SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - PPGME

ESTABILIDADE POLINOMIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDA

Por: Silvana da Costa Gomes

Orientador

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém
2007

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - PPGME

ESTABILIDADE POLINOMIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito final para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Belém
2007

ESTABILIDADE POLINOMIAL DE UM SISTEMA ACOPLADO DE EQUAÇÕES DE ONDA

Silvana da Costa Gomes

Belém, 15 de junho de 2007

....

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha
Coordenador do PPGME-UFPA

Banca Examinadora

....

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
UFPA
Orientador

....

Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark
UFF
Examinador

....

Prof. Dr. Marcus P. da C. da Rocha
UFPA
Examinador

....

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
FACI
Examinador

Aos meus pais, irmãos e amigos.

Agradecimentos

• A Deus, por estar sempre do lado de todos nós, em todos os momentos de nossas vidas.

• A Universidade Federal do Pará - UFPA.

• Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME.

• Ao professor Marcus Rocha, Coordenador do PPGME, pela forma como conduz a direção do nosso programa.

• Ao meu orientador professor Mauro Santos, por me conceder o prazer do seu valioso auxílio, se mostrando sempre solícito as minhas infindáveis dúvidas.

• Ao meu professor e irmão querido Antonio por ter contribuído de modo decisivo na conclusão desta dissertação e ter sido meu companheiro na longa jornada.

• Agradeço de um modo especial aos professores importantes, que de certo modo me incentivaram para que eu chegasse até aqui, são eles: Jorge Ferreira, João Protázio, Renato Guerra, Ducival Pereira, Maria José e Adilson.

• A minha mãe Benedita que nunca exitou em me conceder a oportunidade de buscar o conhecimento.

• A meu inesquecível pai, Benjamim que sei que se estivesse vivo também estaria dando uma grande força neste trabalho.

• A minha irmã Simone que também me incentivou a estudar, além disso, me ajuda na luta do dia dia.

• Aos bons amigos do mestrado que de um modo geral, foram pessoas que me ajudaram nos momentos difíceis. Dentre eles, Telma (secretária), Reiville, Hércio, Rosinha, Antenor, Irazel, Luiz Neto, Helena, Pedrão, Baena, Raquel, Adiel, Aubedir, Márcio Bahia, Elizardo, Lindomar, Leandro, Heleno , Carlos Alessandro, Paula, Silvia, Renato Lobato, Deiziane, Carla e outros.

• Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram de maneira positiva.

Deus de fato joga dados.
E o problema é que muitas vezes ele os lança em lugares que não enxergamos.

Stephen W. Hawking,
Astrofísico e Matemático Inglês

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar existência, unicidade, estabilização não exponencial e o decaimento polinomial do seguinte sistema acoplado de equações de onda

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ u = v = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty), \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 & \text{em } \Omega, \\ u_t(0) = u_1, v_t(0) = v_1 & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Usaremos as técnicas de Semigrupos, Teorema de Gearhart e o método da energia.

Palavras Chaves: Semigrupos, estabilização não exponencial, decaimento polinomial.

Abstract

In this work we study the existence, uniqueness, non exponential stabilization and the polynomial decay of the following coupled system

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u = v = 0 & \text{on } \Gamma \times (0,\infty), \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 & \text{in } \Omega, \\ u_t(0) = u_1, v_t(0) = v_1 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

We use semigroup tecnical, Gearhart Theorem and energy method.

Keywords: Semigroup, non exponential stabilization, polynomial decay.

Sumário

Resumo **7**

Abstract **8**

1 Introdução **10**

2 Semigrupos **12**

2.1 Definições e Teoremas Importantes 12

3 Sistema Acoplado de Equações de Onda **22**

3.1 Existência e Unicidade de Solução Global 22

3.2 Estabilização não Exponencial 24

4 Decaimento Polinomial **26**

Bibliografia **32**

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar existência, unicidade, estabilização não exponencial e o decaimento polinomial do seguinte sistema acoplado de equações de onda

$$u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{1.1}$$

$$v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, \infty), \tag{1.2}$$

$$u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times (0, \infty), \tag{1.3}$$

$$u(0) = u_0, v(0) = v_0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{1.4}$$

$$u_t(0) = u_1, v_t(0) = v_1 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{1.5}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, limitado com fronteira Γ regular e α é um número real positivo bastante pequeno.

O modelo acima representa a evolução de um sistema, consistindo de duas membranas elásticas sujeita a uma força elástica, que une uma a outra através do coeficiente α (veja [9]).

É bem conhecido (veja [3]) que a clássica equação de onda

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty), \\ \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \\ \end{cases}$$

descreve um sistema conservativo. Por outro lado, é também conhecido (veja [3], [11], [14]) que a equação de onda com termo de amortecimento

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = 0 & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0, \infty), \\ \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & \text{em } \Omega, \\ \end{cases}$$

é exponencialmente estável.

Neste trabalho demonstraremos que o sistema de equações de onda (1.1) - (1.5) é bem posto e polinomialmente estável.

Vários autores estudaram o sistema (1.1) - (1.5), dentre eles destacamos [7], [8] e suas referências, que mostraram que o sistema (1.1) - (1.5) é bem posto e polinomialmente estável. A principal diferença aqui é para dar uma nova demonstração da estabilidade polinomial, utilizando o teorema de Gearhart e argumentos de técnicas multiplicativas. Este é um fato novo na literatura.

Os capítulos seguintes são organizados como segue: no capítulo 2 serão apresentados os resultados básicos da teoria de semigrupos, fundamentais no desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 3 demonstraremos existência, unidade e decaimento não exponencial para o problema (1.1) - (1.5). No capítulo 4 demonstraremos que o problema (1.1) - (1.5) não é exponencialmente estável, porém é polinomialmente estável e apresentaremos alguns exemplos de aplicação do principal resultado.

Capítulo 2

Semigrupos

Apresentaremos neste capítulo os principais aspectos da teoria de semigrupos, que utilizaremos nos capítulos seguintes.

2.1 Definições e Teoremas Importantes

Sejam X um espaço de Banach real ou complexo e por $\pounds = \{T : X \to X : T$ é linear contínuo$\}$, estaremos denotando o espaço dos operadores lineares contínuos de X em X com a norma usual

$$||T|| = \sup_{x\in X}\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} = \sup_{\|x\|=1}\{\|Tx\| : x \in X\}.$$

Definição 2.1.1. Um semigrupo de operadores lineares em X é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \pounds(X)$ tal que
$(i) T(0) = I$ (Identidade em $\pounds(X)$);
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall\ t, s \geq 0$.

Definição 2.1.2. Dizemos que o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente contínuo, se

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Definição 2.1.3. Dizemos que o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é fortemente contínuo (ou $C_0 -$ *semigrupo*) se

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x, \quad \forall\ x \in X. \tag{2.1}$$

A equação (2.1), é equivalente a seguinte equação

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Definição 2.1.4. Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo em X, seu gerador infinitesimal é o operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ definido por

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$\mathcal{D}(A) = \left\{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad existe\right\}.$$

Observe que

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x|_{t=0},$$

para $x \in \mathcal{D}(A)$.

Definição 2.1.5. Seja X um espaço de Banach real ou complexo e X^* seu dual. Indicaremos o valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$. Para cada $x \in X$, definimos o conjunto dualidade $F(x) \subseteq X^*$ por

$$F(x) = \{x^* \in X^*; Re\langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Observação. O Teorema de Hahn-Banach assegura que $F(x) \neq \phi$.

Definição 2.1.6. Um operador A é dissipativo se para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ existe um $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Teorema 2.1.1. Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 - semigrupo, então existem contantes ω e $M \geq 0$ tal que

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \in [0, \infty[.$$

Demonstração: Vamos inicialmente mostrar que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitada, para $0 \leq t < \eta$. De fato, caso contrário, existiria uma sequência (t_m), com $t_m \geq 0$ tal que

$$\lim_{m \to \infty} t_m = 0 \quad \text{e} \quad \|T(t_m)\| \geq M.$$

Do Teorema da Limitação Uniforme, segue que, para algum $x \in X$, a sequência $\{\|T(t_m)x\|\}$ é ilimitada, o que contraria (2.1). Logo, existem $M \geq 0$ e $\eta \geq 0$ tais que

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq \eta.$$

Como $\|T(0)\| = 1$ e $M \geq 1$, seja $\omega = \eta^{-1} logM$. Assim $M = e^{\eta\omega}$. Dado $t \geq 0$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \delta < \eta$, tais que $t = n\eta + \delta$, ou seja, $n = \dfrac{t}{\eta} - \dfrac{\delta}{\eta}$ e portanto, por propriedade de semigrupo, temos

$$\begin{aligned}\|T(t)\| = \|T(n\eta + \delta)\| = \|T(n\eta)T(\delta)\| &= \|T\underbrace{(\eta + \eta + ... + \eta)}_{n\ vezes}T(\delta)\| = \|\underbrace{T(\eta)T(\eta)...T(\eta)}_{n\ vezes}T(\delta)\| \\ &= \|[T(\eta)]^n T(\delta)\| = \|[T(\eta)]^n\|\|T(\delta)\| = \|T(\eta)\|^n\|T(\delta)\| \leq M^n M = M^{\frac{t}{\eta} - \frac{\delta}{\eta}} M \leq M^{\frac{t}{\eta}} M \\ &\leq e^{\omega t} M = Me^{\omega t},\end{aligned}$$

para todo $0 \leq t < \infty$. $\square$

Corolário 2.1.2. Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um $C_0 - semigrupo$, então para cada $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua de $\mathbb{R}^+$ em X.

Demonstração. Veja [5].

Definição 2.1.7. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 - semigrupo. Segue-se do teorema 2.1.1, que existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para $t \geq 0$. Se $\omega = 0, \|T(t)\| \leq M$, o semigrupo é chamado uniformemente limitado. No caso, em que $\omega = 0$ e $M = 1$, o semigrupo é chamado de contrações.

Definição 2.1.8. Se A é um operador linear em X, não necessariamente limitado, o conjunto resolvente $(\rho(A))$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ para os quais $\lambda I - A$ é inversível e $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador limitado em X. A família $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ é chamada de resolvente de A.

Teorema 2.1.3. Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ um $C_0 -$ *semigrupo* e A seu gerador infinitesimal. Então:

a) $\forall x \in X, \quad \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x;$

b) $\forall x \in X, \quad \displaystyle\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A)$ e $A\left(\displaystyle\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x;$

c) $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ e $t \geq 0, \ T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ e $\dfrac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$ para $t > 0;$

d) $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ e $t, s \geq 0, \quad T(t)x - T(s)x = \displaystyle\int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$

Demonstração. Veja [5].

Corolário 2.1.4. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, então $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.
Demonstração. Veja [5].

Teorema 2.1.5.. Sejam A o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $\mathcal{D}(A^n)$ o domínio de A^n. Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ é denso em X.

Demonstração. Veja [5].

Teorema 2.1.6.(Hille-Yosida) Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações se e somente se

(i) A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$;

(ii) O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Como A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$, então pelo corolário 2.1.4, A é fechado e $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$. Para cada $\lambda > 0$ e $x \in X$, seja $R(\lambda) : X \to X$ definido por

$$R(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)xdt. \tag{2.2}$$

Como a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua e uniformemente limitada em $[0, \infty)$, a integral (2.3) existe como uma integral imprópria, segundo Riemann, e define um operador $R(\lambda)$ linear limitado satisfazendo

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\|T(t)x\|dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|, \forall \lambda > 0.$$

Além disso, multiplicando (2.3) por $\dfrac{T(h)-1}{h}$, obtemos, para $h>0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{T(h)-1}{h}\right)R(\lambda)x &= \left(\frac{T(h)-1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\\ &= \frac{T(h)}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h)T(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança $t+h=s$ na primeira integral, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{T(h)-1}{h}\right)R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - frac1h\left(\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt + \int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right)\\ &= \left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right)\left[\int_h^0 e^{-\lambda t}T(t)xdt + \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right] + \frac{1}{h}\int_h^0 e^{-\lambda t}T(t)xdt\\ &= \left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Como o lado direito de (2.4) converge para $\lambda R(\lambda)x - x$, temos $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ e

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x. \qquad (2.4)$$

Ou seja

$$x = \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x = (\lambda I - A)R(\lambda)x.$$

Assim $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$, para todo $\lambda > 0$. Para cada $x \in \mathcal{D}(A)$, temos

$$\begin{aligned}R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt\\ &= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right) = AR(\lambda)x. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

De (2.5) e (2.6), obtemos $R(\lambda)(\lambda I - A)x = x$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$. Assim, para $\lambda > 0, R(\lambda)$ é o inverso de $\lambda I - A$, e satisfaz a estimativa (2.2). □

Os lemas seguintes são fundamentais na demonstração de (i) e (ii).

Lema 2.1.7. Suponha que A satisfaz as condições (i) e (ii) do teorema 2.1.6 e seja $R(\lambda, A)$ $= (\lambda I - A)^{-1}$. Então

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \ \forall \ x \in X.$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $x \in \mathcal{D}(A)$, logo de (2.5) e (2.6), obtemos

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|AR(\lambda, A)x + x - x\| = \|R(\lambda, A)Ax\|.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|R(\lambda, A)Ax\| \leq \|R(\lambda, A)\|\|Ax\|.$$

Pelo ítem (ii) do teorema 2.1.6, temos

$$\|R(\lambda, A)\|\|Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0,$$

quando $\lambda \to \infty$ em $\mathcal{D}(A)$. Como $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$, então $\lambda R(\lambda, A)x \to x$, quando $\lambda \to \infty$, para todo $x \in X$.

Para todo $\lambda > 0$, consideremos a aproximação de Yosida A_λ de A dada por

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda(\lambda R(\lambda, A) - I) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I. \tag{2.6}$$

É imediato que, para cada $\lambda > 0$, A_λ é um operador linear contínuo em X e é consequência imediata do lema 2.1.7 e de (2.6), que se $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax.$$

□

Lema 2.1.8. Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do teorema 2.1.6. Se A_λ é a apro-ximação de Yosida de A, então A_λ, é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ}. Além disso, para cada $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$, temos

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Demonstração. Decorre de (2.7), que A_λ é um operador linear limitado, então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo e^{tA_λ} uniformemente contínuo de operadores lineares em X. Também de (2.7), temos

$$e^{tA_\lambda} = e^{t(\lambda^2 R(\lambda,A) - \lambda I)} = e^{t\lambda^2 R(\lambda,A) - t\lambda I} = e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)} e^{-t\lambda I}.$$

Daí vem que

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\| &= \|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)} e^{-t\lambda I}\| = e^{-t\lambda}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\| \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda,A)\|} \leq e^{-t\lambda} e^{\lambda^2 t \frac{1}{\lambda}} = e^{-t\lambda} e^{t\lambda} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$ é um semigrupo de contrações. Para quaisquer $\lambda, \mu > 0$ se verifica que $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$. Mostraremos que

$$e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x = \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x\right) ds.$$

De fato,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x\right) ds = \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x\right) |_0^1 \\ &= e^{tA_\lambda}.e^0 x - e^0.e^{tA_\mu} x = e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x. \end{aligned}$$

Então

$$\| \, e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| = \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\right)ds \right\|$$
$$leq \int_0^1 \|tA_\lambda e^{tsA_\lambda}.e^{t(1-s)A_\mu}x - tA_\mu.e^{t(1-s)A_\mu.e^{tsA_\lambda x}}\|ds$$
$$= \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda}.e^{t(1-s)A_\mu}\left(A_\lambda x - A_\mu x\right)\|ds = \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda}.e^{t(1-s)A_\mu}\|.\|A_\lambda x - A_\mu x\|ds$$
$$= \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda}\|.\|e^{t(1-s)A_\mu}\|.\|A_\lambda x - A_\mu x\|ds = \int_0^1 t\|e^{tA_\lambda}\|^s.\|e^{tA_\mu}\|.\|e^{tA_\mu}\|^{-s}\|A_\lambda x - A_\mu x\|ds.$$

Como

$$\|e^{tA_\lambda}\|^s \leq 1, \|e^{tA_\mu}\| \leq 1 \quad \text{e} \quad \|e^{tA_\mu}\|^{-s} \leq 1,$$

então

$$\| \, e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq \int_0^1 t\|A_\lambda x - A_\mu x\|, \;\; \forall \; t \geq 0. \tag{2.7}$$

De (2.8) segue o resultado. $\square$

Voltemos agora à demonstração do teorema 2.1.6 (Hille-Yosida). Seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Logo

$$\|e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| = t\|A_\lambda x - Ax + Ax - A_\mu x\|$$
$$\leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\|.$$

De (2.8) e do lema 2.1.8, segue-se que, para $x \in \mathcal{D}(A)$, $e^{tA_\lambda}x$ converge, quando $\lambda \to \infty$, e a convergência é uniforme para t em intervalos limitados. Como $\mathcal{D}(A)$ é denso em X e $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1$, segue que para cada $x \in X$ e $t \geq 0$, existe

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda},$$

e por definição

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} = T(t)x. \tag{2.8}$$

Segue de (2.9) que $T(0) = I$ e $\|T(t)\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$. Também, para cada $x \in X$, a aplicação $t \mapsto T(t)x$ é contínua para $t \geq 0$, como limite uniforme de funções contínuas. Assim, $T(t)$ é um C_0-semigrupo de contrações em X. Para concluirmos a demonstração, mostraremos que A é o gerador infinitesimal de $T(t)$.

De fato, seja $x \in \mathcal{D}(A)$, então do teorema 2.1.3, obtemos

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}x) - x$$
$$= \lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}x - x)$$
$$= \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t \frac{d}{dt}(e^{sA_\lambda}x)ds$$
$$= \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t A_\lambda x e^{sA_\lambda} = \int_0^t \left(\lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}A_\lambda x\right)ds = \int_0^t T(s)Axds. \tag{2.9}$$

Esta última igualdade segue da convergência uniforme de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ a $T(t)Ax$ para t em intervalos limitados.

Seja B o gerador infinitesimal de $\{T(t) : t \geq 0\}$ e seja $x \in \mathcal{D}(A)$. Dividindo (2.10) por $t > 0$ e fazendo $t \to 0$, concluímos que $x \in D(B)$ e que $Bx = Ax$. Assim, $A \subseteq B$ (B é uma extensão de A). Como B é gerador infinitesimal de $T(t)$, segue das condições necessárias que $1 \in \rho(B)$, além disso, como $A \subseteq B$, temos que

$$(I - A)D(A) = X = (I - B)D(A)$$

e

$$(I - B)D(A) = X = (I - B)D(B).$$

Logo obtemos

$$D(B) = (I - B)^{-1}X = D(A)$$

e, portanto $A = B$, o que conclui a demonstração. $\square$

Corolário 2.1.9. Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, então

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x, \quad \forall x \in X. \tag{2.10}$$

Demonstração: Do teorema (2.1.6), segue que o lado direito de (2.11) define um C_0 - semigrupo de contrações $S(t)$ cujo gerador infinitesimal é A e pela unicidade do gerador infinitesimal, concluímos que $T(t) = S(t)$. $\square$

Corolário 2.1.10. Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$. O conjunto resolvente de A contém o semi-plano $\{\lambda : Re\lambda > 0\}$ e para tais λ

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Demonstração: O operador $R(\lambda)x = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$ está bem definido para λ, satisfazendo $Re\lambda > 0$.

Na prova da primeira parte do teorema 2.1.6, foi demonstrado que $R(\lambda)\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = (\lambda I - A)^{-1}$, portanto $\rho(A) \supset \{\lambda : Re\lambda > 0\}$ e a estimativa é imediata. $\square$

Teorema 2.1.11. Um operador A é dissipativo se e somente se

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|, \ \forall \ x \in \mathcal{D}(A), \ \lambda > 0.$$

Demonstração: Suponhamos que A é dissipativo e sejam $\lambda > 0$ e $x \in \mathcal{D}(A)$. Se $x^* \in F(x)$ e $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$, então

$$\|(\lambda I - A)x\|.\|x\| = \|\lambda x - Ax\|.\|x^*\|. \tag{2.11}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}&\|\lambda x - Ax\|.\|x^*\| \geq |\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle| \geq Re\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle = Re\left(\langle \lambda x, x^*\rangle - \langle Ax, x^*\rangle\right)\\ &= Re\langle \lambda x, x^*\rangle - Re\langle Ax, x^*\rangle = \lambda Re\langle x, x^*\rangle - Re\langle Ax, x^*\rangle.\end{aligned}$$

Como $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$, então

$$\lambda Re\langle x, x^*\rangle - Re\langle Ax, x^*\rangle \geq \lambda Re\langle x, x^*\rangle = \lambda\|x\|^2.$$

Portanto,

$$\|(\lambda I - A)x\|.\|x\| \geq \lambda\|x\|^2. \tag{2.12}$$

Como $\|x\| \neq 0$, então de (2.13), segue o resultado.

Reciprocamente, seja $x \in \mathcal{D}(A)$ e suponhamos que

$$\lambda\|x\| \leq \|(\lambda I - A)x\|, \;\; \forall \;\lambda > 0.$$

Sejam $y_\lambda^* \in F(\lambda x - Ax)$ e $z_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|}$, então $\|z_\lambda^*\| = 1$ e

$$\begin{aligned}&\lambda\|x\| \leq \|\lambda x - Ax\| = \|\lambda x - Ax\|.\|z_\lambda^*\| = \langle \lambda x - Ax, z_\lambda^*\rangle = \langle \lambda x, z_\lambda^*\rangle - \langle Ax, z_\lambda^*\rangle\\ &= \lambda Re\langle x, z_\lambda^*\rangle - Re\langle Ax, z_\lambda^*\rangle\\ &\leq \lambda Re|\langle x, z_\lambda^*\rangle| - Re\langle Ax, z_\lambda^*\rangle.\end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\lambda Re|\langle x, z_\lambda^*\rangle| - Re\langle Ax, z_\lambda^*\rangle \leq \lambda\|x\|.\|z_\lambda^*\| - Re\langle Ax, z_\lambda^*\rangle = \lambda.\|x\| - Re\langle Ax, z_\lambda^*\rangle.$$

Logo, $\lambda\|x\| \leq \lambda.\|z_\lambda^*\| - Re\langle Ax, z_\lambda^*\rangle, \;\; \forall \;\lambda > 0$. Portanto

$$Re\langle Ax, z_\lambda^*\rangle \leq 0. \tag{2.13}$$

Dividindo a desiguadade (2.14) por $\lambda > 0$, obtemos

$$\|x\| \leq Re\langle Ax, z_\lambda^*\rangle - \frac{1}{\lambda}Re\langle Ax, z_\lambda^*\rangle,$$

o que resulta em

$$Re\langle x, z_\lambda^*\rangle \geq \|x\| + \frac{1}{\lambda}Re\langle Ax, z_\lambda^*\rangle = \|x\| - \frac{1}{\lambda}Re|\langle Ax, z_\lambda^*\rangle|.$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\|x\| - \frac{1}{\lambda}Re|\langle Ax, z_\lambda^*\rangle| \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.\|z_\lambda^*\|.$$

Assim,

$$Re\langle x, z_\lambda^*\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.\|z_\lambda^*\|. \tag{2.14}$$

Como a bola unitária em X^* é compacta na topologia fraca, $\{z_\lambda^* : \lambda > 0\}$, possui um ponto de acumulação $z^* \in X^*$, com $\|z^*\| \leq 1$. De (2.14) e (2.15) segue que $Re\langle Ax, z^*\rangle \leq 0$ e $Re\langle x, z^*\rangle \geq \|x\|$. Porém $Re\langle x, z^*\rangle \leq |\langle x, z^*\rangle| \leq \|x\|$, portanto

$$Re\langle x, z^*\rangle = \|x\|.$$

Fazendo $x^* = \|x\|z^*$, temos que $x^* \in F(x)$. De fato, temos

$$Re\langle x^*, x\rangle = Re\langle \|x\|z^*, x\rangle = \|x\|Re\langle z^*, x\rangle = \|x\|.\|x\| = \|x\|^2.$$

Daí vem que $\|x^*\| = \|\|x\|z^*\| = \|x\|.\|z^*\| = \|x\|$. Portanto $x^* \in F(x)$.

Mostraremos, agora, que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$. De fato, sabemos que $Re\langle Ax, z^*\rangle \leq 0$, logo $Re\left\langle Ax, \dfrac{x^*}{\|x\|}\right\rangle \leq 0$. Ou ainda, $\dfrac{1}{\|x\|}Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$. Portanto $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$, e assim A é dissipativo. $\square$

Teorema 2.1.12. (Lumer-Phillipis). Seja A um operador linear em X com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em X.
(i) Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem, $R(\lambda_0 I - A) = X$, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações em X.
(ii) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 - semigrupo de contrações sobre X, então $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e todo $x^* \in F(x)$, temos que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.
Demonstração:
(i) Seja $\lambda > 0$. Sendo A dissipativo temos

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|, \quad \forall \ x \in \mathcal{D}(A). \tag{2.15}$$

Visto que $R(\lambda_0 I - A) = X$, de (2.16) com $\lambda = \lambda_0$, segue-se que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado e, portanto fechado. Então $\lambda_0 I - A$ é fechado e assim A é fechado.

Se $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$, então de (2.16) segue que $\rho(A) \supseteq]0, \infty[$ e

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Do teorema de Hille-Yosida segue que A é o gerador infinitesimal de um C$_0$ - semigrupo de contrações em X.
Para completar a prova de (i) resta mostrar que $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Consideremos o conjunto $\Lambda = \{\lambda; 0 < \lambda < \infty \text{ e } R(\lambda I - A) = X\}$. Se $\lambda \in \Lambda$, então por (2.16), $\lambda \in \rho(A)$. Como $\rho(A)$ é aberto, existe uma vizinhança V de λ tal que V está contida em $\rho(A)$. A interseção desta vizinhança com a reta real está contida em Λ e, portanto Λ é aberto. Por outro lado, seja $\lambda_n \in \Lambda$, $\lambda_n \to \lambda$, com $\lambda > 0$. Para cada $y \in X$, existe $x_n \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$\lambda_n x_n - Ax_n = y. \tag{2.16}$$

De (2.16) segue que $\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n}\|y\| \leq C$, para alguma constante $C > 0$. Assim

$$\lambda_m\|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| \leq |\lambda_n - \lambda_m|\|x_n\| \leq C|\lambda_n - \lambda_m|.$$

Portanto $\{x_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{D}(A)$. Logo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Então de (2.17), $Ax_n \to \lambda x - y$. Como A é fechado, $x \in \mathcal{D}(A)$ e $\lambda x - y = Ax$. Portanto, $R(\lambda I - A) = X$. Assim, Λ também é fechado em $(0, \infty)$ e como $\lambda_0 \in \Lambda$ por hipótese, segue que $\Lambda = (0, \infty)$.

(ii) Se A é gerador infinitesimal de um C$_0$ - semigrupo de contrações $T(t)$ em X, então pelo teorema de Hille-Yosida, $\rho(A) \supset]0, \infty[$ e portanto $R(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Além disso, se $x \in D(A)$ e $x^* \in F(x)$, então

$$|\langle T(t)x, x^*\rangle| \leq \|T(t)x\|.\|x^*\| \leq \|x\|^2.$$

Como

$$Re\langle T(t)x - x, x^*\rangle = Re\langle T(t)x, x^*\rangle - Re\langle x, x^*\rangle,$$

e

$$Re\langle T(t)x, x^*\rangle \leq \langle T(t)x, x^*\rangle \leq \|x\|^2, \quad \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2,$$

então

$$Re\langle T(t)x, x^*\rangle - Re\langle x, x^*\rangle \leq 0. \tag{2.17}$$

Dividindo (2.18) por $t > 0$ e fazendo $t \to \infty$, obtemos $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. $\square$

Corolário 2.1.13. Seja A um operador com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em um espaço de Hilbert H. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contração de classe C_0 sobre H.

Demonstração. Veja [7].

O teorema seguinte é fundamental na demonstração do principal resultado deste trabalho

Teorema 2.1.14(Gearhart). Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo de contrações de classe C_0 sobre um espaço de Hilbert H. Então $S(t)$ é exponencialmente estável se e somente se

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}$$

e

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - A)^{-1}\|_H < \infty.$$

Demonstração. Veja [10].

Capítulo 3

Sistema Acoplado de Equações de Onda

3.1 Existência e Unicidade de Solução Global

Neste capítulo, estudaremos existência, unicidade de solução forte global e a estabilização não exponencial do sistema acoplado de equações de onda (1.1) - (1.5). No que segue, utilizaremos as seguintes notações: $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$, $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$, para designar o produto interno e a norma em $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente. Isto é:

$$(u,v)=\int_\Omega uv dx, \quad |u|^2=\int_\Omega u^2 dx, \quad \forall u\in L^2(\Omega)$$

e

$$((u,v))=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx, \quad ||u||^2=\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \quad \forall u\in H_0^1(\Omega).$$

Consideremos o espaço de Hilbert $H=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ munido com o seguinte produto interno

$$\langle U,V\rangle_H=\int_\Omega[\nabla u_1\cdot\nabla v_1+\nabla u_2\cdot\nabla v_2+\alpha(u_1v_2+u_2v_1)]dx+\int_\Omega[u_3v_3+u_4v_4]dx, \tag{3.1}$$

onde $U=(u_1,u_2,u_3,u_4)^T$ e $V=(v_1,v_2,v_3,v_4)^T$. Consideremos o operador $A:\mathcal{D}(A)\subset H\longrightarrow H$ com

$$\mathcal{D}(A)=[H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)]^2\times[H_0^1(\Omega)]^2$$

definido por

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\\ \Delta & -\alpha I & -I & 0\\ -\alpha I & \Delta & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Fazendo $\varphi=u_t$ e $\psi=v_t$, nas equações (1.1) e (1.2), respectivamente, obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dU}{dt}=AU$$
$$U(0)=U_0,$$

onde $U=(u,v,\varphi,\psi)^T$ e $U_0=(u_0,v_0,u_1,v_1)^T$.

Usando o produto interno (3.1), obtemos

$$
\begin{aligned}
&< AU, U >= \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u dx + \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla v dx + \alpha \int_\Omega \varphi v dx \\
&+\alpha \int_\Omega \psi u dx + \int_\Omega (\Delta u - \alpha v - \varphi)\varphi dx + \int_\Omega (\Delta v - \alpha u)\psi dx \\
&= \int_\Omega \nabla\varphi \nabla u dx + \int_\Omega \nabla\psi \nabla v dx + \alpha \int_\Omega \varphi v dx \\
&+\alpha \int_\Omega \psi u dx - \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx - \alpha \int_\Omega v\varphi dx - \int_\Omega |\varphi|^2 dx \\
&- \int_\Omega \nabla v \nabla\psi dx - \alpha \int_\Omega u\psi dx = - \int_\Omega |\varphi|^2 dx \leq 0.
\end{aligned}
$$

Desta maneira, A é um operador dissipativo. Usando este resultado podemos estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 3.1.1. O operador A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ de contração de classe C_0 sobre H.

Demonstração: Visto que $\mathcal{D}(A)$ é denso em H e A é um operador dissipativo, então para demonstrar o teorema (3.1.1), é suficiente provar que $0 \in \rho(A)$(cf.Cor.2.1.13). Consideremos $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in H$. Então existe uma única $U \in H$ (veja [2], [6]) tal que $AU = F$ isto é,

$$
\begin{cases}
\varphi = f_1, \\
\psi = f_2, \\
\Delta u - \alpha v - \varphi = f_3, \\
\Delta v - \alpha u = f_4.
\end{cases} \tag{3.2}
$$

Segue de (3.2) e da regularidade elíptica (veja [1]) que (3.2) possui uma única solução $(u, v) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2$. Portanto, $0 \in \rho(A)$ e $(u, v, \varphi, \psi) \in \mathcal{D}(A)$. Segue do corolário 2.1.13 que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $S(t)$ de contração de classe C_0 sobre H. $\square$

Corolário 3.1.1.1 Para $U_0 \in H$ o sistema (1.1)-(1.5) tem uma única solução $U \in C(0, +\infty; H)$. Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(A^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$, então a solução U é mais regular e satisfaz $U \in C^{k-j}(0, +\infty; \mathcal{D}(A^j))$ para todo $j = 0, ..., k$.

Demonstração: Sendo A o gerador infinitesial de um semigrupo $S(t)$ de contrações de classe C_0 sobre o espaço de Hilbert H, então dado $U_0 \in \mathcal{D}(A)$ temos que

$$U(t) = S(t)U_0$$

é solução do problema (1.1)-(1.5). De fato

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}U(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{U(t+h) - U(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{S(t+h)U_0 - S(t)U_0}{h} \\
&= S(t) \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h} U_0 = S(t)AU_0 = AS(t)U_0 = AU(t).
\end{aligned}
$$

Além disso, $U(0) = S(0)U_0 = U_0$.

Por outro lado, dado $U_0 \in H$ temos

$$||U(t+h) - U(t)||_H = ||S(t+h)U_0 - U(t)U_0||_H \leq ||S(t)||_H ||S(h) - I||_H ||U_0||_H \to 0$$

quando $h \to 0$, visto que $S(t)$ úm semigrupo de classe C_0. Portanto, $U \in C^0(0, +\infty; H)$. Além disso, se $U_0 \in \mathcal{D}(A^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$, então usando o mesmo argumento concluimos que a solução U é mais regular e satisfaz $U \in C^{k-j}(0, +\infty; \mathcal{D}(A^j))$ para todo $j = 0, ..., k$. $\square$

3.2 Estabilização não Exponencial

Aqui usaremos o teorema de Gearhart para demonstrar que o problema (1.1) - (1.5) não é exponencialmente estável. Para isto considere o problema espectral.

$$\begin{cases} -\Delta\omega = \lambda_\nu \omega_\nu \quad \text{em} \quad \Omega \\ \omega_\nu = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é crescente e

$$\lim_{\nu \to +\infty} \lambda_\nu = +\infty.$$

Teorema 3.2.1. Seja $S(t)$ um C_0 - semigrupo de contrações gerado por A. Então $S(t)$ não é exponencialmente estável.

Demonstração. Consideremos $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$ e denotaremos $U = (u, v, \varphi, \psi)^T$ a solução do sistema

$$i\lambda U - AU = F,$$

isto é,

$$\begin{cases} \lambda i u - \varphi = f_1, \\ \lambda i v - \psi = f_2, \\ \lambda i \varphi - \Delta u + \alpha v + \varphi = f_3, \\ \lambda i \psi - \Delta v + \alpha u = f_4. \end{cases} \tag{3.4}$$

Consideremos $u = a\omega_\nu, v = b\omega_\nu, \varphi = c\omega_\nu, \psi = d\omega_\nu$, com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Então fazendo $f_1 = f_2 = 0$ e $f_3 = f_4 = \omega_\nu$ em (3.4) e usando o problema espectral (3.3) obtemos

$$\begin{cases} \varphi = \lambda i u, \\ \psi = \lambda i v, \\ -\lambda^2 a\omega_\nu + a\lambda_\nu\omega_\nu + \alpha b\omega_\nu + c\omega_\nu = \omega_\nu, \\ -\lambda^2 b\omega_\nu + b\lambda_\nu\omega_\nu + \alpha a\omega_\nu = \omega_\nu. \end{cases} \tag{3.5}$$

Somando as duas últimas equações de (3.5), obtemos

$$-\lambda^2(a+b)\omega_\nu + (a+b)\lambda_\nu\omega_\nu + \alpha(a+b)\omega_\nu + c\omega_\nu = 2\omega_\nu.$$

Escolhendo $\lambda = \sqrt{\lambda_\nu + \alpha}$ e usando a equação anterior, obtemos $c = 2$. Logo,

$$a = \frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}, \quad b = \frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} + \frac{1}{\alpha}, \quad d = \frac{-2\alpha + i\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha}.$$

Portanto

$$\begin{cases} u = \frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}\omega_\nu, \\ v = (\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} + \frac{1}{\alpha})\omega_\nu, \\ \varphi = 2\omega_\nu, \\ \psi = \frac{-2\alpha + i\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha}\omega_\nu. \end{cases} \tag{3.6}$$

Vamos mostrar que

$$\|U\|_H \to +\infty, \quad \text{quando} \quad \nu \to +\infty.$$

De fato, de (3.6), temos que

$$\begin{aligned}
\|U\|_H^2 &= \int_\Omega \left| \left(\frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} \nabla \omega_\nu \right) \right|^2 dx + \int_\Omega \left| \left(\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} + \frac{1}{\alpha} \right) \nabla \omega_\nu \right|^2 dx \\
&+ 2\alpha \int_\Omega \left(\frac{-2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} \omega_\nu \right) \left(\frac{2i}{\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}} + \frac{1}{\alpha} \right) \omega_\nu dx + \int_\Omega |2\omega_\nu|^2 dx \\
&+ \int_\Omega \left| \left(\frac{-2\alpha + i\sqrt{\lambda_\nu + \alpha}}{\alpha} \omega_\nu \right) \right|^2 dx \longrightarrow \infty,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

quando $\nu \longrightarrow +\infty$. Lembrando que

$$i\lambda U - AU = F \Rightarrow U = (i\lambda I - A)^{-1} F, \tag{3.8}$$

segue de (3.7) e pelo teorema (2.1.14) que $S(t)$ não é exponencialmente estável. $\square$

Capítulo 4

Decaimento Polinomial

Nesse capítulo mostraremos que a energia associada ao problema (1.1)-(1.5) decai polinomialmente. Para isto usaremos o método de energia, combinado com algumas desigualdades básicas.

Teorema 4.1. Seja $U_0 \in D(A^k)$, onde $k \in \mathbb{N}^*$. Então existe uma constante positiva d tal que

$$E_1(t) \leq \frac{d}{t} \sum_{j=1}^{3} E_j(0), \quad \forall t > 0,$$

onde

$$E_1(t) := E_1(t; u, v) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |u_t|^2 + |v_t|^2 + 2\alpha uv) dx, \tag{4.1}$$

$$E_2(t) = E_1(t, u_t, v_t), \quad E_3(t) = E_1(t, u_{tt}, v_{tt}). \tag{4.2}$$

Demonstração. Multiplicando as equações (1.1) e (1.2) por u_t e v_t, respectivamente, integrando em Ω e aplicando a identidade de Green, obtemos

$$\int_\Omega u_{tt} u_t dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_t dx + \alpha \int_\Omega u_t v dx + \int_\Omega |u_t|^2 dx = 0 \tag{4.3}$$

e

$$\int_\Omega v_{tt}.v_t dx + \int_\Omega \nabla v.\nabla v_t dx + \alpha \int_\Omega u.v_t dx = 0. \tag{4.4}$$

Somando (4.4) e (4.5), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_t|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_t|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla v|^2 + \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}(2uv) + \int_\Omega |u_t|^2 dx = 0.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} E_1(t) = -\int_\Omega |u_t|^2 dx. \tag{4.5}$$

Analogamente

$$\frac{d}{dt} E_2(t) = -\int_\Omega |u_{tt}|^2 dx \tag{4.6}$$

e

$$\frac{d}{dt} E_3(t) = -\int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx. \tag{4.7}$$

Derivando a equação (1.1) em relação a t, multiplicando por v_t e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega u_{ttt}.v_t dx - \int_\Omega \Delta u_t.v_t dx + \int_\Omega u_{tt}.v_t dx = -\alpha \int_\Omega |v_t|^2 dx.$$

Usando a identidade de Green e notando que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_{tt} v dx = \int_\Omega u_{ttt} v dx + \int_\Omega u_{tt} v_t dx,$$

e

$$\frac{d}{dt}(\int_\Omega \nabla u_t \cdot \nabla v dx) = \int_\Omega \nabla u_{tt} \cdot \nabla v + \int_\Omega \nabla u_t \cdot \nabla v_t dx$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_1(t) = \int_\Omega \nabla u_{tt}.\nabla v dx + \int_\Omega u_{ttt}.v dx - \int_\Omega u_{ttt}.v_t dx - \alpha \int_\Omega v_t^2 dx,$$

onde

$$\varphi_1(t) = \int_\Omega u_{tt} v dx + \int_\Omega \nabla u_t.\nabla v dx. \tag{4.8}$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_1(t) \leq \int_\Omega \nabla u_{tt}.\nabla v dx + \int_\Omega u_{ttt}.v dx + \frac{1}{2\alpha}\int_\Omega u_{ttt}^2 dx - \frac{\alpha}{2}\int_\Omega v_t^2 dx. \tag{4.9}$$

Multiplicando a equação (1.1) por u, integrando em Ω e usando a identidade de Green, obtemos

$$\int_\Omega u_{tt} u dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_\Omega u v dx + \int_\Omega u_t u dx = 0.$$

Notando que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u dx = \int_\Omega u_{tt}.u dx + \int_\Omega |u_t|^2 dx,$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_2(t) = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \alpha \int_\Omega u v dx + \int_\Omega u_t^2 dx. \tag{4.10}$$

onde

$$\varphi_2(t) := \varphi_2(t; , u, v) = \int_\Omega u_t u dx + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx. \tag{4.11}$$

De modo análogo, considerando

$$\varphi_3(t) := \varphi_2(t; , u_{tt}, v_{tt}) + \alpha \int_\Omega u_{tt} v_t dx, \tag{4.12}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_3(t) := -\int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2 dx - \alpha \int_\Omega u_{tt} v_{tt} dx + \int_\Omega u_{ttt}^2 dx + \alpha \int_\Omega u_{ttt} v_t dx. \tag{4.13}$$

Multiplicando a equação (1.2) por v, integrando em Ω e usando a identidade de Green, obtemos

$$\int_\Omega v_{tt}.v dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \alpha \int_\Omega u.v dx = 0.$$

Visto que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v.v_t dx = \int_\Omega v_t^2 dx + \int_\Omega v.v_{tt} dx$$

obtemos

$$\frac{d}{dt}\varphi_4(t) = -\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \alpha\int_\Omega u.v dx + \int_\Omega v_t^2 dx. \tag{4.14}$$

onde

$$\varphi_4 := \int_\Omega v_t.v dx. \tag{4.15}$$

Considere o seguinte funcional

$$\pounds(t) = N_1(E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + N_2\varphi_3(t) + \varepsilon\varphi_4(t), \tag{4.16}$$

onde $N_1 > N_2 > 0$ e $\varepsilon > 0$. Então de (4.6),(4.7),(4.8),(4.10),(4.11),(4.14) e (4.15), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\pounds(t) &\leq -N_1\int_\Omega |u_t|^2 dx - N_1\int_\Omega |u_{tt}|^2 dx - N_1\int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx - \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |v_t|^2 dx + \frac{1}{2\alpha}\int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx \\
&+ \int_\Omega u_{ttt}v dx + \int_\Omega \nabla u_{tt}\nabla v dx - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \alpha\int_\Omega uv dx + \int_\Omega |u_t|^2 dx - N_2\int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2 dx \\
&+ N_2\alpha\int_\Omega u_{ttt}v_t dx + N_2\int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx - \varepsilon\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \alpha\varepsilon\int_\Omega uv dx + \varepsilon\int_\Omega |v_t|^2 dx.
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Young e Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\pounds(t) &\leq (-N_1 + 1)\int_\Omega |u_t|^2 dx - N_1\int_\Omega |u_{tt}|^2 dx + \left(\frac{1}{2\alpha} - N_1 + N_2\right)\int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx \\
&- \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |v_t|^2 dx + \frac{2}{\varepsilon_1}\int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx + \frac{C(\Omega)\varepsilon_1}{4}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{2}{\varepsilon_1}\int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2 dx + \frac{\varepsilon_1}{4}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \\
&- \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \alpha\int_\Omega uv dx - N_2\int_\Omega |\nabla u_{tt}|^2 dx + 2\alpha N_2^2\int_\Omega |u_{ttt}|^2 dx + \frac{\alpha}{4}\int_\Omega |v_t|^2 dx \\
&- \alpha\varepsilon\int_\Omega uv dx + \varepsilon\int_\Omega |v_t|^2 dx - \varepsilon\int_\Omega |\nabla v|^2 dx,
\end{aligned}$$

onde ε_1 é uma constante positiva. Logo, escolhendo N_1, N_2 suficientemente grandes, com $N_1 > N_2 > 0$, e $\varepsilon, \varepsilon_1$ bastante pequenos, com $\varepsilon > \varepsilon_1$, segue-se que existe $k > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\pounds(t) \leq -kE_1(t), \ \forall \ t > 0. \tag{4.17}$$

