UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Sobre a Álgebra de Multiplicações de uma Álgebra de Bernstein

Joelma Morbach

Dissertação de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Maria de Nazaré Carvalho Bezerra.

BELÉM
2008

Joelma Morbach

Sobre a álgebra de Multiplicações de uma Álgebra de Bernstein

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, pela seguinte banca examinadora:.

Prof^{a}. Dr^{a}. Maria de Nazaré Carvalho Bezerra

Departamento de Matemática, UFPA - Orientador

Prof^{o}. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes

Departamento de Matemática, UFPA

Prof^{a}. Dr^{a}. Lúcia Satie Ikemoto Murakami

Departamento de Matemática, IME-USP

DATA DE AVALIAÇÃO:____/____/______

CONCEITO:________________________

BELÉM

2008

Aos dois grandes amores da minha vida, minha filha Fabiana e meu esposo Juaci.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido vida, saúde e capacidade para realizar este trabalho.

Ao meu esposo Juaci por todo amor, cumplicidade e cuidado que me tem dedicado.

A meu pai Albino Morbach, pelo seu carinho e seu cuidado. Por ter sempre acreditado em mim, me encorajado e me apoiado incondicionalmente.

A minha mãe Oneide Morbach, pela dedicação que sempre teve para comigo e para com a minha filha, por seu amor e todas as suas orações em meu favor.

A minha orientadora, Professora Drª. Maria de Nazaré Carvalho Bezerra, pela tão eficiente orientação, assim como, pela dedicação e paciência com as quais me assistiu durante toda a realização desta dissertação.

A todos os demais professores e à coordenação deste programa que de alguma forma contribuíram para a conclusão desta pós-graduação.

À Universidade Federal do Pará.

A todos os colegas do curso que contribuíram nas horas de estudo e de descontração.

A todos os meus familiares e amigos, pelos incentivos e pela confiança atribuída à minha pessoa.

Abstract

From a Bernstein algebra $A = Fe \oplus U \oplus V$ it might be that construct other algebraic structure, namely, her multiplication algebra denoted by $M(A)$ that is the subalgebra of endomorphism algebra of A, generated by the operators L_x and R_x, defined by $R_x(a) = ax$ e $L_x(a) = xa$ such that x, $a \in A$. This work to search out information under the numeric invariant $\rho(A) = \max\{\text{posto}(\sigma); \sigma \in M(A)\}$ and search to investigate betters upper limits for this invariant in 2-exceptional algebras. The dimensions of U and V are invariants of A and given integers $\dim U \geq 1, \dim V \geq 1$ and p with $1 + \dim U \leq p \leq \dim U + \dim V$, is proved that not ever exist a Bernstein algebra with type $(1 + \dim U, \dim V)$ such that $\rho(A) = p$.

Key words: algebra, Bernstein algebra, multiplication algebras, dimension, invariant, rank, type, endomorphism.

Resumo

A partir de uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$ é possível construir uma outra estrutura algébrica, a saber, a sua álgebra de multiplicações $M(A)$, a qual é definida como sendo uma subálgebra da álgebra dos endomorfismos de A, gerada pelos operadores L_x e R_x definidos por $R_x(a) = ax$ e $L_x(a) = xa$ tal que x, $a \in A$. Este trabalho busca informações a respeito do invariante numérico $\rho(A) = \max\{\text{posto}(\sigma); \sigma \in M(A)\}$ e tenta melhorar as limitações existentes para o mesmo, analisando o grau de excepcionalidade da álgebra. As dimensões de U e V são invariantes numéricos de A e dados inteiros $\dim U \geq 1, \dim V \geq 1$ e p com $1 + \dim U \leq p \leq \dim U + \dim V$, é mostrado que nem sempre existe uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + \dim U, \dim V)$ tal que $\rho(A) = p$.

Palavras chave: álgebra, álgebra de Bernstein, álgebra de multiplicações, dimensão, invariante, posto, tipo, endomorfismo.

Sumário

Introdução **3**

1 Preliminares **6**

1.1 Álgebras báricas 6

1.2 Álgebras de Bernstein 8

1.3 Linearização de identidades 9

1.4 Álgebras de Bernstein-Jordan 17

1.5 Nilpotência em álgebras de Bernstein 21

1.6 Algumas subclasses das álgebras de Bernstein 22

1.6.1 Álgebras de Bernstein n-excepcionais 22

1.7 Álgebras associativas de dimensão finita 23

2 Álgebra de Multiplicações **26**

2.1 Álgebra Livre 26

2.2 A álgebra de Multiplicações 27

2.2.1 Notações 28

2.2.2 Propriedades gerais da álgebra de multiplicações 28
2.3 A álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein 33
2.4 Decomposição de Peirce 35
2.5 $M(A)$ nas álgebras normais 49
2.6 Relações entre $M(A)$ e $M(\overline{A})$ 51

3 Propriedades dos elementos de $M(A)$ **55**

3.1 Idempotentes da álgebra de multiplicações 56
3.2 Álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente 57
3.3 Idempotentes em álgebras de Bernstein arbitrárias 65
3.4 Sobre o invariante $\rho(A)$ 68

Bibliografia **85**

Introdução

Em 1923 S. Bernstein propôs um problema sobre genética das populações, cuja formulação algébrica deu origem as álgebras de Bernstein. Muitos autores têm se dedicado aos estudo das álgebras de Bernstein, o qual foi iniciado simultânea e independentemente nos anos 70 por P. Holgate e Y. Lyubich.

Considerando F um corpo com característica diferente de dois, uma *álgebra de Bernstein* sobre o corpo F é um par ordenado (A, ω) em que A é uma F-álgebra comutativa (não necessariamente associativa), $\omega : A \longrightarrow F$ é um homomorfismo não nulo de álgebras e na qual a identidade $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$ é satisfeita para todo x em A.

É conhecido que ω é único e A possui elementos idempotentes $e \in A$, para os quais a álgebra A tem uma decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, em que $U_e = \{u \in N; 2eu = u\}$ e $V_e = \{v \in N; ev = 0\}$ com $\ker \omega = N = U \oplus V$. Quando tomamos outro idempotente $f \in A$, os subespaços que figuram nessa decomposição têm dimensão invariante. Com isso, define-se o invariante *tipo* de A como sendo $(1 + \dim U_e, \dim V_e)$, usado em praticamente todos os estudos acerca dessas álgebras. Mostra-se ainda que os subespaços $U_eV_e + V_e^2$ e U_e^2 também têm dimensão invariante, o que nos permite definir o *subtipo* de A como sendo o invariante $(\dim(U_eV_e + V_e^2), \dim U_e^2)$. Subespaços obtidos a partir de somas e produtos de U_e e V_e são denominados p-subespaços.

O estudo das álgebras de Bernstein pode ser encontrado em vários textos, como por exemplo [12] e [5]. Assim como resultados relevantes sobre a invariância dos p-subespaços podem ser encontrados em [15] e [16]. Ao longo desses anos tem se tentado fazer uma classificação dessas álgebras, que começou com o próprio Bernstein. Embora alguns autores tenham conseguido importantes resultados nesse sentido, o problema de classificação das álgebras de Bernstein tem se mostrado um tanto quanto complexo. Assim, em busca de informações sobre a estrutura dessas álgebras, foram realizados diversos estudos através de diferentes tipos de abordagem.

A partir de uma álgebra de Bernstein A é possível construir uma outra estrutura algébrica, a saber, a sua álgebra de multiplicações $M(A)$, a qual é definida como sendo uma subálgebra da álgebra dos endomorfismos de A, gerada por $\{L_x, R_x; x \in A\}$ em que $R_x : A \longrightarrow A$ é dada por $R_x(a) = ax$ e $L_x : A \longrightarrow A$ é definida por $L_x(a) = xa$, para todo a em A.

A álgebra $M(A)$ é associativa (em geral não comutativa) e sua estrutura está intrinsecamente ligada à estrutura da álgebra de Bernstein A.

A álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein é também uma álgebra bárica, possui elementos idempotentes e por isso também podemos fazer a sua decomposição de Peirce. O estudo da álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein foi iniciado por R. Costa e A. Suazo em [7]. Em sua tese de doutorado L. S. Ikemoto [13] estuda a álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein A, apresentando importantes relações entre A e $M(A)$, investigando como a estrutura de uma influencia a estrutura da outra. Em particular, no segundo capítulo, examina o posto máximo dos elementos de $M(A)$ definindo o invariante numérico $\rho(A) = \max\{\text{posto}(\sigma); \sigma \in M(A)\}$, encontrando dois limitantes superiores para este invariante. Além disso, são levantadas, sem resposta, algumas questões sobre $\rho(A)$.

Neste trabalho continuamos o estudo da álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein, procurando estudar o invariante $\rho(A)$ a partir do grau de excepcionalidade da álgebra, conforme definido por N. Bezerra em sua tese de doutorado [3].

Trabalha-se nesta dissertação principalmente na tentativa de encontrar uma resposta satisfatória para uma das questões supracitadas. Queremos saber, se dado inteiros positivos (r, s, p) com $r + 1 \leq p \leq r + s$, existe uma álgebra de Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ tal que $\rho(A) = p$.

Analisando o grau de excepcionalidade da álgebras de Bernstein e usando a limitação de $\dim U^2$ dada em [3], percebemos em alguns exemplos que $\dim U(UV)$ é igual a diferença entre o limite superior e inferior de $\dim U^2$. Assim, vemos que é possível melhorar a limitação superior para o invariante $\rho(A)$, e para o caso em que a álgebra de Bernstein é 2-excepcional com $\dim U = 4$, foi possível mostrar que $\rho(A) = r + 2 = 6$. Verificamos que nem sempre existe uma álgebra de Bernstein nas condições acima. Vimos, por exemplo, que dados inteiros r, s, p com $r \leq 3$ e $1 + r \leq p \leq r + s$, existe uma álgebra de Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ tal que $\rho(A) = p$ se, e só se, $p = r + 1$. Além disso, para inteiros r, s, p com $r = 4$ e $s \geq 2$, existe uma álgebra de Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ tal que $\rho(A) = p$ se, e só se, $p \in \{5, 6\}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos que serão necessários para o bom entendimento dos demais capítulos. Definimos e estudamos de modo sucinto as principais propriedades das álgebras de Bernstein, as quais serão base para a construção do nosso principal objeto de estudo, a saber, a álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein e o posto máximo de seus elementos.

1.1 Álgebras báricas

Uma *álgebra* sobre um corpo F é um par $(A, \cdot)$, onde A é um espaço vetorial sobre F e $\cdot$ é uma operação binária em A que satisfaz

$$\begin{aligned}(y+z)\cdot x &= y\cdot x + z\cdot x\\ x\cdot(y+z) &= x\cdot y + x\cdot z\\ (\alpha x)\cdot y &= x\cdot(\alpha y) = \alpha(x\cdot y)\end{aligned}$$

para quaisquer x, y em A e α em F.

Em particular, se $xy = yx$ para todo $x, y \in A$, dizemos que A é uma *álgebra comutativa* e se $x(yz) = (xy)z$ para todo $x, y, z \in A$ dizemos que A é *associativa*.

Sejam F um corpo, A e B álgebras sobre F. Um *homomorfismo* de A em B é uma função linear f de A em B tal que $f(xy) = f(x)f(y)$, para todo $x, y \in A$. Um homomorfismo não nulo de A em F é chamado *caracter* ou *função peso* de A.

Uma *álgebra bárica* sobre um corpo F é um par (A, ω) onde A é uma álgebra sobre F, não necessariamente associativa ou comutativa, e ω é um *caracter* de A.

Vale observar que nem toda álgebra possui caracteres e, como conseqüência disso, não podem ser vistas como álgebra bárica. Como exemplo, podemos citar a álgebra onde A é um espaço vetorial e o produto é definido por $xy = 0$ para quaisquer x e y em A. Pois, sendo f um homomorfismo de A em F, então $f(x)^2 = f(x^2) = f(0)$ e portanto $f(x) = 0$, para todo x em A, logo $f \equiv 0$.

Proposição 1.1. *Toda álgebra bárica (A, ω) pode ser decomposta na forma $A = Fx \oplus N$, onde $N = \ker \omega$ e Fx é o subespaço gerado por $x \in A - N$.*

Demonstração:

Já que ω é caracter de A, existe x_0 em A tal que $\omega(x_0) \neq 0$. Assim, dado qualquer $y \in A$, temos que $y = \frac{\omega(y)}{\omega(x)}x + \left(y - \frac{\omega(y)}{\omega(x)}x\right)$ onde facilmente se verifica que $\frac{\omega(y)}{\omega(x)}x \in Fx$ e $y - \frac{\omega(y)}{\omega(x)}x \in N$. Além disso, $Fx \cap N = 0$, pois considerando $z \in Fx \cap N$, existe α em F tal que $z = \alpha x$ e $0 = \omega(z) = \omega(\alpha x) = \alpha\omega(x)$ o que implica em $\alpha = 0$ já que $\omega(x) \neq 0$ e portanto $z = 0$. $\square$

Usando a proposição acima e alguns conceitos básicos de álgebra linear obtemos os seguintes resultados:

Corolário 1.1. *O subespaço N é um ideal bilateral de A de codimensão 1.*

Corolário 1.2. *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de caracteres de uma álgebra A e o conjunto dos ideais bilaterais de A de codimensão 1 não contendo A^2.*

Corolário 1.3. *Se* $\dim A = n$*, o número de caracteres distintos de* A *é no máximo* n*.*

Esses e outros resultados sobre álgebras que possuem caracteres, bem como suas respectivas demonstrações, podem ser encontrados com mais detalhes em [14].

1.2 Álgebras de Bernstein

Nesta seção definimos as álgebras de Bernstein, mostrando as identidades que as caracterizam, algumas linearizações destas, seus idempotentes, decomposição de Peirce e algumas subclasses dessa classe de álgebras báricas.

Uma *álgebra de Bernstein* é uma álgebra bárica comutativa (A, ω) que satisfaz a identidade

$$(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 \tag{1.1}$$

para todo x em A.

Uma conseqüência direta da identidade (1.1) é que os elementos de N satisfazem $(x^2)^2 = 0$ e portanto, N é nil. Segue daí, como veremos na próxima proposição, que toda álgebra de Bernstein admite um único caracter.

Proposição 1.2. *Toda álgebra de Bernstein admite somente um caracter.*

Demonstração:

Consideremos (A, ω) uma álgebra de Bernstein e suponhamos ω' um caracter de A. Seja $n \in N$, tem-se que $(n^2)^2 = 0$. Assim $\omega'(n)^4 = \omega'((n^2)^2) = \omega'(0) = 0$. Pela Proposição 1.1, existe x_0 em A, $\omega(x_0) \neq 0$ tal que $A = Fx_0 \oplus N$. Logo, tomando $\lambda = \frac{\omega'(x_0)}{\omega(x_0)}$ temos que $\omega'(x) = \omega'(\alpha x_0 + n) = \alpha\omega'(x_0) = \alpha\lambda\omega(x_0) = \lambda\omega(\alpha x_0 + n) = \lambda\omega(x)$. Portanto, $\omega' = \lambda\omega$ com $\lambda \neq 0$, pois por hipótese ω' também é caracter A. Além disso, temos que $\lambda\omega(x_0)^2 = \lambda\omega(x_0^2) = \omega'(x_0^2) = \omega'(x_0)^2 = [\lambda\omega(x_0)]^2 = \lambda^2\omega(x_0)^2$ o que implica em $(\lambda - \lambda^2)\omega(x_0)^2 = 0$ e como $\omega(x_0)^2 \neq 0$ conclui-se que $\lambda = 1$. Portanto $\omega' = \omega$. □

Valendo-nos desse resultado, por abuso de linguagem, iremos nos referir a uma álgebra de Bernstein (A, ω) simplesmente por A. Para todo $x \in A$, $\omega(x)$ será chamado o *peso* de x.

1.3 Linearização de identidades

Seja $f(x) = 0$ uma identidade monomial (de uma variável e de uma única parcela) de grau n satisfeita pelos elementos de uma F-álgebra A comutativa e não necessariamente associativa com $car(F) \neq 2$, tal como as identidades a seguir

$$\begin{aligned} x^2 &= 0 \\ x^3 &= 0 \\ (x^2)^2 &= 0 \\ x^2x^3 &= 0 \end{aligned}$$

A primeira linearização de $f(x) = 0$ é uma nova identidade $g(x, y) = 0$, obtida da primeira, substituindo-se x pela soma de duas variáveis, por exemplo, $x + y$ e usando o fato de os elementos de A satisfazerem $f(x) = 0$. Por exemplo, se A satisfaz $x^2 = 0$, para todo $x \in A$, então $(x+y)^2 = 0$, para quaisquer $x,\ y \in A$. Logo, $x^2+2xy+y^2 = 0$ e visto que $x^2 = y^2 = 0$ e $car(F) \neq 2$ temos $xy = 0$, que é a primeira linearização de $x^2 = 0$.

Para obtermos a primeira linearização de x^3, procedemos de forma análoga. Temos que $(x + y)^3 = 0$, para quaisquer $x,\ y \in A$. Assim, $x^3 + 2(xy)x + y^2x + x^2y + 2(xy)y + y^3 = 0$ e portanto $2(xy)x + y^2x + x^2y + 2(xy)y = 0$. Nesta substituindo y por $-y$, obtemos $-2(xy)x+y^2x-x^2y+2(xy)y = 0$ e somando-se essas duas identidades temos $2y^2x+4(xy)y = 0$, ou seja, $y^2x + (xy)y = 0$. Esta é a primeira linearização de x^3.

Há ainda um processo prático para obter a primeira linearização de uma identidade monomial $f(x) = 0$, de uma variável e de grau n, que consiste na aplicação dos seguintes passos:

1º passo: Reescreve-se a identidade como soma de n parcelas $f(x)$ sem utilização de potências em x. Por exemplo, se $f(x) = x^2$, então escreve-se $xx + xx = 0$. Se $f(x) = x^3$ escreve-se $x(xx) + x(xx) + x(xx) = 0$. Se ainda, $f(x) = (x^2)^2$, escreve-se $(xx)(xx) + (xx)(xx) + (xx)(xx) + (xx)(xx) = 0$.

2º passo: Na primeira parcela troca-se o primeiro x por y, na segunda parcela troca-se o segundo x por y e assim por diante, até que na n-ésima parcela, troca-se o último (n-ésimo) x por y. Por exemplo, se $xx+xx = 0$ obteremos $yx+xy = 0$. Se $x(xx)+x(xx)+x(xx) = 0$ então $y(xx) + x(yx) + x(xy) = 0$. Se $(xx)(xx) + (xx)(xx) + (xx)(xx) + (xx)(xx) = 0$ obteremos $(yx)(xx) + (xy)(xx) + (xx)(yx) + (xx)(xy) = 0$.

3º passo: Usa-se a comutatividade de A, a identidade e o fato de que $car(F) \neq 2$, para agrupar as parcelas iguais. Por exemplo, se $f(x) = x^2$, então $xy = 0$. Se $f(x) = x^3$ então $x^y + 2x(xy) = 0$. Se ainda, $f(x) = (x^2)^2$, então $x^2(xy) = 0$.

Agora, seja $f(x_1, ..., x_k) = 0$ uma identidade monomial de k variáveis e de grau n na variável x_i com $1 \leq i \leq k$. Fazemos a primeira linearização da identidade $f(x_1, ..., x_k) = 0$, pelo processo prático da seguinte forma. Primeiro, reescrevemos a identidade como soma de n parcelas, de maneira análoga ao que se faz para identidades monomiais de uma variável, porém repetimos as demais variáveis com seus respectivos expoentes em cada uma das parcelas. Então, substituímos, em cada parcela, um dos x_i por y de tal modo que y conste uma única vez em cada parcela e em posições subseqüentes, tal como é feito para o caso $f(x) = 0$. Prosseguimos igualmente se quisermos linearizar uma vez $f(x_1, ..., x_k) = 0$ em relação a qualquer outra variável x_j que componha a identidade. Por exemplo, se $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 x_2^3) x_3^2$ então, para fazer a primeira linearização desta identidade, na variável x_1 escrevemos $((x_1x_1)x_2^3)x_3^2 + ((x_1x_1)x_2^3)x_3^2 = 0$. Logo, $((yx_1)x_2^3)x_3^2 + ((x_1y)x_2^3)x_3^2 = 0$ e portanto $((x_1y)x_2^3)x_3^2 = 0$.

Se $g(x_1, ..., x_k) = 0$ é uma identidade polinomial de k variáveis homogênea na variável x_i de grau n, então fazemos a primeira linearização de $g(x_1, ..., x_k) = 0$ na variável x_i, pelo processo prático, utilizando o fato de que cada uma das parcelas do polinômio é uma identidade monomial $f(x_1, ..., x_k) = 0$ e, assim, mantendo a soma procedemos como no caso anterior. Por exemplo, se $g(x_1, x_2) = (x_1^2)^2 x_2 + (x_1 x_2) x_1^3$ então, para fazer a primeira linearização dessa identidade na variável x_1, escrevemos

$$\begin{aligned}(x_1x_1)(x_1x_1)x_2 &+ (x_1x_2)(x_1(x_1x_1)) + (x_1x_1)(x_1x_1)x_2 + (x_1x_2)(x_1(x_1x_1)) + (x_1x_1)(x_1x_1)x_2 \\ &+ (x_1x_2)(x_1(x_1x_1)) + (x_1x_1)(x_1x_1)x_2 + (x_1x_2)(x_1(x_1x_1)) = 0.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}(yx_1)(x_1x_1)x_2 &+ (yx_2)(x_1(x_1x_1)) + (x_1y)(x_1x_1)x_2 + (x_1x_2)(y(x_1x_1)) + (x_1x_1)(yx_1)x_2 \\ &+ (x_1x_2)(x_1(yx_1)) + (x_1x_1)(x_1y)x_2 + (x_1x_2)(x_1(x_1y)) = 0.\end{aligned}$$

Logo, $x_1^2(x_1y)x_2 + (x_1x_2)(x_1(x_1y)) = 0$.

Visto que a primeira linearização dá origem a uma nova identidade, podemos lineariza-la novamente e novamente, até o tantas vezes quanto for o grau da variável em questão.

Apresentaremos a seguir alguns resultados que têm como base a técnica de linearização precedente, bastante utilizada no estudo das álgebras de Bernstein. Considerando F um corpo que possui mais de 3 elementos e A uma F-álgebra de Bernstein, para quaisquer $x, y \in A$ e $x_1, x_2, x_3, x_4 \in N$, temos

$$\begin{aligned} 2x^2(xy) &= \omega(x)^2xy + \omega(x)\omega(y)x^2 && (1.2)\\ {x_1}^2(x_1x_2) &= 0 && (1.3)\\ {x_1}^2(x_2x_3) + 2(x_1x_2)(x_1x_3) &= 0 && (1.4)\\ (x_1x_2)(x_3x_4) + (x_1x_3)(x_2x_4) + (x_1x_4)(x_2x_3) &= 0 && (1.5)\end{aligned}$$

como conseqüência direta da linearização da identidade (1.1).

Um elemento $e \in A$ que satisfaz $e^2 = e$ é chamado um *idempotente* de A e o conjunto de todos os idempotentes de uma álgebra de Bernstein A é dado por:

$$\mathrm{Ip}(A) = \{x^2; \omega(x) = 1\} \cup \{0\}$$

De fato, observemos inicialmente que todo idempotente não nulo de uma álgebra de Bernstein A tem peso 1, pois se $x^2 = x \neq 0$ então $x = x^2 = (x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 = \omega(x)^2 x$ e portanto $\omega(x)^2 = 1$, ou seja, $\omega(x) = 1$ ou $\omega(x) = -1$. E já que $x^2 = x$ também implica em $\omega(x) = 0$ ou $\omega(x) = 1$ então $\omega(x) = 1$ e assim, $\mathrm{Ip}(A) \subset \{x^2; \omega(x) = 1\} \cup \{0\}$. Reciprocamente, dado $x^2 \in \{x^2; \omega(x) = 1\} \cup 0$, já que obviamente 0 é um idempotente, se $x^2 \neq 0$ por (1.1) temos $(x^2)^2 = 1^2 x^2$, concluímos que $(x^2)^2 = x^2$ e portanto $x^2 \in \mathrm{Ip}(A)$. $\square$

Dessa forma, em uma álgebra de Bernstein sempre existe pelo menos um idempotente de peso 1, já que ω é um caracter e o corpo tem elemento unidade.

