

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E ESTATÍSTICA

ESTIMATIVA DE EXPOENTES CRÍTICOS EM PERCOLAÇÃO

SEBASTIÃO GOMES DE ANDRADE NETO

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de
Mestre em Matemática Aplicada e Estatística

Orientador: Marcelo Gomes Pereira

Co-orientador: Roberto Hugo Bielschowsky

NATAL
Março/2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SEBASTIÃO GOMES DE ANDRADE NETO

ESTIMATIVA DE EXPOENTES CRÍTICOS EM PERCOLAÇÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Estatística.

Aprovada em: ___/___/___

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Gomes Pereira

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Orientador

Prof. Dr. Roberto Hugo Bielschowsky

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Co-orientador

Prof. Dr. Roosevelt Fonseca Soares

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Examinador Interno

Prof. Dr. Edemerson Solano Batista de Moraes

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Examinador Externo

Agradecimentos

A Deus que me deu fé e força para sempre persistir e enfrentar os obstáculos da vida, além de alcançar meu objetivo.

Ao meu orientador, Professor Marcelo Gomes Pereira, sou muito grato pela orientação, a qual contribuiu enormemente para a existência desta.

Ao meu co-orientador, Roberto Hugo Bielschowsky, pelos questionamentos e aperfeiçoamentos na teoria e técnica.

À Professora Viviane Simiulli Campos por ter me levado a entrar no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística.

Ao Professor José Querginaldo Bezerra, pela força e incentivo na minha formação.

Aos meus pais e familiares que souberam compreender meu esforço.

Aos demais colegas de pós-graduação, pelos incentivos, críticas e sugestões.

A minha namorada Susy Larrinny, pelo apoio e paciência durante esta jornada.

Ao meu avô e minha avó

Gentil Alves de Farias e Maria Nazaré Américo de Farias

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	A PERCOLAÇÃO	3
2.1	ENCONTRANDO UM AGLOMERADO PERCOLANTE	5
2.2	NÚMERO MÉDIO DE SÍTIOS DE UM AGLOMERADO NA ORIGEM	5
2.3	TRANSIÇÃO DE FASE E A PERCOLAÇÃO	6
2.3.1	Fase subcrítica	7
2.3.2	Fase supercrítica	8
2.4	AGLOMERADOS POR SÍTIO DA ESTRUTURA	8
2.5	O RAIOS DO AGLOMERADO	9
2.6	FUNÇÃO DE CONECTIVIDADE E COMPRIMENTO DE CORRELAÇÃO	9
3	FRACTAIS	13
3.1	CLASSIFICAÇÃO DOS FRACTAIS	14
3.1.1	Fractais determinísticos	14
3.1.2	Fractais aleatórios	15
3.2	DIMENSÃO FRACTAL	15
3.3	AUTO-SIMILARIDADE	17
4	TEORIA DE ESCALA	21
4.1	EXPOENTES CRÍTICOS	21
4.1.1	Expoente β	22
4.1.2	Expoente γ	22

4.1.3	Expoente α	22
4.1.4	Expoente Δ	23
4.1.5	Expoente δ	23
4.1.6	Expoente ρ	24
4.1.7	Expoente η	24
4.1.8	Expoente ν	24
4.2	RELAÇÕES DE ESCALA	26
5	O ESCALONAMENTO	33
5.1	DETERMINAÇÃO DE ν	35
5.2	DETERMINAÇÃO DE β	37
5.3	DETERMINAÇÃO DE $\delta, \gamma, \Delta, \eta, \rho$ e α	37
6	CONCLUSÃO	41
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	42

Lista de Figuras

2.1	Seção finita de Z^2 contendo 64 sítios.	3
2.2	Possíveis disposições de uma secção 8×8 de Z^2 para diversos valores de p . Aqui o primeiro aglomerado percolante é sinalizado com uma terceira cor para os sítios preenchidos.	4
2.3	Número médio χ de sítios do aglomerado.	6
2.4	Probabilidade $\theta(p)$ de se encontrar um aglomerado percolante em torno de p_c	7
2.5	Função componente para determinação do comportamento do comprimento de correlação.	10
3.1	Tipos de estruturas fractais.	13
3.2	Estrutura quadrada numerada para facilitar processo iterativo em nosso exemplo. . .	14
3.3	Geração de um Fractal Determinístico.	14
3.4	Geração de um Fractal Aleatório.	15
3.5	Uma outra maneira de gerar um Fractal determinístico.	15
3.6	Gráfico $\log - \log$ da densidade ρ versus o tamanho da estrutura L	16
3.7	Aplicação de uma contração $r = 1/3$	18
5.1	Quantidade $d\Pi/dp$ para $L = 256$. Foram feitas 50000 realizações.	36
5.2	Probabilidade Π de encontrar um aglomerado percolante na concentração p em função de p	36
5.3	Quantidade Π em função de p em torno de p_c , estimando ν	37
5.4	Gráfico de $\theta(2^5, p)$ versus p	38
5.5	Gráfico de $\ln(\theta(L, p_m))$ versus $\ln(L)$	38

Resumo

Na Teoria de Percolação, funções como a probabilidade de um sítio pertencer ao aglomerado percolante, tamanho médio dos aglomerados, etc. são descritas por meio de leis de potência e expoentes críticos. Esta dissertação faz uso do método chamado Escalonamento de Tamanho Finito para fornecer uma estimativa desses expoentes.

A dissertação está dividida em quatro partes. A primeira apresenta de forma rápida os principais resultados da Teoria da Percolação por sítios para dimensão $d = 2$. Além disso, são definidas algumas quantidades importantes para a determinação dos expoentes críticos e o para o entendimento sobre as transições de fase. A segunda parte apresenta uma introdução sobre o conceito de fractal, dimensão e classificação. Concluída a base do nosso estudo, na terceira parte é mencionada a Teoria de Escala, a qual relaciona os expoentes críticos e as quantidades descritas no Capítulo 2. Na última parte, através do escalonamento de tamanho finito, determinamos os expoentes críticos β e ν . A partir desses, usamos as relações de escala as relações descritas no Capítulo anterior para determinar os expoentes críticos restantes.

Abstract

In Percolation Theory, functions like the probability that a given site belongs to the infinite cluster, average size of clusters, etc. are described through power laws and critical exponents. This dissertation uses a method called Finite Size Scaling to provide a estimative of those exponents.

The dissertation is divided in four parts. The first one briefly presents the main results for Site Percolation Theory for $d = 2$ dimension. Besides, some important quantities for the determination of the critical exponents and for the phase transistions understanding are defined. The second shows an introduction to the fractal concept, dimension and classification. Concluded the base of our study, in the third part the Scale Theory is mentioned, wich relates critical exponents and the quantities described in Chapter 2. In the last part, through the Finite Size Scaling method, we determine the critical exponents β and ν . Based on them, we used the previous Chapter scale relations in order to determine the remaining critical exponents.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O trabalho apresentado aqui estima valores de expoentes que descrevem comportamentos dos aglomerados em função dos valores de concentração p em comparação com uma estrutura de tamanho infinito.

Primeiro definimos quantidades como $\theta(p)$, $\xi(p)$, $\chi(p)$, $\kappa(p)$, etc., necessárias para a determinação dos expoentes críticos. Variamos os valores de concentração p para a estrutura quadrada e coletamos, através do algoritmo do Joaquim Elias [7], dados de diversas simulações de computador. Em torno do limiar de percolação analisamos os comportamentos da probabilidade Π de se encontrar um aglomerado percolante e da densidade θ . Tais comportamentos são regidos por leis de potências que determinam dois expoentes críticos β e ν , e que junto as leis de escala [4] e hiper-escala [2] determinamos os demais expoentes δ , γ , Δ , η , ρ e α .

É na determinação dos expoentes críticos que este texto pretende dar contribuição. A através da comparação com as redes quadradas de tamanho infinito, forneceremos base para a modelagem dos problemas de percolação em redes quadradas finitas.

O texto pode ser dividido em quatro partes. O Capítulo 2 trata do conceito de percolação apresentando a origem das principais quantidades necessárias para a determinação dos expoentes. O Capítulo 3 trata de introduzir o conceito de fractal, determinando sua dimensão e apresentando a construção determinística e aleatória de uma estrutura fractal, necessária a comparação dos aglomerados como estruturas fractais. O Capítulo 4 apresenta os oito expoentes críticos e suas quantidades a que cada um está relacionado, bem como as relações de escala e hiperescala entre os valores dos expoentes. Por

fim o Capítulo 5 mostra o método e determina todos os expoentes críticos através de dados coletados por simulações de computador, comprovando a similaridade da estrutura quadrada de tamanho finito com a rede quadrada de tamanho infinito.

Capítulo 2

A PERCOLAÇÃO

Podemos pensar na propagação de doenças e fogos florestais, na resistência de uma mistura de matérias, onde o valor da resistência depende da densidade e da geometria do conjunto das ligações ou ainda simplesmente em uma pedra porosa mergulhada na água, perguntando-se qual a probabilidade de o centro da pedra estar molhado. Ao tentar formular um modelo estocástico simples para tais situações, *Broadbent e Hammersley (1957)* deram nascimento a *Teoria da Percolação*, um ramo da teoria das probabilidades que trata das propriedades dos meios aleatórios agregadas a conceitos geométricos e probabilísticos.

Existem dois modelos de percolação, por ligação e por sítio, para diversos valores de dimensões d . No entanto, este trabalho trata apenas da percolação por sítio para $d = 2$. Considere Z^2 o conjunto de coordenadas inteiras no plano, observamos seções finitas de Z^2 . Na figura 2.1 considere o centro

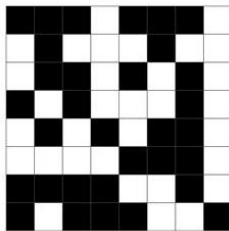


Figura 2.1: Seção finita de Z^2 contendo 64 sítios.

de cada quadradinho como um ponto de Z^2 . Chamamos cada quadradinho de *sítio*, simbolizado pela letra x . Cada sítio x possui dois estados, *ocupado* (cor branca) ou *desocupado* (cor preta). Dizemos

que dois sítios são vizinhos quando possuem um lado em comum na estrutura e ao conjunto de sítios vizinhos chamamos de *aglomerado*, denotado por $C(x)$.

Suponha que, para cada sítio, é feito um sorteio admitindo-se uma probabilidade p , com $0 \leq p \leq 1$, de estar ocupado com probabilidade p ou desocupado com probabilidade $1 - p$. Então, variando os valores de p na seção finita pode-se obter diversos tipos de configurações, como na figura 2.2.

Dizemos que há percolação em Z^2 quando existe um conjunto infinito de sítios vizinhos. Nas seções finitas de Z^2 dizemos que há percolação quando existe um aglomerado conectando faces opostas da estrutura e ao valor de p , para o qual a ocorrência desse aglomerado percolante se dá pela primeira vez, chamamos de p_c de probabilidade *crítica* ou *limiar de percolação*.

