

Universidade Federal Fluminense

Heurísticas para o problema de
k-cobertura de conjuntos

Luciana de Souza Pessôa

Dezembro 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Universidade Federal Fluminense

Heurísticas para o problema de k -cobertura de conjuntos

Tese de Doutorado submetida ao
Curso de Pós-Graduação em Ciência
da Computação da Universidade
Federal Fluminense como requisito
parcial para a obtenção do título de
Doutor em Ciência da Computação
Área de concentração: Algoritmos e
otimização

Orientador: Celso da Cruz Carneiro Ribeiro

Luciana de Souza Pessôa

Dezembro 2009

Heurísticas para o problema de k -cobertura de conjuntos

Luciana de Souza Pessôa

Tese de Doutorado submetida ao
Curso de Pós-Graduação em Ciência
da Computação da Universidade
Federal Fluminense como requisito
parcial para a obtenção do título de
Doutor em Computação

Aprovada em dezembro de 2009 por:

Prof. Celso da Cruz Carneiro Ribeiro / UFF
(Orientador)

Prof. Vinícius Amaral Armentano / UNICAMP

Prof. Abilio Pereira de Lucena Filho / UFRJ

Prof^a. Simone de Lima Martins / UFF

Prof. Luiz Satoru Ochi / UFF

NITERÓI, RJ - BRASIL

Ao meu marido, Rafael Avila Cruz

Agradecimentos

Esta página de agradecimentos começou a ser escrita antes mesmo do início do doutorado. Diante de um novo desafio, recebi do meu marido Rafael o incentivo e a promessa de me acompanhar nesta jornada. Desde então, agradei a ele, todos os dias, por renovar a nossa esperança e o nosso amor que, às vezes, parecia se perder entre artigos e linhas de código.

Com a decisão de cursar o doutorado, acrescentei um importante parágrafo, agradecendo ao Professor Celso Ribeiro por me aceitar como sua aluna. Hoje sou grata a ele por todas as oportunidades de crescimento intelectual, cultural e pessoal.

Ao longo desses anos, agradei a minha mãe pelas constantes orações. A minha irmã e ao meu cunhado, pelo apoio moral e pensamentos práticos que muito me ajudaram. Agradei aos amigos por compreenderem, ou aceitarem, a minha ausência. Todas as noites, agradei a minha gata Nicole pela companhia incansável (mesmo que ela dormisse sobre o teclado).

No dia-a-dia, incluí nesta página muitas linhas de “muito obrigada” ao Stênio Soares (com quem compartilhei os melhores e os mais desafiadores momentos do doutorado), Lu Brugiolo (pelas longas discussões sobre GRASP), Jacques, Renatha Capua, Tiago Facada, Adria Lyra, Haroldo Gambini (pelo primeiro material de heurística lagrangeana) e Luciene (pelos conhecimentos compartilhados sobre o CPLEX).

Aos colegas Diego Brandão, Bruno Norberto, José Luis Thomaselli e Alessandro Copetti, agradei por tudo o que me ensinaram na etapa de qualificação.

Uma seção especial de agradecimentos foi aberta durante o MIC 2007, em Montreal. Naquela ocasião, agradei a Andréa Cynthia, ao Sebastián Urrutia e a Aletéia Favacho por me apresentarem ao Thiago Noronha. Sem as incontáveis sugestões, conversas e cafezinhos compartilhados com este, que se tornou um grande amigo, meu trabalho teria sido bem mais difícil. Ainda neste evento, conheci o Mauricio Resende, a quem sou muito grata por todas as idéias e sugestões, pela acolhida nos Estados Unidos e

pela amizade.

Esta página não estaria completa sem o registro da minha admiração por todos os professores do Instituto de Computação, com os quais convivo há quatorze anos. A dedicação dos funcionários do IC e o companheirismo dos meus colegas do CEDERJ também merecem meus agradecimentos.

Por fim, e eternamente, escrevo meu agradecimento a Deus, por mais esta missão cumprida.

Resumo

O problema de k -cobertura de conjuntos ($PkCC$) é uma variação do problema de cobertura de conjuntos (PCC) clássico, no qual cada objeto deve ser coberto por, pelo menos, k conjuntos. Aplicações para o $PkCC$ podem ser modeladas originalmente como problemas de coberturas de conjuntos, entretanto, elas devem ser tratadas como problemas de k -cobertura sempre que restrições de confiabilidade forem consideradas. Nesta tese, descreve-se uma nova aplicação para o $PkCC$ no âmbito das telecomunicações. Além disso, três heurísticas são propostas. Inicialmente, propõe-se um GRASP com reconexão por caminhos. Em seguida, apresenta-se uma heurística lagrangeana que utiliza um algoritmo construtivo guloso para gerar soluções primais viáveis. Por fim, propõe-se uma heurística lagrangeana híbrida, denominada LAGRASP, que combina uma heurística lagrangeana gulosa a um GRASP com reconexão por caminhos. Experimentos computacionais são apresentados para 135 instâncias-teste derivadas a partir de instâncias extraídas da OR-Library para o PCC.

Palavras-chave: Problemas de cobertura de conjuntos, metaheurísticas, heurísticas lagrangeanas.

Abstract

The set k -covering problem ($SkCP$) is a variant of the classical set covering problem (SCP), in which each object is required to be covered at least k times. Applications of the $SkCP$ can be modeled as set covering problems, however, they are treated as k -covering problems whenever reliability constraints are considered. In this thesis, we describe a new application to the $SkCP$ in telecommunications. Besides, we propose three heuristics. Initially, we propose a GRASP with path-relinking. Following, we present a Lagrangean heuristic which uses a greedy construction procedure to build feasible primal solutions. Finally, we propose a hybrid Lagrangean heuristic, named LAGRASP, combining a greedy Lagrangean heuristic to a GRASP with path-relinking. Computational experiments are reported for 135 instances derived from the OR-Library instances for the SCP.

Keywords: Set covering problems, metaheuristics, Lagrangean heuristics.

Sumário

Lista de Figuras	p. x
Lista de Tabelas	p. xii
1 Introdução	p. 1
1.1 O problema de k -cobertura de conjuntos	p. 1
1.2 Motivação	p. 2
1.2.1 O problema de <i>minimum robust tagging SNP</i>	p. 2
1.2.2 O problema de localização de PoPs redundantes	p. 6
1.3 Trabalhos relacionados	p. 6
1.3.1 Heurísticas para o problema da cobertura de conjuntos	p. 7
1.3.2 Problema da multicobertura de conjuntos	p. 8
1.3.3 Problema de k -cobertura de conjuntos	p. 9
1.4 O conjunto de instâncias-teste	p. 9
1.5 Objetivos e organização da tese	p. 10
2 GRASP com reconexão por caminhos	p. 12
2.1 Fase construtiva	p. 13
2.2 Busca local	p. 15
2.3 Reconexão por caminhos	p. 17
2.4 Experimentos computacionais	p. 22
2.4.1 Experimentos para ajuste de procedimentos e parâmetros	p. 24
2.4.2 Resultados obtidos com as heurísticas GRASP	p. 27

2.4.3	Resultados sobre a distribuição dos tempos para alcançar um valor alvo	p. 30
2.5	Conclusões	p. 31
3	Heurísticas lagrangeanas para PkCC	p. 36
3.1	Relaxação lagrangeana do PkCC	p. 37
3.2	Método do subgradiente	p. 39
3.3	Heurísticas lagrangeanas na literatura	p. 39
3.4	Heurística Lagrangeana Gulosa	p. 40
3.4.1	Experimentos computacionais	p. 42
3.5	Heurística Lagrangeana Híbrida: LAGRASP	p. 49
3.5.1	Experimentos computacionais	p. 50
3.6	Comparação das heurísticas LAGRASP e GRASP	p. 59
3.7	Conclusões	p. 60
4	Conclusões	p. 67
	Referências Bibliográficas	p. 69
	Anexo A – Instâncias teste para o problema de k-cobertura de conjuntos	p. 73
	Anexo B – Experimentos com o CPLEX	p. 75
B.1	Experimentos de ajuste de parâmetros do CPLEX	p. 75
B.1.1	<i>Mipalgorithm</i>	p. 75
B.1.2	<i>Nodeselect</i>	p. 76
B.1.3	<i>Varselect</i>	p. 76
B.1.4	<i>Branch</i>	p. 78
B.2	Resultados obtidos com o CPLEX	p. 78
	Anexo C – Experimentos de calibração com as heurísticas GRASP com reco-	

<i>Sumário</i>	ix
nexão por caminhos	p. 81
Anexo D – Resultados computacionais das heurísticas GRASP com reconexão por caminhos	p. 85
Anexo E – Experimentos de calibração com as heurísticas lagrangeanas gulosas	p. 89
Anexo F – Resultados computacionais das heurísticas lagrangeanas gulosas	p. 93
Anexo G – Resultados computacionais das heurísticas lagrangeanas híbridas	p. 100
Anexo H – Comparação das heurísticas LAGRASP e GRASP	p. 112

Lista de Figuras

1.1	SNPs e haplótipos.	p. 3
1.2	Reformulação do PMRTS.	p. 4
1.3	Localização de PoPs redundantes.	p. 7
2.1	Reconexão por caminhos entre duas soluções cuja distância de Hamming entre elas é três: os números acima das setas representam a ordem na qual os movimentos são realizados.	p. 20
2.2	Reconexão por caminhos entre duas soluções cuja distância de Hamming é cinco: os números acima das setas representam a ordem na qual os movimentos são realizados.	p. 22
2.3	Distâncias de Hamming entre soluções para diferentes fatores de cobertura	p. 30
2.4	Distribuição dos tempos de execução (instância <i>scpa2-k_{min}</i> com alvos 600 e 624).	p. 33
2.5	Distribuição dos tempos de execução (instância <i>scpd1-k_{med}</i> com alvos 40876 e 40937).	p. 34
2.6	Distribuição dos tempos de execução (instância <i>scp58-k_{max}</i> com alvos 33377 e 33397).	p. 35
3.1	Evolução dos limites inferiores e superiores ao longo do tempo.	p. 48
3.2	Evolução dos limites superiores ao longo do tempo.	p. 48
3.3	Resultados obtidos por diferentes versões de LAGRASP. Cada ponto representa uma combinação única de valores para a tripla (β, H, ig)	p. 53
3.4	Evolução dos limites inferiores e superiores ao longo do tempo (instância <i>scp62-k_{med}</i>).	p. 62
3.5	Evolução dos limites superiores ao longo do tempo (instância <i>scp62-k_{med}</i>).	p. 62

3.6	Evolução dos limites inferiores e superiores ao longo do tempo (instância <i>scpd4</i> – k_{med}).	p. 63
3.7	Evolução dos limites superiores ao longo do tempo (instância <i>scpd4</i> – k_{med}).	p. 63
3.8	Evolução dos limites inferiores e superiores ao longo do tempo (instância <i>scpa2</i> – k_{max}).	p. 64
3.9	Evolução dos limites superiores ao longo do tempo (instância <i>scpa2</i> – k_{max}).	p. 64
3.10	Aprimoramento dos custos das soluções ao longo do tempo (instância <i>scpd1</i> – k_{min}).	p. 65
3.11	Aprimoramento dos custos das soluções ao longo do tempo (instância <i>scpa5</i> – k_{med}).	p. 65
3.12	Aprimoramento dos custos das soluções ao longo do tempo (instância <i>scpd48</i> – k_{max}).	p. 66

Lista de Tabelas

1.1	Características das instâncias-teste.	p. 9
2.1	Resumo dos resultados obtidos pelas heurísticas construtivas gulosas.	p. 25
2.2	Resumo dos resultados obtidos pelas buscas locais.	p. 25
2.3	Resumo dos resultados dos experimentos computacionais para ajuste do fator δ	p. 26
2.4	Tempos limite para os experimentos com as heurísticas GRASP.	p. 26
2.5	Resumo dos resultados dos experimentos computacionais sobre o tamanho do conjunto elite.	p. 27
2.6	Resumo dos resultados dos experimentos computacionais para quatro variantes da heurística GRASP.	p. 28
2.7	Resumo dos resultados dos experimentos computacionais para quatro variantes da heurística GRASP	p. 29
3.1	Resultados dos experimentos de calibração da HLG - parâmetro Q	p. 44
3.2	Resultados dos experimentos de calibração da HLG - parâmetro η	p. 44
3.3	Resultados dos experimentos de calibração da HLG - fator multiplicativo na equação (3.6).	p. 45
3.4	Resultados dos experimentos com quatro versões da heurística lagrangeana gulosa.	p. 46
3.5	Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 0$).	p. 52
3.6	Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 0$).	p. 53
3.7	Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 0.25$).	p. 54
3.8	Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 0.50$).	p. 55
3.9	Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 0.75$).	p. 56

3.10	Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 1$). . .	p. 57
3.11	Resultados comparativos entre versões de LAGRASP com diferentes critérios para a chamada de \mathcal{H}	p. 57
3.12	Resultados comparativos entre os limites superiores obtidos pelas versões da heurística LAGRASP.	p. 57
3.13	Resultados comparativos entre os limites inferiores obtidos pelas versões da heurística LAGRASP.	p. 58
3.14	Resultados comparativos entre as versões da heurística LAGRASP (instâncias do PCC (k=1)).	p. 59
3.15	Resultados comparativos entre as heurísticas LAGRASP(0.25,1,5) e GPRb.	p. 60
A.1	Características detalhadas das instâncias-teste.	p. 74
B.1	Resultados dos experimentos de calibração do CPLEX (parâmetro <i>Mipalgorithm</i>)	p. 76
B.2	Resultados dos experimentos de calibração do CPLEX (parâmetro <i>Nodeselect</i>)	p. 77
B.3	Resultados dos experimentos de calibração do CPLEX (parâmetro <i>Varsselect</i>)	p. 77
B.4	Resultados dos experimentos de calibração do CPLEX (parâmetro <i>Branch</i>)	p. 78
B.5	Resultados dos experimentos com CPLEX	p. 80
C.1	Resultados detalhados das heurísticas construtivas gulosas.	p. 81
C.2	Resultados detalhados das buscas locais.	p. 82
C.3	Resultados detalhados dos experimentos com o fator γ	p. 83
C.4	Resultados detalhados dos experimentos com o tamanho do conjunto elite.	p. 84
D.1	Resultados detalhados dos experimentos com GRASP (instâncias do grupo k_{min}).	p. 86

D.2	Resultados detalhados dos experimentos com GRASP (instâncias do grupo k_{med}).	p. 87
D.3	Resultados detalhados dos experimentos com GRASP (instâncias do grupo k_{max}).	p. 88
E.1	Resultados detalhados dos experimentos de calibração da HLG - parâmetro Q .	p. 90
E.2	Resultados detalhados dos experimentos de calibração da HLG - parâmetro $\underline{\eta}$.	p. 91
E.3	Resultados detalhados dos experimentos de calibração da HLG - fator multiplicativo na equação (3.6).	p. 92
F.1	Resultados detalhados dos experimentos com HLG (instâncias do grupo k_{min}).	p. 94
F.2	Resultados detalhados dos experimentos com HLG (instâncias do grupo k_{med}).	p. 95
F.3	Resultados detalhados dos experimentos com HLG (instâncias do grupo k_{max}).	p. 96
F.4	Tempos de processamento de HLG (instâncias do grupo k_{min}).	p. 97
F.5	Tempos de processamento de HLG (instâncias do grupo k_{med}).	p. 98
F.6	Tempos de processamento de HLG (instâncias do grupo k_{max}).	p. 99
G.1	Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP (instâncias do grupo k_{min}).	p. 101
G.2	Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP (instâncias do grupo k_{med}).	p. 102
G.3	Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP (instâncias do grupo k_{max}).	p. 103
G.4	Tempos de processamento de LAGRASP (instâncias do grupo k_{min}).	p. 104
G.5	Tempos de processamento de LAGRASP (instâncias do grupo k_{med}).	p. 105
G.6	Tempos de processamento de LAGRASP (instâncias do grupo k_{max}).	p. 106
G.7	Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP sobre os limites inferiores e gaps de dualidade (instâncias do grupo k_{min}).	p. 107

G.8	Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP sobre os limites inferiores e gaps de dualidade (instâncias do grupo k_{med})	p. 108
G.9	Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP sobre os limites inferiores e gaps de dualidade (instâncias do grupo k_{max})	p. 109
G.10	Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP (instâncias do PCC($k=1$))	p. 110
G.11	Tempos de processamento de LAGRASP (instâncias do PCC($k=1$))	p. 111
H.1	Resultados detalhados da comparação entre GRASP e LAGRASP (instâncias do grupo k_{min})	p. 113
H.2	Resultados detalhados da comparação entre GRASP e LAGRASP (instâncias do grupo k_{med})	p. 114
H.3	Resultados detalhados da comparação entre GRASP e LAGRASP (instâncias do grupo k_{max})	p. 115

1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar o problema de k -cobertura de conjuntos, bem como revisar aplicações e métodos de solução deste problema e de algumas de suas variantes. Na Seção 1.1, é apresentada uma definição para o problema de k -cobertura de conjuntos. Na Seção 1.2, são ilustradas as aplicações deste problema que serviram de motivação para este estudo. Na Seção 1.3, é feita uma revisão bibliográfica do problema em questão e de algumas de suas variantes. O conjunto de instâncias-teste desenvolvido para os experimentos desta tese é apresentado na Seção 1.4. Por fim, na Seção 1.5, são apresentados os objetivos e a organização desta tese.

1.1 O problema de k -cobertura de conjuntos

Dado um conjunto $I = \{1, \dots, m\}$ de objetos, seja $\{P_1, \dots, P_n\}$ uma coleção de subconjuntos de I , com um custo não negativo c_j associado a cada subconjunto P_j , para $j = 1, \dots, n$. Um conjunto $\hat{J} \subseteq J = \{1, \dots, n\}$ é uma *cobertura* de I se $\cup_{j \in \hat{J}} P_j = I$. O custo de uma cobertura \hat{J} é dado por $\sum_{j \in \hat{J}} c_j$. O *problema de cobertura de conjuntos* (PCC) consiste em encontrar uma cobertura J^* de custo mínimo.

O *problema de multicobertura de conjuntos* (PMCC) [34] é uma generalização do problema de cobertura de conjuntos (PCC), no qual cada objeto $i \in I$ deve ser coberto por pelo menos $\ell_i \in \mathbb{Z}_+$ elementos de $\{P_1, \dots, P_n\}$. Vazirani [57] apresenta o caso em que cada conjunto pode ser utilizado apenas uma vez como o *problema de multicobertura de conjuntos restrito*. Um caso especial deste problema ocorre quando $\ell_i = k$, para todo $i \in I$. Nesta tese, este problema é chamado *problema de k -cobertura de conjuntos* (PkCC).

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz binária $m \times n$ tal que, para todo $i \in I$ e $j \in J$, $a_{ij} = 1$ se, e somente se, $i \in P_j$; e $a_{ij} = 0$, caso contrário.

Uma solução \hat{J} do PkCC pode ser representada por um vetor binário x de dimensão

n , onde $x_j = 1$ se, e somente se, $j \in \hat{J}$. Uma formulação para o problema de k -cobertura de conjuntos é

$$z(x) = \min \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.1)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq k, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

1.2 Motivação

O problema de multicobertura de conjuntos possui aplicações em diversas áreas, tais como marketing, logística, segurança, telecomunicações e biologia computacional. Embora algumas destas aplicações sejam modeladas originalmente como problemas de cobertura de conjuntos, elas devem ser tratadas como problemas de multicobertura sempre que restrições de confiabilidade forem consideradas. Hall e Hochbaum [34] descrevem algumas destas aplicações.

Nesta seção são ilustradas duas aplicações do problema de k -cobertura de conjuntos que serviram de motivação para este trabalho.

1.2.1 O problema de *minimum robust tagging SNP*

No contexto da biologia computacional, uma importante aplicação do PkCC refere-se ao problema de *minimum robust tagging SNP* descrito por Bafna *et al.* [5].

SNPs (Single Nucleotide Polymorphisms) ou Polimorfismos de Único Nucleotídeo são a forma mais abundante de variação genética no genoma humano. De acordo com Brookes [15], um SNP é uma posição isolada no DNA que pode assumir diferentes alternativas (alelos) entre os indivíduos de uma população. Neste caso, as posições vizinhas a um SNP permanecem inalteradas em todos os indivíduos.

Embora cada SNP possa, potencialmente, ter quatro alelos, ou quatro formas possíveis (adenina (A), timina (T), citosina (C) ou guanina (G)), a maioria dos SNPs apresenta apenas duas formas denominadas alelo principal e secundário, de acordo com sua frequência na população.

A Figura 1.1(a) mostra cinco posições de SNP em quatro cromossomos. O primeiro SNP assume o alelo C para os cromossomos 1 e 2, e o alelo T para os cromossomos 3 e 4.

Um conjunto de alelos para SNPs próximos em um único cromossomo é chamado de haplótipo [16, 55]. A Figura 1.1(b) mostra os haplótipos relativos aos cromossomos na Figura 1.1(a). Devido à proximidade dos SNPs em um haplótipo, eles são herdados juntos através das gerações, o que causa uma forte associação entre eles. Deste modo, um pequeno subconjunto destes SNPs, chamado *tag SNPs*, pode prover informação suficiente sobre os demais SNPs [55].

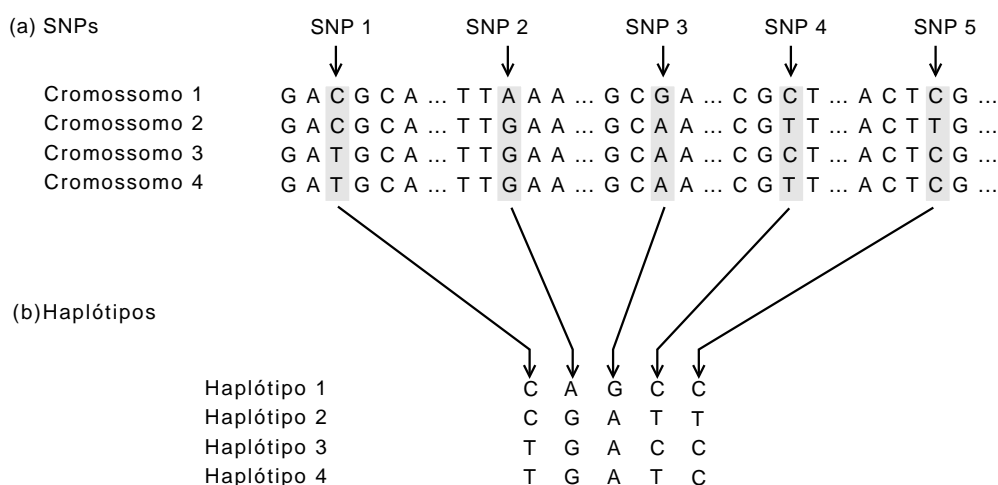


Figura 1.1: SNPs e haplótipos.

Dado um grupo de p haplótipos com n SNPs cada, o problema de *minimum tagging SNP* (PMTS) consiste em encontrar o menor subconjunto de SNPs capaz de distinguir cada haplótipo dos demais. Entretanto, pode acontecer de alguns SNPs estarem faltando em um ou mais haplótipos. Nesta situação, existe um subgrupo de SNPs, denominados *robust tag SNPs*, que é capaz de distinguir cada par de haplótipos, sem ambiguidade, quando, no máximo, um certo número de SNPs está faltando.

O problema *minimum robust tagging SNP* (PMRTS) foi reformulado em [37] como um problema de k -cobertura de conjuntos e sugeriu-se a atribuição de custos diferentes para os SNPs. A Figura 1.2 ilustra a formulação do PMRTS e sua reformulação como um problema de k -cobertura de conjuntos.

A matriz binária $B = [b_{ij}]$ representa $p = 4$ haplótipos (linhas) e $n = 5$ SNPs (colunas). Cada elemento $b_{ij} \in \{0, 1\}$ representa os dois possíveis valores que o SNP j pode assumir no haplótipo i . Seja $D(i_1, i_2)$ o conjunto de SNPs que distinguem os haplótipos

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{(a) Matriz de haplótipos}
 \end{array} &
 \begin{array}{c}
 D(1,2) = \{2,4,5\} \\
 D(1,3) = \{1,2\} \\
 D(1,4) = \{1,2,3,4\} \\
 D(2,3) = \{1,4,5\} \\
 D(2,4) = \{1,3,5\} \\
 D(3,4) = \{3,4\} \\
 \text{(b) Conjuntos de} \\
 \text{SNPs que distinguem} \\
 \text{os haplótipos}
 \end{array} &
 \begin{array}{c}
 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{(c) Matriz transformada}
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 1.2: Reformulação do PMRTS.

i_1 e i_2 , ou seja, $j \in D(i_1, i_2)$ se $b_{i_1 j} \neq b_{i_2 j}$. PMRTS pode ser formulado como segue, com s sendo o número máximo de SNPs ausentes:

$$\min \sum_{j=1}^n x_j \quad (1.4)$$

sujeito a

$$\sum_{j \in D(i_1, i_2)} x_j \geq s + 1, \quad 1 \leq i_1 < i_2 \leq p \quad (1.5)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Na reformulação do PMRTS como um problema de k -cobertura de conjuntos, cada linha da matriz A representa um par de haplótipos da matriz B , com 1 nas posições dos SNPs que distinguem os elementos no par. Para distinguir um haplótipo dos demais em um conjunto de haplótipos sem ambiguidade, cada par de haplótipos deve conter ao menos um SNP com valores diferentes, ou seja, cada linha da matriz A deve ser coberta por pelo menos um SNP. Para tolerar a ausência de s SNPs, PMRTS requer um conjunto mínimo de SNPs tal que cada par de haplótipos seja distinguido por pelo menos $s + 1$ SNPs [37], ou seja, cada linha da matriz A deve ser coberta por pelo menos $k = s + 1$ SNPs. No exemplo da Figura 1.2, fazendo-se $s = 1$, uma solução seria um conjunto contendo os SNPs 1, 2, 3 e 4.

O problema de encontrar *tag SNPs* é um caso especial do problema de encontrar *robust tag SNPs* quando $s = 0$, ou seja, um problema simples de cobertura de conjuntos, que no caso ilustrado na Figura 1.2 poderia ter como solução o conjunto contendo os SNPs 1 e 4.

Para resolver o problema de *minimum robust tag SNPs* foram propostos por Huang *et al.* [37] dois algoritmos gulosos e um algoritmo baseado em relaxação linear cujos fatores de aproximação são, respectivamente, $(s+1)\ln\frac{p(p-1)}{2}$, $\ln(s+1)\frac{p(p-1)}{2}$ e $s\ln p$. Os algoritmos gulosos constroem uma solução adicionando, a cada passo, o SNP capaz de cobrir o máximo de linhas. O primeiro algoritmo guloso, *Greedy 1*, identifica quais linhas estão mais longe de completar a cobertura necessária e prioriza a escolha dos SNPs que cobrem estas linhas. O segundo algoritmo guloso, *Greedy 2*, apenas identifica qual SNP cobre o maior número de linhas descobertas e o inclui na solução. O algoritmo baseado em relaxação linear constrói uma solução para o problema original a partir da solução do problema relaxado. Para avaliar a qualidade das soluções dos algoritmos propostos, foi implementado um programa, OPT, que utiliza um método enumerativo para encontrar soluções ótimas. Foram realizados experimentos comparativos com instâncias de, no máximo, 40 haplótipos e 114 SNPs. O algoritmo OPT é capaz de encontrar soluções ótimas para instâncias com 40 SNPs, quando considera a ausência de, no máximo, dois SNPs, ou seja, $s = 2$. As instâncias com 20 SNPs foram resolvidos por OPT para os casos em que até seis SNPs estão ausentes ($s = 6$). Os experimentos com as heurísticas mostram que estes algoritmos encontram soluções ótimas apenas quando não se considera a ausência de SNPs, isto é, $s = 0$. Nos demais casos, entretanto, o custo das soluções obtidas é muito próximo ao valor ótimo. Chang *et al.* [20] propõem um método que particiona o problema original em problemas menores e estes são resolvidos com o algoritmo guloso *Greedy 2* de Huang *et al.* [37]. Os experimentos computacionais para instâncias com mais de 20 SNPs mostram que o método é capaz de encontrar soluções melhores do que as apresentadas em [37].

Pessôa e Ribeiro [46] desenvolveram um algoritmo baseado na metaheurística GRASP [53]. As soluções são construídas por uma versão aleatorizada do algoritmo construtivo *Greedy 2* [37] e, em seguida, submetidas a uma fase de busca local. Os resultados obtidos com a heurística GRASP para instâncias de 20 SNPs foram comparados às soluções ótimas encontradas por OPT [37]. Os experimentos computacionais mostram a capacidade da heurística GRASP encontrar soluções ótimas mesmo para valores de $k > 2$. Os resultados preliminares apresentados em Pessôa e Ribeiro [46] serviram de motivação para o desenvolvimento de extensões que resultaram nesta tese.

1.2.2 O problema de localização de PoPs redundantes

Pessôa *et al.* [45] descreveram uma aplicação do problema de k -cobertura de conjuntos no âmbito das telecomunicações. O problema de localização de pontos de presença (PoPs) redundantes é uma generalização do problema de localização de PoPs [48]. Supõe-se a existência de clientes que são servidos por equipamentos localizados em PoPs. Por exemplo, em um PoP poderia ser instalada uma antena de uma rede de telefonia móvel. Se um PoP é capaz de prover serviço a um cliente, diz-se que o cliente está coberto por este PoP. No *problema de localização de PoPs*, são dados um conjunto de clientes e um conjunto de potenciais locais para implantação de PoPs. Cada um desses locais tem um custo associado e um grupo de clientes que se beneficiaria com a sua implantação. Deseja-se selecionar entre os potenciais locais aqueles que formam a rede de menor custo cobrindo todos os clientes. Naturalmente, se um cliente é coberto por exatamente um PoP e a antena deste PoP falha, o cliente perderá sua conexão. O *problema de localização de PoPs redundantes* provê um modelo capaz de aumentar a confiabilidade do serviço, requisitando que cada cliente seja coberto por pelo menos k PoPs.

Um exemplo simples de uma instância deste problema é ilustrado na Figura 1.3(a), que mostra seis potenciais locais de PoPs ($L_1 \dots L_6$) com respectivos custos ($c_1 \dots c_6$) e quatro clientes ($M_a \dots M_d$) que são servidos, ou cobertos, pelos potenciais PoPs do seguinte modo: o cliente M_a é coberto por L_1 , L_3 e L_5 ; o cliente M_b é coberto por L_1 , L_2 e L_3 ; o cliente M_c , por L_2 , L_3 e L_4 ; e o cliente M_d , por L_4 e L_6 . Neste exemplo, os custos c_1 , c_3 , c_5 e c_6 são unitários, enquanto os demais são iguais a 2. Deseja-se determinar o subconjunto de custo mínimo de potenciais locais de modo que cada cliente seja coberto por pelo menos dois PoPs. A Figura 1.3(b) mostra a solução de custo mínimo para o problema ilustrado na Figura 1.3(a). Observa-se que os locais L_1 , L_3 , L_4 e L_6 atendem à demanda de cobertura com custo total igual a 5.

1.3 Trabalhos relacionados

Nesta seção serão apresentados os principais trabalhos presentes na literatura sobre os problemas relacionados com esta tese.

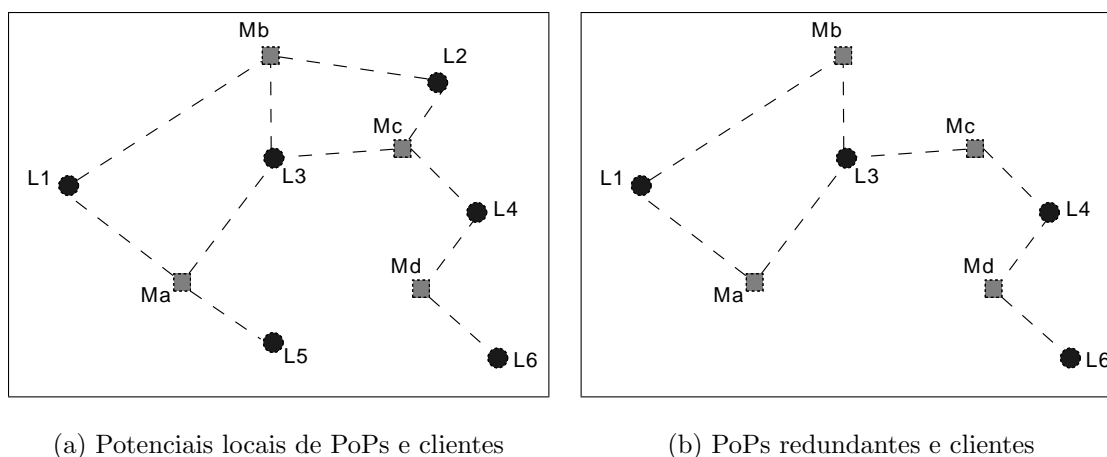


Figura 1.3: Localização de PoPs redundantes.

1.3.1 Heurísticas para o problema da cobertura de conjuntos

De acordo com Lucena [42], são praticamente inexistentes algoritmos do tipo *branch-and-cut* para o problema de cobertura de conjuntos porque, embora algumas famílias de desigualdades fortes [4, 7, 8] tenham sido caracterizadas para o problema, os problemas de separação a elas associados são de difícil resolução (inexistem até mesmo boas heurísticas para isso). Ou seja, para instâncias do PCC onde os saltos de dualidade são altos, certamente se justifica, o uso de boas heurísticas e metaheurísticas para resolver essas instâncias, diante da inexistência de alternativas exatas atraentes.

As principais heurísticas para o PCC foram revisadas por Caprara *et al.* [19], que relataram, em especial, a eficiência das heurísticas lagrangeanas com otimização por subgradientes na solução do PCC.

Muitas das heurísticas presentes na literatura para o problema da cobertura de conjuntos baseiam-se nos algoritmos gulosos propostos por Johnson [39], Fulkerson *et al.* [29] e Chvátal [21]. Um algoritmo guloso, iterativamente, inclui conjuntos na solução escolhendo prioritariamente aquele que apresenta o maior benefício. Nos algoritmos de Johnson [39] e de Fulkerson *et al.* [29], o maior benefício é dado pelos que conjuntos podem cobrir a maior quantidade de objetos descobertos. O método de Chvátal [21] avalia cada conjunto pela razão entre a sua capacidade de cobertura e seu custo, incluindo primeiramente os conjuntos de maior razão.

A solução do PCC por meio de heurísticas lagrangeanas foi abordada por Beasley [11], Caprara *et al.* [19] e Balas e Carrera [6], entre outros citados em [19]. De um modo geral, uma heurística lagrangeana utiliza informações geradas na solução do

problema dual lagrangeano para construir soluções primais para o problema original. Os algoritmos de Beasley [11] e de Caprara [19] foram testados sobre instâncias de até 10000 variáveis. A cada iteração do método do subgradiente, o algoritmo de Beasley [11] constrói uma solução primal utilizando a solução do problema lagrangeano como ponto de partida. Um procedimento guloso, iterativamente, identifica, entre os conjuntos de fora da solução, aquele com menor custo original e acrescenta-o à solução corrente. O procedimento é encerrado quando obtém-se uma solução viável. Em seguida, os conjuntos redundantes são removidas da solução final. Caprara *et al.* [6] também utilizam as informações obtidas em cada iteração do método do subgradiente. Neste caso, uma solução primal, é construída através da inclusão, iterativa, dos conjuntos de menor custo lagrangeano. Uma descrição detalhada do método do subgradiente e sua aplicação às heurísticas lagrangeanas será apresentada no Capítulo 3.

O desenvolvimento de algoritmos para o PCC inclui ainda procedimentos baseados em metaheurísticas. Entre estes, destaca-se o algoritmo genético de Beasley e Chu [14], que mostrou-se muito eficaz na obtenção de soluções de qualidade para as instâncias da OR-Library [11] apesar do seu alto custo computacional. Um algoritmo baseado em *simulated annealing* foi proposto por Jacob e Brusco [38]. A metaheurística GRASP, desenvolvida por Feo e Resende, foi aplicada ao problema de cobertura de conjuntos em [23].

1.3.2 Problema da multicobertura de conjuntos

Os primeiros algoritmos para o problema de multicobertura de conjuntos foram apresentados por Slyke [56] com o desenvolvimento de quatro heurísticas gulosas.

Hall e Hochbaum [33,34] desenvolveram e avaliaram dez heurísticas primais gulosas para o PMCC, incluindo aquelas propostas em [56]. As heurísticas que tiveram melhor desempenho foram utilizadas na obtenção de limites superiores para um algoritmo de *branch-and-bound* baseado em relaxação lagrangeana. Nos experimentos computacionais, utilizando instâncias com até 200 variáveis, este algoritmo utilizou como critério de parada, uma diferença de 0,5% entre os limites superior e inferior.

Gonsalvez *et al.* [31] implementaram novas heurísticas combinando os algoritmos gulosos apresentados em [33,34]. A combinação dos dez algoritmos de Hall e Hochbaum deu origem à heurística ALL10, enquanto TOP5 utiliza apenas os cinco melhores métodos. A cada iteração de ALL10 ou TOP5 escolhe-se, aleatoriamente, uma heurística que vai determinar a próxima variável a ser inserida na solução. Por exemplo, a

primeira variável a entrar na solução pode ser escolhida pela heurística H7, a próxima pela aplicação de H3, e a seguinte pela aplicação de H8. O processo iterativo continua até que uma solução viável tenha sido encontrada. Sobre esta solução é aplicada uma busca local. Os experimentos computacionais foram realizados sobre instâncias geradas aleatoriamente com, no máximo, 500 variáveis. Os resultados indicam que o custo das soluções obtidas por ALL10 e TOP5 é, em geral, 5% superior ao valor das soluções ótimas.

1.3.3 Problema de k -cobertura de conjuntos

Como visto na Seção 1.2.1, o problema de k -cobertura de conjuntos foi tratado como uma aplicação em biologia computacional por Huang *et al.* [37] e Chang *et al.* [20] através de heurísticas construtivas gulosas. Em seguida, o trabalho de Pessoa e Ribeiro [46] apresentou uma heurística baseada na metaheurística GRASP resolvendo problemas pequenos. Estes parecem ser os únicos trabalhos que tratam o problema de k -cobertura de conjuntos até esse momento.

1.4 O conjunto de instâncias-teste

Como visto nas seções anteriores, os algoritmos para o $PkCC$ foram aplicados a problemas pequenos com, no máximo, 500 variáveis. Por isto, para os experimentos computacionais descritos nesta tese, foram derivadas instâncias para o problema de k -cobertura de conjuntos a partir de 45 instâncias extraídas da OR-Library [11] para o problema da cobertura de conjuntos com até 4000 variáveis.

A Tabela 1.4 apresenta as características de sete classes das instâncias originais. Para cada classe, a tabela mostra seu nome, dimensão (restrições \times variáveis), densidade e quantidade de instâncias que compõem a classe.

Classe	Dimensão	Densidade	Quantidade
scp4	200 \times 1000	2%	10
scp5	200 \times 2000	2%	10
scp6	200 \times 1000	5%	5
scpa	300 \times 3000	2%	5
scpb	300 \times 3000	5%	5
scpc	400 \times 4000	2%	5
scpd	400 \times 4000	5%	5

Tabela 1.1: Características das instâncias-teste.

Estas instâncias foram derivadas para o $PkCC$ atribuindo-se a cada uma delas, três diferentes fatores de cobertura k :

- k_{\min} : $k = 2$;
- k_{\max} : $k = \min_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n a_{ij}$;
- k_{med} : $k = \lceil (k_{\min} + k_{\max})/2 \rceil$

Assim, foram obtidas 135 instâncias divididas em três grupos denominados k_{\min} , k_{med} e k_{\max} , de acordo com o fator de cobertura requisitado (mínimo, médio ou máximo). A Tabela A.1 apresenta, para cada instância, seu nome, dimensão (restrições \times variáveis) e densidade, seguidos pelos valores atribuídos a cada fator de cobertura.

1.5 Objetivos e organização da tese

A motivação para o desenvolvimento desta tese surgiu com o estudo de problemas de biologia computacional na área de otimização combinatória. O estudo do problema de *minimum robust tag SNPs* e da sua formulação como o problema de k -cobertura de conjuntos levou à investigação de outras aplicações e de técnicas de resolução para este problema de programação inteira.

Observando-se, na literatura, que o $PkCC$ tem sido pouco explorado, e dada a sua semelhança com o problema de cobertura de conjuntos, buscou-se identificar bons métodos de solução para o PCC e propor extensões destes algoritmos para o $PkCC$. Este foi o ponto de partida para o desenvolvimento de novas heurísticas e instâncias-teste para o problema de k -cobertura de conjuntos.

Em seguida à aplicação para o $PkCC$ de métodos já existentes na literatura, a pesquisa avançou com a proposição de uma nova classe de heurísticas para problemas de otimização combinatória. A exploração de métodos híbridos baseados em heurísticas lagrangeanas e metaheurísticas constituiu o objetivo mais importante desta tese.

Os métodos e resultados computacionais desta pesquisa são apresentados do seguinte modo: no Capítulo 2, propõe-se uma heurística baseada na metaheurística GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*). Para isso, algoritmos construtivos e de busca local, bem como procedimentos de reconexão por caminhos são

descritos e avaliados. O Capítulo 3 é dedicado à apresentação de heurísticas lagrangeanas. Inicialmente, uma heurística lagrangeana para o PCC é estendida para o $PkCC$. Em seguida, propõe-se a hibridação desta heurística lagrangeana com a heurística do tipo GRASP, apresentada no Capítulo 2. Experimentos computacionais são utilizados para comparar os algoritmos propostos. As principais contribuições desta tese são analisadas no Capítulo 4, onde também apresentam-se propostas para trabalhos futuros.

2 GRASP com reconexão por caminhos

A metaheurística GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedures*) foi originalmente proposta em [23] para resolver o problema de cobertura de conjuntos com custo unitário. GRASP é um processo iterativo, onde cada iteração consiste de duas fases: a fase construtiva, durante a qual uma solução viável é gerada por um algoritmo guloso aleatorizado; e a fase de busca local, aplicada sobre a solução incumbente da fase construtiva. A melhor solução encontrada dentre todas as iterações efetuadas é retornada como resultado. Tutoriais sobre GRASP podem ser encontrados, por exemplo, em [24, 49, 51, 53]. Bibliografias anotadas de GRASP estão presentes em [25–27].

Na fase de construção, um procedimento iterativo constrói uma solução viável, elemento a elemento. A cada passo do algoritmo, um elemento é escolhido de uma lista de elementos candidatos para fazer parte da solução que está sendo construída. Cada elemento é avaliado de acordo com uma função de avaliação que verifica o benefício da sua inclusão na solução parcial. Um procedimento puramente guloso escolhe o elemento que apresentar o melhor benefício. GRASP utiliza um algoritmo guloso aleatorizado que mantém uma lista restrita de candidatos (LRC) formada pelos melhores elementos. O elemento a ser incorporado na solução é escolhido aleatoriamente dentre aqueles da LRC. A cada inclusão de um elemento na solução parcial, os elementos candidatos restantes devem ser reavaliados.

As soluções construídas pelo algoritmo guloso aleatorizado não são necessariamente ótimos locais. Portanto, a aplicação de uma busca local usualmente melhora a solução construída. A partir de uma solução inicial, o procedimento de busca local explora sua vizinhança para encontrar uma solução de melhor custo. Se nenhuma é encontrada, a busca termina retornando a solução inicial como mínimo local. Se uma solução melhor é encontrada, esta toma o lugar da solução inicial e a busca local recomeça.

A técnica de reconexão por caminhos foi originalmente proposta por Glover [30]

como um esquema de intensificação que explora caminhos no espaço de soluções, conectando soluções de boa qualidade. Considerando que uma solução é o ponto de partida e a outra solução é o alvo, define-se um caminho entre as duas soluções. A cada passo, o algoritmo gera novas soluções incorporando atributos da solução alvo na solução inicial. A melhor solução encontrada no passo corrente toma o lugar da solução de partida e um novo passo é dado a partir desta solução. A idéia de aplicar reconexão por caminhos às soluções obtidas por um procedimento GRASP foi proposta por Laguna e Martí [40]. Em seguida, outros trabalhos apresentaram extensões, melhorias e aplicações bem sucedidas [2, 17, 50–53].

O objetivo deste capítulo é apresentar uma heurística GRASP para o $PkCC$, discutir os componentes básicos desta heurística e descrever sua hibridação com reconexão por caminhos. Na Seção 2.1, é descrita a fase construtiva da heurística GRASP para o $PkCC$. O procedimento aplicado na fase de busca local é apresentado na Seção 2.2. A hibridação da heurística GRASP com o esquema de intensificação por reconexão por caminhos é ilustrado na Seção 2.3. A Seção 2.4 traz os resultados computacionais da aplicação da heurística GRASP com reconexão por caminhos para o $PkCC$. Considerações finais referentes a esse capítulo são feitas na Seção 2.5.

