

Marina Reis Martins

Gravidade $(2 + 1)$ -Dimensional: Um Laboratório
Teórico para Alguns dos Desafios da Relatividade Geral

Tese de Doutorado

Programa de Pós-Graduação em Física
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Física

Orientadora: Maria de Fátima Alves da Silva

Rio de Janeiro

2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Dedicatória

Dedico esta tese à minha mãe e a meu marido Gustavo

“ Existem apenas duas maneiras de ver a vida:
uma é pensar que não existem milagres,
e a outra é que tudo é um milagre.”

Albert Einstein

“ Se um dia tiver que escolher entre o mundo e o amor...
Lembre-se, se escolher o mundo ficará sem o amor,
mas se escolher o amor com ele você conquistará o mundo.”

Albert Einstein

Agradecimentos

- À Dra. Maria de Fátima Alves da Silva, pela oportunidade de trabalho, paciência, ajuda e confiança a mim dispensadas;
- À minha mãe, pelo carinho e atenção;
- A meu marido Gustavo Corrêa Fischer, pela dedicação e apoio durante estes anos de trabalho;
- À minha família e amigos, por estarem sempre a meu lado, me dando motivação;
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida;
- Aos responsáveis pelo programa de pós-graduação em física da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), pelo auxílio prestado durante o período de elaboração da tese.

Resumo

O fenômeno do colapso gravitacional e a estrutura de estrelas relativísticas são de grande importância em astrofísica desde a formulação da relatividade geral. Alguns trabalhos mais recentes revelam avanços importantes em nosso entendimento da formação de estruturas tais como buracos negros e singularidades nuas e do comportamento de fluidos exóticos tais como matéria e energia escura, incluindo aqui os fluidos fantasmas.

A complexidade do estudo do colapso gravitacional está relacionada à existência de poucas soluções analíticas disponíveis para estudo. Recentemente, soluções auto-similares das equações de campo de Einstein têm atraído grande atenção, não somente pela possibilidade de serem estudadas analiticamente, simplificando o problema, mas também por sua relevância em astrofísica.

Neste trabalho, estudamos o colapso gravitacional do fluido anisotrópico com auto-similaridade do segundo e primeiro tipos em espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais, com simetria circular. Impondo as equações de estado $p_r = 0$ e $p_\theta = \omega\rho$, onde ρ determina a densidade de energia e p_r , p_θ as pressões nas direções radial e tangencial do fluido, mostramos que, para soluções com auto-similaridade do segundo tipo, há duas distintas famílias. Uma delas é representada unicamente por fluido de poeira, neste caso todas as soluções para as equações de campo de Einstein são encontradas e suas propriedades locais e globais são estudadas em detalhes. Algumas delas podem ser interpretadas como um processo de colapso gravitacional, em que singularidades nuas e buracos negros são formados. Para a outra família de soluções, temos um modelo cosmológico, com expansão acelerada, que começa em uma singularidade inicial ($t = 0$), com todas as condições de energia satisfeitas. Nosso propósito foi investigar o papel da não-homogeneidade na aceleração do fluido.

Na intenção de estudar as soluções com auto-similaridade do primeiro tipo, mostramos que existe uma solução que representa um processo de colapso gravitacional, resultando em uma estrutura final de buraco negro ou singularidade nua. Estas estruturas finais podem ser constituídas de um fluido bem comportado ou fantasma.

Abstract

The phenomenon of gravitational collapse and the structure of relativistic stars is of great importance in astrophysics since the formulation of general relativity. Some more recent works has revealed important advances in our understanding of the structures formation, as black holes and naked singularities and of exotic behaviour fluids, as dark matter, dark energy, including here, phantom fluids.

The complexity of the gravitational collapse study is related with the relatively few analitic solutions available for study. Recently, self-similar solutions of the Einstein's field equations has attracted a great deal of attention, not only because they can be studied analytically through simplification of the problem, but also because of their relevance in astrophysics.

In this work, we study the gravitational collapse of the anisotropic fluid with self-similarity of the second and first kinds in (2+1)-dimensional spacetimes with circular symmetry. By imposing the equations of state $p_r = 0$ and $p_\theta = \omega\rho$, where ρ denotes the energy density, p_r and p_θ the pressures in the radial and tangencial direction of the fluid, we show that, for the solutions with self-similarity of the seconde kind, exists two distinct families. For one of the families, the only allowed solutions are the ones that represent dust fluid. All such solutions to the Einstein's field equations are found and their local and global properties are studied in detail. It is found that some can be interpreted as representing gravitational collapse, in which both naked singularities and black holes can be formed. For the other family of solutions, we have an cosmological model with acellerated expansion, which begins in a initial singularity ($t = 0$), with all the energy conditions satisfied. Our proposal was to investigate the hole of the inhomogeneity on the fluid's acceleration.

In order to study the solutions with self-similarity of the first kind, we showed that there is a solution which represents a gravitational collapse process, resulting in a final structure of black hole or naked singularity, which can be constituted by normal or phantom fluid.

Índice

Dedicatória	<i>i</i>
Agradecimentos	<i>iii</i>
Resumo	<i>iv</i>
Abstract	<i>v</i>
1. Introdução	1
1.1 Colapso Gravitacional	1
1.2 Auto-Similaridade	5
1.3 Condições de Energia	10
1.4 Definições de Energia Escura e Fluido Fantasma	12
1.5 Condições de Junção em Relatividade Geral	13
1.6 Organização Geral do Trabalho	15
2. Relatividade Geral em Espaços-Tempos $(2 + 1)$-Dimensionais	17
2.1 Relatividade Geral em Espaços-Tempos $(2 + 1)$ -Dimensionais	17
2.2 Superfícies Aprisionadas e Horizontes em Espaços-Tempos $(2 + 1)$ -Dimensionais	20
3. Formação de Buracos Negros e Singularidades Nusas a partir do Colapso Gravitacional de Poeira Auto-Similar de Segundo Tipo	24
3.1 Introdução	24
3.2 Soluções das Equações de Campo de Einstein Considerando a Equação de Estado $p_r = 0$	31
Caso A: $\beta > 0$	36
Caso A.1: $0 < \alpha < 1$	36
Caso A.2: $\alpha < 0$	39
Caso B: $\beta < 0$	39
Caso B.1: $0 < \alpha < 1$	39
Caso B.2: $\alpha < 0$	42

3.3 Conclusão.....	42
4. Colapso Auto-similar de Primeiro Tipo: Formação de Buracos Negros para Fluidos Fantasmas	45
4.1 Introdução	45
4.2 Soluções das Equações de Campo de Einstein Considerando as Equações de Estado $p_r = 0$ e $p_\theta = \omega\rho$	46
4.3 As Condições de Energia	50
4.4 As Condições de Junção	51
As Condições de Energia da Camada Fina.....	64
4.5 Conclusão	66
5. Não-homogeneidade como um Possível Fator Responsável pela Aceleração do Universo	67
5.1 Introdução	67
5.2 Soluções das Equações de Campo de Einstein Considerando a Equação de Estado $p_r = 0$	68
5.3 A Solução $\phi_{,\chi} = 0$	69
Caso C: $\beta = 0$	69
5.4 A Solução $y + 1 = 0$	71
Caso D: Fluidos Homogêneos	72
Caso E: Fluidos não Homogêneos	74
Caso E.1: $\psi_{,\chi} = \lambda_0\chi^{\lambda_1} + \lambda_2$	75
Caso E.1.1: $a(a-1) > 0$	78
5.5 Conclusão	86
6. Conclusão	87
6.1 Resumo e Balanço dos Resultados	88
6.2 Perspectivas Futuras	89

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo fazemos uma breve explanação a respeito dos principais assuntos abordados no estudo do colapso gravitacional, fenômeno no qual se baseiam dois capítulos originais deste trabalho. É feita, então, uma apresentação inicial sobre o colapso gravitacional, seguida de uma descrição das simetrias de auto-similaridade e das condições de energia que estarão presentes ao longo de toda essa tese, incluindo o capítulo que desvia-se do colapso gravitacional para discutir alguns aspectos presentes na cosmologia moderna. A partir da definição das condições de energia caracterizamos fluidos de energia escura e energia fantasma. Estabelecemos também as condições de junção entre dois espaços-tempos distintos e, por fim, apresentamos a organização geral do trabalho.

1.1 Colapso Gravitacional

Desde a formulação da relatividade geral, o fenômeno do colapso gravitacional tem sido considerado de grande importância em astrofísica, atraindo a atenção de muitos cientistas. Além deste, a estrutura de estrelas relativísticas também têm despertado tal interesse. Estudos envolvendo o fenômeno do colapso gravitacional já vinham sendo realizados, de forma independente, desde o final do século XVIII por cientistas como Michell [1] e Laplace [2], segundo uma visão newtoniana. Estruturas relativísticas foram estudadas primeiramente por Schwarzschild, Tolman e Oppenheimer e Volkoff. Schwarzschild elaborou um modelo teórico de estrelas, que descrevia uma estrutura de densidade uniforme e para isso considerou soluções analíticas [3]. Tolman considerou um sistema de esferas estáticas de fluido e estudou suas soluções [4], que posteriormente foram utilizadas por Oppenheimer e Volkoff no estudo do equilíbrio gravitacional das estrelas de nêutrons [5].

No final da década de trinta Oppenheimer e Snyder [6], trabalhando com um sistema constituído por matéria neutra no estágio final de sua energia termonuclear, produziram as

primeiras idéias a respeito da formação de buracos negros, representando estruturas finais do processo do colapso gravitacional. Mas foi na década de sessenta que o conceito de buracos negros foi de fato estabelecido.

Os estudos realizados por Oppenheimer e Snyder [6] e Oppenheimer e Volkoff [5] demonstraram que a partir de uma determinada quantidade de massa estelar, as soluções para as equações de campo de Einstein não se apresentam na forma estática, ou seja, o fluido colapsaria até formar uma singularidade, sem que nada pudesse detê-lo. As equações de campo de Einstein estabelecem uma relação do campo de matéria, definido como o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$, com a geometria do espaço-tempo, que é definida pelo tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Estas equações são definidas como

$$G_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu}, \quad (1.1.1)$$

onde $K = 8\pi$ é uma constante (daqui por diante fazemos a constante gravitacional G e a velocidade da luz c iguais a um).

No processo de evolução estelar o fator determinante na vida da estrela é sua massa, dependendo de quão massiva ela for, poderá perder maior quantidade de energia por segundo e evoluir mais rapidamente. No início de sua formação, a estrela se mantém em equilíbrio, balanceando a pressão de radiação emitida por ela, quando ocorre a conversão de elementos mais leves em elementos mais pesados no núcleo, com a pressão de suas camadas mais externas. Esta forma de equilíbrio garante, dependendo da massa da estrela, sua estabilidade. Durante a maior parte de suas vidas, as estrelas convertem hidrogênio em hélio, e a pressão de radiação emitida pela conversão é compensada pelo peso das camadas mais externas da estrela. Quando o hidrogênio é totalmente convertido em hélio, as camadas mais externas da estrela são atraídas pela auto-gravitação e comprimem o núcleo, aumentando sua temperatura. A partir de determinada temperatura dá-se início ao processo de conversão de hélio em oxigênio e, seguindo o mesmo caminho, outros elementos vão sendo produzidos.

De acordo com a massa da estrela, o processo de sucessivos estágios de equilíbrio pode ser interrompido dando origem ou não a um sistema estável. A estrutura final que poderá se formar, depende da massa, momento angular e do campo eletromagnético da estrela. Por exemplo, para massas da ordem de 1.0 a 1.5 massas solares, teremos a contração com ejeção de matéria, que terminará dando origem a uma estrela anã branca. No caso de massas de 1.3 a 2.7 massas solares, o processo possibilitará o surgimento de uma estrela de nêutrons. Para estrelas com limites maiores que os mencionados, o processo de contração não pode ser interrompido e continuará até que seja formada uma estrutura final chamada singularidade, significando que a evolução de geodésicas no espaço-tempo não poderá ser

estendida para além daquela região e que um ou mais escalares de curvatura divergirá nesta região.

O estágio final de uma estrela massiva ainda representa um problema não resolvido em relatividade geral e astrofísica relativística. Estudos sobre colapso gravitacional nos levam a considerar a existência de uma singularidade gravitacional na última fase deste tipo de estrela. No entanto, os teoremas da singularidade não apontam necessariamente para a formação de singularidades cobertas, ou seja, buracos negros, o que nos permite considerar a existência de singularidades nuas. Um buraco negro não pode ser visto por observadores distantes, por outro lado as singularidades nuas seriam visíveis para estes observadores e dadas as dificuldades na obtenção de uma solução geral das equações de campo de Einstein, que as represente, ainda não podemos afirmar se a relatividade geral admite a formação destas estruturas ao final do processo de colapso. A singularidade não seria visível para um observador distante se ela estivesse coberta por uma ou várias hipersuperfícies, chamadas de hipersuperfícies de aprisionamento. Estas hipersuperfícies são formadas no decorrer do processo de colapso gravitacional de um sistema composto por matéria fisicamente razoável. O limite externo ao da região aprisionada, ou seja, sua camada mais externa, é definido como horizonte aparente. Dos teoremas mencionados anteriormente, os de Hawking e Penrose [7] afirmam que, se o horizonte for formado, haverá a formação de singularidade, mas a formação de singularidade não implica necessariamente na formação do horizonte, ou seja, não existe uma proibição para a formação de singularidade nua. Mas existem situações em que mesmo que hipersuperfícies de aprisionamento fossem formadas, não cobririam necessariamente a singularidade. Este pode ser o caso de uma estrela esférica que colapsa, formando uma singularidade antes de seu contorno entrar completamente no raio do horizonte aparente. Trabalhos recentes tais como as soluções de Vaidya de poeira nula para radiações implodindo [8], soluções de poeira de Tolman-Bondi [9, 10], e o colapso auto-similar em relatividade geral [11], vêm mostrando a ocorrência de singularidades nuas ao final do processo de colapso.

Uma singularidade nua eventualmente influenciaria o resto do espaço-tempo, não preservando a previsibilidade das leis da física, o que não acontece com uma singularidade coberta, ao menos no espaço-tempo fora do horizonte. Foi provado por Hawking e Penrose [7] que o aparecimento de singularidades se dá em qualquer simetria do espaço-tempo, entretanto seus teoremas sobre singularidade somente provam a incompletude das geodésicas no espaço-tempo e não dizem nada sobre detalhes das características da singularidade. A possibilidade de formação de estruturas como a singularidade nua é ainda uma questão intrigante, e considerando-a, Penrose [12] propôs a chamada conjectura de censura cósmica. Esta conjectura representa um dos mais importantes problemas não resolvidos em relatividade geral. A conjectura é frequentemente levada em consideração na análise do fenômeno

crítico em estudos de campos gravitacionais fortes. Existem duas versões desta conjectura. A versão fraca afirma que todas as singularidades estão escondidas dentro de buracos negros. A versão forte afirma que a singularidade não poderia ser vista nem por observadores localizados dentro do horizonte aparente, e estes não poderiam ser influenciados causalmente por ela.

Singularidades cobertas e singularidades nuas têm propriedades teóricas e observacionais muito diferentes, mantendo em comum a particularidade de se formarem no final de um processo de colapso gravitacional. Trabalhos sobre colapso, que vêm sendo realizados há anos, mostram que o surgimento de tais estruturas guardam uma relação direta com a escolha da densidade inicial e da distribuição de velocidade do fluido da estrela, quando levamos em consideração determinadas equações de estado.

Durante o processo de formação dos buracos negros e das singularidades nuas podem surgir sutis fronteiras no espaço de fase, de modo que, próximo a elas, possam ocorrer distintas evoluções temporais qualitativas dos dados iniciais. O estudo da evolução desses dados, em torno dessa fronteira, é feito a partir da teoria de sistemas dinâmicos. A invariância de escala nesta fronteira, evidenciada na formação de buracos negros, leva a uma lei de potência para a sua massa. Fatores como invariância de escala, universalidade e um perfil de lei de potência caracterizam o fenômeno crítico. Em 1993 Matthew Choptuik [13], desenvolvendo métodos numéricos avançados, verificou, estudando o colapso de uma distribuição de um campo escalar sem massa, que o fenômeno crítico está presente no colapso gravitacional de sistemas esféricos, assim como ocorre nos modelos da física estatística. Posteriormente o fenômeno crítico foi ainda encontrado no colapso gravitacional de outros campos de matéria, mostrando o caráter universal da solução crítica e sua auto-similaridade. Existem dois tipos de colapso crítico, o colapso do tipo II e o colapso do tipo I. No primeiro caso todas as soluções críticas apresentam auto-similaridade discreta (ASD) ou auto-similaridade homotética (ASH). No segundo caso as soluções críticas não apresentam nenhuma das duas auto-similaridades. Soluções esfericamente simétricas com auto-similaridade contínua são mais fáceis de analisar, sendo possível simplificar as equações de campo, reduzindo-as a um sistema de equações diferenciais ordinárias. Ainda assim o estudo analítico destas soluções continua sendo muito complicado. Na intenção de facilitar o estudo do colapso, alguns autores têm proposto trabalhos em espaços-tempos de menor dimensão [23, 24, 48]. Aqui seguindo seus passos, trabalhamos com espaços-tempos (2+1)-dimensionais.

1.2 Auto-Similaridade Cinemática

O interesse inicial por modelos auto-similares, se deve ao fato destes simplificarem equações que governam determinados tipos de sistema, reduzindo frequentemente sistemas de equações diferenciais parciais a equações diferenciais ordinárias. A auto-similaridade foi utilizada primeiramente em relatividade geral por simplificar o complexo sistema de equações de campo de Einstein, dado pelas equações (1.1.1). Num espaço-tempo 4-dimensional, estas equações constituem um sistema de dez equações diferenciais parciais não lineares, cujas variáveis são as 4 coordenadas independentes do espaço-tempo. Foi observado que a auto-similaridade está relacionada com a rápida expansão ou com o rápido colapso, o que representou mais uma motivação para o uso de soluções auto-similares em relatividade geral.

Ainda que sejam soluções particulares, as soluções auto-similares geralmente descrevem o comportamento assintótico intermediário do sistema, em regiões em que uma solução não depende em detalhes das condições iniciais e de fronteiras. Soluções auto-similares representam soluções de problemas degenerados em que todos os parâmetros dimensionais constantes, incluindo as condições iniciais e as de fronteira, somem ou se tornam infinitas. A expansão do universo a partir do Big Bang e o colapso de uma estrela até a formação de uma singularidade, devem exibir auto-similaridade, já que é esperado que as condições iniciais ou limites, não sejam consideradas na análise. As equações diferenciais, que são invariantes sob transformações de escala das variáveis independentes, possuem soluções com a mesma propriedade. Estas são as chamadas equações auto-similares. Estas transformações formam o grupo de Lie. A transformação infinitesimal do grupo de Lie define o gerador infinitesimal e determina os invariantes da ação do grupo, que representam os invariantes das equações diferenciais. Em uma visão geométrica, a auto-similaridade revela uma invariância na distribuição espacial das características do movimento, permanecendo similar a ela mesma, todo o tempo. Cahill e Taub [14] foram os primeiros a estudar soluções auto-similares em relatividade geral. Eles trabalharam com uma distribuição esfericamente simétrica de um fluido perfeito, dentro de um contexto cosmológico, cujo tensor momento-energia é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu}, \quad (1.2.1)$$

sendo u^{μ} o vetor 4-velocidade do fluido, p a pressão, ρ a densidade de energia e $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico. Assumindo uma solução formada por variáveis dependentes, que são funções de uma única combinação adimensional de r e t (ou seja, a solução é invariante sob a transformação $\bar{t} = at$, $\bar{r} = ar$, para qualquer constante a) e que o modelo não contém

outras constantes dimensionais, foi mostrado que uma auto-similaridade de primeiro tipo, pode ser formulada tendo como base um vetor homotético. Cahill e Taub [14] mostraram, que em um dado espaço-tempo, um campo de vetores próprios homotéticos ξ , após uma transformação de escala por uma constante, satisfaz a condição

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}, \quad (1.2.2)$$

aqui $g_{\mu\nu}$ é a métrica e \mathcal{L}_ξ é a derivada de Lie ao longo do campo vetorial ξ . Da equação (1.2.2) temos

$$\mathcal{L}_\xi G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.2.3)$$

Para a auto-gravitação de um fluido perfeito, com auto-similaridade do primeiro tipo, temos a partir das considerações dimensionais, que as quantidades físicas se transformam de acordo com

$$\mathcal{L}_\xi u^\mu = -u^\mu \quad (1.2.4)$$

e

$$\mathcal{L}_\xi \rho = -2\rho, \quad \mathcal{L}_\xi p = -2p. \quad (1.2.5)$$

A partir das equações (1.2.4) e (1.2.5) temos que

$$\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.2.6)$$

em acordo com as equações de campo de Einstein. Para estes espaços-tempos as equações (1.2.4) e (1.2.5) implicam que todas as quantidades se transformam de acordo com suas respectivas dimensões, então auto-similaridade geométrica e auto-similaridade física coincidem. A auto-similaridade geométrica e a auto-similaridade física indicam que os termos geométricos e as quantidades físicas permanecem similares a eles mesmos, equações (1.2.4) e (1.2.5) respectivamente, após uma transformação de escala. Soluções auto-similares do primeiro tipo têm sua existência relacionada às leis de conservação e à invariância do

problema com respeito ao grupo das transformações de similaridade de quantidades com dimensões independentes, isto faz com que elas apresentem, de forma implícita, uma certa regularidade do processo limite na passagem do regime original para o auto-similar. Em geral existem soluções cujas expressões para as variáveis auto-similares não são determinadas unicamente por análise dimensional, como no caso de soluções do primeiro tipo, estas soluções são as soluções de segundo tipo, cujas constantes dimensionais não são determinadas pelas leis de conservação [20]. Colocando de uma forma mais geral, a auto-similaridade se refere à situação em que um sistema não está restrito a ser invariante sob a ação de grupo relevante, mas sofre apenas uma nova escala de forma apropriada [20].

Nos casos em que existem constantes d_i , tais que

$$\mathcal{L}_\xi \phi_A^i = d_i \phi_A^i, \quad (1.2.7)$$

para cada campo físico independente ϕ_A^i , onde os campos ϕ_A^i podem ser escalares, vetoriais ou tensoriais, um campo vetorial ξ é definido como gerador auto-similar. No trabalho de Cahill e Taub (1971) [14], a própria métrica satisfaz a equação (1.2.7), para a garantia da auto-similaridade geométrica, com ξ sendo um vetor homotético, correspondendo à auto-similaridade do primeiro tipo. Caso exista a possibilidade da métrica ser decomposta de forma física e covariante, deve-se tomar as condições em que cada componente, proveniente desta decomposição, satisfaz a equação (1.2.7), em substituição à condição estabelecida para a auto-similaridade do primeiro tipo. Assim como no caso do tensor métrico, os campos físicos, que compõem o tensor momento-energia, podem satisfazer à equação (1.2.7) e assim manter a auto-similaridade.