Neste trabalho estaremos considerando sempre álgebras de dimensão finita, sobre corpos de característica diferente de 2 e álgebras de Bernstein de dimensão finita.

Proposição 1.3. *Sejam A uma álgebra de Bernstein, $e \in A$ um idempotente não nulo e $y \in N$. Então*

$$2e(2ey) = 2ey \tag{1.6}$$

$$(2ey)y^2 = 0 \tag{1.7}$$

$$2ey^2 + (2ey)^2 = y^2 \tag{1.8}$$

$$(y^2)^2 = 0 \tag{1.9}$$

Demonstração:

Fazendo $x = e$ e $y \in N$ em (1.2) teremos (1.6). Substituindo x por $y \in N$ e y por e

obteremos em (1.2) a igualdade (1.7). Ainda em (1.2) trocando x por $e+y$ e y por e encontraremos (1.8). A identidade (1.9) decorre diretamente da substituição de x por y em (1.1).□

Já vimos que toda algebra bárica se decompõe como $A = Fe \oplus N$. Defina agora o operador $M_e : N \to N$ dado por $M_e(y) = 2ey$. Inicialmente, observamos que M_e está bem definido, já que N é um ideal A. Além disso, por (1.6) temos que $M_e(M_e(y)) = 2e(2ey) = 2ey = M_e(y)$. Logo, M_e é uma projeção. Assim, denotando $\mathrm{Im}(M_e)$ por U_e e $\ker(M_e)$ por V_e, temos que

$$N = U_e \oplus V_e \tag{1.10}$$

$$U_e = \{u \in N; eu = \tfrac{1}{2}u\} \tag{1.11}$$

$$V_e = \{v \in N; ev = 0\} \tag{1.12}$$

Portanto, A pode ser decomposta na forma $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$. Destarte, a cada idempotente $e \in A$ de peso 1 está associado a decomposição $A = Fe \oplus N = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, chamada *decomposição de Peirce* de A associada ao idempotente e.

Dados X_1, X_2 subespaços de A denotamos por X_1X_2 o subespaço gerado pelos produtos de elementos de X_1 por elementos de X_2. Assim, $X_1X_2 = \langle x_1x_2; x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\rangle$.

Se $X_1 = X_2 = X$ escrevemos X^2 no lugar de XX. Para álgebras comutativas temos que $X^2 = \langle x^2; x \in X\rangle$, pois para $x_1, x_2 \in X$ tem-se que $x_1x_2 = \frac{1}{4}[(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2] \in \langle x^2; x \in X\rangle$.

A próxima proposição estabelece importantes propriedades dos subespaços U_e^2, U_eV_e e V_e^2, muito utilizadas na obtenção de resultados que dizem respeito às álgebras de Bernstein.

Proposição 1.4. *Dada uma álgebra de Bernstein, com decomposição de Peirce* $A = Fe \oplus$

$U_e \oplus V_e$ *são válidas as seguintes inclusões*

$$U_e^2 \subset V_e \qquad V_e^2 \subset U_e \qquad U_eV_e \subset U_e \tag{1.13}$$

Demonstração:

Segue da identidade (1.8) que $M_e(y^2) + M_e(y)^2 = y^2$ para todo $y \in N$. Então linearizando temos $M_e(y_1y_2) + M_e(y_1)M_e(y_2) = y_1y_2$, quaisquer que sejam $y_1, y_2 \in N$. Como M_e é projeção então, $M_e(y_1)M_e(y_2) = y_1y_2$ para todo $y_1, y_2 \in U_e = ImM_e$, logo $M_e(y_1y_2) = y_1y_2 - M_e(y_1)M_e(y_2) = 0$ o que implica em $y_1y_2 \in V_e$, portanto $U_e^2 \subset V_e$. Se y_1 ou y_2 está em V_e então teremos, respectivamente, $M_e(y_1) = 0$ ou $M_e(y_2) = 0$ e, em ambos os casos conclui-se que $M_e(y_1y_2) = y_1y_2$. Logo, $y_1y_2 \in U_eV_e$ e portanto $U_eV_e \subset U_e$ e $V_e^2 \subset U_e$. □

Proposição 1.5. *Em uma álgebra de Bernstein* $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$*, temos as seguintes identidades quaisquer que sejam* $u \in U_e$ *e* $v \in V_e$

$$u^3 = 0 \tag{1.14}$$

$$u(uv) = 0 \tag{1.15}$$

$$uv^2 = 0 \tag{1.16}$$

$$(u^2)^2 = 0 \tag{1.17}$$

$$(uv)^2 = 0 \tag{1.18}$$

Demonstração:

Considerando $y = u$ em (1.7) temos que $0 = (2eu)u^2 = u^3$. Ainda em (1.7) fazemos $y = u + v$ e aplicando (1.14) segue que $0 = [2e(u + v)](u + v)^2 = 2u(uv) + uv^2$, na qual substituindo v por $-v$ obtém-se $uv^2 - 2u(uv) = 0$. Somando as equações obtidas para v e $-v$ temos $uv^2 = 0$ e $u(uv) = 0$. A identidade (1.17) decorre diretamente da substituição de y por u em (1.9). Fazendo agora, $x_1 = u$ e $x_2 = v$ em (1.3) temos $u^2(uv) = 0$ e fazendo

$x_1 = v$ e $x_2 = u$ temos $v^2(uv) = 0$. Para $x_1 = u + v$ e $x_2 = u$ também em (1.3), usando as equações que acabamos de deduzir encontramos $2(uv)^2 = -u^2v^2$. Como $(uv)^2 \in V_e$ e $u^2v^2 \in V_eU_e \subset U_e$ então $(uv)^2 \in U_e \cap V_e = 0$ de onde concluímos que $(uv)^2 = u^2v^2 = 0$. $\square$

Proposição 1.6. *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein então quaisquer $u, u_1, u_2, u_3 \in U_e$ $v, v_1, v_2 \in V_e$ satisfazem*

$$u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0, \tag{1.19}$$

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2) = 0 \tag{1.20}$$

$$u_1(u_2v) + u_2(u_1v) = 0 \tag{1.21}$$

$$u(v_1v_2) = 0 \tag{1.22}$$

$$u_1^2(u_1u_2) = 0 \tag{1.23}$$

$$(uv_1)(uv_2) = (u_1v)(u_2v) = 0 \tag{1.24}$$

Demonstração:

Seguem diretamente da linearização das identidades da Proposição 1.5. De (1.14) obtemos (1.19), desta, linearizando novamente em u_1, segue (1.20). Aplicando a mesma técnica em (1.15), (1.16), (1.17) e (1.18) obtemos respectivamente (1.21), (1.22), (1.23) e (1.24). $\square$

Considerando e um idempotente não nulo de uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, usando as relações (1.13), (1.14) e o fato de $(x^2)^2 = 0$ para todo $x \in N$, prova-se que o conjunto dos idempotentes não nulos de A é dado por

$$\mathrm{Ip}(A) = \{e + u + u^2; u \in U_e\}$$

A proposição a seguir mostra que as dimensões dos subespaços U_e e V_e que figuram na decomposição de Peirce de uma álgebra de Bernstein independem da escolha do idempotente.

Proposição 1.7. *Sejam* e*,* $f = e + u_0 + u_0^2$ *idempotentes não nulos de uma álgebra de Bernstein* $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$*, e* $u_0 \in U_e$*. Então as aplicações*

$$\begin{array}{ll} \sigma : U_e \longrightarrow U_f & \qquad \tau : V_e \longrightarrow V_f \\ \quad u \longmapsto u + 2uu_0 & \qquad \quad v \longmapsto v - 2vu_0 - 2vu_0^2 \end{array}$$

são isomorfismos de espaços vetoriais.

Demonstração:

A aplicação σ está bem definida, pois segue de (1.19), (1.13) e (1.23) que

$$\begin{aligned} 2(e + u_0 + u_0^2)(u + 2uu_0) = & \ 2eu + 4e(uu_0) + 2uu_0 + 4u_0(uu_0) + 2u_0^2u + 4u_0^2(u_0u) \\ = & \ u + 2uu_0 \end{aligned}$$

e isso implica que $(u + 2uu_o) \in U_f$. Também verifica-se facilmente que σ é linear e decorre decomposição de Peirce de A que σ é injetora, já que cada $u \in U_e$ pode ser escrito de forma única usando-se tal decomposição. Além disso, σ é sobrejetora, pois dado $y \in U_f \subset N$ existem $u \in U_e$ e $v \in V_e$ tais que $y = u + v$. Assim, por definição

$$u + v = 2(e + u_0 + u_0^2)(u + v) = u + 2uu_0 + 2u_0v + 2uu_0^2 + 2u_0^2v.$$

Logo, usando novamente a decomposição de Peirce temos que $2u_0v + 2uu_0^2 + 2u_0^2v = 0$ e $v = 2uu_0$. Portanto, $\sigma(u) = u + v$.

Vamos mostrar agora que τ está bem definida. Com efeito, tomando $v \in V_e$ e utilizando as identidades (1.2), (1.11), (1.12), (1.15), (1.19) e (1.22) tem-se

$$\begin{aligned} (e + u_0 + u_0^2)(v - 2vu_0 - 2vu_0^2) &= ev - 2e(vu_0) - 2e(vu_0^2) + u_0v - 2u_0(u_0v) \\ & -2u_0(vu_0^2) + u_0^2v - 2u_0^2(vu_0) - 2u_0^2(vu_0^2) \\ &= -2u_0^2(vu_0^2) \\ &= -2(-2u_0(u_0(vu_0^2)) \end{aligned}$$

$$= 4u_0(u_0(vu_0^2))$$

$$= 0$$

Portanto $\tau(v) \in V_f$. Também é fácil ver que τ é linear e pela decomposição de Peirce é injetora. Resta mostrar então a sobrejetividade de τ. Suponhamos que $u + v \in V_f$ com $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= 2(e + u_0 + u_0^2)(u + v) \\ &= u + 2u_0u + 2u_0v + 2u_0^2u + 2u_0^2v \\ &= (u + 2u_0v + 2u_0^2u + 2u_0^2v) + (2uu_0) \end{aligned}$$

e já que $N = U_e \oplus V_e$ concluímos que $u + 2u_0v + +2u_0^2v + 2u_0^2u = uu_0 = 0$. Como $u_0^2u = -2u_0(u_0u)$ segue que $\tau(v) = v - 2u_0v - 2u_0^2v = u + v$ e portanto τ é sobrejetora. $\square$

Segue desta proposição que para todo $f = e + u_0 + u_0^2$, $U_f = \sigma(U_e)$ e $V_f = \tau(V_e)$ e estes subespaços U_e e V_e têm dimensão invariante com relação à troca do idempotente. Usa-se então estes invariantes numéricos para definir o *tipo* da álgebra A como sendo o par $(1+r, s)$ onde $r = \mathrm{dim}U_e$ e $s = \mathrm{dim}V_e$, o qual está portanto bem definido.

1.4 Álgebras de Bernstein-Jordan

Uma álgebra de Bernstein (A, ω) é chamada Bernstein-Jordan se A é uma álgebra de Jordan, isto é, quaisquer elementos $x, y \in A$ satisfazem a identidade

$$x^2(yx) = (x^2y)x \tag{1.25}$$

Existem muitas caracterizações para essa importante subclasse das álgebras de Bernstein e algumas dessas nos serão fornecidas pelo seguinte teorema

Teorema 1.1. *Em toda álgebra de Bernstein* $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ *as seguintes condições são equivalentes:*

(a) A *é uma álgebra de Jordan;*

(b) $V_e^2 = 0$, *para todo* $e \in Ip(A)$*;*

(c) $V_e^2 = 0$, *para algum* $e \in Ip(A)$ *e* $(uv)v = 0$ *para quaisquer* $u \in U_e$ *e* $v \in V_e$*;*

(d) *Todo elemento* $x \in A$ *satisfaz a identidade* $x^3 = \omega(x)x^2$.

Demonstração:

Mostremos que (a) implica (b). Seja A uma álgebra de Jordan então (1.25) é satisfeita para quaisquer $x, y \in A$. Assim, para $x = e + v$ e $y = e$ obtemos $\frac{1}{2}v^2 - v^3 = 0$, substituindo nesta equação v por $(-v)$ encontramos $\frac{1}{4}v^2 + v^3 = 0$ e somando membro a membro estas duas últimas igualdades resulta que $v^2 = 0$, para todo $v \in V_e$. Portanto $V_e^2 = 0$.

Para mostrar que (b) implica (c) tomamos para cada $u \in U_e$ o idempotente $f = e+u+u^2$. Por hipótese $V_f^2 = 0$, então usando as identidades (1.13) e (1.18) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(v)^2 \\ &= (v - 2uv - 2u^2v)^2 \\ &= (v - 2uv)^2 \\ &= v^2 - 4(uv)v + 4(uv)^2 \\ &= -4(uv)v \end{aligned}$$

para todo $v \in V_e$ e portanto $(uv)v = 0$.

Consideremos agora a decomposição de Peirce relativa ao idempotente e para o qual $V_e^2 = 0$ e $(uv)v = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Todo elemento x de A pode ser decomposto de forma única como $x = \omega(x)e + u + v$ onde $u \in U_e$ e $v \in V_e$. Logo, por (1.11), (1.12) e (1.25), temos

$$
\begin{aligned}
x^3 &= \Big(\omega(x)e + u + v\Big)^2\Big(\omega(x)e + u + v\Big) \\
&= \Big(\omega(x)^2e + \omega(x)u + 2uv + u^2\Big)\Big(\omega(x)e + u + v\Big) \\
&= \omega(x)^3e + \omega(x)^2u + 2\omega(x)uv + \omega(x)u^2 \\
&= \omega(x)(\omega(x)^2 + \omega(x)u + 2uv + u^2) \\
&= \omega(x)(\omega(x)e + u + v)^2 \\
&= \omega(x)x^2
\end{aligned}
$$

portanto (c) implica (d). Finalmente, para provar que (d) em implica (a) linearizando a identidade $x^3 = \omega(x)x^2$ encontramos a equação

$$x^2y + 2x(xy) = \omega(y)x^2 + 2\omega(x)xy$$

Nesta substituindo y por xy e multiplicando-a por x, obtemos respectivamente

$$x^2(xy) + 2x(x(xy)) = \omega(x)\omega(y)x^2 + 2\omega(x)x(xy)$$

$$(x^2y)x + 2x(x(xy)) = \omega(y)x^3 + 2\omega(x)x(xy)$$

o resultado segue da subtração entre essas duas igualdades. □

O próximo corolário é uma conseqüência imediata do ítem (c) do teorema anterior.

Corolário 1.4. *Nas álgebras de Bernstein-Jordan as identidades*

$$v_1v_2 = 0 \tag{1.26}$$

$$(uv_1)v_2 + (uv_2)v_1 = 0 \tag{1.27}$$

são satisfeitas para quaisquer $e \in Ip(A)$, $u \in U_e$, $v_1, v_2 \in V_e$.

Corolário 1.5. *Dado $I \subseteq N$ um ideal de uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, a álgebra quociente A/I é Bernstein-Jordan se, e somente se, $V_e^2 \subseteq I$ para todo idempotente $e \in A$.*

Demonstração:

Vamos mostrar inicialmente que $(A/I, \overline{\omega})$ é uma álgebra de Bernstein com as operações usualmente definidas para quocientes e com a função $\overline{\omega} : A/I \longrightarrow F$, dada por $\overline{\omega}(\overline{x}) = \omega(x)$. De fato, já que $I \subseteq N$, se tomarmos $\overline{x} = \overline{y}$ segue que $x - y \in \ker \omega$ e portanto $\omega(x) = \omega(y)$, o que implica em $\overline{\omega}(\overline{x}) = \overline{\omega}(\overline{y})$. Assim, $\overline{\omega}$ está bem definida e vê-se facilmente, pela forma como foi definida, que $\overline{\omega}$ é um caracter. Além disso, dado $\overline{x} \in A/I$ temos que $(\overline{x}^2)^2 = \overline{(x^2)^2} = \overline{\omega(x)^2 x^2} = \omega(x)^2 \overline{x}^2 = \overline{\omega}(\overline{x})^2 \overline{x}^2$. Agora, se $V_e^2 \subseteq I$ então $\overline{v^2} = \overline{0}$. Logo, pelo Teorema 1.1, temos que A/I é Bernstein-Jordan. Reciprocamente, se A/I é Bernstein-Jordan então $\overline{v}^2 = \overline{v^2} = \overline{0}$, que equivale a $v^2 \in I$ para todo $v \in V$, ou seja, $V_e^2 \subseteq I$. □

Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein, o conjunto $L = \{u \in U_e; uU_e = 0\}$ é um ideal de A. Com efeito, obviamente $L \neq \varnothing$, pois $0 \in L$. Além disso, para $\alpha \in F$, $u_1, u_2 \in L$ e $u \in U_e$ temos que $(u_1 + \alpha u_2)u = u_1 u + \alpha u_2 u = 0 + \alpha 0 = 0$, portanto $(u_1 + \alpha u_2) \in L$. Seja agora $x = \omega(x)e + u' + v$ um elemento genérico de A com $u' \in U_e$ e $v \in V_e$, observando que $xu_1 = \frac{1}{2}\omega(x)u_1 + u_1 v \in U_e$ e usando (1.21), segue que $(xu_1)u = \frac{1}{2}\omega(x)u_1 u + (u_1 v)u = -(uv)u_1 = 0$, de onde conclui-se que $xu_1 \in L$. Desse modo, já que o conjunto L é um ideal de A podemos construir a álgebra quociente A/L que, de acordo com corolário anterior, também é Bernstein-Jordan, visto que $V_e^2 \subseteq L$.

Considerando que para cada idempotente não nulo e de A obtemos $\overline{e}$ um idempotente de A/L, utilizando argumento análogo ao usado na caracterização dos subespaços U_e e V_e, podemos ver que na decomposição Peirce de $(\overline{A}, \overline{\omega})$, temos $U_{\overline{e}} := \{\overline{u}; u \in U_e\} = (U_e + L)/L$ e $V_{\overline{e}} := \{v + l; l \in L, v \in V_e\} = \{\overline{v}; v \in V_e\} = (V \oplus L)/L$.

O ideal L tem um importante papel no estudo das álgebras de Bernstein e independe do idempotente escolhido, como mostra próxima proposição.

Proposição 1.8. *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein. Então $L = \bigcap_{f \in Ip(A)} U_f$.*

*Demonstração:*Sejam $u \in L$, então, para todo $u_0 \in U_e$ temos, $u = u + 2uu_0 = \sigma(u) \in U_f$, onde $f = e + u_0 + u_0^2$. Reciprocamente, se $u \in \bigcap_{f \in Ip(A)} U_f$ então, para qualquer $u_0 \in U_e$ existe $u_1 \in U_e$ tal que $u = \sigma(u_1) = u_1 + 2u_1u_0$ e portanto $u = u_1$ e $u_1u_0 = 0$ que implica em $uu_0 = 0$ para qualquer $u_0 \in U_e$. □

1.5 Nilpotência em álgebras de Bernstein

Dizemos uma álgebra não associativa A é *nilpotente* se existe um inteiro positivo k tal que o produto de quaisquer k elementos de A, com qualquer arranjo de parênteses, é nulo. O menor inteiro k que possui essa propriedade é chamado índice de nilpotência de A. Já que as álgebras de Bernstein possuem idempotentes de peso 1 então, é claro que não são nilpotentes. No entanto, segue da identidade que caracteriza as álgebras de Bernstein que $(x^2)^2 = 0$ para todo $x \in N$, por isso o que se pode fazer é examinar a nilpotência do núcleo dessas álgebras.

Apesar de N satisfazer essa identidade, nem toda algebra de Bernstein tem núcleo nilpotente, conforme pode ser visto em [9]. Alguns resultados, citados a seguir, nos quais a nilpotência de N é garantida, podem ser encontrados também em [9] e em [10].

Teorema 1.2. (Teorema de Grishkov) *Toda álgebra de Bernstein nuclear, isto é, tal que $A^2 = A$ de dimensão finita tem núcleo nilpotente.*

Proposição 1.9. *Existe um idempotente e de uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ tal que a seqüência de P-monômios $U_e \supseteq U_eV_e \supseteq (U_eV_e)V_e \supseteq ... \supseteq U_eV_e^{(k)} \supseteq U_eV_e^{(k+1)}...$*

estaciona em 0 *se e somente se, o núcleo de* A *é nilpotente.*

Teorema 1.3. *Toda álgebra de Bernstein-Jordan de dimensão finita tem núcleo nilpotente.*

1.6 Algumas subclasses das álgebras de Bernstein

Nesta seção apresentamos as definições e alguns conceitos que envolvem algumas subclasses das álgebras de Bernstein, que serão utilizadas no decorrer do trabalho.

Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ então $(A^2, \omega|_{A^2})$ também é uma álgebra de Bernstein e a decomposição de Peirce desta também associada ao idempotente e é dada por $A^2 = Fe \oplus U_e \oplus U_e^2$. Uma álgebra de Bernstein A é dita *nuclear* se $A^2 = A$, o que equivale a dizer que $U_e^2 = V_e$. É denominada *normal* se $U_eV_e + V_e^2 = 0$ e é dita *excepcional* se $U_e^2 = 0$, para todo idempotente e.

1.6.1 Álgebras de Bernstein n-excepcionais

Esta subseção trata do grau de excepcionalidade de uma álgebra de Bernstein. Tal conceito foi formalizado a fim de fazer uma divisão das álgebras de Bernstein em subclasses disjuntas e pode ser visto com maior riqueza de detalhes em [3].

Sejam $X_1, X_2 \subset A$ subespaços, define-se recursivamente o subespaço $X_1X_2^{(n)}$, como sendo: $X_1X_2^{(0)} = X_1$, $X_1X_2^{(1)} = X_1X_2$ e $X_1X_2^{(n)} = (X_1X_2^{(n-1)})X_2$ se $n \geq 2$.

Definição 1.1. *Diz-se que uma álgebra de Bernstein é n-excepcional se $n \geq 0$ é o menor inteiro para o qual se tem $U_e(U_eV_e^{(n)}) = 0$, para todo idempotente não nulo e de A. O inteiro n será chamado de grau de excepcionalidade de A.*

Este conceito generaliza o de álgebras de Bernstein excepcionais que são aquelas em que se tem $U_e^2 = 0$ para todo idempotente não nulo e. Os resultados a seguir e suas respectivas demonstrações podem ser encontrados em [3].

Teorema 1.4. *Toda álgebra de Bernstein de tipo* $(1+r, s)$ *é* n*-excepcional para algum inteiro* n*, com* $0 \leq n \leq s+1$.

Neste trabalho utilizaremos especialmente os conceitos de álgebras excepcionais , 1-excepcionais e 2-excepcionais. Lembrando que, se para todo idempotente $e \in A$ tem-se $U_e^2 \neq 0$ e $U_e(U_eV_e) = 0$ a álgebra de Bernstein A é dita 1-excepcional e quando $U_e(U_eV_e) \neq 0$ e $U_e((U_eV_e)V_e) = 0$ é dita A é 2-excepcional.

Lema 1.1. *Se em uma álgebra de Bernstein* $A = Fe \oplus U \oplus V$ *existem elementos* $u_1, u_2 \in U$ *e* $v \in V$ *tais que* $u_1(u_2v) \neq 0$ *então os conjuntos* $\{u_1, u_2, u_1v, u_2v\}$ *e* $\{v, u_1(u_2v)\}$ *são linearmente independentes.* $\square$

Corolário 1.6. *Se* $A = Fe \oplus U \oplus V$ *é uma álgebra de Bernstein com* $U(UV) \neq 0$ *então* $\dim U \geq 4$ *e* $\dim V \geq 2$. $\square$

Proposição 1.10. *Se* $A = Fe \oplus U \oplus V$ *é uma álgebra de Bernstein* 2*-excepcional de tipo* $(1+r, s)$*, então* $2 \leq \dim(UV + V^2) \leq r - 2$. $\square$

1.7 Álgebras associativas de dimensão finita

Nesta seção estudaremos alguns resultados básicos da teoria das álgebras associativas que serão usados no desenvolvimento do trabalho. O teorema a seguir trata da existência de idempotentes para essas álgebras e sua demonstração pode ser encontrada em [1].