2.1 Fase construtiva

Um algoritmo guloso para o problema da k -cobertura de conjuntos constrói uma solução acrescentando um dos conjuntos P_1, \dots, P_n na solução parcial a cada iteração, até que todos os objetos estejam k -cobertos, ou seja, estejam cobertos por pelo menos k conjuntos. Dada uma solução parcial, a cada iteração da construção, seja a *cardinalidade de cobertura* τ_j o número de objetos que ainda não estão k -cobertos pela solução parcial e que teriam suas coberturas incrementadas se P_j fosse incluído na solução parcial. Uma lista de candidatos L é formada pelos índices de todos os conjuntos P_j que não estejam na solução parcial e que possuam cardinalidade $\tau_j \geq 1$. Cada conjunto P_j , com $j \in L$, é avaliado de acordo com uma função gulosa, cujo valor f_j avalia o benefício da sua inclusão na solução parcial. Um procedimento puramente guloso escolhe o elemento que apresentar o melhor benefício.

Hall e Hochbaum [34] avaliaram dez heurísticas gulosas para o problema de multicobertura de conjuntos. Uma das heurísticas testadas foi proposta por Dobson [22] usando $f_j = \tau_j/c_j$. A cada passo do algoritmo, o conjunto que apresenta o maior valor

para f_j é escolhido para fazer parte da solução. As heurísticas desenvolvidas por Hall e Hochbaum [34] consideram, além da cardinalidade e do custo do conjunto, a quantidade de conjuntos que faltam para completar a cobertura de um objeto. A diferença entre as heurísticas desenvolvidas por Hall e Hochbaum [34] consiste na atribuição de pesos diferentes para estas informações. Experimentos computacionais com instâncias de até 100 restrições e 200 variáveis mostram que a heurística que obtém melhor desempenho, gerando bons resultados em menos tempo de processamento, utiliza a função gulosa $f_j = \frac{1}{c_j} \sum_{i=1}^m \frac{a_{ij}k}{\sum_{j=1}^n a_{ij}-k}$. Os resultados apresentados por Hall e Hochbaum [34] sugeriram a utilização desta função no algoritmo guloso aleatorizado na fase construtiva do GRASP. Entretanto, os experimentos de calibração descritos na Seção 2.4.1 mostraram sua ineficiência com instâncias maiores. Nestes experimentos, verificou-se que o algoritmo construtivo de Dobson [22], chamado C_D , gera soluções de menor custo que a melhor heurística de Hall e Hochbaum [34], chamada C_{HH} . Além disso, C_{HH} consumiu maiores tempos de processamento.

A função gulosa utilizada nesta tese é definida pela razão ρ_j entre o custo c_j e a cardinalidade τ_j . O algoritmo guloso adiciona à solução parcial o candidato de menor razão. A heurística GRASP utiliza uma versão aleatorizada deste algoritmo guloso para construir as soluções iniciais. O Algoritmo 1 ilustra o pseudo-código do procedimento da fase construtiva. A solução x e a lista de candidatos L são inicializadas nas linhas 2 e 3, respectivamente. A cardinalidade de cobertura e o valor da função gulosa são calculados na linha 4 para todos os elementos candidatos. A cada repetição do laço das linhas 5 a 14, um conjunto é acrescentado à cobertura, até que todos os objetos estejam k -cobertos. Os valores mínimo (ρ^-) e máximo (ρ^+) da função gulosa dos elementos candidatos são calculados nas linhas 6 e 7, respectivamente. A lista restrita de candidatos (LRC), formada por todos os elementos candidatos cujo valor da função gulosa é menor ou igual a $\rho^- + \alpha(\rho^+ - \rho^-)$, é construída na linha 8, onde α é um parâmetro de valor real no intervalo $[0, 1]$. Um elemento e é escolhido aleatoriamente da LRC na linha 9 e acrescentado à solução na linha 10. As cardinalidades de cobertura são recalculadas na linha 11 para considerar a inclusão do conjunto P_e na solução. A lista de candidatos é atualizada na linha 12 com a remoção do conjunto P_e e de todos os conjuntos cujas cardinalidades de cobertura se tornaram nulas. Finalmente, na linha 13, o valor da função gulosa é atualizado para todos os conjuntos candidatos.

Prais e Ribeiro [47] desenvolveram uma estratégia de ajuste automático do pa-


```

1 ConstrutivoGulosoAleatorizado
2  $x_j \leftarrow 0$ , para  $j = 1, \dots, n$ ;
3  $L \leftarrow \{1, \dots, n\}$ ;
4 Calcula  $\tau_j$  e  $\rho_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ ;
5 enquanto existe algum objeto que não esteja k-coberto faça
6    $\rho^- \leftarrow \min\{\rho_j : j \in L\}$ ;
7    $\rho^+ \leftarrow \max\{\rho_j : j \in L\}$ ;
8    $LRC \leftarrow \{j \in L : \rho_j \leq \rho^- + \alpha(\rho^+ - \rho^-)\}$ ;
9   Selecciona, aleatoriamente, um elemento  $e$  da LRC;
10   $x_e \leftarrow 1$ ;
11  Recalcula  $\tau_j$ ,  $\forall j \in L$  e  $j \neq e$ ;
12   $L \leftarrow L \setminus (\{e\} \cup \{j \in L \text{ e } \tau_j = 0\})$ ;
13  Recalcula  $\rho_j$ ,  $\forall j \in L$ 
14 fim

```

Algoritmo 1: Procedimento construtivo guloso aleatorizado.

râmetro α da LRC chamada *GRASP relativo*. O parâmetro α é selecionado de um conjunto discreto de valores $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ aos quais são associadas probabilidades $p_i, i = 1, \dots, r$. Antes de se iniciarem as iterações da heurística GRASP, as probabilidades são definidas como $p_i = 1/r$, para $i = 1, \dots, r$. Estas probabilidades são periodicamente atualizadas de acordo com

$$p_i = q_i / \sum_{j=1}^r q_j, \quad i = 1, \dots, r,$$

onde

$$q_i = \left(\frac{f^*}{M_i} \right)^\delta, \quad i = 1, \dots, r.$$

f^* é o valor da melhor solução encontrada entre todas as iterações do procedimento GRASP e M_i é o valor médio das soluções encontradas usando o parâmetro α_i . Deste modo, valores de α que levam aos melhores resultados terão maior probabilidade de serem selecionados. O fator $\delta > 0$ é usado para atenuar os valores mais baixos de probabilidade e intensificar os mais altos.

2.2 Busca local

As soluções construídas pelo algoritmo guloso aleatorizado podem não ser ótimos locais. Portanto, a aplicação de busca local a estas soluções usualmente resulta em soluções localmente ótimas de melhor custo. Nesta seção, são descritos procedimentos de busca local para o PkCC.

Partindo de uma solução inicial, uma busca local explora sua vizinhança para encontrar uma solução aprimorante. Se nenhuma é encontrada, a busca retorna a solução inicial como um mínimo local. Se uma solução melhor é encontrada, ela toma o lugar da solução inicial e o procedimento é repetido.

A vizinhança de uma solução é um conjunto de soluções que podem ser obtidas realizando-se alterações nos elementos da solução considerada. Três vizinhanças foram definidas para o problema de k -cobertura de conjuntos: a primeira vizinhança é uma troca-(1,0) que visa remover conjuntos supérfluos da solução. A segunda é uma troca-(1,1), cujo objetivo é substituir um conjunto de maior custo na solução por outro conjunto de menor custo que não faça parte da cobertura. De modo similar, a troca-(2,1) tenta substituir dois conjuntos da solução por um conjunto de custo menor que o custo total da dupla excluída.

Dois procedimentos de busca local foram desenvolvidos: BL_{11} , que combina o uso das vizinhanças troca-(1,1) e troca-(1,0), e BL_{21} , que combina o uso das vizinhanças troca-(2,1) e troca-(1,0). Partindo da solução gerada pelo algoritmo construtivo, as buscas locais exploram completamente a primeira vizinhança até que um ótimo local seja encontrado. Em seguida, passa-se para a exploração da segunda vizinhança. Se, ao final da investigação sobre as duas vizinhanças, uma solução melhor que a melhor conhecida tiver sido encontrada, o procedimento retorna para explorar a primeira vizinhança a partir desta solução. Os experimentos de calibração da Seção 2.4.1 mostram que, apesar de BL_{21} obter soluções melhores que BL_{11} , os seus longos tempos de processamento impedem sua utilização em um procedimento do tipo GRASP onde múltiplas iterações são realizadas.

Nesta tese, utiliza-se a busca local BL_{11} . Entretanto, algumas otimizações foram aplicadas à idéia original de modo a evitar testes redundantes aos dois procedimentos de troca. Em vez de explorar um vizinhança inteira antes de seguir para a próxima, as trocas-(1,0) e -(1,1) são intercaladas. Se, numa tentativa de troca-(1,0), a remoção de um conjunto torna a solução inviável, a busca local passa a explorar a vizinhança por uma troca-(1,1). Deste modo, o procedimento procura um conjunto de menor custo para substituir o que foi tentativamente removido.

O procedimento de busca local é ilustrado pelo pseudo-código no Algoritmo 2, onde os conjuntos na solução são referenciados por seus índices no conjunto original J .

O laço das linhas 2 a 23 é repetido enquanto uma solução localmente ótima não for encontrada. Na linha 3, todos os conjuntos na solução se tornam candidatos a sair

da solução e seus índices são incluídos em \mathcal{S} . O laço das linhas 4 a 22 tenta remover cada conjunto em \mathcal{S} , examinando-os em ordem decrescente dos seus custos. O próximo candidato j^+ para remoção é determinado na linha 5 e a variável correspondente x_{j^+} , tentativamente, assume o valor 0 na linha 6. Se a nova solução obtida é viável, então j^+ é removida de \mathcal{S} na linha 21 e um novo conjunto será testado para remoção da solução. De outro modo, se o teste na linha 7 determina que a nova solução é inviável, então, o conjunto $\bar{\mathcal{S}}$ de candidatos é construído na linha 8, para substituir j^+ na cobertura. Na linha 9, o candidato de menor custo j^- é selecionado de $\bar{\mathcal{S}}$. O laço das linhas 10 até 17 examina todos os elementos em $\bar{\mathcal{S}}$ capazes de melhorar a solução na tentativa de troca aprimorante viável. Na linha 11, o conjunto j^- é tentativamente inserido na solução e na linha 12 verifica-se se a solução resultante é viável. Se este não é o caso, a inserção tentativa é desfeita na linha 13 e o conjunto j^- é removido de $\bar{\mathcal{S}}$ na linha 14. Se ainda há candidatos disponíveis para inserção no conjunto $\bar{\mathcal{S}}$, então na linha 16 o candidato de menor custo é definido como o próximo a ser examinado para inserção. Quando não houver mais candidatos em $\bar{\mathcal{S}}$ capazes de melhorar a solução, se a verificação na linha 18 identifica que uma nova solução viável foi obtida, então j^- é inserido em \mathcal{S} . Caso contrário, a atribuição da linha 6 é desfeita.

2.3 Reconexão por caminhos

A implementação básica de GRASP não usa memória de longo prazo, ou seja, nenhuma iteração de GRASP faz uso das informações adquiridas em iterações prévias. Reconexão por caminhos (*path-relinking*) [30,40] é uma estratégia de intensificação que pode ser aplicada para introduzir estruturas de memória em uma heurística GRASP. Reconexão por caminhos explora caminhos no espaço de soluções conectando pares de soluções de boa qualidade, uma delas sendo a solução inicial (ou de partida) x^s e a outra sendo a solução alvo x^t . O procedimento mantém um conjunto elite \mathcal{P} com um número máximo de soluções (um conjunto diversificado de soluções de boa qualidade encontradas na fase de busca local) e após cada busca local, uma reconexão por caminhos é executada entre o mínimo local encontrado na iteração corrente e uma solução aleatoriamente selecionada do conjunto elite.

```

1 BuscaLocal
2 enquanto  $x$  não é localmente ótimo faça
3   Inicializa o conjunto de índices na solução:
    $S \leftarrow \{j = 1, \dots, n : x_j = 1\}$ ;
4   enquanto  $S \neq \emptyset$  faça
5      $j^+ \leftarrow \operatorname{argmax}\{c_j : j \in S\}$ ;
6      $x_{j^+} \leftarrow 0$ ;
7     se  $x$  não é viável então
8        $\bar{S} \leftarrow \{j = 1, \dots, n : x_j = 0 \text{ e } j \neq j^+\}$ ;
9        $j^- \leftarrow \operatorname{argmin}\{c_j : j \in \bar{S}\}$ ;
10      enquanto  $\bar{S} \neq \emptyset$  e  $x$  não é viável e  $c_{j^-} < c_{j^+}$  faça
11         $x_{j^-} \leftarrow 1$ ;
12        se  $x$  não é viável então
13           $x_{j^-} \leftarrow 0$ ;
14           $\bar{S} \leftarrow \bar{S} \setminus \{j^-\}$ ;
15        fim
16        se  $\bar{S} \neq \emptyset$  então  $j^- \leftarrow \operatorname{argmin}\{c_j : j \in \bar{S}\}$ ;
17      fim
18      se  $x$  é viável então  $S \leftarrow S \cup \{j^-\}$  senão
19         $x_{j^+} \leftarrow 1$ ;
20      fim
21       $S \leftarrow S \setminus \{j^+\}$ ;
22    fim
23 fim

```

Algoritmo 2: Procedimento de busca local.

O Algoritmo 3 descreve um procedimento genérico de reconexão por caminhos, onde x^s é um vetor binário representando a solução obtida após a busca local e x^t é o vetor binário representando uma solução do conjunto elite [52]. Para favorecer caminhos longos, a solução do conjunto elite é escolhida aleatoriamente com probabilidade proporcional à distância de Hamming entre x^t e x^s , ou seja, $|\{j = 1, \dots, n : x_j^s \neq x_j^t\}|$. O conjunto $\Delta = \{j = 1, \dots, n : x_j^s \neq x_j^t\}$ de posições nas quais x^s e x^t diferem é calculado na linha 2. A melhor solução x^* , entre x^t e x^s , e seu custo $z(x^*)$ são determinados nas linhas 3 e 4, respectivamente. A solução corrente x da reconexão por caminhos é inicializada como x^s na linha 5. O laço das linhas 6 e 14 progressivamente determina a próxima solução no caminho entre x^s e x^t até que todo o caminho seja percorrido.

Para cada posição $\ell \in \Delta$, $x \oplus \ell$ é a solução obtida complementando-se o valor corrente de x_ℓ . A linha 7 determina o componente ℓ^* de Δ para o qual $x \oplus \ell$ resulta na solução viável de menor custo. Este componente é removido de Δ na linha 8 e a solução corrente é atualizada na linha 9 pela complementação do valor da sua ℓ -ésima posição.

```

1  ReconexãoPorCaminhos
2   $\Delta \leftarrow \{j = 1, \dots, n : x_j^s \neq x_j^t\};$ 
3   $x^* \leftarrow \operatorname{argmin}\{z(x^s), z(x^t)\};$ 
4   $z^* \leftarrow \min\{z(x^s), z(x^t)\};$ 
5   $x \leftarrow x^s;$ 
6  enquanto  $|\Delta| > 1$  faça
7  |    $\ell^* \leftarrow \operatorname{argmin}\{z(x \oplus \ell) : \ell \in \Delta \text{ e } (x \oplus \ell) \text{ é viável}\};$ 
8  |    $\Delta \leftarrow \Delta \setminus \{\ell^*\};$ 
9  |    $x_{\ell^*} \leftarrow 1 - x_{\ell^*};$ 
10 |   se  $z(x) < z^*$  então
11 | |    $x^* \leftarrow x;$ 
12 | |    $z^* \leftarrow z(x);$ 
13 |   fim
14 fim

```

Algoritmo 3: Procedimento de reconexão por caminhos.

Se o teste na linha 10 detecta que a nova solução corrente x melhora a melhor solução x^* no caminho, então x^* e seu custo são atualizados nas linhas 11 e 12, respectivamente.

Para comprovar que sempre existe um caminho conectando x^s e x^t , observa-se que a atribuição inicial do valor um para todos os componentes de x^s que tem valor zero em x^t e valor um em x^t resultará em uma série de soluções viáveis a partir de x^s para alguma solução viável x . Em seguida, removendo-se cada componente supérfluo de x (ou seja, atribuindo valor zero aos componentes que tem valor um em x e valor zero em x^t) resultará novamente em uma série de soluções viáveis levando de x a x^t .

No procedimento de reconexão por caminhos, são desconsideradas as soluções de elite cuja distância de Hamming para x^s é menor ou igual a três, pois nenhum caminho entre tais soluções e x^s pode conter soluções simultaneamente melhores do que ambas. Este fato pode ser explicado através da Figura 2.1, onde observa-se um caminho conectando duas soluções localmente ótimas, x^s e x^t , cuja distância de Hamming entre elas é igual a três. As soluções viáveis x' e x'' são obtidas como etapas intermediárias na reconexão entre x^s e x^t . No passo 1, um componente com valor um deve ser incluído em x^s pois, como x^s é um ótimo local, a exclusão de qualquer um desses elementos geraria uma solução inviável. Portanto, x' é uma solução de custo superior a x^s . Por outro lado, para se chegar a x^t , no passo 3, deve-se excluir um componente com valor um da solução x'' , pois, de outro modo, gerar-se-ia uma solução com componentes redundantes e x^t não seria um ótimo local, o que levaria a uma contradição. Assim, observa-se que o custo de x'' é superior ao custo de x^t . Deste modo, conclui-se que x' e x'' não podem ser simultaneamente melhores que x^s e x^t .

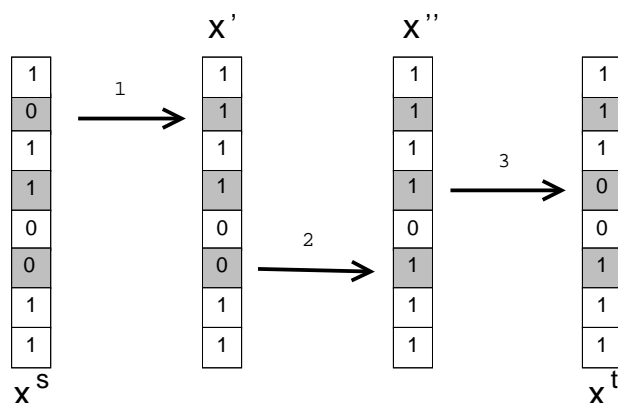


Figura 2.1: Reconexão por caminhos entre duas soluções cuja distância de Hamming entre elas é três: os números acima das setas representam a ordem na qual os movimentos são realizados.

O Algoritmo 4 ilustra o pseudo-código para o GRASP completo com o procedimento de reconexão por caminhos. As linhas 2 e 3 inicializam o conjunto elite \mathcal{P} e o valor da melhor solução encontrada z^* . O laço das linhas 4 a 19 são as iterações do GRASP com reconexão por caminhos. A cada iteração, uma solução inicial é construída pelo procedimento guloso aleatorizado na linha 5. Uma solução localmente ótima x com relação às vizinhanças troca-(0,0) e troca-(1,0) é identificada pela busca local na linha 6. O conjunto elite \mathcal{P} é inicializado na linha 7 com o ótimo local x obtido na primeira iteração. Para todas as outras iterações, as linhas de 8 a 14 realizam a aplicação da reconexão por caminhos e gerenciamento do conjunto elite.

Uma solução x^p é aleatoriamente selecionada do conjunto elite na linha 9. Os candidatos para seleção são todas as soluções em \mathcal{P} cuja distância de Hamming para x^s é maior que três. Como já observado, os candidatos são selecionados com probabilidade proporcional às suas distâncias de Hamming para x^s . Na linha 10, estabelece-se, entre x e x^p , qual será a solução inicial e qual servirá como alvo. A reconexão por caminhos é aplicada ao par de soluções x^s e x^t na linha 11, resultando em uma solução x que é reotimizada pela busca local na linha 12. O conjunto elite \mathcal{P} é atualizado na linha 13. Se \mathcal{P} não atingiu o seu tamanho máximo e a nova solução é diferente de todas as soluções elite, então a nova solução é automaticamente inserida. Caso contrário, se a nova solução x é melhor que a pior solução no conjunto elite, ela substitui a solução de maior custo. Se x não é melhor que a pior solução do conjunto elite, ela é descartada. A melhor solução x^* e seu custo z^* são atualizados nas linhas 15 a 18.

```

1 GRASP+RC
2 Inicializa o conjunto elite  $\mathcal{P} \leftarrow \emptyset$ ;
3 Inicializa o valor da melhor solução  $z^* \leftarrow \infty$ ;
4 para  $i = 1, \dots, N$  faça
5    $x \leftarrow \text{ConstrutivoGulosoAleatorizado}()$ ;
6    $x \leftarrow \text{BuscaLocal}(x)$ ;
7   se  $i = 1$  então insere  $x$  no conjunto elite  $\mathcal{P}$ ;
8   senão
9     Escolha, aleatoriamente, uma solução de elite  $x^p \in \mathcal{P}$ ;
10    Determine qual solução (entre  $x$  e  $x^p$ ) é inicial  $x^s$  e qual é
    alvo  $x^t$ ;
11     $x \leftarrow \text{ReconexaoPorCaminhos}(x^s, x^t)$ ;
12     $x \leftarrow \text{BuscaLocal}(x)$ ;
13    Atualiza o conjunto elite  $\mathcal{P}$  com  $x$ ;
14  fim
15  se  $z(x) < z^*$  então
16     $x^* \leftarrow x$ ;
17     $z^* \leftarrow z(x)$ ;
18  fim
19 fim

```

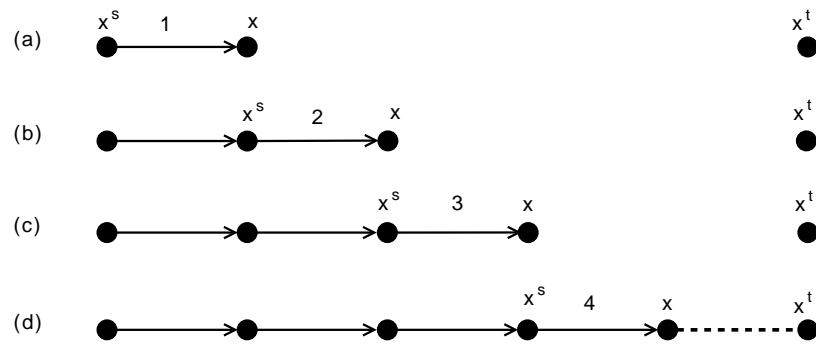
Algoritmo 4: Procedimento de GRASP com reconexão por caminhos.

A atribuição de x e x^p à solução inicial x^s ou à solução alvo x^t depende da estratégia adotada para a reconexão por caminhos. Diferentes abordagens têm sido consideradas na implementação deste procedimento [52] e neste trabalho são adotadas três destas estratégias:

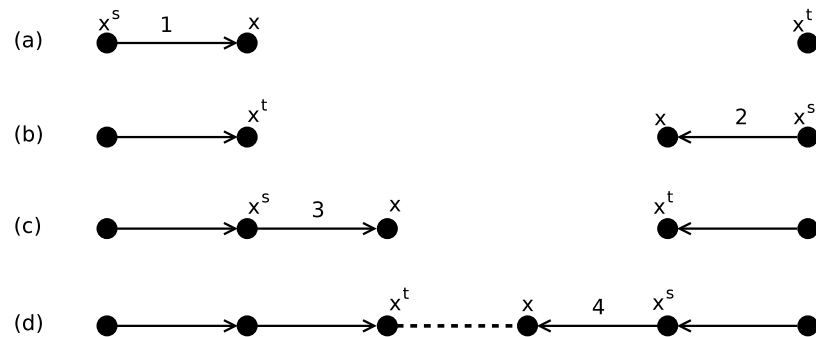
- Para frente (*Forward*): quando a solução inicial é a de maior custo entre x^s e x^t .
- Para trás (*Backward*): quando a solução inicial é a de menor custo entre x^s e x^t .
- Mista (*Mixed*): quando dois caminhos são simultaneamente explorados intercalando-se o papel das soluções inicial e final. Deste modo, a atribuição de x ou x^p a x^s e x^t é indiferente.

Nas estratégias *forward* e *backward*, a solução gerada a cada passo toma o lugar da solução inicial que se movimenta no sentido da solução alvo enquanto esta se mantém fixa. A reconexão por caminhos mista intercala os papéis de x^s e x^t , com cada solução assumindo a posição de partida ou alvo a cada passo.

As Figuras 2.2(a) e 2.2(b) ilustram a aplicação da reconexão por caminhos para as soluções x^s e x^t cuja distância de Hamming é igual a cinco. A primeira figura refere-se



(a) Reconexão por caminhos *forward* ou *backward* entre duas soluções.



(b) Reconexão por caminhos mista entre duas soluções.

Figura 2.2: Reconexão por caminhos entre duas soluções cuja distância de Hamming é cinco: os números acima das setas representam a ordem na qual os movimentos são realizados.

às estratégias *forward* e *backward*, enquanto a segunda figura apresenta a estratégia mista.

2.4 Experimentos computacionais

Para as heurísticas GRASP propostas, foram realizados experimentos computacionais de calibração de parâmetros e testes para avaliar a qualidade das soluções produzidas.

Os algoritmos foram implementados em C e todos os códigos foram compilados com o compilador GNU GCC versão 3.4. Os experimentos foram executados em computadores com processador Intel Xeon E5410 Quadcore de 2.33 MHz e sistema operacional Linux Ubuntu 8.04. Nos algoritmos que fazem uso de geradores de números aleatórios,

foi utilizada uma implementação em C do gerador Mersenne Twister, desenvolvido por Matsumoto e Nishimura [43]. Os experimentos com o pacote comercial CPLEX 11 foram realizados em um SGI Altix 3700 Supercluster (32 processadores de 1.5GHz Itanium) usando o sistema operacional Linux RedHat Advanced Server with SGI ProPack, com as execuções limitadas a apenas um processador.

As seguintes métricas, como descritas em [50], são usadas para comparar os algoritmos avaliados:

- *Best*: Para cada instância, *Best* é o valor da melhor solução obtida dentre todas as execuções dos algoritmos considerados.
- *#Best*: Para cada algoritmo, fornece o número de instâncias para as quais o valor da melhor solução obtida com este algoritmo é igual a *Best*.
- *Dif*: Para cada algoritmo, *Dif* é a diferença porcentual relativa entre *Best* e o valor da melhor solução encontrada pelo algoritmo considerado.
- *MDif*: É a média de *Dif* sobre todas as instâncias consideradas em um determinado experimento.
- *NScore*: Como descrito em [54], para cada instância, *NScore* de um algoritmo \mathcal{A} é igual ao número de algoritmos que encontram uma solução melhor do que \mathcal{A} .
- *Score*: É a soma dos valores *NScore* de todas as instâncias no experimento. Quanto menor o valor de *Score*, melhor o algoritmo.
- *Tempo*: Corresponde à soma, sobre todas as instâncias, do tempo médio de execução de um algoritmo em um determinado experimento. Em todos os experimentos desta tese, os tempos de execução são apresentados em segundos.

Pela descrição dessas métricas, observa-se que elas utilizam, para cada instância, apenas a melhor solução encontrada entre todas as execuções do método considerado. Entretanto, esta solução pode apresentar desvios em relação às demais, de pior de qualidade, e não ser suficiente para representar seguramente o desempenho do método. Para superar este problema, uma alternativa seria a utilização de todas as soluções encontradas nas diversas execuções. Considerando-se *Best* como o valor da melhor solução obtida dentre todas as execuções dos algoritmos considerados, a métrica *#Best*, forneceria o número de execuções para os quais o algoritmo teria encontrado soluções de custo tão bom quanto *Best* para a instância correspondente. De modo semelhante, a

métrica $MDif$ de um método mostraria a média, sobre o total de execuções para todas as instâncias, das diferenças percentuais entre $Best$ e o custo da solução encontrada por cada execução do método para cada instância.

2.4.1 Experimentos para ajuste de procedimentos e parâmetros

Nesta seção, são apresentados experimentos que visam identificar os melhores procedimentos e parâmetros para compor a heurística GRASP. Os experimentos foram realizados sobre um conjunto de 21 instâncias composto pela primeira instância de cada grupo da Tabela A.1.

Experimento com as heurísticas construtivas gulosas

Neste experimento, são avaliadas as heurísticas construtivas gulosas C_D (de Dobson [22]) e C_{HH} (de Hall e Hochbaum [34]) descritas na Seção 2.1.

Os resultados na Tabela 2.1 mostram a superioridade do método C_D . De acordo com a métrica $\#Best$, o algoritmo de Dobson foi capaz de encontrar as melhores soluções para as 21 instâncias utilizadas no experimento. Além disso, a métrica $MDif$ mostra que a heurística de Hall e Hochbaum encontrou soluções com custo, em média, 37,99% maiores do que as soluções de C_D . Quanto aos tempos de processamento, C_D também apresentou o melhor desempenho, consumindo apenas 6,22 segundos para resolver 21 problemas enquanto C_{HH} utilizou 11452,57 segundos.

A Tabela C.1 apresenta os resultados numéricos detalhados. Cada linha corresponde aos resultados para a instância especificada na primeira coluna. Nas colunas seguintes, são fornecidos o custo e o tempo de processamento (em segundos) obtidos pela heurística construtiva de Dobson. Os resultados referentes à heurística de Hall e Hochbaum são listados nas colunas seguintes. Estes resultados ratificam que as soluções de menor custo são obtidas pelo algoritmo construtivo de Dobson. Além disso, o tempo computacional de C_{HH} chega a ser, aproximadamente, 2000 vezes maior que o tempo gasto pelo construtivo C_D , como no caso da instância $scpd1-k_{med}$.

Experimento com as buscas locais

O objetivo deste experimento é comparar as duas versões de busca local, BL_{11} e BL_{21} , descritas na Seção 2.2. O procedimento de busca local recebe como entrada, uma

	C_D	C_{HH}
MDif	0,000 %	37,99 %
#Best	21	0
Score	0	21
Tempo (s)	6,22	11452,57

Tabela 2.1: Resumo dos resultados obtidos pelas heurísticas construtivas gulosas.

solução gerada pelo algoritmo construtivo guloso C_D descrito na Seção 2.1.

Os resultados de cada procedimento são resumidos na Tabela 2.2, onde observa-se que, para todas as instâncias, as soluções de BL_{21} são melhores que as encontradas por BL_{11} . A métrica MDif indica uma diferença percentual média de 2,19% entre os custos das soluções encontradas pelos dois métodos. Embora BL_{21} obtenha as soluções de melhor custo, seus tempos computacionais são muito altos. A métrica Tempo mostra que este método consumiu mais de 463.000 segundos, contra os 9,84 segundos gastos por BL_{11} para resolver 21 problemas. Estes resultados são detalhados na Tabela C.2 onde se observa, em cada linha, o nome da instância seguido pelos custos e tempos de processamento (em segundos) obtidos pelas buscas locais BL_{11} e BL_{21} , respectivamente.

	BL_{11}	BL_{21}
MDif	2,19 %	0,00 %
#Best	0	21
Score	21	0
Tempo (s)	9,84	463602,53

Tabela 2.2: Resumo dos resultados obtidos pelas buscas locais.

Experimentos para ajuste de parâmetros

Nesta seção, são apresentados os experimentos utilizados para a definição dos principais parâmetros da heurística GRASP proposta. Dois parâmetros foram avaliados: o fator δ , aplicado no ajuste do GRASP reativo, e o tamanho do conjunto elite utilizada pelo procedimento de reconexão por caminhos.

Fator δ : Para este experimento, foram criadas duas versões da heurística GRASP pura, atribuindo-se ao fator δ os valores 10 e 100. Para cada instância, foram realizadas oito execuções de GRASP, variando-se a semente do gerador de números aleatórios. Cada execução era encerrada ao completar 1000 iterações. Na Tabela 2.3 observa-se, pela métrica MDif, que a versão de GRASP que utiliza $\delta = 100$ está mais próxima das

melhores soluções encontradas neste experimento, obtendo uma diferença percentual média de 0,25% destas soluções. A métrica #Best mostra que esta versão encontrou 18 das melhores soluções, enquanto a versão que utiliza $\delta = 10$ encontrou apenas quatro. Além disso, GRASP com $\delta = 100$ consumiu um menor tempo de processamento. Os resultados detalhados deste experimento são apresentados na Tabela C.3, onde se observa, em cada linha, o nome da instância seguido pelo custo da melhor solução encontrada entre as oito execuções e o tempo médio de processamento para cada versão avaliada. Baseando-se nestes resultados, os próximos experimentos com GRASP terão o parâmetro δ fixado em 100.

	$\delta = 10$	$\delta = 100$
MDif	0,63 %	0,25 %
#Best	4	18
Score	17	3
Tempo(s)	5183,87	3219,63

Tabela 2.3: Resumo dos resultados dos experimentos computacionais para ajuste do fator δ .

Tamanho do conjunto elite \mathcal{P} : Neste experimento foram avaliados quatro tamanhos para o conjunto elite: 10, 20, 50 e 100. Cada valor originou uma versão da heurística GRASP com reconexão por caminhos *backward* que foi executada oito vezes com diferentes sementes do gerador de números aleatórios. O tempo de execução foi utilizado como critério de parada destas heurísticas. Para cada instância, o tempo de processamento foi limitado àquele obtido em 1000 iterações da variante GRASP puro com fator $\delta = 100$, conforme detalhado na Tabela C.3.

A Tabela 2.4 apresenta os tempos limite, em segundos, para cada classe de instâncias, de acordo com seu fator de cobertura.

classes	k_{min}	k_{med}	k_{kmax}
scp4	5	15	27
scp5	10	45	90
scp6	5	20	38
scpa	21	141	265
scpb	17	235	288
scpc	39	329	580
scpd	26	489	544

Tabela 2.4: Tempos limite para os experimentos com as heurísticas GRASP.

O resumo dos resultados computacionais é apresentado na Tabela 2.5. Os melhores

resultados foram obtidos fixando-se o tamanho do conjunto elite em 100. As soluções obtidas por esta variante tem um custo médio 0,03% superior ao custo das melhores soluções obtidas no experimento. A métrica #Best mostra que a heurística GRASP com $|\mathcal{P}| = 100$ encontra a melhor solução para 14 das 21 instâncias utilizadas. Os resultados detalhados são apresentados na Tabela C.4 onde se observa, em cada linha, o nome da instância seguido pelo melhor custo e custo médio das soluções encontradas por cada heurística avaliada.

	$ \mathcal{P} = 10$	$ \mathcal{P} = 20$	$ \mathcal{P} = 50$	$ \mathcal{P} = 100$
MDif	0,31 %	0,39 %	0,14 %	0,09 %
#Best	7	4	9	11
Score	31	36	22	16

Tabela 2.5: Resumo dos resultados dos experimentos computacionais sobre o tamanho do conjunto elite.

2.4.2 Resultados obtidos com as heurísticas GRASP

Os experimentos relatados nesta seção têm por objetivo avaliar a qualidade das soluções geradas por diferentes heurísticas baseadas na metaheurística GRASP. Combinando as diferentes estratégias de reconexão por caminho, quatro variantes de GRASP foram desenvolvidas: GRASP puro (Gpuro), GRASP com reconexão por caminhos para frente (GPRf), GRASP com reconexão por caminhos para trás (GPRb) e GRASP com reconexão por caminhos mista (GPRm). De acordo com os experimentos de calibração, o conjunto elite, no procedimento de reconexão por caminhos, é definido para ter, no máximo, 100 soluções. O parâmetro α do algoritmo construtivo é ajustado reativamente a cada 100 iterações. Os valores utilizados para este parâmetro estão no intervalo $(0, 1]$ com incrementos de 0,05. O valor do parâmetro δ usado é igual a 100.

Resultados comparativos utilizando-se o tempo como critério de parada

Neste experimento, foram utilizadas as 135 instâncias descritas na Seção 1.4. Cada variante da heurística GRASP foi executada oito vezes, variando-se a semente do gerador de números aleatórios. Cada execução foi encerrada quando os tempos limite descritos na Tabela 2.4 foram alcançados. Os resultados são comparados ao custo das soluções encontradas pelo pacote CPLEX 11 com limitação de tempo de 86400 segundos (24 horas) para cada instância e ajuste automático de parâmetros. Este modo de

parametrização do CPLEX foi o que gerou as melhores soluções, de acordo com os experimentos de calibração apresentados no Anexo B.

Nas Tabelas D.1 a D.3, que trazem os resultados detalhados, observa-se o nome de cada instância seguido dos custos das soluções obtidas pelo CPLEX. Nas colunas seguintes, para cada variante avaliada, são exibidos o melhor custo e o custo médio obtido entre todas as execuções de cada versão de GRASP.

A Tabela 2.6 resume os resultados médios sobre as 135 instâncias. Observa-se que as variantes de GRASP com reconexão por caminhos superaram o GRASP puro. Estes resultados são consistentes com os obtidos pela aplicação de heurísticas GRASP a outros problemas, como apresentado, por exemplo, em [44] e [52]. Entre heurísticas que utilizaram reconexão por caminhos, a estratégia *backward* encontrou soluções ligeiramente melhores. A diferença porcentual média entre o custo das soluções obtidas por GPRb e os valores obtidos pelo CPLEX é de 3,45 %, enquanto que para Gpuro, esta diferença fica em torno de 4,84%.

	CPLEX	Gpuro	GPRb	GPRf	GPRm
Mdif	0,00 %	4,84 %	3,45 %	3,51 %	3,51 %
#Best	135	0	0	0	0
Score	0	324	304	319	320

Tabela 2.6: Resumo dos resultados dos experimentos computacionais para quatro variantes da heurística GRASP.

Para analisar este experimento com um pouco mais de detalhes, a Tabela 2.7 apresenta os resultados resumidos para cada fator de cobertura. No caso da cobertura mínima (k_{\min}), observa-se claramente que as variantes com reconexão por caminhos obtêm melhores resultados que o GRASP puro. A métrica MDif mostra que o custo das soluções obtidas por GPRb, GPRf e GPRm é, em média, 3,2% superior aos valores encontrados pelo CPLEX. Para o GRASP puro, no entanto, esta diferença é de 7,47%. Avaliando-se os resultados para as coberturas média e máxima, nota-se que todas as variantes de GRASP, com ou sem reconexão por caminhos, apresentam resultados médios muito semelhantes. Os valores para MDif apresentam-se em torno de 3,9% para a cobertura média e 3,2% para a cobertura máxima.

Para compreender porque as variantes de GRASP com reconexão por caminhos não tiveram o mesmo desempenho para os diferentes fatores de cobertura, foram analisadas as soluções de cada grupo.

Para cada fator de cobertura, considerou-se um conjunto de 1000 soluções obtidas

		CPLEX	Gpuro	GPRb	GPRf	GPRm
k_{\min}	MDif	0,000 %	7,47 %	3,18 %	3,29 %	3,28 %
	#Best	45	0	0	0	0
	Score	0	150	79	93	100
k_{med}	MDif	0,000 %	3,86 %	3,88 %	3,97 %	3,92 %
	#Best	45	0	0	0	0
	Score	0	96	118	123	106
k_{\max}	MDif	0,000 %	3,18 %	3,30 %	3,28 %	3,32 %
	#Best	45	0	0	0	0
	Score	0	78	107	103	114

Tabela 2.7: Resumo dos resultados dos experimentos computacionais para quatro variantes da heurística GRASP

em uma execução do GRASP puro. Calculou-se a distância de Hamming entre a melhor solução do conjunto e cada uma das demais soluções. O gráfico na Figura 2.3 mostra os valores mínimo, médio e máximo das distâncias de Hamming calculados para os fatores de cobertura k_{\min} , k_{med} e k_{\max} , referentes à instância scp61. Observa-se que, de forma geral, as distâncias de Hamming entre as soluções, são proporcionais aos fatores de cobertura. Deve-se registrar que o valor máximo da distância de Hamming para o fator de cobertura k -med refere-se a uma exceção entre as demais soluções deste grupo. Deste modo, pode-se considerar que quanto maior o fator de cobertura, maior a diferença entre as soluções. Conseqüentemente, o procedimento de reconexão por caminhos explora caminhos mais longos. Deste modo, uma iteração de GRASP com reconexão por caminhos consome maiores tempos de processamento para problemas com maior fator de cobertura.

Utilizando-se um determinado tempo de execução como critério de parada para todas as heurísticas GRASP, as variantes com reconexão por caminhos executam uma quantidade menor de iterações do que a variante sem este procedimento, reduzindo suas chances de encontrar soluções aprimorantes. No caso dos fatores de cobertura médio e máximo, o número mais reduzido de iterações realizados pelas variantes com reconexão por caminhos não foi suficiente para que se obtivessem resultados melhores do que os encontrados pelo GRASP puro.

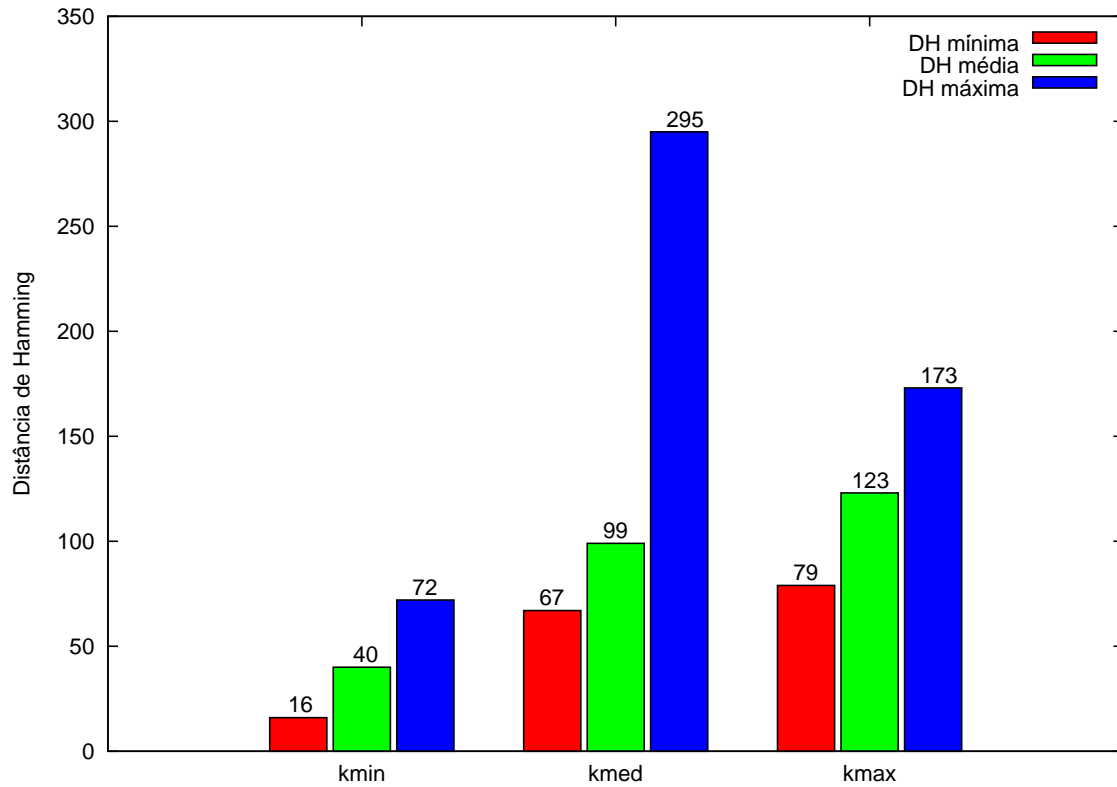


Figura 2.3: Distâncias de Hamming entre soluções para diferentes fatores de cobertura

2.4.3 Resultados sobre a distribuição dos tempos para alcançar um valor alvo

Nesta seção, as variantes de GRASP são comparadas utilizando-se os gráficos de tempo para valor alvo propostos por Aiex *et al.* [3]. Estes gráficos indicam a probabilidade empírica de um algoritmo alcançar uma solução de custo pelo menos tão bom quanto um valor alvo, em determinado tempo. Para realizar este experimento, cada algoritmo é executado 200 vezes, cada uma usando uma semente diferente para o gerador de números aleatórios. Registra-se o tempo que o algoritmo leva para alcançar uma solução pelo menos tão boa quanto o valor definido como alvo. Para cada algoritmo, estes tempos são ordenados em ordem crescente e o i -ésimo tempo de processamento ordenado (t_i) é associado à probabilidade $p_i = (i - \frac{1}{2})/200$. Então, os pontos $z_i = (t_i, p_i)$, para $i = 1, \dots, 200$, são plotados. Quanto mais à esquerda está a curva de um algoritmo, mais rapidamente ele atinge o valor alvo. Além disto, quanto menor é a diferença de tempo entre a execução mais rápida e a mais lenta, mais robusto é o algoritmo. Neste experimento, a execução dos algoritmos avaliados é encerrada quando o valor alvo é alcançado ou quando atinge-se o tempo limite de 1200 segundos de processamento.

A Figura 2.4 apresenta os resultados obtidos para a instância $scpa2-k_{min}$, cujo valor ótimo é 560. Os alvos estabelecidos foram 600 e 624. Por esses gráficos observa-se que as variantes de GRASP com reconexão por caminhos possuem comportamento bem semelhante e atingiram os alvos estabelecidos mais rapidamente do que o algoritmo GRASP puro. Quando o alvo estabelecido é 600, a probabilidade das variantes com reconexão por caminhos encontrarem o alvo em menos de 64 segundos é de, aproximadamente, 95%. Esta probabilidade é de 10% no caso do GRASP puro. Observa-se que existem diferenças de tempos consideráveis entre a execução mais rápida e mais lenta para os quatro algoritmos. A medida que o alvo se torna mais fácil e distancia-se do valor ótimo, essas diferenças de tempo são reduzidas.