Fazendo comparações com auto-similaridade newtoniana em um meio contínuo, Carter e Henriksen (1989) [15], chegaram à noção covariante de auto-similaridade cinemática no contexto da mecânica do fluido relativístico. A auto-similaridade também tem sua origem no fato de que a métrica de um fluido pode ser unicamente decomposta, ou seja, para um fluido, por exemplo, a decomposição pode ser feita em termos do tensor projeção e da 4-velocidade. A condição

$$\mathcal{L}_\xi u_\mu = \alpha u_\mu, \quad (1.2.8)$$

deve ser satisfeita por um vetor auto-similar cinemático ξ , onde α é uma constante, ou seja, ξ é um gerador auto-similar cinemático contínuo com respeito ao fluxo u_μ . O tensor projeção deve satisfazer a condição

$$\mathcal{L}_\xi h_{\mu\nu} = 2h_{\mu\nu}, \quad (1.2.9)$$

o tensor projeção representa a projeção da métrica em um espaço 3-dimensional ortogonal a u^α (ou seja, no referencial do observador comóvel).

O valor atribuído à constante α , nas equações (1.2.8) e (1.2.9), estabelece diversos casos, e os principais são:

- (i) $\alpha = 0$, neste caso as equações (1.2.8) e (1.2.9) são similares a $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$, correspondendo às equações de Killing, sendo ξ um vetor de Killing, equivalente à auto-similaridade do tipo zero;
- (ii) $\alpha = 1$, com ξ sendo agora um vetor homotético e as equações (1.2.8) e (1.2.9) equivalentes a $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}$, depois de uma normalização do vetor ξ , correspondendo à auto-similaridade do primeiro tipo;
- (iii) $\alpha \neq 1, 0$, aqui ξ é um vetor associado a uma auto-similaridade própria, correspondendo à auto-similaridade do segundo-tipo, que após ser normalizado, leva às equações (1.2.8) e (1.2.9).

Para o caso de similaridade do primeiro tipo, no contexto de simetria esférica, são reveladas quantidades físicas, que são funções de uma única variável independente $Z = r/t$. O gerador auto-similar geral para esta mesma simetria, em coordenadas comóveis com o fluido foi mostrado ser [15]

$$\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\alpha t + \beta) \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r}, \quad (1.2.10)$$

com o fluido representado pela métrica

$$ds^2 = e^{2\phi} dt^2 - e^{2\psi} dr^2 - r^2 S^2 d\Omega^2, \quad (1.2.11)$$

onde $d\Omega \equiv \theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ e ϕ , ψ e S representam funções da coordenada auto-similar Z . Aqui o raio geométrico é dado por $R = rS$ e as equações diferenciais de campo se reduzem a um sistema de equações diferenciais ordinárias. O parâmetro α é o fator constante de proporcionalidade entre as taxas de dilatação das escalas de comprimento e escalas de tempo. Quando $\alpha = 0$, caso de auto-similaridade do tipo zero, há a dilatação espacial sem uma dilatação temporal, e β pode sofrer uma nova escala para a unidade, o que nos leva a

$$Z = r e^{-t}. \quad (1.2.12)$$

Casos como este foram estudados por Henriksen, Emslie e Wesson [16]. No caso de $\alpha \neq 1, 0$, auto-similaridade do segundo tipo, ξ não é homotético e as novas escalas relativas do espaço e do tempo em ξ , não são as mesmas. Este é o caso mais geral onde β sofre uma nova escala para zero, sendo a coordenada auto-similar dada por

$$Z = r(-t)^{\frac{-1}{\alpha}}. \quad (1.2.13)$$

Estes casos foram estudados por Lynden-Bell e Lemos [17] e mais tarde detalhados por Carter e Henriksen [18]. No caso específico de auto-similaridade do primeiro tipo, quando $\alpha = 1$, β pode sofrer uma nova escala para zero e

$$Z = \frac{r}{(-t)}, \quad (1.2.14)$$

que representa um caso particular da auto-similaridade do segundo tipo, ainda que a física não seja a mesma para ambos os casos. Para este tipo de auto-similaridade, no caso das coordenadas r e t passarem por uma nova escala, como por exemplo

$$t' = at \quad (1.2.15)$$

e

$$r' = ar, \quad (1.2.16)$$

sendo $a = \text{constante}$, a coordenada Z permanece inalterada, comportamento que outros tipos de auto-similaridade não apresentam.

Recentemente, soluções auto-similares das equações de campo de Einstein tem atraído grande atenção, não somente por favorecerem um estudo analítico, através da simplificação do problema, mas também por causa de sua relevância em astrofísica [19, 20] e fenômeno crítico no colapso gravitacional [21, 22].

Soluções auto-similares têm sido estudadas em vários espaços-tempos [23, 24]. Em particular, foi considerado um campo escalar sem massa em espaços-tempos (2+1)-dimensionais circularmente simétricos com auto-similaridade cinemática de segundo tipo no contexto da teoria de Einstein, e encontradas todas as soluções [25]. A investigação de suas propriedades

locais e globais revelaram que algumas delas representam o colapso gravitacional de um campo escalar sem massa, em que buracos negros são sempre formados.

Como já foi mencionado anteriormente, a solução crítica pode apresentar auto-similaridade discreta, auto-similaridade contínua, correspondente à auto-similaridade do primeiro tipo, ou nenhuma auto-similaridade. Para os primeiro e segundo casos, cujas soluções apresentam auto-similaridade discreta e contínua, buracos negros sempre se formam com massa tendendo a zero. Este é o chamado colapso do tipo *II*. Quando soluções críticas não apresentam nenhuma das duas auto-similaridades, buracos negros são sempre formados com massa finita, representando o colapso do tipo *I*.

Na próxima seção apresentamos as condições de energia, nas quais nos baseamos para verificar se as soluções matemáticas obtidas das equações de campo de Einstein representam fluidos bem comportados ou fluidos de energia escura ou de energia fantasma.

1.3 Condições de Energia

É fisicamente razoável que a densidade de energia de um campo de matéria, medida por qualquer observador, seja não negativa. Esta é a primeira condição, que garante a existência de fluidos fisicamente aceitáveis. Conhecida como condição de energia fraca, ela impõe que a densidade de energia medida por um observador com 4-velocidade ξ^μ satisfaça a equação

$$T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq 0, \quad (1.3.1)$$

para todo vetor tipo-tempo ou tipo-nulo, onde ξ^μ é a 4-velocidade. O campo vetorial ξ^μ , assim como todo campo vetorial, é definido pelas tangentes às curvas de uma congruência de curvas (família de curvas), localizada em uma dada sub-variedade S , esta estando contida em uma variedade W . Por cada ponto P , pertencente a S , passa uma única curva da congruência desta família. Aqui o campo vetorial ξ^μ pode ser normalizado à unidade, $\xi^\mu\xi_\mu = +1$, se admitirmos geodésicas suaves do tipo-tempo, parametrizadas pelo tempo próprio τ .

A condição conhecida como condição de energia forte, ou de convergência tipo-tempo, tem sua origem em uma equação que define a taxa de variação da expansão ao longo das curvas geodésicas na congruência, a equação de Raychaudhuri, que é dada por

$$\xi^\mu\nabla_\mu\theta = \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu, \quad (1.3.2)$$

sendo θ a expansão, $\sigma^{\mu\nu}$ o cisalhamento e $w^{\mu\nu}$ a torção da congruência. O último termo do lado direito da equação está associado ao campo de matéria através da expressão

$$R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})\xi^\mu\xi^\nu = T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu + \frac{1}{2}T. \quad (1.3.3)$$

Para que possamos assegurar a convergência das geodésicas tipo-tempo ou tipo-nulas na congruência sob efeito de matéria bem comportada, o que seria bem razoável, o termo $R_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu$ deve ser positivo, contribuindo negativamente para a taxa de expansão, o que nos leva à condição de energia forte, dada pela equação

$$T_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu \geq -\frac{1}{2}T. \quad (1.3.4)$$

A condição de energia forte (1.3.4) é fisicamente mais restritiva que a condição de energia fraca (1.3.1), e a primeira não inclui a segunda.

Existe ainda a condição de energia dominante, que assegura que a velocidade da luz é sempre maior do que o vetor local do fluxo de matéria [26]. Para que esta condição seja garantida, a pressão do meio não deve exceder à densidade de energia. Aqui o 4-vetor fluxo de energia de matéria, para um observador com uma 4-velocidade ξ^μ , é definido fisicamente por $-T_\nu^\mu\xi^\nu$, que tem a direção futura do vetor tipo-tempo ξ^μ , assim como é visto pelo observador, ou seja, este vetor é um vetor tipo-tempo ou tipo-nulo.

As três condições apresentadas anteriormente equivalem às condições

$$\rho \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho + p_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.3.5)$$

para a condição de energia fraca,

$$\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho + p_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.3.6)$$

para a condição de energia forte, e

$$\rho \geq 0, \quad \rho + p_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \rho - p_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.3.7)$$

para a condição de energia dominante. Note que a condição $\rho + p_i \geq 0$ aparece em todas as condições de energia e é conhecida, particularmente, como condição de energia nula.

Estas condições devem ser satisfeitas por um tensor momento-energia, que sempre pode ser determinado por

$$T_{\mu\nu} = \rho t_\mu t_\nu + p_1 x_\mu x_\nu + p_2 y_\mu y_\nu + p_3 z_\mu z_\nu, \quad (1.3.8)$$

onde $\{t^\mu, x^\mu, y^\mu, z^\mu\}$ é uma base ortonormal, com t^μ sendo um vetor unitário tipo-tempo, ρ a densidade de energia e p_1, p_2 e p_3 as pressões nas direções principais.

Até o final do século passado considerávamos fluidos fisicamente aceitáveis, apenas aqueles que satisfaziam as condições de energia. No entanto, desde a descoberta de que o universo está expandindo de forma acelerada, foi necessária a introdução de um novo componente em sua distribuição de matéria, a chamada energia escura, para garantir tal expansão, no contexto da relatividade geral. Este componente tem uma grande pressão negativa e representa aproximadamente 2/3 do nosso universo, segundo dados observacionais, que também revelam que o universo é plano e constituído de 1/3 de matéria escura. As naturezas da energia escura e da matéria escura são ainda desconhecidas, e muitos modelos diferentes têm sido propostos, tais como, uma pequena constante cosmológica positiva, a quintaessência [27, 28], as branas DGP [29, 30], os modelos F(R) não-lineares [31, 32], a energia escura no universo de branas, entre outros [33, 34, 35, 36]; ver também outros artigos de revisão [37, 38], e suas referências.

Na próxima seção apresentamos a energia escura e a energia fantasma como conseqüências da violação das condições de energia em um universo acelerado.

1.4 Definições de Energia Escura e Fluido Fantômico

A equação de estado $p = \omega\rho$ é assumida para o caso particular de modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos de Friedmann, onde as pressões radial p_r e tangencial p_θ são iguais a p , que é a pressão isotrópica. O intervalo para ω , em que dados observacionais de supernovas estão em acordo com um universo expandindo aceleradamente, deve ser dado por

$$\omega < -\frac{1}{3}. \quad (1.4.1)$$

Entretanto, a condição de energia forte (1.3.6), que se reduz a

$$\rho + 3p \geq 0, \quad (1.4.2)$$

é violada, para este intervalo. Este comportamento sugere a existência de um estranho tipo de energia, já mencionada anteriormente como energia escura, permeando todo o espaço-tempo, e contribuindo para a aceleração do universo de Friedmann.

Energia escura é uma denominação dada a fluidos, que violam a condição de energia forte (1.4.2), como foi colocado acima, já a energia fantasma é uma definição dada a fluidos que, além de violarem esta condição, também violam a condição de energia nula, mantendo apenas a condição em que a densidade de energia é positiva, ou seja, $\rho \geq 0$.

No entanto, quando tratamos de fluidos anisotrópicos, um cuidado maior deve ser tomado, pois as condições de energia devem considerar cada um dos componentes de pressão.

Neste caso, a condição de energia nula se transforma em n inequações, dependendo da dimensionalidade do espaço. Aqui, onde trabalhamos com espaços bi-dimensionais, temos duas inequações e cada uma delas pode impor limites diferentes para a classificação de um fluido como sendo fantasma. Também a condição de energia forte pode resultar em limites totalmente distintos de $\omega = -\frac{1}{3}$, já que a soma dos componentes da pressão, que podem ter até sinais diferentes, é que é relevante. Há inclusive a liberdade de construção de modelos com equação de estado $p_r = \omega\rho$ ou $p_\theta = \omega\rho$, com o outro componente de pressão, p_θ ou p_r , respectivamente, sendo determinado pelas equações de campo. É curioso que nestas situações seja possível encontrarmos fluidos que violam uma das condições de energia nula, sem violar a condição de energia forte. Situações como essa foram chamadas de energia fantasma atrativa [39].

1.5 Condições de Junção em Relatividade Geral

Por razões que serão discutidas no capítulo 2, não existe propagação de campo gravitacional fora da distribuição de matéria, em espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais. Isto implica na inexistência de buracos negros tipo Schwarzschild, gerado pelo campo gravitacional de uma distribuição esférica de massa, uma vez que este campo não é capaz de influenciar uma partícula na região de vácuo externa.

No início da década de 90, Bañados, Teitelboim e Zanelli [40], encontraram, ao introduzirem uma constante cosmológica nas equações de campo de Einstein, uma solução de buraco negro $(2 + 1)$ -dimensional, que passou a ser chamada de solução BTZ. Esta solução aproxima-se assintoticamente da solução anti-de Sitter, ao invés de aproximar-se da solução de Minkowski. Ida [41] provou, posteriormente, que buracos negros em espaços-tempos 3-dimensionais são formados somente nos casos em que se admite uma constante cosmológica negativa, em acordo com a solução de BTZ. Isto se deve à condição de energia dominante, que restringe a formação de horizontes aparentes.

Para que seja possível o estudo de uma solução em um espaço-tempo (2+1)-dimensional, fazemos um corte neste e, simultaneamente, uma junção entre sua solução com a solução de BTZ. Existem dois tipos de hipersuperfícies de junção, as hipersuperfícies de contorno ou ondas de choque e as hipersuperfícies tipo camada.

Para as hipersuperfícies de contorno, as condições de junção mais utilizadas na relatividade geral são as condições de Darmois, as de O'Brien e Synge e as de Lichnerowicz.

As condições de Darmois, que datam de 1927 impõem a continuidade das primeira e segunda formas fundamentais, ou seja, do elemento de linha ds^2 e da curvatura extrínseca K_{ij} , sobre a hipersuperfície de junção de descontinuidade, que separa o espaço-tempo em duas regiões, não sendo necessário utilizar o mesmo sistema de coordenadas em ambos os lados da hipersuperfície de junção.

Em 1952 foram apresentadas as condições de O'Brien e Synge, que impõem a continuidade do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e de sua derivada $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}$, com respeito a x^0 , sobre qualquer hipersuperfície de junção Σ , não nula, dada por $x^0 = \text{constante}$, com x^0 sendo qualquer um dos x^μ e com tensores métricos $g_{\mu\nu}^-$ e $g_{\mu\nu}^+$, um para cada região interior e exterior a Σ . Estas condições são dadas por

$$[g_{\mu\nu}]^- = [g_{\mu\nu}]^+; [g_{ij,0}]^- = [g_{ij,0}]^+. \quad (1.5.1)$$

As condições de O'Brien e Synge também impõem a continuidade do tensor momento-energia, ou seja

$$[T_\mu^0]^- = [T_\mu^0]^+ \quad (1.5.2)$$

e

$$[g_{i\mu}T_\nu^i - g_{i\nu}T_\mu^i]^- = [g_{i\mu}T_\nu^i - g_{i\nu}T_\mu^i]^+, \quad (1.5.3)$$

sendo que aqui os colchetes $[]$ indicam que as quantidades contidas por eles são calculadas sobre o contorno $x^0 = \text{constante}$. As duas condições que envolvem o tensor momento-energia são satisfeitas, se as duas condições relacionadas ao tensor métrico o forem [42].

Para as condições de Lichnerowicz deve existir um sistema de coordenadas, que cubra toda a hipersuperfície Σ , para o qual os componentes do tensor métrico e suas derivadas primeiras sejam contínuas através de Σ . Estas condições são de 1955.

A exigência de um determinado sistema de coordenadas para as condições de Lichnerowicz, coloca as condições de Darmois em posição de vantagem, já que estas independem do sistema de coordenadas usado.

Sobre as condições de junção de Darmois, O'Brien e Synge e Lichnerowicz, um trabalho de Bonnor e Vickers [42], conclui que as primeiras e as terceiras se equivalem. As condições de O'Brien e Synge são mais restritivas do que as outras duas, isto porque estas condições satisfazem Darmois e Lichnerowicz, mas o inverso não ocorre necessariamente. Possibilidades fisicamente interessantes são excluídas pelas condições de O'Brien e Synge.

A junção, fazendo uso de hipersuperfície tipo camada [43], permite um ajuste entre espaços-tempos com diferentes curvaturas extrínsecas na hipersuperfície de junção, como isso pode se encontrar fontes físicas para espaços-tempos exteriores a esta. Para que este ajuste seja possível, introduzimos uma hipersuperfície de espessura infinitesimal, definindo seu tensor momento-energia a partir da diferença entre as curvaturas extrínsecas dos espaços-tempos a serem ajustados. Neste trabalho aplicamos as condições de junção, utilizando hipersuperfícies de contorno e do tipo camada, conforme apresentaremos na seção 4.2 do capítulo 4.

1.6 Organização Geral do Trabalho

Este trabalho tem como objetivo, estudar as equações de campo de Einstein para um fluido anisotrópico, circularmente simétrico, com auto-similaridade cinemática de primeiro e segundo tipos, em um espaço-tempo $(2 + 1)$ -dimensional, utilizando as equações de estado particulares $p_r \neq p_\theta$, $p_r \equiv 0$ e $p_\theta = \omega\rho^\gamma$, onde ρ é a densidade de energia, p_r e p_θ são as pressões nas direções radial e tangencial, ω e γ são constantes.

No próximo capítulo apresentamos a teoria de Einstein em espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais e as motivações para sua utilização. Resolvemos as equações de Einstein para fluidos com auto-similaridade de segundo tipo e encontramos duas famílias de soluções possíveis. Investigando as propriedades locais e globais de uma delas, no capítulo 3, encontramos soluções que podem representar a formação de buracos negros a partir do colapso gravitacional de um fluido. Porém todos os três casos obtidos desenvolvem um segmento de singularidade tipo-tempo, que é localmente nua. A segunda família de soluções, que representa uma solução cosmológica, é apresentada no capítulo 5. Para as soluções com auto-similaridade do primeiro tipo, estudadas no capítulo 4, mostramos que o fluido colapsa, formando um buraco negro normal ou fantasma, caso em que todas as condições de energia são violadas e a densidade de energia ρ preserva sua positividade ao final do processo, dependendo da escolha do parâmetro de proporcionalidade entre ρ e p_θ .

Como já antecipado, no capítulo 5 estudamos a segunda família de soluções das equações

de campo de Einstein com auto-similaridade cinemática de segundo tipo. Temos, neste caso, um modelo cosmológico, com expansão acelerada, que começa em uma singularidade inicial ($t = 0$), com todas as condições de energia satisfeitas. Nosso propósito foi investigar o papel da não-homogeneidade na aceleração do fluido.

O capítulo 6 é reservado para uma revisão de nossos resultados e apontamentos de possíveis estudos futuros relacionados a este trabalho.

Capítulo 2

Relatividade Geral em Espaços-Tempos $(2 + 1)$ -Dimensionais

Neste capítulo abordamos a relatividade geral em um contexto de espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais, revelando suas propriedades ímpares e o que motivou o nosso estudo em espaços-tempos de menores dimensões. Na seção 2.2 definimos o conceito de hipersuperfícies aprisionadas e horizontes em espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais através do comportamento da expansão de uma congruência de geodésicas nulas.

2.1 Relatividade Geral em Espaços-Tempos $(2 + 1)$ -Dimensionais

Algumas teorias físicas são estudadas em espaços-tempos de diferentes dimensionalidades, além do espaço-tempo 4-dimensional, no qual nossos sentidos nos permitem perceber que vivemos. O uso de outras dimensionalidades muitas vezes se deve à possibilidade de encontrar soluções aproximadas, de equações que não têm soluções no espaço-tempo 4-dimensional [44].

Na teoria quântica de campos, por exemplo, a regularização dimensional, torna possível a renormalização de uma teoria. A lagrangiana, na eletrodinâmica quântica, apresenta um termo de ordem zero, que corresponde à massa da partícula livre, além de termos de ordem superiores, que divergem no espaço-tempo 4-dimensional. Os termos que divergem podem ser controlados por um parâmetro, que é introduzido quando lançamos mão da regularização dimensional, o que nos permite renormalizar a teoria. Ao procedermos à renormalização, todos os parâmetros definidos dependem da dimensão do espaço-tempo de forma que, quando n tende a quatro, os infinitos são cancelados, permanecendo somente a parte finita, correspondendo à massa da partícula.

A quantização da gravitação representa um dos maiores problemas em teoria quântica de campos atualmente. Fazendo uso de formalismos covariantes, nos quais espaço e tempo são considerados no mesmo patamar, chegamos a uma teoria quântica do campo gravitacional, interagindo com outros campos que é não renormalizável. É por esta razão que o estudo do comportamento clássico da gravitação tem sua importância em espaços-tempos de dimensões menores que 4, o que poderia viabilizar a quantização do campo gravitacional. Schwinger trabalhou com soluções exatas em espaços-tempos com dimensões menores que quatro, este é um dos exemplos de modelos nestes espaços-tempos em eletrodinâmica quântica [45].

Outra motivação para o estudo de fenômenos relativísticos em espaços-tempos de baixa dimensionalidade é a maior simplicidade das equações de campo e também maior possibilidade, em função disto, de estudos analíticos. No entanto, a relatividade geral apresenta sérias dificuldades teóricas, quando consideramos espaços-tempos de dimensões menores que quatro, ao contrário do que se pensava no passado, quando a teoria da gravitação em baixas dimensões era considerada trivial.