Teorema 1.5. *Toda álgebra de dimensão finita não nilpotente possui um elemento idempotente.*

Além disso, qualquer álgebra associativa A admite para todo idempotente $e \in A$ uma decomposição em soma direta de subespaços $A = A_{11} \oplus A_{10} \oplus A_{01} \oplus A_{00}$. Tal decomposição chamada *decomposição de Peirce da álgebra associativa A relativa ao idempotente* e pode ser feita como segue.

Considerando A uma álgebra associativa e e um elemento idempotente de A, temos que a aplicação

$$\begin{aligned} L_e : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto ea \end{aligned}$$

é uma projeção. Assim, $A = \mathrm{ImL_e} \oplus \ker \mathrm{L_e}$ com

$$ImL_e = \{a \in A; ea = a\} = A_1$$

$$\ker L_e = \{a \in A; ea = 0\} = A_0$$

Agora, tomando

$$\begin{aligned} R'_e : A_1 &\longrightarrow A_1 \\ a &\longmapsto ae \end{aligned}$$

que também é projeção, temos que $A_1 = \mathrm{ImR'_e} \oplus \ker \mathrm{R'_e}$ com

$$ImR'_e = \{a \in A_1; ae = a\} = \{a \in A; ea = a \quad \text{e} \quad ae = a\} := \mathrm{A_{11}}$$

$$\ker R'_e = \{a \in A_1; ae = 0\} = \{a \in A; ea = a \quad \text{e} \quad ae = 0\} := \mathrm{A_{10}}$$

e

$$\begin{aligned} R''_e : A_0 &\longrightarrow A_0 \\ a &\longmapsto ae \end{aligned}$$

que claramente também é projeção, e assim $A_0 = \mathrm{ImR''_e} \oplus \ker \mathrm{R''_e}$ com

$$ImR''_e = \{a \in A_0; ae = a\} = \{a \in A; ea = 0 \quad \text{e} \quad ae = a\} := \mathrm{A}_{01}$$

$$\ker R''_e = \{a \in A_0; ae = 0\} = \{a \in A; ea = 0 \quad \text{e} \quad ae = 0\} := \mathrm{A}_{00}$$

Portanto, $A = A_{11} \oplus A_{10} \oplus A_{01} \oplus A_{00}$, em que

$$A_{ij} = \{x_{ij} \in A; ex_{ij} = ix_{ij}, x_{ij}e = jx_{ij}\}$$

para $i, j = 0, 1$.

Capítulo 2

Álgebra de Multiplicações

Neste capítulo definiremos o que é uma álgebra de multiplicações e veremos que dada uma álgebra qualquer sempre podemos construir a partir desta, a sua álgebra de multiplicações. Inicialmente, apresentaremos um conceito muito interessante, o de álgebra livre.

2.1 Álgebra Livre

Seja A uma álgebra gerada sobre F, por um conjunto de geradores $(x_i)_{i \in I}$, em que I é um conjunto qualquer de índices. Seja $\sigma = (i_1, ..., i_h)$ uma seqüência finita de elementos de I e consideremos $y_\sigma = x_{i_1}, ..., x_{i_h}$, onde h é chamado o comprimento de σ. Dentre todas as "seqüências finitas" também admitimos a seqüência vazia σ_0 e consideramos $y_{\sigma_0} = 1$. Definimos a composição de duas seqüências finitas $\sigma = (i_1, ..., i_h)$ e $\sigma' = (j_1, ..., j_k)$ por

$$\sigma\sigma' = (i_1, ..., i_h, j_1, ..., j_k).$$

Para a seqüência vazia definimos $\sigma_0\sigma = \sigma\sigma_0 = \sigma$, ou seja, σ_0 é a unidade desta composição. Evidentemente essa composição é associativa, pois $(\sigma\sigma')\sigma'' = \sigma(\sigma'\sigma'')$ e assim, $y_{\sigma\sigma'} = y_\sigma y_{\sigma'}$.

Em [4] são mostrados os seguintes resultados.

Lema 2.1. *A é fechado com relação à multiplicação.*

Teorema 2.1. *Todo elemento de A é uma combinação linear dos y_σ's, com σ percorrendo todas as seqüências finitas de elementos de I.*

Segue do Teorema 2.1 que os elementos de A são somas finitas da forma $z = \sum_\sigma y_\sigma$.

Definição 2.1. *Se os y_σ's são linearmente independente sobre F então A é chamado de álgebra livre e o conjunto $(x_i)_{i\in I}$ é chamado sistema livre de geradores de A.*

2.2 A álgebra de Multiplicações

Consideremos uma álgebra arbitrária A sobre um corpo F e denotemos por $End(A)$ a álgebra dos operadores lineares de A. Definimos os operadores

$$\begin{aligned} R_x : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto ax \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} L_x : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto xa \end{aligned}$$

chamados, respectivamente, multiplicação à direita e multiplicação à esquerda. Verifica-se facilmente que esses operadores são lineares e portanto pertencem a $End(A)$.

Definição 2.2. *A subálgebra de $End(A)$ gerada por $\{L_x, R_x; x \in A\}$ é denominada álgebra de multiplicações da álgebra A e será denotada por $M(A)$.*

Considerando um conjunto $X = \{X_1, X_2, ..., X_n, ...\}$ e $F[X]$ a álgebra associativa livre gerada por X sobre o corpo F e denotando por $XF[X]$ o ideal de $F[X]$ gerado por X, temos

$$M(A) = \{p(S_{x1}, S_{x2}, ..., S_{xk}); p \in XF[X], S_{xi} = L_{xi} \text{ ou } S_{xi} = R_{xi}, i = 1, 2, ..., k\}$$

O estudo dessa álgebra pode revelar muitas propriedades e características da álgebra A. Por isso, diversos autores tem realizado estudos a respeito da álgebra de multiplicações de álgebras não associativas e alguns resultados podem ser encontrados em [2], [8], [11] e [17].

2.2.1 Notações

Dada uma álgebra arbitrária A sobre um corpo F e um subconjunto $S \subseteq A$, denotamos por $\langle S \rangle$ e por $\hat{S}$, o subespaço e o ideal de A gerado por S, respectivamente. Além disso, para cada subálgebra B de A vamos denotar por B^* a subálgebra de $M(A)$ gerada pelo conjunto $\{L_x, R_x; x \in B\}$. Sejam $\mathcal{I}$ um subconjunto de $M(A)$ e S um subconjunto de A. Representaremos por $\mathcal{I}(S)$ o subespaço de A gerado por $\{\tau(a); \tau \in \mathcal{I} \text{ e } a \in S\}$.

2.2.2 Propriedades gerais da álgebra de multiplicações

Inicialmente veremos como se relacionam os ideais de uma álgebra A e os ideais de sua álgebra de multiplicações $M(A)$.

Para todo ideal I de A, o conjunto $(I : A) = \{\tau \in M(A); \tau(A) \subseteq I\}$ é um ideal de $M(A)$. De fato, o operador nulo pertence a $(I : A)$, pois aplicado a A terá sempre zero como imagem e $0 \in I$, já que I é um ideal de A. Além disso, dados $\tau_1, \tau_2 \in (I : A)$ e um escalar $\alpha \in F$ temos que $(\alpha\tau_1 + \tau_2)(a) = \alpha\tau_1(a) + \tau_2(a) \in I$, para todo $a \in A$, logo $\alpha\tau_1 + \tau_2 \in (I : A)$. Também para $\tau \in (I : A)$ e $\sigma \in M(A)$ temos que $\sigma(\tau(a)) \in I$, para todo $a \in A$, pois $\tau \in (I : A)$ implica em $\tau(a) \in I$ e como I é ideal de A segue que $\sigma(\tau(A)) \subseteq I$, para todo $\sigma \in M(A)$. Por outro lado, $\tau(\sigma(a)) \in I$ já que $\sigma(A) \in A$ para todo $a \in A$ e por hipótese $\tau(A) \subseteq I$.

Reciprocamente, para cada ideal $\mathcal{I} \subseteq M(A)$, o subespaço $\mathcal{I}(S)$ gerado pelo conjunto $\{\tau(a) \in \mathcal{I}; \tau \in \mathcal{I} \text{ e } a \in S\}$ é um ideal de A. Com efeito, como por definição $\mathcal{I}(S)$ é um subespaço de A, resta-nos mostrar que $\mathcal{I}(S)$ absorve produto por elemento de A. O que de fato ocorre, pois dados $\tau(a) \in \mathcal{I}(S)$ e $a_1 \in A$, então já que $\mathcal{I}$ é ideal de $M(A)$ temos

$$\tau(a).a_1 = R_{a_1}(\tau(a)) = R_{a_1} \circ \tau(a) \in \mathcal{I}(S)$$

e

$$a_1.\tau(a) = L_{a_1}(\tau(a)) = L_{a_1} \circ \tau(a) \in \mathcal{I}(S)$$

Proposição 2.1. *Sejam A e B duas álgebras sobre o mesmo corpo F e $\varphi : A \longrightarrow B$ um epimorfismo. Então φ induz um epimorfismo $\varphi' : M(A) \longrightarrow M(B)$, que para todo $a \in A$ satisfaz $\varphi'(L_a) = L_{\varphi a}$ e $\varphi'(R_a) = R_{\varphi a}$.*

Demonstração:

Seja $\varphi' : M(A) \longrightarrow M(B)$ definida por $\varphi'(p\,(S_{x_1}, S_{x_2}, ..., S_{x_k})) = p\,(S_{\varphi(x_1)}, S_{\varphi(x_2)}, ..., S_{\varphi(x_k)})$ para todo $p \in XF[X]$, com $x_i \in A$. Vamos mostrar que a função φ' está bem definida, para isso, basta mostrar que se tomarmos $\sigma = p\,(S_{x_1}, S_{x_2}, ..., S_{x_k}) \in M(A)$ representando o operador nulo, teremos que o operador $p\,(S_{\varphi(x_1)}, S_{\varphi(x_2)}, ..., S_{\varphi(x_k)})$ é nulo. De fato, já que φ é sobrejetora então para qualquer $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) = b$. Assim, $p\,(S_{\varphi(x_1)}, S_{\varphi(x_2)}, ..., S_{\varphi(x_k)})(b) = p\,(S_{\varphi(x_1)}, S_{\varphi(x_2)}, ..., S_{\varphi(x_k)})(\varphi(a)) = \varphi(p\,(S_{x_1}, S_{x_2}, ..., S_{x_k})(a)) = 0$, pois φ é homomorfismo. Pelo fato de $M(A)$ e $M(B)$ serem associativas e seus elementos serem operadores lineares facilmente se verifica que φ' é homomorfismo. Além disso, se tomarmos $\tau = p\,(S_{b_1}, S_{b_2}, ..., S_{b_s}) \in M(B)$ como $b_1, b_2, ..., b_s \in B$ então, já que φ é epimorfismo, existem $a_1, a_2, ..., a_s \in A$ tais que $b_i = \varphi(a_i)$. Dessa forma teremos que $p\,(S_{b_1}, S_{b_2}, ..., S_{b_s}) = p\,(S_{\varphi(a_1)}, S_{\varphi(a_2)}, ..., S_{\varphi(a_s)}) = \varphi'\big(p\,(S_{a_1}, S_{a_2}, ..., S_{a_s})\big)$ e certamente tem-se $p\,(S_{a_1}, S_{a_2}, ..., S_{a_s}) \in M(A)$. Portanto, φ' é epimorfismo. $\square$

Proposição 2.2. *Qualquer que seja o ideal $I \subseteq A$, tem-se que $M(A/I) \cong M(A)/(I : A)$.*

Demonstração:

Consideremos a projeção canônica

$$\pi : A \longrightarrow A/I$$
$$a \longmapsto \bar{a} = a + I.$$

Segue da proposição anterior que existe um epimorfismo $\Pi : M(A) \longrightarrow M(A/I)$ tal que $\Pi\big(p\,(S_{a_1}, S_{a_2}, ..., S_{a_k})\big) = p\,(S_{\pi(a_1)}, S_{\pi(a_2)}, ..., S_{\pi(a_k)}) = p\,(S_{a_1+I}, S_{a_2+I}, ..., S_{a_s+I})$. Além disso, $\sigma \in \ker(\Pi)$ se, e somente se, $Im\sigma \subseteq I$. Com efeito, podemos descrever o operador nulo de $M(A/I)$ como sendo o conjunto $X = \{p\,(S_{a_1+I}, S_{a_2+I}, ..., S_{a_s+I})$; com pelo menos um dos $a_i \in I\}$. Assim, já que I é ideal temos que $\ker(\Pi) = \{\sigma \in M(A); \sigma(A) \subseteq I\}$, isto é, $\ker(\Pi) = (A : I)$. Logo pelo teorema do homomorfismo temos que $M(A)/\ker(\Pi) \cong M(A/I)$ e portanto $M(A)/(A : I) \cong M(A/I)$. □

No caso particular em que $A = F$ (a álgebra é o próprio corpo), as aplicações

$$g : F \longrightarrow \mathrm{End(F)} \qquad h : \mathrm{End(F)} \longrightarrow \mathrm{F}$$
$$\alpha \longmapsto L_\alpha \qquad f \longmapsto f(1)$$

$$\varphi : M(F) \longrightarrow \mathrm{End(F)} \qquad \psi : \mathrm{End(F)} \longrightarrow \mathrm{M(F)}$$
$$L_\alpha \longmapsto L_\alpha \qquad f \longmapsto L_{f(1)}$$

são tais que para todo $\alpha \in F$ e $f \in \mathrm{End(F)}$ temos

$$\begin{aligned} h \circ g(\alpha) &= h(L_\alpha) = L_\alpha(1) = \alpha \\ g \circ h(f) &= g(f(1)) = L_{f(1)} = f \\ \psi \circ \varphi(L_\alpha) &= \psi(L_\alpha) = L_{L_\alpha(1)} = L_\alpha \\ \varphi \circ \psi(f) &= \varphi(L_{f(1)}) = L_{f(1)} = f \end{aligned}$$

Logo, $F \cong \mathrm{End}(F) \cong M(F)$.

Podemos utilizar a observação anterior para mostrar o seguinte resultado.

Proposição 2.3. *Seja (A, ω) uma álgebra bárica sobre o corpo F então existe (pelo menos) um homomorfismo não nulo de $M(A)$ em F.*

Demonstração:

Como $\omega : A \longrightarrow F$ é um homomorfismo sobrejetor, segue da Proposição 1.1 a existência de um epimorfismo $\widehat{\omega} : M(A) \longrightarrow M(F)$ tal que $\widehat{\omega}(L_x) = L_{\omega(x)}$ e $\widehat{\omega}(R_x) = R_{\omega(x)}$ para todo $x \in A$. Dessa forma, usando o fato de que $M(F) \cong F$ obtemos a função $\widetilde{\omega} : M(A) \longrightarrow F$ tal que $\widetilde{\omega}(L_x) = \widetilde{\omega}(R_x) = \omega(x)$ que está bem definida e é um epimorfismo. $\square$

Essa proposição garante que se $M(A)$ é a álgebra de multiplicações de uma álgebra bárica (A, ω), então $(M(A), \widetilde{\omega})$ é também bárica. A aplicação $\widetilde{\omega}$ é a chamada função peso de $M(A)$ induzida por ω.

A seguir vamos estudar algumas relações entre $\ker \omega$ e $\ker \widetilde{\omega}$ nos casos em que A é uma álgebra comutativa.

Seja (A, ω) uma álgebra bárica comutativa com idempotente e de peso 1 e com decomposição $A = Fe \oplus N$ onde $N = \ker \omega$. Cada $x \in A$ pode ser escrito de modo único como $x = \omega(x)e + n$ com $n \in N$. Assim, para todo $a \in A$,

$$\begin{aligned} L_x(a) = xa &= (\omega(x)e + n)(a) \\ &= \omega(x)ea + na \\ &= \omega(x)L_e(a) + L_n(a) \end{aligned}$$

e portanto $L_x = \omega(x)L_e + L_n$.

Tomando $\sigma \in M(A)$ então $\sigma = \sum L_{y_1}L_{y_2}...L_{y_k}$ com $y_i \in A$. Como cada $y_i \in A$ pode ser escrito na forma $y_i = \omega(y_i)e + n_i$ onde $\omega(y_i) \in F$ e $n_i \in N$. Logo,

$$L_{y_1}L_{y_2}...L_{y_k} = \omega(y_1)\omega(y_2)...\omega(y_k){L_e}^k + \theta$$

em que $\theta = \sum L_{x_1}L_{x_2}...L_{x_k}$ com algum $x_i \in N$.

Denotaremos por $\widetilde{N}$ o ideal de $M(A)$ gerado por $\{L_x; x \in N\}$. Assim, $\theta \in \widetilde{N}$.

Portanto, $\sigma \in M(A)$ pode ser escrito como

$$\sigma = \beta_1 {L_e}^{k_1} + \beta_2 {L_e}^{k_2} + ... + \beta_p {L_e}^{k_p} + \theta \tag{2.1}$$

com $\beta_i \in F$ e θ como supracitado. Portanto,

$$M(A) = \langle L_e, {L_e}^2, ..., {L_e}^k, ... \rangle + \widetilde{N} \tag{2.2}$$

Como N é um ideal de A, para todo $\theta \in \widetilde{N}$, $\theta(A) \subseteq N$, logo, $\theta \in (N : A) = \{\tau \in M(A); \tau(A) \subseteq N\} = \{\tau \in M(A); \omega \circ \tau = 0\}$, que é um ideal de $M(A)$. Considerando o fato de que $\omega(e) = 1$ temos para $k \geq 1$, $\omega \circ ({L_e}^k - L_e) = 0$, assim, ${L_e}^k - L_e \in (N : A)$ e então ${L_e}^k - L_e = \sigma_k$ para algum $\sigma_k \in (N : A)$ e dessa forma podemos fazer em (2.1) ${L_e}^k - L_e = \sigma_k$ e obtendo

$$\sigma = (\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_p) L_e + \sum_{k=1}^{p} \beta_k \sigma_k + \theta \tag{2.3}$$

o que equivale a dizer que

$$M(A) = F L_e + \langle {L_e}^2 - L_e, {L_e}^3 - L_e, ..., {L_e}^k - L_e, ... \rangle + \widetilde{N} \tag{2.4}$$

e já que $L_e \notin (N : A)$ e $\langle {L_e}^2 - L_e, {L_e}^3 - L_e, ..., {L_e}^k - L_e, ... \rangle + \widetilde{N} \subset (N : A)$

$$(N : A) = \langle {L_e}^2 - L_e, {L_e}^3 - L_e, ..., {L_e}^k - L_e, ... \rangle + \widetilde{N} \tag{2.5}$$

e conseqüentemente $(N : A)$ é um ideal de $M(A)$ de codimensão menor ou igual a 1 que não contém $M(A)^2$, pois ${L_e}^2 = L_e(e) = e \notin N$. Logo, pela Proposição 2.3 existe um caracter $\widetilde{\omega} : M(A) \longrightarrow F$ dado por

$$\widetilde{\omega}(L_x) = \widetilde{\omega}(\omega(x) L_e + L_n) = \omega(x).\widetilde{\omega}(L_e) = \omega(x)$$

Portanto, $\ker(\widetilde{\omega}) = (N : A)$.

2.3 A álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein

Neste trabalho iremos nos concentrar no estudo da álgebra de multiplicações de uma classe especial das álgebras báricas comutativas, a saber, as álgebras de Bernstein, definidas no capítulo 1. Existem vários trabalhos publicados a respeito e alguns resultados podem ser encontrados em [7] e [6]. Nesta seção estaremos interessados em determinar elementos idempotentes e fazer a decomposição de Peirce de $M(A)$.

O lema a seguir, decorrente da linearização da identidade que caracteriza uma álgebra de Bernstein, nos fornece uma relação de dependência linear das potências de L_e, que nos será muito útil na obtenção de resultados posteriores.

Lema 2.2. *Se A é uma álgebra de Bernstein então para todo idempotente $e \in A$ tem-se que* $2{L_e}^3 - 3{L_e}^2 + L_e = 0$.

Demonstração:

Linearizando uma vez a identidade (1.1) obtemos $2(xy)x^2 - \omega(xy)x^2 - \omega(x)^2(xy) = 0$. Assim, para $x = e$ temos $2e(ey) - \omega(ey)e - \omega(e)^2(ey) = 0$, ou seja,

$$2e(ey) - \omega(y)e - ey = 0 \tag{2.6}$$

Agora, fazendo $y = ey$ em (2.6) obtemos

$$2e(e(ey)) - \omega(ey)e - e(ey) = 0 \tag{2.7}$$

Subtraindo (2.6) de (2.7) resulta que

$$2e(e(ey)) - 3e(ey) + ey = 0 \tag{2.8}$$

para todo $y \in A$. □

Vimos na seção anterior que $\widetilde{\omega}(L_x) = \omega(x)$ para todo $x \in A$ e o homomorfismo $\widetilde{\omega}$ é extensão de ω para $M(A)$. Salvo menção em contrário, estaremos considerando, no decorrer deste trabalho, a álgebra bárica $(M(A), \widetilde{\omega})$ em que A é Bernstein e $\widetilde{\omega}$ é a função peso induzida por ω.

Consideremos os operadores lineares $2{L_e}^2 - L_e$ e $4L_e - 4{L_e}^2$ em $M(A)$ e seja $x = \alpha e + u + v$ um elemento arbitrário $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$. Temos que

$$
\begin{aligned}
(2{L_e}^2 - L_e)(x) &= (2{L_e}^2 - L_e)(\alpha e + u + v) \\
&= 2L_e\big(L_e(\alpha e + u + v)\big) - L_e(\alpha e + u + v) \\
&= 2L_e\Big(\alpha e + \frac{1}{2}u\Big) - \Big(\alpha e + \frac{1}{2}u\Big) \\
&= 2\alpha e + \frac{1}{2}u - \alpha e - \frac{1}{2}u \\
&= \alpha e
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(4L_e - 4{L_e}^2)(x) &= (4L_e - 4{L_e}^2)(\alpha e + u + v) \\
&= 4L_e(\alpha e + u + v)\big) - 4{L_e}^2(\alpha e + u + v) \\
&= 4\Big(\alpha e + \frac{1}{2}u\Big) - 4L_e\Big(\alpha e + \frac{1}{2}u\Big) \\
&= 4\alpha e + 2u - 4\alpha e - u \\
&= u
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\omega}(2{L_e}^2 - L_e) &= 2\widetilde{\omega}(L_e)^2 - \widetilde{\omega}(L_e) \\
&= 2\omega(e)\omega(e) - \omega(e) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Logo, os operadores $2{L_e}^2 - L_e$, de peso 1, $4L_e - 4{L_e}^2 \in (N : A)$ são projeções sobre os subespaços Fe e U_e respectivamente e portanto são idempotentes da álgebra $M(A)$.

Assim, pelo fato de serem projeções sobre espaços de intersecção nula, teremos que $(4L_e - 4{L_e}^2)(2{L_e}^2 - L_e) = 0$. Além disso, $L_e = (2{L_e}^2 - L_e) + \dfrac{1}{2}(4L_e - 4{L_e}^2)$.

Dessa forma, podemos escrever

$$M(A) = F(2{L_e}^2 - L_e) + (N : A)$$

e como $(2{L_e}^2 - L_e)(e) = e$ então $(2{L_e}^2 - L_e) \notin (N : A)$. Assim,

$$M(A) = F(2{L_e}^2 - L_e) \oplus (N : A) = F(2{L_e}^2 - L_e) \oplus \Big((4L_e - 4{L_e}^2) + \widetilde{N}\Big)$$

2.4 Decomposição de Peirce

Na seção anterior encontramos dois idempotentes para a álgebra $M(A)$, a saber, $2{L_e}^2 - L_e$ e $4L_e - 4{L_e}^2$. Neste momento, estamos interessados em fazer a decomposição de Peirce de $M(A)$ e para isso iremos usar esses idempotentes, bem como algumas propriedades da decomposição de subálgebras de operadores lineares obtidas por projeções, que nos serão fornecidas no lema a seguir.