A Figura 2.5 apresenta os resultados obtidos para a instância $scpd1-k_{med}$. Os alvos estabelecidos, 40876 e 40937, são, respectivamente, 4,8% e 4,9% acima do valor ótimo. Por estes gráficos observa-se que a estratégia *backward* de reconexão por caminhos atingiu os alvos estabelecidos mais rapidamente que as demais versões em todas as execuções. Para o alvo 40937, as curvas relativas aos resultados do GRASP puro, GPRf e GPRm se interceptam mostrando que essas versões têm comportamentos semelhantes.

Os resultados para a instância $scp58-k_{max}$ são apresentados na Figura 2.6. Para o alvo mais difícil, todas as variantes de GRASP apresentam distribuição de probabilidade dos tempos de execução similares. Entretanto, para o alvo mais fácil, GRASP puro é capaz de atingir o valor alvo em menos tempo que as variantes de GRASP com reconexão por caminhos.

2.5 Conclusões

Neste capítulo foram realizados experimentos computacionais com heurísticas baseadas na metaheurística GRASP.

Experimentos de calibração definiram os melhores algoritmos para serem utilizados nas fases de construção e de busca local das heurísticas GRASP. Em ambos casos, os procedimentos mais simples se mostraram mais eficientes para lidar com instâncias grandes e compor uma heurística onde múltiplas iterações são realizadas.

O desempenho dos algoritmos do tipo GRASP puro e de três variantes de GRASP com reconexão por caminhos foi avaliado para instâncias com diferentes fatores de cobertura. Definindo-se um tempo de processamento fixo como critério de parada para todas as heurísticas avaliadas, GRASP com reconexão por caminhos encontrou soluções

melhores que o GRASP puro para 43 das 45 instâncias do grupo k_{min} . No grupo k_{med} , soluções de 33 das 45 instâncias foram melhoradas pelo procedimento de reconexão por caminhos. Das 45 instâncias do grupo k_{max} , 17 soluções encontradas por GRASP com reconexão por caminhos foram melhores do que as obtidas pelo GRASP puro.

Embora nenhuma solução ótima tenha sido encontrada, os algoritmos do tipo GRASP puro e GRASP com reconexão por caminhos encontraram, respectivamente, soluções cujo valor é, em média, 4,8% e 3,5% superior aos valores obtidos pelo CPLEX. Além de apresentar resultados médios melhores que o GRASP puro, os experimentos sobre o tempo para se atingir um valor alvo mostram que as variantes de GRASP com reconexão por caminhos são mais eficientes. Entre estas, a estratégia *backward* foi a que apresentou os melhores resultados.

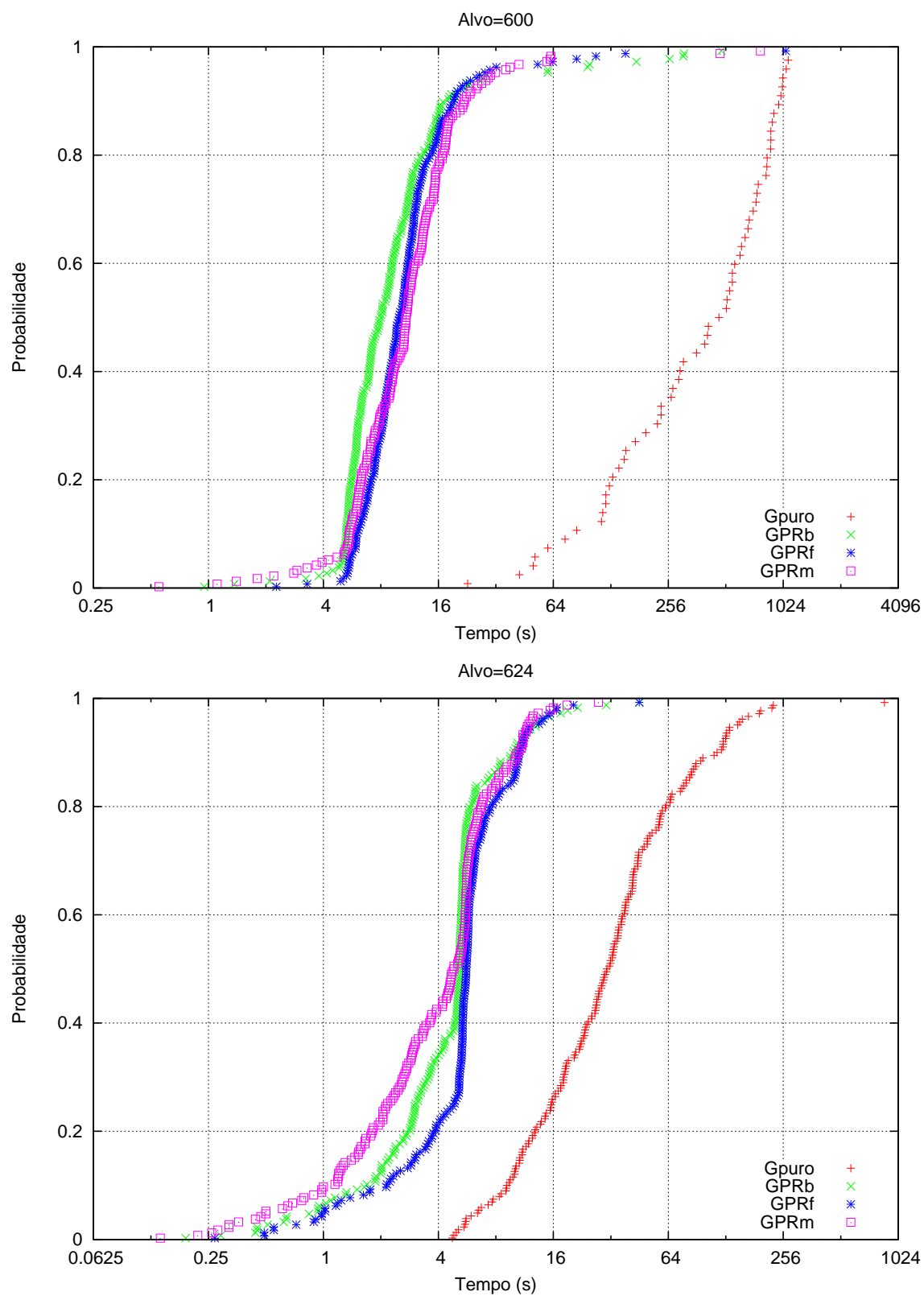


Figura 2.4: Distribuição dos tempos de execução (instância $scpa2-k_{min}$ com alvos 600 e 624).

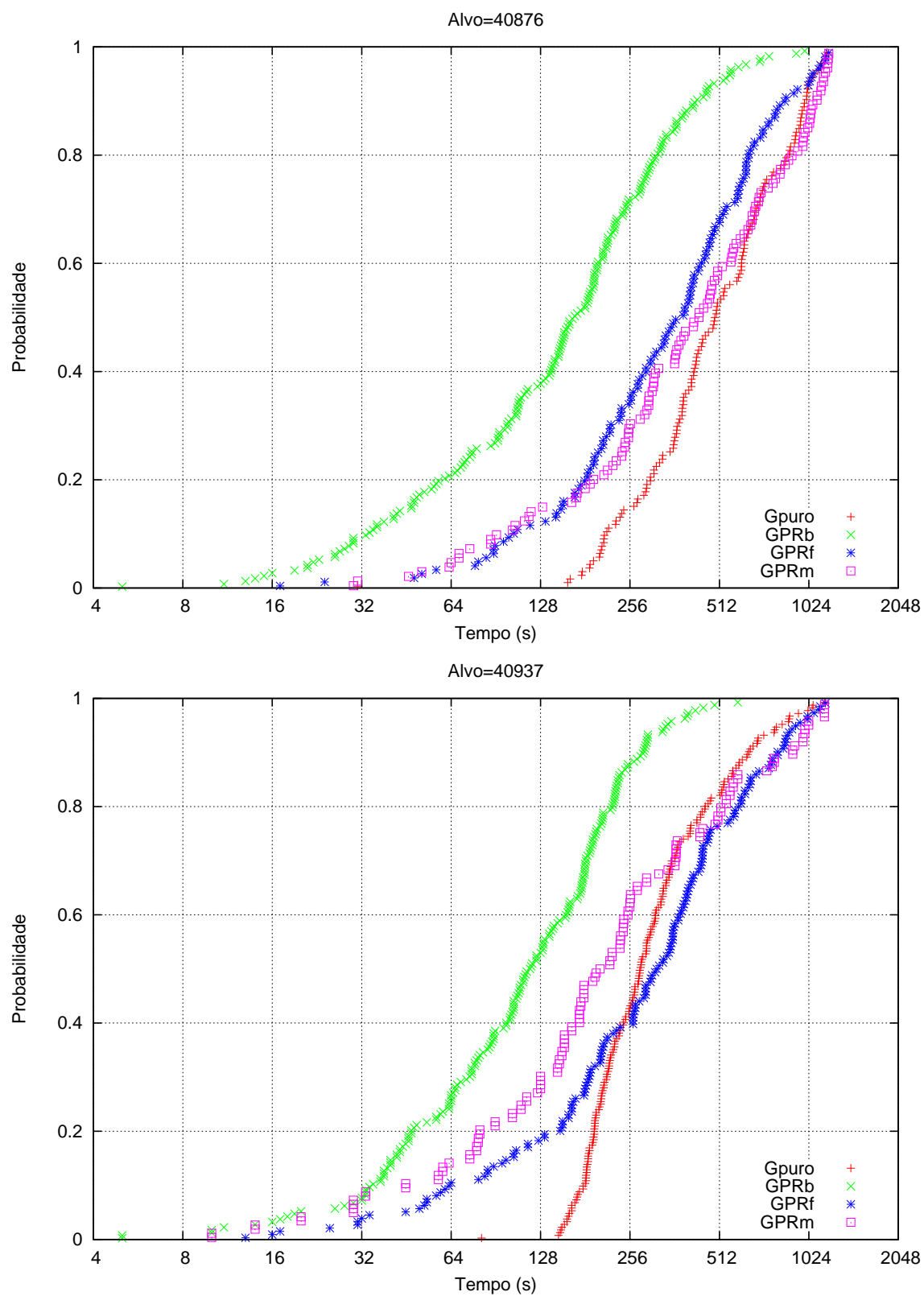


Figura 2.5: Distribuição dos tempos de execução (instância *scpd1-k_{med}* com alvos 40876 e 40937).

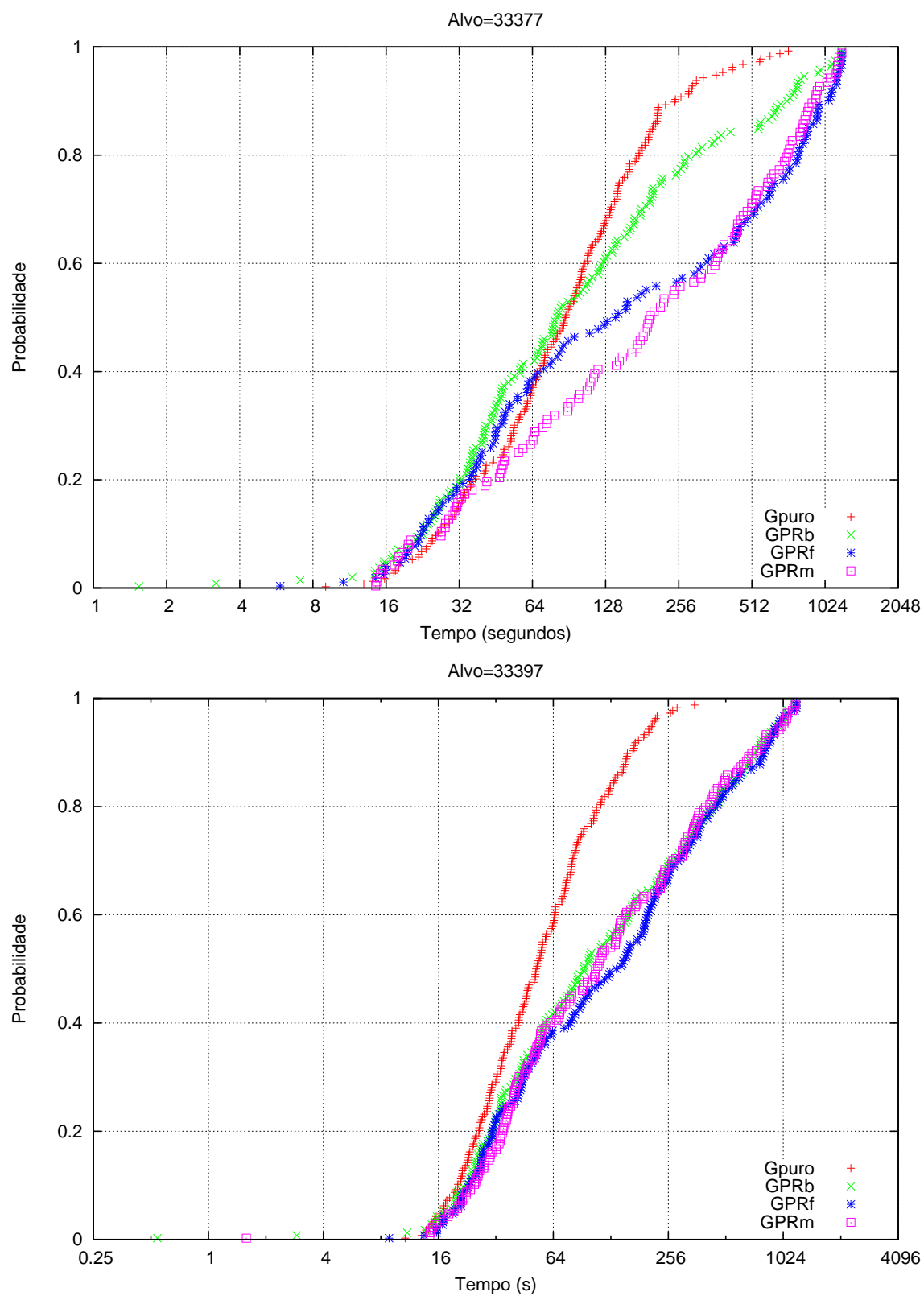


Figura 2.6: Distribuição dos tempos de execução (instância $scp58-k_{max}$ com alvos 33377 e 33397).

3 Heurísticas lagrangeanas para PkCC

Relaxação lagrangeana [13, 28, 32, 58] é uma técnica que pode ser utilizada para prover limitantes para problemas de otimização combinatória. De modo geral, esta técnica consiste em, dada a formulação de um problema de programação inteira, associar multiplicadores de Lagrange a algumas de suas restrições e relaxar estas restrições acrescentando-as à função objetivo. O valor da solução obtida pela resolução do problema lagrangeano resultante fornece um limite inferior (para problemas de minimização) para o valor ótimo do problema original. Held e Karp [35, 36], que utilizaram relaxação lagrangeana para o Problema do Caixeiro Viajante, foram precursores da aplicação desta técnica a problemas de otimização combinatória. Heurísticas lagrangeanas utilizam informações geradas na solução do problema lagrangeano para gerar soluções primais viáveis para o problema original.

Neste capítulo, são propostas heurísticas lagrangeanas para o problema da k -cobertura de conjuntos. Uma relaxação lagrangeana deste problema é apresentada na Seção 3.1. A Seção 3.2 traz uma revisão do método do subgradiente, utilizado para a determinação dos multiplicadores de Lagrange. Na Seção 3.3, é feita uma revisão de heurísticas lagrangeanas encontradas na literatura, que serviram de base para os novos métodos descritos neste capítulo. Nas Seções 3.4 e 3.5, respectivamente, são propostas *heurísticas lagrangeanas gulosas* e *heurísticas lagrangeanas híbridas*. Além disso, são apresentados os resultados computacionais relativos aos métodos propostos. Experimentos comparativos entre as heurísticas propostas nesta tese são apresentados na Seção 3.6. As conclusões deste capítulo são discutidas na Seção 3.7.

3.1 Relaxação lagrangeana do PkCC

Uma relaxação lagrangeana para o problema de k -cobertura de conjuntos pode ser definida pela associação dos multiplicadores $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$, para $i = 1, \dots, m$, a cada desigualdade (1.2) e o acréscimo destas desigualdades à função objetivo (1.1). Deste modo, obtém-se o seguinte *Problema Lagrangeano* (PL(λ)), definido por:

$$z(\lambda) = \min \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i (k - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j)$$

s.a.

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Pode-se observar como a solução do problema lagrangeano fornece um limite inferior para o problema original. O valor de

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq k, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n$$

é maior ou igual ao valor de

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i (k - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) \tag{3.1}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq k, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

pois como $\lambda_i > 0$ e $k - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, a função (3.1) representa simplesmente a adição de um termo negativo ou nulo à função objetivo do problema

original. O valor de (3.1), por sua vez, é maior ou igual ao valor de

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i (k - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) \quad (3.2)$$

s.a.

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

pois a remoção das restrições de um problema de minimização pode somente levar à redução do valor de sua função objetivo.

A formulação do $PL(\lambda)$ pode ser simplificada para

$$z'(\lambda) = \min \sum_{j=1}^n c'_j x_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i k$$

s.a.

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

onde $c'_j = c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij}$ é o *custo lagrangeano* associado à coluna $j \in J$.

Uma solução ótima $x'(\lambda)$ de $PL(\lambda)$ é obtida por inspeção fazendo-se

$$x'_j(\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{se } c'_j \leq 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.3)$$

para $j = 1, \dots, n$, com o valor da função objetivo

$$z'(\lambda) = \sum_{j=1}^n c'_j x'_j(\lambda) + k \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

sendo um limite inferior válido para o valor da solução ótima do problema original (1.1)–(1.3).

O melhor limite inferior $z'(\lambda^*)$ é dado pela solução do *Problema Dual Lagrangeano* (PDL), definido por:

$$z_D = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} PL(\lambda). \quad (3.4)$$

Diversos métodos são encontrados na literatura para resolver o problema dual lagrangeano. Guignard [32] discute alguns deles, como o método do subgradiente e o método dual ascendente, entre outros. Beasley [13] destaca o método do subgradiente pela sua capacidade de gerar bons limites duais para uma grande variedade de problemas de otimização combinatória. Este foi o método escolhido para ser utilizado nesta

tese.

3.2 Método do subgradiente

Partindo-se de um conjunto inicial de multiplicadores de Lagrange, o método do subgradiente utilizado neste trabalho, aplica a estratégia descrita em [13] para atualização dos multiplicadores de uma iteração para a seguinte.

A qualquer iteração q , seja λ^q o vetor corrente de multiplicadores e seja $x'(\lambda^q)$ uma solução ótima para o problema $PL(\lambda^q)$, cujo valor ótimo é $z'(\lambda^q)$. Além disso, seja \bar{z} um limite inferior conhecido para o valor da solução ótima do problema (1.1)–(1.3). Adicionalmente, seja $g^q \in \mathbb{R}^m$ um subgradiente associado à função $z'(\lambda)$ para $\lambda = \lambda^q$, com

$$g_i^q = (k - \sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j(\lambda^q)), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.5)$$

Para atualizar os multiplicadores de lagrange, o algoritmo faz uso de um tamanho de passo

$$d^q = \frac{\eta (\bar{z} - z'(\lambda^q))}{\sum_{i=1}^m (g_i^q)^2}, \quad (3.6)$$

onde $\eta \in (0, 2]$. Os multiplicadores são então atualizados de acordo com

$$\lambda_i^{q+1} = \max\{0; \lambda_i^q + d^q g_i^q\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

e o algoritmo de subgradiente segue para a iteração $q + 1$.

3.3 Heurísticas lagrangeanas na literatura

Nesta seção, são descritos três tipos de heurísticas lagrangeanas que serviram de base para o desenvolvimento dos métodos propostos neste capítulo para o problema de k -cobertura de conjuntos.

Beasley [13] descreve uma heurística lagrangeana como um método que considera uma solução do problema lagrangeano e trabalha para convertê-la em uma solução viável. Deste modo, a cada iteração do método do subgradiente obtém-se um limite superior para a solução ótima do problema original. Esta estratégia foi utilizada em diversos problemas, tais como o problema das p -medianas [9], diferentes problemas de localização [12] e o problema de cobertura de conjuntos [10], entre outros [12].

Considerando, por exemplo, o problema da cobertura de conjuntos [11], a cada iteração q do método do subgradiente um algoritmo construtivo guloso recebe $x'(\lambda^q)$ como solução inicial. Esta pode ser uma solução inviável para o problema original, uma vez que algumas linhas ainda podem estar descobertas. Uma solução viável é construída acrescentando-se colunas à $x'(\lambda^q)$ até que todas as linhas estejam cobertas. O algoritmo construtivo utilizado para este problema, iterativamente, identifica a coluna de menor custo original que pode realizar a cobertura de linhas descobertas e a inclui na solução inicial.

Caprara *et al.* [18] propõem um esquema diferente para construir soluções primais para o problema da cobertura de conjuntos. Um ponto de diferença está em que a solução inicial não contém qualquer coluna. Além disso, a cada iteração do método do subgradiente, os custos lagrangeanos (em vez dos custos originais) são utilizados para determinar as colunas que farão parte de uma solução para o problema original. O algoritmo construtivo guloso prioriza a escolha das colunas que apresentam o menor custo lagrangeano e cobrem o maior número de linhas descobertas.

Outra abordagem para o desenvolvimento de heurísticas lagrangeanas foi apresentada por Lucena [41]. Considera-se \mathcal{H} uma heurística básica que constrói soluções viáveis para o problema original. Antes de se inicializar o método do subgradiente, realiza-se uma chamada a \mathcal{H} . No decorrer do método do subgradiente, outras chamadas a \mathcal{H} podem ser feitas a cada iteração ou eventualmente.

Na primeira chamada a \mathcal{H} , utilizam-se os custos originais. Nas chamadas seguintes, \mathcal{H} constrói uma solução considerando os custos lagrangeanos $c'_j = c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i^q a_{ij}$ ou, os chamados *custos complementares* $\bar{c}_j = (1 - x'_j(\lambda^q))c_j$. O objetivo de se utilizar custos complementares é fazer com que as variáveis com valor 1 em $x'_j(\lambda^q)$, tenham custo complementar igual a zero e sejam prioritariamente escolhidas por \mathcal{H} . Sempre que uma solução viável é obtida por \mathcal{H} com qualquer um dos esquemas de custos modificados, deve-se calcular o custo real da solução utilizando os custos originais c .

3.4 Heurística Lagrangeana Gulosa

As heurísticas lagrangeanas propostas nesta tese para o problema de k -cobertura de conjuntos foram desenvolvidas considerando-se as idéias de Beasley [10, 13], Caprara [18] e Lucena [41]. Soluções viáveis para o problema original são geradas pelas chamadas *heurísticas básicas*, que podem utilizar diferentes esquemas de custos modificados e

soluções iniciais.

Neste seção, descreve-se uma heurística lagrangeana que utiliza uma *heurística básica gulosa*. Esta heurística básica é composta por uma versão não-aleatorizada do procedimento construtivo guloso, descrito no Algoritmo 1, e pela busca local apresentada no Algoritmo 2. O procedimento construtivo guloso, iterativamente, adiciona conjuntos a uma solução inicial até que todos os objetos estejam k -cobertos. A função de gula ρ_j determina a razão entre o custo modificado γ_j e a cardinalidade τ_j de um conjunto j . A cada passo do algoritmo, o conjunto de menor razão é inserido na solução. Entretanto, se mais de um conjunto tiver o mesmo valor de ρ , escolhe-se, por sorteio, qual deles fará parte da solução. À solução obtida pelo algoritmo construtivo, aplica-se uma busca local usando o vetor de custos originais c . A heurística lagrangeana que usa a heurística básica gulosa é denominada *heurística lagrangeana gulosa* ou, simplesmente, HLG.

O Algoritmo 6 descreve o pseudo-código da *heurística lagrangeana gulosa*. As linhas 2 a 5 inicializam os limites superior e inferior, o contador de iterações, o vetor de multiplicadores e o parâmetro η , utilizado no tamanho do passo. As iterações do método do subgradiente são realizadas através do laço das linhas 6 a 25. Os custos lagrangeanos são calculados na linha 7 e o problema lagrangeano é resolvido por inspeção na linha 8. Nas linhas 9 e 10, define-se o vetor de custos modificados, γ . A linha 9 refere-se a primeira iteração do método do subgradiente, quando atribuem-se os custos originais a γ . Para as iterações subsequentes, na linha 10, γ recebe os custos lagrangeanos, fazendo-se $\gamma_j = c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i^q a_{ij}$, ou os custos complementares, onde $\gamma_j = (1 - x'_j(\lambda^q))c_j$. Na linha 11, define-se a solução inicial a ser considerada pela heurística básica. Duas abordagens são consideradas para definir x^0 : $x^0 = x'(\lambda^q)$ ou $x_j^0 = 0$, para $j = 1, \dots, n$. Na linha 12, a heurística básica gulosa é chamada para produzir uma solução viável x para o problema (1.1)–(1.3) a partir de x^0 utilizando os custos modificados γ . Na linha 13 verifica-se se o custo de x é menor que o limite superior corrente. Caso seja, a melhor solução e seu custo são atualizados nas linhas 14 e 15, respectivamente. Se o limite inferior $z'(\lambda^q)$ é maior que o melhor limite inferior z_D então, na linha 17, z_D é atualizado. Nas linhas 18 e 19, verifica-se se já foi atingido o número máximo, Q , de iterações sem melhoria de z_D . Se foi, o parâmetro η é reduzido a metade. Na linha 21 determina-se o novo subgradiente, e na linha 12, o tamanho do passo. Os multiplicadores são atualizados na linha 23 e o contador de iterações é incrementado na linha 24.

```

1 HeurísticaLagrangeanaGulosa
2 Inicializa os limites superior e inferior:  $\bar{z} \leftarrow \sum_{j=1}^n c_j$  e  $z_D \leftarrow 0$ ;
3 Inicializa o contador de iterações:  $q \leftarrow 0$ ;
4 Inicializa os multiplicadores:  $\lambda_i^q \leftarrow 0, i = 1, \dots, m$ ;
5 Inicializa o parâmetro do tamanho do passo:  $\eta \leftarrow 2$ ;
6 repita
7   Calcula os custos lagrangeanos  $c'_j \leftarrow c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i^q a_{ij}, j = 1, \dots, n$ ;
8   Resolve  $PL(\lambda^q)$  por inspeção para obter  $x'(\lambda^q)$ ;
9   se  $q = 0$  então  $\gamma \leftarrow c$ ;
10  senão Determina os custos modificados  $\gamma$ ;
11  Determina a solução inicial  $x^0$  para a heurística básica;
12  Chama a heurística básica gulosa para produzir  $x$ ;
13  se  $\sum_{j=1}^n c_j x_j < \bar{z}$  então
14     $x^* \leftarrow x$ ;
15     $\bar{z} \leftarrow \sum_{j=1}^n c_j x_j$ ;
16  fim
17  se  $z'(\lambda^q) > z_D$  então  $z_D \leftarrow z'(\lambda^q)$ ;
18  se quantidade  $Q$  de iterações sem melhoria de  $z_D$  for atingida então
19     $\eta \leftarrow \eta/2$ ;
20  fim
21  Calcula o subgradiente:  $g_i^q = (k - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(\lambda^q)), i = 1, 2, \dots, m$ ;
22  Calcula o tamanho do passo:  $d^q \leftarrow \eta (\bar{z} - z'(\lambda^q)) / \sum_{i=1}^m (g_i^q)^2$ ;
23  Atualiza os multiplicadores duais:
24   $\lambda_i^{q+1} \leftarrow \max\{0, \lambda_i^q + d^q g_i^q\}, i = 1, \dots, m$ ;
25  Incrementa o contador de iterações:  $q \leftarrow q + 1$ ;
26 até critério de parada satisfeito ;

```

Algoritmo 5: Pseudo-código da heurística lagrangeana gulosa.

3.4.1 Experimentos computacionais

Para a heurística lagrangeana proposta nesta seção, foram realizados experimentos computacionais para calibração dos parâmetros e testes para avaliar a qualidade das soluções obtidas. Os resultados são comparados ao custo das soluções encontradas pelo pacote CPLEX 11 com limitação de tempo de 86400 segundos (24 horas) para cada instância e ajuste automático de parâmetros. Este modo de parametrização do CPLEX foi o que gerou as melhores soluções, de acordo com os experimentos de calibração apresentados no Anexo B. O ambiente computacional dos experimentos foi descrito na Seção 2.4.

Como critério de parada para a heurística lagrangeana proposta, foram utilizados

parâmetros do método do subgradiente, de acordo com o trabalho de Beasley [10]. Neste caso, o algoritmo é encerrado quando uma das seguintes situações é observada:

- Se o limite inferior z_D é igual ao limite superior \bar{z} , então \bar{z} é o custo da solução ótima.
- Se o parâmetro η , inicializado como 2.0 e dividido a metade a cada Q iterações sem melhoria do limite inferior z_D , se torna muito pequeno atingindo um determinado valor, $\underline{\eta}$.

Experimentos para ajuste de parâmetros

Os experimentos apresentados nesta seção foram realizados visando calibrar parâmetros que podem ser utilizados na avaliação do critério de parada da heurística lagrangeana. Foi utilizado um conjunto de 21 instâncias composto pela primeira instância de cada grupo da Tabela A.1. Para cada valor de parâmetro avaliado, a heurística lagrangeana gulosa foi executada oito vezes, variando-se a semente do gerador de números aleatórios. Além disso, a heurística básica gulosa recebe $x'(\lambda^q)$ como solução inicial e utiliza os custos lagrangeanos c' . As métricas descritas na Seção 2.4 foram utilizadas como critério de avaliação.

Parâmetro Q : Este parâmetro estabelece a quantidade de iterações consecutivas do método do subgradiente, sem melhoria do limite inferior z_D , que deve ocorrer até que o valor η seja dividido por dois.

Neste experimento, três valores de Q são avaliados: 10, 50 e 100. O limite $\underline{\eta}$ recebeu o valor 10^{-4} .

A Tabela 3.1 resume os resultados deste experimento. Observa-se, pela métrica MDif que as três versões analisadas encontram soluções bem semelhantes, apresentando uma diferença média de 0,23% a 0,25% entre os seus custos e o valor das soluções encontradas pelo CPLEX. A menor diferença porcentual foi obtida definindo-se Q como 50. A métrica #Best mostra que as versões com Q igual a 10 ou 50 encontram quatro soluções ótimas e a versão com Q igual a 100 encontra três soluções ótimas. De acordo com a métrica *Score*, a heurística que utiliza $Q = 10$ encontrou resultados que, em um número maior de vezes, foram superados pelas demais heurísticas. Os tempos totais de processamento, variando entre 1580,52 e 7967,62 segundos, são proporcionais ao valor atribuído a Q . Deste modo, optou-se por fixar o valor do parâmetro Q como 50. Os

resultados detalhados deste experimento são apresentados na Tabela E.1 que mostra, em cada linha, o nome da instância, seguido pelo custo das soluções encontradas pelo CPLEX. Nas colunas seguintes, são mostrados o melhor custo e o custo médio das soluções e o tempo de processamento obtidos por cada versão da heurística lagrangeana gulosa.

	CPLEX	$Q = 10$	$Q = 50$	$Q = 100$
MDif	0,00 %	0,25 %	0,23 %	0,24 %
#Best	21	4	4	3
Score	0	38	28	26
Tempo	–	1580,52	5007,84	7967,62

Tabela 3.1: Resultados dos experimentos de calibração da HLG - parâmetro Q .

Parâmetro $\underline{\eta}$: Este parâmetro estabelece o valor limite que $\underline{\eta}$, definido inicialmente como 2.0, pode atingir após sucessivas divisões pela metade.

Neste experimento, três valores de $\underline{\eta}$ são avaliados: 10^{-3} , 10^{-4} e 10^{-5} . O valor do parâmetro Q foi fixado em 50, seguindo o resultado apresentado na seção anterior.

Observa-se na Tabela 3.2 que os valores 10^{-4} e 10^{-5} levaram a resultados de qualidade semelhantes, com a métrica MDif apresentando valores em torno de 0,23%. Ambas variantes encontraram quatro soluções ótimas contra duas soluções ótimas encontradas pela versão que utiliza $\underline{\eta}=10^{-3}$. De acordo com a métrica Score, para a qual o menor valor indica o melhor método, a atribuição de 10^{-4} a $\underline{\eta}$ encontra as melhores soluções. A partir desta análise, optou-se por fixar o valor de $\underline{\eta}$ como 10^{-4} para os próximos experimentos. Os resultados detalhados deste experimento são apresentados na Tabela E.2 que mostra, em cada linha, o nome da instância, seguido pelo custo das soluções encontradas pelo CPLEX. Nas colunas seguintes, são mostrados o melhor custo e o custo médio das soluções e o tempo de processamento obtidos por cada versão da heurística lagrangeana gulosa.

	CPLEX	$\underline{\eta}=10^{-3}$	$\underline{\eta}=10^{-4}$	$\underline{\eta}=10^{-5}$
MDif	0,00 %	0,36 %	0,23 %	0,22 %
#Best	21	2	4	4
Score	0	41	21	24
Tempo	–	3172,42	5007,84	6363,04

Tabela 3.2: Resultados dos experimentos de calibração da HLG - parâmetro $\underline{\eta}$.

Fator multiplicativo do limite superior: Beasley [13] propõe a substituição de \bar{z} na equação (3.6) por $1,05 \cdot \bar{z}$ como forma de evitar que o passo se torne muito pequeno

a medida que $z'(\lambda^q)$ se aproxima de \bar{z} . Neste experimento, duas versões de HLG são comparadas: HLG-v1, que utiliza a equação (3.6) original e HLG-v1.05, que aplica o fator multiplicativo a \bar{z} .

A Tabela 3.3 resume os resultados obtidos por ambas versões, comparando-os aos resultados obtidos pelo CPLEX. Observa-se que apesar da redução no tempo de processamento, a métrica MDif mostra que o custo das soluções encontradas por HLG-v1.05 é, em média, maior que os custos das soluções geradas por HLG-v1. Além disso, de acordo com a métrica #Best, HLG-v1.05 encontrou um número menor de soluções ótimas. A Tabela E.3 apresenta os resultados detalhados deste experimento, mostrando, em cada linha, o nome da instância, seguido pelo custo das soluções encontradas pelo CPLEX. Nas colunas seguintes, são exibidos o melhor custo e o custo médio das soluções e o tempo de processamento obtidos por cada versão da heurística lagrangeana gulosa.

	CPLEX	HLG-v1.05	HLG-v1
MDif	0,00 %	0,28 %	0,23 %
#Best	21	3	4
Score	0	27	21
Tempo	–	2466,07	5007,84

Tabela 3.3: Resultados dos experimentos de calibração da HLG - fator multiplicativo na equação (3.6).

De acordo com os resultados apresentados nesta seção, decidiu-se pela não utilização do fator multiplicativo na equação de atualização do tamanho do passo. Os próximos experimentos consideram a equação (3.6) conforme apresentada na Seção 3.2.

Resultados obtidos com a heurística lagrangeana gulosa

O objetivo deste experimento é avaliar a qualidade das soluções obtidas e a eficiência da heurística lagrangeana gulosa. Combinando as diferentes abordagens para a solução inicial e o tipo de custo modificado utilizados pela heurística básica, \mathcal{H} , quatro diferentes versões da heurística lagrangeana gulosa foram avaliadas:

- $\text{HLG}_{c'x_\lambda^0}$: \mathcal{H} usa custos lagrangeanos e sua solução inicial é a solução do problema lagrangeano ($x^0 = x'(\lambda^q)$).
- $\text{HLG}_{\bar{c}x_\lambda^0}$: \mathcal{H} usa custos complementares e sua solução inicial é a solução do problema lagrangeano ($x^0 = x'(\lambda^q)$).
- $\text{HLG}_{c'x_0^0}$: \mathcal{H} usa custos lagrangeanos e sua solução inicial é $x_j^0 = 0, \forall j \in N$.
- $\text{HLG}_{\bar{c}x_0^0}$: \mathcal{H} usa custos complementares e sua solução inicial é $x_j^0 = 0, \forall j \in N$.

Neste experimento, foi considerado o conjunto de 135 instâncias descrito na Seção 1.4. Cada versão da HLG foi executada oito vezes variando-se a semente do gerador de números aleatórios. O parâmetro $\eta \in (0, 2]$ recebe o valor 2, sendo dividido à metade sempre que o melhor limite inferior não tenha sido aprimorado após 50 iterações consecutivas ($Q = 50$). O algoritmo é encerrado quando η atinge o valor 10^{-4} ou o limites inferior z_D é igual ao limite superior \bar{z} .

Os resultados na Tabela 3.4 mostram que os melhores tempos de processamento foram alcançados pelos algoritmos que utilizam a solução do problema lagrangeano como solução inicial para a heurística básica gulosa. Entre estas versões, a métrica MDif mostra que $\text{HLG}_{c'x_\lambda^0}$ encontrou as soluções de custo mais próximo dos valores obtidos pelo CPLEX. Os valores de Score também indicam que $\text{HLG}_{c'x_\lambda^0}$ é a melhor versão entre as heurísticas avaliadas. De acordo com #Best, todas as versões foram capazes de encontrar 24 soluções ótimas, com exceção de $\text{HLG}_{\bar{c}x_\lambda^0}$ que encontrou apenas 21.

	CPLEX	$\text{HLG}_{c'x_\lambda^0}$	$\text{HLG}_{\bar{c}x_\lambda^0}$	$\text{HLG}_{c'x_0^0}$	$\text{HLG}_{\bar{c}x_0^0}$
MDif	0,00 %	0,30 %	0,32 %	0,30 %	0,30 %
#Best	135	24	21	24	24
Score	0	194	330	209	264
Tempo	–	24274,71	22677,02	37547,50	41804,25

Tabela 3.4: Resultados dos experimentos com quatro versões da heurística lagrangeana gulosa.

As Tabelas F.1, F.2 e F.3 apresentam os resultados detalhados deste experimento para os grupos k_{min} , k_{med} e k_{max} , respectivamente. Para cada instância, é apresentado o custo da solução obtida pelo CPLEX seguido dos resultados das heurísticas lagrangeanas gulosas. Para cada versão de HLG, é apresentado o melhor custo encontrado entre as oito execuções. O erro relativo entre este valor e os custos obtidos pelo CPLEX é

apresentado na coluna seguinte. Além disso, é mostrado o custo médio das soluções encontradas nas oito execuções.

Os tempos de execução das heurísticas lagrangeanas para cada instância são apresentados nas Tabelas F.4, F.5 e F.6. Observa-se que a estratégia de construir soluções para o problema original a partir de soluções do problema relaxado consome um tempo bem menor de processamento que a abordagem de se partir de soluções cujas variáveis são, todas, iguais a zero. As heurísticas $HLG_{c'x_\lambda^0}$ e $HLG_{\bar{c}x_\lambda^0}$ consumiram tempos de processamento bem semelhantes e estes representam, em geral, metade do utilizado por $HLG_{c'x_\emptyset^0}$ e $HLG_{\bar{c}x_\emptyset^0}$.

Para observar a evolução dos limites inferiores e superiores ao longo da execução das heurísticas lagrangeanas, foi realizado um experimento que mostra, através de gráficos, a qualidade das soluções obtidas por cada heurística. Diversas instâncias foram observadas neste experimento. Os gráficos nas Figuras 3.1 e 3.2 correspondem aos resultados obtidos para a instância *scpc1-k_{max}* (cujo valor da solução ótima é igual a 112471) e ilustram um comportamento semelhante ao que foi observado nos gráficos das demais instâncias.

O gráfico na Figura 3.1 mostra a evolução dos limites inferiores e superiores no decorrer do tempo. Nota-se que as heurísticas que utilizam a solução do problema lagrangeano como solução inicial aproximam-se da solução ótima (aprimorando os limites inferior e superior) utilizando menor tempo de processamento que as demais heurísticas. Entretanto, todas as variantes chegaram ao mesmo limite inferior com custo de 112245. O gráfico na Figura 3.2 amplia a visão sobre a evolução dos limites superiores e torna possível a observação que $HLG_{c'x_\lambda^0}$ alcançou a solução de menor custo.

Como conclusão desta seção deve-se registrar que a heurística $HLG_{c'x_\lambda^0}$ apresentou melhor desempenho que os demais métodos avaliados. Além disso, todas as heurísticas lagrangeanas propostas são capazes de encontrar soluções de boa qualidade mas, considerando-se os tempos de execução, as melhores versões são as que utilizam a construção de soluções para o problema original a partir das soluções do problema lagrangeano.

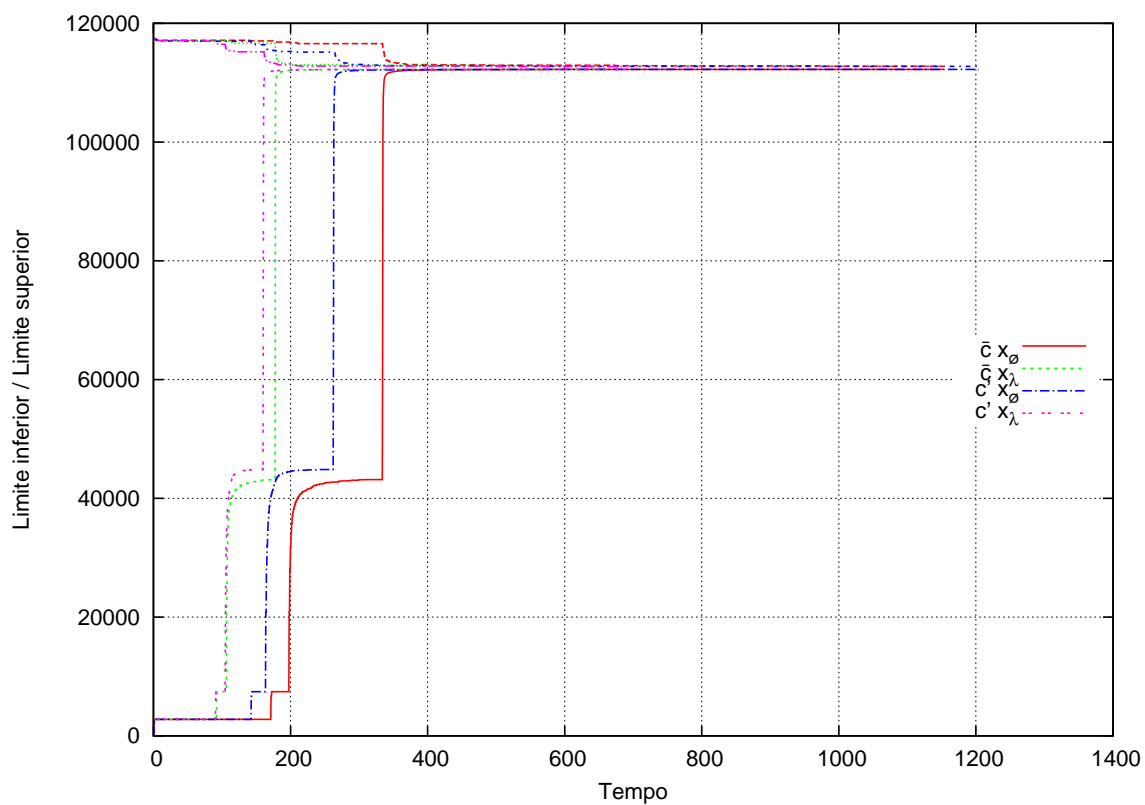


Figura 3.1: Evolução dos limites inferiores e superiores ao longo do tempo.

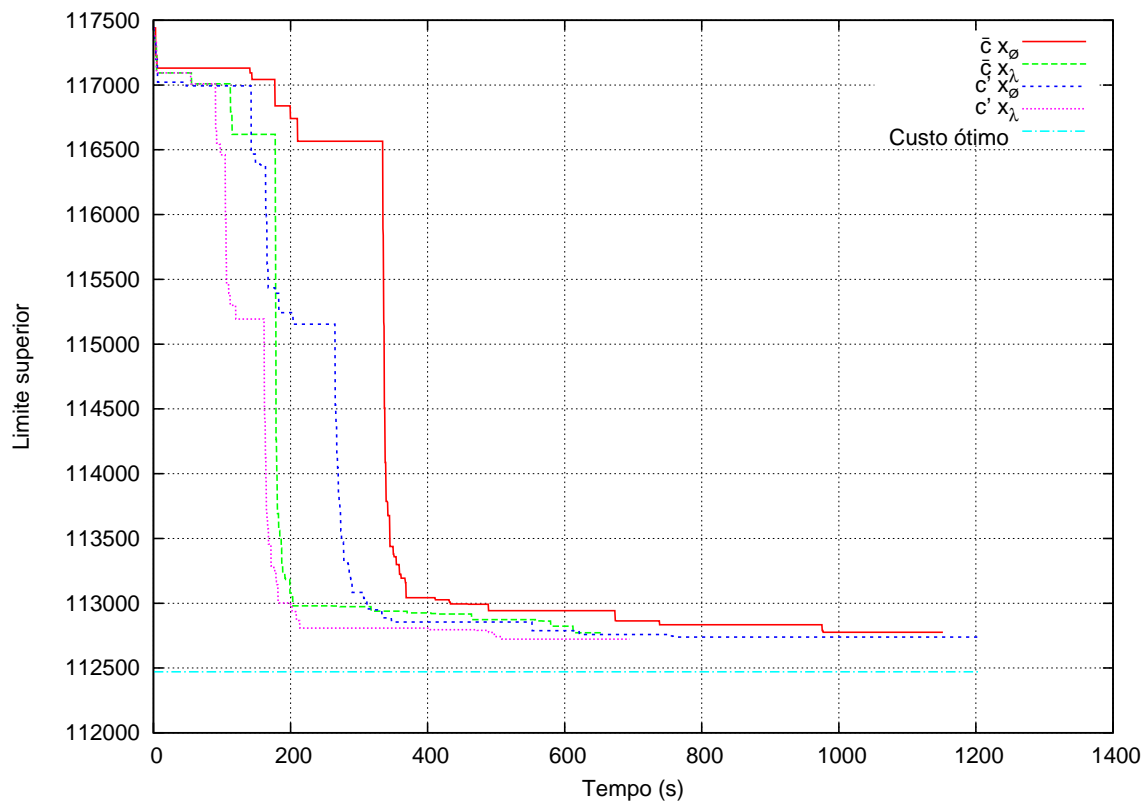


Figura 3.2: Evolução dos limites superiores ao longo do tempo.

