

LEANDRO SANTOS RIBEIRO

**SOLUÇÕES ESTACIONÁRIAS E BIFURCAÇÕES DE SISTEMAS DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E DIFUSIVAS**

**BELÉM
2008**

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

LEANDRO SANTOS RIBEIRO

**SOLUÇÕES ESTACIONÁRIAS E BIFURCAÇÕES DE SISTEMAS DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E DIFUSIVAS**

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME da Universidade Federal do Pará como um pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. JOÃO DOS SANTOS PROTÁZIO

**BELÉM
2008**

Soluções estacionárias e bifurcações de sistemas de equações diferenciais ordinárias e difusivas

por

Leandro Santos Ribeiro

Esta Dissertação foi julgada e aprovada pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Belém, 24 junho de 2008

Prof. Dr. Mauro De Lima Santos
(Coordenador do PPGME - UFPA)

Banca Examinadora

Prof. Dr. João dos Santos Protázio
Universidade Federal do Pará, UFPA
Orientador

Prof. Dr. Elinei Pinto dos Santos
Universidade Federal do Pará, UFPA-PPGF
Examinador

Prof. Dr. Mauro De Lima Santos
Universidade Federal do Pará, UFPA-PPGME
Examinador

Prof. Dr. Valcir João Da Cunha Farias
Universidade Federal do Pará, UFPA-PPGME
Examinador

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus que mesmo no silêncio soube estar presente em todos os momentos da minha vida.

Agradeço à minha família, em especial às minhas genitoras Antônia Santos Ribeiro e Maria da Conceição Santos Ribeiro que sempre me incetivaram a nunca desistir do curso devido às dificuldades.

Agradeço ao meu orientador Prof^o. Dr. João dos Santos Protázio que durante a realização deste trabalho sempre esteve disposto a esclarecer alguns pontos obscuros do trabalho dando sugestões valiosas.

Aos professores Mauro Lima Santos, Elinei Pinto dos Santos e Valcir por aceitarem participar de minha banca de defesa.

Ao amigo e companheiro de Santarém Lucio Alan pela hospedagem e estadia em Belém.

Aos meus amigos Elizabeth e Mangabeira pelos momentos de descontração, estudos durante o curso. Ainda, agradeço a Elifaleth pela amizade e auxílio.

Agradeço aos professores do Departamento da Pós-Graduação de Matemática e Estatística-PPGME por minha formação acadêmica e profissional.

Finalmente, agradeço a todas as pessoas, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho enfatizamos resultados de estabilidade das soluções estacionárias, existência de soluções periódicas e bifurcações para sistema presa-predador com resposta funcional de Holling tipo II e refúgio na presa. Consideramos o modelo predador-presa com função de resposta de Holling tipo III para análise dos mesmos resultados. Algumas simulações numéricas são obtidas dos sistemas com forçamento periódico para a existência de comportamento caótico. No estudo da difusão mostramos o comportamento assintótica das soluções constantes, existência e não-existência de solução positiva não-constante do modelo predador-presa com refúgio na presa e condição de fronteira homogênea de Neumann, usando o método do grau topológico.

Palavras-chave: Modelo predador-presa, Localmente/globalmente assintoticamente estável, comportamento caótico, bifurcação de Hopf, equilíbrio positivo não-constante.

Abstract

In this paper we emphasized results of stability of the solutions steady-state, existence of periodic solutions and bifurcations for system prey-predator with Holling type II functional response and refuge in the prey. We considered the predator-prey model with Holling type III response function for analysis of even results. Some numeric simulations are obtained of the systems with periodic forcing for the existence of chaotic behavior. In the study of the diffusion we showed the behavior asymptotic of the constant solutions, existence and non-existence of non-constant positive solution of the model predator-prey with refuge in the prey and homogeneous Neumann boundary condition, using the topological degree method.

Keywords: Prey-predator model, Locally/globally asymptotically stable, Behavior chaotic, Hopf bifurcation, non-constant positive steady-state.

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Pontos fixos assintoticamente estáveis	5
1.1.1 Soluções máximas de sistemas de equações diferenciais	5
1.2 Estabilidade de pontos fixos	8
1.3 Sistemas Lineares	9
1.4 Sistemas quase-lineares	10
1.5 O caso geral	12
1.6 Estabilidade Segundo Liapunov	12
1.7 Soluções Periódicas	13
1.8 O Grau Topológico de Leray-Schauder	15
2 Soluções estacionárias para sistemas de EDO	17
2.1 Sistema presa-predador com resposta funcional de Holling tipo II	17
2.1.1 Estabilidade local dos pontos fixos	18
2.1.2 Limitação do sistema	19
2.1.3 Comportamento dinâmico	20
2.1.4 Existência de ciclo limite	22
2.2 Sistema presa-predador com resposta funcional de Holling tipo III	24
2.2.1 A análise dos pontos de equilíbrio	26
2.2.2 Comportamento dinâmico	27
2.2.3 Estabilidade global do ponto de equilíbrio não-trivial	28
2.2.4 A existência e unicidade de ciclo limite em torno do ponto de equilíbrio positivo	34

3	Análise do sistema presa-predador forçado	36
3.1	Os sistemas forçados	36
3.2	Métodos de Investigação	38
3.3	Simulação numérica	39
4	Soluções estacionárias para o sistema de EDP	46
4.1	Resultados Fundamentais	46
4.2	O comportamento assintótico de soluções tempo-dependentes	49
4.2.1	Atrator Global	49
4.3	Estabilidade de Equilíbrio não-negativo	50
4.3.1	Bifurcação de Hopf	54
4.4	Pontos de equilíbrio positivo não constante	55
4.5	Uma limitação superior e inferior	55
4.6	Existência do equilíbrio positivo não-constante	58
5	Considerações finais	63

Introdução

Este trabalho aborda soluções de problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias e parciais. As questões que envolvem a existência de solução são prescrita nos resultados preliminares da seguinte equação:

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Uma extensão do problema acima com difusão têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f(u), & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Considerando $f(u) = u(1 - u)$ esta função descreve a dinâmica da equação logística. Este modelo descreve o crescimento de bactérias e o termo de difusão relaciona o fluxo da espécie em meios menos concentrados para meios mais concentrados em um ambiente fechado.

Os problemas da natureza envolvem processos físicos, químicos, biológicos, ecológicos, econômicos, dentre outros, que podem ser modelados por sistemas de equações diferenciais ordinárias e parciais.

Nosso interesse concentrará em problemas da ecologia matemática, com as seguinte equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xh(x) - y\varphi(x) \\ \frac{dy}{dt} = y(-d + \varphi(x)); \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = xh(x) - y\varphi(x) \\ v_t - \Delta v = y(-d + \varphi(x)). \end{cases} \quad (2)$$

Estamos interessados em soluções de equilíbrio (estacionária) dos sistemas (1)-(2), isto é, quando $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ e $u_t - \Delta u = v_t - \Delta v = 0$. A análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio é efetuada. A busca de solução para este modelo é feita para $x > 0$, $y > 0$, isto é, o plano \mathbb{R}_+^2 . Usando resultados de existência de solução periódica, mostramos a existência de ciclo limite no sistema (1) com resposta funcional de Holling tipo II. Além disso, discutimos o sistema (1) com resposta funcional de Holling do tipo II, $\varphi(x) = \frac{mx}{a+x}$, quando incorpora-se um refúgio constante na densidade da presa, sendo $m \in [0, 1)$. A quantidade $(1-m)x$ avalia o quanto da densidade da presa está disponível ao predador. Na análise assintótica dos pontos estacionários, verificamos a condição de existência de um par de autovalores imaginários, condição que garante a existência da bifurcação de Hopf. Estes resultados são vistos no artigo de Kar [18].

Na situação em que $\varphi(x) = \frac{x^2}{\beta^2 + x^2}$ consideramos a existência de equilíbrios. Estudamos propriedades de estabilidade e instabilidade dos pontos de equilíbrios e a existência de ciclo limite para o sistema (1). Descremos a natureza local e global dos pontos de equilíbrios existentes em \mathbb{R}_+^2 [2].

Discutimos a estabilidade de solução positiva constante para o sistema de equação diferencial parcial associado de equação diferencial ordinária (1) com difusão. O modelo presa-predador estudado aqui considera o ambiente espacialmente homogêneo, o refúgio na densidade da presa e a resposta funcional de Holling II. Assim, o sistema (2) ganha a seguinte forma:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \alpha u \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{\beta muv}{1 + amu}, \\ v_t - \Delta v = -rv + \frac{c\beta muv}{1 + amu} & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } (0, \infty) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

As soluções constantes analisadas deste problema parabólico são descritas no artigo [19]. As soluções de equilíbrio por sua vez são soluções do problema elíptico associado. Mas, uma questão levantada é a existência e não-existência de soluções positivas não-constantes do sistema elíptico seguinte que depende da constante $m \in (0, 1]$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha u \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{\beta muv}{1 + amu}, \\ -\Delta v = -rv + \frac{c\beta muv}{1 + amu} & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } (0, \infty) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Recentemente muitos problemas de dinâmica de população, isto é, modelos de interação presa-predador, são investigados com respeito ao efeito impulsivo, em que faz-se uso da teoria impulsiva de equações diferenciais para obter resultados como comportamento assintótico das soluções de equilíbrio, bifurcações de Hopf, soluções periódicas, etc. Sobre isto podemos citar [16, 33, 36, 37]. Outros interesses sobre equações com "time-delay" ou retardo(tempo pré-fixado) têm sido fontes de pesquisas em sistemas presa-predador com respeito à análise da estabilidade das soluções de equilíbrio [29, 32] e, em estado inicial, a classe de problemas de equações diferenciais impulsivas com retardo pode ser citado [17]. Temos ainda problemas de reação-difusão de interações de espécies com tempo fixado não-local [34] e "time-delay" infinito [1, 35]. Em Yan [15] destaca-se a estabilidade e a bifurcação de Hopf para sistemas presa-predador retardado com efeito difusivo.

Outros problemas estudados por [8] são problemas à derivadas parciais, cujas formas são:

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}_1 u = f(t, x, u, v) \text{ em } (0, \infty) \times \Omega, \\ v_t + \mathcal{L}_2 v = g(t, x, u, v) \text{ em } (0, \infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) \text{ em } \Omega, \\ u(t, x) = v(t, x) = 0 \text{ sobre } [0, \infty) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

sendo Ω um domínio limitado de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ com fronteira $\partial\Omega$ suficientemente regular, u_0 e v_0 funções de reação e \mathcal{L}_k , $k = 1, 2$ operadores elípticos de segunda ordem da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_k := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^k(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^k(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c^k(x),$$

sendo a_{ij}^k , b_i e c^k funções suficientemente regulares sobre $\bar{\Omega}$.

As soluções estacionárias do sistema (4.3) são motivos de estudo por Fernández [8] que também analisa problemas difusivos lineares com condição de Dirichlet da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = f(x, u, v) \text{ em } \Omega, \\ \mathcal{L}_2 v = g(x, u, v) \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Em Murray [21] temos o sistema estacionário de Lotka-Volterra, isto é,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = u(\lambda - a(x)u \pm b(x)v) \text{ em } \Omega, \\ \mathcal{L}_2 v = v(\mu - d(x)v \pm c(x)u) \text{ em } \Omega, \\ u = v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5)$$

sendo a, b, c, d funções sobre $\bar{\Omega}$ suficientemente regulares e satisfazendo $a(x) > 0, d(x) > 0$ para $x \in \Omega$ e $b > 0$ e $c > 0$ em Ω , e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u(x)$ e $v(x)$ as densidades populacionais das espécies e Ω o "habitat" de ambas. As funções $a(x)$ e $d(x)$ descrevem o controle de crescimento através do mecanismo de competição intra-específica de cada espécie.

Fernández [8] destaca soluções chamadas de estados de coexistência, cujas componentes são não-negativas e não triviais. As respostas sobre a existência e não existência de estados de coexistência fazem uso de métodos da Análise Funcional não linear, como sub-solução e seus métodos iterativos associados e a teoria do grau topológico em índice de pontos fixos.

Este trabalho é dividido em quatro capítulos: no Capítulo 1 serão apresentados os teoremas gerais sobre existência, unicidade e intervalos maximais de soluções de sistemas equações diferenciais lineares, quasi-lineares e não-lineares. Além disto, serão apresentados resultados sobre estabilidade dos pontos de equilíbrio, existências de ciclo limite e da bifurcação de Hopf das referidas equações; no Capítulo 2, serão estudadas duas classes de problemas particulares: (a) modelo presa-predador com resposta funcional de Holling tipo II e refúgio na presa [18]; (b) modelo presa-predador com resposta funcional de Holling tipo III [18]; no Capítulo 3 serão feitas as análises dos modelos predador-presa descritos no capítulo 2, com intuito de caracterizar o comportamento caótico dos modelos com o efeito sazonal através de simulações numéricas; finalmente, no capítulo 4 destacamos um caso particular do modelo predador-presa de (2), com resposta funcional de Holling tipo II e refúgio constante, cujos resultados mostram a existência de atrator global, a propriedade de persistência para soluções, a estabilidade de soluções não-negativas constantes, a existência da bifurcação de Hopf e a existência e a não existência de soluções positivas constantes do problema elíptico associado uma uma gama de parâmetros m , que controlam a incorporação de refúgio no modelo, usando a Teoria do Grau de Leray-Schauder [19].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão enunciados resultados que, posteriormente, serão utilizados na obtenção das soluções estacionárias e de seu comportamento assintótico, incluindo teoremas de existência e teoremas tipo Gronwall e uma breve introdução aos sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) linear e não-linear no sentido da estabilidade local dos pontos fixos. Por fim, serão enunciados resultados da Teoria do Grau Topológico de Leray-Schauder para existência de solução de equilíbrio não-constante.

1.1 Pontos fixos assintoticamente estáveis

1.1.1 Soluções máximas de sistemas de equações diferenciais

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e simplesmente conexo e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 . Apresentaremos nesta subseção as condições de estabilidade dos pontos fixos de sistemas de equações diferenciais ordinárias da forma

$$x' = f(x). \tag{1.1}$$

Seja J um intervalo aberto. Uma solução do sistema (1.1) é uma função diferenciável $\varphi : J \rightarrow \Omega$ tal que para todo $t \in J$, $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$.

No instante t_0 em que começamos a observar uma solução, teremos que x_0 é valor assumido por ela. Chamamos o par ordenado $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(t_0) = x_0$ de condição inicial.

A seguir enunciaremos o Lema da Contração.

Lema 1.1 (*Lema da Contração.*) *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \rightarrow X$ uma contração, isto é, $d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y)$, $0 \leq K < 1$. Existe um único ponto fixo*

p , por F , isto é, $F(p) = p$. Mais ainda, p é um atrator de F , isto é, $F^n(x) \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$. $F^n(x)$ é definido por $F(F^{n-1}(x))$.

Demonstração. ver [14].

Teorema 1.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função C^1 e $x_0 \in \Omega$. Então existe uma única solução φ do sistema (1.1), satisfazendo à condição inicial $\varphi(t_0) = x_0$.*

Demonstração. Vamos denotar por $|\cdot|$ o módulo em \mathbb{R} e por $\|\cdot\|$ a norma usual de $\mathbb{R}^n(x_0)$. Seja $B_r(x_0) = \{x \in \Omega; \|x - x_0\| \leq r\}$ a bola fechada de centro em x_0 e raio r , tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$. Para todo $x \in B_r(x_0)$, temos $\|f(x)\| < M$, pois uma função contínua em um compacto é limitada. Além disso, como f é C^1 ela é Lipschitz contínua e existe $K > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$, para todo $x, y \in B_r(x_0)$. Consideremos o intervalo $I_{\alpha(t_0)} = \{t \in \mathbb{R}; |t - t_0| \leq \alpha\}$ com $\alpha = \min\{r/M, 1/K\}$ e seja $C(I_{\alpha(t_0)}, B_r(x_0))$ o espaço de funções contínuas $I_{\alpha(t_0)} \rightarrow B_r(x_0)$, que é completo com a métrica $d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_{\alpha}} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$.

Para cada $\varphi \in C(I_{\alpha(t_0)}, B_r(x_0))$, seja

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\varphi(s))ds.$$

Como

$$\|F(\varphi)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(\varphi(s))ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(\varphi(s))\|ds \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq r,$$

temos $F(\varphi)(t)$ está na bola $B_r(x_0)$ quando $t \in I_{\alpha(t_0)}$. Assim $F(C(I_{\alpha(t_0)}, B_r(x_0))) \subset C(I_{\alpha(t_0)}, B_r(x_0))$.

Além disso, se φ é solução do sistema (1.1) com $\varphi(t_0) = x_0$ então $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ e pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\varphi(s))ds = F(\varphi(t)).$$

Reciprocamente, se φ é tal que $\varphi(t) = F(\varphi(t))$ então $\varphi(t_0) = x_0$ e, derivando em relação a t , teremos $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$. Assim, uma solução do sistema (1.1) corresponde a um ponto fixo da aplicação F .

Afirmamos que para n suficientemente grande, F^n é uma contração. Para mostrarmos este resultado, consideremos qualquer par $\varphi_1, \varphi_2 \in C(I_{\alpha(t_0)}, B_r(x_0))$. Temos que

$$\|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)\| \leq K^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$$

com $t \in I_\alpha(t_0)$. Verificaremos este fato por indução em n . Se $n = 1$ temos que

$$\begin{aligned} \|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(\varphi_1(s)) - f(\varphi_2(s))\| ds \leq \int_{t_0}^t K \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \\ &= \int_{t_0}^t K d(\varphi_1, \varphi_2) ds \leq K|t - t_0| d(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

Suponhamos que nossa desigualdade seja válida para r . Mostraremos que vale para $r + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} \|F^{r+1}(\varphi_1(t)) - F^{r+1}(\varphi_2(t))\| &= \|F(F^r(\varphi_1))(t) - F(F^r(\varphi_2))(t)\| \leq \\ &\left\| \int_{t_0}^t \|f(F^r(\varphi_1(s))) - f(F^r(\varphi_2(s)))\| ds \right\| \leq \left\| \int_{t_0}^t K \|F^r(\varphi_1(s)) - F^r(\varphi_2(s))\| ds \right\| \leq \\ &K \left\| \int_{t_0}^t \frac{K^r(t_0 - s)^r}{r!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds \right\| = \frac{K^{r+1}}{r!} d(\varphi_1, \varphi_2) \left\| \int_{t_0}^t (t_0 - s)^r ds \right\| = \\ &\frac{K^{r+1}}{r!} d(\varphi_1, \varphi_2) \frac{|-(t_0 - t)^{r+1}|}{r + 1} = \frac{K^{r+1}|t - t_0|^{r+1}}{(r + 1)!} d(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

sendo uma desigualdade válida pela hipótese de indução.

Portanto,

$$d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$$

e para n suficientemente grande $\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1$, pois este é o termo geral da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha K)^n}{n!}$, convergindo, portanto, a zero. Assim, F^n é uma contração. Então, pelo lema 1.1 existe um único ponto φ fixo por F . De fato, seja φ o ponto fixo atrator de F^n dado pelo Lema da Contração, isto é,

$$F^n(\psi) \rightarrow \varphi \text{ quando } n \rightarrow \infty, \text{ para toda } \varphi \in C(I_\alpha(t_0), B_r(x_0)).$$

Observemos que se $\psi \in C(I_\alpha, B_r(x_0))$, então $F^n \rightarrow \varphi$. Como também $F^n(F(\psi)) \rightarrow \varphi$, já que $F(\psi) \in C(I_\alpha(t_0), B_r(x_0))$. Logo

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(F(\psi)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(\psi) = F \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\psi) \right) = F(\varphi),$$

pois F é contínua.

Assim, como existe uma única φ tal que $F(\varphi) = \varphi$, temos que a solução procurada do sistema (1.1) satisfaz

$$F(\varphi(t)) = \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\varphi(s)) ds$$

■

A função φ é contínua e diferenciável, pois é solução do sistema de equações diferenciais.

Definição 1.1 *Chama-se solução máxima do sistema (1.1) a toda solução φ definida num intervalo I , denominado intervalo máximo de φ , tal que Ψ é uma outra solução em um intervalo J com $J \supseteq I$ e $\varphi = \Psi|_I$, então $I = J$. Em outras palavras, φ é máxima se não admite nenhuma extensão que também seja solução.*

Observemos que se a solução local é única, então a solução máxima também é única.