Lema 2.3. *Dados um espaço vetorial W e uma subálgebra S de $End(W)$, temos*

(i) *Se $\theta \in End(W)$ é um idempotente tal que $S\theta \subset S$ então a aplicação $\Phi_1 : S \longrightarrow S$ dada por $\Phi_1(\sigma) = \sigma\theta$ é uma projeção e*

$$Im\Phi_1 = \{\sigma \in S; \sigma\theta = \sigma\} = \{\sigma \in S; \sigma(\ker\theta) = 0\}$$

$$\ker\Phi_1 = \{\sigma \in S; \sigma\theta = 0\} = \{\sigma \in S; \sigma(Im\theta) = 0\}$$

Além disso, $Im\Phi_1$ e $\ker\Phi_1$ são ideais à esquerda de S.

(ii) *Se $\theta \in End(W)$ é um idempotente tal que $\theta S \subset S$ então a aplicação $\Phi_2 : S \longrightarrow S$ dada por $\Phi_2(\sigma) = \theta\sigma$ é uma projeção e*

$$Im\Phi_2 = \{\sigma \in S; \theta\sigma = \sigma\} = \{\sigma \in S; \sigma(W) \subseteq Im\theta\}$$

$$\ker \Phi_2 = \{\sigma \in S; \theta\sigma = 0\} = \{\sigma \in S; \sigma(W) \subseteq \ker \theta\}$$

Além disso, $Im\Phi_2$ *e* $\ker \Phi_2$ *são ideais à direita de* S*.*

Demonstração:

Se $\theta \in End(W)$ é um idempotente então $W = \ker \theta \oplus Im\theta$ e como $\mathrm{End}(W)$ é uma álgebra associativa Φ_1 e Φ_2 são projeções, pois dados $x \in \ker \theta$ e $y \in Im\theta$ temos que $\sigma\theta(x+y) = \sigma(\theta(x+y)) = \sigma(y)$. Assim, $\big(\Phi_1(\sigma)\big)(x+y) = \sigma(y)$. Então,

$$\begin{aligned}
\big({\Phi_1}^2(\sigma)\big)(x+y) &= \Big(\Phi_1\big(\Phi_1(\sigma)\big)\Big)(x+y) \\
&= \Phi_1\Big(\big(\Phi_1(\sigma)\big)(x+y)\Big) \\
&= \Phi_1(\sigma(y)) \\
&= \big(\Phi_1(\sigma)\big)(y) \\
&= (\sigma\theta)(y) \\
&= \sigma(\theta(y)) \\
&= (\sigma\theta)(x+y) \\
&= \big(\Phi_1(\sigma)\big)(x+y)
\end{aligned}$$

Portanto, ${\Phi_1}^2 = \Phi_1$.

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\big({\Phi_2}^2(\sigma)\big)(x+y) &= \Phi_2\Big(\big(\Phi_1(\sigma)\big)\Big)(x+y) \\
&= \big(\Phi_2(\sigma\theta)\big)(x+y) \\
&= \theta(\theta\sigma)(x+y) \\
&= (\theta^2\sigma)(x+y) \\
&= (\theta\sigma)(x+y) \\
&= \big(\Phi_2(\sigma)\big)(x+y)
\end{aligned}$$

Logo, ${\Phi_2}^2 = \Phi_2$.

Já que Φ_1 é projeção, temos que $\sigma \in Im\Phi_1$, se e só se, $\Phi_1(\sigma) = \sigma$, isto é, $\sigma\theta = \sigma$. Segue então que $x \in \ker\theta$ e $y \in Im\theta$. Portanto,

$$\mathrm{Im}\Phi_1 = \{\sigma \in S; \sigma\theta = \sigma\} = \{\sigma \in S; \sigma(\ker\theta) = 0\}.$$

Agora, tomando $\sigma \in \ker\Phi_1$ teremos $\Phi_1(\sigma) = 0$ e portanto, $\sigma\theta = 0$. Decorre disso, que $\sigma(y) = 0$ para todo $y \in Im\theta$. Assim, $\sigma(Im\theta) = 0$. Por outro lado, tomando $\sigma \in \{\sigma \in S; \sigma(Im\theta) = 0\}$ e $\theta(w) \in \mathrm{Im}\theta$, já que $\theta \in \mathrm{End}(W)$ é idempotente, então para todo $w \in W$ temos que $\sigma\theta(w) = \sigma(\theta(w)) = 0$, isto é, $\sigma\theta = 0$. Segue então que

$$\ker\Phi_1 = \{\sigma \in S; \sigma\theta = 0\} = \{\sigma \in S; \sigma(Im\theta) = 0\}$$

Sejam $\sigma \in Im\Phi_1$, $\tau \in \ker\Phi_1$ e $\alpha, \beta \in S$ então $\alpha\sigma(\ker\theta) = \alpha\big(\sigma(\ker\theta)\big) = \alpha(0) = 0$ e portanto $\alpha\sigma \in Im\Phi_1$. Também temos que $\beta\tau(Im\theta) = \beta\big(\tau(Im\theta)\big) = \beta(0) = 0$ e portanto $\beta\tau \in Im\Phi_1$. Logo, $Im\Phi_1$ e $\ker\Phi_1$ são ideais à esquerda de S.

Como Φ_2 também é projeção, para $\sigma \in Im\Phi_2$ temos que $\Phi_2(\sigma) = \sigma$, o que implica em $\theta(\sigma(x+y)) = \sigma(x+y)$ e assim, $\sigma(x+y) \in Im\theta$ para todo $x + y \in W$. Portanto, $\sigma(W) \subseteq Im\theta$. Reciprocamente, se $\sigma \in \{\sigma \in S; \sigma(W) \subseteq Im\theta\}$ então existe $w_1 \in W$ tal que $\sigma(w) = \theta(w_1)$ que equivale a $\theta\sigma(w) = \theta(w_1) = \sigma(w)$ de onde conclui-se que $\sigma \in Im\Phi_2$. Destarte,

$$Im\Phi_2 = \{\sigma \in S; \theta\sigma = \sigma\} = \{\sigma \in S; \sigma(W) \subseteq Im\theta\}$$

Seja agora, $\sigma \in \ker\Phi_2$ teremos $\Phi_2(\sigma) = 0$ o que equivale a $\sigma\theta = 0$. De onde segue que, $\theta(\sigma(x+y)) = 0$ e assim, $\sigma(x+y) \in \ker\theta$ para todo $(x+y) \in W$. Logo, $\sigma(W) \subseteq \ker\theta$. Reciprocamente, para quaisquer $w \in W$ e $\{\sigma \in S; \sigma(W) \subseteq \ker\theta\}$ temos que $\sigma(w) \in \ker\theta$ e dessa forma, $\theta\sigma(w) = \theta(\sigma(w)) = 0$. Logo, $\theta\sigma = 0$. Portanto,

$$\ker\Phi_2 = \{\sigma \in S; \theta\sigma = 0\} = \{\sigma \in S; \sigma(W) \subseteq \ker\theta\}$$

Para verificar que $Im\Phi_2$ e $\ker\Phi_2$ são ideais à direita de S procede-se de maneira análoga ao que foi feito para $Im\Phi_1$ e $\ker\Phi_1$. $\square$

Aplicando o lema anterior podemos decompor o ideal $(N : A)$ e assim obteremos a primeira decomposição de Peirce de $M(A)$, que será apresentada na proposição a seguir.

Proposição 2.4. *Dada uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$, sua álgebra de multiplicações tem a seguinte decomposição*

$$M(A) = F(2{L_e}^2 - L_e) \oplus \widetilde{U}_e \oplus \widetilde{V}_e \tag{2.9}$$

em que

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_e &= \{\sigma \in (N : A); \sigma(2{L_e}^2 - L_e) = \sigma\} = \{\sigma \in (N : A); \sigma(N) = 0\} \\ \widetilde{V}_e &= \{\sigma \in (N : A); \sigma(2{L_e}^2 - L_e) = 0\} = \{\sigma \in (N : A); \sigma(e) = 0\} \end{aligned}$$

Além disso, são válidas as seguintes relações:

$$\widetilde{U}_e^2 = 0 \; ; \; \widetilde{U}_e\widetilde{V}_e = 0 \; ; \; \widetilde{V}_e\widetilde{U}_e \subseteq \widetilde{U}_e \; ; \; \widetilde{V}_e^2 \subseteq \widetilde{V}_e. \tag{2.10}$$

Em particular, $\widetilde{U}_e$ é ideal bilateral e $\widetilde{V}_e$ é ideal à esquerda de $M(A)$.

Demonstração:

Já que $2{L_e}^2 - L_e$ é um idempotente de $M(A)$ com $\ker(2{L_e}^2 - L_e) = N$ e como já vimos $Im(2{L_e}^2 - L_e) = Fe$, usando a primeira parte do Lema 2.3 na subálgebra $(N : A)$ e o fato de $(N : A)$ ser ideal de $M(A)$ temos que os subespaços $\widetilde{U}_e$ e $\widetilde{V}_e$ correspondem, respectivamente, à imagem e ao núcleo da função Φ_1. Dessa forma, $\widetilde{U}_e = \{\sigma \in (N : A); \sigma(2{L_e}^2 - L_e) = \sigma\}$ e já que $\sigma \in (N : A)$ implica em $\sigma(A) \subseteq N$ temos $\widetilde{U}_e = \{\sigma \in (N : A); \sigma(N) = 0\}$. Pela mesma razão, $\widetilde{V}_e = \{\sigma \in (N : A); \sigma(2{L_e}^2 - L_e) = 0\} = \{\sigma \in (N : A); \sigma(e) = 0\}$. Agora, dadas quaisquer $\sigma \in \widetilde{U}_e$ e $\tau \in (N : A)$ temos que $\sigma\tau(A) = \sigma(\tau(A)) = 0$, assim, $\widetilde{U}_e(N : A) = 0$ e como $\widetilde{U}_e$ e $\widetilde{V}_e$ são subconjuntos do ideal $(N : A)$ isto implica diretamente em $\widetilde{U}_e^2 = 0$ e $\widetilde{U}_e\widetilde{V}_e = 0$. Também segue do Lema 2.3, que $\widetilde{U}_e$ e $\widetilde{V}_e$ são ideais à esquerda de $(N : A)$ e portanto as inclusões $\widetilde{V}_e\widetilde{U}_e \subseteq \widetilde{U}_e$ e $\widetilde{V}_e^2 \subseteq \widetilde{V}_e$ são imediatas. Além disso, tomando quaisquer

$\sigma \in \widetilde{U}_e$ e $\tau = \alpha(2{L_e}^2 - L_e) + \widetilde{u} + \widetilde{v} \in M(A)$, com $\alpha \in F$, $\widetilde{u} \in \widetilde{U}_e$, e $\widetilde{v} \in \widetilde{V}_e$, temos que $\sigma\tau = \sigma(\alpha(2{L_e}^2 - L_e) + \widetilde{u} + \widetilde{v}) = \alpha\sigma(2{L_e}^2 - L_e) + \sigma(\widetilde{u}) + \sigma(\widetilde{v}) \in \widetilde{U}_e$, mostrando que $\widetilde{U}_e$ é ideal à direita de $M(A)$. De maneira análoga, vê-se que $\widetilde{U}_e$ e $\widetilde{V}_e$ são ideais à esquerda de $M(A)$. □

Observação 2.1. *A menos que necessário omitiremos o subíndice e em $\widetilde{U_e}$ e $\widetilde{V}_e$, escrevendo apenas $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$.*

Observação 2.2. *Como $M(A)$ é uma álgebra associativa também podemos fazer a sua decomposição de Peirce, conforme mostrado em nosso capítulo preliminar. Dessa maneira, temos que a decomposição de Peirce de $M(A)$ associada ao idempotente $2{L_e}^2 - L_e$ será*

$$M(A) = M(A)_{11} \oplus M(A)_{10} \oplus M(A)_{01} \oplus M(A)_{00}$$

Verifiquemos que os subespaços desta e da decomposição (2.9), são correspondentes. Com efeito, seja $\sigma \in F(2{L_e}^2 - L_e)$ então $\sigma = \alpha(2{L_e}^2 - L_e)$ com $\alpha \in F$. Assim, $\sigma(2{L_e}^2 - L_e) = \alpha(2{L_e}^2 - L_e)(2{L_e}^2 - L_e) = \alpha(2{L_e}^2 - L_e)$, ou seja, $\sigma(2{L_e}^2 - L_e) = \sigma$ implicando em $\sigma \in M(A)_{11}$ e portanto $F(2{L_e}^2 - L_e) \subseteq M(A)_{11}$. Por outro lado, tomando $\tau \in M(A)_{11} \subseteq M(A)$ temos que $\tau = \alpha(2{L_e}^2 - L_e) + \phi$ com $\phi \in (N : A)$ e $(2{L_e}^2 - L_e)\tau = \tau$. Logo, $(2{L_e}^2 - L_e)\big(\alpha(2{L_e}^2 - L_e) + \phi\big) = \alpha(2{L_e}^2 - L_e) + \phi$ de onde segue que $\phi = 0$ e $\tau = \alpha(2{L_e}^2 - L_e)$. Assim, $\tau \in F(2{L_e}^2 - L_e)$ e portanto $M(A)_{11} \subseteq F(2{L_e}^2 - L_e)$, então $M(A)_{11} = F(2{L_e}^2 - L_e)$. Do mesmo modo, facilmente se verifica que $M(A)_{01} = \widetilde{U}$, $M(A)_{00} = \widetilde{V}$. Temos também que $M(A)_{10} = 0$, pois dado $\sigma \in M(A)_{10}$ então $\sigma = \alpha(2{L_e}^2 - L_e) + \phi$ com $\phi \in (N : A)$, $(2{L_e}^2 - L_e)\sigma = \sigma$ e $\sigma(2{L_e}^2 - L_e) = 0$, implicando em $\sigma \in F(2{L_e}^2 - L_e) \cap (N : A) = 0$.

Observação 2.3. *O subespaço $\widetilde{U} = \{\sigma \in (N : A); \sigma(N) = 0\}$ não depende do idempotente $e \in A$ e por isso é dito invariante sobre mudança de idempotentes. Particularmente, tanto $\widetilde{U}$ quanto $\widetilde{V}$ têm dimensão invariante. Porém, veremos adiante que, apesar da invariância* *da* $\dim \widetilde{V}$*, este subespaço sofre alterações sob mudança de idempotentes.*

Proposição 2.5. *Dadas* $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ *uma álgebra de Bernstein e sua álgebra de multiplicações* $M(A) = F(2{L_e}^2 - L_e) \oplus \widetilde{U} \oplus \widetilde{V}$ *. Então* $\bigcap\limits_{e \in I_p(A)} \widetilde{V}_e = \{\sigma \in M(A); \sigma(A^2) = 0\}$

Demonstração:

Consideremos e e $f = e + u_0 + {u_0}^2$ com $u_0 \in U$ dois idempotentes de A. Assim, se $\sigma \in \bigcap\limits_{e \in I_p(A)} \widetilde{V}_e$, então $\sigma \in \widetilde{V}_e$ para todo idempotente $e \in A$, em particular, $\sigma \in \widetilde{V}_f$. Logo, $0 = \sigma(f) = \sigma(e + u_0 + {u_0}^2) = \sigma(u_0 + {u_0}^2)$, já que $\sigma(e) = 0$. Dessa forma, tomando o elemento $-u_0 \in U$ obtemos a identidade $\sigma(-u_0 + {u_0}^2) = 0$ que somada e subtraída da anterior resulta, respectivamente, em $\sigma({u_0}^2) = 0$ e $\sigma(u_0) = 0$. Portanto, $\sigma(A^2) = \sigma(Fe \oplus U_e + {U_e}^2) = 0$. Por outro lado, se $\sigma(A^2) = 0$ e temos $f = e + u_0 + {u_0}^2 \in A^2$ então $\sigma(e + u_0 + {u_0}^2) = 0$ qualquer que seja $u_0 \in U$ o que equivale a $\sigma \in \widetilde{V}_f$ para todo $f \in I_p(A)$. Logo, $\sigma \in \bigcap\limits_{e \in I_p(A)} \widetilde{V}_e$.$\square$

Corolário 2.1. *Se* A *é uma álgebra de Bernstein nuclear então* $\bigcap\limits_{e \in I_p(A)} \widetilde{V}_e = 0$.

Segue diretamente da definição de $\widetilde{U}$ que os operadores pertencentes a este subespaço têm posto menor ou igual a 1, visto que só dependem do valor que assumem no idempotente e. Além disso, a imagem destes operadores está contida em N, pelo simples fato de $\widetilde{U}$ ser subespaço de $(N : A)$. Temos ainda que os elementos de $M(A)$ têm imagem contida em $A^2 \subseteq A$. Como $(N : A) = \widetilde{U} \oplus \widetilde{V}$ e vimos que $\sigma(A^2) = 0$ se, e só se,$\sigma \in \widetilde{V}$ então, se $0 \neq \sigma \in \widetilde{U}$ temos $\sigma(A^2) \neq 0$ e $Im\sigma = \langle \sigma(e) \rangle \subseteq A^2 \cap N = U_e \oplus U_e^2$. Também veremos na próxima proposição que para cada $x \in U_e \oplus U_e^2$, o operador linear $\psi_x \in End(A)$ definido por $\psi_x(e) = x$ e $\psi_x(N) = 0$ é um elemento de $\widetilde{U}$.

Proposição 2.6. *Seja* $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ *uma álgebra de Bernstein. Então*

(a) *A aplicação* $\varphi : U_e \oplus U_e^2 \longrightarrow \widetilde{U}$ *definida por* $\varphi(x) = \psi_x$*, em que* $\psi_x(e) = x$ *e* $\psi_x(N) = 0$*, é um isomorfismo de espaços vetoriais.*

(b) *Se* $I \in U_e \oplus U_e^2$ *é um ideal de* A *então* $\varphi(I)$ *é um ideal de* $M(A)$ *e reciprocamente, se* $J \subseteq \widetilde{U}$ *é um ideal de* $M(A)$ *então* $\varphi^{-1}(J)$ *é um ideal de* A*.*

Demonstração:

(a) Dado $x \in U_e \oplus U_e^2$, para todo $a = \alpha e + n \in A$, com $\alpha \in F$, $n \in N$, temos $\psi_x(a) = \psi_x(\alpha e + n) = \alpha\psi_x(e) + \psi_x(n) = \alpha x \in N$ e considerando os seguintes operadores

$$\begin{aligned} \psi_u &= 2L_eL_u + 2L_uL_e - L_u \\ \psi_{ux} &= 2L_eL_{ux} + 2L_uL_x - L_xL_u \end{aligned}$$

temos que $\psi_u(e) = u$, $\psi_u(n) = 0$, $\psi_{ux}(e) = ux$ e $\psi_{ux}(n) = 0$. Logo, $\psi_x \in M(A)$ e como $\psi_x(A) \subset N$ temos que $\psi_x \in (N : A)$. Dessa forma, φ está bem definida. Ainda usando os operadores acima vê-se que φ é linear e sobrejetora. Além disso, φ é injetora, pois dado $x \in U_e \oplus U_e^2$ tal que $\varphi(x) = 0$, como por construção $\varphi(x) = \psi_x = 0$ então $\psi_x(e) = x = 0$. Portanto, φ é isomorfismo e conseqüentemente, $\widetilde{U} = \{\psi_x; x \in U \oplus U^2\}$.

(b) Suponhamos que $I \subseteq U_e \oplus U_e^2$ é um ideal de A e seja $x \in I$ então $\varphi(x) = \psi_x \in \widetilde{U}$ e $\psi_x(a) = \alpha x \in I$ que implica em $\psi_x \in (I : A)$. Logo, $\psi_x \in (I : A) \cap \widetilde{U}$ e como ambos são ideais de $M(A)$ concluímos que $\varphi(I)$ também é ideal de $M(A)$. Reciprocamente, supondo J um ideal de $M(A)$, com $J \subseteq \widetilde{U}$, segue do ítem (a) que φ é bijetora e portanto $\varphi^{-1}(J)$ é um subespaço vetorial de A. Além disso, dados $y \in A$ e $x \in \varphi^{-1}(J)$ temos que $\varphi(x) = \psi_x \in J$ e como $U \oplus U^2$ é ideal de A temos que $(L_y\psi_x)(e) = yx = xy = \psi_{xy}(e) \in J$ e portanto $xy \in \varphi^{-1}(J)$.□

Anteriormente, vimos que o operador $4L_e - 4L_e^2 \in (N : A)$ é projeção sobre o subespaço U_e, sendo assim, já que $4L_e - 4L_e^2 \in \widetilde{V}$, usamos este idempotente e obtemos a decomposição de Peirce da subálgebra $\widetilde{V}$ relativa a $4L_e - 4L_e^2$ que será dada por $\widetilde{V} = \widetilde{V}_{11} \oplus \widetilde{V}_{10} \oplus \widetilde{V}_{01} \oplus \widetilde{V}_{00}$

em que

$$\widetilde{V}_{ij} = \{\sigma_{ij} \in \widetilde{V}; \sigma_{ij}(4L_e - 4L_e^2) = j\sigma_{ij} \text{ e } (4L_e - 4L_e^2)\sigma_{ij} = i\sigma_{ij}\} \tag{2.11}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_{11} &= \{\sigma \in \widetilde{V}; \sigma(4L_e - 4L_e^2) = \sigma \text{ e } (4L_e - 4L_e^2)\sigma = \sigma\} \\
\widetilde{V}_{10} &= \{\sigma \in \widetilde{V}; \sigma(4L_e - 4L_e^2) = 0 \text{ e } (4L_e - 4L_e^2)\sigma = \sigma\} \\
\widetilde{V}_{01} &= \{\sigma \in \widetilde{V}; \sigma(4L_e - 4L_e^2) = \sigma \text{ e } (4L_e - 4L_e^2)\sigma = 0\} \\
\widetilde{V}_{00} &= \{\sigma \in \widetilde{V}; \sigma(4L_e - 4L_e^2) = 0 \text{ e } (4L_e - 4L_e^2)\sigma = 0\}
\end{aligned}$$

E já que $\sigma(e) = 0$ para todo $\sigma \in \widetilde{V}$, podemos identificar os elementos de $\widetilde{V}$ como sendo operadores de N. Assim, reconhecendo $\widetilde{V}$ como uma subálgebra de $End(N)$ e usando o idempotente $4L_e - 4L_e^2$, segue do Lema 2.3 que

$$\begin{aligned}
\sigma(4L_e - 4L_e^2) &= \sigma \Longleftrightarrow \sigma(\ker(4L_e - 4L_e^2)) = 0 \\
\sigma(4L_e - 4L_e^2) &= 0 \Longleftrightarrow \sigma(Im(4L_e - 4L_e^2)) = 0 \\
(4L_e - 4L_e^2)\sigma &= \sigma \Longleftrightarrow \sigma(N) \subset Im(4L_e - 4L_e^2) \\
(4L_e - 4L_e^2)\sigma &= 0 \Longleftrightarrow \sigma(N) \subset \ker(4L_e - 4L_e^2)
\end{aligned}$$

Além disso, como estamos trabalhando com $\widetilde{V}$ restrito a subálgebra de $End(N)$, temos que $\ker(4L_e - 4L_e^2) = V$ e $Im(4L_e - 4L_e^2) = U$. Logo, obtemos a seguinte proposição

Proposição 2.7. *Seja $\sigma \in \widetilde{V}$ então são válidas as seguintes relações*

$$\begin{aligned}
\sigma \in \widetilde{V}_{11} &\Longleftrightarrow \sigma(U) \subseteq U \ \text{ e } \ \sigma(V) = 0 \\
\sigma \in \widetilde{V}_{10} &\Longleftrightarrow \sigma(U) = 0 \ \text{ e } \ \sigma(V) \subseteq U \\
\sigma \in \widetilde{V}_{01} &\Longleftrightarrow \sigma(U) \subseteq V \ \text{ e } \ \sigma(V) = 0 \\
\sigma \in \widetilde{V}_{00} &\Longleftrightarrow \sigma(U) = 0 \ \text{ e } \ \sigma(V) \subseteq V
\end{aligned}$$

Observação 2.4. *Para todo $i, j, k, l \in \{0, 1\}$ valem as seguintes inclusões*

$$\widetilde{V}_{ij}\widetilde{V}_{kl} \subseteq \delta_{jk}\widetilde{V}_{il} \tag{2.12}$$

em que δ_{jk} é o delta de Kronecker.

