



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

Pedro Luíz Oliveira Braga

SOBRE UM SISTEMA ACOPLADO  
EM UM DOMÍNIO NÃO CILÍNDRICO:  
SOLUÇÃO GLOBAL FORTE  
E DECAIMENTO EXPONENCIAL

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém-PA  
2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Pedro Luíz Oliveira Braga**

**SOBRE UM SISTEMA ACOPLADO  
EM UM DOMÍNIO NÃO CILÍNDRICO:  
SOLUÇÃO GLOBAL FORTE  
E DECAIMENTO EXPONENCIAL**

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - UFPA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

**Belém-PA**

**2006**

**Banca Examinadora**

---

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos  
Universidade Federal do Pará, UFPA  
**Presidente**

---

Prof. Dr. xxxxxxxx xxxxx xxxxxx  
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx, uuuu  
**Examinador**

---

Prof. Dr. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx  
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx, Uuuu  
**Examinador**

# Agradecimentos

★ Agradeço a Deus, Todo Poderoso, fonte de toda a sabedoria, que me concedeu a vida e força para chegar ao final deste trabalho;

★ Agradeço também a minha mãe (Aurelina Braga) e esposa (Isis Simão) pela força e encorajamento para seguir em frente, e a todos aqueles que considero família;

★ Ao meu orientador, Prof. Dr. Mauro de Lima Santos, pela orientação, disponibilidade e atenção dispensados na elaboração deste trabalho;

★ Aos professores do Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística;

★ Aos meus colegas de curso, que ao longo desta jornada me acompanharam e me ajudaram a cumprir conjuntamente este trajeto de dificuldades e lutas;

★ Agradeço à Telma, secretária do mestrado, pelo carinho e paciência que sempre dedicou;

★ À todos aqueles que mesmo inconscientes do papel que cumpriam, tornaram esta travessia mais amena.

---

# Resumo

---

Neste trabalho demonstramos o decaimento exponencial para o caso ( $n > 2$ ) de soluções regulares para um sistema acoplado não linear de equações de onda com memória e damping fraco em um domínio não cilíndrico do  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) com convenientes hipóteses sobre as funções escalares  $h$ ,  $g_1$  e  $g_2$  e onde  $\alpha$  é uma constante positiva.

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha u_t + h(u-v) &= 0 \text{ em } \hat{Q} \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds + \alpha v_t + h(u-v) &= 0 \text{ em } \hat{Q} \end{aligned}$$

Mostraremos que tal dissipação é bastante forte para produzir taxa uniforme de decaimento. Além disso, o acoplamento é não linear que apresenta algumas dificuldades técnicas, tornando o problema interessante. Obtemos também existência e unicidade de soluções regulares para  $n \geq 1$ .

---

# Abstract

---

In this work we prove the exponential decay in the case  $n > 2$ , as time goes to infinity, of regular solutions for a nonlinear coupled system of wave equations with memory and weak damping in a non cylindrical domains of  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) under suitable hypothesis on the scalar functions  $h$ ,  $g_1$  and  $g_2$ , and where  $\alpha$  is a positive constant.

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha u_t + h(u-v) &= 0 \quad \text{em } \hat{Q} \\ v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds + \alpha v_t + h(u-v) &= 0 \quad \text{em } \hat{Q} \end{aligned}$$

We show that such dissipation is strong enough to produce uniform rate of decay. Besides, the coupled is nonlinear which brings up some additional difficulties, which makes the problem interesting. We establish existence and uniqueness of regular solutions for any  $n \geq 1$ .

---

# SUMÁRIO

---

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Teoria das Distribuições Escalares . . . . .	5
1.1.1 Espaços das Funções Testes . . . . .	5
1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ . . . . .	6
1.1.3 Distribuições Escalares . . . . .	7
1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional . . . . .	9
1.2 Espaços de Sobolev . . . . .	10
1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$ . . . . .	10
1.3 Outros Resultados Importantes . . . . .	12
<b>2 Existência e Regularidade de Soluções</b>	<b>14</b>
<b>3 Decaimento Exponencial</b>	<b>24</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>31</b>



---

# Introdução

---

Neste trabalho estudaremos a existência e unicidade de soluções fortes bem como o decaimento exponencial de energia para um sistema acoplado não linear de equações de onda com memória e damping fraco, dada por:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha u_t + h(u-v) = 0 \text{ em } \hat{Q} \quad (1)$$

$$v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds + \alpha v_t + h(u-v) = 0 \text{ em } \hat{Q} \quad (2)$$

$$u = v = 0 \text{ sobre } \hat{\Sigma}, \quad (3)$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad (u_t(x), v_t(x)) = (u_1(x), v_1(x)) \text{ em } \Omega_0. \quad (4)$$

onde  $u$  e  $v$  representam o deslocamento vertical e  $\alpha$  constante positiva.

Aqui  $\Omega$  é um domínio aberto e limitado do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira de classe  $C^2$ , o qual sem perda de generalidade contém a origem do  $\mathbb{R}^n$  e  $\gamma : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável. Consideremos a família de subdomínio  $\{\Omega_t\}_{0 \leq t \leq \infty}$  do  $\mathbb{R}^n$  dado por:

$$\Omega_t = T(\Omega), \quad T : x \in \Omega \rightarrow y = \frac{x}{\gamma(t)}$$

cujas as fronteiras são denotadas por  $\Gamma_t$  e  $\hat{Q}$  o domínio não cilíndrico do  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\hat{Q} = \bigcup_{0 \leq t \leq \infty} \Omega_t \times \{t\} \text{ com fronteira lateral } \hat{\Sigma} = \bigcup_{0 \leq t \leq \infty} \Gamma_t \times \{t\}$$

O método que usaremos para provar o resultado de existência e unicidade é baseado em transformar nosso problema em outro problema de valor inicial definido sobre um domínio cilíndrico do qual as secções não são tempo-dependente. Isto será feito, usando uma mudança de variável adequada, onde mostraremos a existência e unicidade para este novo problema. Em seguida usaremos a transformação inversa para retornar ao problema original onde mostraremos a existência e unicidade para o nosso problema. A aplicação do difeomorfismo segue o que foi feito em Cunha [15].

O método acima foi introduzido por Dal Passo e Ughi [12] para estudar certas classes de equações parabólicas em domínio não cilíndrico.

Para ver as propriedades dissipativas do sistema temos que construir um funcional adequado cuja derivada seja negativa e seja equivalente a energia de primeira ordem. Este funcional é obtido usando a técnica multiplicativa usadas por Komornik [6] ou Rivera [8]. Do ponto de vista físico, o problema (1)-(4) descreve o deslocamento transversal da membrana viscoelástica esticada e fixada em um mecanismo de fronteira móvel. A propriedade viscoelástica do material é caracterizada pelos termos de memória

$$\int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds, \quad \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds.$$

Em um domínio fixo, o sistema de equações de onda com acoplamento linear e não linear foram estudados por diferentes autores, todos eles consideram essencialmente dois tipos de mecanismos dissipativos.

(a) A dissipação de energia, obtida pela introdução de um "termo de fricção" que pode agir sobre todo o domínio na fronteira(ou parte da fronteira) ou em alguma vizinhança localizada da fronteira.

(b) A dissipação viscoelástica dada pelo efeito memória como em [11], [13], [14] .

A dissipação de atrito é um mecanismo dissipativo simples. Ele age sobre todo o domínio  $\Omega$  ou na fronteira(ou parte da fronteira) ou em alguma parte estratégica do domínio(damping localizado). Foi provado por [1], [2], [3], [6] que a energia de primeira ordem decai exponencialmente para zero quando o tempo vai para o infinito.

Finalmente, o efeito memória sobre o tensor de tensão produz um mecanismo dissipativo satisfatório que depende da função relaxamento (veja [11], [13], [14]). Eles provaram que a energia decai uniformemente exponencialmente ou algebricamente com a mesma taxa de decaimento como a função relaxamento, isto é, quando a função relaxamento decai exponencialmente, a energia correspondente também decai exponencialmente. Por outro lado, quando a função relaxamento decai polinomialmente então a energia correspondente também decai polinomialmente e com a mesma taxa.