3.5 Heurística Lagrangeana Híbrida: LAGRASP

Nesta seção, é descrita uma heurística lagrangeana que pode utilizar como heurística básica, um procedimento do tipo GRASP com reconexão por caminhos. Para viabilizar a hibridação destes métodos, algumas modificações foram feitas no procedimento da heurística lagrangeana gulosa apresentada na seção anterior.

Dois tipos de heurística básica são utilizadas neste método: a heurística básica gulosa, descrita na seção anterior, e a heurística básica GRASP, que é uma versão ligeiramente modificada do Algoritmo 4. Este procedimento recebe como parâmetros de entrada um número ig de iterações a serem realizadas, o vetor de custos modificados γ e uma solução inicial x^0 . Na fase construtiva, gera-se uma solução viável para o problema original a partir de x^0 utilizando-se os custos modificados. Nas fases de busca local e de reconexão por caminhos utilizam-se os custos originais. Antes de se iniciar a heurística lagrangeana, o conjunto elite utilizado pelo procedimento de reconexão por caminhos está vazio. A cada iteração da heurística básica GRASP, uma solução é aleatoriamente selecionada do conjunto elite e aplica-se a reconexão por caminhos entre esta solução e a solução incumbente da busca local. A solução resultante é candidata para admissão no conjunto elite seguindo as regras estabelecidas na Seção 2.3.

O Algoritmo 6 descreve a heurística lagrangeana híbrida refletindo as alterações feitas sobre o Algoritmo 5. Na linha 6, o conjunto elite é inicializado como um conjunto vazio. Na linha 12, observa-se que a chamada a uma heurística básica é feita a cada H iterações do método do subgradiente e não em todas as iterações. Embora a heurística básica GRASP produza soluções melhores que a heurística básica gulosa, esta última é muito mais rápida. Para lidar com este problema, escolhe-se a utilização da heurística básica GRASP com probabilidade β (linha 16) e da heurística básica gulosa com probabilidade $1 - \beta$ (linha 17).

A heurística lagrangeana que usa esta estratégia híbrida é denominada **LAGRASP** e envolve três parâmetros principais: o número H de iterações após o qual uma heurística básica é aplicada, o número ig de iterações realizados pela heurística básica GRASP quando esta é executada, e a probabilidade β de se escolher a heurística básica GRASP.

Cabe ressaltar que **LAGRASP** pode ser vista como uma generalização da heurística lagrangeana gulosa, uma vez que pode-se obter este método com a atribuição do valor 0 ao parâmetro β e fazendo-se H igual a 1.

```

1 LAGRASP
2 Inicializa os limites superior e inferior:  $\bar{z} \leftarrow \sum_{j=1}^n c_j$  e  $z_D \leftarrow 0$ ;
3 Inicializa o contador de iterações:  $q \leftarrow 0$ ;
4 Inicializa os multiplicadores:  $\lambda_i^q \leftarrow 0, i = 1, \dots, m$ ;
5 Inicializa o parâmetro do tamanho do passo:  $\eta \leftarrow 2$ ;
6 Inicializa o conjunto elite:  $\mathcal{P} \leftarrow \emptyset$ ;
7 repita
8   Calcula os custos lagrangeanos  $c'_j \leftarrow c_j - \sum_{i=1}^m \lambda_i^q a_{ij}, j = 1, \dots, n$ ;
9   Resolve  $PL(\lambda^q)$  por inspeção para obter  $x'(\lambda^q)$ ;
10  se  $q = 0$  então  $\gamma \leftarrow c$ ;
11  senão Determina os custos modificados  $\gamma$ ;
12  se  $q$  é um múltiplo de  $H$  então
13    Determina a solução inicial  $x^0$  para a heurística básica;
14     $random \leftarrow$  valor sorteado entre 0 e 1;
15    se  $random < \beta$ 
16      então Chama a heurística básica GRASP para produzir  $x$ ;
17      senão Chama a heurística básica gulosa para produzir  $x$ ;
18  fim
19  se  $\sum_{j=1}^n c_j x_j < \bar{z}$  então
20     $x^* \leftarrow x$ ;
21     $\bar{z} \leftarrow \sum_{j=1}^n c_j x_j$ ;
22  fim
23  se  $z'(\lambda^q) > z_D$  então  $z_D \leftarrow z'(\lambda^q)$ ;
24  se quantidade  $Q$  de iterações sem melhoria de  $z_D$  for atingida então
25     $\eta \leftarrow \eta/2$ ;
26  fim
27  Calcula o subgradiente:  $g_i^q = (k - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(\lambda^q)), i = 1, 2, \dots, m$ ;
28  Calcula o tamanho do passo:  $d^q \leftarrow \eta (\bar{z} - z'(\lambda^q)) / \sum_{i=1}^m (g_i^q)^2$ ;
29  Atualiza os multiplicadores duais:
30     $\lambda_i^{q+1} \leftarrow \max\{0, \lambda_i^q + d^q g_i^q\}, i = 1, \dots, m$ ;
31  Incrementa o contador de iterações:  $q \leftarrow q + 1$ ;
até critério de parada satisfeito ;

```

Algoritmo 6: Pseudo-código da heurística lagrangeana híbrida (LAGRASP).

3.5.1 Experimentos computacionais

Nesta seção, avalia-se o desempenho da heurística lagrangeana híbrida de acordo com a qualidade das soluções obtidas e o tempo de processamento para alcançá-las. Inicialmente são realizados experimentos para calibração de parâmetros e, em seguida, apresenta-se uma análise comparativa das melhores heurísticas lagrangeanas desen-

volvidas neste capítulo. Nos experimentos descritos nesta seção, LAGRASP combina elementos da melhor versão de heurística GRASP, apresentada no Capítulo 2, e da heurística lagrangeana gulosa, apresentada na seção anterior. Deste modo, a heurística básica GRASP, utiliza a estratégia de reconexão por caminhos para trás (*backward*) mantendo no conjunto elite, no máximo, 100 soluções de boa qualidade. Na fase de construção, as soluções para o problema original são obtidas a partir das soluções do problema lagrangeano. A função gulosa utiliza os custos lagrangeanos para escolher os conjuntos que completam a solução inicial. O fator de aleatoriedade α do algoritmo construtivo foi fixado em 0.3, deste modo reduz-se o custo computacional com relação à versão reativa. Para a definição deste parâmetro, observou-se, para diversas instâncias, o valor com maior probabilidade de ser selecionado ao final de 1000 iterações de GRASP. Durante o método do subgradiente, o parâmetro η é dividido por dois a cada 50 iterações consecutivas sem melhoria do limite inferior z_D . A execução de LAGRASP é encerrada quando η atinge o valor 10^{-4} . O ambiente computacional dos experimentos foi descrito na Seção 2.4. Os resultados obtidos pelas heurísticas lagrangeanas híbridas são comparados às melhores soluções encontradas pelo pacote CPLEX 11 com limitação de tempo de 86400 segundos (24 horas) para cada instância.

Experimentos para ajuste de parâmetros

O objetivo deste experimento é avaliar a relação entre o tempo de processamento e qualidade de soluções obtidas por diferentes configurações dos parâmetros da heurística LAGRASP. O parâmetro H , que define a periodicidade de chamada de uma heurística básica pelo método do subgradiente, recebeu valores 1, 5, 10 e 50. O parâmetro β , que define a probabilidade de a heurística básica GRASP ser aplicada, foi avaliado com os valores 0, 0.25, 0.50, 0.75 e 1. O número de iterações ig a serem executados pela heurística básica GRASP variou como 1, 5, 10 e 50. A combinação destas estratégias gerou 68 versões que foram executadas 8 vezes, variando-se a semente do gerador de números aleatórios. Foram utilizadas neste experimento o mesmo conjunto de 21 instâncias dos experimentos para ajustes de parâmetros da heurística lagrangeana gulosa descritos na Seção 3.4.1. As Tabelas 3.5 a 3.10 resumem os resultados obtidos por cada versão de acordo com as métricas apresentadas na Seção 2.4.

O gráfico na Figura 3.3 resume os resultados de todas as versões avaliadas considerando-se os valores das métricas MDif e Tempo. Cada ponto do gráfico representa uma combinação única de valores dos parâmetros. Os pontos mais próximos à origem do

gráfico representam as versões que obtiveram melhor relação entre a qualidade das soluções e o tempo de execução. Entre estas, três versões, de especial interesse, são identificadas e rotuladas com os valores dos parâmetros correspondentes, na seguinte ordem: β , H e ig . Os parâmetros $\beta = 0$ e $H = 1$ representam a heurística lagrangeana gulosa. Esta atingiu o valor 0,23% para a métrica MDif em 4859,16 segundos. Outra versão particularmente interessante é a que utilizou os parâmetros $\beta = 0,50$, $H = 10$ e $ig = 5$. O valor 0,24% para métrica MDif foi atingido utilizando-se 2414,78 segundos. Isto significa que esta versão encontra soluções de custos similares à heurística lagrangeana gulosa utilizando metade do tempo de processamento daquela heurística. A configuração $\beta = 0,25$, $H = 1$ e $ig = 5$ originou a versão de LAGRASP que, dentre as que encontraram soluções melhores que a heurística lagrangeana gulosa, foi a que utilizou o menor tempo de processamento. O custo das soluções obtidas por esta variante é, em média, apenas 0,21% superior aos valores encontrados pelo CPLEX. Este resultado foi alcançado em 13394,27 segundos.

Estes resultados foram, ainda, comparados a uma versão na qual uma heurística básica é chamada somente nas iterações onde o limite inferior é aprimorado. Neste caso, o parâmetro H foi desconsiderado, e os parâmetros β e ig foram definidos, respectivamente, como 0,25 e 5. Na Tabela 3.11 observa-se que, de acordo com a métrica MDif, o custo das soluções desta versão, denominada LAGRASP(0.25, LI, 5), é, em média, superior ao custo das soluções obtidas por LAGRASP(0.25,1,5), embora o tempo de processamento tenha sido bastante reduzido. A tabela também mostra, entretanto, que com menor tempo de processamento que LAGRASP(0.25, LI, 5), a versão LAGRASP(0.50, 10, 5) consegue obter melhores soluções. Deste modo, conclui-se que a estratégia de chamar-se uma heurística básica de acordo com o aprimoramento do limite inferior, pode reduzir o tempo de processamento de uma heurística LAGRASP, entretanto a qualidade das soluções é afetada. Além disso, resultados melhores que esta estratégia podem ser obtidos com o ajuste apropriado dos parâmetros β , H e ig da heurística LAGRASP.

	CPLEX	H=1	H=5	H=10	H=50
MDif	0,00 %	0,23 %	0,32 %	0,36 %	0,50 %
#Best	21	4	2	2	1
Score	0	23	35	47	69
Tempo (s)	–	4859,16	991,43	544,35	124,26

Tabela 3.5: Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 0$).

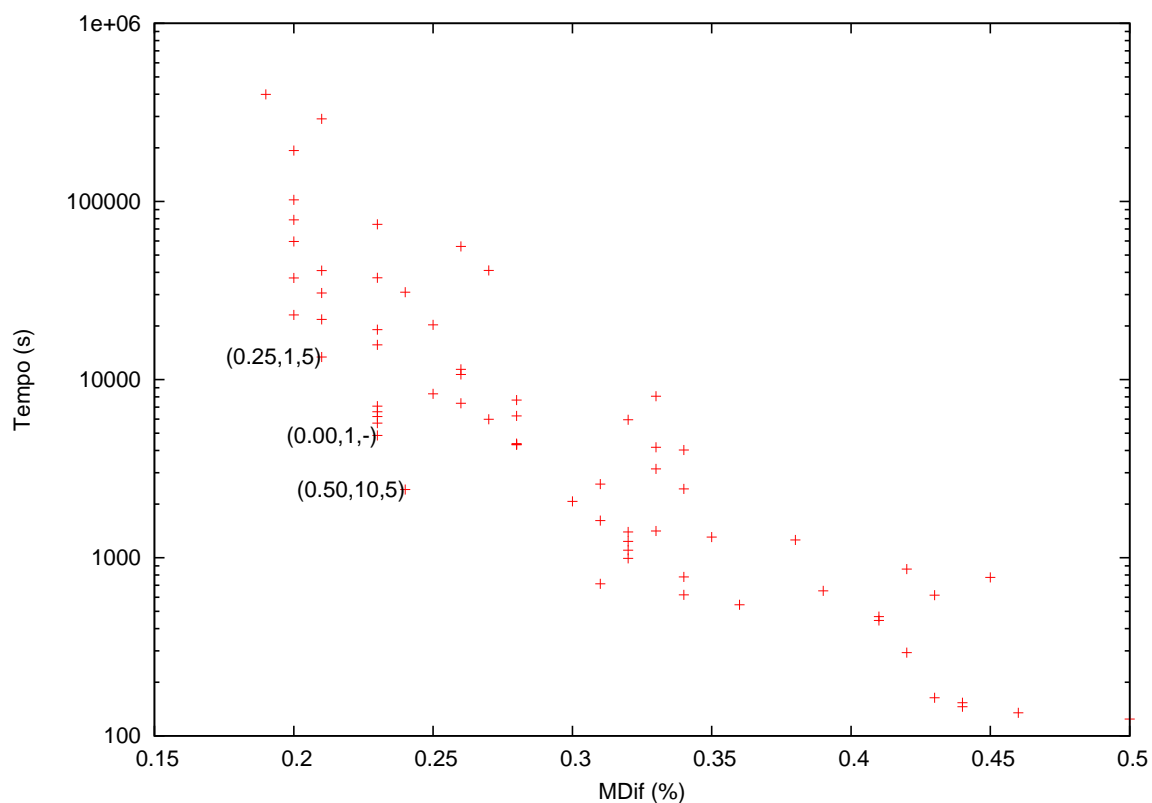


Figura 3.3: Resultados obtidos por diferentes versões de LAGRASP. Cada ponto representa uma combinação única de valores para a tripla (β, H, ig) .

	CPLEX	H=1	H=5	H=10	H=50
MDif	0,00 %	0,23 %	0,32 %	0,36 %	0,50 %
#Best	21	4	2	2	1
Score	0	23	35	47	69
Tempo (s)	–	4859,16	991,43	544,35	124,26

Tabela 3.6: Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 0$).

Resultados computacionais

Este experimento compara o desempenho das três versões selecionadas de LAGRASP. LAGRASP(0, 1, –) é a denominação para a versão que utiliza $\beta = 0$ e $H = 1$, ou seja, a heurística lagrangeana gulosa. LAGRASP(0.25, 1, 5) utiliza os parâmetros $\beta = 0,25$, $H = 1$ e $ig = 5$. A versão com parâmetros $\beta = 0,5$, $H = 10$ e $ig = 5$ é denominada LAGRASP(0.50, 10, 5).

A Tabela 3.12 resume os resultados obtidos sobre as 135 instâncias descritas na Seção 1.4. O custo das soluções obtidas pelas versões de LAGRASP são comparados aos valores encontrados pelo CPLEX. Estes resultados ratificam os resultados de calibração mostrando que LAGRASP(0.50, 10, 5) conseguiu, com metade do tempo de processamento utilizado por LAGRASP(0, 1, –), obter soluções de custos similares aos

		CPLEX	ig=1	ig=5	ig=10	ig=50
$H = 1$	MDif	0,00 %	0,23 %	0,21 %	0,20 %	0,20 %
	#Best	21	4	4	4	4
	Score	0	46	33	32	25
	Tempo (s)	–	5699,57	13394,27	23042,81	102115,92
$H = 5$	MDif	0,00 %	0,32 %	0,31 %	0,28 %	0,23 %
	#Best	21	2	2	3	4
	Score	0	44	39	35	35
	Tempo (s)	–	1101,64	2589,79	4373,56	19086,68
$H = 10$	MDif	0,00 %	0,34 %	0,33 %	0,34 %	0,26 %
	#Best	21	2	2	2	4
	Score	0	44	37	45	31
	Tempo (s)	–	618,95	1411,58	2435,05	10690,92
$H = 50$	MDif	0,00 %	0,46 %	0,42 %	0,41 %	0,30 %
	#Best	21	2	2	2	4
	Score	0	44	40	42	39
	Tempo (s)	–	134,76	292,95	467,40	2070,83

Tabela 3.7: Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 0.25$).

valores obtidos por esta heurística. A versão LAGRASP(0.25,1,5) teve desempenho melhor em termos de qualidade, conseguindo os melhores resultados entre as heurísticas avaliadas. LAGRASP(0.25,1,5) foi capaz de encontrar 27 soluções de custo igual ao das soluções encontradas pelo CPLEX e a diferença percentual média entre o custo das suas soluções e os valores obtidos pelo CPLEX é de 0,27%. Entretanto, o seu tempo de processamento foi maior que o tempo utilizado por LAGRASP(0,1,–). As versões LAGRASP(0,1,–) e LAGRASP(0.50,10,5) encontraram, respectivamente, 24 e 23 soluções de custo igual ao das soluções encontradas pelo CPLEX. Os resultados detalhados e tempos computacionais obtidos pelas heurísticas LAGRASP são apresentados nas Tabelas G.1 a G.6.

A Tabela 3.13 resume os resultados comparativos, sobre 135 instâncias, entre os limites inferiores obtidos pelos métodos avaliados nesta seção. A diferença percentual média entre os limites inferiores obtidos pelo CPLEX e pelas versões de LAGRASP ficou em torno de 0,7%. Nas Tabelas G.7 a G.9 observa-se o detalhamento destes resultados. Para cada fator de cobertura, as tabelas mostram os nomes das instâncias e seus

		CPLEX	ig=1	ig=5	ig=10	ig=50
$H = 1$	MDif	0,00 %	0,23 %	0,21 %	0,21 %	0,20 %
	#Best	21	4	4	4	4
	Score	0	45	38	34	29
	Tempo (s)	–	6198,46	21774,75	40905,26	193119,34
$H = 5$	MDif	0,00 %	0,32 %	0,28 %	0,28 %	0,23 %
	#Best	21	2	3	3	4
	Score	0	47	41	36	31
	Tempo (s)	–	1234,93	4311,88	7666,81	37238,65
$H = 10$	MDif	0,00 %	0,39 %	0,24 %	0,28 %	0,25 %
	#Best	21	2	4	3	4
	Score	0	57	24	36	35
	Tempo (s)	–	651,48	2414,78	4318,75	20307,60
$H = 50$	MDif	0,00 %	0,44 %	0,41 %	0,42 %	0,34 %
	#Best	21	2	2	2	2
	Score	0	51	37	49	33
	Tempo (s)	–	145,73	444,39	864,09	4025,57

Tabela 3.8: Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 0.50$).

respectivos limites inferiores obtidos pelo CPLEX. O melhor limite inferior obtido por cada versão de LAGRASP e a diferença porcentual entre este valor e o resultado alcançado pelo CPLEX são apresentados nas colunas seguintes. As tabelas também mostram os saltos de dualidade, definidos pela diferença porcentual entre o limite inferior e superior obtidos para cada instância. A média dos saltos de dualidade encontrados pelo CPLEX e por LAGRASP(0,1,–), LAGRASP(0.25,1,5) e LAGRASP(0.50,10,5) foi, respectivamente, 0,1%, 1,14%, 1,11% e 1,21%.

Os resultados das versões de LAGRASP também podem ser analisados através de gráficos que ilustram como os limites superiores e inferiores são aprimorados no decorrer da execução dos algoritmos. Nestes gráficos também observa-se a evolução do custo das soluções obtidas pelo CPLEX. Para isto, tanto as versões de LAGRASP como o CPLEX foram executados no mesmo computador: um SGI Altix 3700 Supercluster (32 processadores de 1.5GHz Itanium) usando o sistema operacional Linux RedHat Advanced Server with SGI ProPack, com as execuções limitadas a apenas um processador.

		CPLEX	ig=1	ig=5	ig=10	ig=50
$H = 1$	MDif	0,00 %	0,23 %	0,21 %	0,20 %	0,21 %
	#Best	21	4	4	4	4
	Score	0	47	33	31	34
	Tempo (s)	–	6596,80	30630,99	59632,31	291054,70
$H = 5$	MDif	0,00 %	0,35 %	0,27 %	0,26 %	0,26 %
	#Best	21	2	3	3	4
	Score	0	48	35	34	37
	Tempo (s)	–	1307,13	5984,91	11409,71	55915,89
$H = 10$	MDif	0,00 %	0,31 %	0,33 %	0,28 %	0,24 %
	#Best	21	3	2	3	4
	Score	0	46	44	39	35
	Tempo (s)	–	713,50	3153,08	6255,43	30944,75
$H = 50$	MDif	0,00 %	0,44 %	0,43 %	0,38 %	0,32 %
	#Best	21	2	2	2	4
	Score	0	41	47	38	44
	Tempo (s)	–	153,42	616,05	1257,66	5954,71

Tabela 3.9: Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 0.75$).

Os gráficos nas Figuras 3.4 a 3.9 ilustram o comportamento típico das heurísticas LAGRASP e do CPLEX ao longo do tempo.

A evolução dos limites inferiores e superiores ao longo do tempo para a instância *scp62* – k_{med} é apresentada no gráfico da Figura 3.5. Nota-se ao fim da execução das três versões de LAGRASP, o mesmo limite inferior com custo de 6665, o que é natural pois este valor depende exclusivamente do método do subgradiente, comum às três versões. A variação nos tempos de processamento de cada versão deve-se à utilização de diferentes critérios nas chamadas à heurística básica. A evolução dos limites superiores em função do tempo, pode ser observada no gráfico da Figura 3.5. Observa-se que LAGRASP(0.50, 10, 5) encerra sua execução em, aproximadamente, 30 segundos e apresenta uma solução de custo igual a 6792. LAGRASP(0, 1, –) utiliza 53 segundos e atinge uma solução de custo 6778. O maior tempo computacional é gasto por LAGRASP(0.25, 1, 5) que alcança a melhor solução entre as demais versões avaliadas. Em 147 segundos, LAGRASP(0.25, 1, 5) foi capaz de encontrar uma solução de custo 6777. Utilizando este mesmo tempo de processamento, CPLEX atingiu o valor

		CPLEX	ig=1	ig=5	ig=10	ig=50
$H = 1$	MDif	0,00 %	0,23 %	0,20 %	0,20 %	0,19 %
	#Best	21	4	4	4	4
	Score	0	49	31	30	34
	Tempo (s)	–	7093,41	37216,97	78885,77	399101,14
$H = 5$	MDif	0,00 %	0,32 %	0,26 %	0,23 %	0,23 %
	#Best	21	2	3	4	4
	Score	0	51	35	32	33
	Tempo (s)	–	1394,78	7369,04	15671,40	74336,70
$H = 10$	MDif	0,00 %	0,34 %	0,33 %	0,25 %	0,27 %
	#Best	21	2	2	4	4
	Score	0	39	43	35	43
	Tempo (s)	–	780,63	4166,19	8322,41	40969,85
$H = 50$	MDif	0,00 %	0,43 %	0,45 %	0,31 %	0,33 %
	#Best	21	2	2	3	3
	Score	0	44	51	29	45
	Tempo (s)	–	163,59	775,54	1617,64	8059,92

Tabela 3.10: Resultados dos experimentos de calibração do LAGRASP ($\beta = 1$).

	CPLEX	LAGRASP (0.25, LI, 5)	LAGRASP (0.25, 1, 5)	LAGRASP (0.50, 10, 5)
MDif	0,00 %	0,25 %	0,21 %	0,24 %
#Best	21	4	4	4
Score	0	36	24	33
Tempo	–	3291,12	13394,27	2414,78

Tabela 3.11: Resultados comparativos entre versões de LAGRASP com diferentes critérios para a chamada de \mathcal{H} .

	CPLEX	LAGRASP (0, 1, –)	LAGRASP (0.25, 1, 5)	LAGRASP (0.50, 10, 5)
MDif	0,00 %	0,30 %	0,27 %	0,33 %
#Best	135	24	27	23
Score	0	191	133	272
Tempo (s)	–	24274,71	63603,06	11401,26

Tabela 3.12: Resultados comparativos entre os limites superiores obtidos pelas versões da heurística LAGRASP.

6691 para o limite inferior e encontrou uma solução primal de custo 6739.

	CPLEX	LAGRASP (0,1,-)	LAGRASP (0.25,1,5)	LAGRASP (0.50,10,5)
MDif	0,00 %	0,72 %	0,72 %	0,71 %
#Best	135	0	0	0
Score	0	308	276	205
Tempo (s)	-	24274,71	63603,06	11401,26

Tabela 3.13: Resultados comparativos entre os limites inferiores obtidos pelas versões da heurística LAGRASP.

O comportamento observado nos gráficos das Figuras 3.4 e 3.5 é semelhante ao observado em outras instâncias, como exemplificado nas Figuras 3.6 e 3.7 (instância *scpd4* – k_{med}) e nas Figuras 3.8 e 3.9 (instância *scpa2* – k_{max}). Em todos estes gráficos, nota-se que LAGRASP(0.25,1,5) encontrou soluções melhores do que as demais versões, embora utilize maior tempo de processamento. Além disso, observa-se que tanto as soluções primais encontradas por esta heurística, como as soluções duais obtidas pelo método do subgradiente apresentam custos bem próximos aos das soluções obtidas pelo CPLEX.

Resultados computacionais com instâncias do problema de cobertura de conjuntos ($k=1$)

O objetivo deste experimento é avaliar o desempenho das heurísticas LAGRASP sobre o conjunto de 45 instâncias originais para o problema de cobertura de conjunto. Estas instâncias estão descritas na Tabela 1.1 e deram origem aos problemas-teste para o problema de k -cobertura de conjuntos pela atribuição de diferentes fatores de cobertura a cada uma delas. Ou seja, neste experimento, utiliza-se fator de cobertura $k = 1$ para todas as instâncias.

A Tabela 3.14 resume os resultados alcançados pelas três versões de LAGRASP selecionadas e descritas na seção anterior. Observa-se que LAGRASP(0.25,1,5) teve o melhor desempenho com relação à qualidade das soluções. Esta versão encontrou 37 soluções ótimas e alcançou 0,14% na métrica MDif. Além disso, a métrica Score indica que este método foi superado pelos demais em um menor número de vezes. Nas Tabelas G.10 e G.11, que apresentam o detalhamento destes resultados, observa-se que, quando LAGRASP(0.25,1,5) não encontra a solução ótima, o custo obtido é maior do que o custo ótimo em, no máximo, duas unidades. As demais versões avaliadas utilizaram menores tempos de processamento, mas encontraram um número menor de soluções ótimas. Além disso, a métrica MDif mostra que o custo das suas soluções é, em média, superior ao custo das soluções obtidas por LAGRASP(0.25,1,5).

	CPLEX	LAGRASP (0, 1, -)	LAGRASP (0.25, 1, 5)	LAGRASP (0.50, 10, 5)
MDif	0,00 %	0,37 %	0,14 %	0,29 %
#Best	45	27	37	31
Score	0	38	8	27
Tempo	-	245,63	779,81	188,08

Tabela 3.14: Resultados comparativos entre as versões da heurística LAGRASP (instâncias do PCC ($k=1$)).

3.6 Comparação das heurísticas LAGRASP e GRASP

Os experimentos da seção anterior compararam diversas versões da heurística lagrangeana híbrida, uma delas correspondendo à heurística lagrangeana gulosa. Nesta seção, deseja-se comparar a eficiência das heurísticas GRASP e LAGRASP. Para isto, ambas heurísticas são executadas aplicando-se o mesmo tempo de processamento como critério de parada.

Neste experimento, utilizou-se a melhor versão de GRASP apresentada no Capítulo 2, ou seja, GRASP com reconexão por caminhos *backward* (GPRb). Esta heurística é comparada a LAGRASP(0.25, 1, 5), que obteve as soluções de menor custo entre as três versões de heurísticas lagrangeanas híbridas destacadas na seção anterior.

LAGRASP(0.25, 1, 5) e GPRb utilizaram os tempos limite definidos na Tabela 2.4. para processar as 135 instâncias descritas na Seção 1.4. Foram realizadas oito execuções de cada heurística, variando-se a semente do gerador de números aleatórios.

A Tabela 3.15 resume os resultados obtidos pelas heurísticas avaliadas. Observa-se que as melhores soluções foram encontradas pelo LAGRASP(0.25, 1, 5). O custo das suas soluções são, em média, apenas 0,43% superiores aos valores encontrados pelo CPLEX enquanto a diferença entre estes e as soluções obtidas pelo GPRb é de 3,46%. LAGRASP(0.25, 1, 5) foi capaz de encontrar 22 soluções ótimas, enquanto a heurística GPRb não encontrou solução ótima alguma. Por fim, a métrica *Score*, para a qual menores valores indicam as melhores métodos, confirma a vantagem da heurística LAGRASP(0.25, 1, 5) sobre GPRb.

O detalhamento destes resultados é apresentado nas Tabelas H.1 a H.3. Cada linha destas tabelas apresenta o nome da instância, seguido pelo custo da solução obtida pelo CPLEX. Para cada heurística avaliada, é apresentado o melhor custo encontrado entre as oito execuções, a diferença porcentual entre este valor e o resultado obtido pelo CPLEX e, em seguida, a média das soluções encontradas nas oito execuções.

	CPLEX	LAGRASP(0.25, 1, 5)	GPRb
MDif	0,00 %	0,43 %	3,46 %
#Best	135	22	0
Score	0	113	270

Tabela 3.15: Resultados comparativos entre as heurísticas LAGRASP(0.25, 1, 5) e GPRb.

Em outro experimento, observou-se o aprimoramento das soluções ao longo do tempo. Nos gráficos das Figuras 3.10 a 3.12, observa-se o comportamento das heurísticas LAGRASP e GRASP para três instâncias. Para a geração destes gráficos, utilizou-se os resultados do experimento anterior que aplicou o tempo de execução como critério de parada. A cada melhoria na solução, registrou-se o tempo para sua ocorrência.

A Figura 3.10, apresenta os resultados para a instância *scpd1-k_{min}*, cujo custo ótimo é 122. Ao fim de 26 segundos de execução, LAGRASP(0.25, 1, 5) havia encontrado uma solução de custo 124 enquanto o custo da melhor solução obtida por GPRb foi 132. Em momento algum, GPRb conseguiu obter soluções tão boas quanto as obtidas por LAGRASP(0.25, 1, 5). Os gráficos das Figuras 3.11 e 3.12, referem-se às instâncias *scpa5-k_{med}* e *scp48-k_{max}*. Nota-se que LAGRASP(0.25, 1, 5), ao longo de toda a execução, mantém-se encontrando soluções melhores que a heurística GPRb.

3.7 Conclusões

Neste capítulo foram propostas heurísticas lagrangeanas para o problema de k -cobertura de conjuntos. O desenvolvimento destas heurísticas baseou-se na combinação de idéias aplicadas em diferentes tipos de heurísticas lagrangeanas encontradas na literatura. Inicialmente, utilizou-se como heurística básica, um algoritmo guloso seguido de um procedimento de busca local. Foram avaliadas quatro estratégias para a construção de soluções primais pela heurística básica, o que resultou em quatro versões da chamada *heurística lagrangeana gulosa*. Cada estratégia considerou diferentes esquemas de custos modificados e de solução inicial. Constatou-se que os melhores resultados foram obtidos utilizando-se custos lagrangeanos e tomando como inicial a solução do problema lagrangeano.

A principal contribuição deste capítulo foi a proposição de uma heurística lagrangeana híbrida. LAGRASP consiste de uma heurística lagrangeana que utiliza um procedimento GRASP como heurística básica. A variante que atingiu os melhores resultados

para o problema de k -cobertura de conjuntos, obteve soluções com custo, em média, superior em apenas 0,27% ao valor das soluções obtidas pelo CPLEX. Além disso, este método foi capaz de encontrar 27 de custo igual ao custo obtido pelo CPLEX. Os experimentos com instâncias do problema de cobertura de conjuntos ($k=1$) ratificaram os resultados de LAGRASP. Por fim, foram realizados experimentos comparativos mostrando o melhor desempenho de LAGRASP em relação a heurística GRASP.

Conclui-se, deste modo, que a hibridação da metaheurística GRASP com uma heurística lagrangeana leva ao aprimoramento das soluções obtidas pela aplicação isolada de cada uma destas estratégias.

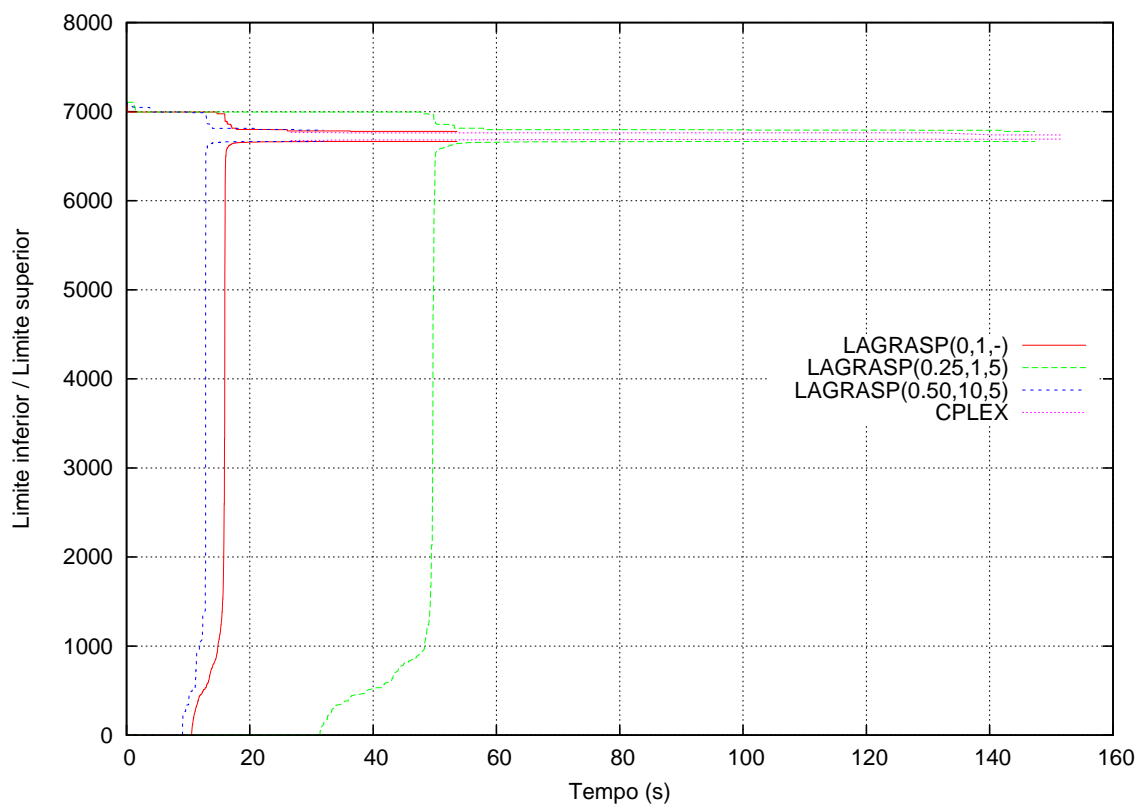


Figura 3.4: Evolução dos limites inferiores e superiores ao longo do tempo (instância *scp62 - kmed*).

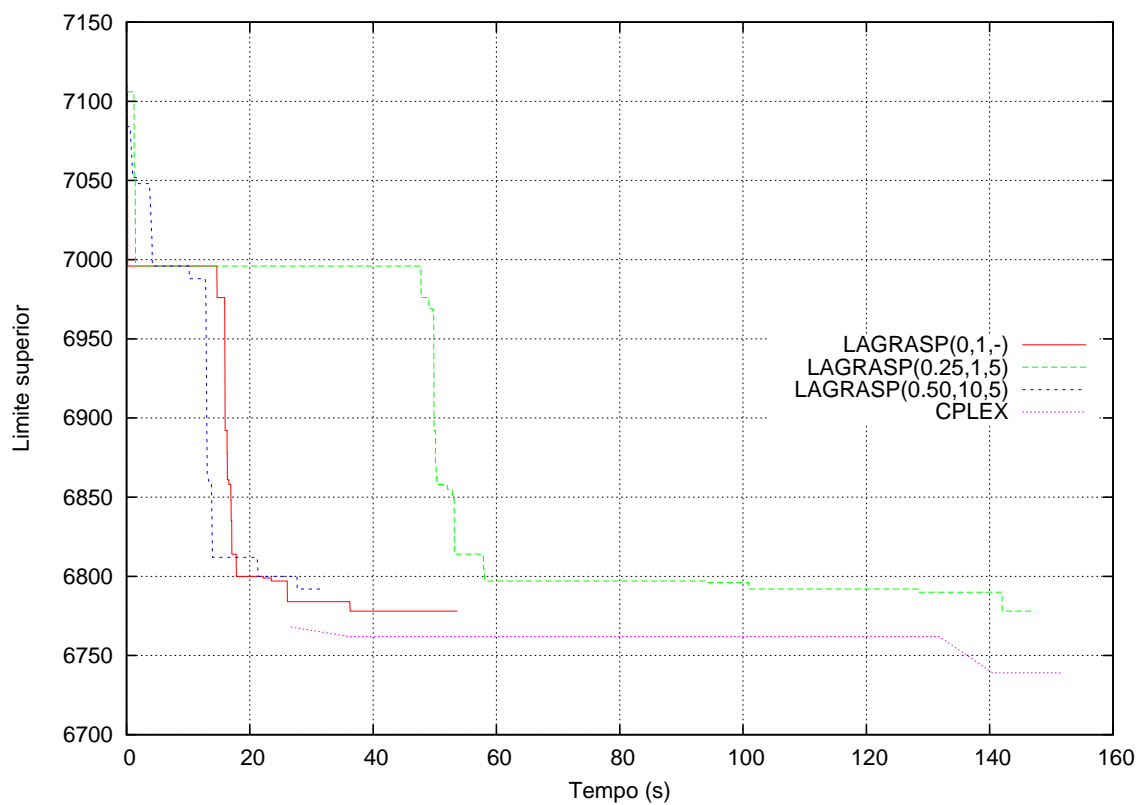


Figura 3.5: Evolução dos limites superiores ao longo do tempo (instância *scp62 - kmed*).

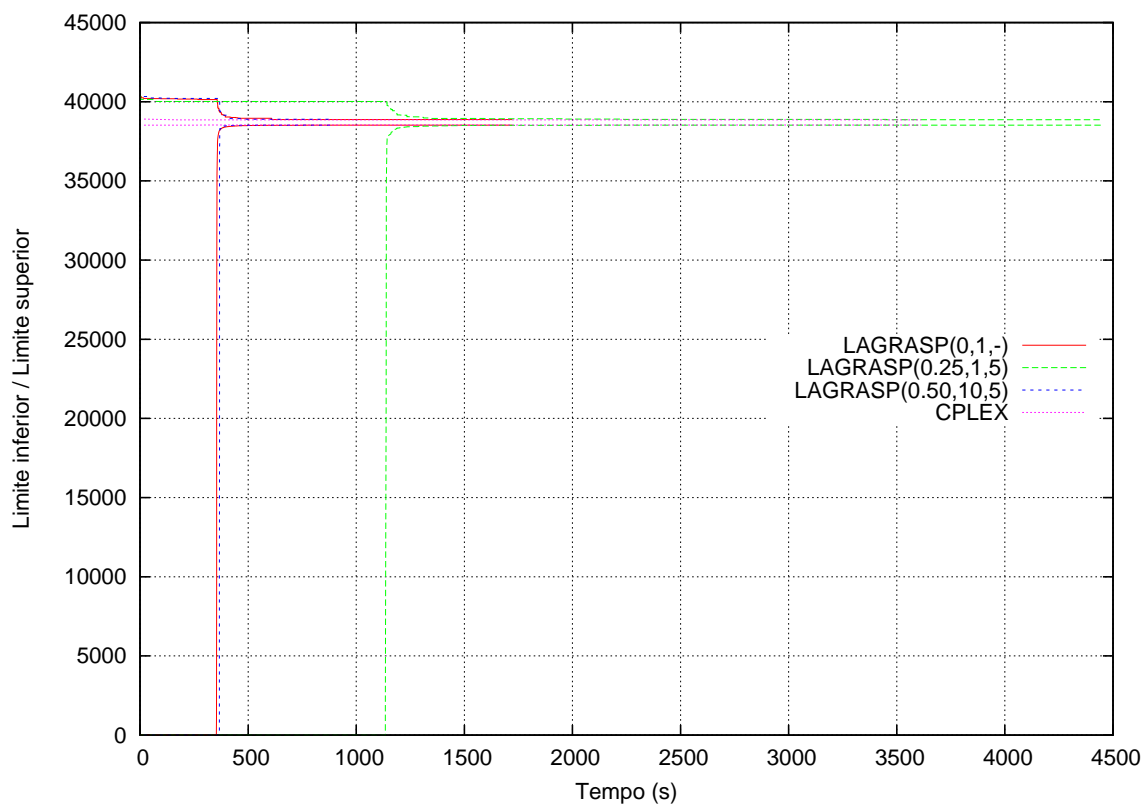


Figura 3.6: Evolução dos limites inferiores e superiores ao longo do tempo (instância *scpd4 - k_{med}*).

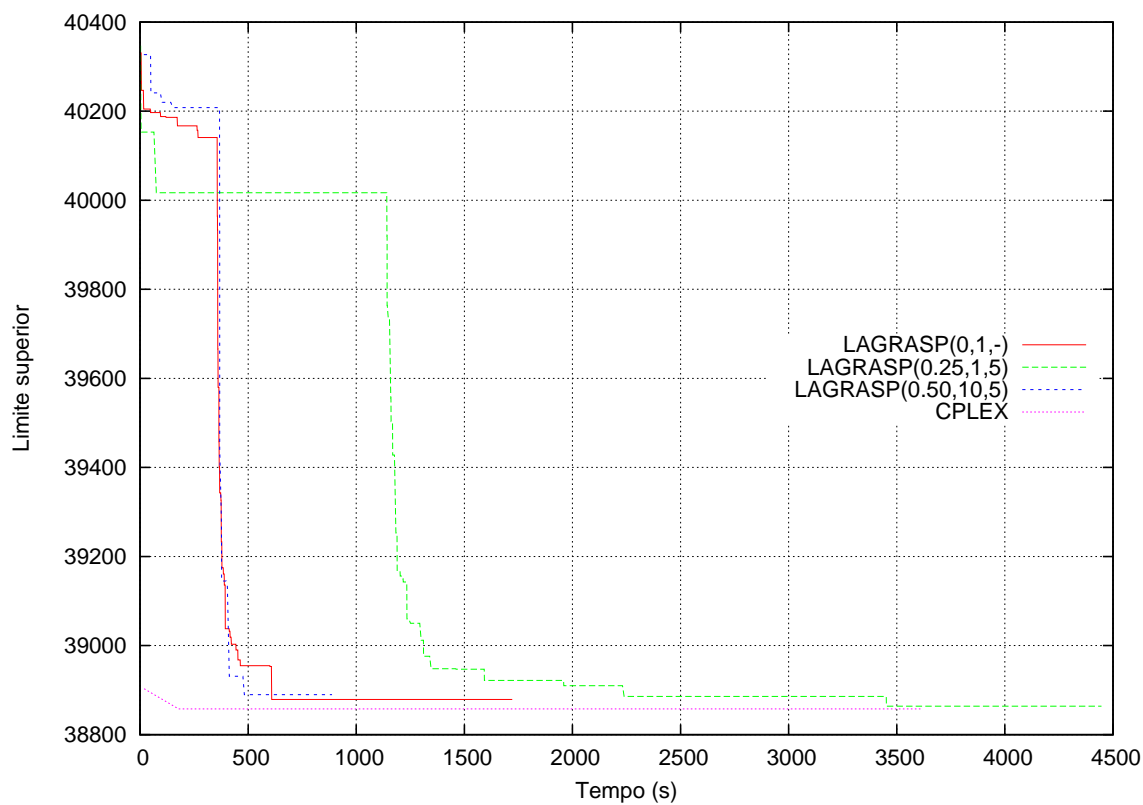


Figura 3.7: Evolução dos limites superiores ao longo do tempo (instância *scpd4 - k_{med}*).