Proposição 2.8. *Sejam $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein, $e, f = e + u_0 + {u_0}^2$ idempotentes de A e $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \widetilde{U}_e \oplus \widetilde{V}_e = F(2L_f^2 - L_f) \oplus \widetilde{U}_f \oplus \widetilde{V}_f$ as correspondentes decomposições de Peirce de $M(A)$. A função $\varphi : \widetilde{V}_e \longrightarrow \widetilde{V}_f$ dada por $\varphi(\theta) = \theta - \theta\psi_{u_0+{u_0}^2}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais e conseqüentemente tem-se $\widetilde{V}_f = \{\theta - \theta\psi_{u_0+{u_0}^2}; \theta \in \widetilde{V}_e\}$.*

Demonstração:

Dado qualquer elemento da forma $\theta - \theta\psi_{u_0+{u_0}^2}$ com $\theta \in \widetilde{V}_e$ e $\psi_{u_0+{u_0}^2} \in \widetilde{U}_e$ temos que $\theta - \theta\psi_{u_0+{u_0}^2} \in (N : A)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
(\theta - \theta\psi_{u_0+{u_0}^2})(f) &= \theta(f) - \theta\psi_{u_0+{u_0}^2}(f) \\
&= \theta(e + u_0 + {u_0}^2) - \theta\psi_{u_0+{u_0}^2}(e + u_0 + {u_0}^2) \\
&= \theta(e) + \theta(u_0 + {u_0}^2)) - \theta(u_0 + {u_0}^2) + \theta\big(\psi_{u_0+{u_0}^2}(e + u_0 + {u_0}^2)\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo, $\theta - \theta\psi_{u_0+{u_0}^2} \in \widetilde{V}_f$. Portanto, φ está bem definida. Temos que φ é linear, pois

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha\theta_1 + \theta_2) &= (\alpha\theta_1 + \theta_2) - (\alpha\theta_1 + \theta_2)\psi_{u_0+{u_0}^2} \\
&= \alpha\theta_1 - \alpha\theta_1\psi_{u_0+{u_0}^2} + \theta_2 - \theta_2\psi_{u_0+{u_0}^2} \\
&= \alpha(\theta_1 - \theta_1\psi_{u_0+{u_0}^2}) + (\theta_2 - \theta_2\psi_{u_0+{u_0}^2}) \\
&= \alpha\varphi(\theta_1) + \varphi(\theta_2)
\end{aligned}$$

Além disso, φ é injetora, já que $\varphi(\theta) = 0$ se, e somente se, $\theta = \theta\psi_{u_0+{u_0}^2}$ que equivale a $\theta \in \widetilde{V}_e \cap \widetilde{U}_e = \{0\}$. E já que $\widetilde{V}_f$ e $\widetilde{V}_e$ têm mesma dimensão, φ é sobrejetora. $\square$

Temos ainda que, $\varphi(\theta_1\theta_2) = \theta_1\theta_2 - \theta_1\theta_2\psi_{u_0+u_0{}^2} = (\theta_1 - \theta_1\psi_{u_0+u_0{}^2})(\theta_2 - \theta_2\psi_{u_0+u_0{}^2}) = \varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)$, quaisquer que sejam $\theta_1, \theta_2 \in \widetilde{V}_e$.

Portanto, φ é isomorfismo, não só de espaços vetoriais, como também é isomorfismo de álgebras.

A decomposição

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \widetilde{U} \oplus \widetilde{V}_{11} \oplus \widetilde{V}_{10} \oplus \widetilde{V}_{01} \oplus \widetilde{V}_{00} \tag{2.13}$$

é a chamada decomposição completa de $M(A)$ relativa ao idempotente e.

Se $x = \alpha e + u + v$ é um elemento de A, com $\alpha \in F$, $u \in U$ e $v \in V$, então $L_x \in M(A)$ é decomposto com relação a (2.13) como

$$L_x = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \frac{1}{2}\psi_u + [L_x]_{11} + [L_x]_{10} + [L_x]_{01} + [L_x]_{00} \tag{2.14}$$

com $[L_x]_{ij} \in \widetilde{V}_{ij}$ e com

$$\begin{aligned}
[L_x]_{11} &= \frac{1}{2}\alpha(4L_e - 4L_e^2) + 2L_vL_e & (2.15)\\
[L_x]_{10} &= \Big(2L_eL_u - \frac{1}{2}\psi_u\Big) + (L_v - 2L_vL_e) & (2.16)\\
[L_x]_{01} &= L_u - 2L_eL_u & (2.17)\\
[L_x]_{00} &= 0 & (2.18)
\end{aligned}$$

De fato, pois tomando em A qualquer $a = \beta e + u_1 + v_1$, com $\beta \in F$, $u_1 \in U$ e $v_1 \in V$, temos que

$$\begin{aligned}
L_x(a) &= x(\beta e + u_1 + v_1)\\
&= \beta e(\alpha e + u + v) + (\alpha e + u + v)u_1 + (\alpha e + u + v)v_1\\
&= \alpha\beta e + \frac{1}{2}\beta u + \frac{1}{2}\alpha u_1 + uu_1 + vu_1 + uv_1 + vv_1
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& \Big(\alpha(2L_e^2 - L_e) + \frac{1}{2}\psi_u + [L_x]_{11} + [L_x]_{10} + [L_x]_{01} + [L_x]_{00}\Big)(a) \\
= \; & \alpha(2L_e^2 - L_e)(a) + \Big(\frac{1}{2}\psi_u\Big)(a) + [L_x]_{11}(a) + [L_x]_{10}(a) + [L_x]_{01}(a) + [L_x]_{00}(a) \\
= \; & \alpha\beta e + \frac{1}{2}\beta u + [L_x]_{11}(u_1) + [L_x]_{10}(v_1) + [L_x]_{01}(u_1) \\
= \; & \alpha\beta e + \frac{1}{2}\beta u + \frac{1}{2}\alpha u_1 + vu_1 + uv_1 + vv_1 + uu_1 \\
= \; & \alpha\beta e + \frac{1}{2}\beta u + \frac{1}{2}\alpha u_1 + uu_1 + vu_1 + uv_1 + vv_1 = L_x(a)
\end{aligned}$$

Além disso, para todo $u \in U$ e $v \in V$ temos $[L_x]_{11}(u) = \frac{\alpha}{2}u + vu \in U$ e $[L_x]_{11}(v) = 0$, e assim, usando a Proposição 2.7 temos que $[L_x]_{11} \in \widetilde{V}_{11}$. Analogamente, $[L_x]_{10}(u) = 0$ e $[L_x]_{10}(v) = uv + v^2 \in U$ e portanto $[L_x]_{10} \in \widetilde{V}_{10}$. Da mesma forma se verifica que $[L_x]_{01} \in \widetilde{V}_{01}$ e $[L_x]_{00} \in \widetilde{V}_{00}$.

Vimos que o subespaço $\widetilde{U}$ é isomorfo ao subespaço $U \oplus U^2$ e como sua estrutura é simples. Porém, o subespaço $\widetilde{V}$ reflete toda a complexidade das álgebras de Bernstein e os subespaços $\widetilde{V}_{ij}$ decorrentes da decomposição de Peirce de $\widetilde{V}$, nos fornece muitas informações a respeito de A. A próxima proposição garante a invariância da dimensão desses subespaços $\widetilde{V}_{ij}$, com relação à mudança de idempotentes.

Proposição 2.9. *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e = Fe \oplus U_f \oplus V_f$ uma álgebra de Bernstein, de dimensão finita, decomposta relativamente aos idempotentes $e, f = e + u_0 + {u_0}^2$ com $u_0 \in U_e$. Seja $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \widetilde{U}_e \oplus \widetilde{V}_e = F(2L_f^2 - L_f) \oplus \widetilde{U}_f \oplus \widetilde{V}_f$ as correspondentes decomposições de Peirce de $M(A)$. Suponha ainda que as subálgebras $\widetilde{V}_f$ e $\widetilde{V}_e$ são decompostas respectivamente como $\widetilde{V}_e = \widetilde{V}_{11} \oplus \widetilde{V}_{10} \oplus \widetilde{V}_{01} \oplus \widetilde{V}_{00}$ e $\widetilde{V}_f = \widetilde{W}_{11} \oplus \widetilde{W}_{10} \oplus \widetilde{W}_{01} \oplus \widetilde{W}_{00}$, como descritos anteriormente. Então, temos que* $\dim \widetilde{V}_{ij} = \dim \widetilde{W}_{ij}$ *para $(i, j = 0, 1)$.*

Demonstração:

Fixando um índice ij, segue da Proposição 2.8 que para $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{W}_{ij} \subseteq \widetilde{V}_f$, existe uma única $\sigma \in \widetilde{V}_e$ tal que $\widetilde{\sigma} = \sigma - \sigma\psi_y$ em que $y = u_0 + u_0^2$. Agora, decomponha σ como $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{10} + \sigma_{01} + \sigma_{00}$ com $\sigma_{st} \in \widetilde{V}_{st}$. Consideremos a função $g : \widetilde{W}_{ij} \longrightarrow \widetilde{V}_{ij}$ dada por $g(\widetilde{\sigma}) = \sigma_{ij}$. Temos que g é linear e vamos mostrar que também é injetora. De fato, vamos assumir que $i = j = 1$ (os demais casos são análogos) e supor $\widetilde{\sigma} \in \widetilde{W}_{11}$ com $g(\widetilde{\sigma}) = \sigma_{11} = 0$, isto é, $\sigma = \sigma_{10} + \sigma_{01} + \sigma_{00}$. Como $\widetilde{\sigma} = \sigma - \sigma\psi_y$ e $\psi_y(n) = 0$ para todo $n \in N = U_f \oplus V_f$ então $\widetilde{\sigma}(n) = \sigma(n)$ sempre que $n \in N$. Porém de acordo com a Proposição 2.7 temos que $\widetilde{\sigma}(U_f) \subseteq U_f$ e $\widetilde{\sigma}(V_f) = \sigma(V_f) = 0$ e já que

$$\begin{aligned} U_f &= \{u + 2uu_0; u \in U_e\} \text{ e} \\ V_f &= \{v - 2(u_0 + u_0^2)v; v \in V_e\} \end{aligned}$$

segue que para todo $v \in V_e$, $\sigma(v - 2(u_0 + u_0^2)v) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{10}(v - 2(u_0 + u_0^2)v) + \sigma_{01}(v - 2(u_0 + u_0^2)v) + \sigma_{00}(v - 2(u_0 + u_0^2)v) \\ &= \sigma_{10}(v) - 2\sigma_{01}((u_0 + u_0^2)v) + \sigma_{00}(v) \end{aligned}$$

Logo, $\sigma_{10}(v) = 2\sigma_{01}((u_0 + u_0^2)v) - \sigma_{00}(v)$ e portanto $\sigma_{10}(v) \in U_f \cap V_f = 0$, para todo $v \in V_e$.

Além disso, já que para todo $u \in U_e$, temos $\sigma(U_f) \subseteq U_f$ então $\sigma(u + 2uu_0) = x + 2xu_0$ para algum $x \in U_e$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} x + 2xu_0 &= \sigma(u + 2uu_0) \\ &= \sigma_{10}(u + 2uu_0) + \sigma_{01}(u + 2uu_0) + \sigma_{00}(u + 2uu_0) \\ &= \sigma_{10}(u) + 2\sigma_{10}(uu_0) + \sigma_{01}(u) + 2\sigma_{01}(uu_0) + \sigma_{00}(u) + 2\sigma_{00}(uu_0) \\ &= \sigma_{01}(u) + 2\sigma_{00}(uu_0) \in V_e. \end{aligned}$$

Assim, $x = 0$ e portanto $\sigma(U_f) = 0$. Logo, $\sigma(e) = \sigma(U_f) = \sigma(V_f) = 0$ e conseqüentemente temos que $\sigma = 0$. □

Observação 2.5. *Os elementos de $\widetilde{N}^k$ têm imagem contida em N^k e se $\sigma \in \widetilde{N}^k \cap \widetilde{V}$ então $\sigma(A) \subseteq N^{k+1}$ para todo $k \geq 1$.*

Demonstração:

De fato, como N^k é ideal de A, para todo inteiro $k \geq 1$ $\widetilde{N}$ é gerado por $\{L_x;\ x \in N\}$. Então se $\sigma \in \widetilde{N}^k$, $\sigma = \sum_{i=1}^t L_{x_1} L_{x_2} ... L_{x_t}$ com pelo menos k índices em N. Assim, para todo $a \in A$

$$\sigma(a) = \sum L_{x_1} L_{x_2} ... L_{x_t}(a) = \sum x_1(x_2...(x_t(a))) \in N^k.$$

Em particular, se $a = n \in N$, então $\sigma(a) \in \widetilde{N}^{k+1}$. Assim, se $\sigma \in \widetilde{V}$, para todo $a = \alpha e + n \in A$, com $n \in N$, $\sigma(a) = \sigma(n)$. Portanto, se $\sigma \in \widetilde{N}^k \cap \widetilde{V}$, $\sigma(A) \subseteq N^{k+1}$, para todo $k \geq 1$. □

Usando a decomposição de L_x e as relações $\widetilde{V}_{ij}\widetilde{V}_{kl} \subseteq \delta_{jk}\widetilde{V}_{il}$, verificamos que $\widetilde{V}_{10}$ e $\widetilde{V}_{01}$ são subespaços contidos em $\widetilde{N}$. Temos também que $\widetilde{V}_{00} = \widetilde{V}_{01}\widetilde{V}_{10} \subseteq \widetilde{N}^2$, pois $\widetilde{V}_{01}\widetilde{V}_{10} \subseteq \widetilde{V}_{00}$ por (2.12) e reciprocamente, dado $\sigma \in \widetilde{V}_{00}$ então

$$\begin{aligned} \sigma &= L_u L_v - 2L_u L_v L_e \\ &= (L_u - 2L_e L_u)\Big[\Big(2L_e L_u - \frac{1}{2}\psi_u\Big) + (L_v - 2L_v L_e)\Big] \in \widetilde{V}_{01}\widetilde{V}_{10} \end{aligned}$$

e assim, $\widetilde{V}_{00} \subseteq \widetilde{V}_{01}\widetilde{V}_{10}$.

Além disso, segue de (2.15) que

$$\widetilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2) + (\widetilde{V}_{11} \cap \widetilde{N}) \tag{2.19}$$

pois, $L_v L_e(\alpha e + u + v) = \frac{1}{2}uv \in U$ e se $v \in V \subseteq N$ então $L_v L_e \in \widetilde{N}$. Logo, $L_v L_e \in \widetilde{V}_{11} \cap \widetilde{N}$.

Agora, já que $N^2 = (UV + V^2) \oplus U^2$ e $N^3 = (U^3 + (UV)V + V^3 + U^2V) \oplus U(UV)$, podemos usar a observação 2.5 para melhorar a Proposição 2.7. Assim, dado $\sigma \in \widetilde{V}$,

$$\sigma \in \widetilde{V}_{11} \iff \sigma(U) \subseteq U \text{ e } \sigma(V) = 0 \tag{2.20}$$

$$\sigma \in \widetilde{V}_{11} \cap \widetilde{N} \implies \sigma(U) \subseteq UV + V^2 \text{ e } \sigma(V) = 0 \tag{2.21}$$

$$\sigma \in \widetilde{V}_{10} \iff \sigma(U) = 0 \text{ e } \sigma(V) \subseteq UV + V^2 \tag{2.22}$$

$$\sigma \in \widetilde{V}_{01} \iff \sigma(U) \subseteq U^2 \text{ e } \sigma(V) = 0 \tag{2.23}$$

$$\sigma \in \widetilde{V}_{00} \iff \sigma(U) = 0 \text{ e } \sigma(V) \subseteq U(UV) \tag{2.24}$$

Dessa forma, podemos obter o teorema a seguir que classifica as álgebras de Bernstein que possuem algum dos subespaços $\widetilde{V}_{ij}$ sendo nulo.

Teorema 2.2. *Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein e $M(A)$ sua álgebra de multiplicações com decomposição de Peirce* (2.13). *Então,*

(i) $\widetilde{V}_{10} = 0$ *se, e somente se, A é normal.*

(ii) $\widetilde{V}_{01} = 0$ *se, e somente se, A é excepcional.*

(iii) $\widetilde{V}_{00} = 0$ *se, e somente se, A é 1-excepcional.*

Demonstração:

(i) Seja A uma álgebra de Bernstein normal, temos por (2.21) que $\widetilde{V}_{10} = 0$. Por outro lado, se A não é normal, existem $u \in U$ e $v \in V$ tais que $uv \neq 0$ ou existe $v_1 \in V$ de modo que $v_1^2 \neq 0$. No primeiro caso, o operador $\sigma = 2L_eL_u - \frac{1}{2}\psi_u \in \widetilde{V}_{10}$ é não nulo, visto que $\sigma(v) = uv \neq 0$ e no segundo caso, o operador $\tau = L_{v_1} - L_{v_1}L_e \in \widetilde{V}_{10}$ é não nulo, já que $\tau(v_1) = v_1^2 \neq 0$. E assim, $\widetilde{V}_{10} \neq 0$.

(ii) Se A é excepcional então, por (2.22), $\widetilde{V}_{01} = 0$. Caso contrário, existe $u \in U$ tal que $u^2 \neq 0$ e portanto, o operador $\theta = L_u - 2L_eL_u \in \widetilde{V}_{01}$ é não nulo, visto que $\theta(u) = u^2 \neq 0$.

(iii) Suponhamos que A seja 1-excepcional. Logo, segue de (2.23) que $\widetilde{V}_{00} = 0$. Porém, se existem $u_1, u_2 \in U$ e $v \in V$ tais que $u_1(u_2v) \neq 0$ então, temos que o operador $\sigma = (L_{u_1} - 2L_eL_{u_1})(2L_eL_{u_2} - \frac{1}{2}\psi_{u_2}) \in \widetilde{V}_{00}$ é não nulo, pois $\sigma(v) = u_1(u_2v) \neq 0$.

2.5 $M(A)$ nas álgebras normais

Usando o Teorema 2.2 foi possível caracterizar as álgebras normais pela dimensão do subespaço $\widetilde{V}_{10}$ que figura na decomposição de Peirce de $M(A)$. Nesta seção veremos a Proposição 2.10, cujo corolário nos permite descrever os elementos de $M(A)$ para essas álgebras. Porém, para chegarmos a esta proposição, necessitaremos dos dois lemas a seguir.

Lema 2.4. *O conjunto* $\{L_u - 2L_eL_u; u \in U\}$ *é um subespaço vetorial de* $\widetilde{V}_{01}$ *e sua dimensão coincide com a dimensão de* U/L*. Em particular, a dimensão desse subespaço é um invariante de* A *e* $\dim \widetilde{V}_{01} \geq \dim U - \dim L$.

Demonstração:

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \widetilde{V}_{01} \\ u &\longmapsto L_u - 2L_eL_u \end{aligned}$$

a qual é linear. Pela Proposição 2.7 temos que $L_u - 2L_eL_u = 0$, se, e somente se, $(L_u - 2L_eL_u)(U) = 0$. Assim, $\ker \varphi = L$. Dessa maneira, pelo teorema do homomorfismo, $\mathrm{Im}\varphi \simeq U/L$ e portanto tem a mesma dimensão. De onde conclui-se que $\dim \widetilde{V}_{01} \geq \dim U/L$, ou seja, $\dim \widetilde{V}_{01} \geq \dim U - \dim L$. $\square$

Lema 2.5. *Sejam* $u \in U$ *e* $v \in V$ *então*

$$2(L_u - 2L_eL_u)(L_vL_e) + (L_{uv} - 2L_eL_uL_v) = 0.$$

Demonstração:

Como $L_u - 2L_eL_u \in \widetilde{V}_{01}$ e $2L_vL_e \in \widetilde{V}_{11}$ então a composta desses operadores pertence a $\widetilde{V}_{01}$. Assim, basta calcular esse operador em elementos de U e dado $u' \in U$ temos que

$2(L_u - 2L_eL_u)(L_vL_e)(u') = u(vu') = -u'(uv) = -(L_{uv} - 2L_eL_uL_v)(u')$. Logo,

$$2(L_u - 2L_eL_u)(L_vL_e) + (L_{uv} - 2L_eL_uL_v) = 0.$$

$\square$

Agora, estamos aptos a descrever o subespaço $\widetilde{V}_{01}$ nas álgebras de Bernstein n-excepcionais com grau de excepcionalidade $n \leq 1$.

Proposição 2.10. *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein com grau de excepcionalidade $n \geq 1$, então $\widetilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_eL_u; u \in U\}$ e portanto* $\dim \widetilde{V}_{01} = \dim U - \dim L$.

Demonstração:

É suficiente mostrar que para todo $k \geq 1$ e $x_1, x_2, ..., x_k \in A$ a componente $[L_{x_1}L_{x_2}...L_{x_k}]_{01}$ é um elemento do subespaço $W = \{L_u - 2L_eL_u; u \in U\}$, o que iremos mostrar usando indução em k. Se $k = 1$ então, por (2.17) o resultado é válido. Agora, suponhamos que $[L_{x_1}L_{x_2}...L_{x_{k-1}}]_{01} \in W$ e tomemos $x_k = \alpha_k e + u_k + v_k \in A$. Logo, pelas relações dadas em (2.10) e (2.12) e devido ao fato de $\widetilde{V}_{00} = 0$, obtemos que

$$[L_{x_1}L_{x_2}...L_{x_k}]_{01} = [L_{x_1}L_{x_2}...L_{x_{k-1}}]_{01}.[L_{x_k}]_{11}.$$

Assim, se $u \in U$ é tal que $[L_{x_1}L_{x_2}...L_{x_{k-1}}]_{01} = L_u - 2L_eL_u$, segue do lema anterior que

$$\begin{aligned} [L_{x_1}L_{x_2}...L_{x_k}]_{01} &= (L_u - 2L_eL_u)\left(\frac{1}{2}\alpha_k(4L_e - 4L_e^2) + 2L_{v_k}L_e\right) \\ &= \frac{1}{2}\alpha_k(L_u - 2L_eL_u) - (L_{uv_k} - 2L_eL_{uv_k}) \in W. \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 2.2. *Se A é uma álgebra de Bernstein normal então A tem a seguinte decomposição*

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \widetilde{U} \oplus F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \{L_u - 2L_eL_u; u \in U\}. \qquad (2.25)$$

Demonstração:

Decorre de (2.21) que $\widetilde{V}_{11} \cap \widetilde{N} = 0$. Logo, por (2.19) temos que $\widetilde{V}_{11} = F(4L_e - 4L_e^2)$, segue também do Teorema 2.2 que $\widetilde{V}_{10} = \widetilde{V}_{00} = 0$ e pela Proposição 2.10 conclui-se que $\widetilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_eL_u; u \in U\}$. Portanto,

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \widetilde{U} \oplus F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \{L_u - 2L_eL_u; u \in U\}.$$

□

2.6 Relações entre $M(A)$ e $M(\overline{A})$

Sejam $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein e I um ideal bárico de A, isto é, $I \subseteq N = U \oplus V$. Mostramos no Corolário 1.5 que a álgebra quociente $\overline{A} = A/I$ é também uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $\overline{A} = F\overline{e} \oplus \overline{U} \oplus \overline{V}$ em que $\overline{e} = e + I$, $\overline{U} = \{u + I; u \in U\}$ e $\overline{V} = \{v + I; v \in V\}$.

Dessa forma, considerando a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow A/I \\ x &\longmapsto \overline{x} = x + I \end{aligned}$$

e usando a Proposição 2.1 temos que π pode ser estendido a um epimorfismo

$$\begin{aligned} \Pi : M(A) &\longrightarrow M(\overline{A}) \\ L_x &\longmapsto \Pi(L_x) = L_{\pi(x)} = L_{\overline{x}} \end{aligned}$$

Assim, dado $\sigma \in M(A)$ então $\Pi(\sigma) = \overline{\sigma}$. Além disso, $\overline{\sigma}(\overline{a}) = \overline{\sigma}(a + I) = \sigma(a) + I = \overline{\sigma(a)}$.