O número de componentes independentes dos tensores de Riemann, Ricci e Einstein para espaços-tempos n -dimensionais é dado por

$$R_{\alpha\beta\delta\gamma} \rightarrow \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1), \quad (2.1.1)$$

$$R_{\alpha\beta} \rightarrow \frac{1}{2}n(n + 1), \quad n > 2, \quad (2.1.2)$$

$$G_{\alpha\beta} \rightarrow \frac{1}{2}n(n + 1), \quad n > 2, \quad (2.1.3)$$

$$R \rightarrow 1, \quad n > 1. \quad (2.1.4)$$

O tensor de Ricci pode ser expresso em termos do tensor de Einstein, para $n > 2$, logo, ambos possuem o mesmo número de componentes, ou seja

$$G = \frac{1}{2}(2 - n)R, \quad (2.1.5)$$

$$R = \frac{2}{2 - n}G, \quad (2.1.6)$$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}, \quad (2.1.7)$$

$$R_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{1}{n-2}Gg_{\alpha\beta}. \quad (2.1.8)$$

O tensor de Ricci não pode ser escrito em termos do tensor de Einstein, quando $n = 2$, e o tensor de Riemann possui apenas um componente, o que significa que os tensores de Riemann e de Ricci podem ser escritos em função do escalar de curvatura, ou seja

$$R_{\alpha\beta\delta\gamma} = \frac{1}{2}R(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}) \quad \text{e} \quad R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R, \quad (2.1.9)$$

o que nos leva a $G_{\alpha\beta} \equiv 0$, para qualquer conteúdo de matéria, não possibilitando a construção das equações de Einstein para estes espaços-tempos. Já para $n = 3$, os tensores de Einstein e de Ricci têm o mesmo número de componentes que o tensor de Riemann, ou seja, seis, o que nos permite expressar o tensor de Riemann em termos destes dois tensores, como mostrado a seguir

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma}G_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}G_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}G_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}G_{\alpha\delta} + G(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}). \quad (2.1.10)$$

Esta é a menor dimensão do espaço-tempo, para a qual a teoria possui sentido físico, e apresenta características particulares. Levando as equações de Einstein na equação (2.1.10), temos que

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K[(g_{\alpha\gamma}T_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}T_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}T_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}T_{\alpha\delta}) + T(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta})]. \quad (2.1.11)$$

Através da equação (2.1.11) podemos ver que a curvatura do espaço-tempo é totalmente determinada pela distribuição de matéria $T_{\alpha\beta}$. Então, na região externa à distribuição, o tensor momento-energia é nulo e o espaço-tempo é localmente plano, ou seja, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$. A planicidade no meio externo ao campo de matéria não permite que buracos negros sejam formados, ou seja, toda a emissão de luz estelar escapa até o infinito. Esta configuração do espaço-tempo também tem como consequência o fato de não podermos tomar o limite

newtoniano para campos fracos. Isto porque, na região externa à distribuição, a partícula teste não sofre a ação da força gravitacional do campo. A teoria da relatividade geral em espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais não apresenta um limite newtoniano, tendo em vista que a teoria de Newton prevê um potencial logarítmico para a gravidade, na parte externa à distribuição de matéria, o que não acontece em espaços-tempos 3-dimensionais.

No início da década de noventa, Banãdos, Teitelboim e Zanelli [40], apresentaram uma solução de buraco negro para espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais, introduzindo uma constante cosmológica nas equações de campo de Einstein, como foi mencionado anteriormente na seção 1.5 do capítulo 1. Para espaços-tempos 3-dimensionais só há formação de horizonte, e portanto de buracos negros, quando é admitida uma constante cosmológica negativa, restrição esta que se deve à condição de energia dominante o que foi mostrado recentemente por Ida [41]. Desta forma, para espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais, só existe formação de buracos negros se admitirmos uma constante cosmológica negativa ou caso tenhamos o espaço-tempo totalmente preenchido por campos de matéria.

2.2 Superfícies Aprisionadas e Horizontes em Espaços-Tempos $(2+1)$ -Dimensionais

Uma congruência de geodésicas nulas, ou raios de luz, quando emitidos de uma dada superfície, podem convergir, manter-se paralelos uns aos outros, ou divergir. Este comportamento define se a superfície é ou não aprisionada. No caso de a superfície ser aprisionada a congruência de geodésicas nulas, emitidas desta superfície e radialmente para fora, é convergente ou no máximo paralela a si mesma.

O horizonte aparente é a superfície aprisionada mais externa à singularidade. Se uma singularidade é coberta pelo horizonte aparente, temos um buraco negro, caso contrário temos uma singularidade nua, com raios de luz saindo da singularidade e sendo emitidos para fora radialmente até o infinito.

Uma definição mais formal de horizontes aparentes e buracos negros em espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais é dada a seguir. A partir da métrica (3.1.3), introduzimos as coordenadas nulas w e v , fazendo uso das transformações

$$dw = f(r, t)(e^\phi dt - e^\psi dr) \quad , \quad dv = g(r, t)(e^\phi dt + e^\psi dr). \quad (2.2.1)$$

Aqui fazemos as funções $f(r, t)$ e $g(r, t)$ positivas, sem perda de generalidade, e respeitando as condições de integrabilidade para w e v ($\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial r} = \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial r} = \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial t}$). Podemos então reescrever a métrica, utilizando as novas coordenadas nulas como

$$ds^2 = l^2 \{2e^{2\sigma(w,v)} dw dv - R^2(w,v) d\theta^2\}, \quad (2.2.2)$$

onde

$$\sigma(w,v) = -\frac{1}{2} \ln(2fg) \quad , \quad R(w,v) = rS, \quad (2.2.3)$$

onde l é uma constante unitária com a dimensão de comprimento e a nova métrica é invariante sob a transformação de Gauge $w = w(\bar{w})$ e $v = v(\bar{v})$. Esta invariância garante a eliminação de qualquer singularidade coordenada na métrica, permitindo impor que σ seja finito por toda a superfície e em todo ponto que não caracterize uma singularidade física.

Os vetores nulos w e v podem ser definidos como sendo $v^\mu \equiv \delta_\nu^\mu$ e $\omega^\mu \equiv \delta_u^\mu$, nas direções v e w respectivamente, conforme [46]. As 1-formas são definidas por $l_\lambda \equiv \frac{\partial \omega}{\partial x^\lambda} = \delta_\lambda^\omega$ e $\eta_\lambda \equiv \frac{\partial v}{\partial x^\lambda} = \delta_\lambda^v$, normais às direções v e ω respectivamente. Sendo assim as definições acima nos fornecem

$$l^\mu \equiv g^{\mu\nu} l_\nu = \frac{e^{-2\sigma}}{l^2} v^\mu \quad , \quad \eta^\mu \equiv g^{\mu\nu} \eta_\nu = \frac{e^{-2\sigma}}{l^2} \omega^\mu. \quad (2.2.4)$$

Para as coordenadas nulas constantes w e v , a métrica é dada por

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - l^2 e^{2\sigma} (l_\mu \eta_\nu + l_\nu \eta_\mu) = -l^2 R^2 \delta_\mu^\theta \delta_\nu^\theta, \quad (2.2.5)$$

e as expansões de raios nulos na direção de l^λ e η^λ são dadas por

$$\theta_l = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{L}_v h_{\mu\nu} = \frac{R_{,v}}{R}, \quad (2.2.6)$$

$$\theta_n = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{L}_w h_{\mu\nu} = \frac{R_{,w}}{R}, \quad (2.2.7)$$

onde $\mathcal{L}_v(\mathcal{L}_w)$ indica a derivada de Lie na direção $v^\mu(w^\mu)$. Aqui θ_l representa a expansão de uma congruência de raios nulos emitidos radialmente para fora da singularidade e θ_n , a expansão da congruência emitida radialmente para dentro, em direção à singularidade. A expansão de uma congruência de geodésicas nulas é negativa caso seja convergente, é nula

caso esteja disposta de forma paralela a si mesma e é positiva quando é divergente. Das equações (2.2.6) e (2.2.7) temos que

$$\mathcal{L}_w \theta_l = \mathcal{L}_v \theta_n = \frac{R_{,wv}}{R} - \theta_l \theta_n. \quad (2.2.8)$$

De posse das definições anteriores, podemos agora definir, de forma mais rigorosa, os conceitos de superfície aprisionada, horizonte aparente e buraco negro. Tais conceitos são dados por:

(i) para $\theta_l \theta_n > 0$, $\theta_l \theta_n = 0$ e $\theta_l \theta_n < 0$, temos que um anel C de coordenadas v e w constantes, é definido como sendo aprisionado, marginalmente aprisionado e não aprisionado, respectivamente.

(ii) considerando uma linha na qual $\theta_l|_C = 0$, como sendo um anel marginalmente aprisionado, podemos definir o horizonte aparente como uma 2-superfície H foliada por anéis marginalmente aprisionados, nos quais $\theta_n|_H \neq 0$.

(iii) para $\mathcal{L}_w \theta_l|_H < 0$, $\mathcal{L}_w \theta_l|_H = 0$, ou $\mathcal{L}_w \theta_l|_H > 0$, o horizonte aparente é definido como sendo mais externo, degenerado e mais interno respectivamente. Em espaços-tempos (2 + 1)-dimensionais, foi provado [46] que na ausência de constante cosmológica, o horizonte aparente só pode ser degenerado, se a condição de energia dominante é satisfeita.

(iv) se $\theta_n|_H < 0$ e $\theta_n|_H > 0$, um horizonte aparente é definido como futuro e passado respectivamente.

A formação de uma singularidade no espaço-tempo acompanhada de um horizonte aparente mais externo, define o conceito de buraco negro, que está de acordo com a idéia de que $\theta_n|_H < 0$ e $\theta_l|_H = 0$, com $\theta_n|_H < 0$ e $\theta_l|_H < 0$ no espaço-tempo interno ao horizonte e $\theta_n|_H < 0$ e $\theta_l|_H > 0$ no espaço-tempo externo a ele.

Das equações (2.2.1) temos que

$$\frac{\partial t}{\partial \omega} = \frac{1}{2f} e^{-\phi}, \quad \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{2g} e^{-\phi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial \omega} = -\frac{1}{2f} e^{-\psi}, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{1}{2g} e^{-\psi}. \quad (2.2.9)$$

Voltando com as equações (2.2.9) em (2.2.6) e (2.2.7), podemos reescrever

$$\theta_l = \frac{R_{,v}}{R} = \frac{1}{2gR} (e^{-\phi} R_{,t} + e^{-\psi} R_{,r}) = \frac{\Theta_l}{2gR}, \quad (2.2.10)$$

$$\theta_n = \frac{R_{,\omega}}{R} = \frac{1}{2fR} (e^{-\phi} R_{,t} - e^{-\psi} R_{,r}) = \frac{\Theta_n}{2fR}, \quad (2.2.11)$$

onde $\Theta_l = e^{-\phi} R_{,t} + e^{-\psi} R_{,r}$ e $\Theta_n = e^{-\phi} R_{,t} - e^{-\psi} R_{,r}$.

Utilizamos as definições apresentadas nesta seção para analisar as estruturas globais das soluções obtidas neste trabalho. Aqui, tomando as funções $f(r, t)$ e $g(r, t)$ e o raio geométrico R como positivos por definição, só consideramos as expressões para Θ_l e Θ_n , para fins de análise no trabalho.

Capítulo 3

Formação de Buracos Negros e Singularidades Nusas a Partir do Colapso Gravitacional de Poeira Auto-Similar de Segundo Tipo

Neste capítulo encontramos e analisamos as soluções gerais para um fluido, com auto-similaridade de segundo tipo, com a equação de estado $p_r = 0$. Mostramos, através das propriedades locais e globais, que há formação de buracos negros, bem como de singularidades localmente nusas. Os resultados aqui apresentados foram publicados no periódico *International Journal of Modern Physics D (IJMPD)* [47].

3.1 Introdução

Todos os espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais com simetria circular são descritos pela métrica

$$ds^2 = \gamma_{ab}(t, r) dx^a dx^b + g_{\theta\theta}(t, r) d\theta^2, \quad (3.1.1)$$

onde $\{x^a\} = \{t, r\}$, $(a, b = 0, 1)$, e θ denota a coordenada angular, com as hipersuperfícies $\theta = 0, 2\pi$ sendo identificadas. Claramente, a métrica é invariante sob as seguintes transformações de coordenadas,

$$t = t(t', r') \quad , \quad r = r(t', r'). \quad (3.1.2)$$

Um dos dois graus de liberdade do gauge nos permite escolher $g_{01} = 0$, o que leva a métrica a assumir a forma,

$$ds^2 = e^{2\phi(t,r)} dt^2 - e^{2\psi(t,r)} dr^2 - r^2 S^2(t,r) d\theta^2. \quad (3.1.3)$$

Usamos o outro grau de liberdade na escolha de coordenadas comóveis com o fluido. Deve ser notado que as escolhas acima não fixam o gauge completamente. De fato, a métrica (3.1.3) é ainda invariante sob as transformações,

$$t = f(t'), \quad r = g(r'), \quad (3.1.4)$$

onde $f(t')$ e $g(r')$ são funções arbitrárias de seus argumentos indicados.

Para termos simetria circular, as seguintes condições são usualmente impostas [48]:

(i) Deve existir um eixo de simetria, que pode ser expressado como

$$X \equiv \left| \xi_{(\theta)}^\mu \xi_{(\theta)}^\nu g_{\mu\nu} \right| = |g_{\theta\theta}| \rightarrow 0, \quad (3.1.5)$$

com $r \rightarrow 0^+$, onde escolhemos a coordenada radial tal que o eixo está localizado em $r = 0$, e $\xi_{(\theta)}^\mu$ é o vetor de Killing com uma órbita fechada, dada por $\xi_{(\theta)}^\alpha \partial_\alpha = \partial_\theta$.

(ii) O espaço-tempo próximo ao eixo de simetria é localmente plano, e pode ser escrito como [49]

$$\frac{X_{,\alpha} X_{,\beta} g^{\alpha\beta}}{4X} \rightarrow -1, \quad (3.1.6)$$

com $r \rightarrow 0^+$, onde $(\)_{,\alpha} \equiv \partial(\)/\partial x^\alpha$.

(iii) Curvas tipo-tempo devem ser abertas. Para esta condição, assumimos que

$$g_{\theta\theta} = \xi_{(\theta)}^\mu \xi_{(\theta)}^\nu g_{\mu\nu} < 0, \quad (3.1.7)$$

tomando todo o espaço-tempo.

Para a métrica (3.1.3) os componentes não nulos do tensor de Einstein, que descrevem a parte geométrica do espaço-tempo aqui considerado, são dados por

$$G_{tt} = \frac{e^{-2\psi}}{rS} \left\{ e^{2\phi} \psi_{,r} r S_{,r} + e^{2\phi} \psi_{,r} S - e^{2\phi} r S_{,rr} - 2e^{2\phi} S_{,r} + e^{2\psi} \psi_{,t} r S_{,t} \right\},$$

$$G_{tr} = \frac{1}{rS} \left\{ \phi_{,r} r S_{,t} + \psi_{,t} r S_{,r} + \psi_{,t} S - r S_{,tr} - S_{,t} \right\},$$

$$G_{rr} = \frac{e^{-2\phi}}{rS} \left\{ e^{2\phi} \phi_{,r} r S_{,r} + e^{2\phi} \phi_{,r} S + e^{2\psi} \phi_{,t} r S_{,t} - e^{2\psi} r S_{,tt} \right\},$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 S^2 \left\{ e^{-2\psi} \phi_{,r}^2 - e^{-2\psi} \phi_{,r} \psi_{,r} + e^{-2\psi} \phi_{,rr} + e^{-2\phi} \phi_{,t} \psi_{,t} + e^{-2\phi} \psi_{,t}^2 - e^{-2\phi} \psi_{,tt} \right\}. \quad (3.1.8)$$

Para estudar soluções com auto-similaridade do segundo tipo, devemos primeiro introduzir duas novas variáveis adimensionais, χ e τ , através das relações

$$\chi = \ln(z) = \ln \left[\frac{r}{(-t)^{\frac{1}{\alpha}}} \right],$$

$$\tau = -\ln(-t),$$

ou inversamente

$$t = -e^{-\tau},$$

$$r = e^{\chi - \frac{\tau}{\alpha}}, \quad (3.1.9)$$

onde α é uma constante adimensional. Então, para qualquer função $f(t, r)$ encontramos $f(t, r) = f(\chi, \tau)$ e

$$f_{,r} = \frac{1}{r} f_{,\chi},$$

$$f_{,t} = -\frac{1}{\alpha t} (\alpha f_{,\tau} + f_{,\chi}),$$

$$f_{,rr} = \frac{1}{r^2} (f_{,\chi\chi} - f_{,\chi}),$$

$$f_{,tt} = \frac{1}{\alpha^2 t^2} (\alpha^2 f_{,\tau\tau} + 2\alpha f_{,\tau\chi} + f_{,\chi\chi} + \alpha^2 f_{,\tau} + \alpha f_{,\chi}),$$

$$f_{,tr} = -\frac{1}{\alpha tr} (\alpha f_{,\chi\tau} + f_{,\chi\chi}). \quad (3.1.10)$$

Substituindo as equações (3.1.10) na equações (3.1.8), encontramos que, em termos de χ e τ , $G_{\mu\nu}$ é dado por

$$G_{tt} = -\frac{1}{\alpha^2 r^2 S e^{2\psi}} \left\{ \alpha^2 e^{2\phi} [S_{,\chi\chi} + S_{,\chi} - \psi_{,\chi}(S_{,\chi} + S)] - \frac{r^2}{t^2} \psi_{,\chi} S_{,\chi} e^{2\psi} + \right. \\ \left. - \frac{\alpha r^2}{t^2} e^{2\psi} (\alpha \psi_{,\tau} S_{,\tau} + \psi_{,\chi} S_{,\tau} + \psi_{,\tau} S_{,\chi}) \right\},$$

$$G_{tr} = \frac{1}{\alpha tr S} \{ S_{,\chi\chi} - \psi_{,\chi}(S_{,\chi} + S) - S_{,\chi}(\phi_{,\chi} - 1) + a [S_{,\tau\chi} - \psi_{,\tau}(S_{,\chi} + S) + \\ - S_{,\tau}(\phi_{,\chi} - 1)] \},$$

$$G_{rr} = \frac{1}{\alpha^2 r^2 S e^{2\phi}} \left\{ \alpha^2 e^{2\phi} [\phi_{,\chi}(S_{,\chi} + S)] - \frac{r^2 e^{2\psi}}{t^2} (S_{,\chi\chi} - S_{,\chi} \phi_{,\chi}) + \right. \\ \left. - \frac{\alpha r^2 e^{2\psi}}{t^2} \{ 2S_{,\tau\chi} + \alpha S_{,\tau\tau} - S_{,\chi}(\phi_{,\tau} - 1) - S_{,\tau}[\alpha(\phi_{,\tau} - 1) + \phi_{,\chi}] \} \right\},$$

$$\begin{aligned}
G_{\theta\theta} = & \frac{S^2}{\alpha^2} \left\{ \alpha^2 e^{-2\psi} [\phi_{,xx} + \phi_{,x}(\phi_{,x} - \psi_{,x} - 1)] - \frac{r^2 e^{-2\phi}}{t^2} [\psi_{,xx} - \psi_{,x}(\phi_{,x} - \psi_{,x} - \alpha)] + \right. \\
& - \frac{\alpha r^2 e^{-2\phi}}{t^2} \{ \alpha \psi_{,\tau\tau} + 2\psi_{,\tau x} - \psi_{,\tau} [\alpha(\phi_{,\tau} - \psi_{,\tau} - 1) + \phi_{,x} - \psi_{,x}] \} + \\
& \left. + \frac{\alpha r^2 e^{-2\phi}}{t^2} \psi_{,x}(\phi_{,\tau} - \psi_{,\tau}) \right\}. \tag{3.1.11}
\end{aligned}$$

Para as soluções auto-similares, esperamos que as funções $\phi(\chi)$, $\psi(\chi)$ e $S(\chi)$, tenham dependência somente em χ e portanto devemos impor que

$$\phi(\chi, \tau) = \phi(\chi),$$

$$\psi(\chi, \tau) = \psi(\chi),$$

$$S(\chi, \tau) = S(\chi). \tag{3.1.12}$$

Sendo assim todas as derivadas destas funções em relação à variável τ devem ser nulas, e as equações (3.1.11) se reduzem a

$$G_{tt} = -\frac{1}{\alpha^2 r^2 S e^{2\psi}} \left\{ \alpha^2 e^{2\phi} [S_{,xx} + S_{,x} - \psi_{,x}(S_{,x} + S)] - \frac{r^2}{t^2} \psi_{,x} S_{,x} e^{2\psi} \right\},$$

$$G_{tr} = \frac{1}{\alpha t r S} \{ S_{,xx} - \psi_{,x}(S_{,x} + S) - S_{,x}(\phi_{,x} - 1) \},$$

$$G_{rr} = \frac{1}{\alpha^2 r^2 S e^{2\phi}} \left\{ \alpha^2 e^{2\phi} [\phi_{,x}(S_{,x} + S)] - \frac{r^2 e^{2\psi}}{t^2} (S_{,xx} - S_{,x} \phi_{,x}) - \frac{\alpha r^2}{t^2} e^{2\psi} S_{,x} \right\},$$

$$\begin{aligned}
G_{\theta\theta} = & \frac{S^2}{\alpha^2} \left\{ \alpha^2 e^{-2\psi} [\phi_{,xx} + \phi_{,x}(\phi_{,x} - \psi_{,x} - 1)] - \frac{r^2 e^{-2\phi}}{t^2} [\psi_{,xx} + \right. \\
& \left. - \psi_{,x}(\phi_{,x} - \psi_{,x} - \alpha)] \right\}. \tag{3.1.13}
\end{aligned}$$

Agora consideramos o tensor momento-energia de um fluido anisotrópico, dado por

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p_r r_\mu r_\nu + p_\theta \theta_\mu \theta_\nu, \quad (3.1.14)$$

onde ρ é a densidade de energia e p_r e p_θ são as pressões radial e tangencial, respectivamente, com u_μ , r_μ e θ_μ , sendo dados por

$$u_\mu = l e^{\phi(\chi)} \delta_\mu^t, \quad r_\mu = l e^{\psi(\chi)} \delta_\mu^r, \quad \theta_\mu = l r S(\chi) \delta_\mu^\theta, \quad (3.1.15)$$

onde o sistema de referência é comóvel e l é uma constante unitária com a dimensão de comprimento, tal que todas as coordenadas $\{x^\mu\} = \{t, r, \theta\}$ são adimensionais.