Lema 1.2 *Seja f contínua num domínio Ω de \mathbb{R}^n . Se $\varphi(t)$ é uma solução máxima única de (1.1) definida em (ω_+, ω_-) então a aplicação $\varphi(t)$ tende a fronteira $\partial\Omega$ quando $t \rightarrow \omega_+$ ou $t \rightarrow \omega_-$.*

1.2 Estabilidade de pontos fixos

Definição 1.2 *Seja φ uma solução do sistema (1.1). Se $\varphi(t) = x_0$, para todo t temos que x_0 é ponto fixo do sistema (1.1).*

Lema 1.3 *Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$, x_0 é ponto fixo do sistema (1.1), se e somente se, $f(x_0) = 0$.*

Definição 1.3 *Um ponto fixo x_0 do sistema (1.1) com $x \in \Omega$, é estável quando para toda vizinhança U de x_0 existe uma vizinhança $U_1 \subset U$ de x_0 tal que toda solução $\varphi(t)$ com $\varphi(0) \in U_1$ está definida, sendo que $\varphi(t)$ está em U para todo $t \geq 0$.*

Definição 1.4 *O ponto fixo é assintoticamente estável se existe uma vizinhança U_1 que pode ser escolhida de tal maneira que além das propriedades acima, o $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = x_0$.*

Definição 1.5 *Um ponto fixo isolado x^* do sistema de equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ é dito globalmente assintoticamente estável se é estável e se a solução $\varphi(t; t_0, x_0)$ satisfaz $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t; t_0, x_0) = x^*$ para todo ponto inicial x_0 .*

1.3 Sistemas Lineares

Suponhamos $f(x) = Ax$, sendo A é uma matriz real de ordem n . Então a origem $0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fixo de $x' = Ax$ e toda solução é da forma $\varphi(t) = e^{tA}x$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Observemos que a solução satisfazendo a uma determinada condição inicial é única uma vez que toda aplicação linear $f(x) = Ax$ é contínua e derivável em \mathbb{R}^n , com derivada contínua.

Consideremos dois sistemas lineares $x' = Ax$ e $x' = Bx$ e suponhamos que seja de nosso interesse compará-los. Uma pergunta natural seria: qual a estrutura relevante a ser comparada? Podemos dizer que são as soluções dos sistemas. Assim, gostaríamos que qualquer noção de equivalência preservasse, de alguma forma, as soluções. Para fazermos uma comparação deste tipo, contaremos com a ajuda das conjugações, que apresentamos abaixo.

Definição 1.6 *Sejam $x' = Ax$ e $x' = Bx$ dois sistemas lineares e $\varphi(t, x) = e^{tA}x$, $\psi(t, x) = e^{tB}x$ as respectivas soluções. Os sistemas são ditos conjugados se existe uma bijeção $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, chamada de conjugação, tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ tem-se*

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x)).$$

Se h for um isomorfismo linear (transformação linear bijetiva) ou um homeomorfismo (bijeção contínua cuja inversa também é contínua) dizemos que $x' = Ax$ e $x' = Bx$ são linearmente conjugados ou topologicamente conjugados, respectivamente.

Definição 1.7 *Duas matrizes A e B , são similares se existe uma matriz C inversível tal que $A = C^{-1}BC$, ou seja, $CA = BC$.*

Lema 1.4 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) 0 é ponto fixo assintoticamente estável de $x' = Ax$.
- (ii) Todos os autovalores de A têm parte real negativa.
- (iii) Existem μ e $K \geq 1$ tais que $\|e^{tA}x\| \leq Ke^{-\mu t}\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$.
- (iv) O sistema $x' = Ax$ é topologicamente conjugado a $x' = -x$.

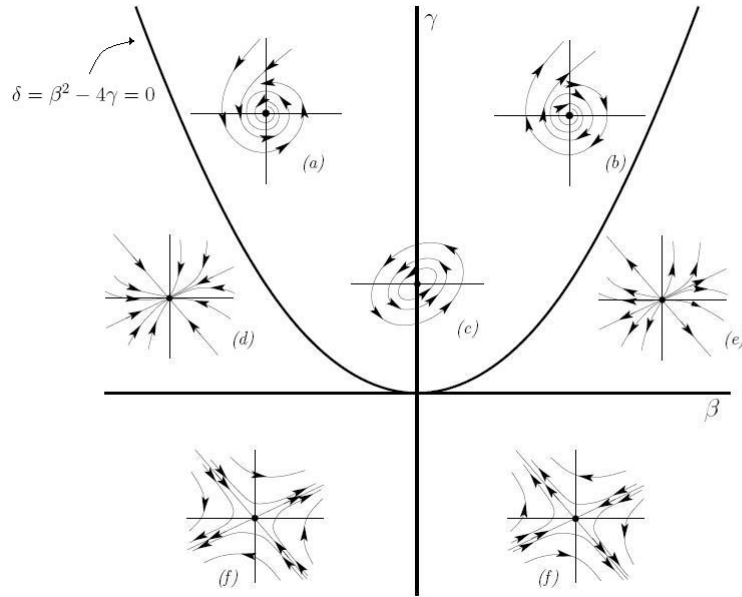


Figura 1.1: Diagrama de estabilidade do sistema $x' = Ax$. (a) espiral estável, (b) espiral instável, (c) centro, (d) nó estável, (e) nó instável, (f) ponto de sela.

1.4 Sistemas quase-lineares

Consideremos o sistema quase-linear

$$x' = Ax + g(x), \quad (1.2)$$

sendo A uma matriz real de ordem n , g uma função C^1 , com $g(0) = g'(0) = 0$ e $g(x) = \mathcal{O}(\|x\|)$, o que representa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = 0$.

O lema a seguir é um resultado importante para sistemas do tipo (1.2).

Lema 1.5 (*Desigualdade de Gronwall ver [25]*) *Sejam u, v funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que $\alpha \geq 0$, satisfazem a*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [a, b].$$

Então,

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Em particular, se $\alpha = 0$, então $u \equiv 0$.

Teorema 1.2 *Consideremos o sistema quase linear*

$$x' = Ax + g(x), \quad x \in \Omega_b,$$

sendo $\Omega_b = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < b\}$, A uma matriz de ordem n cujos autovalores têm parte real negativa, g C^1 e $g(x) = \mathcal{O}(\|x\|)$. Então a solução nula é assintoticamente estável.

Demonstração. Observemos que o fato de g ser C^1 garante que o sistema quase-linear tem solução única em todo ponto.

Segue do lema 1.4 que existem $\mu > 0$ e $K \geq 1$ tais que $\|e^{tA}\| \leq Ke^{-t\mu}$, $\forall t \leq 0$. Pela continuidade de g , existe $\delta_1 > 0$ para qual $\|x\| < \delta_1$ implica $\|g(x)\| \leq \frac{\mu}{2K}\|x\|$. Dado $\|x\| < \delta = \frac{\delta_1}{K}$, seja $\varphi(t)$ a solução de $x' = Ax + g(x)$ em Ω_{δ_1} , com $\varphi(0) = x$ e intervalo maximal (ω_-, ω_+) . Sabemos que

$$\varphi(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}g(\varphi(s))ds,$$

para todo $t \in (\omega_-, \omega_+)$. Como $\|\varphi(t)\| \leq \delta_1 \forall t$, isto implica, para $t \geq 0$,

$$\|\varphi(t)\| \leq \|e^{tA}\| \|x\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\| \|g(\varphi(s))\| ds,$$

ou seja,

$$\|\varphi(t)\| \leq Ke^{-\mu t} \|x\| + K \int_0^t e^{-\mu(t-s)} \|g(\varphi(s))\| ds,$$

donde

$$e^{\mu t} \|\varphi(t)\| \leq K \|x\| + \frac{\mu}{2} \int_0^t e^{s\mu} \|\varphi(s)\| ds.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (1.5), onde $u(t) = e^{\mu t} \|\varphi(t)\|$, $\alpha = K \|x\|$ e $v(s) = \frac{\mu}{2}$ temos $\int_0^t v(s) ds = \frac{\mu t}{2}$ e

$$e^{\mu t} \|\varphi(t)\| \leq K \|x\| e^{\frac{\mu}{2} t}, \quad t \geq 0.$$

Portanto, $\|\varphi(t)\| \leq \delta_1 e^{-\frac{\mu}{2} t}$, $t \geq 0$. Afirmamos que $\omega_+ = \infty$. Se não, teríamos pelo Lema (1.5)

$$\delta_1 = \lim_{t \rightarrow \omega_+} \|\varphi(t)\| \leq \delta_1 e^{-\frac{\mu}{2} \omega_+} < \delta_1,$$

o que é absurdo. Portanto, $\omega_+ = \infty$ e é imediato concluir que a solução nula é assintoticamente estável a partir da desigualdade

$$\|\varphi(t)\| \leq \delta_1 e^{-\frac{\mu}{2} t}, \quad \text{se } \|\varphi(0)\| < \delta.$$

1.5 O caso geral

Agora, seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $f \in C^1$. A estabilidade dos pontos de equilíbrios segue sem perda de generalidade considerando x_0 ponto de equilíbrio para f o que por uma translação $x - x_0$ será ponto de equilíbrio. Suponhamos assim, $x_0 = 0$, e f de classe C^1 , com $f(0) = 0$ então para uma vizinhança U de 0 teremos

$$f(x) = Jf_{(0)}(x) + g(x), \quad \forall x \in U,$$

em que $Jf_{(0)}$ representa a matriz jacobiana. Como $f(x)$ é C^1 segue que g é:

(i) de classe C^1 ;

(ii) $\mathcal{O}(\|x\|)$.

Da expansão em série de Taylor de f em x_0 ,

$$f(x + x_0) = f(x_0) + \frac{1}{2}Jf_{(0)}(x) + g(x).$$

Note que do fato de $\mathcal{O}(\|x\|)$, e $g(0)=g'(0)=0$, resulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\|x\|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{\|x - 0\|} = g'(0) = 0.$$

Portanto, a linearização nos informa que a estabilidade do problema não-linear pode ser feito via análise dos autovalores do problema linearizado.

1.6 Estabilidade Segundo Liapunov

Definição 1.8 *Sejam $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in E$ um ponto de equilíbrio de f e $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua numa vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 . Dizemos que U é uma **função de Liapunov** para f em x_0 se*

(i) $V(x_0) = 0$, com $V(x) > 0$ para cada $x \in U - x_0$ e

(ii) $V(\phi(t_1, x)) \geq V(\phi(t_2, x))$ para quaisquer $x \in \Omega$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\phi(t_1, x), \phi(t_2, x) \in U$.

Teorema 1.3 (Teorema de Liapunov) *Seja x_0 um ponto de equilíbrio de um campo vetores $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se existe uma função de Liapunov para f em x_0 , então x_0 é um ponto de equilíbrio estável de f .*

Demonstração. ver [5].

Teorema 1.4 (Teorema de Lyapunov) *Seja x_0 um ponto de equilíbrio de um campo vetores $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se existe uma função de Liapunov estrita para f em x_0 , então x_0 é um ponto de equilíbrio estável de f .*

Demonstração. ver [5].

Enunciaremos o Teorema do Hartman-Grobman, que nos garante por uma análise linear simples, a possibilidade de determinar a estabilidade da pontos fixos do sistema não-linear (1.1), e, portanto, para determinar a comportamento assintótico das soluções do sistema não-linear basta analisar o campo linear $Df(x_0)$, isto é, analisar os autovalores com parte real negativa do campo linear.

Teorema 1.5 (Grobman-Hartman) *Seja $x_0 \in E$ um ponto de equilíbrio do campo de vetores $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 definido no aberto $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se x_0 é uma singularidade hiperbólica, então f em x_0 é localmente topologicamente conjugado ao campo linear $Df_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ em 0.*

Demonstração. ver [14]

1.7 Soluções Periódicas

Nesta seção declaramos alguns dos critério de existência e não-existência de solução periódica (ciclo limite) de um sistema no plano da seguinte forma:

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases} \quad (1.3)$$

Desta forma enunciamos os seguintes resultados:

Definição 1.9 *Seja f um campo C^1 definido num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma órbita periódica ω de Ω é um **ciclo limite** se existir uma vizinhança U de ω tal que ω é a única órbita fechada que intercepta U .*

Teorema 1.6 (Poincaré-Bendixson ver [25]) *Se para $t \geq 0$ a trajetória $(x(t), y(t))$ do sistema (1.3) é limitada no plano- xy e não se aproxima de um estado de equilíbrio, então a trajetória $(x(t), y(t))$ é fechada ou se aproxima de uma trajetória fechada quando $t \rightarrow \infty$ (ciclo limite).*

Teorema 1.7 (Critério de Dulac ver [25]). *Seja $\beta(x, y)$ continuamente diferenciável numa região simplesmente conexa $D \subset \mathbb{R}^2$ e suponha que*

$$\frac{\partial(\beta f)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta g)}{\partial y}$$

seja estritamente positivo ou estritamente negativo em D . Então não existe trajetórias fechadas em D .

Definição 1.10 *Seja f um campo C^1 definido num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma órbita periódica ω de Ω é um **ciclo limite** se existir uma vizinhança U de ω tal que ω é a única órbita fechada que intercepta U .*

Estabelecemos as condições existentes no Teorema de Poincaré-Bendixson 1.6 para existência de ciclo limite para sistemas planares. Mas, uma questão que surge é o número exato de ciclos limites de sistemas ou classes de sistemas dependente de parâmetros. Desta forma, recaímos em um resultado clássico sobre unicidade de ciclo limite para sistemas da forma:

$$\begin{aligned} x' &= y - F(x) \\ y' &= -g(x) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Sendo $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$ e $G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi$. O teorema a seguir estabelece condições sobre a singularidade do sistema (1.4).

Teorema 1.8 (Teorema de Zhang Zhifen[25]) *Suponhamos que $a < 0 < b$, $F, g \in C^1(a, b)$, $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$, $G(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow a$ se $a = -\infty$ e $G(x) \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow b$ se $b = \infty$, $f(x)/g(x)$ é monótona crescente sobre $(a, 0) \cap (0, b)$ e não é constante em nenhuma vizinhança de $x = 0$, segue-se que o sistema (1.4) tem, no máximo, um ciclo limite na região $a < x < b$, e este existe e é estável.*

Do Teorema de Zhang 1.8 podemos supor que f, g são continuamente diferenciável numa região R . Então, o sistema de Lienard (1.4), satisfará as condições abaixo:

(C₁) $xg(x) > 0$ se $x \neq 0$ com $G(x) = \int_0^x g(\xi)d\xi$;

(C₂) $\frac{f(x)}{g(x)}$ é crescente para $(-\infty, 0), (0, +\infty)$, e $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ em uma vizinhança da origem.

Então, o sistemas de Lienard tem, no máximo, um ciclo limite. Além disso, quando existe tal ciclo limite ele será estável.

1.8 O Grau Topológico de Leray-Schauder

Apresetaremos, aqui, a função grau, que nos informa sobre a existência, unicidade ou multiplicidade de solução para equações da forma $\varphi(x) = b$, onde X é um espaço de Banach real, $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega, X)$, $\Omega \subset X$ é aberto e limitado, e b é um ponto dado de X . Denotaremos esta função por *deg*. Ela associa a cada tripla (φ, Ω, b) , um número inteiro, $\text{deg}(\varphi, \Omega, b)$, que é o grau de φ com respeito a Ω e a b . Definimos o grau em duas situações. A primeira contemplando as perturbações de dimensão finita da identidade, e a segunda, abrangendo as perturbações compactas da identidade, que é, de fato, a definição do grau de Leray-Schauder.

Definição 1.11 *Seja $T : \Omega \rightarrow X$.*

- (i) *Dizemos que T é um operador de posto finito se $T(\Omega)$ está contido num subespaço de dimensão finita de X ;*
- (ii) *chamamos $\Phi = I - T : \Omega \rightarrow X$ perturbação de dimensão finita da identidade quando T é um operador de posto finito.*

Definição 1.12 *Sejam $b \in X \setminus \Phi(\partial\Omega)$ e F um subespaço de dimensão finita de X contendo $T(\overline{\Omega}) \cup b$. Definimos,*

$$\text{deg}(\Phi, \Omega, b) := \text{deg}(\Phi|_{\overline{\Omega} \cap F}, b).$$

Definição 1.13 *Seja $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$.*

- (i) *Dizemos que T é um operador compacto se é contínuo sobre $\overline{\Omega}$ e se $T(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto, ou seja, $\overline{T(\overline{\Omega})}$ é compacto;*
- (ii) *chamamos $\Phi = I - T : \overline{\Omega} \rightarrow X$ uma perturbação compacta da identidade quando T é um operador compacto.*

Lema 1.6 *Sejam $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$ um operador compacto, $\Phi = I - T$ uma perturbação compacta da identidade e $b \in X \setminus \Phi(\partial\Omega)$. Então,*

- (i) *Φ é uma aplicação fechada, isto é, a imagem por Φ de um fechado é um fechado;*
- (ii) *Φ é uma aplicação própria, isto é, a imagem inversa por Φ de um compacto é um compacto;*

(iii) Seja $r = \text{dist}(b, \Phi(\partial\Omega)) > 0$. Existe $T_r : \bar{\Omega} \rightarrow X$ uma aplicação de posto finito tal que $\|T - T_r\| \leq r/2$.

Definição 1.14 Seja $r = \text{deg}(b, \Phi(\partial\Omega)) > 0$, tomemos $\Phi_r = I - T_r$, onde $T_r : \bar{\Omega} \rightarrow X$ é uma aplicação de posto finito tal que $\|\Phi_r - \Phi\| = \|T_r - T\| \leq r/2$. Notemos que $\text{dist}(b, \Phi_r(\partial\Omega)) > r/2 > 0$. Definimos então,

$$\text{deg}(\Phi, \Omega, b) := \text{deg}(\Phi_r, \Omega, b).$$

Propriedades Fundamentais do Grau

Exibimos, agora, algumas propriedades gerais do grau, que são utilizadas. Sejam X um espaço de Banach, $\Omega \subset X$ aberto e limitado, $T : \Omega \rightarrow X$ uma aplicação compacta, $\Phi = I - T$ uma perturbação compacta da identidade e $b \in X \setminus \Phi(\partial\Omega)$. Consideremos o espaço dos operadores compactos $T : \bar{\Omega} \rightarrow X$, denotado por $K(\bar{\Omega}, X)$, munido com a norma do supremo, $\|T\|_\infty := \sup\{\|T(x)\| : x \in \bar{\Omega}\}$.

(a) Continuidade do Grau por Variação do Operador T . Existe uma vizinhança U de T no espaço dos operadores compactos $K(\bar{\Omega}, X)$ tal que para todo $S \in U$ temos que,

$$b \notin (I - S)(\partial\Omega) \text{ e } \text{deg}(I - S, \Omega, b) = \text{deg}(\Phi, \Omega, b).$$

b Invariância do grau por Homotopia Compactas. Seja $H \in C(\bar{\Omega} \times [0, 1], X)$ dada por,

$$H(x, t) = x - S(x, t),$$

onde $S : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow X$ é compacta. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ então $\text{deg}(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante para todo $t \in [0, 1]$.

c O grau é constante nas componentes conexas de $X \setminus \Phi(\partial\Omega)$. Se b e \bar{b} estão na mesma componente conexa de $X \setminus \Phi(\partial\Omega)$, então

$$\text{deg}(\varphi, \Omega, b) = \text{deg}(\varphi, \Omega, \bar{b}).$$

d Aditividade. Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1, Ω_2 são subconjuntos de Ω aberto, limitados disjuntos e $b \notin \Phi(\partial\Omega_i)$, ($i = 1, 2$). Então,

$$\text{deg}(\Phi, \Omega, b) = \text{deg}(\Phi, \Omega_1, b) + \text{deg}(\Phi, \Omega_2, b)$$

Capítulo 2

Soluções estacionárias para sistemas de EDO

Neste capítulo discutimos a estabilidade local das soluções de equilíbrio de dois problemas de equações diferenciais ordinárias, enfatizando, particularmente, a existência de ciclo limite e da bifurcação de Hopf.

2.1 Sistema presa-predador com resposta funcional de Holling tipo II

Estamos interessados em sistemas presa-predador que descrevem o recurso (presa) disponível à espécie consumidora (predador). O primeiro modelo abordado neste trabalho é um sistema de equações diferenciais que expressa interações tróficas do tipo presa-predador e é definido por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xh(x) - y\varphi(x), \\ \frac{dy}{dt} = y(-\gamma + \delta(x)), \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo x a densidade da presa, y a densidade do predador, γ um parâmetro que mede a taxa de mortalidade do predador, $h(x)$ uma função de crescimento da presa que generaliza o modelo malthusiano, $\varphi(x)$ a função de interação trófica do predador e $\delta(x)$ a resposta funcional do predador em relação à presa. A função trófica $\delta(x)$ pode ser substituída frequentemente por $c\varphi(x)$, sendo c uma taxa de conversão que denota o número de predadores recém-nascidos para cada presa capturada.