A álgebra $M(\overline{A})$ tem a seguinte decomposição

$$\begin{aligned} M(\overline{A}) &= F(2L_{\overline{e}}^2 - L_{\overline{e}}) \oplus \widetilde{\overline{U}} \oplus \widetilde{\overline{V}} && (2.26) \\ &= F(2L_{\overline{e}}^2 - L_{\overline{e}}) \oplus \widetilde{\overline{U}} \oplus \widetilde{\overline{V}}_{11} \oplus \widetilde{\overline{V}}_{10} \oplus \widetilde{\overline{V}}_{01} \oplus \widetilde{\overline{V}}_{00} && (2.27) \end{aligned}$$

E pela caracterização dos subespaços dessa decomposição através das proposições 2.4 e 2.7 temos que $\Pi(\widetilde{U}) = \widetilde{\overline{U}}$. De fato, dado $\lambda \in \Pi(\widetilde{U})$ então $\lambda = \Pi(\sigma)$ para algum $\sigma \in \widetilde{U}$. Logo, $\sigma(n) = 0$ para todo $n \in N$. Portanto, $\lambda(\overline{n}) = (\Pi(\sigma))(\overline{n}) = \overline{\sigma}(\overline{n}) = \sigma(n) + I = \overline{0}$ e consequentemente, $\lambda \in \widetilde{\overline{U}}$. Reciprocamente, dado $\psi_{\overline{x}} \in \widetilde{\overline{U}}$ com $\overline{x} \in \overline{U} \oplus \overline{U}^2$ então $\psi_{\overline{x}}(\overline{e}) = \overline{x}$ e $\psi_{\overline{x}}(\overline{N}) = \overline{0}$. Tomando x um representante da classe $\overline{x}$ definimos a função $\psi_x : A \longrightarrow A$ com $\psi_x(e) = x$ e $\psi_x(N) = 0$ e assim, $\psi_x(\alpha e + n) = \alpha x$. Logo, $(\Pi(\psi_x))(\alpha\overline{e} + \overline{n}) = \psi_x(\alpha e + n) + I = \alpha x + I = \alpha\overline{x}$ e já que $\psi_{\overline{x}}(\alpha\overline{e} + \overline{n}) = \alpha\overline{x}$ para todo $\overline{a} = \alpha\overline{e} + \overline{n} \in \overline{A}$ temos que $\Pi(\psi_x) = \psi_{\overline{x}}$ para todo $\psi_{\overline{x}} \in \widetilde{\overline{U}}$ e para todo $\psi_x \in \widetilde{U}$.

Temos também que $\Pi(\widetilde{V}_{ij}) = \widetilde{\overline{V}}_{ij}$ com $i, j = 0, 1$. De fato, vamos mostrar que vale igualdade $\Pi(\widetilde{V}_{11}) = \widetilde{\overline{V}}_{11}$, os demais casos são análogos. Seja $\lambda \in \widetilde{V}_{11}$ então $\lambda = \Pi(\sigma)$ para algum $\sigma \in \widetilde{V}_{11}$. Assim, $\lambda(\overline{u}) = (\Pi(\sigma))(\overline{u}) = \overline{\sigma}(\overline{u}) = (\sigma)(u) + I = u' + I = \overline{u'}$ com $u' \in U$. Portanto, $\lambda(\overline{U}) \subseteq \overline{U}$. E também, $\lambda(\overline{v}) = (\Pi(\sigma))(\overline{v}) = \overline{\sigma}(\overline{v}) = (\sigma)(v) + I = I = \overline{0}$. Portanto, $\lambda(\overline{V}) = \overline{0}$. Logo, $\lambda \in \widetilde{\overline{V}}_{11}$. Por outro lado, tomando $\overline{\sigma} \in \widetilde{\overline{V}}_{11}$, temos que $\overline{\sigma}(\overline{u}) = \sigma(u) + I$, pois $\sigma(\overline{U}) \subseteq \overline{U}$. Assim, $\sigma(u) \in U$ equivale a $\sigma(u) = u'$ para algum $u' \in U$. Dessa forma, para que $\sigma(u) \in U$, pela Proposição 2.7 teremos $\sigma \in \widetilde{V}$. Portanto, para qualquer $\overline{\sigma} \in \widetilde{\overline{V}}_{11}$ existe $\sigma \in \widetilde{V}_{11}$ tal que $\sigma(u) + I = \overline{\sigma}(\overline{u}) = \Pi(\sigma)(\overline{u})$ para todo $u \in U$ e $\overline{u} \in \overline{U}$.

Em geral a dimensão dos subespaços $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}_{ij}$ de $M(A)$ é maior do que a dimensão de suas imagens em $M(\overline{A})$ pela projeção Π. Isso porque, de acordo com a Proposição 2.6, a dimensão $\dim \widetilde{U} = \dim U + \dim U^2$ e $\dim \widetilde{\overline{U}} = \dim \overline{U} + \dim \overline{U}^2$. E já que $\dim \overline{U} = \dim U + \dim(I \cap U)$ então $\dim \overline{U} = \dim U$ se, e somente se, $I \cap U = \{0\}$. Quanto aos subespaços $\widetilde{V}_{ij}$, veremos a seguir, em que casos Π preserva a dimensão de alguns desses subespaços.

Proposição 2.11. *Seja I um ideal bárico de uma álgebra de Bernstein A cuja álgebra de multiplicações é $M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus \widetilde{U} \oplus \widetilde{V}_{11} \oplus \widetilde{V}_{10} \oplus \widetilde{V}_{01} \oplus \widetilde{V}_{00}$. Então*

(i) *Se o ideal I está contido em U então $\dim \widetilde{\overline{V}}_{01} = \widetilde{V}_{01}$ e $\dim \widetilde{\overline{V}}_{00} = \widetilde{V}_{00}$.*

(ii) *Se o ideal I está contido em V então $\dim \widetilde{\overline{V}}_{11} = \widetilde{V}_{11}$ e $\dim \widetilde{\overline{V}}_{10} = \widetilde{V}_{10}$.*

Demonstração:

Vimos que $\Pi(\widetilde{V}_{ij}) = \widetilde{\widetilde{V}}_{ij}$, assim, basta mostrar que a restrição de Π a esses subespaços é injetora. De fato, se $\overline{\sigma} = \overline{0}$ então $\sigma(A) \subseteq I \subseteq U$. Logo, para $\sigma \in \widetilde{V}_{01}$ temos $\sigma(A) \subseteq \sigma(U) \subseteq V$ e para $\sigma \in \widetilde{V}_{00}$ temos $\sigma(A) \subseteq \sigma(V) \subseteq V$, que equivale a $\sigma(A) \subseteq U \cap V = \{0\}$ e portanto $\sigma = 0$. Dessa forma, $\Pi\ |_{\widetilde{V}_{01}}$ e $\Pi\ |_{\widetilde{V}_{00}}$ são injetoras e conseqüentemente, $\dim \widetilde{\widetilde{V}}_{01} = \widetilde{V}_{01}$ e $\dim \widetilde{\widetilde{V}}_{00} = \widetilde{V}_{00}$.

Analogamente, se $I \subseteq V$ então $\overline{\sigma} = \overline{0}$ implica em $\sigma(A) \subseteq I \subseteq V$. Assim, para $\sigma \in \widetilde{V}_{11}$ temos $\sigma(A) \subseteq \sigma(U) \subseteq U$ e quando $\sigma \in \widetilde{V}_{10}$ temos $\sigma(A) \subseteq \sigma(V) \subseteq U$, e do mesmo modo, $\sigma(A) \subseteq U \cap V = \{0\}$, ou seja, $\sigma = 0$. Portanto, $\Pi\ |_{\widetilde{V}_{11}}$ e $\Pi\ |_{\widetilde{V}_{10}}$ são injetoras, de onde segue o resultado, $\widetilde{\widetilde{V}}_{11} = \widetilde{V}_{11}$ e $\dim \widetilde{\widetilde{V}}_{10} = \widetilde{V}_{10}$. □

Proposição 2.12. *Seja A uma álgebra de Bernstein e $I \subseteq N$. Então*

(i) *$I \subseteq U$ é ideal de A então $I \subseteq L$.*

(ii) *$I \subseteq V$ é ideal de A se, e somente se, $I \subseteq annA$.*

Demonstração:

Se $I \subseteq U$ é ideal de A então dado qualquer $u \in I$ temos que $uu' \in I \subseteq U$ para todo $u' \in U$ e como A é Bernstein $uu' \in U^2 \subseteq V$. Logo, $uu' \in U \cap V = \{0\}$ o que implica em $u \in L$, ou seja, $I \subseteq L$.

Agora, se $I \subseteq V$ é ideal de A então $vx \in I \subseteq V$ quaisquer que sejam $v \in I$ e $x = \alpha e + u' + v' \in A$, com $\alpha \in F$,$u' \in U$ e $v' \in V$. Além disso, $vx = v(\alpha e + u' + v') = vu' + vv' \in U$. Portanto, $vx \in U \cap V = \{0\}$ o que equivale a $vx = 0$ para todo $x \in A$. Assim, $v \in \text{ann}A$ e dessa forma, $I \subseteq \text{ann}A$. Por outro lado, se $I \subseteq \text{ann}A$ então $vx = 0$ para todo $v \in I$ e $x \in A$. Logo, $vx \in I$, pois $0 \in I$. □

Proposição 2.13. *Seja A uma álgebra de Bernstein e I um ideal bárico de A. Então as dimensões de $\widetilde{U}$ e $\overline{\widetilde{U}}$ são iguais se, e somente se, $I \subseteq annA$ e $I \cap U^2 = 0$.*

Demonstração:

Sabemos que $\dim \widetilde{U} = \dim U + \dim U^2$ e $\dim \overline{\widetilde{U}} = \dim \overline{U} + \dim \overline{U}^2$. Logo, se $\dim \widetilde{U} = \dim \overline{\widetilde{U}}$ então $\dim U + \dim U^2 = \dim U - \dim I \cap U + \dim U^2 - \dim I \cap U^2$. Assim, se $I \not\subseteq \mathrm{ann}A$, temos que $I \not\subseteq V$ e já que $I \subseteq N$ conclui-se que $I \cap U \neq 0$. Portanto, $\dim I \cap U \geq 1$ o que implica em $\dim \widetilde{U} > \overline{\widetilde{U}}$. Também supondo que $I \cap U^2 \neq 0$, então existe $0 \neq y \in I \cap U^2$ tal que $\psi_y \neq 0$ e $\overline{\psi_y} = 0$, e isto significa que a restrição de π ao subespaço $\widetilde{U}$ não é injetora e portanto, $\dim \widetilde{U} \neq \overline{\widetilde{U}}$

Agora, se $\dim \widetilde{U} = \overline{\widetilde{U}}$ então $\dim I \cap U^2 = 0$ e $\dim I \cap U = 0$ e portanto, $I \cap U^2 = 0$. Desse modo, $I \subseteq V$ e pela proposição anterior $I \subseteq \mathrm{ann}A$. $\square$

Capítulo 3

Propriedades dos elementos de $M(A)$

Neste capítulo iremos estudar alguns elementos importantes da álgebra de multiplicações. Inicialmente, analisamos algumas características dos idempotentes de $M(A)$ e a partir desta análise, estabelece-se um critério para determinar se a álgebra de Bernstein tem núcleo nilpotente. A segunda parte deste capítulo introduz o principal objeto de estudo deste trabalho, pois nela investigamos o posto máximo dos elementos de $M(A)$, começando pelos idempotentes.

Conforme vimos na seção 1.5 alguns autores já vêm investigando a nilpotência do núcleo das álgebras de Bernstein e em [7] é feita uma caracterização das álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente a partir das propriedades de suas álgebras de multiplicações.

Proposição 3.1. (Proposição 12 de [7]) *Uma álgebra de Bernstein* $A = Fe \oplus N$ *tem núcleo nilpotente se somente se* $\widetilde{N}$ *é nilpotente.*

Demonstração:

Seja $A = Fe \oplus N$ uma álgebra de Bernstein com núcleo nilpotente e k o seu índice de nilpotência, isto é, $N^k = 0$. Logo, tomando $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ elementos arbitrários em $\widetilde{N}$ temos que $\sigma_i = \sum L_{x_1} L_{x_2} ... L_{x_i}$ com algum $x_i \in N$ e portanto $\sigma_1 \sigma_2 ... \sigma_k$ será um somatório cujas parcelas são do tipo $\theta = \sum L_{y_1}L_{y_2}...L_{y_s}$ nas quais, pelo menos k índices y_j estão em N. Agora, já que os N^i são ideais de A, para todo $i \geq 1$, então para qualquer $a \in A$ temos que $\theta(a) = y_1(y_2(...(y_s a)...)) \in N^k = 0$. Logo, $\theta = 0$ e conclui-se que $\sigma_1\sigma_2...\sigma_k = 0$. Assim, $\widetilde{N}$ é nilpotente com índice de nilpotência $\leq k$.

3.1 Idempotentes da álgebra de multiplicações

Nesta seção veremos como se decompõem os idempotentes de $M(A)$ com relação à decomposição de Peirce de $M(A)$ e que a caracterização desses elementos se restringe à descrição dos idempotentes em apenas um dos subespaços de $M(A)$.

Proposição 3.2. *Seja* $M(A) = F(2{L_e}^2 - L_e) \oplus \widetilde{U} \oplus \widetilde{V}$ *então*

(i) *Um elemento* $\sigma \in M(A)$ *é idempotente de peso 1 se e somente se* $\sigma = 2{L_e}^2 - L_e + \psi_x + \theta$ *com* $\theta \in \widetilde{V}$ *idempotente e* $x \in \ker\theta \cap (U \oplus U^2)$.

(ii) *Um elemento* $\sigma \in (N : A)$ *é idempotente se e somente se* $\sigma = \psi_x + \theta$ *em que* $\theta \in \widetilde{V}$ *é idempotente e* $x \in \operatorname{Im}\theta$.

Demonstração:

(i) Seja $\sigma = 2{L_e}^2 - L_e + \psi_x + \theta \in M(A)$, com $\psi_x \in \widetilde{U}$ e $\theta \in \widetilde{V}$. Agora, σ é idempotente se e somente se $\sigma^2 = \sigma$. Como

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= [(2{L_e}^2 - L_e) + \psi_x + \theta]^2 \\
&= (2{L_e}^2 - L_e) + (2{L_e}^2 - L_e)\psi_x + (2{L_e}^2 - L_e)\theta + \psi_x(2{L_e}^2 - L_e) + {\psi_x}^2 \\
&+ \psi_x\theta + \theta(2{L_e}^2 - L_e) + \theta\psi_x + \theta^2 \\
&= (2{L_e}^2 - L_e) + \psi_x + \theta\psi_x + \theta^2
\end{aligned}$$

e $\theta\psi_x \in \widetilde{V}\widetilde{U} \subseteq \widetilde{U}$, se $(2{L_e}^2 - L_e) + \psi_x + \theta\psi_x + \theta^2 = 2{L_e}^2 - L_e + \psi_x + \theta$ então teremos $\theta\psi_x = 0$ e $\theta^2 = \theta$. Portanto, σ é idempotente de $M(A)$ se e somente se $\theta^2 = \theta$ e $\theta(x) = 0$, com $x \in U \oplus U^2$, isto é, se somente se $\theta \in \widetilde{V}$ é idempotente e $x \in \ker\theta \cap (U \oplus U^2)$.

(ii) A demonstração é análoga a anterior, pois se tomarmos $\sigma = \psi_x + \theta$ com $\sigma \in \widetilde{U}$ e $\theta \in \widetilde{V}$ então supondo que σ é idempotente temos que $\sigma^2 = \sigma$, mas

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (\psi_x + \theta)^2 \\ &= {\psi_x}^2 + \psi_x\theta + \theta\psi_x + \theta^2 \\ &= \theta\psi_x + \theta^2 \end{aligned}$$

então teremos $\theta\psi_x + \theta^2 = \psi_x + \theta$, se e somente se, $\theta^2 = \theta$ e $\theta(x) = x$, com $x \in U \oplus U^2$, o que implica em $x \in Im\theta \cap (U \oplus U^2)$. □

Utilizando esta proposição vemos que a descrição dos idempotentes de $M(A)$ se restringe à descrição dos idempotentes em $\widetilde{V}$. Também vimos anteriormente, que este subespaço pode ser decomposto como $\widetilde{V} = F(4L_e - 4{L_e}^2) + (\widetilde{N} \cap \widetilde{V})$, então é claro que os elementos em $\widetilde{V}$ são da forma $\sigma = \alpha(4L_e - 4{L_e}^2) + \theta$ em que $\alpha \in F$ e $\theta \in (\widetilde{N} \cap \widetilde{V})$.

Segue deste resultado que a descrição dos elementos idempotentes de $M(A)$ está restrita à descrição dos elementos idempotentes que pertencem ao subespaço $\widetilde{V} = F(4L_e - 4L_e^2) + (\widetilde{V} \cap \widetilde{N})$.

3.2 Álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente

Nem toda álgebra de Bernstein tem núcleo nilpotente e nesta seção procuramos, através da determinação do posto dos idempotentes do núcleo de $M(A)$, um critério para identificar as álgebras de Bernstein que possuem núcleo nilpotente.

Lema 3.1. *Seja A uma álgebra de Bernstein com núcleo nilpotente. Então os idempotentes não nulos de $\widetilde{V}$ são da forma $\sigma = (4L_e - 4{L_e}^2) + \theta$ em que $\theta \in (\widetilde{V} \cap \widetilde{N})$.*

Demonstração:

Seja $\sigma = \alpha(4L_e - 4{L_e}^2) + \theta$ um idempotente, com $\theta \in (\widetilde{V} \cap \widetilde{N})$. Temos que

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= [\alpha(4L_e - 4{L_e}^2) + \theta]^2 \\ &= \alpha^2(4L_e - 4{L_e}^2) + \alpha(4L_e - 4{L_e}^2)\theta + \alpha\theta(4L_e - 4{L_e}^2) + \theta^2 \end{aligned}$$

Como, por hipótese, N é nilpotente então pela Proposição 3.1 temos que $\widetilde{N}$ também é nilpotente, assim, $(4L_e - 4{L_e}^2) \notin \widetilde{N}$ e $\widetilde{V} = F(4L_e - 4{L_e}^2) \oplus (\widetilde{V} \cap \widetilde{N})$. Portanto, $\sigma^2 = \sigma$ implica em

$$\alpha^2(4L_e - 4{L_e}^2) + \alpha(4L_e - 4{L_e}^2)\theta + \alpha\theta(4L_e - 4{L_e}^2) + \theta^2 = \alpha(4L_e - 4{L_e}^2) + \theta$$

Logo, $\alpha^2(4L_e - 4{L_e}^2) = \alpha(4L_e - 4{L_e}^2)$, o que equivale a $\alpha^2 = \alpha$, ou seja, $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. No entanto, se $\alpha = 0$ então $\sigma = \theta \in \widetilde{N}$ o que implica em $\sigma = 0$, pois $\widetilde{N}$ é nilpotente. Dessa forma, se σ é um idempotente não nulo de $\widetilde{V}$ devemos ter $\alpha = 1$ e de onde segue que $\sigma = (4L_e - 4{L_e}^2) + \theta$ em que $\theta \in (\widetilde{V} \cap \widetilde{N})$. $\square$

Observação 3.1. *Se considerarmos $(N : A) = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \widetilde{N}$ em lugar da hipótese usada na proposição anterior, conclui-se que todo idempotente em $(N : A)$ é da forma $\alpha(4L_e - 4L_e^2) + \theta$ com $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ e $\theta \in (\widetilde{V} \cap \widetilde{N})$.*

Lema 3.2. *Se V é um espaço vetorial tal que $V = V_1 \oplus V_2$ e $W \subseteq V$ é um subespaço tal que $\dim W > \dim V_1$ então $V_2 \cap W \neq 0$.*

Demonstração:

Se $\dim W = n$ então existe $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ uma base de W e já que $W \subseteq V = V_1 \oplus V_2$, existem $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq V_1$ e $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subseteq V_2$ tais que $\{w_1 = x_1 + y_1, ..., w_n = x_n + y_n\}$.

Além disso, segue o conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é linearmente dependente, visto que $\dim V_1 < n$. Logo, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$, nem todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. Dessa maneira, temos que $0 \neq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in V_2 \cap W$. □

Denotaremos por $rk(\sigma)$ o posto do operador $\sigma \in M(A)$ e a seguir vamos caracterizar os elementos idempotentes de $\widetilde{V}$, quanto ao posto dos mesmos, no caso em que N é nilpotente.

Proposição 3.3. *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$, com núcleo nilpotente então os idempotentes em $\widetilde{V}$ são operadores lineares de posto r.*

Demonstração:

Já vimos que os elementos em $\widetilde{V}$ podem ser considerados como operadores em $N = U \oplus V$ e já que $\sigma^2 = \sigma$ temos que $N = \ker \sigma \oplus \mathrm{Im}\sigma$. Pelo Lema 3.1 os elementos idempotentes em $\widetilde{V}$ são da forma $\sigma = (4L_e - 4L_e^2) + \theta$ com $\theta \in \widetilde{V} \cap \widetilde{N}$. Logo, se $rk(\sigma) > r$, ou seja, $\dim \mathrm{Im}\sigma > \dim U$, então pelo Lema 3.2 existe $0 \neq v \in \mathrm{Im}\sigma \cap V$. Assim, $v = \sigma(v) = ((4L_e - 4L_e^2) + \theta)(v) = \theta(v)$, absurdo pois $\theta \in \widetilde{N}$ que é nilpotente. Por outro lado, se $rk(\sigma) < r$ então $\dim \ker \sigma > s$ e novamente pelo Lema 3.2, existe $0 \neq u \in U \cap \ker \sigma$ tal que $0 = \sigma(u) = ((4L_e - 4L_e^2) + \theta(u)) = u + \theta(u)$, que equivale a $\theta(u) = -u$, contrariando outra vez a nilpotência de θ. Concluímos então que $rk(\sigma) = r$, para todo idempotente $\sigma \in \widetilde{V}$. □

Corolário 3.1. *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$, com núcleo nilpotente então*

(i) *os idempotentes de $M(A)$ de peso 1 têm posto 1 ou $1+r$;*

(ii) *os idempotentes de $(N : A)$ têm posto r.*

Demonstração:

Suponhamos $\sigma \in M(A)$ um idempotente de peso 1, então pela primeira parte Proposição 3.2 temos que $\sigma = (2L_e^2 - L_e) + \psi_x + \theta$, em que θ é um idempotente de $\widetilde{V}$ e $x \in \ker \theta$. Assim, se $\theta = 0$ temos $\sigma = (2L_e^2 - L_e) + \psi_x$. Logo, para todo $\alpha \in F$ e $n \in N$ temos $\sigma(\alpha e + n) = ((2L_e^2 - L_e) + \psi_x)(\alpha e + n) = \alpha e + \alpha x = \alpha(e + x)$ com $\alpha \in F$ e onde x e e são fixos. Dessa forma, σ tem posto 1. Agora, se $\theta \neq 0$ então pela proposição anterior $rk(\theta) = r$ e portanto σ tem posto $1 + r$.

Quando σ é um idempotente em $(N : A)$ temos, pela segunda parte da Proposição 3.2, que $\sigma = \psi_x + \theta$ em que θ é um idempotente em $\widetilde{V}$ e $x \in \mathrm{Im}\theta$. Conseqüentemente temos que $rk(\sigma) = rk(\theta) = r$. □

Vimos anteriormente que o idempotente $4L_f - 4L_f^2$ é projeção sobre o subespaço U_f, qualquer que seja o idempotente $f \in A$. Assim, $4L_f - 4L_f^2 \in (N : A)$ tem posto r. E apesar desses operadores não serem os únicos idempotentes em $\widetilde{V}$, os demais também têm posto r.