Substituindo as equações (3.1.13), (3.1.14) e (3.1.15) nas equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} = K T_{\mu\nu}, \quad (3.1.16)$$

encontramos

$$G_{tt} = K T_{tt},$$

$$\rho = -\frac{e^{-2(\phi+\psi)}}{l^2 K \alpha^2 r^2 S} \left\{ \alpha^2 e^{2\phi} [S_{,xx} + S_{,x} - \psi_{,x}(S_{,x} + S)] - \frac{r^2}{t^2} \psi_{,x} S_{,x} e^{2\psi} \right\}, \quad (3.1.17)$$

$$G_{tr} = K T_{tr},$$

$$\frac{1}{\alpha t r S} \{ S_{,xx} - \psi_{,x}(S_{,x} + S) - S_{,x}(\phi_{,x} - 1) \} = 0, \quad (3.1.18)$$

$$G_{rr} = K T_{rr},$$

$$p_r = \frac{e^{-2(\psi+\phi)}}{l^2 K \alpha^2 r^2 S} \left\{ \alpha^2 e^{2\phi} [\phi_{,x}(S_{,x} + S)] - \frac{r^2 e^{2\psi}}{t^2} (S_{,xx} - S_{,x} \phi_{,x} + \alpha S_{,x}) \right\}, \quad (3.1.19)$$

$$G_{\theta\theta} = K T_{\theta\theta},$$

$$p_\theta = \frac{1}{r^2 \alpha^2 l^2 K} \left\{ \alpha^2 e^{-2\psi} [\phi_{,xx} + \phi_{,x}(\phi_{,x} - \psi_{,x} - 1)] - \frac{r^2 e^{-2\phi}}{t^2} [\psi_{,xx} + \psi_{,x}(\phi_{,x} - \psi_{,x} - \alpha)] \right\}. \quad (3.1.20)$$

Fazendo agora

$$y(\chi) = \frac{S_{,\chi}}{S}, \quad (3.1.21)$$

temos

$$S_{,\chi} = S y, \quad S_{,\chi\chi} = S_{,\chi} y + S y_{,\chi}. \quad (3.1.22)$$

Substituindo a função $S(\chi)$ por $y(\chi)$ em (3.1.17)-(3.1.20), através das transformações (3.1.22), obtemos

$$\rho = -\frac{1}{l^2 K} \left\{ \frac{1}{r^2} e^{-2\psi} [y_{,\chi} + (y+1)(y - \psi_{,\chi})] - \frac{1}{\alpha^2 t^2} e^{-2\phi} \psi_{,\chi} y \right\}, \quad (3.1.23)$$

$$y_{,\chi} = y \phi_{,\chi} + (y+1)(\psi_{,\chi} - y), \quad (3.1.24)$$

$$p_r = \frac{1}{l^2 K} \left\{ \frac{1}{r^2} e^{-2\psi} \phi_{,\chi} (y+1) - \frac{1}{\alpha^2 t^2} e^{-2\phi} [y_{,\chi} + y(y - \phi_{,\chi} + \alpha)] \right\}, \quad (3.1.25)$$

$$p_\theta = \frac{1}{l^2 K} \left\{ \frac{e^{-2\psi}}{r^2} [\phi_{,\chi\chi} + \phi_{,\chi}(\phi_{,\chi} - \psi_{,\chi} - 1)] - \frac{e^{-2\phi}}{\alpha^2 t^2} [\psi_{,\chi\chi} + \psi_{,\chi}(\phi_{,\chi} - \psi_{,\chi} - \alpha)] \right\}. \quad (3.1.26)$$

Como pode ser visto, temos quatro equações e seis incógnitas, que são ϕ , ψ , S , ρ , p_r e p_θ . Logo, é necessária a consideração de algum tipo de equação de estado, que introduza duas novas equações. Com esse propósito, escolhemos a equação de estado $p_r = 0$. Deve ser observado que esta equação fornece duas equações adicionais, uma vez que as expressões para as pressões e a densidade de energia podem ser separadas em duas partes que dependem de r em potências diferentes.

3.2 Soluções das Equações de Campo de Einstein Considerando a Equação de Estado $p_r = 0$

Reescrevendo p_r na forma

$$p_r = \frac{p_r^I(\chi)}{r^2} + \frac{p_r^{II}(\chi)}{t^2}, \quad (3.2.1)$$

onde

$$p_r^I(\chi) = \frac{e^{-2\psi}}{l^2 K} \phi_{,\chi}(y+1), \quad (3.2.2)$$

$$p_r^{II}(\chi) = -\frac{e^{-2\phi}}{\alpha^2} [y_{,\chi} + y(y - \phi_{,\chi} + \alpha)], \quad (3.2.3)$$

e considerando a transformação de coordenadas

$$\chi = \ln \left[\frac{r}{(-t)^{\frac{1}{\alpha}}} \right] \longrightarrow t = -r^\alpha e^{-\alpha\chi}, \quad (3.2.4)$$

encontramos que os dois termos na equação (3.1.25) dependem explicitamente de r , mas com potências diferentes. Logo, a condição $p_r = 0$, implica em

$$p_r^I(\chi) = 0,$$

$$p_r^{II}(\chi) = 0, \quad (3.2.5)$$

ou seja,

$$e^{-2\psi} \phi_{,\chi}(y+1) = 0, \quad (3.2.6)$$

$$e^{-2\phi} [y_{,\chi} + y(y - \phi_{,\chi} + \alpha)] = 0. \quad (3.2.7)$$

As equações (3.1.24), (3.2.6) e (3.2.7) são suficientes para determinar $\phi(\chi)$, $\psi(\chi)$ e $S(\chi)$. Para a equação (3.2.6) existem duas possíveis soluções

$$(i) y + 1 = 0,$$

e

$$(ii) \phi_{,\chi} = 0.$$

Considerando a solução (i) temos

$$y = -1. \quad (3.2.8)$$

Levando (3.2.8) em (3.1.21), encontramos uma equação diferencial para a função $S(\chi)$

$$\frac{S_{,\chi}}{S} = -1, \quad (3.2.9)$$

cuja solução é dada por

$$S(\chi) = S_0 e^{-\chi}. \quad (3.2.10)$$

Substituindo (3.2.8) em (3.2.7), obtemos a seguinte equação diferencial para $\phi(\chi)$

$$\phi_{,\chi} = \alpha - 1, \quad (3.2.11)$$

que tem como solução

$$\phi(\chi) = (\alpha - 1)\chi + \phi_0. \quad (3.2.12)$$

Por outro lado, substituindo (3.2.8) em (3.1.24), obtemos

$$\phi_{,\chi} = 0, \quad (3.2.13)$$

implicando, através de (3.2.11), em $\alpha = 1$. Portanto, podemos concluir, que a solução (i) não corresponde a uma solução com o tipo de auto-similaridade considerado neste capítulo

($\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$). A solução correspondente (4.2.19) será tratada no próximo capítulo, que se refere à auto-similaridade do primeiro tipo.

Considerando agora a solução (ii), obtemos

$$\phi(\chi) = \phi_0. \quad (3.2.14)$$

Substituindo (3.2.14) em (3.2.7), obtemos uma equação diferencial não linear em $y(\chi)$, dada por

$$y_{,\chi} = -y(y + \alpha), \quad (3.2.15)$$

que tem como solução

$$y(\chi) = \frac{\alpha}{\beta e^{\alpha\chi} - 1}, \quad (3.2.16)$$

onde β é outra constante de integração. Para $\beta \neq 0$ ¹ a substituição de (3.2.16) em (3.1.21), nos leva à seguinte equação diferencial para $S(\chi)$

$$\frac{S_{,\chi}}{S} = \frac{\alpha}{\beta e^{\alpha\chi} - 1}, \quad (3.2.17)$$

que fornece

$$S(\chi) = S_0 \left(\frac{\beta e^{\alpha\chi} - 1}{\beta e^{\alpha\chi}} \right). \quad (3.2.18)$$

Por outro lado, substituindo (3.2.14) e (3.2.15) em (3.1.24), obtemos,

$$-y(\alpha + y) = (1 + y)(\psi_{,\chi} - y), \quad (3.2.19)$$

e portanto,

$$\psi_{,\chi} = \frac{-y(\alpha + y)}{1 + y} + y. \quad (3.2.20)$$

¹Para $\beta = 0$, temos uma solução cosmológica, que é estudada no capítulo 5.

Deste modo, $\psi(\chi)$ pode ser obtido a partir de (3.2.20), se consideramos (3.2.16), o que conduz à solução

$$\psi(\chi) = \psi_0 + \ln |(\alpha - 1)e^{-\alpha\chi} + \beta|. \quad (3.2.21)$$

Utilizando as transformações (3.1.9), podemos reescrever as soluções obtidas em função das coordenadas r e t .

$$\begin{aligned} \phi(t, r) &= \phi_0, \\ \psi(t, r) &= \ln \left| \beta + (1 - \alpha) \frac{t}{r^\alpha} \right| + \psi_0, \\ S(t, r) &= S_0 \left(\beta + \frac{t}{r^\alpha} \right), \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

onde ϕ_0 , ψ_0 , S_0 e β são constantes de integração.

Utilizando a invariância de gauge da equação (3.1.4), fazendo por exemplo, $t = e^{-\phi_0} t'$ e $r = e^{(\phi_0 - \psi_0)/(1-\alpha)} r'$, podemos, sem perda de generalidade, ter sempre

$$\psi_0 = 0 = \phi_0. \quad (3.2.23)$$

Logo, as condições (3.1.5) e (3.1.6) implicam em

$$S_0 = 1, \quad \alpha < 1. \quad (3.2.24)$$

Então, a métrica é finalmente dada por,

$$ds^2 = dt^2 - \left[\beta + (1 - \alpha) \frac{t}{r^\alpha} \right]^2 dr^2 - r^2 \left(\beta + \frac{t}{r^\alpha} \right)^2 d\theta^2. \quad (3.2.25)$$

A densidade de energia e a pressão tangencial, correspondentes a esta solução, são dadas por

$$\rho(r, t) = \frac{(1 - \alpha)}{K |(1 - \alpha)t + \beta r^\alpha| |t + \beta r^\alpha|}, \quad (3.2.26)$$

e

$$p_\theta(r, t) = 0. \quad (3.2.27)$$

A partir destas equações observamos que as condições para que a pressão radial seja nula e para que as soluções tenham auto-similaridade do segundo tipo, automaticamente implicam em que a pressão tangencial seja nula, caracterizando um fluido de poeira. Das expressões acima podemos ver que o espaço-tempo é singular em $t = t_1(r)$ e $t = t_2(r)$, onde

$$t_1(r) = -\beta r^\alpha, \quad (3.2.28)$$

$$t_2(r) = -\frac{\beta}{1-\alpha} r^\alpha. \quad (3.2.29)$$

O mesmo pode ser verificado a partir do escalar de Kretschmann.

A comparação de $t_1(r)$ com $t_2(r)$ leva a

$$t_1(r) - t_2(r) = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha} r^\alpha = \begin{cases} > 0, & \alpha\beta > 0, \\ < 0, & \alpha\beta < 0, \end{cases} \quad (3.2.30)$$

de onde concluímos que $t_1(r) > t_2(r)$, para $\alpha\beta > 0$ e $t_1(r) < t_2(r)$, para $\alpha\beta < 0$.

Por outro lado, da equação (3.1.5) encontramos que

$$X = r^2 \left(\beta + \frac{t}{r^\alpha} \right)^2. \quad (3.2.31)$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \theta_l \theta_n = X_{,\alpha} X_{,\beta} g^{\alpha\beta} &= 4r^2 \left(\beta + \frac{t}{r^\alpha} \right)^2 (r^{2(1-\alpha)} - 1) \\ &= \begin{cases} < 0, & 0 \leq r < 1, \\ = 0, & r = 1, \\ > 0, & r > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

Portanto, o espaço-tempo na região em que $r > 1$ é sempre aprisionado, e na região em que $r < 1$ não é aprisionado [48]. Existe um horizonte aparente na hipersuperfície $r = 1$, que é sempre tipo-tempo. Para estudar mais profundamente a solução, podemos considerar os casos $\beta > 0$ e $\beta < 0$ separadamente.

Caso A: $\beta > 0$

Neste caso, da equação (3.2.30), encontramos

$$t_1(r) - t_2(r) = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha} r^\alpha = \begin{cases} > 0, & 0 \leq \alpha < 1, \\ < 0, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (3.2.33)$$

como mostra a figura 3.1. É conveniente distinguir mais dois sub-casos $0 < \alpha < 1$ e $\alpha < 0$.

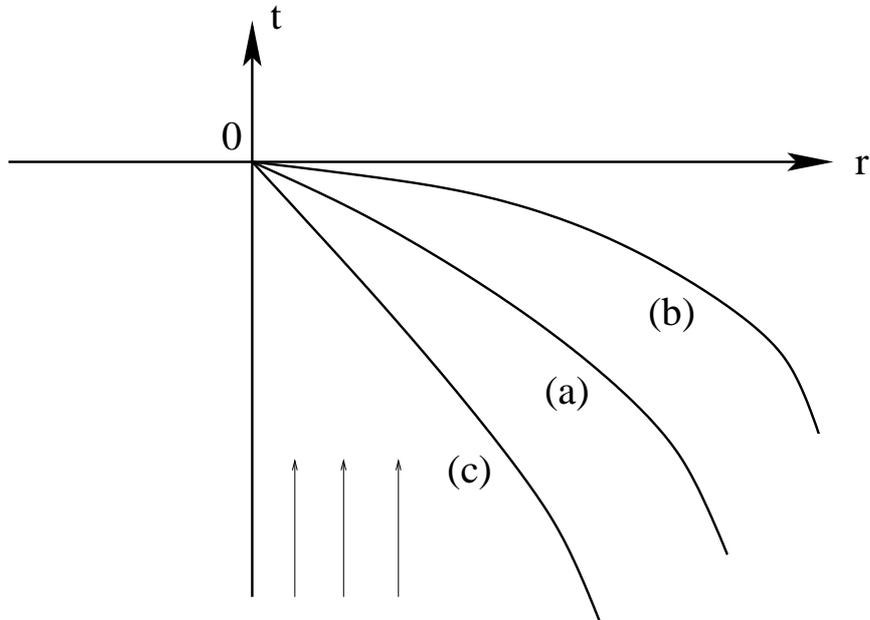


Figura 3.1: As hipersuperfícies singulares $t = t_1(r)$ e $t = t_2(r)$ no (t, r) -plano para $\beta > 0$, onde $t_1(r)$ e $t_2(r)$ são definidos pelas equações (3.2.28)-(3.2.29). As curvas representam (a) $t = t_1(r)$, (b) $t = t_2(r)$ para $\alpha < 0$ e (c) $t = t_2(r)$ para $0 \leq \alpha < 1$.

Caso A.1: $0 < \alpha < 1$

Da equação (3.2.33), podemos ver que a singularidade em $t = t_2(r)$ é sempre formada antes de $t = t_1(r)$. A natureza da singularidade em $t = t_2(r)$ pode ser encontrada, a partir da análise do sinal da norma do quadrado do vetor normal à hipersuperfície que define a singularidade. A equação para esta hipersuperfície é dada por

$$F(t, r) \equiv t + \frac{\beta}{1 - \alpha} r^\alpha = 0. \quad (3.2.34)$$

A norma ao quadrado do vetor normal a esta hipersuperfície é dada por

$$F_{,\alpha} F_{,\beta} g^{\alpha\beta} \Big|_{F=0} = 1 - \frac{\alpha^2 \beta^2 r^{2(\alpha-1)}}{(1 - \alpha)^2 \left[\beta + (1 - \alpha) \frac{t}{r^\alpha} \right]} \Big|_{F=0} \rightarrow -\infty, \quad (3.2.35)$$

indicando que a singularidade neste caso é sempre tipo-tempo. O correspondente diagrama de Penrose é dado pela figura 3.2.

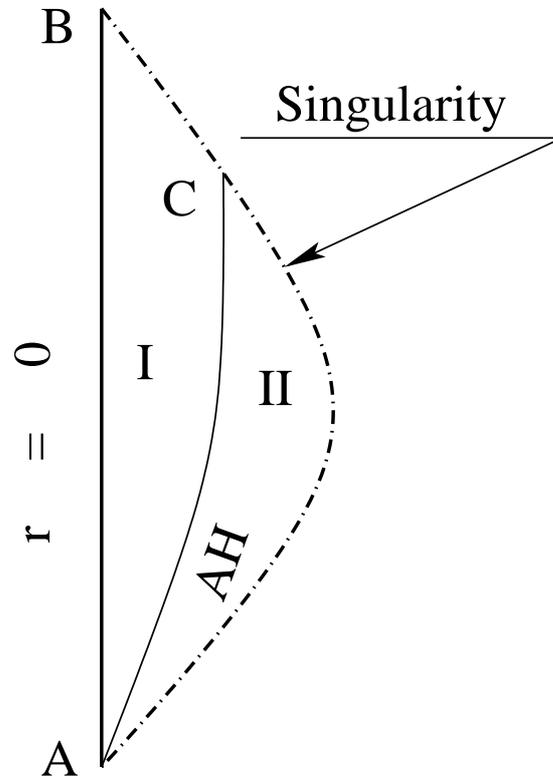


Figura 3.2: O diagrama de Penrose para a solução dada pela equação (3.2.25) com $\beta > 0$ e $0 \leq \alpha < 1$. A curva AC é a localização do horizonte aparente, $r = 1$. A Região I não é aprisionada, e a Região II é aprisionada. A linha tracejada representa a singularidade do espaço-tempo, que no presente caso é sempre tipo-tempo.

Caso A.2: $\alpha < 0$

Neste caso, a equação (3.2.33) mostra que a singularidade em $t = t_1(r)$ é formada primeiro. Similar ao último caso, a natureza desta singularidade pode ser obtida considerando o vetor normal à hipersuperfície definida por $G(t, r) \equiv t - t_1(r) = 0$, cuja norma ao quadrado é

$$\begin{aligned} G_{,\alpha}G_{,\beta}g^{\alpha\beta}\Big|_{G=0} &= 1 - \frac{\alpha^2\beta^2r^{2(\alpha-1)}}{\left[\beta + (1-\alpha)\frac{t}{r^\alpha}\right]^2}\Big|_{G=0} \\ &= 1 - \frac{1}{r^{1-2\alpha}} = \begin{cases} > 0, & r > 1, \\ < 0, & r < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Então, neste caso, a singularidade é tipo-espaço para $r > 1$ e tipo-tempo para $r < 1$, e o correspondente diagrama de Penrose é o da figura 3.3.

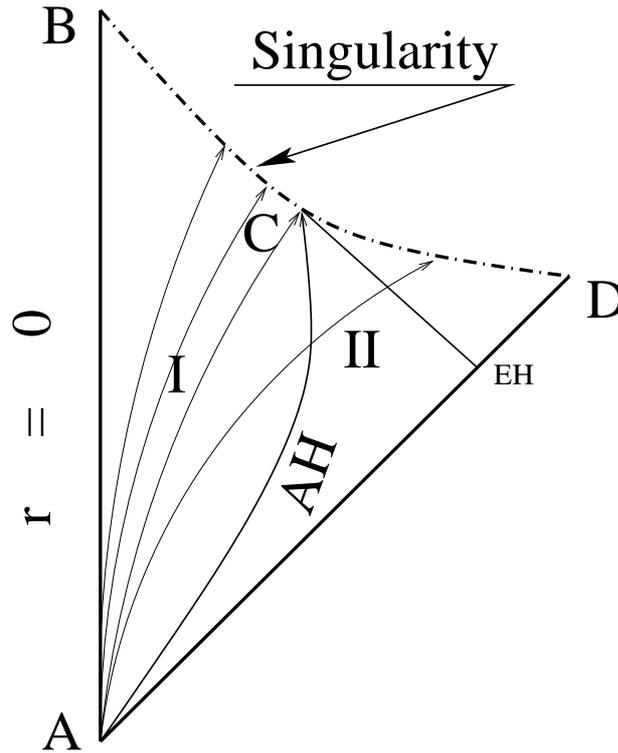


Figura 3.3: O diagrama de Penrose para a solução dada pela equação (3.2.25) com $\beta > 0$ e $\alpha < 0$. A curva AC é a localização do horizonte aparente, $r = 1$. A Região I não é aprisionada, e a Região II é aprisionada. A linha tracejada representa a singularidade do espaço-tempo, onde o segmento BC é tipo-tempo, enquanto CD é tipo-espaço.

Caso *B*: $\beta < 0$

Quando $\beta < 0$, o raio geométrico do círculo $(t, r) = \text{constante}$ é dado por

$$R(t, r) \equiv |rS(t, r)| = r(|\beta| - \frac{r}{r^\alpha}), \quad (3.2.37)$$

e

$$t_1(r) - t_2(r) = -\frac{\alpha|\beta|}{1-\alpha}r^\alpha = \begin{cases} < 0, & 0 \leq \alpha < 1, \\ > 0, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (3.2.38)$$

como mostra a figura 3.4. Como no caso anterior, precisamos distinguir os dois sub-casos $0 \leq \alpha < 1$ e $\alpha < 0$.

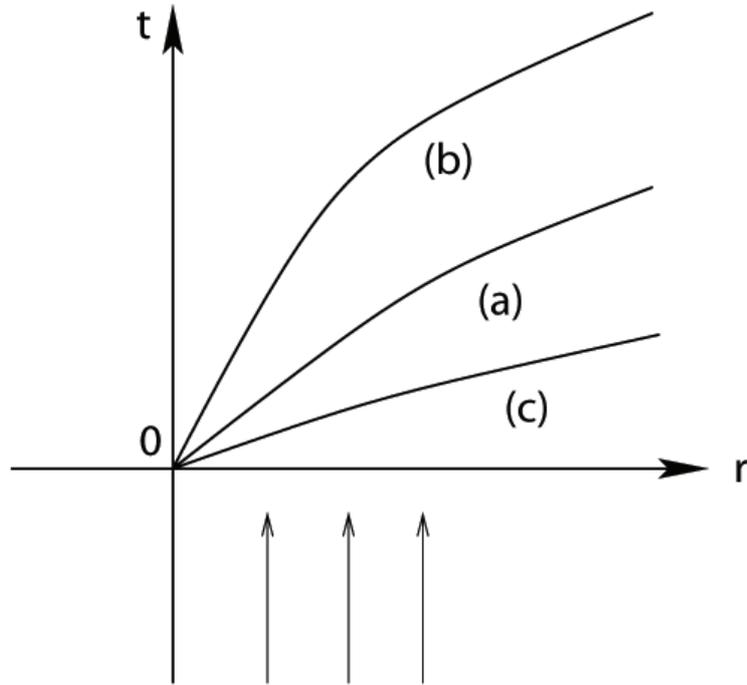


Figura 3.4: As hipersuperfícies singulares $t = t_1(r)$ e $t = t_2(r)$ no (t, r) -plano para $\beta < 0$, onde $t_1(r)$ e $t_2(r)$ são definidos pela equação (3.2.28)-(3.2.29). As curvas representam (a) $t = t_1(r)$, (b) $t = t_2(r)$ para $0 \leq \alpha < 1$ e (c) $t = t_2(r)$ para $\alpha < 0$.

Caso *B.1*: $0 \leq \alpha < 1$

Da equação (3.2.38), podemos ver que neste caso a singularidade em $t = t_1(r)$ é sempre formada antes de $t = t_2(r)$. A norma ao quadrado do vetor normal à hipersuperfície que define a singularidade é dada por

$$\begin{aligned}
G_{,\alpha}G_{,\beta}g^{\alpha\beta}\Big|_{G=0} &= 1 - \frac{\alpha^2\beta^2r^{2(2\alpha-1)}}{[\beta r^\alpha + (1-\alpha)t]^2}\Big|_{G=0} \\
&= 1 - r^{2(\alpha-1)} = \begin{cases} < 0, & r < 1, \\ = 0, & r = 1, \\ > 0, & r > 1, \end{cases} \quad (3.2.39)
\end{aligned}$$

o que revela que, neste caso, a singularidade é tipo-tempo para $r < 1$, tipo-nula para $r = 1$, e tipo-espaço para $r > 1$. O diagrama de Penrose correspondente é dado pela figura 3.5.

