

Carlos Augusto Sousa Jatene

*Percolação Regular em Rede Quadrada  
com Probabilidade Sub-limitada em Ondas*

Belém - PA

Junho / 2007

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Copyright 2005-2007 Carlos Augusto Sousa Jatene.

Este documento é distribuído gratuitamente como exemplo de uso do  $L^A T_E X$  com o pacote  $ABNT_E X$  para elaboração de monografias, dissertações e teses.

[www.ufpa.br/ppgme/cjatene/firelab](http://www.ufpa.br/ppgme/cjatene/firelab)

[cjatene@gmail.com](mailto:cjatene@gmail.com)



Carlos Augusto Sousa Jatene

*Percolação Regular em Rede Quadrada  
com Probabilidade Sub-limitada em Ondas*

Dissertação apresentada à Coordenação do  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
e Estatística da Universidade Federal do  
Pará para obtenção do título de Mestre em  
Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador:

Prof. Dr. Héilton Ribeiro Tavares

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DEPARTAMENTOS DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Belém - PA

Junho / 2007

Dissertação de Mestrado sob o título “*Percolação Regular em Rede Quadrada com Probabilidade Sub-limitada em Ondas*”, defendida por Carlos Augusto Sousa Jatene e aprovada em 29 de junho de 2007, em Belém, Pará, pela banca examinadora constituída pelos doutores:

---

Prof. Dr. Héilton Ribeiro Tavares  
Departamento de Estatística - UFPA  
Orientador

---

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha  
Departamento de Matemática - UFPA

---

Prof. Dr. Joaquim Carlos B. Queiroz  
Departamento de Estatística - UFPA

---

Prof. Dr. Elinei Pinto dos Santos  
Departamento de Física - UFPA

*Dedico esta dissertação aos meus pais,  
cujo exemplo de honestidade e trabalho  
norteou toda a minha vida.*

# *Agradecimentos*

Dedico meus sinceros agradecimentos para:

- o Prof. Dr. Héilton Ribeiro Tavares, pela orientação e incentivos;
- o Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha, coordenador do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística (PPGME) da UFPA, pelo apoio sempre manifestado;
- os meus professores, que acompanharam desde o começo as minhas pesquisas sobre os assuntos desta dissertação e sempre me incentivaram e ajudaram;
- os colegas do PPGME, por me ouvirem várias vezes em explicações sucessivas e seminários exaustivos, e diversas vezes tecerem comentários construtivos sobre este trabalho.
- a colega e amiga Taianna Miranda de Araújo, especialista em Análise de Sistemas e graduanda em Letras pela UFPA, pelo dedicado trabalho de revisão e pelas importantes contribuições.

*“A tecnologia e a técnica provêem a fôrma para a realização de um projeto, mas,  
o senso de organização e o bom senso são os principais ingredientes.”*

***Carlos Augusto Sousa Jatene***

# *Resumo*

Nos últimos anos a teoria de percolação tem recebido muitas contribuições quanto aos aspectos físicos e matemáticos do modelo, tais como novos modelos de rede e estudos teóricos aprofundados de algumas redes, bem como generalizações para  $n$  dimensões. Este trabalho apresenta algumas contribuições relacionadas aos aspectos probabilísticos e computacionais do modelo. Mais precisamente, sobre os aspectos probabilísticos, o trabalho propõe o mapeamento da *probabilidade de sítio como uma função* da posição  $z = (x, y)$ , para o caso bidimensional; diversas funções  $p(z)$  foram estudadas, tendo sido escolhida para esta etapa da pesquisa uma senóide baseada na norma de  $z$  ( $\|z\| = |x| + |y|$ ),  $p(z) = p_o + (1 - p_o)|sen(\|z\|)$ , denominada *senóide quadrada*. Quanto aos aspectos computacionais, é apresentado o simulador de queimadas denominado *Firelab*, desenvolvido durante a pesquisa utilizando modernas técnicas de computação; o *Firelab* proporciona, não apenas a medição sistemática da tão explorada probabilidade de percolação  $\theta(p)$ , mas também de algumas outras grandezas importantes do processo, tais como o tamanho do conglomerado.

Palavras-chave. Percolação, Queimada, Simulação.

# *Abstract*

Last years, the percolation theory has received many contributions about physical and mathematical aspects of model, such as new network models and deepened theoretical studies of existing networks, as well as generalizations for  $n$  dimensions. This work presents some contributions related to the probabilistic and computational aspects of model. More accurately, on the probabilistic aspects, the work considers the mapping of *site probability as a function* of position  $z = (x, y)$ , for bi-dimensional case; several functions  $p(z)$  had been studied, and had been chosed for this research stage, a sinusoid based on  $z$  norm ( $\|z\| = |x| + |y|$ ),  $p(z) = p_o + (1 - p_o)|sen(\|z\|)|$ , called *square shaped sinusoid*. About the computational aspects, is now presented the forest fire simulator called *Firelab*, developed during research, using modern computational techniques; the *Firelab* provides, not only the systematic measurement of so explored percolation probability  $\theta(p)$ , but also some others so important variables of the process, such as the cluster size.

Keywords. Percolation, Forest-fire, Simulation.

# *Sumário*

## **Lista de Figuras**

## **Lista de Tabelas**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 20
1.1	Contextualização e Idéias Básicas . . . . .	p. 20
1.2	Por Que Simular Queimadas Florestais? . . . . .	p. 22
1.3	Por Que Usar o Modelo de Percolação? . . . . .	p. 24
1.4	Por Que Variar o Parâmetro $p$ ? . . . . .	p. 25
1.5	Organização do Texto . . . . .	p. 26
1.6	Ferramentas Computacionais . . . . .	p. 28
<b>2</b>	<b>Introdução à Teoria de Percolação</b>	p. 29
2.1	Motivação . . . . .	p. 29
2.2	O Alvorecer da Teoria . . . . .	p. 30
2.3	Conceitos Básicos . . . . .	p. 35
2.3.1	Rede de Percolação: Um Labirinto de Sítios e Elos . . . . .	p. 35
2.3.1.1	Redes Duais . . . . .	p. 37
2.3.2	Vizinhos Mais Próximos . . . . .	p. 38
2.3.3	Ponto de Ignição . . . . .	p. 39
2.4	Tipos de Percolação . . . . .	p. 39
2.5	O Processo de Percolação . . . . .	p. 40
2.6	Conglomerado . . . . .	p. 44

<b>3</b>	<b>Modelagem Matemática</b>	p. 46
3.1	Introdução . . . . .	p. 46
3.2	Percolação de Elos . . . . .	p. 46
3.2.1	Abordagem da Teoria dos Grafos . . . . .	p. 46
3.2.2	Abordagem da Teoria das Probabilidades . . . . .	p. 49
3.2.3	Probabilidade Crítica $p_c$ . . . . .	p. 50
3.2.4	Conglomerado . . . . .	p. 51
3.2.5	Mudança de Fase . . . . .	p. 52
3.3	Percolação de Sítios . . . . .	p. 55
3.4	Expoentes Críticos . . . . .	p. 58
<b>4</b>	<b>Probabilidade Sub-limitada em Ondas</b>	p. 59
4.1	Introdução . . . . .	p. 59
4.2	Considerações Gerais . . . . .	p. 62
4.3	Senóide Quadrada . . . . .	p. 63
4.3.1	Formulação . . . . .	p. 64
4.3.2	Plotagem . . . . .	p. 64
4.4	Senóide Circular . . . . .	p. 64
4.4.1	Formulação . . . . .	p. 66
4.4.2	Plotagem . . . . .	p. 66
4.5	Pulso Quadrado . . . . .	p. 68
4.5.1	Formulação . . . . .	p. 68
4.5.2	Plotagem . . . . .	p. 68
4.6	Pulso Circular . . . . .	p. 68
4.6.1	Formulação . . . . .	p. 68
4.6.2	Plotagem . . . . .	p. 70
4.7	Serra Quadrada . . . . .	p. 70

4.7.1	Formulação . . . . .	p. 70
4.7.2	Plotagem . . . . .	p. 72
4.8	Serra Circular . . . . .	p. 72
4.8.1	Formulação . . . . .	p. 74
4.8.2	Plotagem . . . . .	p. 74
4.9	Cone . . . . .	p. 76
4.9.1	Formulação . . . . .	p. 76
4.9.2	Plotagem . . . . .	p. 77
4.10	Calota . . . . .	p. 77
4.10.1	Formulação . . . . .	p. 77
4.10.2	Plotagem . . . . .	p. 79
4.11	4-Plan . . . . .	p. 79
4.11.1	Formulação . . . . .	p. 79
4.11.2	Plotagem . . . . .	p. 81
4.12	Funções de Probabilidade Sub-limitada, Sobre-limitada e Range-limitada	p. 81
<b>5</b>	<b>Modelagem Computacional</b>	p. 87
5.1	Considerações Gerais . . . . .	p. 87
5.2	Diagrama de Casos de Uso . . . . .	p. 91
5.3	Diagrama de Classes . . . . .	p. 93
5.4	Diagrama de Entidades e Relacionamentos . . . . .	p. 94
5.5	Considerações de Implementação . . . . .	p. 99
5.6	Implementação da Animação do Simulador . . . . .	p. 100
5.6.1	Simulação de Uma Área Florestal . . . . .	p. 100
<b>6</b>	<b>Descrição Detalhada do Simulador</b>	p. 103
6.1	A Console do Firelab . . . . .	p. 103

6.2	Descrição Detalhada das Interfaces . . . . .	p. 105
6.2.1	↔ CAMPO 1 - Largura da área florestal. . . . .	p. 105
6.2.2	↔ CAMPO 2 - Profundidade da área florestal. . . . .	p. 106
6.2.3	↔ CAMPO 3 - Variabilidade de $p$ . . . . .	p. 107
6.2.4	↔ CAMPO 4 - Função $p(z)$ . . . . .	p. 107
6.2.5	↔ CAMPO 5 - Modo de operação. . . . .	p. 108
6.2.6	↔ CAMPO 6 - Incremento de $p$ . . . . .	p. 109
6.2.7	↔ CAMPO 7 - Replicação inteligente. . . . .	p. 111
6.2.8	↔ CAMPO 8 - Réplicas de busca. . . . .	p. 112
6.2.9	↔ CAMPO 9 - Réplicas. . . . .	p. 113
6.2.10	↔ CAMPOS 10 a 13 - Opções de visualização. . . . .	p. 113
6.2.11	↔ CAMPO 14 - Probabilidade $p$ . . . . .	p. 118
6.2.12	↔ CAMPO 15 - Realizar queimada. . . . .	p. 121
6.2.13	↔ CAMPO 16 - Tempo de avanço. . . . .	p. 121
6.2.14	↔ CAMPO 17 - Parar ao percolar. . . . .	p. 122
6.2.15	↔ CAMPO 18 - Mostrar estatísticas. . . . .	p. 123
6.2.16	↔ CAMPO 19 - Mostrar posição. . . . .	p. 125
6.2.17	↔ CAMPO 20 - Salvar imagem. . . . .	p. 126
6.2.18	↔ CAMPO 21 - Botão “Simular”. . . . .	p. 126
<b>7</b>	<b>Resultados</b> . . . . .	p. 127
7.1	Considerações Gerais . . . . .	p. 127
7.2	$\theta(p)$ Para Percolação Uniforme . . . . .	p. 128
7.3	Comportamento das Grandezas Para Cada $p(z)$ . . . . .	p. 129
7.4	Comportamento das $p(z)$ Para Cada Grandeza . . . . .	p. 132
7.5	Comparação dos Resultados . . . . .	p. 132

<b>8 Conclusões</b>	p. 137
8.1 Contribuições do Trabalho . . . . .	p. 137
8.2 Resultados Mais Importantes . . . . .	p. 138
8.3 Resultados Numéricos de $p_c$ . . . . .	p. 139
8.4 Trabalhos Futuros . . . . .	p. 141
8.5 Considerações Finais . . . . .	p. 142
<b>Referências</b>	p. 144
<b>APÊNDICES</b>	p. 145
<b>Apêndice A – Notação e Simbologia</b>	p. 146
<b>Apêndice B – Grafos Aleatórios</b>	p. 148
B.1 Introdução . . . . .	p. 148
B.2 Definição de Grafo . . . . .	p. 148
B.2.1 Grafo Aleatório . . . . .	p. 149
<b>Apêndice C – Códigos Fonte Matlab</b>	p. 179

# *Lista de Figuras*

1	Organização do texto. . . . .	p. 26
2	Grade 100x100. . . . .	p. 31
3	Grade 100x100 com $p = 0,5$ . . . . .	p. 33
4	Grades 50x50 com valores crescentes de $p$ . . . . .	p. 34
5	Alguns modelos de rede. . . . .	p. 36
6	Rede $(3^4, 6)$ ampliada. . . . .	p. 37
7	Exemplo de rede de Bethe de dois ramos. . . . .	p. 37
8	Redes duais. . . . .	p. 38
9	Vizinhos mais próximos. . . . .	p. 39
10	Tipos de percolação quanto à via de penetração. . . . .	p. 40
11	Tipos de percolação quanto ao direcionamento da penetração. . . . .	p. 41
12	Exemplo didático de seqüência do processo de percolação. . . . .	p. 42
13	Conglomerado. . . . .	p. 44
14	Probabilidade de percolação e probabilidade crítica. . . . .	p. 51
15	Probabilidade de percolação $\theta(p)$ . . . . .	p. 54
16	Realizações de percolação de elos em rede quadrada para diferentes valores de $p$ . . . . .	p. 56
17	Realizações de percolação de sítios em rede quadrada para diferentes valores de $p$ . . . . .	p. 57
18	Um exemplo de floresta. . . . .	p. 60
19	Simulações hipotéticas de formação florestal. . . . .	p. 61
20	Função “senóide quadrada” vista em perspectiva. . . . .	p. 64

21	Função “senóide quadrada” vista de perfil. . . . .	p. 65
22	Função “senóide quadrada” vista de topo. . . . .	p. 65
23	Função “senóide circular” vista em perspectiva. . . . .	p. 66
24	Função “senóide circular” vista de perfil. . . . .	p. 67
25	Função “senóide circular” vista de topo. . . . .	p. 67
26	Função “pulso quadrado” vista em perspectiva. . . . .	p. 69
27	Função “pulso quadrado” vista de perfil. . . . .	p. 69
28	Função “pulso quadrado” vista de topo. . . . .	p. 70
29	Função “pulso circular” vista em perspectiva. . . . .	p. 71
30	Função “pulso circular” vista de perfil. . . . .	p. 71
31	Função “pulso circular” vista de topo. . . . .	p. 72
32	Função “serra quadrada” vista em perspectiva. . . . .	p. 73
33	Função “serra quadrada” vista de perfil. . . . .	p. 73
34	Função “serra quadrada” vista de topo. . . . .	p. 74
35	Função “serra circular” vista em perspectiva. . . . .	p. 75
36	Função “serra circular” vista de perfil. . . . .	p. 75
37	Função “serra circular” vista de topo. . . . .	p. 76
38	Função “cone” vista em perspectiva. . . . .	p. 77
39	Função “cone” vista de perfil. . . . .	p. 78
40	Função “cone” vista de topo. . . . .	p. 78
41	Função “calota” vista em perspectiva. . . . .	p. 79
42	Função “calota” vista de perfil. . . . .	p. 80
43	Função “calota” vista de topo. . . . .	p. 80
44	Função “4-Plan” vista em perspectiva. . . . .	p. 81
45	Função “4-Plan” vista de perfil. . . . .	p. 82
46	Função “4-Plan” vista de topo. . . . .	p. 82

47	Plotagens da senóide quadrada <i>sub-limitada</i> para uma evolução de $p_0$ com $\Delta p_0 = 0, 2$ . . . . .	p. 84
48	Plotagens da senóide quadrada <i>sobre-limitada</i> para uma evolução de $p_0$ com $\Delta p_0 = 0, 2$ . . . . .	p. 85
49	Plotagens da senóide quadrada <i>range-limitada</i> para uma evolução de $p_0$ com $\Delta p_0 = 0, 2$ . . . . .	p. 86
50	Distribuição dos recursos e do tempo ao longo das fases do RUP. . . . .	p. 88
51	Marcos de um projeto desenvolvido segundo o RUP. . . . .	p. 90
52	Relações entre as fases e as disciplinas do RUP. . . . .	p. 90
53	Diagrama de casos de uso do Firelab. . . . .	p. 92
54	Diagrama de classes do Firelab. . . . .	p. 93
55	Diagrama de entidades e relacionamentos do Firelab. . . . .	p. 94
56	Exemplo de animação de queimada no Firelab. . . . .	p. 100
57	Exemplo de animação de queimada no Firelab. . . . .	p. 101
58	Simulações de florestas 100x100 com valores crescentes de $p$ . . . . .	p. 102
59	Console do Firelab. . . . .	p. 104
60	Console com os campos enumerados. . . . .	p. 105
61	Área $100 \times 100$ totalmente povoada de árvores. . . . .	p. 106
62	Campo 3 com a opção de $p$ variável. . . . .	p. 107
63	Campo 3 com a opção de $p$ uniforme. . . . .	p. 107
64	Campo 5. . . . .	p. 108
65	Campo 5 com a opção de “Ensaio único”. . . . .	p. 108
66	Campo 5 com a opção de “Ensaaios sucessivos”. . . . .	p. 109
67	Campo 6. . . . .	p. 109
68	Um exemplo de tabela para $\Delta p = 0, 1$ . . . . .	p. 110
69	Ilustração do princípio básico da técnica de “replicação inteligente”. . . . .	p. 112
70	Resultado de uma experiência. . . . .	p. 113

71	Campo 7. . . . .	p.113
72	Campo 8. . . . .	p.114
73	Campo 9. . . . .	p.114
74	Campos 10 a 13. . . . .	p.115
75	Janela de simulação do Firelab. . . . .	p.116
76	Algumas combinações das opções de visualização. . . . .	p.117
77	Informações sobre uma experiência que mostra apenas a animação. . . . .	p.118
78	Opções de visualização correspondentes à Figura 76. . . . .	p.119
79	Campo 14. . . . .	p.120
80	Resultados de um mesmo valor de $p$ para variabilidades diferentes. . . . .	p.120
81	Campo 15. . . . .	p.121
82	Campo 16. . . . .	p.121
83	Campo 17. . . . .	p.122
84	Resultados do Campo 17. . . . .	p.122
85	Campo 18. . . . .	p.123
86	Estatísticas de uma experiência de ensaio único. . . . .	p.123
87	Campo 19. . . . .	p.125
88	Resultado de uma simulação com o Campo 19 marcado. . . . .	p.125
89	Campo 20. . . . .	p.126
90	Campo 21. Botão “Simular”. . . . .	p.126
91	Apresentação dos resultados. . . . .	p.128
92	Curva de $\theta(p)$ para probabilidade uniforme. . . . .	p.128
93	Comportamento para $p(z)$ Uniforme ( $p_c = 0,574$ ). . . . .	p.129
94	Comportamento para $p(z)$ Senóide ( $p_c = 0,400$ ). . . . .	p.129
95	Comportamento para $p(z)$ Pulso ( $p_c = 0,572$ ). . . . .	p.130
96	Comportamento para $p(z)$ Serra ( $p_c = 0,404$ ). . . . .	p.130

97	Comportamento para $p(z)$ Cone ( $p_c = 0,514$ ). . . . .	p.130
98	Comportamento para $p(z)$ Calota ( $p_c = 0,554$ ). . . . .	p.131
99	Comportamento para $p(z)$ 4-Plan ( $p_c = 0,518$ ). . . . .	p.131
100	Comportamento para $\theta(p)$ . . . . .	p.132
101	Comportamento para $C(p)$ . . . . .	p.132
102	Comportamento para $t(p)$ . . . . .	p.133
103	Comportamento para $\gamma(p)$ . . . . .	p.133
104	Comparação da uniforme com 500 replicações e com 1000 replicações. . . . .	p.135
105	Gráfico comparativo de $\theta(p)$ . . . . .	p.136
106	Curva de $\theta(p)$ para probabilidade senoidal ( $p_c = 0,400$ ). . . . .	p.139
107	Curva de $\theta(p)$ para probabilidade uniforme ( $p_c = 0,574$ ). . . . .	p.140
108	Curva de $\theta(p)$ para probabilidade em pulsos ( $p_c = 0,576$ ). . . . .	p.140
109	Representação gráfica de um grafo. . . . .	p.149
110	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 11 estágios. . . . .	p.150
111	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 21 estágios. . . . .	p.151
112	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 41 estágios. . . . .	p.153
113	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 51 estágios. . . . .	p.157
114	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 81 estágios. . . . .	p.162
115	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 101 estágios. . . . .	p.170
116	Código para a função “senóide quadrada”. . . . .	p.179
117	Código para a função “senóide circular”. . . . .	p.180
118	Código para a função “pulso quadrado”. . . . .	p.180
119	Código para a função “pulso circular”. . . . .	p.181
120	Código para a função “serra quadrada”. . . . .	p.181
121	Código para a função “serra circular”. . . . .	p.182
122	Código para a função “cone”. . . . .	p.182

123	Código para a função “calota” . . . . .	p.183
124	Código para a função “4-Plan” . . . . .	p.183

# *Lista de Tabelas*

1	Procedimentos do programa PROARCO. . . . .	p. 24
2	Pequena lista de aplicações da teoria de percolação. . . . .	p. 30
3	Seqüência do avanço correspondente à Figura 12. . . . .	p. 43
4	Probabilidades críticas de alguns modelos. . . . .	p. 54
5	Constituição das famílias de funções de probabilidade. . . . .	p. 83
6	Descrição sucinta das fases do RUP. . . . .	p. 89
7	Descrição detalhada da entidade <i>experiencia</i> . . . . .	p. 97
8	Descrição detalhada da entidade <i>ensaio</i> . . . . .	p. 98
9	Descrição detalhada da entidade <i>restart</i> . . . . .	p. 99
10	Tempos de simulação. . . . .	p. 134
11	Novas contribuições. . . . .	p. 138
12	Resultados mais importantes. . . . .	p. 139
13	Resultados numéricos de $p_c$ . . . . .	p. 140
14	Pesquisas futuras. . . . .	p. 142
15	Notação e simbologia. . . . .	p. 147
16	Alguns grafos especiais. . . . .	p. 149
17	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 11 estágios. . . . .	p. 151
18	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 21 estágios. . . . .	p. 153
19	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 41 estágios. . . . .	p. 157
20	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 51 estágios. . . . .	p. 162
21	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 81 estágios. . . . .	p. 169
22	Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 101 estágios. . . . .	p. 178

# 1 *Introdução*

## 1.1 Contextualização e Idéias Básicas

O principal objetivo deste trabalho é a aplicação da *teoria de percolação* à construção de um *simulador de queimadas*, adicionando ao modelo uma característica não usual, que é a variação do parâmetro  $p$  em função da posição. O trabalho não pretende cobrir todo o conhecimento sobre a teoria, nem servir como referência sobre o assunto. Pretende, sim, contribuir no sentido da aplicabilidade da teoria de percolação, sem a preocupação de abranger todos os assuntos relacionados, todas as redes já definidas e estudadas, tampouco todas as grandezas envolvidas.

No início da pesquisa houve a intenção de se usar as ferramentas de simulação já existentes, consagradas, conhecidas e apropriadas, tais como Ox<sup>1</sup>, Matlab<sup>2</sup> e outras. Entretanto, a idéia de desenvolver um simulador específico, voltado ao fenômeno de queimadas florestais, e capaz de apresentar uma animação realista, pareceu um desafio muito maior, tornando a pesquisa bem mais atraente.

O simulador aplica o método de Monte Carlo, com  $p$  variando no intervalo  $[0,1]$  à base de um incremento fixo para uma dada experiência, porém, parametrizável a cada nova experiência.

Resumidamente, os requisitos básicos do simulador foram definidos como segue:

- Simular o fenômeno de queimadas florestais com base no modelo de *percolação regular de sítios em rede quadrada*;
- Permitir a variabilidade do parâmetro  $p$  em função da posição;
- Permitir, também, simulações com  $p$  fixo, para comparação de resultados constantes na literatura, para efeito de validação do próprio simulador;

---

<sup>1</sup>Object Oriented Statistical System [[www.doornik.com](http://www.doornik.com)].

<sup>2</sup>The Language of Technical Computing [[www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)].

- Permitir que o incremento de  $p$  seja parametrizável, para que se possa fazê-lo tão pequeno quanto se queira;
- Permitir que o número de *replicações* seja parametrizável, para que se possa fazê-lo tão grande quanto se queira;
- Proporcionar o monitoramento, de, pelo menos, as seguintes variáveis: *probabilidade crítica* ( $p_c$ ), *tamanho do conglomerado* ( $w_c$ ), *tempo de percolação* ( $t_p$ ), **velocidade de avanço**<sup>3</sup> ( $V_a$ ).
- Proporcionar a construção de um diagrama, o **percograma**<sup>4</sup>, para mostrar o histórico da evolução da velocidade de avanço.
- Providenciar a gravação dos dados sobre as experiências, mesmo que seja em arquivo texto, para uso posterior;
- Implementar *animação* do processo percolativo para proporcionar a visualização opcional do fenômeno;
- Implementar duas modalidades de operação: experiência de *ensaio único*, para efeitos didáticos, e experiência de *ensaios sucessivos*, para a finalidade principal, que é a realização de experiências científicas completas;
- Possibilitar, na modalidade de ensaio único, a manipulação do intervalo de tempo de avanço ( $\Delta t$ ) no sentido de permitir a visualização lenta (*slow motion*) do fenômeno;
- Possibilitar, na modalidade de ensaio único, a parada total do processo a qualquer tempo (*pause*) e o subsequente reinício (*restart*), sob o comando do operador.

A idéia central do trabalho é comparar os resultados das simulações com  $p$  fixo, bem conhecidos, produzidos por trabalhos científicos consagrados, com estes das simulações onde  $p$  é tratado como uma função da posição.

<sup>3</sup>A velocidade de avanço,  $V_a$ , não foge do conceito tradicional de velocidade, e é definida com sendo a quantidade de sítios alcançados por unidade de tempo. É uma variável que reflete a dificuldade (valores baixos) ou facilidade (valores altos) com que a percolação ocorre.

<sup>4</sup>Tal como um eletrocardiograma mostra a evolução dos batimentos cardíacos de uma pessoa, o *percograma* mostra a evolução dos sítios avançados durante o processo percolativo. A medição de cada ponto deve ser feita em intervalos uniformes de tempo ( $\Delta t$ ).

## 1.2 Por Que Simular Queimadas Florestais?

As florestas constituem um dos mais importantes patrimônios da humanidade. Além do equilíbrio ecológico, da preservação de mananciais de água doce, e das funções protetoras que exercem sobre a atmosfera terrestre, encerram riquezas incomensuráveis: seres vivos - flora e fauna pouco estudadas, cujos elementos, muitos deles, ainda não estão nem catalogados pela comunidade científica, notadamente na região amazônica. A importância e a grandiosidade da floresta amazônica são resumidas nas palavras dos biólogos americanos *Adrian Forsyth*<sup>5</sup> & *Ken Miyata*, em seu trabalho mundialmente reconhecido, escrito em 1984, intitulado “*Tropical Nature : Life and Death in the Rain Forests of Central and South America*” [Forsyth & Miyata (1984)]:

*“A floresta amazônica é uma das maravilhas do nosso planeta, e a sua vasta extensão territorial é a maior dentre todas as florestas tropicais do mundo.”*<sup>6</sup>

Qualquer contribuição no sentido de preservar as florestas é uma atitude de preservação da própria raça humana. No Brasil, o IBAMA<sup>7</sup>, que é o órgão competente para assuntos de meio ambiente e recursos naturais, tem todo um conjunto de orientações e normas.

Uma queimada pode ser necessária e até aconselhável, por questões de cultivo da terra. Se assim for, ela deve ser feita de modo controlado e sob a orientação de instituições competentes, como o IBAMA. Conforme *Romildo Gonçalves da Silva* em seu “Manual de Prevenção e Combate aos Incêndios Florestais” [Silva (1998)], que contém vários ensinamentos, inclusive este de como proceder uma queimada controlada, para os propósitos da agricultura:

*“O fogo em si não é bom nem ruim, é apenas um instrumento à nossa disposição. Usá-lo corretamente é uma questão de inteligência.”*

Para maiores informações, procure-se “guia de chefe” no *site* do IBAMA.

---

<sup>5</sup>Adrian Forsyth é Ph.D. em biologia pela *Harvard University*, ganhou o prêmio “*Canadian National Magazine Award for Science Writing*” em 1982 e 1983, sendo o primeiro autor a ganhar este prêmio por duas vezes.

<sup>6</sup>Tal afirmativa pode parecer óbvia ou até ser classificada como “lugar comum” para os dias de hoje, mas, para a época (1984) era quase uma descoberta.

<sup>7</sup>Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis [www.ibama.gov.br].

O estudo computacional das queimadas florestais pode vir a produzir ferramentas de grande utilidade. Um projeto de simulação computacional pode vir a ser muito útil, talvez, se for engajado em um projeto maior de prevenção e controle de queimadas.

O IBAMA e o INPE<sup>8</sup> mantêm um programa nacional, denominado PROARCO (Programa de Prevenção e Controle de Queimadas e Incêndios Florestais na Amazônia Legal), apoiado nas técnicas de geoprocessamento e previsão meteorológica, cujo objetivo é “identificar as áreas de maior risco de ocorrência de incêndios florestais, por meio da implementação de um sistema de monitoramento e avaliação de risco para a tomada de decisões”.

Uma melhoria possível, e passível de ser agregada ao PROARCO, seria proporcionar simulações de queimadas nessas “áreas de maior risco” para avaliação das conseqüências de um provável incêndio. Mais importante ainda, seria, talvez, a estimação de tempos de queimada, para elaboração de planos de contingência e medidas de precaução, tais como procedimentos a serem tomados (e a que tempo) para evitar que o fogo chegue a uma determinada área mais crítica, cuja destruição implicaria em maiores prejuízos.

A Tabela 1, a seguir, apresenta o procedimento do programa, divulgado pelo IBAMA.

Passo	Descrição
#1	Diariamente, às 8:00 horas da manhã, os arquivos dos satélites NOAA, MODIS e GOES, com as coordenadas dos focos de calor por município e informações meteorológicas são transferidos dos computadores do INPE, Universidade de Maryland, NASA, NOAA/NGDC para os computadores do IBAMA.
#2	Entre as 9:00 e 10:00 horas é realizada uma conferência entre técnicos da Sala de Situação do IBAMA, onde são discutidos os prognósticos sobre os focos de calor detectados, além de previsões meteorológicas detalhadas para as áreas de risco indicadas.
#3	É elaborado um relatório retratando a situação nos municípios onde foram detectados focos de calor e as áreas de risco de incêndios florestais por tipo de vegetação. A equipe da sala de situação define o nível de alerta e as atitudes cabíveis para cada caso.
#4	O relatório acima descrito é encaminhado por correio eletrônico (email) para as seguintes unidades: – IBAMA/PREVFOGO - detecção de focos de calor em Unidades de

*continua ...*

<sup>8</sup>Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais [www.inpe.br].

continuação ...

Passo	Descrição
	Conservação; – IBAMA/DEFIS - focos de calor em áreas desmatadas. São então produzidos pelo Centro de Sensoriamento Remoto - CSR/IBAMA novos mapas para operações de fiscalização; – SEPRE - NÚCLEO ESTRATÉGICO - diariamente para informação e no caso de ser acionada a Força Tarefa são emitidos relatórios especiais. O Núcleo Estratégico repassa o relatório quando necessário para o MEx/COTER, MAer/COMGAR e CBMDF; – OEMA'S (Comitês Estaduais) - diariamente para informação e para complementação das informações disponibilizadas via INTERNET no site do INPE.
#5	Um resumo do relatório do IBAMA e o sistema de monitoramento do INPE / PROARCO são atualizados na INTERNET.
#6	No caso de acionamento do Núcleo Estratégico as áreas de alto risco indicadas (alerta amarelo/vermelho), poderão ser previamente sobrevoadas com aeronaves equipadas com sensores aerotransportados, permitindo a visualização em destaque das características da área para utilização das informações na confirmação de incêndios e na possível estratégia de combate.

Fonte: IBAMA

Tabela 1: Procedimentos do programa PROARCO.

### 1.3 Por Que Usar o Modelo de Percolação?

Uma queimada pode ser vista como um processo em que uma substância (o fogo) avança através de um meio aleatório (a floresta). Dizemos, neste caso, que a floresta é um meio aleatório porque, dado que há fogo em determinado ponto, ele pode avançar ou não para a vizinhança, com probabilidade  $p$  de avançar e  $1 - p$  de não avançar. Esta constatação já é base suficiente para a decisão de aplicar o modelo de percolação.

Além disso, segundo Grimmett (1999)

*“O modelo de percolação é um dos mais simples para representar um meio aleatório, porque ele encerra um mínimo de dependência estatística. Seus atrativos são muitos. Primeiro, é*

*fácil de formular e os resultados qualitativos são realísticos. Segundo, para os casos em que haja grande interesse em processos mais complexos, serve como base para o desenvolvimento de técnicas matemáticas mais aprofundadas. ...”<sup>9</sup>*

## 1.4 Por Que Variar o Parâmetro $p$ ?

O parâmetro  $p$  é uma probabilidade que está relacionada com a permissividade, ou melhor, com a permeabilidade, do meio. Isto é,  $p$  grande (próximo de *um*) significa alta permeabilidade e  $p$  pequeno (próximo de *zero*) significa baixa permeabilidade. Em outras palavras,  $p$  grande significa que a substância avança através do meio com mais facilidade e  $p$  pequeno significa que a substância avança com mais dificuldade. Isto porque  $p$  é a probabilidade de que uma substância, estando em determinado ponto, avance para pontos vizinhos. Em suma, se tal probabilidade for alta o avanço é facilitado, se for baixa, é dificultado.

Tradicionalmente, os modelos são construídos tendo em conta um  $p$  fixo (0,4 por exemplo) para toda a área do meio em estudo, independente do ponto em que a substância se encontre no decorrer do processo.

Uma das razões do sucesso da teoria de percolação é a simplicidade do modelo. Teoricamente, esta invariabilidade de  $p$  é, talvez, um dos fatores contribuintes para tal simplicidade. E é razoável, porque, como o processo é aleatório, dever-se-ia esperar que pequenas variações em  $p$  realmente não influenciassem no comportamento do processo como um todo.

Porém, a hipótese da variabilidade de  $p$  tem guarida na prática. A natureza não é perfeita. Apesar de ser uma abordagem mais complexa, seria mais natural estudar um fenômeno desta natureza supondo que  $p$  é variável ao longo do meio. No caso das queimadas, por exemplo, é muito otimista a idéia de supor  $p$  constante ao longo de toda a extensão de uma grande floresta.

Ao observar a simulação de um processo percolativo com  $p$  constante (*percolação uniforme*), nota-se que o avanço acontece de um modo uniforme, monótono, o que não condiz exatamente com o que ocorre na realidade. Observando o fenômeno das queimadas,

---

<sup>9</sup>Geoffrey R. Grimmett é professor de estatística do *Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics* da *University of Cambridge*, autor de vários livros sobre percolação, mecânica estatística e processos aleatórios em geral. Sobre percolação, destaca-se o *best seller* “*Percolation*”, 2nd. edition, de 1999, muito utilizado durante esta pesquisa. Sobre a teoria de probabilidade em geral, escreveu “*Probability and Random Processes*”, que está na terceira edição, e, em 2001, lançou “*One Thousand Exercises in Probability*”.

por exemplo, é possível perceber que há regiões em que o fogo avança mais fortemente, e outras em que avança de um modo mais contido. Outros, ainda, em que o fogo estanca de um modo gradativamente lento e não abruptamente como ocorre nas simulações com percolação uniforme. Certamente, alguns fatores inerentes ao meio, tais como as condições da vegetação, condições climáticas, acidentes geográficos e geofísicos, dentre outros, são responsáveis por tais variações. Um modelo apropriado deve, de algum modo, levar em conta tais fatores. É possível que a variabilidade de  $p$  venha a contribuir para este propósito. A variação senoidal aqui proposta deve ser **apenas uma** das formas possíveis de modelar esta variabilidade. A idéia é chegar a um modelo mapeado, com um misto de formulações funcionais – e aí, obviamente, cabe também a função constante –, de modo que venha a refletir mais realisticamente todos os fatores de influência do fenômeno.

Assim, para modelar o fenômeno das queimadas usando a teoria de percolação, parece razoável propor a construção de um modelo que leve em conta a variabilidade de  $p$ .

## 1.5 Organização do Texto

A estrutura da Figura 1 mostra como o corpo do texto deste documento está organizado, e em seguida é dada uma descrição sucinta de cada uma das partes.



Figura 1: Organização do texto.

**Introdução à Teoria de Percolação.** Este capítulo apresenta a teoria de percolação de um modo resumido, superficial até, voltado para a aplicação ao fenômeno de

queimadas. O foco principal é no modelo de percolação regular em rede quadrada.

**Modelagem Matemática.** Neste capítulo é apresentada a formulação matemática que rege a teoria de percolação. É dado o tratamento para  $n$  dimensões, enfatizando sempre o caso bidimensional, por ser de especial interesse para a pesquisa.

**Probabilidade Sub-limitada em Ondas.** Este capítulo mostra os estudos de variabilidade do parâmetro  $p$ , cujo objetivo principal é modelar um meio heterogêneo, não uniforme. Diversas funções são estudadas, plotadas em 3D para perfeita percepção do possível efeito no modelo. É apresentada a função escolhida para uso na pesquisa, a *senóide quadrada*, e, também, é explicada a origem do termo “probabilidade sub-limitada em ondas”.

**Modelagem Computacional.** Este capítulo trata das técnicas e tecnologias emprestadas da ciência da computação para a elaboração do simulador. São apresentadas as técnicas e tecnologias aplicadas para modelar, projetar e implementar o sistema. Alguns algoritmos e códigos fonte são mostrados e, em certos casos de fundamental importância, o funcionamento do código é explicado detalhadamente. São focados, neste capítulo, essencialmente, os aspectos computacionais da pesquisa.

**Descrição Detalhada do Simulador.** É explicada detalhadamente a operação do simulador. São explicados os modos de operação de *ensaio único* e *ensaios sucessivos*, bem como o porquê da existência dos dois. É esclarecida a função de cada componente da interface do sistema e são feitos exercícios didáticos de operação. O objetivo principal é mostrar as funcionalidades do simulador e dar instruções quanto ao uso do mesmo.

**Resultados.** É o desfecho final do trabalho. Aborda os resultados da pesquisa sob três aspectos, intitulados “*Resultados Para Percolação Uniforme*”, “*Resultados Para Percolação em Ondas*”, e “*Comparação dos Resultados*”. A título de *resultados para percolação uniforme* são apresentados os resultados do simulador para o caso da *percolação uniforme*<sup>10</sup>; o objetivo principal é a confirmação dos resultados já obtidos e divulgados em trabalhos científicos anteriores; tal confirmação serve também como procedimento de validação do simulador. Sob o título de *resultados para percolação em ondas* são apresentados os resultados do simulador para o caso da *percolação em ondas*<sup>11</sup>. Finalmente, em *comparação dos resultados* o foco é a comparação dos resultados das simulações realizadas para percolação uniforme e percolação em ondas, procurando explicar quaisquer

<sup>10</sup>A percolação uniforme é aquela que mantém o parâmetro  $p$  fixo ao longo do meio.

<sup>11</sup>A percolação em ondas é uma das formas de percolação não-uniforme; no caso, o parâmetro  $p$  varia ao longo do meio pela definição de uma função senoidal, denominada *senóide quadrada*.

diferenças que venham a ser detectadas; o objetivo principal é verificar se há alguma mudança no processo percolativo quando se considera a variabilidade de  $p$  em função da posição.

## 1.6 Ferramentas Computacionais

A presente pesquisa contou com o uso de algumas ferramentas computacionais de fundamental importância, sem as quais seria impossível de ser levada a efeito. São elas: *Matlab*<sup>®</sup>, *Graphlab*, e *Firelab*. O *Matlab*<sup>®</sup>, bem conhecido, desenvolvido pela empresa “*The Mathworks Inc.*” ([www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)), foi utilizado nos estudos da variabilidade do parâmetro  $p$ , cujos resultados são apresentados essencialmente no Capítulo 4; todas as superfícies apresentadas foram obtidas com a ajuda de tal ferramenta. O *Graphlab* é um gerador de grafos, inclusive *grafos aleatórios*, desenvolvido durante a pesquisa, muito útil na geração das imagens de redes de percolação, apresentadas principalmente no Capítulo 2; muito útil também na geração de seqüências de grafos aleatórios que serviram como exercícios de visualização de sub-grafos, muito importantes para o entendimento do processo de percolação. O *Firelab*, simulador de queimadas, é a ferramenta mais usada durante toda a pesquisa, produzindo os dados mais importantes para este trabalho. Seus resultados podem ser observados nos estudos do Capítulo 8. Os Capítulos 5 e 6 apresentam maiores detalhes sobre esta ferramenta, que é um dos objetos mais importantes da pesquisa.

As ferramentas de desenvolvimento mais relevantes foram o ambiente de programação *Delphi*<sup>®</sup> da *Borland*<sup>®</sup> e o sistema gerenciador de banco de dados *Access*<sup>®</sup> da *Microsoft*<sup>®</sup>.

O próximo capítulo é uma introdução à teoria de percolação.

## 2 *Introdução à Teoria de Percolação*

### 2.1 *Motivação*

O objetivo deste capítulo é, essencialmente, estabelecer a conceituação e os princípios básicos da teoria de percolação, visando o esclarecimento de todos os pontos que nortearam o projeto e a construção do simulador de queimadas, *Firelab*. Estão em foco, principalmente, os aspectos qualitativos e dos resultados práticos do modelo, de modo que o formalismo matemático apresentado é o mínimo necessário<sup>1</sup>.

É importante, também, frisar, que, ao contrário do que se poderia pensar, a teoria de percolação não é um modelo fechado, ou uma teoria esgotada e auto-contida. É uma idéia básica, aliás, uma idéia fantástica e surpreendentemente simples, criada para estudar fenômenos relacionados com a penetração de qualquer coisa em qualquer meio passível de ser penetrado (ou invadido, ou conquistado, ...), desde que tal penetração tenha características probabilísticas. A esta *idéia básica*, podem ser agregadas novas características, novos detalhes de modelagem, aprofundamentos matemáticos ou restrições físicas, para contemplar uma ou outra situação específica. Isto torna o estudo ainda mais interessante.

O ponto mais importante e mais estudado da teoria de percolação é a característica de *mudança de fase* inerente ao processo de percolação propriamente dito. Tal como na teoria dos grafos aleatórios [Barabási (2001)], tratada no Apêndice B, existe uma *probabilidade crítica*,  $p_c$ , a partir da qual passa a existir um caminho gigante que interliga todo o sistema. Conforme Barabási (2001):

*“Uma das descobertas mais interessantes da teoria dos grafos aleatórios é a existência de uma probabilidade crítica a partir da qual se observa a formação de um caminho gigante.”*

---

<sup>1</sup>Para estudos mais aprofundados sobre o formalismo matemático, as referências bibliográficas apresentadas neste trabalho podem ser muito úteis. E, dentre elas, as mais indicadas são Grimmett (1999) e Stauffer (1985).

Apesar de ter sido formulada à luz de um problema específico, que é a penetração de líquido em meio poroso, tem sido aplicada às mais diversas situações em várias áreas do conhecimento humano, como mostra a Tabela 2.

Área	Fenômeno	Fluido	Meio
<b>Biologia</b>	Avanço de tumores	Células degeneradas	Tecido humano
<b>Epidemiologia</b>	Avanço de epidemias	Doenças / Vírus	População humana
<b>Engenharia</b>	Infiltração predial	Água	Concreto / Tijolo
<b>Eletrônica</b>	Circuitos aleatórios	Eletricidade	Circuito
<b>Ecologia</b>	Queimadas Florestais	Fogo	Floresta

Tabela 2: Pequena lista de aplicações da teoria de percolação.

## 2.2 O Alvorecer da Teoria

A teoria de percolação nasceu em 1957 com o modelo apresentado por Broadbent e Hammersley<sup>2</sup> [Broadbent & Hammersley (1957)] para descrever a penetração de líquido em meio poroso. O problema propõe a imersão de uma pedra em um recipiente com água, e, a questão fundamental a ser respondida é: *Qual a probabilidade da água chegar até o centro da pedra?*

Seja, então, uma grade<sup>3</sup> plana quadrada<sup>4</sup> como a da Figura 2. Chama-se  $\mathbb{Z}^2$  a esta construção, por ser uma estrutura bidimensional de posições vizinhas fisicamente equidistantes, distantes entre si em exatamente uma unidade<sup>5</sup>, por hipótese, e que podem ser representadas numericamente por um produto cartesiano de números inteiros, ou seja,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} := \mathbb{Z}^2$ . Tais “posições”, representadas pelos pontos da grade, são denominadas *nodos*<sup>6</sup> (ou nós), tal como na teoria dos grafos.  $\mathbb{Z}$  é o conjunto dos inteiros,  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ , e  $\mathbb{Z}^2$ , é o conjunto de todos os vetores do plano com as duas coordenadas inteiras, ou seja,

<sup>2</sup>Considerado o pai da teoria de percolação, John Michael Hammersley, é reconhecido como um dos grandes matemáticos do século XX. Nasceu em 21 de Março de 1920 e faleceu recentemente, em 2 de Maio de 2004.

<sup>3</sup>O termo original normalmente utilizado na teoria, em lugar de grade, é *lattice*. Uma grade plana quadrada como a da Figura 2 é referida como *square lattice*.

<sup>4</sup>O modelo proposto por Broadbent e Hammersley foi desenvolvido considerando duas dimensões, e, apesar de existirem estudos desenvolvidos para  $d$  dimensões (simbolicamente  $\mathbb{Z}^d$ ), o presente trabalho também se atém apenas a  $\mathbb{Z}^2$ .

<sup>5</sup>Distância Euclidiana unitária.

<sup>6</sup>Também chamadas de *sítios*, como será visto mais adiante.

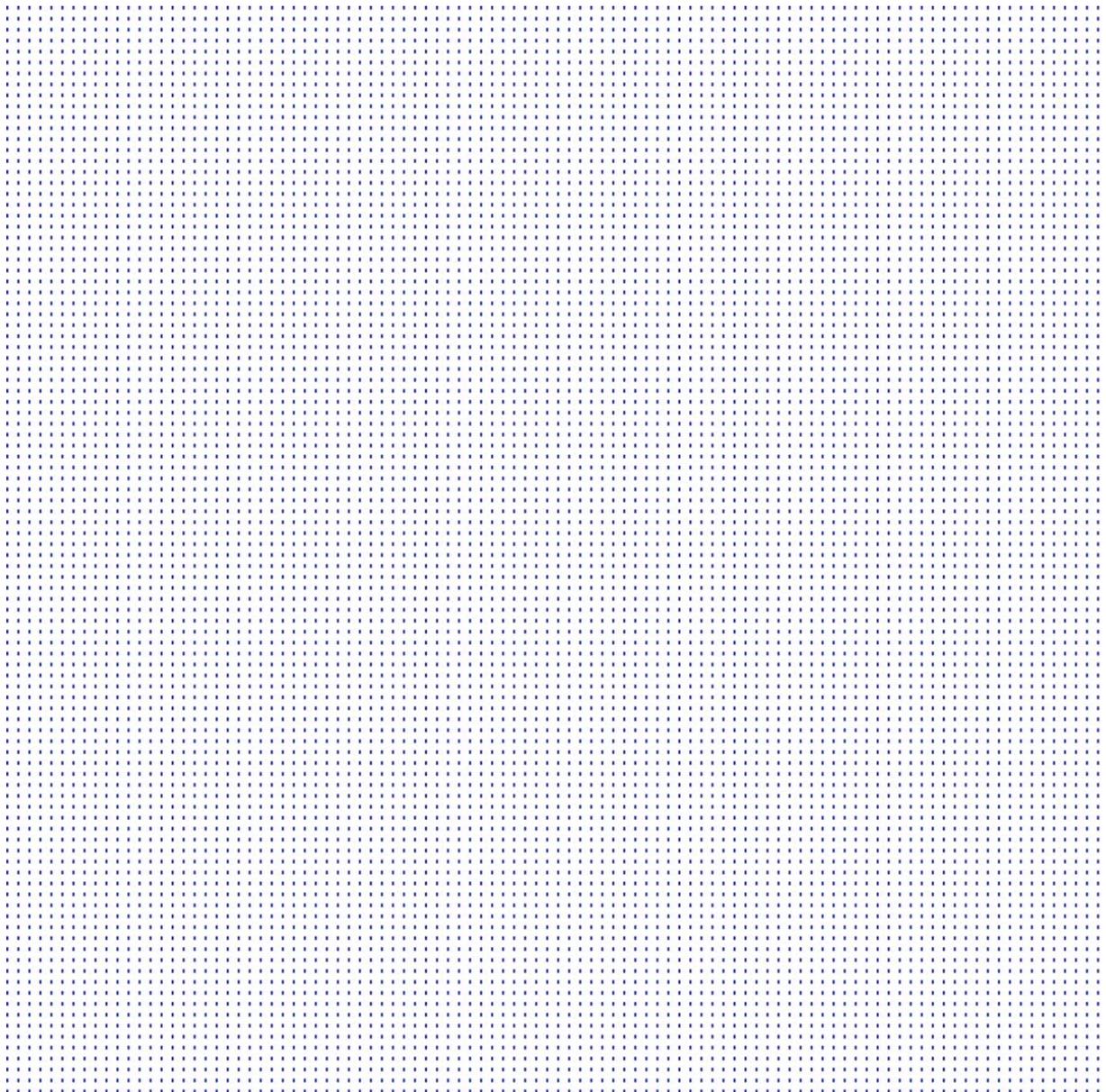


Figura 2: Grade 100x100.

$$\mathbb{Z}^2 = \{z = (x, y), \quad x, y \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.1)$$

Seja  $p$  um número que satisfaz à condição  $0 \leq p \leq 1$ . O processo de percolação consiste em examinar cada nodo de  $\mathbb{Z}^2$  individualmente e declarar se o mesmo encontra-se *aberto* com probabilidade  $p$  ou *fechado* com probabilidade  $1 - p$ , independentemente dos demais nodos. Alguns autores referem-se a  $p$  como “*parâmetro  $p$* ”, com muita propriedade, devido à herança advinda da teoria das probabilidades, que é a base teórica fundamental do modelo. Trata-se de um processo estatístico montado à base de uma distribuição de Bernoulli de parâmetro  $p$ , ou seja,  $X \approx \text{Bernoulli}(p)$ .

Em relação ao problema da pedra submersa, cada um desses nodos em  $\mathbb{Z}^2$  é parte da estrutura física da pedra, de modo que, se aberto, representa um poro da pedra, ou seja, um pequeno espaço por onde a água pode passar. A idéia é que, se pudesse ser feito um corte na pedra mantendo todas as suas características físicas, e ampliando diversas vezes o plano de corte, a estrutura seria aproximadamente como a da Figura 3.

A Figura 3 é a representação de uma grade 100x100 com alguns nodos interligados através de elos, novamente como na teoria dos grafos. Neste caso, uma metade aleatória dos nodos estão interligados, significando que estão abertos, ou seja, que podem permitir a passagem de fluido. A imagem da Figura 3 foi gerada em computador, usando o *software* gerador de grafos denominado **Graphlab**<sup>7</sup>, que é parte integrante deste trabalho. A afirmativa de que metade dos nodos estão abertos significa que o valor do parâmetro  $p$  é 0,5.

O conjunto de imagens apresentado na Figura 4, mostra uma seqüência de grades 50x50 geradas, como fossem grafos aleatórios, para valores crescentes de  $p$ , em degraus de 0,2, desde 0,0 até 1,0. Tal seqüência dá uma noção visual do efeito do parâmetro  $p$  nas grades que representam o meio e, assim, evidencia a função de  $p$  no modelo.

Uma vez construída a estrutura que representa o meio, o próximo passo é estabelecer a dinâmica do *processo de percolação* em si, que dita a forma pela qual o fluido avança através deste meio. Tal processo é apresentado na Seção 2.5 e é essencial para a elaboração do simulador.

---

<sup>7</sup>Não apenas a imagem da Figura 3, mas a grande maioria das figuras deste documento que contém grades ou grafos, foram produzidas através do Graphlab.

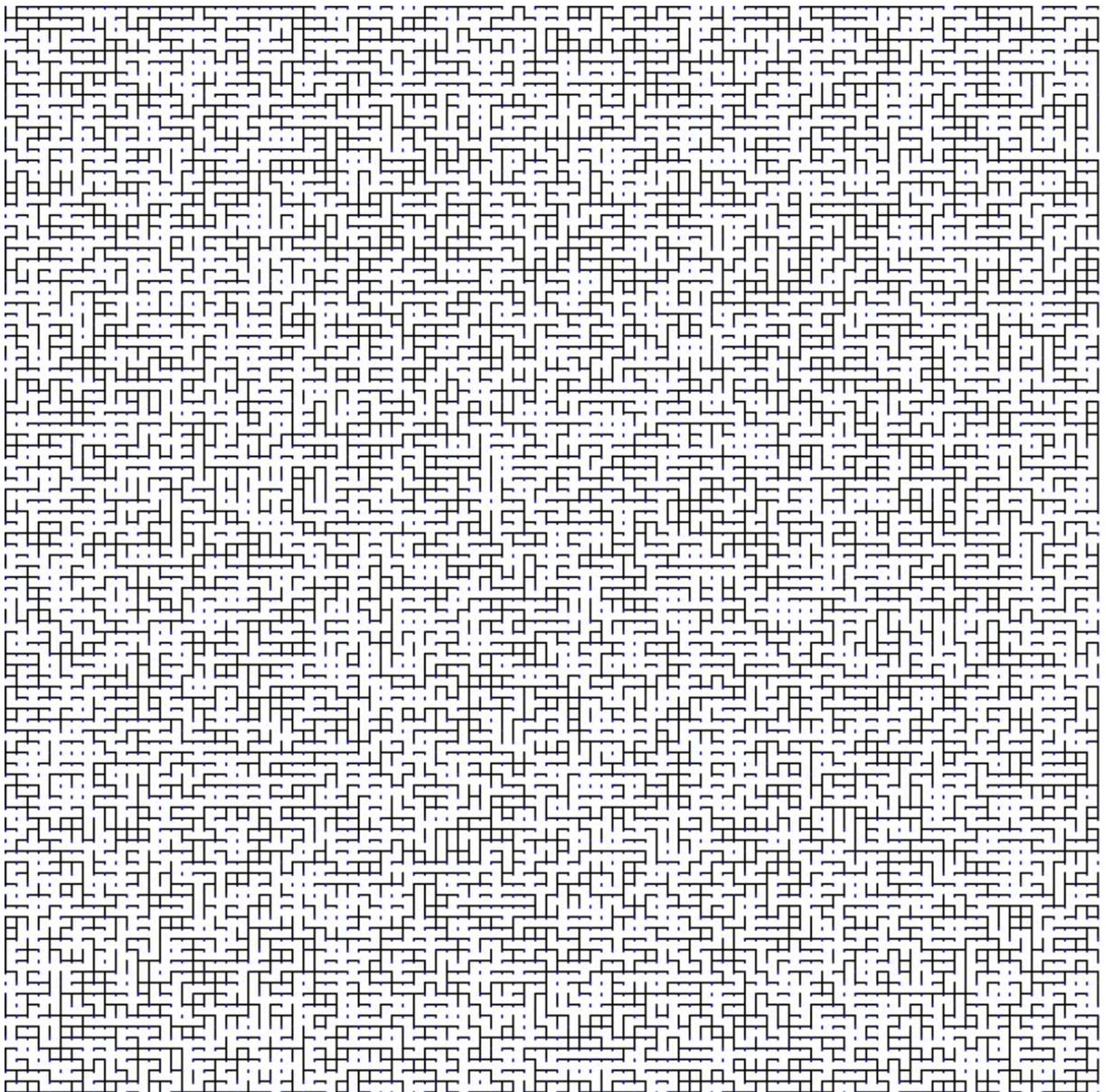
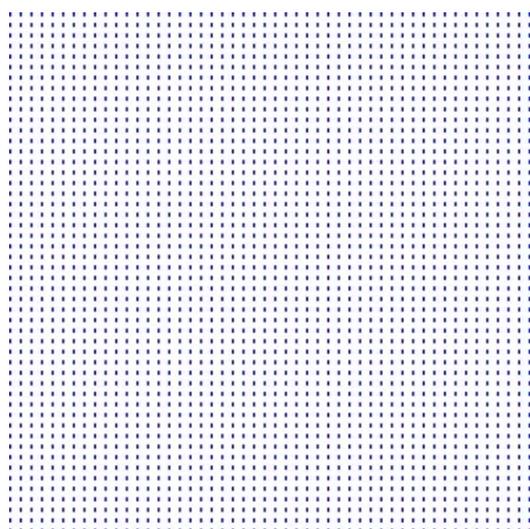
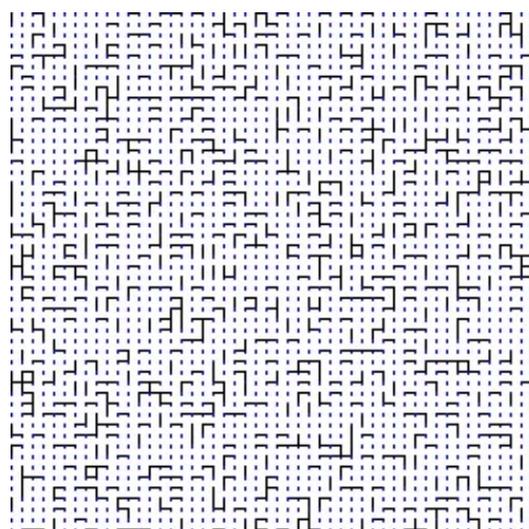
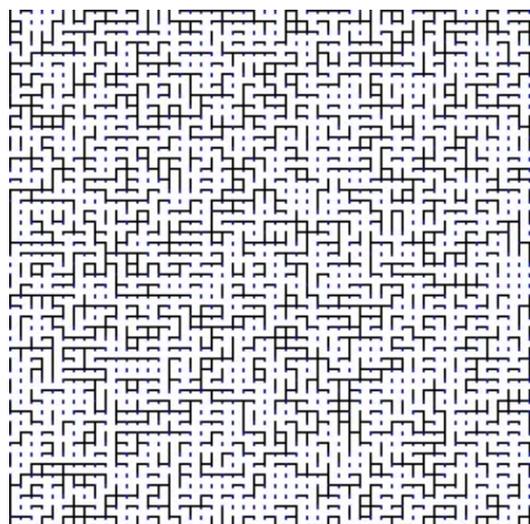
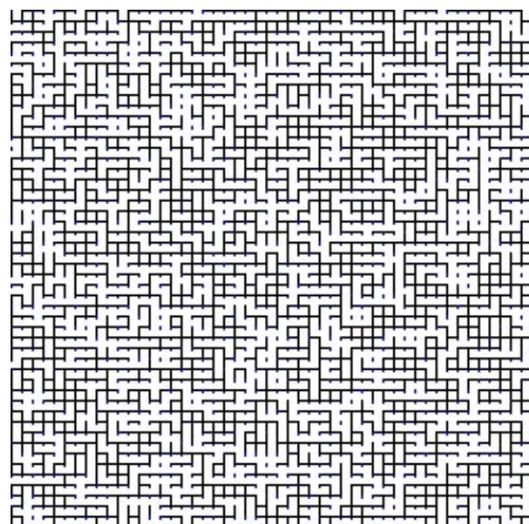
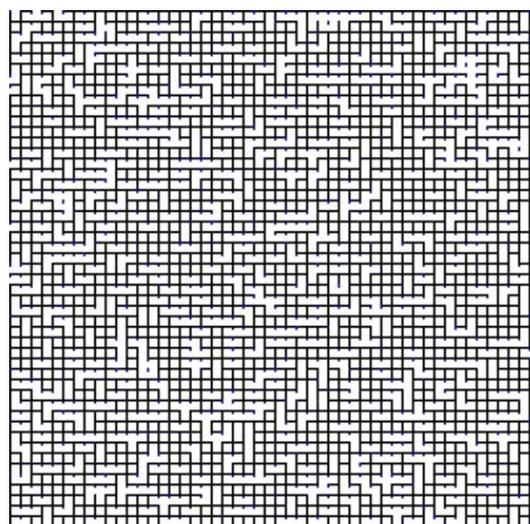
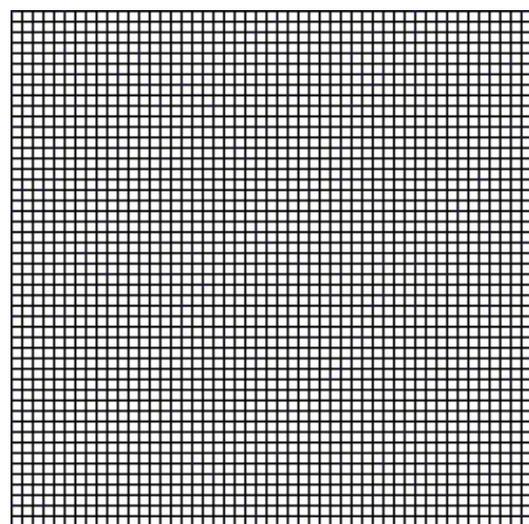


Figura 3: Grade 100x100 com  $p = 0,5$ .

(a)  $p=0,0$ (b)  $p=0,2$ (c)  $p=0,4$ (d)  $p=0,6$ (e)  $p=0,8$ (f)  $p=1,0$ Figura 4: Grades 50x50 com valores crescentes de  $p$ .

## 2.3 Conceitos Básicos

A teoria de percolação é essencialmente simples, e é montada sobre uma base conceitual tão simples quanto. São apresentados aqui os conceitos de *sítios*, *elos*, *rede de percolação*, *vizinhos mais próximos*, e *ponto de ignição*. Na Seção 2.5 estes conceitos já são necessários para o bom entendimento da *dinâmica do processo* de percolação.

### 2.3.1 Rede de Percolação: Um Labirinto de Sítios e Elos

No jargão da teoria de percolação, os nodos são chamados de *sítios* e os elos continuam com a mesma denominação. A estrutura assim formada, mostrada na Figura 3, é chamada de *rede de percolação*. Uma rede de percolação pode ser definida, portanto, de um modo simplista, como *um conjunto de sítios e elos configurados fisicamente de acordo com uma dada geometria*.

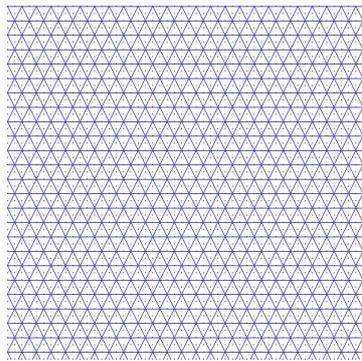
As diferentes redes de percolação, com as suas geometrias diferenciadas, foram formuladas para representar os diferentes meios encontrados na natureza, onde seja possível aplicar a teoria.

A teoria de percolação foi formulada originariamente sobre o modelo de Rede Quadrada, cuja configuração é a apresentada nas Figuras 2 e 3. Com o avanço das pesquisas, foram sendo criados e estudados diversos modelos de rede, tais como, Rede Triangular, Rede Hexagonal<sup>8</sup>, Rede de Bethe<sup>9</sup> [Bethe (1935)], e muitos outros, cujos detalhes não são tratados aqui. A Figura 5 mostra alguns desses modelos.

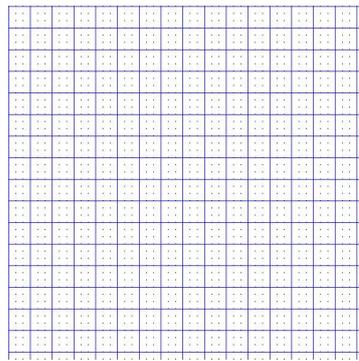
A notação numérica utilizada para denominar alguns modelos, tais como os mostrados na Figura 5, letras 5(e) a 5(i), foi primeiramente apresentada em Grünbaum & Shephard (1987) e é baseada nos polígonos que tocam um sítio qualquer da rede. Na formação deste “código”, cada número separado por vírgula representa um polígono e obedece à notação geral  $n^a$ , onde  $n$  é a quantidade de lados do polígono e  $a$  é o número de vezes em que ele aparece de modo adjacente no sítio. De modo que o código completo pode ser representado por  $n_i^{a_i}$ , i.e.,  $(n_1^{a_1}, n_2^{a_2}, n_3^{a_3}, \dots)$ , sendo a contagem dos polígonos feita a partir do menor e em sentido horário.

<sup>8</sup>Também conhecida como colméia (*honeycomb*).

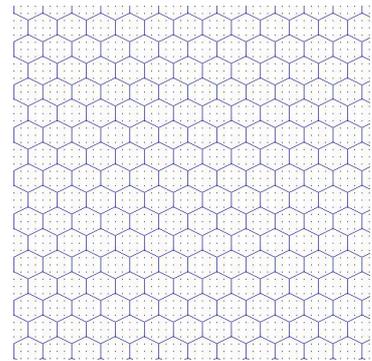
<sup>9</sup>O nome deste tipo de rede é devido a Hans Albrecht Bethe, físico alemão nascido em 2 de Julho de 1906. Bethe foi discípulo de outro grande físico, Arnold Sommerfeld, e seus principais trabalhos foram sobre física nuclear, cujas pesquisas fervilhavam à época. Por conta das suas pesquisas nesta área, foi agraciado com o Prêmio Nobel de Física em 1967. A Rede de Bethe foi definida em seu trabalho intitulado “*Statistical Theory of Superlattices*”, publicado em 1935. Faleceu muito recentemente com quase 100 anos, em 6 de Março de 2005.



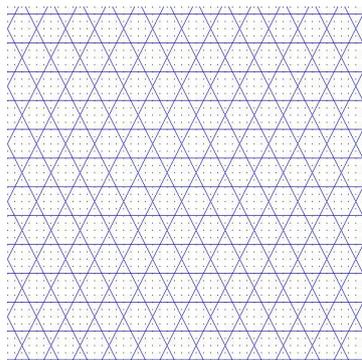
(a) Triangular



(b) Quadrada



(c) Colméia



(d) Kagome

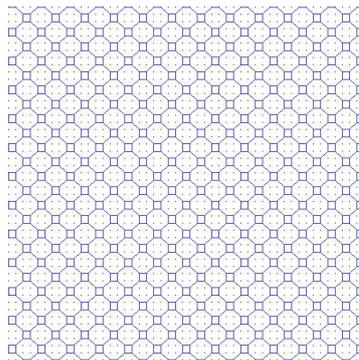
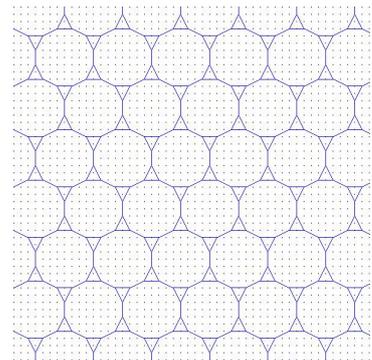
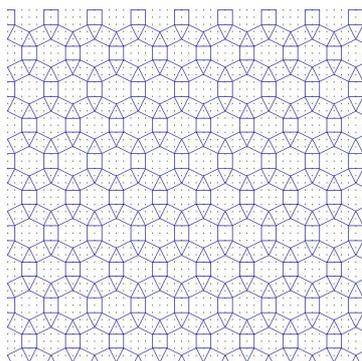
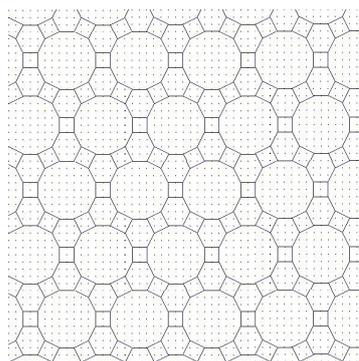
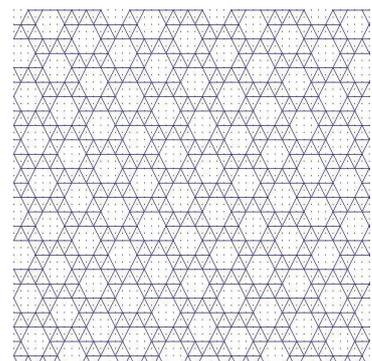
(e)  $(4, 8^2)$ (f)  $(3, 4, 6, 4)$ (g)  $(3, 12^2)$ (h)  $(4, 6, 12)$ (i)  $(3^4, 6)$ 

Figura 5: Alguns modelos de rede.

A Figura 6 é uma ampliação da rede  $(3^4, 6)$  mostrada na Figura 5(i) com um ponto destacado em vermelho indicando um sítio, mostrando que os polígonos que o tocam são cinco, sendo quatro triângulos adjacentes e um hexágono. Por isto, a rede é denominada  $(3^4, 6)$ . Agora torna-se um exercício simples denominar qualquer rede desta forma. A triangular, por exemplo, é  $(3^6)$ ; a quadrada,  $(4^4)$ .

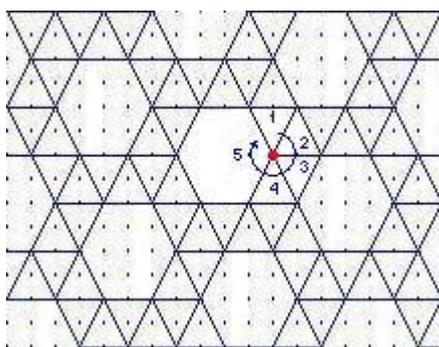


Figura 6: Rede  $(3^4, 6)$  ampliada.

A rede de Bethe é muito especial por ter sido o primeiro modelo de que se tem notícia [Bethe (1935)]. A Figura 7 é um exemplo simples de rede de Bethe.

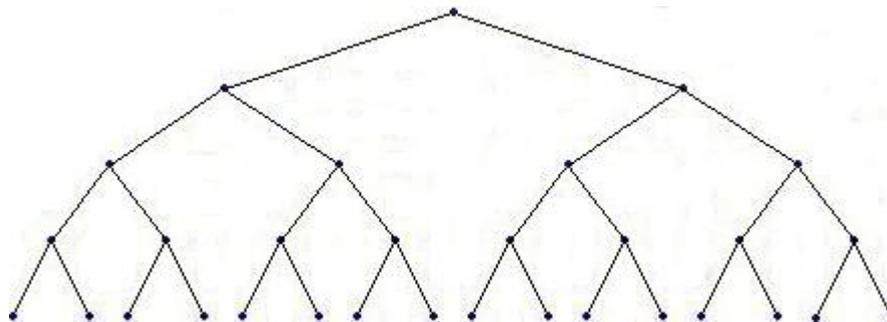


Figura 7: Exemplo de rede de Bethe de dois ramos.

### 2.3.1.1 Redes Duais

Um resultado muito importante das pesquisas diz respeito à dualidade. Considerada uma determinada rede  $\mathcal{L}$ , sua rede dual  $\mathcal{L}_d$  é obtida montando uma segunda rede sobreposta cujos elos cruzam os da rede original (Figura 8). Kesten (1980) mostrou que:

$$p_c^{\mathcal{L}} + p_c^{\mathcal{L}_d} = 1.$$

Este resultado é extremamente útil para a determinação analítica dos valores exatos da probabilidade crítica  $p_c$  de alguns modelos de rede.

A Figura 8 evidencia que a dual de uma rede quadrada também é quadrada, mas a rede dual de uma triangular é hexagonal. Uma boa discussão sobre esta situação pode ser encontrada em Grimmett (1999).

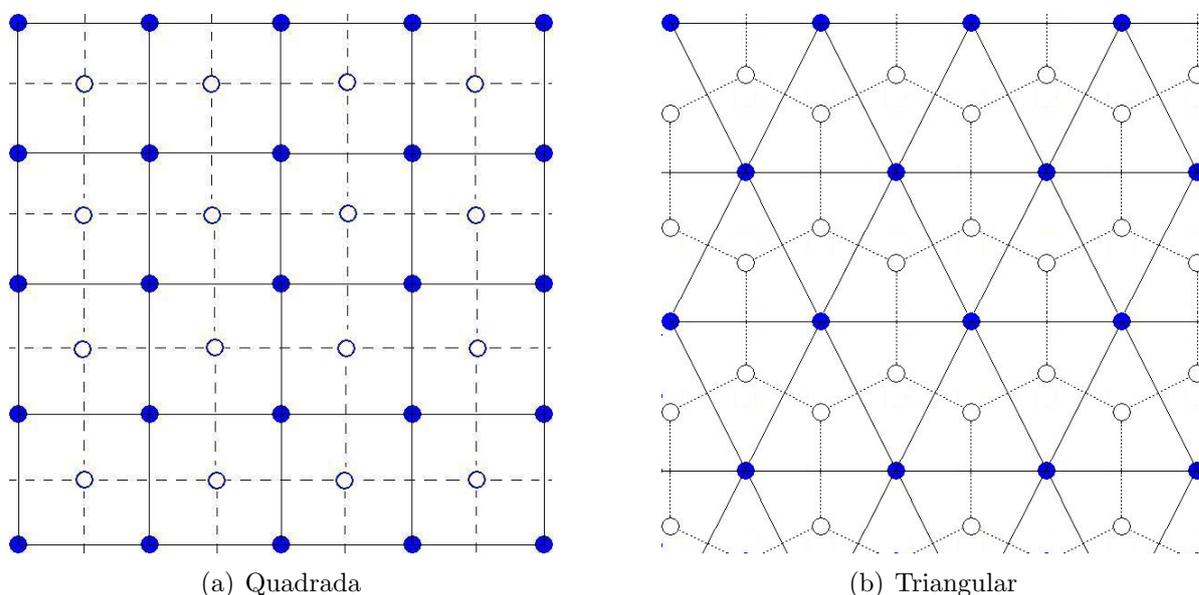


Figura 8: Redes duais.

É importante ressaltar a diversidade de modelos que podem ser concebidos, haja vista a grande quantidade de modelos básicos possíveis e as possíveis construções de redes duais. E além de todos esses modelos para duas dimensões, existem ainda os modelos para três dimensões<sup>10</sup>, e para dimensões superiores<sup>11</sup>. O presente trabalho aborda apenas o modelo de percolação em *rede quadrada*.

### 2.3.2 Vizinhos Mais Próximos

Cada nodo de uma rede quadrada possui oito vizinhos, sendo que, quatro estão dispostos em “cruz” e outros quatro estão dispostos em “x”. Dado um nodo  $z$  da rede, denominam-se *vizinhos mais próximos*, os quatro vizinhos dispostos em “cruz” (Figura 9). Considerando que a distância de  $z$  até um de seus vizinhos mais próximos é a unidade, segue que a distância até um dos outros quatro vizinhos é maior que a unidade.

Como será mostrado mais adiante, este conceito é um dos mais importantes para a dinâmica do modelo de percolação.

<sup>10</sup>São definidos para três dimensões, entre outros, os modelos: *diamond*, *cubic simple*, *cubic face-centered*, e *cubic body-centered*.

<sup>11</sup>Para dimensões maiores que três os modelos ganham o nome genérico *n-hypercubic*, ou seja, *4-hypercubic* para quatro dimensões, *5-hypercubic* para cinco dimensões, ..., *n-hypercubic* para  $n$  dimensões.

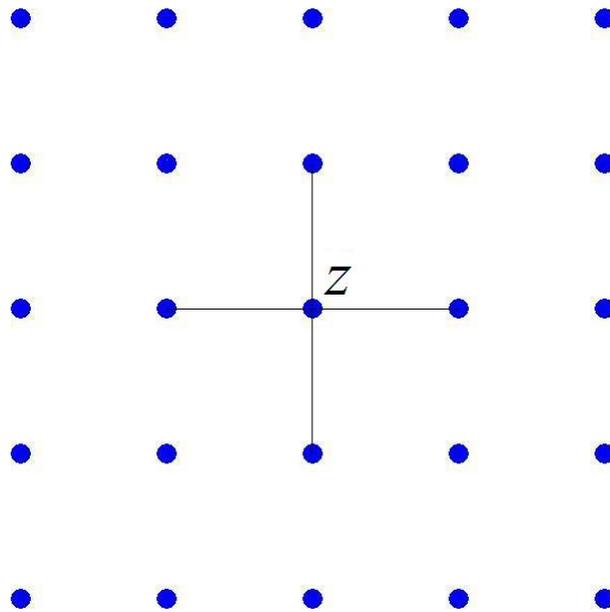


Figura 9: Vizinhos mais próximos.

### 2.3.3 Ponto de Ignição

Chama-se *ponto de ignição* ao sítio onde se inicia o processo de percolação, ou seja, ao primeiro sítio invadido pelo fluido. No caso de uma queimada florestal, por exemplo, corresponde ao ponto onde se iniciou a queimada. Por definição, o sítio que determina o ponto de ignição é considerado a origem do sistema referencial de coordenadas.

Apesar de haver estudos que consideram múltiplos pontos de ignição no início do processo percolativo e, também, pontos de ignição adicionais durante o processo, aqui, neste trabalho, é considerado apenas o caso simples de um único ponto de ignição no início do processo e nenhuma ignição no decorrer do mesmo.

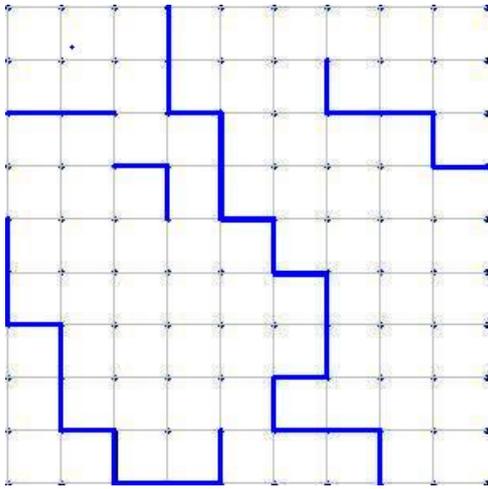
Modelos que incorporam a característica adicional de considerarem diversos pontos de ignição no início do processo recebem o nome de *percolação de partida múltipla* [Grimmett (1999)], e os que adicionam a característica especial de considerarem outros pontos de ignição ocasionais durante o processo recebem o nome de *percolação de longo alcance* [Grimmett (1999)].

## 2.4 Tipos de Percolação

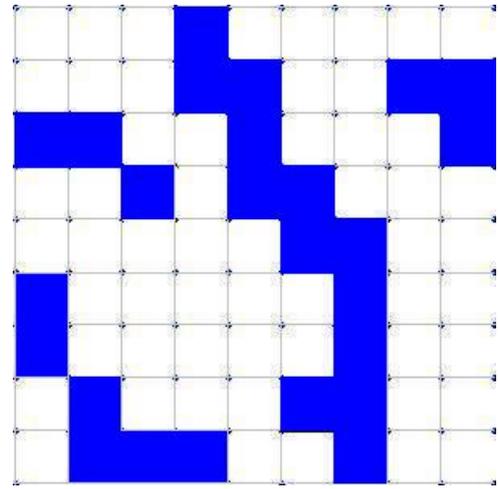
Além da diversidade de modelos de rede, existem também algumas tipologias de percolação que precisam ser citadas para que fique bem especificado o modelo adotado para o Firelab. Estas tipologias têm a ver com a forma pela qual o fluido penetra através do

meio. As mais importantes, no contexto desta pesquisa, são:

1. **Quanto à via de penetração.** A penetração pode ocorrer através de elos ou de sítios (Figura 10).



(a) Percolação de elos.



(b) Percolação de sítios.

Figura 10: Tipos de percolação quanto à via de penetração.

- (a) **Percolação de Elos.** A penetração se dá através dos elos, como ilustra a Figura 10(a).
  - (b) **Percolação de Sítios.** A penetração se dá através dos sítios, conforme ilustração da Figura 10(b).
2. **Quanto ao direcionamento da penetração.** O avanço pode ocorrer considerando os quatro vizinhos mais próximos, ou considerando apenas dois deles (Figura 11).
    - (a) **Percolação Regular.** A penetração se dá considerando os quatro vizinhos mais próximos, como indicado na Figura 11(a).
    - (b) **Percolação Orientada.** A penetração se dá considerando apenas dois dos vizinhos mais próximos, como na Figura 11(b).

## 2.5 O Processo de Percolação

A penetração do fluido através do meio, seja qual for a rede que represente o meio, é descrita como um processo de natureza estatística, em que, o fluido, a partir de um

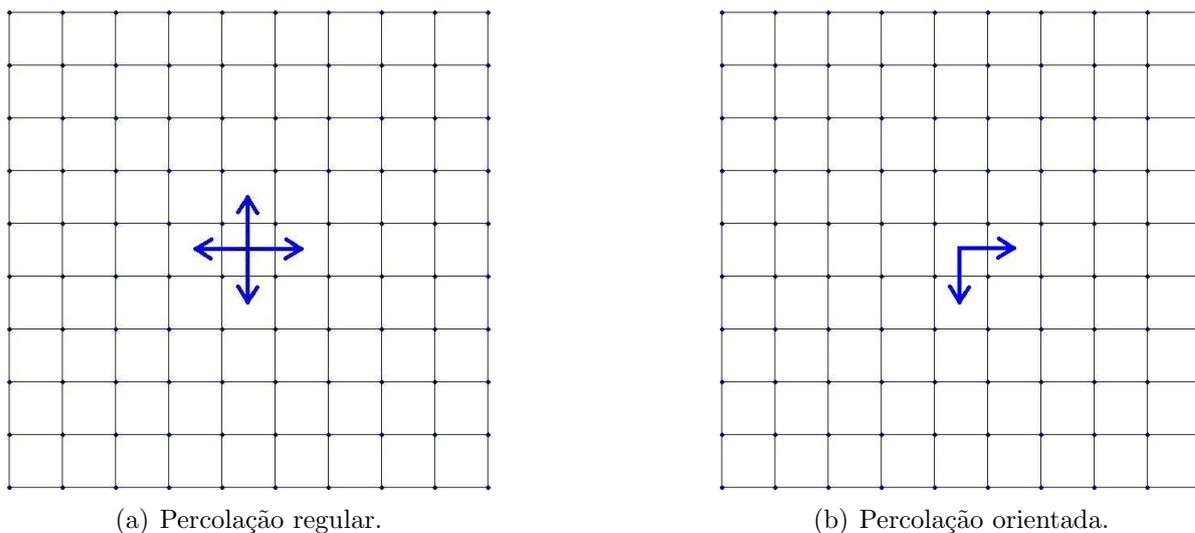


Figura 11: Tipos de percolação quanto ao direcionamento da penetração.

dado nodo, pode avançar para os vizinhos mais próximos, de acordo com a probabilidade  $p$ . Computacionalmente, significa que deve ser gerado um número pseudo-aleatório *Uniforme*(0,1),  $p_z$ , para cada um dos vizinhos passíveis de serem penetrados, e se  $p_z < p$  ocorre o avanço. A Figura 12 é uma ilustração didática do processo.

**Descrição do Processo.** O processo de percolação é iniciado por um sítio localizado na origem, por hipótese, já invadido pelo fluido no instante  $t_0$ . No instante  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , o fluido pode avançar (ou não) para um, ou vários, ou todos, os quatro **vizinhos mais próximos**, dependendo do fato de cada um deles estar aberto ou fechado. No instante  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , o fluido pode avançar, a partir de cada um dos novos sites invadidos, para os vizinhos mais próximos. E, assim, sucessivamente para  $t_3, t_4, \dots, t_n$ . Seguindo a seqüência da Figura 12 é possível ter uma noção visual do processo.

Na seqüência da Figura 12, impõe-se, apenas por uma questão de didática, que todos os sítios estejam abertos, de modo que o avanço se dá sempre sobre **todos** os vizinhos mais próximos, o que não é o usual no modelo. Tal situação só ocorre quando  $p = 1$ .

O algoritmo para determinar quais os sítios passíveis de serem invadidos em um instante  $t$  qualquer, leva em conta os seguintes pontos, na ordem:

1. Se o sítio é um dos vizinhos mais próximos;
2. Se o sítio está aberto;
3. Se o sítio ainda não está invadido;

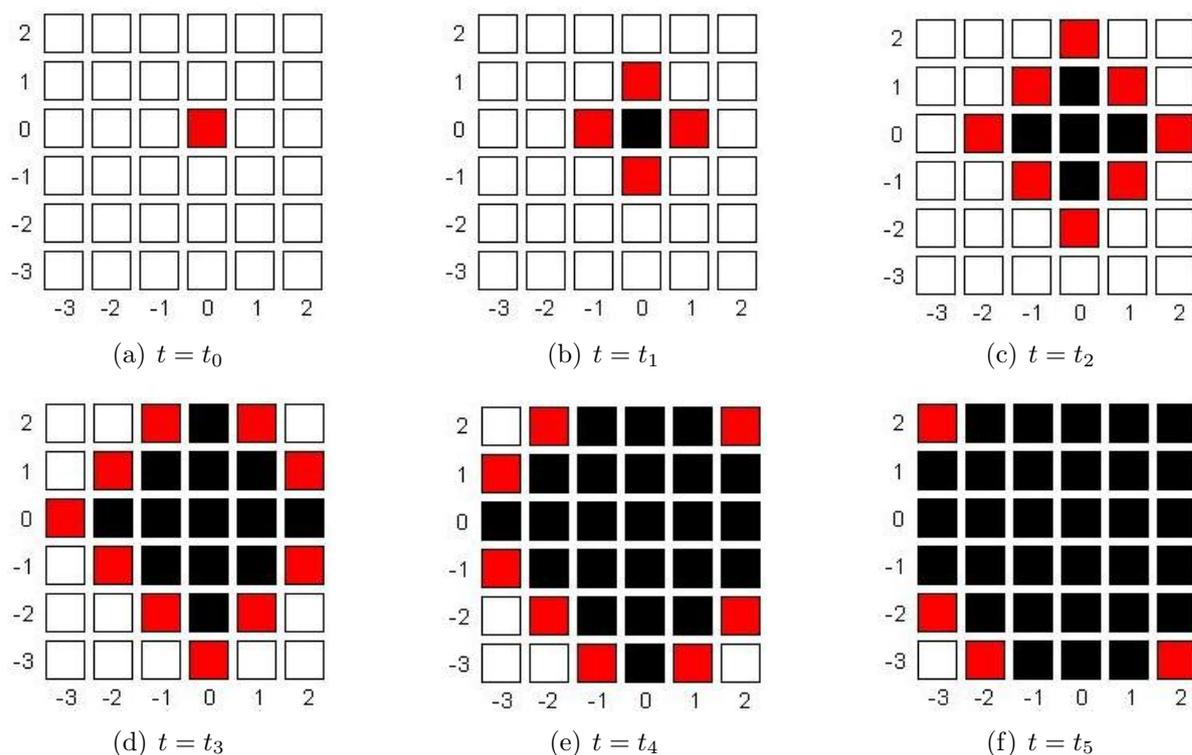


Figura 12: Exemplo didático de seqüência do processo de percolação.

Seja  $V_{(x,y)}$  o conjunto de vizinhos mais próximos do sítio  $z = (x, y)$ . Seja, também,  $V_i$  o conjunto de sítios passíveis de serem invadidos no instante  $t_i$ , ou seja,  $V_0$  correspondente a  $t_0$ ,  $V_1$  correspondente a  $t_1$ , ...,  $V_n$  correspondente a  $t_n$ . Esta notação é usada adiante durante a explanação do processo de percolação. E a noção conceitual que ela encerra é fundamental para o entendimento do processo.

Em (a), que denota o instante  $t_0$ , ou seja, o momento inicial do processo, o sítio  $(0,0)$  [ $V_0 = \{(0,0)\}$ ], que é o ponto de ignição, encontra-se invadido pelo fluido. Em (b), que denota o instante  $t_1$ , todos os sítios vizinhos mais próximos de  $(0,0)$ , representados pelo conjunto  $V_1 = \{(0,1), (1,1), (0,-1), (-1,0)\}$ , são invadidos. Neste ponto há quatro sítios recém-invadidos, e os candidatos a serem invadidos agora em  $t_2$  são os vizinhos mais próximos destes quatro – que estejam abertos e que ainda não tenham sido invadidos –, que é o conjunto resultante da união de cada um dos conjuntos dos vizinhos mais próximos de cada um dos quatro. Ou seja,

1.  $V_{(0,1)} = \{(1,1), (-1,1), (0,2)\}$
2.  $V_{(1,0)} = \{(1,-1), (1,1), (2,0)\}$
3.  $V_{(0,-1)} = \{(0,-2), (1,-1), (-1,-1)\}$

$$4. V_{(-1,0)} = \{(-1, -1), (-1, 1), (-2, 0)\}$$

De modo que:

$$V_1 = V_{(0,1)} \cup V_{(1,0)} \cup V_{(0,-1)} \cup V_{(-1,0)}$$

$$V_1 = \{(1, 1), (-1, 1), (0, 2), (1, -1), (2, 0), (0, -2), (-1, -1), (-2, 0)\}$$

A Tabela 3 mostra a seqüência completa do avanço correspondente à Figura 12.

Instante	Sítios
$t_0$	$\{(0,0)\}$
$t_1$	$\{(0,1), (1,1), (0,-1), (-1,0)\}$
$t_2$	$\{(1,1), (-1,1), (0,2), (1,-1), (2,0), (0,-2), (-1,-1), (-2,0)\}$
$t_3$	$\{(1,2), (-1,2), (-2,1), (-3,0), (-2,-1), (-1,-2), (0,-3), (1,-2), (2,-1), (2,1)\}$
$t_4$	$\{(2,2), (-2,2), (-3,-1), (-2,-2), (-1,-3), (1,-3), (2,-2), (2,2)\}$
$t_5$	$\{(-3,2), (-3,-2), (-2,-3), (2,-3)\}$

Tabela 3: Seqüência do avanço correspondente à Figura 12.

Em muitas tentativas de avanço o processo é interrompido pelo fato de não existir mais nenhum sítio aberto por onde o fluido possa passar. Mas, há casos em que o avanço continua, e continua, e continua, até encontrar uma das bordas do meio. Nestes casos, diz-se que houve percolação.

O processo de percolação é implementado à luz do Método de Monte Carlo, de modo que são experimentadas diversas probabilidades de sítio,  $p$ , no intervalo  $[0,1]$ . Para cada  $p$  são feitas  $N$  tentativas. A probabilidade de percolação,  $\theta(p)$ , é estimada numericamente, com tal estimacão representada por  $\hat{\theta}(p)$  e expressa pela relação entre o número de tentativas em que houve percolação,  $N_p$ , e o total de tentativas,  $N$ . Ou seja:

$$\hat{\theta}(p) = N_p/N \quad (2.2)$$

Quando  $p$  é zero, e durante um certo tempo,  $\theta(p)$  também é zero. Haverá um momento dentro do processo, correspondente a uma probabilidade  $p$  especial, a partir da qual começará a haver percolação.

O primeiro valor de  $p$  em que  $\theta(p)$  torna-se maior que zero, é chamado de *probabilidade crítica*, e denota-se este valor especial de  $p$  por  $p_c$ . O momento correspondente a  $p_c$  é de

fundamental importância na teoria de percolação, e marca a característica de *mudança de fase*, inerente ao processo.

A probabilidade crítica é tratada de um modo mais apropriado em 3.2.3.

## 2.6 Conglomerado

O conglomerado é o conjunto de sítios invadidos pelo fluido. Na Figura 13, onde é mostrada a situação final de uma experiência, a região escura representa o conglomerado.

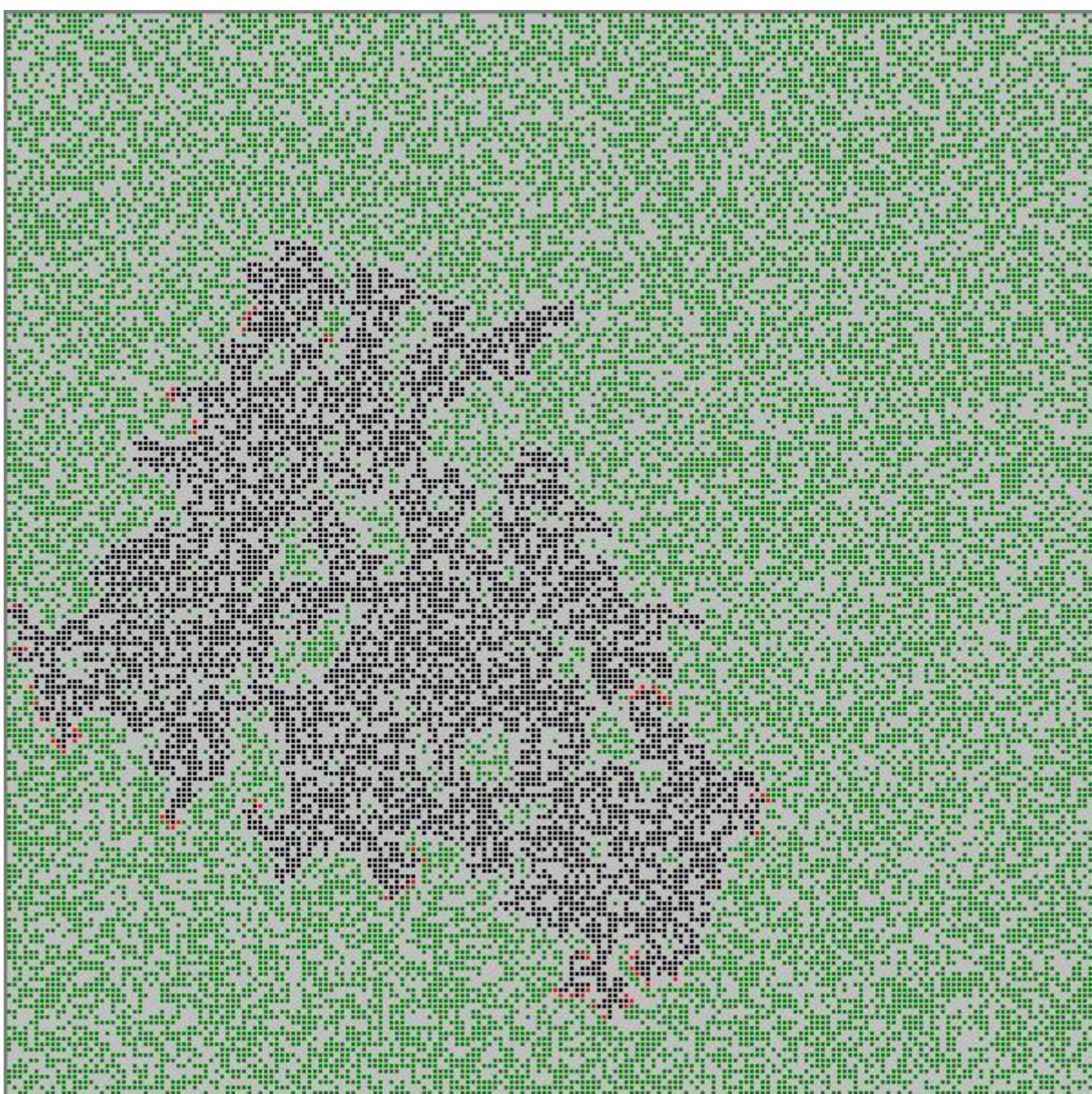


Figura 13: Conglomerado.

A Figura 13 é o resultado de uma simulação de queimada realizada através do *Firelab*,

em que a área florestal é representada por uma grade 200x200 com  $p = 0,6$ .

O conglomerado é um caminho aberto de sítios conectados. É, portanto, um subgrafo na grade que representa o meio.

Obviamente, a grade da Figura 13 é finita, e qualquer conglomerado (sub-grafo) sobre esta estrutura também será finito, inclusive aquele, que, partindo da origem alcança um dos lados da grade. Este é denominado *conglomerado da origem* e é o que caracteriza a mudança de fase.

Entretanto, visualizando  $\mathbb{Z}^2$  (ou  $\mathbb{Z}^n$ ) em sua plenitude infinita, o conglomerado da origem é também infinito, e é o único sub-grafo infinito.

No processo percolativo, a existência do conglomerado infinito se dá em um valor especial de  $p$ , como já visto, que é a probabilidade crítica  $p_c$ .

No próximo capítulo é apresentado o formalismo matemático básico da teoria de percolação.

## 3 *Modelagem Matemática*

### 3.1 Introdução

Este capítulo apresenta o formalismo matemático da teoria de percolação. Seguindo a seqüência convencionalmente usada pela grande maioria dos autores, o capítulo inicia com a modelagem matemática para *percolação de elos*.

A Seção 3.2 aborda especificamente a percolação de elos, mas os ajustes necessários para contemplar a percolação de sítios são muito pequenos e são tratados na Seção 3.3.

### 3.2 Percolação de Elos

A teoria de percolação encontra suas bases matemáticas na *teoria dos grafos* e na *teoria das probabilidades*. Esta seção começa pela abordagem do problema através da teoria dos grafos; as subseções 3.2.1 e 3.2.2, a seguir, proporcionam a compreensão do modelo através do estudo das duas abordagens, separadamente e na ordem.

#### 3.2.1 Abordagem da Teoria dos Grafos

Para o desenvolvimento de muitos pontos teóricos é necessário definir como se mede a distância entre dois pontos, ou seja, é preciso definir uma *norma*.

**Norma:** Consiste em uma função positivo-definida que associa a cada vetor de um dado espaço um comprimento específico, sendo zero somente no caso do vetor nulo.

No espaço vetorial  $X = \mathbb{R}^n$ , uma aplicação

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1)$$

diz-se uma norma se:

1.  $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$  e  $\|x\| = 0$  sse  $x = 0$
2.  $\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3.  $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Alguns casos particulares são:

$\hookrightarrow$  **Norma Soma**. A norma soma é definida por:

$$\|x\| = \sum_{i=1}^d |x_i|. \quad (3.2)$$

$\hookrightarrow$  **Norma Euclidiana**. A norma euclidiana é o módulo do vetor  $x$  de  $d$  dimensões, e é definida como:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}. \quad (3.3)$$

$\hookrightarrow$  **Norma Máximo**. A norma máximo é o valor da maior coordenada, em valor absoluto, do vetor  $x$  e é definida como:

$$\|x\| = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq d\}. \quad (3.4)$$

A norma soma e a norma euclidiana são as mais importantes nesta pesquisa, mas é interessante registrar a relação entre a norma soma e a norma máximo:

$$\|x\|_m \leq \|x\|_s \leq d \|x\|_m, \quad (3.5)$$

onde  $\|x\|_s$  é a norma soma e  $\|x\|_m$  é a norma máximo.

A rede quadrada em duas dimensões, ou seja, no plano, já bem conhecida (Capítulo 2), é representada matematicamente por  $\mathbb{Z}^2$ . A generalização para várias dimensões é denotada por  $\mathbb{Z}^d$ , de modo que a letra  $d$  significa a dimensão em que se deseja estudar o

processo de percolação. Geralmente estabelece-se que  $d \geq 2$ , no entanto, admita-se por enquanto que  $d \geq 1$ .

Denota-se por  $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  o conjunto de todos os inteiros, de modo que  $\mathbb{Z}^d$  representa o conjunto de todos os vetores  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  com coordenadas inteiras em  $d$  dimensões. Para todo  $x \in \mathbb{Z}^d$  denota-se por  $x_i$  a  $i$ -ésima coordenada de  $x$ .

A distância  $\delta(x, y)$  entre dois vetores (nodos)  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  é dada pela teoria dos grafos:

$$\delta(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|. \quad (3.6)$$

Vem de 3.6 que a distância da origem a um  $x$  qualquer é:

$$\delta(0, x) = \sum_{i=1}^d |0 - x_i| = \sum_{i=1}^d |x_i| = \|x\|. \quad (3.7)$$

Uma medida da distância de  $x$  à origem, tal como a definida em 3.7, é freqüentemente referida como uma “norma de  $x$ ”.

Para melhor caracterizar  $\mathbb{Z}^d$  como um grafo, chamado de *grade cúbica  $d$ -dimensional* ( *$d$ -dimensional cubic lattice*), precisa-se apenas adicionar elos entre todos os pares  $(x, y)$  de pontos de  $\mathbb{Z}^d$  com  $\delta(x, y) = 1$  (pontos equidistantes e distantes entre si pela *distância euclidiana unitária*), ou seja:

$$\mathbb{E}^d = \{e_{xy} = (x, y) : \|x - y\| = 1, x, y \in \mathbb{Z}^d\}. \quad (3.8)$$

A grade assim construída é denotada por  $\mathbb{L}^d$ .  $\mathbb{Z}^d$  representa o conjunto de vértices de  $\mathbb{L}^d$  enquanto  $\mathbb{E}^d$  é o novo conjunto de elos. Nos termos da teoria dos grafos, deve-se escrever:

$$\mathbb{L}^d = \{\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d\}. \quad (3.9)$$

Para efeito de visualização, muitas vezes é conveniente imaginar  $\mathbb{L}^d$  como um grafo embutido em  $\mathbb{R}^d$ , cujos elos são segmentos de linhas retas ligando cada vértice de  $\mathbb{Z}^d$ .

Quando  $\delta(x, y) = 1$  diz-se que  $x$  e  $y$  são adjacentes e denota-se por  $x \sim y$ , e o elo que conecta  $x$  e  $y$  é representado por  $(x, y)$ ; diz-se também que  $x$  e  $y$  são vértices-fim<sup>1</sup> de

<sup>1</sup>Pode-se dizer apenas “vértices de  $e$ ” em vez de “vértices-fim de  $e$ ” sem nenhum prejuízo do significado.

$(x, y)$ . Diz-se que um elo  $e$  é *incidente* ao vértice  $x$  se  $x$  for um vértice-fim de  $e$ . Para efeito de homogeneidade de notação, normalmente usa-se as letras  $u, v, w, x, y, z$  para vértices e  $e, f$  para elos; denota-se por  $O$  a origem de  $\mathbb{Z}^d$ .

Até aqui foi aplicada apenas a teoria dos grafos. Agora é hora de tratar a parte que cabe à teoria das probabilidades.

### 3.2.2 Abordagem da Teoria das Probabilidades

A idéia da teoria de percolação é modelar um meio aleatório. O fenômeno da penetração da água na pedra requer que o meio (a pedra) apresente características de randomicidade para imitar a existência ou não de poros, de modo que o fluido (água) possa avançar, ou não. É uma situação típica de incerteza. Para contemplar esta parte da teoria, acrescenta-se ao modelo estático determinado com ajuda da teoria dos grafos, os recursos da teoria das probabilidades. Segundo Eric Key<sup>2</sup> [Key (1983)]

*“A estatística é a ferramenta que nos permite tomar decisões racionais sob condições de incerteza.”*

Sejam  $p$  e  $q$  tais que

$$0 \leq p \leq 1, \quad p + q = 1.$$

Declara-se, então, que cada elo de  $\mathbb{I}^d$  está aberto com probabilidade  $p$  ou fechado com probabilidade  $q$ , independente dos demais.

Seja

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d} \tag{3.10}$$

o espaço amostral, cujos pontos são representados por

$$w = \{w(e) : e \in \mathbb{E}^d\}, \tag{3.11}$$

onde  $w(e) = 0$  corresponde a um elo  $e$  fechado e  $w(e) = 1$  corresponde a um elo  $e$  aberto. O conjunto  $w \in \Omega$  assim gerado representa uma *configuração*.

---

<sup>2</sup>Eric Stephen Key é discípulo de Harry Kesten e professor de Mathematical Statistics do Department of Mathematical Sciences da University of Wisconsin-Milwaukee. Ph.D. pela Cornell University, 1983.

Seja  $\mathcal{F}$  a  $\sigma$ -álgebra dos sub-conjuntos de  $\Omega$  gerados pelos cilindros de dimensão finita. A medida da probabilidade  $P_p$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  é determinada pelas medidas produto sobre os eventos cilíndricos, ou seja:

$$\text{se } B = \{B(e), e \in A\} \quad \text{com } A \subset \mathbb{Z}^d, A \text{ finito,}$$

então

$$P_p(B) = \prod_{e \in A} P_p(B(e)). \quad (3.12)$$

Que é o mesmo que

$$P_p = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e, \quad (3.13)$$

onde  $\mu_e$  é a medida Bernoulli sobre  $[0, 1]$ , dada por

$$\mu_e(w(e) = 1) = p, \quad \mu_e(w(e) = 0) = q,$$

ou, genericamente,

$$\mu_e(w(e) = x) = p^x(1 - p)^{1-x}. \quad (3.14)$$

### 3.2.3 Probabilidade Crítica $p_c$

O primeiro valor de  $p$  para o qual  $\theta(p)$  torna-se maior que zero é chamado de *probabilidade crítica*,  $p_c$ , e marca a característica de *mudança de fase*, inerente ao processo de percolação. Matematicamente,

$$p_c = \inf\{p : \theta(p) > 0\} \quad (3.15)$$

A Figura 14 mostra uma plotagem típica da probabilidade de percolação  $\theta(p)$ , onde pode ser vista a marca da probabilidade crítica  $p_c$ . Em 14(a) a curva de  $\theta(p)$  é contínua e em 14(b) a curva apresenta uma descontinuidade em  $p_c$ . Na grande maioria da literatura pesquisada prevalece a configuração apresentada em 14(a), mas alguns autores relatam o

comportamento de 14(b).

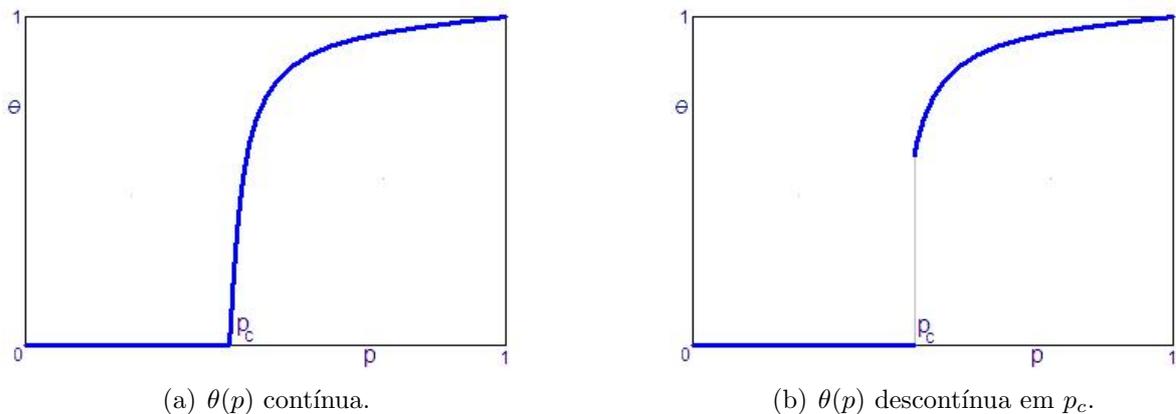


Figura 14: Probabilidade de percolação e probabilidade crítica.

O gráfico da Figura 14 também sugere a definição de três regiões claramente distintas. A primeira, caracterizada por  $p < p_c$ , é denominada *fase subcrítica*; a segunda, em  $p = p_c$ , é onde ocorre a chamada *região crítica*; e a terceira, em que  $p > p_c$ , é denominada *fase supercrítica*. A região crítica é definida matematicamente como  $|p - p_c| \ll 1$ , que significa a região que compreende o próprio ponto  $p_c$  e sua *vizinhança infinitesimal*.

### 3.2.4 Conglomerado

Para  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , diz-se que  $x$  está conectado com  $y$  e denota-se por  $x \leftrightarrow y$  se existir uma sequência de sítios distintos  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$ , tais que os elos  $e_{x_{i-1}, x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , estão abertos. Um conjunto de sítios conectados, tal como no caso de  $x \leftrightarrow y$ , é denominado *conglomerado*. Se o conjunto conectado contém o sítio  $x$ , ele é dito *conglomerado de  $x$*  e denota-se por  $C_x$ . Sua formulação matemática é

$$C_x = \{x, y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}. \quad (3.16)$$

Considere-se o sub-grafo aleatório gerado em  $\mathbb{L}^d$ , contendo todos os vértices de  $\mathbb{Z}^d$  e apenas os elos abertos;  $C_x$  é o conjunto de componentes conectados presente neste sub-grafo. O conjunto de vértices de  $C_x$  é o conjunto de todos os vértices de  $\mathbb{L}^d$  que estão conectados a  $x$  através de caminhos abertos, e os elos de  $C_x$  são os elos abertos de  $\mathbb{L}^d$  que unem pares de tais vértices. Devido à invariância de translação inerente a  $\mathbb{L}^d$  e à medida da probabilidade  $P_p$  a distribuição de  $C_x$  é independente da escolha de  $x$  [Grimmett (1999), p.12].

Uma variável de interesse é o tamanho de  $C_x$ , cuja notação é  $|C_x|$  e a medida é o número de vértices em  $C_x$ .

Por analogia, o *conglomerado da origem* é definido como

$$C_o = \{x \in \mathbb{Z}^d : O \leftrightarrow x\}, \quad (3.17)$$

e é um dos conceitos mais importantes da teoria de percolação.

É através do significado do conglomerado da origem que é definida a probabilidade crítica, que representa a medida do ponto de mudança de fase que caracteriza o processo de percolação. O conglomerado da origem representa o conjunto de objetos conectados que unem a origem a uma das bordas de uma grade finita. É, muitas vezes, representado apenas por  $C$  ao invés de  $C_o$ .

O tamanho médio (*valor esperado*) do conglomerado para uma dada probabilidade  $p$  é representado por  $\chi(p)$ , ou seja,

$$\chi(p) = E_p(|C|) \quad (3.18)$$

O estudo do comportamento desta quantidade é de grande importância para algumas áreas de pesquisa, e também será avaliado neste trabalho.

### 3.2.5 Mudança de Fase

Uma das quantidades de maior interesse na teoria de percolação é a *probabilidade de percolação* cuja notação universal é  $\theta(p)$ . É definida como a probabilidade de que um dado vértice  $x$  pertença a um conglomerado infinito. Simbolicamente escreve-se  $\theta(p)$  como

$$\theta(p) = P_p(|C_x| = \infty). \quad (3.19)$$

Novamente, devido à invariância de translação de  $\mathbb{L}^d$  e à medida da probabilidade, pode-se escolher  $x$  como sendo a origem  $O$  sem perda de generalidade. Portanto, pode-se escrever

$$\theta(p) = P_p(|C_o| = \infty). \quad (3.20)$$

Assim,  $\theta(p)^3$  é uma função associada ao conglomerado da origem.

Note-se que  $|C_o| = \infty$  se e somente se (sse) existir uma seqüência infinita  $x_0, x_1, x_2, \dots$  de vértices distintos, tal que  $x_0 = O$  e  $x_i \sim x_{i+1}$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), com  $(x_i \sim x_{i+1})$  aberto para todo  $i$ .

Note-se também que  $\theta$  é uma função *monótona não-decrescente* de  $p$  com  $\theta(0) = 0$  e  $\theta(1) = 1$ . Isto é intuitivo, porque, quando  $p = 0$  não haverá nenhum elo aberto porquanto  $\theta(0) = 0$ ; quando  $p = 1$  todos os elos estarão abertos de modo que  $\theta(1) = 1$ ; e, sempre que  $p$  cresce a quantidade de elos abertos estará aumentando de modo que a probabilidade  $P_p(|C_o| = \infty)$  não terá a menor chance de decrescer.

O fundamental para a teoria de percolação é o fato de que existe um valor crítico de  $p$ , usualmente denotado por  $p_c$ , tal que

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c, \\ > 0 & \text{se } p > p_c, \end{cases}$$

que é a chamada *probabilidade crítica*.

Formalmente  $p_c$  é definida como  $p_c(d)$  porque seu valor depende da dimensão  $d$  adotada (e, como será visto mais tarde, depende também do modelo de percolação e do modelo de rede adotados). A definição formal de  $p_c(d)$  é tal como em 3.15, ou de forma equivalente,

$$p_c(d) = \sup\{p : \theta(p) = 0\}. \quad (3.21)$$

Normalmente não há interesse em estudar o caso unidimensional, uma vez que, em  $\mathbb{Z}^1$ , seja qual for o valor de  $p$  ( $< 1$ ), sempre haverá um elo fechado em algum ponto à esquerda ou à direita da origem, de modo que o conglomerado infinito só será possível em  $p = 1$ , ou seja,

$$p_c(1) = 1. \quad (3.22)$$

Para duas ou mais dimensões a situação é completamente diferente. Sabe-se que  $\theta(p)$  é uma função contínua de  $p$ , exceto possivelmente em  $p = p_c(d)$ , mas esta possibilidade de descontinuidade ainda não foi comprovada para  $3 \leq d < 19$  [Grimmett (1999)].

---

<sup>3</sup>Será visto no Capítulo 5 que, coerentemente com esta definição conceitual,  $\theta(p)$  é estimada numericamente pela via de um estudo de simulações Monte Carlo, através da relação entre a *quantidade de réplicas em que houve percolação* e a *quantidade total de réplicas*.

É provado, por exemplo, em Grimmett (1999), a existência de um fenômeno crítico não trivial para duas ou mais dimensões. O teorema diz que “se  $d \geq 2$  então  $0 < p_c(d) < 1$ ”.

A Figura 15 mostra o comportamento típico de  $\theta(p)$  para um caso de *percolação regular de sítios em rede quadrada em  $\mathbb{Z}^2$* . O valor numérico de  $p_c$  para este caso, calculado via simulações de Monte Carlo, é 0,592746, bem próximo de 0,6 como pode ser constatado visualmente na Figura 15.

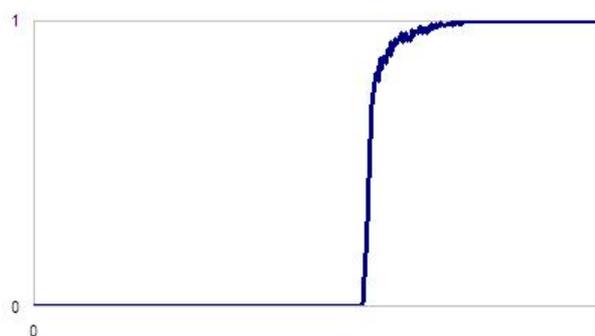


Figura 15: Probabilidade de percolação  $\theta(p)$ .

A Tabela 4 mostra os valores numéricos das probabilidades críticas para alguns modelos de percolação em  $\mathbb{Z}^2$ . Para algumas redes a probabilidade crítica é conhecida exatamente, mas para a maioria são conhecidas apenas aproximações obtidas numericamente por estudos de simulação Monte Carlo. Os valores exatos estão marcados com  $\checkmark$ .

Rede	$p_c(\text{sítios})$	$p_c(\text{elos})$
Quadrada regular	0,592746	0,5 $\checkmark$
Quadrada orientada	0,6348	—
Bethe ( $d$ ramos)	$1/d$ $\checkmark$	$1/d$ $\checkmark$
Triangular	0,5 $\checkmark$	$2 \sin(\pi/18)$ $\checkmark$
Colméia	0,6971	$1-2 \sin(\pi/18)$ $\checkmark$
Bowtie	0,5475	0,404518 $\checkmark$
Kagomé	0,6527	0,5243
Octogonal	0,5 $\checkmark$	0,3472

Tabela 4: Probabilidades críticas de alguns modelos.

### 3.3 Percolação de Sítios

Considerando um meio aleatório modelado por  $\mathbb{L}^d$ , existem naturalmente duas maneiras de bloquear a passagem de um fluido: a primeira, onde considera-se todos os vértices abertos e cada elo aberto com probabilidade  $p$ , tal como estudado na Seção 3.2; e a segunda, onde considera-se todos os elos abertos e cada vértice aberto com probabilidade  $p$ . Esta última é a chamada *percolação de sítios*.

De um modo similar à percolação de elos, na percolação de sítios definem-se o *conglomerado* e o *conglomerado da origem* como

$$C_x = \{x, y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\} \quad (3.23)$$

e

$$C_o = \{x \in \mathbb{Z}^d : O \leftrightarrow x\}, \quad (3.24)$$

tal como em 3.16 e 3.17.

Da mesma forma são definidas a *probabilidade de percolação* e a *probabilidade crítica*:

$$\theta(p) = P_p(|C_o| = \infty) \quad (3.25)$$

e

$$p_c(d) = \sup\{p : \theta(p) = 0\}, \quad (3.26)$$

exatamente como em 3.20 e 3.21.

Assim, sempre que necessário, pode-se especificar o modelo de percolação em estudo através de uma notação específica:  $\theta^{sítio}$  e  $p_c^{sítio}$  para percolação de sítios,  $\theta^{elo}$  e  $p_c^{elo}$  para percolação de elos.

A Figura 16 mostra realizações de simulação obtidas para percolação de elos em rede quadrada, para alguns valores escolhidos de  $p$ . É sabido que o valor exato da probabilidade crítica  $p_c$  para este caso é 0,5. A escolha de  $p = 0,49$  e  $p = 0,51$ , mostradas nas Figuras 16(b) e 16(c), são propositais no sentido de mostrar uma configuração em  $p < p_c$  (região subcrítica), bem próxima de  $p_c$ , e outra configuração tão próxima quanto, porém

na região supercrítica ( $p > p_c$ ).

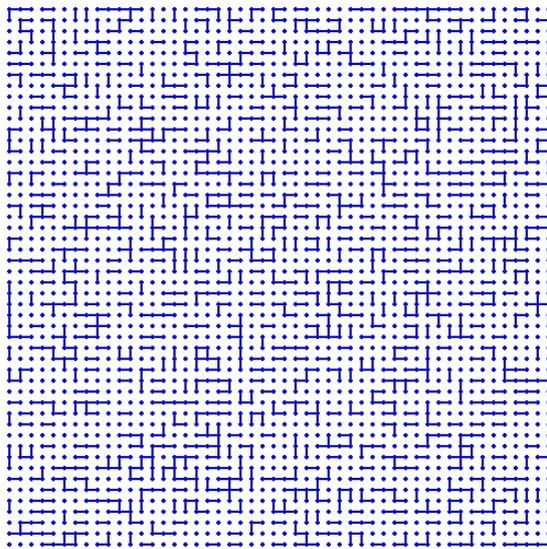
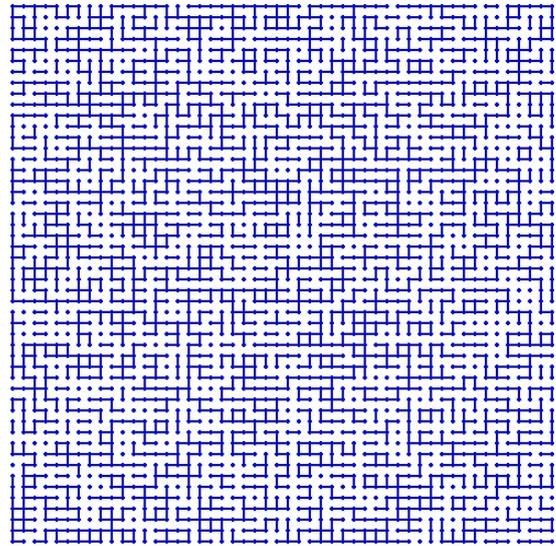
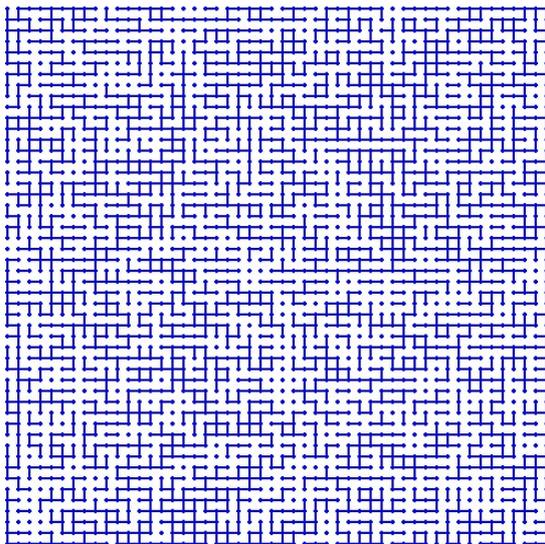
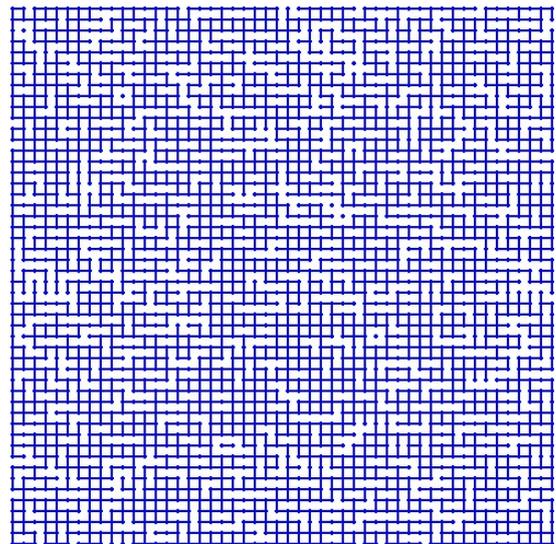
(a)  $p=0,25$ (b)  $p=0,49$ (c)  $p=0,51$ (d)  $p=0,75$ 

Figura 16: Realizações de percolação de elos em rede quadrada para diferentes valores de  $p$ .

A Figura 17, por outro lado, mostra experiência similar para a percolação de sítios em rede quadrada. Sabe-se que para tal modelo o valor exato da probabilidade crítica não é conhecido, mas resultados numéricos indicam que esteja em torno de 0,59. O comparativo visual das Figuras 16 e 17 é importante para perceber a diferença de modelagem dos dois casos.

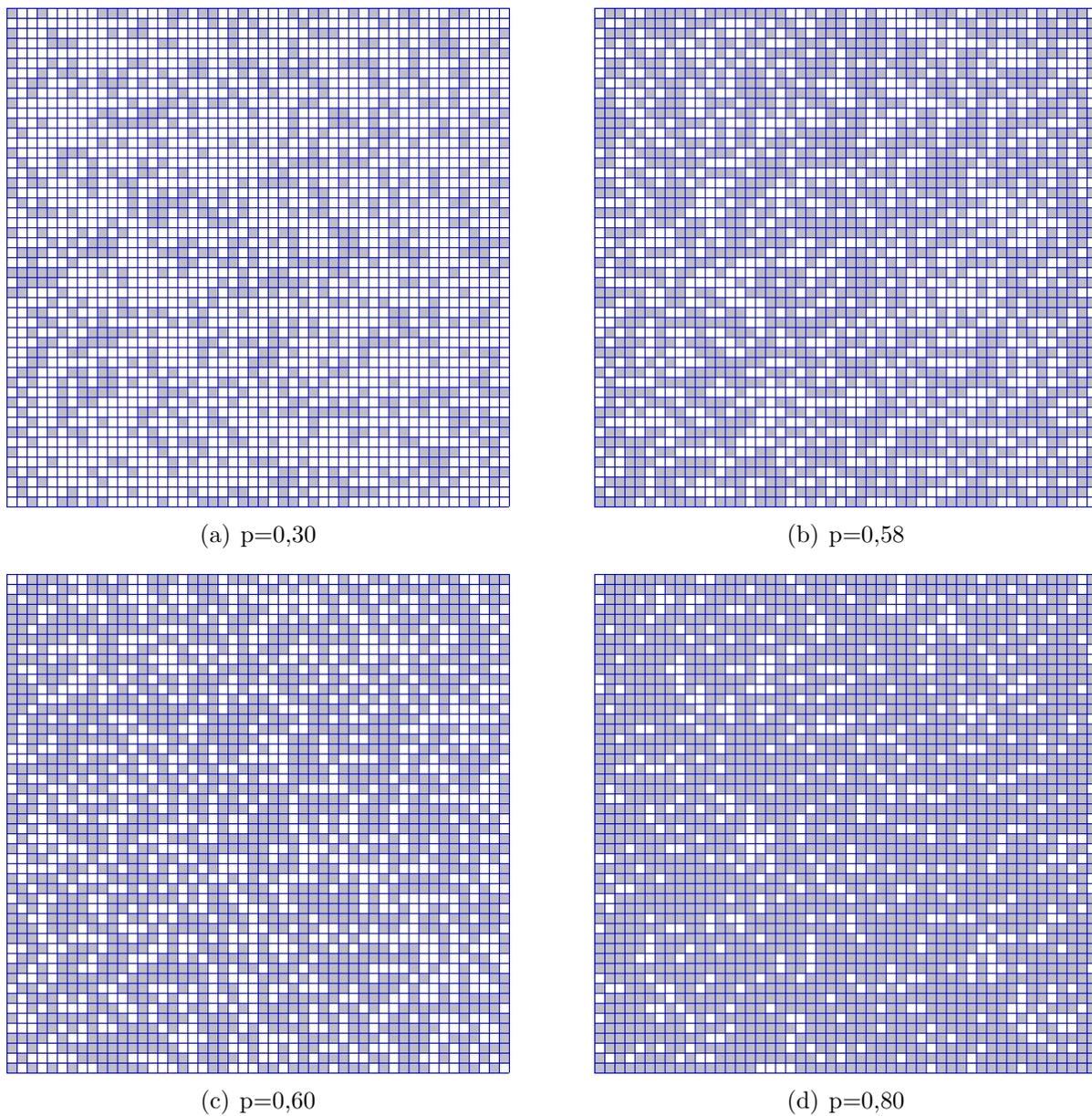


Figura 17: Realizações de percolação de sítios em rede quadrada para diferentes valores de  $p$ .

## 3.4 Expoentes Críticos

A literatura contempla uma linha de grande importância em diversas áreas de pesquisa, particularmente em física, denominada de *expoentes críticos*. Estes expoentes estão associados a algumas funções, tais como a *probabilidade de percolação*, o *tamanho médio do conglomerado*, dentre outras. São apresentados a seguir os dois principais expoentes críticos e seus valores para os casos mais conhecidos.

O expoente crítico associado à probabilidade de percolação,  $\beta$ , é tal que

$$\theta(p) \approx |p - p_c|^\beta, \quad p \downarrow p_c. \quad (3.27)$$

O expoente crítico associado ao tamanho médio do conglomerado,  $\gamma$ , é tal que

$$\chi(p) \approx |p - p_c|^{-\gamma}, \quad p \uparrow p_c. \quad (3.28)$$

Estes expoentes coincidem para os casos de percolação regular uniforme em rede quadrada e percolação na rede de Bethe, apresentando  $\beta = 1$  e  $\gamma = 1$ .

No próximo capítulo são apresentados os estudos sobre a variação do parâmetro  $p$ . Diversas funções  $p(z)$  são estudadas, inclusive a *senóide quadrada* que é a escolhida para uso sistemático e mais aprofundado nesta pesquisa.

## 4 *Probabilidade Sub-limitada em Ondas*

### 4.1 Introdução

Conforme citado na introdução, Capítulo 1, Seção 1.4, os modelos de percolação, via de regra, são construídos com base em um único valor de  $p$  fixado para toda a área do meio em estudo, independente do ponto  $z$  em que a substância se encontre no decorrer do processo.

Uma proposta do presente trabalho é adicionar ao modelo esta característica, ou melhor, esta funcionalidade de permitir a variação do valor de  $p$  ao longo do meio. Tal funcionalidade é denominada *variabilidade de  $p$* .

A questão é: *De que forma deve ser esta variação de  $p$ ?*

A resposta mais natural é a de uma variabilidade funcional de  $p$  com a posição de  $z$ ,  $\delta(z)$ . Ou seja,

$$p = f(z), \quad z = (x, y). \quad (4.1)$$

O presente capítulo apresenta um estudo de algumas possíveis funções  $f(z)$  e sugere uma delas para a aplicação nos estudos de simulações Monte Carlo realizados durante a pesquisa. Além disso, explica a origem da expressão *probabilidade sub-limitada em ondas*.

Adicionalmente, uma das idéias mais importantes deste estudo é que, da mesma forma que a suposição de que uma rede de percolação tenha um único  $p$  para todos os pontos  $z$  é uma suposição muito otimista, com certeza encontrar-se-á situações em que a aplicação de uma única função  $p(z)$  para toda a área também seja uma modelagem muito otimista. Isto abre a possibilidade de uma modelagem em que a rede seja mapeada em “sub-redes” e a cada uma delas seja aplicada uma função  $p(z)$ , para obter uma situação ainda mais realista. Em uma grande área florestal, por exemplo, poder-se-ia aplicar uma certa função  $p_1(z)$  para uma região próxima a um lago; uma  $p_2(z)$  constante = 0 para o próprio lago;

uma outra  $p_3(z)$  para uma outra região em que predominem certas outras características; e, assim, sucessivamente. Uma floresta como a da Figura 18, por exemplo, poderia ser mapeada desta forma, tornando mais realista o modelo final<sup>1</sup>.

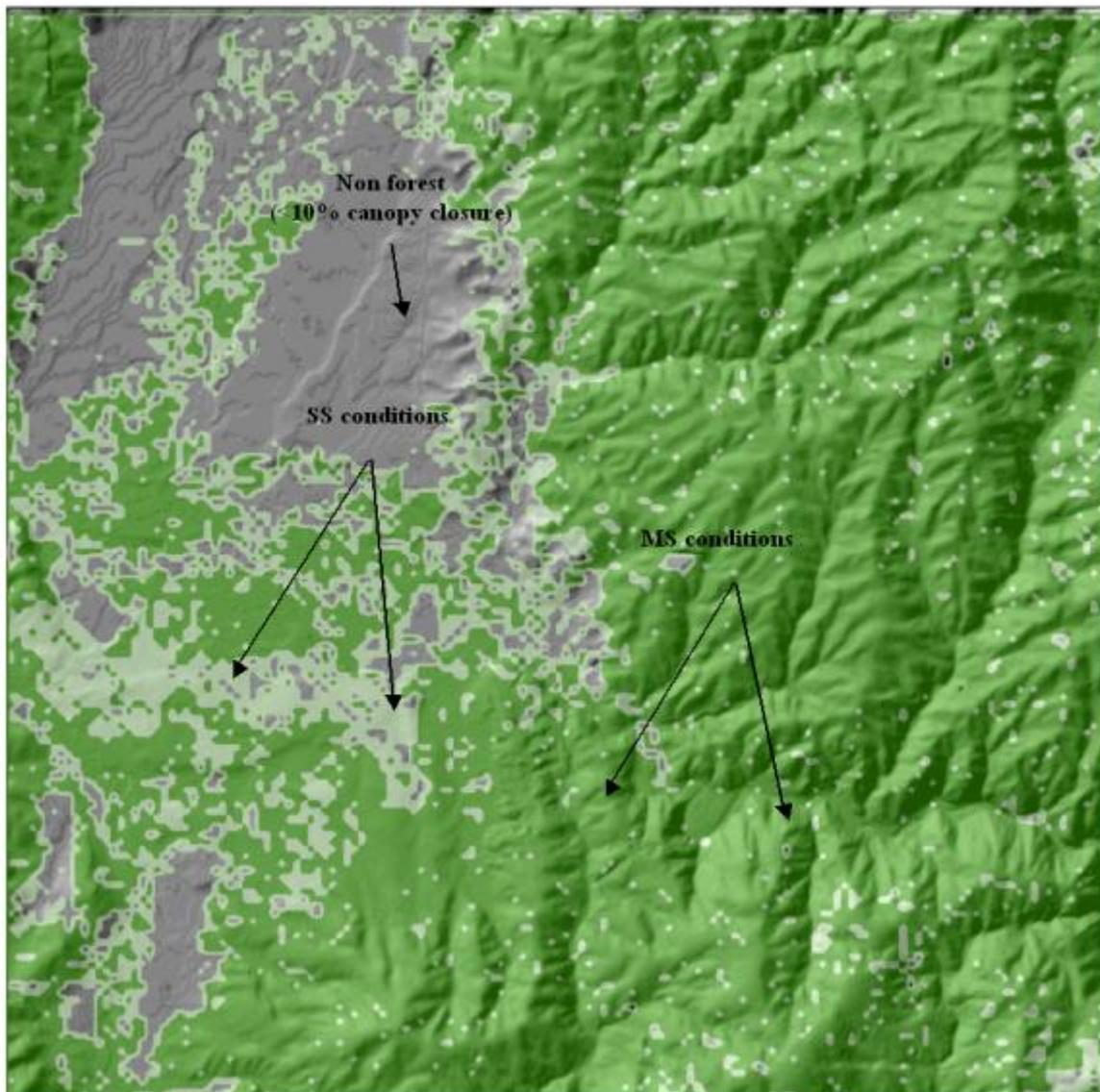


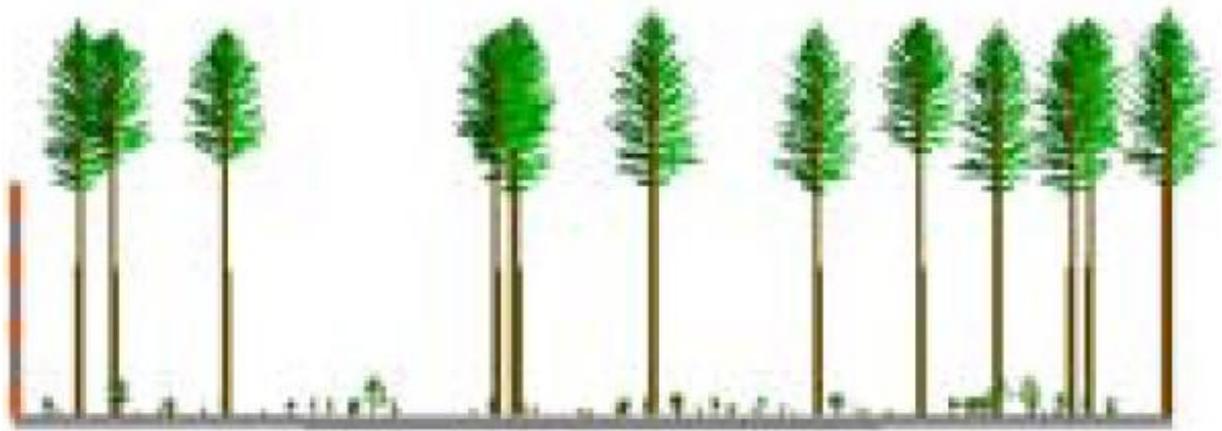
Figura 18: Um exemplo de floresta.

Um estudo muito interessante sobre estruturas de florestas e suas influências nas queimadas é encontrado no artigo denominado “Influence of Forest Structure on Wildfire Behavior and the Severity of Its Effects” [Conard (2003)], publicado em novembro de 2003 pelo *U.S. Department of Agriculture (USDA)*, escrito por Susan Conard e Mike Hilbruner. O artigo apresenta, entre outras coisas realmente muito interessantes, duas simulações hipotéticas de formação florestal que mostram as mudanças no arranjo vertical

---

<sup>1</sup>A Figura 18 é uma imagem gerada em computador, obtida do *College of Forest Resources* da *Mississippi State University*.

e na continuidade horizontal. As imagens destas simulações são reproduzidas aqui na Figura 19. Segundo o artigo, a Figura 19(a) representa uma formação historicamente conhecida, e a Figura 19(b) representa uma formação atualmente observada. Vem daí que “as florestas atuais são mais uniformes espacialmente, com maiores densidades de espécies intolerantes ao fogo”, aumentando em muito a ocorrência de incêndios florestais nos últimos anos. O artigo fala também de diversos outros fatores que têm aumentado a ocorrência de queimadas.



(a) Formação historicamente conhecida



(b) Formação atualmente observada

Figura 19: Simulações hipotéticas de formação florestal.

Então, é razoável propor que regiões como as das Figuras 19(a) e 19(b) sejam modeladas com valores diferenciados de  $p$ . De modo que, ao se considerar uma área razoavelmente grande em que haja alternâncias das formações sugeridas pelas Figuras 19(a) e 19(b) de tal sorte que as mudanças de uma para outra seja tênue, ter-se-á uma configuração em ondas.

## 4.2 Considerações Gerais

Neste ponto é importante estabelecer algumas considerações referentes a  $f(z)$ . Em primeiro lugar é preciso fazer um pequeno ajuste de notação, haja vista que  $p$  agora não é mais uma constante. A probabilidade  $p$  definida na Seção 3.2.2 como um parâmetro fixo e redefinida aqui em 4.1 como uma função de  $z$ , passa a aceitar a notação  $p(z)$ . Todas as funções apresentadas aqui são denotadas por  $p(z)$ .

Ademais,  $f(z)$  pode também ser escrita em função de qualquer grandeza que represente a posição de  $z$  e não apenas a norma soma. Pode ser qualquer norma de  $z$  conforme visto na Seção 3.2.1, ou qualquer outra função de  $z$ .

Assim, a Equação 4.1 pode ser reescrita de um modo mais genérico, especificamente para duas dimensões, como

$$p(z) = f(z), \quad z = (x, y). \quad (4.2)$$

Outro ponto importante a considerar é que o contra-domínio de  $p(z)$  é  $[0, 1]$ , uma vez que representa uma probabilidade.

Tendo em conta que  $p(z)$  é uma função de  $z = (x, y)$ , conforme definido em 4.2, é razoável estudar o comportamento de uma  $p(z)$  qualquer através da plotagem da superfície que a representa num gráfico 3D.

A seguir são apresentadas algumas das funções mais importantes estudadas na pesquisa, notadamente a *senóide quadrada* que é a escolhida para as próximas etapas do trabalho.

Esta família de funções tem o formato

$$p(z) = p_o + (1 - p_o)f(z), \quad (4.3)$$

onde  $p_o$  é uma constante que estabelece um limite inferior para  $p(z)$ , haja vista que quando  $f(z) = 0$ ,  $p(z) = p_o$ . Nas simulações Monte Carlo,  $p_o$  será incrementado de um  $\Delta p$  desde 0 até 1 para produzir uma experiência completa. Para a elaboração dos gráficos 3D foi necessário escolher apenas um valor de  $p_o$ , e o valor escolhido foi 0,5. Por isto, para todos os casos, a função que aparece no código Matlab tem o seguinte aspecto:

$$p(z) = 0,5 + 0,5f(z). \quad (4.4)$$

Note-se ainda que quando  $f(z) = 0$ ,  $p(z) = 0,5$ , conforme constata-se em todos os gráficos 3D.

Também para viabilizar a elaboração dos gráficos foi necessário limitar  $x$  e  $y$  a uma área finita,  $1000 \times 1000$ , de modo que  $-500 \leq x, y \leq 500$ .

Outro ponto importante a considerar é que, no tratamento da linhagem das senóides desta família de funções, representada por

$$p(z) = p_o + (1 - p_o) \sin(\Theta), \quad (4.5)$$

o ângulo  $\Theta$ , que normalmente é a norma de  $z$ , é recebido em graus, de modo que precisa ser convertido para radianos antes da aplicação da função seno, sendo assim expressa por

$$p(z) = p_o + (1 - p_o) \sin(\Theta\pi/180). \quad (4.6)$$

Ademais, por uma questão de organização, mesmo correndo o risco de tornar monótonas as apresentações, elas são feitas de um modo sistemático, em duas partes. A primeira é a *Formulação* da função, onde é apresentada a equação que define  $p(z)$ . A segunda é a *Plotagem* da função, onde é mostrada a superfície que representa  $p(z)$  em 3D, fotografada em três ângulos diferentes para melhor visualização: em perspectiva, de perfil, e de topo. Finalmente, é importante dizer que o código fonte do programa Matlab utilizado para gerar o gráfico 3D de cada  $p(z)$  aqui apresentada, está registrado no Apêndice C.

Importante enfatizar também que, nas plotagens, as regiões mais escuras são as de menor probabilidade e as mais claras de maior probabilidade.

### 4.3 Senóide Quadrada

A senóide quadrada é caracterizada pela variação ondulatória da probabilidade  $p(z)$  através do meio, e pela formação das cristas de onda em quadrados concêntricos. São estas duas características marcantes que dão o nome à função.

### 4.3.1 Formulação

A probabilidade de o sítio  $z = (x, y)$  estar aberto é definida por

$$p(z) = p_o + (1 - p_o)|\sin(\|z\|)|, \quad \|z\| = |x| + |y|, \quad (4.7)$$

Note-se, portanto, que a característica ondulatória é obtida pelo uso do seno, e a da formação das cristas em *quadrados* concêntricos pelo uso da norma soma.

### 4.3.2 Plotagem

As Figuras 20, 21, 22, mostram a senóide quadrada, respectivamente, nas visões em perspectiva, perfil, topo.

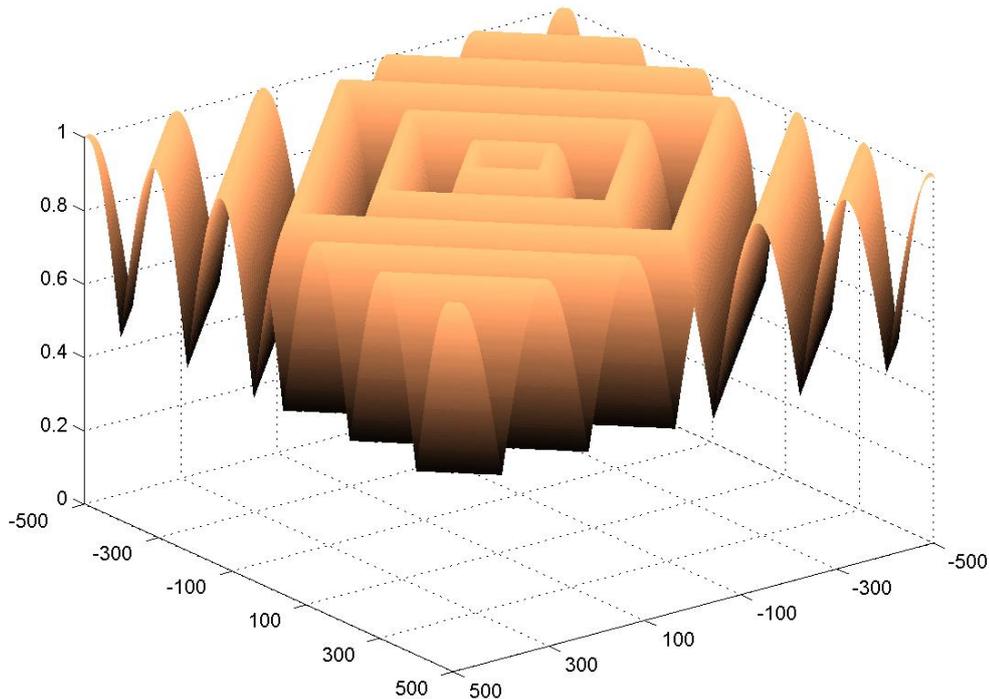


Figura 20: Função “senóide quadrada” vista em perspectiva.

## 4.4 Senóide Circular

A senóide circular é caracterizada pela variação ondulatória da probabilidade  $p(z)$  através do meio, e pela formação das cristas de onda em *círculos* concêntricos. São estas

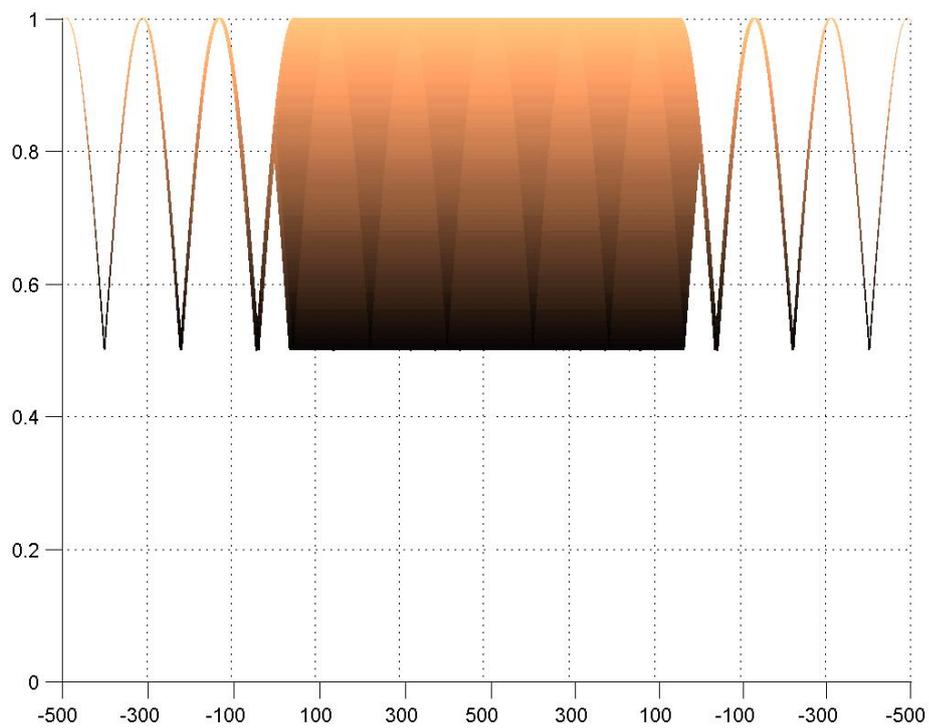


Figura 21: Função “senóide quadrada” vista de perfil.

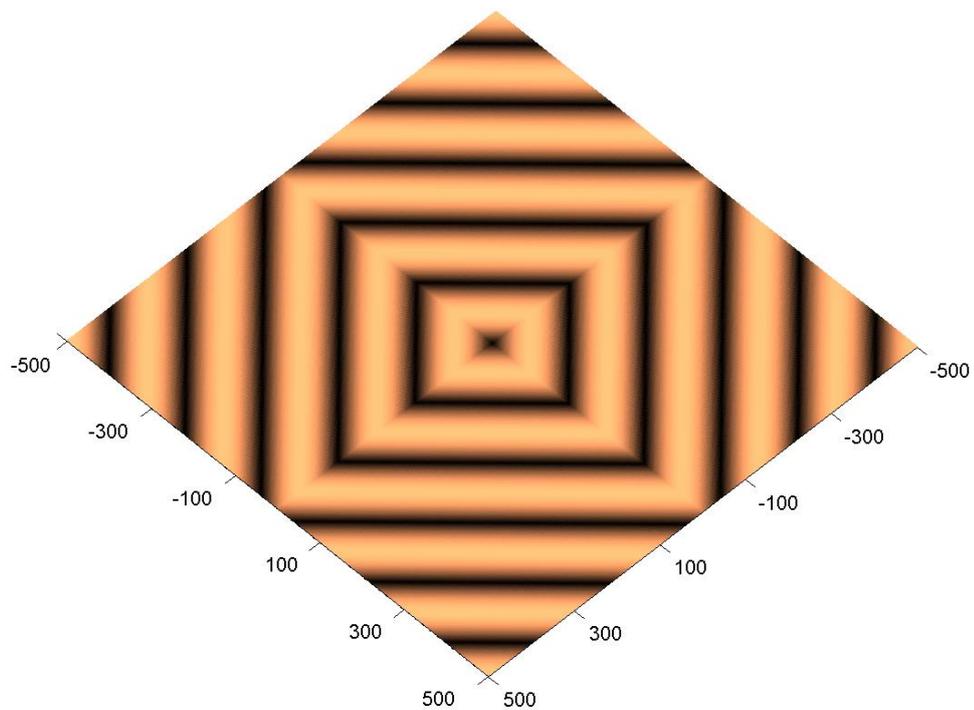


Figura 22: Função “senóide quadrada” vista de topo.

duas características marcantes que dão o nome à função.

#### 4.4.1 Formulação

É definida por

$$p(z) = p_o + (1 - p_o)|\sin(\|z\|)|, \quad \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.8)$$

Note-se, portanto, que a característica ondulatória é obtida pelo uso do seno, e a da formação das cristas em círculos concêntricos pelo uso da norma euclidiana.

#### 4.4.2 Plotagem

As Figuras 23, 24, 25, mostram a senóide circular, respectivamente, nas visões em perspectiva, perfil, topo.

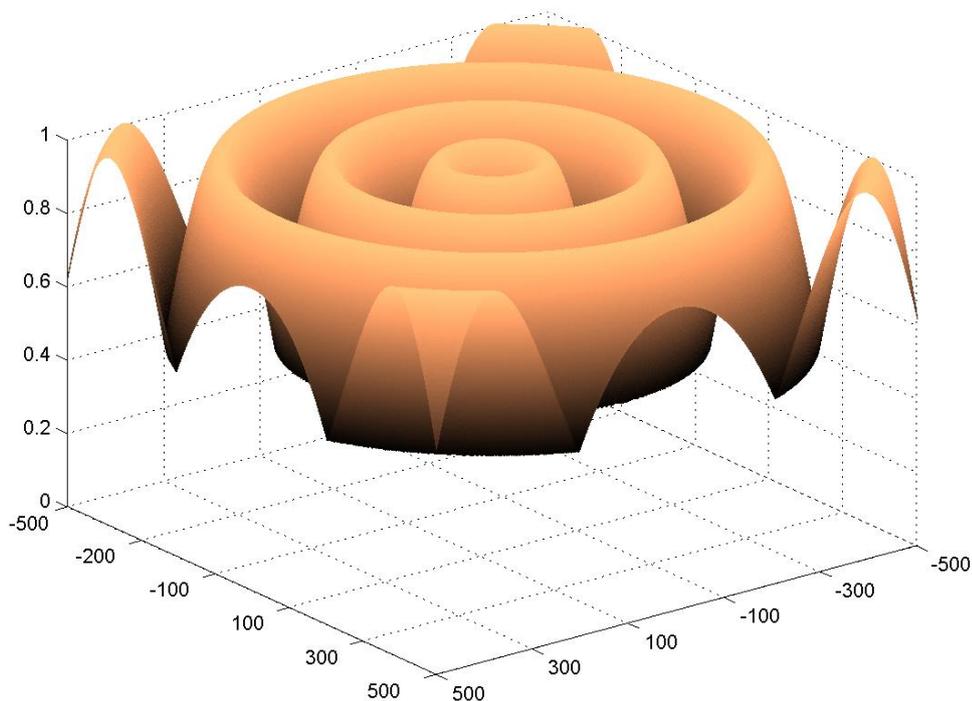


Figura 23: Função “senóide circular” vista em perspectiva.

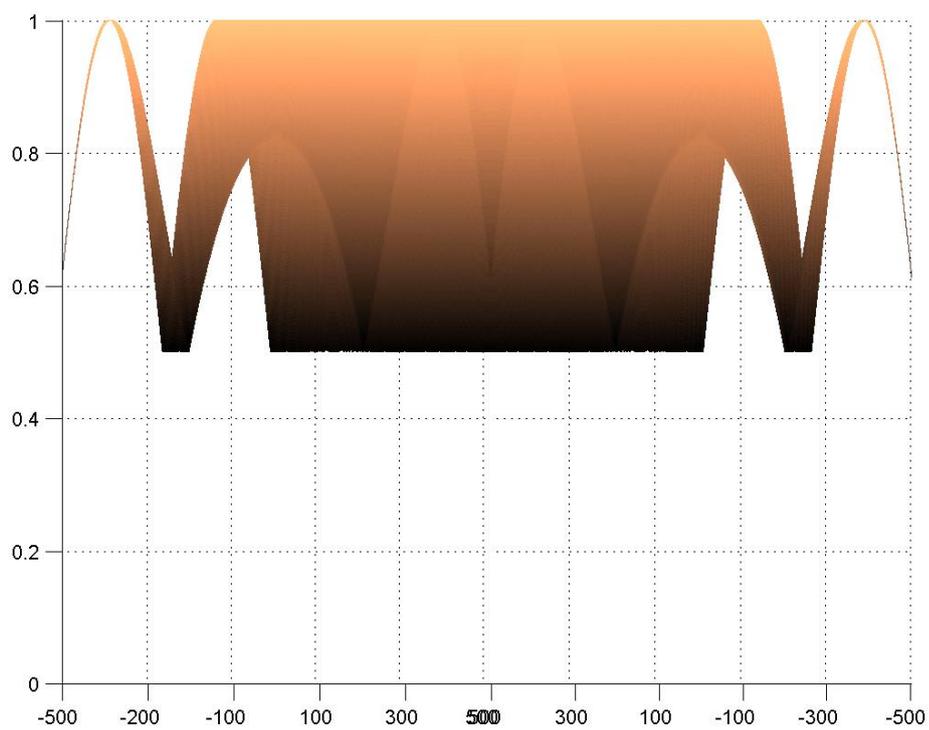


Figura 24: Função "senóide circular" vista de perfil.

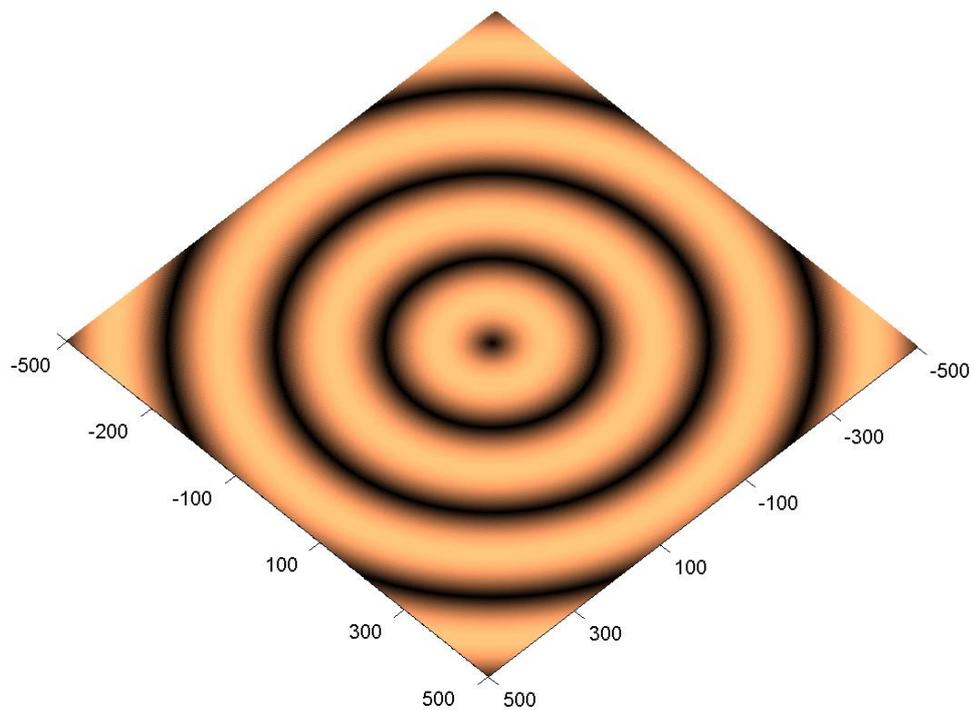


Figura 25: Função "senóide circular" vista de topo.

## 4.5 Pulso Quadrado

A função “pulso quadrado” é caracterizada pela formação de pulsos dispostos em quadrados concêntricos.

### 4.5.1 Formulação

É definida por

$$p(z) = p_o + (1 - p_o)I_{[mod(\|z\|,T)=0]}, \quad (4.9)$$

onde  $\|z\| = |x| + |y|$  e  $T$  é o período de pulsação.

Note-se que a característica de periodicidade é obtida pelo uso da função *mod* associada à seguinte lógica: “se  $mod(\|z\|, T) = 0$  resulta 1 (verdadeiro) senão resulta 0 (falso)”, fazendo com que os pulsos aconteçam em  $\|z\| = kT$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Assim, a característica da disposição dos pulsos em quadrados concêntricos é definida pela constante  $T$ .

### 4.5.2 Plotagem

As Figuras 26, 27, 28, mostram a função “pulso quadrado”, respectivamente, nas visões em perspectiva, perfil, topo.

## 4.6 Pulso Circular

A função “pulso circular” é caracterizada pela formação de pulsos dispostos em círculos concêntricos.

### 4.6.1 Formulação

É definida por

$$p(z) = p_o + (1 - p_o)I_{[mod(\|z\|,T)=0]}, \quad \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.10)$$

Tal como no caso do pulso quadrado, que adota a norma soma, os pulsos ocorrem quando a norma de  $z = (x, y)$ , agora euclidiana, for múltipla de  $T$ , ou seja,  $\|z\| = kT$

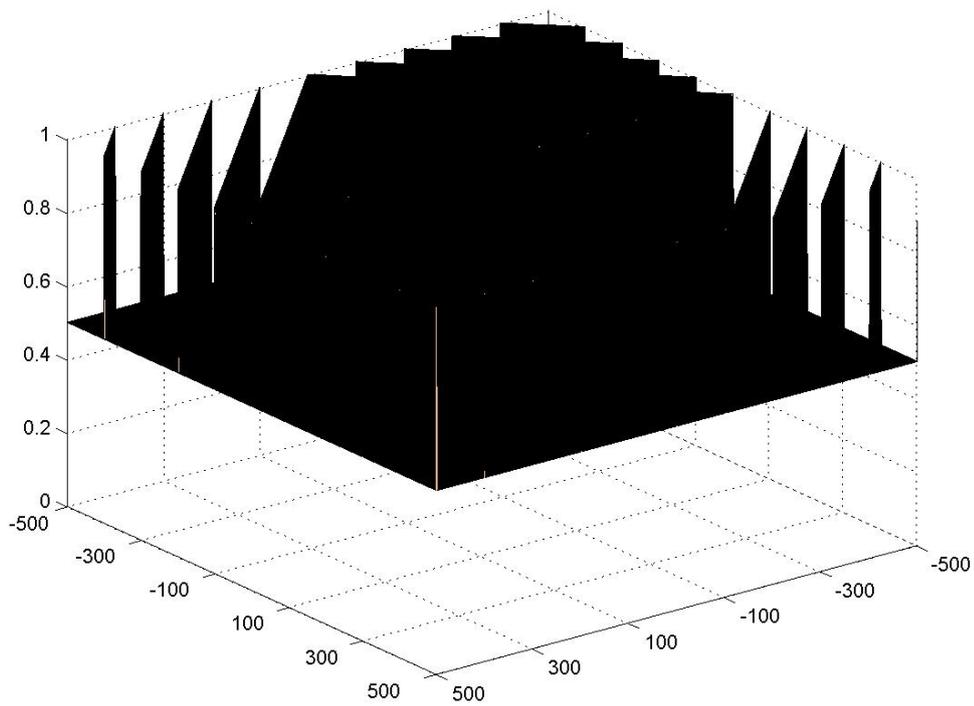


Figura 26: Função “pulso quadrado” vista em perspectiva.

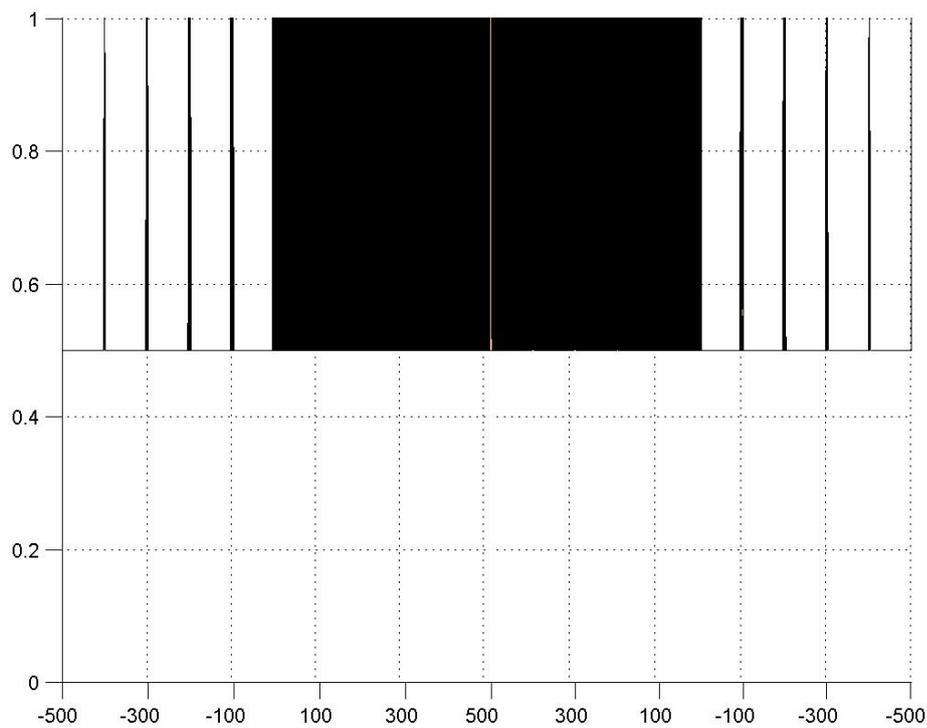


Figura 27: Função “pulso quadrado” vista de perfil.

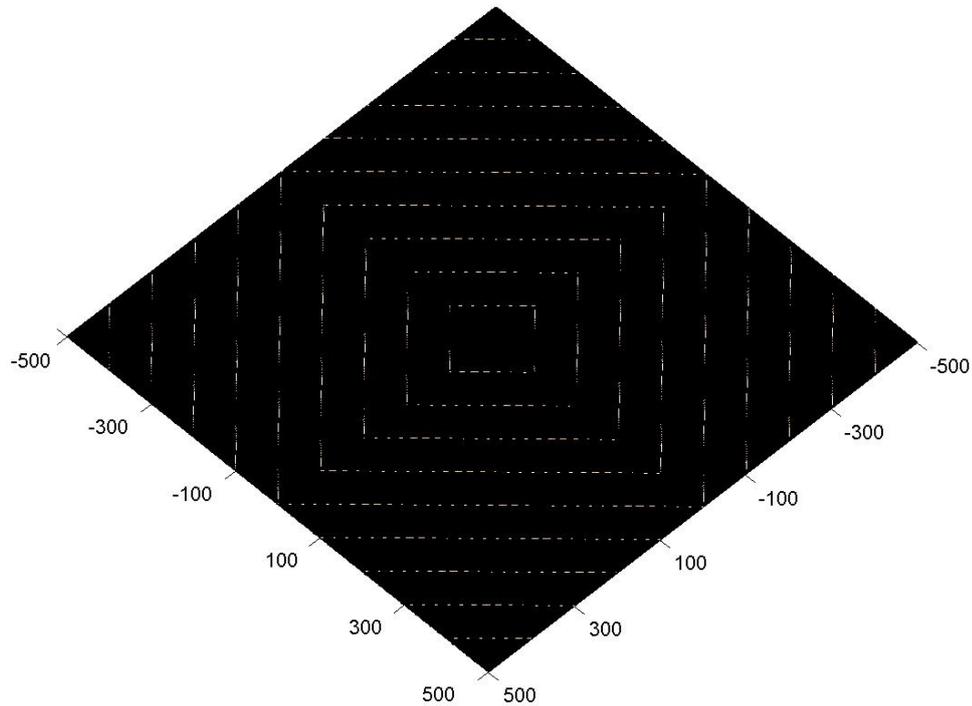


Figura 28: Função “pulso quadrado” vista de topo.

( $k = 1, 2, \dots$ ).

### 4.6.2 Plotagem

As Figuras 29, 30, 31, mostram a função “pulso circular”, respectivamente, nas visões em perspectiva, perfil, topo.

## 4.7 Serra Quadrada

A função “serra quadrada” é caracterizada pela formação de dentes de serra dispostos em quadrados concêntricos.

### 4.7.1 Formulação

É definida por

$$p(z) = p_o + (1 - p_o) \frac{\text{mod}(\|z\|, T)}{T}, \quad \|z\| = |x| + |y|, \quad (4.11)$$

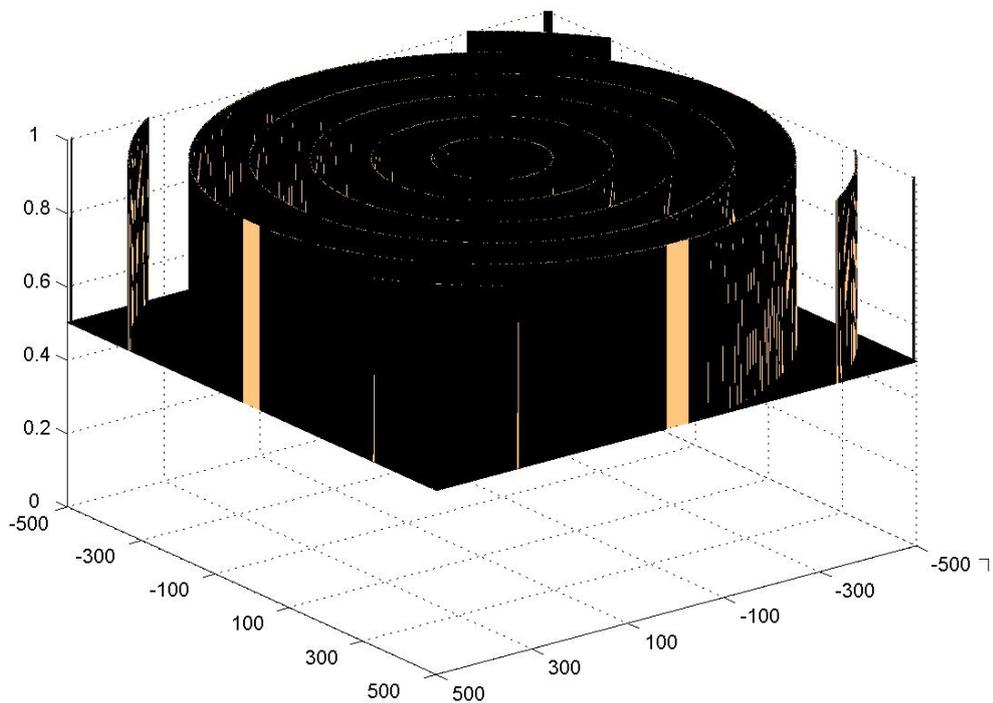


Figura 29: Função “pulso circular” vista em perspectiva.

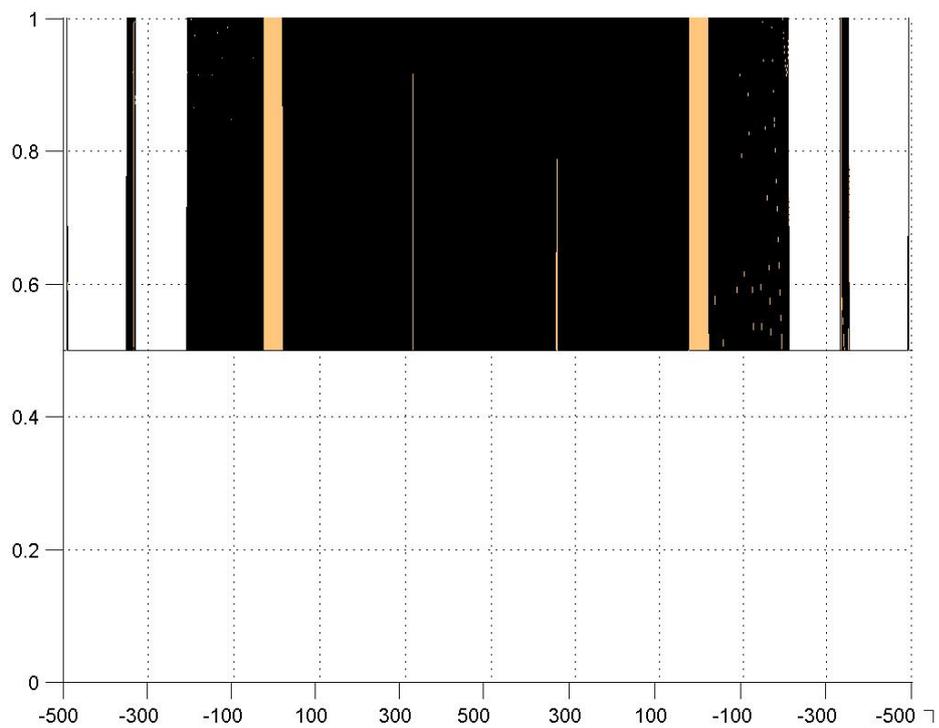


Figura 30: Função “pulso circular” vista de perfil.

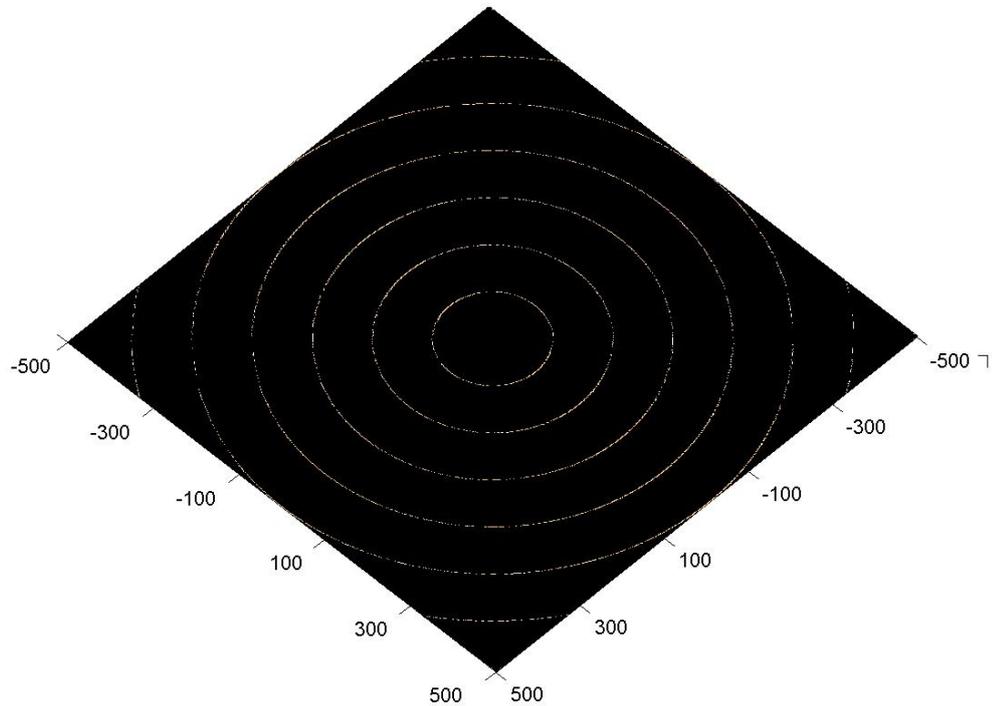


Figura 31: Função “pulso circular” vista de topo.

onde  $T$  é o período.

Novamente, a característica de periodicidade é obtida pelo uso da função *mod*, fazendo com que os picos aconteçam em  $\|z\| = kT$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), de modo que a disposição dos dentes em quadrados concêntricos é definida pela constante  $T$ .

### 4.7.2 Plotagem

As Figuras 32, 33, 34, mostram a função “serra quadrada”, respectivamente, nas visões em perspectiva, perfil, topo.

## 4.8 Serra Circular

A função “serra circular” é caracterizada pela formação de dentes de serra dispostos em círculos concêntricos, agora utilizando-se a norma euclidiana.

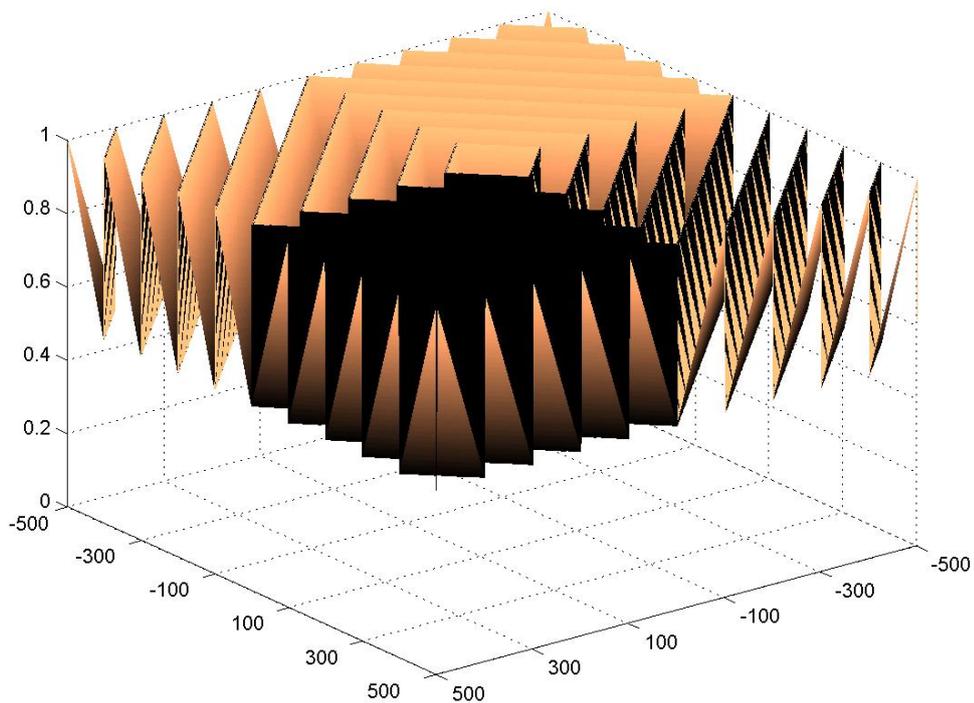


Figura 32: Função “serra quadrada” vista em perspectiva.

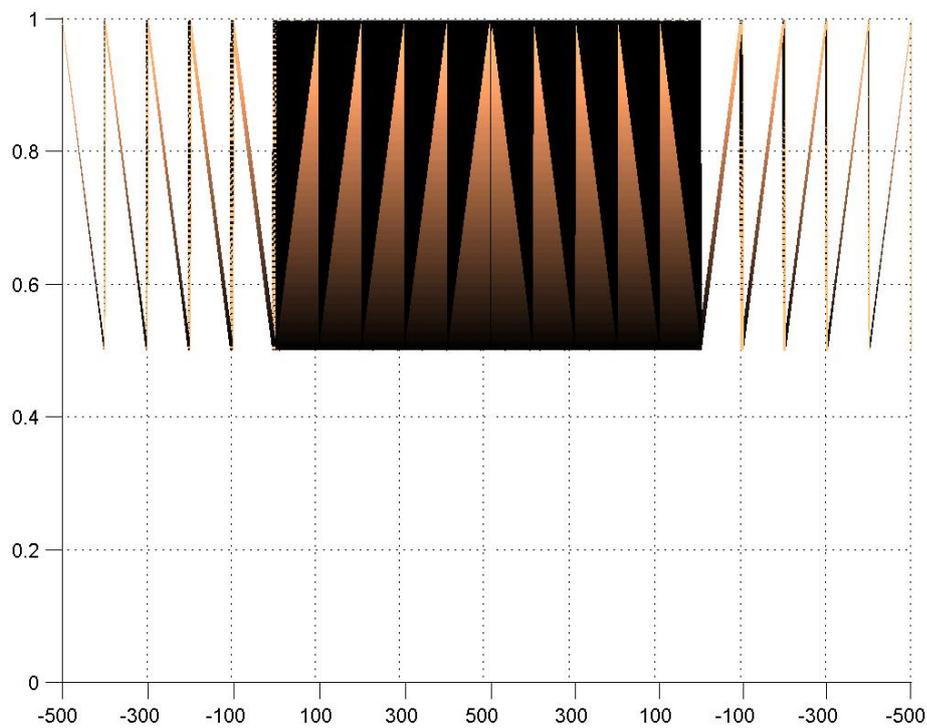


Figura 33: Função “serra quadrada” vista de perfil.

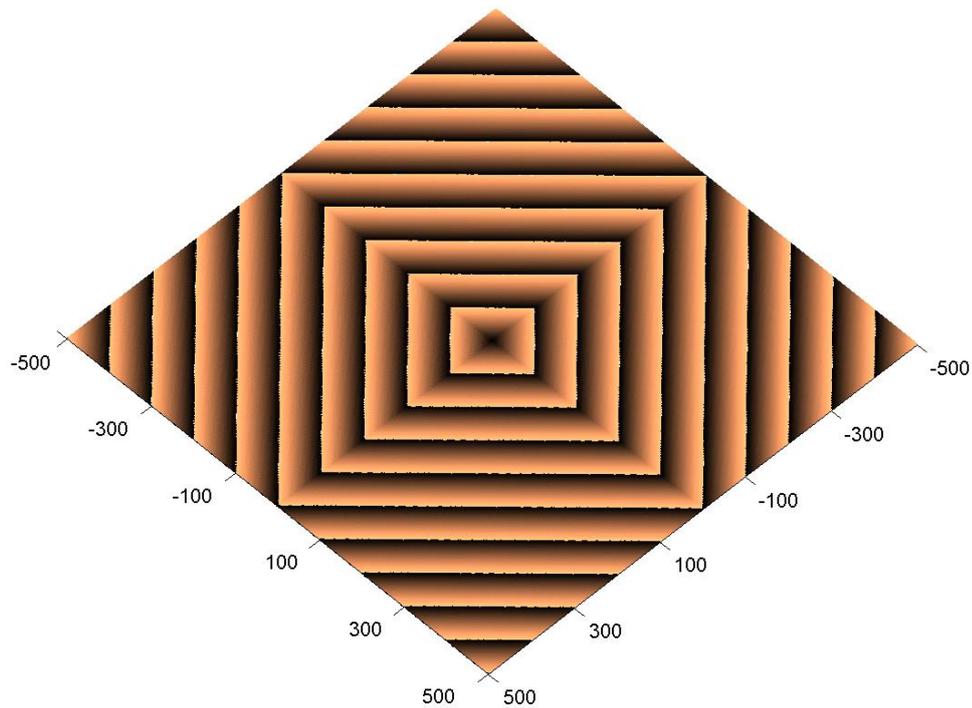


Figura 34: Função “serra quadrada” vista de topo.

### 4.8.1 Formulação

É definida por

$$p(z) = p_o + (1 - p_o) \frac{\text{mod}(\|z\|, T)}{T}, \quad \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.12)$$

onde  $T$  é o período.

Note-se que a característica de periodicidade é obtida pelo uso da função *mod*, fazendo com que os picos aconteçam em  $\|z\| = T$ , de modo que a disposição dos dentes em círculos concêntricos também é definida pela constante  $T$ .

### 4.8.2 Plotagem

As Figuras 35, 36, 37, mostram a função “serra circular”, respectivamente, nas visões em perspectiva, perfil, topo.

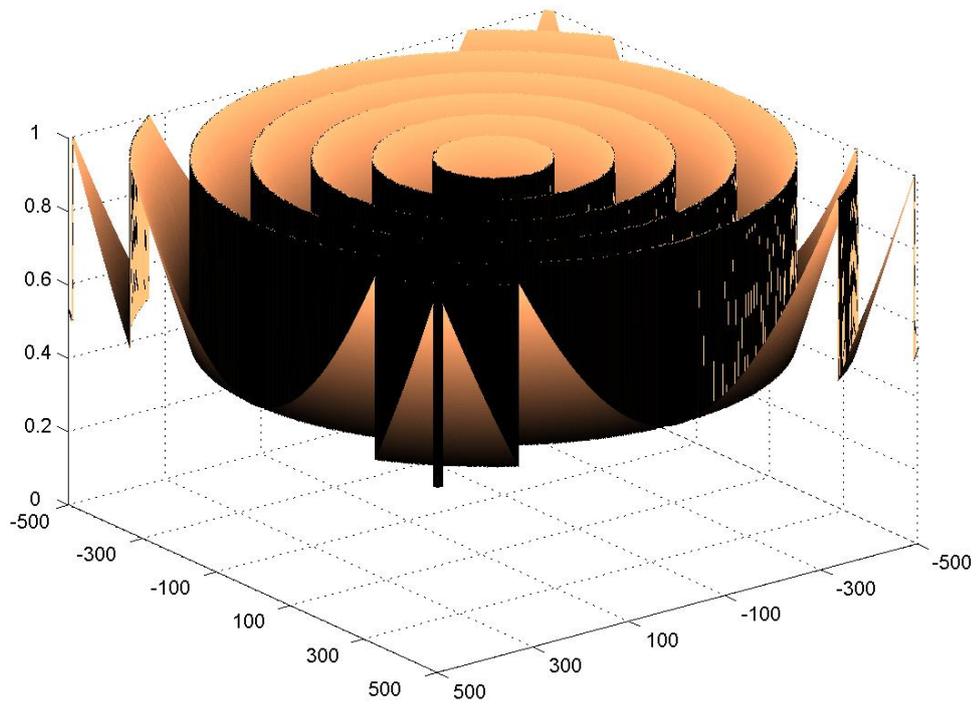


Figura 35: Função “serra circular” vista em perspectiva.

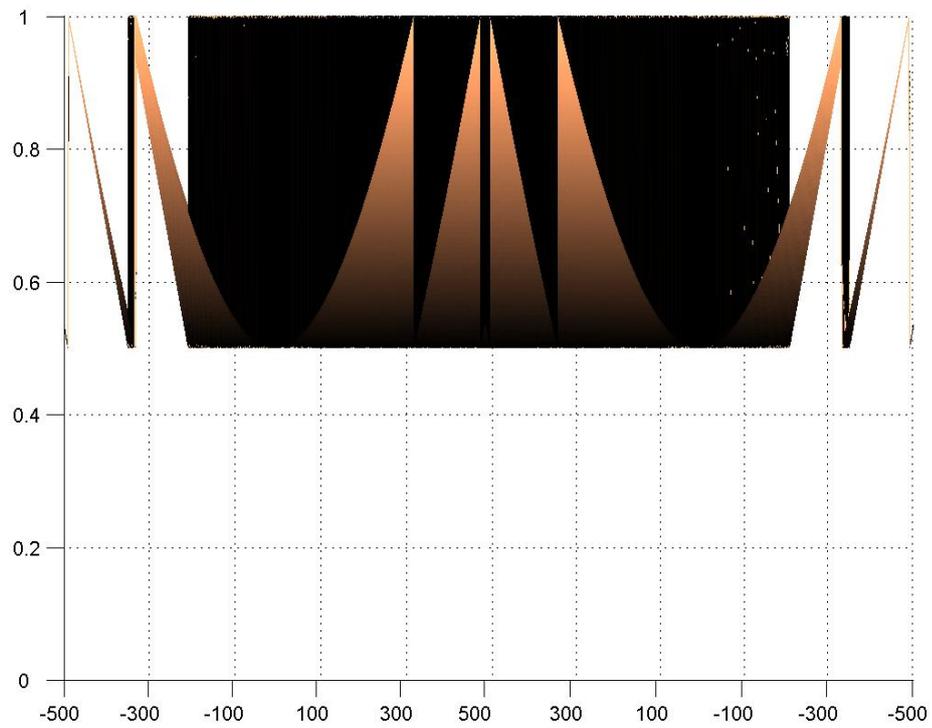


Figura 36: Função “serra circular” vista de perfil.

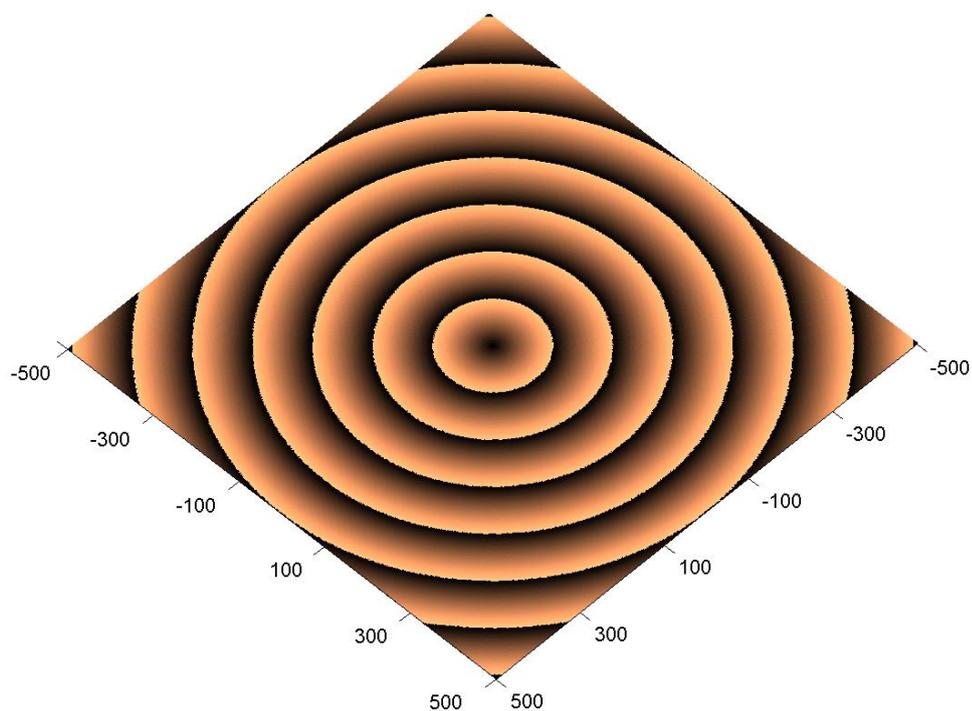


Figura 37: Função “serra circular” vista de topo.

## 4.9 Cone

O cone é caracterizado por um comportamento crescente desde  $(0, 0, p_0)$ , formatando uma superfície que lembra um cone invertido, ou seja, com a base para cima.

### 4.9.1 Formulação

É definida por

$$p(z) = p_o + (1 - p_o) \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{L^2/2}}. \quad (4.13)$$

onde  $L$  representa o tamanho da grade quadrada em questão. Aqui, por exemplo, usa-se  $L = 1000$ .

## 4.9.2 Plotagem

As Figuras 38, 39, 40, mostram a função cone, respectivamente, nas visões em perspectiva, perfil, topo.

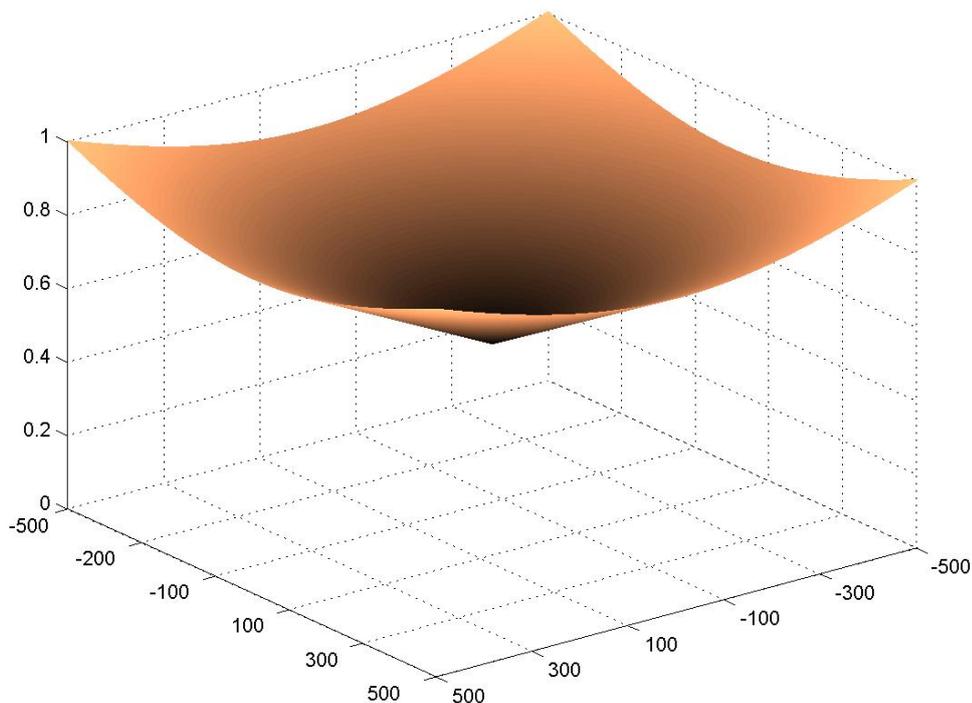


Figura 38: Função “cone” vista em perspectiva.

## 4.10 Calota

A calota é caracterizada por um comportamento crescente a partir de  $(0, 0, p_0)$ , formatando uma superfície que lembra uma calota virada para cima, semelhante a uma cuia.

### 4.10.1 Formulação

É definida por

$$p(z) = p_o + (1 - p_o) \frac{2(x^2 + y^2)}{L^2}. \quad (4.14)$$

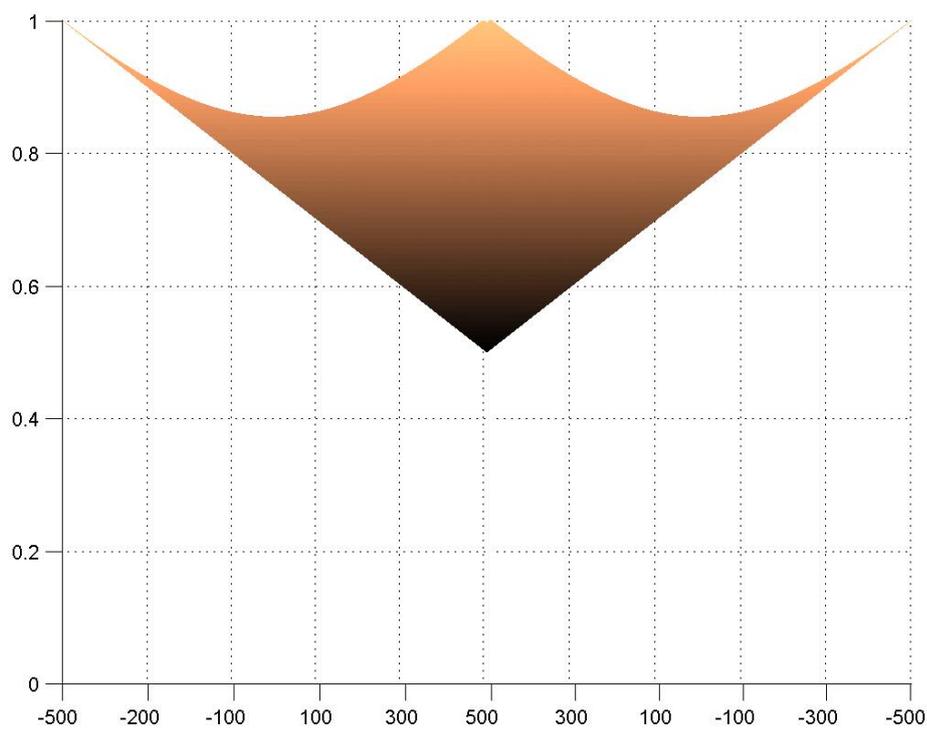


Figura 39: Função "cone" vista de perfil.

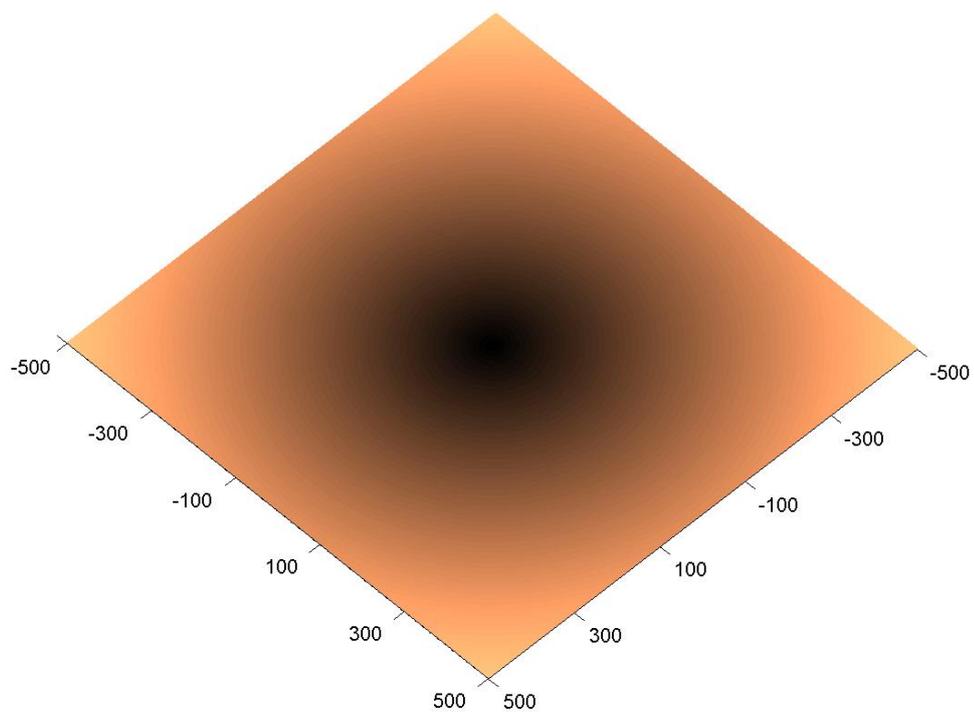


Figura 40: Função "cone" vista de topo.

onde  $L$  representa o tamanho da grade quadrada em questão. Aqui, por exemplo, usa-se  $L = 1000$ .

### 4.10.2 Plotagem

As Figuras 41, 42, 43, mostram a função calota, respectivamente, nas visões em perspectiva, perfil, topo.

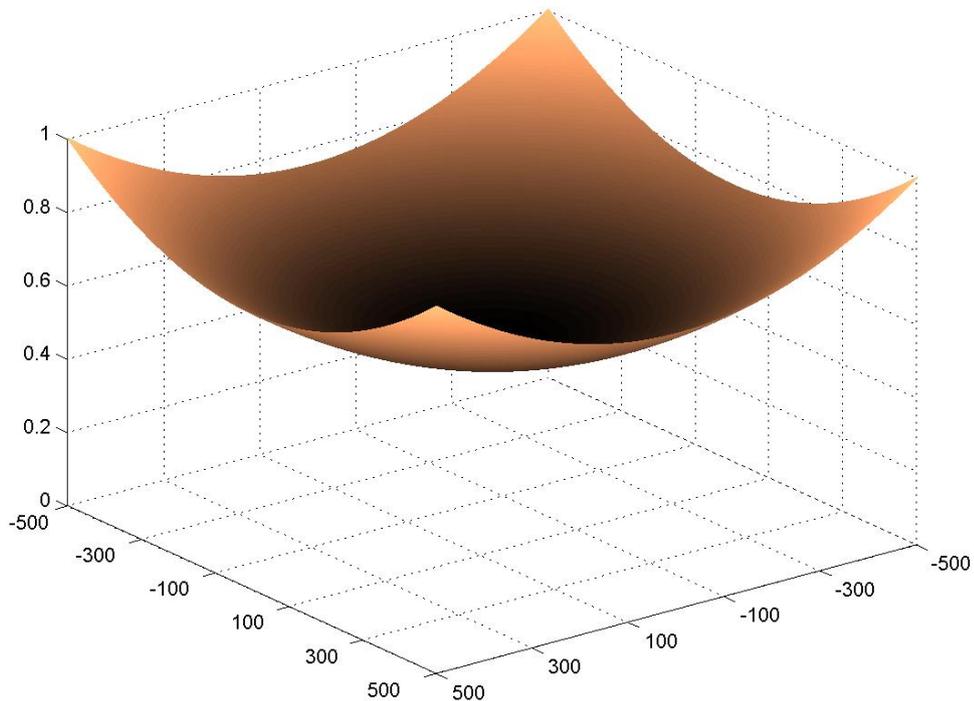


Figura 41: Função “calota” vista em perspectiva.

## 4.11 4-Plan

A 4-Plan (leia-se forplan) é caracterizada por um comportamento crescente a partir de  $(0, 0, p_0)$ , formatando uma superfície que desenha quatro planos retos quadrados, cada um no espaço relativo a cada um dos quadrantes do plano  $xy$ .

### 4.11.1 Formulação

É definida por

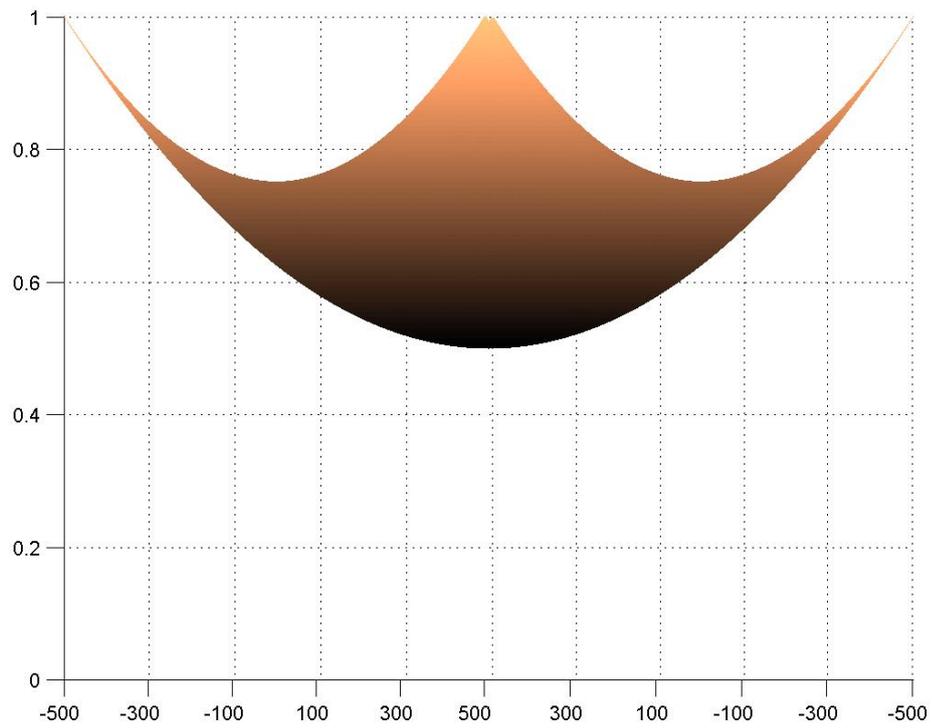


Figura 42: Função “calota” vista de perfil.

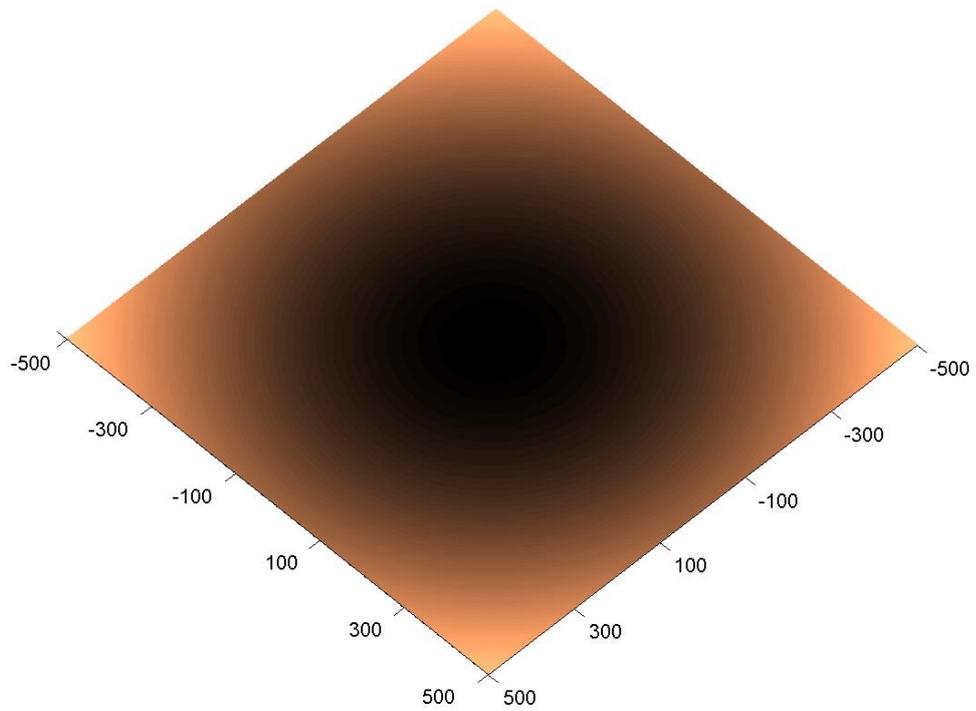


Figura 43: Função “calota” vista de topo.

$$p(z) = p_o + (1 - p_o) \frac{|x| + |y|}{L}. \quad (4.15)$$

onde  $L$  representa o tamanho da grade quadrada em questão. Aqui, por exemplo, usa-se  $L = 1000$ .

### 4.11.2 Plotagem

As Figuras 44, 45, 46, mostram a função 4-Plan, respectivamente, nas visões em perspectiva, perfil, topo.

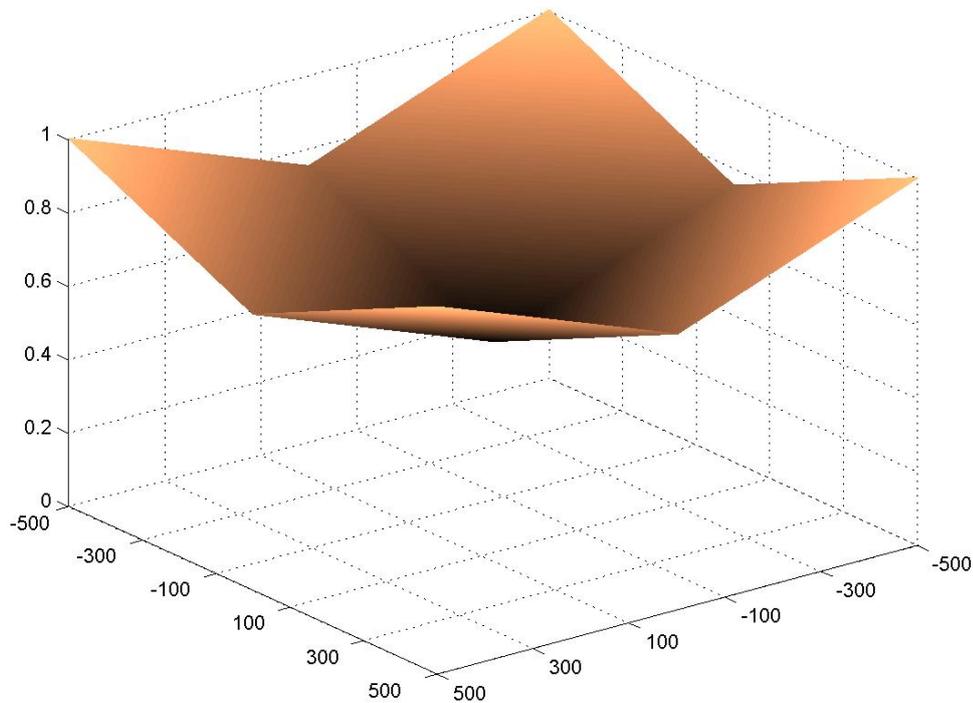


Figura 44: Função “4-Plan” vista em perspectiva.

## 4.12 Funções de Probabilidade Sub-limitada, Sobre-limitada e Range-limitada

Todas as funções apresentadas neste capítulo são da família das “Sub-limitadas”. No entanto, nesta mesma linha de pesquisa podem ser aplicadas também as famílias das “Sobre-limitadas” e “Range-limitadas”, definidas a seguir.

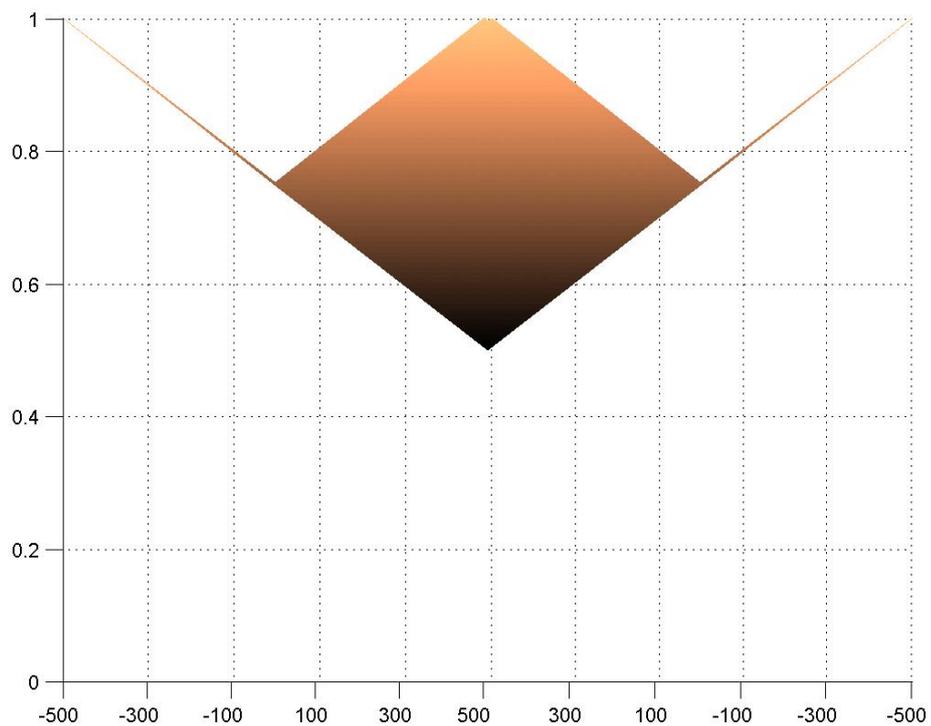


Figura 45: Função "4-Plan" vista de perfil.

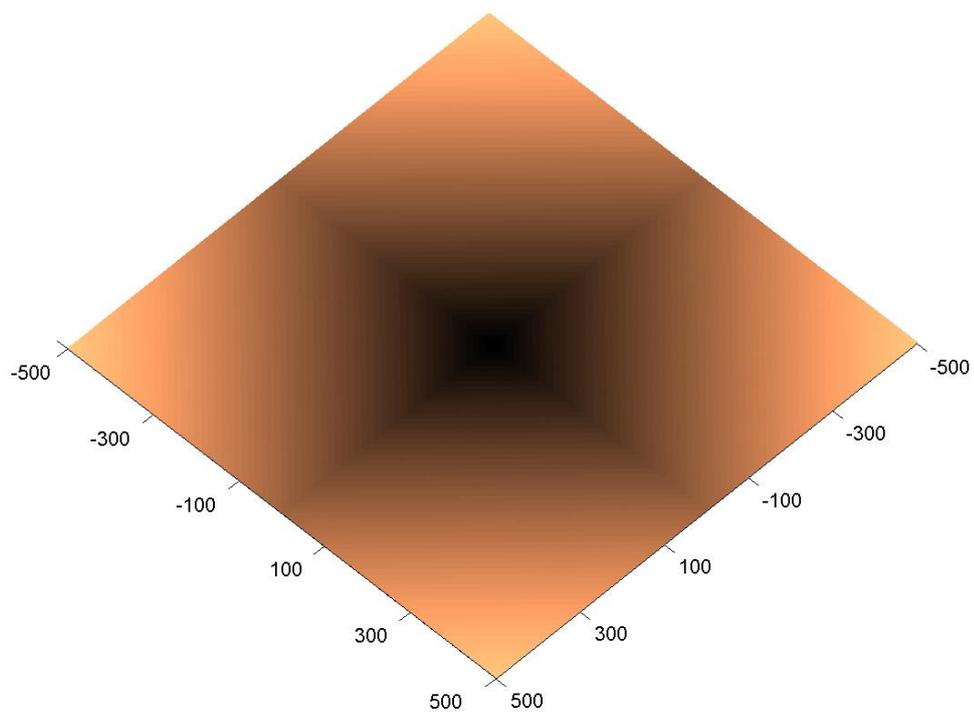


Figura 46: Função "4-Plan" vista de topo.

Conforme visto no início deste capítulo, essas funções são representadas genericamente por 4.3. Tomando uma senóide como exemplo, a família completa de funções pode ser escrita como:

$$p(z) = p_o + \epsilon |\sin(\|z\|)|. \quad (4.16)$$

A manipulação adequada de  $\epsilon$  é que faz de  $p(z)$  uma função de probabilidade tornando o seu contra-domínio coincidente com o intervalo  $[0, 1]$ . Da mesma forma, as três famílias citadas são obtidas pela definição de um  $\epsilon$  adequado, haja vista a definição das sub-limitadas em 4.3, onde  $\epsilon = 1 - p_o$ . A Tabela 5 mostra a constituição dessas famílias, usando o exemplo das senóides.

Família	$\epsilon$	$p(z)$
Sub-limitada	$1 - p_o$	$p_o + (1 - p_o)  \sin(\ z\ ) $
Sobre-limitada	$-p_o$	$p_o - p_o  \sin(\ z\ ) $
Range-limitada	$p_o(1 - p_o)$	$p_o + p_o(1 - p_o)  \sin(\ z\ ) $

Tabela 5: Constituição das famílias de funções de probabilidade.

As Figuras 47, 48, e 49, mostram evoluções das famílias sub-limitada, sobre-limitada, e range-limitada, respectivamente.

No próximo capítulo é feita uma breve abordagem do estado da arte em modelagem computacional, contemplando uma visão geral do Rational Unified Process, o RUP, e da Unified Modeling Language, a UML. Além disto, é apresentada uma visão geral do projeto do Firelab.

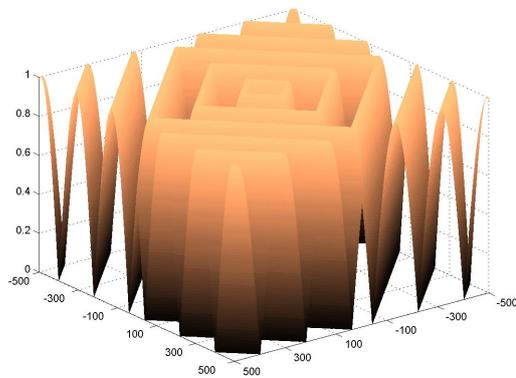
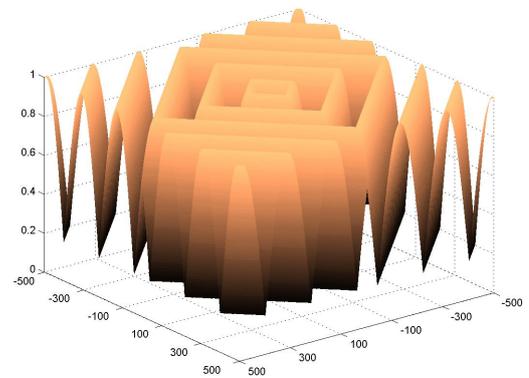
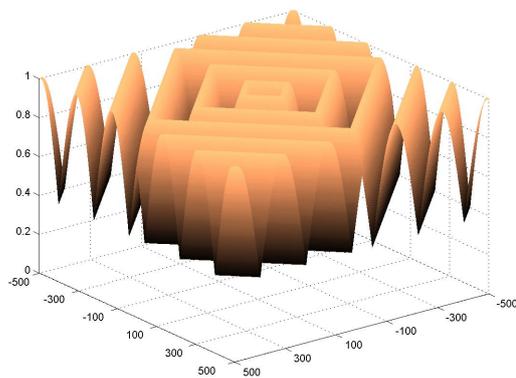
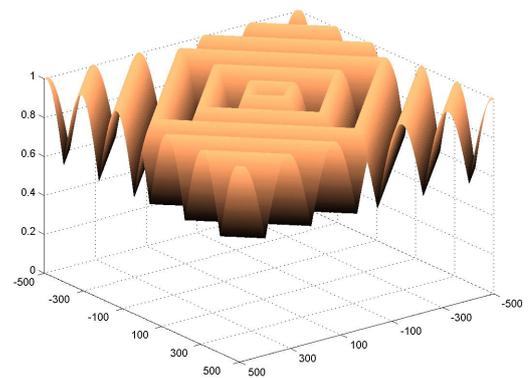
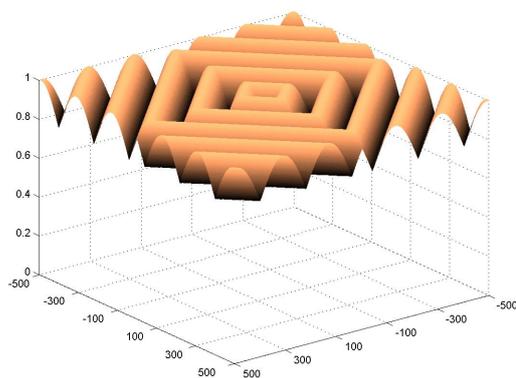
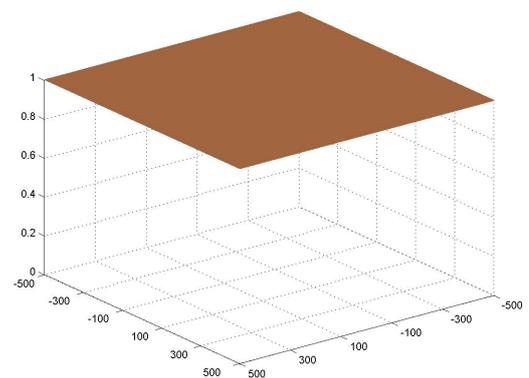
(a)  $p_0 = 0, 0$ (b)  $p_0 = 0, 2$ (c)  $p_0 = 0, 4$ (d)  $p_0 = 0, 6$ (e)  $p_0 = 0, 8$ (f)  $p_0 = 1, 0$ 

Figura 47: Plotagens da senóide quadrada *sub-limitada* para uma evolução de  $p_0$  com  $\Delta p_0 = 0, 2$ .

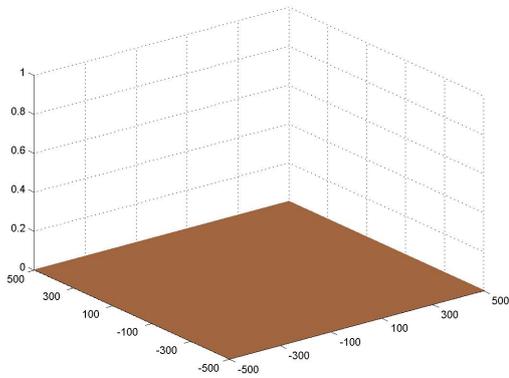
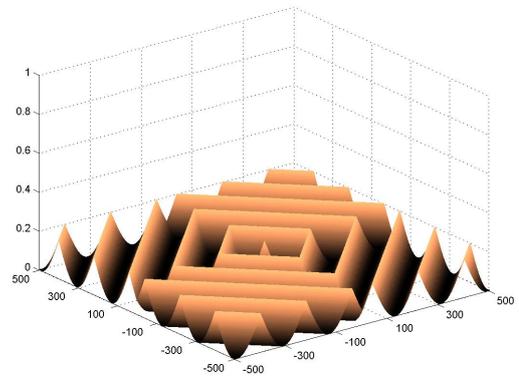
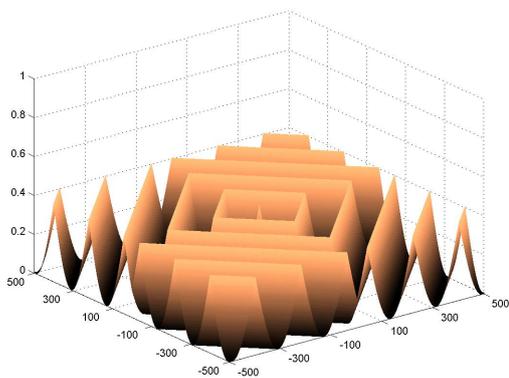
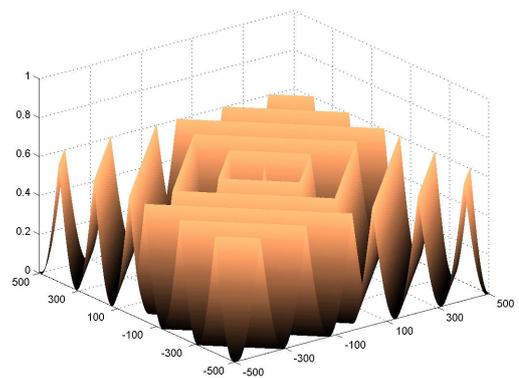
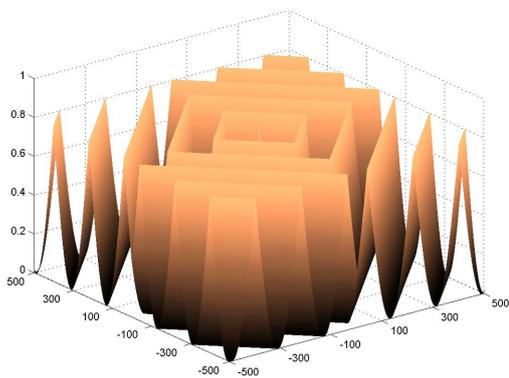
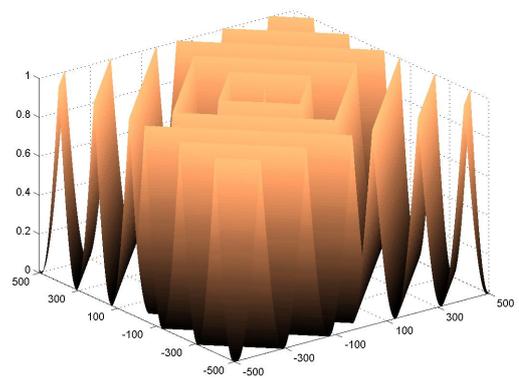
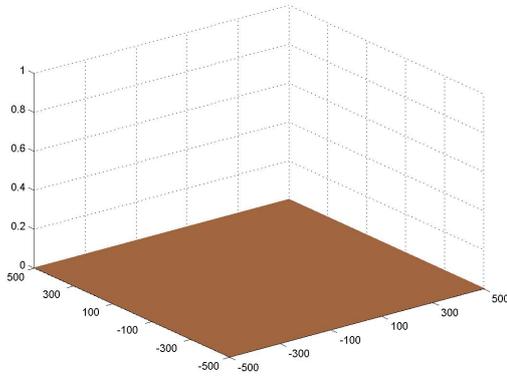
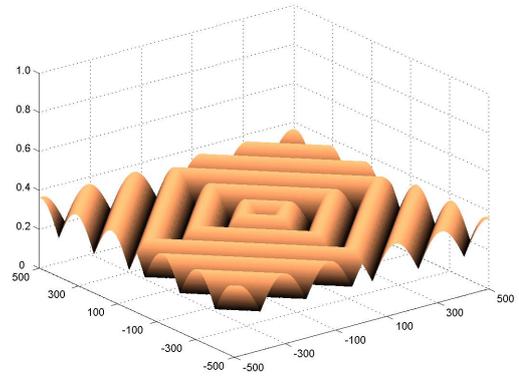
(a)  $p_0 = 0, 0$ (b)  $p_0 = 0, 2$ (c)  $p_0 = 0, 4$ (d)  $p_0 = 0, 6$ (e)  $p_0 = 0, 8$ (f)  $p_0 = 1, 0$ 

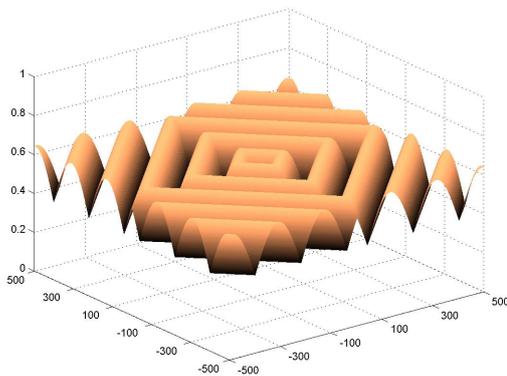
Figura 48: Plotagens da senóide quadrada *sobre-limitada* para uma evolução de  $p_0$  com  $\Delta p_0 = 0, 2$ .



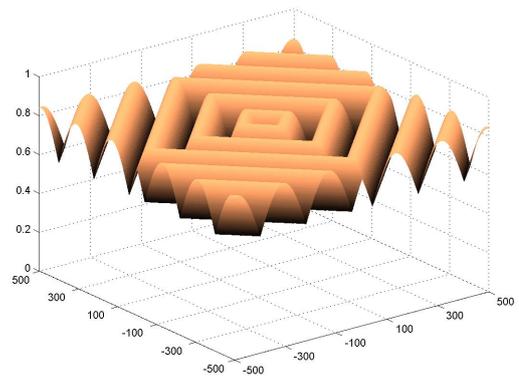
(a)  $p_0 = 0, 0$



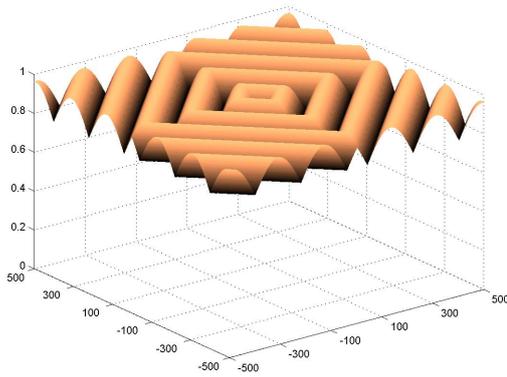
(b)  $p_0 = 0, 2$



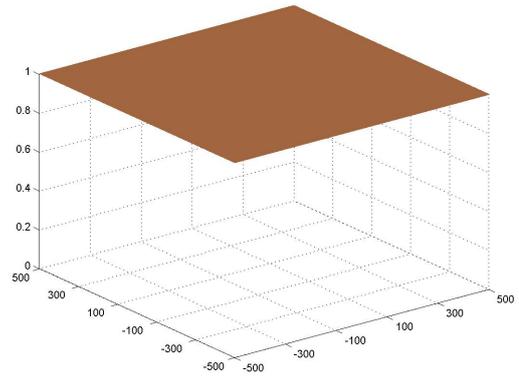
(c)  $p_0 = 0, 4$



(d)  $p_0 = 0, 6$



(e)  $p_0 = 0, 8$



(f)  $p_0 = 1, 0$

Figura 49: Plotagens da senóide quadrada *range-limitada* para uma evolução de  $p_0$  com  $\Delta p_0 = 0, 2$ .

## 5 *Modelagem Computacional*

A modelagem computacional, aqui apresentada, tem como meta a elaboração de um planejamento básico para a construção de um simulador de queimadas baseado na teoria de percolação. Por isto, passa pela tomada de decisão sobre alguns pontos importantes relativos aos objetivos do simulador. Tais decisões, naturalmente, são embasadas nos requisitos estabelecidos para o simulador, já declarados no Capítulo 1.

Uma primeira decisão já tomada desde a definição dos requisitos, corroborada com robustez na base teórica do Capítulo 2 *Introdução à Teoria de Percolação*, é sobre o modelo de percolação a ser adotado. Ficou, então, decidida a adoção do *modelo de percolação regular de sítios em rede quadrada*.

Outra decisão muito importante é a de que o simulador deve ser capaz de produzir simulações, tanto para probabilidade uniforme quanto para probabilidade não-uniforme, com o intuito de proporcionar a comparação dos resultados já conhecidos para probabilidade uniforme com os que serão obtidos para probabilidade não-uniforme aqui proposta, denominada de probabilidade sub-limitada em ondas.

À medida em que o conteúdo deste capítulo evolui, as decisões tomadas serão comentadas ou ficarão evidentes implicitamente.

### 5.1 *Considerações Gerais*

Diante do que manda o estado da técnica, deve-se aplicar aqui as orientações da metodologia contida no RUP (*Rational Unified Process*).

O RUP é uma metodologia que orienta o processo de construção de *software* e foi originariamente desenvolvido pela *Rational Software Inc.* que depois foi adquirida pela IBM e é atualmente uma divisão da gigante *Big Blue*. Os fundadores da *Rational Software Inc.* e criadores do RUP e também da UML (Unified Modeling Language), são os chamados Três Amigos (*The Three Amigos*): Grady Booch, Ivar Jacobson, James Rumbaugh. A UML provê uma linguagem unificada para a especificação de sistemas usando

a tecnologia de orientação a objetos, cujo ponto forte é o uso de diagramas de um modo integrado e consistente. É uma evolução surpreendentemente harmoniosa do conjunto de técnicas da Análise Estruturada e do Projeto Estruturado. Para maiores detalhes podem ser pesquisados, por exemplo, os seguintes *links*: <http://www.wthreex.com/rup/>, <http://ootips.org/rup.html>, [http://en.wikipedia.org/wiki/Rational\\_Unified\\_Process](http://en.wikipedia.org/wiki/Rational_Unified_Process).

A metodologia preconizada pelo RUP utiliza uma técnica de desenvolvimento de *software* em que o sistema é liberado por versões, primeiro em uma versão mínima, básica, bem estudada para atender as necessidades mais prementes, e depois em versões consecutivas, planejadas, em que vai agregando mais e mais funcionalidades, contemplando assim, paulatinamente, a plenitude do sistema. Ao processo que utiliza esta técnica diz-se que obedece a um *modelo incremental*.

Uma outra propriedade do RUP é que as fases do processo de desenvolvimento acontecem de um modo iterativo, ou seja, cada uma das fases pode ocorrer diversas vezes durante o desenvolvimento como um todo, caracterizando um processo de refinamentos sucessivos. Esta propriedade foi herdada do *modelo espiral*, seu antecessor. E ao processo que faz uso desta propriedade diz-se que obedece a um *modelo iterativo*.

Diz-se, portanto, que o RUP é uma metodologia que segue um *modelo iterativo e incremental*.

As fases do processo de desenvolvimento de *software* definidas no RUP são mostradas na Figura 50. São denominadas Iniciação (*Inception*), Elaboração (*Elaboration*), Construção (*Construction*), e Transição (*Transition*).

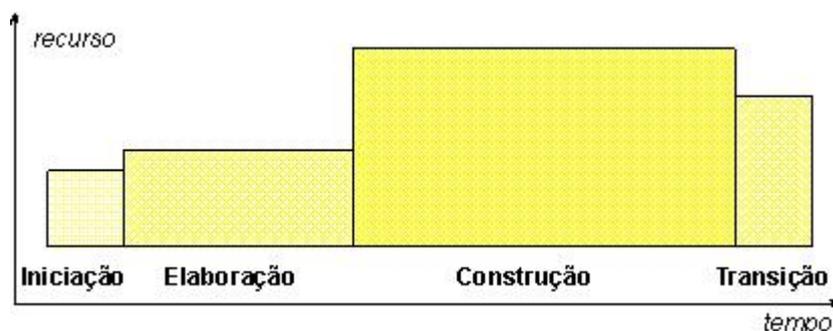


Figura 50: Distribuição dos recursos e do tempo ao longo das fases do RUP.

A Tabela 6 apresenta uma descrição sucinta das fases do RUP.

Fase	Descrição	Produto
<b><i>Iniciação</i></b>	Trata da definição e do planejamento preliminar do sistema que deve ser fornecido.	Documentos e opcionalmente um protótipo preliminar, que podem ser chamados de ante-projeto ou pré-projeto do sistema.
<b><i>Elaboração</i></b>	Estabelece a arquitetura, modelagem, prototipação, do sistema que deve ser fornecido.	Documentos e opcionalmente um protótipo mais elaborado, que podem ser intitulados como projeto ou modelo do sistema.
<b><i>Construção</i></b>	Trata da construção do sistema, operacionalizando o sistema que deve ser fornecido.	Sistema-produto pronto para a fase de transição.
<b><i>Transição</i></b>	Trata da disponibilização do sistema-produto ao usuário final. É a fase final de um ciclo de vida do sistema.	Sistema-produto pronto para ser usado.

Tabela 6: Descrição sucinta das fases do RUP.

A Figura 50 mostra também a grandeza dos esforços despendidos em um projeto típico de desenvolvimento de *software*, onde é possível observar a distribuição dos recursos e do tempo em cada fase. A idéia do diagrama da Figura 50 é a de que o esforço para cada fase é medido pela área do retângulo correspondente, haja vista que o esforço total<sup>1</sup> pode ser medido pelo produto “recursos x tempo”, que, por sua vez, representa o dispêndio relativo à aplicação dos recursos envolvidos durante um determinado intervalo de tempo.

Pela simples leitura do gráfico da Figura 50, pode-se inferir, por exemplo, que as fases mais dispendiosas são, em ordem, Construção, Elaboração, Transição, Iniciação. Esta constatação é importante porque sinaliza ao gestor do projeto o fato de que todos os esforços devem ser feitos no sentido de promover todas as modificações necessárias durante a fase de Iniciação, para que se obtenha os resultados com os menores custos. Realizar uma nova iteração da fase de Iniciação é muito menos caro do que realizar uma nova iteração da fase de Elaboração que, por sua vez, é menos dispendiosa que refazer a fase de Construção.

A Figura 51 representa os marcos que identificam o final de cada uma das fases, como sendo resultados finais (ou produtos) de cada uma delas. Por conseqüência, tal figura é

<sup>1</sup>É bom frisar que o esforço total implica diretamente no *custo* total.

muito útil para o entendimento das atividades que devem ser realizadas em cada uma das fases.

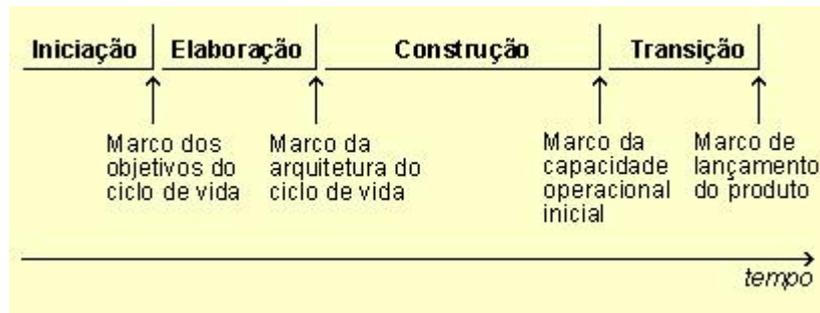


Figura 51: Marcos de um projeto desenvolvido segundo o RUP.

A Figura 52 mostra a estrutura básica do RUP, em termos de um cruzamento das disciplinas, que representam atividades, com as fases do processo, evidenciando o fato de que tais disciplinas acontecem de tal forma que permeabilizam as fases. Os desenhos que representam estes cruzamentos, algumas vezes denominados “baleínhas” porque parecem pequenas baleias no “oceano do RUP”, mostram em que fases cada disciplina acontece com maior ou menor intensidade.

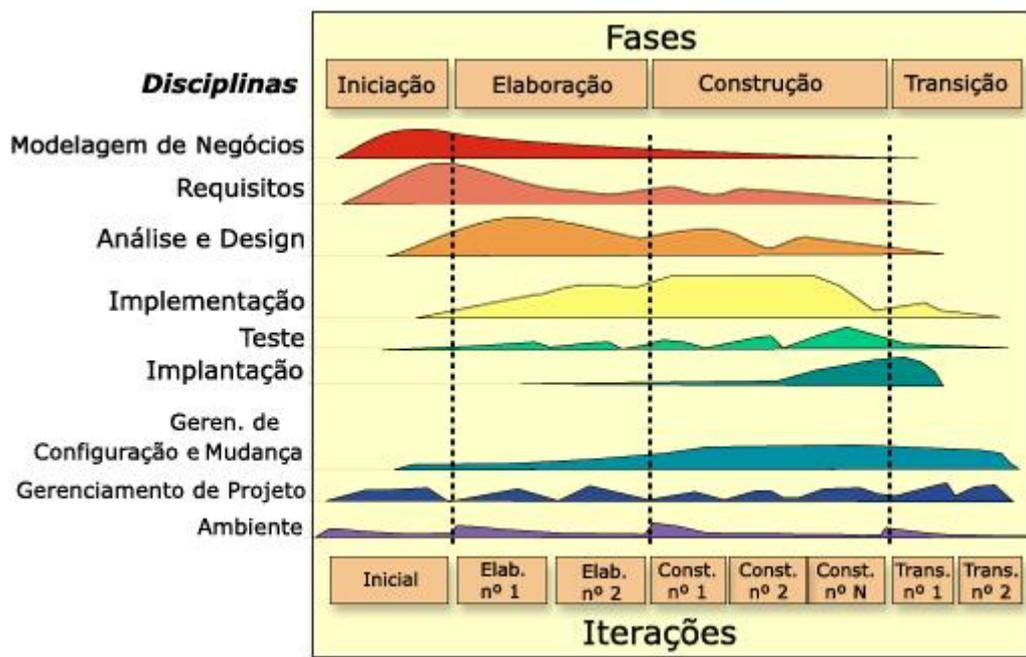


Figura 52: Relações entre as fases e as disciplinas do RUP.

Note-se, por exemplo, que na fase de “Iniciação” prevalecem as disciplinas “Modelagem de Negócios” e “Requisitos”, porque é durante esta fase que são estabelecidos os requisitos do sistema e as regras básicas a respeito do negócio do sistema. As mesmas

disciplinas perpassam por todas as demais fases, porque a todo momento os requisitos e as regras básicas podem estar sendo revisados e modificados. No entanto, a gestão do projeto deve cuidar para que as modificações ocorram o mais cedo possível, porque, quanto mais tarde ocorrerem maior será o custo dos ajustes necessários. E assim é para todas as fases e durante todo o processo.

O RUP indica como melhor prática o uso dos diagramas da UML (*Unified Modeling Language*) para realizar a modelagem de um sistema, e não será diferente para o caso do *Firelab*. Obviamente, como o próprio RUP orienta, não serão usados todos os diagramas da UML mas apenas alguns deles, estabelecidos como os mais importantes para aplicações do tipo do simulador.

Os diagramas da UML que foram aplicados à modelagem do *Firelab* são *Diagrama de Casos de Uso* e *Diagrama de Classes*, conforme descritos a seguir.

## 5.2 Diagrama de Casos de Uso

O Diagrama de Casos de Uso (*Use Case Diagram*) descreve de um modo muito superficial e essencialmente diagramático as operações do sistema em nível macroscópico.

A Figura 53 mostra o diagrama de casos de uso do *Firelab*. Neste diagrama os bonequinhos representam os atores do sistema, que, no caso são pessoas. E as bolinhas, ou “bolhas” como às vezes são chamadas, representam processos que o sistema deve executar para realizar as operações requeridas pelos atores.

No caso, então, a leitura do diagrama transmite a informação de que o sistema pode ser usado por dois tipos de usuário: *estudante* e *pesquisador*. O diagrama da Figura 53 transmite também a informação de que o primeiro solicita que o sistema realize *experiências de ensaio único* e o segundo solicita que o sistema realize *experiências de ensaios sucessivos*. Lê-se também no diagrama que ao realizar este último tipo de experiência, o sistema deve, obrigatoriamente, registrar os resultados da mesma em banco de dados.

Ainda na leitura do diagrama da Figura 53, infere-se também que o sistema ao ser iniciado com uma experiência de ensaios sucessivos deve, obrigatoriamente, consultar o banco de dados para verificar se a última experiência foi levada a bom termo até o final. Se negativo, o sistema pede ao usuário a opção de reiniciar a experiência e, se for autorizado, reinicia imediatamente a experiência inacabada a partir do ponto de parada. Tal procedimento é chamado de *restart* (no diagrama, “Controlar restart”) e foi de suma

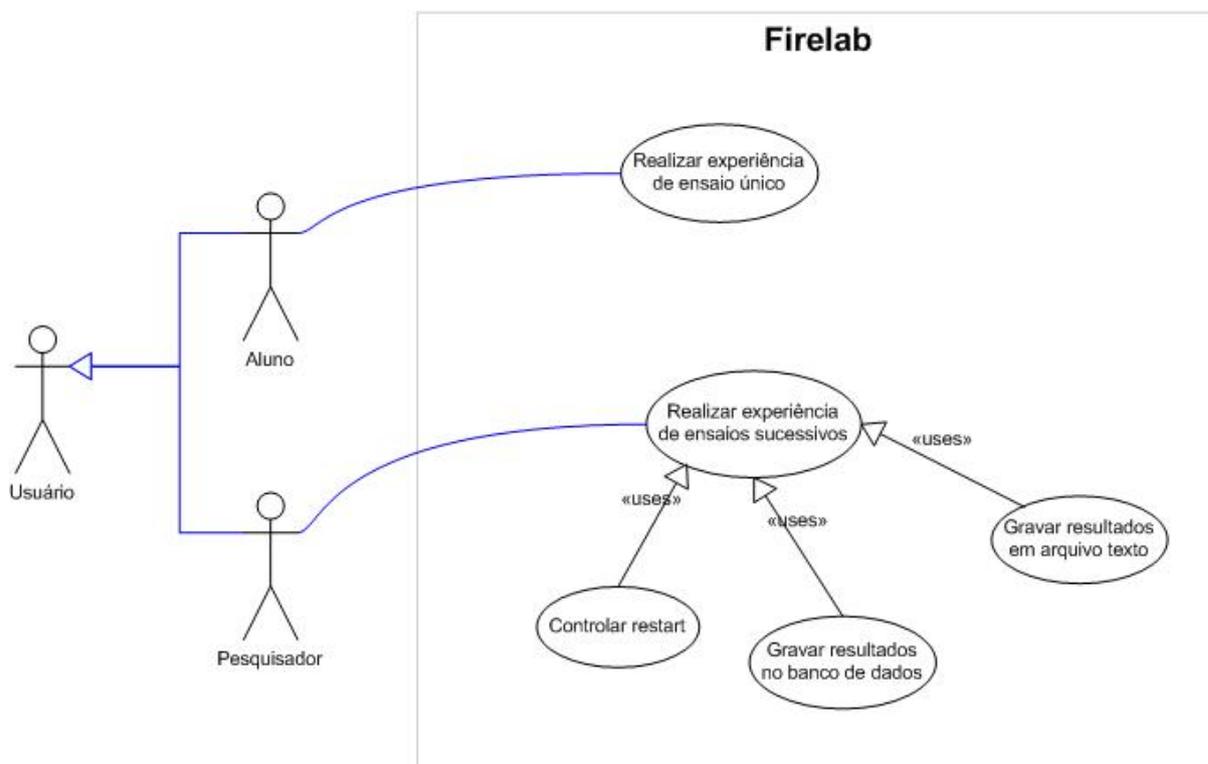


Figura 53: Diagrama de casos de uso do Firelab.

importância durante as pesquisas, porque as quedas de energia nas instalações sempre foram muito freqüentes. Sem o procedimento de *restart* ter-se-ia que, a cada queda de energia, iniciar novamente a experiência que estava em andamento. Para que se tenha uma noção do tempo que poderia ser desperdiçado, basta ter em mente que algumas experiências completas levam cerca de 30 dias para executar. Sem o procedimento de *restart*, caso houvesse uma queda de energia no décimo dia, seriam 10 dias de perda de tempo.

É importante observar que a tipificação de usuário apresentada no diagrama, classificando-o em aluno e pesquisador, é apenas lógica, e trata-se de um nível de abstração necessário à conceituação das modalidades de operação denominadas *experiência de ensaio único* e *experiência de ensaios sucessivos*. Obviamente, na prática, nada impede que alunos também realizem experiências de ensaios sucessivos e pesquisadores também realizem experiência de ensaio único.

Será verificado que a primeira modalidade de operação, que permite a realização de experiências de ensaio único, tem objetivos ilustrativos e didáticos, enquanto que a segunda destina-se à realização de experiências científicas completas.

É evidente também, no diagrama, que durante uma experiência de ensaios sucessivos

o sistema deve registrar os resultados no banco de dados (“Gravar resultados no banco de dados”). E para facilitar a elaboração de gráficos, o sistema também deve gravar um arquivo texto com os resultados das experiências (“Gravar resultados em arquivo texto”).

### 5.3 Diagrama de Classes

O Diagrama de Classes (*Class Diagram*) apresenta as classes que compõem o sistema e as associações entre elas.

A Figura 54 mostra o diagrama de classes do Firelab.

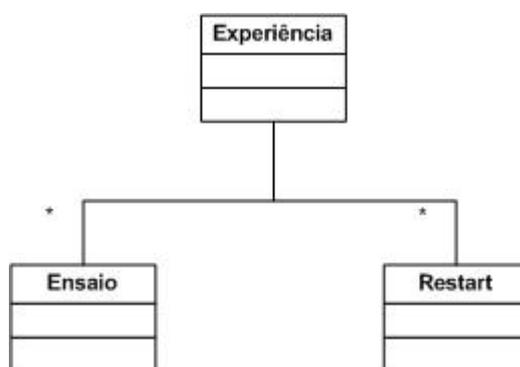


Figura 54: Diagrama de classes do Firelab.

Uma simulação no Firelab é chamada *experiência*. Uma experiência completa deve ser realizada segundo o método de Monte Carlo para diversos valores de  $p$ , desde 0 até 1, e, para cada  $p$  é realizada uma grande quantidade de réplicas (1000, por exemplo) para que se obtenha o comportamento de  $\theta(p)$ . As realizações para cada  $p$  são chamadas *ensaios*.

As experiências, por sua vez, são classificadas em experiências de ensaio único e experiências de ensaios sucessivos. Estas últimas são as experiências completas realizadas segundo o método de Monte Carlo, enquanto as de ensaio único funcionam como demonstração, onde o usuário escolhe um valor de  $p$  e o sistema realiza um único ensaio para este valor. Trata-se, portanto, de uma simulação de propósitos didáticos.

A classe *experiência* representa todas as experiências realizadas com o Firelab, no entanto, só é necessário dar tratamento de persistência às de ensaios sucessivos, haja vista a necessidade de geração de um resultado final em forma de informações que vão servir para descrever o comportamento de  $\theta(p)$  e, possivelmente, de outras variáveis de interesse. Tais informações são propriedades da própria classe *experiência* e também da classe *ensaio* que registra o resultado da aplicação do Método de Monte Carlo. A classe

*restart*, por seu turno, é dotada de propriedades que registram os procedimentos de restart que por ventura tenham sido necessários durante a experiência.

A persistência destas três classes para as experiências de ensaios sucessivos serve como histórico das experiências realizadas e também proporciona a operacionalização do procedimento de *restart*.

## 5.4 Diagrama de Entidades e Relacionamentos

O Diagrama de Entidades e Relacionamentos (*Entity Relationship Diagram*) apresenta as entidades do sistema e os relacionamentos entre elas.

A Figura 55 mostra o diagrama de entidades e relacionamentos do Firelab.

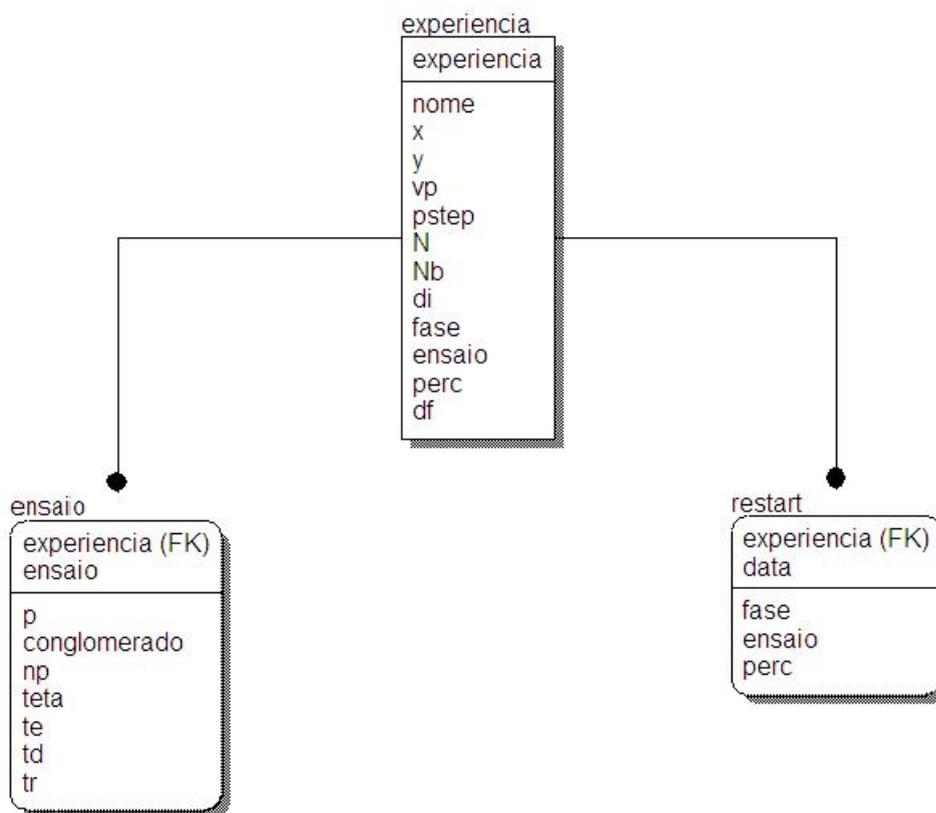


Figura 55: Diagrama de entidades e relacionamentos do Firelab.

O diagrama de entidades e relacionamentos (DER) do Firelab é derivado diretamente do diagrama de classes pela técnica de mapeamento. Devido à simplicidade do modelo o processo de mapeamento é intuitivo e tão simples que dispensa maiores comentários. Porém, não há nenhum exagero em enfatizar que, no modelo da Figura 55, *experiencia*, *ensaio*, *restart*, representam tabelas do modelo relacional que proporcionam a imple-

mentação das classes de mesmo nome, conforme apresentadas no diagrama de classes, em qualquer sistema gerenciador de banco de dados relacional (RDBMS).

As Tabelas 7, 8 e 9 descrevem mais detalhadamente cada uma das estruturas definidas na Figura 55. Os atributos marcados com asterisco são os eleitos como chaves das entidades.

A Tabela 7, a seguir, descreve a estrutura da entidade *experiência*. Para cada experiência de ensaios sucessivos o simulador insere uma linha na tabela correspondente a esta entidade.

Atributo	Descrição
<b><i>experiencia</i></b> *	Código da experiência.
<b><i>nome</i></b>	Nome da experiência. É uma denominação sistemática da experiência no formato <i>Firelab_aaaammdd_hhmmss</i> , onde <i>aaaammdd</i> é a data no formato ano-mês-dia e <i>hhmmss</i> é a hora no formato hora-minuto-segundo.
<b><i>x</i></b>	Largura da área.
<b><i>y</i></b>	Profundidade da área.
<b><i>vp</i></b>	Variação da probabilidade. No caso de uma experiência com probabilidade uniforme, <i>vp</i> não deverá ser preenchido. No entanto, se for o caso de uma experiência com probabilidade não-uniforme, será preenchido com um número inteiro que indica a função $p(z)$ utilizada, de acordo com a seguinte lista: - <i>Senóide quadrada (0)</i> - <i>Senóide circular (1)</i> - <i>Pulso quadrado (2)</i> - <i>Pulso circular (3)</i> - <i>Serra quadrada (4)</i> - <i>Serra circular (5)</i> - <i>Cone (6)</i> - <i>Calota (7)</i> - <i>4-Plan (8)</i>

*continua ...*

continuação ...

Atributo	Descrição
	Que corresponde a todas as funções definidas no Capítulo 4.
<b><i>pstep</i></b>	Incremento de $p$ ( $\Delta p$ ). Determina o número de ensaios da experiência. Um $\Delta p = 0,001$ , por exemplo, implica em uma experiência de 1001 ensaios, com $p$ variando desde 0 até 1.
<b><i>N</i></b>	Número de réplicas de cada ensaio. Representa o número de tentativas de percolação para cada valor de $p$ . Um valor usual é $N = 1000$ .
<b><i>Nb</i></b>	Número de réplicas de busca. Representa o número de réplicas durante a fase de busca da faixa crítica de $p$ , que é a região entre a já bem conhecida <i>probabilidade crítica</i> $p_c$ e uma outra probabilidade $p_f$ , sendo $p_f > p_c$ , que representa o menor valor de $p$ para o qual $\theta(p) = 1$ para todas as réplicas. Um valor usual é $Nb = 10$ . Esta propriedade é de fundamental importância na aplicação da técnica chamada de “replicação inteligente”, que é explicada detalhadamente no Capítulo 6. Por hora, é importante saber que o uso de tal técnica reduz sobremaneira o tempo de simulação, que, conforme já sabido, é um dos principais problemas das experiências com percolação.
<b><i>di</i></b>	Data-hora inicial da experiência.
<b><i>fase</i></b>	Fase da experiência. Pode ser um número inteiro de acordo com a seguinte lista: - <i>Fase subcrítica (0)</i> - <i>Fase supercrítica (1)</i> - <i>Fase supercrítica alta (2)</i> - <i>Simulação encerrada (3)</i> Conceitualmente, conforme já estudado, a teoria de percolação define apenas duas fases no processo de percolação, que são as fases subcrítica e supercrítica, delimitadas pelo ponto crítico $p_c$ . Para a implementação do simulador com todas as funcionalidades estabelecidas no projeto, fez-se necessário definir uma terceira fase,

continua ...

continuação ...

Atributo	Descrição
	<p>que, na verdade, faz parte da fase supercrítica, denominada de <i>fase supercrítica alta</i>. Para tanto, fica estabelecido mais um ponto importante do processo, já denominado <math>p_f</math>, que representa o primeiro valor de <math>p</math> para o qual <math>\theta(p) = 1</math> para todas as réplicas. A fase supercrítica alta é a região caracterizada por <math>p &gt; p_f</math>. Assim, para efeito de modelagem do simulador, são definidas as seguintes fases:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Fase subcrítica (<math>p \leq p_c</math>)</li> <li>- Fase supercrítica (<math>p_c &lt; p \leq p_f</math>)</li> <li>- Fase supercrítica alta (<math>p &gt; p_f</math>)</li> <li>- Simulação encerrada (<math>p=1</math>)</li> </ul> <p>O procedimento de controle de restart, por exemplo, baseia-se nesta definição de fases para retomar uma experiência que tenha sido interrompida.</p>
<b><i>ensaio</i></b>	<p>Ensaio corrente da experiência. É um número inteiro dentro da faixa definida por <math>pstep</math>. Por exemplo, se <math>pstep = 0,001</math>, ter-se-á 1001 ensaios numerados de 0000 a 1000. A idéia é que, a cada ensaio concluído, o simulador atualize este atributo para poder proporcionar o reinício da experiência a partir do próximo ensaio.</p>
<b><i>perc</i></b>	<p>Percentual corrente da experiência. É a relação percentual entre o número de ensaios já realizados e a quantidade total de ensaios da experiência, definida por <math>pstep</math>. No exemplo em que <math>pstep = 0,001</math>, ter-se-á 1001 ensaios. Portanto, após a realização de 101 ensaios ter-se-á <math>perc = 10\%</math>, haja vista que <math>101 \div 1001 \times 100 \approx 10</math>.</p>
<b><i>df</i></b>	Data-hora final da experiência.

Tabela 7: Descrição detalhada da entidade *experiencia*.

Atributo	Descrição
<b><i>experiencia*</i></b>	Código da experiência.

continua ...

continuação ...

Atributo	Descrição
<b><i>ensaio*</i></b>	Número do ensaio. Tal como já estabelecido na Tabela 7 acima, é um número inteiro dentro da faixa definida por $pstep$ , de modo que, se $pstep = 0,001$ , ter-se-á 1001 ensaios numerados de 0000 a 1000, tal como já estabelecido. No entanto, a idéia aqui é que a cada ensaio concluído o simulador insira um novo item nesta tabela <i>ensaio</i> , atualizando assim os dados da experiência.
<b><i>p</i></b>	Valor de $p$ referente ao ensaio. No caso de uma experiência de 1001 ensaios, ter-se-á 1001 valores de $p$ , $\{0,000, 0,001, 0,002, \dots, 1,000\}$ , um para cada ensaio.
<b><i>conglomerado</i></b>	Tamanho médio do conglomerado. Cada réplica gera um tamanho de conglomerado, de modo que a variável de interesse em nível de ensaio é a média.
<b><i>np</i></b>	Número de réplicas em que houve percolação.
<b><i>teta</i></b>	Teta de $p$ ( $\theta(p)$ ). Valor calculado pela divisão de $np$ pela quantidade total de réplicas do ensaio.
<b><i>te</i></b>	Tempo de ensaio. Tempo total de duração deste ensaio.
<b><i>td</i></b>	Tempo decorrido. Tempo decorrido desde o início da experiência até a finalização deste ensaio.
<b><i>tr</i></b>	Tempo médio de réplica. Calculado pela divisão do tempo total de duração do ensaio pela quantidade total de réplicas.

Tabela 8: Descrição detalhada da entidade *ensaio*.

A Tabela 8 descreve a estrutura da entidade *ensaio*. Para cada item da tabela *experiencia* o simulador insere diversas linhas na tabela correspondente a esta entidade. Tantas linhas quantos forem os ensaios definidos por  $pstep$ . Caso uma certa experiência seja abortada, a totalidade das linhas de ensaio será desrespeitada e isto servirá como parâmetro para o sistema ativar o procedimento de *restart*.

A Tabela 9 descreve a estrutura da entidade *restart*. Para cada *experiencia* o simulador pode inserir diversas linhas na tabela correspondente a esta entidade, sendo uma linha para cada *restart* ocorrido. É uma espécie de *log* de *restart*.

Atributo	Descrição
<i>experiencia</i> *	Código da experiência.
<i>data</i> *	Data-hora de restart. Registra o momento em que o restart começou.
<i>fase</i>	Fase da experiência em que ocorreu a parada. O mesmo conteúdo do campo <i>fase</i> da tabela <i>experiencia</i> é transcrito para este campo pelo próprio simulador quando é iniciado um procedimento de <i>restart</i> .
<i>ensaio</i>	Número do último ensaio realizado. Tal como ocorre com <i>fase</i> , o mesmo conteúdo do campo <i>ensaio</i> da tabela <i>experiencia</i> é transcrito para este campo pelo próprio simulador quando é iniciado um procedimento de <i>restart</i> .
<i>perc</i>	Percentual realizado da experiência até o momento da parada. Do mesmo modo que é feito com <i>fase</i> e <i>ensaio</i> , o conteúdo do campo <i>perc</i> da tabela <i>experiencia</i> é transcrito para este campo pelo próprio simulador quando é iniciado um procedimento de <i>restart</i> .

Tabela 9: Descrição detalhada da entidade *restart*.

## 5.5 Considerações de Implementação

O sistema foi implementado usando *Delphi*<sup>®</sup> e banco de dados *Access*<sup>®</sup>.

A escolha por *Delphi* foi simplesmente porque o executável gerado executa diretamente no ambiente operacional nativo sem necessidade de plataformas adicionais ou instaladores sofisticados. Não requer camada de *runtime*. Além disso, *Object Pascal* é uma linguagem robusta e altamente recomendável ao desenvolvimento de programas científicos, tanto quanto *C++*.

Quanto ao banco de dados, o mais simples e mais disponível para uma aplicação *desktop* simples assim, como o simulador, é mesmo o *Access*<sup>®</sup>.

## 5.6 Implementação da Animação do Simulador

Um dos mais importantes atrativos do simulador é a animação que imita uma queimada vista de cima, como se o observador estivesse sobrevoando a área, como mostra o instantâneo apresentado na Figura 56.

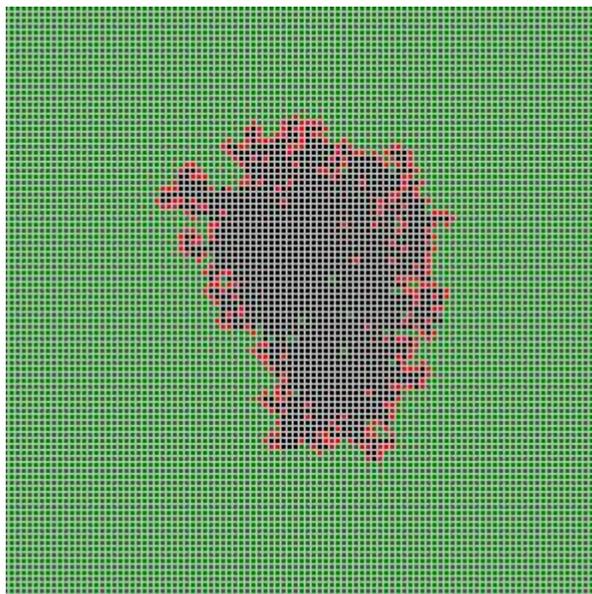


Figura 56: Exemplo de animação de queimada no Firelab.

Para obter este resultado, em primeiro lugar é preciso simular a área de floresta vista de topo. A Figura 56 representa uma floresta completamente povoada de árvores ao longo de toda a área.

Os textos seguintes desta seção têm o objetivo de esclarecer como o Firelab implementa uma área florestal e como realiza a animação de uma queimada.

### 5.6.1 Simulação de Uma Área Florestal

Em primeiro lugar, foi escolhida a classe *TImage* para representar uma área florestal. Daí, determina-se uma área quadrada de *pixels* dentro de um objeto da classe *TImage* para representar o espaço de uma árvore e usa-se um espaço de um *pixel* para separar uma árvore da outra. No caso do Firelab a área de uma árvore é de  $2 \times 2$  *pixels*.

A Figura 57 é a mesma Figura 56 ampliada em 2x para melhor observação da composição da floresta.

Pela observação da Figura 57 pode-se concluir que trata-se de uma área  $100 \times 100$  completamente povoada de árvores ( $p = 1.0$ ).

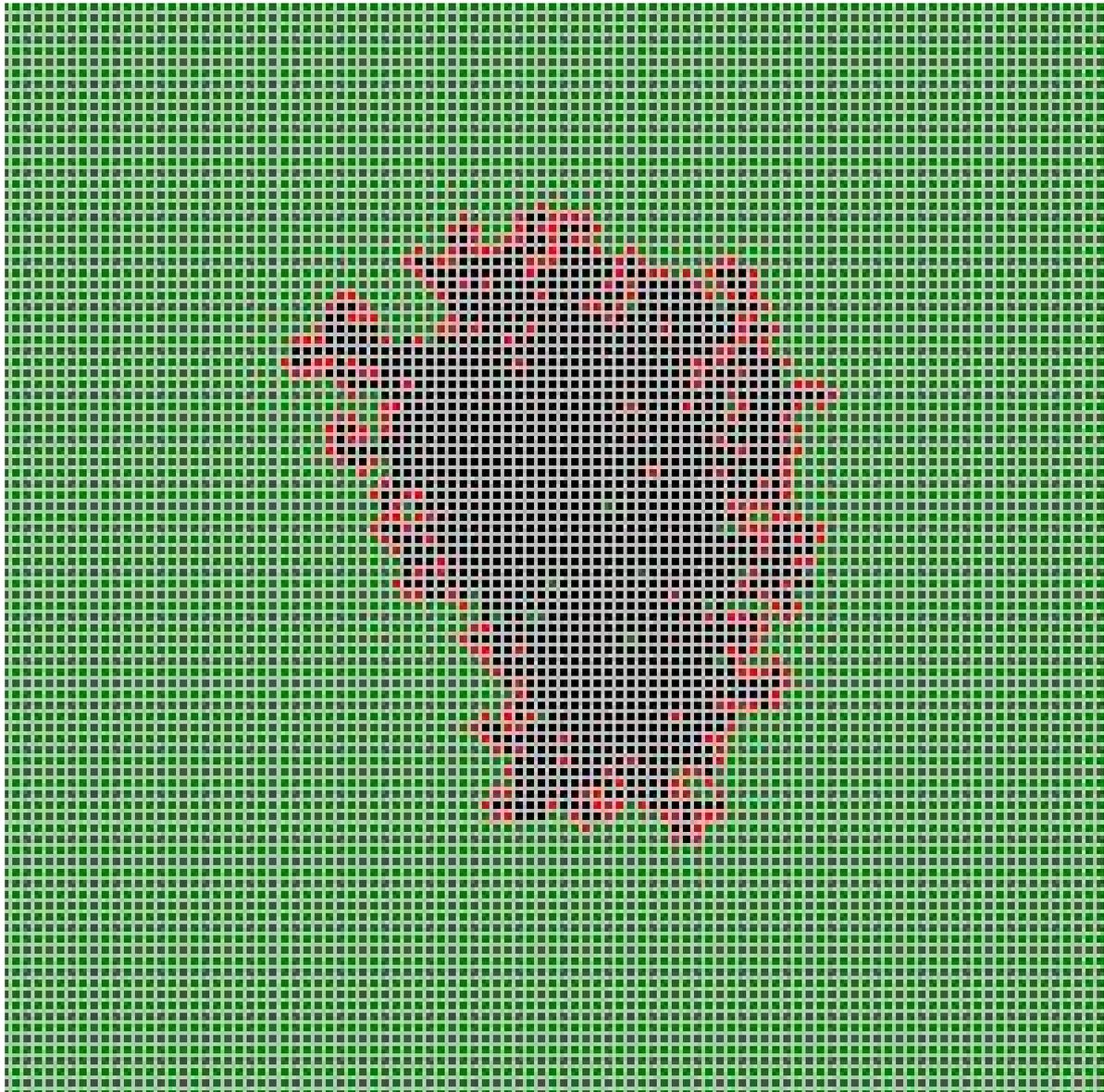
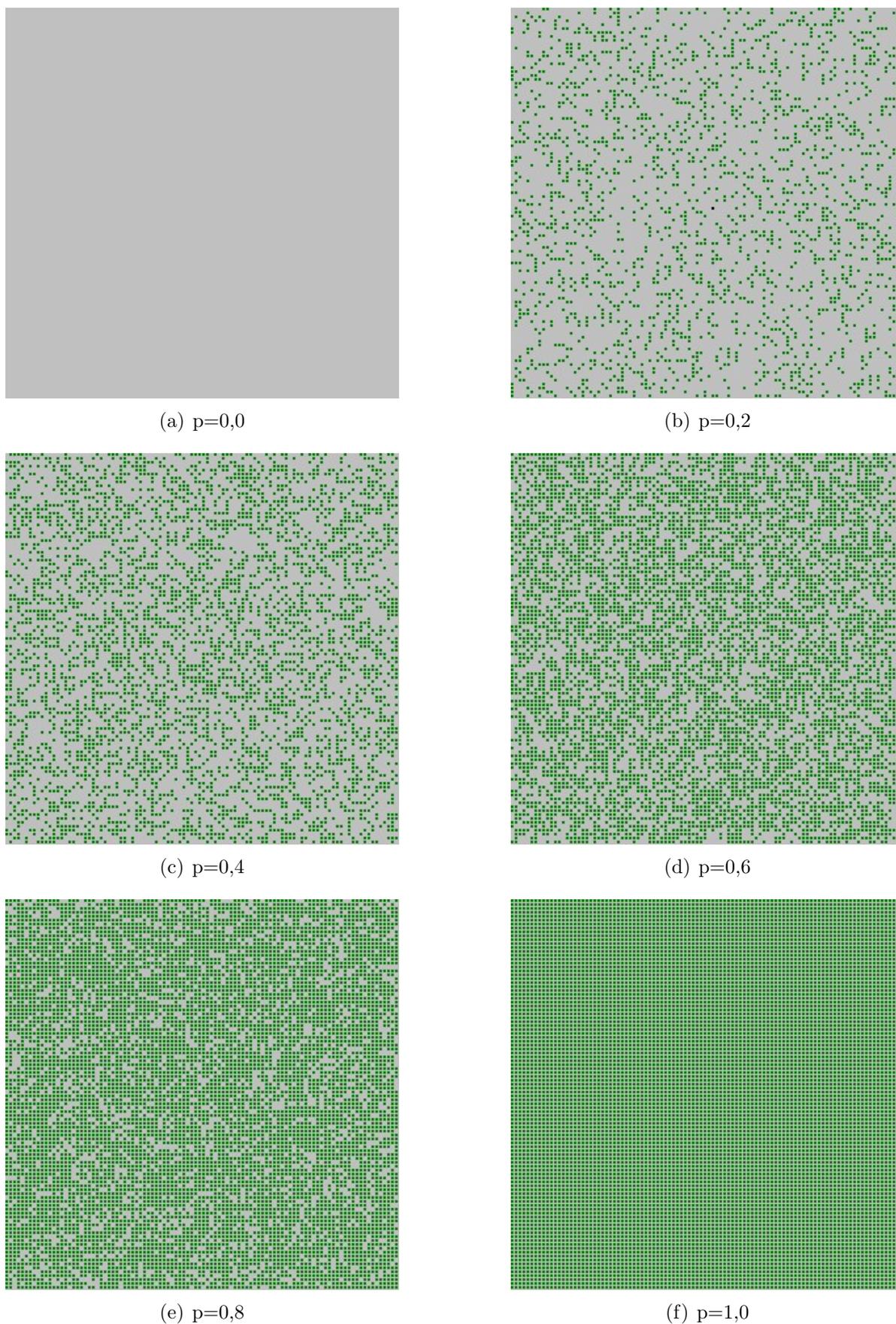


Figura 57: Exemplo de animação de queimada no Firelab.

A seqüência de imagens da Figura 58 mostra formações florestais correspondentes a  $p = 0.0$ ,  $p = 0.2$ ,  $p = 0.4$ ,  $p = 0.6$ ,  $p = 0.8$ , e  $p = 1.0$ , em uma área 100x100, com probabilidade uniforme, geradas pelo Firelab.

Na modelagem da animação é adotada a cor *cinza* como cor de fundo da área florestal. Então, a região correspondente a uma árvore obedece à seguinte convenção de cores: *cinza*, não há árvore; *verde*, há uma árvore; *vermelho* árvore queimando, *preto* árvore queimada.

No próximo capítulo é apresentado o simulador. São mostradas e explicadas todas as funcionalidades, bem como a operação do programa.

Figura 58: Simulações de florestas 100x100 com valores crescentes de  $p$ .

## 6 *Descrição Detalhada do Simulador*

O presente capítulo mostra como são operacionalizadas as funcionalidades do simulador, de forma que se possa proceder as simulações necessárias ao estudo das funções de probabilidade descritas no Capítulo 4, para obtenção do ponto crítico e da probabilidade de percolação associados.

Para simplificar esta tarefa de descrever as operações do simulador, e também para realizar tal tarefa de certa forma sistemática, é interessante começar apresentando a interface inicial do simulador.

### 6.1 A Console do Firelab

A Figura 59 mostra a interface inicial do Firelab, chamada de *console* do simulador. Esta console contém uma área à esquerda onde são apresentadas informações gerais sobre a origem e a autoria do simulador. A área restante é efetivamente utilizada para estabelecer os parâmetros necessários à realização de uma experiência, que são divididos em quatro grupos, a saber:

- *Configuração* - a configuração serve para determinar o tamanho da área florestal e o tipo de variação da probabilidade  $p$ . Se o usuário optar pela probabilidade variável o sistema abre uma caixa de combinação para que seja escolhida a função  $p(z)$ , de acordo com a lista apresentada no Capítulo 4.
- *Operação* - o grupo de operação permite escolher o tipo de experiência a ser executada: experiência de ensaio único ou experiência de ensaios sucessivos. Os grupos “Opções de ensaio único” e “Opções de ensaios sucessivos” descritos a seguir, são mutuamente exclusivos e totalmente dependentes desta escolha. Se for escolhida a primeira opção, o sistema habilita as “Opções de ensaio único” e desabilita as “Opções de ensaios sucessivos”, caso contrário, habilita as “Opções de ensaios sucessivos” e desabilita as “Opções de ensaio único”.



Figura 59: Console do Firelab.

- *Opções de ensaio único* - neste grupo estão todos os parâmetros necessários à realização de uma experiência de ensaio único, que serão apresentados mais adiante.
- *Opções de ensaios sucessivos* - neste grupo estão todos os parâmetros necessários à realização das experiências de ensaios sucessivos, que também serão especificados mais à frente.

Note-se que o simulador não obedece ao padrão de conformidade utilizado na maioria dos aplicativos para Windows, em que são de praxe os menus Arquivo, Editar, etc. Isto é resultado de uma tomada de decisão de projeto, no sentido de simplificar a interface do simulador, apresentando todos os parâmetros necessários de uma só vez, em um só lugar.

## 6.2 Descrição Detalhada das Interfaces

Este tópico dissecar a interface inicial do sistema. Com base na Figura 60 onde os campos da interface estão enumerados, é feita uma descrição completa, campo a campo, da console do sistema. Torna-se inevitável, portanto, dissertar sobre as funcionalidades do sistema e, conseqüentemente, também sobre as interfaces de simulação.

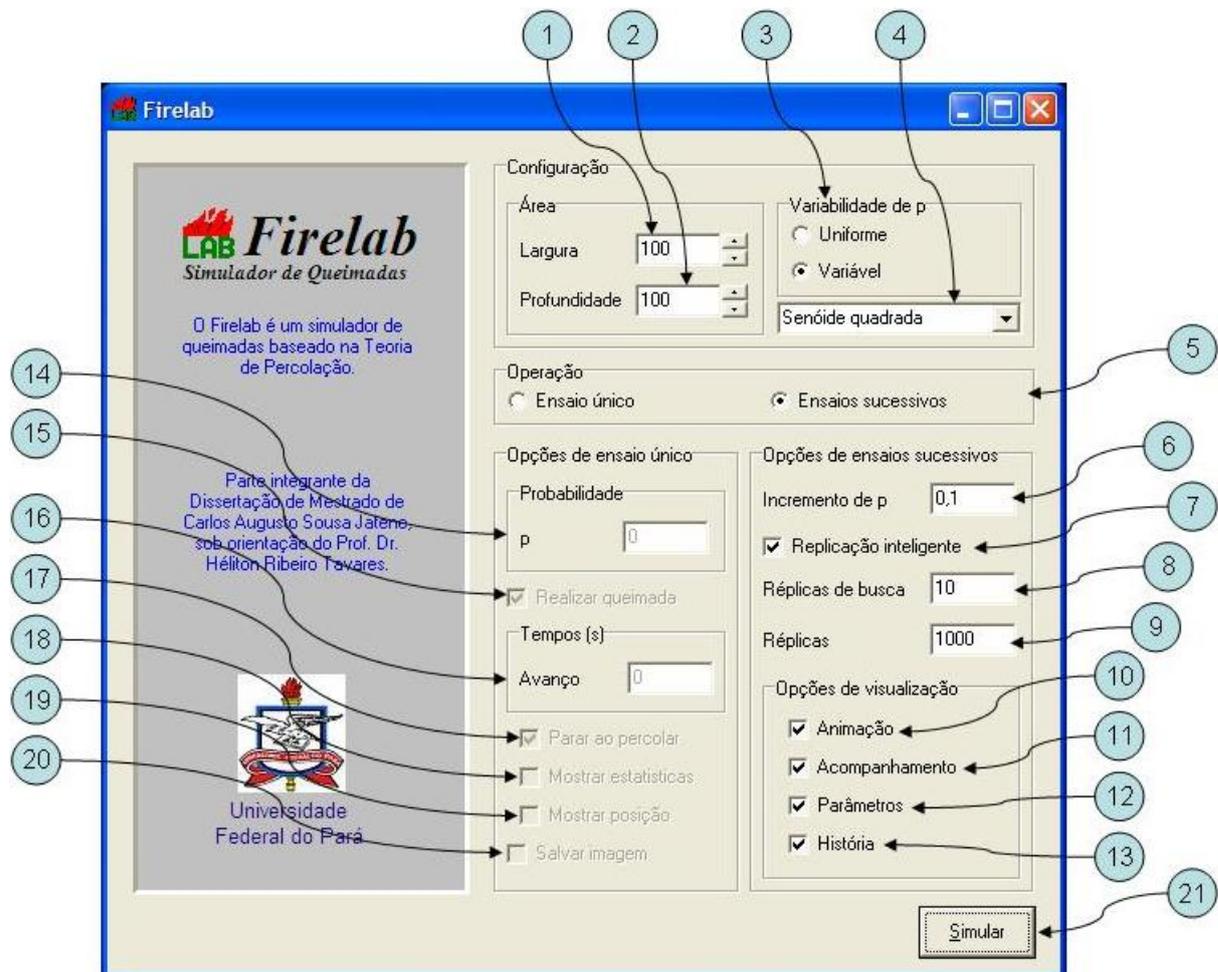


Figura 60: Console com os campos enumerados.

### 6.2.1 ↔ CAMPO 1 - Largura da área florestal.

O sistema aceita números inteiros entre 10 e 1000. O limite inferior é 10 apenas porque ainda é possível desenhar uma área  $10 \times 10$ , mas não há nenhum sentido prático. O limite superior de 1000 é importante para evitar áreas muito grandes para as quais os tempos de simulação seriam impraticáveis. O tamanho razoável de uma área é mesmo  $1000 \times 1000$ .

### 6.2.2 $\leftrightarrow$ CAMPO 2 - Profundidade da área florestal.

É aceita a mesma faixa de valores do Campo 1 e cabem as mesmas observações sobre estes limites.

A Figura 61 mostra a área florestal resultante de uma experiência em que a Largura e a Profundidade foram ambas estabelecidas em 100.

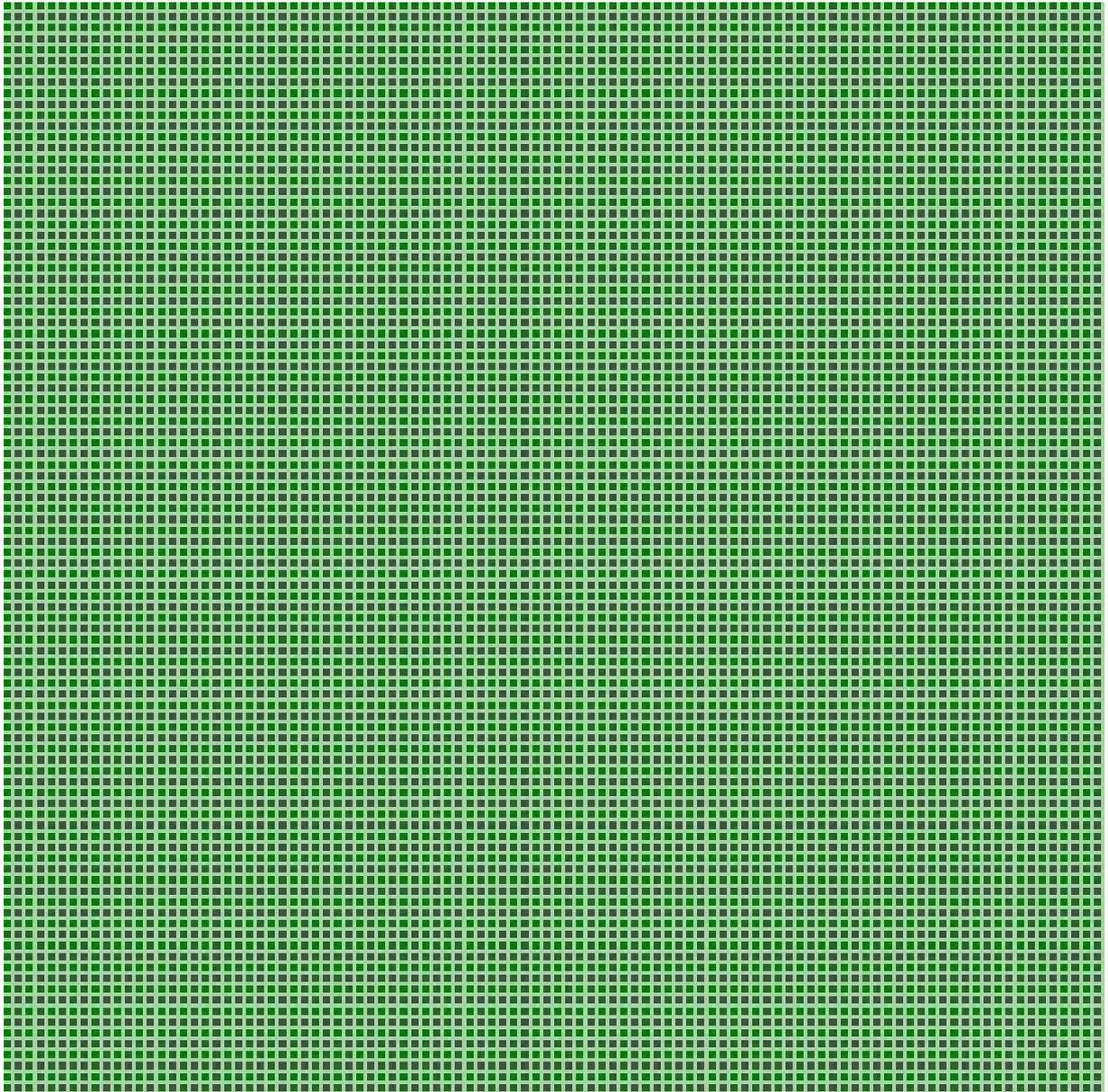


Figura 61: Área  $100 \times 100$  totalmente povoada de árvores.

### 6.2.3 $\leftrightarrow$ CAMPO 3 - Variabilidade de $p$ .

Pode-se escolher uma entre duas opções: “Uniforme” ou “Variável”. A primeira opção corresponde ao estado da arte, em que o valor de  $p$  permanece constante através de toda a área. A segunda opção corresponde à proposta deste trabalho científico, em que o valor de  $p$  é variável ao longo da área de acordo com uma função  $p(z)$ . Neste caso, o Campo 4 é disponibilizado para a escolha da função, exatamente como mostra a Figura 62.

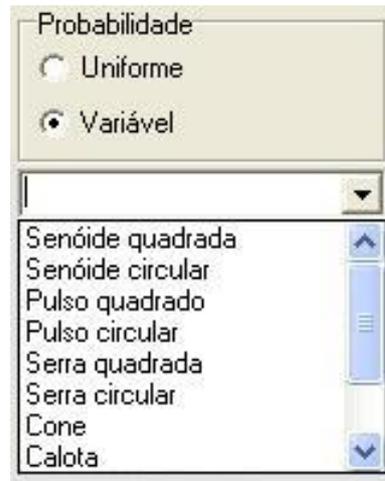


Figura 62: Campo 3 com a opção de  $p$  variável.

No caso “Uniforme” o Campo 4 é desabilitado como aparece na Figura 63.



Figura 63: Campo 3 com a opção de  $p$  uniforme.

### 6.2.4 $\leftrightarrow$ CAMPO 4 - Função $p(z)$ .

O Campo 4 é a caixa de combinação onde é escolhida a função  $p(z)$  que deve ser usada na simulação. A lista da caixa de combinação contém todas as funções estudadas no Capítulo 4, conforme mostra a Figura 62.

### 6.2.5 ↔ CAMPO 5 - Modo de operação.

O Campo 5 é onde é escolhido o modo de operação do simulador, ou seja, o tipo de experiência a ser realizada: “Ensaio único” ou “Ensaaios sucessivos”. É obrigatório escolher uma opção. O sistema apresenta a interface com a opção de “Ensaaios sucessivos” marcada, haja vista que é a mais importante e a mais requerida. A Figura 64 mostra o Campo 5.



Figura 64: Campo 5.

A escolha do Campo 5 determina o restante da interface. No caso da opção ser por “Ensaio único” apenas os campos do painel “Opções de ensaio único” ficam habilitados, como mostra a Figura 65. Se a opção for por “Ensaaios sucessivos” apenas os campos do painel “Opções de ensaios sucessivos” ficam habilitados, conforme visto na Figura 66. O primeiro painel contém os campos 14 a 20 enquanto o segundo contém os campos 6 a 13.

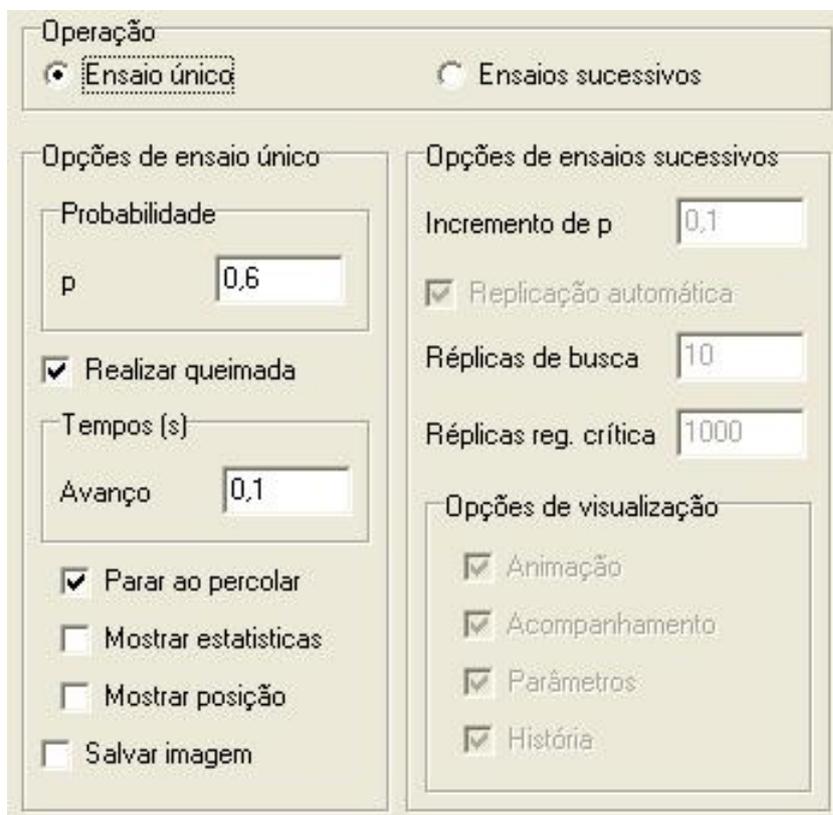


Figura 65: Campo 5 com a opção de “Ensaio único”.



Figura 66: Campo 5 com a opção de “Ensaio sucessivos”.

A partir deste ponto passam a ser descritos os campos que compõem os parâmetros para experiências de ensaios sucessivos.

### 6.2.6 ↔ CAMPO 6 - Incremento de $p$ .

No Campo 6 é dito ao simulador qual o incremento de  $p$  (denotado por  $\Delta p$ ) a ser aplicado na experiência, ou seja, define quantos ensaios deverão ser realizados (Figura 67).

Figura 67: Campo 6.

Conforme já estudado no Capítulo 5, uma experiência de ensaios sucessivos gera dados que são armazenados no banco de dados. O sistema realiza  $K$  ensaios, um para cada valor de  $p$  ( $p = \{0, \Delta p, 2\Delta p, \dots, 1\}$ ), em que  $K$  é definido por  $\Delta p$ , e para cada ensaio o sistema realiza  $N$  replicações para poder produzir um resultado final médio para cada  $p$ . Mas, além de serem armazenados, os dados são também mostrados no monitor durante a simulação e, para isto, o sistema usa uma tabela em que cada linha corresponde a um

ensaio, que é formatada logo no início da experiência, e, à medida em que ela vai sendo realizada, os dados vão sendo preenchidos, linha a linha. A Figura 68 mostra uma tabela gerada para uma experiência em que  $\Delta p = 0,1$  e que, no caso, encontra-se em andamento no quarto ensaio (ensaio número 03).

ENSAIO	Po	CONGLOME	PERCOLAÇ	P PERCOLA	T ENSAIO	T DECORRI	T RÉPLICA
00	0,0	1	0	0,00000000	00:00:02	00:00:02	0,22970000
01	0,1	1	0	0,00000000	00:00:02	00:00:04	0,22810000
02	0,2	2	0	0,00000000	00:00:02	00:00:07	0,24530000
03	0,3						
04	0,4						
05	0,5						
06	0,6						
07	0,7						
08	0,8						
09	0,9						
10	1,0						

Figura 68: Um exemplo de tabela para  $\Delta p = 0,1$ .

A descrição detalhada do significado de cada uma das colunas da tabela mostrada na Figura 68 será apresentada oportunamente.

Note-se, por enquanto, que a quantidade de linhas da tabela para  $\Delta p = 0,1$  é 11, posto que deverão ser feitos 11 ensaios numerados de 00 a 10, correspondentes aos valores 0,0, 0,1,  $\dots$ , 1,0. Portanto, a quantidade de ensaios de uma experiência qualquer é definida pela fórmula:

$$N_e = \frac{1}{\Delta p} + 1 \quad (6.1)$$

de modo que, para obter uma experiência com 501 ensaios,  $\Delta p$  deve ser

$$\Delta p = \frac{1}{N_e - 1} = \frac{1}{501 - 1} = 0,002.$$

Da mesma forma, se for usado um  $\Delta p = 0,001$ , obter-se-á uma quantidade de ensaios

$$N_e = \frac{1}{0,001} + 1 = 1001,$$

que é o caso mais praticado nas experiências de pesquisa.

### 6.2.7 $\leftrightarrow$ CAMPO 7 - Replicação inteligente.

O Campo 7 indica ao simulador se é para aplicar a “replicação inteligente” para a execução da experiência.

Replicação inteligente aqui significa que o sistema deve realizar uma procura automática da “região crítica”, que consiste em executar ensaios com uma quantidade menor de réplicas tanto na “fase subcrítica” quanto na região aqui chamada de “fase supercrítica alta”. É um procedimento que pode significar uma economia de muitos e muitos dias de simulação.

Explicando melhor: em uma experiência comum de 1000 réplicas, por exemplo, o simulador seria obrigado a realizar as 1000 réplicas para cada valor de  $p$ , independentemente da região em que  $p$  se encontre. No entanto, é sabido que na fase subcrítica  $\theta(p)$  é monotonamente igual a 0 e que na fase supercrítica alta é monotonamente igual a 1. A idéia consiste em realizar uma quantidade pequena de réplicas (10 ou 50, por exemplo, em vez de 1000) nestas regiões até encontrar um ponto em que  $\theta(p) > 0$  na fase subcrítica e um ponto em que  $\theta(p) < 1$  na fase supercrítica alta.

Note-se que, para chegar a um indício de  $p_c$  basta partir de  $p = 0$  e ir incrementando  $p$  naturalmente até chegar ao primeiro valor de  $p$  em que  $\theta(p) > 0$ , de acordo com a própria definição de  $p_c$ . Mas é importante observar também que, para chegar a um indício de  $p_f$ , este denotando o valor que delimita a *região crítica alta*, deve-se partir de  $p = 1$  e vir *decrementando*  $p$  até chegar ao primeiro valor de  $p$  em que  $\theta(p) < 1$ , o que também está de acordo com a definição de  $p_f$  (Capítulo 5). Depois disto, é necessário dar uma margem de segurança ( $\delta p$ ) para ambos os valores de  $p$  ( $p_c$  e  $p_f$ ), sendo para  $p_c$  um  $\delta p$  negativo e para  $p_f$  um  $\delta p$  positivo. Daí, pode-se passar a realizar as simulações para  $(p_c - \delta p) \leq p \leq (p_f + \delta p)$  com o valor nominal de réplicas (1000 por exemplo). A Figura 69 ilustra a idéia básica desta técnica de replicação inteligente.

O número menor de réplicas, exemplificado como 10, é chamado “réplicas de busca” ( $N_b$ ) e o número maior continua sendo chamado simplesmente de “réplicas” ( $N$ ).

Note-se que nas regiões  $(p_c - \delta p) \leq p \leq p_c$  e  $p_f \leq p \leq (p_f + \delta p)$ , que corresponde às regiões hachuradas da Figura 69, são realizados ensaios com  $N_b$  réplicas e, posteriormente, com  $N$  réplicas. Ressalte-se ainda que, a rigor,  $\Theta(p) < 1$  quando  $p < 1$ , de modo que poder-se-ia usar  $p_f = 1$ , mas para efeito de simulação é razoável admitir que  $p_f < 1$ .

O resultado final na tabela de ensaios da experiência é mostrado na Figura 70, que representa uma experiência ilustrativa que lança mão do recurso de replicação inteligente,

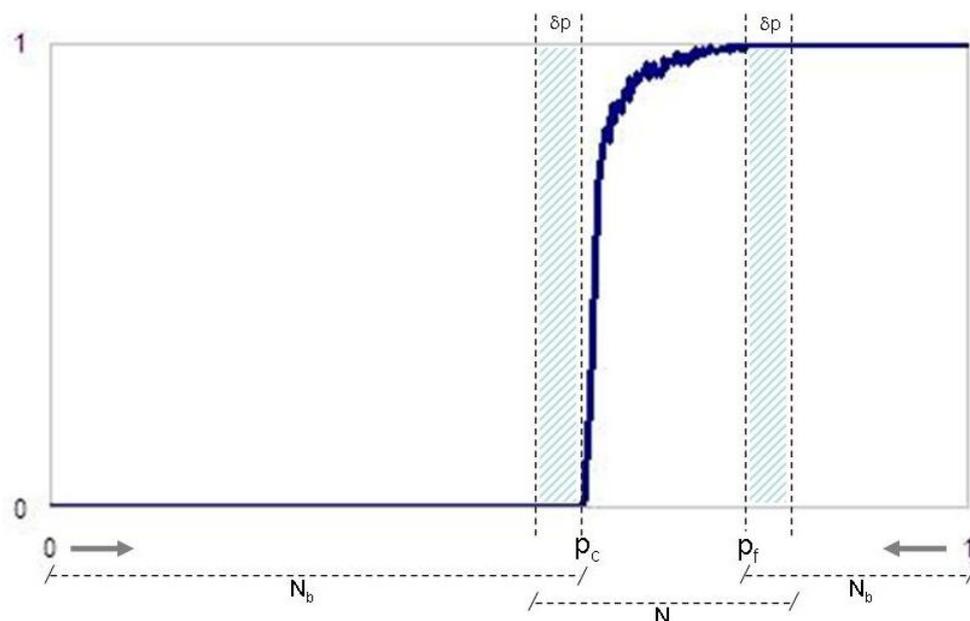


Figura 69: Ilustração do princípio básico da técnica de “replicação inteligente”.

apenas para efeito de demonstração. Note-se que os ensaios da região em que a quantidade de réplicas é  $N$ , estão marcados com um asterisco colado ao número do mesmo, na primeira coluna.

Então, quando a opção de “replicação inteligente” é marcada, o sistema habilita o Campo 8 “Réplicas de busca” e o Campo 9 “Réplicas”, conforme mostra a Figura 71(a). E pode-se digitar livremente os valores dos dois campos.

Quando a opção de “replicação inteligente” é desmarcada, o sistema desabilita o Campo 8 “Réplicas de busca” e o Campo 9 “Réplicas” fica habilitado, conforme mostra a Figura 71(b)

E, neste caso, deve-se digitar apenas o valor do Campo 9 representando a quantidade de réplicas a ser realizada para cada valor de  $p$ .

### 6.2.8 ↔ CAMPO 8 - Réplicas de busca.

No Campo 8 deve ser digitado o número de réplicas de busca,  $N_b$ , conforme explicado na descrição do Campo 7. Pode ser qualquer inteiro entre 10 e 100. A Figura 72 mostra a área do Campo 8.

ENSAIO	P <sub>0</sub>	CONGLOME	PERCOLAÇÃO	P PERCOLA	T ENSAIO	T DECORRIU	T RÉPLICA
00	0,0	1	0	0,00000000	00:00:02	00:00:02	0,22650000
01	0,1	1	0	0,00000000	00:00:02	00:00:04	0,22970000
02	0,2	3	0	0,00000000	00:00:02	00:00:07	0,25630000
03	0,3	6	0	0,00000000	00:00:02	00:00:10	0,28600000
04*	0,4	221	0	0,00000000	00:00:03	00:00:13	0,36400000
05*	0,5	1899	7	0,70000000	00:00:09	00:00:22	0,95320000
06*	0,6	3788	9	0,90000000	00:00:10	00:00:32	1,09840000
07*	0,7	4834	10	1,00000000	00:00:11	00:00:43	1,11720000
08*	0,8	4981	10	1,00000000	00:00:10	00:00:53	1,09060000
09	0,9	4970	10	1,00000000	00:00:10	00:01:03	1,09060000
10	1,0	5000	10	1,00000000	00:00:10	00:01:13	1,09070000

→ 0 – fase subcrítica  
 → 1 – fase supercrítica  
 → 2 – fase supercrítica alta

Figura 70: Resultado de uma experiência.

Replicação inteligente  
 Réplicas de busca   
 Réplicas

Replicação inteligente  
 Réplicas de busca   
 Réplicas

(a) Campo 7 marcado

(b) Campo 7 desmarcado

Figura 71: Campo 7.

### 6.2.9 ↔ CAMPO 9 - Réplicas.

No Campo 9 deve ser digitado o número de réplicas de cada ensaio da experiência,  $N$ , conforme explicado na descrição do Campo 7. Pode ser qualquer inteiro entre 10 e 5000. A Figura 73 mostra a área do Campo 9. No caso de replicação inteligente este número é usado apenas na região entre  $p_c$  e  $p_f$ ; no caso de replicação normal ele será usado em toda a extensão da experiência.

### 6.2.10 ↔ CAMPOS 10 a 13 - Opções de visualização.

Para as descrições dos campos 10 a 13, que constituem as *opções de visualização* das experiências de ensaios sucessivos (Figura 74), é importante dar uma visão antecipada da interface de simulação do Firelab para esta modalidade de operação. A Figura 75 apresenta a *janela de simulação* do Firelab.

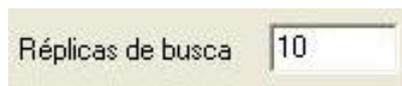
A screenshot of a user interface element. It consists of a light beige rectangular box. On the left side of the box, the text "Réplicas de busca" is written in a dark font. To the right of this text is a white rectangular input field with a thin border, containing the number "10".

Figura 72: Campo 8.

A screenshot of a user interface element. It consists of a light beige rectangular box. On the left side of the box, the text "Réplicas" is written in a dark font. To the right of this text is a white rectangular input field with a thin border, containing the number "1000".

Figura 73: Campo 9.

A interface é apresentada logo após o usuário apertar o botão “Simular”, e é composta de 4 áreas, de acordo com os campos que compõem as opções de visualização:

- **Animação.** Mostra a área florestal da experiência imitando, para cada replicação, a ocorrência da queimada de acordo com a teoria de percolação. Está localizada no canto superior direito da janela de simulação. No caso de experiências em áreas muito grandes, ela não aparecerá completamente devido à limitação física do monitor, e não é disponibilizado nenhum recurso de rolagem, justamente para evitar degradação desnecessária do processo; disponibilizar um recurso deste tipo poderia conflitar com os objetivos principais do simulador.
- **Acompanhamento.** Tabela que mostra informações sobre o andamento da experiência. Informações tais como o número do ensaio corrente, replicação atual, contador de percolações, tempo decorrido, etc. Está localizada à direita logo abaixo da animação.
- **Parâmetros.** A tabela de parâmetros é um registro das opções escolhidas pelo usuário na interface inicial. Tamanho da área, quantidade de réplicas, variabilidade de  $p$ , são algumas das informações mostradas nesta tabela. Está localizada logo abaixo da tabela de acompanhamento.
- **História.** A história é a tabela de ensaios já mostrada nas Figuras 68 e 70, e é o componente mais importante do ponto de vista científico, posto que os resultados e conclusões são baseados na análise dos dados nela contidos. Está localizada no canto superior esquerdo e, dependendo do valor de  $\Delta p$ , pode estender-se para além dos limites da tela. Obviamente, a visualização completa da tabela pode ser feita através da barra de rolagem que se apresenta ao lado direito da tabela.

Cada uma das quatro opções de visualização é associada a uma tecla de função que serve para ligar/desligar o parâmetro, ou seja, se o objeto estiver oculto torna-se visível



Figura 74: Campos 10 a 13.

e vice-versa. Tais teclas, chamadas *toggle keys*, funcionam tanto diante da console – portanto antes de começar a simulação – quanto durante a simulação. No entanto, quando são solicitadas durante a simulação a resposta pode não ser tão imediata devido à prioridade que o sistema dá naturalmente para a realização da simulação em si.

A Figura 76 mostra uma seqüência das combinações mais usuais nas operações do Fi-relab. As opções de visualização são indicadas pelas teclas de função associadas, conforme abaixo:

- **Animação - F2**
- **Acompanhamento - F3**
- **Parâmetros - F4**
- **História - F5**

Sendo que  $F_n = 1$  indica que a opção está habilitada e, obviamente,  $F_n = 0$  indica que a opção está desabilitada.

Note-se, na Figura 76, a mudança proposital de leiaute para a combinação mostrada em 76(f), em que apenas a animação está habilitada (**F2=1**), e todas as demais opções estão desabilitadas (F3=0, F4=0, e F5=0).

Esta opção é especial porque nela apenas a animação está habilitada, de modo que a visualização não requer nenhuma das tabelas. Assim sendo, o sistema centraliza a animação no monitor, tornando a visualização da animação a mais plena possível, guardadas as limitações físicas do tamanho e da resolução do monitor. Além disso, já que não há mais nenhuma informação sobre a simulação em andamento, o sistema mostra no canto superior esquerdo o nome da função  $p(z)$  escolhida, o valor de  $p$  correspondente ao ensaio em andamento ( $Po$ ), e o número da réplica em andamento.