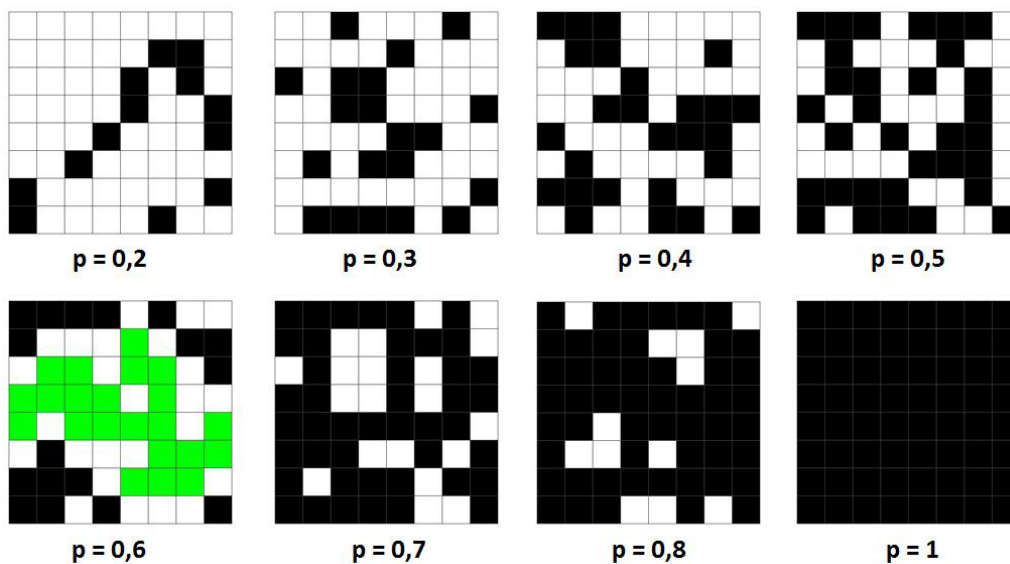


Figura 2.2: Possíveis disposições de uma secção 8×8 de Z^2 para diversos valores de p . Aqui o primeiro aglomerado percolante é sinalizado com uma terceira cor para os sítios preenchidos.

As próximas quantidades descrevem comportamentos de nossa estrutura de maneira particular e vão nos ajudar no Capítulo 4 a descrever os expoentes críticos.

2.1 ENCONTRANDO UM AGLOMERADO PERCOLANTE

Imaginemos Z^2 , pensando na probabilidade de que um dado sítio pertença a um aglomerado infinito de sítios ocupados, definimos

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty) \quad (2.1)$$

como a probabilidade, em função dos valores de p , de que o tamanho do aglomerado C seja $n = \infty$.

Ou ainda

$$\theta(p) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P_p(|C| = n) \quad (2.2)$$

isto é, um menos a soma de todas as probabilidades de que o aglomerado C tenha tamanho n finito.

Assim $|C| = \infty$ se e somente se existe uma seqüência infinita x_0, x_1, x_2, \dots de sítios distintos, tal que $x_0 = 0$ e x_i e x_{i+1} sejam sítios vizinhos para todo i . Temos que θ é uma função não-decrescente de p com $\theta(p) = 0$ e $\theta(1) = 1$. A monotonicidade de θ pode ser entendida de modo intuitivo, pois quando aumentamos o valor de p conduzimos geralmente a um aumento no número de sítios ocupados, assim aumentamos também o comprimento de caminhos ocupados a partir da origem. Para mais detalhes podemos encontrar em [2], página 32, uma prova mais teórica da monotonicidade de θ .

A existência do aglomerado percolante é determinada a partir de um valor específico de p que chamamos de *concentração crítica* ou *probabilidade crítica* e o definimos como:

$$p_c = \sup \{ p ; \theta(p) = 0 \}. \quad (2.3)$$

Assim, o valor de p_c pode ser entendido como o valor de p para o qual o sistema percola.

2.2 NÚMERO MÉDIO DE SÍTIOS DE UM AGLOMERADO NA ORIGEM

Precisamos entender como o aglomerado se comporta com relação ao seu tamanho, então escrevemos

$$\chi(p) = E_p(|C|) \quad (2.4)$$

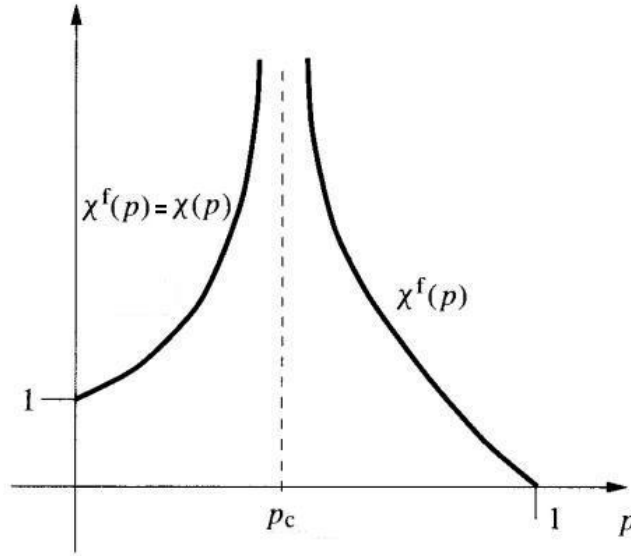


Figura 2.3: Número médio χ de sítios do aglomerado.

para o número médio de sítios do aglomerado. Analogamente como fizemos com θ , expressamos χ em termos da distribuição dos tamanhos de $|C|$

$$\chi(p) = \begin{cases} \infty, & \text{se } P_p(|C| = \infty) \\ \sum_{n=1}^{\infty} n P_p(|C| = n) & \text{se } P_p(|C| = n). \end{cases} \quad (2.5)$$

Para $p < p_c$ podemos ver em [2], pág. 88, que $\chi(p) < \infty$. Denotamos também

$$\chi^f(p) = \sum_n P_p(|C| = n) \quad (2.6)$$

para o número médio de sítios do aglomerado, onde o valor $|C|$ denota o evento em que $|C| < \infty$. Podemos também escrever

$$\chi^f(p) = E_p(|C|; |C| < \infty). \quad (2.7)$$

O 'f' sobrescrito em χ^f refere-se a condição de $|C|$ ser finito.

2.3 TRANSIÇÃO DE FASE E A PERCOLAÇÃO

Certos materiais possuem fases magnéticas sujeitas a influências de temperatura. Esta magnetização pode chegar a zero em uma temperatura crítica T_c e próximo a ela segue uma lei de potência

$$m(T) \propto (T_c - T)^\beta \quad (2.8)$$

Considerando $\theta(p)$ e o valor crítico p_c , para $p < p_c$, $\theta(p) = 0$, para $p > p_c$, θ tem um comportamento semelhante ao da magnetização e cresce segundo uma lei de potência. Grimmett, 1999, pág. 22, conjectura que

$$\theta(p) \propto (p - p_c)^\beta, \quad (2.9)$$

que dá surgimento a um dos expoentes críticos que queremos aqui estimar.

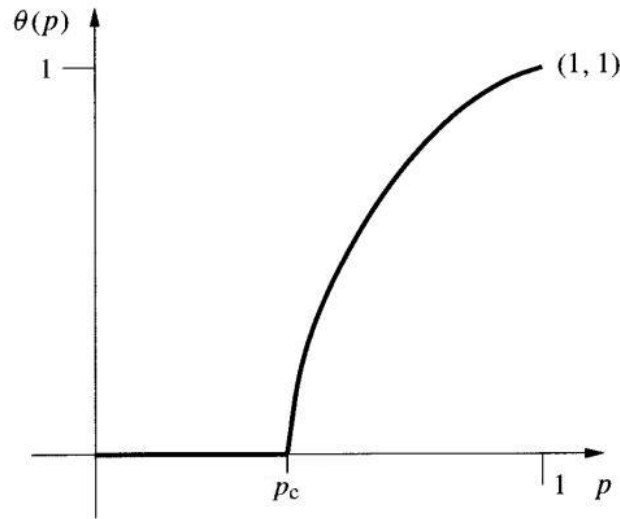


Figura 2.4: Probabilidade $\theta(p)$ de se encontrar um aglomerado percolante em torno de p_c .

A presença do p_c caracteriza o ponto onde as transformações das propriedades de um sistema acontecem de uma fase para outra, o que nos permite denominar fases para tais comportamentos antes e após a concentração crítica p_c .

2.3.1 Fase subcrítica

Para $p < p_c$ todos os aglomerados de sítios ocupados em Z^2 são finitos quase certamente. Podemos ver em [2], página 20, que quando $p \uparrow p_c$, P_p possui um decaimento exponencial do tipo:

$$P_p(|C| = n) \approx e^{-n\alpha(p)} \quad (2.10)$$

quando $n \rightarrow \infty$ onde $\alpha(p) > 0$.

2.3.2 Fase supercrítica

Também podemos encontrar em [2], página 21, que para $p > p_c$ há infinitos aglomerados de sítios ocupados em Z^2 quase certamente e existem $\beta_1(p)$ e $\beta_2(p)$ satisfazendo $0 < \beta_1(p) \leq \beta_2(p) < \infty$, de tal forma que quando $p \downarrow p_c$

$$e^{-\beta_1(p)n^{\frac{1}{2}}} \leq P_p(|C| = n) \leq e^{-\beta_2(p)n^{\frac{1}{2}}} \quad \forall n. \quad (2.11)$$

Acredita-se que o limite

$$\delta(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -n^{-\frac{1}{2}} \right\} \log P_p(|C| = n) \quad (2.12)$$

existe e é estritamente positivo quando $p > p_c$. Assim, acredita-se que

$$P_{p_c}(|C| \geq n) \approx n^{-1/\delta} \quad (2.13)$$

quando $n \rightarrow \infty, \forall \delta = \delta(d) > 0$.

Nas proximidades de p_c quantidades como $\theta(p)$ e $\chi(p)$ comportam-se como leis de potências de $|p - p_c|$, e a prova é ainda um grande problema de percolação em ocupado. O Grimmett (1999), página 22, conjectura que os limites

$$\gamma = - \lim_{p \downarrow p_c} \frac{\log \chi(p)}{\log |p - p_c|}, \quad (2.14)$$

$$\beta = \lim_{p \downarrow p_c} \frac{\log \theta(p)}{\log (p - p_c)}, \quad (2.15)$$

existem, e que o limite

$$\delta^{-1} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log P_{p_c}(|C| \geq n)}{\log n}, \quad (2.16)$$

existe de acordo com 2.13.

2.4 AGLOMERADOS POR SÍTIO DA ESTRUTURA

Há uma outra quantidade que devemos analisar, κ será a *quantidade de aglomerados por sítio da estrutura*, a qual definimos por

$$\kappa(p) = E_p(|C|^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_p(|C| = n), \quad (2.17)$$

Seja $B(n)$ a caixa com o lado de comprimento $2n$ e centro na origem. Pensamos na quantidade de aglomerados de $B(n)$ que chamaremos de K_n . a qual é aproximadamente uma função linear do volume de $B(n)$, em que $K_n|B(n)|^{-1}$ converge para um limite não-trivial que é a nossa função $\kappa(p)$ quando $n \rightarrow \infty$. Para mais detalhes podemos encontrar em [2], página 77, uma prova teórica desta convergência ao valor $\kappa(p)$.