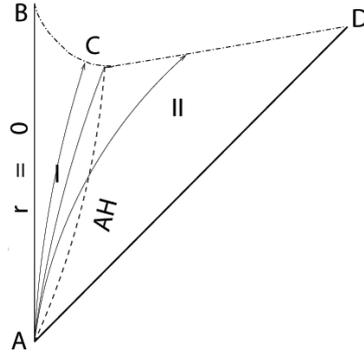


Figura 3.5: O diagrama de Penrose para a solução dada pela equação (3.2.25), com $\beta < 0$ e $0 \leq \alpha < 1$. A curva AC é a localização do horizonte aparente. A Região I não é aprisionada, e a Região II é aprisionada. A linha tracejada BCD representa a singularidade do espaço-tempo; o segmento BC é tipo-tempo, e o segmento CD é tipo-espaço.

Caso B.2: $\alpha < 0$

Neste caso, a equação (3.2.38) mostra que a singularidade em $t = t_2(r)$ é formada primeiro. Também pode ser mostrado que esta singularidade é sempre tipo-tempo. O diagrama de Penrose correspondente é dado pela figura 3.6.

3.3 Conclusão

Neste capítulo, obtemos todas as soluções para a família das equações de Einstein de um fluido anisotrópico com auto-similaridade de segundo tipo, em um espaço-tempo $(2 + 1)$ -dimensional, com simetria circular, onde definimos $\beta \neq 0$. Impondo a condição $p_r = 0$, mostramos que somente fluidos de poeira são permitidos, onde p_r denota a pressão radial do fluido. Estudamos as propriedades locais e globais das soluções em detalhes, e em particular, obtemos todos os diagramas de Penrose correspondentes, dos quais podemos

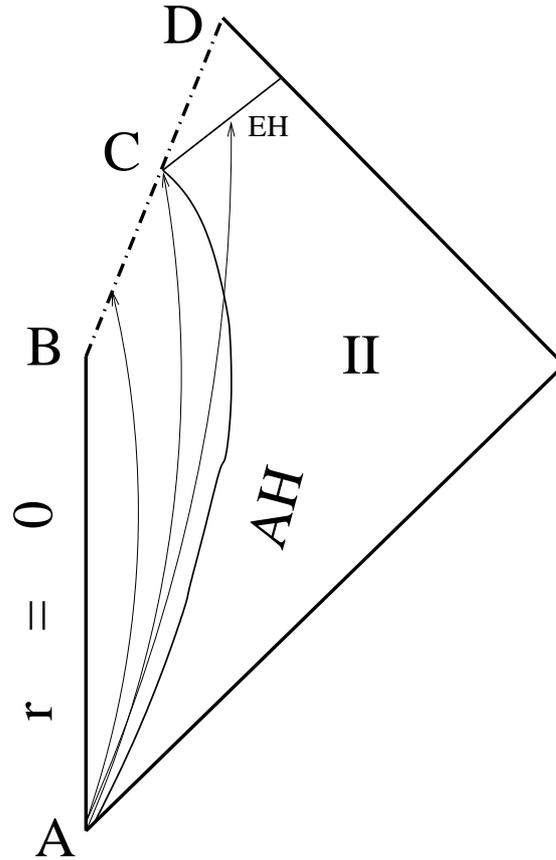


Figura 3.6: O diagrama de Penrose para a solução dada pela equação (3.2.25) com $\beta < 0$ e $\alpha < 0$. A curva AC é a localização do horizonte aparente. A Região I não é aprisionada, e a Região II é aprisionada. A linha tracejada BCD representa a singularidade do espaço-tempo, que é tipo-tempo.

ver que as soluções nos casos $\beta > 0, \alpha < 0$; $\beta < 0, 0 \leq \alpha < 1$ e $\beta < 0, \alpha < 0$, podem representar a formação de buracos negros como consequência do colapso gravitacional do fluido. No entanto, em todos os três casos, um segmento de singularidade tipo-tempo foi desenvolvido [cf. Figs. 3, 5 e 6], que é localmente nua. É interessante notar que, pelo fato de o espaço-tempo nestes casos não ser assintoticamente plano, o correspondente diagrama de Penrose é bem diferente daquele para buracos negros em espaços-tempos assintoticamente planos [50]. Eles se assemelham mais a casos em cosmologia, onde a região $r < r_{AH}(t)$ não é aprisionada, e a região $r > r_{AH}(t)$ é aprisionada [50].

Capítulo 4

Colapso Auto-similar de Primeiro Tipo: Formação de Buracos Negros para Fluidos Fantasmas

Aqui fazemos um estudo similar àquele apresentado no capítulo anterior, mas agora com auto-similaridade de primeiro tipo. Para este caso encontramos uma solução, que indica que todo o espaço-tempo é aprisionado, sendo que esta pode representar um buraco negro, se puder ser ajustada suavemente com a solução BTZ, que é uma solução de buraco negro $(2+1)$ -dimensional. Construimos então estruturas, que representam buracos negros, compostas por três regiões: uma interna com um fluido anisotrópico com auto-similaridade de segundo tipo, uma camada infinitesimal intermediária e a solução de BTZ no exterior. É interessante destacar que a solução interna pode violar as condições de energia nula e forte, resultando num buraco negro de energia escura fantasma. Os resultados apresentados neste capítulo foram submetidos para publicação ao periódico *General Relativity and Gravitation*.

4.1 Introdução

No capítulo 3 consideramos um fluido anisotrópico, com auto-similaridade de segundo tipo e mostramos que, para uma dada família de soluções a única solução possível, quando a pressão radial é nula, representa um fluido de poeira que colapsa formando ambos, singularidades localmente nuas e buracos negros [47].

Neste capítulo, estendemos os estudos acima para o caso de um fluido anisotrópico, também com pressão radial zero, mas agora no contexto de auto-similaridade do primeiro tipo.

Consideramos agora a auto-similaridade de primeiro tipo e, portanto, devemos fazer $\alpha = 1$ nas transformações (3.1.9). Desse modo, as equações (3.1.23)-(3.1.26) transformam-se em

$$\rho = -\frac{1}{l^2 K} \left\{ \frac{1}{r^2} e^{-2\psi} [y_{,x} + (y+1)(y - \psi_{,x})] - \frac{1}{t^2} e^{-2\phi} \psi_{,x} y \right\}, \quad (4.1.1)$$

$$y_{,x} = y\phi_{,x} + (y+1)(\psi_{,x} - y), \quad (4.1.2)$$

$$p_r = \frac{1}{l^2 K} \left\{ \frac{1}{r^2} e^{-2\psi} \phi_{,x} (y+1) - \frac{1}{t^2} e^{-2\phi} [y_{,x} + y(y - \phi_{,x} + 1)] \right\}, \quad (4.1.3)$$

$$p_\theta = \frac{1}{l^2 K} \left\{ \frac{e^{-2\psi}}{r^2} [\phi_{,xx} + \phi_{,x}(\phi_{,x} - \psi_{,x} - 1)] - \frac{e^{-2\phi}}{t^2} [\psi_{,xx} + \psi_{,x}(\phi_{,x} - \psi_{,x} - 1)] \right\}. \quad (4.1.4)$$

4.2 Soluções das Equações de Campo de Einstein Considerando as Equações de Estado $p_r = 0$ e $p_\theta = \omega\rho$

Aqui consideramos as equações de estado $p_r = 0$ e $p_\theta = \omega\rho$. Neste caso, os dois termos da equação (4.1.3) têm a mesma potência em r e $p_r = 0$ implica em

$$p_r = \frac{1}{r^2} [p_r^I(\chi) + e^{2\chi} p_r^{II}(\chi)] = 0, \quad (4.2.5)$$

com $p_r^I(\chi)$ e $p_r^{II}(\chi)$ dados por (3.2.2) e (3.2.3), fazendo $\alpha = 1$.

Logo, para que seja possível determinar completamente $\phi(\chi)$, $\psi(\chi)$ e $S(\chi)$, é necessário a utilização de mais uma equação de estado, que é dada por

$$p_\theta = \omega\rho, \quad (4.2.6)$$

onde ω é uma constante. Assim temos duas equações além de (4.1.2), que são dadas por

$$p_r^I(\chi) + e^{2\chi} p_r^{II}(\chi) = 0, \quad (4.2.7)$$

$$p_\theta = \omega\rho. \quad (4.2.8)$$

Reescrevendo as equações (4.2.7) e (4.2.8) em termos das funções $\phi(\chi)$, $\psi(\chi)$ e $S(\chi)$ temos

$$\phi_{,\chi}(y+1) - e^{2(x-\phi+\psi)} [y_{,\chi} + y(y - \phi_{,\chi} + 1)] = 0, \quad (4.2.9)$$

e

$$\begin{aligned} & [\phi_{,\chi\chi} + \phi_{,\chi}(\phi_{,\chi} - \psi_{,\chi} - 1)] + \\ & + e^{2(x-\phi+\psi)} [-\omega\psi_{,\chi}y - \psi_{,\chi\chi} + \psi_{,\chi}(\phi_{,\chi} - \psi_{,\chi} - 1)] + \\ & + \omega [y_{,\chi} + (y+1)(y - \psi_{,\chi})] = 0. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Substituindo a equação (3.1.24) em (4.2.9) encontramos

$$(y+1) [\phi_{,\chi} - e^{2(x-\phi+\psi)}\psi_{,\chi}] = 0. \quad (4.2.11)$$

Então temos duas possíveis soluções, que são

$$(iii) y + 1 = 0,$$

e

$$(iv) \phi_{,\chi} - e^{2(x-\phi+\psi)}\psi_{,\chi} = 0.$$

A solução (iii) nos fornece

$$y(\chi) = -1. \quad (4.2.12)$$

Levando a equação (4.2.12) em (3.1.21) obtemos uma equação diferencial para $S(\chi)$

$$\frac{S_{,\chi}}{S} = -1, \quad (4.2.13)$$

e sua solução é dada por

$$S(\chi) = S_0 e^{-\chi}, \quad (4.2.14)$$

que coincide com a solução (3.2.10).

Substituindo (4.2.12) em (3.1.24) temos

$$\phi(\chi) = \phi_0. \quad (4.2.15)$$

Levando (4.2.12) e (4.2.15) em (4.2.10), obtemos uma equação diferencial para $\psi(\chi)$

$$\psi_{,\chi\chi} + \psi_{,\chi}^2 + \psi_{,\chi}(1 - \omega) = 0, \quad (4.2.16)$$

de onde obtemos a solução

$$\psi(\chi) = \ln \left[\frac{1 + \Psi_0(\omega - 1)e^{(1-\omega)\chi}}{e^{(1-\omega)\chi}} \right] + \psi_0. \quad (4.2.17)$$

Reescrevendo as soluções obtidas em função de r e t , temos

$$S(r, t) = -S_0 \frac{t}{r},$$

$$\phi(r, t) = \phi_0,$$

e

$$\psi(r, t) = \psi_0 + \ln \left[a + \left(\frac{r}{-t} \right)^{(\omega-1)} \right], \quad (4.2.18)$$

onde ϕ_0 , ψ_0 , S_0 e $a = \Psi_0(\omega - 1)$ são constantes de integração.

Finalmente, a métrica que representa esta solução é dada por

$$ds^2 = dt^2 - \left[a + \left(\frac{r}{-t} \right)^{(\omega-1)} \right]^2 dr^2 - S_0^2 t^2 d\theta^2, \quad (4.2.19)$$

fazemos $\phi_0 = \psi_0 = 0$, sem perda de generalidade. Então temos para a densidade de energia e para a pressão tangencial

$$\rho(r, t) = \frac{(1 - \omega)r^{(\omega-1)}}{l^2 K t^2 [(-t)^{(\omega-1)}a + r^{(\omega-1)}]} \quad (4.2.20)$$

e

$$p_\theta(r, t) = \frac{\omega(1 - \omega)r^{(\omega-1)}}{l^2 K t^2 [(-t)^{(\omega-1)}a + r^{(\omega-1)}]}. \quad (4.2.21)$$

O escalar de Kretschmann para estas soluções é dado por

$$K(r, t) = \frac{4(\omega - 1)^2(\omega^2 + 1)}{e^{4\phi_0} l^4 t^4 [1 + ar^{(1-\omega)}(-t)^{(\omega-1)}]^2}. \quad (4.2.22)$$

Dele podemos ver que existe a possibilidade de formação de até duas singularidades, que são

$$t = t_{sing} = 0 \quad (4.2.23)$$

e

$$r = r_{sing} = \left[\frac{(-t)}{|a|^{1/(1-\omega)}} \right], \quad \text{para } a < 0. \quad (4.2.24)$$

O raio geométrico R_g é definido por

$$R_g = Sr = -S_0 t, \quad (4.2.25)$$

onde $S_0 \geq 0$.

Note que o raio geométrico decresce com a coordenada temporal, indicando que o processo pode representar um colapso.

As expansões de uma congruência de geodésicas nulas entrando e saindo, Θ_l e Θ_n respectivamente, dadas pelas equações (2.2.10) e (2.2.11), são úteis para entender as propriedades globais das soluções. São elas

$$\Theta_l = \Theta_n \propto -S_0. \quad (4.2.26)$$

Logo, vemos que tanto Θ_l quanto Θ_n são negativas, indicando que todo o espaço-tempo descrito pela métrica (4.2.19) é aprisionado. Esta solução pode então representar um buraco negro, se puder ser ajustada suavemente com a solução de BTZ. Antes, no entanto, vejamos se as condições de energia são satisfeitas.

4.3 As Condições de Energia

Para $a > 0$, os sinais da densidade de energia e da pressão tangencial são determinados em termos de $1 - \omega$ e $\omega(1 - \omega)$, respectivamente. Então é fácil ver, que para $-1 \leq \omega \leq 1$ todas as condições de energia são satisfeitas. Entretanto, se admitirmos o cenário de um universo preenchido por, no mínimo 70% de energia escura, podemos construir um modelo de colapso para um fluido anisotrópico fantasma, com $\omega \leq -1$. Neste último caso, todas as condições de energia são violadas, através da violação da condição de energia nula $\rho + p_t \geq 0$, mas a densidade de energia preserva sua positividade.

4.4 As Condições de Junção

Aplicamos as condições de Junção de Darmois na hipersuperfície de junção, para que dois espaços-tempos se ajustem suavemente nesta hipersuperfície. Não se faz necessário usar

o mesmo sistema de coordenadas em ambos os lados da hipersuperfície de junção. As condições de junção impõem a continuidade das primeira e segunda formas fundamentais, que são o elemento de linha ds^2 e a curvatura extrínseca K_{ij} do espaço-tempo respectivamente.

Então consideramos o espaço-tempo dividido em duas regiões, uma interna e outra externa à hipersuperfície de junção, a primeira preenchida por fluido anisotrópico, circularmente simétrico, com auto-similaridade cinemática de primeiro tipo e pressão radial nula (V^- , em $r \leq r_\Sigma$), a segunda preenchida por vácuo com constante cosmológica, Λ , negativa (V^+ , em $r \geq r_\Sigma$), conhecida como solução de BTZ. Aqui r_Σ é a coordenada radial da hipersuperfície.

A métrica geral para a solução da região interna, ds_-^2 , é dada pela equação (4.2.19), com $0 \leq r \leq r_\Sigma$, $0 \leq \theta < 2\pi$ e $-\infty < t \leq 0$.

Para o espaço-tempo exterior, temos então, como já foi dito, a solução BTZ (Bañados, Teitelbom e Zanelli) dada pela métrica

$$ds_+^2 = -(\Lambda R^2 + M)dT^2 + \frac{1}{(\Lambda R^2 + M)}dR^2 - R^2 d\theta^2, \quad (4.4.1)$$

onde $R_\Sigma \leq R < \infty$, $-\infty < T \leq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $\Lambda < 0$ e M é a massa do buraco negro, cujo horizonte de eventos está localizado em

$$R = \sqrt{\frac{-M}{\Lambda}}. \quad (4.4.2)$$

A métrica intrínseca para a hipersuperfície de junção é definida por

$$ds_\Sigma^2 = d\tau^2 - H(\tau)_\Sigma^2 d\theta^2, \quad (4.4.3)$$

aqui τ é o tempo próprio.

Impondo a continuidade ao potencial métrico, obtemos

$$(ds_-^2)_\Sigma = (ds^2)_\Sigma = (ds_+^2)_\Sigma, \quad (4.4.4)$$

ou ainda, sendo R_Σ a coordenada da hipersuperfície de junção no sistema de coordenadas do observador externo, dependente do tempo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
dt^2 - S_0^2 t^2 d\theta^2 &= \\
d\tau^2 - H(\tau)_\Sigma^2 d\theta^2 &= \\
-\left[(\Lambda R_\Sigma^2 + M) - \frac{1}{(\Lambda R_\Sigma^2 + M)} \left(\frac{dR_\Sigma(T)}{dT} \right)^2 \right] dT^2 - R_\Sigma^2 d\theta^2. & \quad (4.4.5)
\end{aligned}$$

A condição (4.4.4) impõe

$$d\tau^2 = dt^2 = -\left[(\Lambda R_\Sigma^2 + M) - \frac{1}{(\Lambda R_\Sigma^2 + M)} \left(\frac{dR_\Sigma(T)}{dT} \right)^2 \right] dT^2, \quad (4.4.6)$$

e

$$-S_0^2 \tau^2 = -H^2(\tau)_\Sigma = -R_\Sigma^2, \quad (4.4.7)$$

que nos fornece

$$R_\Sigma = -S_0 \tau. \quad (4.4.8)$$

Logo, caso alguma junção seja possível, como o raio da hipersuperfície de junção, a partir de (4.4.8), decresce com o tempo próprio e o raio do horizonte é constante, equação (4.4.2), é de se esperar que o fluido colapse dando origem a um buraco negro, no momento em que a hipersuperfície de junção cruzar o horizonte.

As equações (4.4.6) e (4.4.7) nos levam às condições abaixo

$$d\tau = dt, \quad (4.4.9)$$

$$\frac{dt}{dT} = \left[\frac{-(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^2 + \left(\frac{dR_\Sigma(T)}{dT} \right)^2}{(\Lambda R_\Sigma^2 + M)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.4.10)$$

e

$$R_{\Sigma}^2(T) = S_0^2 \tau^2. \quad (4.4.11)$$

A curvatura extrínseca, ou segunda forma fundamental, que mede a curvatura de uma hipersuperfície Σ no espaço-tempo no qual está imersa, através das variações $\frac{\partial n}{\partial \xi}$ do vetor unitário normal à hipersuperfície, quando transportado paralelamente sobre ela, é definida por

$$K_{ij}^{\pm} = \eta_{\alpha}^{\pm} \frac{\partial^2 x_{\pm\Sigma}^{\alpha}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - \eta_{\alpha}^{\pm} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{\partial x_{\pm\Sigma}^{\mu}}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{\pm\Sigma}^{\nu}}{\partial \xi^j}, \quad (4.4.12)$$

onde

$$\eta_{\alpha}^{\pm} = L \frac{\partial f^{\pm}}{\partial x^{\alpha}}, \quad (4.4.13)$$

são os vetores normais unitários e f^{\pm} as funções que definem a hipersuperfície, dadas por

$$f^{-} = r - r_{\Sigma} = 0, \quad (4.4.14)$$

$$f^{+} = R - R_{\Sigma}(T) = 0. \quad (4.4.15)$$

A norma dos vetores unitários é definida por

$$\eta_{\pm}^{\alpha} \eta_{\alpha}^{\pm} = -1, \quad (4.4.16)$$

onde o sinal de menos no lado direito da equação indica que o vetor normal à hipersuperfície é tipo-espaço e, portanto, a hipersuperfície é tipo-tempo.