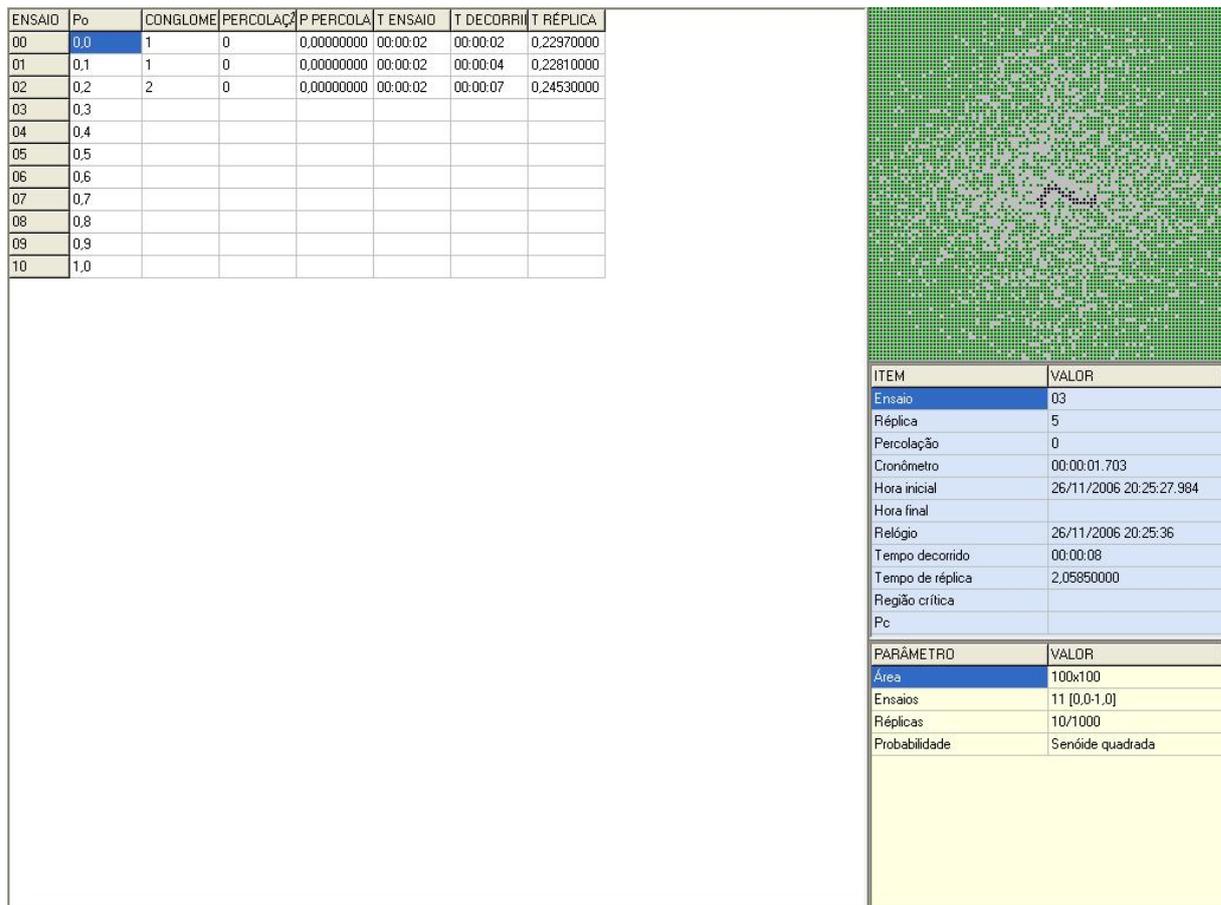
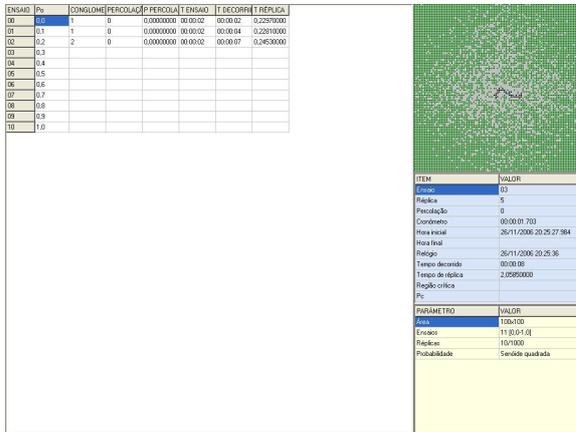
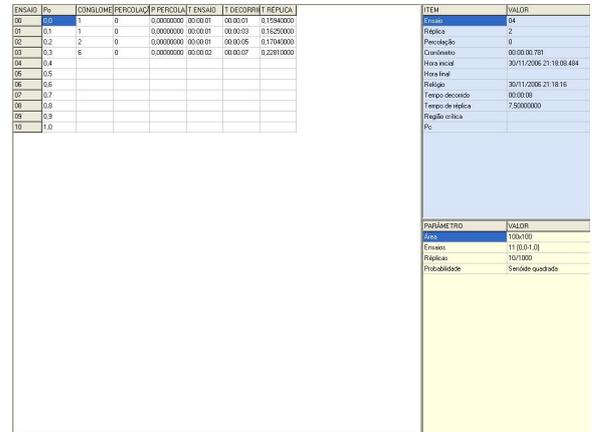


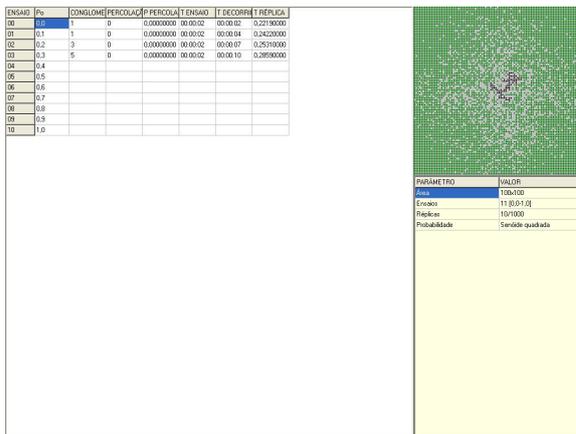
Figura 75: Janela de simulação do Firelab.



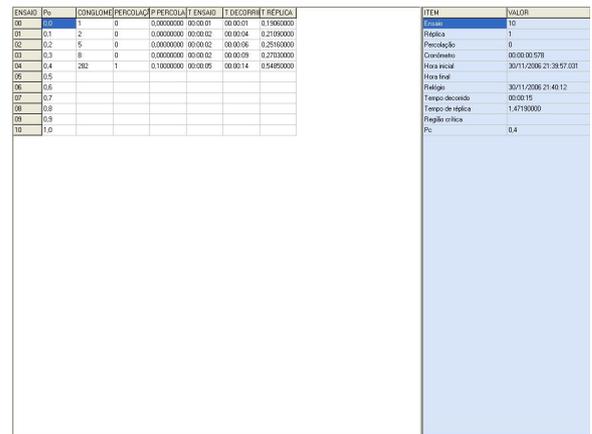
(a) F2=1; F3=1; F4=1; F5=1.



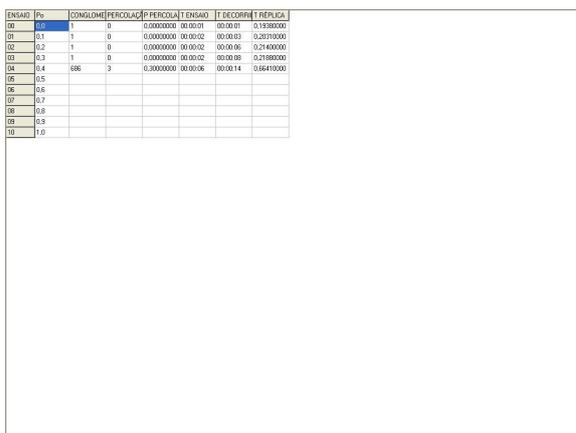
(b) F2=0; F3=1; F4=1; F5=1.



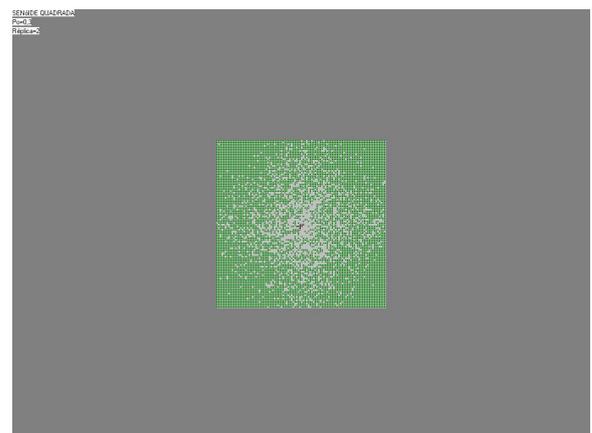
(c) F2=1; F3=1; F4=0; F5=1.



(d) F2=0; F3=1; F4=0; F5=1.



(e) F2=0; F3=0; F4=0; F5=1.



(f) F2=1; F3=0; F4=0; F5=0.

Figura 76: Algumas combinações das opções de visualização.

A Figura 77 é uma pequena ampliação da Figura 76(f) destacando em primeiro plano justamente estas informações. No caso, a função  $p(z)$  escolhida é a “SENÓIDE QUADRADA”, o valor de  $p$  correspondente ao ensaio em andamento é  $p_o = 0,3$ , e o número da réplica em andamento é Réplica=2.

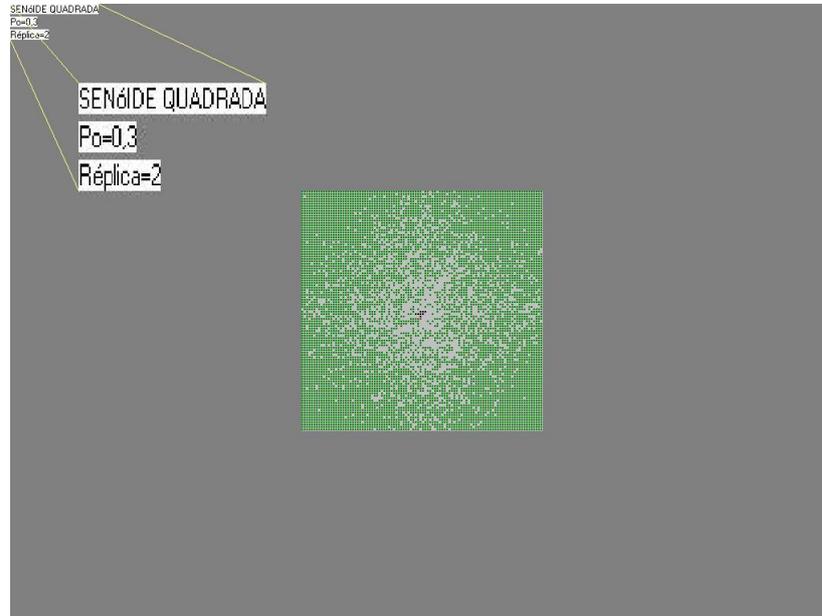


Figura 77: Informações sobre uma experiência que mostra apenas a animação.

A Figura 78, por sua vez, mostra as opções de visualização correspondentes à Figura 76.



Os campos descritos a partir deste ponto compõem os parâmetros usados nas experiências de ensaio único.

### 6.2.11 ↔ CAMPO 14 - Probabilidade $p$ .

No Campo 14 é dito ao simulador qual o valor de  $p$  que deve ser usado na experiência (Figura 79).

Conforme já estudado no Capítulo 5, uma experiência de ensaio único serve apenas como ilustração do processo de percolação. Não gera dados em banco de dados e nem serve para fazer análises científicas. É puramente didático, de modo que o foco principal é a animação que o sistema realiza, além de algumas poucas curiosidades mostradas após a experiência. O sistema executa apenas o correspondente a uma replicação para um único valor de  $p$ , de acordo com o Campo 14.

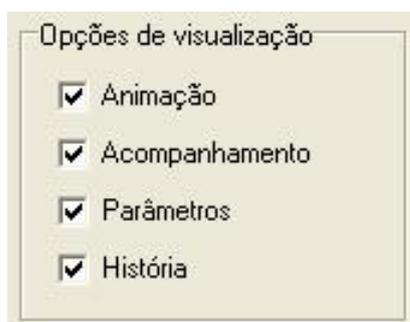
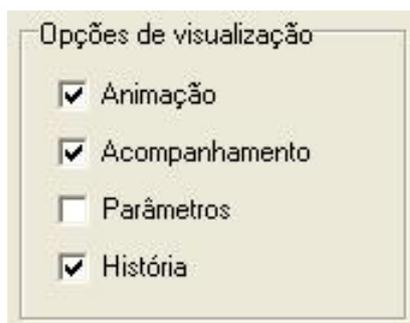
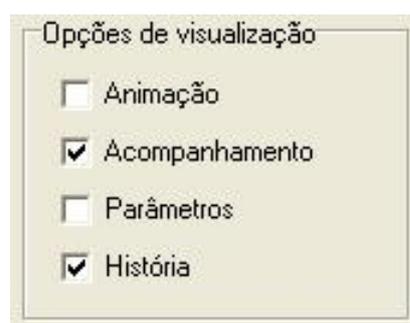
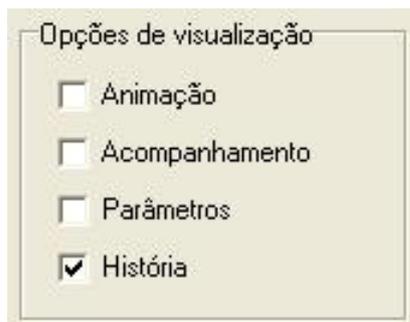
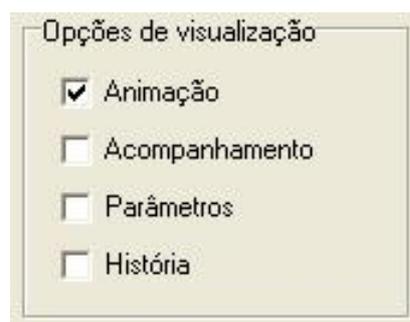
(a)  $F2=1; F3=1; F4=1; F5=1.$ (b)  $F2=0; F3=1; F4=1; F5=1.$ (c)  $F2=1; F3=1; F4=0; F5=1.$ (d)  $F2=0; F3=1; F4=0; F5=1.$ (e)  $F2=0; F3=0; F4=0; F5=1.$ (f)  $F2=1; F3=0; F4=0; F5=0.$ 

Figura 78: Opções de visualização correspondentes à Figura 76.

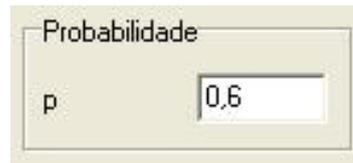


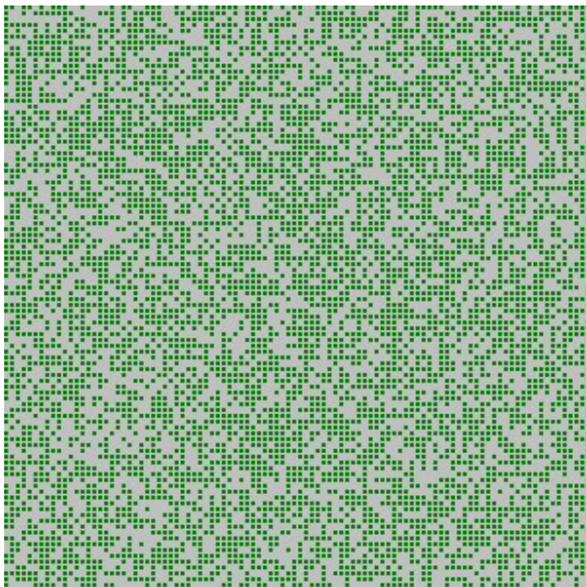
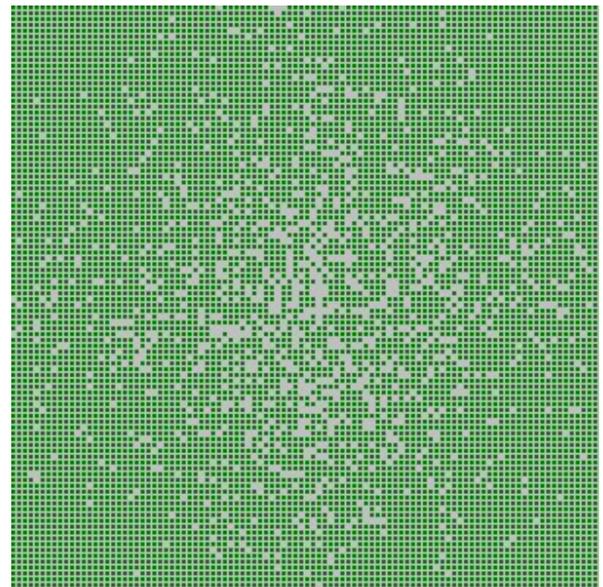
Figura 79: Campo 14.

Deve-se notar, entretanto, que, se a variabilidade de  $p$  for “UNIFORME”, o valor escolhido, 0,6 no caso, será usado como  $p$  fixo para toda a área, enquanto que, se tiver sido escolhida uma das funções  $p(z)$ , o valor escolhido será usado como  $p_o$  na fórmula da função, conforme descrito no Capítulo 4. Apenas para lembrar, a fórmula da senóide quadrada é

$$p(z) = p_o + (1 - p_o)|\sin(|x| + |y|)|, \quad z = (x, y),$$

conforme estabelecido na Equação 4.7. De modo que, no caso do exemplo da Figura 79,  $p(z) = 0,6 + 0,4|\sin(|x| + |y|)|$ .

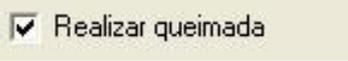
A Figura 80 mostra, para fins comparativos, duas áreas florestais com o mesmo valor de  $p$  ( $p = 0,6$ ). A primeira, da Figura 80(a), usa variabilidade uniforme, e a segunda, a da Figura 80(b), usa variabilidade senoidal através da formulação funcional da senóide quadrada.

(a) Variabilidade uniforme com  $p = 0,6$ .(b) Variabilidade senoidal (senóide quadrada) com  $p = 0,6$ .Figura 80: Resultados de um mesmo valor de  $p$  para variabilidades diferentes.

Note-se que, na Figura 80(a), as árvores estão distribuídas na área de um modo bem uniforme realmente, e, ao calcular a relação entre a quantidade de árvores e quantidade total de sítios, ter-se-á aproximadamente 0,6. Entretanto, na Figura 80(a), as árvores estão muito mais concentradas nas bordas da área, onde a norma de  $z$  é muito maior do que no centro da área onde esta norma é bem menor; além do que, a quantidade de árvores nesta Figura 80(b) é bem maior.

### 6.2.12 $\hookrightarrow$ CAMPO 15 - Realizar queimada.

O Campo 15 (Figura 81) existe para proporcionar ao usuário a possibilidade de apenas gerar a área florestal sem realizar a simulação da queimada.



Realizar queimada

Figura 81: Campo 15.

Quando a opção está marcada o sistema realiza a queimada na área florestal, se não estiver marcada, apenas a área florestal é desenhada. É um recurso muito importante para mostrar como ficam as características da área florestal para cada função  $p(z)$ . Várias imagens apresentadas neste documento foram obtidas com o uso deste recurso.

As imagens da Figura 80, por exemplo, foram obtidas desmarcando o Campo 15 e marcando o Campo 20 “Salvar imagem”, descrito mais à frente, para salvar a imagem final.

### 6.2.13 $\hookrightarrow$ CAMPO 16 - Tempo de avanço.

O Campo 16 (Figura 82) define o tempo de avanço da simulação. Funciona como um controle da velocidade, e é importante para administrar a visualização da animação.



Tempos (s)  
Avanço 0,1

Figura 82: Campo 16.

É a possibilidade de um *slow motion* para que o usuário possa observar mais atentamente como se processa a queimada baseada na teoria de percolação. É mais um dos

recursos didáticos do sistema. O sistema aceita valores entre 0 e 1, e quanto maior o valor digitado no Campo 16 mais lentamente se dará o processo.

#### 6.2.14 $\hookrightarrow$ CAMPO 17 - Parar ao percolar.

O Campo 17, mostrado na Figura 83, serve para indicar ao simulador se é para parar o processo de queimada ao percolar, ou se é para continuar o processo até a queimada completa da área.

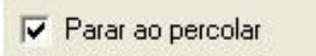
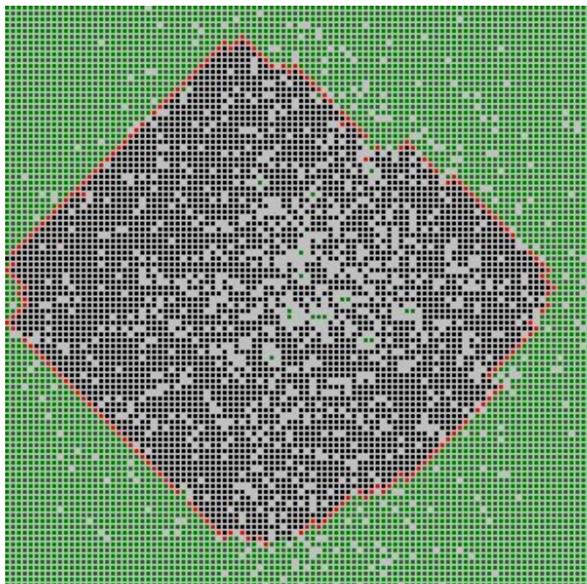


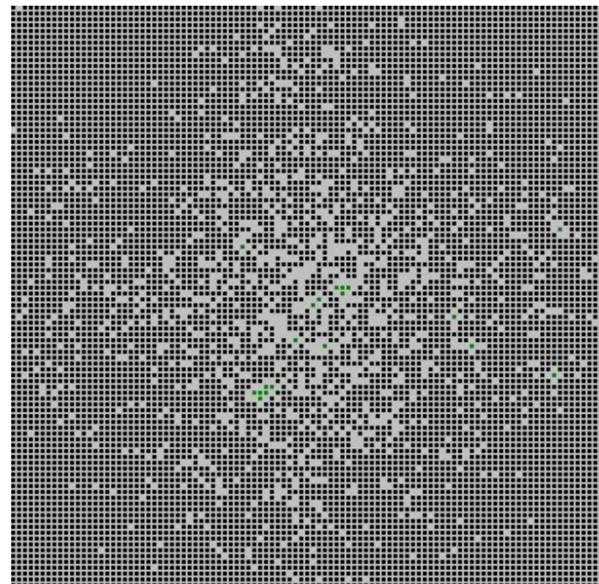
Figura 83: Campo 17.

O Campo 17 é útil para contagem de tempo de queimada de uma área completa.

A Figura 84 esclarece o uso deste campo mostrando os resultados de duas experiências de ensaio único, sendo uma com o Campo 17 marcado (Figura 84(a)) e a outra com o Campo 17 desmarcado (Figura 84(b)). No primeiro caso vê-se nitidamente que houve percolação na lateral esquerda da área, enquanto que no segundo nota-se claramente que a área está completamente queimada.



(a) Campo 17 marcado.



(b) Campo 17 desmarcado.

Figura 84: Resultados do Campo 17.

### 6.2.15 ↔ CAMPO 18 - Mostrar estatísticas.

O Campo 18, mostrado na Figura 85, indica ao simulador se é para mostrar, ao final, uma janela com dados estatísticos sobre a experiência de ensaio único.

Mostrar estatísticas

Figura 85: Campo 18.

A Figura 86 mostra um exemplo de janela com as estatísticas de uma experiência.

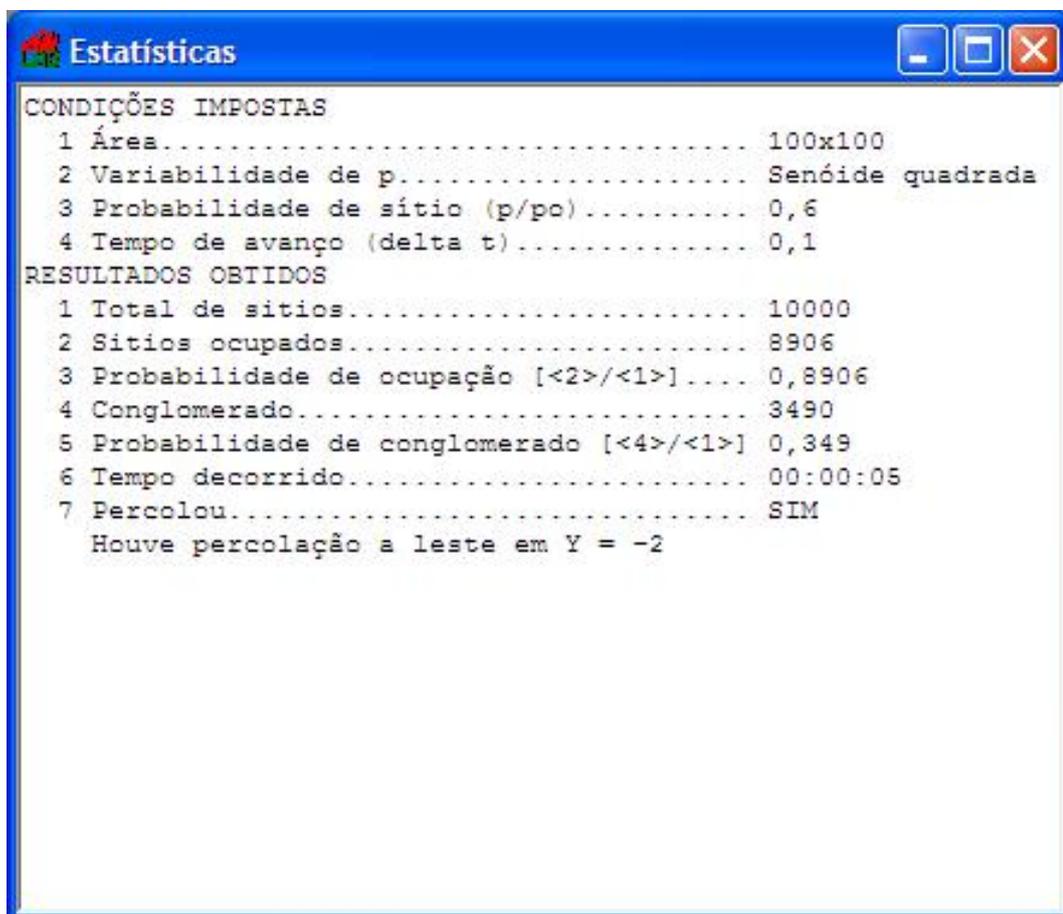


Figura 86: Estatísticas de uma experiência de ensaio único.

Segue-se uma breve descrição das informações contidas na janela da Figura 86.

#### **CONDIÇÕES IMPOSTAS:**

1. **Área.** É o tamanho da área florestal escolhida pelo usuário em termos da largura e da profundidade. No exemplo da Figura 86, foi escolhida uma área 100x100, o que significa largura de 100 e profundidade de 100.

2. **Variabilidade de  $p$ .** Indica a variabilidade de  $p$  escolhida para a experiência. Pode ser “UNIFORME” ou qualquer uma das funções estudadas no Capítulo 4. No exemplo da Figura 86, foi escolhida uma probabilidade senoidal representada pela “SENÓIDE QUADRADA”.
3. **Probabilidade de sítio.** Indica o valor de  $p$  a ser usado na experiência. Se se tratar de uma experiência com probabilidade uniforme este valor é o próprio  $p$ , mas se se tratar da aplicação de uma das funções  $p(z)$ , então este valor será usado como  $p_o$  na expressão analítica de  $p(z)$ . Daí o  $p/p_o$  entre parênteses.
4. **Tempo de avanço.** O tempo de avanço é o controle de velocidade da simulação.

### **RESULTADOS OBTIDOS:**

1. **Total de sítios.** É o tamanho da área florestal em termos de sítios de uma rede de percolação, calculado pela multiplicação da largura pela profundidade. No exemplo da Figura 86 foi escolhida uma área  $100 \times 100$ , o que implica em uma rede de 10.000 sítios.
2. **Sítios ocupados.** É a quantidade de árvores geradas na área florestal com base em  $p$  ou  $p(z)$ .
3. **Probabilidade de ocupação.** É a razão entre a quantidade de árvores geradas e a quantidade total de sítios. Note-se que, para o caso do exemplo da Figura 86 em que a probabilidade é não-uniforme, o valor calculado é de 0,8906 é bem maior que no caso uniforme, que seria próximo de 0,6 mesmo.
4. **Conglomerado.** É o tamanho do conglomerado da origem, que representa a contagem de todas as árvores queimadas.
5. **Probabilidade de conglomerado.** É a razão entre o tamanho do conglomerado da origem e a quantidade total de sítios.
6. **Tempo decorrido.** É o tempo de duração da simulação.
7. **Percolou.** Indica se a simulação resultou em percolação. Se tiver havido percolação, como no caso da Figura 86, além da indicação positiva pela palavra “SIM”, o sistema mostra uma mensagem logo abaixo dando com precisão a posição do sítio em que ocorreu o fenômeno. Caso contrário, aparecerá apenas a palavra “NÃO”.

### 6.2.16 $\leftrightarrow$ CAMPO 19 - Mostrar posição.

O Campo 19, mostrado na Figura 87, serve para indicar ao simulador se é para mostrar as posições de cada sítio pela passagem do *mouse*.



Figura 87: Campo 19.

O Campo 19 é muito útil didaticamente para a familiarização do usuário novico com a área florestal desenhada pelo simulador. A origem  $O = (0, 0)$  fica na posição mais central da área, e o usuário fica sabendo qualquer posição de sítio através da simples colocação do cursor do *mouse* sobre o sítio desejado. É uma forma, inclusive, de confirmar o sítio de percolação.

A Figura 88 mostra como funciona este campo.

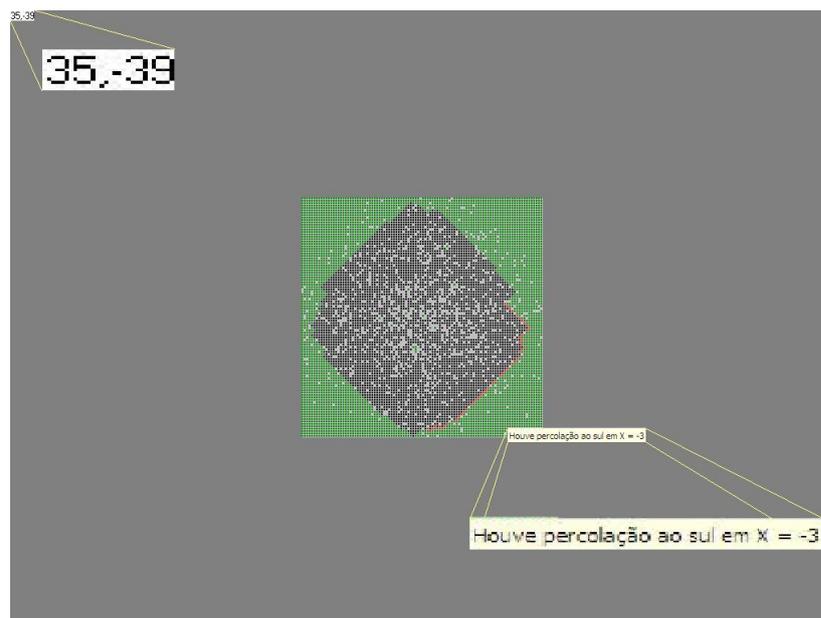


Figura 88: Resultado de uma simulação com o Campo 19 marcado.

A posição do sítio é mostrada no canto superior esquerdo da tela. Na Figura 88 o usuário apontou o *mouse* para a posição (35,-39) e em seguida deu um clique no botão esquerdo para obter a mensagem “Houve percolação ao sul em  $x = -3$ ”.

### 6.2.17 ↔ CAMPO 20 - Salvar imagem.

O Campo 20, mostrado na Figura 89, serve para indicar ao simulador se é para salvar um arquivo com a área florestal no estado em que terminou a simulação.



Figura 89: Campo 20.

O Campo 20 é muito útil para gerar imagens de situações que se queira analisar a posteriori. Várias imagens contidas neste trabalho foram geradas através desta funcionalidade. Para gerar uma imagem de uma área florestal sem queimada, por exemplo, basta marcar este campo e desmarcar o Campo 15 “Realizar queimada”. Assim, pode-se obter imagens também de uma área florestal depois de uma queimada, bem como, com a área totalmente queimada ou apenas até o ponto em que ocorreu a percolação. Normalmente são combinados os Campos 15 e 17 para obter estas imagens.

### 6.2.18 ↔ CAMPO 21 - Botão “Simular”.

Depois de escolher todos os parâmetros para a realização da experiência, o usuário deve apertar o botão “Simular” para iniciar a simulação. O Campo 21, mostrado na Figura 90 fica localizado no canto inferior direito da console do Firelab.

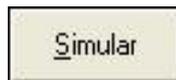


Figura 90: Campo 21. Botão “Simular”.

No próximo capítulo são apresentados os resultados deste trabalho de pesquisa.

## 7 Resultados

### 7.1 Considerações Gerais

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos via simulação usando o *Firelab*, tanto para a percolação uniforme quanto para a percolação em ondas. A estimação de  $\theta(p)$  e das demais grandezas, para todos os casos, foi realizada através de experiências de 501 ensaios ( $\Delta p = 0,002$ ), cada um de 500 réplicas ( $N = 500$ ), em uma área  $1000 \times 1000$ .

Tais especificações foram impostas pela limitação da capacidade computacional disponível. O desejável demandaria um tempo de processamento muito maior. Para começar, só é possível obter um valor de  $p_c^{uniforme}$  próximo ao da literatura ( $= 0,592746$ ), usando um  $\Delta p = 0,0000001$  para obter 1.000.001 (um milhão e um) ensaios e, assim, chegar a valores de  $p$  com a mesma precisão de 0,592746.

Além disso, as melhores condições para a obtenção de resultados mais precisos passam pela definição de uma área bem maior que  $1.000 \times 1.000$  ( $10.000 \times 10.000$ , por exemplo), e por uma quantidade de réplicas maior que  $N = 500$  ( $N = 1.000$ , por exemplo). As especificações desejáveis seriam, portanto, 1.000.001 ensaios, cada um de 1.000 réplicas, em uma área  $10.000 \times 10.000$ .

A seguir são apresentados os resultados para o caso uniforme e para os casos de  $p(z)$  cujas simulações foram realizadas: senóide quadrada, pulso quadrado, serra quadrada, cone, calota, 4-plan. As outras três: senóide circular, pulso circular, serra circular, são apenas variações das quadradas correspondentes, e, por isso, suas simulações foram consideradas menos prioritárias.

Neste cenário, a apresentação completa dos resultados passa necessariamente pela representação gráfica das grandezas medidas nas experiências, quais sejam,  $\theta(p)$ ,  $C(p)$ ,  $t(p)$ ,  $\gamma(p)$ , para cada uma das sete situações diferenciadas de  $p(z)$ : uniforme, senóide, pulso, serra, cone, calota, 4-plan. Para uma completa visualização gráfica comparativa, são apresentadas duas séries de gráficos: a primeira (Parte I), denominada “Comportamento das Grandezas Para Cada  $p(z)$ ”, é composta de sete gráficos que mostram o comporta-

mento das quatro grandezas para cada uma das sete formas de  $p(z)$ , e a segunda (Parte II), denominada “Comportamento das  $p(z)$  Para Cada Grandeza”, composta de quatro gráficos que mostram o comportamento das sete formas de  $p(z)$  para cada uma das quatro grandezas. A Figura 91 ilustra isto.

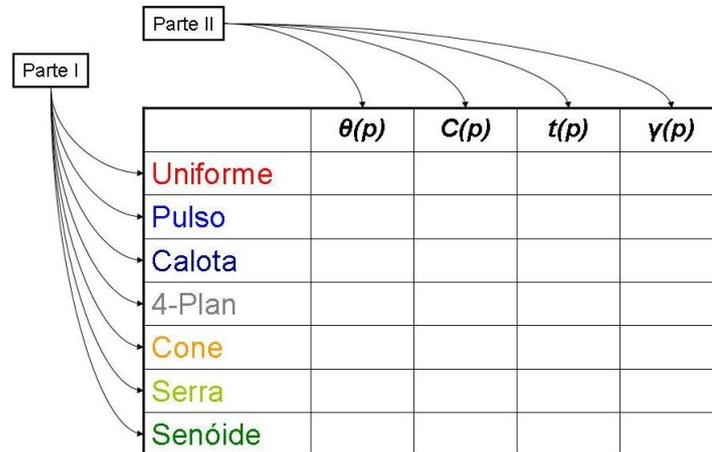


Figura 91: Apresentação dos resultados.

Para tanto, foi feita a normalização de  $C(p)$ ,  $t(p)$  e  $\gamma(p)$ , levando seus contra-domínios todos para o intervalo  $[0, 1]$ .

Antes, porém, da apresentação das duas séries de gráficos, é mostrada a curva de  $\theta(p)$  para  $p$  uniforme, com o intuito de constatar a validade dos resultados do simulador.

## 7.2 $\theta(p)$ Para Percolação Uniforme

A Figura 92 mostra a curva de  $\theta(p)$  para o caso uniforme.

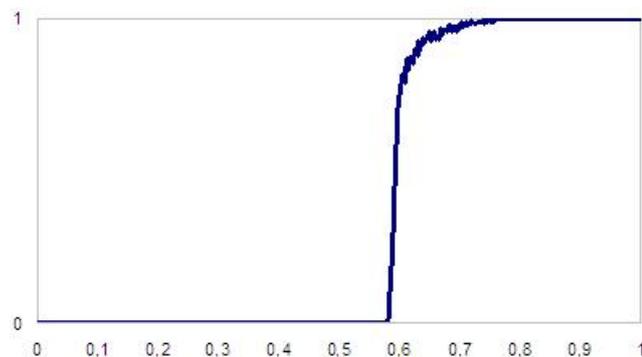


Figura 92: Curva de  $\theta(p)$  para probabilidade uniforme.

Este resultado de  $\theta(p)$  para a percolação com probabilidade uniforme é muito importante para validar o simulador e dar segurança para os resultados obtidos para os demais

casos. Além disso, é sabido da literatura que esta curva de  $\theta(p)$  corresponde a um processo físico de mudança de fase (de *primeira ordem*). O valor de  $p_c$  obtido foi de 0,574 que é muito próximo do valor conhecido de todas as pesquisas registradas na literatura [ver, por exemplo, Grimmitt (1999)], que é 0,592746. A imprecisão deve-se à falta de recursos computacionais para a realização de experiências com as especificações desejáveis.

### 7.3 Comportamento das Grandezas Para Cada $p(z)$

Cada gráfico mostrado a seguir, Figuras 93 a 99, apresenta a plotagem de todas as grandezas [ $\theta(p)$ ,  $C(p)$ ,  $t(p)$ ,  $\gamma(p)$ ] para uma dada  $p(z)$  e, em todos eles a seguinte legenda é obedecida:  $\theta(p)$  em vermelho,  $C(p)$  em azul,  $t(p)$  em verde,  $\gamma(p)$  em azul marinho.

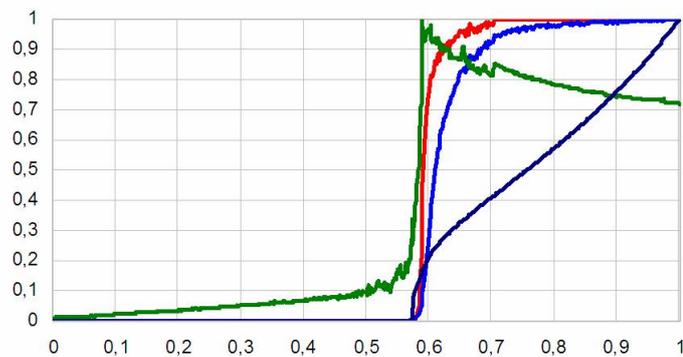


Figura 93: Comportamento para  $p(z)$  Uniforme ( $p_c = 0,574$ ).

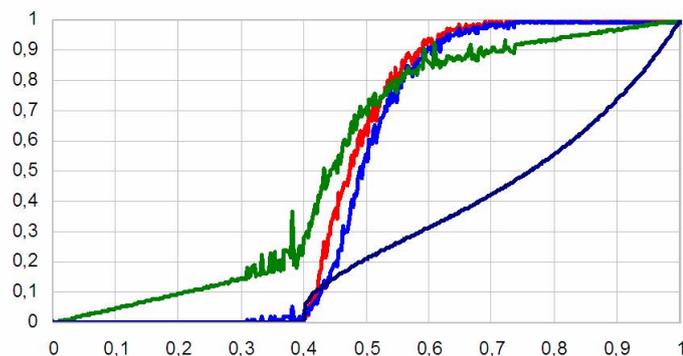
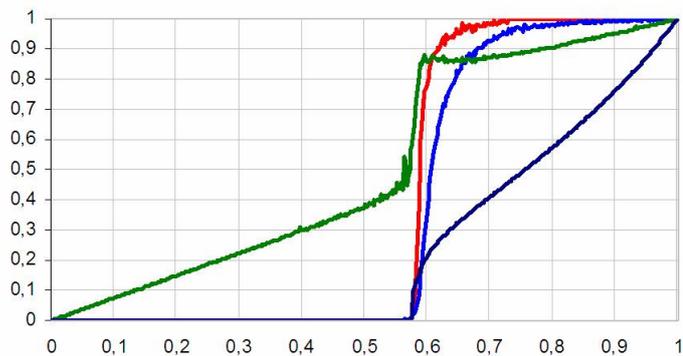
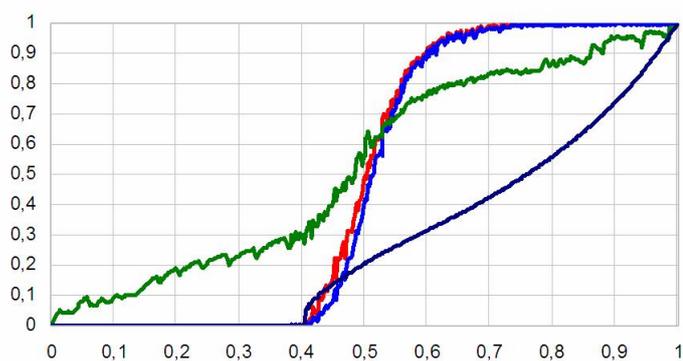
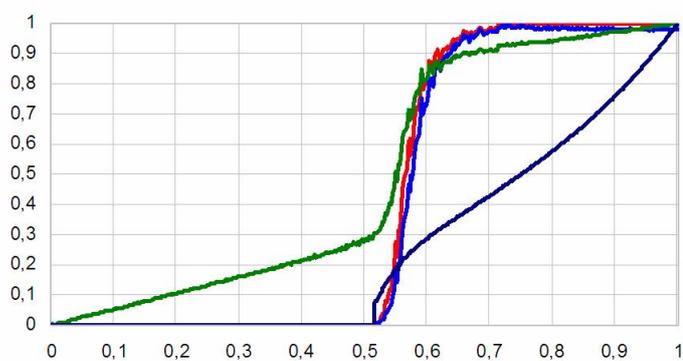
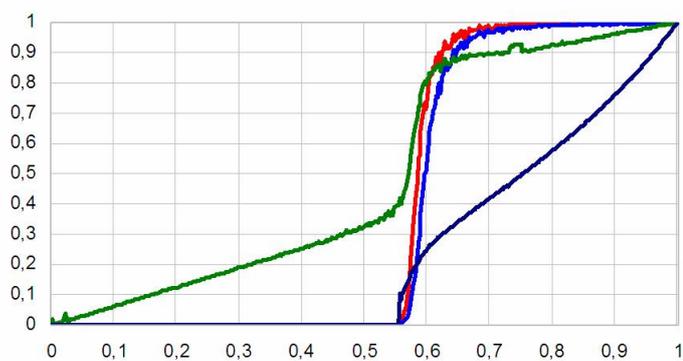
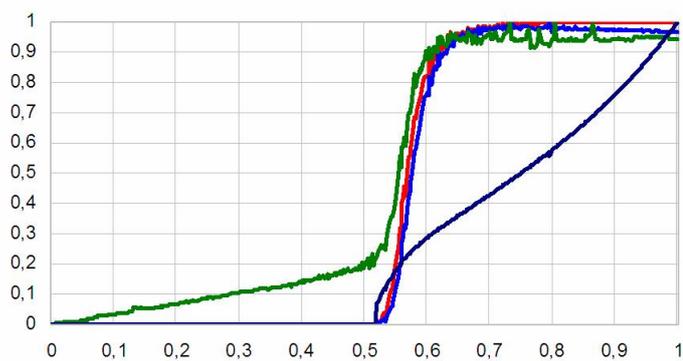


Figura 94: Comportamento para  $p(z)$  Senóide ( $p_c = 0,400$ ).

Figura 95: Comportamento para  $p(z)$  Pulso ( $p_c = 0,572$ ).Figura 96: Comportamento para  $p(z)$  Serra ( $p_c = 0,404$ ).Figura 97: Comportamento para  $p(z)$  Cone ( $p_c = 0,514$ ).

Figura 98: Comportamento para  $p(z)$  Calota ( $p_c = 0,554$ ).Figura 99: Comportamento para  $p(z)$  4-Plan ( $p_c = 0,518$ ).

## 7.4 Comportamento das $p(z)$ Para Cada Grandeza

Cada gráfico mostrado a seguir, Figuras 100 a 103, apresenta a plotagem de todas as  $p(z)$  para cada uma das grandezas  $[\theta(p), C(p), t(p), \gamma(p)]$  e, em todos eles a seguinte legenda é obedecida: *Uniforme em vermelho*, *Pulso em azul*, *Calota em azul marinho*, *Cone em laranja*, *4-Plan em cinza*, *Serra em verde claro*, *Senóide em verde*.

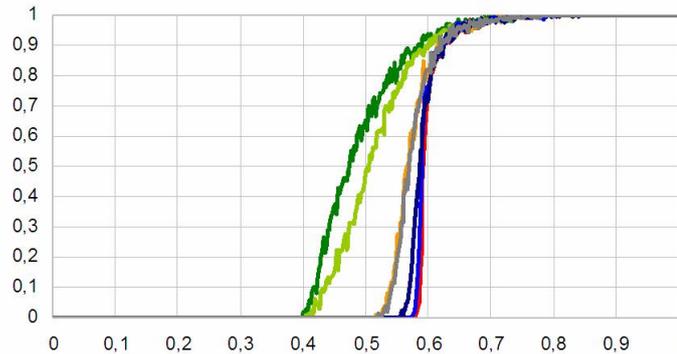


Figura 100: Comportamento para  $\theta(p)$ .

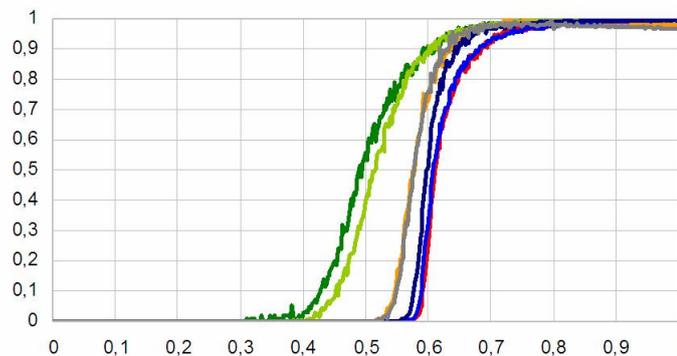
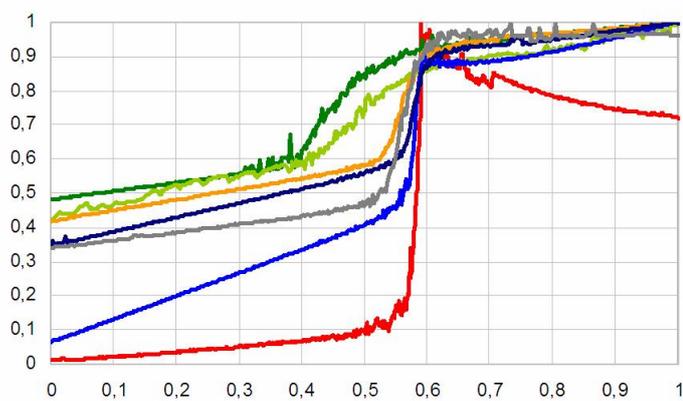
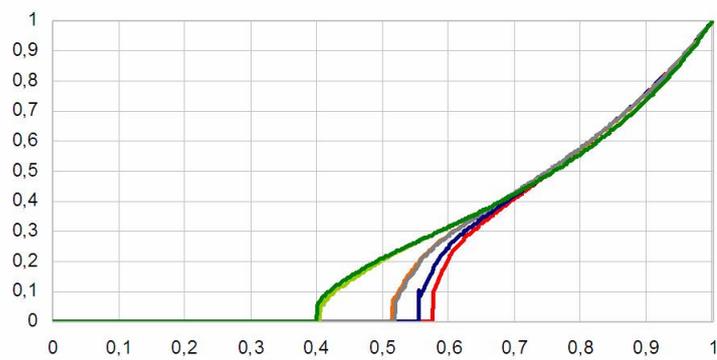


Figura 101: Comportamento para  $C(p)$ .

## 7.5 Comparação dos Resultados

Quanto aos objetivos essenciais da pesquisa, é preciso abordar os resultados sob a ótica de três enfoques diferentes porém interrelacionados, quais sejam, o das *ferramentas computacionais* utilizadas, o da *realização das experiências*, e o dos *resultados* propriamente ditos.

- **Quanto às Ferramentas Computacionais** - Pode-se afirmar hoje que a mais importante das decisões sobre a pesquisa foi ter optado pelo desenvolvimento de

Figura 102: Comportamento para  $t(p)$ .Figura 103: Comportamento para  $\gamma(p)$ .

ferramentas próprias e independentes para a realização das experiências, em vez de adotar um *software* matemático genérico, tais como aqueles citados na Introdução. Não só para as experiências de percolação, com o advento do *Firelab*, mas também para as experiências de grafos aleatórios, para as quais foi criado o *Graphlab*. Foram obtidos pelo menos dois resultados muito positivos como conseqüências diretas desta decisão. O primeiro diz respeito às interfaces dos programas, que foi possível fazê-las tão fácil quanto se pensou, e o segundo é que as melhorias e evoluções, que surgem naturalmente em qualquer projeto, também foram muito fáceis e rápidas de implementar.

- **Quanto à Realização das Experiências** - A Tabela 10 é um histórico dos tempos gastos nas experiências levadas a efeito para produzir os resultados da pesquisa.

$p(z)$	Tempo em horas	Tempo em dias
<i>Uniforme</i>	152:24:29	7
<i>Senóide quadrada</i>	241:25:55	11

Tabela 10: Tempos de simulação.

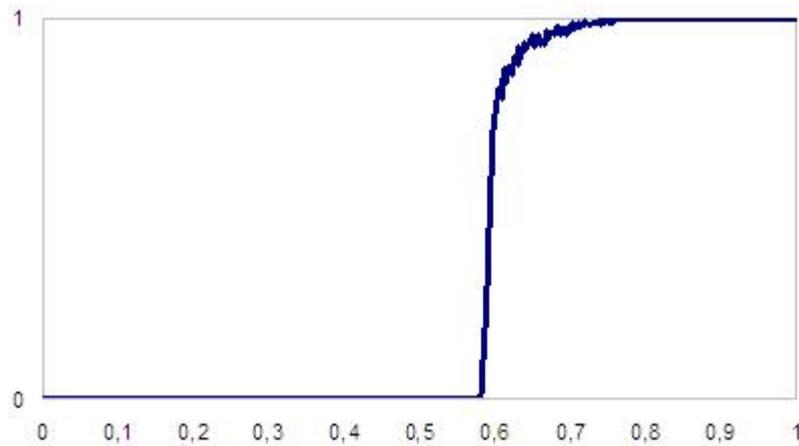
É importante observar alguns detalhes interessantes sobre o relato da Tabela 10:

1. Todas as experiências foram realizadas em uma área florestal de 1000x1000, mas com apenas 500 ensaios de 500 réplicas em vez de 1000 ensaios de 1000 réplicas – o que seria ideal –, porque com 1000 ensaios de 1000 réplicas o tempo seria muito grande com a capacidade de processamento disponível.