Acredita-se que κ não é três vezes diferenciável em $p = p_c$, o que permite a conjectura da existência de nosso expoente crítico α presente na secção 4.1.3.

2.5 O RAI DO AGLOMERADO

Consideremos a fase subcrítica de percolação de Z^2 quando $d \geq 2$ e $p < p_c$. Nesta fase, todos os aglomerados são finitos e têm quase certamente tamanho médio finito.

Escrevemos $\partial B(n)$ para a borda da caixa $B(n)$:

$$\partial B(n) = \{x \in Z^2 : \|x\| = n\} \quad (2.18)$$

quando $\|x\| = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq 2\}$. Para $x \in Z^2$ escrevemos $B(n, x)$ para a caixa $x + B(n)$ com lado de tamanho $2n$ e centro x , e $\partial B(n, x) = x + \partial B(n)$ para a borda da caixa. Escrevemos também $P_p(0 \leftrightarrow \partial B(n))$ para a probabilidade de existir um caminho de sítios ocupados da origem a borda $\partial B(n)$.

Definimos o raio do aglomerado de sítios ocupados como

$$\text{rad}(C(x)) = \max\{d(x, y) : y \in C(x)\}. \quad (2.19)$$

onde $d(x, y)$ é a função distância $\|x - y\|$.

2.6 FUNÇÃO DE CONECTIVIDADE E COMPRIMENTO DE CORRELAÇÃO

Sejam x_1, x_2, \dots, x_n sítios de Z^2 , e definimos $\tau_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ como a probabilidade de que x_1, x_2, \dots, x_n pertencem ao mesmo aglomerado em nosso processo de percolação. A função τ_p é conhecida como *função de conectividade*.

Em [2], página 120, podemos encontrar que

$$P_p(0 \leftrightarrow \partial B(n)) \leq e^{-n\varphi(p)} \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.20)$$

onde $\varphi(p)$ é contínua e não crescente em $(0, 1]$, estritamente decrescente e positiva em $(0, p_c]$, $\varphi(p) \rightarrow \infty$ quando $p \downarrow 0$ e $\varphi(p_c) = 0$ (veja figura 2.5).

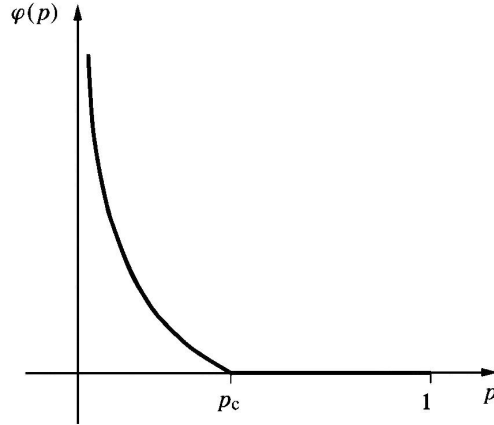


Figura 2.5: Função componente para determinação do comportamento do comprimento de correlação.

Supondo $0 < p \leq 1$ e $\varphi(p)$ como definida anteriormente então podemos encontrar também que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log \tau_p(0, e_n) \right\} = \varphi(p) \quad (2.21)$$

e que existe também uma constante ζ estritamente positiva, independente de p , tal que

$$\zeta p n^{A(1-d)} e^{-n\varphi(p)} \leq \tau_p(0, e_n) \leq e^{-n\varphi(p)} \quad \forall n. \quad (2.22)$$

Quantidades como $P_p(0 \leftrightarrow \partial B(n))$ e $\tau_p(0, e_n)$ decaem como $e^{-n\varphi(p)}$ quando $\varphi(p) > 0$, se $0 < p < p_c$. Acredita-se que estas comportem-se como 2.22 e 4.15.

Nossa função usual será a recíproca de $\varphi(p)$, isto é $\xi(p) = \varphi(p)^{-1}$, onde definimos $\xi(p) = \infty$ desde que $\varphi(p_c) = 0$; a quantidade $\xi(p)$ é chamada a *comprimento de correlação* ou *comprimento de escala*, uma vez que só quando n é da ordem de $\xi(p)$ ou maior que a exponencial em termos de

$$P_p(0 \leftrightarrow \partial B(n)) \approx e^{-n/\xi(p)} \quad (2.23)$$

e

$$\tau_p(0, e_n) \approx e^{-n/\xi(p)}. \quad (2.24)$$

Conhecendo o comportamento de $\varphi(p)$ assim como em [2], página 127, temos $\varphi(p)^{-1} \leq \chi(p)$ se $0 < p < p_c$, teremos assim ξ contínua e estritamente crescente em $(0, p_c)$, satisfazendo

$$\xi(p) \rightarrow 0 \text{ quando } p \downarrow 0, \quad (2.25)$$

$$\xi(p) \rightarrow \infty \text{ quando } p \uparrow p_c, \quad (2.26)$$

$$\xi(p) \leq \chi(p) \text{ se } 0 < p < p_c. \quad (2.27)$$

Para $p > p_c$ podemos definir $\xi(p)$ analogamente como na fase subcrítica

$$\xi(p)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log \tau_p^f(0, e_n) \right\} \quad (2.28)$$

Escrevemos a função de conectividade τ_p como $\tau_p(x, y) = P_p(x \leftrightarrow y)$ para a probabilidade de que exista um caminho de sítios ocupados que x a y . Quando $p < p_c$, $\tau_p(x, y)$ decai como uma função exponencial da distância de x para y , $d(x, y)$. Quando $p > p_c$, $\tau_p(x, y)$ pode ser entendida como

$$\tau_p^f(x, y) = P_p(x \text{ e } y \text{ pertencem ao mesmo aglomerado finito}). \quad (2.29)$$

Notemos que

$$\tau_p^f(x, y) = \tau_p(x, y) - P_p(x \text{ e } y \text{ pertencem ao mesmo aglomerado infinito}). \quad (2.30)$$

de modo que

$$\tau_p(x, y) = \tau_p^f(x, y) \text{ se } \theta(p) = 0. \quad (2.31)$$

O ‘f’ sobrescrito em $\tau_p^f(x, y)$ refere-se à exigência de que x e y estejam em aglomerados finitos.

O aglomerado percolante assemelha-se qualitativamente a um objeto fractal, é o que veremos no próximo Capítulo, fazendo uma breve esplanção sobre o conceito de estruturas fractais.

Capítulo 3

FRACTAIS

Na natureza tem-se observado certos objetos, como na figura 3.1, nos quais cada pequeno pedaço

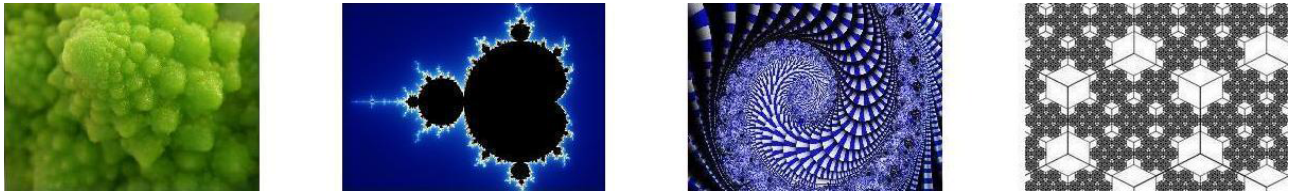


Figura 3.1: Tipos de estruturas fractais.

do mesmo, ao ser ampliado, mostra-se similar ao todo. Do ponto de vista matemático, é possível gerar tais padrões, com as mesmas características de auto-similaridade, como nas figuras 3.2- 3.5. A este padrão de auto-similaridade dá-se o nome de fractal.

O termo Fractal foi criado em 1975 por Benoit Mandelbrot, nascido em 20 de novembro de 1924, em Varsóvia na Polónia. Benoit Mandelbrot descobriu a geometria fractal na década de 70, no século XX. O nome fractal se deu a partir do adjetivo latino *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar. Nas tentativas de medir o tamanho de objetos que as definições tradicionais da geometria euclidiana falham foi gerando-se seus principais conceitos.

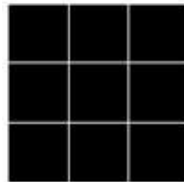
A geometria fractal é um ramo da matemática que estuda propriedades e comportamentos dos fractais, tentando descrever diversas situações que não podem ser explicadas pela geometria euclidiana, e são aplicadas em diversos ramos científicos e tecnológicos.

3.1 CLASSIFICAÇÃO DOS FRACTAIS

Existem diversos tipos de estruturas fractais, os quais podem ser classificados em *determinísticos* (gerados por um padrão repetido por um processo recorrente ou iterativo) e *aleatórios* (gerados com alguma distribuição de probabilidade).

3.1.1 Fractais determinísticos

Buscando um padrão os fractais determinísticos são gerados por uma regra pré-estabelecida. Por exemplo, tomemos uma estrutura quadrada 3×3 e associamos a essa figura um quadrado com o



mesmo tamanho numerado de 1 a 9. Em seguida retiramos os quadrados cuja posição corresponde

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 3.2: Estrutura quadrada numerada para facilitar processo iterativo em nosso exemplo.

a numeração par e repetimos o processo com os cinco sub-quadrados restantes. Este processo pode

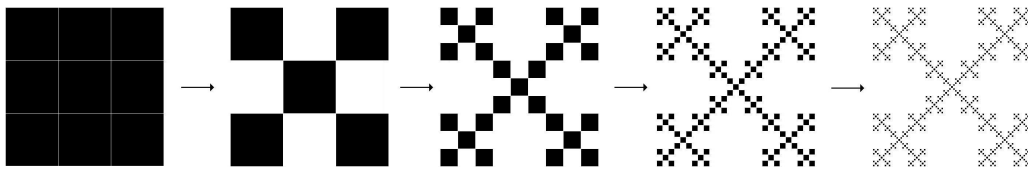


Figura 3.3: Geração de um Fractal Determinístico.

ser continuado infinitamente. Observe que a regra está bem estabelecida: retirar os quadrados cuja posição corresponde a numeração par. Podemos acrescentar uma aleatoriedade nesse ponto, vejamos na próxima seção.

3.1.2 Fractais aleatórios

Na natureza nem sempre encontramos uma repetição de um padrão determinístico e para modelá-la muitas vezes se faz necessária a introdução de uma componente aleatória. Por isso, adicionaremos elementos estocásticos na geração de um fractal.