Para obtermos os componentes não nulos da curvatura extrínseca para os espaços-tempos interno e externo, sabendo que suas coordenadas são dadas respectivamente por

$$x_{-}^{\alpha} = (\tau, r_{\Sigma}, \theta)$$

e

$$x_+^\alpha = (T, R_\Sigma(T), \theta), \quad (4.4.17)$$

utilizamos as equações (4.4.13), (4.4.14) e (4.4.15). Os vetores normais à hipersuperfície Σ são dados por

$$\eta_\alpha^\pm = \begin{cases} \eta_\alpha^- = L(0, 1, 0), \\ \eta_\alpha^+ = U\left(\frac{-dR_\Sigma(T)}{dT}, 1, 0\right). \end{cases} \quad (4.4.18)$$

Por outro lado, das equações (4.4.16) e (4.4.18) obtemos para o espaço-tempo interno e externo as seguintes expressões

$$g_-^{11} \eta_1^- \eta_1^- = -1, \quad (4.4.19)$$

$$g_+^{00} \eta_0^+ \eta_0^+ + g_+^{11} \eta_1^+ \eta_1^+ = -1. \quad (4.4.20)$$

Substituindo os tensores métricos contravariantes, dados por

$$g_-^{00} = 1,$$

$$g_-^{11} = \frac{-1}{\left[a + \left(\frac{r}{-t}\right)^{(\omega-1)}\right]^2},$$

$$g_-^{22} = \frac{-1}{S_0^2 t^2} \quad (4.4.21)$$

e

$$g_+^{00} = \frac{-1}{\Lambda R^2 + M},$$

$$g_+^{11} = \Lambda R^2 + M,$$

$$g_+^{22} = \frac{-1}{R^2}, \quad (4.4.22)$$

nas equações (4.4.19) e (4.4.20), calculamos as constantes de normalização L e U do vetor unitário, que são dadas por

$$L = \left[a + \left(\frac{r}{-t} \right)^{(\omega-1)} \right], \quad (4.4.23)$$

$$U = \left[\frac{\Lambda R^2 + M}{-(\Lambda R^2 + M)^2 + \left(\frac{dR_\Sigma(T)}{dT} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4.24)$$

Reescrevendo os vetores unitários, η_α^\pm , temos

$$\eta_\alpha^- = \left[a + \left(\frac{r_\Sigma}{-t} \right)^{(\omega-1)} \right] (0, 1, 0), \quad (4.4.25)$$

e

$$\eta_\alpha^+ = \left[\frac{\Lambda R_\Sigma^2 + M}{-(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^2 + \left(\frac{dR_\Sigma(T)}{dT} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{-dR_\Sigma(T)}{dT}, 1, 0 \right). \quad (4.4.26)$$

Passamos agora para o cálculo dos termos $\frac{\partial^2 x_\pm^\alpha}{\partial \xi^i \partial \xi^j}$ e $\frac{\partial x_\pm^\alpha}{\partial \xi^i}$ de K_{ij} . Temos que as coordenadas da hipersuperfície de junção ξ^α , são dadas por

$$\xi^\alpha = (\tau, r, \theta), \quad (4.4.27)$$

aqui r define a hipersuperfície de junção e é uma constante. Lembrando que através da condição (4.4.9), a coordenada t é igual a τ , e de posse das coordenadas ξ^α e x_\pm^α , podemos então calcular os termos não nulos abaixo

$$\frac{\partial^2 x_{\pm\Sigma}^\alpha}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = \begin{cases} \frac{\partial^2 x_{\pm\Sigma}^0}{\partial \xi^0 \partial \xi^0} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} \right)_\Sigma, \\ \frac{\partial^2 x_{\pm\Sigma}^1}{\partial \xi^0 \partial \xi^0} = \frac{\partial^2 R_\Sigma(T)}{\partial \tau^2} \end{cases} \quad (4.4.28)$$

e

$$\frac{\partial x_{\pm\Sigma}^\alpha}{\partial \xi^i} = \begin{cases} \frac{\partial x_{\pm\Sigma}^0}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x_{\pm\Sigma}^0}{\partial \xi^0} = 1, \frac{\partial x_{\pm\Sigma}^0}{\partial \xi^1} = \left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_\Sigma, \\ \frac{\partial x_{\pm\Sigma}^1}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x_{\pm\Sigma}^1}{\partial \xi^0} = \frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial x_{\pm\Sigma}^2}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x_{\pm\Sigma}^2}{\partial \xi^2} = 1. \end{cases} \quad (4.4.29)$$

Os símbolos não nulos de Christoffel para os espaços-tempos interno e externo são dados por

$$\Gamma_{11}^{0-} = \frac{-\left[a + \left(\frac{r}{-t}\right)^{(\omega-1)}\right] \left(\frac{r}{-t}\right)^{(\omega-1)} (\omega-1)}{t},$$

$$\Gamma_{01}^{1-} = \Gamma_{10}^{1-} = \frac{-\left(\frac{r}{-t}\right)^{(\omega-1)} (\omega-1)}{\left[a + \left(\frac{r}{-t}\right)^{(\omega-1)}\right] t},$$

$$\Gamma_{22}^{0-} = S_0^2 t,$$

$$\Gamma_{11}^{1-} = \frac{\left(\frac{r}{-t}\right)^{(\omega-1)} (\omega-1)}{\left[a + \left(\frac{r}{-t}\right)^{(\omega-1)}\right] r},$$

$$\Gamma_{02}^{2-} = \Gamma_{20}^{2-} = \frac{1}{t} \quad (4.4.30)$$

e

$$\Gamma_{01}^{0+} = \Gamma_{10}^{0+} = \frac{\Lambda R}{\Lambda R^2 + M},$$

$$\Gamma_{00}^{1+} = \Lambda R(\Lambda R^2 + M),$$

$$\Gamma_{11}^{1+} = -\frac{\Lambda R}{\Lambda R^2 + M},$$

$$\Gamma_{22}^{1+} = R(\Lambda R^2 + M),$$

$$\Gamma_{12}^{2+} = \Gamma_{21}^{2+} = \frac{1}{R}. \quad (4.4.31)$$

Sabendo que o vetor unitário do espaço-tempo interno tem somente o componente η_1^- , podemos escrever K_{ij}^-

$$K_{ij}^- = \eta_1^- \frac{\partial^2 x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - \eta_1^- \Gamma_{\mu\nu}^{1-} \frac{\partial x_{-\Sigma}^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{-\Sigma}^\nu}{\partial \xi^j}. \quad (4.4.32)$$

O vetor unitário do espaço-tempo externo tem somente os componentes η_0^+ e η_1^+ , logo K_{ij}^+ nos fornece

$$K_{ij}^+ = \eta_0^+ \frac{\partial^2 x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \eta_1^+ \frac{\partial^2 x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - \eta_0^+ \Gamma_{\mu\nu}^{0+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{+\Sigma}^\nu}{\partial \xi^j} - \eta_1^+ \Gamma_{\mu\nu}^{1+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{+\Sigma}^\nu}{\partial \xi^j}. \quad (4.4.33)$$

Podemos escrever ainda as equações (4.4.32) e (4.4.33) como sendo

$$K_{ij}^- = \eta_1^- \frac{\partial^2 x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - \eta_1^- \Gamma_{01}^{1-} \frac{\partial x_{-\Sigma}^0}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^j} - \eta_1^- \Gamma_{10}^{1-} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{-\Sigma}^0}{\partial \xi^j} - \eta_1^- \Gamma_{11}^{1-} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^j} \quad (4.4.34)$$

e

$$\begin{aligned} K_{ij}^+ = & \eta_0^+ \frac{\partial^2 x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \eta_1^+ \frac{\partial^2 x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - \eta_0^+ \Gamma_{01}^{0+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^j} - \eta_0^+ \Gamma_{10}^{0+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^j} + \\ & - \eta_1^+ \Gamma_{00}^{1+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^j} - \eta_1^+ \Gamma_{11}^{1+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^j} - \eta_1^+ \Gamma_{22}^{1+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^2}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_{+\Sigma}^2}{\partial \xi^j}. \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

Agora obtemos as expressões para os componentes não nulos do tensor K_{ij}^\pm . Para o espaço-tempo interno temos

$$K_{00}^- = \eta_1^- \frac{\partial^2 x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^0 \partial \xi^0} - \eta_1^- \Gamma_{01}^{1-} \frac{\partial x_{-\Sigma}^0}{\partial \xi^0} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^0} - \eta_1^- \Gamma_{10}^{1-} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^0} \frac{\partial x_{-\Sigma}^0}{\partial \xi^0} - \eta_1^- \Gamma_{11}^{1-} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^0} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^0} \quad (4.4.36)$$

e

$$K_{22}^- = \eta_1^- \frac{\partial^2 x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} - \eta_1^- \Gamma_{01}^{1-} \frac{\partial x_{-\Sigma}^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^2} - \eta_1^- \Gamma_{10}^{1-} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_{-\Sigma}^0}{\partial \xi^2} - \eta_1^- \Gamma_{11}^{1-} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_{-\Sigma}^1}{\partial \xi^2}. \quad (4.4.37)$$

Substituindo as equações (4.4.25), (4.4.26), (4.4.28), (4.4.29), (4.4.30) e (4.4.31) nas equações (4.4.36) e (4.4.37), obtemos

$$K_{00}^- = 0 \quad (4.4.38)$$

e

$$K_{22}^- = 0. \quad (4.4.39)$$

Para o espaço-tempo externo, os componentes existentes são dados por

$$\begin{aligned} K_{00}^+ &= \eta_0^+ \frac{\partial^2 x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^0 \partial \xi^0} + \eta_1^+ \frac{\partial^2 x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^0 \partial \xi^0} - \eta_0^+ \Gamma_{01}^{0+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^0} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^0} - \eta_0^+ \Gamma_{10}^{0+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^0} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^0} + \\ &\quad - \eta_1^+ \Gamma_{00}^{1+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^0} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^0} - \eta_1^+ \Gamma_{11}^{1+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^0} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^0} - \eta_1^+ \Gamma_{22}^{1+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^2}{\partial \xi^0} \frac{\partial x_{+\Sigma}^2}{\partial \xi^0} \end{aligned} \quad (4.4.40)$$

e

$$\begin{aligned} K_{22}^+ &= \eta_0^+ \frac{\partial^2 x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} + \eta_1^+ \frac{\partial^2 x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^2 \partial \xi^2} - \eta_0^+ \Gamma_{01}^{0+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^2} - \eta_0^+ \Gamma_{10}^{0+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^2} + \\ &\quad - \eta_1^+ \Gamma_{00}^{1+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_{+\Sigma}^0}{\partial \xi^2} - \eta_1^+ \Gamma_{11}^{1+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_{+\Sigma}^1}{\partial \xi^2} - \eta_1^+ \Gamma_{22}^{1+} \frac{\partial x_{+\Sigma}^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_{+\Sigma}^2}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (4.4.41)$$

Substituindo as equações (4.4.25), (4.4.26), (4.4.28), (4.4.29), (4.4.30) e (4.4.31) nas equações (4.4.40) e (4.4.41), obtemos

$$K_{00}^+ = \left[\frac{\Lambda R_\Sigma^2 + M}{-(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^2 + \left(\frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial T}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial^2 R_\Sigma(T)}{\partial \tau^2} + 3 \left(\frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\Lambda R_\Sigma}{\Lambda R_\Sigma^2 + M} \right) + \right. \\ \left. - \Lambda R_\Sigma (\Lambda R_\Sigma^2 + M) \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \right)_\Sigma^2 - \frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial T} \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} \right\} \quad (4.4.42)$$

e

$$K_{22}^+ = - \left[\frac{\Lambda R_\Sigma^2 + M}{-(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^2 + \left(\frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial T}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} R_\Sigma (\Lambda R_\Sigma^2 + M). \quad (4.4.43)$$

A continuidade da curvatura extrínseca na hipersuperfície de junção impõe as seguintes condições,

$$(K_{00}^-)_\Sigma = (K_{00})_\Sigma = (K_{00}^+)_\Sigma \quad (4.4.44)$$

e

$$(K_{22}^-)_\Sigma = (K_{22})_\Sigma = (K_{22}^+)_\Sigma, \quad (4.4.45)$$

o que nos conduz a

$$\left[\frac{\Lambda R_\Sigma^2 + M}{-(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^2 + \left(\frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial T}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial^2 R_\Sigma(T)}{\partial \tau^2} + 3 \left(\frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\Lambda R_\Sigma}{\Lambda R_\Sigma^2 + M} \right) + \right. \\ \left. - \Lambda R_\Sigma (\Lambda R_\Sigma^2 + M) \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \right)_\Sigma^2 - \frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial T} \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} \right\} = 0 \quad (4.4.46)$$

e

$$- \left[\frac{\Lambda R_\Sigma^2 + M}{-(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^2 + \left(\frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial T}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} R_\Sigma (\Lambda R_\Sigma^2 + M) = 0. \quad (4.4.47)$$

Da condição (4.4.46) temos duas equações

$$\left[\frac{\Lambda R_\Sigma^2 + M}{-(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^2 + \left(\frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial T} \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (4.4.48)$$

ou

$$\frac{\partial^2 R_\Sigma(T)}{\partial \tau^2} + 3 \left(\frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\Lambda R_\Sigma}{\Lambda R_\Sigma^2 + M} \right) - \Lambda R_\Sigma (\Lambda R_\Sigma^2 + M) \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \right)_\Sigma^2 - \frac{\partial R_\Sigma(T)}{\partial T} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} \right)_\Sigma = 0. \quad (4.4.49)$$

Da condição (4.4.47) temos a equação (4.4.48) e também as equações

$$\Lambda R_\Sigma^2 + M = 0 \quad (4.4.50)$$

ou

$$R_\Sigma = 0. \quad (4.4.51)$$

Portanto, é fácil verificar que a solução abaixo é a única que satisfaz as equações (4.4.46) e (4.4.47) simultaneamente

$$R_\Sigma(T) = \sqrt{\frac{-M}{\Lambda}}. \quad (4.4.52)$$

Esta última condição implica na impossibilidade de unir os espaços-tempos interno e externo. Como um segundo recurso, introduzimos uma camada fina e fazemos a análise das condições de junção, que agora além de impor a continuidade da primeira forma fundamental, estabelece condições de energia para a camada.

Das condições (4.4.9) e (4.4.10) temos que

$$\left(\frac{dT}{d\tau} \right)_\Sigma = \left[\frac{S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M)}{(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.4.53)$$

e

$$\left(\frac{d^2T}{d\tau^2}\right)_\Sigma = \frac{S_0\Lambda R_\Sigma}{(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^2 [S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M)]^{\frac{1}{2}}} [2S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M)]. \quad (4.4.54)$$

Da equação (4.2.25) temos que

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = -S_0, \quad (4.4.55)$$

e

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} = 0. \quad (4.4.56)$$

Substituindo as equações (4.4.53), (4.4.54), (4.4.55) e (4.4.56) em (4.4.42) e (4.4.43), podemos reescrever os componentes do tensor K_{ij}^+

$$K_{00}^+ = \frac{\Lambda R_\Sigma \{4S_0^4 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M) [2S_0^2 + (\Lambda R_\Sigma^2 + M)]\}}{(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^2 [S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M)]^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.4.57)$$

e

$$K_{22}^+ = -R_\Sigma [S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M)]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4.58)$$

Levando em consideração a condição de junção da primeira forma fundamental temos que

$$(g_{ij}^-)_\Sigma = (g_{ij}^+)_\Sigma. \quad (4.4.59)$$

Dos tensores métricos, escolhemos então o que possui a forma mais simples, que são os componentes dados pelas equações (4.4.22) e utilizando as equações (4.4.38), (4.4.39), (4.4.57) e (4.4.58) na expressão para o tensor momento-energia dada por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \left\{ K_{\mu\nu}^- - K_{\mu\nu}^+ - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} [K_{\alpha\beta}^- - K_{\alpha\beta}^+] \right\}, \quad (4.4.60)$$

sendo

$$T_{00} = \frac{1}{\kappa} [g_{00} g^{22} K_{22}^+] \quad (4.4.61)$$

e

$$T_{22} = \frac{1}{\kappa} [g_{22} g^{00} K_{00}^+], \quad (4.4.62)$$

onde κ é uma constante. Das equações (4.4.61) e (4.4.62) obtemos

$$T_{00} = -\frac{1}{R_\Sigma \kappa} \left\{ (\Lambda R_\Sigma^2 + M) [S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M)]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (4.4.63)$$

e

$$T_{22} = \frac{\Lambda R_\Sigma^3}{\kappa} \left\{ \frac{4S_0^4 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M) [2S_0^2 + (\Lambda R_\Sigma^2 + M)]}{(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^3 [S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M)]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (4.4.64)$$

O tensor momento-energia também pode ser escrito como

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p_\theta \Theta_\mu \Theta_\nu, \quad (4.4.65)$$

onde $u_\mu = \sqrt{g_{00}} \delta_\mu^t$ e $\Theta_\mu = \sqrt{-g_{22}} \delta_\mu^\theta$. Então os componentes T_{00} e T_{22} também podem ser escritos como

$$T_{00} = \rho u_0 u_0 = g_{00} \rho, \quad (4.4.66)$$

e

$$T_{22} = -p_\theta \Theta_2 \Theta_2 = -g_{22} p_\theta. \quad (4.4.67)$$

Reescrevendo as duas equações anteriores, obtemos as expressões para ρ e p_θ

$$\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}}, \quad (4.4.68)$$

e

$$p_\theta = \frac{-T_{22}}{g_{22}}. \quad (4.4.69)$$

Fazendo uso dos componentes dos tensores métrico (4.4.22) e momento-energia (4.4.63) e (4.4.64) na equação (4.4.65), encontramos que a densidade de energia e a pressão tangencial da camada são dadas por

$$\sigma_\Sigma = \frac{1}{R_\Sigma \kappa} \left[S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4.70)$$

e

$$\eta_{\theta_\Sigma} = \frac{\Lambda R_\Sigma}{\kappa} \left\{ \frac{4S_0^4 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M) [2S_0^2 + (\Lambda R_\Sigma^2 + M)]}{(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^3 [S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M)]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (4.4.71)$$

É importante verificarmos se esta camada satisfaz ou não as condições de energia.

As Condições de Energia da Camada Fina

A condição de energia fraca impõe que

$$\sigma_\Sigma \geq 0 \quad (4.4.72)$$

e

$$\sigma_\Sigma + \eta_{\theta_\Sigma} \geq 0, \quad (4.4.73)$$

enquanto a condição de energia forte requer somente a equação (4.4.73) e a condição de energia dominante as equações (4.4.72), (4.4.73) e

$$\sigma_\Sigma - \eta_{\theta_\Sigma} \geq 0. \quad (4.4.74)$$

Para que σ_Σ seja real, temos que

$$S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M) \geq 0 \rightarrow S_0^2 \geq \Lambda R_\Sigma^2 + M, \quad (4.4.75)$$

o que implica que σ_Σ é sempre positivo, enquanto as equações (4.4.73) e (4.4.74) fornecem, respectivamente

$$S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M) \geq \frac{|\Lambda| R_\Sigma F}{(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^3} \quad (4.4.76)$$

e

$$S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M) \geq -\frac{|\Lambda| R_\Sigma F}{(\Lambda R_\Sigma^2 + M)^3}, \quad (4.4.77)$$

onde $F = 4S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M)[2S_0^2 + (\Lambda R_\Sigma^2 + M)]$.

A métrica (4.4.1), que descreve a solução BTZ, é definida somente para $(\Lambda R_\Sigma^2 + M) < 0$, representando o espaço-tempo exterior de um buraco negro, que implica em $S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M) \geq 0$ sempre. Então podemos reescrever as condições (4.4.76) e (4.4.77), para os casos $F < 0$ e $F \geq 0$ como

(i) $F < 0$

$$S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M) \geq -\frac{|\Lambda| R_\Sigma |F|}{|\Lambda R_\Sigma^2 + M|^3}, \quad \text{para } (\Lambda R_\Sigma^2 + M) < -[S_0^2 + S_0\sqrt{S_0^2 + 4}] \quad (4.4.78)$$

e

(ii) $F \geq 0$

$$S_0^2 - (\Lambda R_\Sigma^2 + M) \geq -\frac{|\Lambda| R_\Sigma F}{|\Lambda R_\Sigma^2 + M|^3}, \quad \text{para } -[S_0^2 + S_0\sqrt{S_0^2 + 4}] \leq (\Lambda R_\Sigma^2 + M) < 0, \quad (4.4.79)$$

o que nos mostra que é sempre possível encontrarmos um conjunto de Λ , R_Σ , M e S_0 , tal que a camada satisfaça todas as condições de energia.

4.5 Conclusão

Obtemos uma solução das equações de Einstein para um fluido anisotrópico, circularmente simétrico, com auto-similaridade de primeiro tipo em um espaço-tempo $(2+1)$ -dimensional. Introduzimos as equações de estado $p_r \equiv 0$ e $p_\theta = \omega\rho$, para resolver o problema e mostrar que existe uma solução, que representa colapso gravitacional de um fluido anisotrópico. A formação final pode representar um buraco negro padrão ou um buraco negro com fluido de energia fantasma, com a introdução de uma camada infinitesimal intermediária, que satisfaz todas as condições de energia.

Capítulo 5

Não-homogeneidade como um Possível Fator Responsável pela Aceleração do Universo

Neste capítulo, a partir de soluções com auto-similaridade de primeiro e segundo tipos, investigamos a hipótese de geração de aceleração efetiva de um fluido decorrente de efeitos médios devido a não-homogeneidades do mesmo.

5.1 Introdução

Na década passada, uma das descobertas mais marcantes foi a que nosso Universo está acelerando. Isto foi primeiro observado do alto redshift de supernova do tipo Ia [51, 52], e posteriormente confirmado com base na radiação da microonda cósmica de fundo [53, 54] e na estrutura de larga escala [55, 56]. Na teoria da relatividade geral de Einstein, para obtermos esta expansão, precisamos introduzir um componente no campo de matéria do Universo com uma grande pressão negativa, que é denominada energia escura. Observações astronômicas recentes indicam que nosso Universo é plano e consiste de aproximadamente 70% de energia escura, 25% de matéria escura e 5% de matéria bariônica e radiação. A natureza da energia escura é desconhecida, e muitos modelos radicalmente diferentes têm sido propostos, tais como, quintaessência [27, 28], gás Chaplygin [57], energia fantasma [58] e energia escura no universo de branas, entre muitos outros [33, 34, 35, 36] (ver os artigos de revisão [37, 38] e suas referências).

Quando ω , o parâmetro de proporcionalidade entre pressão e densidade de energia na equação de estado, é menor do que -1 , caracterizando um fluido fantasma, uma carac-

terística notável é que o Universo acabará sua vida em um big-rip (singularidade futura) num intervalo de tempo finito. Isto é, para um Universo dominado por fluido fantasma, seu tempo de vida total é finito. Antes da morte do universo, a energia escura fantasma rasgará, à parte, a via láctea, o sistema solar, a terra e por último as moléculas, átomos, núcleos e nucleons dos quais são compostos [59, 60]. Para detalhes, nos referimos a [61, 62].

A isotropia de modelos cosmológicos é assumida por causa da isotropia da radiação da microonda cósmica de fundo (CMBR) [63, 64]. Todavia, dados observacionais têm mostrado que o Universo vem de uma fase desacelerada para um estágio acelerado de evolução em tempos recentes. Esta transição pode ser devida à dominação de energia escura sobre outros campos de matéria, determinando a recente aceleração do Universo. Neste cenário pode ser importante considerar a anisotropia do Universo, porque a informação carregada pela radiação está associada com o tempo de recombinação, quando a energia escura era desprezível (na hipótese aqui considerada). Outro aspecto, que costuma ser ignorado na maioria dos modelos cosmológicos, refere-se à importância da não-homogeneidade para efeito de aceleração de um fluido, como já apontada por vários autores [65, 66, 67, 68, 69].

Neste capítulo estudamos este problema, usando o cenário mais simples de gravidade (2+1)-dimensional. Nosso propósito é investigar o papel da não-homogeneidade na aceleração dos fluidos, considerando também anisotropia na pressão.

5.2 Soluções das Equações de Campo de Einstein Considerando a Equação de Estado $p_r = 0$

Aqui voltamos ao problema tratado no capítulo 3. Considerando uma equação de estado adicional, $p_r = 0$, de forma a resolver o sistema de equações, obtemos as equações (3.2.6) e (3.2.7). Vimos que a primeira delas admite duas soluções diferentes, dadas por (3.2.8) e (3.2.14). Vejamos cada uma delas separadamente, agora no contexto cosmológico.

5.3 A Solução $\phi_{,\chi} = 0$

Neste caso, como já apresentado no capítulo 3, temos a equação

$$y(\chi) = \frac{\alpha}{[\beta e^{\alpha\chi} - 1]}, \quad (5.3.1)$$

que admite duas famílias de soluções. Se escolhermos $\beta \neq 0$, chegamos na métrica dada pela equação (3.2.25), que representa a formação de buraco negro ou singularidade localmente

nua [47]. O caso em que $\beta = 0$ é considerado na subseção seguinte.

Caso C: $\beta = 0$

Neste caso precisamos voltar à equação (5.3.1) para reobter a expressão para a função $S(\chi)$. Então, temos

$$y(\chi) = -\alpha. \quad (5.3.2)$$

Levando a equação (5.3.2) em (3.1.21), encontramos uma equação diferencial para a função $S(\chi)$

$$\frac{S_{,\chi}}{S} = -\alpha, \quad (5.3.3)$$

cuja solução é dada por

$$S(\chi) = S_0 e^{-\alpha\chi}. \quad (5.3.4)$$

Substituindo a equação (5.3.2) em (3.1.24), temos uma equação diferencial para $\psi(\chi)$

$$\psi_{,\chi} = -\alpha, \quad (5.3.5)$$

cuja solução é dada por

$$\psi(\chi) = -\alpha\chi + \Psi_0. \quad (5.3.6)$$

Fazendo uso das relações

$$\chi = \ln(z) = \ln \left[\frac{r}{(t)^{\frac{1}{\alpha}}} \right],$$

$$\tau = -\ln(t),$$

podemos reescrever as soluções em função de r e t , como

$$\phi(r, t) = \phi_0, \quad (5.3.7)$$

$$S(r, t) = S_0 \left(\frac{t}{r^\alpha} \right), \quad (5.3.8)$$

e

$$\psi(r, t) = -\alpha \ln \left[\frac{r}{(t)^{1/\alpha}} \right] + \Psi_0. \quad (5.3.9)$$

Observe que, embora a solução para $S(\chi)$ possa ser obtida fazendo-se $\beta = 0$ em (3.2.22), isto não é verdade para $\psi(\chi)$, sequer para alguma escolha particular do parâmetro auto-similar α .