Exemplo 3.1. *Seja* $A = Fe \oplus U \oplus V$ *uma álgebra de Bernstein de tipo* $(1 + 5, 3)$ *com* $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ *uma base de* U *e* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *uma base de* V *e a seguinte tábua de multiplicação*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	v_1	v_2	v_3
u_1	v_3	v_2		$-v_1$		u_5		
u_2	v_2		v_1					
u_3		v_1					$-u_5$	
u_4	$-v_1$							$2u_5$
u_5								
v_1	u_5							
v_2			$-u_5$					
v_3				$2u_5$				

Temos que A é nuclear, pois $U^2 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = V$ e portanto tem núcleo nilpotente. Vamos verificar que o operador $\sigma = (4L_e - 4L_e^2) + 2L_eL_{u_1} - \dfrac{1}{2}\psi_{u_1}$ é um idempotente com $\mathrm{Im}\sigma = U$ e $\ker\sigma = \{v - u_1v; v \in V\}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \left[(4L_e - 4L_e^2) + 2L_eL_{u_1} - \frac{1}{2}\psi_{u_1}\right]^2 \\
&= (4L_e - 4L_e^2) + (4L_e - 4L_e^2)\left(2L_eL_{u_1} - \frac{1}{2}\psi_{u_1}\right) \\
&+ \left(2L_eL_{u_1} - \frac{1}{2}\psi_{u_1}\right)(4L_e - 4L_e^2) + \left(2L_eL_{u_1} - \frac{1}{2}\psi_{u_1}\right)^2 \\
&= (4L_e - 4L_e^2) + 2L_eL_{u_1} - \frac{1}{2}\psi_{u_1} = \sigma.
\end{aligned}$$

Além disso, para todo $u \in U$, $v \in V$ e $\alpha \in F$:

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha e + u + v) &= \left[(4L_e - 4L_e^2) + 2L_eL_{u_1} - \frac{1}{2}\psi_{u_1}\right](\alpha e + u + v) \\
&= u + \left(2L_eL_{u_1} - \frac{1}{2}\psi_{u_1}\right)(v) \\
&= u + u_1v \in U
\end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Im}\sigma \subseteq U$ e visto que, para cada $u' \in U$ temos $\sigma(\alpha e + u') = u'$, então $U \subseteq \mathrm{Im}\sigma$.

Também sabemos que $\sigma(\alpha e + u + v) = 0$ se, e somente se, $u = -u_1v$. Além disso, como $\ker\sigma = \{u + v; \sigma(u + v) = 0\}$ temos

$$\begin{aligned}
\ker\sigma &= \{v - u_1v; v \in V\} \\
&= \langle v_1 - u_1v_1, v_2 - u_1v_2, v_3 - u_1v_3 \rangle \\
&= \langle v_1 - u_5, v_2, v_3 \rangle.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar agora, que σ não é a restrição a N de nenhum operador da forma $4L_f - 4L_f^2$, com $f = e + u_0 + u_0^2$. Com efeito, se σ fosse a restrição supracitada então de $\mathrm{Im}\sigma = U$ resultaria em $U = U_f = \{u + 2uu_0; u \in U\}$, ou seja, $2uu_0 = 0$ para todo $u \in U$, que implicaria em $u_0 \in L = Fu_5$. Também teríamos, $V_f = \{v - 2(u_0 + u_0^2)v; v \in V\} = \{v - 2\lambda u_5; v \in V\} = V \neq \ker\sigma$. Contradição ao fato de $N = \ker\sigma \oplus \mathrm{Im}\sigma$.

A seguir, veremos que para algumas subclasses das álgebras de Bernstein, essa afirmação é verdadeira.

Proposição 3.4. *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein normal então todo idempotente de $\widetilde{V}$ é a restrição a N de algum operador da forma $4L_f - 4L_f^2$, para algum idempotente $f \in A$.*

Demonstração:

Visto que A é normal, temos $V_e = V_f$ para quaisquer idempotentes $e, f \in A$. E, por (2.25), $\widetilde{V} = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \{L_u - 2L_eL_u; u \in U\}$. Dessa forma, dados $\sigma \in \widetilde{V}$ e $u' \in U$ temos que $\sigma = (4L_e - 4L_e^2) + L_u - 2L_eL_u$ com $\mathrm{Im}\sigma = \{u + u'u; u \in U\} = U_f = \{u + 2uu_0; u \in U\}$. Logo, $u_0 = \frac{1}{2}u'$ e $f = e + \frac{1}{2}u' + \frac{1}{4}u'^2$, para algum $u' \in U$. Além disso, teremos também que $\ker\sigma = \{v - 2(u_0 + u_0^2)v; v \in V\} = \{v - 2u_0v - 2u_0^2v; v \in V\} = V = V_f$. Dessa maneira, $\sigma = 4L_e - 4L_e^2\,|_N$ para o idempotente $f = e + \frac{1}{2}u' + \frac{1}{4}u'^2 \in A$. □

Quando A está na classe das álgebras de Bernstein n-excepcionais com $n \leq 1$, classe que contém as normais, nem sempre é válido o resultado obtido na proposição anterior. O exemplo visto a pouco ilustra esse fato. Veremos a seguir, que embora não coincidam, necessariamente, com o operador $4L_f - 4L_f^2$ para algum idempotente $f \in A$, os idempotentes de posto r, nesse caso, são projeções sobre algum subespaço U_f.

Proposição 3.5. *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein com grau de excepcionalidade $n \leq 1$. Então todo idempotente de $\widetilde{V}$ tem imagem contida em U_f, para algum idempotente $f \in A$.*

Demonstração:

Se A é n-excepcional com $n \leq 1$ então, pelo ítem (iii) do Teorema 2.2 temos que $\widetilde{V}_{00} = 0$

e pela 2.10, $\widetilde{V}_{01} = \{L_u - 2L_eL_u; u \in U\}$. Logo, dado $\sigma = (4L_e - 4L_e^2) + \theta_{11} + \theta_{10} + \theta_{01}$ um idempotente em $\widetilde{V}$ com $\theta_{ij} \in \widetilde{V}_{ij}$ temos que $\sigma^2 = \sigma$ se, e somente se,

$$[(4L_e - 4L_e^2) + \theta_{11} + \theta_{10} + \theta_{01}]^2 = (4L_e - 4L_e^2) + \theta_{11} + \theta_{10} + \theta_{01}$$

o que, por (2.11) e (2.12), equivale a

$$\begin{cases} \theta_{11}^2 + \theta_{11} + \theta_{10}\theta_{01} = 0 \\ \theta_{11}\theta_{10} = 0 \\ \theta_{01}\theta_{11} = 0 \\ \theta_{01}\theta_{10} = 0 \end{cases}$$

Agora, tomando $u' \in U$ tal que $\theta_{01} = L_{u'} - 2L_eL_{u'}$ temos que $\theta_{01}(u) = (L_{u'} - 2L_eL'_u)(u) = u'u$ para todo $u \in U$. Vamos mostrar que $\mathrm{Im}\sigma \subseteq U_f$ com $f = e + \frac{1}{2}u' + \frac{1}{4}u'^2 \in A$. De fato, segue das relações anteriores e da Proposição 2.7 que

$$\begin{aligned} \sigma(u+v) &= u + \theta_{11}(u) + \theta_{10}(v) + \theta_{01}(u) \\ &= u + \theta_{11}(u) + \theta_{10}(v) + u'u + \theta_{01}\theta_{11}(u) + \theta_{01}\theta_{10}(v) \\ &= u + \theta_{11}(u) + \theta_{10}(v) + u'u + u'\theta_{11}(u) + u'\theta_{10}(v) \\ &= (u + \theta_{11}(u) + \theta_{10}(v)) + u'(u + \theta_{11}(u) + \theta_{10}(v)) \in U_f \end{aligned}$$

pois $u + \theta_{11}(u) + \theta_{10}(v) \in U_f$. □

Assim, usando a Proposição 3.5 e o Corolário 3.1 obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.2. *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein n-excepcional, com grau de excepcionalidade $n \leq 1$ e núcleo nilpotente. Então todo idempotente em $(N : A)$ é projeção sobre U_f, para algum idempotente $f \in A$.* □

Nos próximos resultados estaremos descrevendo os idempotentes em $\widetilde{N}$, visando a caracterização das álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente através de sua álgebra de multiplicações.

Proposição 3.6. *Se σ é um idempotente de $\widetilde{N}$ então $Im\sigma \subseteq L$.*

Demonstração:

Consideremos a álgebra $\overline{A} = A/L$ e o epimorfismo $\Pi : M(A) \longrightarrow M(\overline{A})$ definido por $\Pi(L_x) = L_{\overline{x}}$ com $\overline{x} = x + L$. Já vimos que $\Pi(\sigma) = \overline{\sigma}$, $\Pi(\widetilde{U}) = \overline{\widetilde{U}}$ e $\Pi(\widetilde{V}_{ij}) = \overline{\widetilde{V}}_{ij}$ então $\Pi(\widetilde{N}) = \overline{\widetilde{N}}$. Como $\overline{A}$ é Bernstein-Jordan então $\overline{N}$ é nilpotente e portanto $\overline{\widetilde{N}}$ também o é. Dessa forma, visto que $\sigma \in \widetilde{N}$ é idempotente então $\overline{\sigma} = \overline{0}$, isto é, $\overline{\sigma}(a) = \overline{\sigma(a)} = \overline{0}$. Logo, $\sigma(a) + L = L$ e assim, $\sigma(a) \in L$, qualquer que seja $a \in A$. Portanto, temos que $\text{Im}\sigma \subseteq L$.□

Corolário 3.3. *Se $4L_e - 4L_e^2 \in \widetilde{N}$ então A é excepcional.*

Demonstração:

Temos que $\text{Im}(4L_e - 4L_e^2) = U$ e pela Proposição 3.6 tem-se que $\text{Im}(4L_e - 4L_e^2) \subseteq L$. Assim, $L = \text{Im}(4L_e - 4L_e^2) \subseteq U = L$ e portanto $U^2 = 0$, ou seja, A é excepcional. □

Uma conseqüência disto é que se o grau de excepcionalidade da álgebra é maior ou igual a 1, temos sempre

$$M(A) = F(2L_e^2 - L_e) \oplus F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \widetilde{N}. \tag{3.1}$$

Vale ressaltar, que grau de excepcionalidade maior ou igual a 1 é uma condição suficiente, porém, não necessária, para que tenhamos $4L_e - 4L_e^2 \notin \widetilde{N}$. Isso porque, existem álgebras excepcionais com $(N : A) = F(4L_e - 4L_e^2) \oplus \widetilde{N}$, como no caso das álgebras excepcionais com núcleo nilpotente.

A partir dos resultados obtidos na proposições 3.3 e 3.6 temos que:

Teorema 3.1. *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein com grau de excepcionalidade maior ou igual a 1 de tipo $(1+r, s)$. Então A tem núcleo nilpotente se, e somente se, todo idempotente do núcleo de $M(A)$ tem posto r.*

Demonstração:

Seja A uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$, com núcleo nilpotente. Então pelo Corolário 3.1 os idempotentes de $(N : A)$ têm posto r. Por outro lado, se N não é nilpotente então $\widetilde{N}$ também não pode ser nilpotente. Assim, já que $\widetilde{N}$ é uma álgebra associativa de dimensão finita com núcleo nilpotente, existe $\sigma \in \widetilde{N}$ idempotente e pelo Corolário 3.3 temos $\mathrm{Im}\sigma \subseteq L \subsetneq U$, ou seja, $rk(\sigma) < r$. □

Na próxima seção vamos investigar outras características dos idempotentes de $M(A)$ para álgebras de Bernstein arbitrárias.

3.3 Idempotentes em álgebras de Bernstein arbitrárias

Vimos que quando A não tem núcleo nilpotente, existem idempotentes em $\widetilde{N}$ e na Proposição 3.6 estudamos uma característica desses idempotentes. Agora, obteremos mais algumas informações sobre esses elementos.

Proposição 3.7. *Um elemento $\sigma \in \widetilde{N}$ é idempotente se, e somente se, $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{10}$ em que $\sigma_{11} \in \widetilde{V}_{11}$ é um idempotente e $\sigma_{10} \in \widetilde{V}_{10}$ é um elemento com imagem contida na imagem de σ_{11}.*

Demonstração:

Seja $\sigma = \psi_x + \sigma_{11} + \sigma_{10} + \sigma_{01} + \sigma_{00} \in \widetilde{N}$ um idempotente. Então para todo $u \in U$ e

$v \in V$, temos

$$\begin{aligned} \sigma(u+v) &= (\psi_x + \sigma_{11} + \sigma_{10} + \sigma_{01} + \sigma_{00})(u+v) \\ &= \sigma_{11}(u) + \sigma_{10}(v) + \sigma_{01}(u) + \sigma_{00}(v) \\ &= \sigma_{11}(u) + \sigma_{10}(v) \in L \end{aligned}$$

Logo, $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{10}$. Além disso, $\sigma^2 = \sigma$ equivale a

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{10} &= (\sigma_{11} + \sigma_{10})^2 \\ \sigma_{11} + \sigma_{10} &= \sigma_{11}^2 + \sigma_{11}\sigma_{10} + \sigma_{10} + \sigma_{11} + \sigma_{10}\sigma_{10} \end{aligned}$$

e assim, $\sigma_{11} = \sigma_{11}^2$ é um idempotente de $\widetilde{V}_{11}$. Como $\sigma_{11}(\sigma_{10}(a)) = \sigma_{10}(a)$ para todo $a \in A$, então $\mathrm{Im}\sigma_{10} \subseteq \mathrm{Im}\sigma_{11}$. $\square$

De forma análoga, a caracterização das álgebras de Bernstein com núcleo nilpotente através dos idempotentes de sua álgebra de multiplicações dada no Teorema 3.1, os próximos resultados, nos fornecem informações sobre o posto dos idempotentes de $M(A)$, no caso em que A é uma álgebra de Bernstein arbitrária.

Lema 3.3. *Para toda álgebra de Bernstein A, sempre existe um número inteiro $k \geq 1$ tal que $N^k \subseteq L$.*

Demonstração:

Considerando a álgebra $\overline{A} = A/L$, que é Bernstein-Jordan e portanto tem núcleo nilpotente, existe $k \geq 0$ tal que $\overline{N}^k = \overline{0}$ e portanto, $N^k \subseteq L$. $\square$

Lema 3.4. *Para todo $\sigma \in M(A)$ e $v \in V$ com $v \neq 0$ tem-se que $\sigma(v) \neq v$.*

Demonstração:

Suponhamos $\sigma \in M(A)$ e $v \in V$ tal que $\sigma(v) = v$. Como $(N : A) = F(4L_e - 4L_e^2) + \widetilde{N}$ e podemos escrever $\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \beta(4L_e - 4L_e^2) + \theta$, com $\theta \in \widetilde{N}$. Então $v = \sigma(v) = \theta(v)$, ou seja, $v = \theta^k(v)$, para todo $k \geq 1$. Assim, usando o Lema 3.3 e os resultados obtidos na observação 2.5, temos que $v = \theta^k(v) \in N^{k+1} \subseteq L$ para algum $k \geq 1$, e assim, $v \in V \cap L = \{0\}$. Portanto, não existe $0 \neq v \in V$ com $\sigma(v) = v$ qualquer que seja $\sigma \in M(A)$. □

Corolário 3.4. *Se A é uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $s > 0$ então $M(A)$ não contém o operador identidade em A.*

Demonstração:

Se $\sigma \in M(A)$ é o operador identidade de A então $\sigma(v) = v$ para todo $v \in V$ e já que $s > 0$, existe $0 \neq v \in V$ tal que $\sigma(v) = v$, o que contradiz a proposição anterior. □

Proposição 3.8. *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ então os idempotentes de $(N : A)$ têm posto menor ou igual a r.*

Demonstração:

Pela segunda parte da Proposição 3.2 basta mostrarmos que o resultado é válido para idempotentes de $\widetilde{V}$, que podem ser considerados operadores lineares de N. Assim, supondo que existe um idempotente $\sigma \in \widetilde{V}$ de posto maior que r, temos pelo Lema 3.2 que existe $0 \neq v \in V \cap \mathrm{Im}\sigma$, o que também é uma contradição ao lema anterior. Dessa maneira, fica provado que todo idempotente em $(N : A)$ tem posto menor ou igual a r. □

Corolário 3.5. *Os elementos idempotentes de $M(A)$ têm posto menor ou igual a $r + 1$.*

Demonstração:

Seja $\sigma \in M(A)$ um elemento idempotente. Se $\sigma \in (N : A)$ então segue da proposição anterior que $rk(\sigma) \leq r$ e portanto, nesse caso, o resultado é válido. Se σ tem peso 1 então pela primeira parte da Proposição 3.2, temo $\sigma = (2L_e^2 - L_e) + \psi_x + \theta$ com $\theta \in \widetilde{V}$ idempotente e $x \in \ker\theta \cap (U \oplus U^2)$. Assim, $rk(\sigma) = 1 + rk(\theta) \leq 1 + r$. □

Os resultados vistos nessa seção, serão muito úteis no desenvolvimento do restante deste trabalho, principalmente na próxima seção que constitui o ápice deste estudo.

3.4 Sobre o invariante $\rho(A)$

Nesta seção definimos o principal objeto de estudo deste trabalho, a saber, o posto máximo dos elementos de $M(A)$. Vimos na seção anterior que, se A é de tipo $(1+r, s)$ com $s \geq 1$, o operador identidade em A não é um elemento da sua álgebra de multiplicações. Mais especificamente, para essas álgebras, nenhum operador inversível de $\mathrm{End}(A)$ pertence a $M(A)$, conforme mostra a proposição a seguir.

Proposição 3.9. *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r, s)$, com $s \geq 1$. Então $M(A)$ não contém elementos inversíveis de $End(A)$.*

Demonstração:

Suponha que exista $\sigma \in M(A)$ inversível e seja $\Phi : M(A) \longrightarrow M(A)$ definida por $\Phi(\theta) = \theta\sigma$ para todo $\theta \in M(A)$. Esse operador linear é injetor, pois dados $\theta_1, \theta_2 \in M(A)$ tais que $\Phi(\theta_1) = \Phi(\theta_2)$ então $\theta_1\sigma = \theta_2\sigma$ e já que σ é inversível teremos $\theta_1 = \theta_2\sigma\sigma^-1 = \theta_2$. Portanto, também é sobrejetor e assim, para cada $\sigma \in M(A)$ existe $\theta \in M(A)$ tal que $\theta\sigma = \sigma$. Logo, $\theta\sigma\sigma^-1 = \sigma\sigma^-1$ que equivale a $\theta = Id_A$. Contradição, pois já mostramos que a identidade não está em $M(A)$ quando $s \geq 1$. Dessa forma, $M(A)$ não possui elementos inversíveis. $\square$

Como conseqüência da proposição anterior temos que nas álgebras de Bernstein de tipo $(1+r,s)$ com $s \geq 1$ todo elemento é um divisor de zero. De fato, já que nenhum elemento de $M(A)$ é inversível, se tomarmos, por exemplo o operador $L_x \in M(A)$ temos sempre que $\ker L_x \neq \{0\}$, ou seja, existe $0 \neq a \in \ker L_x$ tal que $L_x(a) = xa = 0$.

A proposição anterior não é válida se $s = 0$, pois neste caso o operador L_e é inversível. A álgebra de multiplicações de uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+r,0)$ já foi descrita em [7], por isso doravante estaremos sempre considerando $s \geq 1$.

Para cada álgebra de Bernstein A de tipo $(1+r,s)$ com $s \geq 1$, vamos definir o invariante numérico

$$\rho(A) = \max\{rk(\sigma); \sigma \in M(A)\}.$$

Usando a proposição anterior, podemos estabelecer uma limitação para esse invariante. Já que, nesse caso, nenhum operador em $M(A)$ é inversível, temos que $\rho(A) < \dim A$ e se tomarmos o operador L_e vemos facilmente que o mesmo tem posto $1+r$. Assim,

$$1 + r \leq \rho(A) \leq s + r$$

A seguir, temos o estudo de $\rho(A)$ em alguns casos particulares.

(1) Se A é excepcional de tipo $(1+r,s)$ então $\rho(A) = 1+r$. Com efeito, dada $\sigma \in M(A)$ temos que $\sigma(A) \subseteq A^2$ e $\dim A^2 = 1+r$, já que por hipótese $U^2 = 0$. Assim, $rk(\sigma) \leq 1+r$ e portanto $\rho(A) = 1+r$.

(2) Da mesma forma, no caso em que A é normal tem-se $\rho(A) = 1+r$. De fato, mostraremos este fato valendo-nos dos resultados obtidos no Teorema 2.2 e usando a decomposição de Peirce de $M(A)$. Tomando $\sigma \in M(A)$, já que $\widetilde{V}_{10} = \widetilde{V}_{00} = 0$, temos que $\sigma = \alpha(2L_e^2 - L_e) + \psi_x + \theta_{11} + \theta_{01}$ com $\alpha \in F$, $x \in U \oplus U^2$ e $\theta_{ij} \in \widetilde{V}_{ij}$. Logo, $\sigma(v) = 0$

para todo $v \in V$, ou seja, $\sigma(Fe \oplus U)$ gera a imagem de σ e portanto $\dim \sigma \leq 1 + r$. Assim, $\rho(A) = 1 + r$.

Em ambos os casos temos A com grau de excepcionalidade $n \leq 1$, sugerindo então uma ligação entre o fato de $\rho(A)$ ser mínimo e o grau de excepcionalidade da álgebra.

Proposição 3.10. *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ então $\rho(A) = 1 + r$ se, e somente se, o grau de excepcionalidade de A é menor ou igual a 1.*

Demonstração:

Se $A = Fe \oplus U + V$ é uma álgebra de Bernstein n-excepcional com $n \leq 1$ de tipo $(1 + r, s)$ então $U(UV) = 0$ implica em $UV \subseteq L$. Logo, se $v \in V$ e $x = \alpha e + u_1 + v_1 \in A$, com $u_1 \in U$ e $v_1 \in V$, temos que $xv = (\alpha e + u_1 + v_1)v = u_1 v + v_1 v \in UV + V^2 \subseteq L$. Assim, se $U = L \oplus J$ então para todo $\sigma \in M(A)$ tem-se $\sigma(N) \subseteq L + \sigma(J)$. De fato, dados $v \in V$ e $u \in L$, temos que $\sigma(u), \sigma(v) \in L$, visto que L é ideal. Desse modo, $Im\sigma = \sigma(Fe) + \sigma(N) \subseteq \sigma(Fe) + L + \sigma(J)$ tem dimensão menor ou igual a $1 + r$ e portanto, $\rho(A) = 1 + r$.

Reciprocamente, se $U(UV) \neq 0$ existem $u_1, u_2 \in U$ e $v_1 \in V$ tais que $u_1(u_2 v_1) \neq 0$. Seja $\sigma = L_e + 2L_{u_1} L_e L_{u_2}$ temos que $\sigma(e) = e + \frac{1}{2}u_1 u_2$, $\sigma(u) = \frac{1}{2}u$ e $\sigma(v) = u_1(u_2 v)$, para todo $u \in U$ e $v \in V$. Dessa maneira, se $\{x_1, ..., x_r\}$ é base de U então o conjunto $\{\sigma(e)\sigma(x_1), ..., \sigma(x_r), \sigma(v_1)\}$ é linearmente independente, o que significa dizer que, $rk(\sigma) \geq r + 2$, ou seja, $\rho(A) \geq r + 2$. □

Veremos a seguir, um exemplo que mostra uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ com $\rho(A) = r + 2$.

Exemplo 3.2. *Consideremos uma álgebra comutativa A de base $\{e, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2\}$*

cuja tábua de multiplicação de N é dada por

	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2
u_1				$-v_2$	u_3	
u_2			v_2		u_4	
u_3		v_2				
u_4	$-v_2$					
v_1	u_3	u_4				
v_2						

Com a função ω definida por $\omega(e) = 1$ e nula nos outros elementos da base dada. Essa álgebra é Bernstein com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U \oplus V$, em que U é gerado por $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ e V por $\{v_1, v_2\}$. Observando a tabela de multiplicações de A, vemos que A é do tipo $(5, 2)$ e $U(UV) \neq 0$, já que $u_1(u_2v_1) = -v_2 \neq 0$. Portanto, pela proposição anterior, temos $\rho(A) \geq r + 2 = 6$ e por outro lado, já tínhamos $\rho(A) \leq r + s = 6$. Logo, $\rho(A) = r + 2 = 6$. De fato, tomando $\sigma = L_e - 2L_{u_1}L_eL_{u_2} \in M(A)$ temos que $\mathrm{Im}\sigma = \langle \sigma(e), \sigma(u_1), \sigma(u_2), \sigma(u_3), \sigma(u_4), v_2\rangle = \langle e - \frac{1}{2}u_1u_2, \frac{1}{2}u_1, \frac{1}{2}u_2, \frac{1}{2}u_3, \frac{1}{2}u_4, v_2\rangle$.