Imagine que, quando tomamos a estrutura quadrada de tamanho 3×3 , podemos retirar qualquer um dos sub-quadrados de lado um, acrescentando alguma distribuição de probabilidade, em outras palavras faz-se um sorteio dos sub-quadrados admitindo uma probabilidade $p = \frac{4}{9}$ de estar pintado ou não e continuando para os sub-quadrados gerados a cada passo. A nova figura 3.4 não é feita de

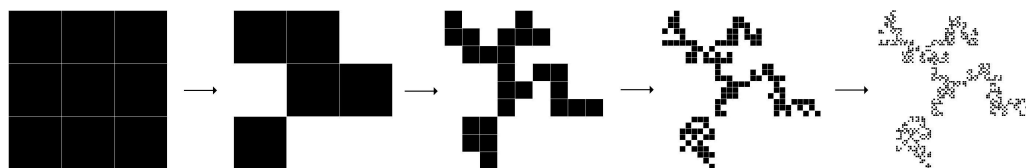


Figura 3.4: Geração de um Fractal Aleatório.

cópias exatas de si mesma, isto é, não é auto-similar no sentido que definimos. Entretanto, podemos argumentar na seção 3.3 que o objeto final da Figura 3.4 é auto-similar em um sentido estatístico. Para tanto vejamos primeiro a noção de dimensão fractal na próxima seção e logo após a seção que trata da auto-similaridade.

3.2 DIMENSÃO FRACTAL

Considere o quadrado como na figura 3.5. No primeiro estágio temos um quadrado preenchido.

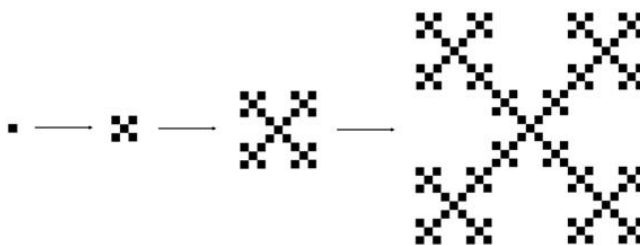


Figura 3.5: Uma outra maneira de gerar um Fractal determinístico.

No segundo estágio, adicionamos quatro cópias da figura do estágio anterior obtendo ainda um qua-

drado, agora vazado. No terceiro estágio, adicionamos mais quatro cópias da figura do estágio anterior obtendo novamente outro quadrado vazado. Em seguida repetimos o processo, isto é, para obtermos o próximo estágio montamos um novo quadrado fazendo quatro cópias da figura anterior, e assim infinitamente.

O fractal do primeiro estágio tem massa $M = 1$ e lado $L = 1$. O fractal do segundo estágio tem $M = 5$ e $L = 3$. O fractal do terceiro estágio tem $M = 25$ e $L = 9$, e assim por diante. Definamos densidade no plano por

$$\rho(L) = \frac{M(L)}{L^2}. \quad (3.1)$$

Na mudança do estágio 1 para o estágio 2, houve uma redução na densidade do objeto. De fato, $\rho(1) = 1$ e $\rho(3) = 5/9$. Se continuarmos calculando a densidade dos quadrados formados em cada estágio, teremos $\rho(9) = (5/9)^2$, $\rho(27) = (5/9)^3$... e assim por diante.

Fazemos um gráfico de ρ em função de L , em escala logarítmica. No nosso exemplo utiliza-

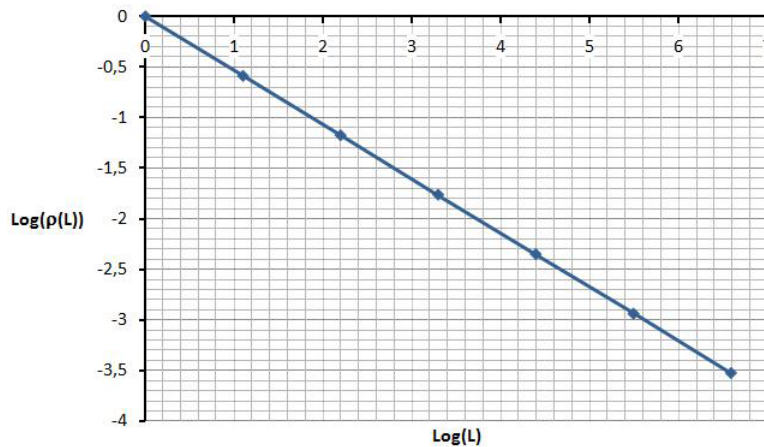


Figura 3.6: Gráfico log – log da densidade ρ versus o tamanho da estrutura L .

mos dados de um fractal construído por uma regra pré estabelecida, isto é um fractal determinístico. Encontramos uma reta que passa pela origem, como na figura 3.6. A densidade ρ depende de L segundo a equação $\log \rho = \lambda \log L$, determinando uma relação entre ρ e L dada por $\rho = L^\lambda$, uma lei de potência. Para determinar o valor de λ , basta encontrar a inclinação da reta do gráfico em escala logarítmica.

$$\lambda = \frac{\log 1 - \log 5/9}{\log 1 - \log 3} = \frac{-\log 5 + \log 9}{-\log 3} = \frac{\log 5}{\log 3} - 2. \quad (3.2)$$

Façamos $d_f = \frac{\log 5}{\log 3}$

$$\rho = \frac{L^{d_f}}{L^2} = L^{d_f-2} \quad (3.3)$$

Observe que, para um mesmo L e objetos diferentes, o que determina como M varia é L^{d_f} . Os fractais gerados por esquemas iterativos os fractais são caracterizados quantitativamente pela associação, de maneira única, de um número à forma geométrica do objeto gerado. Esta associação, que quantifica o quão densamente o objeto ocupa o quadrado de lado L , é o resultado da mesma associação entre a figura e o valor d_f que chamamos de *dimensão fractal*. Ela é particularmente útil para distinguir conjuntos de natureza geométrica suave de outros que apresentam padrões de extrema irregularidade.

As escalas da massa M com tamanho linear L como $M \propto L^d$ e $d = 2$ estão a uma dimensão ‘Euclidiana’ usual. Benoit Mandelbrot introduziu a ‘geometria fractal’ com uma descrição unificadora dos fenômenos naturais que não são uniformes, mas que obedecem leis de potência simples da forma

$$M \propto L^{d_f} \quad (3.4)$$

com dimensões d_f não-inteiras.

3.3 AUTO-SIMILARIDADE

A auto-similaridade para os fractais dá significado a sua invariância por mudança de escalas.

Seja $\Phi : S \rightarrow S$ uma contração que associa a todos os pontos x de S a pontos $\Phi(x) = rx$, $r \in \mathfrak{R}$, com $r < 1$. O conjunto S é chamado auto-similar quando S é a união de $n(r)$ cópias de $\Phi(S)$. Neste caso, também definimos a dimensão de auto-similaridade, D_s , dada por

$$D_s = \frac{\log(n(r))}{\log(1/r)} \quad (3.5)$$

Por exemplo, podemos colocar o ultimo desenho da figura 3.3 em um sistema de coordenadas de forma que os pontos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ sejam seus vértices. Aplicando uma contração com $r = 1/3$ (ver figura 3.7), encontramos um novo quadrado com vértices em $(0, 0)$, $(1/3, 0)$, $(1/3, 1/3)$ e $(0, 1/3)$. Observe que o quadrado formado é constituído por cinco cópias daquele obtido anterior a contração.

O fato de encontrarmos $D_s = d_f$ nesse exemplo não é mera coincidência. Decorre da definição de densidade na seção 3.2 que $M(L) = L^{d_f}$. Vejamos, se considerarmos um conjunto S auto-similar, onde cada uma de suas $n(r)$ cópias está contida em um quadrado de lado L , sua massa total será de

$$M_S = n(r)M(L) = n(r)L^{d_f}. \quad (3.6)$$

Por outro lado, se um quadrado de lado L cobre uma cópia de $\Phi(S)$, um quadrado de lado $\frac{1}{r}L$ contém S . Então, sua massa é dada por

$$M_S = M\left(\frac{1}{r}L\right) = \left(\frac{1}{r}L\right)^{d_f} \quad (3.7)$$

Logo,

$$n(r)L^{d_f} = \left(\frac{1}{r}L\right)^{d_f} \Rightarrow n(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^{d_f} \quad (3.8)$$

Donde concluímos que

$$d_f = \frac{\log(n(r))}{\log(1/r)} = D_s \quad (3.9)$$

Em [1], podemos ver a utilização do aglomerado percolante em $p = p_c$ como um exemplo de fractal aleatório. Ele contém buracos de todos os tamanhos ϵ , portanto, é auto-similar num sentido estatístico. Pode-se verificar por meio do uso do algoritmo *box-counting* que o aglomerado percolante é auto-similar em todas as escalas (maiores que o espaçamento da rede e menores que o tamanho total) e pode ser considerado um fractal. Sua dimensão fractal descreve como a massa M (número de sítios) dentro de uma caixa de lado L muda de escala com L :

$$M(L) \propto L^{d_f}. \quad (3.10)$$

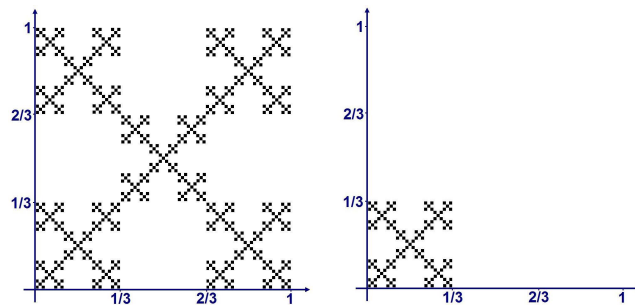


Figura 3.7: Aplicação de uma contração $r = 1/3$.

$M(L)$ é obtido pela média de muitas simulações de percolação, ou, equivalentemente, pela média sobre esferas tomadas em posições diferentes em um mesmo aglomerado percolante.

Examinemos o que acontece com os aglomerados quando $p \neq p_c$. Abaixo do limiar de percolação o tamanho típico dos aglomerados é finito. Então, aglomerados abaixo da criticalidade, isto é, abaixo do limiar de percolação p_c , podem ser auto-similares somente até o comprimento de escala ξ . Após o limiar de percolação, ξ é a medida do tamanho dos aglomerados finitos no sistema. O aglomerado percolante continua infinito, mas seus maiores buracos são tipicamente do tamanho de ξ . Então o aglomerado percolante somente pode ser auto-similar até o comprimento de escala ξ . Uma vez que não há buracos maiores, o aglomerado se torna homogêneo quando tomamos uma escala maior que ξ . Em resumo, para escalas menores que ξ , o sistema pode ser considerado um fractal, para escalas maiores que ξ , o sistema tem a mesma dimensão do espaço. Isto é, antes de ξ os aglomerados crescem de acordo com os valores de p , após p_c os aglomerados finitos começam a ficar rarefeitos, pois o aglomerado percolante toma cada vez mais espaço na estrutura. Essa estrutura do aglomerado percolante implica que sua massa se escala diferentemente para distâncias menores e maiores que ξ :

$$M(L) \propto \begin{cases} L^{d_f} & L < \xi \\ L^d & L > \xi. \end{cases} \quad (3.11)$$

Podemos entender assim que ξ é uma medida do maior buraco no maior aglomerado, e diminui quando aumentamos p acima do p_c .

Os fractais aleatórios são muito úteis na modelagem de fenômenos naturais. A natureza apresenta inúmeros exemplos de objetos que não são exatamente auto-similares, mas que apresentam uma auto-similaridade no sentido estatístico. Suas dimensões fractais são geralmente encontradas numericamente. Uma ferramenta muito útil para isso é o algoritmo *box-counting*, que consiste em dividir o espaço no qual o fractal está imerso em uma malha de células de tamanho ϵ . Conta-se o número de células que contêm partes do fractal, $N(\epsilon)$, e repete-se o procedimento para células de diversos tamanhos ϵ . A dimensão fractal é então determinada pela relação

$$N(\epsilon) \propto \epsilon^{-d_f}. \quad (3.12)$$

O entendimento sobre percolação e a similaridade do aglomerado percolante com as estruturas fractais completa nossa base de entendimento. No próximo Capítulo faremos o estudo sobre a *Teoria de Escala* que trata das relações que dão surgimento aos expoentes críticos.

Capítulo 4

TEORIA DE ESCALA

Podemos pensar em sistemas físicos que apresentam transições de fases. O gelo derretendo ou o material ferromagnético que se torna magnetizado são sistemas que, devido a pequenas alterações em algum parâmetro, mudam suas características físicas. O modelo de Percolação é um exemplo de um modelo matemático que também apresenta transição de fases. Variando p até antes de p_c não temos o surgimento do aglomerado infinito. Quando passamos de p_c , temos determinada a existência de tal aglomerado.

Por analogia com os sistemas físicos que apresentam transições de fases, criou-se a conjectura de que o ponto crítico p_c é a singularidade de certas funções. Acredita-se que existam expoentes críticos que descrevem essa singularidade. Números como o expoente β tal que $\theta(p) \propto (p - p_c)^\beta$ quando $p \downarrow p_c$.

Ao todo são oito expoentes críticos, que passaremos a definir em seguida. Mais uma vez, vale salientar que trata-se de uma conjectura. Não há prova geral para a existência desses expoentes.

4.1 EXPOENTES CRÍTICOS

Definiremos aqui todos os oito expoentes críticos α , β , γ , δ , η , ρ , Δ e ν que, conjectura-se, descrever os importantes comportamentos assintóticos de importantes quantidades na percolação, quando p está próximo a p_c .

4.1.1 Expoente β

Como vimos anteriormente na secção 2.3, a probabilidade de se encontrar um aglomerado percolante $\theta(p) = 1 - E_p(1; |C| < \infty)$ segue um comportamento similar ao da magnetização e conjectura-se que a probabilidade de um sítio pertencer ao aglomerado percolante $\theta(p)$, para $p < p_c$, $\theta(p) = 0$, para $p > p_c$, $\theta(p)$ tem um comportamento que cresce segundo uma lei de potência

$$\theta(p) \propto (p - p_c)^\beta, \quad (4.1)$$

com $\beta > 0$. Em outras palavras

$$\beta = \lim_{p \downarrow p_c} \frac{\log \theta(p)}{\log(p - p_c)}. \quad (4.2)$$

4.1.2 Expoente γ

Fazendo uma média dos tamanhos $\chi(p)$ dos aglomerados em função de p e $\chi^f(p)$ de um aglomerado aberto finito também em função de p , observamos um comportamento como descrito na figura 2.3, assim é razoável acreditarmos que existem $\gamma, \gamma' > 0$ tais que, quando $p \uparrow p_c$

$$\chi(p) \propto (p - p_c)^{-\gamma} \quad (4.3)$$

e quando $p \downarrow p_c$

$$\chi^f(p) \propto (p - p_c)^{-\gamma'} \quad (4.4)$$

interpretando as relações assintóticas de maneira logarítmica. Acredita-se ainda que $\gamma = \gamma'$. Temos para $p < p_c$, $\chi(p) = \chi^f(p)$, assim conjectura-se que

$$\chi(p) \propto |p - p_c|^{-\gamma} \text{ com } p \rightarrow p_c, \quad (4.5)$$

para todo $\gamma > 0$. Em outras palavras

$$\gamma = \lim_{p \rightarrow p_c} \frac{\log \chi^f(p)}{\log |p - p_c|}. \quad (4.6)$$

4.1.3 Expoente α

Definimos a quantidade de aglomerados abertos por sítio da estrutura em uma caixa $B(n)$ por uma função $\kappa(p)$ como

$$\kappa(p) = E_p(|C|^{-1}; |C| < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P_p(|C| = n), \quad (4.7)$$

onde $|C|$ é o número de sítios abertos do aglomerado, este ligado a origem em $B(n)$. Acredita-se que $\kappa(p)$ não é uma função de classe C_3 , isto é, sua derivada de terceira ordem não é contínua em $p = p_c$. Assim, em [2], página 234, podemos encontrar a conjectura de que

$$\kappa'''(p) \propto |p - p_c|^{-1-\alpha} \quad (4.8)$$

quando $p \rightarrow p_c$, onde $-1 < \alpha < 0$.

4.1.4 Expoente Δ

Podemos escrever as funções θ , χ^f e κ como momentos do tamanho $|C|$ do aglomerado, sobre o evento $|C| < \infty$:

$$\theta(p) = 1 - E_p(1; |C| < \infty),$$

$$\chi^f(p) = E_p(|C|; |C| < \infty),$$

$$\kappa(p) = E_p(|C|^{-1}; |C| < \infty).$$

Conjectura-se ainda a existência de um expoente crítico para cada momento condicional $|C|$. Podemos ver em [4] e em [2] pág. 234, a conjectura de que existe $\Delta > 0$ tal que

$$\frac{E_p(|C|^{k+1}; |C| < \infty)}{E_p(|C|^k; |C| < \infty)} \propto |p - p_c|^{-\Delta} \quad (4.9)$$

quando $p \rightarrow p_c$, sempre que $k \geq 1$. A quantidade Δ é chamada de expoente lacuna.

4.1.5 Expoente δ

Sabemos que, quando $p = p_c$, temos $\theta(p_c) = 0$ então $\chi(p_c) = \sum_n n P_{p_c}(|C| = n)$, mas $\chi(p_c) = \infty$, sugerindo que $P_{p_c}(|C| = n)$ decai na forma de uma lei de potência, em função de n . Assim conjecturamos que existe $\delta > 1$ tal que

$$P_{p_c}(|C| = n) \propto n^{-1-1/\delta} \quad (4.10)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

4.1.6 Expoente ρ

Esperamos que a probabilidade da existência um caminho aberto desde a origem até a superfície da caixa $B(n)$, de lado $2n$, da mesma forma que a probabilidade $P_{p_c}(0 \leftrightarrow \partial B(n))$, dada como $P_{p_c}(\text{rad}(C) = n)$, siga também uma lei de potência da forma

$$P_{p_c}(\text{rad}(C) = n) \propto n^{-1-1/\rho}, \quad (4.11)$$

para algum $\rho > 0$, quando $n \rightarrow \infty$, onde o raio de $|C|$ é definido como $\text{rad}(C) = \max\{|x| : x \in C\}$, onde $|x| = d(0, x)$.

4.1.7 Expoente η

Esperamos também que a probabilidade $\tau_{p_c}(0, x)$, de que exista um caminho aberto conectando-se x à origem, siga também uma lei de potência e em [2], página 235, conjectura-se que

$$\tau_{p_c}(0, x) \propto |x|^{-\eta} \quad (4.12)$$

quando $|x| \rightarrow \infty$, para algum η .

4.1.8 Expoente ν

A idéia de *comprimento de correlação*, nos motiva a estudar a probabilidade $\tau_p^f(0, e_n)$, de que a origem e o vetor $e_n = (n, 0, \dots, 0)$ pertençam ao mesmo aglomerado aberto finito. Acredita-se que

$$\tau_p^f(0, e_n) \propto \begin{cases} n^{-\eta} & p = p_c \\ e^{-n/\xi(p)} & p \neq 0, p_c, 1 \end{cases} \quad (4.13)$$

satisfazendo $\xi(p) \rightarrow \infty$ quando $p \rightarrow p_c$. O comportamento de $\tau_p^f(0, e_n)$ quando $p \rightarrow p_c$ e $n \rightarrow \infty$ se dá por $n^{-\eta} f(n/\xi(p))$ para alguma função f quando p está perto de p_c e n é grande. Segundo o Grimmett (1999) não é razoável supor que $\tau_p^f(0, e_n)$ se comporta aproximadamente como $n^{-\eta} f(n/\xi(p))$ para alguma função f quando $p \rightarrow p_c$ e n é grande. Em [2], páginas 126 e 214, tomemos respectivamente os resultados de dois teoremas:

(i) Supondo que $0 < p \leq 1$, existem constantes positivas ρ e σ , independentes de p , e uma função $\varphi(p)$, tal que

$$\rho n^{1-d} e^{-n\varphi(p)} \leq P_p(0 \leftrightarrow \partial B(n)) \leq \sigma n^{d-1} e^{-n\varphi(p)} \quad \forall n \geq 1. \quad (4.14)$$

e que existe uma constante extritamente positiva ζ , independente de p , tal que

$$\zeta p n^{4(1-d)} e^{-n\varphi(p)} \leq \tau_p(0, e_n) \leq e^{-n\varphi(p)} \quad \forall n. \quad (4.15)$$

(ii) Supondo que $0 < p \leq 1$, o limite

$$\mu(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log P_p(0 \leftrightarrow \partial B(n), |C| < \infty) \right\} \quad (4.16)$$

existe e satisfaz $\mu(p) < \infty$. Além de existir uma constante $A(p, d)$, que é finita para $d = 2$, $0 < p \leq 1$, tal que

$$P_p(0 \leftrightarrow \partial B(n), |C| < \infty) \leq A(p, 2) n^2 e^{-n\mu(p)} \quad \forall n. \quad (4.17)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log \tau_p^f(0, e_n) \right\} = \mu(p) \quad (4.18)$$

e

$$\tau_p^f(0, e_n) \leq A(p, 2) n^2 e^{-n\mu(p)} \quad \forall n. \quad (4.19)$$

podemos supor que f é (aproximadamente), uma função exponencial, equivalentemente

$$\frac{\tau_{p_c}^f(0, e_n)}{\tau_p^f(0, e_n)} \propto e^{-n/\xi(p)}, \quad (4.20)$$

quando $p \rightarrow p_c$ e $n \rightarrow \infty$, onde $\xi(p_c) = \infty$. Ou seja, $\tau_p^f(0, e_n)$ e $\tau_{p_c}^f(0, e_n)$ diferem significativamente apenas quando $n/\xi(p)$ é grande. Nesse sentido, $\xi(p)$ é o *comprimento de escala natural*.

Os físicos matemáticos usam o termo ‘comprimento de correlação’, significando a escala mínima em que a percolação com probabilidade p difere qualitativamente em p_c . Assim definimos o comprimento de correlação $\xi(p)$ por

$$\xi(p)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{n} \log \tau_p^f(0, e_n) \right\}, \quad (4.21)$$

pressuposto fundamental da teoria de escala de que existe um comprimento de escala único no sentido acima. Conjecturamos que seu comportamento assintótico, com p próximo a p_c , que existe $\nu > 0$ tal que

$$\xi(p) \propto |p - p_c|^{-\nu}, \quad (4.22)$$

quando $p \rightarrow p_c$.

Nosso método determina inicialmente os expoentes críticos β e ν , no entanto para determinarmos os 6 demais expoentes precisamos das relações de escala, as quais veremos na próxima secção.

4.2 RELAÇÕES DE ESCALA

Partimos de hipóteses principais da teoria do escalonamento sobre o comportamento de certas quantidades, como $P_p(|C| = n)$, válidos para todo p perto do p_c e para todo n grande, para chegar a relações de escala.

Nossa primeira hipótese de escala é que

$$P_p(|C| = n) \propto \begin{cases} n^{-\mu} f_-((n/\xi(p))^\tau) & \text{se } p \leq p_c \\ n^{-\mu} f_+((n/\xi(p))^\tau) & \text{se } p \geq p_c, \end{cases} \quad (4.23)$$

onde μ e τ são constantes positivas, f_- e f_+ são funções infinitamente diferenciáveis em $[0, \infty)$, e a relação \propto é entendida no sentido assintótico significando que ambos os lados da relação convergem para 1 quando $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow p_c$ (a notação μ e τ não é padrão). Supomos $f_-(0) = f_+(0) > 0$ e que $f_-(m) \rightarrow 0$ e $f_+(m) \rightarrow 0$ mais rapidamente do que qualquer potência de m^{-1} quando $m \rightarrow \infty$. A primeira hipótese garante a coincidência das duas relações assintóticas na hipótese passada, quando $p = p_c$, e a segunda implica que o comportamento de $P_p(|C| = n)$ é dominado quando $p \neq p_c$ por uma quantidade que depende apenas da proporção de N a uma potência do comprimento de correlação.

Esta hipótese de escala introduz novos expoentes μ e τ , mas estes são expressos nos termos daqueles expoentes já existentes. Lembramos que $P_{p_c}(|C| = n) \approx n^{-1-1/\delta}$, e deduzimos que

$$\mu = 1 + \delta^{-1} \quad (4.24)$$

Na sequência, $f = f_-$ se $p < p_c$ e $f = f_+$ se $p > p_c$. Temos

$$\begin{aligned}\chi^f(p) &= \sum_n P_{p_c}(|C| = n) \propto \sum_n n^{1-\mu} f(n\xi(p)^{-\tau}) \\ &\propto \int_0^\infty n^{1-\mu} f(n\xi(p)^{-\tau}) dn \\ &= \xi(p)^{\tau(1-\mu)+\tau} \int_0^\infty u^{1-\mu} f(u) du\end{aligned}\quad (4.25)$$

com $u = n\xi(p)^{-\tau}$. Agora $\mu = 1 + \delta^{-1}$ e $\delta \geq 1$, dando que $1 - \mu = -\delta^{-1} \geq -1$. Se $\delta > 1$, temos $1 - \mu > -1$ e depois a integral convergindo. No entanto eliminamos o caso $\delta = 1$, com $1 - \mu = -1$ e a integral divergindo. Sabemos que $\delta \geq 2$ sempre que δ existir, um argumento alternativo do pressuposto de que $\chi^f(p) < \infty$ quando $p \neq p_c$. Supomos então que $\chi^f(p) \propto |p - p_c|^{-\gamma}$ e $\xi(p) \propto |p - p_c|^{-\nu}$ descobrindo que

$$\gamma = \nu\tau(2 - \mu) \quad (4.26)$$

que, em conjunto com $\mu = 1 + \delta^{-1}$, temos

$$\tau = \frac{\gamma}{\nu(1 - \delta^{-1})}. \quad (4.27)$$

Passemos a considerar a probabilidade de percolação $\theta(p)$, e supondo que $p > p_c$. Então

$$\theta(p) = 1 - \sum_n P_p(|C| = n) \text{ se } \theta(p_c) = 0 \quad (4.28)$$

$$= \sum_n \{P_{p_c}(|C| = n)\} \quad (4.29)$$

$$\propto \sum_n n^{-\mu} \{f_+(0) - f_+(n\xi(p)^{-\tau})\} \quad (4.30)$$

$$\xi(p)^{\tau(1-\mu)} \int_0^\infty u^{-\mu} \{f_+(0) - f_+(u)\} du. \quad (4.31)$$

Onde a convergência desta só se dá desde quando o integrando comporta-se como $-u^{1-\mu} f'_+(0)$ perto de $u = 0$. De $\theta(p) = (p - p_c)^\beta$, temos

$$\beta = -\nu\tau(1 - \mu), \quad (4.32)$$

juntando $\mu = 1 + \delta^{-1}$ e $\tau = \frac{\gamma}{\nu(1-\delta^{-1})}$, temos assim

$$\gamma + 2\beta = -\beta(\delta + 1), \quad (4.33)$$

nossa primeira relação de escala.

Em seguida, aplicamos o mesmo argumento para o número $\kappa(p)$ de aglomerados abertos por sítio da função, $f = f_-$ se $p < p_c$ e $f = f_+$ se $p > p_c$. Temos

$$\kappa(p) = \sum_n \frac{1}{n} P_p(|C| = n) \propto \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\mu} f(n\xi(p)^{-\tau}) \quad (4.34)$$

$$\propto \xi(p)^{-\tau\mu} \int_{\xi(p)^{-\tau}}^{\epsilon} u^{-1-\mu} f(u) du \quad (4.35)$$

como antes. Se ϵ é pequeno e positivo, então

$$\int_{\xi(p)^{-\tau}}^{\infty} u^{-1-\mu} f(u) du = \int_{\xi(p)^{-\tau}}^{\epsilon} u^{-1-\mu} f(u) du + \int_{\epsilon}^{\infty} u^{-1-\mu} f(u) du \quad (4.36)$$

$$\propto f(0) \left[-\frac{1}{\mu} u^{-\mu} \right]_{\xi(p)^{-\tau}}^{\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} u^{-1-\mu} f(u) du \quad (4.37)$$

$$= A\xi(p)^{-\tau} + B, \quad (4.38)$$

onde A e B são constantes que dependem ϵ . Substituímos este resultado no anterior e temos

$$\kappa(p) \propto A + B\xi(p)^{-\tau\mu} \propto A + B|p - p_c|^{\nu\tau\mu}. \quad (4.39)$$

Comparamos com a hipótese $\kappa'''(p) \propto |p - p_c|^{-1-\alpha}$, e assim

$$-1 - \alpha = \nu\tau\mu - 3 \quad (4.40)$$

Agora usamos $\mu = 1 + \delta^{-1}$, $\tau = \frac{\gamma}{\nu(1+\delta^{-1})}$ e $\gamma + 2\beta = \beta(\delta + 1)$ para deduzir a segunda relação de escala:

$$2 - \alpha = \gamma + 2\beta. \quad (4.41)$$

Argumenta-se da mesma forma para se obter

$$E_p(|C|^k; |C| < \infty) \propto D_k \xi(p)^{\tau(k+1-\mu)} \quad (4.42)$$

se $k \geq 1$, onde D_k é uma constante que depende de k . Comparando com

$$\frac{E_p(|C|^{k+1}; |C| < \infty)}{E_p(|C|^k; |C| < \infty)} \propto |p - p_c|^{-\Delta} \quad (4.43)$$

com $p \rightarrow p_c$. E assim por $\tau = \frac{\gamma}{\nu(1+\delta^{-1})}$ e $\gamma + 2\beta = \beta(\delta + 1)$ obtemos o expoente lacuna:

$$\Delta = \tau\nu = \delta\beta. \quad (4.44)$$

Introduzimos agora uma nova escala, supomos que

$$P_p(|C| = n) \propto \begin{cases} |x|^{-\eta} g_-(|x|/\xi(p)), & p \uparrow p_c \\ |x|^{-\eta} g_+(|x|/\xi(p)), & p \downarrow p_c, \end{cases} \quad (4.45)$$

para todas as funções suaves g_- e g_+ (infinitamente diferenciáveis) satisfazendo $g_-(0) = g_+(0) > 0$ e $g_-(m) \rightarrow 0$ e $g_+(m) \rightarrow 0$ semelhantemente a função f , no início deste capítulo. Presumivelmente $\tau_p^f(0, x)$ não depende apenas da distância $|x|$ desde a origem até x , mas também sobre a geometria da posição de x . No entanto, é provável que possamos re-escalar $|x|$ de uma forma adequada de acordo com a geometria, com efeito da hipótese acima.

Resumindo, sobre todos os x , obtemos

$$\chi^f(p) \propto \sum_x |x|^{-\eta} g(|x|/\xi(p)). \quad (4.46)$$

O número de sítios x para os quais $|x| = n$ tem a ordem de n , de modo que

$$\chi^f(p) \propto A \sum_n n \cdot n^{-\eta} g(n/\xi(p)) \quad (4.47)$$

$$\propto A \int_n^\infty n^{1-\eta} g(n/\xi(p)) dn \quad (4.48)$$

$$\propto A \xi(p)^{2-\eta} \int_n^\infty u^{1-\eta} g(u) du \quad (4.49)$$

para toda constante A . Não pode ser o caso que $\eta \geq 2$, pois presume-se que $\chi^f(p)$ e $\xi(p)$ divergem em $p = p_c$ na forma de potências negativas de $|p - p_c|$. Assim, $\eta < 2$ e a integral converge, o que implica

$$\chi^f(p) \propto B \xi(p)^{2-\eta} \quad (4.50)$$

para constante B , definimos os expoentes de $|p - p_c|$ ser igual, e obter

$$\gamma = \nu(2 - \eta), \quad (4.51)$$

nossa relação de escala passada.

Passamos agora para as relações de hiper-escala. Seja $p = p_c$ e consideremos

$$\text{rad}(C) = \max \{|x| : x \in C\} \quad (4.52)$$

como sendo o raio do aglomerado aberto na origem. Suponha $\text{rad}(C) \geq k$, para calcular o volume $|C|$, consideremos sítios x de L^2 satisfazendo $|x| \leq k$. Não é muito razoável supor que a proporção de sítios x , ligados à origem, é aproximadamente igual à probabilidade de que tal um sítio pertence a um aglomerado aberto com raio de pelo menos k ; esta probabilidade é de aproximadamente $k^{-1/\rho}$, de modo que

$$|C| \geq k^2 k^{-1/\rho} \quad (4.53)$$

se, e somente se, $\text{rad}(C) \geq k$. Considerando todas as ordens de magnitude e probabilidades de erro. Agora,

$$P_{p_c}(n \leq |C| < \infty) \propto n^{-1/\delta}, \quad (4.54)$$

$$P_{p_c}(k \leq \text{rad}(C) < \infty) \propto k^{-1/\rho}, \quad (4.55)$$

de modo que $|C| \geq k^2 k^{-1/\rho}$ implica

$$\left(2 - \frac{1}{\rho}\right) \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\rho}, \quad (4.56)$$

ou

$$2\rho = \delta + 1. \quad (4.57)$$

A seguir produzimos o argumento da segunda relação de hiper-escala. Seja $T(n) = [1, n]^2$. Neste capítulo, vimos que a parte ‘singular’ de $\kappa(p)$ é a contribuição dos aglomerados abertos com tamanhos de ordens de $\xi(p)^\tau$ ou superior. Considere $K_n(\xi(p)^\tau)$ o número desses aglomerados abertos na caixa de $T(n)$; este não é um conceito particularmente rigoroso, mas seu estilo está em sintonia com o resto do argumento. Se colocarmos $n = \xi(p)$, então o número médio $E_p \{K_m(\xi(p)^\tau)\}$ desses aglomerados não deve variar muito para valores de p perto do p_c . Suponha então que

$$E_p \{K_m(\xi(p)^\tau)\} \propto A \quad (4.58)$$

quando $p \rightarrow p_c$ para toda constante A . Para qualquer m inteiro positivo, podemos pensar de $T(m\xi(p))$, com a inclusão de m^2 cópias de $T(\xi(p))$. Apenas alguns dos aglomerados abertos de $T(m\xi(p))$ com tamanho $\xi(p)^\tau$ ou superior a interseção de duas ou mais dessas cópias, para que

$$E_p \{K_{m\xi(p)}(\xi(p)^\tau)\} \propto m^2 E_p \{K_{\xi(p)}(\xi(p)^\tau)\} \propto Am^2. \quad (4.59)$$

A parte ‘singular’ de $\kappa(p)$ é dado, portanto, por

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{(m\xi(p))^2} E_p \{K_{m\xi(p)}(\xi(p)^\tau)\} \right\} \propto A \xi(p)^{-2} \quad (4.60)$$

por $E_p \{K_{m\xi(p)}(\xi(p)^\tau)\} \propto m^2 E_p \{K_{\xi(p)}(\xi(p)^\tau)\} \propto Am^d$. Deduzimos que

$$2 - \alpha = 2\nu, \quad (4.61)$$

a relação controversa de hiper-escala.

Então há duas hipóteses de escala sobre o comportamento do $P_p(|C| = n)$ e $\tau_p^f(0, x)$ quando n e $|x|$ são grandes, e p é próximo a p_c e estas fornecem fortes provas das suas relações e dois outros argumentos heurísticos conduzem à relações de hiper-escala.

Nó próximo capítulo, veremos o método que utilizamos para a determinação dos expoentes críticos.

Capítulo 5

O ESCALONAMENTO

Vimos na Capítulo sobre fractais que a massa do aglomerado infinito de percolação numa caixa de tamanho L é proporcional a L^2 quando $L > \xi$.

$$M(L) \propto \begin{cases} L^{d_f} & L < \xi \\ L^2 & L > \xi. \end{cases} \quad (5.1)$$

Primeiro dividimos o sistema em caixas de lado ξ , logo o volume L^2 será dividido em $(L/\xi)^2$ caixas. Como o aglomerado tem massa da ordem ξ^{d_f} dentro de cada uma dessas caixas, podemos dizer que a massa total do aglomerado é dada por

$$M(L, \xi) \propto \begin{cases} L^{d_f} & L < \xi \\ \xi^{d_f} (L/\xi)^2 & L > \xi. \end{cases} \quad (5.2)$$

Observe que a probabilidade de um sítio, dentro de uma caixa de tamanho $L < \xi$, de que pertença ao aglomerado percolante é a razão entre o número de sítios do aglomerado, $M_{aglom}(L)$, e o número de sítios na caixa, $M_{caixa}(L)$. Daí,

$$\theta(p) \propto \frac{M_{aglom}(L)}{M_{caixa}(L)} \propto \frac{L^{d_f}}{L^2}. \quad (5.3)$$

Tomando $L = k\xi$, com $k < 1$, segue que

$$\theta(p) \propto \frac{\xi^{d_f}}{\xi^2}. \quad (5.4)$$

Mas $\xi(p) \propto |p - p_c|^\nu$, logo

$$\theta(p) \propto |p - p_c|^{-\nu(d_f-2)}. \quad (5.5)$$

Por outro lado $\theta(p) \propto |p - p_c|^\beta$, donde concluimos que

$$\beta = -\nu(d_f - 2) \Rightarrow d_f = 2 - \frac{\beta}{\nu}. \quad (5.6)$$

Assim, de $\theta(p) \propto \frac{\xi^{d_f}}{\xi^2} \propto (p - p_c)^\beta$, podemos escrever

$$M(L, p) \propto \begin{cases} L^{d_f} & L < \xi \\ (p - p_c)^\beta L^2 & L > \xi. \end{cases} \quad (5.7)$$

Assim, a densidade do aglomerado infinito de percolação $\theta(L, p)$ se comporta como L^{d_f-2} para $L < \xi$. Logo, pela lei de hiper-escala

$$\theta(L, p) \propto \begin{cases} L^{-\beta/\nu} & L < \xi \\ (p - p_c)^\beta & L > \xi. \end{cases} \quad (5.8)$$

Equivalentemente,

$$\theta(L, p) = (p - p_c)^\beta \psi((p - p_c)L^{1/\nu}), \quad (5.9)$$

onde

$$\psi((p - p_c)L^{1/\nu}) \propto \begin{cases} ((p - p_c)L^{1/\nu})^{-\beta} & L < \xi \\ \text{cte.} & L > \xi. \end{cases} \quad (5.10)$$

Por meio do estudo de θ como função do tamanho L do sistema, pretendemos determinar os expoentes críticos β e ν através de resultados obtidos em redes finitas.

Como a rede a ser trabalhada é finita, existe uma probabilidade $\Pi(p)$ de encontrar um aglomerado percolante na concentração p . Na rede infinita, temos $\Pi = 1$ para $p \geq p_c$ e $\Pi = 0$ para $p < p_c$, ou seja, espera-se que Π se comporte como uma função escada quando $L \rightarrow \infty$. Esse comportamento nos diz que o expoente crítico de Π é zero. Então, fazendo uma analogia com o que ocorre com a densidade $\theta(L, p)$, temos

$$\Pi = \psi((p - p_c)L^{1/\nu}) \quad (5.11)$$

para L grande e p próximo a p_c . Derivando essa expressão, obtemos

$$\frac{d\Pi}{dp} = L^{1/\nu} \psi'((p - p_c)L^{1/\nu}). \quad (5.12)$$

Definimos a concentração média p_m como sendo o valor médio de p em que surge um aglomerado percolante. Esse valor é dado por

$$p_m = \int_0^1 p \frac{d\Pi}{dp} dp. \quad (5.13)$$

Observe que

$$p_c = p_c(\Pi(1) - \Pi(0)) = p_c \int_0^1 \frac{d\Pi}{dp} dp = \int_0^1 p_c L^{1/\nu} \psi'((p - p_c)L^{1/\nu}) dp. \quad (5.14)$$

Isso juntamente com as equações 5.12 e 5.13 resulta em

$$p_m - p_c = \int_0^1 (p - p_c) L^{1/\nu} \psi'((p - p_c)L^{1/\nu}) dp. \quad (5.15)$$

Fazendo $L^{1/\nu}(p - p_c) = z$, segue que

$$p_m - p_c = kL^{-1/\nu}, \quad (5.16)$$

com $k = \int z\psi'(z)dz$. Ou seja,

$$p_m - p_c \propto L^{-1/\nu}. \quad (5.17)$$

Esse resultado em conjunção com a equação 5.9 resulta em

$$\theta(L, p_m) \propto L^{-\beta/\nu}, \quad (5.18)$$

o que nos fornece um método para se obter os expoentes críticos β e ν . Para tanto, basta traçar o gráfico log-log de $p_m - p_c$ versus L e encontrar ν . Em seguida, usa-se o valor encontrado para obter β no gráfico log-log de $\theta(L, p_m)$ versus L .

Para realizar o escalonamento de forma mais prática procedemos por testes numéricos de uma estrutura quadrada fornecidos por inúmeras simulações de computador [7], onde determinamos inicialmente os expoentes β e ν , os quais possuem os seguintes valores

<i>Expoente</i>	$d = 2, L \rightarrow \infty$
β	5/36
ν	4/3

5.1 DETERMINAÇÃO DE ν

O expoente crítico relacionado a ξ é ν . Usaremos o método visto no início deste capítulo para determinar esse expoente. Iniciamos com uma aproximação, para vários valores de L , da função $\frac{d\Pi}{dp}$ dada pelo histograma da quantidade de vezes em que o sistema percolou em uma concentração p . Os gráficos de $\frac{d\Pi}{dp}$ e de Π , ambos em função de p , para $L = 256$ podem ser vistos nas figuras 5.1 e 5.2.

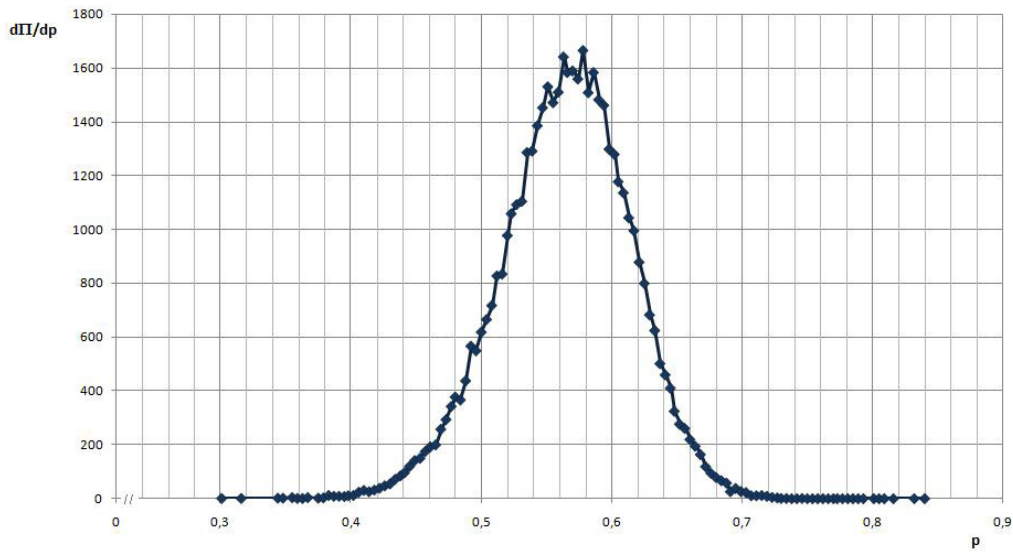


Figura 5.1: Quantidade $d\Pi/dp$ para $L = 256$. Foram feitas 50000 realizações.

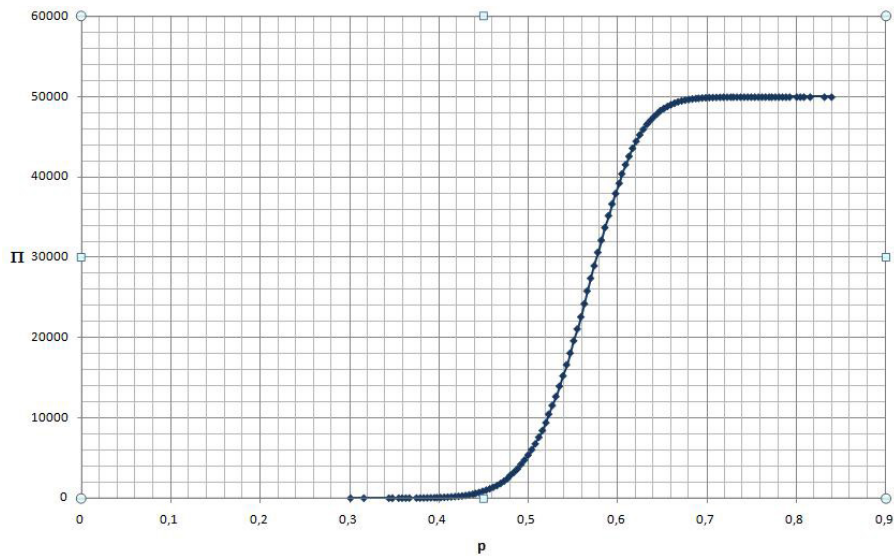


Figura 5.2: Probabilidade Π de encontrar um aglomerado percolante na concentração p em função de p .

Em seguida, encontramos os valores $p_m(L)$ pela integral vista em 5.13 e que repetimos a seguir.

$$p_m = \int_0^1 p \frac{d\Pi}{dp} dp. \quad (5.19)$$

De posse desses valores, pudemos traçar o gráfico de $\ln(p_m(L) - p_c)$ versus $\ln L$. A inclinação dessa curva nos dá ν . A Figura 5.3 ilustra esse processo para uma amostra em torno de p_c . O coeficiente

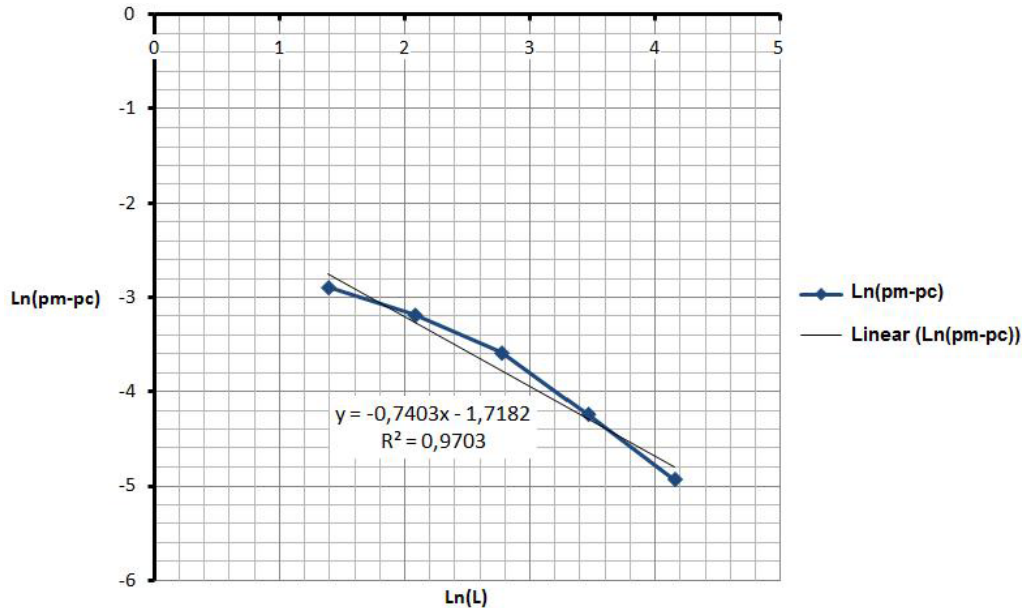


Figura 5.3: Quantidade Π em função de p em torno de p_c , estimando ν .

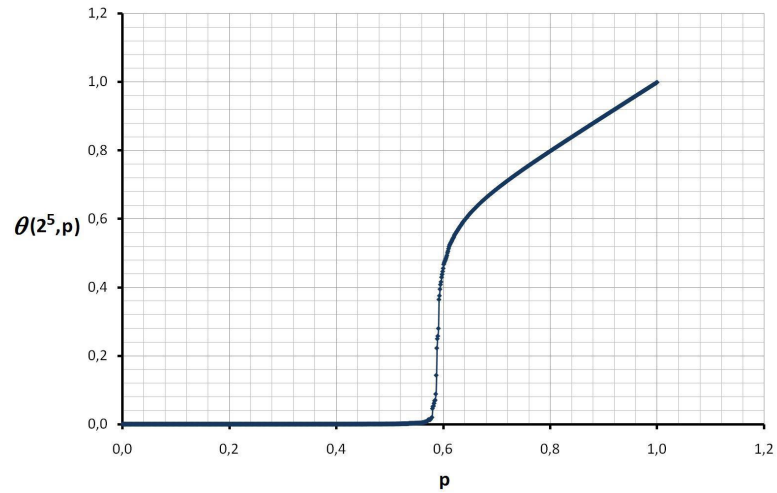
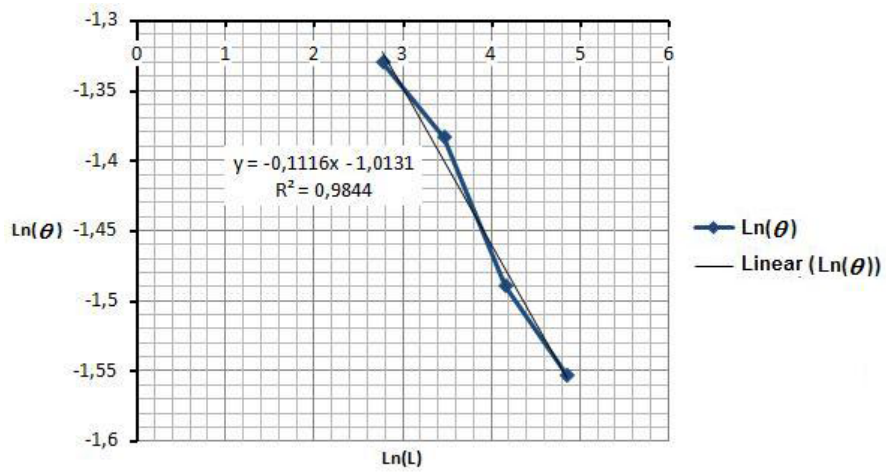
angular da reta na Figura 5.3 nos dá $-1/\nu$. Logo o valor obtido de ν é 1,35.

5.2 DETERMINAÇÃO DE β

Em cada realização do algoritmo de percolação, calculamos a densidade $\theta(L, p)$. Um dos gráficos dessas densidades para $L = 32$ pode ser visto na figura 5.4. Agora o coeficiente angular da reta na figura 5.5 nos dá $-\beta/\nu$. Logo o valor obtido é $\beta = 0,15$.

5.3 DETERMINAÇÃO DE $\delta, \gamma, \Delta, \eta, \rho$ e α

A partir das relações obtidas nas relações de escala do capítulo anterior, estimamos os seis demais expoentes críticos.

Figura 5.4: Gráfico de $\theta(2^5, p)$ versus p .Figura 5.5: Gráfico de $\ln(\theta(L, p_m))$ versus $\ln(L)$.

Em [4] encontramos as próximas quatro leis de escala. Vejamos, de $\beta = \frac{2\nu}{\delta+1}$ e de posse dos valores de β e ν temos

$$\delta = 17$$

Da equação $\gamma = 2\nu \frac{\delta-1}{\delta+1}$ temos

$$\gamma = 2,4$$

Para encontrar Δ tomemos a equação $\Delta = 2\nu \frac{\delta}{\delta+1}$, temos

$$\Delta = 2,55$$

E assim obtemos η através da equação $\eta = \frac{4}{\delta+1}$

$$\eta = 0,22$$

Em [2], tomemos as últimas duas leis de escala. De $2\rho = \delta + 1$ obtemos o expoente ρ

$$\rho = 9$$

E, por fim, α é obtido da equação $2 - \alpha = 2\nu$,

$$\alpha = -0,7$$

Completando assim nosso conjunto dos oito expoentes críticos:

<i>Expoente</i>	<i>Valor Estimado</i>
β	0,15
ν	1,35
δ	17
γ	2,4
Δ	2,55
η	0,22
ρ	9
α	-0,7

As leis de escala e hiper-escala contribuem fortemente para a determinação dos valores acima.

Capítulo 6

CONCLUSÃO

Nosso trabalho fez um levantamento da teoria necessária para abordar o problema de determinação de expoentes críticos em Percolação. Iniciamos esse levantamento apresentando o conceito de percolação. Em seguida, introduzimos os objetos fractais e a noção de dimensão fractal, relacionando esses conceitos com o Capítulo anterior. A dissertação também trata de Teoria de Escala, cuja base repousa na conjectura da existência de leis de potência regidas por expoentes críticos.

A parte central do nosso trabalho foi utilizar o Método de Escalonamento de Tamanho Finito para, numa rede quadrada, determinar os tais expoentes críticos. Começamos encontrando estimativas para p_c , Π e θ por meio de simulações em computador. O Escalonamento leva em consideração os erros provenientes dos tamanhos finitos das redes utilizadas, de forma a eliminar o seu impacto. Determinamos os expoentes β e ν por meio dessas simulações e, em seguida, fizemos uso das relações de hiperescala para determinar os outros seis expoentes críticos restantes.

Referências Bibliográficas

- [1] D. STAUFFER and A. AHARONY. **Introduction to Percolation Theory**. Taylor & Francis, 1994.
- [2] G. GRIMMETT. **Percolation**. 2^a ed. Springer Verlag, 1999.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**, vol. 1 e 4. 3^a ed. LTC Editora, 1989.
- [4] KESTEN, Harry. **Scaling Relations for 2D-Percolation**. Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, NY 14853, USA.
- [5] King PR, Buldyrev SV, Dokholyan NV, et al. - **Predicting oil recovery using percolation** - Physica A 266 (1999) 107-114.
- [6] JAMES, B. R. Probabilidade. **Um Curso em Nível Intermediário**. Rio de Janeiro: IMPA, 1981.
- [7] Joaquim Elias Freitas. Estudo de alguns sistemas complexos: percolação dependente do tempo. aplicação a problemas de petróleo, percolação de longo alcance e modelo de reação-difusão. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN, Fevereiro 2002.

- [8] MAGALHÃES, Marcos Nascimento. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. 2^a ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)