De (4.17) segue-se que

$$C_1\sum_{j=1}^{3} E_j(t) \leq \pounds(t) \leq C_2\sum_{j=1}^{3} E_j(t), \tag{4.18}$$

onde C_1, C_2 são constantes positivas. De (4.18) e (4.19), obtemos

$$E_1(t) \leq -\frac{1}{k}\frac{d}{dt}\pounds(t) \tag{4.19}$$

e

$$\pounds(0) \leq C_2\sum_{j=1}^{3} E_j(0). \tag{4.20}$$

Integrando (4.20) sobre $[0,t]$, temos

$$\int_0^t E_1(\tau)d\tau \leq \frac{1}{k}\pounds(0),$$

de onde segue que

$$\int_0^{+\infty} E_1(\tau)d\tau \leq \frac{1}{k}\pounds(0). \tag{4.21}$$

De (4.21) e (4.22), encontramos

$$\int_0^{+\infty} E_1(\tau)d\tau \leq \frac{1}{k}\pounds(0) \leq \frac{C_2}{k}\sum_{j=1}^{3} E_j(0). \tag{4.22}$$

Observando que

$$\frac{d}{dt}\{tE_1(t)\} = E_1 + t\frac{d}{dt}E_1(t)$$

e

$$\frac{d}{dt}E_1(t) \leq 0,$$

segue-se que

$$\frac{d}{dt}\{tE_1(t)\} \leq E_1(t). \tag{4.23}$$

Integrando (4.24) sobre $[0,t]$, temos

$$tE_1(t) \leq \int_0^t E_1(\tau)d\tau \leq \int_0^{+\infty} E_1(\tau)d\tau. \tag{4.24}$$

De (4.23) e (4.25), obtemos

$$tE_1(t) \leq \frac{C_2}{k}\sum_{j=1}^{3} E_j(0).$$

Fazendo $d = \frac{C_2}{k}$, obtemos

$$E_1(t) \leq \frac{d}{t}\sum_{j=1}^{3} E_j(0),$$

o que conclui a prova do resultado. $\square$

Aplicações para outros Modelos

Aqui discutiremos alguns exemplos específicos de sistemas acoplados de equações diferenciais parciais, que podemos estudar no contexto dos teoremas (3.2.1) e (4.1).

Aplicação 1

Consideremos o sistema acoplado de equações de onda

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha(u - v) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ v_{tt} - \Delta v - \alpha(u - v) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma\times]0,\infty[, \\ (u(0,x), v(0,x)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ (u_t(0,x), v_t(0,x)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases}$$

Usando os teoremas (3.2.1) e (4.1), concluímos que este sistema não é exponencialmente estável, porém é polinomialmente estável, onde

$$E_1(t) := E_1(t; u, v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |v_t|^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha|u - v|^2)dx.$$

Aplicação 2

Consideremos o sistema acoplado do tipo Onda - Petrowsky

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t + \alpha v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ \\ v_{tt} + \Delta^2 v + \alpha u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ u = v = \Delta v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma\times]0,\infty[, \\ (u(0,x), v(0,x)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ (u_t(0,x), v_t(0,x)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases}$$

O mesmo não possui estabilização exponencial, mas é polinomialmente estável, conforme os teoremas (3.2.1) e (4.1), onde

$$E_1(t) := E_1(t; u, v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |v_t|^2 + |\Delta v|^2 + 2\alpha uv\right) dx.$$

Aplicação 3

Consideremos o sistema Petrowsky - Onda

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + u_t + \alpha v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ \\ v_{tt} - \Delta v + \alpha u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega\times]0,\infty[, \\ u = \Delta u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma\times]0,\infty[, \\ (u(0,x), v(0,x)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ (u_t(0,x), v_t(0,x)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases}$$

Usando os teoremas (3.2.1) e (4.1), concluímos que não existe estabilidade exponencial, mas é polinomialmente estável, com

$$E_1(t) := E_1(t; u, v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u_t^2 + |\Delta u|^2 + v_t^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha uv\right) dx.$$

Aplicação 4

Consideremos o seguinte sistema de equações de onda com damping localmente distribuído

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + \alpha(u - v) = 0 \quad \text{em} \quad]0,\pi[\times]0,\infty[, \\ v_{tt} - \Delta v - \alpha(u - v) = 0 \quad \text{em} \quad]0,\pi[\times]0,\infty[, \\ u(0) = v(0) = u(\pi) = v(\pi) = 0 \quad \forall\ t > 0, \\ (u(0,x), v(0,x)) = (u_0(x), v_0(x)) \quad \text{em} \quad]0,\pi[, \\ (u_t(0,x), v_t(0,x)) = (u_1(x), v_1(x)) \quad \text{em} \quad]0,\pi[, \end{cases}$$

onde $a(x)$ é uma função tal que $a \in W^{1,\infty}, a(x) \geq 0$ em $[0,\pi]$ e $a_0 = \int_0^\pi a(x)dx > 0$. Usando os teoremas (3.2.1) e (4.1), concluímos que não existe estabilidade exponencial, mas decai polinomialmente, onde

$$E_1(t) := E_1(t; u, v) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(u_t^2 + |\nabla u|^2 + v_t^2 + |\nabla v|^2 + 2\alpha |u - v|^2 \right) dx.$$

Bibliografia

[1] BRÉZIS, H. Análisis Funcional. *Teoria y Aplicaciones*. Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.

[2] H. Matsuzawa, *Asymptotic profiles of variational solutions for a FitzHugh-Nagumo-type elliptic system*. Nonlinear Analysis 63, 2545-2551, (2005).

[3] LIONS, J.L. *Quelques Méthodes de Résolutions des Problémes Aux Limites Non Linéaris*. Dunod, Paris, 1969.

[4] Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative sytems*, In CRC Research Notes in Mathematics 398, Chapman & Hall, (1999).

[5] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and appications to partial differential equations*, Springer - Velag, 1983.

[6] D. G. Figueiredo and E. Mitidierri, *A maximum principle for an elliptic system and applications to semilinear problems*. SIAM J. Math. Anal. 17, 836-849, (1986).

[7] F. Alabau, P. Cannarsa and V. Komornik, *Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations*. J. Evol. Equ., 2, 127-150,(2002).

[8] F. Alabau, *Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 328, 1015-1020, (1999).

[9] A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*. Fourth Edition, Dover Publications, New York, (1942).

[10] L. Gearhart, *Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces*. Trans. AMS 236, 385-394, (1978).

[11] A. Wiler, *Stability of wave equations with dissipative bounded conditions in boundend domain*. Diff. and Integral Eqs., 7 (2), 345-366, (1994).

[12] F. Huang, *Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert space*. Ann. of Diff. Eqs. 1 (1), 43-56, (1985).

[13] J. Prüss, *On the spectrum of C_0 - semigroups*. Trans. AMS 28, 847-857, (1984).

[14] D. L. Russell, *A general framework for the study of indirect damping mechanisms in elastic sytem*. J. Math. Anal. Appl., (2) 173, 339-358, (1993).