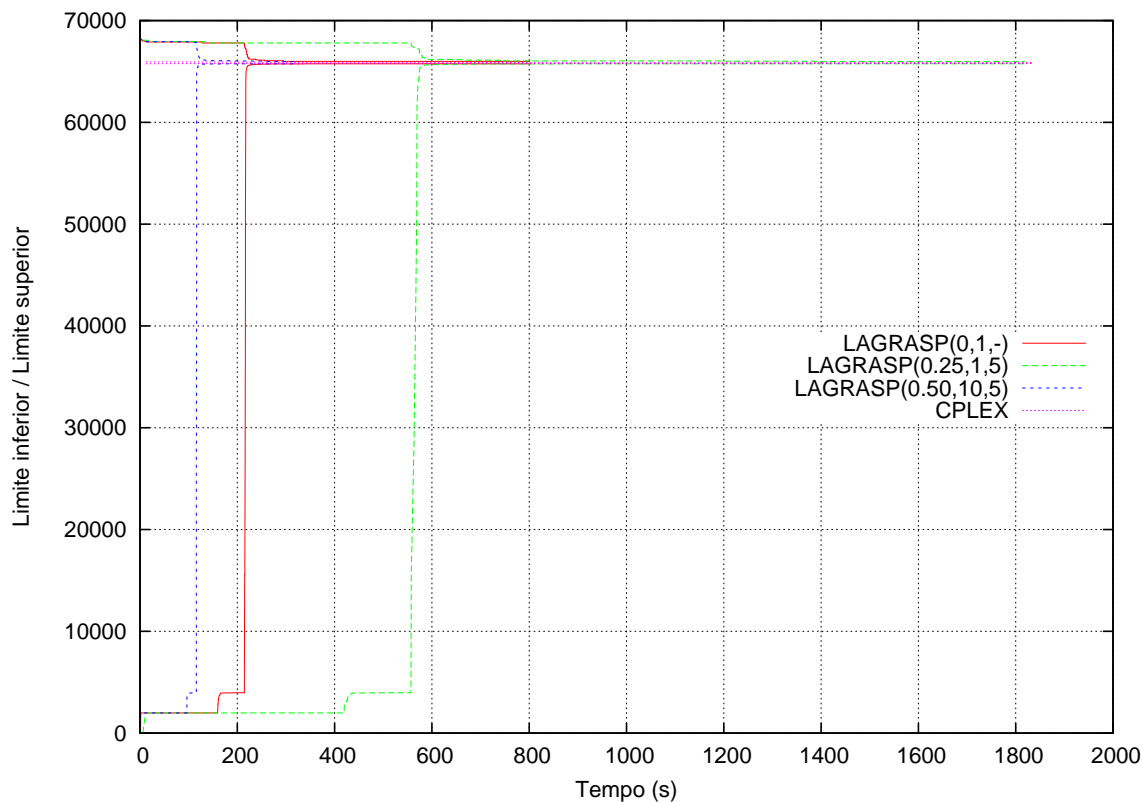


Figura 3.8: Evolução dos limites inferiores e superiores ao longo do tempo (instância *scpa2 - k_{max}*).

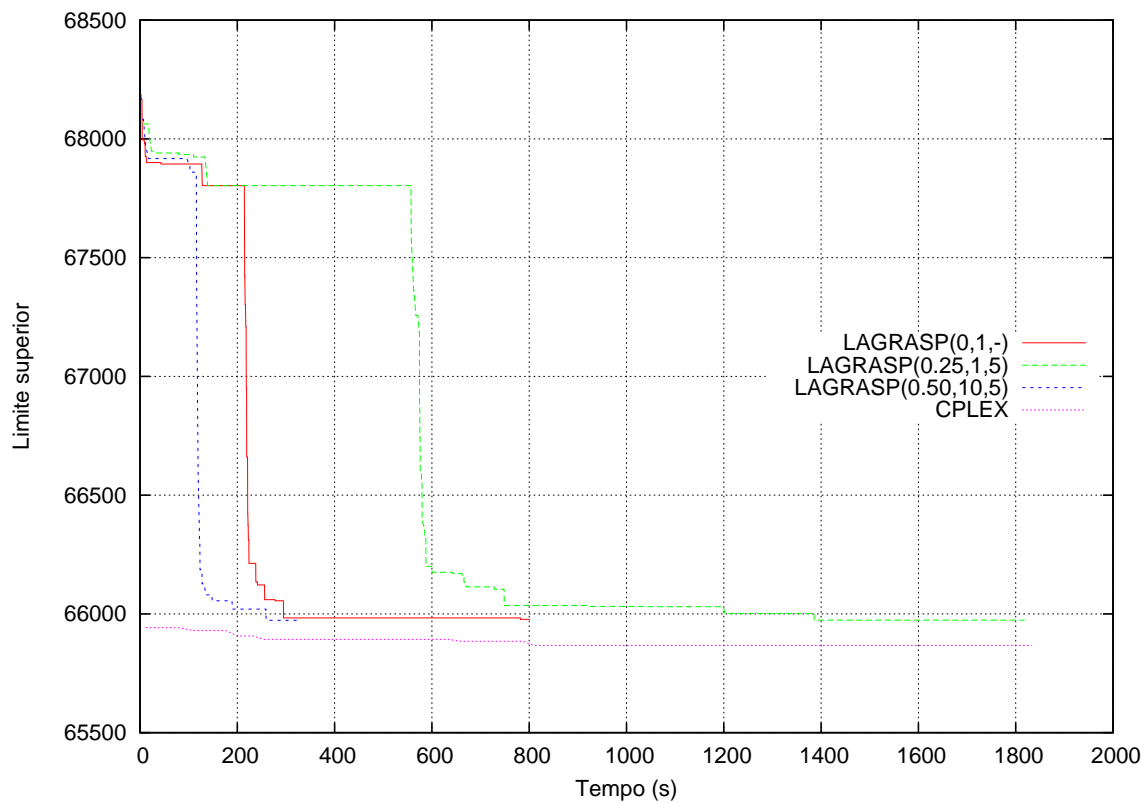


Figura 3.9: Evolução dos limites superiores ao longo do tempo (instância *scpa2 - k_{max}*).

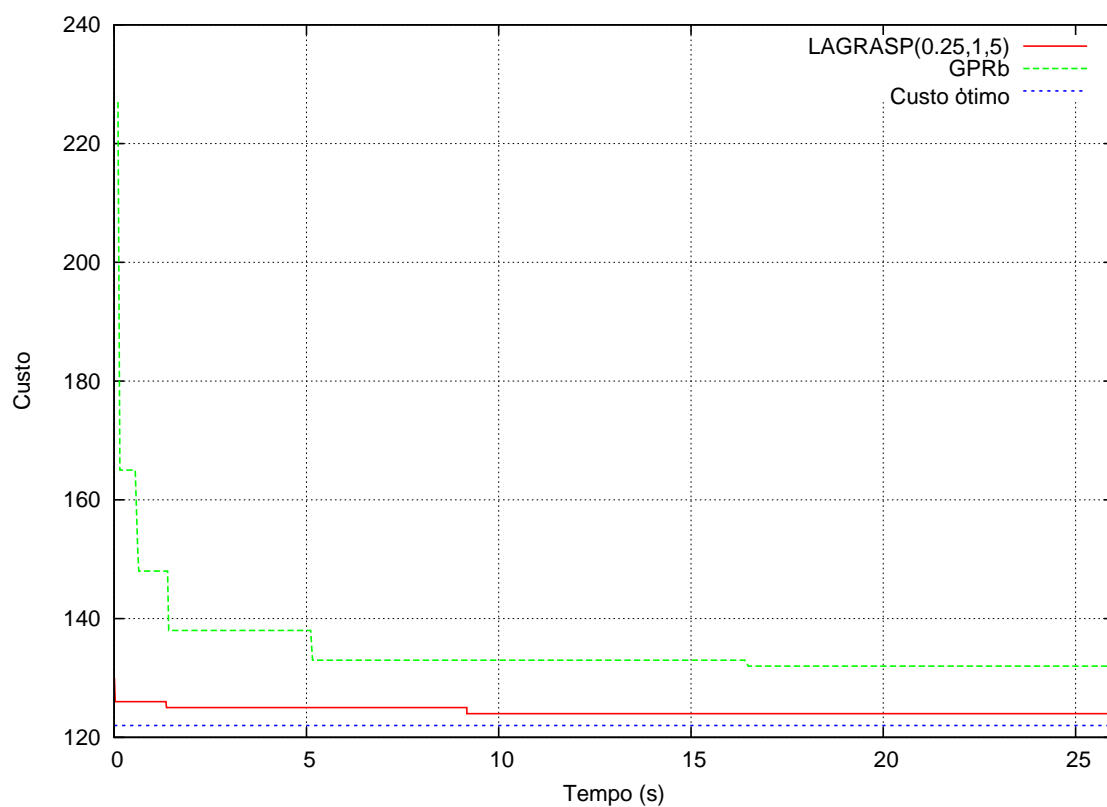


Figura 3.10: Aprimoramento dos custos das soluções ao longo do tempo (instância $scpdl-k_{min}$).

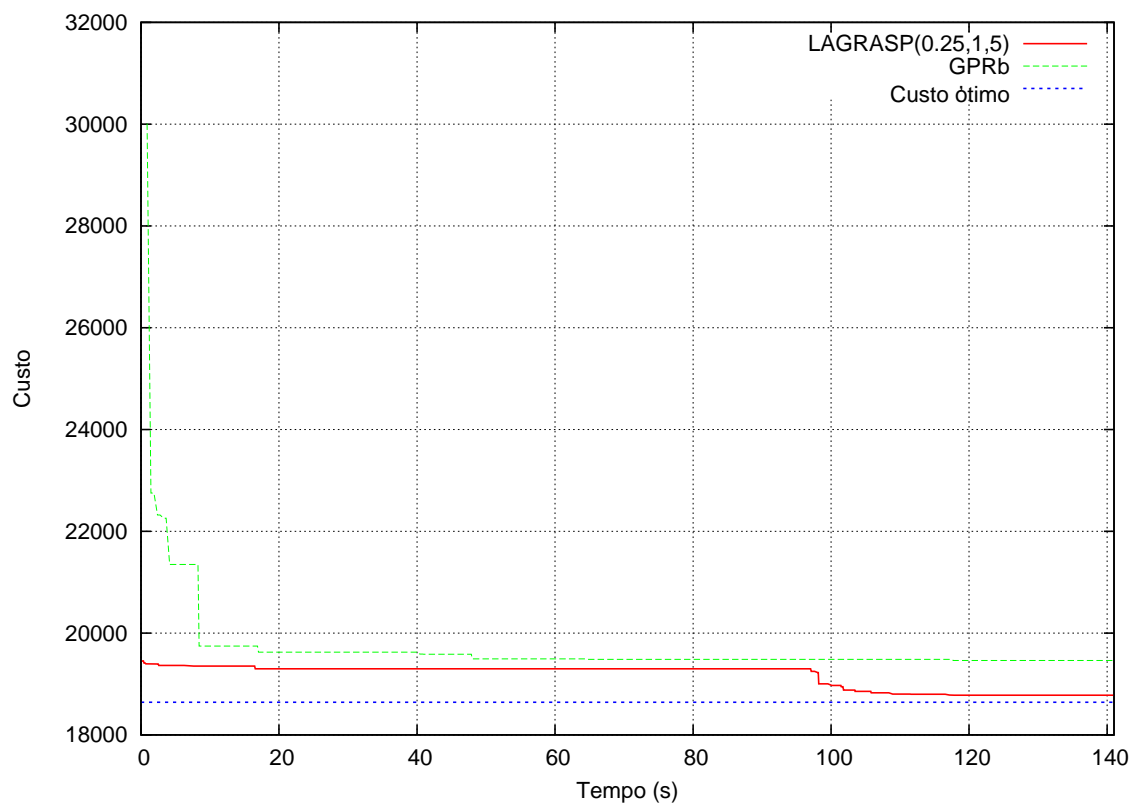


Figura 3.11: Aprimoramento dos custos das soluções ao longo do tempo (instância $scp5-k_{med}$).

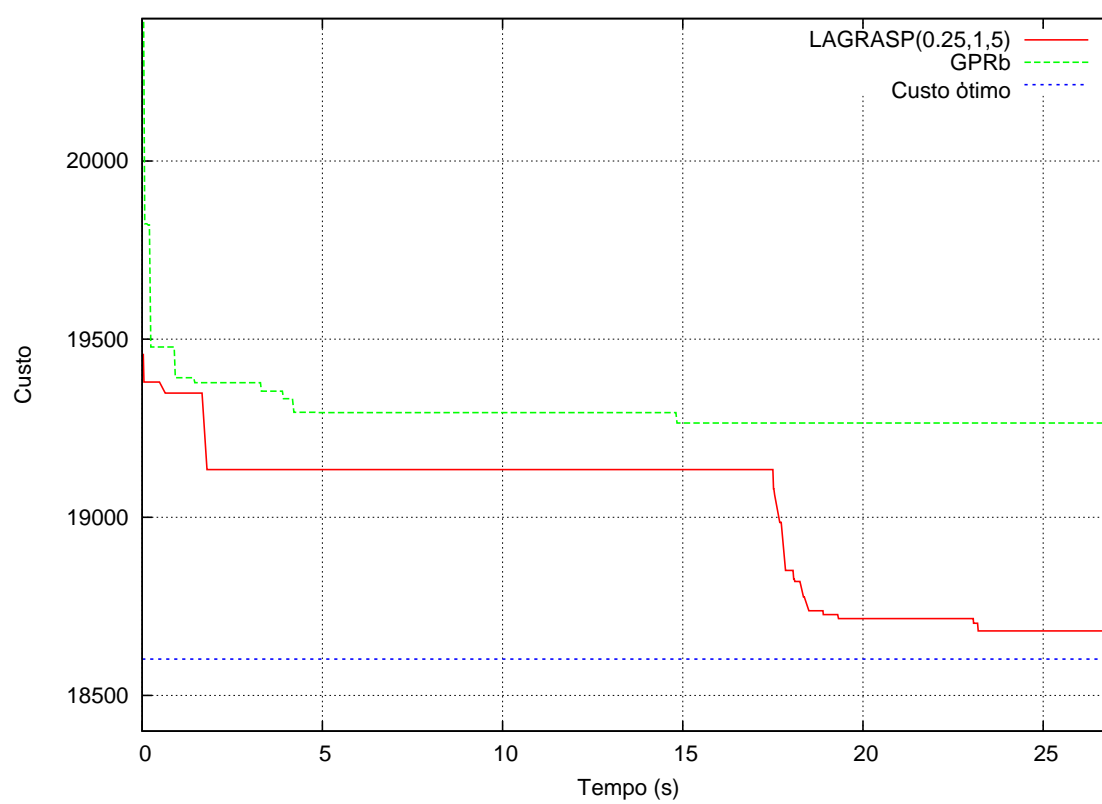


Figura 3.12: Aprimoramento dos custos das soluções ao longo do tempo (instância scp48- k_{max}).

4 Conclusões

Esta tese tratou do problema de k -cobertura de conjuntos, uma generalização do problema de cobertura de conjuntos clássico, onde cada objeto deve ser coberto pelo menos k vezes.

O estudo do problema de *minimum robust tagging SNP*, na área de biologia computacional, e da sua formulação como um problema de k -cobertura de conjuntos foi o ponto de partida para o desenvolvimento desta tese. Uma nova aplicação para o $PkCC$, no âmbito das telecomunicações, foi apresentada. A descrição do problema de localização de PoPs redundantes constitui uma das contribuições deste trabalho.

Foram propostas três heurísticas para solução de $PkCC$: uma baseada na metaheurística GRASP e duas heurísticas lagrangeanas. O desenvolvimento das heurísticas GRASP envolveu o estudo de algoritmos construtivos, de busca local e de reconexão por caminhos. Foram implementadas quatro versões de GRASP, considerando-se diferentes estratégias de reconexão por caminhos.

Foi desenvolvida, inicialmente, uma heurística lagrangeana gulosa, que utiliza um algoritmo construtivo guloso para gerar soluções viáveis para o $PkCC$. Foram avaliados diferentes esquemas de custos modificados e soluções iniciais para o algoritmo construtivo. A melhor dentre as heurísticas lagrangeanas gulosas foi utilizada no desenvolvimento de uma heurística lagrangeana híbrida, que é a principal contribuição desta tese. LAGRASP é uma heurística lagrangeana que utiliza um procedimento GRASP com reconexão por caminhos na obtenção de soluções viáveis para o $PkCC$. Para avaliar o desempenho das heurísticas desenvolvidas, foram derivadas 135 novas instâncias através da atribuição de fatores de cobertura a instâncias da OR-Library para o problema da cobertura de conjuntos. Os experimentos computacionais mostraram que LAGRASP encontra soluções melhores do que aquelas obtidas pelas heurísticas GRASP e lagrangeana gulosa aplicadas isoladamente.

Para a realização de trabalhos futuros, sugere-se a aplicação de LAGRASP a outros problemas de otimização combinatória. Neste sentido, encontra-se em andamento, o estudo do problema de empacotamento de conjuntos que é bastante similar ao problema de cobertura de conjuntos e para o qual já existem procedimentos GRASP e heurísticas lagrangeanas desenvolvidas.

Outra oportunidade de pesquisa refere-se à hibridação de heurísticas lagrangeanas com outras metaheurísticas. Esta linha de pesquisa tem crescido bastante ultimamente, mas a utilização de metaheurísticas na obtenção de soluções primais a partir de informações duais ainda pode ser mais explorada.

Referências Bibliográficas

- [1] *ILOG AMPL CPLEX System 11.0 - User's Guide*, 2008.
- [2] AIEX, R., RESENDE, M., PARDALOS, P., TORALDO, G. “GRASP with path-relinking for the three-index assignment problem”. *INFORMS J. on Computing* 17 (2005), 224–247.
- [3] AIEX, R., RESENDE, M., RIBEIRO, C. “Probability distribution of solution time in GRASP: An experimental investigation”. *Journal of Heuristics* 8 (2002), 343–373.
- [4] AVELLA, P., BOCCIA, M., VASILYEV, I. Computational experience with general cutting planes for the Set Covering problem. *Operations Research Letters* 37 (2009), 16–20.
- [5] BAFNA, V., HALLDORSSON, B., SCHWARTZ, R., CLARK, A., ISTRAIL, S. “Haplotypes and informative SNP selection algorithms: Don't block out information”. Em *Proceedings of the Seventh Annual International Conference on Research in Computational Molecular Biology* (Berlin, 2003), ACM, p. 19–27.
- [6] BALAS, E., CARRERA, M. “A dynamic subgradient-based branch-and-bound procedure for set covering”. *Operations Research* (1996), 875–890.
- [7] BALAS, E., NG, S. On the set covering polytope: I. All the facets with coefficients in 0,1,2. *Mathematical Programming, Series A* 43 (1989), 57–69.
- [8] BALAS, E., NG, S. On the set covering polytope: II. Lifting the facets with coefficients in 0,1,2. *Mathematical Programming, Series A* 45 (1989), 1–20.
- [9] BEASLEY, J. “A note on solving large p-median problems”. *European Journal of Operational Research* 21 (1985), 270–273.
- [10] BEASLEY, J. “A Lagrangian heuristic for set-covering problems”. *Naval Research Logistics* 37 (1990), 151–164.
- [11] BEASLEY, J. “OR-Library: Distributing test problems by electronic mail”. *Journal of the Operational Research Society* 41 (1990), 1069–1072.
- [12] BEASLEY, J. “Lagrangean heuristics for location problems”. *European Journal of Operational Research* 65 (1993), 383–399.
- [13] BEASLEY, J. “Lagrangean relaxation”. Em *Modern heuristic techniques for combinatorial problems*, C. Reeves, Ed. Blackwell Scientific Publications, Oxford, 1993, p. 243–303.

-
- [14] BEASLEY, J., CHU, P. “A genetic algorithm for the set covering problem”. *European Journal of Operational Research* 94 (1996), 392–404.
- [15] BROOKES, A. J. “The essence of SNPs”. *Gene* 234 (1999), 177–186.
- [16] BROWN, T. A. “*Genomes*”. BIOS Scientific Publishers Ltd, New York, 2002.
- [17] CANUTO, S., RESENDE, M., RIBEIRO, C. “Local search with perturbations for the prize-collecting Steiner tree problem in graphs”. *Networks* 38 (2001), 50–58.
- [18] CAPRARA, A., TOTH, P., FISCHETTI, M. “A Heuristic Method for the Set Covering Problem”. *Operations Research* 47 (1999), 730–743.
- [19] CAPRARA, A., TOTH, P., FISCHETTI, M. “Algorithms for the Set Covering Problem”. *Annals of Operations Research* 98 (2000), 353–371.
- [20] CHANG, C., HUANG, Y., CHAO, K. “A greedier approach for finding tag SNPs”. *Bioinformatics* 22 (2006), 685–691.
- [21] CHVÁTAL, V. “A Greedy Heuristic for the Set-Covering Problem”. *Mathematics of Operations Research* 4 (1979), 233–235.
- [22] DOBSON, G. “Worst-Case Analysis of Greedy Heuristics for Integer Programming with Nonnegative Data”. *Mathematics of Operations Research* 7 (1982), 515–531.
- [23] FEO, T., RESENDE, M. “A probabilistic heuristic for a computationally difficult set covering problem”. *Operations Research Letters* 8 (1989), 67–71.
- [24] FEO, T., RESENDE, M. “Greedy randomized adaptive search procedures”. *Journal of Global Optimization* 6 (1995), 109–133.
- [25] FESTA, P., RESENDE, M. “GRASP: An annotated bibliography”. Em *Essays and Surveys in Metaheuristics*, C. Ribeiro e P. Hansen, Eds. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002, p. 325–367.
- [26] FESTA, P., RESENDE, M. G. C. “An annotated bibliography of GRASP, Part I: Algorithms”. *International Transactions in Operational Research* 16, 1 (2009), 1–24.
- [27] FESTA, P., RESENDE, M. G. C. “An annotated bibliography of GRASP, Part II: Applications”. *International Transactions in Operational Research* 16, 2 (2009), 131–172.
- [28] FISHER, M. L. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science* 50 (2004), 1861–1871.
- [29] FULKERSON, D., NEMHAUSER, G., TROTTER, J. L. “Two computationally difficult set covering problems that arise in computing the 1-width of incidence matrices of Steiner triple systems”. *Mathematical Programming Study* 2 (1974), 72–81.

- [30] GLOVER, F. “Tabu search and adaptive memory programming – Advances, applications and challenges”. Em *Interfaces in Computer Science and Operations Research*, R. Barr, R. Helgason, e J. Kennington, Eds. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996, p. 1–75.
- [31] GONSALVEZ, D., HALL, N., RHEE, W., SIFERD, S. “Heuristic solutions and confidence intervals for the multicovering problem”. *European Journal of Operational Research* 31 (1987), 94–101.
- [32] GUIGNARD, M. “Lagrangian relaxation”. *Top* 11 (2003), 151–228.
- [33] HALL, N., HOCHBAUM, D. The multicovering problem: The use of heuristics, cutting planes, and subgradient optimization for a class of integer programs. Relatório técnico, U.C. Berkeley, 1983.
- [34] HALL, N., HOCHBAUM, D. “The multicovering problem”. *European Journal of Operational Research* 62 (1992), 323–339.
- [35] HELD, M., KARP, R. “The traveling-salesman problem and minimum spanning trees”. *Operations Research* 18 (1970), 1138–1162.
- [36] HELD, M., KARP, R. “The traveling-salesman problem and minimum spanning trees: Part II”. *Mathematical Programming* 1 (1971), 6–25.
- [37] HUANG, Y., ZHANG, K., CHEN, T., CHAO, K. “Selecting additional tag SNPs for tolerating missing data in genotyping”. *BMC Bioinformatics* 6 (2005), 263–278.
- [38] JACOBS, L., BRUSCO, M. “Note: A local-search heuristic for large set-covering problems”. *Naval Research Logistics* 42 (1995).
- [39] JOHNSON, D. “Approximation Algorithms for Combinatorial Problems”. *Journal of Computer and Systems Sciences* 9 (1974), 256–278.
- [40] LAGUNA, M., MARTÍ, R. “GRASP and path relinking for 2-layer straight line crossing minimization”. *INFORMS Journal on Computing* 11 (1999), 44–52.
- [41] LUCENA, A. “Lagrangian relax-and-cut algorithms”. Em *Handbook of Optimization in Telecommunications*, M. Resende e P. Pardalos, Eds. Springer-Verlag, 2006, p. 129–145.
- [42] LUCENA, A. Comunicação pessoal, 2009.
- [43] MATSUMOTO, M., NISHIMURA, T. “Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator”. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation* 8 (1998), 3–30.
- [44] PEREIRA, L. S. S. “Heurísticas para o problema de transmissão multiponto com minimização de energia para redes de sensores”. Dissertação de Mestrado, IC/UFF, 2006.
- [45] PESSÔA, L., RESENDE, M., RIBEIRO, C. “A hybrid Lagrangian heuristic with GRASP and path-relinking for k-set cover”. Relatório técnico, AT&T Labs Research, 2008.

- [46] PESSÔA, L., RIBEIRO, C. “A GRASP for the minimum informative subset problem”. Em *Abstracts Book of the Seventh Metaheuristics International Conference* (Montréal, 2007).
- [47] PRAIS, M., RIBEIRO, C. “Reactive GRASP: An application to a matrix decomposition problem in TDMA traffic assignment”. *INFORMS Journal on Computing* 12 (2000), 164–176.
- [48] RESENDE, M. “An optimizer in the telecommunications industry”. *SIAM SIAG/Optimization Views-and-News 18* (2007), 8–19.
- [49] RESENDE, M. “Metaheuristic hybridization with Greedy Randomized Adaptive Search Procedures”. Em *TutORials in Operations Research*, Z.-L. Chen e S. Raghavan, Eds. INFORMS, 2008, p. 295–319.
- [50] RESENDE, M., MARTÍ, R., GALLEGO, M., DUARTE, A. “GRASP and path-relinking for the max-min diversity problem”. *Computers and Operations Research* 37 (2010), 498–508.
- [51] RESENDE, M., RIBEIRO, C. “Greedy randomized adaptive search procedures”. Em *Handbook of Metaheuristics*, F. Glover e G. Kochenberger, Eds. Kluwer Academic Publishers, 2003, p. 219–249.
- [52] RESENDE, M., RIBEIRO, C. “GRASP with path-relinking: Recent advances and applications”. Em *Metaheuristics: Progress as Real Problem Solvers*, T. Ibaraki, K. Nonobe, e M. Yagiura, Eds. Springer-Verlag, 2005, p. 29–63.
- [53] RESENDE, M., RIBEIRO, C. “Greedy randomized adaptive search procedures: Advances, hybridizations, and applications”. Em *Handbook of Metaheuristics*, J.-Y. Potvin e M. Gendreau, Eds. Springer, a ser publicado.
- [54] RIBEIRO, C., UCHOA, E., WERNECK, R. “A hybrid GRASP with perturbations for the Steiner problem in graphs”. *INFORMS Journal on Computing* 14 (2002), 228–246.
- [55] THE INTERNATIONAL HAPMAP CONSORTIUM. “The International HapMap Project”. *Nature* 426 (2003), 789–796.
- [56] VAN SLYKE, R. “Covering problems in C3I systems”. Relatório técnico, USAF/SCEEE (United States Air Force/Southeastern Center for Electrical Engineering Education), 1981.
- [57] VAZIRANI, V. V. “*Approximation algorithms*”. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 2001.
- [58] WOLSEY, L. A. “*Integer Programming*”. John Wiley & Sons, New York, 1998.

**ANEXO A – Instâncias teste para o problema de
 k -cobertura de conjuntos**

Instância	Dimensão (restrições \times variáveis)	Densidade	k_{min}	k_{med}	k_{max}
scp41	200×1000	2%	2	7	11
scp42	200×1000	2%	2	6	9
scp43	200×1000	2%	2	5	8
scp44	200×1000	2%	2	5	8
scp45	200×1000	2%	2	7	11
scp46	200×1000	2%	2	6	10
scp47	200×1000	2%	2	6	10
scp48	200×1000	2%	2	7	11
scp49	200×1000	2%	2	6	10
scp410	200×1000	2%	2	5	8
scp51	200×2000	2%	2	13	24
scp52	200×2000	2%	2	14	26
scp53	200×2000	2%	2	13	24
scp54	200×2000	2%	2	12	21
scp55	200×2000	2%	2	12	22
scp56	200×2000	2%	2	12	21
scp57	200×2000	2%	2	14	25
scp58	200×2000	2%	2	12	22
scp59	200×2000	2%	2	12	22
scp510	200×2000	2%	2	13	24
scp61	200×1000	5%	2	17	31
scp62	200×1000	5%	2	16	29
scp63	200×1000	5%	2	18	34
scp64	200×1000	5%	2	18	33
scp65	200×1000	5%	2	18	33
scpa1	300×3000	2%	2	21	40
scpa2	300×3000	2%	2	21	39
scpa3	300×3000	2%	2	21	40
scpa4	300×3000	2%	2	22	41
scpa5	300×3000	2%	2	20	38
scpb1	300×3000	5%	2	61	119
scpb2	300×3000	5%	2	60	118
scpb3	300×3000	5%	2	59	115
scpb4	300×3000	5%	2	58	114
scpb5	300×3000	5%	2	60	118
scpc1	400×4000	2%	2	30	58
scpc2	400×4000	2%	2	31	59
scpc3	400×4000	2%	2	31	59
scpc4	400×4000	2%	2	30	58
scpc5	400×4000	2%	2	29	56
scpd1	400×4000	5%	2	82	162
scpd2	400×4000	5%	2	83	163
scpd3	400×4000	5%	2	81	159
scpd4	400×4000	5%	2	82	162
scpd5	400×4000	5%	2	83	163

Tabela A.1: Características detalhadas das instâncias-teste.

ANEXO B – Experimentos com o CPLEX

CPLEX [1] é um pacote comercial utilizado para resolver problemas de programação linear. Para problemas que contêm variáveis inteiras, este programa utiliza um algoritmo de *branch-and-cut* que pode ser configurado de modo a melhorar seu desempenho. O ajuste dos parâmetros deste algoritmo pode ser feito de maneira automática, por meio de heurísticas internas ao CPLEX, ou pelo usuário. O objetivo desta seção é identificar a forma de parametrização do CPLEX que gera as melhores soluções para o PkCC.

Nos experimentos da Seção B.1, diversas versões do CPLEX foram geradas através da atribuição de valores apropriados a cada parâmetro avaliado. Estas versões são comparadas a uma versão *default* que utiliza o ajuste automático dos parâmetros. Cada versão foi executada sobre as 135 instâncias descritas na Seção 1.4. Como critério de parada, foi utilizado o tempo máximo de processamento igual a 3600 segundos. A Seção B.2 apresenta os resultados obtidos com a execução da melhor versão encontrada na Seção B.1, utilizando-se como critério de parada o tempo máximo de processamento igual a 86400 segundos (24 horas).

B.1 Experimentos de ajuste de parâmetros do CPLEX

As próximas seções descrevem os parâmetros avaliados e apresentam os resultados obtidos por cada versão. A análise comparativa é feita utilizando-se as métricas descritas na Seção 2.4.

B.1.1 *Mipalgorithm*

Este parâmetro especifica o algoritmo que o CPLEX utiliza para resolver o subproblema de programação linear em cada nó da árvore no procedimento de *branch-and-cut*.

Mipalgorithm=0 - Automatic CPLEX escolhe o algoritmo utilizando uma heurística interna que se baseia no tipo do subproblema

Mipalgorithm=1 - Primal simplex

Mipalgorithm=2 - Dual simplex

Os resultados resumidos na Tabela B.1 mostram que não há diferença significativa na qualidade das soluções obtidas pelas versões avaliadas. De acordo com a métrica MDif todas as versões encontraram soluções com custos, em média, 0,01% superiores aos das melhores soluções encontradas neste experimento. Entretanto, a estratégia *default* teve melhor desempenho que as demais versões nas métricas #Best e Score.

	0 (<i>default</i>)	1	2
MDif	0,01 %	0,01 %	0,01 %
#Best	111	105	104
Score	30	48	32

Tabela B.1: Resultados dos experimentos de calibração do CPLEX (parâmetro *Mipalgorithm*)

B.1.2 *Nodeselect*

Este parâmetro determina o critério para escolha do próximo nó a ser explorado.

Nodeselect=0 - Depth-first search CPLEX explora o nó criado mais recentemente.

Nodeselect=1 - Best-bound search (default) CPLEX explora o nó ativo que apresenta o melhor limitante para o problema original.

A métrica MDif na Tabela B.2 mostra que, em média, ambas versões encontram soluções de mesma qualidade. Entretanto, a versão *default* (*Nodeselect=1*) encontra as melhores soluções para 111 instâncias, contra 104 da versão que utilizou o valor 0 para o parâmetro avaliado. A métrica Score, para a qual o menor valor representa o melhor método, ratifica estes resultados.

B.1.3 *Varsselect*

Após a escolha do nó a ser explorado, este parâmetro determina como o CPLEX escolhe a variável fracionária sobre a qual será feita a ramificação (ou *branching*).

	1 (<i>default</i>)	0
MDif	0,01 %	0,01 %
#Best	111	104
Score	22	29

Tabela B.2: Resultados dos experimentos de calibração do CPLEX (parâmetro *Node-select*)

Varsselect=0 - Automatic CPLEX escolhe a variável através de heurísticas que se baseiam em características do problema

Varsselect=1 Escolhe-se a variável com a maior parte fracionária pela regra da inviabilidade máxima.

Varsselect=-1 Escolhe-se a variável com a menor parte fracionária pela regra da inviabilidade mínima

Varsselect=2 Estima-se, pela regra do pseudo-custo, o impacto no custo da solução causado pela transformação de cada variável fracionária em variável inteira. Este impacto é utilizado por uma heurística interna que escolhe a variável.

Varsselect=3 CPLEX avalia diversas ramificações para escolher a variável que, potencialmente, resultará no menor número de nós a serem explorados.

Varsselect=4 Esta versão utiliza uma variação computacionalmente mais leve da regra do pseudo-custo.

Os resultados resumidos na Tabela B.3 mostram que as estratégias 0 (*default*) e 2 geraram as soluções de melhor qualidade. Os custos destas soluções são, em média, 0,01% superiores aos valores das melhores soluções encontradas no experimento. Estas versões encontraram as soluções de menor custo para 104 das 135 instâncias utilizadas. Ambas versões também apresentaram resultados similares, segundo a métrica Score, com uma pequena vantagem para a estratégia 0 (*default*).

	0 (<i>default</i>)	-1	1	2	3	4
MDif	0,01 %	0,02 %	0,03 %	0,01 %	0,03 %	0,02 %
#Best	104	83	76	104	85	94
Score	52	177	218	53	199	139

Tabela B.3: Resultados dos experimentos de calibração do CPLEX (parâmetro *Varsselect*)

B.1.4 *Branch*

Este parâmetro determina a direção da ramificação (ou *branching*) sobre uma variável x de valor fracionário r .

Branch=0 - Automatic CPLEX escolhe a direção da ramificação através de heurísticas que se baseiam em características do problema

Branch=1 CPLEX cria um subproblema que tem a restrição $x > \text{ceil}(r)$

Branch=-1 CPLEX cria um subproblema que tem a restrição $x > \text{floor}(r)$

De acordo com os resultados apresentados na Tabela B.4, a estratégia *default* obteve os melhores resultados segundo todas as métricas de qualidade.

	0 (<i>default</i>)	1	-1
MDif	0,01 %	0,03 %	0,02 %
#Best	119	93	92
Score	18	67	64

Tabela B.4: Resultados dos experimentos de calibração do CPLEX (parâmetro *Branch*)

Como conclusão desta seção, deve-se registrar que o CPLEX teve melhor desempenho utilizando o ajuste automático de parâmetros. Por isto, esta estratégia foi escolhida para prover as soluções que servem de base para a avaliação das heurísticas desenvolvidas nesta tese.

B.2 Resultados obtidos com o CPLEX

Nesta seção, são apresentados os resultados da execução do CPLEX utilizando-se o modo de ajuste automático de parâmetros. Para cada instância, o tempo de processamento foi limitado em 24 horas. O custo das soluções obtidas neste experimento foi utilizado na avaliação da qualidade das soluções obtidas pelas heurísticas desenvolvidas nesta tese.

A Tabela B.5 exhibe, para cada grupo de fatores de cobertura (k_{min} , k_{med} e k_{max}), o nome da instância seguido pelo custo da melhor solução primal encontrada. A diferença entre as melhores soluções primal e dual é mostrado na terceira coluna (Dif. primal-dual (%)). Observa-se ainda, nesta tabela, o tempo utilizado pelo CPLEX para encontrar a melhor solução primal (Tempo primal) e o tempo total de execução (Tempo total).

Nota-se que o CPLEX encontrou soluções ótimas para todas as instâncias do grupo k_{min} . No grupo k_{med} e k_{max} foram encontradas, respectivamente, 25 e 24 soluções ótimas. O maior salto de dualidade, entre todas as instâncias, foi de 0,81%.

Instância	k_{min}				k_{med}				k_{max}			
	Custo	Dif. primal-dual (%)	Tempo primal	Total total	Custo	Dif. primal-dual (%)	Tempo primal	Tempo total	Custo	Dif. primal-dual (%)	Tempo primal	Tempo total
sep41	1148	0,00%	0,38	0,38	8350	0,00%	16,93	16,93	18265	0,00%	0,98	0,98
sep42	1205	0,00%	0,02	0,02	6111	0,00%	3,98	3,98	12360	0,00%	14,50	14,50
sep43	1213	0,00%	0,28	0,28	4676	0,00%	2,50	2,50	10396	0,00%	1,51	1,51
sep44	1185	0,00%	0,07	0,07	4670	0,00%	2,91	2,91	10393	0,00%	34,86	34,86
sep45	1266	0,00%	0,27	0,27	8389	0,00%	2,13	2,13	18856	0,00%	0,70	0,70
sep46	1349	0,00%	0,40	0,40	6416	0,00%	14,42	14,42	15394	0,00%	11,03	11,03
sep47	1115	0,00%	0,02	0,02	6281	0,00%	1,93	1,93	15233	0,00%	10,41	10,41
sep48	1225	0,00%	1,09	1,09	8421	0,00%	4,08	4,08	18602	0,00%	8,60	8,60
sep49	1485	0,00%	0,03	0,03	7101	0,00%	10,45	10,45	16558	0,00%	4,19	4,19
sep410	1356	0,00%	0,07	0,07	5355	0,00%	1,87	1,87	11607	0,00%	2,59	2,59
sep51	579	0,00%	0,12	0,12	11205	0,00%	276,69	276,69	35663	0,00%	7980,11	7980,11
sep52	677	0,00%	1,80	1,80	14418	0,00%	144,01	144,01	45396	0,00%	42,24	42,24
sep53	574	0,00%	0,41	0,41	11476	0,00%	116,30	116,30	36329	0,00%	2486,67	2486,67
sep54	582	0,00%	1,23	1,23	9944	0,00%	152,74	152,74	28017	0,00%	90,43	90,43
sep55	550	0,00%	0,06	0,06	10880	0,00%	73,78	73,78	32779	0,00%	432,03	432,03
sep56	560	0,00%	0,26	0,26	10581	0,00%	308,80	308,80	29608	0,00%	2470,41	2470,41
sep57	695	0,00%	0,18	0,18	14919	0,00%	2674,22	2674,22	41930	0,00%	839,28	839,28
sep58	662	0,00%	0,36	0,36	10622	0,00%	1786,86	1786,86	32320	0,00%	282,81	282,81
sep59	687	0,00%	0,56	0,56	11042	0,00%	131,46	131,46	33584	0,00%	452,04	452,04
sep510	672	0,00%	0,10	0,10	12436	0,00%	437,54	437,54	38709	0,00%	928,53	928,53
sep61	283	0,00%	0,85	0,85	7653	0,00%	65428,40	65428,40	23516	0,17%	386,92	86645,90
sep62	302	0,00%	1,05	1,05	6739	0,00%	33910,30	33910,30	19934	0,00%	37642	37642,00
sep63	313	0,00%	0,46	0,46	8309	0,00%	2837,50	2837,50	27983	0,00%	472,60	472,60
sep64	292	0,00%	0,80	0,80	8546	0,00%	38222,60	38222,60	26442	0,00%	46338,60	46338,60
sep65	353	0,00%	1,32	1,32	9038	0,00%	9618,46	9618,46	27069	0,00%	7513,03	7513,03
sep61	562	0,00%	3,66	3,66	21227	0,33%	80436,08	86522,80	68522	0,12%	13017,78	86520,40
sep62	560	0,00%	2,44	2,44	21739	0,20%	59204,12	86544,00	65842	0,07%	34917,08	86511,60
sep63	524	0,00%	2,50	2,50	20095	0,17%	1308,75	86564,60	66829	0,13%	20579,57	86523,30
sep64	527	0,00%	2,13	2,13	22865	0,19%	30474,20	86559,60	72334	0,07%	10822,97	86566,70
sep65	557	0,00%	1,57	1,57	18643	0,26%	37770,61	86546,50	60491	0,15%	76907,63	86537,30
sep61	149	0,00%	17,30	17,30	29222	0,81%	2669,79	86502,50	105506	0,14%	1326,47	86553,10
sep62	150	0,00%	3,28	3,28	28112	0,61%	86258,26	86514,40	102922	0,17%	42660,22	86544,70
sep63	165	0,00%	2,76	2,76	27872	0,63%	21895,32	86558,90	98280	0,21%	50264,67	86578,70
sep64	157	0,00%	10,53	10,53	25678	0,53%	44197,74	86526,00	93777	0,22%	70831,88	86554,80
sep65	151	0,00%	2,71	2,71	28203	0,48%	57085,24	86532,10	102810	0,18%	80963,20	86558,00
sep61	514	0,00%	7,29	7,29	32659	0,65%	64706,52	86497,80	112471	0,16%	56227,10	86531,90
sep62	483	0,00%	6,52	6,52	32765	0,64%	34056,70	86515,90	113916	0,14%	57371,68	86520,10
sep63	544	0,00%	56,22	56,22	34492	0,67%	80297,88	86535,20	117416	0,12%	67927,31	86552,00
sep64	484	0,00%	4,56	4,56	31366	0,58%	3407,22	86510,50	110823	0,13%	15669,16	86536,40
sep65	488	0,00%	8,48	8,48	30060	0,58%	28386,44	86513,30	104439	0,18%	70819,80	86551,60
sep61	122	0,00%	15,32	15,32	38991	0,66%	30149,74	86519,90	144887	0,27%	51552,39	86548,00
sep62	127	0,00%	4,42	4,42	39030	0,66%	78271,14	86503,20	144096	0,21%	85992,46	86549,90
sep63	138	0,00%	5,02	5,02	39198	0,71%	37730,08	86501,60	140474	0,24%	31283,47	86563,20
sep64	122	0,00%	7,55	7,55	38781	0,63%	53070,15	86519,90	143513	0,27%	59823,39	86538,60
sep65	130	0,00%	6,02	6,02	40321	0,64%	80593,59	86520,30	146307	0,22%	45379,35	86544,90

Tabela B.5: Resultados dos experimentos com CPLEX

ANEXO C – Experimentos de calibração com as heurísticas GRASP com reconexão por caminhos

Instância	C_D		C_{HH}	
	Custo	Tempo (s)	Custo	Tempo (s)
scp41- k_{min}	2022	0,01	5880	2,43
scp51- k_{min}	1057	0,01	1526	7,35
scp61- k_{min}	482	0,01	640	2,26
scpa1- k_{min}	1231	0,03	1311	25,90
scpb1- k_{min}	231	0,03	753	27,15
scpc1- k_{min}	985	0,06	1994	64,54
scpd1- k_{min}	160	0,04	162	62,69
scp41- k_{med}	17088	0,02	27583	7,45
scp51- k_{med}	14973	0,06	18759	47,94
scp61- k_{med}	12036	0,04	12518	17,16
scpa1- k_{med}	27056	0,19	35591	259,88
scpb1- k_{med}	32464	0,46	32587	758,75
scpc1- k_{med}	39301	0,46	39615	871,24
scpd1- k_{med}	42263	1,10	43802	2445,00
scp41- k_{max}	35554	0,03	36340	10,51
scp51- k_{max}	61457	0,12	74840	79,83
scp61- k_{max}	32297	0,05	34808	26,63
scpa1- k_{max}	101494	0,32	104095	426,58
scpb1- k_{max}	130866	0,70	142955	1169,55
scpc1- k_{max}	172032	0,77	183955	1414,16
scpd1- k_{max}	170664	1,71	198128	3725,57

Tabela C.1: Resultados detalhados das heurísticas construtivas gulosas.

Instância	BL_{11}		BL_{21}	
	Custo	Tempo (s)	Custo	Tempo (s)
scp41- k_{min}	1219	0,03	1218	2,48
scp51- k_{min}	617	0,06	611	2,02
scp61- k_{min}	308	0,04	303	0,38
scpa1- k_{min}	615	0,11	603	6,96
scpb1- k_{min}	161	0,13	160	0,73
scpc1- k_{min}	553	0,17	546	12,20
scpd1- k_{min}	127	0,16	125	1,05
scp41- k_{med}	9267	0,07	8784	179,72
scp51- k_{med}	12004	0,14	11894	314,07
scp61- k_{med}	8484	0,07	8269	95,64
scpa1- k_{med}	23124	0,38	22669	6389,32
scpb1- k_{med}	30658	0,62	30328	4909,22
scpc1- k_{med}	35205	0,80	34539	38404,05
scpd1- k_{med}	41440	1,40	40760	33695,10
scp41- k_{max}	19446	0,06	19021	384,01
scp51- k_{max}	38796	0,21	37674	3509,97
scp61- k_{max}	25550	0,10	24752	236,17
scpa1- k_{max}	74431	0,58	71936	28811,20
scpb1- k_{max}	111850	0,95	108637	24565,97
scpc1- k_{max}	121893	1,31	117259	165209,71
scpd1- k_{max}	154462	2,45	149637	156872,56

Tabela C.2: Resultados detalhados das buscas locais.

Instância	$\gamma = 10$			$\gamma = 100$		
	Melhor	Média	Tempo (s)	Melhor	Média	Tempo (s)
scp41-k _{min}	1171	1176,00	6,00	1158	1178,25	4,88
scp51-k _{min}	603	618,00	10,25	599	610,62	9,88
scp61-k _{min}	290	298,38	4,25	287	292,62	4,25
scpal-k _{min}	621	625,00	22,38	594	627,38	20,38
scpb1-k _{min}	160	168,38	17,12	160	169,00	16,50
scpc1-k _{min}	578	623,88	42,25	606	625,25	38,88
scpd1-k _{min}	136	138,50	28,50	132	139,75	25,88
scp41-k _{med}	8627	8643,62	24,12	8600	8616,12	15,00
scp51-k _{med}	11619	11647,50	77,25	11538	11608,12	44,12
scp61-k _{med}	7975	8035,25	37,88	7984	8012,12	19,62
scpal-k _{med}	22246	22284,75	306,50	22218	22248,00	140,62
scpb1-k _{med}	30468	30544,00	538,12	30558	30623,88	234,12
scpc1-k _{med}	34457	34488,75	796,00	34395	34501,12	328,38
scpd1-k _{med}	40862	40975,38	1274,00	40819	40876,88	488,88
scp41-k _{max}	18855	18912,38	32,25	18811	18872,12	26,25
scp51-k _{max}	36783	36928,62	117,12	36755	36875,75	89,62
scp61-k _{max}	24452	24547,75	42,50	24394	24472,12	37,25
scpal-k _{max}	70825	70917,38	332,50	70648	70813,38	264,38
scpb1-k _{max}	108987	109071,75	302,38	108696	108960,88	287,62
scpc1-k _{max}	116807	116981,25	620,88	116685	116788,25	579,50
scpd1-k _{max}	149813	149971,62	551,62	149339	149811,88	543,62

Tabela C.3: Resultados detalhados dos experimentos com o fator γ .

Instância	\mathcal{P} = 10		\mathcal{P} = 20		\mathcal{P} = 50		\mathcal{P} = 100	
	Melhor	Média	Melhor	Média	Melhor	Média	Melhor	Média
scp41-k _{min}	1173	1179,12	1172	1177,00	1175	1177,5	1171	1175,12
scp51-k _{min}	594	605,88	600	602,75	593	597,00	591	599,12
scp61-k _{min}	285	293,00	285	287,75	285	288,38	285	286,25
scpa1-k _{min}	588	600,75	585	595,50	587	594,75	587	595,38
scpb1-k _{min}	155	161,00	155	159,38	155	156,62	155	156,88
scpc1-k _{min}	551	563,38	547	558,62	540	545,12	542	548,75
scpd1-k _{min}	126	128,25	128	129,88	125	129,12	124	127,12
scp41-k _{med}	8610	8631,62	8629	8646,38	8633	8656,00	8606	8640,62
scp51-k _{med}	11601	11645,00	11621	11637,88	11571	11627,50	11571	11608,00
scp61-k _{med}	8007	8031,00	7975	8011,50	7994	8012,38	8006	8023,50
scpa1-k _{med}	22262	22309,38	22261	22283,88	22256	22278,25	22244	22265,25
scpb1-k _{med}	30540	30628,50	30553	30608,88	30503	30576,75	30503	30533,62
scpc1-k _{med}	34473	34546,88	34519	34551,00	34400	34487,38	34474	34533,25
scpd1-k _{med}	40641	40723,62	40536	40727,50	40453	40640,88	40453	40634,38
scp41-k _{max}	18877	18924,00	18879	18915,50	18849	18920,25	18876	18914,62
scp51-k _{max}	36827	36899,12	36880	36946,38	36865	36890,38	36885	36916,25
scp61-k _{max}	24527	24548,25	24537	24576,00	24556	24563,50	24537	24559,38
scpa1-k _{max}	70739	70904,38	70774	70912,50	70878	70883,00	70830	70874,75
scpb1-k _{max}	108884	109015,38	108989	109072,00	109053	109059,00	109017	109123,38
scpc1-k _{max}	116711	116961,50	116763	116908,88	116680	116873,88	116680	116922,12
scpd1-k _{max}	149489	149895,38	149539	149925,00	149539	149875,00	149539	149872,25

Tabela C.4: Resultados detalhados dos experimentos com o tamanho do conjunto elite.

**ANEXO D – Resultados computacionais das
heurísticas GRASP com reconexão por
caminhos**

Instância	CPLEX	Gpuro		GPRb		GPRf		GPRm	
		Melhor	Média	Melhor	Média	Melhor	Média	Melhor	Média
sep41-k _{min}	1148	1158	1174,38	1171	1175,12	1167	1172,88	1172	1176,25
sep42-k _{min}	1205	1216	1230,25	1225	1235,88	1226	1236,25	1226	1232,62
sep43-k _{min}	1213	1224	1229,38	1225	1230,12	1224	1229,38	1230	1232,38
sep44-k _{min}	1185	1211	1215,00	1209	1219,50	1209	1220,12	1216	1220,75
sep45-k _{min}	1266	1296	1300,00	1293	1298,12	1298	1304,00	1295	1299,50
sep46-k _{min}	1349	1361	1364,75	1362	1366,25	1364	1371,62	1363	1369,75
sep47-k _{min}	1115	1160	1164,88	1152	1159,38	1152	1165,62	1152	1159,62
sep48-k _{min}	1225	1240	1245,50	1244	1248,38	1248	1251,12	1246	1250,12
sep49-k _{min}	1485	1510	1515,25	1509	1515,38	1510	1516,75	1510	1514,88
sep410-k _{min}	1356	1377	1379,38	1373	1379,38	1373	1378,00	1373	1378,75
sep51-k _{min}	579	603	617,00	591	599,12	594	596,62	597	605,75
sep52-k _{min}	677	699	705,50	696	701,25	700	707,12	709	712,75
sep53-k _{min}	574	590	595,38	587	592,75	589	591,75	595	596,38
sep54-k _{min}	582	615	616,38	603	606,50	606	607,62	599	606,25
sep55-k _{min}	550	554	559,00	553	554,25	554	555,00	553	555,38
sep56-k _{min}	560	573	577,38	567	572,75	571	571,38	573	576,75
sep57-k _{min}	695	713	717,50	700	705,12	705	712,00	707	713,62
sep58-k _{min}	662	693	697,00	684	688,25	682	688,75	686	693,50
sep59-k _{min}	687	706	719,88	710	714,38	713	716,12	710	718,38
sep510-k _{min}	672	690	713,12	684	691,50	688	692,62	689	697,00
sep61-k _{min}	283	287	292,38	285	286,25	285	287,50	287	289,00
sep62-k _{min}	302	309	311,38	306	307,50	305	308,75	306	310,25
sep63-k _{min}	313	336	338,88	327	339,88	325	333,88	338	341,62
sep64-k _{min}	292	302	305,75	297	300,62	295	299,75	298	306,62
sep65-k _{min}	353	363	368,25	361	366,75	359	362,38	365	368,25
sep61-k _{min}	562	621	623,88	587	595,38	591	593,75	591	606,00
sep62-k _{min}	560	606	624,38	587	592,38	583	589,50	592	595,12
sep63-k _{min}	524	584	589,88	547	555,50	548	556,12	539	547,75
sep64-k _{min}	527	591	607,75	547	557,25	550	558,50	552	564,75
sep65-k _{min}	557	613	621,88	580	584,00	581	585,75	583	586,00
sep1-k _{min}	149	160	167,12	155	156,88	154	154,88	154	157,12
sep2-k _{min}	150	168	175,50	156	161,75	159	160,25	159	161,50
sep3-k _{min}	165	179	188,88	171	174,00	171	174,75	169	174,50
sep4-k _{min}	157	176	182,88	170	170,50	166	168,12	166	168,50
sep5-k _{min}	151	169	176,88	155	158,38	159	161,25	155	158,75
sep1-k _{min}	514	606	623,88	542	548,75	541	548,38	540	544,75
sep2-k _{min}	483	572	596,25	514	520,88	509	521,00	511	514,38
sep3-k _{min}	544	639	672,88	587	592,88	584	591,12	584	590,88
sep4-k _{min}	484	582	600,50	509	516,00	500	514,25	499	512,88
sep5-k _{min}	488	590	602,12	514	519,62	517	530,25	506	516,12
sep1-k _{min}	122	138	141,50	124	127,12	126	127,75	125	126,75
sep2-k _{min}	127	141	150,50	129	130,25	130	132,38	129	130,25
sep3-k _{min}	138	157	168,00	149	153,25	148	152,50	147	151,50
sep4-k _{min}	122	144	147,12	128	133,38	129	131,62	127	130,62
sep5-k _{min}	130	150	155,88	134	138,50	134	136,62	131	136,00

Tabela D.1: Resultados detalhados dos experimentos com GRASP (instâncias do grupo k_{min}).

Instância	CPLX	Gpuro		GPRb		GPRf		GPRn	
		Melhor	Média	Melhor	Média	Melhor	Média	Melhor	Média
sep41-k _{med}	8350	8607	8619,62	8606	8640,62	8589	8627,12	8630	8637,75
sep42-k _{med}	6111	6295	6304,12	6302	6320,62	6318	6323,38	6277	6314,88
sep43-k _{med}	4676	4755	4769,38	4756	4773,88	4756	4766,75	4747	4770,12
sep44-k _{med}	4670	4787	4798,75	4800	4807,38	4789	4802,25	4744	4783,50
sep45-k _{med}	8389	8602	8634,00	8651	8670,38	8640	8663,25	8637	8664,25
sep46-k _{med}	6416	6571	6591,88	6594	6606,00	6598	6609,12	6571	6596,25
sep47-k _{med}	6281	6471	6487,38	6466	6483,75	6475	6485,88	6458	6474,75
sep48-k _{med}	8421	8709	8745,62	8718	8748,75	8733	8749,00	8743	8777,62
sep49-k _{med}	7101	7272	7319,50	7329	7343,88	7318	7338,75	7318	7337,38
sep410-k _{med}	5355	5474	5479,12	5475	5488,00	5451	5468,75	5453	5469,75
sep51-k _{med}	11205	11538	11593,50	11571	11608,00	11589	11618,00	11579	11618,38
sep52-k _{med}	14418	14894	15003,00	14994	15010,75	15004	15046,50	14984	15023,75
sep53-k _{med}	11476	11823	11857,50	11857	11881,25	11841	11865,25	11829	11867,12
sep54-k _{med}	9944	10306	10320,00	10310	10324,75	10308	10322,88	10287	10319,50
sep55-k _{med}	10880	11252	11278,38	11274	11294,50	11284	11297,00	11249	11288,50
sep56-k _{med}	10581	10923	10962,88	10965	11029,50	10982	11038,38	10928	11035,12
sep57-k _{med}	14919	15527	15535,75	15489	15611,38	15491	15600,75	15506	15587,25
sep58-k _{med}	10622	11015	11031,50	11031	11040,62	10999	11020,38	10995	11026,88
sep59-k _{med}	11042	11412	11459,88	11476	11483,75	11445	11464,12	11445	11463,75
sep510-k _{med}	12436	12916	12956,25	12908	12963,88	12968	13005,00	12944	12983,00
sep61-k _{med}	7653	7984	7992,38	8006	8023,50	7970	8000,25	7996	8016,12
sep62-k _{med}	6739	6993	7008,25	7004	7017,62	7007	7025,00	6950	7010,00
sep63-k _{med}	8309	8618	8646,00	8653	8671,88	8662	8678,25	8654	8678,00
sep64-k _{med}	8546	8901	8909,50	8877	8901,12	8902	8926,62	8858	8915,62
sep65-k _{med}	9038	9402	9428,62	9454	9474,75	9437	9461,75	9455	9482,75
sep1-k _{med}	21223	22223	22248,50	22244	22265,25	22231	22277,75	22237	22274,38
sep2-k _{med}	21739	22705	22738,25	22713	22786,88	22690	22768,38	22705	22749,62
sep3-k _{med}	20095	21002	21018,00	20967	21021,75	20959	21038,75	21069	21084,75
sep4-k _{med}	22865	23901	23931,50	23888	23917,00	23946	23961,25	23877	23917,50
sep5-k _{med}	18643	19419	19439,50	19418	19455,12	19415	19443,50	19418	19437,25
sep11-k _{med}	29222	30500	30555,25	30503	30533,62	30523	30588,62	30537	30605,25
sep2-k _{med}	28112	29428	29482,25	29469	29523,25	29490	29586,00	29394	29535,88
sep3-k _{med}	27872	29082	29115,12	28995	29104,00	29168	29250,00	29233	29253,12
sep4-k _{med}	25678	26997	27030,25	26804	26949,25	26725	26998,38	26899	27068,62
sep5-k _{med}	28203	29495	29533,00	29342	29497,75	29496	29628,62	29585	29679,12
sep1-k _{med}	32659	34457	34489,38	34474	34533,25	34455	34518,62	34436	34524,00
sep2-k _{med}	32765	34211	34243,88	34236	34251,88	34191	34236,62	34184	34254,38
sep3-k _{med}	34492	36065	36151,00	36229	36238,12	36173	36227,12	36142	36226,25
sep4-k _{med}	31366	32992	33034,75	32952	33051,88	33031	33062,38	32950	33021,62
sep5-k _{med}	30060	31525	31590,88	31562	31626,12	31562	31627,88	31619	31643,25
sep1-k _{med}	38991	40819	40851,50	40453	40634,38	40767	40897,50	40810	40937,75
sep2-k _{med}	39030	40787	40881,75	40596	40696,75	40744	40916,00	40836	40905,62
sep3-k _{med}	39198	40918	41041,12	40732	40815,75	41111	41189,00	41097	41161,00
sep4-k _{med}	38781	40509	40565,12	40156	40457,00	40480	40635,00	40620	40679,62
sep5-k _{med}	40321	42241	42261,50	41971	42137,25	42149	42272,75	42255	42299,25

Tabela D.2: Resultados detalhados dos experimentos com GRASP (instâncias do grupo k_{med}).

Instância	CPLEX		Gpuro		GPRb		GPRf		GPRm	
	Melhor	Média	Melhor	Média	Melhor	Média	Melhor	Média	Melhor	Média
sep41-k _{max}	18811	18873,00	18876	18914,62	18810	18900,38	18852	18918,50	18852	18918,50
sep42-k _{max}	12708	12719,75	12679	12722,62	12685	12739,25	12703	12745,62	12703	12745,62
sep43-k _{max}	10653	10679,00	10644	10694,25	10631	10674,88	10673	10692,50	10673	10692,50
sep44-k _{max}	10694	10711,50	10714	10747,00	10719	10732,88	10730	10742,00	10730	10742,00
sep45-k _{max}	19398	19414,00	19378	19422,88	19405	19443,50	19398	19419,00	19398	19419,00
sep46-k _{max}	15394	15893,88	15893	15920,88	15882	15902,50	15879	15907,00	15879	15907,00
sep47-k _{max}	15657	15685,25	15676	15703,12	15664	15714,12	15693	15702,50	15693	15702,50
sep48-k _{max}	19098	19180,50	19184	19226,62	19184	19209,25	19184	19214,00	19184	19214,00
sep49-k _{max}	17055	17086,38	17074	17101,00	17064	17094,12	17111	17131,62	17111	17131,62
sep410-k _{max}	11903	11973,50	11939	11977,12	11962	11985,38	11979	11994,25	11979	11994,25
sep51-k _{max}	36755	36863,00	36885	36916,25	36819	36913,75	36718	36870,25	36718	36870,25
sep52-k _{max}	46560	46704,88	46724	46763,12	46685	46764,88	46724	46782,00	46724	46782,00
sep53-k _{max}	37488	37514,38	37511	37564,38	37462	37534,62	37508	37564,12	37508	37564,12
sep54-k _{max}	29025	29040,25	29025	29086,75	29064	29089,00	29068	29092,62	29068	29092,62
sep55-k _{max}	33892	33917,88	33815	33907,25	33846	33912,62	33867	33938,38	33867	33938,38
sep56-k _{max}	30713	30779,88	30770	30831,88	30768	30801,50	30731	30813,75	30731	30813,75
sep57-k _{max}	43485	43534,38	43448	43540,50	43442	43536,12	43461	43548,38	43461	43548,38
sep58-k _{max}	33374	33387,00	33290	33377,75	33309	33397,25	33313	33376,00	33313	33376,00
sep59-k _{max}	34589	34696,75	34724	34802,12	34703	34770,38	34746	34804,88	34746	34804,88
sep10-k _{max}	39810	39863,12	39855	39943,62	39895	39938,12	39855	39915,88	39855	39915,88
sep61-k _{max}	24394	24452,75	24537	24559,38	24537	24578,50	24537	24565,12	24537	24565,12
sep62-k _{max}	20631	20680,75	20673	20716,38	20685	20713,00	20685	20719,12	20685	20719,12
sep63-k _{max}	28745	28800,50	28854	28905,62	28829	28884,25	28797	28874,62	28797	28874,62
sep64-k _{max}	27295	27382,38	27436	27470,12	27340	27446,88	27436	27470,12	27436	27470,12
sep65-k _{max}	27889	27921,25	28000	28020,38	27913	27970,25	27978	28001,25	27978	28001,25
sep1-k _{max}	70648	70752,12	70830	70874,75	70798	70851,25	70830	70874,00	70830	70874,00
sep2-k _{max}	67995	68026,62	68084	68115,50	68018	68095,75	68080	68122,25	68080	68122,25
sep3-k _{max}	68994	69067,12	69016	69086,75	69017	69124,12	69016	69086,75	69016	69086,75
sep4-k _{max}	74631	74668,00	74705	74771,25	74693	74735,75	74705	74771,25	74705	74771,25
sep5-k _{max}	62464	62501,50	62396	62569,88	62441	62544,50	62396	62551,00	62396	62551,00
sep11-k _{max}	108945	108996,75	109017	109123,38	109017	109144,12	109017	109123,38	109017	109123,38
sep2-k _{max}	106289	106360,00	106438	106481,38	106438	106481,38	106438	106481,38	106438	106481,38
sep3-k _{max}	101994	102039,50	102029	102196,38	102017	102144,38	102011	102142,12	102011	102142,12
sep4-k _{max}	96744	96915,12	96853	96970,00	96853	97009,25	96853	96970,00	96853	96970,00
sep5-k _{max}	106231	106343,25	106219	106431,25	106210	106422,38	106219	106404,62	106219	106404,62
sep1-k _{max}	116702	116835,50	116680	116922,12	116680	116891,88	116680	116891,88	116680	116891,88
sep2-k _{max}	117561	117712,12	117605	117753,25	117605	117755,75	117605	117753,25	117605	117753,25
sep3-k _{max}	121377	121412,00	121488	121563,00	121427	121541,38	121488	121563,00	121488	121563,00
sep4-k _{max}	114691	114885,25	114973	115063,88	115000	115096,62	114973	115063,88	114973	115063,88
sep5-k _{max}	108140	108317,88	108224	108391,62	108359	108414,75	108224	108391,62	108224	108391,62
sep1-k _{max}	149749	149840,12	149539	149872,25	149539	149872,25	149539	149872,25	149539	149872,25
sep2-k _{max}	148992	149114,75	148726	149175,75	148726	149134,62	148726	149170,62	148726	149170,62
sep3-k _{max}	145263	145330,75	145340	145484,88	145355	145481,50	145355	145503,00	145355	145503,00
sep4-k _{max}	147816	147998,50	147928	148176,75	147928	148176,75	147928	148176,75	147928	148176,75
sep5-k _{max}	151033	151166,62	151111	151279,25	151111	151279,25	151111	151279,25	151111	151279,25

Tabela D.3: Resultados detalhados dos experimentos com GRASP (instâncias do grupo k_{max}).

ANEXO E – Experimentos de calibração com as heurísticas lagrangeanas gulosas

Instância	CPLEX			Q = 10			Q = 50			Q = 100		
	Custo	Média	Tempo (s)	Custo	Média	Tempo (s)	Custo	Média	Tempo (s)	Custo	Média	Tempo (s)
scp41-k _{min}	1148	1153,88	1,53	1151	1151,00	4,72	1151	1151,00	4,72	1151	1151,00	9,36
scp51-k _{min}	579	579,00	1,75	579	579,00	6,69	579	579,00	6,69	579	579,00	12,62
scp61-k _{min}	283	283,00	0,83	283	283,00	2,51	283	283,00	2,51	283	283,00	5,77
scpa1-k _{min}	562	565,00	2,53	563	563,00	8,62	563	563,00	8,62	563	563,00	16,74
scpb1-k _{min}	149	149,88	2,15	149	149,00	7,26	149	149,00	7,26	150	150,00	13,68
scpc1-k _{min}	514	518,00	5,44	516	516,00	18,09	516	516,00	18,09	516	516,00	32,04
scpd1-k _{min}	122	122,00	3,14	122	122,00	11,10	122	122,00	11,10	122	122,00	21,61
scp41-k _{med}	8350	8391,25	3,81	8375	8375,00	14,39	8375	8375,00	14,39	8366	8366,00	28,64
scp51-k _{med}	11205	11250,75	9,30	11263	11263,50	31,75	11263	11263,50	31,75	11256	11256,00	61,07
scp61-k _{med}	7653	7707,00	7,37	7693	7705,75	20,04	7693	7703,38	20,04	7693	7703,38	35,25
scpa1-k _{med}	21227	21354,75	33,79	21327	21334,00	116,15	21327	21334,00	116,15	21329	21334,12	195,14
scpb1-k _{med}	29222	29303,25	76,14	29253	29260,38	286,00	29253	29260,38	286,00	29248	29252,88	453,37
scpc1-k _{med}	32659	32837,38	72,62	32776	32804,88	253,79	32776	32804,88	253,79	32753	32803,62	397,79
scpd1-k _{med}	38991	39167,00	160,84	39147	39170,38	503,78	39147	39170,38	503,78	39152	39164,62	889,35
scp41-k _{max}	18265	18296,00	10,24	18292	18294,00	39,94	18292	18294,00	39,94	18283	18288,88	57,82
scp51-k _{max}	35663	35799,62	21,06	35761	35773,88	77,15	35761	35773,88	77,15	35761	35771,25	135,39
scp61-k _{max}	23516	23590,38	18,12	23569	23586,25	77,53	23569	23586,25	77,53	23569	23576,75	110,62
scpa1-k _{max}	68522	68712,62	104,68	68679	68719,00	267,42	68679	68719,00	267,42	68683	68722,00	443,05
scpb1-k _{max}	105506	105684,12	208,85	105636	105644,88	809,12	105636	105644,88	809,12	105599	105632,12	1231,72
scpc1-k _{max}	112471	112770,75	322,08	112667	112715,62	799,67	112667	112715,62	799,67	112650	112674,75	1329,86
scpd1-k _{max}	144887	145180,25	514,25	145062	145085,00	1652,12	145062	145085,00	1652,12	144998	145076,12	2486,73

Tabela E.1: Resultados detalhados dos experimentos de calibração da HLG - parâmetro Q

Instância	$\underline{\eta} = 10^{-3}$		$\underline{\eta} = 10^{-4}$		$\underline{\eta} = 10^{-5}$	
	Custo	Tempo (s)	Custo	Tempo (s)	Custo	Tempo (s)
scp41-k _{min}	1148	3,64	1151	4,72	1151	5,27
scp51-k _{min}	579	5,11	579	6,69	579	8,05
scp61-k _{min}	283	1,87	283	2,51	283	2,98
scpal-k _{min}	562	6,29	563	8,62	563	10,40
scpb1-k _{min}	149	4,71	149	7,26	149	8,87
scpc1-k _{min}	514	13,37	516	18,09	516	21,56
scpd1-k _{min}	122	7,21	122	11,10	122	13,56
scp41-k _{med}	8350	9,50	8375	14,39	8373	17,87
scp51-k _{med}	11205	19,58	11263	31,75	11239	40,39
scp61-k _{med}	7653	14,13	7693	20,04	7693	24,07
scpal-k _{med}	21227	74,55	21327	116,15	21330	144,14
scpb1-k _{med}	29222	166,86	29253	286,00	29256	400,99
scpc1-k _{med}	32659	167,31	32776	253,79	32769	304,09
scpd1-k _{med}	38991	256,06	39147	503,78	39138	636,05
scp41-k _{max}	18265	29,77	18292	39,94	18292	45,63
scp51-k _{max}	35663	53,50	35761	77,15	35761	91,18
scp61-k _{max}	23516	45,81	23569	77,53	23575	95,11
scpal-k _{max}	68522	171,81	68679	267,42	68700	316,49
scpb1-k _{max}	105506	501,40	105636	809,12	105636	974,87
scpc1-k _{max}	112471	525,12	112667	799,67	112721	948,00
scpd1-k _{max}	144887	1094,82	145062	1652,12	145062	2253,47

Tabela E.2: Resultados detalhados dos experimentos de calibração da HLG - parâmetro $\underline{\eta}$

Instância	CPLEX			HLG-v1.05			HLG-v1		
	Custo	Média	Tempo (s)	Custo	Média	Tempo (s)	Custo	Média	Tempo (s)
scp41-k _{min}	1148	1151,00	3,04	1151	1151,00	3,04	1151	1151,00	4,72
scp51-k _{min}	579	579,00	3,75	579	579,00	3,75	579	579,00	6,69
scp61-k _{min}	283	283,00	2,03	283	283,00	2,03	283	283,00	2,51
scpa1-k _{min}	562	563,00	6,57	563	563,00	6,57	563	563,00	8,62
scpb1-k _{min}	149	150,00	5,85	150	150,00	5,85	149	149,00	7,26
scpc1-k _{min}	514	516,00	13,86	516	516,00	13,86	516	516,00	18,09
scpd1-k _{min}	122	122,00	9,54	122	122,00	9,54	122	122,00	11,10
scp41-k _{med}	8350	8371,00	10,99	8366	8371,00	10,99	8375	8375,00	14,39
scp51-k _{med}	11205	11255,75	22,12	11254	11255,75	22,12	11263	11263,50	31,75
scp61-k _{med}	7653	7711,25	14,23	7706	7711,25	14,23	7693	7705,75	20,04
scpa1-k _{med}	21227	21350,88	84,60	21330	21350,88	84,60	21327	21334,00	116,15
scpb1-k _{med}	29222	29263,25	140,45	29245	29263,25	140,45	29253	29260,38	286,00
scpc1-k _{med}	32659	32813,38	166,95	32797	32813,38	166,95	32776	32804,88	253,79
scpd1-k _{med}	38991	39192,88	302,39	39172	39192,88	302,39	39147	39170,38	503,78
scp41-k _{max}	18265	18298,88	16,97	18292	18298,88	16,97	18292	18294,00	39,94
scp51-k _{max}	35663	35782,75	55,27	35758	35782,75	55,27	35761	35773,88	77,15
scp61-k _{max}	23516	23580,25	34,96	23569	23580,25	34,96	23569	23586,25	77,53
scpa1-k _{max}	68522	68748,75	169,82	68721	68748,75	169,82	68679	68719,00	267,42
scpb1-k _{max}	105506	105704,62	297,29	105690	105704,62	297,29	105636	105644,88	809,12
scpc1-k _{max}	112471	112784,75	460,00	112765	112784,75	460,00	112667	112715,62	799,67
scpd1-k _{max}	144887	145132,38	645,39	145129	145132,38	645,39	145062	145085,00	1652,12

Tabela E.3: Resultados detalhados dos experimentos de calibração da HLG - fator multiplicativo na equação (3.6).

ANEXO F – Resultados computacionais das heurísticas lagrangeanas gulosas

Instância	CPLEX			$HLG_{c_1^0}$			$HLG_{c_2^0}$			$HLG_{c_3^0}$		
	Custo	Dif(%)	Média	Custo	Dif(%)	Média	Custo	Dif(%)	Média	Custo	Dif(%)	Média
sep41- k_{min}	1148	0,26 %	1151,00	1151	0,26 %	1151,00	1151	0,26 %	1151,00	1150	0,17 %	1150,62
sep42- k_{min}	1205	0,00 %	1205,00	1205	0,00 %	1205,00	1205	0,00 %	1205,00	1205	0,00 %	1205,00
sep43- k_{min}	1213	0,25 %	1216,00	1216	0,25 %	1216,00	1216	0,25 %	1216,00	1214	0,08 %	1214,50
sep44- k_{min}	1185	0,00 %	1185,00	1185	0,00 %	1185,00	1185	0,00 %	1185,00	1185	0,00 %	1185,00
sep45- k_{min}	1266	0,00 %	1266,12	1266	0,00 %	1266,38	1266	0,00 %	1266,50	1266	0,00 %	1266,25
sep46- k_{min}	1349	0,00 %	1349,00	1349	0,00 %	1349,00	1349	0,00 %	1349,00	1349	0,00 %	1349,00
sep47- k_{min}	1115	0,00 %	1115,00	1115	0,00 %	1115,00	1115	0,00 %	1115,00	1115	0,00 %	1115,00
sep48- k_{min}	1225	0,08 %	1226,00	1227	0,16 %	1227,00	1228	0,24 %	1228,00	1226	0,08 %	1226,00
sep49- k_{min}	1485	0,00 %	1485,00	1485	0,00 %	1485,00	1485	0,00 %	1485,00	1485	0,00 %	1485,00
sep410- k_{min}	1356	0,00 %	1356,00	1356	0,00 %	1356,00	1356	0,00 %	1356,00	1356	0,00 %	1356,00
sep51- k_{min}	579	0,00 %	579,00	579	0,00 %	579,00	579	0,00 %	579,00	579	0,00 %	579,00
sep52- k_{min}	677	0,30 %	680,88	679	0,30 %	681,25	679	0,30 %	679,75	679	0,30 %	680,88
sep53- k_{min}	574	0,35 %	577,50	578	0,70 %	578,62	576	0,35 %	576,25	576	0,35 %	576,50
sep54- k_{min}	582	1,03 %	588,25	586	0,69 %	586,88	587	0,86 %	587,88	586	0,69 %	586,75
sep55- k_{min}	550	0,00 %	550,00	550	0,00 %	550,00	550	0,00 %	550,00	550	0,00 %	550,00
sep56- k_{min}	560	0,00 %	560,00	560	0,00 %	560,00	560	0,00 %	560,00	560	0,00 %	560,00
sep57- k_{min}	695	0,14 %	696,00	696	0,14 %	696,00	696	0,14 %	696,00	696	0,14 %	696,00
sep58- k_{min}	662	0,00 %	662,00	663	0,15 %	663,88	662	0,00 %	662,50	662	0,00 %	663,38
sep59- k_{min}	687	0,29 %	690,00	689	0,15 %	688,25	689	0,29 %	689,75	688	0,15 %	688,00
sep510- k_{min}	672	0,00 %	672,00	672	0,00 %	672,00	672	0,00 %	672,00	672	0,00 %	672,00
sep61- k_{min}	283	0,00 %	283,00	283	0,00 %	283,00	283	0,00 %	283,00	283	0,00 %	283,00
sep62- k_{min}	302	0,00 %	302,00	302	0,00 %	302,00	302	0,00 %	302,00	302	0,00 %	302,00
sep63- k_{min}	313	0,00 %	313,00	313	0,00 %	313,00	313	0,00 %	313,00	313	0,00 %	313,00
sep64- k_{min}	292	0,68 %	294,00	294	0,68 %	294,25	294	0,68 %	294,00	294	0,68 %	294,00
sep65- k_{min}	353	0,00 %	353,88	353	0,00 %	353,25	353	0,00 %	353,25	353	0,00 %	353,25
sep61- k_{min}	563	0,18 %	563,00	563	0,18 %	563,50	563	0,18 %	563,25	563	0,18 %	563,75
sep62- k_{min}	560	0,00 %	560,12	560	0,00 %	560,38	560	0,00 %	560,00	560	0,00 %	560,12
sep63- k_{min}	524	0,38 %	526,00	526	0,38 %	526,38	526	0,38 %	526,00	526	0,38 %	526,25
sep64- k_{min}	527	0,00 %	527,00	527	0,00 %	527,00	527	0,00 %	527,00	527	0,00 %	527,00
sep65- k_{min}	557	0,54 %	560,88	559	0,36 %	560,12	560	0,54 %	560,50	559	0,36 %	560,00
sep61- k_{min}	149	0,00 %	149,00	149	0,00 %	149,88	149	0,00 %	149,00	149	0,00 %	149,38
sep62- k_{min}	150	0,67 %	151,62	151	0,67 %	151,25	151	0,67 %	151,75	150	0,00 %	150,88
sep63- k_{min}	165	0,61 %	166,00	166	0,61 %	167,00	166	0,61 %	166,00	166	0,61 %	167,25
sep64- k_{min}	157	0,00 %	157,12	157	0,00 %	158,25	157	0,00 %	157,88	157	0,00 %	158,50
sep65- k_{min}	151	1,99 %	154,00	152	0,66 %	153,00	154	1,99 %	154,12	152	0,66 %	152,38
sep61- k_{min}	514	0,39 %	516,00	516	0,39 %	516,12	516	0,39 %	516,00	516	0,39 %	516,12
sep62- k_{min}	483	0,83 %	487,00	487	0,83 %	488,38	487	0,83 %	487,00	487	0,83 %	488,00
sep63- k_{min}	544	0,00 %	544,50	546	0,37 %	547,38	544	0,00 %	544,00	546	0,37 %	549,00
sep64- k_{min}	484	0,62 %	487,62	486	0,41 %	486,88	487	0,62 %	487,38	486	0,41 %	486,38
sep65- k_{min}	488	0,41 %	490,50	491	0,61 %	491,12	490	0,41 %	490,12	490	0,41 %	491,12
sep61- k_{min}	122	0,00 %	122,00	122	0,00 %	122,38	122	0,00 %	122,62	122	0,00 %	122,00
sep62- k_{min}	127	0,00 %	127,00	127	0,00 %	127,25	127	0,00 %	127,25	127	0,00 %	127,38
sep63- k_{min}	138	1,45 %	140,00	140	0,72 %	139,00	140	1,45 %	140,00	139	0,72 %	139,00
sep64- k_{min}	122	0,82 %	123,00	123	0,82 %	123,00	123	0,82 %	123,00	123	0,82 %	123,00
sep65- k_{min}	130	0,77 %	131,00	131	0,77 %	131,00	131	0,77 %	131,00	131	0,77 %	131,00

Tabela F.1: Resultados detalhados dos experimentos com HLG (instâncias do grupo k_{min})

Instância	CPLEX			HLG _{ex,0}			HLG _{c,0}			HLG _{c,0}		
	Custo	Dif(%)	Média	Custo	Dif(%)	Média	Custo	Dif(%)	Média	Custo	Dif(%)	Média
sep41-k _{med}	8350	0,30 %	8375,00	8379	0,35 %	8391,75	8366	0,19 %	8372,75	8382	0,38 %	8392,38
sep42-k _{med}	6111	0,11 %	6118,00	6118	0,11 %	6121,88	6118	0,11 %	6118,00	6118	0,11 %	6119,88
sep43-k _{med}	4676	0,34 %	4695,75	4694	0,38 %	4697,25	4692	0,34 %	4692,62	4694	0,38 %	4696,00
sep44-k _{med}	4670	0,47 %	4692,00	4691	0,45 %	4692,62	4684	0,30 %	4684,00	4690	0,43 %	4692,75
sep45-k _{med}	8389	0,42 %	8426,00	8431	0,50 %	8447,38	8427	0,45 %	8428,25	8428	0,46 %	8437,38
sep46-k _{med}	6416	0,59 %	6454,88	6456	0,62 %	6459,88	6461	0,70 %	6461,00	6458	0,65 %	6460,62
sep47-k _{med}	6281	0,08 %	6286,00	6289	0,13 %	6289,00	6286	0,08 %	6286,00	6286	0,08 %	6288,62
sep48-k _{med}	8421	0,23 %	8454,00	8436	0,18 %	8439,50	8440	0,23 %	8453,50	8436	0,18 %	8437,50
sep49-k _{med}	7101	0,37 %	7128,62	7134	0,46 %	7137,75	7131	0,42 %	7131,00	7125	0,34 %	7132,12
sep50-k _{med}	5355	0,39 %	5376,00	5378	0,43 %	5386,38	5384	0,54 %	5384,00	5376	0,39 %	5381,75
sep51-k _{med}	11205	0,52 %	11263,50	11266	0,54 %	11267,75	11263	0,52 %	11263,00	11245	0,36 %	11263,00
sep52-k _{med}	14418	0,45 %	14486,50	14507	0,62 %	14516,25	14486	0,47 %	14495,75	14495	0,53 %	14512,62
sep53-k _{med}	11476	0,38 %	11521,50	11537	0,53 %	11538,88	11520	0,38 %	11521,50	11520	0,38 %	11534,25
sep54-k _{med}	9944	0,31 %	9975,00	9990	0,46 %	9996,38	9975	0,31 %	9975,00	9982	0,38 %	9995,25
sep55-k _{med}	10880	0,57 %	10942,00	10945	0,60 %	10946,88	10934	0,50 %	10934,00	10932	0,48 %	10939,12
sep56-k _{med}	10581	0,51 %	10635,00	10644	0,60 %	10655,88	10635	0,51 %	10635,00	10631	0,47 %	10644,38
sep57-k _{med}	14919	0,57 %	15007,75	15016	0,65 %	15027,38	15004	0,57 %	15007,38	15015	0,64 %	15028,38
sep58-k _{med}	10622	0,61 %	10698,75	10690	0,64 %	10698,88	10708	0,81 %	10709,12	10686	0,60 %	10693,62
sep59-k _{med}	11042	0,46 %	11093,00	11091	0,44 %	11098,12	11089	0,43 %	11089,00	11085	0,39 %	11095,50
sep60-k _{med}	12436	0,39 %	12484,00	12504	0,55 %	12516,50	12499	0,51 %	12499,00	12489	0,43 %	12512,50
sep61-k _{med}	7653	0,52 %	7705,75	7698	0,59 %	7712,88	7692	0,51 %	7698,12	7704	0,67 %	7713,25
sep62-k _{med}	6739	0,58 %	6785,12	6784	0,67 %	6785,50	6781	0,62 %	6786,00	6773	0,50 %	6776,00
sep63-k _{med}	8309	0,81 %	8378,88	8377	0,82 %	8385,00	8376	0,81 %	8376,75	8367	0,70 %	8376,75
sep64-k _{med}	8546	0,80 %	8614,00	8623	0,90 %	8624,88	8574	0,33 %	8574,00	8600	0,63 %	8609,88
sep65-k _{med}	9038	0,50 %	9094,25	9070	0,35 %	9084,00	9097	0,65 %	9097,00	9091	0,59 %	9096,88
sep66-k _{med}	21227	0,47 %	21334,00	21329	0,48 %	21366,50	21334	0,50 %	21346,00	21342	0,54 %	21364,88
sep67-k _{med}	21739	0,37 %	21844,25	21865	0,58 %	21877,88	21837	0,45 %	21847,00	21860	0,56 %	21878,25
sep68-k _{med}	20095	0,30 %	20173,75	20182	0,43 %	20193,50	20155	0,30 %	20171,38	20183	0,44 %	20198,38
sep69-k _{med}	22865	0,58 %	23007,00	23006	0,62 %	23026,62	23004	0,61 %	23011,38	22996	0,57 %	23020,12
sep70-k _{med}	18643	0,34 %	18720,88	18724	0,43 %	18736,50	18714	0,38 %	18727,00	18720	0,41 %	18741,25
sep71-k _{med}	29222	0,11 %	29260,38	29265	0,15 %	29282,62	29255	0,11 %	29256,88	29249	0,09 %	29268,75
sep72-k _{med}	28112	0,27 %	28203,62	28214	0,36 %	28230,25	28187	0,27 %	28200,75	28215	0,37 %	28226,00
sep73-k _{med}	27872	0,30 %	27972,50	27963	0,33 %	27974,75	27951	0,28 %	27964,50	27960	0,32 %	27973,62
sep74-k _{med}	25678	0,25 %	25765,88	25782	0,41 %	25797,50	25742	0,25 %	25765,00	25773	0,37 %	25789,25
sep75-k _{med}	28203	0,39 %	28333,50	28353	0,53 %	28355,25	28326	0,44 %	28332,75	28318	0,41 %	28335,25
sep76-k _{med}	32659	0,36 %	32804,88	32810	0,46 %	32823,75	32791	0,40 %	32811,38	32789	0,40 %	32815,62
sep77-k _{med}	32765	0,33 %	32896,00	32896	0,40 %	32935,88	32883	0,36 %	32912,12	32896	0,40 %	32939,62
sep78-k _{med}	34492	0,45 %	34666,25	34685	0,56 %	34703,50	34639	0,43 %	34668,38	34638	0,42 %	34690,00
sep79-k _{med}	31366	0,42 %	31518,50	31524	0,50 %	31545,75	31499	0,42 %	31524,62	31531	0,53 %	31548,12
sep80-k _{med}	30060	0,45 %	30215,75	30223	0,54 %	30254,00	30171	0,37 %	30191,62	30231	0,57 %	30257,62
sep81-k _{med}	38991	0,40 %	39170,38	39131	0,36 %	39144,62	39154	0,42 %	39163,75	39145	0,39 %	39154,25
sep82-k _{med}	39030	0,23 %	39139,00	39131	0,26 %	39161,00	39118	0,23 %	39144,50	39123	0,24 %	39146,12
sep83-k _{med}	39198	0,19 %	39316,62	39307	0,28 %	39325,50	39293	0,24 %	39315,88	39296	0,25 %	39325,25
sep84-k _{med}	38781	0,25 %	38897,62	38907	0,32 %	38915,75	38897	0,30 %	38904,00	38887	0,27 %	38898,12
sep85-k _{med}	40321	0,22 %	40446,00	40420	0,25 %	40453,00	40456	0,33 %	40462,00	40428	0,27 %	40452,50

Tabela F.2: Resultados detalhados dos experimentos com HLG (instâncias do grupok_{med})

Instância	CPLEX			$HLG_{c_{\max}^0}$			$HLG_{c_{\max}^0}$			$HLG_{c_{\max}^0}$		
	Custo	Dif(%)	Média	Custo	Dif(%)	Média	Custo	Dif(%)	Média	Custo	Dif(%)	Média
sep41- k_{max}	18265	0,15 %	18294,00	18298	0,18 %	18304,75	18281	0,09 %	18291,62	18294	0,16 %	18304,38
sep42- k_{max}	12360	0,36 %	12407,50	12406	0,37 %	12417,88	12405	0,36 %	12405,88	12418	0,47 %	12425,00
sep43- k_{max}	10396	0,10 %	10408,62	10398	0,02 %	10411,88	10406	0,10 %	10410,62	10398	0,02 %	10414,00
sep44- k_{max}	10393	0,43 %	10443,38	10444	0,49 %	10465,25	10427	0,33 %	10433,00	10451	0,56 %	10463,00
sep45- k_{max}	18856	0,00 %	18856,00	18869	0,07 %	18869,25	18856	0,00 %	18856,00	18856	0,00 %	18867,12
sep46- k_{max}	15394	0,27 %	15438,00	15431	0,24 %	15434,38	15428	0,22 %	15436,12	15425	0,20 %	15429,62
sep47- k_{max}	15233	0,35 %	15286,00	15278	0,30 %	15281,62	15286	0,35 %	15286,00	15280	0,31 %	15283,75
sep48- k_{max}	18602	0,25 %	18655,62	18660	0,31 %	18661,50	18626	0,13 %	18651,38	18632	0,16 %	18641,25
sep49- k_{max}	16558	0,20 %	16599,50	16598	0,24 %	16604,38	16591	0,20 %	16599,50	16600	0,25 %	16605,25
sep410- k_{max}	11607	0,18 %	11631,00	11625	0,16 %	11630,00	11629	0,19 %	11632,25	11625	0,16 %	11630,38
sep51- k_{max}	35663	0,27 %	35773,88	35824	0,45 %	35836,88	35756	0,26 %	35771,75	35804	0,40 %	35830,12
sep52- k_{max}	45396	0,08 %	45474,88	45496	0,22 %	45503,88	45475	0,17 %	45482,00	45483	0,19 %	45498,12
sep53- k_{max}	36329	0,19 %	36410,38	36426	0,27 %	36448,38	36388	0,16 %	36406,12	36438	0,30 %	36452,62
sep54- k_{max}	28017	0,12 %	28063,50	28088	0,25 %	28102,25	28051	0,12 %	28065,75	28065	0,17 %	28092,75
sep55- k_{max}	32779	0,30 %	32894,12	32911	0,40 %	32924,00	32870	0,28 %	32886,50	32900	0,37 %	32920,75
sep56- k_{max}	29608	0,22 %	29678,25	29684	0,26 %	29696,00	29676	0,23 %	29684,25	29689	0,27 %	29706,88
sep57- k_{max}	41930	0,11 %	41992,88	42008	0,19 %	42030,88	41970	0,10 %	41988,62	42001	0,17 %	42017,88
sep58- k_{max}	32320	0,32 %	32429,12	32435	0,36 %	32442,00	32390	0,22 %	32402,75	32420	0,31 %	32432,38
sep59- k_{max}	33584	0,24 %	33680,25	33659	0,22 %	33683,12	33672	0,26 %	33682,62	33679	0,28 %	33691,50
sep510- k_{max}	38709	0,28 %	38841,50	38813	0,27 %	38860,62	38811	0,26 %	38837,75	38854	0,37 %	38867,62
sep61- k_{max}	23516	0,23 %	23586,25	23591	0,32 %	23607,12	23569	0,23 %	23589,62	23593	0,33 %	23611,75
sep62- k_{max}	19934	0,48 %	20050,62	20040	0,53 %	20055,88	20025	0,46 %	20048,75	20038	0,52 %	20053,25
sep63- k_{max}	27983	0,16 %	28032,50	28055	0,26 %	28065,88	28027	0,16 %	28032,38	28044	0,22 %	28061,75
sep64- k_{max}	26442	0,36 %	26544,50	26530	0,33 %	26552,25	26532	0,34 %	26550,25	26546	0,39 %	26551,62
sep65- k_{max}	27069	0,21 %	27138,25	27130	0,23 %	27133,25	27132	0,23 %	27141,25	27123	0,20 %	27131,12
sep1- k_{max}	68522	0,23 %	68719,00	68688	0,24 %	68739,25	68709	0,27 %	68731,12	68720	0,29 %	68751,88
sep2- k_{max}	65842	0,21 %	65996,50	66009	0,25 %	66027,50	65963	0,18 %	65986,38	65996	0,23 %	66028,38
sep3- k_{max}	66829	0,28 %	67069,50	67103	0,41 %	67130,38	67041	0,32 %	67067,12	67084	0,38 %	67125,00
sep4- k_{max}	72334	0,27 %	72549,88	72535	0,28 %	72567,50	72526	0,27 %	72551,25	72536	0,28 %	72558,38
sep5- k_{max}	60491	0,22 %	60681,75	60673	0,30 %	60720,25	60659	0,28 %	60689,00	60661	0,28 %	60733,50
sep1- k_{max}	105506	0,12 %	105644,88	105646	0,13 %	105667,50	105621	0,11 %	105647,62	105635	0,12 %	105658,12
sep2- k_{max}	102922	0,13 %	103095,62	103087	0,16 %	103106,12	103048	0,12 %	103090,38	103108	0,18 %	103116,88
sep3- k_{max}	98280	0,17 %	98481,38	98475	0,20 %	98504,50	98445	0,17 %	98476,88	98503	0,23 %	98515,25
sep4- k_{max}	93777	0,06 %	93879,00	93857	0,09 %	93905,38	93839	0,07 %	93883,62	93913	0,15 %	93919,38
sep5- k_{max}	102810	0,09 %	102943,50	102955	0,14 %	102993,50	102910	0,10 %	102941,75	102980	0,17 %	102989,50
sep1- k_{max}	112471	0,17 %	112715,62	112762	0,26 %	112806,38	112642	0,15 %	112709,12	112740	0,24 %	112791,75
sep2- k_{max}	113916	0,20 %	114191,50	114181	0,23 %	114215,75	114147	0,20 %	114176,25	114156	0,21 %	114198,25
sep3- k_{max}	117416	0,23 %	117714,50	117762	0,29 %	117789,50	117690	0,23 %	117725,25	117694	0,24 %	117762,00
sep4- k_{max}	110823	0,24 %	111134,25	111146	0,29 %	111186,38	111116	0,26 %	111138,62	111146	0,29 %	111199,75
sep5- k_{max}	104439	0,16 %	104643,25	104686	0,24 %	104729,25	104585	0,14 %	104620,50	104663	0,21 %	104723,25
sep1- k_{max}	144887	0,12 %	145085,00	145078	0,13 %	145102,88	145070	0,13 %	145090,62	145120	0,16 %	145131,88
sep2- k_{max}	144096	0,10 %	144264,50	144284	0,13 %	144291,50	144231	0,09 %	144260,25	144234	0,10 %	144251,00
sep3- k_{max}	140474	0,16 %	140721,75	140711	0,17 %	140733,00	140674	0,14 %	140723,75	140744	0,19 %	140759,12
sep4- k_{max}	143513	0,05 %	143636,62	143587	0,05 %	143625,62	143620	0,07 %	143655,38	143630	0,08 %	143654,50
sep5- k_{max}	146307	0,11 %	146497,88	146441	0,09 %	146481,25	146488	0,12 %	146521,75	146472	0,11 %	146487,00

Tabela F.3: Resultados detalhados dos experimentos com HLG (instâncias do grupo k_{max})

Instância	$HLG_{\bar{c}_\lambda^0}$	$HLG_{\bar{c}_\lambda^0}$	$HLG_{\bar{c}_\emptyset^0}$	$HLG_{\bar{c}_\emptyset^0}$
scp41- k_{min}	4,70	4,16	10,46	10,55
scp42- k_{min}	5,79	2,71	9,83	6,15
scp43- k_{min}	5,20	5,55	10,65	13,40
scp44- k_{min}	14,57	13,70	26,40	31,81
scp45- k_{min}	7,42	6,74	14,05	14,73
scp46- k_{min}	4,62	4,32	10,18	10,90
scp47- k_{min}	9,11	13,79	20,34	25,22
scp48- k_{min}	3,71	3,96	7,94	9,08
scp49- k_{min}	5,08	5,08	10,17	11,25
scp410- k_{min}	15,17	10,81	25,07	23,59
scp51- k_{min}	6,67	7,25	17,63	19,77
scp52- k_{min}	4,69	4,81	12,02	12,68
scp53- k_{min}	4,16	4,13	10,62	11,41
scp54- k_{min}	5,74	5,23	14,72	15,08
scp55- k_{min}	11,36	8,09	27,43	25,20
scp56- k_{min}	5,72	8,02	14,49	18,02
scp57- k_{min}	5,51	7,42	19,66	22,09
scp58- k_{min}	9,43	6,97	26,44	22,10
scp59- k_{min}	4,08	4,20	12,44	12,25
scp510- k_{min}	7,03	6,72	26,29	22,09
scp61- k_{min}	2,50	2,46	4,87	5,07
scp62- k_{min}	3,16	2,90	6,44	6,89
scp63- k_{min}	2,42	2,50	4,62	5,49
scp64- k_{min}	2,14	2,20	4,70	5,22
scp65- k_{min}	3,15	3,14	5,42	6,28
scpa1- k_{min}	8,62	9,16	21,94	22,92
scpa2- k_{min}	9,12	10,36	24,49	28,52
scpa3- k_{min}	8,30	7,80	20,33	21,48
scpa4- k_{min}	13,17	9,94	30,80	29,21
scpa5- k_{min}	8,34	9,34	23,22	25,32
scpb1- k_{min}	7,27	7,09	15,39	16,16
scpb2- k_{min}	7,51	7,09	16,34	18,79
scpb3- k_{min}	7,58	6,44	16,51	15,90
scpb4- k_{min}	7,91	7,78	16,77	17,40
scpb5- k_{min}	9,94	8,82	19,67	19,28
scpc1- k_{min}	18,10	17,73	43,02	47,51
scpc2- k_{min}	15,39	14,13	37,20	38,30
scpc3- k_{min}	18,92	15,82	40,83	41,13
scpc4- k_{min}	20,81	19,47	49,56	50,68
scpc5- k_{min}	15,13	15,54	40,75	47,78
scpd1- k_{min}	11,26	10,99	21,40	26,32
scpd2- k_{min}	12,13	11,28	26,12	26,21
scpd3- k_{min}	14,70	13,22	29,40	32,34
scpd4- k_{min}	13,39	12,91	25,61	27,01
scpd5- k_{min}	13,37	14,84	26,26	33,39

Tabela F.4: Tempos de processamento de HLG (instâncias do grupo k_{min})

Instância	$HLG_{\tilde{c}_\lambda^0}$	$HLG_{\tilde{c}_\lambda^0}$	$HLG_{\tilde{c}_\emptyset^0}$	$HLG_{\tilde{c}_\emptyset^0}$
scp41- k_{med}	14,70	12,83	26,00	26,38
scp42- k_{med}	15,40	13,82	27,02	29,22
scp43- k_{med}	12,91	11,84	21,57	24,55
scp44- k_{med}	7,50	8,89	19,52	18,36
scp45- k_{med}	15,88	15,28	25,55	27,68
scp46- k_{med}	11,58	10,82	16,42	21,85
scp47- k_{med}	15,24	14,49	31,73	33,46
scp48- k_{med}	13,26	14,29	22,73	26,72
scp49- k_{med}	13,53	13,44	23,65	26,21
scp410- k_{med}	15,43	13,44	21,05	25,54
scp51- k_{med}	32,71	29,86	66,25	75,21
scp52- k_{med}	41,02	39,16	67,37	81,72
scp53- k_{med}	38,68	41,03	73,74	94,14
scp54- k_{med}	39,06	30,88	62,73	73,95
scp55- k_{med}	37,24	37,45	77,21	79,47
scp56- k_{med}	34,18	33,88	67,23	79,77
scp57- k_{med}	39,53	40,62	70,64	83,12
scp58- k_{med}	32,36	29,26	60,01	68,70
scp59- k_{med}	38,61	33,67	67,77	75,38
scp510- k_{med}	47,28	37,68	75,86	84,47
scp61- k_{med}	20,27	19,84	33,93	41,54
scp62- k_{med}	17,98	16,73	31,64	37,74
scp63- k_{med}	26,67	22,52	41,89	45,75
scp64- k_{med}	23,76	25,64	40,35	53,88
scp65- k_{med}	28,08	29,55	44,63	51,58
scpa1- k_{med}	117,51	111,75	194,90	245,71
scpa2- k_{med}	117,47	112,27	207,87	233,18
scpa3- k_{med}	125,67	114,84	227,50	244,55
scpa4- k_{med}	116,58	118,47	207,64	240,47
scpa5- k_{med}	106,12	104,44	191,84	239,47
scpb1- k_{med}	284,74	252,42	454,93	597,35
scpb2- k_{med}	264,29	251,55	409,59	531,25
scpb3- k_{med}	232,92	217,37	379,92	519,51
scpb4- k_{med}	264,82	221,33	423,72	522,58
scpb5- k_{med}	213,00	215,03	354,16	475,29
scpc1- k_{med}	247,89	226,20	425,51	561,55
scpc2- k_{med}	262,12	232,03	417,31	568,03
scpc3- k_{med}	267,48	249,54	415,87	602,01
scpc4- k_{med}	240,44	238,02	408,61	521,94
scpc5- k_{med}	229,06	201,37	376,81	510,74
scpd1- k_{med}	490,95	436,28	741,99	1131,12
scpd2- k_{med}	502,78	464,31	772,02	1159,30
scpd3- k_{med}	423,59	389,11	640,57	994,19
scpd4- k_{med}	486,69	455,03	733,69	1115,92
scpd5- k_{med}	414,28	425,57	685,10	1090,34

Tabela F.5: Tempos de processamento de HLG (instâncias do grupo k_{med})

Instância	$HLG_{\tilde{c}_x^0}$	$HLG_{\tilde{c}_x^0}$	$HLG_{\tilde{c}_x^0}$	$HLG_{\tilde{c}_x^0}$
scp41- k_{max}	39,60	34,52	65,29	55,48
scp42- k_{max}	17,84	17,81	33,20	33,00
scp43- k_{max}	23,28	21,14	38,10	41,15
scp44- k_{max}	15,08	14,27	28,43	29,96
scp45- k_{max}	120,42	52,47	185,02	109,20
scp46- k_{max}	28,65	29,13	42,39	51,03
scp47- k_{max}	18,26	20,57	30,21	38,59
scp48- k_{max}	25,04	25,58	41,68	44,46
scp49- k_{max}	25,20	22,58	39,17	42,99
scp410- k_{max}	25,70	24,37	40,48	40,08
scp51- k_{max}	78,40	73,80	134,09	146,79
scp52- k_{max}	109,51	104,81	177,88	197,91
scp53- k_{max}	74,87	72,55	143,29	141,95
scp54- k_{max}	75,09	64,23	139,20	137,97
scp55- k_{max}	71,65	64,95	124,68	138,16
scp56- k_{max}	74,43	70,39	134,30	146,22
scp57- k_{max}	100,86	92,28	173,98	171,92
scp58- k_{max}	76,75	69,96	147,77	135,45
scp59- k_{max}	82,07	72,94	134,60	149,57
scp510- k_{max}	77,09	72,38	124,01	140,71
scp61- k_{max}	78,34	69,10	105,31	109,86
scp62- k_{max}	46,79	42,02	65,86	71,75
scp63- k_{max}	49,20	43,86	73,06	74,23
scp64- k_{max}	37,03	34,01	54,94	55,79
scp65- k_{max}	51,66	52,04	84,74	84,40
scpa1- k_{max}	263,35	241,90	399,03	417,89
scpa2- k_{max}	285,41	242,53	452,03	466,47
scpa3- k_{max}	238,52	208,35	396,97	386,14
scpa4- k_{max}	280,76	252,58	427,52	479,39
scpa5- k_{max}	229,66	205,99	361,73	390,00
scpb1- k_{max}	789,84	746,51	1216,69	1217,00
scpb2- k_{max}	718,24	660,29	1057,49	1074,43
scpb3- k_{max}	603,66	573,45	929,31	918,06
scpb4- k_{max}	564,60	544,06	862,15	859,10
scpb5- k_{max}	895,07	771,81	1271,56	1150,52
scpc1- k_{max}	783,83	765,26	1268,05	1305,19
scpc2- k_{max}	624,57	564,25	900,25	977,21
scpc3- k_{max}	610,17	574,04	957,26	996,78
scpc4- k_{max}	753,53	658,53	1089,21	1156,95
scpc5- k_{max}	609,42	595,97	957,08	993,07
scpd1- k_{max}	1633,67	1673,81	2694,63	2642,82
scpd2- k_{max}	1886,51	1730,21	2594,30	2787,39
scpd3- k_{max}	1489,04	1371,76	2046,47	2078,87
scpd4- k_{max}	1712,43	1604,79	2543,23	2577,52
scpd5- k_{max}	1444,27	1418,72	2076,33	2197,97

Tabela F.6: Tempos de processamento de HLG (instâncias do grupo k_{max})

ANEXO G – Resultados computacionais das heurísticas lagrangeanas híbridas

Instância	CPLEX			LAGRASP(0, 1, -)			LAGRASP(0,25, 1,5)			LAGRASP(0,50, 10,5)		
	custo	dif. (%)	média	custo	dif. (%)	média	custo	dif. (%)	média	custo	dif. (%)	média
sep41-k _{min}	1148	0,26%	1151,00	1150	0,17%	1150,88	1150	0,17%	1150,88	1150	0,17%	1151,25
sep42-k _{min}	1205	0,00%	1205,00	1205	0,00%	1205,00	1205	0,00%	1205,00	1205	0,00%	1205,00
sep43-k _{min}	1213	0,25%	1216,00	1216	0,16%	1216,00	1215	0,16%	1215,25	1215	0,16%	1215,62
sep44-k _{min}	1185	0,00%	1185,00	1185	0,00%	1185,00	1185	0,00%	1185,00	1185	0,00%	1185,00
sep45-k _{min}	1266	0,00%	1266,12	1266	0,00%	1266,38	1266	0,00%	1266,38	1266	0,00%	1267,25
sep46-k _{min}	1349	0,00%	1349,00	1349	0,00%	1349,00	1349	0,00%	1349,00	1349	0,00%	1349,00
sep47-k _{min}	1115	0,00%	1115,00	1115	0,00%	1115,00	1115	0,00%	1115,00	1115	0,00%	1115,00
sep48-k _{min}	1225	0,08%	1226,00	1225	0,00%	1225,88	1225	0,00%	1225,88	1226	0,08%	1227,75
sep49-k _{min}	1485	0,00%	1485,00	1485	0,00%	1485,00	1485	0,00%	1485,00	1485	0,00%	1485,00
sep410-k _{min}	1356	0,00%	1356,00	1356	0,00%	1356,00	1356	0,00%	1356,00	1356	0,00%	1356,00
sep51-k _{min}	579	0,00%	579,00	579	0,00%	579,00	579	0,00%	579,00	579	0,00%	579,00
sep52-k _{min}	677	0,30%	680,88	679	0,30%	679,75	679	0,30%	679,75	681	0,59%	682,75
sep53-k _{min}	574	0,35%	577,50	576	0,35%	576,12	576	0,35%	576,12	576	0,35%	578,50
sep54-k _{min}	582	1,03%	588,25	588	0,86%	587,88	587	0,86%	587,88	590	1,37%	590,88
sep55-k _{min}	550	0,00%	550,00	550	0,00%	550,00	550	0,00%	550,00	550	0,00%	550,00
sep56-k _{min}	560	0,00%	560,00	560	0,00%	560,00	560	0,00%	560,00	560	0,00%	560,00
sep57-k _{min}	695	0,14%	696,00	696	0,00%	696,00	695	0,00%	695,00	695	0,00%	695,50
sep58-k _{min}	662	0,00%	662,00	662	0,00%	662,00	662	0,00%	663,00	663	0,15%	663,88
sep59-k _{min}	687	0,29%	690,00	688	0,15%	689,50	688	0,15%	689,50	688	0,15%	692,50
sep510-k _{min}	672	0,00%	672,00	672	0,00%	672,00	672	0,00%	672,00	672	0,00%	672,00
sep61-k _{min}	283	0,00%	283,00	283	0,00%	283,00	283	0,00%	283,00	283	0,00%	283,00
sep62-k _{min}	302	0,00%	302,00	302	0,00%	302,00	302	0,00%	302,00	302	0,00%	302,00
sep63-k _{min}	313	0,00%	313,00	313	0,00%	313,00	313	0,00%	313,00	313	0,00%	313,38
sep64-k _{min}	292	0,68%	294,00	294	0,68%	294,00	294	0,68%	294,00	294	0,68%	294,50
sep65-k _{min}	353	0,00%	353,88	353	0,00%	353,62	353	0,00%	353,62	354	0,28%	355,12
sep61-k _{min}	562	0,18%	563,00	563	0,18%	563,00	563	0,18%	563,00	563	0,18%	563,75
sep62-k _{min}	560	0,00%	560,12	560	0,00%	560,00	560	0,00%	560,00	560	0,00%	560,75
sep63-k _{min}	524	0,38%	526,00	524	0,00%	525,62	524	0,00%	525,62	526	0,38%	527,00
sep64-k _{min}	527	0,00%	527,00	527	0,00%	527,00	527	0,00%	527,00	527	0,00%	527,00
sep65-k _{min}	557	0,54%	560,88	559	0,36%	560,62	560	0,54%	561,25	560	0,54%	561,25
sep61-k _{min}	149	0,00%	149,00	149	0,00%	149,12	149	0,00%	149,12	149	0,00%	150,38
sep62-k _{min}	150	0,67%	151,62	151	0,67%	151,62	151	0,67%	151,62	151	0,67%	153,62
sep63-k _{min}	165	0,61%	166,00	166	0,61%	166,00	166	0,61%	166,00	166	0,61%	167,75
sep64-k _{min}	157	0,00%	157,12	157	0,00%	157,25	157	0,00%	157,25	157	0,00%	158,25
sep65-k _{min}	151	1,99%	154,00	154	1,99%	154,00	154	1,99%	154,00	154	1,99%	154,50
sep61-k _{min}	514	0,39%	516,00	516	0,39%	516,00	516	0,39%	516,00	516	0,39%	516,12
sep62-k _{min}	483	0,83%	487,00	487	0,83%	487,12	487	0,83%	487,12	487	0,83%	489,25
sep63-k _{min}	544	0,00%	544,50	544	0,00%	544,38	544	0,00%	544,38	544	0,00%	551,25
sep64-k _{min}	484	0,62%	487,62	486	0,41%	487,38	487	0,62%	488,25	487	0,62%	488,25
sep65-k _{min}	488	0,41%	490,50	490	0,41%	490,25	490	0,41%	490,25	491	0,61%	491,62
sep61-k _{min}	122	0,00%	122,00	122	0,00%	122,12	122	0,00%	122,12	122	0,00%	123,25
sep62-k _{min}	127	0,00%	127,00	127	0,00%	127,00	127	0,00%	127,00	127	0,00%	127,75
sep63-k _{min}	138	1,45%	140,00	140	1,45%	140,00	140	1,45%	140,00	140	1,45%	140,00
sep64-k _{min}	122	0,82%	123,00	123	0,82%	123,00	123	0,82%	123,00	123	0,82%	124,75
sep65-k _{min}	130	0,77%	131,00	131	0,77%	131,00	131	0,77%	131,00	131	0,77%	131,00

Tabela G.1: Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP (instâncias do grupo k_{min})

Instância	CPLEX			LAGRASP(0,1,-)			LAGRASP(0,25,1,5)			LAGRASP(0,50,10,5)		
	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média
sep41-k _{med}	8350	0,30%	8375,00	8375	0,30%	8375,00	8366	0,19%	8370,88	8375	0,30%	8384,12
sep42-k _{med}	6111	0,11%	6118,00	6118	0,11%	6118,00	6118	0,11%	6119,38	6118	0,11%	6130,62
sep43-k _{med}	4676	0,34%	4695,75	4692	0,34%	4695,75	4692	0,34%	4693,50	4690	0,30%	4697,38
sep44-k _{med}	4670	0,47%	4692,00	4692	0,47%	4692,00	4684	0,30%	4691,62	4691	0,45%	4699,62
sep45-k _{med}	8389	0,42%	8426,00	8424	0,42%	8426,00	8418	0,35%	8425,75	8418	0,35%	8439,62
sep46-k _{med}	6316	0,59%	6454,88	6454	0,59%	6454,88	6450	0,53%	6454,38	6461	0,70%	6469,38
sep47-k _{med}	6281	0,08%	6286,00	6286	0,08%	6286,00	6286	0,08%	6288,50	6289	0,13%	6289,38
sep48-k _{med}	8421	0,23%	8454,00	8440	0,23%	8454,00	8440	0,23%	8449,00	8440	0,23%	8468,50
sep49-k _{med}	7101	0,37%	7128,62	7127	0,37%	7128,62	7117	0,23%	7132,25	7129	0,39%	7136,00
sep410-k _{med}	5355	0,39%	5376,00	5376	0,39%	5376,00	5371	0,30%	5378,00	5382	0,50%	5392,50
sep51-k _{med}	11205	0,52%	11263,50	11263	0,52%	11263,50	11260	0,49%	11263,75	11259	0,48%	11265,00
sep52-k _{med}	14418	0,45%	14486,50	14483	0,45%	14486,50	14480	0,43%	14491,25	14493	0,52%	14509,38
sep53-k _{med}	11476	0,38%	11521,50	11520	0,38%	11521,50	11520	0,38%	11525,00	11530	0,47%	11543,75
sep54-k _{med}	9944	0,31%	9975,00	9975	0,31%	9975,00	9975	0,31%	9980,62	9987	0,43%	9988,62
sep55-k _{med}	10880	0,57%	10942,00	10942	0,57%	10942,00	10931	0,47%	10938,38	10938	0,53%	10947,75
sep56-k _{med}	10581	0,51%	10635,00	10635	0,51%	10635,00	10621	0,38%	10631,62	10638	0,54%	10651,00
sep57-k _{med}	14919	0,57%	15007,75	15004	0,57%	15007,75	14998	0,53%	15005,62	15015	0,64%	15034,38
sep58-k _{med}	10622	0,61%	10698,75	10687	0,61%	10698,75	10692	0,66%	10705,75	10704	0,77%	10730,75
sep59-k _{med}	11042	0,46%	11093,00	11093	0,46%	11093,00	11087	0,41%	11092,25	11090	0,43%	11096,12
sep510-k _{med}	12436	0,39%	12484,00	12484	0,39%	12484,00	12482	0,37%	12492,62	12483	0,38%	12497,12
sep61-k _{med}	7653	0,52%	7705,75	7693	0,52%	7705,75	7693	0,52%	7696,50	7692	0,51%	7719,75
sep62-k _{med}	6739	0,58%	6785,12	6778	0,58%	6785,12	6778	0,58%	6784,75	6792	0,79%	6796,62
sep63-k _{med}	8309	0,81%	8378,88	8376	0,81%	8378,88	8372	0,76%	8379,25	8373	0,77%	8398,62
sep64-k _{med}	8546	0,80%	8614,00	8614	0,80%	8614,00	8591	0,53%	8603,00	8600	0,63%	8620,50
sep65-k _{med}	9038	0,50%	9094,25	9083	0,50%	9094,25	9083	0,50%	9094,00	9083	0,50%	9100,88
sepal-k _{med}	21227	0,47%	21334,00	21327	0,47%	21334,00	21333	0,50%	21343,12	21344	0,55%	21364,38
sepa2-k _{med}	21739	0,37%	21844,25	21820	0,37%	21844,25	21820	0,37%	21837,12	21844	0,48%	21861,25
sepa3-k _{med}	20095	0,30%	20173,75	20155	0,30%	20173,75	20155	0,30%	20176,75	20171	0,38%	20190,12
sepa4-k _{med}	22865	0,58%	23007,00	22997	0,58%	23007,00	22975	0,48%	23002,25	22990	0,55%	23023,25
sepa5-k _{med}	18643	0,34%	18720,88	18707	0,34%	18720,88	18704	0,33%	18727,50	18724	0,43%	18750,88
sepb1-k _{med}	29222	0,11%	29260,38	29253	0,11%	29260,38	29237	0,05%	29255,38	29252	0,10%	29277,38
sepb2-k _{med}	28112	0,27%	28203,62	28187	0,27%	28203,62	28186	0,26%	28199,62	28194	0,29%	28227,88
sepb3-k _{med}	27872	0,30%	27972,50	27955	0,30%	27972,50	27942	0,25%	27958,75	27970	0,35%	27994,25
sepb4-k _{med}	25678	0,25%	25765,88	25742	0,25%	25765,88	25758	0,31%	25779,25	25790	0,44%	25807,38
sepb5-k _{med}	28203	0,39%	28333,50	28312	0,39%	28333,50	28297	0,33%	28319,38	28331	0,45%	28354,25
sepc1-k _{med}	32659	0,36%	32804,88	32776	0,36%	32804,88	32769	0,34%	32808,00	32803	0,44%	32845,75
sepc2-k _{med}	32765	0,33%	32896,00	32873	0,33%	32896,00	32862	0,30%	32898,38	32884	0,36%	32920,12
sepc3-k _{med}	34492	0,45%	34666,25	34648	0,45%	34666,25	34614	0,35%	34654,12	34659	0,48%	34694,12
sepc4-k _{med}	31366	0,42%	31518,50	31499	0,42%	31518,50	31492	0,40%	31514,50	31538	0,55%	31558,00
sepc5-k _{med}	30060	0,45%	30215,75	30196	0,45%	30215,75	30179	0,40%	30222,00	30222	0,54%	30266,00
sepd1-k _{med}	38991	0,40%	39170,38	39147	0,40%	39170,38	39128	0,35%	39165,62	39203	0,54%	39216,88
sepd2-k _{med}	39030	0,23%	39139,00	39118	0,23%	39139,00	39118	0,23%	39135,62	39152	0,31%	39174,88
sepd3-k _{med}	39198	0,19%	39316,62	39272	0,19%	39316,62	39271	0,19%	39315,38	39322	0,32%	39359,50
sepd4-k _{med}	38781	0,25%	38897,62	38879	0,25%	38897,62	38864	0,21%	38887,75	38890	0,28%	38926,00
sepd5-k _{med}	40321	0,22%	40446,00	40409	0,22%	40446,00	40426	0,26%	40454,38	40444	0,31%	40480,00

Tabela G.2: Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP (instâncias do grupo k_{med})

Instância	CPLEX			LAGRASP(0,1,-)			LAGRASP(0,25,1,5)			LAGRASP(0,50,10,5)		
	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média
sep41-k _{max}	18265	0,15%	18294,00	18290	0,14%	18292,00	18290	0,14%	18292,00	18290	0,14%	18306,00
sep42-k _{max}	12360	0,36%	12407,50	12403	0,35%	12412,00	12403	0,35%	12412,00	12417	0,46%	12437,75
sep43-k _{max}	10396	0,10%	10408,62	10405	0,09%	10409,62	10405	0,09%	10409,62	10420	0,23%	10420,00
sep44-k _{max}	10393	0,43%	10443,38	10436	0,41%	10442,50	10436	0,41%	10442,50	10439	0,44%	10459,12
sep45-k _{max}	18856	0,00%	18856,00	18856	0,00%	18856,00	18856	0,00%	18856,00	18856	0,00%	18861,50
sep46-k _{max}	15394	0,27%	15438,00	15433	0,25%	15439,25	15433	0,25%	15439,25	15445	0,33%	15455,12
sep47-k _{max}	15233	0,35%	15286,00	15286	0,34%	15287,62	15285	0,34%	15287,62	15291	0,38%	15308,75
sep48-k _{max}	18602	0,25%	18655,62	18628	0,14%	18654,62	18628	0,14%	18654,62	18645	0,23%	18667,75
sep49-k _{max}	16558	0,20%	16599,50	16591	0,20%	16599,88	16591	0,20%	16599,88	16605	0,28%	16613,62
sep410-k _{max}	11607	0,18%	11631,00	11628	0,18%	11630,75	11628	0,18%	11630,75	11632	0,22%	11637,38
sep51-k _{max}	35663	0,27%	35773,88	35758	0,27%	35771,62	35758	0,27%	35771,62	35764	0,28%	35801,50
sep52-k _{max}	45396	0,08%	45474,88	45480	0,19%	45488,62	45480	0,19%	45488,62	45492	0,21%	45517,50
sep53-k _{max}	36329	0,19%	36410,38	36402	0,20%	36412,00	36402	0,20%	36412,00	36408	0,22%	36437,00
sep54-k _{max}	28017	0,12%	28063,50	28051	0,12%	28068,38	28051	0,12%	28068,38	28062	0,16%	28087,62
sep55-k _{max}	32779	0,30%	32894,12	32875	0,29%	32894,12	32875	0,29%	32894,12	32887	0,33%	32916,38
sep56-k _{max}	29608	0,22%	29678,25	29676	0,23%	29686,25	29676	0,23%	29686,25	29688	0,27%	29698,88
sep57-k _{max}	41930	0,11%	41992,88	41978	0,11%	41992,88	41961	0,07%	41991,88	41978	0,11%	41997,12
sep58-k _{max}	32320	0,32%	32429,12	32401	0,25%	32414,38	32401	0,25%	32414,38	32429	0,34%	32455,12
sep59-k _{max}	33584	0,24%	33680,25	33665	0,22%	33680,25	33665	0,22%	33680,25	33677	0,28%	33699,38
sep510-k _{max}	38709	0,28%	38841,50	38832	0,32%	38845,88	38832	0,32%	38845,88	38868	0,41%	38886,12
sep61-k _{max}	23516	0,23%	23586,25	23569	0,23%	23588,25	23569	0,23%	23588,25	23595	0,34%	23613,00
sep62-k _{max}	19934	0,48%	20050,62	20030	0,50%	20050,25	20030	0,50%	20050,25	20051	0,59%	20079,50
sep63-k _{max}	27983	0,16%	28032,50	28027	0,16%	28035,50	28027	0,16%	28035,50	28041	0,21%	28073,00
sep64-k _{max}	26442	0,36%	26544,50	26536	0,32%	26544,50	26527	0,32%	26544,50	26567	0,47%	26587,00
sep65-k _{max}	27069	0,21%	27138,25	27127	0,21%	27136,62	27127	0,21%	27136,62	27151	0,30%	27159,38
sep1-k _{max}	68522	0,23%	68719,00	68679	0,23%	68719,00	68694	0,25%	68715,75	68690	0,25%	68746,75
sep2-k _{max}	65842	0,21%	65996,50	65977	0,21%	65996,50	65974	0,20%	65998,12	65973	0,20%	66006,38
sep3-k _{max}	66829	0,28%	67069,50	67016	0,28%	67069,50	67036	0,31%	67062,88	67075	0,37%	67105,25
sep4-k _{max}	72334	0,27%	72549,88	72530	0,27%	72549,88	72524	0,26%	72549,88	72533	0,28%	72579,88
sep5-k _{max}	60491	0,22%	60681,75	60625	0,22%	60681,75	60643	0,25%	60689,62	60678	0,31%	60726,12
sep11-k _{max}	105506	0,12%	105644,88	105636	0,12%	105644,88	105623	0,11%	105646,25	105618	0,11%	105684,12
sep12-k _{max}	102922	0,13%	103095,62	103057	0,13%	103095,62	103072	0,15%	103094,62	103079	0,15%	103139,50
sep13-k _{max}	98280	0,17%	98481,38	98449	0,17%	98481,38	98451	0,17%	98485,50	98467	0,19%	98530,50
sep14-k _{max}	93777	0,06%	93879,00	93836	0,06%	93879,00	93859	0,09%	93886,62	93873	0,10%	93932,12
sep15-k _{max}	102810	0,09%	102943,50	102905	0,09%	102943,50	102905	0,09%	102945,12	102976	0,16%	103001,62
sep1-k _{max}	112471	0,17%	112715,62	112667	0,17%	112715,62	112687	0,19%	112725,12	112705	0,21%	112737,50
sep2-k _{max}	113916	0,20%	114191,50	114147	0,20%	114191,50	114139	0,20%	114177,25	114223	0,27%	114254,50
sep3-k _{max}	117416	0,23%	117714,50	117687	0,23%	117714,50	117704	0,25%	117733,00	117730	0,27%	117767,00
sep4-k _{max}	110823	0,24%	111134,25	111091	0,24%	111134,25	111069	0,22%	111126,00	111156	0,30%	111182,62
sep5-k _{max}	104610	0,16%	104643,25	104610	0,16%	104643,25	104588	0,14%	104613,88	104617	0,17%	104685,25
sep1-k _{max}	144887	0,12%	145085,50	145062	0,12%	145085,50	145054	0,12%	145085,50	145069	0,13%	145141,00
sep2-k _{max}	144096	0,10%	144264,50	144246	0,10%	144264,50	144204	0,07%	144256,62	144270	0,12%	144310,00
sep3-k _{max}	140474	0,16%	140721,75	140701	0,16%	140721,75	140679	0,15%	140723,00	140714	0,17%	140764,38
sep4-k _{max}	143513	0,05%	143636,62	143582	0,05%	143636,62	143645	0,09%	143667,88	143685	0,12%	143706,38
sep5-k _{max}	146307	0,11%	146497,88	146462	0,11%	146497,88	146474	0,11%	146503,88	146495	0,13%	146561,00

Tabela G.3: Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP (instâncias do grupo k_{max})

Instância	LAGRASP(0, 1, -)	LAGRASP(0.25, 1, 5)	LAGRASP(0.50, 10, 5)
scp41-k _{min}	4,70	13,41	2,71
scp42-k _{min}	5,79	11,42	2,41
scp43-k _{min}	5,20	16,02	2,74
scp44-k _{min}	14,57	40,83	8,48
scp45-k _{min}	7,42	26,30	3,88
scp46-k _{min}	4,62	14,29	2,67
scp47-k _{min}	9,11	39,88	7,30
scp48-k _{min}	3,71	11,72	2,24
scp49-k _{min}	5,08	15,83	2,92
scp410-k _{min}	15,17	34,55	6,78
scp51-k _{min}	6,67	22,33	3,98
scp52-k _{min}	4,69	16,42	3,21
scp53-k _{min}	4,16	14,12	2,69
scp54-k _{min}	5,74	18,19	3,16
scp55-k _{min}	11,36	31,11	5,38
scp56-k _{min}	5,72	21,71	4,09
scp57-k _{min}	5,51	23,98	3,93
scp58-k _{min}	9,43	26,41	5,15
scp59-k _{min}	4,08	13,30	2,70
scp510-k _{min}	7,03	26,49	4,46
scp61-k _{min}	2,50	8,10	1,68
scp62-k _{min}	3,16	8,96	1,96
scp63-k _{min}	2,42	8,22	1,64
scp64-k _{min}	2,14	6,42	1,53
scp65-k _{min}	3,15	9,50	1,97
scpa1-k _{min}	8,62	34,64	6,50
scpa2-k _{min}	9,12	32,29	6,97
scpa3-k _{min}	8,30	25,12	5,64
scpa4-k _{min}	13,17	40,83	7,66
scpa5-k _{min}	8,34	28,74	5,83
scpb1-k _{min}	7,27	25,00	6,14
scpb2-k _{min}	7,51	24,96	7,05
scpb3-k _{min}	7,58	23,57	5,77
scpb4-k _{min}	7,91	26,26	7,13
scpb5-k _{min}	9,94	30,81	7,59
scpc1-k _{min}	18,10	65,01	13,47
scpc2-k _{min}	15,39	53,06	12,34
scpc3-k _{min}	18,92	62,40	12,11
scpc4-k _{min}	20,81	66,01	14,82
scpc5-k _{min}	15,13	56,21	12,84
scpd1-k _{min}	11,26	34,75	10,35
scpd2-k _{min}	12,13	38,36	9,92
scpd3-k _{min}	14,70	46,80	13,33
scpd4-k _{min}	13,39	41,39	9,48
scpd5-k _{min}	13,37	41,14	13,76

Tabela G.4: Tempos de processamento de LAGRASP (instâncias do grupo k_{min})

Instância	LAGRASP(0, 1, -)	LAGRASP(0.25, 1, 5)	LAGRASP(0.50, 10, 5)
scp41-k _{med}	14,70	41,45	6,97
scp42-k _{med}	15,40	42,80	7,10
scp43-k _{med}	12,91	35,28	6,26
scp44-k _{med}	7,50	25,14	4,64
scp45-k _{med}	15,88	45,40	7,88
scp46-k _{med}	11,58	31,89	6,04
scp47-k _{med}	15,24	46,10	7,25
scp48-k _{med}	13,26	38,10	6,28
scp49-k _{med}	13,53	37,52	6,94
scp410-k _{med}	15,43	40,37	6,95
scp51-k _{med}	32,71	90,22	17,38
scp52-k _{med}	41,02	110,84	21,08
scp53-k _{med}	38,68	109,39	20,01
scp54-k _{med}	39,06	99,69	20,80
scp55-k _{med}	37,24	106,13	19,06
scp56-k _{med}	34,18	98,10	18,51
scp57-k _{med}	39,53	120,91	22,08
scp58-k _{med}	32,36	88,16	15,89
scp59-k _{med}	38,61	104,53	19,12
scp510-k _{med}	47,28	108,71	20,79
scp61-k _{med}	20,27	55,34	10,74
scp62-k _{med}	17,98	52,66	10,56
scp63-k _{med}	26,67	73,31	11,19
scp64-k _{med}	23,76	78,28	13,44
scp65-k _{med}	28,08	73,76	13,79
scpa1-k _{med}	117,51	343,41	69,72
scpa2-k _{med}	117,47	341,79	68,31
scpa3-k _{med}	125,67	359,80	71,48
scpa4-k _{med}	116,58	346,08	70,84
scpa5-k _{med}	106,12	319,16	63,94
scpb1-k _{med}	284,74	757,37	149,04
scpb2-k _{med}	264,29	700,02	132,62
scpb3-k _{med}	232,92	646,88	120,23
scpb4-k _{med}	264,82	686,47	131,88
scpb5-k _{med}	213,00	654,76	127,89
scpc1-k _{med}	247,89	741,04	179,38
scpc2-k _{med}	262,12	787,15	164,70
scpc3-k _{med}	267,48	802,82	167,39
scpc4-k _{med}	240,44	750,35	166,18
scpc5-k _{med}	229,06	705,23	140,02
scpd1-k _{med}	490,95	1347,91	261,54
scpd2-k _{med}	502,78	1447,46	235,44
scpd3-k _{med}	423,59	1106,17	219,89
scpd4-k _{med}	486,69	1387,64	250,26
scpd5-k _{med}	414,28	1180,03	257,08

Tabela G.5: Tempos de processamento de LAGRASP (instâncias do grupo k_{med})

Instância	LAGRASP(0, 1, -)	LAGRASP(0.25, 1, 5)	LAGRASP(0.50, 10, 5)
scp41-k _{max}	39,60	110,41	15,72
scp42-k _{max}	17,84	47,13	9,37
scp43-k _{max}	23,28	59,56	10,09
scp44-k _{max}	15,08	43,92	7,87
scp45-k _{max}	120,42	261,39	42,51
scp46-k _{max}	28,65	76,51	13,28
scp47-k _{max}	18,26	54,50	10,83
scp48-k _{max}	25,04	65,98	11,82
scp49-k _{max}	25,20	60,61	11,90
scp410-k _{max}	25,70	68,83	11,66
scp51-k _{max}	78,40	195,85	39,87
scp52-k _{max}	109,51	283,10	52,52
scp53-k _{max}	74,87	210,93	36,57
scp54-k _{max}	75,09	202,54	34,61
scp55-k _{max}	71,65	189,38	37,09
scp56-k _{max}	74,43	209,03	37,83
scp57-k _{max}	100,86	269,39	50,03
scp58-k _{max}	76,75	198,11	34,32
scp59-k _{max}	82,07	214,49	39,84
scp510-k _{max}	77,09	189,21	37,12
scp61-k _{max}	78,34	182,14	32,15
scp62-k _{max}	46,79	116,81	20,70
scp63-k _{max}	49,20	120,59	21,21
scp64-k _{max}	37,03	94,39	16,92
scp65-k _{max}	51,66	136,51	24,45
scpa1-k _{max}	263,35	726,51	128,92
scpa2-k _{max}	285,41	711,40	136,88
scpa3-k _{max}	238,52	616,59	113,86
scpa4-k _{max}	280,76	694,88	136,89
scpa5-k _{max}	229,66	545,28	102,25
scpb1-k _{max}	789,84	2012,02	332,91
scpb2-k _{max}	718,24	1861,43	289,75
scpb3-k _{max}	603,66	1504,82	245,76
scpb4-k _{max}	564,60	1362,25	234,28
scpb5-k _{max}	895,07	1938,95	325,80
scpc1-k _{max}	783,83	2109,94	391,19
scpc2-k _{max}	624,57	1610,53	292,10
scpc3-k _{max}	610,17	1582,08	303,66
scpc4-k _{max}	753,53	1794,35	329,79
scpc5-k _{max}	609,42	1686,59	296,40
scpd1-k _{max}	1633,67	4458,16	762,39
scpd2-k _{max}	1886,51	4663,61	715,29
scpd3-k _{max}	1489,04	3640,93	608,99
scpd4-k _{max}	1712,43	4462,87	742,79
scpd5-k _{max}	1444,27	3516,08	604,14

Tabela G.6: Tempos de processamento de LAGRASP (instâncias do grupo k_{max})

Instância	CPLEX				LAGRASP(0,1,-)				LAGRASP(0,25,1,5)				LAGRASP(0,50,10,5)			
	limite inferior	gap dual.(%)	dif.(%)	gap dual.(%)	limite inferior	dif.(%)	gap dual.(%)	gap dual.(%)	limite inferior	dif.(%)	gap dual.(%)	gap dual.(%)	limite inferior	dif.(%)	gap dual.(%)	
sep41-k _{min}	1148,00	0,00%	0,65%	0,91%	1140,57	0,00%	0,65%	0,91%	1140,77	0,63%	0,83%	0,83%	1140,74	0,63%	0,82%	
sep42-k _{min}	1205,00	0,00%	0,00%	0,00%	1204,99	0,00%	0,00%	0,00%	1204,96	0,00%	0,00%	0,00%	1204,99	0,00%	0,00%	
sep43-k _{min}	1213,00	0,00%	0,56%	0,82%	1206,15	0,00%	0,56%	0,82%	1206,74	0,52%	0,68%	0,68%	1206,70	0,52%	0,70%	
sep44-k _{min}	1185,00	0,00%	0,20%	0,20%	1182,60	0,00%	0,20%	0,20%	1182,65	0,20%	0,20%	0,20%	1182,75	0,19%	0,19%	
sep45-k _{min}	1266,00	0,00%	0,36%	0,36%	1261,43	0,00%	0,36%	0,36%	1261,31	0,37%	0,38%	0,38%	1261,77	0,33%	0,34%	
sep46-k _{min}	1349,00	0,00%	0,42%	0,42%	1343,38	0,00%	0,42%	0,42%	1343,39	0,42%	0,42%	0,42%	1343,47	0,41%	0,41%	
sep47-k _{min}	1115,00	0,00%	0,15%	0,15%	1113,28	0,00%	0,15%	0,15%	1113,31	0,15%	0,15%	0,15%	1113,17	0,16%	0,16%	
sep48-k _{min}	1225,00	0,00%	1,09%	1,18%	1211,66	0,00%	1,09%	1,18%	1211,69	1,09%	1,11%	1,11%	1211,70	1,09%	1,18%	
sep49-k _{min}	1485,00	0,00%	0,07%	0,07%	1484,00	0,00%	0,07%	0,07%	1484,01	0,07%	0,07%	0,07%	1484,02	0,07%	0,07%	
sep410-k _{min}	1356,00	0,00%	0,20%	0,20%	1353,32	0,00%	0,20%	0,20%	1353,63	0,17%	0,17%	0,17%	1353,64	0,17%	0,17%	
sep51-k _{min}	579,00	0,00%	0,23%	0,23%	577,69	0,00%	0,23%	0,23%	577,69	0,23%	0,23%	0,23%	577,72	0,22%	0,22%	
sep52-k _{min}	677,00	0,00%	1,44%	1,76%	667,25	0,00%	1,44%	1,76%	667,28	1,44%	1,76%	1,76%	667,31	1,43%	2,06%	
sep53-k _{min}	574,00	0,00%	0,67%	1,03%	570,16	0,00%	0,67%	1,03%	570,17	0,67%	1,02%	1,02%	570,18	0,67%	1,03%	
sep54-k _{min}	582,00	0,00%	0,80%	1,87%	577,35	0,00%	0,80%	1,87%	577,38	0,79%	1,67%	1,67%	577,40	0,79%	2,23%	
sep55-k _{min}	550,00	0,00%	0,36%	0,36%	548,04	0,00%	0,36%	0,36%	548,18	0,33%	0,33%	0,33%	547,95	0,37%	0,37%	
sep56-k _{min}	560,00	0,00%	0,62%	0,63%	556,51	0,00%	0,62%	0,63%	556,77	0,58%	0,58%	0,58%	556,87	0,56%	0,56%	
sep57-k _{min}	695,00	0,00%	0,43%	0,57%	692,02	0,00%	0,43%	0,57%	691,99	0,43%	0,43%	0,43%	692,03	0,43%	0,44%	
sep58-k _{min}	662,00	0,00%	0,21%	0,21%	660,60	0,00%	0,21%	0,21%	660,64	0,21%	0,21%	0,21%	660,67	0,20%	0,40%	
sep59-k _{min}	687,00	0,00%	0,96%	1,27%	680,38	0,00%	0,96%	1,27%	680,44	0,95%	1,11%	1,11%	680,46	0,95%	1,11%	
sep510-k _{min}	672,00	0,00%	2,39%	2,45%	668,92	0,00%	2,39%	2,45%	668,94	0,46%	0,46%	0,46%	668,98	0,45%	0,45%	
sep61-k _{min}	283,00	0,00%	1,84%	1,87%	276,24	0,00%	1,84%	1,87%	276,32	2,42%	2,42%	2,42%	276,33	2,36%	2,41%	
sep62-k _{min}	302,00	0,00%	1,32%	1,33%	296,45	0,00%	1,32%	1,33%	296,45	1,84%	1,87%	1,87%	296,51	1,82%	1,85%	
sep63-k _{min}	313,00	0,00%	2,22%	2,97%	308,88	0,00%	2,22%	2,97%	308,87	1,32%	1,34%	1,34%	309,13	1,24%	1,25%	
sep64-k _{min}	292,00	0,00%	1,74%	1,85%	285,53	0,00%	1,74%	1,85%	285,55	2,21%	2,96%	2,96%	285,63	2,18%	2,93%	
sep65-k _{min}	353,00	0,00%	1,96%	2,18%	346,86	0,00%	1,96%	2,18%	346,77	1,76%	1,84%	1,84%	346,91	1,73%	2,05%	
sep61-k _{min}	562,00	0,00%	1,48%	1,51%	551,00	0,00%	1,48%	1,51%	550,97	1,96%	2,18%	2,18%	550,96	1,96%	2,22%	
sep62-k _{min}	524,00	0,00%	1,32%	1,72%	517,10	0,00%	1,32%	1,72%	517,10	1,44%	1,46%	1,46%	517,14	1,45%	1,47%	
sep63-k _{min}	527,00	0,00%	1,02%	1,03%	521,64	0,00%	1,02%	1,03%	521,60	1,32%	1,36%	1,36%	521,62	1,31%	1,72%	
sep65-k _{min}	557,00	0,00%	1,13%	1,70%	550,72	0,00%	1,13%	1,70%	550,73	1,02%	1,04%	1,04%	550,71	1,02%	1,03%	
sep61-k _{min}	149,00	0,00%	5,81%	6,16%	140,35	0,00%	5,81%	6,16%	140,40	5,77%	6,16%	6,16%	140,47	5,72%	6,19%	
sep62-k _{min}	150,00	0,00%	4,02%	4,94%	143,97	0,00%	4,02%	4,94%	143,99	4,01%	4,88%	4,88%	143,95	4,03%	5,59%	
sep63-k _{min}	165,00	0,00%	3,44%	4,18%	159,33	0,00%	3,44%	4,18%	159,33	3,44%	4,18%	4,18%	159,36	3,42%	5,42%	
sep64-k _{min}	157,00	0,00%	4,90%	5,15%	149,31	0,00%	4,90%	5,15%	149,31	4,90%	5,15%	5,15%	149,33	4,89%	5,82%	
sep65-k _{min}	151,00	0,00%	3,56%	5,75%	145,63	0,00%	3,56%	5,75%	145,68	3,52%	5,71%	5,71%	145,71	3,50%	5,70%	
sep61-k _{min}	514,00	0,00%	1,90%	2,34%	504,21	0,00%	1,90%	2,34%	504,30	1,89%	2,32%	2,32%	504,26	1,89%	2,33%	
sep62-k _{min}	483,00	0,00%	2,13%	3,03%	472,70	0,00%	2,13%	3,03%	472,63	2,15%	3,04%	3,04%	472,67	2,14%	3,05%	
sep63-k _{min}	544,00	0,00%	2,70%	2,78%	529,29	0,00%	2,70%	2,78%	529,28	2,71%	2,78%	2,78%	529,39	2,69%	3,90%	
sep64-k _{min}	484,00	0,00%	1,64%	2,30%	476,06	0,00%	1,64%	2,30%	475,87	1,68%	2,17%	2,17%	475,95	1,66%	2,33%	
sep65-k _{min}	488,00	0,00%	2,17%	2,63%	477,43	0,00%	2,17%	2,63%	477,43	2,17%	2,63%	2,63%	477,44	2,16%	2,86%	
sep61-k _{min}	122,00	0,00%	4,16%	4,33%	116,93	0,00%	4,16%	4,33%	116,96	4,13%	4,31%	4,31%	116,98	4,11%	4,34%	
sep62-k _{min}	127,00	0,00%	4,20%	4,38%	121,67	0,00%	4,20%	4,38%	121,65	4,21%	4,39%	4,39%	121,66	4,20%	4,39%	
sep63-k _{min}	138,00	0,00%	3,26%	4,87%	133,50	0,00%	3,26%	4,87%	133,50	3,26%	4,87%	4,87%	133,51	3,25%	4,86%	
sep64-k _{min}	122,00	0,00%	4,93%	6,04%	115,99	0,00%	4,93%	6,04%	115,99	4,93%	6,04%	6,04%	115,94	4,97%	6,11%	
sep65-k _{min}	130,00	0,00%	4,76%	5,81%	123,81	0,00%	4,76%	5,81%	123,81	4,76%	5,81%	5,81%	123,64	4,89%	5,95%	

Tabela G.7: Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP sobre os limites inferiores e gaps de dualidade (instâncias do grupo k_{min})

Instância	CPLEX			LAGRASP(0, 1, -)			LAGRASP(0.25, 1, 5)			LAGRASP(0.50, 10, 5)		
	limite inferior	gap dual.(%)	dif.(%)	limite inferior	dif.(%)	gap dual.(%)	limite inferior	dif.(%)	gap dual.(%)	limite inferior	dif.(%)	gap dual.(%)
sep41-k _{med}	8350,00	0,00%	0,33%	8322,33	0,33%	0,63%	8322,35	0,33%	0,52%	8322,37	0,33%	0,63%
sep42-k _{med}	6111,00	0,00%	0,37%	6088,37	0,37%	0,49%	6088,59	0,37%	0,48%	6088,71	0,36%	0,48%
sep43-k _{med}	4676,00	0,00%	0,37%	4658,84	0,37%	0,71%	4658,89	0,37%	0,71%	4659,12	0,36%	0,67%
sep44-k _{med}	4670,00	0,00%	0,50%	4646,77	0,50%	0,97%	4647,12	0,49%	0,80%	4647,25	0,49%	0,95%
sep45-k _{med}	8389,00	0,00%	0,24%	8368,66	0,24%	0,66%	8369,29	0,23%	0,59%	8369,93	0,23%	0,58%
sep46-k _{med}	6416,00	0,00%	0,58%	6378,79	0,58%	1,18%	6378,79	0,58%	1,12%	6378,98	0,58%	1,29%
sep47-k _{med}	6281,00	0,00%	0,18%	6269,76	0,18%	0,26%	6269,74	0,18%	0,26%	6269,77	0,18%	0,31%
sep48-k _{med}	8421,00	0,00%	0,33%	8393,10	0,33%	0,56%	8393,10	0,33%	0,56%	8393,19	0,33%	0,56%
sep49-k _{med}	7101,00	0,00%	0,40%	7072,57	0,40%	0,77%	7072,79	0,40%	0,63%	7072,82	0,40%	0,80%
sep410-k _{med}	5355,00	0,00%	0,31%	5338,59	0,31%	0,70%	5338,61	0,31%	0,61%	5338,83	0,30%	0,81%
sep51-k _{med}	11205,00	0,00%	0,26%	11175,55	0,26%	0,78%	11175,73	0,26%	0,76%	11175,77	0,26%	0,74%
sep52-k _{med}	14418,00	0,00%	0,20%	14389,11	0,20%	0,65%	14389,28	0,20%	0,63%	14389,21	0,20%	0,72%
sep53-k _{med}	11476,00	0,00%	0,19%	11453,80	0,19%	0,58%	11454,00	0,19%	0,58%	11454,30	0,19%	0,66%
sep54-k _{med}	9944,00	0,00%	0,25%	9919,28	0,25%	0,56%	9919,28	0,25%	0,56%	9919,13	0,25%	0,68%
sep55-k _{med}	10880,00	0,00%	0,21%	10856,99	0,21%	0,78%	10857,17	0,21%	0,68%	10857,18	0,21%	0,75%
sep56-k _{med}	10581,00	0,00%	0,29%	10550,16	0,29%	0,80%	10550,22	0,29%	0,67%	10550,24	0,29%	0,83%
sep57-k _{med}	14919,00	0,00%	0,24%	14882,81	0,24%	0,82%	14882,87	0,24%	0,78%	14882,85	0,24%	0,89%
sep58-k _{med}	10622,00	0,00%	0,35%	10584,68	0,35%	0,97%	10584,68	0,35%	1,02%	10584,85	0,35%	1,13%
sep59-k _{med}	11042,00	0,00%	0,21%	11018,30	0,21%	0,68%	11018,35	0,21%	0,63%	11018,42	0,21%	0,65%
sep510-k _{med}	12436,00	0,00%	0,27%	12402,63	0,27%	0,66%	12402,81	0,27%	0,64%	12402,78	0,27%	0,65%
sep61-k _{med}	7653,00	0,00%	1,07%	7570,98	1,07%	1,61%	7571,02	1,07%	1,61%	7571,24	1,07%	1,88%
sep62-k _{med}	6739,00	0,00%	1,07%	6666,61	1,07%	1,67%	6666,00	1,08%	1,69%	6666,07	1,08%	1,90%
sep63-k _{med}	8309,00	0,00%	0,59%	8260,07	0,59%	1,41%	8260,07	0,59%	1,36%	8260,00	0,59%	1,37%
sep64-k _{med}	8546,00	0,00%	0,82%	8475,93	0,82%	1,63%	8477,65	0,80%	1,34%	8478,09	0,79%	1,44%
sep65-k _{med}	9038,00	0,00%	0,72%	8972,84	0,72%	1,23%	8972,84	0,72%	1,23%	8973,29	0,72%	1,23%
sep1-k _{med}	21156,95	0,33%	0,14%	21127,74	0,14%	0,94%	21127,86	0,14%	0,97%	21127,93	0,14%	1,02%
sep2-k _{med}	21695,13	0,20%	0,14%	21664,53	0,14%	0,72%	21664,37	0,14%	0,72%	21664,56	0,14%	0,83%
sep3-k _{med}	20061,50	0,17%	0,15%	20031,07	0,15%	0,62%	20031,07	0,15%	0,62%	20031,01	0,15%	0,70%
sep4-k _{med}	22821,48	0,19%	0,15%	22787,39	0,15%	0,92%	22787,23	0,15%	0,82%	22787,31	0,15%	0,89%
sep5-k _{med}	18595,04	0,26%	0,16%	18565,21	0,16%	0,77%	18565,21	0,16%	0,75%	18565,26	0,16%	0,86%
sep11-k _{med}	28984,77	0,81%	0,07%	28965,26	0,07%	0,99%	28965,26	0,07%	0,94%	28965,14	0,07%	0,99%
sep2-k _{med}	27940,10	0,61%	0,07%	27921,60	0,07%	0,95%	27921,61	0,07%	0,95%	27922,08	0,06%	0,98%
sep3-k _{med}	27695,63	0,63%	0,07%	27677,36	0,07%	1,00%	27677,42	0,07%	0,96%	27677,46	0,07%	1,06%
sep4-k _{med}	25942,89	0,53%	0,09%	25920,93	0,09%	0,87%	25921,29	0,08%	0,94%	25921,40	0,08%	1,05%
sep5-k _{med}	28067,36	0,48%	0,07%	28048,29	0,07%	0,94%	28048,15	0,07%	0,89%	28048,40	0,07%	1,01%
sep1-k _{med}	32448,18	0,65%	0,07%	32424,75	0,07%	1,08%	32424,69	0,07%	1,06%	32424,80	0,07%	1,17%
sep2-k _{med}	32556,89	0,64%	0,07%	32533,05	0,07%	1,05%	32532,98	0,07%	1,01%	32533,02	0,07%	1,08%
sep3-k _{med}	34261,18	0,67%	0,08%	34233,19	0,08%	1,21%	34232,99	0,08%	1,12%	34233,21	0,08%	1,25%
sep4-k _{med}	31183,45	0,58%	0,09%	31156,55	0,09%	1,10%	31156,94	0,09%	1,07%	31156,30	0,09%	1,23%
sep5-k _{med}	29886,13	0,58%	0,09%	29860,04	0,09%	1,13%	29859,88	0,09%	1,08%	29859,76	0,09%	1,21%
sep1-k _{med}	38734,54	0,66%	0,04%	38718,31	0,04%	1,11%	38718,04	0,04%	1,06%	38718,34	0,04%	1,25%
sep2-k _{med}	38770,96	0,66%	0,03%	38758,77	0,03%	0,93%	38758,82	0,03%	0,93%	38758,98	0,03%	1,01%
sep3-k _{med}	38919,32	0,71%	0,04%	38905,51	0,04%	0,94%	38905,61	0,04%	0,94%	38905,47	0,04%	1,07%
sep4-k _{med}	38537,49	0,63%	0,04%	38522,83	0,04%	0,93%	38522,90	0,04%	0,89%	38522,78	0,04%	0,95%
sep5-k _{med}	40064,42	0,64%	0,04%	40048,65	0,04%	0,90%	40048,80	0,04%	0,94%	40049,22	0,04%	0,99%

Tabela G.8: Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP sobre os limites inferiores e gaps de dualidade (instâncias do grupo k_{med})

Instância	CPLEX				LAGRASP(0, 1, -)				LAGRASP(0,25, 1, 5)				LAGRASP(0,50, 10, 5)			
	limite inferior	gap dual.(%)	dif.(%)	gap dual.(%)	limite inferior	dif.(%)	gap dual.(%)	gap dual.(%)	limite inferior	dif.(%)	gap dual.(%)	gap dual.(%)	limite inferior	dif.(%)	gap dual.(%)	
sep41-k _{max}	18265,00	0,00%	0,04%	0,19%	18257,45	0,04%	0,19%	0,18%	18257,40	0,04%	0,18%	0,18%	18257,83	0,04%	0,18%	
sep42-k _{max}	12360,00	0,00%	0,26%	0,63%	12327,86	0,26%	0,63%	0,61%	12327,90	0,26%	0,61%	0,26%	12327,88	0,26%	0,72%	
sep43-k _{max}	10396,00	0,00%	0,13%	0,22%	10382,86	0,13%	0,22%	0,21%	10382,96	0,13%	0,21%	0,13%	10382,92	0,13%	0,36%	
sep44-k _{max}	10393,00	0,00%	0,43%	0,86%	10348,79	0,43%	0,86%	0,84%	10348,85	0,42%	0,84%	0,42%	10348,89	0,42%	0,87%	
sep45-k _{max}	18856,00	0,00%	0,05%	0,05%	18846,46	0,05%	0,05%	0,05%	18846,34	0,05%	0,05%	0,05%	18847,16	0,05%	0,05%	
sep46-k _{max}	15394,00	0,00%	0,21%	0,48%	15361,77	0,21%	0,48%	0,47%	15361,85	0,21%	0,47%	0,21%	15362,22	0,21%	0,55%	
sep47-k _{max}	15233,00	0,00%	0,21%	0,56%	15201,26	0,21%	0,56%	0,55%	15201,36	0,21%	0,55%	0,21%	15201,57	0,21%	0,59%	
sep48-k _{max}	18602,00	0,00%	0,14%	0,40%	18575,65	0,14%	0,40%	0,39%	18575,73	0,14%	0,39%	0,28%	18575,87	0,14%	0,37%	
sep49-k _{max}	16558,00	0,00%	0,17%	0,37%	16530,51	0,17%	0,37%	0,37%	16530,44	0,17%	0,37%	0,37%	16530,63	0,17%	0,45%	
sep410-k _{max}	11607,00	0,00%	0,18%	0,36%	11585,87	0,18%	0,36%	0,36%	11586,08	0,18%	0,36%	0,36%	11586,12	0,18%	0,40%	
sep51-k _{max}	35663,00	0,00%	0,13%	0,40%	35617,90	0,13%	0,40%	0,39%	35617,91	0,13%	0,39%	0,39%	35617,91	0,13%	0,41%	
sep52-k _{max}	45396,00	0,00%	0,07%	0,15%	45365,91	0,07%	0,15%	0,15%	45365,94	0,07%	0,15%	0,25%	45366,15	0,07%	0,28%	
sep53-k _{max}	36329,00	0,00%	0,11%	0,30%	36290,31	0,11%	0,30%	0,30%	36290,60	0,11%	0,31%	0,31%	36290,48	0,11%	0,32%	
sep54-k _{max}	28017,00	0,00%	0,12%	0,24%	27983,53	0,12%	0,24%	0,24%	27983,64	0,12%	0,24%	0,24%	27983,80	0,12%	0,28%	
sep55-k _{max}	32779,00	0,00%	0,13%	0,43%	32737,35	0,13%	0,43%	0,43%	32737,36	0,13%	0,42%	0,42%	32737,39	0,13%	0,46%	
sep56-k _{max}	29608,00	0,00%	0,14%	0,36%	29566,11	0,14%	0,36%	0,36%	29566,38	0,14%	0,37%	0,37%	29566,40	0,14%	0,41%	
sep57-k _{max}	41930,00	0,00%	0,08%	0,20%	41896,08	0,08%	0,20%	0,20%	41896,10	0,08%	0,15%	0,15%	41896,11	0,08%	0,20%	
sep58-k _{max}	32320,00	0,00%	0,12%	0,44%	32281,13	0,12%	0,44%	0,44%	32281,12	0,12%	0,37%	0,37%	32281,18	0,12%	0,46%	
sep59-k _{max}	33584,00	0,00%	0,10%	0,34%	33550,07	0,10%	0,34%	0,34%	33550,07	0,10%	0,32%	0,32%	33550,14	0,10%	0,38%	
sep510-k _{max}	38709,00	0,00%	0,11%	0,39%	38667,28	0,11%	0,39%	0,39%	38667,22	0,11%	0,43%	0,43%	38667,14	0,11%	0,52%	
sep61-k _{max}	23476,92	0,17%	0,30%	0,70%	23406,09	0,30%	0,70%	0,70%	23405,48	0,30%	0,70%	0,70%	23406,40	0,30%	0,81%	
sep62-k _{max}	19934,00	0,00%	0,38%	0,87%	19858,07	0,38%	0,87%	0,87%	19857,83	0,38%	0,89%	0,89%	19857,93	0,38%	0,97%	
sep63-k _{max}	27983,00	0,00%	0,22%	0,38%	27922,06	0,22%	0,38%	0,38%	27921,98	0,22%	0,38%	0,38%	27922,34	0,22%	0,43%	
sep64-k _{max}	26442,00	0,00%	0,27%	0,63%	26370,00	0,27%	0,63%	0,63%	26369,89	0,27%	0,60%	0,60%	26370,25	0,27%	0,75%	
sep65-k _{max}	27069,00	0,00%	0,30%	0,51%	26988,96	0,30%	0,51%	0,51%	26988,40	0,30%	0,52%	0,52%	26989,11	0,30%	0,60%	
sep1-k _{max}	68437,47	0,12%	0,05%	0,40%	68403,52	0,05%	0,40%	0,40%	68403,54	0,05%	0,42%	0,42%	68403,47	0,05%	0,47%	
sep2-k _{max}	65796,92	0,07%	0,06%	0,33%	65758,95	0,06%	0,33%	0,33%	65759,03	0,06%	0,33%	0,33%	65758,94	0,06%	0,33%	
sep3-k _{max}	66740,01	0,13%	0,05%	0,47%	66705,77	0,05%	0,47%	0,47%	66705,60	0,05%	0,50%	0,50%	66705,61	0,05%	0,55%	
sep4-k _{max}	72283,24	0,07%	0,06%	0,40%	72242,35	0,06%	0,40%	0,40%	72242,08	0,06%	0,39%	0,39%	72242,30	0,06%	0,40%	
sep5-k _{max}	60397,66	0,15%	0,07%	0,45%	60355,11	0,07%	0,45%	0,45%	60355,18	0,07%	0,48%	0,48%	60355,00	0,07%	0,54%	
sep11-k _{max}	105359,25	0,14%	0,03%	0,29%	105328,23	0,03%	0,29%	0,29%	105328,26	0,03%	0,28%	0,28%	105328,83	0,03%	0,28%	
sep2-k _{max}	102748,21	0,17%	0,03%	0,33%	102719,73	0,03%	0,33%	0,33%	102719,66	0,03%	0,34%	0,34%	102719,62	0,03%	0,35%	
sep3-k _{max}	98070,33	0,21%	0,03%	0,41%	98044,92	0,03%	0,41%	0,41%	98044,76	0,03%	0,41%	0,41%	98045,16	0,03%	0,43%	
sep4-k _{max}	93568,81	0,22%	0,03%	0,31%	93543,15	0,03%	0,31%	0,31%	93543,05	0,03%	0,34%	0,34%	93543,05	0,03%	0,35%	
sep5-k _{max}	102629,53	0,18%	0,04%	0,30%	102596,90	0,04%	0,30%	0,30%	102594,72	0,03%	0,30%	0,30%	102596,50	0,03%	0,37%	
sep1-k _{max}	112286,79	0,16%	0,03%	0,38%	112246,94	0,03%	0,38%	0,38%	112247,57	0,03%	0,39%	0,39%	112247,61	0,03%	0,41%	
sep2-k _{max}	113760,19	0,14%	0,03%	0,37%	113725,20	0,03%	0,37%	0,37%	113725,27	0,03%	0,36%	0,36%	113725,10	0,03%	0,44%	
sep3-k _{max}	117278,58	0,12%	0,03%	0,38%	117246,53	0,03%	0,38%	0,38%	117246,45	0,03%	0,39%	0,39%	117246,63	0,03%	0,41%	
sep4-k _{max}	110677,60	0,13%	0,03%	0,40%	110645,57	0,03%	0,40%	0,40%	110645,48	0,03%	0,38%	0,38%	110645,65	0,03%	0,46%	
sep5-k _{max}	104253,08	0,18%	0,02%	0,37%	104227,79	0,02%	0,37%	0,37%	104227,65	0,02%	0,35%	0,35%	104228,11	0,02%	0,37%	
sep1-k _{max}	144500,65	0,27%	0,02%	0,41%	144473,81	0,02%	0,41%	0,41%	144474,74	0,02%	0,40%	0,40%	144474,38	0,02%	0,44%	
sep2-k _{max}	143793,40	0,21%	0,02%	0,34%	143762,61	0,02%	0,34%	0,34%	143763,85	0,02%	0,31%	0,31%	143762,76	0,02%	0,35%	
sep3-k _{max}	140137,13	0,24%	0,01%	0,42%	140118,43	0,01%	0,42%	0,42%	140118,30	0,01%	0,40%	0,40%	140118,25	0,01%	0,43%	
sep4-k _{max}	143121,66	0,27%	0,02%	0,34%	143089,92	0,02%	0,34%	0,34%	143089,85	0,02%	0,39%	0,39%	143090,03	0,02%	0,42%	
sep5-k _{max}	145980,01	0,22%	0,02%	0,35%	145956,31	0,02%	0,35%	0,35%	145956,43	0,02%	0,36%	0,36%	145956,21	0,02%	0,37%	

Tabela G.9: Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP sobre os limites inferiores e gaps de dualidade (instâncias do grupo k_{max})

Instância	CPLEX			LAGRASP(0,1,-)			LAGRASP(0,25,1,5)			LAGRASP(0,50,10,5)		
	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média
scp41	429	0,00%	429,00	429	0,00%	429,00	429	0,00%	429,00	429	0,00%	429,00
scp42	512	0,00%	512,00	512	0,00%	512,00	512	0,00%	512,00	512	0,00%	512,00
scp43	516	0,00%	516,00	516	0,00%	516,00	516	0,00%	516,00	516	0,00%	516,00
scp44	494	0,20%	495,00	494	0,20%	495,00	494	0,00%	494,88	495	0,20%	495,00
scp45	512	0,00%	512,00	512	0,00%	512,00	512	0,00%	512,00	512	0,00%	512,00
scp46	560	0,18%	561,00	560	0,18%	561,00	560	0,00%	560,00	560	0,00%	560,38
scp47	430	0,00%	430,00	430	0,00%	430,00	430	0,00%	430,00	430	0,00%	430,00
scp48	492	0,20%	493,00	492	0,20%	493,00	492	0,00%	492,88	493	0,20%	493,00
scp49	641	0,00%	641,00	641	0,00%	641,00	641	0,00%	641,00	641	0,00%	641,00
scp410	514	0,00%	514,00	514	0,00%	514,00	514	0,00%	514,00	514	0,00%	514,00
scp51	253	0,00%	253,38	253	0,00%	253,38	253	0,00%	253,00	253	0,00%	253,62
scp52	302	0,00%	302,25	302	0,00%	302,25	302	0,00%	302,12	302	0,00%	302,75
scp53	226	0,00%	226,00	226	0,00%	226,00	226	0,00%	226,00	226	0,00%	226,00
scp54	242	0,00%	242,00	242	0,00%	242,00	242	0,00%	242,00	242	0,00%	242,00
scp55	211	0,00%	211,00	211	0,00%	211,00	211	0,00%	211,00	211	0,00%	211,00
scp56	213	0,00%	213,00	213	0,00%	213,00	213	0,00%	213,00	213	0,00%	213,00
scp57	293	0,34%	294,00	294	0,34%	294,00	293	0,00%	293,75	293	0,00%	293,75
scp58	288	0,00%	288,00	288	0,00%	288,00	288	0,00%	288,00	288	0,00%	288,00
scp59	279	0,00%	279,00	279	0,00%	279,00	279	0,00%	279,00	279	0,00%	279,00
scp510	265	0,00%	265,00	265	0,00%	265,00	265	0,00%	265,00	265	0,00%	265,00
scp61	138	1,45%	140,00	140	1,45%	140,00	140	1,45%	140,00	141	2,17%	141,50
scp62	146	0,00%	146,25	146	0,00%	146,25	146	0,00%	146,12	146	0,00%	147,38
scp63	145	0,00%	145,00	145	0,00%	145,00	145	0,00%	145,00	145	0,00%	145,00
scp64	131	0,00%	131,00	131	0,00%	131,00	131	0,00%	131,00	131	0,00%	131,00
scp65	161	0,62%	162,62	162	0,62%	162,62	161	0,00%	161,38	161	0,00%	162,62
scpa1	253	0,79%	255,00	255	0,79%	255,00	253	0,00%	254,12	255	0,79%	255,50
scpa2	252	0,79%	254,00	254	0,79%	254,00	253	0,40%	253,88	254	0,79%	254,25
scpa3	232	0,86%	234,00	234	0,86%	234,00	233	0,43%	233,75	234	0,86%	234,75
scpa4	234	0,00%	234,00	234	0,00%	234,00	234	0,00%	234,00	234	0,00%	234,00
scpa5	236	0,42%	237,00	237	0,42%	237,00	236	0,00%	236,75	236	0,00%	236,88
scpb1	69	1,45%	70,00	70	1,45%	70,00	69	0,00%	69,50	69	0,00%	69,62
scpb2	76	0,00%	76,00	76	0,00%	76,00	76	0,00%	76,00	76	0,00%	76,00
scpb3	80	0,00%	80,00	80	0,00%	80,00	80	0,00%	80,00	80	0,00%	80,62
scpb4	79	0,00%	79,00	79	0,00%	79,00	79	0,00%	79,00	79	0,00%	79,12
scpb5	72	0,00%	72,00	72	0,00%	72,00	72	0,00%	72,00	72	0,00%	72,00
scpc1	227	0,44%	228,00	228	0,44%	228,00	228	0,44%	228,50	229	0,88%	229,25
scpc2	219	0,00%	219,00	219	0,00%	219,00	219	0,00%	219,12	220	0,46%	221,25
scpc3	243	0,82%	245,00	245	0,82%	245,00	245	0,82%	245,00	245	0,82%	245,75
scpc4	222	1,37%	222,00	222	1,37%	222,00	221	0,91%	221,88	221	0,91%	222,38
scpc5	215	0,47%	216,00	216	0,47%	216,00	216	0,47%	216,00	216	0,47%	216,25
scpd1	60	0,00%	60,00	60	0,00%	60,00	60	0,00%	60,00	60	0,00%	60,00
scpd2	66	1,52%	67,00	67	1,52%	67,00	67	1,52%	67,00	67	1,52%	67,00
scpd3	72	1,39%	73,00	73	1,39%	73,00	72	0,00%	72,88	73	1,39%	73,00
scpd4	62	0,00%	62,25	62	0,00%	62,25	62	0,00%	62,12	62	0,00%	62,62
scpd5	61	3,28%	63,00	63	3,28%	63,00	61	0,00%	61,75	62	1,64%	62,75

Tabela G.10: Resultados detalhados dos experimentos com LAGRASP (instâncias do PCC(k=1))

Instância	LAGRASP(0, 1, -)	LAGRASP(0.25, 1, 5)	LAGRASP(0.50, 10, 5)
scp41	0,74	2,29	0,46
scp42	0,90	2,60	0,62
scp43	0,53	1,51	0,35
scp44	3,64	9,13	1,80
scp45	0,50	1,34	0,34
scp46	2,55	7,07	1,29
scp47	1,12	3,22	0,67
scp48	2,01	5,65	1,13
scp49	2,48	9,88	1,44
scp410	1,16	3,57	0,71
scp51	3,23	11,09	2,24
scp52	3,69	10,27	2,29
scp53	0,67	1,82	0,52
scp54	3,51	7,25	1,45
scp55	0,76	1,91	0,55
scp56	0,87	2,39	0,63
scp57	3,29	10,45	1,88
scp58	3,66	11,05	2,36
scp59	2,52	9,33	1,46
scp510	0,85	2,60	0,57
scp61	2,61	7,84	1,37
scp62	2,59	7,10	1,33
scp63	1,71	5,49	1,05
scp64	1,96	4,33	1,02
scp65	2,47	7,58	1,50
scpa1	10,87	22,98	5,81
scpa2	9,36	25,58	5,72
scpa3	8,40	18,95	4,33
scpa4	11,32	31,23	5,87
scpa5	12,19	35,32	7,06
scpb1	7,35	17,34	4,81
scpb2	6,26	15,65	3,67
scpb3	6,32	16,92	4,35
scpb4	5,83	18,80	5,67
scpb5	6,76	24,27	5,81
scpc1	11,62	44,04	9,78
scpc2	9,59	34,08	11,51
scpc3	10,95	51,66	12,06
scpc4	9,69	47,89	9,58
scpc5	8,30	31,68	8,05
scpd1	12,63	39,73	12,17
scpd2	10,02	32,10	11,21
scpd3	14,05	41,89	10,45
scpd4	11,15	46,83	9,50
scpd5	12,95	36,11	11,64

Tabela G.11: Tempos de processamento de LAGRASP (instâncias do PCC(k=1))

ANEXO H – Comparação das heurísticas LAGRASP e GRASP

Instância	CPLEX	LAGRASP(0.25, 1,5)			GPRb		
	custo	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média
scp41-k _{min}	1148	1151	0,26%	1151,50	1171	2,00%	1175,12
scp42-k _{min}	1205	1207	0,17%	1207,00	1225	1,66%	1235,88
scp43-k _{min}	1213	1215	0,16%	1215,38	1225	0,99%	1230,12
scp44-k _{min}	1185	1185	0,00%	1186,50	1209	2,03%	1219,50
scp45-k _{min}	1266	1274	0,63%	1274,25	1293	2,13%	1298,12
scp46-k _{min}	1349	1349	0,00%	1349,75	1362	0,96%	1366,25
scp47-k _{min}	1115	1115	0,00%	1115,00	1152	3,32%	1159,38
scp48-k _{min}	1225	1226	0,08%	1227,00	1244	1,55%	1248,38
scp49-k _{min}	1485	1485	0,00%	1485,00	1509	1,62%	1515,38
scp410-k _{min}	1356	1356	0,00%	1359,75	1373	1,25%	1379,38
scp51-k _{min}	579	579	0,00%	579,00	591	2,07%	599,12
scp52-k _{min}	677	679	0,30%	679,75	696	2,81%	701,25
scp53-k _{min}	574	576	0,35%	577,38	587	2,26%	592,75
scp54-k _{min}	582	587	0,86%	588,00	603	3,61%	606,50
scp55-k _{min}	550	550	0,00%	550,00	553	0,55%	554,25
scp56-k _{min}	560	560	0,00%	560,00	567	1,25%	572,75
scp57-k _{min}	695	695	0,00%	695,62	700	0,72%	705,12
scp58-k _{min}	662	662	0,00%	663,62	684	3,32%	688,25
scp59-k _{min}	687	688	0,15%	689,88	710	3,35%	714,38
scp510-k _{min}	672	672	0,00%	672,00	684	1,79%	691,50
scp61-k _{min}	283	283	0,00%	283,00	285	0,71%	286,25
scp62-k _{min}	302	302	0,00%	302,00	306	1,32%	307,50
scp63-k _{min}	313	313	0,00%	313,00	327	4,47%	339,88
scp64-k _{min}	292	294	0,68%	294,00	297	1,71%	300,62
scp65-k _{min}	353	353	0,00%	354,38	361	2,27%	366,75
scpa1-k _{min}	562	563	0,18%	565,38	587	4,45%	595,38
scpa2-k _{min}	560	560	0,00%	560,00	587	4,82%	592,38
scpa3-k _{min}	524	524	0,00%	526,12	547	4,39%	555,50
scpa4-k _{min}	527	527	0,00%	527,00	547	3,80%	557,25
scpa5-k _{min}	557	559	0,36%	560,62	580	4,13%	584,00
scpb1-k _{min}	149	150	0,67%	150,00	155	4,03%	156,88
scpb2-k _{min}	150	151	0,67%	152,75	156	4,00%	161,75
scpb3-k _{min}	165	166	0,61%	166,25	171	3,64%	174,00
scpb4-k _{min}	157	158	0,64%	158,88	170	8,28%	170,50
scpb5-k _{min}	151	154	1,99%	154,00	155	2,65%	158,38
scpc1-k _{min}	514	516	0,39%	516,00	542	5,45%	548,75
scpc2-k _{min}	483	487	0,83%	488,50	514	6,42%	520,88
scpc3-k _{min}	544	544	0,00%	544,38	587	7,90%	592,88
scpc4-k _{min}	484	487	0,62%	487,88	509	5,17%	516,00
scpc5-k _{min}	488	490	0,41%	490,62	514	5,33%	519,62
scpd1-k _{min}	122	122	0,00%	123,50	124	1,64%	127,12
scpd2-k _{min}	127	127	0,00%	127,00	129	1,57%	130,25
scpd3-k _{min}	138	140	1,45%	140,00	149	7,97%	153,25
scpd4-k _{min}	122	123	0,82%	123,00	128	4,92%	133,38
scpd5-k _{min}	130	131	0,77%	131,00	134	3,08%	138,50

Tabela H.1: Resultados detalhados da comparação entre GRASP e LAGRASP (instâncias do grupo k_{min})

Instância	CPLEX	LAGRASP(0.25, 1,5)			GPRb		
	custo	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média
scp41-k _{med}	8350	8376	0,31%	8393,50	8606	3,07%	8640,62
scp42-k _{med}	6111	6129	0,29%	6155,62	6302	3,13%	6320,62
scp43-k _{med}	4676	4692	0,34%	4694,25	4756	1,71%	4773,88
scp44-k _{med}	4670	4691	0,45%	4694,62	4800	2,78%	4807,38
scp45-k _{med}	8389	8424	0,42%	8436,75	8651	3,12%	8670,38
scp46-k _{med}	6416	6461	0,70%	6462,88	6594	2,77%	6606,00
scp47-k _{med}	6281	6289	0,13%	6293,88	6466	2,95%	6483,75
scp48-k _{med}	8421	8446	0,30%	8466,00	8718	3,53%	8748,75
scp49-k _{med}	7101	7131	0,42%	7139,75	7329	3,21%	7343,88
scp410-k _{med}	5355	5371	0,30%	5385,50	5475	2,24%	5488,00
scp51-k _{med}	11205	11263	0,52%	11268,12	11571	3,27%	11608,00
scp52-k _{med}	14418	14487	0,48%	14515,12	14994	4,00%	15010,75
scp53-k _{med}	11476	11532	0,49%	11540,62	11857	3,32%	11881,25
scp54-k _{med}	9944	9997	0,53%	10004,88	10310	3,68%	10324,75
scp55-k _{med}	10880	10951	0,65%	10962,88	11274	3,62%	11294,50
scp56-k _{med}	10581	10644	0,60%	10664,62	10965	3,63%	11029,50
scp57-k _{med}	14919	15013	0,63%	15028,50	15489	3,82%	15611,38
scp58-k _{med}	10622	10692	0,66%	10711,50	11031	3,85%	11040,62
scp59-k _{med}	11042	11087	0,41%	11101,38	11476	3,93%	11483,75
scp510-k _{med}	12436	12501	0,52%	12508,75	12908	3,80%	12963,88
scp61-k _{med}	7653	7730	1,01%	7808,75	8006	4,61%	8023,50
scp62-k _{med}	6739	6796	0,85%	6802,25	7004	3,93%	7017,62
scp63-k _{med}	8309	8381	0,87%	8450,50	8653	4,14%	8671,88
scp64-k _{med}	8546	8612	0,77%	8635,75	8877	3,87%	8901,12
scp65-k _{med}	9038	9101	0,70%	9109,50	9454	4,60%	9474,75
scpa1-k _{med}	21227	21357	0,61%	21395,38	22244	4,79%	22265,25
scpa2-k _{med}	21739	21862	0,57%	21893,75	22713	4,48%	22786,88
scpa3-k _{med}	20095	20183	0,44%	20225,75	20967	4,34%	21021,75
scpa4-k _{med}	22865	23014	0,65%	23052,62	23888	4,47%	23917,00
scpa5-k _{med}	18643	18752	0,58%	18772,00	19418	4,16%	19455,12
scpb1-k _{med}	29222	29311	0,30%	29341,75	30503	4,38%	30533,62
scpb2-k _{med}	28112	28201	0,32%	28237,25	29469	4,83%	29523,25
scpb3-k _{med}	27872	27985	0,41%	28022,12	28995	4,03%	29104,00
scpb4-k _{med}	25678	25808	0,51%	25860,50	26804	4,39%	26949,25
scpb5-k _{med}	28203	28338	0,48%	28369,88	29342	4,04%	29497,75
scpc1-k _{med}	32659	32855	0,60%	33026,38	34474	5,56%	34533,25
scpc2-k _{med}	32765	32917	0,46%	32955,38	34236	4,49%	34251,88
scpc3-k _{med}	34492	34685	0,56%	34728,62	36229	5,04%	36238,12
scpc4-k _{med}	31366	31505	0,44%	31565,12	32952	5,06%	33051,88
scpc5-k _{med}	30060	30179	0,40%	30245,00	31562	5,00%	31626,12
scpd1-k _{med}	38991	39169	0,46%	39194,88	40453	3,75%	40634,38
scpd2-k _{med}	39030	39133	0,26%	39172,25	40596	4,01%	40696,75
scpd3-k _{med}	39198	39358	0,41%	39377,88	40732	3,91%	40815,75
scpd4-k _{med}	38781	38888	0,28%	38918,12	40156	3,55%	40457,00
scpd5-k _{med}	40321	40481	0,40%	40533,88	41971	4,09%	42137,25

Tabela H.2: Resultados detalhados da comparação entre GRASP e LAGRASP (instâncias do grupo k_{med})

Instância	CPLEX	LAGRASP(0.25, 1, 5)			GPRb		
	custo	custo	dif.(%)	média	custo	dif.(%)	média
scp41-k _{max}	18265	18290	0,14%	18360,12	18876	3,35%	18914,62
scp42-k _{max}	12360	12412	0,42%	12422,25	12679	2,58%	12722,62
scp43-k _{max}	10396	10420	0,23%	10420,12	10644	2,39%	10694,25
scp44-k _{max}	10393	10436	0,41%	10447,25	10714	3,09%	10747,00
scp45-k _{max}	18856	18856	0,00%	18856,00	19378	2,77%	19422,88
scp46-k _{max}	15394	15448	0,35%	15453,00	15893	3,24%	15920,88
scp47-k _{max}	15233	15285	0,34%	15288,38	15676	2,91%	15703,12
scp48-k _{max}	18602	18664	0,33%	18677,00	19184	3,13%	19226,62
scp49-k _{max}	16558	16606	0,29%	16612,25	17074	3,12%	17101,00
scp410-k _{max}	11607	11628	0,18%	11636,00	11939	2,86%	11977,12
scp51-k _{max}	35663	35797	0,38%	35830,88	36885	3,43%	36916,25
scp52-k _{max}	45396	45512	0,26%	45535,62	46724	2,93%	46763,12
scp53-k _{max}	36329	36461	0,36%	36497,62	37511	3,25%	37564,38
scp54-k _{max}	28017	28063	0,16%	28073,25	29025	3,60%	29086,75
scp55-k _{max}	32779	32899	0,37%	32907,75	33815	3,16%	33907,25
scp56-k _{max}	29608	29690	0,28%	29694,25	30770	3,92%	30831,88
scp57-k _{max}	41930	42039	0,26%	42060,50	43448	3,62%	43540,50
scp58-k _{max}	32320	32420	0,31%	32434,75	33290	3,00%	33377,75
scp59-k _{max}	33584	33674	0,27%	33700,50	34724	3,39%	34802,12
scp510-k _{max}	38709	38858	0,38%	38871,25	39855	2,96%	39943,62
scp61-k _{max}	23516	23609	0,40%	23741,12	24537	4,34%	24559,38
scp62-k _{max}	19934	20061	0,64%	20074,25	20673	3,71%	20716,38
scp63-k _{max}	27983	28087	0,37%	28097,38	28854	3,11%	28905,62
scp64-k _{max}	26442	26551	0,41%	26575,38	27436	3,76%	27470,12
scp65-k _{max}	27069	27188	0,44%	27200,50	28000	3,44%	28020,38
scpa1-k _{max}	68522	68694	0,25%	68972,25	70830	3,37%	70874,75
scpa2-k _{max}	65842	66014	0,26%	66040,62	68084	3,41%	68115,50
scpa3-k _{max}	66829	67037	0,31%	67082,12	69016	3,27%	69086,75
scpa4-k _{max}	72334	72542	0,29%	72578,25	74705	3,28%	74771,25
scpa5-k _{max}	60491	60690	0,33%	60724,62	62396	3,15%	62569,88
scpb1-k _{max}	105506	106286	0,74%	107417,62	109017	3,33%	109123,38
scpb2-k _{max}	102922	103403	0,47%	103838,25	106438	3,42%	106481,38
scpb3-k _{max}	98280	98783	0,51%	99738,50	102029	3,81%	102196,38
scpb4-k _{max}	93777	94103	0,35%	94201,00	96853	3,28%	96970,00
scpb5-k _{max}	102810	103231	0,41%	104347,00	106219	3,32%	106431,25
scpc1-k _{max}	112471	112852	0,34%	112954,00	116680	3,74%	116922,12
scpc2-k _{max}	113916	114190	0,24%	114266,88	117605	3,24%	117753,25
scpc3-k _{max}	117416	117716	0,26%	117828,50	121488	3,47%	121563,00
scpc4-k _{max}	110823	111328	0,46%	111846,50	114973	3,74%	115063,88
scpc5-k _{max}	104439	104736	0,28%	105245,88	108224	3,62%	108391,62
scpd1-k _{max}	144887	147523	1,82%	148083,88	149539	3,21%	149872,25
scpd2-k _{max}	144096	146791	1,87%	146983,12	148726	3,21%	149175,75
scpd3-k _{max}	140474	141277	0,57%	142188,75	145340	3,46%	145484,88
scpd4-k _{max}	143513	146205	1,88%	146335,00	147928	3,08%	148176,75
scpd5-k _{max}	146307	148998	1,84%	149154,50	151111	3,28%	151279,25

Tabela H.3: Resultados detalhados da comparação entre GRASP e LAGRASP (instâncias do grupo k_{max})

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)