A densidade de energia e as pressões radial e tangencial são dadas por

$$\rho = \frac{1}{Kl^2 e^{2\phi_0} t^2}, \quad (5.3.10)$$

e

$$p_r = p_\theta = 0. \quad (5.3.11)$$

Esta representa, então, uma solução homogênea de poeira, cuja métrica pode ser escrita, de acordo com a equação (3.1.3), como

$$ds^2 = e^{2\phi_0} dt^2 - \frac{t^2}{r^{2\alpha}} [\Psi_0^2 dr^2 + S_0^2 r^2 d\theta^2]. \quad (5.3.12)$$

O raio geométrico, dado pela equação (2.2.3), pode ser escrito como

$$R_g = S_0 t r^{(1-\alpha)}. \quad (5.3.13)$$

A condição $R_g > 0$ impõe que $S_0 > 0$. Da expressão para ρ podemos identificar uma singularidade em $t = 0$, que corresponde a um $R_g = 0$, representando uma singularidade inicial. Podemos ver que o fluido está expandindo com velocidade constante. Isto é,

$$R_{g,t} = S_0 r^{(1-\alpha)} > 0 \quad (5.3.14)$$

e

$$R_{g,t,t} = 0. \quad (5.3.15)$$

Então, temos um fluido homogêneo de poeira, que expande sem qualquer aceleração, começando em uma singularidade inicial ($t = 0$), com todas as condições de energia satisfeitas.

5.4 A Solução $y + 1 = 0$

Neste caso vimos que as equações de campo impõem $\alpha = 1$, caracterizando, portanto, uma solução particular para a solução auto-similar do primeiro tipo, com a função ψ indeterminada.

A densidade de energia e as pressões radial e tangencial são dadas por

$$\rho = -\frac{e^{-2\phi_0}\psi_{,\chi}}{l^2 K t^2}, \quad (5.4.1)$$

$$p_r = 0 \quad (5.4.2)$$

e

$$p_\theta = -\frac{e^{-2\phi_0}[\psi_{,\chi\chi} + \psi_{,\chi}(\psi_{,\chi} + 1)]}{l^2 K t^2}. \quad (5.4.3)$$

A métrica para esta solução, considerando a equação (3.1.3), pode ser escrita como

$$ds^2 = e^{2\phi_0} dt^2 - e^{2\psi} dr^2 - S_0^2 t^2 d\theta^2. \quad (5.4.4)$$

Note que, enquanto a solução representada por (5.3.12) é essencialmente homogênea, a métrica (5.4.4) nos permite considerar casos não-homogêneos, se impusermos a condição

$$\psi_{,\chi} = f(\chi). \quad (5.4.5)$$

Na seção seguinte consideramos algumas escolhas especiais para $\psi_{,\chi}$. Primeiramente investigamos as soluções homogêneas.

Caso *D*: Fluidos Homogêneos

Caso *D.1*: $\psi_{,\chi} = \lambda_0$

Para $\psi_{,\chi} = \lambda_0$, onde λ_0 é uma constante arbitrária, temos

$$\psi(\chi) = \lambda_0\chi + \lambda_2, \quad (5.4.6)$$

λ_2 sendo outra constante arbitrária. Da métrica (5.4.4), isto implica em

$$ds^2 = e^{2\phi_0} dt^2 - \Psi_0 \left(\frac{r}{t}\right)^{2\lambda_0} dr^2 + S_0^2 t^2 d\theta^2. \quad (5.4.7)$$

Esta métrica coincide com aquela dada pela equação (5.3.12) para $\lambda_0 = -\alpha = -1$. O raio geométrico revela que o fluido está também expandindo a uma taxa constante. A densidade de energia e as pressões radial e tangencial são dadas por

$$\rho = -\frac{e^{-2\phi_0}}{Kt^2} \lambda_0, \quad (5.4.8)$$

$$p_r = 0 \quad (5.4.9)$$

e

$$p_\theta = -\frac{e^{-2\phi_0}}{Kt^2} [\lambda_0(\lambda_0 + 1)]. \quad (5.4.10)$$

A condição de energia fraca impõe que

$$\rho \geq 0 \quad (5.4.11)$$

e

$$\rho + p_\theta \geq 0, \quad (5.4.12)$$

enquanto que a condição de energia forte requer somente a equação (5.4.12) e a condição de energia dominante as equações (5.4.11), (5.4.12) e

$$\rho - p_\theta \geq 0. \quad (5.4.13)$$

As equações (5.4.11), (5.4.12) e (5.4.13) fornecem, respectivamente, as condições

$$\lambda_0 \leq 0, \quad (5.4.14)$$

$$\lambda_0 \leq -2 \quad (5.4.15)$$

e

$$-\lambda_0^2 \leq 0, \quad (5.4.16)$$

que são sempre satisfeitas se

$$\lambda_0 \leq -2. \quad (5.4.17)$$

O raio geométrico é dado ainda por (5.3.13), mas agora com $\alpha = 1$. Logo, esta solução representa também uma situação de expansão com velocidade constante. Agora consideramos algumas soluções não-homogêneas.

Caso E: Fluidos não-Homogêneos

Modelos cosmológicos são usualmente contruídos baseados no fato de que, em escalas suficientemente grandes, o Universo é homogêneo e isotrópico. Esta prática é consistente, tendo em vista que não-homogeneidades são pequenas e descritas como perturbações lineares. Para que estas características sejam resguardadas, é necessário que ao trabalharmos com não-homogeneidades a abordagem seja feita em termos de parâmetros médios.

O problema de como considerar os efeitos dinâmicos médios num modelo cosmológico não-homogêneo, em geral, vem sendo investigado há muito tempo [70]. No contexto da cosmologia newtoniana, Buchert e Ehlers (1997), propuseram uma solução para cosmologia com fluidos de poeira. A idéia básica pode ser resumida no seguinte. Seja um domínio no espaço Euclidiano D , espacialmente compacto e simplesmente conectado, com volume $|D| = V_D$. A média espacial da equação de Raychaudhuri para a evolução da taxa da expansão, na hipótese de conservação da massa contida no domínio, produz uma equação para o fator de escala, $a_D \propto V_D^{1/3}$, no espaço 3-dimensional. Esta equação contém termos de fonte, além da densidade de massa média, com a média tomada sobre as flutuações de cisalhamento, vorticidade e escalares de expansão devido à presença da não-homogeneidade. Em outro trabalho, Buchert [68], generalizou seus resultados, levando-os para o contexto da relatividade geral e posteriormente estendeu-os para um fluido perfeito (2001).

Seguindo Buchert [68], podemos definir, portanto, um fator de escala através de valores médios. Para espaços-tempos $(2+1)$ -dimensionais, a média espacial de um campo escalar f , como uma função das coordenadas lagrangianas e do tempo sobre uma porção compacta arbitrária do fluido D , é definida pelo volume integral

$$\langle f(t, X^i) \rangle_D := \frac{1}{V_D} \int_D f(t, X^i) J d^2 X, \quad \text{onde } J := \sqrt{\det(g_{ij})}, \quad (5.4.18)$$

onde o volume é dado por $V_D(t) := \int_D J d^2 X$. Também introduzimos um fator de escala efetivo e adimensional através do volume (normalizado pelo volume inicial do domínio V_{D_0}):

$$a_D(t) = \left(\frac{V_D}{V_{D_0}} \right)^{1/2}. \quad (5.4.19)$$

Isto significa que estamos interessados apenas na dinâmica efetiva do domínio.

No nosso caso, o volume da região é dado por

$$\begin{aligned} V_{D(t)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sqrt{g_{rr}(t, r) g_{\theta\theta}(t, r)} dr d\theta = \\ &= 2\pi S_0 t \int_0^{r_0} e^{\psi(\chi)} dr. \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

A seguir analisamos uma escolha particular para a função $\psi(\chi)$.

Caso E.1: $\psi_{,\chi} = \lambda_0 \chi^{\lambda_1} + \lambda_2$

Esta escolha é interessante, uma vez que admite a solução homogênea (5.4.7), como um caso particular, permitindo estudarmos o efeito da quebra de homogeneidade sobre o efeito de aceleração do fluido. Para este caso, onde λ_0 , λ_1 e λ_2 são constantes, na intenção de simplificarmos a análise, tomemos $\lambda_1 = -1$, o que nos fornece

$$\psi_{,\chi}(\chi) = \frac{\lambda_0}{\chi} + \lambda_2, \quad (5.4.21)$$

de onde obtemos a solução para $\psi(\chi)$

$$\psi(\chi) = \lambda_0 \ln \chi + \lambda_2 \chi + \lambda_3. \quad (5.4.22)$$

A métrica (5.4.4) pode ser, então, reescrita como

$$ds^2 = e^{2\phi_0} dt^2 - \Psi_0 z^\beta (\ln(z))^{\frac{\gamma\delta}{2}} dr^2 - S_0^2 t^2 d\theta^2, \quad (5.4.23)$$

com $z = r/t$, $\lambda_0 = \gamma\delta/4$, $\lambda_2 = \beta/2$ e a densidade de energia e as pressões radial e tangencial sendo dadas por

$$\rho = -\frac{e^{-2\phi_0} \left(\frac{\lambda_0}{\chi} + \lambda_2 \right)}{l^2 K t^2} = -\frac{e^{-2\phi_0}}{l^2 K t^2} \left(\frac{\gamma\delta}{4\chi} + \frac{\beta}{2} \right), \quad (5.4.24)$$

$$p_r = 0, \quad (5.4.25)$$

e

$$\begin{aligned} p_\theta &= -\frac{e^{-2\phi_0}}{l^2 K t^2} \left\{ -\frac{\lambda_0}{\chi^2} + \left(\frac{\lambda_0}{\chi} + \lambda_2 \right) \left[\frac{\lambda_0}{\chi} + \lambda_2 + 1 \right] \right\} \\ &= -\frac{e^{-2\phi_0}}{l^2 K t^2} \left\{ -\frac{\gamma\delta}{4\chi^2} + \left(\frac{\gamma\delta}{4\chi} + \frac{\beta}{2} \right) \left[\frac{\gamma\delta}{4\chi} + \frac{\beta}{2} + 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

As equações (5.4.11), (5.4.12) e (5.4.13), fornecem as condições

$$\frac{\gamma\delta}{4\chi} + \frac{\beta}{2} \leq 0 \quad (5.4.27)$$

$$-\left(\frac{\gamma\delta}{4\chi} + \frac{\beta}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left[-\frac{\gamma\delta}{4\chi^2} + \left(\frac{\gamma\delta}{4\chi} + \frac{\beta}{2}\right)^2\right], \quad (5.4.28)$$

e

$$\frac{\gamma\delta}{4\chi^2} - \left(\frac{\gamma\delta}{4\chi} + \frac{\beta}{2}\right)^2 \leq 0. \quad (5.4.29)$$

Como podemos ver, considerando as equações (5.4.27) e (5.4.29), a condição (5.4.28) pode ser satisfeita para certos intervalos de χ . Analisando as condições de energia (5.4.27), (5.4.28) e (5.4.29), temos, a partir da equação (5.4.29)

$$F \equiv a(1-a)y^2 - 2aby - b^2 \leq 0, \quad (5.4.30)$$

onde $a \equiv \frac{\gamma\delta}{4}$, $b \equiv \frac{\beta}{2}$ e $y \equiv \frac{1}{\chi}$.

Fazendo a análise gráfica da condição de energia (5.4.30), temos que as raízes desta função são dadas por

$$y_{1F,2F} = \frac{ab \mp \sqrt{ab^2}}{a(a-1)}. \quad (5.4.31)$$

Para que exista um intervalo em que a condição (5.4.30) seja satisfeita, ou seja, em que a função F seja negativa, é necessário que existam raízes para F , e isto é garantido somente se o valor dentro da raiz da equação (5.4.31) for positivo, logo temos

$$a > 0. \quad (5.4.32)$$

As derivadas primeira e segunda da equação (5.4.30) são dadas por

$$F_{,y} = 2a(1-a)y - 2ab \quad (5.4.33)$$

e

$$F_{,y,y} = 2a(1 - a). \quad (5.4.34)$$

Existem, então, dois possíveis casos, que são $a(a - 1) > 0$ e $a(a - 1) < 0$.

Caso E.1.1: $a(a - 1) > 0$

Neste caso, considerando a equação (5.4.32) temos

$$a > 1, \quad (5.4.35)$$

e da equação (5.4.33) podemos obter o valor de y para o qual F é extremo, ou seja, obtendo a solução para $F_{,y} = 0$, que é dado por

$$y_{MF} = \frac{-b}{a - 1}, \quad (5.4.36)$$

e é negativo, lembrando que $b > 0$ (para que o volume (5.4.59) seja finito, como será mostrado adiante) e $a > 1$.

A equação (5.4.34) é negativa para este caso, indicando que (5.4.36) é o ponto máximo da função F , como pode ser visto na figura 5.1. Isto nos fornece os intervalos para y

$$y \geq y_{1F} \quad \text{e} \quad y \leq y_{2F}. \quad (5.4.37)$$

Voltando à condição de energia (5.4.27) temos

$$ay + b \leq 0, \quad (5.4.38)$$

que nos fornece

$$y \leq \frac{-b}{a} = y_0. \quad (5.4.39)$$

Aqui $y_0 < 0$, logo o intervalo em que $y \geq y_{1F}$ fica reduzido a $y_{1F} \leq y < 0$, mantendo assim a negatividade de y .

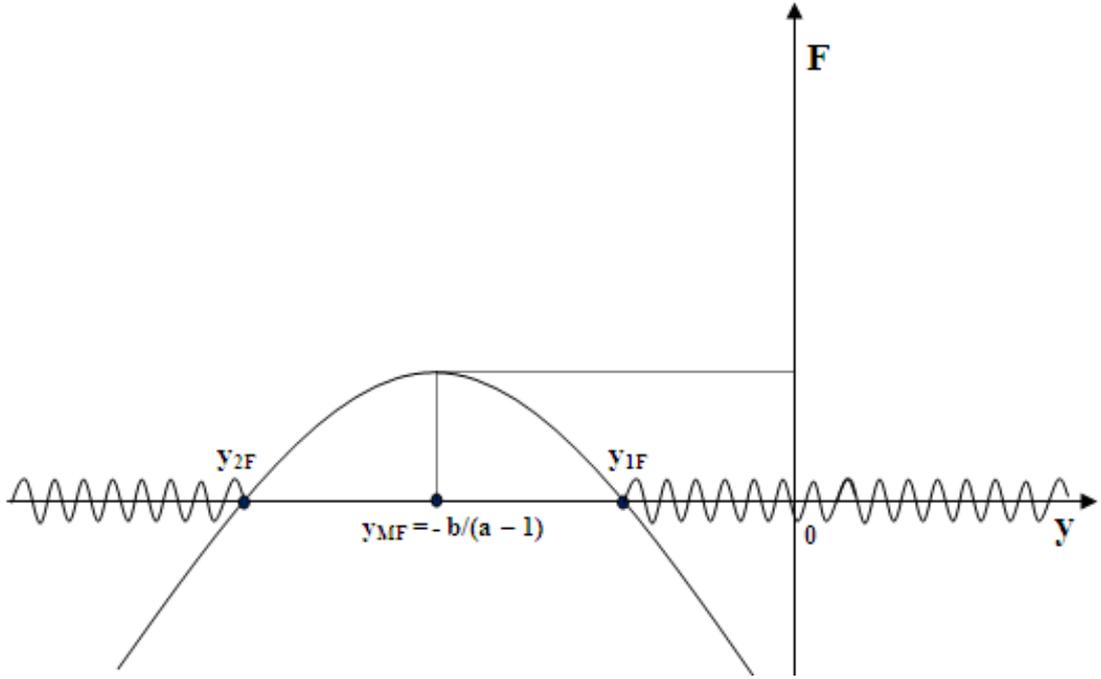


Figura 5.1: Gráfico da função F dada pela equação (5.4.30), com intervalos para y dados pela equação (5.4.37), garantindo a negatividade da função.

A última condição de energia a ser analisada é a (5.4.28), que nos fornece

$$-ay^2 + (ay + b)^2 + 2(ay + b) \leq 0. \quad (5.4.40)$$

Podemos reescrever a equação (5.4.40) na forma

$$G \equiv a(a-1)y^2 + 2a(b+1)y + b(2+b) \leq 0. \quad (5.4.41)$$

Fazendo a análise gráfica da função G , dada pela equação (5.4.41), temos que suas raízes são dadas por

$$y_{1G,2G} = \frac{-2a(b+1) \mp \sqrt{4[a^2 + ab(2+b)]}}{2a(a-1)}, \quad (5.4.42)$$

que existem somente se

$$a^2 + ab(2+b) \geq 0. \quad (5.4.43)$$

A equação (5.4.43) implica em

$$a \geq -(2b + b^2), \quad (5.4.44)$$

que está em acordo com o intervalo dado por (5.4.35) para a , se considerarmos, de (5.4.44), apenas o intervalo em que $a \geq 0$.

As derivadas primeira e segunda da função G são dadas por

$$G_{,y} = 2a(a - 1)y + 2a(b + 1) \quad (5.4.45)$$

e

$$G_{,y,y} = 2a(a - 1). \quad (5.4.46)$$

Da equação (5.4.45) temos que o valor de y associado ao valor extremo de G é

$$y_{MG} = \frac{-(b + 1)}{a - 1}, \quad (5.4.47)$$

que é negativo e representa o ponto mínimo da função G , tendo em vista que a equação (5.4.46) é positiva. A figura 5.2 mostra o gráfico da função G para intervalos de y .

A negatividade da função G é garantida para o intervalo

$$y_{1G} \leq y \leq y_{2G}, \quad (5.4.48)$$

que está em acordo com o intervalo (5.4.39), dado pela condição de energia (5.4.27).

Reescrevendo os intervalos para y , temos

$$y \leq y_{2F}, \quad y_{1F} \leq y \leq 0 \quad \text{e} \quad y_{1G} \leq y \leq y_{2G}. \quad (5.4.49)$$

É necessária ainda a comparação entre os módulos dos valores para $y_{1F,2F}$, $y_{1G,2G}$, y_0 e $y_{MF,MG}$, para determinar o intervalo comum, que satisfaz todas as condições de energia. Sendo assim, comparando $|y_{MF}|$ e $|y_{MG}|$ temos

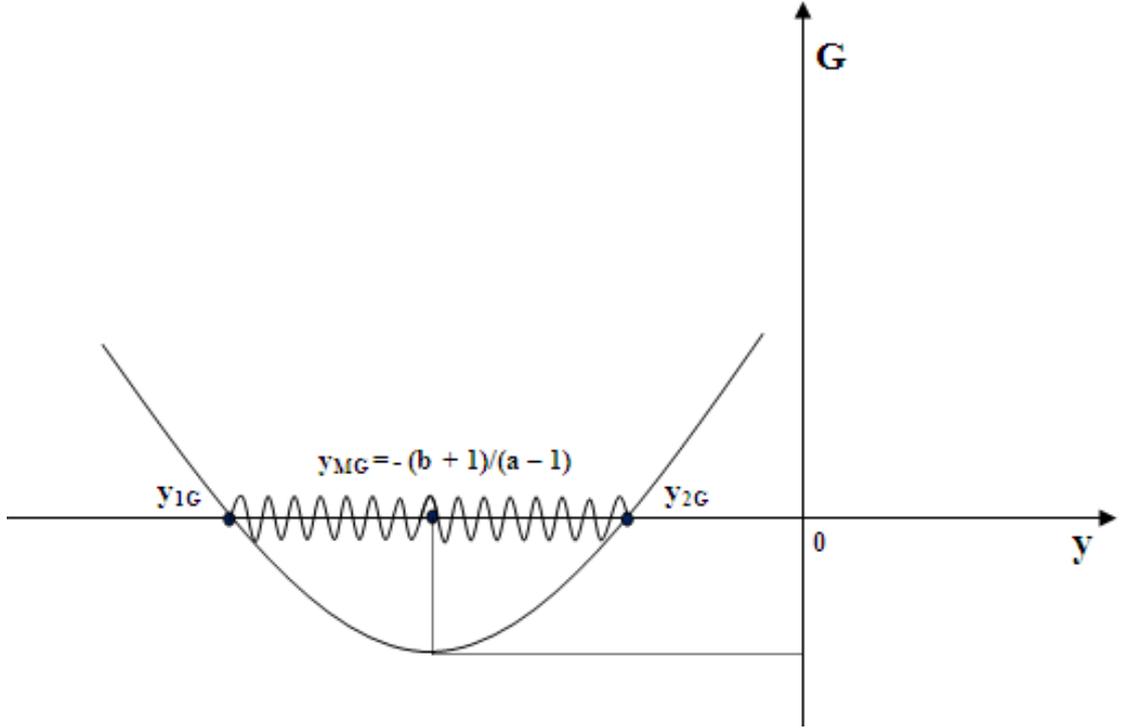


Figura 5.2: Gráfico da função G dada pela equação (5.4.41), com intervalo para y dado pela equação (5.4.49), garantindo a negatividade da função.

$$|y_{MG}| - |y_{MF}| = \frac{1}{a-1} > 0, \quad (5.4.50)$$

e obtemos

$$|y_{MG}| > |y_{MF}|. \quad (5.4.51)$$

Para os módulos $|y_{2G}|$ e $|y_{MF}|$ temos

$$|y_{2G}| - |y_{MF}| = \frac{a - \sqrt{a(a+2b+b^2)}}{a(a-1)} < 0, \quad (5.4.52)$$

logo

$$|y_{MF}| > |y_{2G}|. \quad (5.4.53)$$

Para os módulos $|y_{2G}|$ e $|y_{1F}|$ temos

$$|y_{2G}| - |y_{1F}| = \frac{(a + \sqrt{ab^2}) - \sqrt{a(a + 2b + b^2)}}{a(a - 1)} > 0, \quad (5.4.54)$$

então

$$|y_{2G}| > |y_{1F}|. \quad (5.4.55)$$

Para os módulos $|y_{2F}|$ e $|y_{1G}|$ temos

$$|y_{2F}| - |y_{1G}| = \frac{-(a - \sqrt{ab^2}) - \sqrt{a(a + 2b + b^2)}}{a(a - 1)} < 0, \quad (5.4.56)$$

o que fornece

$$|y_{1G}| > |y_{2F}|. \quad (5.4.57)$$

A comparação entre os valores de $|y_{2F}|$ e $|y_{MG}|$ é desnecessária, pois qualquer que seja o resultado, haverá um intervalo y , que satisfaz todas as condições de energia.

Da figura 5.3 podemos ver que o intervalo, que satisfaz todas as condições de energia se encontra em $y_{1G} \leq y \leq y_{2F}$.

Agora, calculamos os parâmetros médios para a velocidade e a aceleração do fluido, e analisamos seus comportamentos.

De (5.4.20), temos

$$V_{D(t)} = 2\pi S_0 t^2 \Psi_0 \int_0^{z_0} z^{\frac{\beta}{2}} (\ln(z))^{\frac{\gamma\delta}{4}} dz, \quad (5.4.58)$$

sendo $z_0 = r_0/t$. A equação (5.4.58) nos fornece

$$V_{D(t)} = 2\gamma\delta\pi S_0 t^2 \Psi_0 \frac{z_0^{\frac{\beta+2}{2}}}{\beta+2} \left(-\frac{2}{\beta+2} + \ln(z_0) \right). \quad (5.4.59)$$

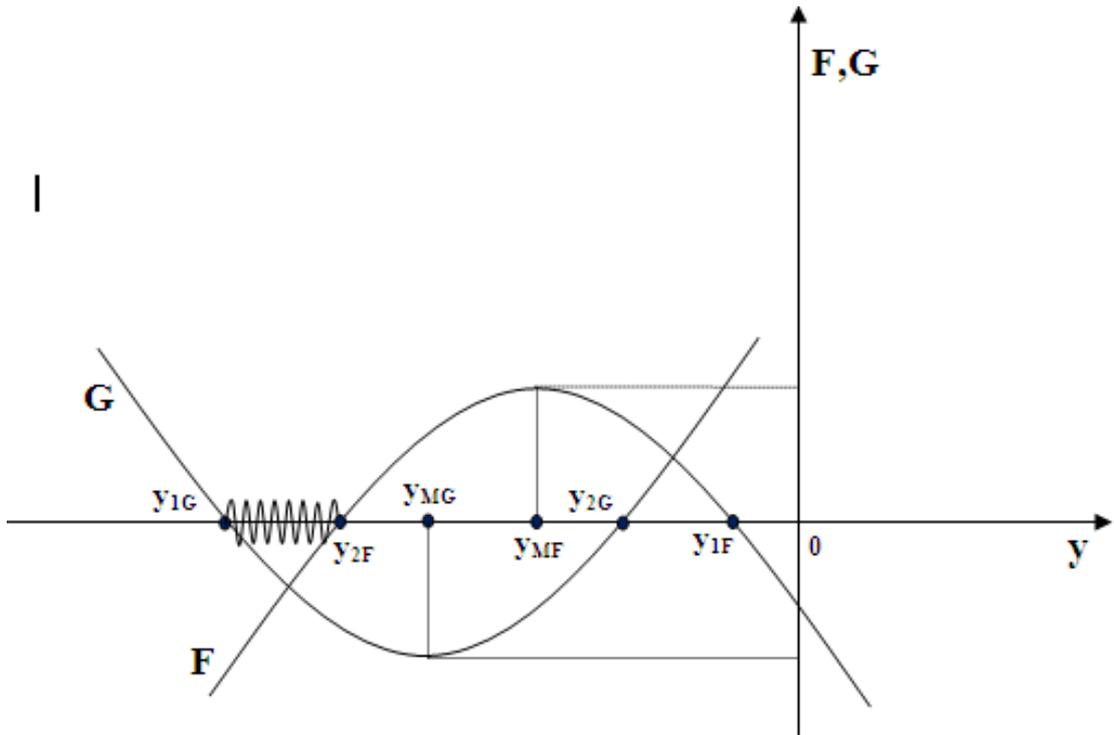


Figura 5.3: Gráfico das funções F e G com relação a y . A interseção entre os intervalos para y das duas funções determina o intervalo $y_{1G} \leq y \leq y_{2F}$ para y , que satisfaz as três condições de energia.

Para ter um volume finito precisamos considerar $\beta \geq 0$.

$$a_D(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2-\beta}{2}} \frac{-\frac{2}{\beta+2} + \ln\left(\frac{r_0}{t}\right)}{-\frac{2}{\beta+2} + \ln\left(\frac{r_0}{t_0}\right)}, \quad (5.4.60)$$

que é positivo pois $\beta > 0$ e $\chi < 0$, com seu valor pertencendo ao intervalo $[y_{1F}, y_{2G}]$, de modo a satisfazer todas as condições de energia. De (5.4.60) calculamos o parâmetro velocidade através da sua primeira derivada, dado por

$$a_{D,t}(t) = \frac{t^{(c-1)}}{ft_0^c} \{c[d + \ln(r_0/t)] - 1\}, \quad (5.4.61)$$

onde $c = \frac{2-\beta}{2}$, $d = \frac{-2}{\beta+2}$, $f = \frac{-2}{\beta+2} + \ln\left(\frac{r_0}{t_0}\right)$ e $\chi = \ln(r_0/t)$. Podemos então calcular o parâmetro aceleração através da segunda derivada,

$$a_{D,t,t}(t) = \frac{t^{(c-2)}}{ft_0^c} \{c(c-1)[d + \ln\left(\frac{r_0}{t}\right)] - (2c-1)\}. \quad (5.4.62)$$

Da equação (5.4.61) vemos que existem soluções com expansão, se escolhermos $0 \leq \beta \leq 2$, já que nestes casos o parâmetro velocidade é positivo.

O parâmetro aceleração dado por (5.4.62) é positivo se

$$\frac{\beta^2 - 2\beta}{4} \left[\frac{-2}{\beta+2} + \ln\left(\frac{r_0}{t}\right) \right] + \beta - 1 < 0, \quad (5.4.63)$$

o que nos fornece um valor limite para χ dado por

$$\chi < \frac{-2\beta^2 - 8\beta + 8}{\beta(\beta^2 - 4)} = \chi_1, \quad (5.4.64)$$

correspondendo a

$$y_1 = \frac{\beta(\beta^2 - 4)}{-2\beta^2 - 8\beta + 8}. \quad (5.4.65)$$

Fazendo a análise gráfica de (5.4.65), é fácil verificar que para $\beta \leq 0,82$, $y_1 \geq 0$. Logo para $0 \leq \beta \leq 0,82$ temos uma solução, que descreve uma expansão acelerada, para um fluido que satisfaz todas as condições de energia.

Portanto, a solução não-homogênea dada pela métrica (5.4.23), para uma escolha conveniente de intervalos para os parâmetros a e β , descreve um universo $(2 + 1)$ -dimensional em expansão acelerada.

O caso $a(a-1) < 0$, embora possa também fornecer soluções que descrevam um processo de expansão acelerada, nada acrescentará ao propósito deste trabalho, uma vez que poderá, no máximo, ampliar as possibilidades de soluções deste tipo.

Mais interessante será a análise de outras soluções não-homogêneas, de modo a verificar se a expansão acelerada é, de fato, favorecida pela não-homogeneidade.

5.5 Conclusão

Obtemos todas as possíveis soluções das equações de campo de Einstein para um fluido anisotrópico e esféricamente simétrico, auto-similar de segundo tipo em um espaço-tempo $(2 + 1)$ -dimensional. Precisamos introduzir uma equação de estado, $p_r = 0$, para resolver o problema e mostramos que a única solução neste caso representa um fluido de poeira. As propriedades globais e locais são estudadas, sempre considerando as condições de energia. Elas revelam que para o caso $\phi_{,\chi} = 0$, o fluido se expande sem qualquer aceleração, começando em uma singularidade inicial ($t = 0$), com todas as condições de energia satisfeitas. Para o caso $y + 1 = 0$, fazendo escolhas para a função $\psi(\chi)$ indeterminada, encontramos os sub-casos homogêneo e não-homogêneo. Obtivemos para o sub-caso homogêneo uma situação de expansão com velocidade constante. O sub-caso não-homogêneo, nos fornece um intervalo $0 \leq \beta \leq 0,82$, para β , onde a solução, por nós obtida, descreve uma expansão acelerada, para um fluido que satisfaz todas as condições de energia, sugerindo uma possível influência da não-homogeneidade na expansão acelerada do Universo.

Capítulo 6

Conclusão

Nosso propósito com este trabalho foi lançar luz sobre alguns tópicos pertencentes a duas grandes e importantes áreas da física na atualidade, que são a cosmologia moderna e o colapso gravitacional.

Não há quem possa negar que um dos maiores desafios da cosmologia moderna trata-se da compreensão dos fatores que levam o Universo a experimentar uma expansão acelerada, o que nos faz refletir sobre a sua constituição. Modelos teóricos, que pressupõem a teoria da relatividade geral, combinados com dados observacionais, apontam para a predominância de um fluido de energia escura, ou seja, um fluido exótico, sobre o qual pouco ou quase nada se sabe. Teorias alternativas à relatividade geral vêm sendo também investigadas, bem como modificações de algumas hipóteses teóricas, tal qual a homogeneidade do Universo, ainda no âmbito na relatividade geral.

Por outro lado, o estudo do colapso gravitacional traz à tona muitas questões intrigantes e de grande relevância em gravitação . Embora muitos pesquisadores consagrados tenham se dedicado a este tema, sobretudo nas últimas quatro décadas, nossa compreensão do problema ainda se apoia em várias conjecturas. A formação de buracos negros ou singularidades nuas num processo de colapso de um fluido bem comportado, ou mesmo a possibilidade de construção de objetos como as estrelas de vácuo gravitacionais (gravastares), são temas muito atuais. A hipótese de formação de estruturas constituídas parcialmente por energia escura surge como uma interseção entre essas duas grandes áreas.

Nessa tese, investigamos alguns desses problemas no cenário da gravitação (2+1)-dimensional. Embora essa dimensionalidade do espaço-tempo não corresponda à dimensionalidade do nosso Universo, os estudos aqui desenvolvidos podem enriquecer nossa compreensão de alguns dos problemas descritos acima. A grande vantagem em se considerar a gravidade nessa dimensão está na maior simplicidade matemática das equações de campo e, sobretudo, na possibilidade de uma investigação analítica.

6.1 Resumo e Balanço dos Resultados

Neste trabalho é feito um estudo detalhado de todas as soluções das equações de campo de Einstein, para um fluido anisotrópico, com auto-similaridade de primeiro e segundo tipos, num espaço-tempo (2+1)-dimensional. Foi necessária a introdução da equação de estado, $p_r = 0$, para resolver o problema, devido ao número reduzido de equações em comparação com o número de funções a serem determinadas. As propriedades globais e locais são estudadas, sempre fazendo a análise das condições de energia.

Considerando inicialmente a auto-similaridade de segundo tipo ($\alpha \neq 0, 1$), ao obter as soluções das equações de Einstein encontramos 3 possíveis famílias, sendo que uma delas reduz-se a um caso particular de auto-similaridade de primeiro tipo. Para uma delas mostramos, no capítulo 3, que somente fluidos de poeira são permitidos. Estudamos as propriedades locais e globais das soluções das equações de campo de Einstein em detalhes e os diagramas de Penrose correspondentes sugerem que os casos $\beta > 0, \alpha < 0$; $\beta < 0, 0 < \alpha < 1$ e $\beta < 0, \alpha < 0$, podem representar a formação de buracos negros como consequência do colapso gravitacional do fluido. Mas, em todos os três casos, um segmento de singularidade tipo-tempo foi desenvolvido [cf. figs. 3,5 e 6], que é localmente nua.

Já para a família de soluções com auto-similaridade do primeiro tipo ($\alpha = 1$) foi considerada a equação de estado $p_\theta = \omega\rho$ e vimos que existe uma solução que representa colapso gravitacional de um fluido anisotrópico. A formação final pode representar um buraco negro padrão ou um buraco negro com fluido de energia fantasma, com a introdução de uma camada fina intermediária, que satisfaz todas as condições de energia. Esses resultados são apresentados no capítulo 4.

No capítulo 5, agora estudando a segunda família de soluções com auto-similaridade de segundo tipo, para a qual temos agora $\beta = 0$, encontramos mais 2 sub-famílias de soluções, mas desta vez, soluções cosmológicas. Uma para o caso $\phi_{,\chi} = 0$, cujas soluções revelam que o fluido se expande sem qualquer aceleração, começando em uma singularidade inicial ($t = 0$), com todas as condições de energia satisfeitas. Para o caso $y+1 = 0$, a solução deixa uma das funções, $\psi(\chi)$, indeterminada. Fazendo escolhas para esta função, encontramos os sub-casos homogêneo e não-homogêneo. Obtemos para o sub-caso homogêneo uma situação de expansão com velocidade constante. O sub-caso não-homogêneo, nos fornece um intervalo $0 \leq \beta \leq 0,82$, para β , onde a solução por nós obtida, descreve uma expansão acelerada, para um fluido que satisfaz todas as condições de energia, evidenciando uma possível influência da não-homogeneidade na expansão acelerada do Universo.

6.2 Perspectivas Futuras

Como foi colocado na seção anterior, encontramos uma solução, que representa a expansão acelerada de um fluido anisotrópico, satisfazendo todas as condições de energia. Isto nos leva a crer, que um possível fator responsável pela aceleração do Universo, pode ser a presença de não-homogeneidade. Como perspectiva futura, podemos considerar um maior aprofundamento da análise das soluções, no sentido de realizar um número maior de escolhas para a solução indeterminada $\psi(\chi)$. O intuito seria mostrar a contribuição positiva da presença de não-homogeneidades para a aceleração de fluidos bem comportados, sem a necessidade de consideração de fluidos exóticos.

De um modo mais geral, podemos buscar generalizações quadri-dimensionais para os resultados encontrados aqui.

Bibliografia

- [1] Mitchell, J.: *Phylosophical Transac. of the R. S.* **74**, 35 (1784).
- [2] Laplace, P.S.: The system of the world, *W. Flint, London* (1809).
- [3] Schwarzschild, K.: Uber das gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flus-
sigkeit nach der Einsteinchen theorie, *Sitezher. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-
Phys. Tech.*, 424-34 (1916).
- [4] Tolman, R.C.: Static solutions of Eisntein's field equations for spheres of fluid, *Phys.
Rev.* **55**, 364 (1939).
- [5] Oppenheimer, J.R., e Volkoff, G.: On massive neutron cores, *Phys. Rev.* **55**, 374
(1939).
- [6] Oppenheimer, J.R. e Snyder, H.: On continued gravitational contraction, *Phys. Rev.*
56, 455 (1939).
- [7] Penrose, R.: *Phys. Rev.* **14**, 57 (1965); Hawking, S.W.: *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A**
300, 187; Hawking S W e Penrose R 1970 *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A314**, 529 (1967).
- [8] Vaidya, P.C.: *Nature* **171**, 206 (1953).
- [9] Eardley, D. e Smarr, L.: *Phys. Rev D* **19**, 2239(1979); *Class. Quantum Grav.* **8**, 1339
(1991) .
- [10] Christodoulou, D.: *Commun. Math. Phys.* **93**, 171 (1984).

- [11] Ori, A. e Piran, T.: *Phys. Rev. D* **42**, 1068 (1990).
- [12] Penrose, R.: *Riv. Nuovo Cimento* **1**, 252 (1969).
- [13] Choptuik, M.W.: Critical behavior in escalar field collapse in deterministic chaos in general relativity, *eps. D. Hobill et all., Plenum Press, New York* **P. 155** (1994).
- [14] Cahill, A.H. e Taub, M.E.: *Commun. Math. Phys.* **21**, 1 (1971).
- [15] Carter, B. e Henriksen, R.N.: *Ann. Phys. Paris* **14**, 47 (1989).
- [16] Henriksen, R.N., Emslie, A.G. e Wesson, P.S.: *Phys. Rev D* **27**, 1219 (1983).
- [17] Lynden-Bell, D. e Lemos, P.S.: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **233**, 197 (1988).
- [18] Carter, B. e Henriksen, R.N.: *J. Math. Phys.* **32**, 2580 (1991).
- [19] Coley, A.A.: *Class. Quantum Grav.* **14**, 87 (1997).
- [20] Carr, B.J. e Coley, A.A.: *ibid.* **16**, R31 (1999).
- [21] Choptuik, M.W.: *Phys. Rev. Lett.* **70**, 9 (1993).
- [22] Wang, A.: Critical phenomena in gravitational collapse: the studies so far, *Braz. J. Phys.* **31**, 188 (2001) [arXiv:gr-qc/0104073].
- [23] Hirschmann, E. W. e Wang, A.: *Phys. Lett.* **A249**, 383 (1998) [arXiv:gr-qc/9802065].
- [24] Chan, R., da Silva, M.F.A., Villas da Rocha, J. F. e Wang, A.: *Int. J. Mod. Phys.* **D14**, 1725 (2005) [arXiv:gr-qc/0505046].
- [25] Chan, R., da Silva, M.F.A., Villas da Rocha, J. F. e Wang, A.: *Int. J. Mod. Phys.* **D14**, 1049 (2005) [arXiv:gr-qc/0406026].

- [26] Wald, R. M.: *General Relativity*, *University of Chicago Press, Chicago and London*, p. 218 (1984).
- [27] Caldwell, R.R., Dave, R. e Steinhardt, P.J.: *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1582 (1998).
- [28] Liddle, A.R. e Scherrer, R.J.: *Phys. Rev. D* **59**, 023509 (1999).
- [29] Dvali, G.R., Gabadadze, G. e Porrati, M.: *Phys. Lett. B* **484**, 112 (2000).
- [30] Deffayet, C.: *Phys. Lett. B* **502**, 199 (2001).
- [31] Capozziello, S., Carloni, S. e Troisi, A. (2003) [arXiv:astro-ph/0303041].
- [32] Carroll, S.M., et al.: *Phys. Rev. D* **70**, 043528 (2003).
- [33] Townsend, P.K. e Wohlfarth, N.R.: *Phys. Rev. Lett.* **91**, 061302 (2003).
- [34] Gibbons, G.W.: in *Supersymmetry, Supergravity and Related Topics*.
- [35] Pereira, P.R.C.T., da Silva, M.F.A. e Chan, R.: *IJMPD* **15**, 991 (2006).
- [36] Brandt, C.F.C., Chan, R., da Silva M.F.A. e Villas da Rocha, J.F.: *Gen. Relat. Grav.* **39**, 1675 (2007).
- [37] Copeland, E.J., Sami, M. e Tsujikawa, S.: *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 1753 (2006).
- [38] Padmanabhan, T.: (2007) [arXiv:gr-qc/0705.2533].
- [39] Chan, R., da Silva, M. F. A. e Villas da Rocha, J. F.: On anisotropic dark energy, *Modern Physics Letters A*, *aceito para publicação* (2009)[arXiv:gr-qc/0803.2508].
- [40] Bañados, M., Teitelboim, C. e Zanelli, J.: IAS preprint IASSNS-HEP-92/29, [hep-th/9204099].

- [41] Ida, D.: *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3758 (2000).
- [42] Bonnor, W.B. e Vickers, P.A.: *GRG* **13**, 29 (1981).
- [43] Israel, W.: *IL Nuovo Cimento Vol. 44 B, N. 1* (1966).
- [44] Giddings, S., Abbot, J. e kuchar, K.: *GRG* **16**, 751 (1984).
- [45] Schwinger, J.: *Phys. Rev.* **128**, 2425 (1962).
- [46] Hayward, S.A.: *Phys. Rev. Lett. D* **49**, 6467 (1994).
- [47] Martins, M.R., da Silva, M.F.A. e Wu, Y.: *Int. J. Mod. Phys.* **D17** (2008).
- [48] Miguelote, A.Y., Tomimura, N.A. e Wang, A.: *Gen. Relativ. Grav.* **36**, 1883 (2004).
- [49] Kramer, D. , et al.: Exact solutions of Eintein's field equations, *Cambridge University Press, Cambridge* (1980).
- [50] Hawking, S.W. e Ellis, G.F.R.: The large scale structure of spacetime, *Cambridge University Press, Cambridge* (1973).
- [51] Astier, P., et al.: The supernova legacy survey: measurement of Ω_M , Ω_Λ ω from the first year data set. (2005) [arXiv:astro-ph/0510447].
- [52] Perlmutter, S., et al.: Supernova cosmology project collaboration, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999) [arXiv:astro-ph/9812133].
- [53] Bennett, C.L., et al.: *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003) [arXiv:astro-ph/0302207].
- [54] Bennett, C.L., et al.: *Astrophys. J. Suppl.* **608**, 10 (2004)[arXiv:astro-ph/0305097].
- [55] Abazajian, K., et al.: (2004)[arXiv:astro-ph/0410239].

- [56] Abazajian, K., et al.: [SDSS Collaboration], *Astron. J.* **128**, 502 (2004) [arXiv:astro-ph/043325].
- [57] Kamenshchik, A., Moschella, U. e Pasquier, V.: *Phys. Lett.* **B511**, 265 (2001) [arXiv:gr-qc/0103004].
- [58] Caldwell, R.R.: *Phys. Lett.* **B 545**, 23 (2002) [arXiv:astro-ph/9908168].
- [59] Caldwell, R.R., Kamiononkowski, M. e Weinberg, N.N.: *Phys. Rev. Lett.* **91**, 071301 (2003).
- [60] Nesseris, S. e Perivolaropoulos, L.: *Phys. Rev.* **D70**, 123529 (2004)[arXiv:astro-ph/0410309].
- [61] Carroll, S.M.: *Living Rev. Relat.* **4**, 1 (2001) [arXiv:astro-ph/0004075].
- [62] Padmanabhan, T.: *Phys. Rep.* **380**, 235 (2003).
- [63] Hawkins, E., et al.: *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **346**, 78 (2003)[arXiv:astro-ph/0212375].
- [64] Bennett, C.L., et al.: *Astrophys. J.* **464**, L1 (1996).
- [65] Godlowski, W., Stelmach, J. e Szydlowski, M.: Can the Stephani model be an alternative to FRW accelerating models?, *Class. Quantum Grav.* **21**, 3953-3971 (2004).
- [66] Stelmach, J. e Jakacka, I: Non-homogeneity-driven universe acceleration, *Class. Quantum Grav.* **18**, 2643-2658 (2001).
- [67] Buchert, T.: On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity I: dust cosmologies, *Gen.Rel.Grav.* **32** 105-125 (2000) [arXiv:gr-qc/9906015v2].
- [68] Buchert, T.: On average properties of inhomogeneous fluids in general relativity II: perfect fluid cosmologies , *Gen.Rel.Grav.* **33**, 1381-1405 (2001) [arXiv:gr-qc/0102049v2].

- [69] Moffat, J.W. : Inhomogeneous cosmology, inflation and late-time accelerating Universe [arXiv:astro-ph/0606124v2].
- [70] Ellis, G.F.R.: *Gen. Rel. and Grav.* Bertotti, B. et al (eds), Dordret, Reidel, 215-288 (1984).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)