Segue do corolário 1.6 do lema 1.1 que este exemplo exibe uma álgebra de menor dimensão para a qual $\rho(A) > r + 1$.

Se A é n-excepcional com $n \leq 1$ e conseqüentemente $\rho(A) = r + 1$, então cada $e \in I_p(A)$ é um elemento que verifica a igualdade $rk(L_e) = \rho(A)$. Uma questão que provém disto, é saber se para cada álgebra de Bernstein A, existe um elemento $x \in A$ que satisfaça tal propriedade. Como resposta a este questionamento, temos:

Proposição 3.11. *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ então $rk(L_x) \leq 1 + r$ para todo $x \in A$.*

Demonstração:

Sejam $x = \alpha e + u_0 + v_0 \in A$, com $u_0 \in U$, $v_0 \in V$ e $\alpha \in F$, e $I = \{u \in U; uu_0 = 0 = u(u_0v_0)\}$. Esse conjunto é um subespaço vetorial de U e para quaisquer $u \in I$ e $v \in V$ temos que

$$\begin{aligned} L_x(u)u_0 &= ((\alpha e + u_0 + v_0)u)u_0 \\ &= \left(\frac{\alpha}{2}u + uv_0\right)u_0 \\ &= u_0(uv_0) \\ &= -u(u_0v_0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_x(u)(u_0v_0) &= \left(\frac{\alpha}{2}u + uv_0\right)(u_0v_0) \\ &= (uv_0)(u_0v_0) = 0 \end{aligned}$$

$$L_x(v)u_0 = (u_0v + vv_0)u_0 = 0$$

$$L_x(v)(u_0v_0) = (uv_0)(u_0v_0) = 0$$

e portanto, $L_x(u)$ e $L_x(v)$ são elementos de I. Dessa forma, se considerando J um subespaço de U, tal que $U = J \oplus I$ temos que $L_x(A) = L_x(Fe) + L_x(U) + L_x(V) = L_x(Fe) + L_x(J) + L_x(I) + L_x(V) \subseteq L_x(Fe) + L_x(J) + I$ tem dimensão no máximo $1 + r$. Conseqüentemente, $rk(L_x) \leq 1 + r$. □

Corolário 3.6. *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ então, existe $x \in A$ com $rk(L_x) = \rho(A)$ se, e somente se, o grau de excepcionalidade de A é menor ou igual a 1.* □

Lema 3.5. *Dada uma álgebra de Bernstein arbitrária $A = Fe \oplus U \oplus V$, então o subespaço $I = (UV + L) \oplus U(UV)$ é um ideal de A.*

Demonstração:

Sejam $uv + l + u_1(u_2v_1)$ um elemento de I e $x = \alpha e + u' + v'$ um elemento arbitrário em A, com $u, u', u_1, u_2 \in U$, $v, v'v_1 \in V$ e $l \in L$. Então,

$$\begin{aligned}(uv + l + u_1(u_2v_1))(\alpha e + u' + v') &= \frac{\alpha}{2}uv + \frac{\alpha}{2}l + (uv)u' \\ &+ (uv)v' + lv' + (u_1(u_2v_1))u' + (u_1(u_2v_1))v' \in I\end{aligned}$$

pois $\frac{\alpha}{2}uv + (u_1(u_2v_1))u' + (uv)v' \in UV$, $\frac{\alpha}{2}l + lv' + (u_1(u_2v_1))v' \in L$ e $(uv)u' \in U(UV)$. □

Na próxima proposição estabelecemos um limitante para o invariante $\rho(A)$, dependendo do subespaço $U(UV)$. E já que $U(UV) \subseteq U^2 \subseteq V$, $\dim U(UV)$ é invariante.

Proposição 3.12. *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus V_e$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ tal que $\dim U(UV) = t$. Então, $\rho(A) \leq 1 + r + t$.*

Demonstração:

Supondo $\dim(UV + L) = k$, então $\dim I = k + t$. Seja $\{u_1, u_2, ..., u_k\}$ uma base de $UV + L$ e $\{u_1, u_2, ..., u_k, u_{k+1}, ..., u_r\}$ sua extensão a uma base de U. Então para $u \in U$ existe $u' = \sum_{i=1}^{k} u_i \in UV + L$ e $u'' = \sum_{i=k+1}^{r} u_i$ tais que $u = u' + u''$. Observa-se também que para todo $\sigma \in M(A)$ temos

$$\sigma(A) \subseteq \langle \sigma(e), \sigma(u_{k+1}), ..., \sigma(u_r) \rangle + I.$$

De fato, tomando $x \in A$ então $x = \alpha e + \sum_{i=1}^{r} u_i + v$ e assim $\sigma(x) = \alpha\sigma(e) + \sum_{i=1}^{r} \sigma(u_i) + \sigma(v)$, de onde segue que

$$\sigma(x) = \alpha\sigma(e) + \sum_{i=1}^{k} \sigma(u_i) + \sum_{i=k+1}^{r} \sigma(u_i) + \sigma(v) \in \langle \sigma(e), \sigma(u_{k+1}), ..., \sigma(u_r) \rangle + I$$

pois $\sigma(v) \in UV + L \subseteq I$ e $\sum_{i=1}^{k} \sigma(u_i) \in I$. Portanto, $rk(\sigma) \leq 1 + r - k + \dim I$, isto é, $rk(\sigma) \leq 1 + r - k + k + t = 1 + r + t$. $\square$

Corolário 3.7. *Se* $A = Fe \oplus U \oplus V$ *é uma álgebra de Bernstein de tipo* $(1 + r, s)$ *e* $\dim U(UV) = 1$. *Então,* $\rho(A) = r + 2$.

Demonstração:

Como $U(UV) \neq 0$, segue da Proposição 3.10 que $\rho(A) \geq r + 2$ e a proposição anterior nos garante que $\rho(A) \leq r + 2$. $\square$

Também podemos estabelecer outro limitante para $\rho(A)$ dependendo diretamente do anulador da álgebra. Seja W o subespaço de V complementar ao anulador de A, então $A = Fe \oplus U \oplus W \oplus \text{ann}A$. Além disso, para todo $\sigma \in M(A)$ temos que $\text{ann}A \subseteq \ker \sigma$. Logo,

$$\rho(A) \leq 1 + r + s - \dim \text{ann}A \tag{3.2}$$

Exemplo 3.3. *Seja* $A = Fe \oplus U \oplus V$ *a álgebra de Bernstein de tipo* $(11, 10)$ *sendo* $\{u_1, u_2, ..., u_{10}\}$ *base de* U, $\{v_1, v_2, ..., v_{10}\}$ *base de* V *e a seguinte tábua de multiplicação do núcleo:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
u_1	v_1	v_2					v_4	v_5				$-u_3$	$2u_4$			u_5	u_7			
u_2	v_2	v_3			$-v_4$	$-v_5$					$2u_3$	$-u_4$				u_6	u_8			
u_3																				
u_4																				
u_5		$-v_4$																		
u_6		$-v_5$																		
u_7	v_4																			
u_8	v_5																			
u_9																				
u_{10}																				
v_1		$2u_3$																		
v_2	$-u_3$	$-u_4$																		
v_3	$2u_4$																			
v_4																				
v_5																				
v_6	u_5	u_7																		
v_7	u_6	u_8																		
v_8																				
v_9																				
v_{10}																				

Nesta álgebra temos que $\mathrm{ann}A = \langle u_3, u_4, u_9, u_{10}, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{10}\rangle$ e $U(UV) = \langle v_4, v_5\rangle$ e portanto têm dimensão 9 e 2, respectivamente. Logo, pela identidade (3.2) temos que $rk(\sigma) \leq 1 + r + s - 9 = 10 = r + 2$ e já que A é 2-excepcional temos que $\rho(A) = r + 2$. Com efeito, tomando $\sigma L_e - 2L_{u_1}L_eL_{u_2} \in M(A)$ tem-se conseqüentemente que $\mathrm{Im}\sigma = \langle \sigma(e), \sigma(u_1), ..., \sigma(u_{10}), \sigma(v_1), ..., \sigma(v_{10})\rangle = \langle e - \frac{1}{2}v_2, \frac{1}{2}u_1, ..., \frac{1}{2}u_{10}, v_4, v_5\rangle$.

Vejamos outro exemplo para o qual exibimos um operador linear $\sigma \in M(A)$ tal que $\rho(A) = rk(\sigma)$.

Exemplo 3.4. *Seja A a álgebra de Bernstein de tipo $(9, 3)$ com $\{u_1, u_2, ..., u_{10}\}$ base de U, $\{v_1, v_2, ..., v_{10}\}$ base de V e a seguinte tábua de multiplicação do núcleo:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	v_1	v_2	v_3
u_1				$-v_2$					u_3		
u_2			v_2						u_4		
u_3		v_2									
u_4	$-v_2$										
u_5								$-v_3$	u_7		
u_6							v_3		u_8		
u_7						v_3					
u_8					$-v_3$						
v_1	u_3	u_4			u_7	u_8					
v_2											
v_3											

Neste exemplo temos $\text{ann}A = U(UV) = \langle v_2, v_3 \rangle$. Logo, pela identidade (3.2) temos que $rk(\sigma) \leq 1 + r + s - 2 = 10 = r + 2$ e já que A é 2-excepcional temos que $\rho(A) = r + 2$. Com efeito, o operador $\sigma = (2L_e^2 - L_e) + (4L_e - 4L_e^2) - (L_{u_1} - 2L_e L_{u_1})(2L_e L_{u_2} - \frac{1}{2}\psi_{u_2}) \in M(A)$ tem posto 10.

Através da Proposição 3.12 e por 3.2, a autora [13] conseguiu dois limitantes superiores para $\rho(A)$. O primeiro depende diretamente do subespaço $U(UV)$ e o segundo, do anulador da álgebra. Porém, algumas questões envolvendo o invariante $\rho(A)$ permanecem em aberto. Entre elas duas questões a seguir

- Se dados inteiros positivos r, s, p com $r + 1 \leq p \leq r + s$, existe uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$ tal que $\rho(A) = p$.

- Se é possível melhorar a limitação de $\rho(A)$ dada na Proposição 3.12, para cada tipo fixado.

Concentramos nossos esforços para tentar responder o primeiro questionamento. A proposição a seguir apresenta uma resposta para o primeiro problema para o caso em que $r \leq 3$.

Proposição 3.13. *Dados inteiros r, s, p com $r \leq 3$ e $1 + r \leq p \leq r + s$, existe uma álgebra de Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ tal que $\rho(A) = p$, se e só se, $p = r + 1$.*

Demonstração:

Já que $r \leq 3$ então $U(UV) = 0$ e assim, conforme Proposição 3.10 o grau de excepcionalidade n de A é menor ou igual a 1 e portanto $\rho(A) = r + 1 = p$. O algoritmo 1, dado em [8, pág.28] gera uma álgebra de Bernstein 1-excepcional do tipo $(1 + r, s)$. □

Exemplo 3.5. *Seja $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1 + 2, 2)$ com $\{u_1, u_2\}$ base de U, $\{v_1, v_2\}$ base de V e a seguinte tábua de multiplicação do núcleo:*

	u_1	u_2	v_1	v_2
u_1	v_1			
u_2				
v_1				u_2
v_2			u_2	u_2

Nesta álgebra temos que $U(UV) = 0$ e portanto $\rho(A) = 1 + r = 3$.

Uma pergunta natural que surge a partir da proposição anterior é a seguinte: e no caso em que a dimensão de U é maior ou igual a 4. Os resultados a seguir, respondem em parte esse questionamento.

Proposição 3.14. *Se A é uma álgebra de Bernstein 2-excepcional de tipo $(1+r,s)$, com $r=4$ então $\rho(A)=r+2$.*

Demonstração:

Se A é uma álgebra de Bernstein 2-excepcional de tipo $(1+r,s)$, com $r=4$ então pela Proposição 3.10 temos que $\rho(A)\geq r+2$. Por outro lado, segue da Proposição 3.12 que $\rho(A)\leq 1+r+\dim U(UV)$ e decorre da Proposição 3.13 em [13] que, nesse caso, $\dim U(UV)\leq 1$ e assim, $\rho(A)\leq r+2$. Portanto, $\rho(A)=r+2$. $\square$

Corolário 3.8. *Dados inteiros r,s,p com $r=4$ e $s\geq 2$, existe uma álgebra de Bernstein do tipo $(1+r,s)$ tal que $\rho(A)=p$, se e só se, $p\in\{5,6\}$.*

Demonstração:

Se $r=4$ então para $p=5=1+r$ e $p=6=r+2$ obtemos o resultado usando as Proposição 3.13 e 3.14, respectivamente. $\square$

Exemplo 3.6. *Consideremos $A=Fe\oplus U\oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+4,3)$ com $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ base de U, $\{v_1,v_2,v_3\}$ base de V e tendo a seguinte tábua de multiplicação do núcleo:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2	v_3
u_1	v_1	v_2				$-u_3$	$2u_4$
u_2	v_2	v_3			$2u_3$	$-u_4$	
u_3							
u_4							
v_1		$2u_3$					
v_2	$-u_3$	$-u_4$					
v_2	$2u_4$						

Neste exemplo temos que $U(UV) = 0$ e portanto $\rho(A) = 1 + r = 5$. Já vimos que o operador L_e tem posto $1 + r$.

Quanto a melhorar a limitação para $\rho(A)$, o que se pode fazer é melhorar essa limitação para subtipos de algumas álgebra de Bernstein de tipo $(1 + r, s)$. Por exemplo, segue diretamente de [3] que:

Proposição 3.15. *Se A é uma álgebra de Bernstein 2-excepcional de tipo $(1+r, s)$ e subtipo $(r - 2, s)$ então $r + 2 \leq \rho(A) \leq r + 3$.*

Demonstração:

Se A é uma álgebra de Bernstein 2-excepcional de tipo $(1 + r, s)$ e subtipo $(r - 2, s)$ então segue do corolário 4.5 em [3] temos que $2 \leq s \leq 3$ e como $U(UV) \neq 0$ temos que $r + 2 \leq \rho(A) \leq r + 3$. □

Também em [3] é encontrada uma limitação para a dimensão do subespaço U^2 para a subclasse de álgebras de Bernstein 2-excepcionais que satisfazem $U(U(U(UV))) = 0$.

A seguir veremos alguns exemplos de álgebras de Bernstein 2-excepcionais geradas através do algoritmo 3 dado em [3] para compararmos os dois limitantes superiores.

Exemplo 3.7. *Consideremos a álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus V$ de tipo $(17, 23)$ com $\{u_1, u_2, ..., u_{16}\}$ base de U, $\{v_1, v_2, ..., v_{23}\}$ base de V e a seguinte tábua de multiplicação do núcleo:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	$\cdots$	u_{16}	v_1	v_2	v_3	$\cdots$	v_{23}
u_1	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6				v_{22}				$-u_7$	$-u_8$		u_9
u_2	v_2	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}			$-v_{22}$				u_7				u_{10}
u_3	v_3	v_8	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}							$2u_8$				
u_4	v_4	v_9	v_{13}	v_{16}	v_{17}	v_{18}											
u_5	v_5	v_{10}	v_{14}	v_{17}	v_{19}	v_{20}											
u_6	v_6	v_{11}	v_{15}	v_{18}	v_{20}	v_{21}											
u_7																	
u_8																	
u_9		$-v_{22}$															
u_{10}	v_{22}																
u_{11}																	u_{11}
u_{12}																	u_{12}
u_{13}																	u_{13}
u_{14}																	u_{14}
u_{15}																	u_{15}
u_{16}																	u_{16}
v_1																	
v_2																	
v_3																	
$\vdots$																	
v_{23}	u_9	u_{10}															

Nesta álgebra temos que $U(UV) = \langle v_{22} \rangle$ e portanto $\dim U(UV) = 1$ o que implica que $\rho(A) = r + 2$, pois A é 2-excepcional. Neste caso, a limitação dada na proposição 3.12 é mais eficaz, já que $\dim \mathrm{ann} A = 21$.

No entanto, observemos o exemplo a seguir:

Exemplo 3.8. *Seja A a álgebra de Bernstein de tipo $(15, 20)$ com $\{u_1, u_2, ..., u_{14}\}$ base de U, $\{v_1, v_2, ..., v_{20}\}$ base de V e cuja tábua de multiplicação do núcleo é dada a seguir:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	v_1	$\ldots$	v_{18}	v_{19}	v_{20}
u_1	v_1	v_2	v_3	v_4			v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}					u_5	u_6	u_{13}
u_2	v_2	v_5	v_6	v_7	$-v_{11}$	$-v_{12}$			v_{17}								u_7	u_8	u_{14}
u_3	v_3	v_6	v_8	v_9	$-v_{13}$	$-v_{14}$	$-v_{17}$										u_9	u_{10}	
u_4	v_4	v_7	v_9	v_{10}	$-v_{15}$	$-v_{16}$											u_{11}	u_{12}	
u_5		-v_{11}	$-v_{13}$	$-v_{15}$															
u_6		$-v_{12}$	$-v_{14}$	$-v_{16}$															
u_7	v_{11}		$-v_{17}$																
u_8	v_{12}																		
u_9	v_{13}	v_{17}																	
u_{10}	v_{14}																		
u_{11}	v_{15}																		
u_{12}	v_{16}																		
u_{13}																			
u_{14}																			
v_1																			
$\vdots$																			
v_{18}	u_5	u_7	u_9	u_{11}															
v_{19}	u_6	u_8	u_{10}	u_{12}															
v_{20}	u_{13}	u_{14}																	

Temos que $\dim \operatorname{ann} A = 19$ e como $\rho(A) \geq 1 + r + s - \dim \operatorname{ann} A$, já que A também é 2-excepcional, então $\rho(A) = r + 2$. No entanto, $\dim U(UV) = 7$.

Lema 3.6. *Se $A = Fe \oplus U \oplus V$ é uma álgebra de Bernstein n-excepcional com $n \geq 2$ de tipo $(1 + r, s)$ então $r + 2 \leq \rho(A) \leq min\{1 + r + \dim U(UV), 1 + r + s - \dim annA\}$.* □

A autora mostra em [3] que, para toda terna de inteiros (r, s, z) com $r \geq s \geq 5$ e $3 < z \leq \frac{1}{2}(s + 3 - r_1)$ onde r_1 é o resto da divisão de $s - 3$ por 2, existe uma álgebra de Bernstein 2-excepcional de tipo $(1+r, s)$ e subtipo $(r-2, z)$. Isso se demonstra usando o algoritmo 3. E já que nas álgebras de Bernstein 2-excepcionais geradas pelo citado algoritmo temos sempre que $U(UV) = \langle u_i u_j | 1 \leq i \leq r, r - t + 1 \leq j \leq r\rangle = \langle v_{a+1}, v_{a+2}, ..., v_z\rangle$ em que $t = \dim(UV+V^2)$ e $a = \frac{1}{2}(r-t)(r-t+1)$. Dessa forma, usando a proposição 3.12 temos:

Proposição 3.16. *Dados inteiros (r, s, z) com $r \geq s \geq 5$ e $3 < z \leq \frac{1}{2}(s + 3 - r_1)$ onde r_1 é o resto da divisão de $s - 3$ por 2, existe uma álgebra de Bernstein 2-excepcional de tipo*

$(1+r,s)$ e subtipo $(r-2,z)$ com $\rho(A) \leq r + \frac{1}{2}(s+3-r_1) - 2$.

Corolário 3.9. *Seja A uma álgebra de Bernstein 2-excepcional satisfazendo as condições da proposição anterior, se $s=5$ ou $s=6$ então $\rho(A) = r+2$.*

Exemplo 3.9. *Consideremos $A = Fe \oplus U \oplus V$ uma álgebra de Bernstein de tipo $(1+4,3)$ com $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ base de U, $\{v_1,v_2,v_3\}$ base de V e tendo a seguinte tábua de multiplicação do núcleo:*

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
u_1	v_1	v_2		v_4							u_3	
u_2	v_2	v_3	$-v_4$								u_4	
u_3		$-v_4$										
u_4	v_4											
u_5												u_5
u_6												u_6
v_1												
v_2												
v_3												
v_4												
v_5	u_3	u_4										
v_6					u_5	u_6						

Temos nesta álgebra que $UV = \langle u_3,u_4,u_5,u_6 \rangle$ e $U(UV) = \langle v_4 \rangle$. Portanto, pelo corolário anterior, temos que $\rho(A) = 2+r = 8$ e verifica-se que o operador $\sigma = L_e - L_{u_1}L_eL_{u_2}$, neste caso, tem posto 8.

De modo análogo, autora também mostra em [3] que, para toda terna de inteiros (r, s, z) com $4 \leq r \leq s-1$ e $3 < z \leq \frac{1}{2}(r+4-r_1)$ onde r_1 é o resto da divisão de $r-2$ por 2, existe uma álgebra de Bernstein 2-excepcional de tipo $(1+r, s)$ e subtipo $(r-2, z)$. Dessa forma, usando a proposição 3.12 e a proposição 4.9 em [3] temos:

Proposição 3.17. *Dados inteiros* (r, s, z) *com* $4 \leq r \leq s-1$ *e* $3 < z \leq \frac{1}{2}(r+4-r_1)$ *onde* r_1 *é o resto da divisão de* $r-2$ *por 2, existe uma álgebra de Bernstein 2-excepcional de tipo* $(1+r, s)$ *e subtipo* $(r-2, z)$ *com* $\rho(A) \leq \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}r_1$.

Corolário 3.10. *Seja A uma álgebra de Bernstein 2-excepcional satisfazendo as condições da proposição anterior, se* $4 \leq r \leq 6$ *então* $\rho(A) = r+2$.

O exemplo anterior também serve para ilustrar este último resultado.

Referências Bibliográficas

[1] ALBERT, A.A.,*Structure of algebras*, Am. Math. Soc, Colloquium Publications vol XXIV, (1939).

[2] ALBERT, A.A.,*The radical of a nonassociative algebra*, Bull Amer. Math. Soc, 48, $891-897$ (1942).

[3] BEZERRA, Maria de Nazaré Carvalho. *Sobre os subtipos nas álgebras de Bernstein n-excepcionais*, Tese de Doutourado- IME-USP, 2003.

[4] CHEVALLEY, C., *The construction and study of certain important algebras*, The Mathematical Society of Japan (1955).

[5] CORTÉS, T. Montaner, *On the structure of Bernstein algebras*, J. London, Math. Soc. (2) 51, $41-52$ (1995).

[6] COSTA, R. Ikemoto, L.S. and Suazo, A.: *The multiplication algebra of a Bernstein algebra*, Comm. in Alg. **26**(11), 3727-3736, (1998).

[7] COSTA, R. Ikemoto, L.S. and Suazo, A.: *The multiplication algebra of a Bernstein algebra : basic results*, Comm. in Alg. **24**(5), 1809-1821, (1996).

[8] FINSTON, D.R., *On multiplication algebras*, Trans. Am. Math. Soc, 293 (2) $807-818$ (1986).

[9] GRISHKOV, A. N., *On the genetic property of Bernstein algebras*, Soviet, Math. dokl., (3)35, 489 – 436, (1987).

[10] HENTZEL, I. R.; PERESI L. A., *Semi-prime Bernstein algebras*, Arch, Math. , 52, 539 – 543, (1989).

[11] JACOBSON, N., *A note on nonassociative algebras*, Duke Math. J. 3 544 – 548 (1937).

[12] LYUBICH, Y.I., *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics 22, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1995.

[13] MURAKAMI, Lucia Satie Ikemoto . *A álgebra de multiplicações uma álgebra de Bernstein*, Tese de Dotourado- IME-USP, 1999.

[14] MURAKAMI, Lucia Satie Ikemoto . *Algebras de Bernstein: Resultados Recentes*, Dissertação de Mestrado- IME-USP, 1995.

[15] PICANÇO, J. ; COSTA, R. *Invariance of dimension of p-subspaces in Bernstein algebras.* Communications in Algebra, New York, v. 27, n. 8, p. 4039-4055, 1999.

[16] PICANÇO, J. *Supespaços invariantes em algumas álgebras Báricas*, Tese de Doutourado - IME-USP, 1998.

[17] PRITCHARD, F.L., *Ideals in the multiplication algebra of a nonassociative K-algebra*, Comm. Algebra, 21 (12), 4541 – 4559 (1993).

[18] SHAFER, R.D.,*An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic Press , 1966.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo