluxo de vetores em um domínio infinitesimal \square em torno e ao longo dela. Sendo $V_\mu(P)$ as componentes do campo em um ponto P arbitrário sobre Γ , podemos nos perguntar quem serão estas mesmas componentes quando realizado um deslocamento infinitesimal no interior do domínio considerado, representado por dP . Neste caso, é simples mostrar que:

$$V^\mu (P + dP) = V^\mu (P) + \Delta V^\mu (P), \quad (1.5)$$

onde $\Delta V^\mu = V^\mu_{;\alpha} dx^\alpha$. É, portanto, a variação no campo proporcional à sua derivada covariante. Assumindo então que as componentes da derivada de V^μ sejam todas previamente conhecidas e que tomemos as projeções $Q_{\mu\nu} \equiv h^\alpha_\mu h^\beta_\nu V_{\alpha;\beta}$ teremos:

$$\begin{aligned} h^\alpha_\mu h^\beta_\nu V_{\alpha;\beta} &= (\delta^\alpha_\mu - V^\alpha V_\mu)(\delta^\beta_\nu - V^\beta V_\nu)V_{\alpha;\beta} = \\ &= (\delta^\alpha_\mu - V^\alpha V_\mu)(V_{\alpha;\nu} - \dot{V}_\alpha V_\nu) = V_{\mu;\nu} - \dot{V}_\mu V_\nu \end{aligned} \quad (1.6)$$

uma vez que $V_{\alpha;\gamma} V^\alpha = 0$ e que \dot{V}^α é sempre perpendicular a V^μ . Desta forma, invertendo a equação e fazendo uso mais uma vez da notação definida acima:

$$V_{\alpha;\beta} = {}^{(3)}\nabla_\beta V_\alpha + a_\alpha V_\beta, \quad (1.7)$$

onde $a_\alpha \equiv \dot{V}_\alpha$ é o vetor de aceleração da congruência (na verdade a aceleração só depende da curva em questão). Se $a^\mu = 0$, a curva é geodésica e pode ser construída pelo transporte paralelo de V_μ ao longo de sua direção². Já podemos notar que estas derivadas podem ser

² Este é exatamente o caso para os observadores gaussianos da geometria de Friedmann-Robertson-Walker.

decompostas em uma parte puramente espacial (projetada no espaço de repouso) e outra proporcional ao campo de observadores (mas não inteiramente fora de \square_p). Então, geralmente:

$$\Delta V^\alpha = \left({}^{(3)}\nabla_\beta V^\alpha + a^\alpha V_\beta \right) dx^\beta. \quad (1.8)$$

Decompondo o objeto ${}^{(3)}\nabla_\beta V^\alpha$ pelo teorema da decomposição em irredutíveis temos:

$${}^{(3)}\nabla_\beta V_\alpha \equiv \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} \theta + \sigma_{\alpha\beta} + \bar{\omega}_{\alpha\beta} \quad (1.9)$$

onde $\sigma_{\alpha\beta}$ (deformação) é um tensor simétrico ($\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\beta\alpha}$) e sem traço ($g^{\mu\varepsilon} \sigma_{\mu\varepsilon} = 0$) e $\bar{\omega}_{\alpha\beta}$ (vorticidade) é anti-simétrico ($\bar{\omega}_{\alpha\beta} = -\bar{\omega}_{\beta\alpha}$). O escalar θ (expansão) corresponde obviamente ao traço do tensor ${}^{(3)}\nabla_\beta V_\alpha$ uma vez que $g^{\zeta\xi} h_{\zeta\xi} = 3$.

Dadas estas definições obtemos que se o vetor de deslocamento dx^μ for proporcional ao campo de observadores, então ΔV^μ será proporcional à aceleração. No caso em que o deslocamento pertence inteiramente a \square_p (sendo, portanto, ortogonal à V^μ) temos, em princípio, três possibilidades independentes caracterizadas pelos termos da decomposição acima. O comportamento das curvas em torno de P decorrem da análise dos autovetores e autovalores das partes irredutíveis. Para tal assumiremos sem perda de generalidade que no ponto P em questão se escolha um sistema particular de coordenadas onde o tensor métrico

se reduza a forma de Minkowski, ou seja $g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}$. Também imporemos $V^\mu = \delta^\mu_0$ neste ponto. Desta forma, uma vez que todos os objetos em questão pertencem a \mathbb{P}_p , isto é,

$$\frac{1}{3}\theta_{\mu\nu} V^\nu = 0 \quad \sigma_{\mu\nu} V^\nu = 0 \quad \varpi_{\mu\nu} V^\nu = 0, \quad (1.10)$$

preocuparemos apenas com as componentes espaciais i, j . Os autovetores são importantes para esta análise porque coincidem com as direções proporcionais à variação ΔV^μ . Portanto, se escolhermos para o deslocamento a direção de um dos autovetores, o campo V^μ também estará sendo acrescido de um objeto que tem esta mesma direção. A álgebra linear nos ensina que o cálculo dos autovalores de uma matriz A deve passar pela equação característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (1.11)$$

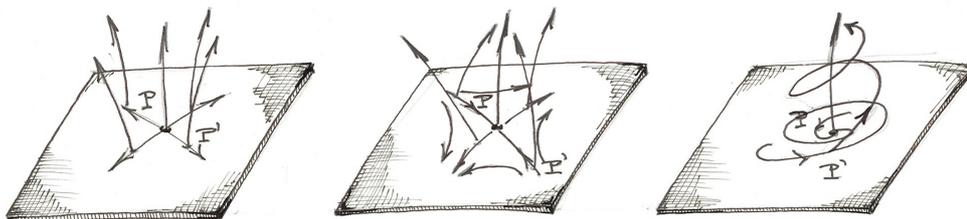
Da análise dos autovalores λ podemos inferir o comportamento do campo de variação ΔV^μ em torno do “ponto fixo” P^3 . Consideremos as duas primeiras matrizes da decomposição (θ_{ij} e σ_{ij}). Da teoria de diagonalização de matrizes simétricas temos:

1) *A equação característica de uma matriz simétrica tem apenas valores reais;*

³ Notamos desde já a semelhança com os métodos de análise do retrato de fases na teoria de sistemas dinâmicos.

- II) Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear simétrico com valores próprios distintos, então os vetores próprios são ortogonais.

Aplicando estes resultados encontramos em geral três autovalores reais idênticos para θ_{ij} e mais outros três autovalores reais para σ_{ij} cuja soma é nula. No caso de uma matriz 3×3 anti-simétrica como $\bar{\omega}_{ij}$ é fácil mostrar que um dos autovalores é real nulo enquanto os outros dois são complexos. Portanto, desta pequena análise pode-se inferir a forma do campo ΔV^μ nas imediações de P .



[Handwritten signature]

Figura 1.1: Representação da cinemática da congruência em torno de um ponto P . A decomposição do campo em termos de θ , $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\bar{\omega}_{\alpha\beta}$ pode ser vista da esquerda para a direita

Por causa destes comportamentos típicos nas vizinhanças de cada ponto entendemos porque cada parâmetro cinemático recebe seu devido nome. No caso em que a vorticidade do campo $\varpi_{\alpha\beta}$ se anula é possível construir uma hipersuperfície Σ , ortogonal ao campo em todo ponto, que se estende por toda variedade. Esta é exatamente a superfície de simultaneidade a ser perturbada nos modelos de Friedmann-Robertson-Walker.

Lembremos também que $V_{\alpha;\beta}$ é um tensor composto de apenas 12 componentes independentes por causa da normalização de V^μ . Portanto $Q_{\alpha\beta}$ consiste de uma coleção de oito números, em princípio, independentes. De toda esta discussão conclui-se que:

$$\theta = h^{\alpha\lambda} V_{\alpha;\lambda} = V^\alpha{}_{;\alpha} \quad (1.12)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^\mu{}_{(\alpha} h_{\beta)}{}^\lambda V_{\mu;\lambda} - \frac{1}{3} \theta \cdot h_{\alpha\beta} \quad (1.13)$$

$$\varpi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{[\alpha}{}^\mu h_{\beta]}{}^\lambda V_{\mu;\lambda} \quad (1.14)$$

Tendo já definido estas grandezas para a descrição cinemática da congruência passemos para a dinâmica. Uma vez que em uma variedade Riemanniana as derivadas superiores não comutam em geral, a evolução de cada um dos parâmetros cinemáticos está submetida à identidade:

$$V_{\alpha ; \beta ; \gamma} - V_{\alpha ; \gamma ; \beta} = R_{\alpha \varepsilon \beta \gamma} V^{\varepsilon}. \quad (1.15)$$

De fato, conhecendo-se apenas as derivadas dos parâmetros cinemáticos nesta variedade, poderemos reconstruir todas as componentes independentes do tensor de Riemann resolvendo as equações diferenciais e acopladas acima. A contração desta equação com V^{γ} (e sua projeção total em Π_p), após um cálculo direto, nos dá a importante relação (lembrando da definição $Q_{\alpha\beta} \equiv {}^{(3)}\nabla_{\beta} V_{\alpha}$):

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{Q}_{\mu\nu} + a_{\alpha} a_{\beta} - h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} a_{\mu\nu} + Q_{\alpha\gamma} Q^{\gamma\beta} = R_{\alpha\varepsilon\beta\gamma} V^{\varepsilon} V^{\gamma}. \quad (1.16)$$

Esta equação descreve (de um ponto de vista geométrico) a evolução das propriedades básicas de uma congruência do tipo tempo na presença da gravitação ($R_{\alpha\beta\mu\nu} \neq 0$). Aplicando mais uma vez o teorema da decomposição em irredutíveis obtemos três equações independentes envolvendo derivadas com relação ao tempo próprio dos parâmetros cinemáticos. Calculando o traço obtemos, sem muitos mistérios, a equação de evolução para a expansão (θ):

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2(\sigma^2 - \omega^2) - a^{\alpha}{}_{;\alpha} = R_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu}, \quad (1.17)$$

onde $\sigma^2 \equiv \frac{1}{2} \sigma^{\zeta\tau} \sigma_{\zeta\tau}$ e $\varpi^{\zeta\tau} \equiv \frac{1}{2} \varpi^{\zeta\tau} \varpi_{\zeta\tau}$. Definindo o vetor de rotação (ou vorticidade) no tri-espaço pela equação

$$\varpi^\tau \equiv \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\zeta\tau} \varpi_{\alpha\beta} V_\zeta \quad (1.18)$$

e simetrizando, vem (após o uso da equação obtida para a evolução da expansão):

$$\begin{aligned} & h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} (a^\lambda{}_{;\lambda} - \varpi^2 - 2\sigma^2) + a_\alpha a_\beta - \frac{1}{2} h_{(\alpha}{}^\mu h_{\beta)}{}^\nu a_{\mu;\nu} + \\ & + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma^\mu{}_\beta - \varpi_\alpha \varpi_\beta = R_{\alpha\varepsilon\beta\nu} V^\varepsilon V^\nu - \frac{1}{3} R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu h_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.19)$$

uma vez que $\varpi_{\alpha\mu} \varpi^\mu{}_\beta = \varpi^\mu \varpi_\mu h_{\alpha\beta} - \varpi_\alpha \varpi_\beta$ e o vetor de vorticidade é do tipo espaço.

Finalmente, a componente anti-simétrica da identidade em questão resulta em:

$$h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \varpi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu a_{[\mu;\nu]} + \frac{2}{3} \theta \varpi_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \varpi^\mu{}_\beta - \sigma_{\beta\mu} \varpi^\mu{}_\alpha = 0 \quad (1.20)$$

que é a equação para a evolução da vorticidade. Além destas equações temos ainda três relações que devem ser preservadas independentemente do parâmetro utilizado para mapear as curvas. Estas relações são, portanto, invariantes por re-parametrização da congruência e

implicam que, em geral, os parâmetros cinemáticos não são independentes entre si. A primeira delas decorre da projeção e contração de (1.15):

$$\frac{2}{3}\theta_{;\mu} h^{\mu}{}_{\lambda} - (\sigma^{\alpha}{}_{\gamma} + \varpi^{\alpha}{}_{\gamma})_{;\alpha} h^{\gamma}{}_{\lambda} - a^{\alpha}(\sigma_{\lambda\alpha} + \varpi_{\lambda\alpha}) = R_{\mu\alpha} V^{\mu} h^{\alpha}{}_{\lambda} \quad (1.21)$$

Usando o fato de que $R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0$ obtemos, após algumas manipulações:

$$\varpi^{\alpha}{}_{;\alpha} + 2\varpi^{\alpha} a_{\alpha} = 0 \quad (1.22)$$

Multiplicando (1.15) pelo símbolo de anti-simetrização contraído com a velocidade, simetrizando e finalmente usando o projetor obtemos:

$$h^{\alpha}{}_{\psi} h^{\rho}{}_{\chi} [\sigma_{(\alpha\beta} + \varpi_{(\alpha\beta)}]_{;\gamma} \eta_{\rho)}^{\gamma\beta\epsilon} V_{\epsilon} + 2a_{(\psi} \varpi_{\chi)} = -\frac{1}{2} R_{\beta\gamma\mu(\psi} \eta_{\chi)}^{\gamma\beta\epsilon} V^{\mu} V_{\epsilon}, \quad (1.23)$$

uma vez que o termo do lado direito já pertence inteiramente à tri-seção. Para concluir esta seção gostaria de ressaltar que as equações apresentadas esgotam para nossos fins a cinemática das congruências do tipo tempo definidas em espaços curvos (Riemannianos).

1.2 – Substantivação do Tensor Conforme

Em uma variedade Riemanniana hiperbólica de dimensão $n > 3$ (M_n) o tensor de curvatura admite sempre a decomposição:

$$R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = W^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} - \frac{1}{(n-2)} R^{[\alpha}{}_{[\mu} \delta^{\beta]}{}_{\nu]} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} R g^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \quad (1.24)$$

onde $g^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha}{}_{[\mu} g^{\beta]}{}_{\nu]}$ e a quantidade $W^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ é o dito tensor conforme ou simplesmente tensor de *Weyl*. É simples mostrar que os três componentes ao lado direito da equação satisfazem identicamente as simetrias do tensor de *Riemann* e que todos os traços possíveis do tensor de *Weyl* são nulos, isto é:

$$W^{\alpha\beta}{}_{\alpha\nu} = 0 \quad (1.25)$$

É comum re-nomear o termo envolvendo explicitamente o tensor de *Ricci* em produtos antissimétricos com deltas de *Kronecker* sob a forma:

$$M^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{(n-2)} R^{[\alpha}{}_{[\mu} \delta^{\beta]}{}_{\nu]} \quad (1.26)$$

Assim, invertendo a equação (1.24) podemos considerá-la como uma definição do tensor conforme. Nesta definição todos esses traços são subtraídos do tensor de curvatura:

$$W^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} - M^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} Rg^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \quad (1.27)$$

É importante ressaltar que este objeto não é definido para variedades unidimensionais (curvas) ou bidimensionais (superfícies) e se anula identicamente para espaços de dimensão 3. Portanto, somente a partir de 4 dimensões adquire sentido a noção de estabilidade do tensor conforme. No restante deste parágrafo nós iremos colecionar algumas propriedades importantes envolvendo estas grandezas.

Utilizando a noção do dual de um tensor com índices bi-vetoriais podemos encontrar uma interessante relação envolvendo o objeto $M^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$. Aplicando o operador de *Hodge* sobre o tensor de Riemann duas vezes nos dois pares de índices (dual à esquerda e à direita), temos após uma seqüência direta de cálculos:

$$R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}{}^{**} = \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta\epsilon\phi} \eta_{\mu\nu\kappa\lambda} R_{\epsilon\phi}{}^{\kappa\lambda} = - \left[R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} Rg^{\alpha\beta}_{\mu\nu} - (n-2)M^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \right], \quad (1.28)$$

onde o sinal imediatamente antes dos colchetes decorre de o determinante das métricas hiperbólicas consideradas ($g \equiv \det g_{\mu\nu}$) ser sempre negativo. Esta equação permite representar o tensor $M^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ da forma:

$$M^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{(n-2)} \left[R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}{}^{**} \right] + \frac{R}{2(n-2)} g^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \quad (1.29)$$

Portanto, o tensor de *Weyl* é algebricamente determinado a partir do tensor de *Riemann*, do seu duplo dual e do escalar de curvatura por:

$$W^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{(n-2)} \left[(n-3)R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} - R^{\alpha\beta}{}^{*\mu\nu} \right] - \frac{(n-3)}{2(n-2)(n-1)} Rg^{\alpha\beta}_{\mu\nu}. \quad (1.30)$$

Um cálculo algébrico simples permite mostrar também que os números de componentes independentes dos tensores de *Riemann* (n_R) e *Weyl* (n_W) são, respectivamente:

$$n_R = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12} \quad n_W = \frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}$$

É curioso notar que apenas em 4 dimensões o número de componentes armazenadas nos traços é equivalente ao número de componentes armazenados no tensor conforme que é igual a 10. Conclui-se também que para dimensões suficientemente grandes o tensor de *Riemann* é praticamente descrito em termos do tensor conforme. Uma variedade de dimensão maior pode, então, curvar-se sobre si de uma infinidade de maneiras sem envolver os traços do tensor de curvatura. Se a teoria da gravitação tradicional fosse construída/extrapolada para um número de dimensões diferente de 4 vemos que a matéria seria cada vez menos responsável pela curvatura do espaço tempo na medida em que n aumentasse. Mas esta é apenas uma curiosidade relacionada à dimensionalidade. De agora em diante consideraremos

n=4. Passemos agora à caracterização das propriedades mecânicas dos fluidos que, eventualmente, apresentam interesse para a cosmologia.

1.3 – Atributos da Matéria

Na termodinâmica relativista o estado arbitrário⁴ de um dado fluido é descrito pelo tensor momento-energia $T_{\alpha\beta}$ em conjunto com mais dois vetores do tipo tempo: o fluxo de partículas N^α , e o fluxo de entropia S^α . A conservação do momento-energia, a segunda lei da termodinâmica e a conservação do número de partículas têm, em situações normais, a forma [29]:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad S^{\alpha}{}_{;\alpha} \geq 0 \quad N^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \quad (1.41)$$

Synge demonstrou em um teorema [30] que se $T^{\mu\nu}V_\mu V_\nu \geq 0$ para todo V_μ do tipo tempo, $T_{\mu\nu}$ admite um único auto-vetor do tipo tempo u^μ satisfazendo a condição $u^\mu u_\mu = 1$. No caso geral o auto-vetor de $T_{\mu\nu}$ não coincide com os vetores S^α ou N^α . Neste caso a descrição hidrodinâmica do fluido não pode contar com uma única velocidade capaz de caracterizar seu fluxo. No caso de um fluido perfeito em equilíbrio todos os três vetores são paralelos, constituindo uma definição simultânea da quadri-velocidade do fluido e do espaço de repouso. Nós iremos considerar neste trabalho apenas situações de quasi-equilíbrio onde os três vetores coincidem em primeira ordem. Em termos de V_μ , $T_{\mu\nu}$ admite a decomposição:

⁴ Em geral fora do equilíbrio.

$$T^{\mu\nu} = \rho V^\mu V^\nu + p h^{\mu\nu} + q^{(\mu} V^{\nu)} + \pi^{\mu\nu} \quad (1.42)$$

Onde

$$\rho = T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \quad p = -\frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad q_\lambda = T_{\alpha\beta} V^\beta h^\alpha{}_\lambda \quad \pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta} h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu + p h_{\mu\nu}$$

caracterizam a densidade de energia, a pressão isotrópica, o fluxo de calor e a pressão anisotrópica respectivamente. Projetando a equação de conservação em V_μ e no espaço local de repouso temos:

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta + \dot{q}^\mu V_\mu + q^\mu{}_{;\mu} - \pi^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} = 0, \quad (1.43)$$

$$(\rho + p)a_\alpha - p_{;\mu} h^\mu{}_\alpha + \dot{q}_\mu h^\mu{}_\alpha + \theta q_\alpha + q^\nu \varpi_{\alpha\nu} + \pi_{\alpha}{}^\nu{}_{;\nu} + \pi^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu} V_\alpha = 0 \quad (1.44)$$

Assumiremos também uma equação de estado linear entre P e ρ do tipo

$$p = \lambda \rho. \quad (1.45)$$

Vejamos agora um pouco sobre o formalismo quasi-maxwelliano das equações de Einstein.

Capítulo 2

Sobre o Formalismo

Quasi-Maxwelliano

Pode-se dizer que uma porcentagem considerável do esforço científico em períodos de *ciência estável* é devotada à construção de quadros. Um quadro, para mim, consiste de uma coleção de arquétipos teóricos com o objetivo de rephrasear uma teoria específica sob um determinado ponto de vista. Ademais, constata-se que a presença harmônica destes quadros no interior do conjunto de premissas que constitui uma teoria não só contribui para o enriquecimento conceitual da mesma como também viabiliza a evolução do arsenal técnico de

ferramentas matemáticas melhor adaptadas para certos tipos de problemas. Assim, as versões de *Lagrange* e *Hamilton* da mecânica clássica constituem dois olhares diferenciados para o formalismo vetorial newtoniano, os quadros de *Schrödinger*, *Heisenberg*, *Dirac* e *Feynman* estabelecem estruturas alternativas e complementares no cenário da teoria quântica tradicional e assim por diante.

Também a física da gravitação relativista apresenta exemplos típicos desta estrutura de abordagem por quadros. Neste parágrafo iremos discutir algumas das propriedades do chamado formalismo quasi-maxwelliano das equações de Einstein construído por *Jordan* e colaboradores no final da década de 50 [28] e desenvolvido por *Lichnerowicz* em alguns pontos na década seguinte. Este esquema alternativo tem por ponto de partida as identidades de Bianchi e requer, por questão de consistência, uma sistematização conjunta e explícita das congruências em espaços curvos, da mecânica dos fluidos e dos fenômenos de natureza gravitacional. Uma das conseqüências interessantes do formalismo é que ele permite aproximar ainda mais (do ponto de vista formal) a teoria da gravitação de Einstein do eletromagnetismo de Maxwell. Esta aproximação se dá por meio de analogias entre os campos elétricos (E^μ), magnéticos (H^μ) e as projeções do tensor de Weyl ($E^{\alpha\beta}$ e $H^{\alpha\beta}$). Na ocasião de sua construção, precisamente por causa destas semelhanças, apareceu como uma evidência favorável à unificação entre os campos gravitacional e eletromagnético na linha proposta por Einstein [31] além de viabilizar uma descrição sugestiva dos processos de emissão gravitacional [32]. No final da década de sessenta a abordagem quasi-maxwelliana foi retomada sob o ponto de vista das teorias de *gauge* [33] e posteriormente, com o trabalho de *Hawking* [15], sob a ótica de perturbações do espaço-tempo de *Friedmann*. Nós iremos nos deter, adiante, nesta última análise. Vejamos algumas das conseqüências do formalismo.

2.1 – As identidades de Bianchi e a propagação das equações de Einstein

As identidades de Bianchi, satisfeitas pelo tensor métrico em toda variedade riemanniana, reescrita em termos do tensor conforme adquire a forma:

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{2}R^{\mu[\alpha;\beta]} - \frac{1}{12}g^{\mu[\alpha}R^{\beta]} \quad (2.1)$$

No contexto da relatividade geral esta equação estabelece uma relação indireta entre a divergência do tensor de Weyl e os gradientes dos campos de matéria. No vácuo, em particular, a divergência deste tensor se anula identicamente e as forças de maré são completamente determinadas por $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ ⁵. A equação implica, então, que a estrutura conforme das variedades que satisfazem as equações de Einstein não é completamente alheia às distribuições de momento-energia. O tensor conforme é vinculado ao tensor momento energia por condições de integrabilidade sob a forma das identidades de Bianchi. A matéria, portanto, determina localmente os traços do tensor de curvatura $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ por uma relação algébrica e restringe o espectro de possibilidades, em termos de componentes, do tensor de Weyl – geralmente especificado pelas condições iniciais do problema.

Reescrevendo a equação em termos das distribuições de matéria temos a seguinte relação entre tensores de três índices:

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{1}{2}T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{6}g^{\mu[\alpha}T^{\beta]} \quad (2.2)$$

⁵ Para ser mais exato apenas a parte elétrica do tensor conforme está ligada às forças de maré na TRG. Para uma análise interessante da influência da parte magnética no movimento das partículas e no campo gravitacional ver as referências [34, 35]

Aqui T representa de forma abreviada o traço do tensor momento energia. Foi *Jordan* o primeiro a considerar uma equação deste tipo como base autêntica para a elaboração de uma teoria da gravitação⁶. No entanto foi *Lichnerowicz* quem demonstrou, em uma análise do problema de *Cauchy*, através de um teorema, que as equações de *Jordan* podem reproduzir a relatividade geral sob certas condições. O teorema de *Lichnerowicz* pode ser formulado da seguinte forma e tem validade restrita a quatro dimensões [31].

Teorema: Se as equações (2.2) são satisfeitas em uma vizinhança Ω de uma hiper-superfície do tipo espaço Σ , então pelas identidades de Bianchi, para que $G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}$ seja satisfeita em uma sub-vizinhança de Ω é necessário e suficiente que $G_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}$ valha sobre Σ .

Portanto, as equações de Einstein neste cenário aparecem como simples condições de contorno. Se elas valem sobre uma dada hiper-superfície as identidades propagam-nas por toda a variedade. Estudar as equações de Einstein ou as de *Jordan* para a gravitação, então, dependerá de uma questão de contexto ou gosto. É óbvio que em uma última instância mesmo o quadro QM constitui equações diferenciais no tensor métrico. Com relação a este tensor as derivadas são de terceira ordem e altamente não lineares. Portanto, se objetivo é resolver as equações de campo para uma dada distribuição de matéria é preferível utilizar o formalismo tradicional. O formalismo QM deve ser reservado para o estudo de situações mais delicadas do ponto de vista de interpretação etc. A ilustração abaixo exhibe a noção básica do teorema de *Lichnerowicz* quando aplicado a duas hiper-superfícies do tipo espaço.

⁶ *Matte* [32] já havia concebido uma equação do tipo no princípio da década de 50, publicada em um jornal canadense. Sua abordagem restringe-se, no entanto, puramente à questão da emissão de radiação gravitacional no vazio.

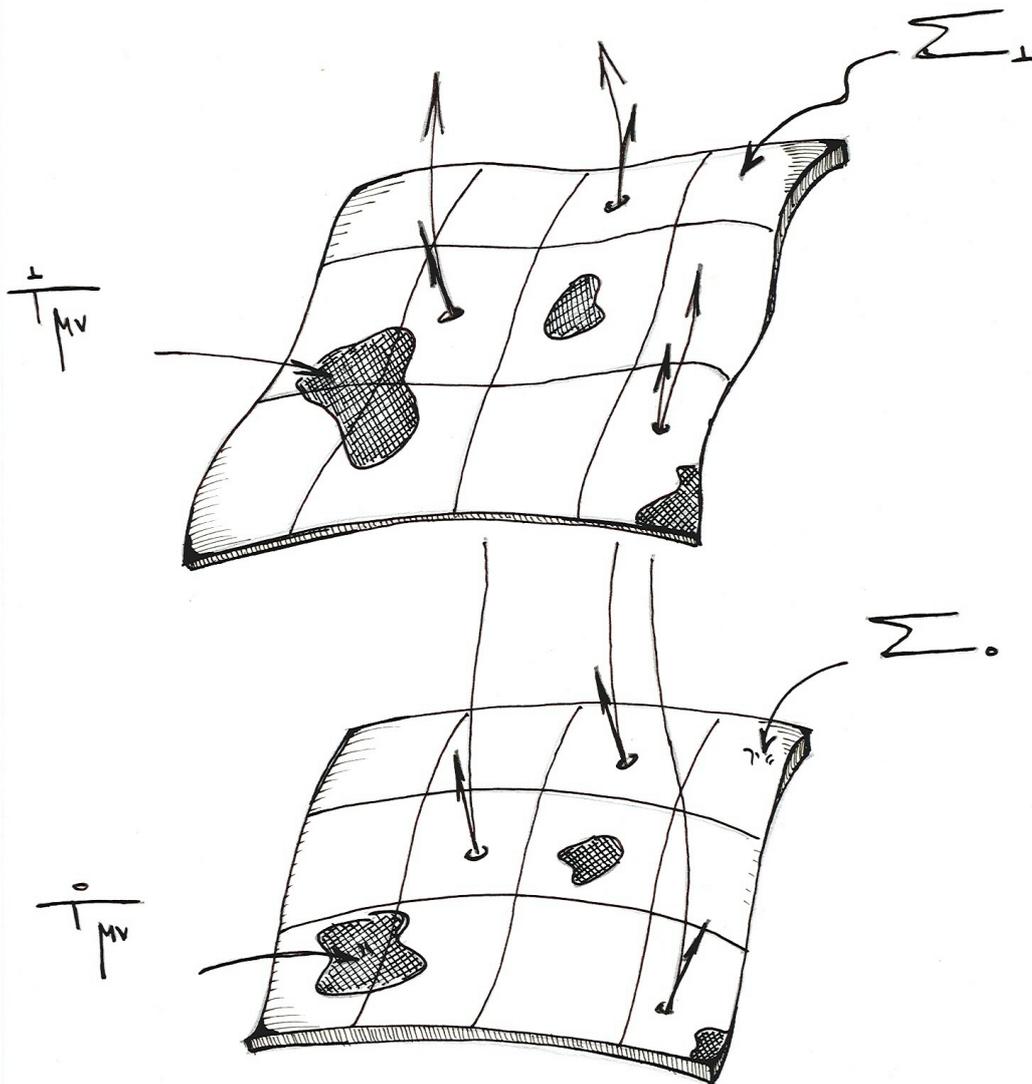


Figura 2.1: Se as equações de Einstein são satisfeitas em Σ_0 com fonte $T_{\mu\nu}^0$ as identidades de

Bianchi garantem que elas são igualmente válidas em Σ_1 com fonte $T_{\mu\nu}^1$.

Nós iremos projetar agora as identidades de Bianchi com relação a um dado campo de observadores.

2.2 – As equações quasi-maxwellianas da gravitação

Uma congruência do tipo tempo $V^\mu(x)$ induz uma decomposição do tensor de Weyl em termos de dois tensores irreduzíveis, simétricos, e de ordem dois. Estes dois tensores pertencem à hiper-superfície Σ uma vez que ambos admitem o vetor V^μ como auto-vetor associado ao autovalor nulo. Temos, então, as seguintes definições [36, 37]:

$$E_{\alpha\beta} = -W_{\alpha\mu\beta\nu} V^\mu V^\nu \quad (2.3)$$

$$H_{\alpha\beta} = -W^*_{\alpha\mu\beta\nu} V^\mu V^\nu. \quad (2.4)$$

$E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ constituem respectivamente as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl.

Esta nomenclatura decorre de uma analogia direta com as projeções do tensor de Faraday $F_{\alpha\beta}$ na eletrodinâmica de Maxwell. É simples mostrar que as seguintes propriedades decorrem imediatamente das propriedades de simetria de $W_{\alpha\beta\mu\nu}$:

$$E_{\mu\nu} V^\nu = 0 \quad H_{\mu\nu} V^\nu = 0 \quad g^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 0 \quad g^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = 0 \quad (2.5)$$

Pode-se mostrar também que estes tensores têm a propriedade de caracterizar completamente o tensor de curvatura na ausência local de matéria embora eles não apareçam explicitamente nas equações de Einstein em momento algum⁷. Colocado de outra forma,

⁷ Este último fato é um dos grandes motivos da escolha do quadro QM para se estudar a evolução das excitações conformes na cosmologia. O formalismo tradicional Lifshitz/Bardeen apresentaria

existe uma completa equivalência entre a anulação simultânea de $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ e a anulação do tensor de Riemann no vazio. De fato, em termos da parte elétrica e magnética podemos reescrever o tensor de Weyl como:

$$W_{\alpha\beta\rho\sigma} = (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\rho\sigma\lambda\tau} - g_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\rho\sigma\lambda\tau})V^\mu V^\lambda E^{\nu\tau} + (\eta_{\alpha\beta\mu\nu}g_{\rho\sigma\lambda\tau} + g_{\alpha\beta\mu\nu}\eta_{\rho\sigma\lambda\tau})V^\mu V^\lambda H^{\nu\tau}, \quad (2.6)$$

onde $g_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}$ e $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$ o símbolo de Levi-Civita. Alternativamente temos, também:

$$W_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \delta^{[\mu}{}_{[\alpha} E_{\beta]}{}^{\nu]} - 2E^{[\mu}{}_{[\alpha} V_{\beta]}V^{\nu]} + \eta^{\mu\nu}{}_{\lambda\tau}V^\lambda V_{[\alpha} H_{\beta]}{}^{\tau]} + \eta_{\alpha\beta\varepsilon\chi}V^\varepsilon V^{[\mu} H^{\chi\nu]} \quad (2.7)$$

As componentes do tensor de Weyl dual $W_{\alpha\beta\mu\nu}^*$ podem ser obtidas de forma direta substituindo as projeções $E_{\alpha\beta}$ e $H_{\alpha\beta}$ nas equações acima segundo a transformação interna sobre a hiper-superfície:

$$E_{\mu\nu} \rightarrow H_{\mu\nu} \quad H_{\mu\nu} \rightarrow -E_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

Este fato pode ser entendido como uma decorrência das identidades

necessariamente desvantagens neste contexto.

$$\begin{aligned}\eta_{\varepsilon\xi}^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta\mu\nu} &= -2g_{\varepsilon\xi\mu\nu} \\ \eta_{\varepsilon\xi}^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta\mu\nu} &= 2\eta_{\varepsilon\xi\mu\nu}\end{aligned}\tag{2.9}$$

uma vez que $\overset{*}{W}_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}W_{\rho\sigma\mu\nu} / 2$. Fisicamente podemos entender $E_{\alpha\beta}$ como o objeto responsável pelo desvio geodésico no vácuo. A parte magnética $H_{\alpha\beta}$ não tem análogo newtoniano e supõe-se que sua presença esteja ligada aos gradientes de vorticidade da congruência [38-42].

O tensor de ordem três definido pela divergência do tensor de Weyl ($W^{\alpha\beta\mu\nu}_{;\nu}$) admite quatro projeções independentes, gerando dois vetores e dois tensores de ordem dois. Estas quatro possibilidades seguem abaixo

$$W_{\alpha\beta}^{\mu\nu}_{;\nu}V^{\beta}V_{\mu}h^{\alpha}_{\rho}\tag{2.10}$$

$$W_{\alpha\beta}^{\mu\nu}_{;\nu}V^{\beta}h_{\mu}^{(\rho}h^{\sigma)\alpha}\tag{2.11}$$

$$W_{\alpha\beta}^{\mu\nu}_{;\nu}\eta_{\rho\lambda}^{\alpha\beta}V^{\lambda}V_{\mu}\tag{2.12}$$

$$W_{\alpha\beta}^{\mu\nu}_{;\nu}h_{\mu}^{(\sigma}\eta^{\rho)\lambda\alpha\beta}V_{\lambda}\tag{2.13}$$

Substituindo estas possibilidades nas equações de Bianchi sob a forma (2.2) e reescrevendo em termos de $E_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$ e dos campos de matéria desenvolvidos no capítulo anterior

obtemos quatro equações de movimento independentes denominadas equações quasi-maxwellianas da gravitação:

(2.14)

$$h^{\alpha\beta} h^{\mu\nu} E_{\beta\mu;\nu} + \eta^{\alpha\beta\mu\nu} V^\beta \sigma^\mu{}_\lambda H^{\nu\lambda} + 3H^{\alpha\beta} \varpi_\beta = \frac{1}{3} h^{\alpha\beta} \rho_{,\beta} + \frac{\theta}{3} q^\alpha - \frac{1}{2} (\sigma^\alpha{}_\beta - 3\varpi^\alpha{}_\beta) q^\beta + \frac{1}{2} \pi^{\alpha\beta} a_\beta + \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \pi_{\beta;\mu}{}^\mu$$

(2.15)

$$h^{\alpha\beta} h^{\mu\nu} H_{\beta\mu;\nu} - \eta^{\alpha\beta\mu\nu} V^\beta \sigma^\mu{}_\lambda E^{\nu\lambda} + 3E^{\alpha\beta} \varpi_\beta = (\rho + p) \varpi^\alpha - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} q_{\beta;\mu} V_\nu + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \pi_{\alpha\lambda} (\sigma_{\lambda\mu} + \varpi_{\lambda\mu}) V_\nu$$

(2.16)

$$\begin{aligned} \dot{E}^{\mu\nu} h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta + \theta E^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} E_{\nu}^{(\alpha} h^{\beta)}{}_\mu V^{\mu;\nu} + \eta^{\beta\nu\mu\varepsilon} \eta^{\alpha\gamma\tau\lambda} V_\mu V_\tau E_{\varepsilon\lambda} \theta_{\gamma\nu} - \frac{1}{2} H_{\lambda}{}^\mu{}_{;\gamma} h_\mu^{(\alpha} \eta^{\beta)\tau\gamma\lambda} V_\tau \\ + a_\lambda H_{\nu}^{(\alpha} \eta^{\beta)\gamma\lambda\nu} V_\gamma = + \frac{1}{6} h^{\alpha\beta} (q^\mu{}_{;\mu} - q^\mu a_\mu - \pi^{\mu\nu} \sigma_{\eta\nu}) - \frac{1}{2} (\rho + p) \sigma^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} q^{(\alpha} a^{\beta)} \\ - \frac{1}{4} h^\mu{}_{(\alpha} h^{\beta)\nu} q_{\mu;\nu} + \frac{1}{2} h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu \dot{\pi}^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \pi^\mu{}_{(\alpha} \sigma^{\beta)}{}_\mu \\ - \frac{1}{4} \pi_\mu{}^{(\alpha} \sigma^{\beta)}{}_\mu + \frac{1}{6} \theta \pi^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{H}^{\mu\nu} h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\beta + \theta H^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} H_{\nu}^{(\alpha} h^{\beta)}{}_\mu V^{\mu;\nu} + \eta^{\beta\nu\mu\varepsilon} \eta^{\alpha\gamma\tau\lambda} V_\mu V_\tau H_{\varepsilon\lambda} \theta_{\gamma\nu} + \frac{1}{2} E_{\lambda}{}^\mu{}_{;\gamma} h_\mu^{(\alpha} \eta^{\beta)\tau\gamma\lambda} V_\tau \\ - a_\lambda E_{\nu}^{(\alpha} \eta^{\beta)\gamma\lambda\nu} V_\gamma = - \frac{3}{4} q^{(\alpha} \varpi^{\beta)} + \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} q^\mu \varpi_\mu + \frac{1}{4} \sigma_{\lambda}{}^{(\alpha} \eta^{\beta)\varepsilon\lambda\mu} V_\mu q_\varepsilon \\ + \frac{1}{4} h^{\nu(\alpha} \eta^{\beta)\varepsilon\tau\mu} V_\mu \pi_{\nu\varepsilon;\tau} \end{aligned}$$

As equações quasi-maxwellianas da gravitação constituem um conjunto de duas equações vetoriais e outras duas tensoriais. As duas equações vetoriais caracterizam equações de divergência enquanto as equações tensoriais envolvem derivadas temporais e rotacionais das projeções do tensor de Weyl. Sob esta forma as equações de Einstein apresentam uma semelhança óbvia com as equações da eletrodinâmica clássica. No entanto devemos lembrar, seguindo Lichnerowicz [32], que as equações quasi-maxwellianas são equações diferenciais de ordem três no tensor métrico e exigem como condição inicial as equações de Einstein. Segue também que, apesar de sua estética complicada em termos de índices, as equações QM podem apresentar vantagens construtivas em relação à representação tradicional das equações de campo quando analisadas em determinados contextos específicos. Estes contextos abarcam o formalismo Hamiltoniano da gravitação [31], a simetria dual das equações de Einstein [43], teoria de perturbações invariantes de calibre [15], emissão de ondas gravitacionais e etc. Finalmente, vale lembrar que no regime linear pós-newtoniano, sob certas hipóteses, a parte elétrica $E_{\alpha\beta}$ está ligada às derivadas do campo newtoniano g_{α} e a parte magnética com as derivadas do campo gravimagnético b_{α} [44]. Este último campo admite como fonte as correntes de massa de maneira análoga a que o campo magnético da eletrodinâmica admite as correntes de carga.

2.3 – Os invariantes algébricos do tensor conforme

Para terminar este parágrafo nós iremos colecionar alguns invariantes construídos com contrações sucessivas do tensor conforme. Mais adiante, no contexto da teoria de

perturbações, analisaremos a evolução destes invariantes para estudar a evolução das perturbações na curvatura conforme. De acordo com a classificação de Debever temos:

(2.18)

$$I_1 = \frac{1}{8} W_{\alpha\beta\mu\nu} W^{\alpha\beta\mu\nu} \quad I_2 = \frac{1}{16} W_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} W_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} W_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$$

$$I_3 = \frac{1}{8} W_{\alpha\beta\mu\nu} W^{*\alpha\beta\mu\nu} \quad I_4 = \frac{1}{16} W_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} W_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} W_{\mu\nu}{}^{*\alpha\beta}$$

Substituindo a parte elétrica e magnética do tensor de Weyl nas equações acima resulta em

$$I_1 = E^\alpha{}_\beta E^\beta{}_\alpha - H^\alpha{}_\beta H^\beta{}_\alpha \quad I_2 = E^\alpha{}_\beta E^\beta{}_\gamma E^\gamma{}_\alpha - 3H^\alpha{}_\beta H^\beta{}_\gamma E^\gamma{}_\alpha$$

(2.19)

$$I_3 = -2E^\alpha{}_\beta H^\beta{}_\alpha \quad I_4 = H^\alpha{}_\beta H^\beta{}_\gamma H^\gamma{}_\alpha - 3E^\alpha{}_\beta E^\beta{}_\gamma H^\gamma{}_\alpha$$

Ademais, é simples mostrar que vale as desigualdades abaixo:

$$E_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta} \geq 0 \quad H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta} \geq 0 \quad (2.20)$$

Capítulo 3

Modelo de mundo homogêneo e isotrópico

A cosmologia relativista, apesar de suas controvérsias acaloradas e sutilezas inerentes, admite como pano de fundo comum as geometrias do tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Dois pilares básicos contribuem, no contexto da relatividade geral, para a sustentação destas geometrias enquanto cenário conceitual⁸. Um, de natureza observacional, pode ser encarado como indício empírico, enquanto o outro, teórico, como hipótese de trabalho. Em primeiro lugar as observações do céu em

⁸ Além, é claro, do fluxo de Hubble.

faixas de frequência variadas – incluindo o óptico, rádio e raios X – indicam uma configuração de estruturas aproximadamente isotrópica e homogênea em larga escala⁹. Também a alta uniformidade na distribuição de temperatura da radiação cósmica de fundo, suposto retrato do universo primordial, fortalece em muito a hipótese de uma geometria condizente com estas simetrias. O segundo pilar consiste no princípio de Copérnico (ou princípio cosmológico) e nega explicitamente qualquer atribuição de destaque aos observadores terrestres. Supõe-se então que a física local seja igualmente válida em todos os pontos do contínuo quadri-dimensional, e também a equivalência entre as observações astronômicas potencialmente realizáveis em posições diferentes do universo. Deste modo somos conduzidos, em uma primeira análise, a descartar as particularidades locais do universo em termos de estruturas e a interpretá-las como perturbações em um modelo de FRW homogêneo e isotrópico.

É de extrema relevância neste contexto notar que tanto os argumentos teóricos quanto as ditas evidências acerca da homogeneidade e simetrias esperadas em um modelo cosmológico aplicam-se com força e robustez apenas no caso da distribuição espacial dos campos de matéria. Estes campos são interpretados como fontes (embora em sentido restrito por causa das não-linearidades envolvidas nas equações de Einstein) da geometria do espaço-tempo. No entanto, uma vez que as equações de Einstein são não-lineares, não é de maneira alguma óbvio que as médias da geometria estarão ligadas com as médias do tensor momento energia por uma relação simples [11]. Nós não iremos adentrar neste detalhes técnicos aqui e assumir os modelos de mundo de FRW como boas aproximações para a cosmologia padrão. Nesta seção faremos uma breve lista das principais propriedades destes modelos.

⁹ Por larga escala, neste contexto, entendemos volumes de espaço grandes o suficiente para englobar alguns superaglomerados de galáxias [45].

3.1 – Cinemática do elemento de linha

Do ponto de vista formal podemos dizer que as variedades do tipo FRW admitem, em consequência das referidas simetrias, para cada ponto P uma ação do grupo de rotação enquanto grupo de isometrias do espaço-tempo, com órbitas bidimensionais, mantendo fixo um dado vetor do tipo tempo V_μ em P [46]. Portanto, existe localmente – nas vizinhanças de todo e qualquer ponto – uma hiper-superfície do tipo espaço invariante pela ação deste grupo. Os vetores V^μ , aos quais refere-se a noção de isotropia, definem, então, sobre o espaço-tempo uma dada congruência do tipo tempo. De acordo com a análise do capítulo 1 sobre a cinemática de congruências e o princípio cosmológico temos que a congruência em questão deve satisfazer:

$$a_\mu = 0 \quad \sigma_{\mu\nu} = 0 \quad \omega_{\mu\nu} = 0 \quad (3.1)$$

De fato, as equações do capítulo mencionado implicam que um campo de observadores que não satisfaça as condições acima não pode ser simultaneamente compatível com as condições de homogeneidade e isotropia. Ademais, o fato de a congruência não apresentar vorticidade garante a existência de uma hiper-superfície global do tipo espaço sempre ortogonal à V^μ . Esta hipótese garante a existência de um sistema gaussiano de coordenadas sobre a variedade. Neste sistema o tensor métrico satisfaz as condições $g_{00} = 1$ e $g_{0i} = 0$, ou seja, as linhas coordenadas do tipo tempo são ortogonais à hiper-superfície em

toda a sua extensão e parametrizadas pelo tempo próprio. Ademais cada hiper-superfície de homogeneidade pode ser caracterizada por um dado valor do parâmetro t , sendo $V^\mu = \delta^\mu_0$. Segue que todas as propriedades físicas essenciais deste modelo só podem depender do tempo cósmico t . O elemento de linha reduz-se então a:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \varepsilon r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2) \right] \quad (3.2)$$

Onde $a(t)$ é uma função adimensional (dita fator de escala) e a constante ε vale -1 , 0 , ou $+1$ respectivamente para os três tipos de espaços maximalmente simétricos a três dimensões: H^3 (tri-pseudoesfera), R^3 (tri-plano) e S^3 (tri-esfera). Estes três tipos de geometrias admitem seis vetores de *Killing* independentes relacionados às invariâncias translacionais e rotacionais. Por uma questão de conveniência definiremos o parâmetro do tri-espaço hoje por t_0 . Em geral, a menos que seja dito explicitamente em um dado contexto, assumiremos $a(t_0) = 1$. Desta forma, estamos dizendo que a distância entre dois objetos localizados entre as coordenadas radiais r_1 e r_2 hoje (θ e φ fixos) é simplesmente o módulo da diferença entre as coordenadas (esta podendo ser medida, por exemplo, em *parsecs*, anos-luz ou centímetros). As equações de Einstein implicam que o fator de escala $a(t)$ evolui no tempo em função dos campos de matéria¹⁰.

3.2 – Dinâmica do elemento de linha

¹⁰ Consideraremos aqui apenas fluidos simples com equação de estado definida. Configurações mais complicadas do tipo campo escalar ou vetorial serão adiados para uma outra ocasião.

Nos modelos de FRW as distribuições de momento e energia são representadas, em geral, por uma superposição de fluidos perfeitos. Vale lembrar, no entanto, que estes fluidos apresentam-se sob esta forma apenas para os observadores gaussianos $V^\mu \doteq \delta^\mu_0$ em questão. Nós iremos analisar aqui cada tipo de fluido individualmente mantendo, porém, a equação de estado em aberto. O problema de muitos fluidos¹¹ em interação e suas respectivas perturbações constitui uma seqüência natural do presente trabalho. Muitos dos resultados apresentados adiante podem ser generalizados nesta direção. O tensor momento energia de um fluido perfeito tem a forma:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

Assumiremos ao longo do trabalho sempre a relação linear $p = \lambda \rho$ onde $\rho > 0$. Lembremos que, pelo fato do fluido encontrar-se em equilíbrio neste caso, o fluxo de partículas, o fluxo de entropia e o autovetor do tensor momento energia coincidem, definindo uma única velocidade hidrodinâmica. A evolução do modelo é completamente caracterizada pelas equações de conservação e Raychaudhuri.

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0 \quad (3.4)$$

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 = -\frac{1}{2}(1 + 3\lambda)\rho \quad (3.5)$$

¹¹ Exemplos de sistemas de dois fluidos de relevância para a cosmologia foram estudados em Doroshkevich (1965), Shikin (1966), Thorne (1967) e Osváth (1977) [47].

Estas duas equações admitem como vínculo (integral primeira)

$$\frac{1}{3}\dot{\theta}^2 = \rho - \frac{3\varepsilon}{a^2} \quad \rightarrow \quad \dot{a}^2 = \frac{1}{3}\rho \cdot a^2 - \varepsilon \quad (3.6)$$

uma vez que $\theta = 3\dot{a}/a$. O problema de integração das equações acima em função de λ tem um grande histórico na literatura. Uma revisão interessante pode ser encontrada no trabalho de Harrison [47]. Da primeira equação temos:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\lambda)}. \quad (3.7)$$

Notemos que esta dependência não depende da tri-seção em questão. Utilizando o resultado na integral primeira torna, pelo menos em princípio, possível encontrar a solução para a evolução temporal do fator de escala $a(t)$. As soluções de interesse para nós aqui – com constante cosmológica nula, equações de estado arbitrárias e válidas para as três tri-seções – todas são conhecidas na literatura e foram obtidas por Tauber em 1967 usando a forma conformalmente plana da métrica [48]. Os resultados foram generalizados por Vajk em 1969 [49]. As dependências no tempo do fator de escala, da expansão, e da densidade de energia, em cada um dos modelos, estão dispostas de forma abreviada no que se segue.

A – Modelo Euclidiano ($\varepsilon = 0$)

O modelo em questão é tido atualmente como o candidato mais provável para a descrição da geometria do universo em larga escala [45]. Nesta possibilidade mais simples de geometria não só o tensor de *Weyl* se anula, mas também a curvatura gaussiana da hiper-superfície do tipo espaço é zero. O fator de escala admite uma solução geral do tipo:

$$a^{3(1+\lambda)} = m \left[\frac{3(1+\lambda)}{2} t \right]^2 \quad (3.8)$$

se $m = \rho_0 / 3$. Calculando a expansão e utilizando a equação de vínculo temos, diretamente:

$$\theta(t) = \frac{2}{(1+\lambda)} \left(\frac{1}{t} \right) \quad \rho(t) = \left\{ \frac{4}{3(1+\lambda)^2} \right\} \frac{1}{t^2}. \quad (3.9)$$

Note-se que neste modelo não há correlação explícita de θ e ρ com a variável m uma vez que só existe uma única densidade de energia¹² capaz de satisfazer o vínculo. Em outras palavras, no modelo euclidiano θ e ρ são completamente determinados por um único valor de ρ_0 . Como veremos, este não é o caso nas tri-seções curvas. A tabela abaixo mostra algumas propriedades de evolução para alguns tipos de fluidos diferentes no modelo de universo com tri-seção euclidiana. Todos estes resultados básicos aparecerão explícita ou implicitamente nas equações responsáveis pelas perturbações desenvolvidas no próximo capítulo.

¹² Esta é a chamada densidade crítica.

Equação de estado	Densidade de Energia	Fator de Escala	Aceleração
$\lambda = 1$	$\rho \sim a^{-6}$	$a \sim t^{1/3}$	$\ddot{a} < 0$
$\lambda = 1/3$	$\rho \sim a^{-4}$	$a \sim t^{1/2}$	$\ddot{a} < 0$
$\lambda = 0$	$\rho \sim a^{-3}$	$a \sim t^{2/3}$	$\ddot{a} < 0$
$\lambda = -1/3$	$\rho \sim a^{-2}$	$a \sim t$	$\ddot{a} = 0$
$\lambda = -1/2$	$\rho \sim a^{-3/2}$	$a \sim t^{4/3}$	$\ddot{a} > 0$
$\lambda = -2/3$	$\rho \sim a^{-1}$	$a \sim t^2$	$\ddot{a} > 0$

Tabela 3.1: propriedades de evolução dos universos euclidianos.

Pela tabela segue também que as acelerações positivas do fator de escala dependem da violação da condição de energia forte, sendo esta última insensível à curvatura da tri-seção por causa da equação de Raychaudhuri. Para a análise dos outros dois tipos de geometrias definiremos uma re-parametrização do fator de escala em termos de uma nova variável η . Esta re-parametrização torna possível a obtenção de algumas soluções implícitas do problema¹³. Em termos desta variável a equação de vínculo fica:

¹³ Em geral a relação entre t e η não é trivial. Em alguns casos particulares existe uma representação em termos de funções elípticas. Nós iremos nos deter apenas em alguns casos especiais.

$$\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\eta}\right)^2 \left\{ \frac{1}{3} a^{-(1+3\lambda)} - \varepsilon \right\}. \quad (3.10)$$

Os mecanismos de análise das perturbações nos modelos não-euclidianos serão apresentados sucintamente no apêndice. De agora em diante nós usaremos largamente as definições abaixo para as derivadas de uma dada grandeza X :

$$\frac{dX}{dt} \equiv \dot{X} \quad \frac{dX}{d\eta} \equiv X'.$$

Desta forma temos, para a equação em questão $(a')^2 = (t')^2 \left\{ \frac{1}{3} a^{-(1+3\lambda)} - \varepsilon \right\}$. A solução em forma paramétrica desta equação dá origem as outras duas possibilidades de geometrias.

Lembremos também que, para estes casos, $\theta = \frac{3}{a} \dot{\eta} a'$.

B – Modelo Esférico ($\varepsilon = 1$)

Para o fator de escala temos

$$a^{1+3\lambda} = m.(\sin\eta)^2 \quad t' = \frac{2}{|1+3\lambda|} a(\eta).$$

Seguindo raciocínio análogo vem

$$\theta = 3sm^{-1/(1+3\lambda)} \frac{\cos \eta}{(\sin \eta)^{3(1+\lambda)/(1+3\lambda)}} \quad \rho = 3m^{-2/(1+3\lambda)} (\sin \eta)^{-6(1+\lambda)/(1+3\lambda)}$$

onde $s = 1$ se $1 + 3\lambda > 0$ e $s = -1$ se $1 + 3\lambda < 0$. Segue abaixo mais alguns casos particulares envolvendo alguns fluidos.

Equação de estado	Densidade de Energia	Fator de Escala	Parametrização
$\lambda = 1$	$\rho \sim a^{-6}$	$a \sim \sin(\eta)^{1/2}$	funções elípticas
$\lambda = 1/3$	$\rho \sim a^{-4}$	$a \sim \sin(\eta)$	$-\cos(\eta)$
$\lambda = 0$	$\rho \sim a^{-3}$	$a \sim \sin(\eta)^2$	$[-\cosh(\eta)\sinh(\eta) + \eta]/2$
$\lambda = -1/3$	$\rho \sim a^{-2}$	indefinido	Patológica
$\lambda = -1/2$	$\rho \sim a^{-3/2}$	$a \sim \sin(\eta)^{-4}$	$-(1/3)\cos(\eta)/\sin(\eta)^3 - (2/3)\cos(\eta)/\sin(\eta)$
$\lambda = -2/3$	$\rho \sim a^{-1}$	$a \sim \sin(\eta)^{-2}$	$-\cos(\eta)/\sin(\eta)$

Tabela 3.2: Propriedades de evolução dos universos esféricos. Note-se que o fator de escala não é definido nesta parametrização para $\lambda = 1/3$.

C - Modelo Hiperbólico ($\varepsilon = -1$)

$$a^{1+3\lambda} = m \cdot (\sinh \eta)^2 \quad t' = \frac{2}{|1+3\lambda|} a(\eta)$$

$$\theta = 3sm^{-1/(1+3\lambda)} \frac{\cosh \eta}{(\sinh \eta)^{3(1+\lambda)/(1+3\lambda)}} \quad \rho = 3m^{-2/(1+3\lambda)} (\sinh \eta)^{-6(1+\lambda)/(1+3\lambda)}$$

onde s satisfaz as mesmas propriedades anteriores e $m = \rho_0/3$ nos últimos dois casos. No próximo capítulo sobre as perturbações nos modelos de FRW iremos assumir em todos os casos $m = 1$. Finalmente

Equação de estado	Densidade de Energia	Fator de Escala	Parametrização
$\lambda = 1$	$\rho \sim a^{-6}$	$a \sim \sinh(\eta)^{1/2}$	funções elípticas
$\lambda = 1/3$	$\rho \sim a^{-4}$	$a \sim \sinh(\eta)$	$\cosh(\eta)$
$\lambda = 0$	$\rho \sim a^{-3}$	$a \sim \sinh(\eta)^2$	$[\cosh(\eta)\sinh(\eta) - \eta]/2$
$\lambda = -1/3$	$\rho \sim a^{-2}$	indefinido	patológica
$\lambda = -1/2$	$\rho \sim a^{-3/2}$	$a \sim \sinh(\eta)^{-4}$	$-(1/3)\cosh(\eta)/\sinh(\eta)^3 + (2/3)\cosh(\eta)/\sinh(\eta)$
$\lambda = -2/3$	$\rho \sim a^{-1}$	$a \sim \sinh(\eta)^{-2}$	$-\cosh(\eta)/\sinh(\eta)$

Tabela 3.3 – propriedades de evolução nos universos hiperbólicos.

3.3 – Propriedades conformes das soluções

De um ponto de vista puramente geométrico, as soluções de *Friedmann* constituem uma coleção de espaços-tempo de *Minkowski* deformados por uma função multiplicativa na métrica. Deformação, neste contexto, significa a possibilidade de reescrever o elemento de linha na forma:

$$ds^2 = \Omega(T, R) [dT^2 - dR^2 - R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] \quad (3.11)$$

Isto é, as geometrias de FRW constituem uma classe conformalmente plana das soluções da relatividade geral. Para nós é particularmente relevante a propriedade de que o tensor conforme de Weyl se anule identicamente para todos os tipos de modelos de FRW, ou seja:

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = 0 \quad (3.12)$$

É precisamente este resultado quem torna o formalismo QM adequado ao estudo de perturbações nos universos de FRW. Uma vez que a curvatura conforme se anula identicamente no *background*, ela se torna uma candidata interessante para uma variável independente de calibre. A curvatura Riemanniana das geometrias do tipo FRW tem a forma

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} [R_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}] - \frac{1}{6} R g_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Conclui-se então que, no caso das geometrias de FRW, o tensor de curvatura é completamente determinado pela distribuição local de matéria. Como mencionado anteriormente, nosso grande interesse neste trabalho será estudar a evolução das excitações infinitesimais do tensor conforme neste tipo de geometria. A grande questão é entender como esta nova propriedade geométrica da variedade – que deixa de ser conformalmente plana – se

reorganiza, uma vez admitida não nula sob uma dada hiper-superfície do tipo espaço. Nós especificaremos adiante como restringir o tipo das excitações desse tensor. No próximo capítulo nós daremos o nosso último passo básico para a análise destas excitações.

Capítulo 4

A teoria de perturbações revisitada

A teoria de perturbações cosmológicas, no contexto da gravitação einsteiniana, está fortemente baseada no conceito de deformações infinitesimais de variedades [50]. Uma vez que a relatividade geral tem como ponto de partida a relação direta entre os campos de matéria e as propriedades da geometria via equações de Einstein (ou as equações de Jordan), a noção de perturbação de uma dada solução (M_0) requer necessariamente a análise das propriedades de outra variedade (M_1) relacionada à primeira por um mapa. Supõe-se então que as relações métricas nesta outra variedade são aproximadamente as mesmas que no caso da primeira e estuda-se qual tipo de restrições a estas perturbações decorre das equações de campo. Cada ponto da variedade original, juntamente com todos os campos de tensores previamente definidos, é então relacionado um a um por um procedimento matemático de associação.

Formalmente a noção de perturbações de uma dada geometria remete à definição de um espaço abstrato de métricas onde se faz necessária a noção de distância. Uma vez que a teoria da relatividade geral admite uma representação completamente independente de coordenadas existe sempre a possibilidade de uma perturbação no potencial métrico ($\delta g_{\mu\nu}$) não representar nenhuma nova propriedade da geometria além de uma espúria transformação de coordenadas. O problema de gauge, como já mencionado, foi analisado por vários autores incluindo Lifshitz, Hawking, Bardeen Stewart e outros. Um pequeno pedaço da extensa lista de trabalhos pode ser encontrada nas referências [15-19]. Nós assumiremos para nossos fins como superados estes problemas.

A tradição convencionou a separação das perturbações em partes escalares, vetoriais e tensoriais de acordo com certos tipos de propriedades de transformação sobre a hipersuperfície. Este procedimento torna-se bastante razoável no contexto linear uma vez que a evolução de cada uma destas partes se dá de forma completamente independente. Perturbações da vorticidade (vetorial) e de ondas gravitacionais (tensorial) estão fora do escopo deste trabalho. Iremos analisar apenas as perturbações do tipo escalar. Neste caso, segue dos teoremas apresentados por Goode [51] que as perturbações não podem existir sem a presença de deformações na congruência e que a parte elétrica do tensor de Weyl está acoplada às perturbações nos gradientes de matéria. É precisamente por causa deste último resultado que o presente trabalho pode ser entendido também no cenário da formação de estruturas. Por uma questão de auto-consistência nós iremos desenvolver brevemente os cálculos necessários para a obtenção do sistema mínimo e fechado de observáveis na teoria de perturbações¹⁴. Iremos ressaltar adiante algumas hipóteses de simplificação.

4.1 – Propriedades básicas das perturbações

¹⁴ Os detalhes podem ser encontrados em [22, 27, 52]

No nosso contexto uma dada grandeza A na variedade M_0 será representada na variedade perturbada segundo a transformação:

$$A \rightarrow A + \delta A$$

Seguindo esse procedimento e lembrando que a derivada covariante em M adquire um novo termo infinitesimal temos para as equações de conservação, hidrodinâmicas, quasi-maxwellianas e vínculos, as respectivas perturbações:

I – Equações de conservação

$$1. \quad (\delta \rho)' + \dot{\rho} \delta V^0 + (\rho + p) \delta \theta + (\delta \rho + \delta p) \theta + \delta q^\alpha{}_{;\alpha} = 0 \quad (4.1)$$

$$2. \quad \dot{p}(\delta V_\mu) + \dot{p}(\delta V^0) \delta_\mu^0 - (\delta p)_{;\beta} h^\beta{}_\mu + (\rho + p)(\delta a_\mu) + h_{\mu\alpha} (\delta q^\alpha)' + \frac{4}{3} \theta (\delta q_\mu) + h_{\mu\alpha} (\delta \pi^{\alpha\beta})_{;\beta} = 0$$

II – Equações hidrodinâmicas

$$1. \quad (\delta \theta)' + \dot{\theta} (\delta V^0) + \frac{2}{3} \theta (\delta \theta) - (\delta a^\alpha)_{;\alpha} = - \frac{(\rho + 3p)}{2} (\delta \rho) \quad (4.2)$$

2.

$$(\delta \sigma_{\mu\nu})' + \frac{1}{3} h_{\mu\nu} (\delta a^\alpha)_{;\alpha} - \frac{1}{2} (\delta a_{(\alpha};_{\beta)} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + \frac{2}{3} \theta (\delta \sigma_{\mu\nu}) = -(\delta E_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} (\delta \pi_{\mu\nu})$$

$$3. (\delta \varpi_{\mu\nu})' - \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \delta a_{[\mu\nu]} + \frac{2}{3} \theta (\delta \varpi_{\alpha\beta}) = 0$$

III – Equações quasi-Maxwellianas

(4.3)

1.

$$(\delta E_{\alpha\mu})_{;\gamma} h^{\alpha\varepsilon} h^{\mu\nu} = \frac{1}{3} (\delta \rho)_{;\alpha} h^{\alpha\varepsilon} - \frac{1}{3} \dot{\rho} (\delta V^\varepsilon) - \frac{1}{3} \dot{\rho} (\delta V^0) \delta^\varepsilon_0 + \frac{1}{2} h^\varepsilon_\alpha (\delta \pi^{\alpha\mu})_{;\mu} + \frac{\theta}{3} (\delta q^\varepsilon)$$

$$2. (\delta H_{\alpha\mu})_{;\gamma} h^{\alpha\varepsilon} h^{\mu\nu} = (\rho + p) (\delta \varpi^\varepsilon) - \frac{1}{2} \eta^{\varepsilon\alpha\beta\mu} V_\mu (\delta q_\alpha)_{;\beta}$$

3.

$$\begin{aligned} & (\delta E^{\mu\nu})' h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + \theta (\delta E^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\delta E_\nu^{(\alpha} h^{\beta)})_\mu V^{\mu\nu} + \frac{\theta}{3} \eta^{\beta\nu\mu\varepsilon} \eta^{\alpha\gamma\tau\lambda} V_\mu V_\tau (\delta E_{\varepsilon\lambda}) h_{\gamma\nu} - \\ & - \frac{1}{2} (\delta H_\lambda^\mu)_{;\gamma} h_\mu^{(\alpha} \eta^{\beta)\varepsilon\gamma\lambda} V_\varepsilon = -\frac{1}{2} (\rho + p) (\delta \sigma^{\alpha\beta}) + \frac{1}{6} h^{\alpha\beta} (\delta q^\mu)_{;\mu} - \frac{1}{4} h^{\mu(\alpha} h^{\beta)\nu} (\delta q_\mu)_{;\nu} + \\ & + \frac{1}{2} h^{\mu\alpha} h^{\beta\nu} (\delta \pi_{\mu\nu})' + \frac{1}{6} \theta (\delta \pi^{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & (\delta H^{\mu\nu})_{;\tau} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} + \theta (\delta H^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\delta H_{\nu}^{(\alpha} h^{\beta)})_{\mu} V^{\mu\nu} + \frac{\theta}{3} \eta^{\beta\nu\mu\varepsilon} \eta^{\alpha\lambda\tau\gamma} V_{\mu} V_{\tau} (\delta H_{\varepsilon\gamma}) h_{\lambda\nu} - \\
& - \frac{1}{2} (\delta E_{\lambda}^{\mu})_{;\tau} h_{\mu}^{(\alpha} \eta^{\beta)\tau\gamma\lambda} V_{\gamma} = \frac{1}{4} h^{\nu(\alpha} \eta^{\beta)\varepsilon\tau\mu} V_{\mu} (\delta \pi_{\nu\varepsilon})_{;\tau}
\end{aligned}$$

IV – Equações de vínculo

$$\begin{aligned}
\text{III)} \quad & \frac{2}{3} (\delta \theta)_{;\lambda} h^{\lambda}_{\mu} - \frac{2}{3} \dot{\theta} (\delta V_{\mu}) - \frac{2}{3} \dot{\theta} (\delta V^0) \delta_{\mu}^0 - (\delta \sigma^{\alpha}_{\beta} + \delta \varpi^{\alpha}_{\beta})_{;\alpha} h^{\beta}_{\mu} = -(\delta q_{\mu}) \\
(4.4)
\end{aligned}$$

$$\text{IV)} \quad \delta \varpi^{\alpha}_{;\alpha} = 0$$

$$\text{V)} \quad -\frac{1}{2} h^{\alpha}_{(\mu} h^{\beta}_{\nu)} ((\delta \sigma_{\alpha\gamma})_{;\lambda} + (\delta \varpi_{\alpha\gamma})_{;\lambda}) \eta_{\beta}^{\varepsilon\gamma\lambda} V_{\varepsilon} = (\delta H_{\mu\nu})$$

Restringimo-nos de agora em diante apenas às geometrias de FRW, onde os objetos

$E_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, a^{\alpha}, \sigma^{\alpha\beta}, \pi^{\alpha\beta}, q^{\alpha}$ são todos nulos. Suas perturbações são, portanto, invariantes de

calibre. Um desenho esquemático das perturbações do *background* de FRW segue abaixo.

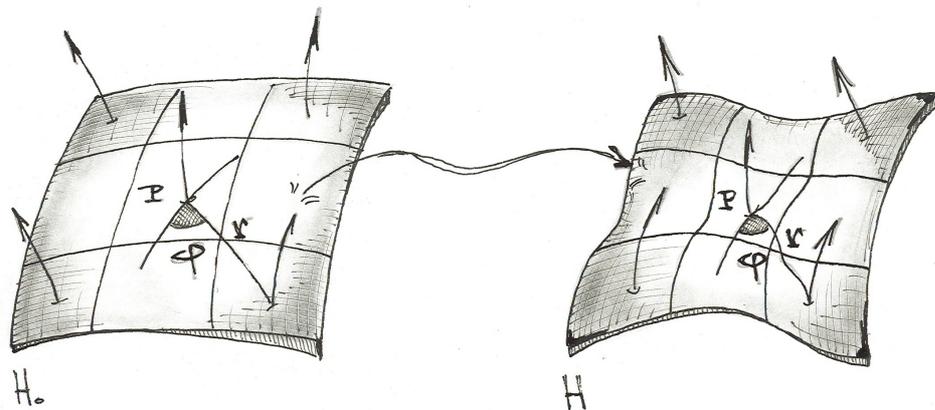


Figura 4.1: A variedade à esquerda representa o background homogêneo e isotrópico com o campo de observadores e uma dada hiper-superfície do tipo espaço (H_0). O campo de observadores é caracterizado apenas pela expansão e a geometria pelo escalar de curvatura. Na variedade perturbada (à direita) a congruência possui deformação e a geometria conforme é não nula.

4.2 – Decomposição em autofunções de Helmholtz

Neste parágrafo nós iremos nos deter em uma análise sobre bases de objetos tensoriais definidos sob as hiper-superfícies Σ de FRW e a relação de suas derivadas com a geometria intrínseca das mesmas. Em particular assumiremos como estabelecidos previamente tanto o sistema de coordenadas (caracterizado pela métrica 3.2) quanto a congruência de observadores gaussianos (definidos por $V^\mu = \delta^\mu_0$) que folheiam a variedade em hiper-superfícies do tipo espaço. Mostraremos que esta abordagem simplifica em muito as equações de evolução.

Sejam, então, as funções $Q(x^k)$ definidas sobre cada uma das hiper-superfícies tal que $\dot{Q}(x^k) = 0$ vale com relação a este campo de observadores. Desta forma, ao longo de cada curva da congruência rotulada pela coordenada x^k , Q assume sempre o mesmo valor. Suponhamos também que cada uma destas funções satisfaça a equação de autovalor

$$\nabla^2 Q = -k^2 Q \quad (4.5)$$

onde $\nabla^2 Q \equiv \gamma^{ij} Q_{i,j}$ é o operador laplaciano aplicado em Q ¹⁵, que implica, em termos do projetor

$$h^{ij} Q_{i,j} = \left(\frac{k}{A} \right)^2 Q. \quad (4.6)$$

$A(t)$ funciona como um simples parâmetro do ponto de vista das derivadas covariantes sob Σ . Pela teoria de equações de autovalor o conjunto destes objetos constitui uma base completa de funções a três variáveis e são ortogonais entre si. O espectro dos autovalores é, de acordo com Lifshitz [14]:

$$\varepsilon = 0 \quad k = n \quad 0 < n < \infty \quad (4.7)$$

$$\varepsilon = 1 \quad k^2 = n^2 + 1, \quad 0 < n < \infty \quad (4.8)$$

¹⁵ $\gamma^{ij} = -A^2 h^{ij}$.

$$\varepsilon = -1 \quad k^2 = n^2 - 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

Embora a análise detalhada das propriedades destas autofunções esteja fora do propósito do presente trabalho vale lembrar que a dependência angular em todos os casos é dada em função dos harmônicos esféricos Y_{lm} , n estando associado diretamente a l . As autofunções associadas a um dado valor de k são, em geral, degeneradas, podendo existir mais de um modo para o mesmo comprimento de onda. A decomposição de uma função escalar qualquer (por exemplo a densidade de energia perturbada $\delta\rho(x)$) nas bases $Q^{(k)}(x)$ admite uma análise morfológica bastante interessante do ponto de vista físico. Tomando um dado valor fixo da coordenada radial e “plotando” a variação angular das funções $Q^{(k)}(x)$ em termos de deformações de uma esfera construída na triseção obtemos os diagramas da página 56. Cada desenho corresponde a um dado modo de perturbação mantendo fixa a coordenada radial. Quanto maior o valor de uma componente espectral multiplicando um dado modo maior a amplitude do mesmo. Veremos adiante que as componentes espectrais das grandezas com relação a estes modos evoluem de acordo com o comprimento de onda. Estamos autorizados a pensar, então, em cada perturbação escalar como oscilações/crescimentos das amplitudes dos referidos modos. Lembremos também que, no sentido tridimensional, cada função Y_{lm} é modulada por uma função da coordenada radial. No caso euclidiano esta função se identifica com cada uma das funções de Bessel esféricas. Os outros dois casos são apresentados no trabalho de Lifshitz [ref]. Definamos agora os seguintes objetos tensoriais em termos das derivadas da base $Q(x)$ sobre as hiper-superfícies.

I – Vetor sem vorticidade

Calculando o gradiente das funções $Q(x)$ vem

$$Q_{;\mu} \equiv Q_{;\mu} \quad (4.10)$$

onde $Q_{;\mu} V^{\mu} = 0$ por causa da propriedade mencionada acima. Então apenas as componentes espaciais Q_i existem. Pelo fato de $Q_{;\mu}$ ser um gradiente é simples demonstrar que seu rotacional é identicamente nulo. De fato

$$\eta_{\alpha\beta\mu\nu} Q^{;\alpha;\beta} V^{\mu} = 0 \quad (4.11)$$

Uma vez que iremos analisar a evolução no tempo (e portanto sobre diferentes hipersuperfícies) de objetos definidos como combinações destes vetores é particularmente relevante o fato de a norma de Q_i depender do parâmetro temporal.

$$h_{ij} Q^i Q^j = -A(t)^2 \gamma_{ij} Q^i Q^j \quad (4.12)$$

II – Tensor Simétrico

Da projeção total da derivada covariante de nosso vetor sobre o triessaço temos

$$Q_{\alpha\beta} \equiv Q_{\varepsilon;\chi} h^{\varepsilon}_{\alpha} h^{\chi}_{\beta} \quad (4.13)$$

É simples mostrar que somente as componentes espaciais ($Q_{ij} = Q_{i;j}$) deste tensor são não-nulos para nossa escolha (coordenadas/observador). Em geral temos a seguinte relação:

$$Q_{\alpha;\chi} h^{\chi}_{\beta} = Q_{\alpha;\beta} - \dot{Q}_{\alpha} V_{\beta} = Q_{\alpha;\beta} + \frac{\theta}{3} Q_{\alpha} V_{\beta} \quad (4.14)$$

Por causa da equação de autovalor o traço deste tensor em cada hiper-superfície é

$$Q^{\alpha}_{\alpha} = Q^j_j = \left(\frac{k}{A}\right)^2 Q \quad (4.15)$$

III – Tensor Simétrico e sem Traço

Retirando o traço de $Q_{\alpha\beta}$ obtemos um novo tensor $S_{\alpha\beta}$ também sobre Σ .

$$S_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{k^2} Q_{\alpha\beta} + \frac{1}{3A^2} Q h_{\alpha\beta} \quad (4.16)$$

Uma vez que o projetor $h_{\mu\nu}$ pode ser identificado com a métrica do tri-espço induzida pela geometria da variedade quadri-dimensional em questão, e a congruência do tipo tempo identificada com o campo de observadores, podemos definir a afinidade da triseção de maneira que¹⁶

$$Q_{ij//k} - Q_{ik//j} = {}^{(3)}R_{ijk} Q^l \quad (4.17)$$

Contraindo i com j vem

$$Q^i{}_{i;k} - Q_{ki}{}^{;i} = {}^{(3)}R_{ki} Q^i \quad (4.18)$$

Por causa da relação de Gauss-Codazzi [ref] temos, finalmente:

$$Q^{ik}{}_{//k} = \left\{ \left(\frac{k}{A} \right)^2 - \frac{2\varepsilon}{A^2} \right\} Q^i \quad S^{ik}{}_{//k} = \frac{2}{A^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{k^2} - \frac{1}{3} \right\} Q^i \quad (4.19)$$

Temos também a identidade útil nas substituições que seguem adiante, $\dot{S}_{ij} = -\frac{2}{3}\theta S_{ij}$

¹⁶ Nesta relação // significa derivada covariante calculada com h_{ij} e ${}^{(3)}R_{ijk} Q^l$ o tensor de Rieman da triseção.

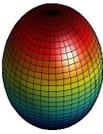
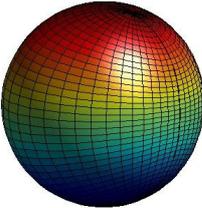
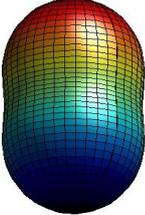
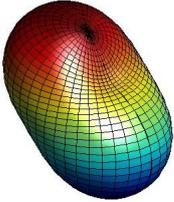
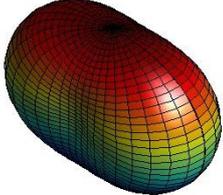
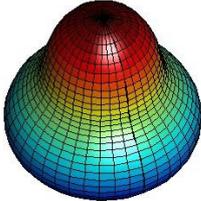
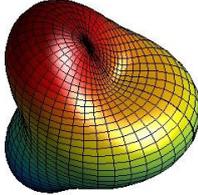
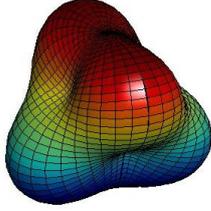
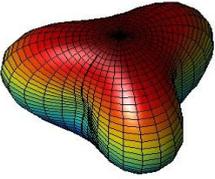
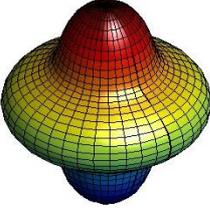
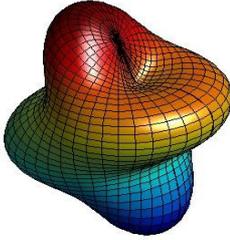
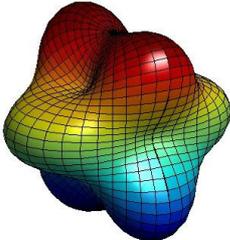
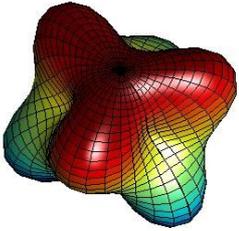
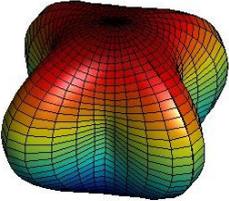
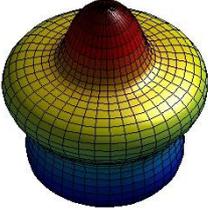
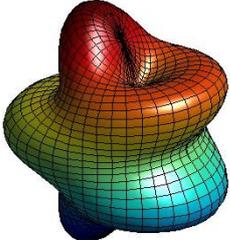
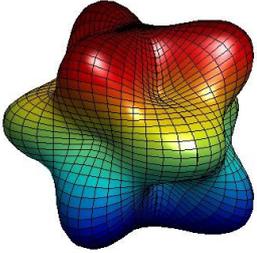
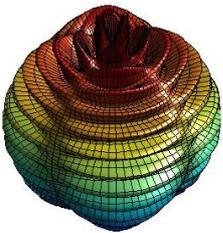
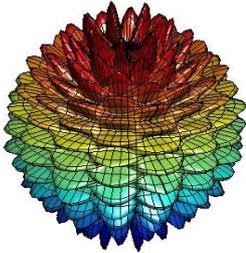
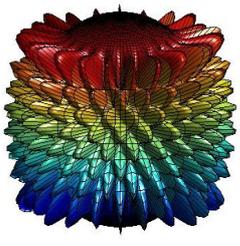
			
Y_{10}	Y_{11}	Y_{20}	Y_{21}
			
Y_{22}	Y_{30}	Y_{31}	Y_{32}
			
Y_{33}	Y_{40}	Y_{41}	Y_{42}
			
Y_{43}	Y_{44}	Y_{50}	Y_{51}
			
Y_{53}	$Y_{30,2}$	$Y_{30,7}$	$Y_{30,23}$

Tabela 4.1: diagrama pictórico exibindo a natureza morfológica de alguns modos escalares (parte angular)

4.3 – Equações de movimento

Nós iremos representar todas as grandezas relevantes para a evolução das perturbações em termos de componentes espectrais (cuja dependência se dá exclusivamente no tempo) relacionados às bases definidas acima. A tabela abaixo sintetiza nossas definições de notação em conjunto com algumas propriedades de interesse:

	componente espectral	invariante de calibre	tipo	base
δa_i	$\alpha_k(t)$	sim	cinemático	$Q^{(k)}(x)$
$\delta \sigma_{ij}$	$\Sigma_k(t)$	sim	cinemático	$S_{ij}^{(k)}(x)$
$\delta \theta$	$\theta_k(t)$	não	cinemático	$Q^{(k)}(x)$
$\delta \rho$	$\mu_k(t)$	não	hidrodinâmico	$Q^{(k)}(x)$
δp	$\chi_k(t)$	não	hidrodinâmico	$Q^{(k)}(x)$
δq_i	$\zeta_k(t)$	sim	hidrodinâmico	$Q_i^{(k)}(x)$
$\delta \pi_{ij}$	$\pi_k(t)$	sim	hidrodinâmico	$S_{ij}^{(k)}(x)$
δE_{ij}	$E_k(t)$	sim	geométrico	$S_{ij}^{(k)}(x)$
δV_k	$\upsilon_k(t)$	sim	algébrico	$Q_i^{(k)}(x)$
δV_0	$\gamma_k(t)$	não	algébrico	$Q^{(k)}(x)$

Tabela 4.2: componentes espectrais das perturbações segundo suas propriedades

De acordo com a decomposição acima segue que uma dada grandeza perturbada, como por exemplo δE_{ij} , tem uma decomposição em série do tipo

$$\delta E_{ij}(x, t) = \sum_k E_k(t) \cdot Q^{(k)}(x) \quad (4.20)$$

Por causa da linearidade das equações perturbadas é simples mostrar, no entanto, que cada modo evolui de forma completamente independente. Segue também que, no contexto escalar, H_{ij} e $\bar{\omega}_{ij}$ são identicamente nulos, não influenciando em momento algum sobre a dinâmica. Substituindo todas as grandezas do background e as componentes espectrais nas referidas equações reduzimo-las para 4 equações evolutivas e 3 vínculos envolvendo apenas as componentes do espectro.

1) equações dinâmicas

$$1. \quad \dot{\Sigma}_k = -E_k - \frac{1}{2}\pi_k - k^2\alpha_k \quad (4.21)$$

$$2. \quad \dot{E}_k = -\frac{\theta}{3}E_k - \frac{1}{2}(\rho + p)\Sigma_k + \frac{k^2}{2}\zeta_k + \frac{1}{2}\dot{\pi}_k - \frac{\theta}{6}\pi_k \quad (4.22)$$

$$3. \quad \dot{\mu}_k - \frac{1}{2}\dot{\rho}\gamma_k + \theta(\mu_k + \chi_k) + (\rho + p)\theta_k + \frac{k^2}{a^2}\zeta_k = 0 \quad (4.23)$$

$$4. \quad \dot{\theta}_k - \frac{1}{2}\gamma_k\dot{\theta} + \frac{2}{3}\theta\theta_k - \left(\frac{k}{a}\right)^2\alpha_k = -\frac{1}{2}(\mu_k + 3\chi_k) \quad (4.24)$$

2) vínculos

$$1. \frac{2}{3}(\dot{\theta}_k - \dot{\theta} v_k) - \frac{2}{a^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{k^2} - \frac{1}{3} \right\} \Sigma_k = 0 \quad (4.25)$$

$$2. \frac{1}{3}[\dot{\mu}_k - \dot{\rho} v_k] - \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{k^2} - \frac{1}{3} \right\} (2E_k - \pi_k) = 0 \quad (4.26)$$

$$3. \dot{p} v_k - \chi_k + (\rho + p)\alpha_k + \dot{\zeta}_k + \theta \zeta_k + \frac{2}{a^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{k^2} - \frac{1}{3} \right\} \pi_k = 0 \quad (4.27)$$

Um cálculo direto permite demonstrar que as derivadas temporais dos vínculos se anulam [23] e que, portanto, estamos autorizados a utilizá-los explicitamente nas equações de movimento. Ademais utilizaremos a hipótese termodinâmica $\pi_{\mu\nu} = \xi \sigma_{\mu\nu}$, onde ξ é uma constante.

Notemos ainda que as equações acima admitem uma restrição adicional do observador. Sob este formato elas não explicitaram nenhuma relação entre o campo de observadores perturbado e as linhas coordenadas do tipo tempo na variedade perturbada. Esta escolha pode ser considerada como uma espécie de calibre residual. Assumindo, por exemplo, o observador perturbado como gaussiano, isto é, $v_k(t) = 0$ e $\gamma_k(t) = 0$, segue de maneira trivial que todas as grandezas perturbadas são invariantes de calibre. No entanto, mostraremos que a evolução do conjunto mínimo fechado de observáveis é insensível a esta restrição. De fato, assumindo $\chi_k(t) = \lambda \mu_k(t)$ e o fluxo de calor $\zeta_k(t)$ nulo temos:

$$1. \dot{\Sigma}_k = -E_k - \frac{1}{2}\xi \Sigma_k - k^2 \alpha_k \quad (4.28)$$

$$2. \dot{E}_k = -\frac{\theta}{3} E_k - \frac{1}{2}(1 + \lambda)\rho \Sigma_k + \frac{1}{2}\xi \dot{\Sigma}_k - \frac{\theta}{6}\xi \Sigma_k \quad (4.29)$$

$$3. \dot{\mu}_k - \frac{1}{2}\dot{\rho} \gamma_k + \theta(1 + \lambda)\mu_k + (1 + \lambda)\rho \theta_k = 0 \quad (4.30)$$

$$4. \quad \dot{\theta}_k - \frac{1}{2}\gamma_k \dot{\theta} + \frac{2}{3}\theta \theta_k - \left(\frac{k}{A}\right)^2 \alpha_k = -\frac{1}{2}(1+3\lambda)\mu_k \quad (4.40)$$

$$5. \quad \frac{2}{3}(\theta_k - \dot{\theta} v_k) - \frac{2}{a^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{k^2} - \frac{1}{3} \right\} \Sigma_k = 0 \quad (4.41)$$

$$6. \quad \frac{1}{3}[\mu_k - \dot{\rho} v_k] - \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{k^2} - \frac{1}{3} \right\} (2E_k - \xi \Sigma_k) = 0 \quad (4.42)$$

$$7. \quad \lambda \dot{\rho} v_k - \lambda \mu_k + (1+\lambda)\rho \alpha_k + \frac{2}{a^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{k^2} - \frac{1}{3} \right\} \xi \Sigma_k = 0 \quad (4.43)$$

Utilizando o terceiro vínculo no segundo obtemos uma relação entre a componente espectral da aceleração, a parte elétrica do tensor de *Weyl* e o *shear*. Substituindo esta relação nas duas primeiras equações de evolução temos, finalmente:

$$\dot{\Sigma}_k = -\xi \left[\frac{1}{2} + k^2 u_{(\varepsilon,k)}(t) \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] \Sigma_k + (\lambda k^2 u_{(\varepsilon,k)}(t) - 1) E_k \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_k = & - \left[\frac{1}{2}(\rho + p) + \frac{\xi}{2} \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\theta}{3} \right) + \frac{\xi^2}{2} k^2 u_{(\varepsilon,k)}(t) \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] \Sigma_k \\ & + \left[\frac{\xi}{2} \lambda k^2 u_{(\varepsilon,k)}(t) - \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\xi}{2} \right) \right] E_k \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde a função

$$u_{(\varepsilon, k)}(t) \equiv \frac{2}{(\rho + p)} \left(\frac{1}{A^2} \right) \left\{ 1 - \frac{3\varepsilon}{k^2} \right\} \quad (4.46)$$

será, por razões que se tornarão óbvias, denominada de *função do discurso*. É importante ressaltar que toda dependência explícita da tri-seção decorre desta função. A dependência no tempo de todas as outras grandezas pode ser obtida à partir da solução do sistema dinâmico acima. As quantidades do *background* ρ , θ e a conferem o caráter não autônomo do sistema. Uma vez que as soluções nem sempre podem ser exibidas para uma situação específica nós desenvolveremos um conjunto de técnicas da teoria dos sistemas dinâmicos que viabilizarão uma análise qualitativa. O estudo do acoplamento entre a curvatura conforme δE_{ij} e a deformação da congruência $\delta \sigma_{ij}$ acaba sendo uma forma interessante de avaliar a estabilidade da curvatura conforme na cosmologia.

De agora em diante nós passaremos a analisar em detalhes as propriedades deste sistema dinâmico em um número variado de contextos envolvendo perturbações de fluidos diversos nos três tipos de tri-seções. A solução consiste no par das funções espectrais $\Sigma_k(t)$ e $E_k(t)$. Uma vez que, em geral, cada função está associada a uma dada constante de integração, a solução geral pode ser entendida como uma família de curvas a dois parâmetros. No caso adiabático, onde a pressão anisotrópica é nula, temos:

(4.47)

$$\dot{\Sigma}_k = (\lambda k^2 u_{(\varepsilon, k)}(t) - 1) E_k$$

$$\dot{E}_k = -\frac{1}{2}(\rho + p)\Sigma_k - \frac{\theta}{3}E_k$$

Esta situação simplificada admite, como veremos, algumas soluções exatas de interesse. Finalmente, como ponte entre as excitações conformes e a formação de estruturas, lembramos que:

$$\frac{1}{\rho}h_{ij}\delta\rho^{,j} = \frac{3}{\rho a^2}\left\{\frac{\varepsilon}{k^2} - \frac{1}{3}\right\}\sum_k(2E_k - \pi_k)Q_i^{(k)} \quad (4.48)$$

No caso em que a pressão anisotrópica se anula os tri-gradientes de matéria são completamente determinados pela parte elétrica do tensor de Weyl. Portanto, a análise dos regimes de estabilidade/instabilidade da estrutura conforme implicam em um verdadeiro estudo sobre a evolução das estruturas no universo.

Capítulo 5

Estabilidade, dissipação conforme e evolução estroboscópica do retrato de fases

A teoria de perturbações cosmológicas¹⁷, uma vez formulada no contexto quasi-maxwelliano e restrita à sua componente escalar, permite a construção de um conjunto infinito de sistemas dinâmicos bidimensionais e não autônomos – caracterizados por um dado comprimento de onda específico – responsável pela evolução de todas as grandezas de interesse físico com sentido mensurável explícito. Estas grandezas podem envolver simultaneamente combinações

¹⁷ Estamos restringindo estas perturbações apenas aos universos de FRW

das variáveis cinemáticas, dinâmicas e geométricas que caracterizam o fluido e a variedade. No nosso caso de interesse, onde algumas hipóteses sobre o fluido e a congruência são realizadas, o conjunto mínimo de observáveis obtido envolve apenas uma grandeza do campo de observadores (representada pelo tensor de deformação) e uma outra de natureza geométrica (representada pela parte elétrica do tensor de Weyl). Lembramos que este resultado permanece válido para as triseções não-euclidianas. Segue que a evolução de $E_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$ determina o comportamento de todas as outras variáveis.

Neste capítulo iremos recapitular algumas propriedades elementares da teoria dos sistemas dinâmicos e adapta-las à análise do sistema (Σ_k, E_k) . Nosso foco de interesse será os sistemas dinâmicos lineares, não-autônomos e planares, isto é, envolvendo apenas duas funções dependentes do tempo. Grande parte da análise qualitativa subsequente envolve o conceito de retrato de fase, estabilidade e topologia das curvas. A noção de pontos fixos (pontos singulares) no espaço de fases também desempenhará um papel importante na nossa análise uma vez que, no nosso caso, ele se identifica com o espaço-tempo não perturbado de FRW e as trajetórias em sua vizinhança determinam completamente o comportamento das perturbações escalares. Dois resultados relacionados à evolução das trajetórias serão rapidamente analisados. Nosso objetivo será aplicá-los no que diz respeito à definição de estabilidade/instabilidade das soluções bem como na noção de dissipação da curvatura conforme. Veremos como a topologia do fluxo definido pelas trajetórias em torno do ponto fixo permite classificar os tipos de regimes em questão.

5.1 – Sistemas não autônomos e redutibilidade

Os sistemas dinâmicos ditos autônomos, independentemente do número de dimensões em questão, são aqueles cuja dependência temporal manifesta-se apenas de forma implícita. Contrariamente, um conjunto não autônomo de equações diferenciais acopladas admite uma dependência da variável t explícita no campo de vetores que o determina [53]. Em duas dimensões, por exemplo, temos:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= F_1(X_1, X_2; t) \\ \dot{X}_2 &= F_2(X_1, X_2; t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

X_1 e X_2 são as variáveis dependentes e as funções F_1 e F_2 dependem, por hipótese, do tempo¹⁸. Os sistemas não autônomos podem ser pensados qualitativamente enquanto um conjunto infinito de sistemas autônomos localizados. Para cada valor da variável independente t o campo de vetores adquire uma nova configuração. Os pontos fixos são definidos pela condição simultânea $F_1(X_1, X_2; t) = 0$ e $F_2(X_1, X_2; t) = 0$. Se o sistema é linear ele admite ainda uma representação matricial envolvendo uma matriz jacobiana J do tipo

$$\dot{M} = JM\tag{5.2}$$

onde

¹⁸ No sistema das perturbações esta dependência temporal decorre das grandezas do *background*.

$$M \equiv \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad J \equiv \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

e $F_{ij} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial X_j}$. Vale lembrar que qualquer sistema planar definido pelas equações mencionadas

admite uma representação tridimensional autônoma. Neste caso define-se uma nova variável

X_3 satisfazendo a condição $\dot{X}_3 = 1$. Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F_1(X_1, X_2, X_3) \\ \dot{X}_2 &= F_2(X_1, X_2, X_3) \\ \dot{X}_3 &= 1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Desta forma, passamos a entender as soluções como um conjunto particular de curvas que interceptam os planos $X_3 = \text{const}$ apenas uma vez. Nota-se que uma tal redução não admite a tradicional definição de pontos críticos uma vez que o campo ao lado direito jamais se anula. Este é exatamente o caso no sistema (Σ_k, E_k) onde o próprio eixo t coincide com o *background*. No entanto, admitindo que a matriz jacobiana possa ser expandida em potências de t , reconhecemos que o primeiro termo da expansão aplicado ao vetor de posição M define novamente um sistema autônomo. Percorrendo todo o domínio da variável X_3 em domínios suficientemente pequenos de tempo (numa espécie de fatias de espaço de fases) podemos fazer uma análise estroboscópica da solução geral considerando inúmeros sistemas autônomos de comportamentos diferentes. Esta abordagem qualitativa torna-se bastante relevante uma vez que vários sistemas não autônomos carecem de solução em forma fechada,

como é caso do sistema oriundo da teoria de perturbações escalares em certas circunstâncias¹⁹.

5.2 – Autonomia, autovalores e curvas integrais

Por causa da possibilidade de redução do sistema (Σ_k, E_k) para uma coleção localizada (no tempo) de sistemas autônomos descreveremos aqui algumas propriedades elementares dos mesmos. Nosso objetivo básico é a caracterização das propriedades gerais de evolução do sistema (4.47) em termos do comportamento das trajetórias em cada fatia. Um dado sistema dinâmico planar e autônomo satisfazendo a condição de linearidade das soluções tem a forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

A matriz 2×2 de transformação (ou matriz jacobiana) J é constituída pelas componentes (reais para todos os fins no nosso exame)

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

¹⁹ Por exemplo nos casos onde $\varepsilon \neq 0$.

Aplicada ao vetor de posição no espaço de fases a matriz jacobiana define automaticamente um campo vetorial \mathcal{V} de componentes

$$\begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Em certo sentido são as propriedades geométricas das curvas integrais (ou fluxo de fase) de \mathcal{V} em uma dada região do espaço de fases quem determina a natureza da solução naquela instância²⁰. A análise desta geometria em torno de um dado ponto (fixos em geral) é de extrema importância na classificação da topologia das curvas. Da multiplicação matricial decorre:

$$\dot{X} = aX + bY \quad (5.8)$$

$$\dot{Y} = cX + dY.$$

As equações de movimento definidas pela regra acima também podem ser interpretadas do ponto de vista das transformações de ponto. Neste contexto elas determinam, para intervalos suficientemente pequenos da variável t , um conjunto de transformações infinitesimais lineares do espaço de fases nele mesmo. Ou seja, para cada par

²⁰ Neste sentido a teoria dos sistemas dinâmicos pode ser entendida como a análise de congruências no espaço de fases.

ordenado de condições iniciais (X_0, Y_0) a transformação associa um novo par, infinitesimalmente próximo do primeiro, dado por $(X_0 + dX, Y_0 + dY)$ onde os incrementos (dX, dY) são dados por

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} dt \quad (5.9)$$

Esta forma é particularmente interessante para o estudo da evolução de uma dada curva fechada de condições iniciais em torno do ponto fixo. Se, por exemplo, um círculo de condições iniciais estiver definido em torno de um ponto de sela, a dinâmica tratará de transformá-lo em uma elipse. Os auto-vetores da matriz J determinam as direções nas quais (dX, dY) se tornam proporcionais à própria condição inicial. Para tal prossigamos com a análise tradicional das soluções possíveis do sistema. Uma vez que as equações são acopladas a determinação de uma variável dependente acarreta imediatamente no conhecimento da outra²¹. Derivando uma segunda vez a primeira equação da transformação (5.8) e substituindo a segunda equação no resultado temos:

$$\ddot{X} - (a + d)\dot{X} + (ad - bc)X = 0, \quad (5.10)$$

²¹ Portanto, no sistema (Σ_k, E_k) o conhecimento da função $E_k(t)$ implica na evolução do shear.

que pode ser reescrita em termos mais sugestivos através do traço e determinante de J sob a forma

$$\ddot{X} - (\text{Tr}J)\dot{X} + (\det J)X = 0 \quad (5.11)$$

Assumindo uma solução do tipo exponencial e^{mt} (sendo m obviamente equivalente aos autovalores da matriz J) obtemos a relação algébrica de segunda ordem:

$$m^2 - (\text{Tr}J)m + (\det J) = 0. \quad (5.12)$$

Temos, portanto, que a solução geral tem a forma:

$$X(t) = \alpha e^{m_1 t} + \beta e^{m_2 t} \quad (5.13)$$

com α e β constantes. Lembremos que, no contexto dos sistemas não autônomos, estas soluções valem apenas localmente em torno de cada fatia $t = \text{const}$. Portanto é a relação entre o traço e o determinante que implicam o tipo de trajetória em torno do ponto fixo. Os autovalores são:

$$m_{\pm} = \frac{(TrJ)_{\pm} \sqrt{(TrJ)^2 - 4(\det J)}}{2} \quad (5.14)$$

Definindo a *função de proporção* Φ ²² pela relação

$$\Phi \equiv \frac{4 \det J}{(TrJ)^2} \quad (5.15)$$

temos:

$$m_{\pm} = \frac{(TrJ)}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \Phi} \right) \quad (5.16)$$

Portanto, independentemente dos valores assumidos pelo traço de J podemos estabelecer pelo menos três regiões de comportamentos qualitativamente distintos – do ponto vista da topologia das soluções no espaço de fases– em função do domínio de Φ . Em geral os autovalores de J podem tomar valores complexos e conjugados ($\Phi > 1$), dois valores reais de mesmo sinal ($0 < \Phi < 1$), ou dois valores reais de sinais opostos ($\Phi < 0$). Neste último caso é simples concluir que a magnitude dos autovalores depende de quão grande se torna o módulo de Φ (supondo fixo o traço). Este último resultado tem importância na

²² A definição da função de proporção se mostrará extremamente útil na nossa análise das perturbações. Veremos que ela permitirá exibir de forma simples as regiões de estabilidade/instabilidade dos modos de perturbação através de uma relação entre grandezas do *background* e o comprimento de onda. Ademais, a evolução no tempo de Φ diz muito sobre a própria evolução de $(\Sigma_k(t), E_k(t))$;

caracterização do nível de instabilidade do sistema em questão. Notemos também que se a *função de proporção* iguala-se à unidade os autovalores acabam se degenerando e ambos finalmente independem do determinante de J . Em nossa análise da evolução das perturbações, cada fatia do espaço de fases será caracterizada por $TrJ(t)$, $\Phi(t)$ e por $m_{\pm}(t)$. O traço da matriz Jacobiana determina a taxa de dissipação das perturbações, a função de proporção a topologia das trajetórias e os autovalores o nível da instabilidade.

5.3 – O teorema da divergência e os critérios de dissipação

Definiremos agora um critério de dissipatividade para sistemas dinâmicos autônomos e planares baseando-nos na taxa de variação da área no espaço de fases. Restringiremos apenas aos sistemas lineares. Seja uma dada superfície de condições iniciais definidas em um dado instante de tempo delimitada por uma curva fechada Γ . Iremos assumir que o volume inicial é infinitesimal e que, portanto, as trajetórias soluções são infinitesimalmente próximas. Consideremos em coordenadas cartesianas a evolução da área ν definida pelo retângulo $(X_1, Y_1), (X_1, Y_2), (X_2, Y_1), (X_2, Y_2)$ no instante inicial t_0 ²³. Uma vez que, neste caso, a área é dada por

$$\nu = (X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1), \quad (5.17)$$

²³ Usamos aqui X e Y para rotular as variáveis ao invés da notação de índices acima.

os pontos definidos pelos vértices do retângulo (e também as aresta do mesmo) evoluem no tempo segundo o sistema (5.5). Derivando com relação ao tempo e expandindo as trajetórias em torno do ponto (X_1, Y_1) vem [54]:

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \text{Tr}J \quad (5.18)$$

Portanto, a taxa de variação da área no espaço de fases é determinada pelo traço da matriz de transformação J . Observe-se que este valor é numericamente igual à divergência do campo de vetores V . Adiantando um resultado sobre a evolução das perturbações, se $\text{Tr}J < 0$ então a área diminui com o tempo e o estado final das trajetórias é determinado por uma região do espaço de fases de dimensão menor que o número de graus de liberdade. Estes sistemas são chamados de dissipativos e a região futura para a qual as trajetórias são atraídas é denominada de atrator.

5.4 – A topologia do retrato de fases

A análise do problema dos autovalores/autovetores de um sistema planar nos conduz à classificação das trajetórias em torno do ponto fixo baseada na relação entre o traço e o determinante da matriz *jacobiana* J [54]. A demonstração deste resultado imediato pode ser encontrada em qualquer texto sobre sistemas dinâmicos. A tabela abaixo sintetiza este resultado.

	$TrJ < 0$	$TrJ > 0$
$\det J > (1/4)(TrJ)^2$	nó espiral	nó repulsor
$0 < \det J < (1/4)(TrJ)^2$	nó	repulsor
$\det J < 0$	ponto de sela	ponto de sela

Tabela 4.1 Classificação das trajetórias em torno de um ponto fixo qualquer.

Os três tipos de comportamentos básicos para um sistema dissipativo típico, isto é, onde

$TrJ < 0$ têm a forma:

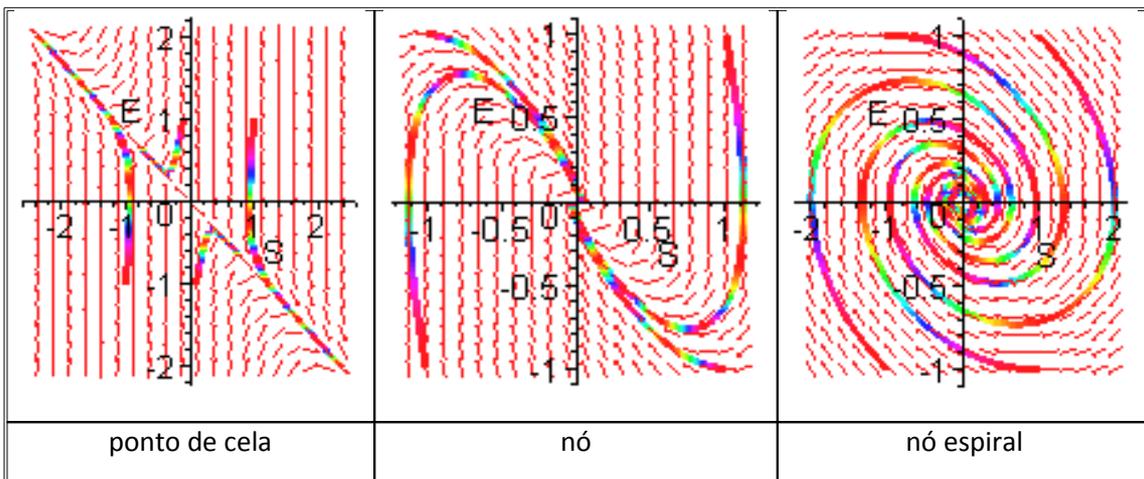


Tabela 4.2 – Retrato de fases dos três tipos de comportamentos básicos nas vizinhanças de um ponto

fixo. O sistema dinâmico satisfaz a condição $TrJ < 0$.

Notemos que de um ponto de vista qualitativo o ponto de sela representa uma situação de instabilidade das soluções que tendem a crescer indefinidamente na direção de um dos auto-vetores. As outras duas situações possíveis representam exatamente o comportamento oposto do ponto de vista da estabilidade – as trajetórias sendo atraídas para o ponto de equilíbrio. No caso das perturbações escalares os três tipos de comportamentos estão presentes. Mostraremos que, em geral, o nó espiral representa o comportamento assintótico típico das soluções para as componentes espectrais da parte elétrica do tensor de Weyl ($E_k(t)$) e do tensor de deformação ($\Sigma_k(t)$). Em uma situação geral temos basicamente uma espécie de competição de magnitude entre o traço e o determinante de J para a determinação da topologia das trajetórias das perturbações. Uma simples inspeção mostra que estes resultados podem ser traduzidos em termos da função de proporção.

5.5 – Algumas propriedades do conjunto mínimo de observáveis

Iremos aplicar agora os resultados da análise dos últimos parágrafos no sistema dinâmico responsável pela evolução das perturbações escalares nos universos de FRW. Mostraremos que do ponto de vista da evolução da área no espaço de fases o sistema constitui uma estrutura tipicamente dissipativa, embora a taxa de dissipação seja uma função do tempo. Seguindo a análise acima e reconsiderando o sistema 4.44 e 4.45 temos, em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{\Sigma}_k \\ \dot{E}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_k \\ E_k \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

onde os componentes da matriz *Jacobiana* dependem explicitamente do tempo em nosso caso, englobam simultaneamente todas as variáveis de relevância na dinâmica das perturbações e têm a forma:

(5.20)

$$A_k(t) = -\xi \cdot \left[\frac{1}{2} + k^2 u_{(\varepsilon,k)}(t) \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] \quad B_k(t) = (\lambda k^2 u_{(\varepsilon,k)}(t) - 1)$$

$$C_k(t) = - \left[\frac{1}{2}(\rho + p) + \frac{\xi}{2} \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\theta}{3} \right) + \frac{\xi^2}{2} k^2 u_{(\varepsilon,k)}(t) \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{3} \right) \right]$$

$$D_k(t) = \left[\frac{\xi}{2} \lambda k^2 u_{(\varepsilon,k)}(t) - \left(\frac{\theta}{3} + \frac{\xi}{2} \right) \right]$$

Com $u_{(\varepsilon,k)}(t)$ dado em termos da definição 4.46.

Observemos que no caso mais geral do nosso contexto (com fluxo de calor nulo) o sistema dinâmico acima envolve uma família de quatro parâmetros (ε , λ , ξ e k). A escolha da tri-seção, das relações entre a densidade de energia/pressão, pressão anisotrópica/shear, e do módulo do vetor de onda k determina o caso específico de interesse. Calculando o traço de J_k vem

$$TrJ_k = A_k(t) + D_k(t) = -\frac{\theta}{3} - \xi \left(1 + \frac{k^2 u_{(\epsilon,k)}(t)}{3} \right). \quad (5.21)$$

Abstraindo por um momento da pressão anisotrópica reconhecemos imediatamente que um modelo de mundo específico em estado de expansão apresenta inevitavelmente as características de um sistema aberto típico quando considerado sob a ótica das perturbações escalares. A dinâmica das perturbações comporta-se exatamente como um sistema dissipativo – a dissipação caracterizada pelo fator de Hubble ($H = \theta / 3$). Neste caso a área de um dado *ensemble* de condições iniciais - delimitado pela curva fechada Γ - diminuirá ao longo das trajetórias. Tudo funciona como se as perturbações iniciais, em certo sentido, fossem amortecidas pela expansão cósmica. Em outras palavras, as perturbações acabam dissipando energia para o *background* se este se expande de alguma forma. Esta dissipação independe de onde se considera o *ensemble* inicial. A área, do ponto vista assintótico, colapsa para uma região do espaço de fases de dimensão menor do que a dimensão do mesmo. Esta região constitui um atrator das trajetórias. Ao fenômeno de colapso da área em direção ao atrator chamaremos de *dissipação conforme*. Observamos também que no caso estático $\theta = 0$ - perturbações escalares em um universo do tipo Minkowski – o sistema é conservativo, e portanto *Hamiltoniano*. Neste caso a área no espaço de fases se conserva pelo teorema de *Liouville* [54]. O caso em colapso apresenta comportamento oposto, tudo se passando como um sistema do tipo forçado onde energia é injetada no sistema. Este último fato aparece de forma diferente no trabalho de Lifshitz [14].

Uma análise um pouco mais cuidadosa permite reconhecer uma coincidência interessante quando $\xi = 0$. Se lembrarmos da definição do escalar de *Hubble* em termos do fator de escala, temos a seguinte relação entre a taxa de variação da área no espaço de fases e a taxa de variação da expansão dos observadores no espaço físico.

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = -\frac{\theta}{3} = -H = -\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (5.22)$$

Segue daí que a área no espaço de fases multiplicada pelo fator de escala é uma grandeza preservada ao longo da dinâmica. Surge, portanto, a seguinte relação de conservação:

$$[a(t)v(t)]' = 0 \quad \text{ou} \quad a(t) = \frac{const}{v(t)} \quad (5.23)$$

Esta é uma relação curiosa entre o espaço físico e o espaço de fases. Ela nos sugere que podemos inferir propriedades de evolução do fator de escala observando apenas o comportamento de algumas trajetórias no espaço de fases. As trajetórias dependem da dinâmica de objetos definidos apenas na variedade perturbada.

Considerando a pressão anisotrópica mais uma vez, reconhecemos que os resultados acima não são alterados significativamente para os casos em expansão. Uma vez que o fator ξ é positivo (por considerações termodinâmicas, $\pi_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} > 0$) e $u_{(\epsilon,k)}(t)$ também para grandes frequências de oscilação²⁴ (pequenos comprimentos de onda) notamos que a presença da pressão anisotrópica torna ainda mais dissipativo o sistema. A taxa de dissipação é proporcional ao valor da constante ξ . Este resultado já poderia ser esperado uma vez que este tipo de pressão está associado a processos dissipativos (fricções e deformações do fluido).

²⁴ No caso euclidiano e hiperbólico esta condição não é necessária para fluidos satisfazendo ($\rho + p > 0$).

Nossa maior atenção será para as perturbações onde $\xi = 0$. Retomando a definição da função de proporção temos²⁵:

$$\Phi_{(\varepsilon, k)} \equiv \frac{4\Delta_{(\varepsilon, k)}}{(TrJ_k)^2} = 4 \frac{A_k D_k - B_k C_k}{(A_k + D_k)^2} \quad (5.24)$$

No caso das perturbações onde a pressão anisotrópica se anula, o traço e o determinante da matriz de transformação têm a forma simplificada:

$$TrJ_k = -\frac{\theta}{3} \quad \Delta_{(\varepsilon, k)} = \frac{1}{2}(\rho + p)(\lambda k^2 u_{(\varepsilon, k)} - 1) \quad (5.25)$$

E, portanto, a *função de proporção* $\Phi_{(\varepsilon, k)}$ reduz-se a:

$$\Phi_{(\varepsilon, k)} = \frac{18}{\theta^2} (1 + \lambda) \rho \left\{ \lambda k^2 u_{(\varepsilon, k)}(t) - 1 \right\} \quad (5.26)$$

ou melhor, substituindo a *função do discurso*

$$\Phi_{(\varepsilon, k)} = \frac{18}{\theta^2} \left\{ \frac{2\lambda}{a^2} (k^2 - 3\varepsilon) - (1 + \lambda) \rho \right\}. \quad (5.27)$$

²⁵ Aqui usamos $\Delta_{(\varepsilon, k)} \equiv \det J_k$.

Estudando a evolução da função acima para um dado valor de k somos capazes de inferir completamente as possíveis topologias das soluções no espaço de fases. Através destas topologias e suas respectivas transições somos capazes de dizer quais são os regimes estáveis/instáveis do ponto de vista da estrutura conforme.

Desta forma, obtivemos nesta seção uma função capaz de caracterizar localmente a topologia das soluções em cada fatia de espaço de fases a tempos constantes. Tudo funciona como se o comportamento das trajetórias bidimensionais em cada fatia (entendidas enquanto projeções) pudesse revelar de alguma maneira a estrutura do verdadeiro retrato de fases tridimensional quando consideradas em conjunto. Os dois valores de Φ (Φ^0 e Φ^1) onde se manifestam as transições típicas na topologia com interesse para nós estabelecem as relações:

$$\Phi^0 = 0 \rightarrow \frac{1}{a^2}(k^2 - 3\varepsilon) = \frac{(1 + \lambda)}{2\lambda}\rho \quad (\text{cela} - \text{nó}) \quad (5.28)$$

$$\Phi^1 = 1 \rightarrow \frac{1}{a^2}(k^2 - 3\varepsilon) = \frac{1}{2\lambda} \left((1 + \lambda)\rho + \frac{\theta^2}{18} \right) \quad (\text{nó} - \text{foco}) \quad (5.29)$$

Em geral Φ^0 acontece para tempos menores do que Φ^1 . Se $\Phi < \Phi^0$ o sistema configura-se em topologias de cela sobre cada fatia. Neste tipo de regime as trajetórias $(\Sigma_k(t), E_k(t))$ são consideradas como instáveis sobre cada seção uma vez que um dos autovalores é real e positivo. Neste regime tanto a componente espectral da curvatura conforme $E_k(t)$ quanto $\Sigma_k(t)$ acabam divergindo do ponto fixo. Do ponto de vista exclusivo da geometria é

exatamente nesse regime onde a variedade perturbada (M) distancia-se gradativamente da configuração conformalmente plana (M_0). Os gradientes de matéria também crescem em módulo nesta situação. Terminamos esta subseção exibindo os autovalores e autovetores da matriz $J_k(t)$ em cada seção a tempo constante. Substituindo o valor do traço na equação 5.16 temos.

$$m_{\mp} = -\frac{\theta}{6} \left(1 \pm \sqrt{1 - \Phi_{(\varepsilon,k)}} \right) \quad (5.30)$$

Onde $m_- < 0$ e $m_+ > 0$.

Os autovetores (assumindo $\xi = 0$) satisfazem a condição abaixo para cada valor de

m_{\mp}

$$E_{k\mp} = \frac{m_{\mp}}{\lambda k^2 u_{(\varepsilon,k)} - 1} \Sigma_k \quad (5.31)$$

Vejamos agora em alguns comentários sobre a estabilidade dos fluidos no contexto das perturbações como Φ pode desempenhar papel interessante.

5.5 – Considerações sobre a estabilidade gravitacional/mecânica dos fluidos

A relatividade geral em um contexto cosmológico apresenta dependência bilateral com relação à pressão dos fluidos. Uma vez que as pressões, por causa de seu lugar no tensor momento energia da matéria, passam a gravitar em conjunto com a densidade de energia, acabamos frente a uma situação interessante. De um ponto de vista da hidrodinâmica as pressões estão ligadas com a estabilidade mecânica da matéria. Em um nível microscópico esta estabilidade manifesta-se pelos choques entre as partículas do fluido que de certa forma se repelem a curtas distâncias. É este fato que impede a implosão de um dado fluido. No entanto, a gravitação é essencialmente atrativa para os fluidos tidos como convencionais ($\lambda > 0$). Quanto maior a pressão, no caso das geometrias de FRW em expansão, maior o efeito de travamento da gravidade sobre a expansão. O modelo sendo (por hipótese) homogêneo e isotrópico, os gradientes de pressão nulos implicam apenas na natureza geodésica da congruência. Portanto seu aspecto hidrodinâmico elementar passa quase desapercibido.

É na teoria de perturbações – por causa da quebra da homogeneidade das tri-seção - que nos deparamos explicitamente com este outro aspecto da presença das pressões. Os gradientes de pressão passam a desempenhar um papel importante do ponto de vista da estabilidade do fluido sob perturbações escalares. Estes se manifestam em sua maior força através da segunda equação de conservação – uma vez que esta aparece²⁶ indiretamente no nosso sistema dinâmico. A função de proporção, ao caracterizar os regimes de estabilidade/instabilidade da parte elétrica do tensor de Weyl, caracteriza simultaneamente a evolução dos gradientes de matéria e pressão, uma vez que estamos considerando apenas equações de estado lineares e independentes do tempo. No entanto, justamente por causa da influência dupla da pressão veremos que certos tipos de fluidos exóticos, apesar de sua influência repulsiva do ponto de vista da gravitação, apresentam regimes mais propícios à formação de estruturas (instáveis) do que a matéria ordinária.

²⁶ Lembremo-nos da utilização da segunda equação de conservação projetada para eliminar as variáveis dependentes de *gauge*.

Vejamos o comportamento genérico de Φ . Uma última inspeção na definição de Φ mostra que podemos escrevê-la apenas em termos da função $a(t)$ e do índice espectral k . Esta possibilidade decorre do uso da integral primeira 3.6 na equação 5.27 em conjunto com a dependência 3.7. Substituindo estas variáveis do *background*, temos:

$$\Phi_{(\varepsilon, k)}(t) = \frac{9}{(\rho_0 a^{-(1+3\lambda)} - 3\varepsilon)} \left\{ 2\lambda (k^2 - 3\varepsilon) - (1 + \lambda) \rho_0 a^{-(1+3\lambda)} \right\} \quad (5.32)$$

Note-se que se a solução do *background* é completamente conhecida em termos da variável temporal t todo o conhecimento sobre a estabilidade do sistema pode ser obtido através da inspeção da imagem $\Phi(a(t))$. É simples mostrar que (com exceção do caso $\varepsilon = 1$) para um dado fluido com equação de estado convencional ($\lambda > 0$) a função Φ é negativa para valores pequenos do fator de escala, atinge o ponto de transição Φ^0 , posteriormente Φ^1 e cresce indefinidamente com o fator de escala. Segue então que, independentemente do valor da dissipação ($-H$) no tempo, os modelos construídos com fluidos convencionais apresentam os dois tipos de transição possíveis e são considerados como instáveis apenas para valores suficientemente pequenos do fator de escala. Para equações de estado exóticas do tipo $-1 < \lambda < 0$, Φ passa a ser sempre negativa (satisfazendo sempre $\Phi < \Phi^0$) e o sistema apresenta configuração instável para qualquer valor da variável temporal. Ademais esta instabilidade é inversamente proporcional ao comprimento de onda, como pode ser inferida de 5.30 e 5.32. Portanto, conclui-se desta análise abreviada da função Φ que qualquer fluido exótico, do tipo definido acima, governando a dinâmica de um modelo de FRW é propício ao desenvolvimento de estruturas ao ser perturbado do ponto de vista escalar. Nós resolveremos

exatamente um fluido deste tipo no próximo capítulo. Estas estruturas, na linguagem da curvatura conforme da variedade, implicam que a parte elétrica do tensor de *Weyl* é sempre instável para este tipo de universo. Veremos no próximo capítulo em maiores detalhes as implicações desta análise para o modelo euclidiano.

Capítulo 6

Estabilidade conforme do modelo euclidiano

Começamos este capítulo colecionando alguns objetos de relevância para a análise estroboscópica do retrato de fases no modelo euclidiano. Iremos realizar primeiramente uma investigação qualitativa envolvendo os fluidos em sua generalidade, sem especificar o tipo de equação de estado no cenário da função de proporção. Estudaremos posteriormente as propriedades da solução exata para

fluidos convencionais ($\lambda > 0$), mostrando que a estrutura conforme das geometrias do tipo FRW é preservada de um ponto de vista assintótico para os modelos em questão. Analisaremos alguns casos de interesse já estudados em outros contextos. O caso de transição bastante simples representado por poeira – que admite uma solução exata envolvendo apenas potências de t - será reconstruído. Obtemos soluções exatas para dois outros casos específicos envolvendo radiação eletromagnética e um fluido exótico. Como mencionado, reservamos o estudo detalhado da influência de pressões anisotrópicas para outra ocasião. Assumiremos em geral $\xi = 0$.

6.1 – Análise qualitativa

Substituindo o valor $\varepsilon = 0$ na *função do discurso* definida anteriormente temos:

$$u_{(0,k)} = \frac{2}{(\rho + p)} \left\{ \frac{1}{a^2} \right\}. \quad (6.1)$$

Esta nova relação reduz o sistema dinâmico das perturbações para a forma mais simples

$$\dot{\Sigma}_k = \left\{ \frac{2\lambda k^2}{(1+\lambda)\rho a^2} - 1 \right\} E_k; \tag{6.2}$$

$$\dot{E}_k = -(1+\lambda)\frac{\rho}{2}\Sigma_k - \frac{\theta}{3}E_k;$$

Note-se que o índice espectral k aparece apenas na primeira equação diferencial, a segunda dependendo apenas implicitamente desta grandeza. Do cálculo do traço da matriz de transformação obtemos novamente

$$TrJ_k = -\theta/3 = -H \tag{6.3}$$

que implica na dissipação da amplitude (em uma espécie de média) das perturbações para os universos em expansão ($\theta > 0$). Para estes tipos de universos a taxa de dissipação tende a ser muito maior perto da singularidade – onde θ diverge em geral – e arrefece gradativamente ao longo da expansão. Para valores exageradamente grandes do fator de escala a dinâmica se aproxima, no universo euclidiano, de uma configuração essencialmente conservativa, sem nunca, porém, alcançá-la. Vale ressaltar também que esta taxa não depende de k e que, portanto, a evolução da área no espaço de fases (de um ponto de vista numérico apenas) é idêntica para todos os modos. Com isso quero dizer que, embora as trajetórias associadas a um dado

ensemble de condições iniciais evoluam de formas variadas conforme a ordem de grandeza do comprimento de onda, a área delimitada pelas mesmas condições segue a mesma função do tempo. Tal fato não se dá na presença de pressões anisotrópicas. Estas pressões agem de tal forma sobre os modos que a dissipação aumenta conforme se diminui o comprimento de onda físico das perturbações. Esta dependência é quadrática e toma a forma, para $\varepsilon = 0$:

$$TrJ_k = -\frac{\theta}{3} - \xi \left(1 + \frac{2k^2}{3(\rho + p)a^2} \right) \quad (6.4)$$

A menor taxa de dissipação possível acontece no caso limite $k^2 \rightarrow 0$.

No contexto de nossa abordagem, uma vez que $E_{\alpha\beta}$ caracteriza o quão distante está a nova variedade de uma configuração conformalmente plana, torna-se legítimo falar de dissipação da estrutura conforme. A geometria de FRW em expansão uma vez perturbada com as propriedades sintetizadas por $E_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$ atinge uma situação de evolução onde a nova estrutura ($W_{\alpha\beta\mu\nu} \neq 0$) em conjunto com a geometria deformada da congruência dissipam em conjunto *energia* para o *background*. Este fato, no entanto, não quer dizer que uma trajetória particular solução do sistema dinâmico não possa crescer (do ponto de vista das amplitudes das grandezas). As considerações sobre a dissipatividade do sistema levam em conta um contínuo de trajetórias

tomadas em conjunto e não podem ser estendidas para casos individuais. Para tal, devemos comparar o traço com o determinante. É a relação de proporcionalidade estabelecida entre os dois o mecanismo forjador das trajetórias. No caso em questão temos para o determinante:

$$\Delta_{(0,k)} = \left(\lambda \left(\frac{k}{a} \right)^2 - \frac{(1 + \lambda)}{2} \rho \right) \quad (6.5)$$

Notemos que o determinante de J_k não depende de k para fluidos descritos por poeira . Para comprimentos de onda suficientemente grandes quando comparados com o fator de escala todos os fluidos convencionais imitam sob esta ótica o comportamento de poeira.

6.2 – Recursos estroboscópicos para o estudo das perturbações

6.2.1 – A função de proporção e o fator de escala

Das considerações do capítulo anterior concluímos que se pode estudar os aspectos gerais da evolução de sistemas não-autônomos construindo uma coleção de retratos característicos do campo de vetores para valores diferentes da variável t .

Tomando o conjunto de várias fatias determinado pelos valores $t_0, t_1 \dots t_n$ e assim por diante acabamos reconstruindo de maneira estroboscópica o comportamento das trajetórias do sistema. Neste contexto desempenha grande importância a *função de proporção*. Avaliaremos antes de mais nada as características desta função no caso $\varepsilon = 0$. Temos então, em função do fator de escala:

$$\Phi_{(0,k)} = 9\{2\lambda k^2 a^{(1+3\lambda)} - (1 + \lambda)\} \quad (6.6)$$

Lembremos que as três situações $\Phi < 0$, $0 < \Phi < 1$ e $\Phi > 1$ determinam as trajetórias enquanto cela, nó e foco. A transição cela/nó (instabilidade/estabilidade) se dá quando Φ se anula. Esta condição implica uma relação simples entre as variáveis λ , a e k :

$$k^2 a^{(1+3\lambda)} = (1 + \lambda) / 2\lambda \quad (6.7)$$

Reconhecemos então que as perturbações escalares de um dado fluido especificado por λ , de comprimento de onda $l = 2\pi / k$, admite, em geral, um valor específico do fator de escala onde as trajetórias do retrato de fases sofrem uma transição de topologia. Para todos os valores do fator de escala satisfazendo a inequação

$$a^{(1+3\lambda)} < (1 + \lambda) / 2\lambda k^2, \quad (6.8)$$

aquela perturbação específica será instável, admitindo um retrato de fases local (neste sentido de fatias) do tipo cela. As trajetórias determinadas por $\Sigma_k(t), E_k(t)$ acabam divergindo do ponto $\Sigma_k = 0, E_k = 0$ na direção de um dos autovetores. Neste regime ambos os autovalores são reais e de sinais opostos, cada um associado a uma das retas que definem a cela no espaço de fases. Em geral o caráter de instabilidade de uma trajetória individual depende da condição inicial a qual ela foi sujeita. De um ponto de vista envolvendo as soluções como um todo se admite que, se existe pelo menos um dos autovalores com parte real positiva, o sistema é essencialmente instável.

Notemos, no entanto, que o lado direito da inequação deve permanecer sempre positivo para que exista tal ponto de transição. Um cálculo direto mostra que ele só existe nos regimes onde $\lambda > 0$ ou $\lambda < -1$. De fato para todos os tipos de fluidos confinados na região $-1 < \lambda < 0$ só existe o regime de instabilidade. Não há possibilidade de transição. Este fato constitui um desafio óbvio para os modelos de energia escura. Sabemos experimentalmente que a distribuição espacial da energia escura é extremamente homogênea. Fosse o contrário já haveríamos detectado sua presença em super-aglomerados de galáxias, o que não acontece. Ademais, estudando em detalhes a função de proporção, observamos que a condição $\lambda = 1/3$ separa duas regiões com comportamentos qualitativamente distintos. De fato, para $0 > \lambda > -1/3$,

$\lim_{a \rightarrow \infty} \Phi(a) = -\infty$. Se realizarmos o mesmo cálculo impondo $-1 < \lambda < -1/3$ obteremos

$\lim_{a \rightarrow \infty} \Phi(a) = \text{const}$. A tabela abaixo mostra alguns tipos de regimes esse existe ou não transição na topologia das soluções.

fluido	$\Phi_{(0,k)}(a)$	$d\Phi_{(0,k)} / da$	Transição de topologia
$\lambda > 0$	$< 0, = 0, > 0$	> 0	sim
$\lambda = 0$	< 0	$= 0$	não
$-1/3 < \lambda < 0$	< 0	< 0	não
$-1 < \lambda < -1/3$	< 0	> 0	não

O comportamento típico da *função de proporção* para um dado comprimento de onda específico pode ser visto no gráfico abaixo para pequenos valores de a.

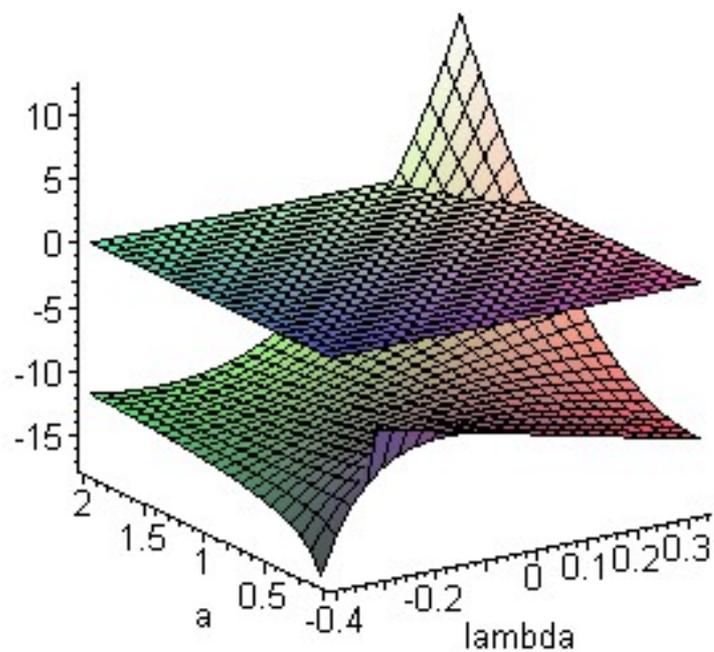


Figura 6.1 – Função Φ para um dado valor do comprimento de onda. Para fluidos convencionais Φ atravessa todos os três regimes possíveis apresentando duas transições.

Neste gráfico podemos observar de um ponto de vista geral o que acontece com as perturbações no que diz respeito à questão da estabilidade. Notamos que a função Φ é bem comportada para todos os valores de λ fisicamente aceitáveis. Uma vez escolhido o valor da constante λ temos uma curva de Φ versus a . Notamos que em geral estas curvas são crescentes com relação ao fator de escala. Na seção definida pelo plano $\lambda = 0$ a função de proporção toma valores constantes e sempre negativos. Os próximos gráficos, construídos como seções deste último para valores diferentes de λ , permitem uma visão ainda mais detalhada de como as perturbações associadas a um dado k transitam de comportamento no que diz respeito à topologia das trajetórias.

Este primeiro gráfico exibe uma coleção de seções ($\lambda = const$) construídas próximas da condição $\lambda = 0$. Notamos que a presença das pressões torna dinâmica a noção de estabilidade. Para valores suficientemente pequenos de “ a ” todos estes fluidos apresentam regimes de instabilidade $\Phi < 0$. É interessante notar que, embora Φ tenha um mínimo próximo à singularidade, este valor é finito. Este fato poderia nos induzir a pensar que as perturbações escalares são bem comportadas na singularidade. No entanto, lembremos que o traço de $J_k(t)$ diverge na origem do tempo. Portanto os autovalores 5.30 também divergem e a instabilidade é infinita.

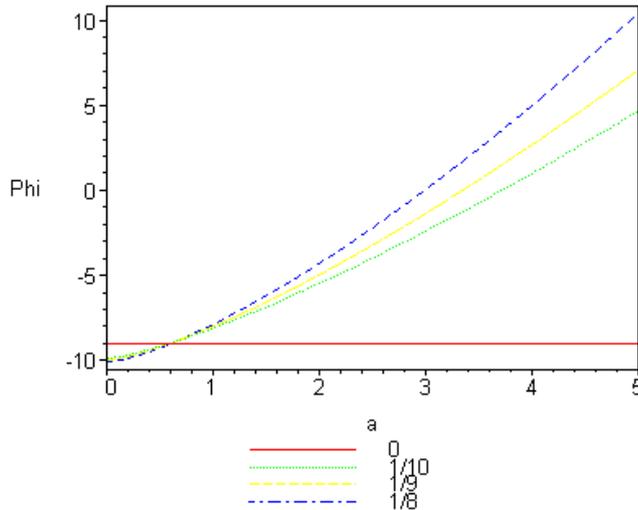


Figura 6.2 – Função de proporção em termos do fator de escala para fluidos convencionais próximos da condição de poeira

À medida que o mundo evolui e o seu volume aumenta a *função de proporção* cresce sucessivamente até cruzar o eixo $\Phi = 0$. Ao longo desta evolução os autovalores da matriz J_k diminuem em módulo até que um deles se anula, definindo então o novo regime de nó atrator. Este nó substitui o antigo regime de cela onde as trajetórias eram instáveis e, da análise do capítulo anterior, segue que na transição os autovalores tornam-se $m_+ = 0$ e $m_- = \theta / 3^{27}$. Em geral a configuração de nó manifesta-se em um período de tempo muito menor que as outras duas. Podemos, portanto, entendê-la no nosso caso como situação de legítima transição. Esta transição cede lugar a uma nova fase na evolução das perturbações. Quando Φ adquire o valor 1 os autovalores degeneram-se por um instante e tornam-se complexos conjugados. Nesta nova situação as trajetórias espiralam-se gradativamente em direção ao ponto fixo (*background*) em uma espécie de regime oscilatório. Não importa o quão grande é o valor do comprimento de onda, em um certo instante ele entrará também neste regime. A variação do índice espectral k influi de maneira direta nos períodos de transição de topologia e na sua respectiva duração. Por causa da equação 6.7 temos

²⁷ Vale lembrar que o traço é sempre negativo, e que, portanto, o nó é atrator.

que quanto menor o módulo de k mais rapidamente este modo atingirá o regime de foco. No regime de foco a evolução da curvatura conforme é tal que a mesma tende a ser reabsorvida pelo *background*.

Vejamos agora a situação análoga para fluidos com equações de estado negativas. Tomando somente valores próximos à situação limite $\Phi = 0$ temos:

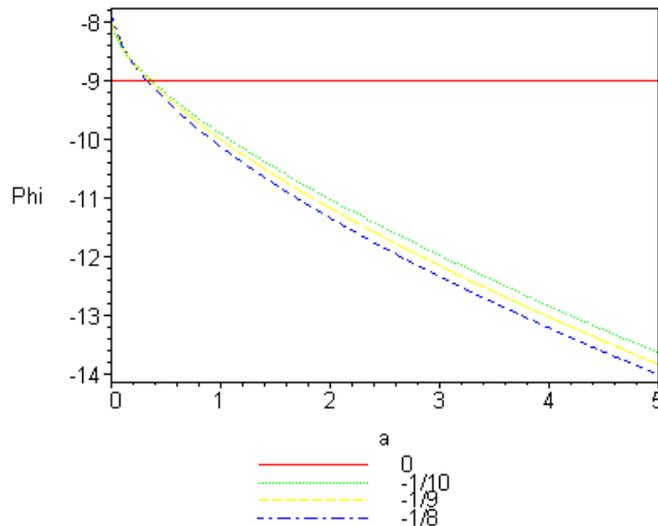


Figura 6.3 – Função de proporção em termos do fator de escala para fluidos não convencionais próximos da condição de poeira

Nestes casos a situação é bastante fora do usual. O comportamento das trajetórias ($\Sigma_k(t), E_k(t)$) é sempre do tipo celta uma vez que $\Phi < 0$. O nível de instabilidade cresce, em geral com o fator de escala – este fato sendo válido para todos os comprimentos de onda. Notemos também que para um dado valor fixo de "a" Φ decresce com k^2 . Portanto, quanto menor o comprimento de onda maior a amplitude adquirida em um mesmo intervalo de tempo para as mesmas condições iniciais. Segue

abaixo figura ilustrando a distribuição de matéria. Quanto menor o comprimento de onda maior a instabilidade.

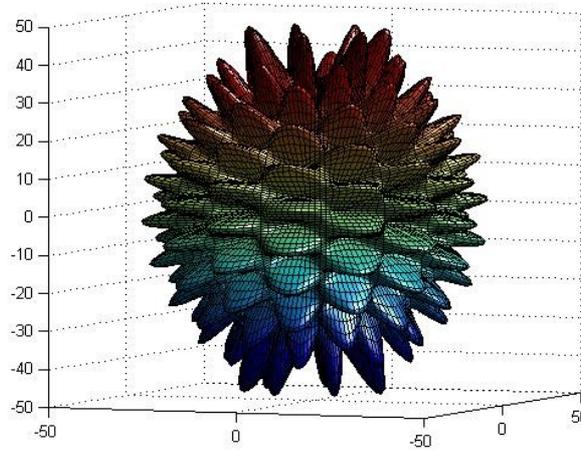


Figura 6.4 – Tipo de modo privilegiado nos modelos de fluido exótico satisfazendo

$$p = -\lambda$$

6.2.2 – A função de proporção e o tempo

As propriedades de estabilidade analisadas até o momento foram construídas apenas em termos do fator de escala. Vejamos agora a evolução da função Φ no tempo. Recordando a dependência temporal das grandezas do *background* para um dado fluido, temos, de acordo com a abordagem do capítulo 2:

(6.9)

$$a^{3(1+\lambda)} = m \left[\frac{3(1+\lambda)}{2} t \right]^2 \quad \theta(t) = \frac{2}{(1+\lambda)} \left(\frac{1}{t} \right) \quad \rho(t) = \left\{ \frac{4}{3(1+\lambda)^2} \right\} \frac{1}{t^2}$$

Faremos de agora em diante, sem perda de generalidade, a escolha $m = 4/[9(1+\lambda)^2]$. Desta forma estamos definindo o fator de escala de tal maneira

que, independentemente do fluido em questão, $a(1) = 1$. Um cálculo simples permite mostrar que:

$$\rho \cdot a^2 = \frac{4a_0^2}{3(1+\lambda)^2} t^{-2(1+3\lambda)/3(1+\lambda)}. \quad (6.10)$$

Portanto a função $u_{(0,k)}(t)$ tem a forma:

$$u_{(0,k)}(t) = \frac{3 \cdot (1+\lambda)}{2} t^{2(1+3\lambda)/3(1+\lambda)} \quad (6.11)$$

Substituindo a *função do discurso* $u_{(0,k)}(t)$ no sistema dinâmico temos, finalmente:

$$\dot{\Sigma}_k = \left\{ \frac{3\lambda(1+\lambda)k^2}{2} t^{2(1+3\lambda)/3(1+\lambda)} - 1 \right\} E_k; \quad (6.12)$$

$$\dot{E}_k = -\frac{2}{3(1+\lambda)} \left(\frac{1}{t^2} \right) \cdot \Sigma_k - \frac{2}{3(1+\lambda)} \left(\frac{1}{t} \right) E_k;$$

Em última instância é este o sistema dinâmico que descreve a evolução das perturbações escalares nos modelos homogêneos, isotrópicos em expansão com triseção euclidiana. Para o traço e determinante temos:

(6.13)

$$\text{Tr}J = -\frac{2}{3(1+\lambda)}\left(\frac{1}{t}\right) \quad \Delta = \frac{1}{t^2}\left(\left(\frac{k}{a_0}\right)^2 \lambda t^{2(1+3\lambda)/3(1+\lambda)} - \frac{2}{3(1+\lambda)}\right)$$

Estamos agora em condições de analisar a evolução qualitativa da topologia do espaço de fases bidimensional em torno do ponto crítico (universo não perturbado). Como mencionado, é esta caracterização que permitirá, em melhores detalhes, avaliar o comportamento das soluções do sistema dinâmico para diferentes instantes do tempo e inferir seu limite assintótico. Substituindo a dependência temporal no fator de escala obtemos, para Φ

$$\Phi(t) = 9(2\lambda k^2 t^{2(1+3\lambda)/3(1+\lambda)} - (1+\lambda)) \quad (6.14)$$

6.3 – Dos particulares aos universais

Aplicaremos agora os resultados obtidos em três exemplos típicos de fluidos perfeitos ($\lambda = 0, \lambda = 1/3, \lambda = -1/3$). Procedimento análogo pode ser obtido para qualquer outro tipo de fluido desejado.

6.3.1 – Universo de poeira

Um caso bastante interessante por causa da sua simplicidade e também aplicabilidade sob a ótica das perturbações é o modelo de mundo permeado de poeira ($\lambda = 0$). Do ponto de vista de nossa análise qualitativa este caso também apresenta uma particularidade especial uma vez que estabelece o caso limítrofe das perturbações essencialmente instáveis. Em um sentido geral a dinâmica das perturbações cosmológicas pode ser entendida como a competição entre três fatores independentes: a expansão cósmica, a resistência mecânica do fluido (representada pela pressão) e a gravidade. Se a pressão se anula não há nada além da expansão capaz de diminuir o efeito das aglomerações locais por causa da atração gravitacional. A componente espectral da parte elétrica do tensor de Weyl não se anula em geral, implicando em uma distribuição de matéria com gradientes espaciais não nulos. O sistema dinâmico toma a forma:

$$\dot{\Sigma}_k = -E_k; \quad (6.15)$$

$$\dot{E}_k = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{t^2}\right)\Sigma_k - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{t}\right)E_k;$$

Segue neste caso que a função Φ é constante, negativa e independente de k . De fato, como visto nas seções anteriores, para poeira $\Phi = -9$ independentemente da fatia considerada no espaço de fases. Recordando a expressão dos autovalores de $J(t_s)$ temos:

$$m_{\mp} = -\frac{1}{3t_s}(1 \pm \sqrt{10}). \quad (6.16)$$

Temos, portanto, para cada seção definida por t_s uma cela caracterizada por dois autovalores reais de sinais opostos. Observemos que ambos decrescem em módulo para tempos suficientemente grandes. Este fato decorre da expansão do background uma vez que θ é inversamente proporcional ao tempo. Da equação 5.31 observamos que, para $\lambda = 0$, a cada autovalor corresponde um dado autovetor satisfazendo a equação:

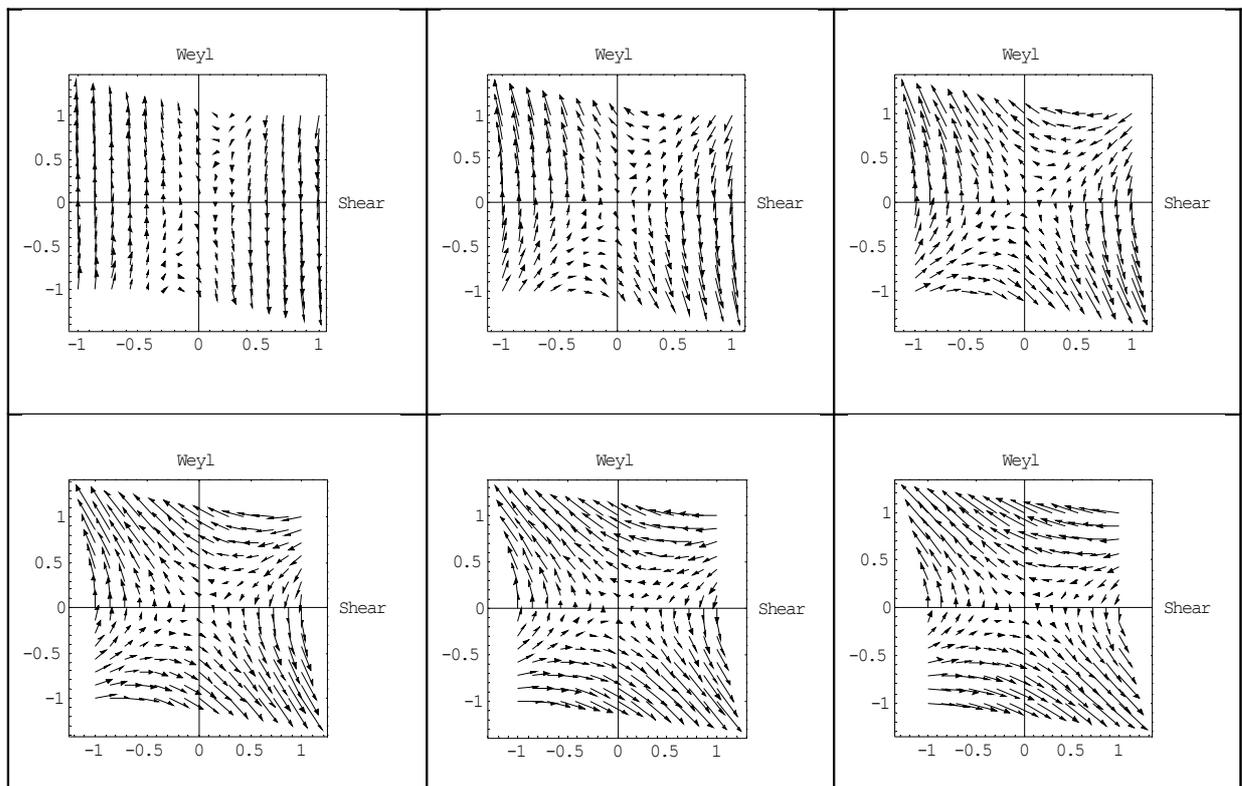
$$E_{k\mp} = -m_{\mp}\Sigma_{k\mp}. \quad (6.17)$$

Nesta equação temos o autovetor (Σ_{k-}, E_{k-}) associado ao autovalor negativo e (Σ_{k+}, E_{k+}) ao positivo. Substituindo o valor numérico dos autovalores temos, sob a seção, as duas condições abaixo definindo a cela:

$$E_{k-} = \frac{1}{3t_s}(1 + \sqrt{10})\Sigma_{k-} \quad E_{k+} = \frac{1}{3t_s}(1 - \sqrt{10})\Sigma_{k+} \quad (6.18)$$

É simples notar que a reta tangente ao autovetor (Σ_{k-}, E_{k-}) está sempre confinada no primeiro e terceiro quadrantes passando, obviamente, pela origem $(0,0)$. Situação análoga acontece com (Σ_{k+}, E_{k+}) em relação aos outros dois quadrantes. Notemos que para tempos suficientemente pequenos (próximos da singularidade) ambas as retas principais da cela aproximam-se do eixo E_k ao passo que para tempos suficientemente grandes elas gradativamente rotacionam para atingir o eixo Σ_k . Observamos em uma seqüência

estroboscópica que o autovetor positivo gira no sentido anti-horário enquanto o outro, associado ao autovalor negativo, gira no sentido horário à medida que a variável temporal aumenta. A magnitude dos autovalores é maior para tempos menores e decai segundo uma potência inversa de t , tendendo assintoticamente a zero no infinito. Os gráficos da próxima página ilustram a evolução do campo em uma seqüência estroboscópica, de onde se pode acompanhar o comportamento dos autovetores.



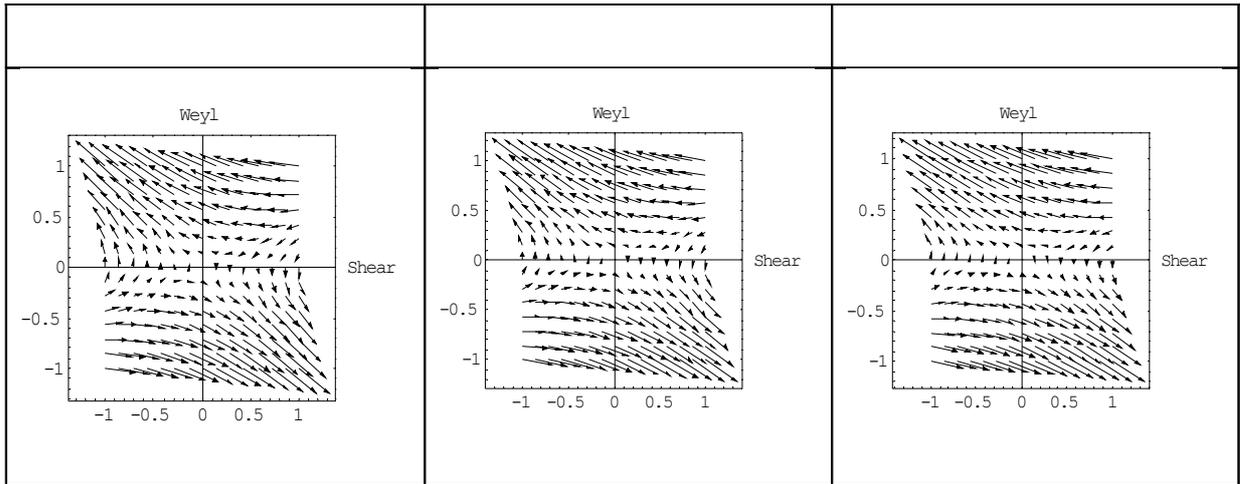


Figura 6.5 – Forma do campo para valores diferentes da coordenada temporal (poeira). A evolução no tempo se dá da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Em cada tempo t_s uma dada trajetória $(\Sigma_k(t), E_k(t))$, solução do sistema dinâmico não-autônomo satisfaz, temporariamente, a dinâmica estabelecida em cada uma das fatias. Ao projetar algumas destas trajetórias no plano (Σ_k, E_k) obtemos os comportamentos típicos ilustrados abaixo.

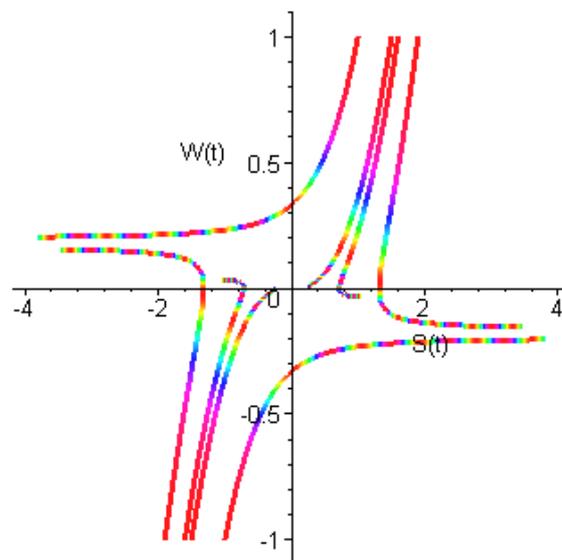


Figura 6.6 – Comportamento típico das soluções $(\Sigma_k(t), E_k(t))$ (representadas por $(S(t), W(t))$ projetadas no plano (Σ_k, E_k)). No gráfico, as condições iniciais foram estabelecidas aleatoriamente no primeiro e terceiro quadrantes.

Observemos que, no caso de poeira, o resultado assintótico, do ponto de vista da componente espectral $E_k(t)$, é definido por constantes no tempo. Veremos agora que, de fato, este é exatamente o caso ao resolver exatamente as equações de movimento. Derivando, por exemplo, a equação de evolução do *shear* e substituindo-a na outra equação obtemos:

$$\ddot{\Sigma}_k + \frac{2}{3t}\dot{\Sigma}_k - \frac{2}{3t^2}\Sigma_k = 0; \quad (6.19)$$

Assumindo uma solução do tipo t^β temos, finalmente

$$\Sigma_k(t) = \frac{c_1}{t^{2/3}} + c_2 t \quad E_k(t) = \frac{2c_1}{3t^{5/3}} - c_2, \quad (6.20)$$

que constitui a solução geral e exata para as componentes espectrais $(\Sigma_k(t), E_k(t))$. Gostaríamos de ressaltar também que esta solução para poeira constitui o único caso onde a evolução destas grandezas independe completamente da ordem de grandeza das perturbações. Este era um resultado esperado em nosso contexto uma vez que todos os

sistemas de equações definidos nas fatias de espaço de fases eram completamente independentes de k .

Vejamos como comportam-se os escalares construídos com a parte elétrica. Das definições dos invariantes algébricos do tensor de Weyl 2.19 temos que, no caso das perturbações escalares, I_3 e I_4 são identicamente nulos. Da definição de I_1 temos:

$$I_1 = a^{-4}(t)E_{(k)}^2(t)S^{(k)}_{ij}S^{(k)}_{lm}\gamma^{il}\gamma^{jm} \quad (6.30)$$

Uma vez que estamos considerando as perturbações apenas em primeira ordem segue que

$I_1 \sim 0$. Extraindo a raiz quadrada e assumindo $S^{(k)}_{ij}S^{(k)}_{lm}\gamma^{il}\gamma^{jm} \sim 1$ temos, no entanto:

$$\sqrt{I_1} \sim a^{-2}(t)E_{(k)}(t) \quad (6.31)$$

Substituindo os valores no caso de poeira resulta em:

$$\sqrt{I_1} \sim \frac{2c_1}{3t^3} + \frac{c_2}{t^{4/3}}, \quad (6.32)$$

Que implica no decaimento das excitações do tensor de Weyl. Cálculo semelhante pode ser feito para I_2 . Vejamos agora um caso melhor adaptado para descrição de situações físicas razoáveis envolvendo pressão.

6.3.2 – Universo de radiação eletromagnética

Tomaremos o exemplo de universo permeado por radiação eletromagnética como exemplo típico das perturbações em fluidos convencionais. Já comentamos brevemente que para todos estes fluidos a função Φ atravessa os três domínios possíveis em termos de topologia de trajetórias. Este é um resultado válido para todo comprimento de onda com proporções finitas ($k \neq 0$). Em geral, as trajetórias começam com um comportamento típico de sela, passam temporariamente por um regime de nó atrator e finalmente desembocam no regime de foco. Iremos quantificar agora todos estes comportamentos de transição.

Para $\lambda = 1/3$ ($a(t) = t^{2/3}$) o sistema de equações fica:

$$\dot{\Sigma}_k = \left\{ \frac{2}{3}k^2t - 1 \right\} E_k; \quad (6.33)$$

$$\dot{E}_k = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{t^2} \right) \Sigma_k - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} \right) E_k;$$

A função de proporção toma a forma $\Phi(t) = 6(k^2t - 2)$. O gráfico abaixo ilustra o comportamento de $\Phi(t)$ para valores diferentes de k .

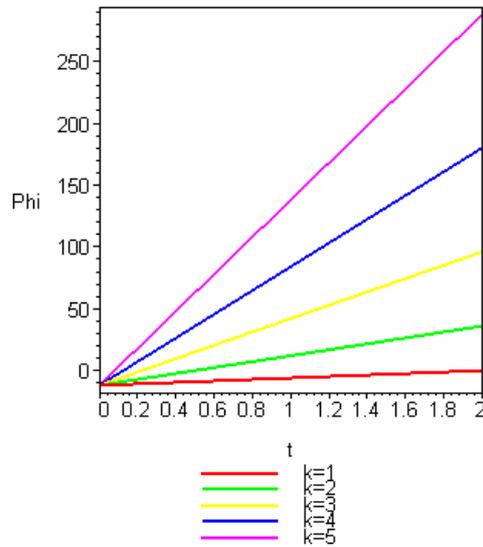


Gráfico 6.7: Interseção da função de proporção com o eixo $\Phi = 0$ para diferentes valores do comprimento de onda .

Lembremos que os pontos onde $\Phi_{(0,k)}(t)$ cruza o eixo da coordenada temporal definem a transição cela/nó. Quanto maior o valor de k mais rapidamente a transição acontece no tempo. No limite não físico de comprimento de onda infinito as soluções comportam-se como cela independentemente do valor de t . Substituindo $\Phi_{(0,k)}(t)$ e a expansão ($\theta = 3/2t$) na equação dos autovalores obtemos, sobre uma dada seção:

$$m_{\mp} = -\frac{1}{4t_s} (1 \pm \sqrt{13 - 6k^2 t_s}) \quad (6.34)$$

Para um dado valor de k obtemos dois autovalores reais para qualquer seção satisfazendo a condição $t_s < 13/6k^2$. Na medida em que o tempo evolui a função no interior da raiz

quadrada torna-se negativo e os autovalores adquirem uma componente imaginária. Esta componente define o comportamento oscilatório do regime de foco no caso eletromagnético.

Observemos que a parte complexa $\frac{1}{4t_s} \sqrt{13 - 6k^2 t_s}$ tem um extremo. Isto significa que o sistema adquire, para certo valor da coordenada temporal, frequência de oscilação máxima. O comportamento dos autovetores pode ser obtido de maneira igual no caso de poeira. A evolução estroboscópica do retrato de fases tem a forma exibida na próxima página. Note-se, em particular, as transições cela/nó/foco.

A equação de segunda ordem para a parte elétrica do tensor de Weyl é:

$$\ddot{E}_k + \frac{5}{2} t^{-1} \dot{E}_k + \frac{1}{3} k^2 t^{-1} E_k = 0; \quad (6.35)$$

As duas soluções independentes têm a forma:

$$E_k(t) = c_1 \left[(2kt^{-1}) \cos\left(\frac{2}{3} k\sqrt{3t}\right) - (\sqrt{3}t^{-3/2}) \sin\left(\frac{2}{3} k\sqrt{3t}\right) \right] \\ c_2 \left[(\sqrt{3}t^{-3/2}) \cos\left(\frac{2}{3} k\sqrt{3t}\right) + (2kt^{-1}) \sin\left(\frac{2}{3} k\sqrt{3t}\right) \right] \quad (6.36)$$

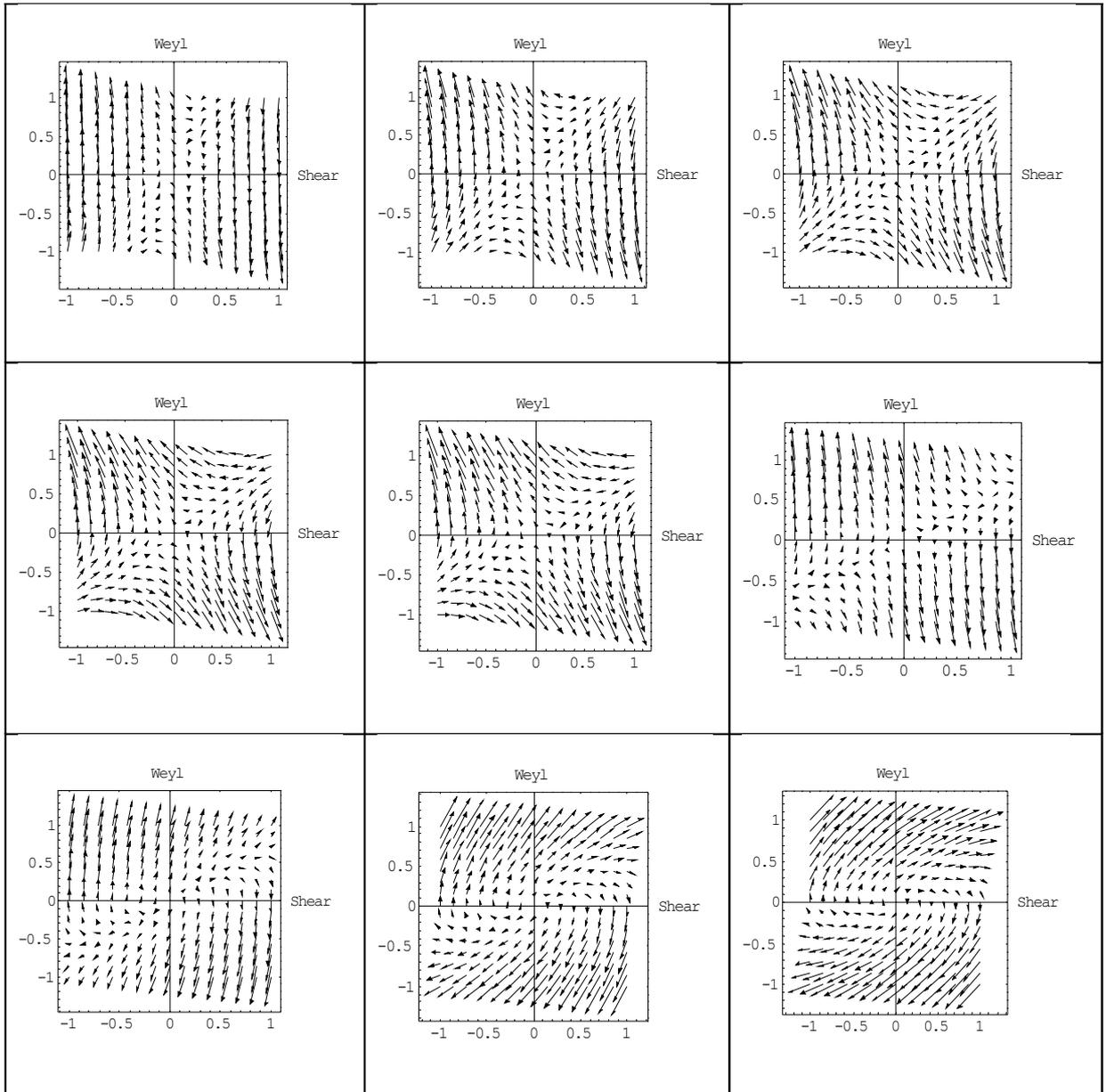


Figura 6.8: Forma do campo para diferentes valores da coordenada temporal (radiação);

Votemos de 6.36 que, novamente, as excitações da parte elétrica decaem no infinito e a

estrutura conforme retoma sua configuração plana, isto é $W_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$.

Ambas as soluções divergem para valores suficientemente pequenos do tempo e oscilam para valores intermediários. A oscilação é modulada por funções decrescentes envolvendo potências do tempo. Calculando novamente o invariante definido na última seção temos:

$$\sqrt{I_1} \sim c_1 \left[\frac{2k}{t^2} \cos\left(\frac{2}{3}k\sqrt{3t}\right) - \frac{\sqrt{3}}{t^{5/2}} \sin\left(\frac{2}{3}k\sqrt{3t}\right) \right]$$

(6.37)

$$c_2 \left[\frac{\sqrt{3}}{t^{5/2}} \sin\left(\frac{2}{3}k\sqrt{3t}\right) - \frac{2k}{t^2} \cos\left(\frac{2}{3}k\sqrt{3t}\right) \right]$$

Acrescento, finalmente, uma ilustração das soluções acima no espaço de fases com os três tipos de regimes típicos presentes no caso eletromagnético

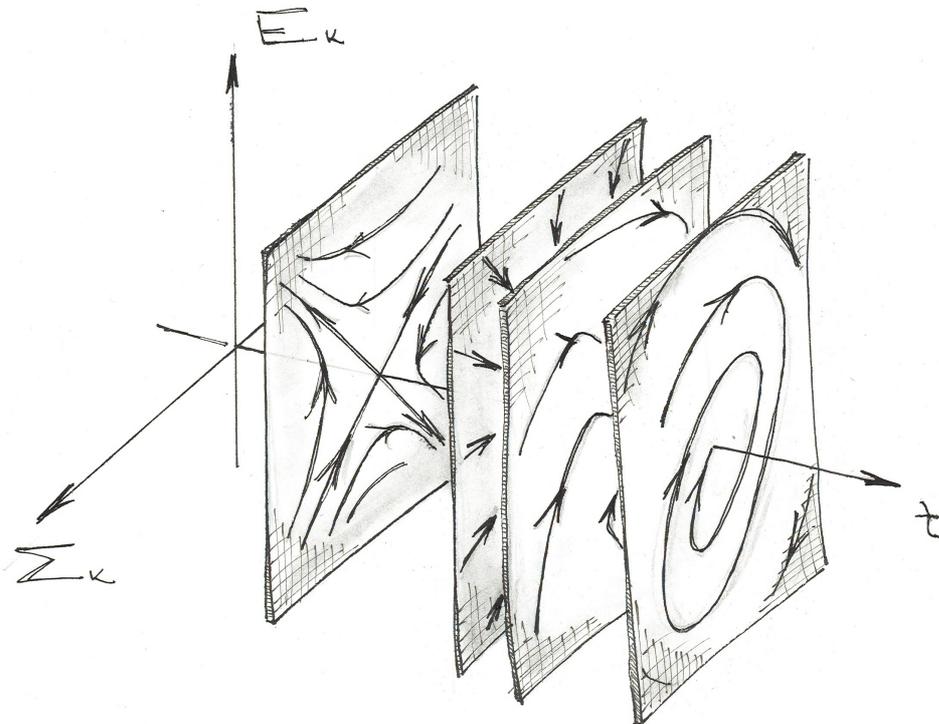


Figura: As trajetórias no espaço de fases tridimensional, ao serem projetadas em cada um dos planos a t constante definem, respectivamente as celas (à esquerda) os nós (região central) e os focos (regiões à direita). Este comportamento aparece para todos os outros fluidos convencionais com pressão não nula

6.3.3 – Universo de fluido exótico

Este tipo de modelo é interessante para a nossa análise porque constitui um caso de transição típico do ponto de vista da teoria de perturbações (no cenário da função Φ) mas também caracteriza o limite necessário para os modelos mais simples de energia escura ($\rho + 3p = 0$). Ademais ele admite solução simples em termos de potências de t . Substituindo o valor de λ o sistema dinâmico fica:

$$\dot{\Sigma}_k = - \left\{ \frac{k^2}{3} + 1 \right\} E_k; \quad (6.38)$$

$$\dot{E}_k = - \left(\frac{1}{t^2} \right) \Sigma_k - \left(\frac{1}{t} \right) E_k;$$

Notemos que a dependência temporal na primeira equação passa a ser apenas implícita neste caso. Neste caso $\Phi = -6(k^2 + 1)$. Derivando, por exemplo, a primeira equação e rearranjando os termos obtemos a seguinte equação de segunda ordem:

$$(6.39)$$

$$\ddot{\Sigma}_k = -\left(\frac{1}{t}\right)\dot{\Sigma}_k + \left(1 + k^2/3\right)\left(\frac{1}{t^2}\right)\Sigma_k;$$

Assumindo uma solução do tipo t^β temos, por um cálculo direto, $\beta = \pm \sqrt{1 + k^2/3}$. Portanto a solução geral tem a forma:

$$\Sigma_k(t) = c_1 t^{-\sqrt{1+k^2/3}} + c_2 t^{\sqrt{1+k^2/3}} \quad (6.40)$$

$$E_k(t) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2/3}} \left(c_1 t^{-(\sqrt{1+k^2/3}+1)} + c_2 t^{(\sqrt{1+k^2/3}+1)} \right)$$

Obtemos novamente dois modos típicos de evolução – um de decaimento e outro de crescimento. Note-se que no caso limite $k \rightarrow 0$ (comprimento de onda infinito), $E_k(t)$ evolui de acordo com:

$$E_k(t) \sim (c_1 t^{-2} + c_2 t^2) \quad (6.41)$$

O outro extremo do limite em termos de comprimentos de onda ($k \rightarrow \infty$) apresenta comportamento bastante atípico uma vez que a componente espectral da curvatura conforme cresce exponencialmente com o inverso do mesmo. De fato neste regime temos:

$$E_k(t) \sim c_2 t^k \quad (6.42)$$

Notemos que o sistema apresenta comportamento extremamente instável para pequenos comprimentos de onda. Seguindo o mesmo procedimento para o invariante, temos:

$$\sqrt{I_1} \sim \frac{1}{\sqrt{1+k^2/3}} \left\{ c_1 t^{-(\sqrt{1+k^2/3+3})} + c_2 t^{(\sqrt{1+k^2/3-1})} \right\} \quad (6.43)$$

Note-se que neste caso $\sqrt{I_1}$ diverge no futuro.

Na próxima seção nós estudaremos formalmente as propriedades assintóticas da solução geral do sistema (6.12). Estas soluções serão exibidas em termos da parte elétrica do tensor de Weyl apenas uma vez que a evolução do shear pode ser obtida através de derivação simples. Os resultados assintóticos destas soluções corroboram completamente nossa análise qualitativa desenvolvida no trabalho até o momento, mostrando que ela pode ser de grande utilidade nos casos onde a obtenção da solução exata é impossível ou não conhecida.

6.4 – Os fluidos convencionais e a solução geral

A solução geral do sistema dinâmico 6.12²⁸ pode ser representada por uma combinação simples de funções hipergeométricas ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x)$ ²⁹ do tipo ${}_0F_1$.

As funções ${}_pF_q$ podem ser pensadas como generalizações da série hipergeométrica de Gauss

²⁸ De agora em diante assumiremos válida a condição $\lambda > 0$

²⁹ Para soluções em termos dos tri-gradientes de matéria no tempo conforme consultar [51]

e são geralmente conhecidas na literatura por funções hipergeométricas extendidas de Barne [55]. Estas funções admitem expansão em série do tipo

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n x^n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n n!}; \quad (6.44)$$

onde $(a)_0 = 1$ e $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ para $n = 1, 2, \dots$. Em geral

(exceto para valores particulares dos parâmetros quando a série não faz sentido) ${}_pF_q$

converge para todo x finito se $p < q$. As funções ${}_0F_1$ são definidas em termos do limite:

$${}_0F_1(c; x) \equiv \lim_{a \rightarrow \infty} [{}_1F_1(a; b; x/a)] = 1 + \frac{1}{c}x + \frac{1}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{c(c+1)(c+2)} \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (6.45)$$

As funções ${}_0F_1$ admitem representação em termos das funções de Bessel de primeira e segunda espécies $J_\nu(z)$ e $I_\nu(z)$ [55]:

$${}_0F_1(\nu, -z) = \left\{ \nu J_\nu(2\sqrt{z}) - \sqrt{z} J_{\nu+1}(2\sqrt{z}) \right\} z^{-\nu/2} \Gamma(\nu) = \Gamma(\nu) z^{(1-\nu)/2} J_{\nu-1}(2\sqrt{z}) \quad (6.46)$$

$${}_0F_1(\nu, z) = \left\{ \nu J_\nu(2i\sqrt{z}) - i\sqrt{z} J_{\nu+1}(2i\sqrt{z}) \right\} iz^{-\nu/2} \Gamma(\nu) = \Gamma(\nu) z^{(1-\nu)/2} I_{\nu-1}(2z) \quad (6.47)$$

A solução do nosso problema tem a seguinte forma para as componentes da decomposição espectral da parte elétrica do tensor de Weyl:

$$E_k(t) = A_k [{}_0F_1(\nu, f(t))] + B_k t^\alpha [{}_0F_1(\mu, f(t))] \quad (6.48)$$

onde A_k e B_k são constantes e as seguintes definições valem

$$\alpha \equiv - (5 + 3\lambda) / 3(1 + \lambda) \quad \nu \equiv (7 + 9\lambda) / 2(1 + 3\lambda) \quad \mu \equiv 3(\lambda - 1) / 2(1 + 3\lambda) \quad (6.49)$$

$$f(t) \equiv \frac{-9k^2 \lambda (1 + \lambda)^2 t^{\frac{2(1+3\lambda)}{3(1+\lambda)}}}{4(1 + 3\lambda)^2}$$

Portanto, dados um tipo específico de fluido caracterizado pela equação de estado $p = \lambda \rho$ e o comprimento de onda característico da perturbação representado por k temos dois modos específicos de evolução que determinam a dinâmica da estrutura conforme da variedade perturbada. Note-se que a função $f(t)$ é sempre positiva para $\lambda > 0$ e negativa para $\lambda < 0$. Os sinais destas grandezas influem diretamente no comportamento assintótico das soluções.

Mostraremos agora o comportamento típico da solução para valores suficientemente grandes da coordenada temporal. Lembramos da análise qualitativa em termos do retrato de fases que

as trajetórias típicas neste regime caracterizam a topologia de foco no espaço de fases para fluidos satisfazendo a condição $\lambda > 0$ (k finito). De agora em diante assumiremos $0 < \lambda < 1$ e analisaremos o comportamento assintótico das perturbações. Neste caso a função $f(t)$ é sempre negativa e, portanto $f(t) \equiv -z^2$. Levando em conta esta definição a solução 6.48 adquire, em termos das funções de Bessel, a forma alternativa:

$$\begin{aligned} E_k(t) &= A_k \left[{}_0F_1(\nu, -z^2) \right] + B_k t^\alpha \left[{}_0F_1(\mu, -z^2) \right] \\ &= A_k z^{1-\nu} J_{\nu-1}(2z) \Gamma(\nu) + B_k t^\alpha z^{1-\mu} J_{\mu-1}(2z) \Gamma(\mu) \end{aligned} \quad (6.50)$$

É importante enfatizar que z^2 é uma função monótona e crescente em relação ao tempo, e que portanto, o comportamento assintótico da parte elétrica do tensor de Weyl pode ser analisado quando $z \rightarrow \infty$. Neste limite é conveniente expandir as funções de Bessel em potências inversas de z [56]

$$J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \left\{ P_\nu(z) \cos[z - (\nu + 1/2)\pi / 2] - Q_\nu(z) \sin[z - (\nu + 1/2)\pi / 2] \right\}. \quad (6.51)$$

As funções $P_\nu(z)$ e $Q_\nu(z)$ são definidas em termos das séries

$$P_\nu(z) \sim 1 - \frac{(\beta - 1)(\beta - 9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\beta - 1)(\beta - 9)(\beta - 25)(\beta - 49)}{4!(8z)^4} + \dots \quad (6.52)$$

$$Q_\nu(z) \sim \frac{(\beta - 1)}{1!(8z)} + \frac{(\beta - 1)(\beta - 9)(\beta - 25)}{3!(8z)^3} + \dots \quad (6.53)$$

onde $\beta = 4\nu^2$. Portanto, é simples ver que as funções de Bessel oscilam mas não são exatamente periódicas – exceto no limite $z \rightarrow \infty$. A amplitude de $J_\nu(x)$ não é constante e decresce assintoticamente como $z^{-1/2}$. Para valores suficientemente grandes do argumento z a série P_ν domina. Em geral temos

$$\lim_{z \rightarrow \infty} J_\nu(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos[z - (\nu + 1/2)\pi / 2] \quad (6.54)$$

Calculemos agora o valor do limite de E_k para esta situação. O primeiro termo da solução fica

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} ({}_0F_1(\nu, -z^2)) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \{ \nu J_\nu(2z) - J_{\nu+1}(2z)z \} z^{-\nu} \Gamma(\nu) \sim \\ &\sim \pi^{-1/2} \Gamma(\nu) \{ \nu z^{-1/2-\nu} \cos[2z - (\nu + 1/2)\pi / 2] - z^{1/2-\nu} \cos[2z - (\nu + 3/2)\pi] \} \end{aligned} \quad (6.55)$$

mas nós sabemos que para $\lambda > 0$ $\nu > 2$, portanto as potências de z são todas negativas e o limite se anula. O primeiro modo tende, pois, a zero no infinito temporal. O limite do segundo termo segue raciocínio semelhante apenas substituindo ν por μ na solução acima:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} ({}_0F_1(\mu, -z^2)) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \{ \mu J_\mu(2z) + J_{\mu+1}(2z)z \} z^{-\mu} \Gamma(\mu) \sim \\ &\sim \pi^{-1/2} \Gamma(\mu) \{ \mu z^{-1/2-\mu} \cos[2z - (\mu + 1/2)\pi/2] - z^{1/2-\mu} \cos[2z - (\mu + 3/2)\pi] \} \end{aligned} \quad (6.56)$$

É simples notar que este limite é divergente em geral. A divergência decorre do caráter essencialmente negativo da função μ no domínio considerado. Lembremos, no entanto, que esta parte da solução vem sempre multiplicada por uma função do tipo t^α onde α é também negativo. Reescrevendo esta função em termos de z tem-se

$$z^2 \propto t^\gamma \quad (6.57)$$

onde $\gamma = \frac{2(1+3\lambda)}{3(1+\lambda)}$. Portanto $t^\alpha \propto z^{2\alpha/\gamma}$ e, conseqüentemente, segue o limite

$$\lim_{z \rightarrow \infty} ({}_0F_1(\mu, -z^2)t^\alpha) = \lim_{z \rightarrow \infty} ({}_0F_1(\mu, -z^2)z^{2\alpha/\gamma}). \quad (6.58)$$

Um cálculo simples implica que $2\alpha/\gamma = -(5+3\lambda)/(1+3\lambda)$. Substituindo a expansão 6.56 e calculando as potências de z obtemos que todas elas também são negativas. Portanto, segue que a parte elétrica do tensor de Weyl tende assintoticamente à zero para todo valor finito do comprimento de onda da perturbação.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_k(t) = 0$$

Portanto, do ponto de vista exclusivo das perturbações escalares e lineares a curvatura conforme da variedade mostra-se assintoticamente estável para universos dominados por fluidos perfeitos convencionais. A dependência temporal específica depende obviamente da natureza do fluido sob investigação. Uma consequência imediata deste resultado é que, uma vez que a parte elétrica do tensor de *Weyl* está acoplada com os gradientes de densidade de energia, não se pode obter a partir de uma análise puramente linear estruturas no limite assintótico.

Apêndice

Perturbações escalares

no caso não euclidiano

Investigaremos agora a evolução da parte elétrica do tensor de Weyl e do tensor de deformação nos modelos com triseção não-euclidiana. Sabemos que neste caso o cenário de

fundo (*background*) não admite uma representação explícita para o fator de escala em termos da variável temporal (tempo cósmico). O sistema dinâmico 4.47 pode ser reescrito em termos da variável auxiliar η . Temos então, derivando em termos desta variável implícita:

$$\Sigma'_k = t' \left\{ \lambda k^2 u_{(\epsilon,k)}(\eta) - 1 \right\} E_k;$$

$$E'_k = -t' (1 + \lambda) \frac{\rho(\eta)}{2} \Sigma_k - t' \frac{\theta(\eta)}{3} E_k;$$

Em notação matricial temos

$$\begin{pmatrix} \Sigma'_k \\ E'_k \end{pmatrix} = t' J_k \begin{pmatrix} \Sigma_k \\ E_k \end{pmatrix} \equiv L_k(\eta) \begin{pmatrix} \Sigma_k \\ E_k \end{pmatrix}$$

onde agora supõe-se que todas as grandezas dependentes estão escritas em termos da nova variável η , de acordo com as definições já mencionadas no capítulo sobre os modelos de Friedmann

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{3(1 + \lambda)}{2} \sqrt{ma(\eta)}$$

Uma vez que t' é sempre positiva e definida segue que o novo sistema dinâmico tem propriedades semelhantes às do primeiro. Mais uma vez o teorema da divergência implica

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = -t'H.$$

Para o caso hiperbólico, então, o sistema continua com o comportamento dissipativo. No caso esférico existe uma transição dissipativo/forçado passando por uma situação conservativa. Essa situação acontece exatamente no momento onde o fator de escala começa a colapsar. Em particular, notamos que a função de proporção associada ao novo sistema dinâmico nem depende de t' uma vez que

$$4 \frac{\det L_k}{(\text{Tr} L_k)^2} = 4 \frac{\det J_k}{(\text{Tr} J_k)^2} = \Phi_{(\varepsilon, k)}$$

Portanto, todas as transições de topologia no espaço de fases podem ser obtidas para os modelos não-euclidianos utilizando a função

$$\Phi_{(\varepsilon, k)}(t) = \frac{9}{(\rho_0 a^{-(1+3\lambda)} - 3\varepsilon)} \{2\lambda(k^2 - 3\varepsilon) - (1 + \lambda)\rho_0 a^{-(1+3\lambda)}\}$$

Substituindo o valor específico do fator de escala, de ε e de k obtemos os devidos regimes.

I – Tri-seção Esférica

Se a densidade de matéria em uma dada seção do tipo espaço, parametrizada pelo tempo cósmico, é maior que a densidade crítica naquele instante então o modelo apresenta as características de um universo cíclico, com data marcada para a origem e término. Neste caso:

$$a^{1+3\lambda} = m \cdot (\sin\eta)^2 \quad \theta = \frac{3(1+3\lambda)}{2} \cdot \frac{\cot g\eta}{(\sin\eta)^{2/(1+3\lambda)}}$$

$$\rho = 3m^{-2/(1+3\lambda)} (\sin\eta)^{-6(1+\lambda)/(1+3\lambda)}$$

Um cálculo direto implica que $\rho a^2 = 3/(\sin\eta)^2$ e que, portanto:

$$u_k(\eta) = \frac{2}{(1+\lambda)} \left\{ 1 - k^2/3 \right\} \cdot (\sin\eta)^2$$

Substituindo este resultado bem como as outras variáveis dependentes no nosso sistema dinâmico obtemos, fazendo :

$$\Sigma'_k = -m^{3(1+\lambda)/2(1+3\lambda)} (\sin\eta)^{2/(1+3\lambda)} \left\{ \frac{3(1+\lambda)}{2} + \lambda(3-k^2)(\sin\eta)^2 \right\} E_k;$$

$$E'_k = -\frac{9}{4}(1+\lambda)^2 m^{-1+3\lambda/2(1+3\lambda)} (\sin\eta)^{-2(2+3\lambda)/(1+3\lambda)} \Sigma_k$$

$$-\frac{3}{4}(1+\lambda)(1+3\lambda) m^{3(1+\lambda)/2(1+3\lambda)} (\cot g\eta) E_k ;$$

II – Tri-seção Hiperbólica

Resta-nos ainda encontrar a forma do sistema dinâmico no caso das folheações hiperbólicas ($\varepsilon = -1$). Como mencionado estes modelos caracterizam universos cujo conteúdo material é tal que a densidade seja menor que a densidade crítica. A expansão acontece, portanto, de forma mais rápida. As variáveis do cenário de fundo ficam:

$$a^{1+3\lambda} = m \cdot (\sinh\eta)^2 \quad \theta = \frac{3(1+3\lambda)}{2} \cdot \frac{\cot g\eta}{(\sinh\eta)^{2/(1+3\lambda)}}$$

$$\rho = 3m^{-2/(1+3\lambda)} (\sinh\eta)^{-6(1+\lambda)/(1+3\lambda)}$$

Seguindo procedimento análogo obtemos que $\rho a^2 = 3/(\sinh\eta)^2$ e que, portanto:

$$u_k(\eta) = -\frac{2}{(1+\lambda)} \{1 + k^2/3\} (\sinh\eta)^2$$

Finalmente, obtemos

$$\Sigma'_k = -m^{3(1+\lambda)/2(1+3\lambda)} (\sinh\eta)^{2/1+3\lambda} \left\{ \frac{3(1+\lambda)}{2} - \lambda(3+k^2)(\sinh\eta)^2 \right\} E_k;$$

$$E'_k = -\frac{9}{4}(1+\lambda)^2 m^{-1+3\lambda/2(1+3\lambda)} (\sinh\eta)^{-2(2+3\lambda)/(1+3\lambda)} \Sigma_k$$

$$- \frac{3}{4}(1+\lambda)(1+3\lambda) m^{3(1+\lambda)/2(1+3\lambda)} (\cot g\eta) E_k$$

Conclusão

Neste trabalho nós retomamos a análise das perturbações escalares nos modelos de FRW sob a ótica de excitações da geometria conforme proposta por Hawking na década de sessenta. Utilizando o formalismo quasi-maxwelliano das equações de Einstein reconstruímos de forma consistente as equações de perturbação envolvendo apenas quantidades invariantes de calibre. Aplicamos o procedimento tradicional de decomposição das grandezas de interesse físico e bases de objetos construídos com as autofunções de Helmholtz. Assumindo uma equação de estado do tipo $p = \lambda \rho$ para o fluido sob análise recuperamos o resultado já conhecido na literatura de que as perturbações escalares reduzem-se a um conjunto mínimo e fechado de observáveis ($E_{\alpha\beta}$ e $\sigma_{\alpha\beta}$ no caso). A parte elétrica do tensor conforme $E_{\alpha\beta}$ e a deformação da congruência $\sigma_{\alpha\beta}$ são então controlados por uma coleção infinita de sistemas dinâmicos não autônomos rotulados por um índice espectral k . Na nossa análise assumimos o fluxo de calor perturbado (δq_α) nulo e a pressão anisotrópica dada em termos exclusivos da deformação ($\delta \pi_{\mu\nu} = \xi \delta \sigma_{\mu\nu}$). Nesta primeira etapa do trabalho utilizamos muitos dos resultados já desenvolvidos, em contextos diferentes, por G. Ellis, M. Novello, J. M. Salim, S. Jorás.

A próxima etapa do trabalho consiste na construção de um formalismo baseado na teoria de sistemas dinâmicos e sua respectiva adaptação ao problema das perturbações escalares. Particular ênfase foi dada à questão do acoplamento entre as grandezas $E_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ e seus regimes típicos de estabilidade/instabilidade. Mostramos, em particular, que o sistema dinâmico $(\Sigma_k(t), E_k(t))$ apresenta características típicas de sistemas físicos dissipativos para os casos onde o *background* é dotado de expansão. Mostramos que o critério de dissipação (apelidado de *dissipação conforme* no caso) em termos da evolução da área no espaço de fases está diretamente associado ao fator de Hubble ($H = \dot{\theta}/3$) e à pressão anisotrópica ($\delta\pi_{\mu\nu}$) por uma relação simples. No caso adiabático esta relação sintetiza uma situação de conservação envolvendo o espaço físico e o espaço de fases.

Desenvolvemos adiante um mecanismo de análise estroboscópica do espaço de fases tridimensional $(\Sigma_k(z), E_k(z), z)$ em termos de fatias definidas para z fixo. Sobre cada uma destas fatias a dinâmica pode ser entendida como localmente autônoma. Analisamos a possibilidade de se extrair informações relevantes das soluções (incluindo, obviamente, as noções de estabilidade/instabilidade) sem a necessidade de solução explícita, que se mostrou bastante satisfatória para alguns casos com solução exata conhecida. Este resultado é particularmente relevante para o estudo das perturbações escalares no caso não-adiabático (analisado apenas superficialmente embora de grande relevância) e para os casos não euclidianos da triseção. É amplamente conhecido o fato de que estas situações nem sempre admitem soluções exatas para completa arbitrariedade dos parâmetros envolvidos.

Ainda neste cenário de fatias do espaço de fases e análise local das soluções construímos uma função $\Phi_{(\epsilon,k)}$ capaz de definir completamente os regimes de estabilidade de um dado modelo em termos exclusivos do fator de escala, da tricurvatura e do comprimento de onda as perturbações. Determinando o valor de $\Phi_{(\epsilon,k)}$ sob cada uma das seções juntamente com os autovalores m_{\mp} recuperamos alguns resultados conhecidos na literatura relacionando, por exemplo a ordem de grandeza do horizonte, o comprimento de onda físico das perturbações o nível de instabilidade das mesmas. Neste mesmo contexto extrapolamos a utilidade da função $\Phi_{(\epsilon,k)}$ para a análise da estabilidade de fluidos exóticos. Mostramos que existem valores específicos de λ onde transições bastante peculiares acontecem do ponto de vista do comportamento assintótico e ligadas às instabilidades mecânio-gravitacionais dos fluidos. Este fato adquire importância crucial na modelagem de energia escura uma vez que sabemos experimentalmente de sua alta taxa de homogeneidade em aglomerados e os resultados teóricos implicam em maior instabilidade para menores comprimentos de onda.

Sob a ótica da função $\Phi_{(\epsilon,k)}$ estudamos em profundidade o comportamento de fluidos convencionais sujeitos às perturbações. Mostramos que existem basicamente três tipos de regimes típicos com relação à topologia das soluções no espaço de fases. Em geral as perturbações passam por um regime de instabilidade (regimes de cela) para tempos menores e estabilizam-se para tempos maiores (regimes de nó e foco). Estes resultados foram analisados detalhadamente em seqüências estroboscópicas envolvendo uma coleção descontínua de valores da coordenada temporal. Aplicamos estes resultados na análise de três tipos de fluidos incluindo poeira e radiação. Um exemplo

de fluido não convencional com equação de estado $p = -(1/3)\rho$ foi resolvido de modo exato. Desenvolvemos no apêndice como estender nossa análise para as seções não euclidianas.

Finalmente, assumindo $\lambda > 0$, construímos a solução geral da parte elétrica do tensor de *Weyl* em termos de funções hipergeométricas ${}_0F_1$. Estas funções admitem representação em termos de funções de Bessel de primeira espécie. Mostramos através de uma análise de todos os parâmetros envolvidos na solução que para valores suficientemente grandes da variável temporal a parte elétrica do tensor de *Weyl* vai a zero. Concluimos que para fluidos perfeitos satisfazendo a condição $p > 0$ as excitações lineares da curvatura conforme são assintoticamente estáveis no tempo. Dito de outra maneira, se o espectro de perturbações da parte elétrica do tensor de Weyl em uma dada geometria do tipo FRW em expansão assume valores não nulos sobre uma hipersuperfície do tipo espaço, as equações de Einstein o propaga de forma a anulá-lo no infinito temporal.

Referências

5. M. S. Longair, *Galaxy Formation*, Springer Verlag Berlin Heidelberg 1998
6. Bernard J. T. Jones, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 48, 1, Jan. 1976;
7. Peebles, P. J. E., *Physical Cosmology* (Princeton University, Princeton), 1971;
8. M. S. Turner, *Phys. Rep.* 197, 67 (1990);
9. P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* 75, 559 (2003);
10. V. Sahni, A.A. Starobinski, *Int. J. Mod. Phys. D* 9, 373 (2000); M. Novello, M. Makler, L. S. Werneck, C. A. Romero, *Phys. Rev. D* 71, 043515 (2005);
11. A. Guth, *Phys. Rev. D* 23, 347 (1981), A. Linde, *Phys. Lett.* 108B, 389 (1982), A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* 48, 1220 (1982);
12. V. De Lorenc *et al Phys. Rev. D* 65, 063501 (2002), M. Novello *et al*, *Phys. Rev. D* 69, 127301 (2004);
13. G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, *Phys. Rep.* 333, 167 (2000); David H. Lyth and Antonio Riotto, arxiv:hep-ph/9807278 v4 (1999);
14. G. F. R. Ellis, *General Relativity and Cosmology*, Proceedings of the International School of Physics, Enrico Fermi Course XLVII (Academic, London, 1971), p. 104;
15. T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe*, Cambridge ; New York, Cambridge University Press, 1993.

16. Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York), 1972;
17. A. H. Guth and S. Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* 49, 15, 1110 (1982); J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* 28 679 (1983); Yung-Song Piao, Yuan-Zhong Zhang, arxiv: gr-qc/0608058 v1 (2006);
18. E. M. Lifshitz and I. M. Khalatnikov in *Adv. Phys.* 12, 185, 1963 (consultar as referências internas);
19. S. W. Hawking, *Ap. Journal* 145, 544. 1966;
20. J. M. Stewart and M. Walker, *Procc. R. Soc. London A* 341, 49, 1974. J. M. Stewart in *Class. Quantum Grav* 7, 1169, 1990.
21. D. W. Olson, *Phys. Rev. D*, 14/2, 327, 1976;
22. R. Brandenberger *et al.* *Phys. Rev. D* 28, 1809 (1983);
23. Ulrich H. Gerlach, Uday K. Sengupta, *Phys. Rev. D* 18, vol.6 1789 (1978);
24. W. H. Press and E. T. Vishniac, *Astrophys. J.* 239;
25. J. Bardeen, *Phys. Rev. D* 22, 1882, 1980;
26. J. M. Salim, Tese de Doutorado, CBPF, 1982
27. M. Novello , J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Joras and R. Klippert, *Phys. Rev. D* 51, 450, 1995 and references therein.
28. M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva, S. E. Joras and R. Klippert, *Phys. Rev. D* 52, 730, 1995.
29. M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva and R. Klippert, *Phys. Rev. D* 54, 2578, 1996.

30. M. Novello, J. M. Salim, M. C. Motta da Silva and R. Klippert, Phys. Rev. D 61, 124025, 2000.
31. S. E. Jorás, Tese de Mestrado, CBPF, 1994;
32. P. Jordan, J. Ehlers, R. Sachs, Akad. Wiss. Lit. Mainz Abh. Math. Naturwiss. K1 1, 3 (1961);
33. W. Israel, Ann. Phys. (NY) 100, 310 (1976);
34. John L. Synge, Relativity : the general theory, Amsterdam : North-Holland Publ. Co., 1960.
35. M. Novello and J. M. Salim, Lanczos potential and Jordan theory of gravity, Notas de Física do CBPF (1983); M. Novello and J. M. Salim, On the propagation of Einstein's equations with quasi-maxwellian equations of gravity, Notas de Física do CBPF (1985)
36. A. Matte, Can. J. Math. Vol. 5, 1853, p.1; Louis Bel, General Relativity and Gravitation, Vol. 32 10, 2000 (Reprodução do artigo: Les états de radiation et le problem de l'énergie en relativité générale. Chiers de Physique 16, 59-80 (1962));
37. E. E. Fairchild Jr. Phys. Rev. D 16 (1977) 2438, M. Carmeli, Phys. Rev. D 14 (1976) 1727;
38. M. Novello, C. A. P. Galvão, I. Damião Soares, J. M. Salim, J. Phys. A: Math. Gen. Vol. 9, 4, 1976;
39. R. Maartens *et al.*, Class. Quantum Grav. 14 (1997) 1927-1936; N. Van den Bergh, Class. Quantum Grav. 20 (2003) L165-L168;
40. C. B. G. McIntosh, R. Arianrhod, S. T. Wade and Hoenselaers, Class. Quantum Grav. 11 (1994) 1555-1564;

41. G. F. R. Ellis, P. K. S. Dunsby arXiv:astro-ph/9410001 v1, 1994, Peter K. S. Dunsby, Bruce A. C. C. Bassett and George Ellis, *Class. Quantum Grav.* 14 (1997) 1215-1222;
42. Joan Josep Ferrando and Juan Antoio Sáez, *Class. Quantum Grav.* 20 (2003) 2835-2840;
43. R. Maartens *et al.*, *Phys. Rev. D*, 55, 8, 5219, 1997;
44. W. B. Bonnor, *Class. Quantum Grav.* 12 (1995) 1483-1489;
45. C. Lozanovski, M. Aarons, *Class. Quantum Grav.* 16 (1999) 4075-4083;
46. E. P. Liang, *Phys. Lett.* 51A, 3, 141, 1975; Ashkbiz Danehkar, arxiv:gr-qc 0707.4025v1 (2007);
47. J. M. Salim, Tese de Mestrado, 1976
48. R. Ruffini, *Nonlinear gravitodynamics, The lense-thirring effect*, 2003;
49. *Physics Lett B. Review of particle physics*, 592, 1-4, 15 2004
50. F. De Felice & C. J. S. Clarke, *Relativity on curved manifolds*, Cambridge University Press 1990; R. H. Brandenberger, *Proceedings of the VIII Brazilian School of Cosmology and Gravitation II*, 1 (1995), edited by M. Novello;
51. Dietrich Kramer, *Exact solutions of einstein's field equations*, Cambridge, England Cambridge University Press, 1980.
52. G. E. Tauber, *J. Math. Phys.* 8, 1, 1967;
53. J. Peter Vajk, *J. Math. Phys.* 10, 7, 1969;
54. M. Bruni, P.K. S. Dunsby, G. F. R. Ellis, *Astrophys. Journal* 395: 34-53, 1992; P.K. S. Dunsby, M. Bruni, G. F. R. Ellis, *Astrophys. Journal* 395: 54-74, 1992; V. N. Lukash,

Proceedings of the VIII Brazilian School of Cosmology and Gravitation II, 288 (1995),
edited by M. Novello;

55. Stephen W. Goode, Phys. Rev. D 39, 10, 1989;
56. G. F. R. Ellis, J. Hwang, M. Bruni, Phys. Rev. D, 40, 6, 1819 (1989); G. F. R. Ellis, J. Hwang, M. Bruni, Phys. Rev. D, 40, 6, 1804 (1989)
57. R. C. Hilborn in Chaos and Non-Linear Dynamics, Oxford Univers. Press, Oxford 2000;
58. J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, Nonlinear Dynamics and Chaos, John Wiley & Sons Ltd, 1987; V. I. Arnold in Mathematical Methods of Classic Mechanics, Springer Verlag 2nd ed. 1989; Arrowsmith, D. K., C. M. Place in Dynamical systems: differential equations and chaotic behavior, Chapman and Hall 1992; George D. Birkhoff, Dynamical Systems, American Mathematical Society, 1966;
59. A. Erdelyi in Higher Transcendental functions, vol. I. 1953, Caltech Bateman Manuscript Project; Jahnke-Ende-Lösch, Tables of higher functions, McGraw Hill 1960, sixth edition;
60. G. B. Arfken and H. J. Weber in Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 4th edition, 1995.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)