As notações que usaremos neste trabalho são padrão e podem ser encontradas no livro de Lions

[8],[9]. Nas sequências  $C$  (algumas vezes  $C_1, C_2, \dots$ ) denotaremos várias constantes positivas, o qual não dependem de  $t$  ou dados iniciais.

Este trabalho foi organizado do seguinte modo: No capítulo 2 provaremos a existência, regularidade e unicidade de soluções. Usaremos aproximação de Galerkin, Teorema de Aubin-Lions, método de energia, introduzida por Lions [9] e algumas idéias técnicas para mostrar existência, regularidade e unicidade de soluções para o problema (1)-(4). Finalmente, no capítulo 3, demonstraremos o decaimento exponencial de soluções regulares para o problema (1)-(4). Usaremos as técnicas multiplicativas introduzida por Kormornik [6], Lions [9] e Rivera [11] juntamente com alguns lemas técnicos e algumas idéias técnicas.

---

## Capítulo 1

# Preliminares

---

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

### 1.1 Teoria das Distribuições Escalares

#### 1.1.1 Espaços das Funções Testes

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Denominamos suporte de  $\varphi$  ao fecho em  $\Omega$  do conjunto dos pontos  $x$  pertencentes a  $\Omega$  onde  $\varphi$  não se anula. Denotamos o suporte de  $\varphi$  por  $\text{supp}(\varphi)$ . Simbolicamente, temos que

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição acima concluímos que o  $\text{supp}(\varphi)$  é o menor fechado fora do qual  $\varphi$  se anula e valem as seguintes relações:

1.  $\text{supp}(\varphi + \psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$ ,
2.  $\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi)$ ,
3.  $\text{supp}(\lambda\varphi) = \lambda \text{supp}(\varphi)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Neste capítulo, daremos um destaque especial às funções  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  com suporte compacto contido em  $\Omega$  que sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse objetivo definimos o espaço  $C_0^\infty(\Omega)$  como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em  $\Omega$ . Os elementos de  $C_0^\infty(\Omega)$  são denominados funções testes em  $\Omega$ .

**Observação 1.1.1.** Por um multi-índice, entendemos, uma  $n$ -upla  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  de números inteiros não negativos. Denotamos por  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  a ordem do multi-índice e por  $D^\alpha$  o operador derivação parcial, de ordem  $|\alpha|$ ,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para  $\alpha = (0, \dots, 0)$ , temos por definição  $D^0\varphi = \varphi$ .

### 1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de funções em  $C_0^\infty(\Omega)$  converge para  $\varphi$  em  $C_0^\infty(\Omega)$  quando forem satisfeitas as seguintes condições:

( i ) Existe um conjunto compacto  $K \subset \Omega$  tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

( ii )  $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow D^\alpha\varphi$  uniformemente em  $K$  para todo multi-índice  $\alpha$ .

O espaço vetorial  $C_0^\infty(\Omega)$  juntamente com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por  $\mathcal{D}(\Omega)$  e é denominado espaços das funções testes.

Denota-se por  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , o espaço das funções reais  $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  mensuráveis tais que  $|u|^p$  são Lebesgue integráveis em  $\Omega$ . O espaço  $L^p(\Omega)$  é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Quando  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  denota o espaço de Banach de todas as funções reais essencialmente limitadas com norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)|$$

Quando  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

**Observação 1.1.2.** Sendo  $\Omega$  limitado, obtemos  $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ , para todo  $p$ , tal que  $1 \leq p < \infty$  com imersão contínua e densa. De fato, dado  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  temos que

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p \mu(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, suponhamos que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  em  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Mostraremos que

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \rightarrow 0.$$

Notemos que

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \\ &= \int_K \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

Para a demonstração de que a imersão anterior é densa veja [8].

### 1.1.3 Distribuições Escalares

Com o objetivo de generalizar o conceito de funções sobre  $\Omega$  introduziremos o conceito de distribuições escalares.

Denominamos distribuição escalar sobre  $\Omega$  a toda forma linear e contínua sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$ , isto é, uma função  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes condições:

( i )  $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

( ii )  $T$  é contínua, isto é, se  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge para  $\varphi$ , em  $\mathcal{D}(\Omega)$ , então

$$T(\varphi_\nu) \rightarrow T(\varphi) \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição  $T$  na função teste  $\varphi$  será denotado por  $\langle T, \varphi \rangle$ . Considere no espaço vetorial das distribuições escalares a seguinte noção de convergência:

A sucessão  $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge para  $T$  quando a sucessão  $(\langle T_\nu, \varphi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge para  $\langle T, \varphi \rangle$  em  $\mathbb{R}$ , para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

O espaço das distribuições sobre  $\Omega$ , com esta noção de convergência, será denotado por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

As distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

**Definição 1.1.1.** . *Temos que uma função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente integrável em  $\Omega$  quando  $u$  é integrável à Lebesgue em todo compacto  $K \subset \Omega$ . O espaço das funções localmente integráveis é denotado por  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Em símbolo temos*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \iff \int_K |u(x)| dx < \infty,$$

para todo compacto  $K \subset \Omega$ .

A distribuição  $T_u$  assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável  $u$ " e usando o *Lema Du Bois Raymond* temos que  $T_u$  é univocamente determinada por  $u$  no seguinte sentido:  $T_u = T_v$  se, e somente se,  $u = v$  quase sempre em  $\Omega$ . Neste sentido identificamos  $u$  com a distribuição  $T_u$  e o espaço  $L^1_{loc}(\Omega)$  das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Lema 1.1.1 (Du Bois Raymond).** *Seja  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Então  $T_u = 0$  se, e somente se,  $u = 0$  quase sempre em  $\Omega$ .*

**Demonstração:** veja [18]

É importante ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Como pode ser visto no exemplo a seguir.

Com essa noção de convergência  $\mathcal{D}'(\Omega)$  é um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

### 1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o objetivo de estudar os espaços de Sobolev introduzimos o conceito de derivada distribucional.

A motivação do conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional dado por *Sobolev*, se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , por L.Schwartz. Veja [23].

Seja  $T$  uma distribuição sobre  $\Omega$  e  $\alpha$  um multi-índice. A derivada no sentido das distribuições de ordem  $\alpha$  de  $T$  é definida como sendo o funcional linear

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição  $T$  sobre  $\Omega$  possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de  $L^1_{loc}(\Omega)$  possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Isto significa que

$$\lim_{v \rightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \rightarrow \infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Observação 1.1.3.** *Outro resultado interessante a ser mencionado é que a derivada de uma função  $L^1_{loc}(\Omega)$  não é, em geral, uma função  $L^1_{loc}(\Omega)$  como mostra o exemplo a seguir.*

**Exemplo 1.1.1.** *Seja  $u$  a função de Heaviside, isto é,  $u$  é definida em  $\mathbb{R}$  e tem a seguinte forma*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

*assumindo qualquer valor em  $x = 0$ .*

*Esta função  $u$  pertence a  $L^1_{loc}(\Omega)$ , mas sua derivada  $u' = \delta_0$  não pertence a  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Como  $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$  basta verificar que  $u' = \delta_0$ .*



*De fato*

$$\langle u', \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = \int_0^0 \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*Tal fato motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.*

**Observação 1.1.4.** *Se  $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ , para cada  $|\alpha| \leq k$ , então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é*

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}, \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

*É uma consequência simples da fórmula de integração de Gauss.*

## 1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Esta classe é conhecida como *espaços de Sobolev*.

### 1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\Gamma$  regular. Foi observado na seção anterior que se  $u \in L^p(\Omega)$   $u$  possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observamos que  $D^\alpha u$ , em geral, não é uma distribuição definida por uma função de  $L^p(\Omega)$ . Estamos interessados em espaços de distribuições  $u \in L^p(\Omega)$  cujas derivadas distribucionais permaneçam em  $L^p(\Omega)$ . Tais espaços são denominados *Espaços de Sobolev*.

Dados um inteiro  $m > 0$  e  $1 \leq p \leq \infty$ , o espaço de Sobolev de ordem  $m$  sobre  $\Omega$  é o espaço vetorial denotado por  $W^{m,p}(\Omega)$  constituído das funções  $u \in L^p(\Omega)$  para as quais  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ , para todo multi-índice  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq m$ . Em símbolo temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e se  $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos  $W^{m,p}(\Omega)$  é um *espaço de Banach*. O espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço reflexivo se  $1 < p < \infty$  e separável se  $1 \leq p < \infty$ .

No caso particular em que  $p = 2$  o espaço  $W^{m,2}(\Omega)$  é um espaço de *Hilbert*, sendo denotado por  $H^m(\Omega)$ , isto é,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

### O Traço em $H^1(\Omega)$

Foi demonstrado em [18] que as funções de  $H^m(\Omega)$  podem ser aproximadas na norma de  $H^m(\Omega)$  por função de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ , onde  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  é o conjunto  $\{\varphi|_{\bar{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$  que se pode definir a restrição à fronteira  $\Gamma$  de  $\Omega$ . Dada  $\varphi \in H^1(\Omega)$ , consideremos uma seqüência  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathcal{N}}$  em  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$  por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k|_{\Gamma},$$

sendo este limite considerado na norma de  $L^2(\Gamma)$ .

O operador  $\gamma_0$  denominado operador traço é contínuo, linear e seu núcleo é  $H_0^1(\Omega)$ . De forma mais simples escrevemos  $\varphi|_{\Gamma}$  em vez de  $\gamma_0\varphi$ . Assim, podemos caracterizar, o espaço  $H_0^1(\Omega)$  por  $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\Gamma} = 0\}$ . A generalização do operador de traço para os espaços  $H^m(\Omega)$  ocorre de forma natural e no caso  $m = 2$ , temos

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega); \varphi|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

O dual topológico do espaço  $W_0^{m,p}(\Omega)$  representamos por  $W^{-m,q}(\Omega)$  se  $1 \leq p < \infty$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Se  $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$ , então  $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Quando  $p = 2$ ,  $W_0^{m,2}(\Omega)$  será denotado por  $H_0^m(\Omega)$  cujo dual é  $H^{-m}(\Omega)$ .

O teorema seguinte caracteriza o espaço  $W^{-m,p}(\Omega)$ .

**Teorema 1.2.1.** *Seja  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Então,  $T \in W^{-m,p}(\Omega)$  se, e somente se, existem  $g_\alpha \in L^q(\Omega)$  tais que  $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$ .*

**Demonstração:** veja [18].

**Proposição 1.2.1 (Caracterização de  $H^{-1}(\Omega)$ ).** *Se  $T$  for uma forma linear contínua sobre  $H_0^1(\Omega)$ , então existem  $n + 1$  funções  $u_0, u_1, \dots, u_n$  de  $L^2(\Omega)$  tais que*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

**Demonstração:** veja [8].

De posse destes dois resultados concluímos que se  $u \in H_0^1(\Omega)$ , então  $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$  sendo o operador  $\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  linear, contínuo e isométrico.

**Lema 1.2.1 (Desigualdade de Poincaré).** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado em alguma direção. Se  $u \in H_0^1(\Omega)$ , então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

**Demonstração.** Veja [23].

### 1.3 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

**Definição 1.3.1 (Convergência Fraca).** *Sejam  $E$  um espaço de Banach e  $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de  $E$ . Temos que  $u_\nu \rightharpoonup u$  fracamente se, e somente se,*

$$\langle \varphi, u_\nu \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall \varphi \in E'.$$

**Definição 1.3.2 (Convergência Fraca Estrela).** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $\varphi \in E'$  e  $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de  $E'$ . Temos que  $\varphi_\nu \rightharpoonup \varphi$  fraco  $\star$  se, somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall u \in E.$$

**Lema 1.3.1 (Lema de Gronwall).** *Sejam  $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas e não-negativas,  $\alpha \geq 0$ . Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp \left[ \int_a^t \psi(s) ds \right], \quad \forall t \in [a, b].$$

Em particular,  $\varphi(t)$  é limitada e se  $\alpha = 0$ , então  $\varphi \equiv 0$ .

**Demonstração.** Veja [23].

**Lema 1.3.2 (Desigualdade de Yoyng).** *Dados  $\varepsilon > 0$  e dois números reais  $a$  e  $b$ , é válida a seguinte relação*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

**Demonstração.** Veja [10].

**Teorema 1.3.1.** *Seja  $E$  um espaço de Banach reflexivo e seja  $(x_n)$  uma sequência limitada em  $E$ . Então, existe uma subsequência  $(x_{n_k})$  que converge na topologia fraca.*

*Denotamos por  $B_0, B$  e  $B_1$  espaços de Banach onde  $B_0$  e  $B_1$  são espaços reflexivos satisfazendo*

$$B_0 \subset B \subset B_1, \text{ a imersão de } B_0 \text{ em } B \text{ é compacta.} \quad (a)$$

**Demonstração.** Veja [8].

**Lema 1.3.3 (Aubin-Lions).** *Sejam  $1 < p_0, p_1 < \infty$  e suponhamos que (a) seja válida. Então, a imersão de  $W$  sobre  $L^{p_0}(0, T; B)$  é compacta, sendo  $W = \{v; v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v_t \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$ .*

**Demonstração.** Veja [8].

**Lema 1.3.4.** *Sejam  $V, H$  espaços de Hilbert, com  $V \hookrightarrow H$  (imersão contínua). Se  $u \in L^p((0, 1); V)$ ,  $u_t \in L^p((0, 1); H)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , então  $u \in C((0, 1); H)$ .*

**Demonstração.** Veja [8].

---

## Capítulo 2

# Existência e Regularidade de Soluções

---

Neste capítulo vamos estudar a existência e regularidade de soluções fortes para o sistema abaixo:

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g_1(t-s)\Delta u(s)ds + \alpha u_t + h(u-v) = 0 \text{ em } \hat{Q} \quad (2.1)$$

$$v_{tt} - \Delta v + \int_0^t g_2(t-s)\Delta v(s)ds + \alpha v_t + h(u-v) = 0 \text{ em } \hat{Q} \quad (2.2)$$

$$u = v = 0 \text{ sobre } \hat{\Sigma}, \quad (2.3)$$

$$(u(x,0), v(x,0)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad (u_t(x), v_t(x)) = (u_1(x), v_1(x)) \text{ em } \Omega_0. \quad (2.4)$$

onde  $u$  e  $v$  são deslocamento transversal e  $\alpha$  constante positiva.

Antes, iremos transformar o problema proposto em um domínio não-cilíndrico para um domínio cilíndrico. Para isso usaremos o seguinte difeomorfismo:

$$\tau : \hat{Q} \longrightarrow Q, \quad (x, t) \in \Omega_t \longrightarrow (y, t) = \left( \frac{x}{\gamma}(t), t \right) \quad (2.5)$$

e  $\tau^{-1} : \hat{Q} \longrightarrow Q$  definido por

$$\tau^{-1}(y, t) = (x, t) = (\gamma(t)y, t). \quad (2.6)$$

Denotaremos por  $\varphi$  e  $\psi$  as funções

$$\varphi(y, t) = u \circ \tau^{-1}(y, t) = u(\gamma(t)y, t),$$

$$\psi(y, t) = v \circ \tau^{-1}(y, t) = v(\gamma(t)y, t). \quad (2.7)$$

O problema de valor inicial e de fronteira (2.1) – (2.4) transformam-se em:

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} - \gamma^{-2} \Delta \varphi + \int_0^t g_1(t-s) \gamma^{-2}(s) \Delta \varphi(s) ds + \alpha \varphi_t \\ - h(\varphi - \psi) - A(t) \varphi + a_1 \cdot \nabla \partial_t \varphi + a_2 \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \text{em } Q \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \psi_{tt} - \gamma^{-2} \Delta \psi + \int_0^t g_2(t-s) \gamma^{-2}(s) \Delta \psi(s) ds + \alpha \psi_t \\ - h(\varphi - \psi) - A(t) \psi + a_1 \cdot \nabla \partial_t \psi + a_2 \cdot \nabla \psi = 0 \quad \text{em } Q \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\varphi|_{\Gamma} = \psi|_{\Gamma} = 0, \quad (2.10)$$

$$(\varphi|_{t=0}, \psi|_{t=0}) = (\varphi_0, \psi_0) \quad (\varphi_t|_{t=0}, \psi_t|_{t=0}) = (\varphi_1, \psi_1) \quad \text{em } \Omega, \quad (2.11)$$

onde

$$A(t) \varphi = \sum_{i,j=1}^n \partial_{y_i} (a_{ij} \partial_{y_j} \varphi), \quad A(t) \psi = \sum_{i,j=1}^n \partial_{y_i} (a_{ij} \partial_{y_j} \psi)$$

e

$$\begin{cases} a_{ij}(y, t) = -(\gamma' \gamma^{-1})^2 y_i y_j \quad (i, j = 1, \dots, n), \\ a_1(y, t) = -2\gamma' \gamma^{-1})^2 y, \\ a_2(y, t) = -\gamma^{-2} y (\gamma'' \gamma + \gamma' (\alpha \gamma + (n-1) \gamma')). \end{cases} \quad (2.12)$$

Para mostrar a existência de soluções forte usaremos as seguintes hipóteses.

$$\gamma' \leq 0 \quad \text{em } n > 2, \quad \gamma' \geq 0 \quad \text{se } n < 2, \quad (2.13)$$

$$\gamma(\cdot) \in L^{(0, \infty)}, \quad \inf_{0 \leq t < \infty} \gamma(t) = \gamma_0 > 0, \quad (2.14)$$

$$\gamma' \in W^{2, \infty}(0, \infty) \cap W^{2, 1}(0, \infty). \quad (2.15)$$

Note que a hipótese (2.13) significa que  $\hat{Q}$  está decrescente se  $n > 2$  e crescente se  $n \leq 2$  no sentido que quando  $t > t'$  e  $n > 2$  então a projeção de  $\Omega_t$  sobre o espaço  $t = 0$  contém a projeção de  $\Omega_{t'}$  sobre o mesmo subespaço e contrário no caso  $n \leq 2$ .

Para isto consideremos o núcleo  $g_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  pertencente a  $W^{2,1}(0, \infty)$  e satisfazendo

$$g_i > 0, \quad -g_i' > 0, \quad \gamma_1^{-2} - \int_0^\infty g_i(s)\gamma^{-2}(s)ds = \beta_i > 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.16)$$

onde

$$\gamma_1 = \sup_{0 \leq t < \infty} \gamma(t).$$

A hipótese acima (2.16), implica

$$\beta_i \leq \gamma(t)^{-2} - \int_0^\infty g_i(s)\gamma^{-2}(s)ds \leq \frac{1}{\gamma_0^2}.$$

Seja  $h \in C^1(\mathbb{R})$ , satisfazendo

$$h(s)s \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Adicionalmente, consideramos que  $h$  é superlinear, isto é:

$$h(s)s \geq (2 + \delta)H(s), \quad H(z) = \int_0^z h(s)ds \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

para algum  $\delta > 0$  com a seguinte condição de crescimento

$$|h(x) - h(y)| \leq C(1 + |x|^{\rho-1} + |y|^{\rho-1})|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

para algum  $C > 0$ ,  $\rho \geq 1$  tal que  $(n - 2) \leq n$ . Para simplificar nossa análise, vamos definir o operador binário

$$g \square \frac{\nabla \phi(t)}{\gamma(t)} = \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s)\gamma^{-2}(s)|\nabla \phi(t) - \nabla \phi(s)|^2 ds dx.$$

Com esta notação temos a seguinte afirmação:

**Lema 2.0.5.** *Para  $\phi \in C^1(0, T : H^1(\Omega))$  temos*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s)\gamma^{-2}(s)\nabla \phi \cdot \nabla \phi_t ds dx &= -\frac{1}{2} \frac{g(t)}{\gamma^2(0)} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx + \frac{1}{2} g \square \frac{\nabla \phi}{\gamma} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ g \square \frac{\nabla \phi}{\gamma} - \left( \int_0^t \frac{g(s)}{\gamma^2(s)} ds \right) \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx \right]. \end{aligned}$$

A prova deste lema segue por diferenciação ao termo  $g \square \frac{\nabla u(t)}{\gamma(t)}$ .

**Teorema 2.0.2.** *Seja  $(\varphi_0, \psi_0) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2$ ,  $(\varphi_1, \psi_1) \in (H_0^1(\Omega))^2$  e suponhamos que as hipóteses (2.11)-(2.13) sejam satisfeitas. Então, existe uma única solução  $(\varphi, \psi)$  do problema (2.1)-(2.4) satisfazendo*

$$\varphi, \psi \in L^\infty(0, \infty : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),$$

$$\varphi_t, \psi_t \in L^\infty(0, \infty : H_0^1(\Omega))$$

$$\varphi_{tt}, \psi_{tt} \in L^\infty(0, \infty : L^2(\Omega)).$$

**Demonstração.** Denotaremos por  $B$  o operador

$$Bw = -\Delta w, \quad D(B) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

$B$  é um operador auto adjunto positivo no espaço de Hilbert  $L^2(\Omega)$  para o qual existe sequências  $\{\omega\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{\lambda\}_{n \in \mathbb{N}}$  de auto funções e autovalores de  $B$  tal que o conjunto das combinações lineares de  $\{\omega\}_{n \in \mathbb{N}}$  é denso em  $D(B)$  e  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \rightarrow \infty$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Denotamos por:

$$\varphi_0^m = \sum_{j=1}^m (\varphi_0, \omega_j) \omega_j, \quad \psi_0^m = \sum_{j=1}^m (\psi_0, \omega_j) \omega_j$$

$$\varphi_1^m = \sum_{j=1}^m (\varphi_1, \omega_j) \omega_j, \quad \psi_1^m = \sum_{j=1}^m (\psi_1, \omega_j) \omega_j$$

Note que para qualquer  $\{\varphi_0, \psi_0\}, \{\varphi_1, \psi_1\} \in (D(B))^2 \times (H_0^1(\Omega))^2$ , temos que  $(\varphi_0^m, \psi_0^m) \rightarrow (\varphi_0, \psi_0)$  forte em  $(D(B))^2$  e  $(\varphi_1^m, \psi_1^m) \rightarrow (\varphi_1, \psi_1)$  forte em  $(H_0^1(\Omega))^2$ .

Denotando por  $V_m$  o espaço gerado por  $\omega_1, \dots, \omega_m$  resulta do Teorema de Picard implica a existência de solução local  $(\varphi^m, \psi^m)$  da forma

$$(\varphi^m(t), \psi^m(t)) = \sum_{j=1}^m (h_{jm}(t), f_{jm}(t)) \omega_j,$$

para o sistema



$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \varphi_{tt}^m \omega_j dy + \alpha \int_{\Omega} \varphi_t^m \omega_j dy - \gamma^{-2} \int_{\Omega} \Delta \varphi^m \omega_j dy + \int_{\Omega} h(\varphi^m - \psi^m) \omega_j dy \\
& + \int_{\Omega} \int_0^t g_1(t-s) \gamma^{-2}(s) \nabla \varphi^m(s) \cdot \nabla \varphi_j ds dy + \int_{\Omega} A(t) \varphi^m \omega_j dy \\
& + \int_{\Omega} a_1 \cdot \nabla \varphi_t^m \omega_j dy + \int_{\Omega} a_2 \cdot \nabla \varphi^m \omega_j dy = 0, \quad (j = 1, \dots, m), \tag{2.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \psi_{tt}^m \omega_j dy + \alpha \int_{\Omega} \psi_t^m \omega_j dy - \gamma^{-2} \int_{\Omega} \Delta \psi^m \omega_j dy + \int_{\Omega} h(\varphi^m - \psi^m) \omega_j dy \\
& + \int_{\Omega} \int_0^t g_2(t-s) \gamma^{-2}(s) \nabla \psi^m(s) \cdot \nabla \psi_j ds dy + \int_{\Omega} A(t) \psi^m \omega_j dy \\
& + \int_{\Omega} a_1 \cdot \nabla \psi_t^m \omega_j dy + \int_{\Omega} a_2 \cdot \nabla \psi^m \omega_j dy = 0, \quad (j = 1, \dots, m), \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$(\varphi^m(x, 0), \psi^m(x, 0)) = (\varphi_0^m, \psi_0^m) \quad (\varphi_t^m(x, 0), \psi_t^m(x, 0)) = (\varphi_1^m, \psi_1^m). \tag{2.19}$$

Ver [4] para detalhes.

A extensão dessas soluções para o intervalo inteiro  $[0, T]$ ,  $0 < T < \infty$ , é consequência da primeira estimativa que vamos provar a seguir.

## I ESTIMATIVA APRIORI

Multiplicando a equação (2.17)-(2.18) por  $h'_{jm}(t)$  e  $f'_{jm}$ , respectivamente, somando o resultado do produto e usando o **Lema 2.0.5**, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1^m(t, \varphi^m, \psi^m) + \alpha (\|\varphi_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2) + \int_{\Omega} A(t) \varphi^m \varphi_t^m dy + \int_{\Omega} A(t) \psi^m \psi_t^m dy \\
& + \int_{\Omega} a_1 \cdot \nabla \varphi_t^m \varphi_t^m dy + \int_{\Omega} a_1 \cdot \nabla \psi_t^m \psi_t^m dy + \int_{\Omega} a_2 \cdot \nabla \varphi^m \varphi_t^m dy + \int_{\Omega} a_2 \cdot \nabla \psi^m \psi_t^m dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \frac{g_1(t)}{\gamma^2(0)} \|\nabla \varphi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \frac{g_2(t)}{\gamma^2(0)} \|\nabla \psi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} g_1' \square \frac{\nabla \varphi^m}{\gamma} + \frac{1}{2} g_2' \square \frac{\nabla \psi^m}{\gamma} \\
&\quad - \frac{\gamma'}{\gamma^3} \|\nabla \varphi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\gamma'}{\gamma^3} \|\nabla \psi^m\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1^m(t, \varphi^m, \psi^m) &= \|\varphi_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_1(s) \gamma^{-2}(s) ds \right) \|\nabla \varphi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ g_1 \square \frac{\nabla \varphi^m}{\gamma} \|\psi_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_2(s) \gamma^{-2}(s) ds \right) \|\nabla \psi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ g_2 \square \frac{\nabla \psi^m}{\gamma} + \int_{\Omega} H(\varphi^m - \psi^m) dy.
\end{aligned}$$

Considerando (2.11), (2.13) e (2.16), obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1^m(t, \varphi^m, \psi^m) + \alpha (\|\varphi_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq C(|\gamma'| + |\gamma''|) \mathcal{L}_1^m(t). \quad (2.20)$$

Integrando a desigualdade (2.20), usando o Lema de Gronwall e considerando (2.13) obtemos:

$$\mathcal{L}_1^m(t, \varphi^m, \psi^m) + \int_0^t (\|\varphi_s^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_s^m\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.21)$$

## II ESTIMATIVA APRIORI

Da equação (2.17) e (2.18) obtemos:

$$\|\varphi_{tt}^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_{tt}^m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

Usando as hipóteses sobre  $g_i$  e  $\gamma$ , e diferenciando as equações (2.17) e (2.18) em relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \varphi_{ttt}^m \omega_j dy + \alpha \int_{\Omega} \varphi_{tt}^m \omega_j dy - \gamma^{-2} \int_{\Omega} \Delta \varphi_t^m \omega_j dy + 2 \frac{\gamma'}{\gamma^3} \int_{\Omega} \Delta \varphi^m \omega_j dy - \frac{g_1(t)}{\gamma^2(0)} \int_{\Omega} \Delta \varphi_0^m \omega_j dy \\
&+ \int_{\Omega} \int_0^t g_1'(t-s) \gamma^{-2}(s) \nabla \varphi^m(s) ds \cdot \nabla \omega_j dy + \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (A(t) \varphi^m) \omega_j dy + \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (a_1 \cdot \nabla \varphi_t^m) \omega_j dy
\end{aligned}$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (a_2 \cdot \nabla \varphi^m) \omega_j dy + \int_{\Omega} h'(\varphi^m - \psi^m) (\varphi_t^m - \psi_t^m) \omega_j dy = 0 \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \psi_{ttt}^m \omega_j dy + \alpha \int_{\Omega} \psi_{tt}^m \omega_j dy - \gamma^{-2} \int_{\Omega} \Delta \psi_t^m \omega_j dy + 2 \frac{\gamma'}{\gamma^3} \int_{\Omega} \Delta \psi^m \omega_j dy - \frac{g_1(t)}{\gamma^2(0)} \int_{\Omega} \Delta \psi_0^m \omega_j dy \\ & + \int_{\Omega} \int_0^t g_2'(t-s) \gamma^{-2}(s) \nabla \psi^m(s) ds \cdot \nabla \omega_j dy + \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (A(t) \psi^m) \omega_j dy + \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (a_1 \cdot \nabla \psi_t^m) \omega_j dy \\ & + \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (a_2 \cdot \nabla \psi^m) \omega_j dy + \int_{\Omega} h'(\varphi^m - \psi^m) (\varphi_t^m - \psi_t^m) \omega_j dy = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Multiplicando (2.23) por  $h''_{jm}$  e (2.24) por  $f''_{jm}$ , e somando as equações resultantes, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varphi_{ttt}^m \varphi_{tt}^m dy + \alpha \int_{\Omega} \varphi_{tt}^m \varphi_{tt}^m dy - \gamma^{-2} \int_{\Omega} \Delta \varphi_t^m \varphi_{tt}^m dy + 2 \frac{\gamma'}{\gamma^3} \int_{\Omega} \Delta \varphi^m \varphi_{tt}^m dy - \frac{g_1(t)}{\gamma^2(0)} \int_{\Omega} \Delta \varphi_0^m \varphi_{tt}^m dy \\ & + \int_{\Omega} \int_0^t g_1'(t-s) \gamma^{-2}(s) \nabla \varphi^m(s) ds \cdot \nabla \varphi_{tt} dy + \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (A(t) \varphi^m) \varphi_{tt}^m dy + \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (a_1 \cdot \nabla \varphi_t^m) \varphi_{tt}^m dy \\ & + \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (a_2 \cdot \nabla \varphi^m) \varphi_{tt}^m dy + \int_{\Omega} h'(\varphi^m - \psi^m) (\varphi_t^m - \psi_t^m) \varphi_{tt} dy \\ & \int_{\Omega} \psi_{ttt}^m \omega_j dy + \alpha \int_{\Omega} \psi_{tt}^m \psi_{tt} dy - \gamma^{-2} \int_{\Omega} \Delta \psi_t^m \psi_{tt}^m dy + 2 \frac{\gamma'}{\gamma^3} \int_{\Omega} \Delta \psi^m \psi_{tt}^m dy - \frac{g_2(t)}{\gamma^2(0)} \int_{\Omega} \Delta \psi_0^m \psi_{tt}^m dy \\ & + \int_{\Omega} \int_0^t g_2'(t-s) \gamma^{-2}(s) \nabla \psi^m(s) ds \cdot \nabla \psi_{tt}^m dy + \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (A(t) \psi^m) \psi_{tt}^m dy + \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (a_1 \cdot \nabla \psi_t^m) \psi_{tt}^m dy \\ & + \int_{\Omega} \frac{d}{dt} (a_2 \cdot \nabla \psi^m) \psi_{tt}^m dy - \int_{\Omega} h'(\varphi^m - \psi^m) (\varphi_t^m - \psi_t^m) \psi_{tt}^m dy = 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Seja  $p_n = \frac{2n}{n-2}$ . Da condição de crescimento da função  $h$  e usando as imersões de Sobolev, temos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} h'(\varphi^m - \psi^m) \varphi_t^m \varphi_{tt}^m dy \leq C \int_{\Omega} (1 + 2|\varphi^m - \psi^m|^{\rho-1}) |\varphi_t^m| |\varphi_{tt}^m| dy \\ & \leq C \left[ \int_{\Omega} (1 + 2|\varphi^m - \psi^m|^{\rho-1})^{\rho-1} dy \right]^{\frac{1}{n}} \left[ \int_{\Omega} |\varphi_t^m|^{p_n} dy \right]^{\frac{1}{p_n}} \left[ \int_{\Omega} |\varphi_{tt}^m|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq C \left[ \int_{\Omega} (1 + |\nabla\varphi^m - \nabla\psi^m|^2) dy \right]^{\frac{p-1}{2}} \left[ \int_{\Omega} |\nabla\varphi_t^m|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\Omega} |\varphi_{tt}^m|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Levando em consideração a primeira estimativa (2.21) e usando a desigualdade elementar  $2ab \leq a^2 + b^2$  concluímos que

$$\int_{\Omega} h'(\varphi^m - \psi^m) \varphi_t^m \varphi_{tt}^m dy \leq C \left\{ \int_{\Omega} |\nabla\varphi_t^m|^2 dy + \int_{\Omega} |\varphi_{tt}^m|^2 dy \right\}. \quad (2.26)$$

Similarmente, temos

$$- \int_{\Omega} h'(\varphi^m - \psi^m) \psi_t^m \psi_{tt}^m dy \leq C \left\{ \int_{\Omega} |\nabla\psi_t^m|^2 dy + \int_{\Omega} |\psi_{tt}^m|^2 dy \right\}, \quad (2.27)$$

$$\int_{\Omega} h'(\varphi^m - \psi^m) \varphi_t^m \psi_{tt}^m dy \leq C \left\{ \int_{\Omega} |\nabla\varphi_t^m|^2 dy + \int_{\Omega} |\psi_{tt}^m|^2 dy \right\}, \quad (2.28)$$

$$- \int_{\Omega} h'(\varphi^m - \psi^m) \psi_t^m \varphi_{tt}^m dy \leq C \left\{ \int_{\Omega} |\nabla\psi_t^m|^2 dy + \int_{\Omega} |\varphi_{tt}^m|^2 dy \right\}. \quad (2.29)$$

Substituindo as equações (2.26)-(2.29) em (2.25) e usando argumentos similares como em (2.21), obtemos:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_2^m(t, \varphi^m, \psi^m) + \int_0^t (\|\varphi_{ss}^m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_{ss}^m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \leq C, \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (2.30)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^m(t, \varphi^m, \psi^m) &= \|\varphi_t^m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_1(s) \gamma^{-2}(s) ds \right) \|\nabla\varphi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ g_1 \square \frac{\nabla\varphi^m}{\gamma} \|\psi_t^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_2(s) \gamma^{-2}(s) ds \right) \|\nabla\psi^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} g_2 \square \frac{\nabla\psi^m}{\gamma}. \end{aligned}$$

As estimativas (2.21) e (2.30) permite obter subsequências  $(\varphi^{mk}, \psi^{mk})$  de  $(\varphi^m, \psi^m)$ , que será denotado por  $(\varphi^m, \psi^m)$  e as funções  $\varphi, \psi : \Omega \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo:

$$(\varphi^m, \psi^m) \rightarrow (\varphi, \psi) \quad \text{fraco estrela} \quad \text{em } L^\infty(0, \infty : H_0^1(\Omega)), \quad (2.31)$$

$$(\varphi_t^m, \psi_t^m) \rightarrow (\varphi_t, \psi_t) \quad \text{fraco estrela} \quad \text{em } L^\infty(0, \infty : H_0^1(\Omega)), \quad (2.32)$$

$$(\varphi_{tt}^m, \psi_{tt}^m) \rightarrow (\varphi_{tt}, \psi_{tt}) \quad \text{fraco estrela} \quad \text{em } L^\infty(0, \infty : L^2(\Omega)). \quad (2.33)$$

Fazendo  $m \rightarrow \infty$  nas equações (2.17)-(2.18) e usando as estimativas (2.31)-(2.33), concluímos que  $(\varphi, \psi)$  satisfaz (2.8)-(2.9) no sentido de  $L^\infty(0, \infty : L^2(\Omega))$ . Logo, por regularidade elíptica, temos que:

$$\varphi, \psi \in L^\infty(0, \infty : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

## UNICIDADE

Suponhamos que  $(\varphi, \psi)$  e  $(\hat{\varphi}, \hat{\psi})$  são duas soluções do problema (2.8)-(2.9) nas condições do **Teorema 2.0.1**. Então

$$(\phi, \theta) = (\varphi - \hat{\varphi}, \psi - \hat{\psi})$$

satisfaz as condições e

$$(\phi(0), \theta(0)) = (0, 0), (\phi_t(0), \theta_t(0)) = (0, 0).$$

Demonstraremos que  $(\phi, \theta) = (0, 0)$  sobre  $\Omega \times [0, \infty[$ .

Multiplicando as equações (2.8) e (2.9) por  $\phi_t$  e  $\theta_t$ , respectivamente, somando o resultado, usando o **Lema 2.0.5**, a condição de crescimento da função  $h$  e utilizando sobolev, temos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_1(t, \phi, \theta) + \alpha (\|\phi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\theta_t\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq C(|\gamma_1| + |\gamma''|) \mathcal{L}_1(t),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(t, \phi, \theta) &= \|\phi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_1(s) \gamma^{-2}(s) ds \right) \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ g_1 \square \frac{\nabla \phi}{\gamma} \|\theta_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{1}{\gamma^2(t)} - \int_0^t g_2(s) \gamma^{-2}(s) ds \right) \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} g_2 \square \frac{\nabla \theta}{\gamma}. \end{aligned}$$

Integrando em relação a  $t$  a inequação anterior e aplicando a desigualdade de Gronwall, vamos concluir que  $(\phi, \theta) = (0, 0)$  sobre  $\Omega \times [0, \infty[$ .

Para mostrar a existência no domínio não cilíndrico, retornamos ao nosso problema original no domínio não cilíndrico e usamos a mudança de variável dada em (2.5) por

$$(y, t) = \tau(x, t), \quad (x, t) \in \hat{Q}.$$

Seja  $(\varphi, \psi)$  a solução obtida do **Teorema 2.0.1** e  $(u, v)$  definida por (2.7), então  $(u, v)$  pertence a classe

$$u, v \in L^\infty(0, \infty : H_0^1(\Omega_t) \cap H^2(\Omega_t)) \quad (2.34)$$

$$u_t, v_t \in L^\infty(0, \infty : H_0^1(\Omega_t)) \quad (2.35)$$

$$u_{tt}, v_{tt} \in L^\infty(0, \infty : L^2(\Omega_t)). \quad (2.36)$$

Denotando por

$$u(x, t) = \varphi(y, t) = (\varphi \circ \tau)(x, t), \quad v(x, t) = \psi(y, t) = (\psi \circ \tau)(x, t)$$

Segue de (2.6) que  $(u, v)$  satisfaz as equações (2.1)-(2.4) no sentido de  $L^\infty(0, \infty : L^2(\Omega_t))$ . Seja  $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$  duas soluções de (2.1)-(2.2), e  $(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2)$  funções obtidas através do difeomorfismo  $\tau$  dado por (2.5). Então  $(\varphi_1, \psi_1)$  e  $(\varphi_2, \psi_2)$  são soluções de (2.8)-(2.9). Pelo resultado de unicidade do **Teorema 2.0.1**, temos que  $(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_2, \psi_2)$  então  $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ . Sendo assim, demonstramos o seguinte resultado.

**Teorema 2.0.3.** *Consideremos  $((u_0, v_0) \in (H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0))^2, (u_1, v_1) \in (H_0^1(\Omega_0))^2$  e suponhamos que as hipóteses (2.13)-(2.15) e (2.16) sejam satisfeitas. Então existe uma única solução  $(u, v)$  do problema (2.1)-(2.4) satisfazendo (2.34)-(2.36) e as equações (2.1)-(2.4) no sentido de  $L^\infty(0, \infty : L^2(\Omega_t))$ .*

---

## Capítulo 3

# Decaimento Exponencial

---

Neste capítulo vamos mostrar que a solução do sistema (2.1)-(2.2) decai exponencialmente. Para este fim, assumiremos que a memória  $g_i$  satisfaz:

$$g'_i(t) \leq -C_1 g_i(t), \quad (3.1)$$

$$\left(1 - \int_0^\infty g(s) ds\right) = \eta_i, \quad \forall i = 1, 2 \quad (3.2)$$

para todo  $t \geq 0$ , com constante positiva  $C_1$ . Adicionalmente, assumiremos que a função  $\gamma(\cdot)$ , satisfaz as condições;

$$\gamma' \leq 0, \quad t \geq 0, \quad n > 2 \quad (3.3)$$

$$0 < \max_{0 \leq t < \infty} |\gamma'(t)| \leq \frac{1}{d} \quad (3.4)$$

onde  $d = \text{diam}(\Omega)$ . A condição (3.4) implica que nosso domínio é "time like" no sentido que

$$|\underline{\nu}| < |\bar{\nu}|$$

onde  $\underline{\nu}$  e  $\bar{\nu}$  denota a  $t$ -componente e  $x$ -componente do vetor unitário exterior normal de  $\hat{\Sigma}$ . Para facilitar nossos cálculos introduzimos a seguinte notação:

$$(g \square \nabla u)(t) = \int_{\Omega_t} \int_0^t g(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx.$$

Devido a geometria do nosso domínio não cilíndrico, o lema abaixo é bastante importante na prova do **Lema 3.0.7** e no decaimento exponencial.

**Lema 3.0.6.** *Seja  $F(\cdot)$  uma função regular definida em  $\Omega_t \times [0, \infty[ (t \in [0, \infty[)$ . Então*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} F(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \frac{d}{dt} F(x, t) dx + \frac{\gamma'}{\gamma} \int_{\Gamma_t} F(x, t) (x \cdot \bar{\nu}) d\Gamma_t, \quad (3.5)$$

onde  $\bar{\nu}$  é a  $x$ -componente do vetor unitário exterior  $\nu$ .

**Demonstração.** Fazendo a mudança de variável  $x = \gamma(t)y$ ,  $y \in \Omega$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} F(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(\gamma(t)y, t) \gamma^n dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right) \gamma^n(t) dy + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\gamma'}{\gamma} x_i \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right) \gamma^n(t) dy \\ &\quad + n \int_{\Omega} \gamma'(t) \gamma^{n-1}(t) F(\gamma(t)y, t) dy. \end{aligned}$$

Se retornarmos a variável  $x$ , obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} F(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \frac{\partial F}{\partial t} dx + \frac{\gamma'}{\gamma} \int_{\Omega_t} x \cdot \nabla F(x, t) dx + n \frac{\gamma'}{\gamma} \int_{\Omega_t} F(x, t) dx.$$

Integrando por parte a última igualdade, obtemos a fórmula (3.5).

**Lema 3.0.7.** *Para qualquer função  $g \in C^1(\mathbb{R}_+)$  e  $u \in C^1((0, T) : H^2(\Omega_t))$ , temos que*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) ds \cdot \nabla u_t dx &= -\frac{1}{2} g(t) \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2 dx + \frac{1}{2} g' \square \nabla u \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ g \square \nabla u - \left( \int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right] \\ &\quad + \frac{\gamma'}{2\gamma} \int_{\Gamma_t} \int_0^t g(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 (\bar{\nu} \cdot x) d\Gamma_t. \end{aligned}$$

**Demonstração.** Derivando o termo  $g \square \nabla u$  e aplicando o **Lema 3.0.6** obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g \square \nabla u &= \int_{\Omega_t} \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx \\ &\quad + \frac{\gamma'}{\gamma} \int_{\Gamma_t} \int_0^t g(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds d\Gamma_t. \end{aligned}$$



Notando que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx &= -2 \int_{\Omega} \int_0^t g(t-s) \nabla u(s) \cdot \nabla u_t ds dx \\ &\quad - g(t) \int_{\Omega_t} |\nabla u(t)|^2 dx + g' \square \nabla u \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left( \int_0^t g(s) ds \right) \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 dx \end{aligned}$$

segue a conclusão do lema.

Introduzimos o funcional

$$\begin{aligned} E(t) &= \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 - \int_0^t g_1(s) ds\right) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + g_1 \square \nabla u + \|v_t\| \\ &\quad + \left(1 - \int_0^t g_2(s) ds\right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + g_2 \square \nabla v + \int_{\Omega_t} H(u-v) dx. \end{aligned}$$

Observe que  $E(t) > 0$  desde que a hipótese (3.2) seja satisfeita.

O lema seguinte mostra a propriedade dissipativa da energia do sistema (2.1)-(2.4). Para isso as hipóteses (2.13) são cruciais.

**Lema 3.0.8.** *Consideremos  $(u_0, v_0) \in (H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0))^2$ ,  $(u_1, v_1) \in (H_0^1(\Omega_0))^2$  e suponha que as hipóteses (2.11)-(2.13) e (2.16) sejam satisfeitas. Então qualquer solução regular (2.1)-(2.4) satisfaz*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) + 2\alpha (\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_t\|_{L^2(\Omega)}^2) &- \int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{\gamma} (\bar{\nu} \cdot x) (|u|^2 + |\nabla u|^2) d\Gamma_t \\ &- \int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{\gamma} (\bar{\nu} \cdot x) (|v|^2 + |\nabla v|^2) d\Gamma_t - \int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{\gamma} (\bar{\nu} \cdot x) \int_0^t g_1(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds d\Gamma_t \\ &- \int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{\gamma} (\bar{\nu} \cdot x) \int_0^t g_2(t-s) |\nabla v(t) - \nabla v(s)|^2 ds d\Gamma_t - \int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{\gamma} (\bar{\nu} \cdot x) H(u-v) d\Gamma_t \\ &- \int_{\Omega_t} g_1(t) |\nabla u|^2 dx + g_1' \square \nabla u - \int_{\Omega_t} g_2(t) |\nabla v|^2 dx + g_2' \square \nabla v. \end{aligned}$$

**Demonstração.** Multiplicando as equações 2.1 por  $u_t$  e (2.2) por  $v_t$  e fazendo integração por parte sobre  $\Omega_t$  e usando o **Lema 3.0.6**, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \alpha \|u_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 - \int_{\Omega_t} \int_0^t g_1(t-s) \nabla u(s) \cdot \nabla u_t ds dx \\
& - \int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{2\gamma} (\bar{\nu} \cdot x) (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) d\Gamma_t + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \alpha \|v_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\
& - \int_{\Omega_t} \int_0^t g_2(t-s) \nabla v(s) \cdot \nabla v_t ds dx - \int_{\Gamma_t} \frac{\gamma'}{2\gamma} (\bar{\nu} \cdot x) (|v_t|^2 + |\nabla v|^2) d\Gamma_t + \int_{\Omega_t} \frac{d}{dt} H(u-v) dx.
\end{aligned}$$

Levando em conta o **Lema 3.0.6** e o **Lema 3.0.7**, obtemos a conclusão do lema. Consideremos o seguinte funcional

$$\psi(t) = 2 \int_{\Omega_t} (u_t u + v_t v) dx + \alpha (\|u\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega_t)}^2).$$

**Lema 3.0.9.** *Cosideremos  $(u_0, v_0) \in (H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0))^2$ ,  $(u_1, v_1) \in (H_0^1(\Omega_0))^2$  e suponha que as hipóteses (2.11)-(2.13) e (2.16) sejam satisfeitas. Então qualquer solução regular do sistema (2.1)-(2.4) satisfaz*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \psi(t) & \leq \|u_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 - \|\nabla u_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \left( \int_0^t g_1(s) ds \right) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\
& + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)} \left( \int_0^t g_1(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} (g_1 \square \nabla u)^{\frac{1}{2}} + \|v_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 - \|\nabla v_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\
& + \left( \int_0^t g_2(s) ds \right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)} \left( \int_0^t g_2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} (g_2 \square \nabla v)^{\frac{1}{2}} \\
& - (2 + \delta) \int_{\Omega_t} H(u-v) dx.
\end{aligned}$$

**Demonstração.** Multiplicando as equções (2.1) por  $u$  e (2.2) por  $v$ , e integrando sobre  $\Omega_t$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \psi(t) &= \|u_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 - \|\nabla u_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \int_{\Omega_t} \int_0^t g_1(t-s) \nabla u(s) \cdot \nabla u ds dx \\ &\quad \|v_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 - \|\nabla v_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \int_{\Omega_t} \int_0^t g_2(t-s) \nabla v(s) \cdot \nabla v ds dx \\ &\quad - \int_{\Omega_t} (u-v) h(u-v) dx. \end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \int_0^t g_1(t-s) \nabla u(s) \cdot \nabla u ds dx &= \int_{\Omega_t} \int_0^t g_1(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) \cdot \nabla u ds dx \\ &\quad + \int_{\Omega_t} \left( \int_0^t g_1(s) ds \right) |\nabla u|^2 dx, \\ \int_{\Omega_t} \int_0^t g_2(t-s) \nabla v(s) \cdot \nabla v ds dx &= \int_{\Omega_t} \int_0^t g_2(t-s) (\nabla v(s) - \nabla v(t)) \cdot \nabla v ds dx \\ &\quad + \int_{\Omega_t} \left( \int_0^t g_2(s) ds \right) |\nabla v|^2 dx \end{aligned}$$

e levando em conta que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_t} \int_0^t g_1(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) \cdot \nabla u ds dx \right| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)} \left( \int_0^t g_1(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} (g_1 \square \nabla u)^{\frac{1}{2}}, \\ \left| \int_{\Omega_t} \int_0^t g_2(t-s) (\nabla v(s) - \nabla v(t)) \cdot \nabla v ds dx \right| &\leq \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)} \left( \int_0^t g_2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} (g_2 \square \nabla v)^{\frac{1}{2}}, \\ - \int_{\Omega_t} (u-v) h(u-v) dx &\leq -(2+\delta) \int_{\Omega_t} H(u-v) dx \end{aligned}$$

segue a conclusão do lema.

Consideremos o funcional

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + \psi(t), \tag{3.6}$$

com  $N > 0$ . Usando a desigualdade de Young e a desigualdade de Poincaré temos que

$$k_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq k_1 E(t), \tag{3.7}$$

onde  $k_0$  e  $k_1$  são constantes positivas.

Agora mostraremos o principal resultado desse trabalho.

**Teorema 3.0.4.** *Consideremos  $(u_0, v_0) \in (H_0^1(\Omega_0) \cap H^2(\Omega_0))^2$ ,  $(u_1, v_1) \in (H_0^1(\Omega_0))^2$  e suponha que as hipóteses (2.12)-(2.13), (2.16), (3.3) e (3.4) sejam satisfeitas. Então qualquer solução regular do sistema (2.1)-(2.2) satisfaz*

$$E(t) \leq C e^{-\xi t} E(0), \quad \forall t \geq 0$$

onde  $C$  e  $\xi$  são constantes positivas.

**Demonstração.** Usando o **Lema 3.0.8** e o **Lema 3.0.9**, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -2N\alpha \|u_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 - C_1 N g_1 \square \nabla u + \|u_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\ &\quad - 2N\alpha \|v_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 - C_1 N g_2 \square \nabla v + \|v_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\ &\quad - \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \left( \int_0^t g_1(s) ds \right) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\ &\quad - \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \left( \int_0^t g_2(s) ds \right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\ &\quad + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)} \left( \int_0^t g_1(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} (g_1 \square \nabla u)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)} \left( \int_0^t g_2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} (g_2 \square \nabla v)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - (2 + \delta) \int_{\Omega_t} H(u - v) dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos para  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq -2N\alpha \|u_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 - C_1 N g_1 \square \nabla u + \|u_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\ &\quad - \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \left( \int_0^t g_1(s) ds \right) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \frac{\|g_1\|_{L^1(0,\infty)}}{2\epsilon} g_1 \square \nabla u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2N\alpha\|v_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 - C_2Ng_2\Box\nabla v + \|v_t\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\
& -\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \left(\int_0^t g_2(s)ds\right)\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \\
& +\frac{\epsilon}{2}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \frac{\|g_2\|_{L^1(0,\infty)}}{2\epsilon}g_2\Box\nabla v \\
& -(2+\delta)\int_{\Omega_t} H(u-v)dx
\end{aligned}$$

Escolhendo  $N$  suficiente grande e  $\epsilon$  bastante pequeno obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\lambda_0 E(t) \quad (3.8)$$

ondde  $\lambda_0$  é uma constante posistiva independente de  $t$ . De (3.7) e (3.8) segue que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{\frac{\lambda_0}{k}t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Da relação de equivalente (3.7) segue nossa conclusão.

---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] M.Assila, *A note on the boundary stabilization of a compactly coupled system of wave equations*. Applied Mathematics Letters 12, (1999), 37-42.
- [2] M.Assila, *Asymptotic stability of a compactly coupled system of wave equations*. Applied Mathematics Letters 14, (2001), 285-290.
- [3] F. Alabau, *Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés*. C. R. Acad. Sci. Paris, 328 (1999), 1015-1020.
- [4] R. Benabdallah, J. Ferreira, *On hyperbolic-parabolic equations with nonlinearity of Kirchoff-Carrier type in domains with moving boundary*. Nonlinear Analysis 37, (1999), 269-287.
- [5] C.M.Dafermos, J.A.Nohel, *Energy methods for nonlinear hiperbolic Volterra integro-differential equations*. Comm. Partial differential Equations, 4(1979), 219-278.
- [6] V. Komornik, B. Rao, *Boundary stabilization of compactly coupled wave equations*. Asymptotic Analysis 14 (1997), 339-359.
- [7] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*, John Wiley and Sons-Masson, Paris,(1994).
- [8] J.L. Lions, *Quelques Méthodes de resolution de problèmes aux limites non lineaires*. Dunod Gauthiers Villars, Paris, (1969).
- [9] J.L. Lions, E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications*. Springer-Verlag, New York, Vol. I,(1972).
- [10] J.Muñoz Rivera, *Energy decay rates in linear thermoelasticity*. Funkc. Ekvacioj, Vol. 35(1)(1992), 19-30.
- [11] J.Muñoz Rivera, *Global solutions on a quasilinear wave equation with memry*. Bolletino Unione Matematica Italiana, 7(8-B)(1994), 289-303.
- [12] R.D.Passo, M. Ughi, *Problèmes de Dirichlet our une classe d'èquations paraboliques non linéaires dans des ouverts non cylindriques*.C. R. Acad. Sc. Paris, 308(1989), 555-558.

- [13] M.L. Santos, *Decay rates for solutions of a system of wave equations with memory*. Journal of Differential Equations, Vol.2002, N. 38(2002), 1-17.
- [14] M.L. Santos, J. Ferreira, *Stability for a system of wave equations of Kirchhoff with coupled nonlinear and boundary conditions of memory type*. Advances in Differential Equations, Vol. 8(7) (2003), 873-896.
- [15] H.S. Cunha, *Existência e unicidade de solução fraca para um sistema de EDP's em domínio tempo-dependente*. (Dissertação de mestrado. Belém-Pa, (2005), UFPA.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)