No trabalho consideramos o modelo presa-predador com $\varphi(x) = \frac{\beta x}{1 + ax} = \frac{1}{c}\delta(x)$ e $h(x) = \alpha \left(1 - \frac{x}{k}\right)$, que corresponde ao modelo logístico. Neste modelo, $\frac{1}{a}$ é a densidade da presa necessária para atingir a metade da taxa de crescimento, $\frac{\beta}{a}$ é o número máximo da presa que pode ser comida pelo predador por unidade de tempo, α é a taxa intrínseca de crescimento da presa e k é a sua capacidade de carga [18].

Obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left[\alpha \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\beta y}{1 + ax} \right], \\ \frac{dy}{dt} = y \left[-\gamma + \frac{c\beta x}{1 + ax} \right]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Considerando que a presa se refugia a uma taxa $m \in [0, 1[$, a função trófica fica sendo $\varphi(x) = \frac{(1-m)x}{1 + a(1-m)x}$. Incorporando um refúgio no sistema (2.2), tem-se:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left[\alpha \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\beta(1-m)y}{1 + a(1-m)x} \right], \\ \frac{dy}{dt} = y \left[-\gamma + \frac{c\beta(1-m)x}{1 + a(1-m)x} \right]. \\ \text{Com } m \in [0, 1[. \end{cases} \quad (2.3)$$

2.1.1 Estabilidade local dos pontos fixos

No trabalho iremos fazer uso do sistema de equações (2.3) e iniciaremos pela determinação de seus pontos estacionários ou de equilíbrio, ou seja, as soluções constantes que satisfazem $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$. Elas são dadas por:

- (i) o equilíbrio trivial: $P_0(0, 0)$;
- (ii) o equilíbrio semitrivial na ausência do predador: $P_1(k, 0)$;
- (iii) o equilíbrio interior: $P_2(x^*, y^*)$, sendo:

$$x^* = \frac{\gamma}{(c\beta - \gamma a)(1 - m)}, \quad y^* = \frac{\alpha c}{k} \left[\frac{k(c\beta - \gamma a)(1 - m) - \gamma}{[(c\beta - \gamma a)(1 - m)]^2} \right].$$

Para $P_2(x^*, y^*)$ satisfazer a condição de positividade é necessário que $x^* > 0$ e $y^* > 0$. Logo, teremos as seguintes condições:

$$c\beta - a\gamma > 0 \quad (2.4)$$

$$0 \leq m \leq 1 - \frac{\gamma}{k(c\beta - \gamma a)} \quad (2.5)$$

Para facilitar os cálculos faremos uso dos seguintes parâmetros adimensionais: $\xi = \frac{a\gamma}{\beta c}$ e $\delta = \frac{1}{ak}$. Assim, as coordenadas de P_2 ficam sendo:

$$x^* = \frac{1}{a} \frac{\xi}{(1-\xi)(1-m)}, \quad y^* = \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{(1-\xi)(1-m) - \delta\xi}{(1-\xi)^2(1-m)^2} \right]$$

Notar que a condição de positividade para y^* fica sendo:

$$0 \leq m < 1 - \frac{\delta\xi}{1-\xi}.$$

2.1.2 Limitação do sistema

Nesta subseção iremos mostrar que as soluções do sistema (2.3) são limitadas em \mathbb{R}_+^2 :

Teorema 2.1 *Todas as soluções do sistema (2.3) que iniciam em \mathbb{R}_+^2 são uniformemente limitadas.*

Demonstração. Consideremos a função $w = x + \frac{1}{c}y$. Derivando em relação a t , obtemos:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{1}{c} \frac{dy}{dt} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\beta(1-m)xy}{1+a(1-m)x} - \frac{\gamma}{c}y + \frac{\beta(1-m)xy}{1+a(1-m)x},$$

resultando em:

$$\frac{dw}{dt} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\gamma}{c}y.$$

Somando-se γw na equação anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} + \gamma w &= \alpha x - \alpha \frac{x^2}{k} + \gamma w - \frac{\gamma}{c}y, \\ &\leq (\alpha + \gamma)x - \frac{\alpha}{k}x^2. \end{aligned}$$

As raízes do polinômio $f(x) = (\alpha + \gamma)x - \frac{\alpha}{k}x^2$ são: $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{k}{\alpha}(\alpha + \gamma)$. Como o coeficiente do termo de segundo grau é negativo, $f(x)$ atinge seu máximo em $x_{max} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{2\alpha}(\alpha + \gamma)$. Desta forma $f(x) = (\alpha + \gamma)x - \frac{\alpha}{k}x^2 \leq \max f(x) = f(x_{max}) = \frac{k}{4\alpha}(\gamma + \alpha)^2$.

Logo, para todo $\gamma > 0$:

$$\frac{dw}{dt} + \gamma w \leq \frac{k}{4\alpha}(\gamma + \alpha)^2.$$

Definindo $\mu = \frac{k(\alpha + \gamma)^2}{4\alpha}$, obtemos a limitação:

$$\frac{dw}{dt} + \gamma w \leq \mu,$$

em \mathbb{R}_+^2 .

Usando resultados concernentes com a Teoria de Inequações Diferenciais [12] obtemos:

$$0 < w(x, y) < \frac{\mu}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + w(x(0), y(0))e^{-\gamma t}.$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$, obtemos $0 < w < (\mu/\gamma)$. Assim, todas as soluções do sistema (2.3) que iniciam em R_+^2 são limitadas na região B_ϵ , sendo $B_\epsilon = \{(x, y) \in R_+^2 : w = \frac{\mu}{\gamma} + \epsilon, \epsilon > 0\}$.

■

2.1.3 Comportamento dinâmico

Nesta subseção discutiremos as propriedades de estabilidade dos pontos de equilíbrio P_0, P_1 e P_2 .

A matriz jacobiana do sistema (2.3) é

$$J(x, y) := \begin{pmatrix} \alpha \left(1 - \frac{2x}{k}\right) - \frac{\beta(1-m)y}{(a(1-m)x+1)^2} & -\frac{\beta(1-m)x}{a(1-m)x+1} \\ \frac{c\beta(1-m)y}{(a(1-m)x+1)^2} & \frac{(c\beta - \gamma a)(1-m)x - \gamma}{a(1-m)x+1} \end{pmatrix}$$

A matriz jacobiana do sistema sobre o ponto de equilíbrio $P_0(0, 0)$ é determinado por

$$J_{P_0} := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Os seus autovalores dados por: $\lambda_1 = \alpha$ e $\lambda_2 = -\gamma$. Como estes auto-valores apresentam sinais contrários, segue-se que $P_0(0, 0)$ é ponto de sela.

A matriz jacobiana para $P_1(k, 0)$ é determinada por

$$J_{P_1} := \begin{pmatrix} -\alpha & \frac{-\beta(1-m)k}{1+a(1-m)k} \\ 0 & \frac{(c\beta - a\gamma)(1-m)k - \gamma}{1+a(1-m)k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{\beta}{a} \frac{(1-m)}{\delta + (1-m)} \\ 0 & \gamma\xi \frac{(1-\xi)(1-m) - \delta\xi}{\delta + (1-m)} \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz são $-\alpha$ e $\gamma\xi \frac{(1-\xi)(1-m) - \delta\xi}{\delta + (1-m)}$. Como $m < 1 - \frac{\delta\xi}{1-\xi}$, condição exigida para a positividade de y^* , segue-se que $P_1(k, 0)$ é ponto de sela.

Como ambos $P_0(0, 0)$ e $P_1(k, 0)$ são pontos de sela, de acordo com Teorema 3.1 de [13], o sistema é persistente.

A jacobiana de P_2 é determinada por

$$J_{P_2} := \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix},$$

sendo

$$X = \alpha \left[1 - \frac{2\gamma}{k(c\beta - \gamma a)(1-m)} - \frac{k(c\beta - \gamma a)(1-m) - \gamma}{kc\beta(1-m)} \right],$$

$$Y = -\frac{\gamma}{c},$$

$$Z = \frac{\alpha[k(c\beta - \gamma a)(1-m) - \gamma]}{k\beta(1-m)}.$$

Assim, a equação característica de J_{P_2} é $\lambda^2 - \lambda \mathbf{Tr}(J_{P_2}) + \mathbf{det}(J_{P_2}) = 0$, isto é, $\lambda^2 - X\lambda + YZ = 0$. A soma das raízes é igual a X e o produto das raízes é igual a YZ , o qual é sempre positivo (em virtude da condição (2.5)). Isto nos diz que os autovalores têm mesmos sinais, e para que eles sejam negativos, $\mathbf{Tr}(J_{P_2})$ deve ser negativo. Portanto, a estabilidade do sistema em P_2 fica garantida pela condição:

$$1 - \frac{2\gamma}{k(c\beta - \gamma a)(1-m)} - \frac{k(c\beta - \gamma a)(1-m) - \gamma}{kc\beta(1-m)} < 0.$$

Ou seja, que:

$$m > 1 - \frac{\gamma}{k(c\beta - \gamma a)} - \frac{c\beta}{ka(c\beta - \gamma a)}. \quad (2.6)$$

Em termos das reparametrizações ξ e δ teremos:

$$J_{P_2} := \begin{pmatrix} \alpha\xi \left(1 - \frac{\delta(1-\xi)}{(1-\xi)(1-m)} \right) & -\frac{\beta\xi}{a} \\ \frac{c\alpha[(1-\xi)(1-m) - \delta\xi]}{1-m} & 0 \end{pmatrix},$$

sendo $m > 1 - \frac{1+\xi}{(1-\xi)\delta}$, a condição que torna P_2 localmente assintoticamente estável.

Agora se $m \leq 1 - \frac{\gamma}{k(c\beta - \gamma a)} - \frac{c\beta}{ka(c\beta - \gamma a)}$, ou mesmo $m \leq 1 - \frac{1+\xi}{(1-\xi)\delta}$, os autovalores tornam-se complexos, condição para o sistema apresentar soluções periódicas (ciclos limites) na vizinhança de P_2 . Em outras palavras, o sistema entra em bifurcação de Hopf.

2.1.4 Existência de ciclo limite

Em problemas bidimensionais, o Teorema de Poincaré-Bendixson 1.6 é muito utilizado para provar a existência de ciclos limites. No entanto, usaremos um resultado aplicado ao sistema de Gause que é um modelo presa-predador que generaliza o modelo clássico de Lokta-Volterra [20].

Para isto, consideremos o sistema (2.3) na forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xg(x) - yp(x), & x(0) > 0 \\ \frac{dy}{dt} = y[-\gamma + q(x)], & y(0) > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Teorema 2.2 (ver [20]) *Suponha que no sistema(2.7) vale a condição:*

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{xg'(x) + g(x) - xg(x)\frac{p'(x)}{p(x)}}{-\gamma + q(x)} \right) \leq 0$$

com $0 \leq x \leq k$ e $x \neq x^*$, sendo $*$ um ponto estacionário. Então o sistema (2.7) tem exatamente um ciclo limite que é globalmente e assintoticamente estável com respeito ao conjunto $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\} \setminus \{(x^*, y^*)\}$.

Definindo $g(x) = \alpha \left(1 - \frac{x}{k}\right)$, $p(x) = \frac{\beta(1-m)x}{1+a(1-m)x}$, $q(x) = \frac{c\beta(1-m)x}{1+a(1-m)x}$ e aplicando o teorema acima, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 2.3 *Se $m \leq 1 - \frac{\gamma}{k(c\beta - \gamma a)} - \frac{c\beta}{ka(c\beta - \gamma a)}$, então o sistema (2.3) possui exatamente um ciclo limite que é globalmente e assintoticamente estável com respeito ao seguinte conjunto $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\} \setminus \{(x^*, y^*)\}$.*

Demonstração. Isto será equivalente a provar

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x \left(-\frac{\alpha}{k}\right) + \alpha \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \alpha \left(1 - \frac{x}{k}\right) \frac{1}{1+a(1-m)x}}{-\gamma + \frac{c\beta(1-m)x}{1+a(1-m)x}} \right] \leq 0$$

ou

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x \left(2x + \frac{1}{a(1-m)} - k\right)}{x - \lambda} \right] \geq 0,$$

onde $\lambda = \frac{\gamma}{(1-m)(c\beta - a\gamma)}$. Isto é equivalente a provar

$$(x - \lambda)^2 + \lambda \left(\frac{k - \frac{1}{a(1-m)}}{2} - \lambda^2 \right) \geq 0$$

ou

$$\frac{k - \frac{1}{a(1-m)}}{2} \geq \lambda$$

isto é,

$$\frac{k - \frac{1}{a(1-m)}}{2} \geq \frac{\gamma}{(1-m)(c\beta - a\gamma)}$$

$$m \leq 1 - \frac{\gamma}{k(c\beta - \gamma a)} - \frac{c\beta}{ka(c\beta - \gamma a)}.$$

a igualdade acontece se e somente se

$$m = 1 - \frac{\gamma}{k(c\beta - \gamma a)} - \frac{c\beta}{ka(c\beta - \gamma a)}.$$

Isto completa a prova. ■

Combinando todos estes resultados, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.4 *Se $c\beta > a\gamma$, então as limitações em m para a existência e estabilidade do ponto de equilíbrio positivo são*

$$1 - \frac{\gamma}{k(c\beta - \gamma a)} - \frac{c\beta}{ka(c\beta - \gamma a)} < m < 1 - \frac{\gamma}{k(c\beta - \gamma a)},$$

e existe ciclo limite globalmente estável quando

$$m \leq 1 - \frac{\gamma}{k(c\beta - \gamma a)}.$$

2.2 Sistema presa-predador com resposta funcional de Holling tipo III

Consideramos agora o modelo presa-predador de duas espécies em que a presa é linearmente dependente de sua densidade, bem como a resposta funcional do predador de Holling tipo III. Este modelo pode ser descrito pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bx^2 - \frac{\alpha x^2 y}{\beta^2 + x^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \frac{k\alpha x^2 y}{\beta^2 + x^2}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

sendo x a biomassa da presa, y a biomassa do predador; $a, b, c, \alpha, \beta, k$ são constantes positivas que são interpretadas biologicamente; a é a taxa intrínseca de crescimento natural para presa x e c é a taxa de mortalidade do predador. Além disso, para a obtenção do ponto de equilíbrio de (2.8), a relação $ka - c > 0$ deverá ser satisfeita.

O modelo biológico (2.8) tem sua importância, podendo a resposta funcional de Holling do tipo III ser frequentemente (senão usualmente) encontrada em predadores invertebrados. Na referência [10] a teoria da bifurcação de Hopf foi usada para determinar a direção, a estabilidade periódica sob condições especiais de pequena amplitude dos parâmetros para um sistema presa-predador que incorpora competição intraespecífica nas presas e uma resposta funcional bastante geral, especialmente para Holling II ou III.

O modelo

$$\frac{dx}{dt} = xF_1(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = yF_2(x, y); \quad (2.9)$$

é conhecido como o modelo de Kolmogorov. O resultado principal de [3], mostra as condições satisfeitas para a estabilidade global do ponto de equilíbrio $\bar{x} > 0$ $\bar{y} > 0$ de (2.9) o que de forma geral pode ser encontrada em [4] onde as condições suficientes para a estabilidade global de equilíbrio $\bar{N}_1 > 0$, $\bar{N}_2 > 0$ do modelo de Lotka-Volterra

$$\dot{N}_i = N_i \left[b_i + \sum_{j=1}^2 a_{ij} N_j \right] \quad (i = 1, 2) \quad (2.10)$$

estão previstas.

Observe que o modelo (2.8) é um caso particular de (2.9). Assim, temos:

$$F_1(x, y) = a - bx - \frac{axy}{\beta^2 + x^2} \quad \text{e} \quad F_2(x, y) = -c + \frac{k\alpha x^2}{\beta^2 + x^2}.$$

A condição de estabilidade no sistema (2.9)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} < 0,$$

falha no modelo (2.8). Com efeito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= -b - \alpha \frac{(x^2 - \beta^2)y}{(x^2 + \beta^2)^2}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

são não-negativa definida para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Assim, aplicaremos uma mudança de variável no modelo (2.8) para obter condições suficientes para a estabilidade global e provar a existência e unicidade do ciclo limite.

2.2.1 A análise dos pontos de equilíbrio

Considerando as seguintes mudanças de variáveis

$$(**) \begin{cases} x = \sqrt{\frac{c}{k\alpha - c}} \beta \bar{x} ; & y = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{c(k\alpha - c)} \bar{y}, \\ dt = \frac{c\bar{x}^2 + k\alpha - c}{c(k\alpha - c)} d\bar{t}, \end{cases}$$

e reescrevendo \bar{x} , \bar{y} , \bar{t} como x , y , t , obtemos outra forma para o sistema (2.8):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \right) - x^3 y \equiv x \phi_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-1 + x^2) \equiv y \phi_2(x, y), \end{aligned} \quad (2.11)$$

sendo

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{a}{c} > 0, & A_1 &= -\frac{b\beta}{c} \sqrt{\frac{c}{k\alpha - c}} < 0, \\ A_2 &= \frac{a}{k\alpha - c} > 0, & A_3 &= -\frac{b\beta}{k\alpha - c} \sqrt{\frac{c}{k\alpha - c}} < 0. \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{dx}{dt} = 0$ e $\frac{dy}{dt} = 0$, resulta que o sistema (2.11) contém no máximo três pontos de equilíbrio na região $x \geq 0$, $y \geq 0$:

$$P_1(0, 0), \quad P_2(x_+, 0), \quad \text{e} \quad P_3(1, y^*),$$

sendo

$$y^* = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = \frac{k\alpha}{c(k\alpha - c)} \left(a - b\beta \sqrt{\frac{c}{k\alpha - c}} \right) \quad (2.12)$$

e

$$x_+ = -\frac{A_2}{A_3} = \frac{a}{b\beta \sqrt{\frac{c}{k\alpha - c}}}, \quad (2.13)$$

a única raiz real da equação algébrica de terceira ordem com coeficientes reais:

$$A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0. \quad (2.14)$$

As outras duas raízes são imaginárias puras dadas por: $\pm\sqrt{\frac{k\alpha - c}{c}}i$.

O valor de x_+ afeta o número de pontos de equilíbrio na região $x \geq 0, y \geq 0$ e a suas propriedade. Os dois casos $x_+ \leq 1$ e $x_+ \geq 1$ são discutidos como segue:

(a) Se $x_+ < 1$, então $a < b\beta\sqrt{\frac{c}{k\alpha - c}}$. Portanto, $y^* < 0$ conforme (2.12). Consequentemente, o sistema (2.11) vai possuir somente dois pontos de equilíbrio na região $x \geq 0, y \geq 0$ a saber: os pontos $P_1(0, 0)$ e $P_2(x_+, 0)$.

(b) Se $x_+ = 1$, então $y^* = 0$ e os únicos pontos de equilíbrio são $P_1(0, 0)$ e $P_2(1, 0)$, que correspondem aos pontos críticos do problema linearizado (2.11).

(c) Se $x_+ > 1$, então $y^* > 0$ de acordo com (2.15). Consequentemente, o sistema (2.11) contém três pontos de equilíbrio na região $x \geq 0, y \geq 0$, a saber: os pontos $P_1(0, 0)$, $P_2(x_+, 0)$ e $P_3(1, y^*)$.

2.2.2 Comportamento dinâmico

Nesta seção apresentaremos as propriedades de estabilidade dos pontos de equilíbrio P_1, P_2 e P_3 . Calculando a matriz jacobiana do sistema temos:

$$J(x, y) := \begin{pmatrix} A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2 + 4A_3x^3 - 3x^2y & -x^3 \\ 2xy & -1 + x^2 \end{pmatrix}$$

A matriz jacobiana do sistema sobre o ponto de equilíbrio $P_1(0, 0)$ é determinado por

$$J_{P_1} := \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Os seus autovalores dados por: A_0 e -1 . Como estes auto-valores apresentam sinais contrários, segue-se que $P_1(0, 0)$ é ponto de sela.

Agora, a matriz jacobiana para $P_2(x_+, 0)$ é determinada por

$$J_{P_2} := \begin{pmatrix} -A_0 - \frac{A_2^3}{A_3^2} & -\frac{A_2^2}{A_3^2} \\ 0 & -1 + \frac{A_2^2}{A_3^2} \end{pmatrix}$$

A matriz jacobiana para $S(1, y^*)$ é determinada por

$$J_{P_3} := \begin{pmatrix} A_0 + 2A_1 + 3A_2 + 4A_3 - 3y^* & -1 \\ & 2y^* \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que a matriz sobre P_3 têm a forma:

$$J_{P_2} := \begin{pmatrix} X & Y \\ & \\ Z & 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo

$$X = A_3 - A_1 - 2A_0, \quad Y = -1 \quad \text{and} \quad Z = 2(A_0 + A_1 + A_2 + A_3).$$

Quando o determinante $\det(J_{P_2}) = 2y^* > 0$ segue que o produto dos autovalores $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. Observe que o traço $\text{Tr} J_{P_2} < 0$ na condição assumida $k\alpha < 2c$. Por esta razão $X = A_3 - 2A_0 - A_1 < 0$, isto é,

$$-\frac{2a}{c} - \frac{b\beta}{c} \sqrt{\frac{c}{k\alpha - c}} \left[\frac{2c - k\alpha}{k\alpha - c} \right] < 0.$$

Portanto, P_3 é localmente assintoticamente estável.

O ponto $P_3(1, y^*)$ pode ser classificado como os dois casos que são discutidos:

(A) Se $A_2 + A_3 > 0$ e $2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$, o ponto $P_3(1, y^*)$ é um foco estável ou nó estável (quando $2A_3 + A_2 - A_0 = 0$, o ponto $P_3(1, y^*)$ é um centro do problema linearizado de (2.11)). $P_3(1, y^*)$ é globalmente estável ou um nó estável na região $x > 0, y > 0$ pelo Teorema 2.6 e Teorema 2.7.

(B) Se $2A_3 + A_2 - A_0 > 0$ (então $A_2 + 2A_3 > 0$), o ponto $P_3(1, y^*)$ é um foco estável ou instável, em torno do qual a existência e unicidade do ciclo limite são provadas através do Teorema 2.8 e Teorema 2.9.

2.2.3 Estabilidade global do ponto de equilíbrio não-trivial

Conveniêntemente, considere

$$Q \triangleq \{x \geq 0, y \geq 0\}, \quad Q^0 \triangleq \{x > 0, y > 0\},$$

Segue que Q^0 consiste em quatro zonas, no máximo, determinado por sinais de $\phi_1(x, y)$ e $\phi_2(x, y)$ do sistema (2.11)

São elas:

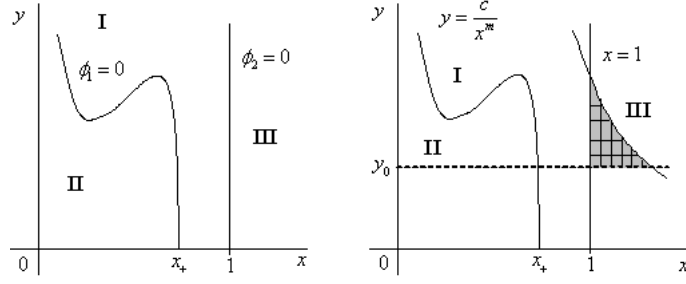


Figura 2.1: Regiões da solução

$$I \triangleq \{(x, y) : \phi_1 < 0, \phi_2 < 0\}, \quad II \triangleq \{(x, y) : \phi_1 > 0, \phi_2 < 0\},$$

$$III \triangleq \{(x, y) : \phi_1 < 0, \phi_2 > 0\}, \quad IV \triangleq \{(x, y) : \phi_1 > 0, \phi_2 > 0\},$$

Teorema 2.5 *Se $A_2 + A_3 \leq 0$, toda trajetória iniciada de (x_0, y_0) em Q^0 tende para o ponto de equilíbrio $P_2(x_+, 0)$, conseqüentemente o ponto de equilíbrio não-trivial P_2 será globalmente estável em Q^0 .*

Demonstração. Se $A_2 + A_3 \leq 0$, não existe ponto de equilíbrio não-trivial para o sistema (2.11) em Q exceto $P_1(x_+, 0)$ e $P_2(0, 0)$. As direções das trajetórias no 1º quadrante Q^0 do plano (x, y) do sistema (2.11) são mostrados na figura 2.1.

Toda trajetória, originada de (x_0, y_0) na zona I ou II podem virar para P_2 ou cruzar com a linha reta $\phi_2(x, y) = 0$, isto é, linha $x = 1$, quando o tempo for suficientemente grande. Não existe qualquer outro ponto de equilíbrio sobre a linha reta $\phi_1(x, y) = 0$. É evidente que a trajetória que cruza $\phi_2(x, y) = 0$ tem que se aproximar finalmente a P_2 à medida que o tempo tende para o infinito.

Para completar nossa prova, temos de provar que cada trajetória, a partir de (x_0, y_0) na zona III deve cruzar com $\phi_2(x, y) = 0$ e entrar na zona I.

Assumindo o contrário, segue que a trajetória $(x(t), y(t))$ a partir de (x_0, y_0) na zona III permanece na zona III, e desloca com linha reta $x = 1$, quando o tempo cresce, não importando quão longo seja, obtemos a inequação

$$\frac{dy}{dt} = y(x^2 - 1) > 0$$

Conseqüentemente $y(t) > y_0$ para $t \in [0, +\infty)$. Então,

$$\max\{\phi_1(x, y) : y(t) < y_0 \text{ e } x \geq 1\}$$

é negativo, por isso, existe um número positivo k_1 tal que

$$\phi_1(x, y) < -k_1 \text{ para todo } t > 0 \quad (2.15)$$

e desde que ao longo da trajetória $(x(t), y(t))$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} = 2x^2 \phi_1(x, y) < 0$$

Temos

$$\phi_2(x, y) = x^2 - 1 < k_2 \text{ para todo } t > 0 \quad (2.16)$$

Onde

$$k_2 = \phi_2(x_0, y_0) = x_0^2 - 1 > 0$$

Agora vamos considerar a função $v(x, y) = x^m y$, aqui $m = k_2/k_1 > 0$. Desde que ao longo da trajetória $(x(t), y(t))$ originando na zona III com $\phi_1 < 0$, $\phi_2 > 0$

$$\frac{dv}{dt} = mx^{m-1}y \frac{dy}{dt} + x^m \frac{dy}{dt} = x^m y [m\phi_1 + \phi_2] \leq 0$$

de forma que,

$$x^m y = C = x_0^m y_0 \text{ (para todo } t \geq 0),$$

isto é,

$$y(t) \leq C/x^m(t) \text{ para todo } t \geq 0.$$

A afirmação segue imediatamente a partir da análise feita anteriormente. Se pode ser declarado como segue: A trajetória $(x(t), y(t))$ para todo $t \geq 0$ continua a ser a região com fronteiras, que consiste em duas linhas retas $x = 1$, $y = y_0$ e uma curva $y = C/x^m$. Se $A_2 + A_3 \leq 0$, não existe ponto de equilíbrio nesta região. Obviamente, essa afirmação é absurda do Teorema de Poincaré-Bendixson. Esta contradição leva à seguinte conclusão: toda trajetória $(x(t), y(t))$ originada da zona III devem interceptar a linha reta $x = 1$, entrando na zona I, e finalmente aproxima-se do ponto de equilíbrio $P_2(x_+, 0)$ quando $t \rightarrow +\infty$. Isto completa a prova.

Teorema 2.6 *Se $A_2 + A_3 > 0$ e $2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$, então o ponto de equilíbrio $P_3(1, y^*)$ do sistema (2.11) é um nó estável ou foco, e não existe nenhuma curva fechada em torno de $P_3(1, y^*)$.*

Demonstração. Neste caso, temos que P_3 é localmente assintoticamente estável. Da prova segue que não existe ciclo limite para o sistema (2.11). Consideremos a função de Dulac $B(x, y) = x^{-2}y^{r-1}$, aqui r é uma constante satisfatória especificada depois. Definimos:

$$\begin{aligned} D &\triangleq \frac{\partial(x\phi_1 B)}{\partial x} + \frac{\partial(y\phi_2 B)}{\partial y} \\ &\triangleq x^{-2}y^{r-1}[2A_3x^3 + (A_2 + r)x^2 - (A_0 + r)] \\ &\triangleq x^{-2}y^{r-1}\phi(x, r) \end{aligned}$$

temos de mostrar essa possibilidade que podemos sempre escolher uma constante adequada r com que $\phi(x, r)$ é negativa definida para $x \geq 0$. O denominador negativa definida significa a equação $\phi(x, r) = 0$. já que possui uma constante escolhida r ou qualquer real positivo x .

Vamos começar com a discussão das hipóteses, existem duas possibilidades para $2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$:

(1) Se $A_2 - A_0 \leq 0$, e desde que $A_3 < 0$, conseqüentemente $2A_3 + A_2 - A_0 < 0$ mantêm-se. Neste caso, se escolhermos $r = -A_2$, temos

$$\phi(x, r)|_{r=-A_2} = 2A_3x^3 - (A_0 - A_2) < 0$$

para $x > 0$.

(2) Se $A_2 + 2A_3 \leq A_0 < A_2$, conseqüentemente $2A_3 \leq A_0 - A_2 < 0$. Notando que

$$\phi'_x(x, r) = 2x(3A_3x + 2(A_2 + r))$$

$$\phi''_x(x, r) = 12xA_3x + 2(A_2 + r)$$

podemos escolher uma constante adequada r que será posteriormente especificada, para o qual $-\frac{r + A_2}{3A_3} > 0$ e $\phi(x, r)$ atinge seu valor de mínimo $-(r + A_0)$ para $x = 0$, e o seu valor de máximo, igual a zero, para $x = -\frac{r + A_2}{3A_3}$, isto é,

$$\begin{aligned} \max_{\substack{0 < x < +\infty \\ r + A_2 > 0}} \phi(x, r) &= \phi(x, r)|_{x = -\frac{r + A_2}{3A_3}} \\ &= \frac{(r + A_2)^3}{27A_3^2} - (r + A_2) + A_2 - A_0 = 0 \end{aligned}$$

Façamos uma escolha tal que $r + A_2$ seja uma raiz positiva da equação algébrica de terceira ordem

$$g(r + A_2) \triangleq (r + A_2)^3 + p(r + A_2) + q = 0 \quad (2.17)$$

sendo $p = -27A_3^2 < 0$, $q = 27A_3^2(A_2 - A_0) > 0$. O número

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{27^2}{4}A_3^4[(A_2 - A_0)^2 - 4A_3^2]$$

é chamado o discriminante de (2.17). Se $2A_3 + A_2 - A_0 = 0$, de forma que $\Delta = 0$, então a equação (2.17) possui uma raiz real positiva e uma raiz positiva de multiplicidade dois. Se $2A_3 + A_2 - A_0 < 0$ e $A_2 - A_0 < 0$, forma que $\Delta < 0$, a equação (2.17) tem pelo menos uma raiz positiva, se $2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$. Escolhendo arbitrariamente uma das raízes positivas. Tomando $(r + A_2)_+$ e r associado com $(r + A_2)$, quando r^* , desde que

$$\begin{aligned} \phi''(0, r^*) &= 2(A_2 + r^*) > 0 \\ \phi''(x, r^*)|_{x=\frac{-r+A_2}{3A_3}} &= -2(A_2 + r^*) < 0 \end{aligned}$$

Então, $\phi(x, r^*)$ atinge o seu mínimo $-(r^* + A_0)$ para o ponto $x = 0$, e seu máximo, igual a zero, para $x = -\frac{r+A_2}{3A_3}$ (veja 2.2)

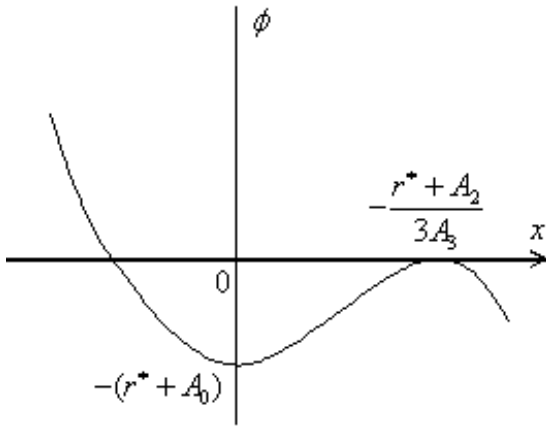


Figura 2.2:

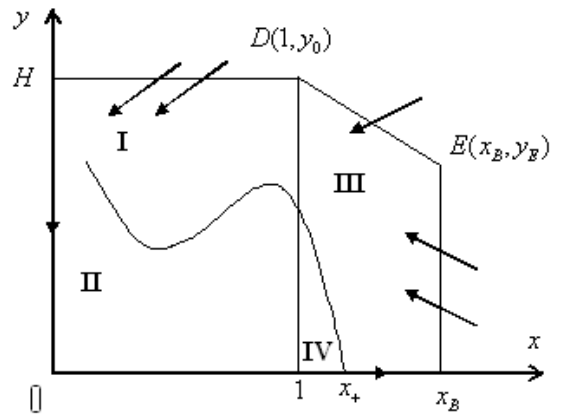


Figura 2.3:

Temos demonstrado que, nas condições do Teorema 1.7 sempre temos $D \leq 0$. Não existe qualquer curva fechada em torno de P_2 pelo Teorema de Dulac 1.7. Se $2A_3 + A_2 - A_0 < 0$ segue da subseção 2.2.1 que o ponto $P_3(1, y^*)$ é um centro do problema linearizado de (2.11), o ponto de equilíbrio $P_3(1, y^*)$ do sistema (2.11) é um foco estável (ver 1.1 d), desde que não exista qualquer curva fechada em torno de P_3 do (2.11). isto completa a prova. ■

Teorema 2.7 *Se $A_2 + A_3 > 0$ e $2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$, toda trajetória do sistema (2.11), iniciada em Q^0 é limitada.*

Demonstração. Seja (x_0, y_0) em Q^0 , consideremos a região \overline{OBEDHO} (veja figura 2.3), em que o ponto inicial (x_0, y_0) está contido. \overline{BE} é o segmento da linha $x = x_B$, tal que $x_B \geq \max\{x_+, x_0\}$, e \overline{HO} é o segmento da reta $y = y_D$ para $0 \leq x < 1$, e \overline{DE} é um segmento da reta

$$y = y_E - (x - x_B)$$

sendo y_E suficientemente grande e D é um ponto de interseção do segmento \overline{ED} com reta $x = 1$.

Considere os segmentos \overline{OB} e \overline{HO} , em que os pontos de equilíbrios P_1 e P_2 , respectivamente, permanecem na região acima mencionada. Definindo as funções

$$v_1 = x - x_B = 0,$$

$$v_2 = y - y_D$$

$$v_3 = y - y_E + x - x_B = 0.$$

E agora, derivando ao longo da trajetória do sistema (2.11), teremos

$$\dot{v}_1|_{v_1=0} = \frac{dx}{dt} = x\phi_1(x, y) \leq 0$$

$$\dot{v}_2 = y(x^2 - 1) \leq 0$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_3|_{v_3=0} &= \left(\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} \right) |_{v_3=0} \\ &= -(y_E + x_B) + x(A_0 + 1A_1x + A_2x^2 + A_3x^3) \leq 0 \end{aligned}$$

Sob a suposição

$$y_E > \max_{1 \geq x \leq x_B} \{x(A_0 + 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3), y_0\}$$

podemos escolher o valor de y_E . Segue que as curvas integrantes que cruzam com as limitações BE , DE e HD da região \overline{OBEDHO} entre nesta região(veja Fig.4.), fora da qual não existe ponto de equilíbrio. Temos provado que toda trajetória que inicia em Q^0 é limitada. ■

Através do Teorema 2.6 e Teorema 2.7, as afirmações $A_2 + A_3 > 0$ e $2A_3 + A_2 - A_0 \leq 0$, garante que o ponto de equilíbrio $P_3(1, y^*)$ de (2.11) é globalmente estável em Q^0 .

2.2.4 A existência e unicidade de ciclo limite em torno do ponto de equilíbrio positivo

Teorema 2.8 *Se $2A_3 + A_2 - A_0 > 0$, o ponto de equilíbrio positivo do sistema (2.11) é estável, e em torno do qual existe, pelo menos, um ciclo limite.*

Demonstração. Na subsecção 2.2.1 temos provado que se $2A_3 + A_2 - A_0 > 0$, existem dois pontos de sela $P_1(0, 0)$ e $P_2(x_+, 0)$, e um ponto de equilíbrio positivo $P_3(1, y^*)$. Também temos mostrado que $P_3(1, y^*)$ é um foco instável ou um nó instável. Portanto, podemos construir uma região anulares G em que não existe ponto de equilíbrio. Todas as trajetórias através de fronteiras exteriores e interiores estendem em G à medida que o tempo cresce ou permanece na limitação. Mesma aproximação com o caso do Teorema 2.7 pode ser usada para descobrir limites exteriores satisfatórios. Conforme a análise de procedimento, achando um limite interior satisfatório baseado na propriedade de S é também possível. A prova segue imediatamente do Teorema de Poincaré-Bendixson 1.6, existe pelo menos, uma curva fechada, que é um ciclo limite em G . ■

Teorema 2.9 *Se $2A_3 + A_2 - A_0 > 0$, existe, no máximo, um ciclo limite estável em Q para (2.11).*

Demonstração. Tomando a seguinte substituição $\bar{x} = x - 1$, $\bar{y} = y - y^*$ para o sistema (2.11) o que leva-nos

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= (-A_0 + A_2 2A_3)\bar{x} - \bar{y} + (5A_3 + 2A_2 - A_0)\bar{x}^2 \\ &\quad + (A_2 + 4A_3)\bar{x}^3 + A_3\bar{x}^4 - 2\bar{x}\bar{y} - \bar{x}^2\bar{y} \\ \dot{\bar{y}} &= 2y^*\bar{x} + y^*\bar{x}^2 + 2\bar{x}^2\bar{y}\end{aligned}\tag{2.18}$$

Façamos novamente a substituição

$$\bar{x} = \frac{u}{1-u}, \quad \bar{y} = y^*(e^v - 1)$$

para o sistema (2.18) o que leva-nos a equação de Lienard:

$$\dot{u} = -\Phi(v) - F(u), \quad \dot{v} = g(u)\tag{2.19}$$

sendo

$$\Phi(v) = y^*(e^v - 1),$$

$$F(u) = \frac{1}{(1-u)^2} [A_0 u^3 + (-2A_0 + A_2 + A_3)u^2 + (A_0 - A_2 - 2A_3)u],$$

$$g(u) = \frac{2u - u^2}{(1-u)^2},$$

notando que $\bar{x} = \frac{u}{1-u}$, $u = \frac{x}{1+\bar{x}} = \frac{x-1}{x}$, então

$x \in (0, +\infty)$, implica $-\infty < u < 1$. Consequentemente

$$(a) \quad ug(u) = \frac{u^2(2-u)}{(1-u)^2} > 0, \quad \text{para } u \neq 0.$$

Temos que

$$(b) \quad g(u) = \int_0^u g(u)du = \int_0^u \frac{2u - u^2}{(1-u)^2} du = \frac{u^2}{1-u}$$

$$(c) \quad G(-\infty) = +\infty, \quad G(1^-) = +\infty.$$

Do fato de $\bar{y} = y^*(e^v - 1)$, segue que $v = \ln\left(\frac{\bar{y}}{y^*} + 1\right) = \ln\frac{\bar{y}}{y^*}$ se $y \in (0, +\infty)$, então $-\infty < v < +\infty$, consequentemente $\Phi(v) = y^*(e^v - 1)$, $\Phi(0) = 0$, e $\Phi(v)$ é uma função crescente para v aumentando, e $\Phi(v) \rightarrow +\infty$ quando $v \rightarrow +\infty$, e $\Phi(v) \rightarrow -y_*$ quando $v \rightarrow -\infty$.

Denotando

$$f(u) = F'(u) = \frac{1}{(1-u)^3} [-A_0 u^3 + 3A_0 u^2 + (-3A_0 + A_2)u + A_0 - A_2 - 2A_3].$$

É claro que $f(u)$ é uma função contínua para $u \in (-\infty, 1)$ e $F(0) = 0$.

Temos de mostrar que $f(u)/g(u)$ é uma função crescente. Usando $2A_3 + A_2 - A_0 > 0$ e $u \in (-\infty, 1)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left(\frac{f(u)}{g(u)} \right) &= \frac{d}{du} \frac{-A_0 u^3 + 3A_0 u^2 + (-3A_0 + A_2)u + A_0 - A_2 - 2A_3}{u(1-u)(2-u)} \\ &= \frac{2(A_2 - A_0 + 2A_3)(1-u)^3 + 2A_3 u^2(2u-3)}{(u^3 - 3u^2 + 2u)^2} > 0. \end{aligned}$$

A prova segue imediatamente da aplicação do Teorema 1.8 de unicidade de Zhang [25] ■

Capítulo 3

Análise do sistema presa-predador forçado

Nesta seção discutiremos a análise do modelo presa-predador de Holling tipo II e III. Primeiramente consideramos o modelo presa-predador de Rosenzweig-MacArthur, e enfatizamos o efeito forçamento periódico em dois parâmetros: taxa de natalidade da presa e taxa de mortalidade do predador. A introdução do forçamento no parâmetro de crescimento da presa revela flutuações na abundância da espécie em determinado período do ano. Nos experimentos numéricos investigamos o sistema forçado com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, calculando seus respectivos expoentes de Lyapunov e o seu diagrama de bifurcação, na variação da amplitude do forçamento e no parâmetro do refúgio. O diagrama de bifurcação através das seções de Poincaré mostrou transições de período para regiões caóticas. Ademais, o forçamento no sistema torna o modelo com complexidade, podendo apresentar um comportamento caótico.

3.1 Os sistemas forçados

Introduzindo variáveis adimensionais e parâmetros no sistema (2.3), $T = \alpha t$, $X = \frac{x}{k}$, $Y = \frac{k\beta}{\alpha}y$, $d = \frac{\gamma\alpha}{\beta}$, $e = ck$, temos o seguinte:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{(1-m)xy}{1+a(1-m)x} \\ \frac{dy}{dt} = -dy + \frac{e(1-m)xy}{1+a(1-m)x} \end{cases} \quad (3.1)$$

Agora implementaremos o forçamento periódico no modelo como consequência da variação sazonal. Na verdade existem diversas formas de se fazer isso, escolhemos modi-

ficar o modelo (3), onde substituiremos $\alpha(t)$ e $\gamma(t)$ por:

$$\theta(t) = \rho_0 + g(1 - \cos(wt)). \quad (3.2)$$

Onde $g = \frac{\delta}{\rho_0}$ e $w = \frac{w}{\rho_0}$ representam, respectivamente, a amplitude e a frequência do termo de forçamento são constantes positivas, Assim, simulamos o ecossistema predador-presa em cada um, quer dizer, quanto as influências anuais agindo de tal modo a produzir uma taxa (intrínseca) de crescimento periódico da presa da forma (3.2). O sistema predador-presa forçado toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{(1-m)xy}{1+a(1-m)x} + g(1-\cos(wt))x, \\ \frac{dy}{dt} = -dy + \frac{e(1-m)xy}{1+a(1-m)x}, \end{cases} \quad (3.3)$$

Fazendo $z = wt$ teremos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{(1-m)xy}{1+a(1-m)x} + g(1-\cos(z))x, \\ \frac{dy}{dt} = -dy + \frac{e(1-m)xy}{1+a(1-m)x}, \\ \frac{dz}{dt} = w. \end{cases} \quad (3.4)$$

Agora introduzindo o forçamento periódico na taxa de mortalidade do predador

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{(1-m)xy}{1+a(1-m)x} + g(1-\cos(z))x, \\ \frac{dy}{dt} = -dy + \frac{e(1-m)xy}{1+a(1-m)x} - j(1-\cos(z))y, \\ \frac{dz}{dt} = w. \end{cases} \quad (3.5)$$

Aplicando o forçamento no modelo de Holling III, temos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - \frac{\alpha x^2 y}{\beta^2 + x^2} + g(1-\cos(z))x, \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \frac{k\alpha x^2 y}{\beta^2 + x^2} - j(1-\cos(z))y, \\ \frac{dz}{dt} = w. \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2 Métodos de Investigação

A característica essencial ao caos em um sistema dinâmico determinístico é que o tempo evolui (soluções) exibindo complicações (aparentemente aleatórias) no seu comportamento como resultado da alta sensibilidade às condições iniciais, existem inúmeras ferramentas de análise para detectar o caos em sistemas dinâmicos. As ferramentas em particular que usaremos neste trabalho são: Expoentes de Lyapunov e diagrama de Bifurcações por Mapa de Poincaré [13][23][24]. A técnica do cálculo do expoente de Lyapunov é uma ferramenta poderosa que serve para distinguir os atratores individuais, a partir da convergência ou divergência exponencial no comportamento de trajetórias vizinhas no espaço de fase. Um atrator para um sistema dissipativo com um ou mais expoente de Lyapunov é dito ser caótico. Os expoentes de Lyapunov avaliam a sensibilidade das condições iniciais, verificando a divergência exponencial no tempo de trajetórias vizinhas, e representa um dos critérios mais importantes utilizados para definir o caos em sistemas dinâmicos. Podemos defini-los como

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\lim_{\varepsilon(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)} \right) \right]$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Geralmente os λ_i dependem exclusivamente do estado inicial do sistema x_0 , mas em alguns casos eles são considerados constantes ao longo de uma região do espaço de fases.

A evolução temporal de sistema dinâmico com existência de expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital nas direções associadas; Em uma solução caótica, associada a um atrator estranho, a dependência às condições iniciais acarreta a existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, isto é, $\lambda > 0$. Na situação de uma solução periódica ou quasi-periódica implica que teremos $\lambda_i < 0$ nas direções perpendiculares ao movimento e $\lambda_i = 0$ ao longo da trajetória.

Num sistema tridimensional, existem atratores, que podem ser identificados pelo sinal do espectro $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$ do expoente de Lyapunov associado deve ser o seguinte: para o ponto de equilíbrio, tem-se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$, uma vez que o hiper-volume tende a contrair-se; para o ciclo limite tem-se λ_1, λ_2 e $\lambda_3 = 0$, sendo que o expoente nulo corresponde à direção ao longo da órbita fechada; para o toro bidimensional T2, tem-se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2, \lambda_3 = 0$, de modo que as trajetórias atratoras situam-se sobre uma superfície; para o atrator estranho, tem-se $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 < 0$. Nesse caso um expoente deve ser positivo para que exista

DCI , aquele ao longo da trajetória deve ser nulo , e o outro deve ser negativo e maior do que o primeiro, para que o sistema seja dissipativo, isto é, $\sum_{j=1}^3 \lambda_j < 0$.

Em sistemas dinâmicos em que temos séries temporais com oscilações das frequências ordenadas periodicamente trata-se de sistemas com resposta funcional periódica, já para sistemas em que sua resposta funcional apresenta uma aparente "aleatoriedade" na sua frequência pode ser interpretada como um sinal de uma resposta não periódica. Nos sistemas (8), (9) e (10) temos duas funções incógnitas representando o número de presas e de predadores com a variação do tempo sua séries irão mostrar sua evolução no tempo orientado para um comportamento periódico ou não periódico.

A definição do mapa de Poincaré é padrão da teoria de sistemas dinâmicos. Sendo assim, a seção de Poincaré é uma técnica que substitui o fluxo de um sistema de tempo contínuo de ordem n com um sistema de tempo de discreto de ordem $(n-1)$ [13][23][24]. Especificamente, uma seção do Poincaré na sequência dos pontos gerados pela interseção de uma trajetória de um sistema dinâmico contínuo com uma superfície dada no espaço da fase. O meio padrão de se obter uma seção do Poincaré para um oscilador não-linear de segunda ordem, periodicamente forçado deve provar a posição e a velocidade de uma taxa igual à frequência do forçamento [27][30][31].

3.3 Simulação numérica

Sistemas biológicos são inerentemente não-lineares e seus estudos requerem métodos numéricos para análise. Com o advento do processamento numérico inúmeros problemas da biomatemática oferecem novas linhas de pesquisa para o entendimento das relações dos ecossistemas. Tornando-se essencial o estudo da dinâmica de populações, que em geral na formulação matemática é não-linear [26].

O estudo de sistema dinâmico dissipativos tem tido novas abordagens no eixo de fenômenos não-lineares [13][23][24]. Sistemas contínuos com no mínimo três graus de liberdades são tidos com possíveis de comportamentos caóticos, caracterizando dependência sensível às condições iniciais [13][24][27][26]. A caracterização da rota para o caos determinístico na variação dos parâmetros de controle descreve o comportamento assintótico do sistema dinâmico dentro da teoria das bifurcações, podendo revelar pontos de equilíbrios, ciclos limites, e transição para regiões caóticas [13][23][24].

Muitos modelos de interações predadores e presas têm supostas generalizações em fa-

tores biológicos da natureza, como taxas de nascimentos e mortalidades, competição, variações climáticas [22][27][30][31]. O que podem ser considerados ocorrendo continuamente ou discretamente; relações tróficas predador-presa fornecem exemplos para o caso contínuo, o modelo de clássico modelo de Lotka-Volterra é um dele e no artigo [4] investiga-se modelos de ecossistemas em tempo discreto.

A equação da presa de Rosenzweig-MacArthur descreve a competição entre organismos para a comida ou espaço, que é baseado na curva logística. A competição é uma composição de mecanismos que podem produzir regulação na população tornando a dinâmica populacional embutidas nos modelos mais próximas dos sistemas naturais; as teorias da competição tratada por ecologistas e matemáticos, como mecanismo de regulação entre espécies tem uma larga abordagem e teorias a seu respeito [4]. Considera-se neste trabalho que competição entre espécies ocorra em termos de uma mesma espécie (competição intraespecífica) interagindo sobre limitação de recursos [22]. Os modelos iniciais de sistema ecológicos são não-realísticos e eles têm sido substituídos por outros modelos que são ricos de realismo biológico. O modelo de Rosenzweig-MacArthur da interação presa-predador é, portanto capaz de uma larga variedade de comportamento dinâmico, de estabilidades para oscilações robustas (ricas). Estes modelos provem de perguntas sobre simples questões do sistema presa-predador [7][18].

O entomologista Holling aborda modificações no modelo de Lotka-Volterra rotulada pela resposta funcional no termo da predação, representando a relação assintótica entre a taxa de consumo individual do predador e a densidade de presas [12]. No modelo do Lotka-Volterra a resposta funcional aumenta linearmente com a densidade da Presa, simplificando a relação presa-predador. Na realidade, a resposta funcional predador deve aproximar algum nível constante em densidades elevadas da Presa. A formulação clássica do modelo de Roseizweig-MacArthur usa a resposta funcional de Holling do tipo II [7][18].

O modelo inclui ainda o termo logístico, acarretando uma densidade dependente na população da presa. Vários trabalhos têm sido realizados no estudo do efeito da sazonalidade no modelo presa-predador com função trófica predador-dependente, ao qual trata-se de uma análise analítica como numericamente [27][30][31][7][18][26]. O forçamento periódico comumente usado considera dois diferentes parâmetros do sistema: a taxa de natalidade da presa e a taxa de mortalidade dos predadores. O modelo que abordamos ressalta ainda o refugio da presa que entra a dificuldade do predador de encontrar a presa em uma densidade baixa de sua população [7][18]. Os modelos em geral assumem um

mundo homogêneo em que desprezam os habitats ou refúgios para a presa.

Diversos comportamentos de sistemas do tipo predador-presa podem encontrados nas simulações de diferentes parâmetros e os resultados exibem que a sazonalidade em conjunto com o refúgio nos dois diferentes parâmetros apresenta comportamentos dinâmicos mais complexos e está dominado por soluções periódicas, quasi-periódicas e caóticas [27][30][31][7][18].

A complexidade do ecossistema em sua totalidade proporciona a coexistência de presas e predadores numa estabilidade dinâmica, por exemplo, o ciclo presa-predador introduzido por variações periódicas ou sazonais pode causar várias perturbações no sistema, ocasionando em algumas situações extermínio ou flutuação mútua, mas a dispersão da população presa como necessidade natural de refugiar-se de seu predador, ou até mesmo a combinação dos fatores ecológicos garante a estabilidade [22].

O cenário de ordem-caos dos sistemas estudados chama-se cascata de Feigenbaum, ou transição para o caos via duplicação de períodos. O caos determinístico pode ser observado em experimentos, que exibe complexidades associadas à estrutura geométrica do atrator. Sistemas com dinâmica caótica apresentam séries aperiódicas e um expoente de Lyapunov positivo, para um sistema dissipativo que resulta na soma dos expoentes de Lyapunov ser menor que zero [13][23][24].

Os estudos de sistemas predador-presa têm sua importância na caracterização de dinâmica de populações. A análise de sistemas não-lineares ecológicos inclui organizações do ecossistema como interações ecológicas, fatores bióticos e abióticos dentre outros. As espécies são fortemente influenciadas por flutuações populacionais cíclicas e caóticas [22][27][30][31]. Perturbações do tipo cossenoidal e senoidal é descrita no modelo (2.3). E descrevemos a caracterização da dinâmica do modelo predador-presa com refúgio e aplicando o forçamento periódico. Usamos o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para as simulações, com um passo de integração 10^{-2} , usando as seguintes condições iniciais $x = 3.0$ e $y = 1.0$, simulamos numericamente os sistemas (2.3) e (2.8).

Neste trabalho, analisamos os efeitos de incorporar refúgios (na presa) e sazonalidade (na presa e predador) para a dinâmica do modelo da predador-presa de Rosenzweig-MacArthur. Os valores dos parâmetros do sistema (2.3) são : 1) $a = 1.0, d = 0.05, e = 3.0, m = 0.5$; 2) $a = 1.0, d = 0.9, e = 4.0, a = 1.0$. As Figuras 3.1 são um atrator estranho caótico, assim como a figura 6.

A Figura 3.1 é o diagrama de bifurcação do atrator da Figura 3.1. Bifurcação onde

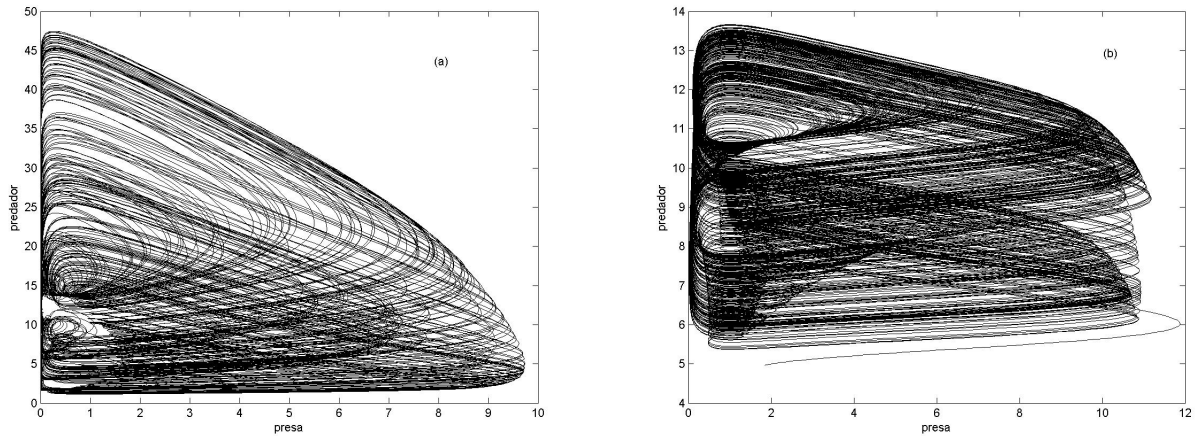


Figura 3.1: Atrator estranho do sistema presa-predador com forçamento periódico. Usando os seguintes parâmetros $d = 0.05$, $e = 3.0$, $m = 0.5$, $a = 1.0$.

aparece duplicação de período numa ordem de 2^n são visíveis. No ponto 0.0535 ocorre uma duplicação 2^2 , em seguida ocorre outra duplicação de período 2^4 no ponto 0.0451. O processo de transição para o caos via duplicação de período é chamada de cascata de Feigenbaum [27][23][24].

A dinâmica do sistema presa-predador (3.6) com forçamento periódico e resposta funcional é estudado. A solução do sistema com condições iniciais são obtidas numericamente com vários valores dos parâmetros. O diagrama de bifurcação prover um sumário essencial ao comportamento da dinâmica do sistema (ver Fig.3.7), que pode apresentar pontos fixos, regiões periódicas e caóticas. Destaca-se os expoentes de Lyapunov do sistema com resposta funcional de Holling tipo III na Figura 3.7; na caracterização de solução caótica, associado a um atrator estranho (3.6), a dependência às condições iniciais se faz presente no expoente de Lyapunov positivo. A duplicação de período ou cascata de Feigenbaum imerge no cenário da dinâmica do caos. No diagrama de bifurcação podemos encontrar regiões caóticas, periódicas e quase-periódicas. A perturbação sazonal inserida no sistema consumidor e alimentação evidência uma dinâmica complexa com regime caótico, e também apresenta comportamento oscilatório estável para coexistência das interações predador-presa.

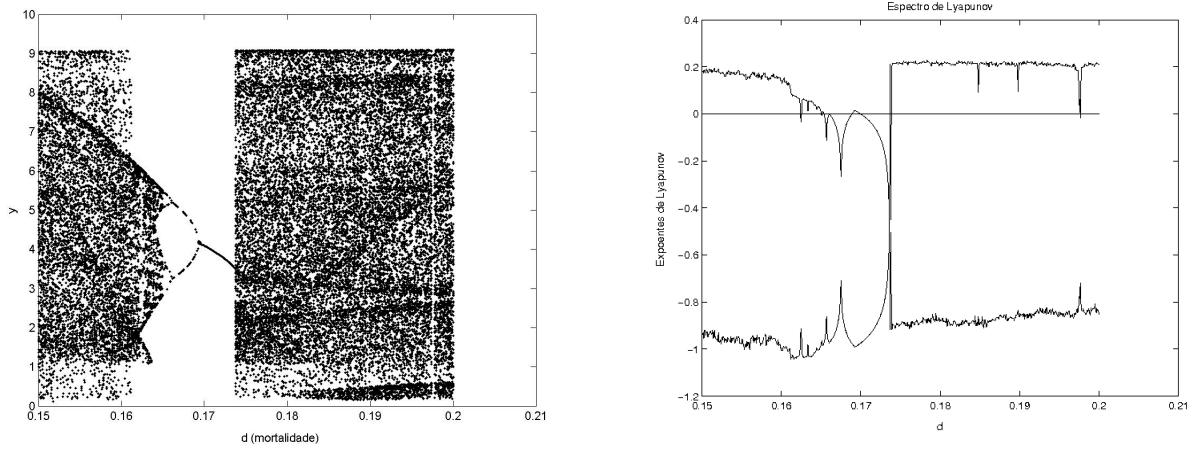


Figura 3.2: Diagrama de bifurcação do modelo presa - predador de Rosenzweig - Mac'Arthur aplicado a variação do parâmetro d de mortalidade do predador. Expoentes de Lyapunov relacionado ao parâmetro d (taxa de mortalidade).

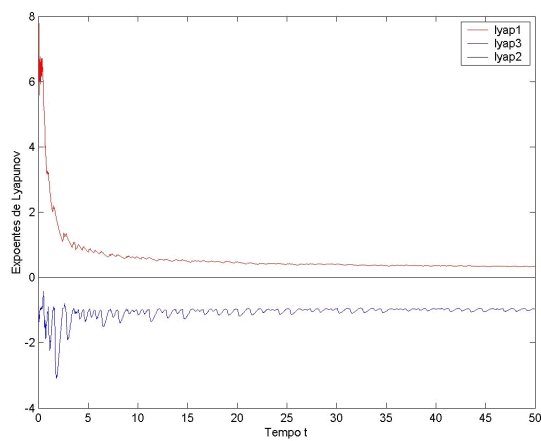


Figura 3.3: Evolução do Expoente de Lyapunov no tempo t .

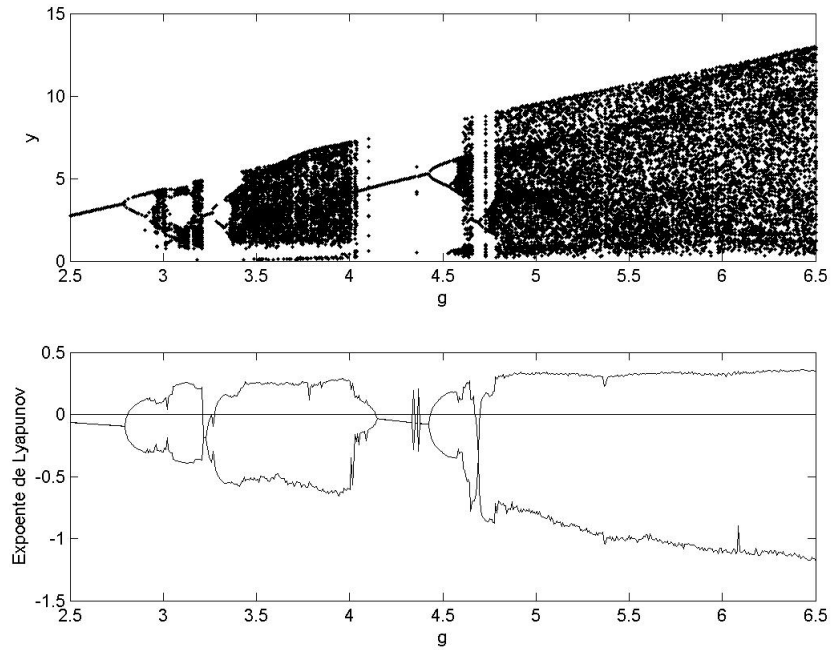


Figura 3.4: Diagrama de bifurcação gerado através do mapa de Poincaré no plano, e variando a amplitude do forçamento de 2.5 à 6.5, percebeu-se transições para o caos via duplicação de período. Expoentes de Lyapunov plotado a partir do parâmetro de controle g (amplitude de forçamento).

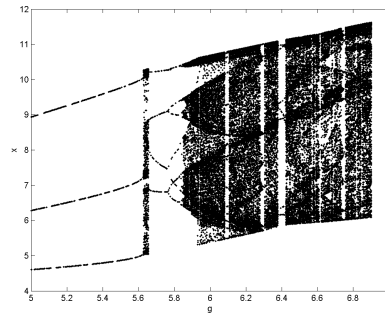


Figura 3.5: Diagrama de Bifurcação através do mapa de Poincaré no plano x .

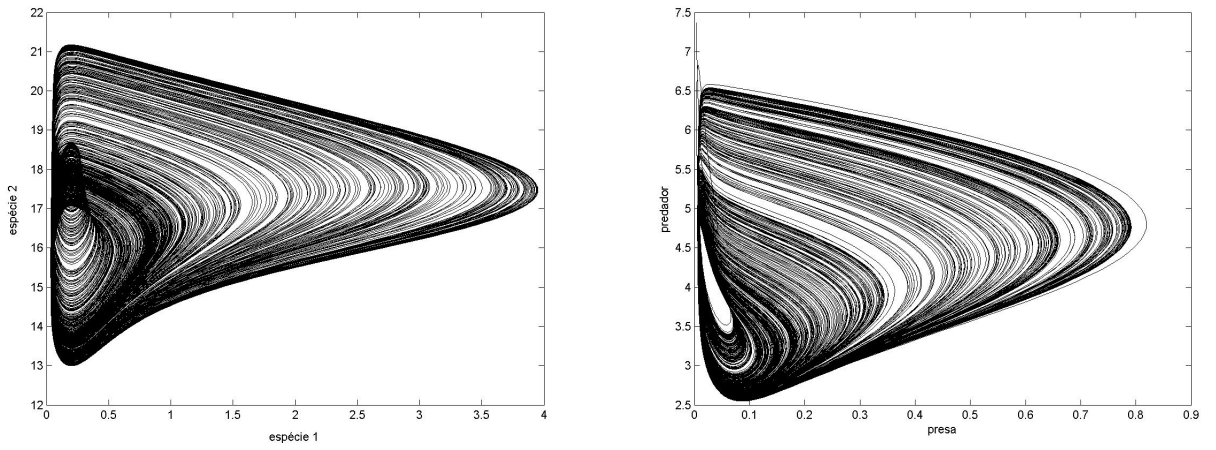


Figura 3.6: Atrator estranho do sistema predador-presa com resposta funcional de Holling tipo III.

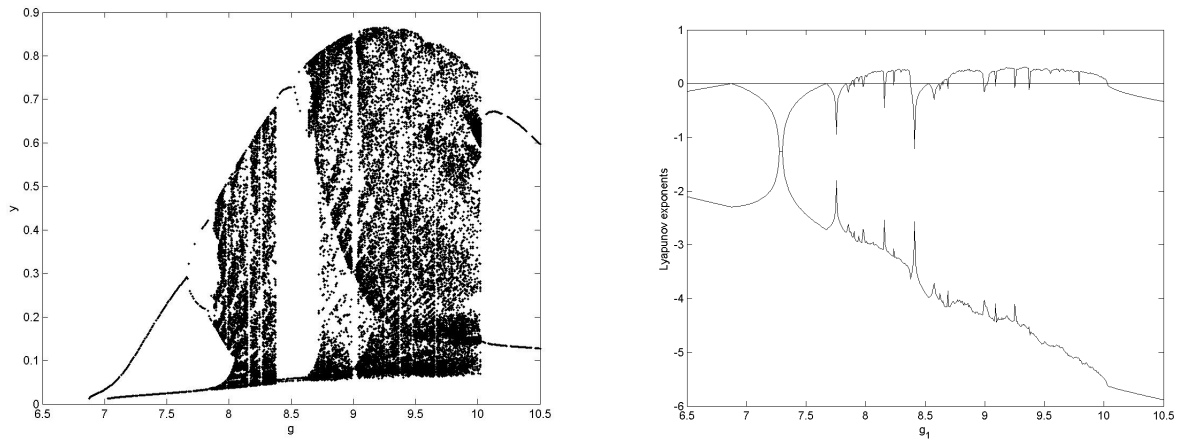


Figura 3.7: Diagrama de bifurcação

Capítulo 4

Soluções estacionárias para o sistema de EDP

4.1 Resultados Fundamentais

Neste trabalho, estamos interessados no seguinte sistema presa-predador

$$(P) \begin{cases} u_t - \Delta u = xh(x) - y\varphi(x) \\ v_t - \Delta v = y(-d + \varphi(x)) \end{cases}$$

O sistema (P) é uma generalização do modelo presa-predador em que envolve diversas funções de resposta funcional do predador $\varphi(x)$.

Para o nosso estudo se concentrará no modelo presa-predador Holling tipo II que tem resposta funcional com uma proporção constante de presa usando um refúgio:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \alpha u \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{\beta muv}{1 + amu}, \\ v_t - \Delta v = -rv + \frac{c\beta muv}{1 + amu} & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } (0, \infty) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

Onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$; considerando u, v as densidades da presa e do predador; os coeficientes determinados $\alpha, K, r, \beta, a, c$ são constantes positivas; $m \in (0, 1]$ é constante; e ν é a derivada direcional normal externa para $\partial\Omega$. Aqui $\alpha, K, r, \frac{\beta}{a}, \frac{1}{a}$ e c representam a taxa de crescimento intrínseco, a capacidade da presa, a taxa de mortalidade do predador, o número máximo de presa que pode ser comida por cada predador em unidade de tempo, a densidade da presa necessário alcançar

um meio a taxa, e a taxa de conversão, respectivamente.

O sistema (4.1) é baseado no modelo presa-predador tipo Lotka-Volterra com resposta funcional Holling tipo II $\frac{\beta u}{1+au}$ e incorpora um refúgio $(1-m)u$ que protege a presa de predação, onde $m \in (0, 1]$. Isto deixa mu da presa disponível para o predador dentro da resposta funcional.

Em [6], Du e Lou tem estudado as soluções estacionárias positivas do seguinte modelo presa-predador difusivo pelo o efeito da taxa de saturação a :

$$\begin{cases} u_t - d_1 \Delta u = u \left(e - u - \frac{b_1 v}{1 + au} \right), \\ v_t - d_2 \Delta v = v \left(d - v + \frac{b_2 u}{1 + au} \right) & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } (0, \infty) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde os determinados coeficientes são todos positivos exceto d . mais precisamente, se a taxa de saturação a é grande e d entra em uma gama positiva, então podem surgir soluções estacionárias positivas não-homogêneas, mas isto não é verdade para a pequeno. Eles também estudaram o comportamento assintótico de soluções espacialmente não-homogêneas quando $a \rightarrow \infty$.

Recentemente, problemas com difusão são estudados [8]:

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}_1 u = f(t, x, u, v) & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ v_t + \mathcal{L}_2 v = g(t, x, u, v) & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) & \text{em } \Omega, \\ u(t, x) = v(t, x) = 0 & \text{sobre } [0, \infty) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.3)$$

Destaca-se as soluções estacionárias do sistema (4.3) estudado por Fernández [8] que também analisa problemas difusivos lineares com condição de Dirichlet da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = f(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L}_2 v = g(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

O sistema elíptico do modelo Lotka-Volterra aparece em Murray [21] com termo de difusão linear,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = u(\lambda - a(x)u \pm b(x)v) & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{L}_2 v = v(\mu - d(x)v \pm c(x)u) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

sendo a, b, c, d funções sobre $\bar{\Omega}$ suficientemente regulares e satisfazendo $a(x) > 0, d(x) > 0$ para $x \in \Omega$ e $b > 0$ e $c > 0$ em Ω , e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u(x)$ e $v(x)$ as densidades populacionais das espécies e Ω o "habitat" de ambas. As funções $a(x)$ e $d(x)$ descrevem o controle de crescimento através do mecanismo de competição intra-específica de cada espécie.

Fernández [8] destaca soluções chamadas de estados de coexistência, cujas componentes são não-negativas e não triviais. As respostas sobre a existência e não existência de estados de coexistência fazem uso de métodos da Análise Funcional não linear, como sub-solução e seus métodos iterativos associados e a teoria do grau topológico em índice de pontos fixos.

O principal objetivo deste trabalho é estudar a existência e não-existência de soluções positivas de (4.1) pelos efeitos de um refúgio na presa, quer dizer, a existência e não-existência de soluções positivas não-constantes do sistema elíptico seguinte que depende da constante $m \in (0, 1]$:

$$\begin{cases} -\Delta u = \alpha u \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{\beta muv}{1 + amuv}, \\ -\Delta v = -rv + \frac{c\beta muv}{1 + amuv} & \text{em } (0, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } (0, \infty) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.6)$$

Além disso, investigamos o comportamento assintótico de soluções espacialmente não-homogêneas. Note que (4.1), e assim (4.6), tem as três seguintes soluções constantes não-negativas:

- (i) A trivial solução $(0, 0)$;
- (ii) a semi-trivial solução na ausência do predador $(K, 0)$;
- (iii) a única solução positivo constante $e_* = (u_*, v_*)$

$$u_* = \frac{r}{m(c\beta - ar)} \text{ e } v_* = \frac{\alpha c}{K} \left[\frac{Km(c\beta - ar) - r}{(m(c\beta - ar))^2} \right]$$

Para a existência de solução positiva constante e , é necessário assumir que

$$\frac{r}{K(c\beta - ar)} < m \leq 1 \text{ e } c\beta > ar.$$

Se mostra que as soluções positivas não-constantes de (4.6) pode existir para algumas gamas do parâmetro m quando $c\beta > ar$. Mais precisamente, temos o teorema seguinte. Considere $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ os autovalores de $-\Delta$ em Ω sob a condição de fronteira de Neumann homogênea e $S(\mu)$ o conjunto de autovetores que corresponde a μ .

Teorema 4.1 (i) *Se $m \in \left(0, \frac{r}{K(c\beta - ar)}\right)$, então $(K, 0)$ é globalmente assintoticamente estável.*

(ii) *Se $m \in \left(\frac{r}{K(c\beta - ar)}, \frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{1}{Ka}\right)$, então e_* é globalmente assintoticamente estável.*

(iii) *Se $m \in \left(\frac{r}{K(c\beta - ar)}, \frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta - ar)}\right)$, então e_* é localmente assintoticamente estável.*

(iv) *Bifurcação de Hopf acontece a e_* quando m aumenta de $\frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta - ar)}$.*

(v) *assuma que*

$$\frac{\alpha a^2 r}{c\beta} \left(1 - \frac{c\beta + ar}{Ka(c\beta - ar)}\right)^2 > 4(c\beta - ar) \left(1 - \frac{r}{K(c\beta - ar)}\right).$$

Então existe $m_* = m_*(\alpha, K, r, \beta, a, c)$ com $m_* > \frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta - ar)}$ tal que (1.7 – 1.9) tem uma solução positiva não-constante pelo menos para todo $m \in (m_*, 1]$, contanto que

$$\sum_{k_1-1}^{k_0+1} \dim[S(\mu_k)] \text{ é ímpar para inteiros apropriados } k_0 \text{ e } k_1.$$

4.2 O comportamento assintótico de soluções tempo-dependentes

Nesta seção, estudaremos o atrator global para soluções de (4.1). Além disso, investigamos a estabilidade de soluções constantes não-negativas de (4.1) e a existência de bifurcação de Hopf a $e_* := (u_*, v_*)$.

4.2.1 Atrator Global

Primeiramente, mostraremos que $\mathcal{R} := [0, K] \times [0, c(\frac{\alpha}{r} + 1)K]$ é um atrator global para todas soluções de (4.1) no sentido que qualquer solução não-negativo $(u(t, x), v(t, x))$ de (4.1) estar em \mathcal{R} quando $t \rightarrow \infty$ para todo $x \in \Omega$.

Teorema 4.2 *A solução não-negativa (u, v) de (4.1) satisfaz*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t, x) \leq K \quad e \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} v(t, x) \leq c \left(\frac{\alpha}{r} + 1 \right) K \quad em \bar{\Omega}.$$

Demonstração. Desde que $\alpha u \left(1 - \frac{u}{K} \right) - \frac{\beta muv}{1 + amu} \leq \alpha u \left(1 - \frac{u}{K} \right)$ em $[0, \infty) \times \Omega$,
 donde teremos

$$u(t, x) \leq \frac{K}{4} < K$$

assim existe $T \in (0, \infty)$ tal que $u(t, x) \leq K + \varepsilon$ em $[T, \infty) \times \bar{\Omega}$ para uma constante arbitrária $\varepsilon > 0$.

Agora, multiplicando a primeira equação por c e adicionando isto a segunda equação de (4.1), temos

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = c\alpha u \left(1 - \frac{u}{K} \right) - rv \quad em [T, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad em [T, \infty) \times \Omega, \\ w(0, x) = cu(T, x) + v(T, x) \quad em \Omega. \end{cases}$$

Onde $w = cu + v$. Desde que

$$c\alpha u \left(1 - \frac{u}{K} \right) - rv = c(\alpha + r)u - \frac{c\alpha}{K}u^2 - rv \leq c(\alpha + r)(K + \varepsilon) - rv \quad em [T, \infty) \times \Omega,$$

por argumento de comparação temos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} v(t, x) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} w(t, x) \leq c \left(\frac{\alpha}{r} + 1 \right) (K + \varepsilon) \quad em \bar{\Omega}$$

donde segue a segunda afirmação pela continuidade quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.3 Estabilidade de Equilíbrio não-negativo

Os principais resultados desta seção são descritos nos seguintes teoremas apresentados a respeito da estabilidade global da solução semi-trivial $(K, 0)$ e solução positiva constante e_* , respectivamente.

Teorema 4.3 *Se $m < \frac{r}{K(c\beta - ar)}$, então $(K, 0)$ é globalmente assintoticamente estável, quer dizer, $(K, 0)$ atrai toda solução positiva de (4.1).*

Demonstração. Da determinada suposição, temos $m \leq \frac{r}{(c\beta - ar)(K + \varepsilon)}$ para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno que deriva $-r + \frac{c\beta m(K + \varepsilon)}{1 + am(K + \varepsilon)} \leq 0$. Desde que $\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t, x) \leq K$ pelo teorema 4.2, então existe $T > 0$ tal que

$$u(t, x) \leq K + \varepsilon \text{ em } [T, \infty) \times \bar{\Omega}, \quad (4.7)$$

e assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t - \Delta v = v \left(-r + \frac{c\beta mu}{1 + amu} \right), \\ \leq v \left(-r + \frac{c\beta m(K + \varepsilon)}{1 + am(K + \varepsilon)} \right) \text{ em } [T, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ em } [T, \infty) \times \partial\Omega, \\ v(T, x) > 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

O argumento de comparação em (4.8) nos dá

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, x) = 0 \text{ em } \bar{\Omega}, \quad (4.9)$$

de forma que a existência de $\tilde{T} \geq T$ tal que $v(t, x) \leq \varepsilon$ em $[\tilde{T}, \infty) \times \bar{\Omega}$. Portanto, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u = \alpha \left(1 - \frac{u}{K} \right) - \frac{\beta muv}{1 + amu} \\ \geq u \left[\alpha - \beta m\varepsilon - \frac{\alpha}{K}u \right] \text{ em } [\tilde{T}, \infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ em } [\tilde{T}, \infty) \times \partial\Omega, \\ u(\tilde{T}, x) > 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

Aplicando o argumento de comparação novamente, vemos que

$$u(t, x) \geq \frac{K}{\alpha}(\alpha - \beta m\varepsilon) \text{ para } (t, x) \in [\tilde{T}, \infty) \times \bar{\Omega}. \quad (4.10)$$

Das Eqs. (4.7) e (4.10), concluímos que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = K$ em $\bar{\Omega}$ usando a continuidade quando $\varepsilon \rightarrow 0$ que implica $\|(u(t, x), v(t, x)) - (K, 0)\|_{C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ junto com (4.9).

Teorema 4.4 Se $\frac{r}{K(c\beta - ar)} < m \leq \frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{1}{Ka}$ e $c\beta > ar$, então a solução constante positiva $e_* = (u_*, v_*)$ é globalmente assintoticamente estável, que dizer, (u_*, v_*) atrai toda solução positiva de (4.1).

Demonstração. Seja $(u(t, x), v(t, x))$ uma solução positiva de (4.1) e defina a seguinte função de Lyapunov:

$$E(t) = \int_{\Omega} \left[\left(u - u_* - u_* \log \frac{u}{u_*} \right) + b \left(v - v_* - v_* \log \frac{v}{v_*} \right) \right] dx,$$

Onde $b := \frac{1+amu_*}{c} > 0$. Então temos

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} \left[\left(1 - \frac{u_*}{u} \right) u_t + b \left(1 - \frac{v_*}{v} \right) v_t \right] dx \\ &= -I(t) + \int_{\Omega} \left[(u - u_*) \left(\alpha - \frac{\alpha u}{K} - \frac{\beta m v}{1 + am u} \right) + b(v - v_*) \left(-r + \frac{c\beta m u}{1 + am u} \right) \right] dx \\ &= -I(t) + \int_{\Omega} \left[(u - u_*) \left(\alpha - \frac{\alpha u}{K} - \frac{\beta m v}{1 + am u} - \alpha + \frac{\alpha u_*}{K} + \frac{\beta m v_*}{1 + am u_*} \right) \right. \\ &\quad \left. + b(v - v_*) \left(-r + \frac{c\beta m u}{1 + am u} + r - \frac{c\beta m u_*}{1 + am u_*} \right) \right] dx \\ &= -I(t) + \int_{\Omega} \left[(u - u_*)^2 \left(-\frac{\alpha}{K} - \frac{\beta am^2 v_*}{(1 + am u)(1 + am u_*)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(u - u_*)(v - v_*)}{(1 + am u)(1 + am u_*)} \{-\beta m(1 + am u_* - bc)\} \right] dx \\ &= -I(t) + \int_{\Omega} \left[(u - u_*)^2 \left(-\frac{\alpha}{K} - \frac{\beta am^2 v_*}{(1 + am u)(1 + am u_*)} \right) \right] dx, \end{aligned}$$

Onde $I(t) := \int_{\Omega} \left[\frac{u_* |\nabla u|^2}{u^2} + b \frac{v_* |\nabla v|^2}{v^2} \right] dx \geq 0$. Na derivação anterior, note que $\alpha - \frac{\alpha u_*}{K} = \frac{\beta m v_*}{1 + am u_*}$ e $r = \frac{c\beta m u_*}{1 + am u_*}$. Além disso, a determinada suposição $m \leq \frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{1}{Ka}$ rendimento

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{K} + \frac{\beta am^2 v_*}{(1 + am u)(1 + am u_*)} &< -\frac{\alpha}{K} + \frac{\beta am^2 v_*}{(1 + am u_*)} \\ &= \alpha \left(\frac{1}{K} + am - \frac{ra}{K(c\beta - ra)} \right) \leq 0, \end{aligned}$$

e assim $E'(t) \leq 0$ que implica a afirmação desejada desde que a igualdade só segura quando $(u, v) = (u_*, v_*)$. ■

Notação

(i) $\mathbf{X}_{ij} := \{\mathbf{c} \cdot \varphi_{ij} : \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2\}$, onde $\{\varphi\}$ são bases ortonormais de $S(u_i)$ para $j = 1, \dots, \dim[S(\mu_i)]$

(ii) $\mathbf{X} := \{(u, v) \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$, de forma que $\mathbf{X} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \bigoplus_{\dim[S(\mu_i)]}^{j=1} \mathbf{X}_{ij}$

Agora, investigamos a estabilidade local da solução constante positiva $e_* = (u_*, v_*)$ debaixo de algumas condições relaxadas comparadas as do Teorema 4.4. Observe que

$$\frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{1}{Ka} < \frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta - ar)}.$$

Teorema 4.5 *Se $\frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{1}{Ka} < m < \frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta - ar)}$ e $c\beta > ar$, então a solução positiva constante e_* de (4.1) é localmente assintoticamente estável.*

Demonstração. A linearização de (4.1) à solução positiva constante e_* pode ser expressado por

$$e_t = (\mathbf{I}\Delta + \mathbf{F}_e(e_*))e,$$

Onde $e = (u(t, x), v(t, x))^T$, $\mathbf{F} = (\alpha u(1 - \frac{u}{K}) - \frac{\beta muv}{1+amu}, -rv + \frac{c\beta muv}{1+amu})$ e

$$\mathbf{F}_e(e_*) = \begin{pmatrix} \alpha - 2\frac{\alpha}{K}u_* - \frac{\beta mv_*}{(1+amu_*)^2} & -\frac{c\beta mu_*}{1+amu_*} \\ \frac{c\beta mv_*}{(1+amu_*)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Para $i \geq 0$, observe que $\bigoplus_{\dim[S(\mu_i)]}^{j=1} \mathbf{X}_{ij}$ é invariante debaixo do operador $\mathbf{I}\Delta + \mathbf{F}_e e_*$; e λ é um autovalor de $\mathbf{I}\Delta + \mathbf{F}_e e_*$ em $\bigoplus_{\dim[S(\mu_i)]}^{j=1} \mathbf{X}_{ij}$ se, e somente se, λ é um autovalor da matrix $-\mu_i \mathbf{I} + \mathbf{F}_e(e_*)$. Além disso,

$$\det(\lambda \mathbf{I} + \mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*)) = \lambda^2 + \text{traço}(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*))\lambda + \det(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*))$$

Onde

$$\text{traço}(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*)) = 2\mu_i - \left(\alpha - 2\frac{\alpha}{K}u_* - \frac{\beta mv_*}{(1+amu_*)^2} \right)$$

e

$$\det(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*)) = \mu_i^2 - \left(\alpha - 2\frac{\alpha}{K}u_* - \frac{\beta mv_*}{(1+amu_*)^2} \right) \mu_i + \frac{c\beta^2 m^2 u_* v_*}{(1+amu_*)^3}.$$

Desde que

$$u_* = \frac{r}{m(c\beta - ar)} \text{ e } v_* = \frac{\alpha c}{K} \left[\frac{Km(c\beta - ar) - r}{(m(c\beta - ar))^2} \right],$$

podemos ter

$$\alpha - 2\frac{\alpha}{K}u_* - \frac{\beta mv_*}{(1+amu_*)^2} = \frac{r\alpha c}{c\beta m} \left(m - \frac{c\beta}{Ka(c\beta - ar)} - \frac{r}{K(c\beta - ar)} \right) \quad (4.11)$$

Usando as determinadas suposições, é fácil de ver que $\det(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*)) > 0$ e $\text{traço}(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*)) > 0$, e assim os dois autovalores da matriz $-\mu_i \mathbf{I} + \mathbf{F}_e(e_*)$ tem parte real negativa para $i \geq 0$. Finalmente, conclui-se o resultado. ■

4.3.1 Bifurcação de Hopf

Devido à prova de Teorema 4.5, para bifurcação de Hopf acontecer à solução positiva constante e_* , o operador $\mathbf{I}\Delta + \mathbf{F}_e(e_*)$ tem que ter um imaginário puro, conjugado par de autovalores, isto é, $\text{traço}(\mu_i \mathbf{I} - F_e(e_*)) \equiv 0$. Os únicos possíveis valores críticos de m são $m(k)$ tal que $2\mu_k - \left(\alpha - 2\frac{\alpha}{K}u_* - \frac{\beta m(k)v_*}{(1+am(k)u_*)^2}\right) = 0$ para $k \geq 0$. Em $m = m(k)$, $\text{traço}(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*)) = 2(\mu_i - \mu_k)$ e portanto se $k \geq 1$, então $\text{traço}(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*)) < 0$ para todo $0 \leq i < k$ e o operador $\mathbf{I}\Delta + \mathbf{F}_e(e_*)$ tem em pelo menos $2k$ autovalores com parte real positiva. Então, o único valor de m a qual podem ser satisfeitas hipóteses da bifurcação de Hopf é $m = m(0) := \frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta - ar)}$ devido a (4.11). Se aproxime $m(0)$, o par conjugado complexo $k(m) \pm i\omega(m)$ é determinado por

$$k(m) = -\frac{1}{2} \cdot \text{traço}(-\mathbf{F}_e(e_*)) \text{ e } \omega^2(m) = \det(-\mathbf{F}_e(e_*)) - k^2(m),$$

enquanto os autovalores restante λ tem que satisfazer

$$\lambda^2 + \text{traço}(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*)) + \det(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*)) = 0$$

para algum $i \geq 1$. Desde que $k(m(0)) = 0$ e $\det(-\mathbf{F}_e(e_*)) > 0$ para todo $m \in (0, 1]$, há um intervalo I contendo $m(0)$ tal que

(i) $\omega^2 \neq 0$ para todo $m \in I$,

(ii) $\text{traço}(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*)) > 0$ e $\det(\mu_i \mathbf{I} - \mathbf{F}_e(e_*)) > 0$ uniformemente para $i \geq 1$ e $m \in I$.

Além, é fácil conferir $\frac{d}{dm}k(m)|_{m=m(0)} = \frac{ra\alpha}{2c\beta m(0)} > 0$ usando Eq.(4.11), e assim tenha o seguinte teorema. Para mais detalhes sobre a teoria da bifurcação de Hopf, alguem pode se referir [3, 11].

Teorema 4.6 *As soluções periódicas bifurcam da solução constante positiva e_* de (4.1) como m aumentado de $\frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta - ar)}$.*

4.4 Pontos de equilíbrio positivo não constante

Nesta seção, discutiremos a existência e não-existência de soluções positivas não constante de (4.2).

Teorema 4.7 *Assuma que $c\beta > ar$ e considere $m_0 = \frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{1}{Ka}$.*

(i) *Se $0 < m \leq \frac{r}{K(c\beta - ar)}$, então $(K, 0)$ é a única solução não-nula de (4.6).*

(ii) *Se $\frac{r}{K(c\beta - ar)} < m \leq m_0$, então (u_*, v_*) é a única solução positiva de (4.6)*

Demonstração. (i) Desde que $m \leq \frac{r}{K(c\beta - ar)}$, note que a solução positiva constante não existe neste caso. Suponha que (4.6) tem uma solução constante positiva (u, v) , então $u(x) \leq K$ em Ω segue facilmente do princípio de máximo, e então temos

$$-\Delta v = v \left(-r + \frac{c\beta mu}{1 + amu} \right) \leq v \left(-r + \frac{c\beta mK}{1 + amK} \right) = v \left(\frac{(c\beta - ar)mK - r}{1 + amK} \right) \leq 0$$

em Ω da superposição. Consequentemente o princípio do máximo nos leva $v \equiv 0$ em Ω , uma contradição.

(ii) Suponha que $(U(x), V(x))$ é uma solução positiva não-constante de (4.6). Considere $u(t, x) = U$ e $v(t, x) = V$. Então (U, V) é uma solução positiva do sistema (4.1) tempo-dependente com condições iniciais $u(0, x) = U(x)$ e $v(0, x) = V(x)$. Para a função de Lyapunov $E(t)$ definida no Teorema 4.4 vemos que $E'(t) = 0$ para todo $t > 0$, e assim $(u(t, x), v(t, x)) = (U(x), V(x)) \equiv (u_*, v_*)$ em $\bar{\Omega}$, o resultado desejado. ■

No anterior teorema, note que se $m = m_0$ e $c\beta > ar$, então (4.6) possui somente a solução constante (u_*, v_*) . Isto será usado depois quando mostrarmos a existência de soluções positivas de (4.6).

4.5 Uma limitação superior e inferior

Para mostrar a existência do equilíbrio não-constante, usamos a teoria de índice aplicando a propriedade de homotopia invariante. Para este fim, considere o sistema seguinte para $\theta \in [0, 1]$:

$$-\Delta u = \alpha \left(1 - \frac{u}{K} \right) - \frac{\beta((1 - \theta)m_0 + \theta m)uv}{1 + a((1 - \theta)m_0 + \theta m)u},$$

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= \alpha \left(1 - \frac{u}{K}\right) + \frac{c\beta((1-\theta)m_0 + \theta m)uv}{1 + a((1-\theta)m_0 + \theta m)u} && \text{em } \Omega \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} &= \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 && \text{em } \Omega,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

assumindo que $c\beta > ar$ e $\frac{r}{K(c\beta-ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta-ar)} < m \leq 1$. Com estas suposições, nota que $m_0 < m$, de forma que $(1-\theta)m_0 + \theta m \leq (1-\theta)m + \theta m = 1$.

A seguinte desigualdade de Harnack pode ser encontrada em [12] que é útil obter uma limitação inferior da soluções positivas de (4.12).

Lema 4.1 (*Desigualdade de Harnack*). *Seja $\phi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ uma solução positiva para $\Delta\phi + c(x)\phi = 0$ em Ω sujeito a Neumann limite condição homogênea com $c(x) \in C(\bar{\Omega})$. Então, existe uma constante positiva $C_* = C_*(\|c\|_\infty)$ tal que*

$$\max_{\bar{\Omega}} \phi \leq C_* \min_{\bar{\Omega}} \phi.$$

Teorema 4.8 *Assuma que $\frac{r}{K(c\beta-ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta-ar)} < m \leq 1$. Então para $\theta \in [0, 1]$, alguma solução positiva (u, v) de (4.12) satisfaz*

$$u(x), v(x) = \max \left\{ 1, c \left(\frac{\alpha}{r} + 1 \right) \right\} K \text{ em } \bar{\Omega}.$$

Demonstração. É fácil de mostrar para que $u(x) \leq K$ em $\bar{\Omega}$ pelo princípio do máximo e

$$-\Delta(cu + v) \leq c(\alpha + r)K - r(cu + v) \text{ em } \bar{\Omega},$$

da Eq.(4.12). Aplicando o princípio de máximo novamente, temos $cu(x) + v(x) \leq c(\frac{\alpha}{r} + 1)K$ em $\bar{\Omega}$ que implica o resultado. \blacksquare

Note que a solução positiva de (4.12) está contida em $C^2(\bar{\Omega}) \times C^2(\bar{\Omega})$ pelo teorema de regularidade para equações elípticas [9], e assim Lema 4.1 pode ser aplicado ao sistema (4.12). Por simplicidade, denote $\Gamma := (K, \alpha, \beta, r, a, c)$.

Teorema 4.9 *Assuma que $c\beta > ar$ e $\frac{r}{K(c\beta-ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta-ar)} < m \leq 1$. Então, para $\theta \in [0, 1]$, existe uma constante positiva $\hat{C} := \hat{C}(\Gamma)$ tal que alguma solução positiva (u, v) de (4.12) satisfaz*

$$u(x), v(x) \geq \hat{C} \text{ em } \bar{\Omega}.$$

Demonstração. Seja

$$c_1(x) = \alpha - \frac{\alpha}{K}u - \frac{\beta((1-\theta)m_0 + \theta m)uv}{1 + a((1-\theta)m_0 + \theta m)u}$$

e

$$c_2(x) = -r + \frac{\beta((1-\theta)m_0 + \theta m)uv}{1 + a((1-\theta)m_0 + \theta m)u}.$$

Então, $|c_1(x)| \leq 2\alpha + \beta c(\frac{\alpha}{r} + 1)K$ e $|c_2(x)| \leq r + c\beta K$ pode ser facilmente mostrado usando Teorema 4.8, e assim existe uma solução positiva constante $\tilde{C} := \tilde{C}(\Gamma)$ tal que $\|c_1(x)\|_\infty, \|c_2(x)\|_\infty \leq \tilde{C}$. Consequentemente Lema 4.1 garante a existência de uma constante positiva $C_* := C_*(\Gamma)$ tal que

$$C_* \min_{\Omega} u \geq \max_{\Omega} u \text{ e } C_* \min_{\Omega} v \geq \max_{\Omega} v.$$

Contrariamente, suponha o resulta falso. Então, existe uma sequência $\{(u_n, v_n)\}$ de solução positiva do sistema (4.12) tal que

$$\max_{\Omega} u_n \rightarrow 0 \text{ ou } \max_{\Omega} v_n \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

Pela teoria de regularidade para equações elípticas[7,17], vemos que existe uma sub-sequência de $\{(u_n, v_n)\}$, que será denotado novamente por $\{(u_n, v_n)\}$, e funções não-negativas $\tilde{u}, \tilde{v} \in C^2(\bar{\Omega})$ tal que $(u_n, v_n) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$ quando $n \rightarrow \infty$. Desde que (4.13) ocorra, $\tilde{u} \equiv 0$ ou $\tilde{v} \equiv 0$. (Observe que $\tilde{u} \leq K$ devido ao Teorema 4.8.) Então, temos o seguinte dois casos:

Caso 1. $\tilde{u} \equiv 0, \tilde{v} \not\equiv 0$; ou $\tilde{u} \equiv 0, \tilde{v} \equiv 0$.

Caso 2. $\tilde{u} \not\equiv 0, \tilde{v} \equiv 0$.

Desde que (u_n, v_n) é uma solução positiva de (4.12), podemos obter a equação integral por integração de Eq.(4.12) para u_n e v_n sobre Ω , respectivamente: para todo $n \geq 1$,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u_n \left(\alpha - \frac{\alpha}{K} u_n - \frac{\beta((1-\theta)m_0 + \theta m)v_n}{1 + a((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n} \right) = 0, \\ \int_{\Omega} v_n \left(-r + \frac{\beta((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n}{1 + a((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n} \right) = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Neste caso, desde que

$$-r + \frac{\beta((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n}{1 + a((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n} \rightarrow -r < 0$$

uniformemente quando $n \rightarrow \infty$ e $v_n > 0$,

$$\int_{\Omega} v_n \left(-r + \frac{\beta((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n}{1 + a((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n} \right) < 0$$

para n suficientemente grande, que é uma contradição.

Caso 2. Usando a primeira equação de (4.12) e o fato que $v_n \rightarrow \tilde{v} \equiv 0$ quando $n \rightarrow \infty$ vemos que $\int_{\Omega} \alpha \tilde{u} (1 - \frac{\tilde{u}}{K}) = 0$, e $\tilde{u} \equiv K$ desde que $0 < \tilde{u} \leq K$. Desde que

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{((1-\theta)m_0 + \theta m)}{1 + a((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n} \right) = \frac{m - m_0}{(1 + a((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n)^2} > 0$$

e $m_0(c\beta - ar)K = r + \frac{1}{a}(c\beta - ar)$ pela definição de m_0 , temos

$$\begin{aligned} -r + c \frac{\beta((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n}{1 + a((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n} &\geq -r + \frac{c\beta m_0 u_n}{1 + am_0 u_n} \\ &\rightarrow -r + \frac{c\beta m_0 K}{1 + am_0 K} \\ &= \frac{c\beta - ar}{a(1 + am_0 K)} > 0, \end{aligned}$$

e assim $-r + c \frac{\beta((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n}{1 + a((1-\theta)m_0 + \theta m)u_n} > 0$ para um n suficientemente grande. Assim, temos uma contradição novamente à segunda equação integral de (4.12). Isto completa a prova. ■

4.6 Existência do equilíbrio positivo não-constante

Para mostrar a existência de soluções positivas não-constantes, usamos teoria do grau de Leray-Schauder. Definindo convenientemente um operador compacto $\mathcal{F} : X \rightarrow X$ dado por

$$\mathcal{F}(\mathbf{e}) := \begin{pmatrix} (I - \Delta)^{-1} \left[\alpha u \left(1 - \frac{u}{K}\right) - \frac{\beta muv}{1 + am u} + u \right] \\ (I - \Delta)^{-1} \left[-rv + \frac{c\beta muv}{1 + am u} + v \right] \end{pmatrix},$$

sendo $\mathbf{e} = (u(x), v(x))^T$. Então o sistema (4.2) é equivalente à equação $(I - \mathcal{F})\mathbf{e} = 0$. Para aplicar a teoria de índice, investigamos autovalor do problema

$$-(I - \mathcal{F}(\mathbf{e}_*))\Phi = \lambda\Phi, \quad \Phi \neq \mathbf{0}, \quad (4.15)$$

sendo $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$ e $e_* = (u_*, v_*)$. Se 0 não é um autovalor de (4.15), então o Teorema de Leary-Schauder[14, Teorema 2.8.1] implica

$$\text{índice}(I - \mathcal{F}, \mathbf{e}_*) = (-1)^\gamma,$$

sendo $\gamma = \sum_{\lambda > 0} n_\lambda$ e n_λ a multiplicidade algébrica do autovalor positivo λ de (4.15). Depois de Cálculos, (4.15) pode ser reescrito como

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\lambda + 1)\Delta\Phi_1 + \left[\lambda - \left(\alpha - 2\frac{\alpha}{K}u_* - \frac{\beta mv_*}{(1 + amu_*)^2} \right) \right] \Phi_1 + \frac{\beta mu_*}{(1 + amu_*)} \Phi_2 = 0, \\ -(\lambda + 1)\Delta\Phi_2 - \frac{c\beta mv_*}{(1 + amu_*)^2} \Phi_1 + \lambda\Phi_2 = 0 \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial\nu} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ \Phi_i \neq 0 \text{ para } i = 1, 2. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Observe que (4.16) possui uma solução não-trivial se, e somente se, $P_k(\lambda) = 0$ para algum $\lambda \geq 0$ e $k \geq 0$, sendo

$$P_k(\lambda) := \det \left(\begin{array}{cc} \lambda + \frac{\mu_k - \left(\alpha - 2\frac{\alpha}{K}u_* - \frac{\beta mv_*}{(1 + amu_*)^2} \right)}{1 + \mu_k} & \frac{1}{1 + \mu_k} \frac{\beta mu_*}{1 + amu_*} \\ \frac{1}{1 + \mu_k} \frac{c\beta mv_*}{(1 + amu_*)^2} & \lambda + \frac{\mu_k}{1 + \mu_k} \end{array} \right).$$

Quer dizer, λ é um autovalor de (4.15), de forma que (4.16), se, e somente se, λ é uma raiz positiva da equação característica $P_k(\lambda) = 0$ para $k \geq 0$. Então, se $P_k(0) \neq 0$ para todo $k \geq 0$, podemos ver que

$$\text{índice}(I - \mathcal{F}, \mathbf{e}_*) = (-1)^\gamma, \quad \gamma = \sum_{k \geq 0} \sum_{\lambda_k > 0} m_{\lambda_k} \dim[S(\mu_k)],$$

onde m_{λ_k} é a multiplicidade de λ_k para uma raiz positiva de $P_k(\lambda) = 0$.

Para $\theta \in [0, 1]$, defina uma homotopia

$$\mathcal{F}_\theta(\mathbf{e}) := \left(\begin{array}{c} (I - \Delta)^{-1} \left[\alpha u \left(1 - \frac{u}{K} \right) - \frac{\beta((1 - \theta)m_0 + \theta m)uv}{1 + a((1 - \theta)m_0 + \theta m)u} + u \right] \\ (I - \Delta)^{-1} \left[-rv + \frac{c\beta((1 - \theta)m_0 + \theta m)uv}{1 + a((1 - \theta)m_0 + \theta m)mu} + v \right] \end{array} \right),$$

sendo $m_0 = \frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{1}{Ka}$ sob as suposições $c\beta > ar$ e $\frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta - ar)} < m \leq 1$. Pelo Teorema (4.8) e (4.9) as soluções positivas do problema $\mathcal{F}_\theta(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$ estão contidas em $\Lambda := \{\mathbf{e} \in X : \widehat{C}/2 < u, v < 2K \max\{1, c(\frac{\alpha}{r} + 1)\}\}$. Desde que $\mathcal{F}_\theta(\mathbf{e}) \neq \mathbf{e}$ para todo $\mathbf{e} \in \partial\Lambda$ e $\mathcal{F}_\theta(\mathbf{e}) : \Lambda \times [0, 1] \rightarrow X$ é compacto, pode-se ver que o grau $\deg(I - \mathcal{F}_\theta(\mathbf{e}), \Lambda, 0)$ está bem definido.

Lema 4.2 *Se $c\beta > ar$, então $\deg(I - \mathcal{F}_0(\mathbf{e}), \Lambda, 0) = 1$.*

Demonstração. Devido ao Teorema 4.7(ii), observe que a equação $\mathcal{F}_0(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$ possui uma única solução positiva constante $\mathbf{e}_* = (\widehat{u}_*, \widehat{v}_*)$, onde

$$\widehat{u}_* = \frac{r}{m_0(c\beta - ar)} \text{ e } \widehat{v}_* = \frac{\alpha c}{K} \left[\frac{K m_0(c\beta - ar) - r}{(m_0(c\beta - ar))^2} \right],$$

e então, $\deg(I - \mathcal{F}_0(\mathbf{e}), \Lambda, 0) = \text{índice}(I - \mathcal{F}_0, \widehat{\mathbf{e}}_*)$. Convenientemente, considere

$$\widetilde{A} := \alpha 2 \frac{\alpha}{K} \widehat{u}_* - \frac{\beta m_0 \widehat{v}_*}{(1 + a m_0 \widehat{u}_*)^2} \text{ e } \widetilde{B} := \frac{c\beta^2 m_0^2 \widehat{u}_* \widehat{v}_*}{(1 + a m_0 \widehat{u}_*)^3} > 0,$$

então temos $\widetilde{A} = \frac{\alpha ar}{c\beta m_0} \frac{1}{Ka} \left(-\frac{ar}{c\beta - ar}\right) < 0$ da Eq.(4.11) e da definição de m_0 ; como $\widetilde{B} > 0$, e portanto, segue de imediato que $P_k(\lambda) > 0$ para todo $\lambda \geq 0$ e $k \geq 0$ desde que

$$P_k(\lambda) \begin{cases} \lambda^2 - \widetilde{A}\lambda + \widetilde{B} & \text{se } k = 0 \text{ (i.e., } \mu_0 = 0), \\ \lambda^2 + \left(\frac{2\mu_k - \widetilde{A}}{1 + \mu_k}\right)\lambda + \frac{1}{(1 + \mu_k)^2}(\mu_k^2 - \widetilde{A}\mu_k + \widetilde{B}) & \text{se } k \geq 1 \text{ (i.e., } \mu_k > 0). \end{cases}$$

Então, concluímos que $\lambda = \sum_{k \geq 0} \sum_{\lambda_k > 0} n_{\lambda_k} = 0$ que implica $\text{índice}(I - \mathcal{F}_0, \widehat{\mathbf{e}}_*) = (-1)^0 = 1$. ■

Pelos dois seguintes lemas, calculamos $\deg(I - \mathcal{F}_1(e), \Lambda, 0)$. Convenientemente, denote

$$\zeta := \frac{\alpha a^2 r}{c\beta} - 4(c\beta - ar),$$

$$\eta := r \left(\frac{2}{K} - \frac{\alpha a^2}{c\beta} \frac{c\beta + ar}{Ka(c\beta - ar)} \right)$$

e

$$\sigma := \frac{\alpha a^2 r}{c\beta} \left(\frac{c\beta + ar}{Ka(c\beta - ar)} \right)^2.$$

Lema 4.3 *Assuma que*

$$\frac{\alpha a^2 r}{c\beta} > 4(c\beta - ar) \left(\frac{1 - \frac{r}{K(c\beta - ar)}}{\left(1 - \frac{c\beta + ar}{Ka(c\beta - ar)}\right)^2} \right) \text{ e } c\beta > ar. \quad (4.17)$$

(i) $M(m) := \zeta m^2 + 2\eta m + \sigma = 0$ possui uma raiz positiva m_* com $\frac{r}{k(c\beta - ar)} + \frac{c\beta}{ka(c\beta - ar)} < m_* < 1$.

(ii) Se $m_* < m \leq 1$, então $P_0(\lambda) = \lambda^2 - A\lambda + B = 0$ possui duas raízes positivas, onde

$$A := \alpha - 2\frac{\alpha}{K}u_* - \frac{\beta m v_*}{(1 + amu_*)^2} \text{ e } B := \frac{c\beta^2 m^2 u_* v_*}{(1 + amu_*)^3}.$$

Demonstração.(i) Desde que $1 - \frac{r}{K(c\beta - ar)} > 1 - \frac{c\beta + ar}{Ka(c\beta - ar)} > 0$, temos $1 - \frac{r}{K(c\beta - ar)} > \left(1 - \frac{c\beta + ar}{Ka(c\beta - ar)}\right)^2$

que deriva $\zeta > 0$ com a primeira desigualdade de (4.17). Além disso, pode-se conferir que

$$\eta < 2\frac{r}{K} - 4(c\beta - ar)\frac{c\beta + ar}{Ka(c\beta - ar)} < 0,$$

$$M\left(\frac{r}{k(c\beta - ar)} + \frac{c\beta}{ka(c\beta - ar)}\right) = -\frac{4c\beta(c\beta + ar)}{K^2 a^2 (c\beta - ar)} < 0$$

e

$$M(1) = \frac{\alpha a^2 r}{c\beta} \left(1 - \frac{c\beta + ar}{Ka(c\beta - ar)}\right)^2 - 4(c\beta - ar) \left(1 - \frac{r}{K(c\beta - ar)}\right) > 0$$

que conclui o resultado.

(ii) Na prova de (i), note que $M_m > 0$ para todo $m \in (m_*, 1]$. Usando este fato e Eq.(4.11), podemos obter $A > 0$, $B = \frac{\alpha r}{c\beta K m} (K(c\beta - ar)m - r) > 0$ e $A^2 - 4B = \frac{\alpha r}{c\beta m^2} \cdot M(m) > 0$ para todo $m \in (m_*, 1]$ que completa a prova. ■

Observação 4.1 (i) *Na prova do Lema 4.3, note que*

$$\eta^2 - \zeta\sigma = \frac{4}{c\beta K^2 (c\beta - ar)} (c\beta(c\beta - ar)r^2 + (c\beta)^2 \alpha r + c\beta r^2 \alpha \alpha) > 0.$$

(ii) *as condições determinadas em (4.17) são um pouco complicadas. Para uma simples verificação, considere $c\beta := \delta + ar$ para alguma constante positiva $\delta > 2\frac{r}{K}$ e considere o caso onde a taxa de saturação a tende para ∞ . Então, pode-se ver facilmente que (4.17) é claramente satisfeita. Além disso,*

$$\frac{r}{K(c\beta - ar)} + \frac{c\beta}{Ka(c\beta - ar)} \rightarrow 2\frac{r}{K\delta} \text{ e } m_* \rightarrow 2\frac{r}{K\delta} \text{ quando } \rightarrow \infty,$$

e assim Lema 4.3 acontece para $m \in (2\frac{r}{K\delta}, 1]$.

Lema 4.4 *Assuma (4.17) e $m_* < m \leq 1$.*

(i) $\mu^2 - A\mu + B = 0$ possui duas raízes positivas u_* e u^* tal que $u_* \in (u_{k_0}, u_{k_0+1})$ e $u^* \in (u_{k_1}, u_{k_1+1})$ para algum $0 \leq k_0 < k_1$.

(ii) Se $\frac{A}{2} \in (u_{k_2}, u_{k_2+1})$, então $k_2 \in (k_0, k_1)$.

(iii) Se $k \leq k_0$, então

$$P_k(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{2\mu_k - A}{1 + \mu_k} \right) \lambda + \frac{1}{(1 + \mu)^2} (\mu_k^2 - A\mu_k - B) = 0$$

possui duas raízes positivas.

(iv) Se $k_0 + 1 \leq k \leq k_1 - 1$, então $P_k(\lambda) = 0$ possui somente uma raiz positiva.

(v) Se $k_1 \leq k$, então $P_k(\lambda) = 0$ não possui raiz positiva.

Demonstração. (i) só é igual a Lema 4.4(ii); e (ii) pode ser conferido facilmente desde que $\mu_* = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$ e $\mu^* = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$. Além disso, devido a (i) e (ii), pode-se mostrar facilmente os resultados (iii)-(v). ■

O seguinte teorema fornece um critério para a existência de soluções de equilíbrio positivo não-constante de (4.1).

Teorema 4.10 *Assuma que (4.17) e $m_* < m \leq 1$. Se $\sum_{k_1-1}^{k=k_0+1} \dim[S(\mu_k)]$ é ímpar para algum k_0 e k_1 que satisfaz o Lema 4.4, então (4.6) tem pelo menos uma solução positiva não-constante.*

Demonstração. Suponha que (4.6) não possua solução positiva não-constante. Note que pela propriedade da invariância da homotopia do grau, $\deg(I - \mathcal{F}_0(\mathbf{e}), \Gamma, 0) = \deg(I - \mathcal{F}_1(\mathbf{e}), \Gamma, 0)$. Desde que assumimos que não há nenhuma solução positiva não-constante de (4.6), temos

$$\deg(I - \mathcal{F}_1(\mathbf{e}), \Gamma, 0) = \text{índice}(I - \mathcal{F}, \mathbf{e}_*) = (-1)^{2 + \sum_{k_0}^{k=1} 2\dim[S(\mu_k)] + \sum_{k_1-1}^{k=k_0+1} \dim[S(\mu_k)]} = -1$$

pelo Lema 4.4(iii)-(v) o que contradiz o Lema 4.2. Esta contradição completa a prova. ■

Capítulo 5

Considerações finais

Consideramos neste trabalho dois modelos de interação presa-predador com resposta funcional de Holling tipo II e III, com a seguinte forma:

$$\varphi(x) = \frac{mx}{a+x} \quad (5.1)$$

$$\varphi(x) = \frac{mx^2}{a^2+x^2} \quad (5.2)$$

O sistema presa-predador com a resposta funcional do predador (5.1) é estudado incorporando o refúgio na presa, este fato considera que as presas possui alguma forma de refúgio. O refúgio têm sua importância, por exemplo, no controle de peste. Temos abordado o sistema (2.3) com forçamento sazonal, nas taxas de natalidade e mortalidade da presa e predador, respectivamente. A sazonalidade causa efeito migratório na população, sendo o fluxo migratório influenciado pelas estações do ano. O efeito sazonal causa perturbações ambientais ocasionando mudanças nas condições físicas e climáticas do habitat. Os resultados do sistema (2.3) envolve a estabilidade local dos pontos estacionários P_0 , P_1 e P_2 , sendo que existe único ciclo limite quando

$$m \leq \frac{\gamma}{k(c\beta - \gamma a)} - \frac{c\beta}{ka(c\beta - \gamma a)}$$

No sistema (2.8) com resposta funcional de Holling III temos mostrado que existe um ciclo limite quando neste sistema o equilíbrio positivo P_2 é instável. Com intuito da análise da estabilidade dos pontos fixos foi imposta condições para estabilidade local e global. Ainda, em nosso trabalho, utilizamos o modelo presa-predador dependente da taxa de natalidade da presa e com perturbações simultâneas na taxa de crescimento da

presa e decaimento do predador. Muitos ecossistemas ecológicos experimentam mudanças sazonais em fatores abióticos resultantes de mudanças climáticas. As mudanças sazonais alteram os padrões de oscilação regular das espécies causando catástrofes ou seleção natural em seus habitats.

A dinâmica de população tem sido extensivamente investigado com respeito ao efeito de crescimento sazonal [26, 27, 30, 31]. A dinâmica dos sistemas presa-predador (2.3-2.8) com forçamento periódico e resposta funcional é estudado. A solução do sistema com condições iniciais são obtidas numericamente com vários valores dos parâmetros. O diagrama de bifurcação prover um sumário essencial ao comportamento da dinâmica do sistema, que pode apresentar pontos fixos, regiões periódicas e caóticas. A duplicação de período ou cascata de Feigenbaum imerge no cenário da dinâmica do caos. No diagrama de bifurcação podemos encontrar regiões caóticas, periódicas e quase-periódicas. A perturbação sazonal inserida no sistema consumidor e alimentação evidência uma dinâmica complexa com regime caótico, e também apresenta comportamento oscilatório estável para coexistência das interações tróficas.

Todos os resultados advindos da análise numérica dos sistemas (2.3) e (2.8) mostraram existência de soluções periódicas, quasi-periódicas e caóticas. A existência de caos se deve à sensível dependência às condições iniciais, que pode ser vista no expoentes de Lyapunov positivo das figuras 3.2, 3.3, 3.4.

O modelo difusivo presa-predador com resposta funcional e refúgio constante é estudado sob condição de fronteira de Neumann homogênea. Os resultados obtidos sobre solução constante e não-constante positiva estão contidos em [19].

Na Seção 4.2, estudamos o comportamento assintótico das soluções de tempo dependente, quer dizer, investigamos o atrator global, a propriedade de persistência, a estabilidade de soluções constantes não-negativas e a existência de soluções periódicas na solução positiva constante e_* de (4.1). Finalmente, em Seção 4.4, provamos a existência e inexistência de soluções positivas não-constantes de (4.6) para algumas gamas de parâmetro m usando teoria do grau de Leray-Schauder.

Do teorema 4.1 temos as condições de estabilidade de ponto de equilíbrio, trivial, semitrivial e positivo em localmente e globalmente estável. Caracterizou-se a existência da bifurcação de Hopf, e usando o método do grau topológico de Leray-Schauder mostra-se a existência de solução positiva não-constante para o problema elíptico.

Para trabalhos futuros pode-se usar a função de resposta funcional de Gause [20] e no

lugar do parâmetro m (constante) usar uma função, pois o meio ambiente não são, em geral, homogêneos.

Bibliografia

- [1] F. CHEN. *Global asymptotic analysis in n -species non-autonomous Lotka-Volterra competitive systems with infinite delays and feedback control.* *App. Math. and Comp.* 170 (2005) 1452-1468.
- [2] J.P. CHEN, Z. HONG-DE. *The qualitative analysis of two species predator-prey model with Holling type III functional response.* *Appl. Math. Mech.* 7 (1986) 77-86.
- [3] M.G. CRANDALL, P.H. RABINOWITZ. *The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions.* *Arch. Ration. Mech. Anal.* 67 (1) (1997) 53-72.
- [4] DANNY S., JUSTIN G. C., BRIAN P. H. *Chaos in periodically forced discrete-time ecosystem models.* *Chaos, Solitons and Fractals* 11(200) 2331 - 2342.
- [5] C. I. DOERING, A. O. LOPES. em *Equações diferenciais Ordinárias, 2. Ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.*
- [6] Y. DU, Y. LOU. *Qualitative behavior of positive solutions of a predator-prey model: Effects of saturation.* *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 131 (2) (2001) 321-349.
- [7] EDUARDO, G.O., RODRIGO, R. J. *Dynamic consequences of prey reguges in a simple model system: more prey, fewer predators and enhanced stability.* *Ecological Modeling* 166 (2003) 135 - 146.
- [8] A. S. FERNÁNDEZ. *Propriedades de las soluciones de sistemas estacionarios de la dinámica de poblaciones con difusión lineal e no lineal.* *Tese de Doutorado, Universidade de Sevilla, 1999.*
- [9] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* *Springer-Verlag, New York, 1983.*

- [10] KAZARINOFF, N.D. AND P. VAN DEN DRIESSCHE. *A model predator-prey system with funcional response. J. Mathematical Biosciences (1978), 125-134.*
- [11] YURI A. KUZNETSOV. *Elements of Applied Bifurcations Theory. Springer-Verlag, 1998.*
- [12] RAFIKOV M. *Notas do Minicurso: Aplicações dos Modelos Matemáticos no Controle de Populações. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande. Congresso XXV, 2002.*
- [13] DOS SANTOS, ELINEI PINTO. *Bifurcações, Controle e Sincronização do Caos nos Circuitos de Matsumoto-Chua. Tese de doutorado IF. USP, 2001.*
- [14] J. SOTOMAYOR.. *Lições de equações diferenciais. IMPA, Rio de Janeiro, 1979..*
- [15] X.P. YAN. *Stability and Hopf bifurcation for a delayed prey-predator system with diffusion effects. App. Math. and Comp. 192 (2007) 552-566.*
- [16] Y. LI, L. LU AND X. ZHU. *Existence of periodic solutions in n-species food-chain system with impulsive. N. Analysis Real World App. 7 (2006) 414-431.*
- [17] X. LIU, W. ONTARIO. *Stability of impulsive systems with time delay. Math. Comp. Mod. 39 (2004) 511-519.*
- [18] KAR, TAPAN KUMAR. *Stability analysis of a prey-predator model incorporating a prey refuge. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, V. 10, Issue 6, (2005), Pg 681-691.*
- [19] KO, W., RYU, K. *Qualitative analysis of a predator-prey model with Holling type II funcional response incorporating a prey refuge. J. Differential Equations 231 (2006)534-550.*
- [20] Y. KUANG, H.I. FREEDMAN. *Uniqueness of limit cycles in Gause-type predator-prey systems. newblock Math Biosci, 88 (1988) 67-84.*
- [21] J. D. MURRAY. *Mathematical Biology. newblock Biomaths. Texts, Vol 19, Springer-Verlag, Berlin, (1989).*
- [22] ODUM, EUGENE P. *Ecologia. Editora Gaunabara. Rio de Janeiro, Rj. 1988.*

- [23] OTT, EDWARD. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge, New York, 1993.
- [24] PARKER S. T.; CHUA, LEON O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer - Verlag, ISBN0-387-96689-7, New York Berlin Heidelberg, 1996.
- [25] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third Edition, Springer, New York, 2001.
- [26] RIBEIRO, L.S.; COSTA, L. P. DA; PEREIRA, W. D. C.; DOS SANTOS, E.P. . *Chaos and seasonal variation analysis in Lotka-Volterra model*. *Biomat* 2004.
- [27] G.C.W. SABIN AND D. SUMMER. *Chaos in a periodically forced predator-prey ecosystem model*. *Math. Biosci.* 113 (1993), pp. 91-113.
- [28] CHATTOPADHYAY, J.; BAIRAGI, N. AND SARKAR, R.R. *A Predator-Prey Model with Some Cover on Prey Species*. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 3 (2000) 407-420.
- [29] C. SUN, M. HAN, Y. LIN, Y. CHEN. *Global qualitative for a predator-prey system with delay*. *Chaos, solitons and Fractals* 32 (2007) 1582-1596.
- [30] G. SUNITA, N. R. KAMEL. *Chaos in seasonally perturbed ratio-dependent prey-predator system*. *Chaos, Solitons and Fractals*, V.15,(2003), 107-118.
- [31] G. SUNITA, N. R. KAMEL. *Seasonally perturbed prey-predator system with predator-dependent functional response*. *Chaos, Solitons and Fractals*, V. 18, (2003), 1075-1083.
- [32] G. SUNITA, S. K. SAHANI, K. NEGI. *Effects of seasonal growth on delayed prey-predator model*. *Chaos, Solitons and Fractals*. Available online 29 May 2007.
- [33] S. TANG, L. CHEN. *The periodic predator-prey Lotka-Volterra model with impulsive effect*. *J. Mechanics in Medicine and Biology* v.2 N°3 (2002) 1-30.
- [34] R. XU. *A reaction-diffusion predator-prey model with stage structure and nonlocal delay*. *App. Math. and Comp.* 175 (2006) 984-1006.
- [35] H. ZHANG, L. CHEN, R. ZHU. *Permanence and extinction of a periodic predator-prey delay systems with functional response and stage structure for prey*. *App. Math. and Comp.* 184 (2006) 931-944.

- [36] S. ZHANG, D. TAN, L. CHEN. *Chaos in periodically forced Holling type IV predator-prey system with impulsive perturbations. Chaos, solitions and Fractals 27 (2006) 980-990.*
- [37] H. WANG, W. WANG. *The dynamics complexity of a Ivlev-type prey-predator system with impulsive effect. Chaos, Solitions and Fractals 38 (2007) 1168-1176.*

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)