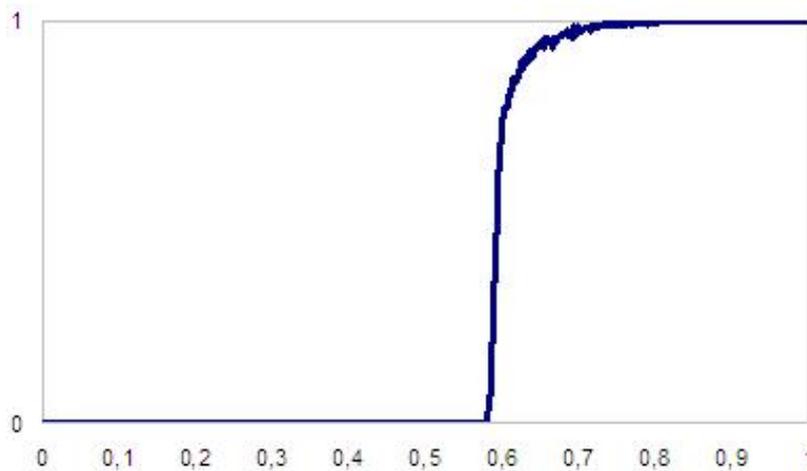
Para dar uma noção mais precisa, uma experiência de 1000 ensaios de 1000 réplicas em área 1000x1000, para  $p(z)$  uniforme – que é a menos demorada dentre todos os casos –, demora 764:06:34 horas o que dá aproximadamente 32 dias, usando tanto a replicação inteligente quanto o *restart*. E, para enfatizar a importância do restart, vale dizer que esta mesma experiência parou oito vezes; se tivesse que ser iniciada do zero novamente a cada uma das paradas, o tempo seria muito maior.

A Figura 104 mostra uma comparação entre as duas simulações para probabilidade uniforme: com 500 replicações e com 1.000 replicações. Os dois gráficos são apostos de propósito na mesma linha vertical para facilitar a observação comparativa a olho nu. Nota-se que praticamente não existe nenhuma diferença de formato da curva, no entanto, é possível perceber que com 1000 réplicas a

curva de  $\theta(p)$  demora mais a alcançar o valor 1, o que bate com a teoria, haja vista que para uma área muito grande e um número de replicações muito grande,  $\theta(p) = 1$  apenas quando  $p = 1$ .



(a) 500 replicações.



(b) 1.000 replicações.

Figura 104: Comparação da uniforme com 500 replicações e com 1000 replicações.

2. Para  $p(z)$  uniforme o tempo de experiência foi bem menor em relação às demais porque a região em que o número de réplicas é maior, é bem menor do que para as outras  $p(z)$ .<sup>1</sup>

Seriam necessários computadores bem mais poderosos do que aqueles que foram efetivamente usados na pesquisa, para que fossem obtidos mais resultados em menos tempo. Contudo, foi possível atingir os objetivos, mesmo assim.

<sup>1</sup>O tempo total de uma experiência é o somatório dos tempos de cada ensaio. E o tempo de um dado ensaio é tão maior quanto maior for o número de replicações. Os ensaios mais demorados são aqueles entre  $p_c$  e  $p_f$ , para os quais a quantidade de replicações é bem maior. Se  $p_f$  é aproximadamente o mesmo para todas  $p(z)$ , conforme mostra a Figura 105, quanto menor for  $p_c$  maior será o tempo da experiência. E é o que de fato ocorre.

- **Quanto aos Resultados** - A Figura 105 apresenta um gráfico comparativo das curvas de  $\theta(p)$  para todos os casos de  $p(z)$  para os quais foi possível realizar as experiências completas.

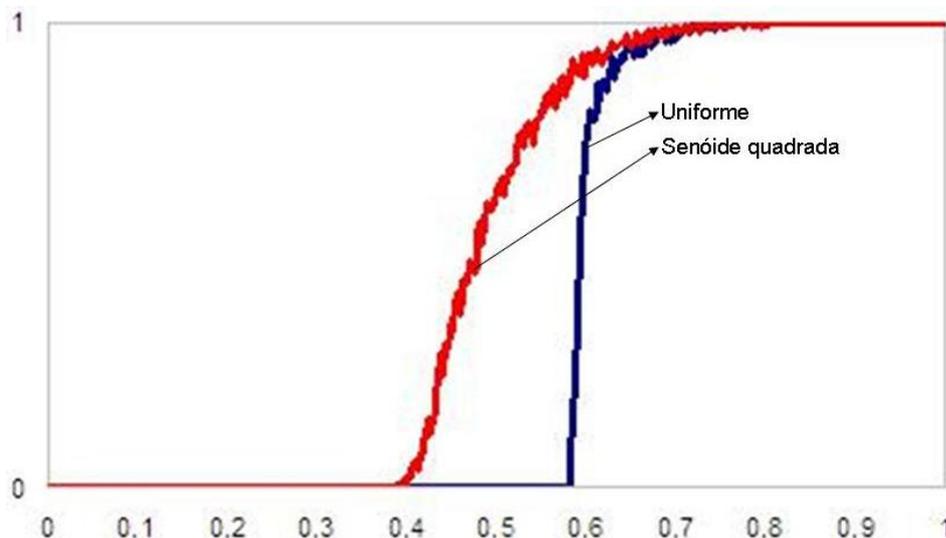


Figura 105: Gráfico comparativo de  $\theta(p)$ .

Note-se que apenas a Uniforme apresenta a forma tradicional, com transição abrupta de 0 para 1, que, conforme já é sabido de toda literatura de percolação, corresponde fisicamente ao fenômeno de *transição de fase*. As demais mostram uma transição mais tênue de 0 para 1, cuja interpretação física leva à conclusão de que se trata de uma *transição de fase de segunda ordem*.

É possível observar também na Figura 105 que a aplicação da variabilidade de  $p$  antecipa o valor da probabilidade crítica  $p_c$ , de modo que

$$p_c^{\text{senquad}} < p_c^{\text{uniforme}}.$$

Há indícios de que outras funções  $p(z)$ , cujos resultados não puderam ser obtidos por falta de tempo e de capacidade computacional, deverão produzir resultados que antecipam mais ainda o ponto crítico  $p_c$ .

No próximo capítulo são apresentadas as conclusões a respeito deste trabalho.

## 8 Conclusões

Neste capítulo são apresentados os principais resultados obtidos no estudo, incluindo também novas propostas de pesquisa científica e algumas considerações gerais sobre o trabalho.

São considerados modelos onde a probabilidade de percolação é definida como uma função da posição do sítio  $z$  em relação à origem, ou seja, como uma função da norma de  $z$ . São utilizadas diversas formas para tal função, de modo a obter-se várias configurações diferentes para uma mesma rede geométrica, tal como a quadrada, caracterizando o que denominamos de probabilidade de percolação *não uniforme*.

O objetivo da pesquisa é, portanto, estimar, neste novo cenário, as principais grandezas envolvidas na teoria, principalmente a probabilidade de percolação e a probabilidade crítica.

### 8.1 Contribuições do Trabalho

Este tópico discrimina os pontos considerados como novas contribuições à teoria de percolação ou novas técnicas voltadas ao processo de simulação baseada na teoria. A Tabela 11 apresenta uma lista das novas contribuições produzidas neste trabalho.

Item	Descrição
1	<b>Variabilidade de <math>p</math>.</b> Variação da probabilidade de sítio $p$ ao longo da rede de percolação, podendo tal variação ser mapeada discretamente sítio a sítio ou regida por funções $p(z)$ , onde $z$ representa a posição de cada sítio da rede.
2	<b>Formulação das Funções <math>p(z)</math>.</b> Formulação das funções $p(z)$ experimentadas para reger as variações de $p$ : <i>Senóide quadrada</i> , <i>Senóide circular</i> , <i>Pulso quadrado</i> , <i>Pulso circular</i> , <i>Serra quadrada</i> , <i>Serra circular</i> , <i>Cone</i> , <i>Calota</i> , <i>4-Plan</i> . Formulação das famílias <i>Sub-limitada</i> , <i>Sobre-limitada</i> e

*continua ...*

continuação ...

Item	Descrição
	<i>Range-limitada.</i>
<b>3</b>	<b>Firelab.</b> Software simulador de queimadas que implementa todas as funções $p(z)$ experimentadas, além da própria probabilidade uniforme $p$ .
<b>4</b>	<b>Restart.</b> Aplicação da técnica de <i>restart</i> a simuladores baseados na teoria de percolação.
<b>5</b>	<b>Replicação Inteligente.</b> Criação da técnica de replicação inteligente, que aplica números de réplicas diferenciados de acordo com as fases sub-crítica, crítica e supercrítica, inerentes ao processo de percolação.
<b>6</b>	<b>Graphlab.</b> Software gerador de grafos e grafos aleatórios.

Tabela 11: Novas contribuições.

## 8.2 Resultados Mais Importantes

Este tópico especifica os principais resultados das simulações realizadas com o simulador Firelab (Tabela 12).

Item	Descrição
<b>1</b>	<b>A variabilidade acentuada de <math>p</math> implica em um comportamento de transição de fase de segunda ordem.</b> As simulações realizadas para as funções $p(z)$ que representam grandes variações de $p$ ao longo da rede, notadamente as senóides, mostraram um comportamento de transição de fase de segunda ordem. Esta transição de fase de segunda ordem é caracterizada por uma curva de $\theta(p)$ em formato de um $S$ alongado, como mostra a Figura 106. A Figura 107 mostra $\theta(p)$ para o caso uniforme, bem conhecido da literatura.
<b>2</b>	<b>A variabilidade acentuada de <math>p</math> implica em uma redução da densidade crítica de transição de fase (<math>p_c</math>).</b> Ainda nas simulações realizadas para as funções $p(z)$ que representam grandes variações de $p$ ao longo da rede, tais como as senóides, ficou provado que há uma redução no valor $p_c$ . Conforme pode ser observado nas Figuras 106 e 107, e constatado

continua ...

continuação ...

Item	Descrição
	mediante a análise dos dados das experiências, $p_c^{senoidal} = 0,400$ e $p_c^{uniforme} = 0,574$ . Ou seja, $p_c^{senoidal} < p_c^{uniforme}$ . Tal resultado já era de certa forma esperado, porque tais variações provocam um aumento significativo na probabilidade de sítio, facilitando a percolação.
<b>3</b>	<b>A variabilidade discreta não altera o comportamento de <math>\theta(p)</math>.</b> Ficou comprovado que para o caso das funções $p(z)$ que representam variações discretas de $p$ ao longo da rede, tais como as funções de <i>pulso</i> , o comportamento é tal e qual o da probabilidade uniforme. A Figura 108 mostra o comportamento de $\theta(p)$ para as funções de <i>pulso</i> e pode ser comparada com a Figura 107.

Tabela 12: Resultados mais importantes.

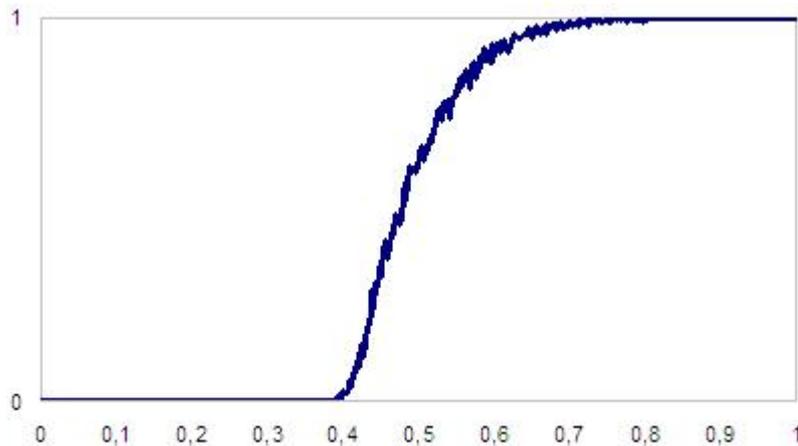


Figura 106: Curva de  $\theta(p)$  para probabilidade senoidal ( $p_c = 0,400$ ).

### 8.3 Resultados Numéricos de $p_c$

A Tabela 13 mostra os resultados numéricos da densidade crítica de transição de fase,  $p_c$ , para cada função  $p(z)$  estudada neste trabalho. Os resultados estão apresentados em ordem decendente do valor numérico de  $p_c$ .

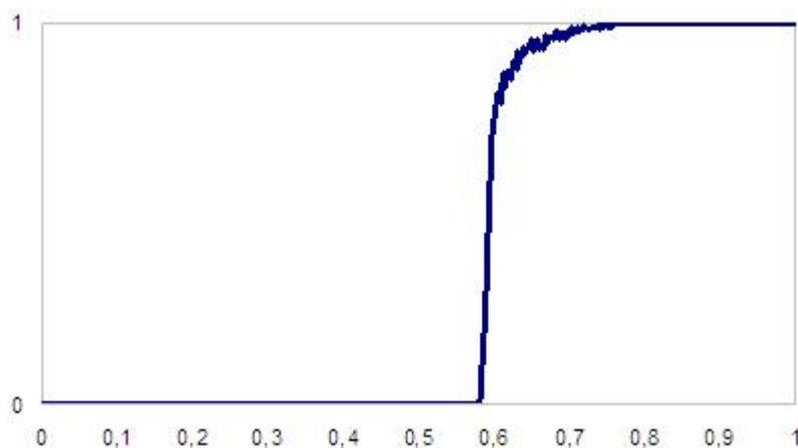


Figura 107: Curva de  $\theta(p)$  para probabilidade uniforme ( $p_c = 0,574$ ).

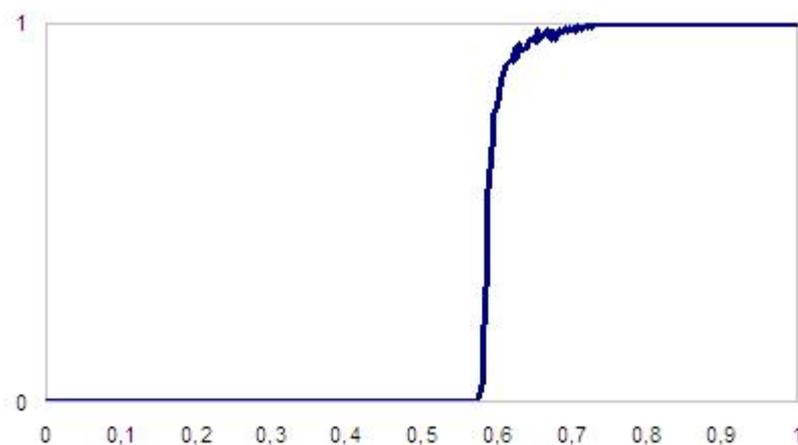


Figura 108: Curva de  $\theta(p)$  para probabilidade em pulsos ( $p_c = 0,576$ ).

Função	$p_c$
Uniforme	0,574
Pulso	0,572
Calota	0,554
4-Plan	0,518
Cone	0,514
Serra	0,404
Senóide	0,400

Tabela 13: Resultados numéricos de  $p_c$ .

## 8.4 Trabalhos Futuros

O presente tópico indica os caminhos para futuros trabalhos de pesquisa conseqüentes deste. A Tabela 14 enumera tais trabalhos.

Item	Descrição
1	<b>Mapeamento Poligonal da Área Florestal.</b> Capacitar o simulador a mapear a área florestal em <i>polígonos irregulares</i> e atribuir uma $p(z)$ para cada polígono. Assim, dada uma floresta real, poder-se-á imitá-la com mais exatidão no computador. O modelo matemático, neste caso, inclui dois conjuntos, $A$ e $B$ , $A$ de polígonos e $B$ de funções $p(z)$ , em correspondência biunívoca, que serão usados nas simulações de Monte Carlo, a cada réplica, no método de configuração e geração da floresta. No modelo atual, este método usa uma única função $p(z)$ para toda a área florestal.
2	<b>Mapeamento Unitário da Área Florestal.</b> Capacitar o simulador a mapear a área florestal sítio por sítio através de valores numéricos de probabilidade. Pode ser feito, por exemplo, pelo uso de um arquivo de dados em formato TXT especificando o valor de $p$ para cada sítio $z$ . Neste caso o modelo inclui um conjunto $A$ em que cada elemento contém a posição de $z$ e o correspondente valor de $p$ . Programaticamente, ter-se-á apenas que substituir a função $p(z)$ pelo conjunto $A$ .
3	<b>Estudo da “Família Sobre-limitada”.</b> Implementar as funções no formato sobre-limitado e realizar novamente todas as experiências. A idéia é investigar se a mudança no formato provoca alguma diferença nos resultados.
4	<b>Estudo da Família “Range-limitada”.</b> Implementar as funções no formato range-limitado e realizar novamente todas as experiências. Mesma idéia de 3 supra.
5	<b>Estudo da Velocidade de Avanço (<math>V_a</math>).</b> Incorporar ao simulador a medição desta grandeza e realizar plotagens e estudos comparativos.
6	<b>Estudo do Percograma.</b> Elaborar o percograma para todas as funções $p(z)$ e realizar estudos comparativos. Do mesmo modo, para os diversos modelos de rede.
7	<b>Estudo da Percolação de Alternância.</b> Implementar este tipo de

*continua ...*

continuação ...

Item	Descrição
	percolação no simulador e realizar experiências para comparação de resultados. A percolação de alternância é aquela descoberta por acaso, devido a um erro de programação, em que o sistema, em vez de examinar todos os vizinhos mais próximos, examina apenas a metade, de forma alternada, ou seja, um sim outro não.
8	<b>Firelab 3D</b> . Implementar uma versão do Firelab para três dimensões.
9	<b>Firelab C++</b> . Reescrever o Firelab em C++.

Tabela 14: Pesquisas futuras.

## 8.5 Considerações Finais

A primeira grande conclusão deste trabalho é a constatação de que a teoria de percolação é mesmo uma teoria aberta, com diversas possibilidades de novas contribuições e melhorias, bem como da descoberta de novas aplicações.

Ao mesmo tempo em que isto se traduz em um grande nicho de pesquisa, a observação dos resultados de qualquer nova contribuição, por mínima que seja, é sempre muito penosa e demorada devido à grande carga de processamento computacional necessária. De certa forma, este fato também é uma fonte interessantíssima de pesquisa, haja vista que novas técnicas podem ser criadas, ou apenas aplicadas técnicas já existentes, no sentido de reduzir o tempo de processamento das experiências, tal como aqui foi feito ao ser aplicada a técnica de *restart* – já existente, usada e consagrada em diversos processos de diversas outras áreas que demandam grande carga de processamento –, e também ao ser criada a técnica de *replicação inteligente*, voltada especificamente para processamentos de Monte Carlo que tenham características semelhantes às do processo de percolação, porque seu funcionamento é baseado na manipulação adequada e consistente do número de replicações.

Ainda no campo das novas contribuições, o presente trabalho sugere na introdução, Seção 1.1, a adoção de dois conceitos que não puderam ser observados, por não ter havido tempo hábil para implementação. São eles: *velocidade de avanço* e *percograma*. De qualquer forma, fica a sugestão para as novas iniciativas de pesquisa na área.

Outra pesquisa futura é a sofisticação do simulador no sentido de contemplar o mapea-

mento da área florestal em sub-redes, atribuindo uma  $p(z)$  para cada uma delas, conforme explicado na introdução do Capítulo 4. Nestes mesmos termos, pode-se ainda sofisticar o simulador, ou desenvolver outros, no sentido de implementar a probabilidade não uniforme para outros modelos de rede que não a quadrada.

Ademais, pela obra de um pequeno e corriqueiro erro de lógica de programação durante a implementação do simulador, foi descoberta acidentalmente uma possível modalidade alternativa de percolação. Nesta modalidade os sítios a serem testados a cada  $\Delta t$  não são todos os *vizinhos mais próximos*, mas os *vizinhos mais próximos, alternadamente*, i.e., metade dos vizinhos mais próximos. Também não houve tempo suficiente para fazer uma análise mais acurada mas foi possível observar que, dadas as mesmas condições experimentais, o tempo de simulação é aproximadamente metade do que ocorre na modalidade convencional. Foi possível observar também que a animação de uma queimada nesta “nova” modalidade é muito mais realista que a convencional, por proporcionar um avanço bem mais irregular do fogo na área florestal. Estas observações, no entanto, ainda não podem ser assumidas como verdades científicas, haja vista que não foi possível durante o período do projeto realizar uma quantidade suficiente de experiências, e nem tampouco sistematizar adequadamente no sentido de dar garantias aos resultados obtidos.

Estas possíveis melhorias não foram levadas à frente por uma razão muito simples e muito justa: não fugir do foco dos objetivos essenciais da pesquisa. E, neste sentido, valeu muito a pena.

## *Referências*

- BARABÁSI, A.-L.; ALBERT, R. Statistical mechanics of complex networks. *arXiv*, 2001.
- BERKER, A. N.; ANDELMAN, D.; AHARONY, A. First- and second-order phase transitions of infinite-state potts models in one dimension. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 13, n. 11, p. 413–418, November 1980.
- BETHE, H. A. Statistical theory of superlattices. *Proceedings of the Royal Society of London*, v. 150, n. 871, p. 552–575, July 1935.
- BROADBENT, S.; HAMMERSLEY, J. Percolation process i. crystals and mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, n. 53, p. 629–641, 1957.
- CONARD, S.; HILBRUNER, M. *Influence of Forest Structure on Wildfire Behavior and the Severity of Its Effects*.  
<http://www.fs.fed.us/projects/hfi/2003/november/documents/forest-structure-wildfire.pdf>, 2003.
- ERDÖS, P.; RÉNYI, A. On random graphs i. *Publ. Math. Debrecen*, n. 6, p. 290–297, 1959.
- EULER, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, n. 8, p. 128–140, 1741.
- FORSYTH, A.; MIYATA, K. *Tropical Nature: Life and Death in the Rain Forests of Central and South America*. New York: Touchstone, 1984.
- GRIMMETT, G. R. *Percolation*. 2nd. ed. Cambridge: Springer, 1999.
- GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G. C. *Tilings and Patterns*. New York: Freeman, 1987.
- KESTEN, H. The critical probability of bound percolation on the square lattice equals  $1/2$ . *Communications in Mathematical Physics*, v. 150, n. 74, p. 41–59, 1980.
- KEY, E. S. *The Mathematics Genealogy Project*.  
<http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/html/id.phtml?id=41696>, 1983.
- SILVA, R. G. da. *Manual de Prevenção e Combate aos Incêndios Florestais*.  
<http://www.ibama.gov.br/siucweb/guiadechefe/guia/anexos/anexo10/texto.htm>, 1998.
- STAUFFER, D. *Introduction to Percolation Theory*. London: Taylor & Francis, 1985.
- WTHREEX. *Rational Unified Process*. <http://www.wthreex.com/rup>.

# *APÊNDICES*

## APÊNDICE A – Notação e Simbologia

Este apêndice apresenta um resumo dos símbolos usados na teoria de percolação, juntamente com seus significados. O objetivo é dar uma noção geral da notação utilizada, bem como dos termos e conceitos mais importantes para o entendimento da teoria.

Símbolo	Significado
$d$	Número de dimensões.
$x$	Sítio. Nodo de uma rede de percolação. Definido em $d$ dimensões como o vetor $x$ de coordenadas inteiras $x_1, x_2, \dots, x_d$ . Costuma-se usar também as letras $u, v, w, y, z$ , em vez de $x$ .
$ x $	Módulo de $x$ . Valor absoluto de $x$ . Uma das medidas da posição de $x$ . Uma das normas de $x$ .
$\ x\ $	Norma de $x$ . Medida da posição de $x$ . Definem-se alguns tipos diferentes de norma e as mais importantes são: - Norma Soma $\ x\  = \sum_{i=1}^d  x_i $ ; - Norma Euclidiana $\ x\  = \sqrt{\sum_{i=1}^d  x_i ^2}$ ; - Norma Máximo $\ x\  = \max\{ x_i  : 1 \leq i \leq d\}$ .
$\mathbb{Z}$	Conjunto de todos os números inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ .
$\mathbb{Z}^d$	Conjunto de todos os vetores $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ com coordenadas inteiras em $d$ dimensões. Representa todos os vértices do grafo embutido em $\mathbb{R}^d$ em que tais vértices são números inteiros. Na terminologia da teoria de percolação $\mathbb{Z}^d$ representa os <i>sítios</i> da rede de percolação. É definido como $\mathbb{Z}^d = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z}\}$ .
$\mathbb{E}^d$	Conjunto de todos os elos $e$ que unem os vértices $x \in \mathbb{Z}^d$ . É definido como $\mathbb{E}^d = \{e_{xy} = (x, y) : \ x - y\  = 1, x, y \in \mathbb{Z}^d\}$ .

continua ...

continuação ...

Símbolo	Significado
$\mathbb{L}^d$	Grafo que representa a rede de percolação $d$ -dimensional, também chamada <i>grade cúbica <math>d</math>-dimensional</i> ( <i><math>d</math>-dimensional cubic lattice</i> ). É definido como $\mathbb{L}^d = \{\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d\}$ .
$O$	Origem de $\mathbb{L}^d$ . Define-se um $x \in \mathbb{Z}^d$ , $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ , em que $x_1 = x_2 = \dots = x_d = 0$ ; então $x = O$ .
$x \sim y$	Representa dois sítios $x, y \in \mathbb{Z}^d$ adjacentes.
$x \leftrightarrow y$	Representa dois sítios $x, y \in \mathbb{Z}^d$ conectados.
$C_x$	Conglomerado. Conjunto de sítios conectados com elos abertos ao qual pertence o sítio $x$ . Definido como $C_x = \{x, y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ .
$C_o$	Conglomerado da origem. Definido como $C_o = \{x \in \mathbb{Z}^d : O \leftrightarrow x\}$ . Também denotado apenas por $C$ .
$\theta(p)$	Probabilidade de percolação. Definida como a probabilidade de que um dado sítio $z$ , notadamente a origem $O$ , pertença a um conglomerado infinito. Simbolicamente, $\theta(p) = P_p( C_o  = \infty)$ . É calculada numericamente pela relação entre o número de tentativas em que houve percolação, $Np$ , e o total de tentativas, $N$ . Ou seja: $\theta(p) = Np/N$ .
$p_c$	Probabilidade de percolação. É definida como o primeiro valor de $p$ para o qual $\theta(p) > 0$ , ou seja, $p_c = \inf\{p : \theta(p) > 0\}$ .

Tabela 15: Notação e simbologia.

## *APÊNDICE B – Grafos Aleatórios*

### **B.1 Introdução**

O formalismo matemático normalmente utilizado para descrever uma rede é a *teoria dos grafos*. Uma vez que a teoria de percolação é baseada em redes, e descreve, essencialmente, um processo aleatório, é razoável conhecer a *teoria dos grafos aleatórios*. Este capítulo é uma pequena revisão da teoria dos grafos, enfocando basicamente os grafos aleatórios.

A teoria dos grafos surgiu no século XVIII com o trabalho do cientista suíço Leonhard Euler a respeito das pontes de Königsberg, em 1741<sup>1</sup>.

Muitas contribuições foram capitalizadas durante todo esse tempo, e, durante o século XX foram incorporadas características estatísticas e algorítmicas à teoria, tornando indispensável o uso de recursos computacionais na realização de estudos mais aprofundados e mais completos. Destaca-se aqui o estudo dos grafos aleatórios, introduzido em 1959 por Paul Erdős e Alfréd Rényi.

### **B.2 Definição de Grafo**

Um grafo é um conjunto composto de um par de outros conjuntos: um de *nodos* ( $P$ ) e outro de *elos* ( $E$ ). Formalmente:

$$G = \{P, E\} \tag{B.1}$$

Onde  $P$  é o conjunto de nodos (ou vértices, ou pontos) do grafo que, por hipótese, é composto de  $N$  elementos; e  $E$  é o conjunto de  $n$  elos (ou ligações, ou linhas) que conectam dois elementos de  $P$ .

---

<sup>1</sup>Título original: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, originariamente publicado em *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 8, pp. 128-140, 1741.

Assim, o conjunto  $G = \{\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{2,4\}, \{4,5\}\}\}$  é um exemplo de grafo, onde  $P = \{1,2,3,4,5\}$  é o conjunto de nodos e  $E = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{2,4\}, \{4,5\}\}$  é o conjunto de elos. Neste exemplo, o número de nodos é  $N = 5$  (número de elementos de  $P$ ) e o número de elos é  $n = 6$  (número de elementos de  $E$ ). A figura B.2 é uma representação gráfica de  $G$ , onde os nodos são representados por pontos e os elos por linhas.

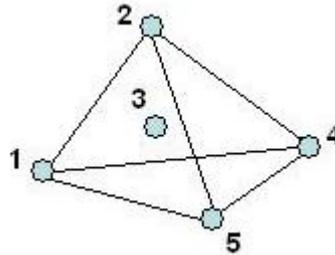


Figura 109: Representação gráfica de um grafo.

Ambos os conjuntos podem ser vazios, sendo que, no caso em que  $P$  seja vazio,  $E$ , obviamente, também o será, obrigatoriamente. Quando ambos os conjuntos são vazios, diz-se tratar-se de um *grafo vazio*. Quando apenas  $E$  é vazio diz-se tratar-se de um *grafo nulo* ou grafo sem elos.

É possível enumerar alguns grafos especiais (tabela 16).

Denominação	Notação	Conjunto $P$	Conjunto $E$
Grafo vazio	$G = \{\emptyset, \emptyset\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
Grafo nulo	$G = \{P, \emptyset\}$	Qualquer $P$	$\emptyset$
Grafo completo	$G = \{P, E\}$	Qualquer $P$	$E = E$ conjunto com no. máximo de elos

Tabela 16: Alguns grafos especiais.

O número máximo de elementos de  $E$  é dado pela equação B.2.

$$n = \frac{N(N-1)}{2}. \quad (\text{B.2})$$

### B.2.1 Grafo Aleatório

As Figuras 110 a 115, a seguir, representam diversas *gerações* de grafos aleatórios. Em todas elas, os grafos devem ser lidos da esquerda para a direita e de cima para baixo,

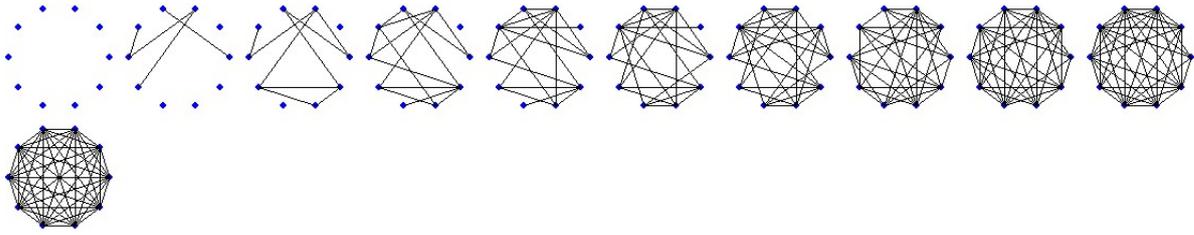


Figura 110: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 11 estágios.

tal como se lê um texto. Uma geração é uma seqüência de grafos em que o número de elos vai crescendo de acordo com o crescimento da probabilidade  $p$ , que varia no intervalo  $[0, 1]$ . Cada valor de  $p$  gera estágios cuja quantidade de elos é dada por  $n = p \frac{N(N-1)}{2}$ ; este processo é chamado de *evolução* da geração dos grafos aleatórios. Assim, em todas as gerações, o primeiro grafo não possui elos ( $p = 0$ ) e o último possui a quantidade máxima possível de elos,  $\frac{N(N-1)}{2}$ , correspondente ao estágio  $p = 1$ . Na seqüência aqui apresentada, todas as gerações têm como base uma estrutura com 10 nodos.

#	p(N)	n	Elos
00	0,0	0	{}
01	0,1	4	{{5,8},{0,7},{5,6},{8,4}}
02	0,2	9	{{5,8},{0,7},{5,6},{8,4},{7,1},{1,2},{1,4},{0,8},{4,2}}
03	0,3	14	{{5,8},{0,7},{5,6},{8,4},{7,1},{1,2},{1,4},{0,8},{4,2},{1,3},{6,7},{6,8},{2,6},{1,5}}
04	0,4	18	{{5,8},{0,7},{5,6},{8,4},{7,1},{1,2},{1,4},{0,8},{4,2},{1,3},{6,7},{6,8},{2,6},{1,5},{8,7},{8,2},{9,6},{0,6}}
05	0,5	22	{{5,8},{0,7},{5,6},{8,4},{7,1},{1,2},{1,4},{0,8},{4,2},{1,3},{6,7},{6,8},{2,6},{1,5},{8,7},{8,2},{9,6},{0,6},{3,2},{3,6},{4,7},{0,3}}
06	0,6	27	{{5,8},{0,7},{5,6},{8,4},{7,1},{1,2},{1,4},{0,8},{4,2},{1,3},{6,7},{6,8},{2,6},{1,5},{8,7},{8,2},{9,6},{0,6},{3,2},{3,6},{4,7},{0,3},{6,1},{0,9},{9,3},{2,9},{9,5}}
07	0,7	31	{{5,2},{3,1},{3,8},{7,0},{8,1},{2,8},{5,1},{1,4},{0,1},{4,5},{8,4},{3,5},{2,6},{4,3},{2,9},{9,5},{0,3},{6,7},{8,5},{4,6},{8,9},{2,7},{7,9},{3,9},{1,6},{7,8},{2,1},{9,6},{0,8},{4,2},{0,6}}
08	0,8	36	{{5,2},{3,1},{3,8},{7,0},{8,1},{2,8},{5,1},{1,4},{0,1},{4,5},{8,4},{3,5},{2,6},{4,3},{2,9},{9,5},{0,3},{6,7},{8,5},{4,6},{8,9},{2,7},{7,9},{3,9},{1,6},{7,8},{2,1},{9,6},{0,8},{4,2},{0,6},{7,4},{3,7},

continua ...

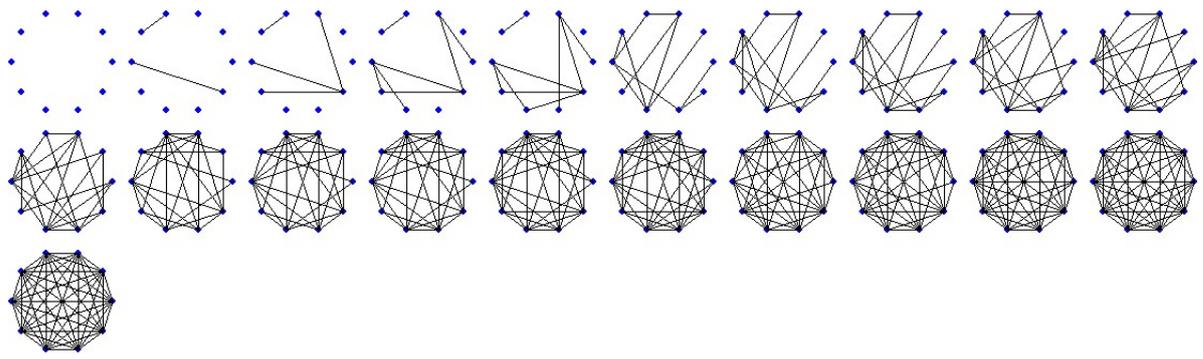


Figura 111: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 21 estágios.

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{9,1},{6,3},{5,6}}
09	0,9	40	{{5,2},{3,1},{3,8},{7,0},{8,1},{2,8},{5,1},{1,4},{0,1},{4,5},{8,4}, {3,5},{2,6},{4,3},{2,9},{9,5},{0,3},{6,7},{8,5},{4,6},{8,9},{2,7}, {7,9},{3,9},{1,6},{7,8},{2,1},{9,6},{0,8},{4,2},{0,6},{7,4},{3,7}, {9,1},{6,3},{5,6},{1,7},{6,8},{2,3},{5,7}}
10	1,0	45	{{5,2},{3,1},{3,8},{7,0},{8,1},{2,8},{5,1},{1,4},{0,1},{4,5},{8,4}, {3,5},{2,6},{4,3},{2,9},{9,5},{0,3},{6,7},{8,5},{4,6},{8,9},{2,7}, {7,9},{3,9},{1,6},{7,8},{2,1},{9,6},{0,8},{4,2},{0,6},{7,4},{3,7}, {9,1},{6,3},{5,6},{1,7},{6,8},{2,3},{5,7},{9,0},{2,0},{9,4},{5,0}, {0,4}}

Tabela 17: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 11 estágios.

#	p(N)	n	Elos
00	0,00	0	{}
01	0,05	2	{{6,7},{1,5}}
02	0,10	4	{{6,7},{1,5},{4,1},{8,1}}
03	0,15	7	{{6,7},{1,5},{4,1},{8,1},{8,0},{4,5},{5,3}}
04	0,20	9	{{6,7},{1,5},{4,1},{8,1},{8,0},{4,5},{5,3},{2,8},{3,1}}
05	0,25	11	{{2,1},{8,4},{3,5},{6,5},{0,2},{2,5},{7,8},{9,3},{7,5},{3,6},{3,8}}
06	0,30	14	{{2,1},{8,4},{3,5},{6,5},{0,2},{2,5},{7,8},{9,3},{7,5},{3,6},{3,8}, {3,1},{6,4},{6,2}}

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
07	0,35	16	{{2,1},{8,4},{3,5},{6,5},{0,2},{2,5},{7,8},{9,3},{7,5},{3,6},{3,8}, {3,1},{6,4},{6,2},{0,4},{2,3}}
08	0,40	18	{{2,1},{8,4},{3,5},{6,5},{0,2},{2,5},{7,8},{9,3},{7,5},{3,6},{3,8}, {3,1},{6,4},{6,2},{0,4},{2,3},{5,8},{8,1}}
09	0,45	20	{{2,1},{8,4},{3,5},{6,5},{0,2},{2,5},{7,8},{9,3},{7,5},{3,6},{3,8}, {3,1},{6,4},{6,2},{0,4},{2,3},{5,8},{8,1},{9,5},{0,3}}
10	0,50	22	{{2,1},{8,4},{3,5},{6,5},{0,2},{2,5},{7,8},{9,3},{7,5},{3,6},{3,8}, {3,1},{6,4},{6,2},{0,4},{2,3},{5,8},{8,1},{9,5},{0,3},{1,9},{7,2}}
11	0,55	25	{{6,5},{8,2},{9,6},{4,3},{8,1},{7,8},{6,8},{5,8},{0,3},{1,5},{5,2}, {9,1},{3,5},{4,2},{3,8},{7,5},{7,2},{4,7},{3,1},{2,1},{7,9},{6,0}, {5,4},{7,3},{7,1}}
12	0,60	27	{{6,5},{8,2},{9,6},{4,3},{8,1},{7,8},{6,8},{5,8},{0,3},{1,5},{5,2}, {9,1},{3,5},{4,2},{3,8},{7,5},{7,2},{4,7},{3,1},{2,1},{7,9},{6,0}, {5,4},{7,3},{7,1},{2,9},{5,9}}
13	0,65	29	{{6,5},{8,2},{9,6},{4,3},{8,1},{7,8},{6,8},{5,8},{0,3},{1,5},{5,2}, {9,1},{3,5},{4,2},{3,8},{7,5},{7,2},{4,7},{3,1},{2,1},{7,9},{6,0}, {5,4},{7,3},{7,1},{2,9},{5,9},{2,3},{7,6}}
14	0,70	32	{{6,5},{8,2},{9,6},{4,3},{8,1},{7,8},{6,8},{5,8},{0,3},{1,5},{5,2}, {9,1},{3,5},{4,2},{3,8},{7,5},{7,2},{4,7},{3,1},{2,1},{7,9},{6,0}, {5,4},{7,3},{7,1},{2,9},{5,9},{2,3},{7,6},{7,0},{6,4},{4,1}}
15	0,75	34	{{6,5},{8,2},{9,6},{4,3},{8,1},{7,8},{6,8},{5,8},{0,3},{1,5},{5,2}, {9,1},{3,5},{4,2},{3,8},{7,5},{7,2},{4,7},{3,1},{2,1},{7,9},{6,0}, {5,4},{7,3},{7,1},{2,9},{5,9},{2,3},{7,6},{7,0},{6,4},{4,1},{3,9}, {0,2}}
16	0,80	36	{{2,7},{2,8},{2,5},{4,0},{3,8},{2,6},{1,3},{4,8},{7,4},{4,5},{1,5}, {9,4},{2,3},{9,1},{6,1},{8,9},{7,8},{8,1},{3,6},{4,3},{6,5},{9,0}, {0,1},{9,5},{9,2},{2,1},{3,5},{1,4},{5,7},{7,3},{6,8},{2,4},{7,1}, {9,6},{7,6},{8,0}}
17	0,85	38	{{2,7},{2,8},{2,5},{4,0},{3,8},{2,6},{1,3},{4,8},{7,4},{4,5},{1,5}, {9,4},{2,3},{9,1},{6,1},{8,9},{7,8},{8,1},{3,6},{4,3},{6,5},{9,0}, {0,1},{9,5},{9,2},{2,1},{3,5},{1,4},{5,7},{7,3},{6,8},{2,4},{7,1},

continua ...

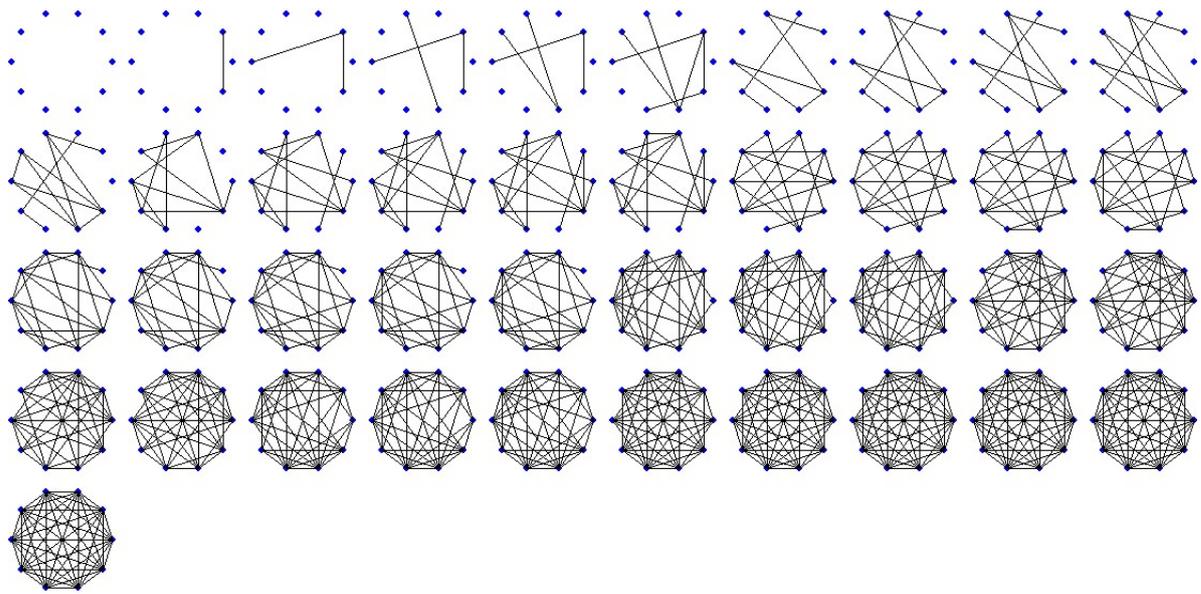


Figura 112: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 41 estágios.

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{9,6},{7,6},{8,0},{5,8},{9,7}}
18	0,90	41	{{2,7},{2,8},{2,5},{4,0},{3,8},{2,6},{1,3},{4,8},{7,4},{4,5},{1,5}, {9,4},{2,3},{9,1},{6,1},{8,9},{7,8},{8,1},{3,6},{4,3},{6,5},{9,0}, {0,1},{9,5},{9,2},{2,1},{3,5},{1,4},{5,7},{7,3},{6,8},{2,4},{7,1}, {9,6},{7,6},{8,0},{5,8},{9,7},{0,3},{6,4},{0,5}}
19	0,95	43	{{2,7},{2,8},{2,5},{4,0},{3,8},{2,6},{1,3},{4,8},{7,4},{4,5},{1,5}, {9,4},{2,3},{9,1},{6,1},{8,9},{7,8},{8,1},{3,6},{4,3},{6,5},{9,0}, {0,1},{9,5},{9,2},{2,1},{3,5},{1,4},{5,7},{7,3},{6,8},{2,4},{7,1}, {9,6},{7,6},{8,0},{5,8},{9,7},{0,3},{6,4},{0,5},{9,3},{0,2}}
20	1,00	45	{{6,1},{6,9},{5,8},{9,4},{2,3},{5,2},{4,8},{2,8},{7,1},{7,5},{3,8}, {7,6},{4,7},{4,5},{4,6},{8,6},{5,3},{0,2},{1,2},{6,2},{6,0},{1,3}, {6,5},{8,0},{1,5},{6,3},{4,3},{8,9},{5,9},{3,7},{2,9},{1,0},{9,7}, {8,7},{0,4},{4,2},{2,7},{0,7},{3,9},{3,0},{0,9},{4,1},{9,1},{5,0}, {1,8}}

Tabela 18: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 21 estágios.

#	p(N)	n	Elos
00	0,000	0	{}
01	0,025	1	{{9,1}}
02	0,050	2	{{9,1},{5,9}}
03	0,075	3	{{9,1},{5,9},{2,7}}
04	0,100	4	{{9,1},{5,9},{2,7},{6,2}}
05	0,125	6	{{9,1},{5,9},{2,7},{6,2},{3,1},{9,2}}
06	0,150	7	{{4,3},{1,2},{1,7},{5,1},{7,9},{4,8},{2,5}}
07	0,175	8	{{4,3},{1,2},{1,7},{5,1},{7,9},{4,8},{2,5},{2,7}}
08	0,200	9	{{4,3},{1,2},{1,7},{5,1},{7,9},{4,8},{2,5},{2,7},{6,1}}
09	0,225	10	{{4,3},{1,2},{1,7},{5,1},{7,9},{4,8},{2,5},{2,7},{6,1},{6,2}}
10	0,250	11	{{4,3},{1,2},{1,7},{5,1},{7,9},{4,8},{2,5},{2,7},{6,1},{6,2},{5,6}}
11	0,275	12	{{8,5},{5,3},{5,1},{1,4},{5,4},{7,4},{3,7},{1,6},{0,1},{6,8},{3,4}, {1,8}}
12	0,300	14	{{8,5},{5,3},{5,1},{1,4},{5,4},{7,4},{3,7},{1,6},{0,1},{6,8},{3,4}, {1,8},{9,2},{6,0}}
13	0,325	15	{{8,5},{5,3},{5,1},{1,4},{5,4},{7,4},{3,7},{1,6},{0,1},{6,8},{3,4}, {1,8},{9,2},{6,0},{4,8}}
14	0,350	16	{{8,5},{5,3},{5,1},{1,4},{5,4},{7,4},{3,7},{1,6},{0,1},{6,8},{3,4}, {1,8},{9,2},{6,0},{4,8},{1,9}}
15	0,375	17	{{8,5},{5,3},{5,1},{1,4},{5,4},{7,4},{3,7},{1,6},{0,1},{6,8},{3,4}, {1,8},{9,2},{6,0},{4,8},{1,9},{7,8}}
16	0,400	18	{{4,8},{0,4},{5,8},{4,9},{0,9},{4,1},{6,5},{5,2},{9,6},{3,1},{0,5}, {0,6},{2,6},{6,7},{9,2},{1,8},{4,5},{7,2}}
17	0,425	19	{{4,8},{0,4},{5,8},{4,9},{0,9},{4,1},{6,5},{5,2},{9,6},{3,1},{0,5}, {0,6},{2,6},{6,7},{9,2},{1,8},{4,5},{7,2},{4,3}}
18	0,450	20	{{4,8},{0,4},{5,8},{4,9},{0,9},{4,1},{6,5},{5,2},{9,6},{3,1},{0,5}, {0,6},{2,6},{6,7},{9,2},{1,8},{4,5},{7,2},{4,3},{3,2}}
19	0,475	21	{{4,8},{0,4},{5,8},{4,9},{0,9},{4,1},{6,5},{5,2},{9,6},{3,1},{0,5}, {0,6},{2,6},{6,7},{9,2},{1,8},{4,5},{7,2},{4,3},{3,2},{4,6}}
20	0,500	23	{{8,1},{4,5},{2,7},{1,2},{3,4},{7,5},{6,1},{4,2},{6,7},{1,4},{8,2},

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{2,5},{5,3},{5,1},{8,6},{7,8},{8,0},{6,3},{6,5},{3,1},{9,7},{0,6}, {0,1}}
21	0,525	24	{{8,1},{4,5},{2,7},{1,2},{3,4},{7,5},{6,1},{4,2},{6,7},{1,4},{8,2}, {2,5},{5,3},{5,1},{8,6},{7,8},{8,0},{6,3},{6,5},{3,1},{9,7},{0,6}, {0,1},{8,5}}
22	0,550	25	{{8,1},{4,5},{2,7},{1,2},{3,4},{7,5},{6,1},{4,2},{6,7},{1,4},{8,2}, {2,5},{5,3},{5,1},{8,6},{7,8},{8,0},{6,3},{6,5},{3,1},{9,7},{0,6}, {0,1},{8,5},{0,4}}
23	0,575	26	{{8,1},{4,5},{2,7},{1,2},{3,4},{7,5},{6,1},{4,2},{6,7},{1,4},{8,2}, {2,5},{5,3},{5,1},{8,6},{7,8},{8,0},{6,3},{6,5},{3,1},{9,7},{0,6}, {0,1},{8,5},{0,4},{4,6}}
24	0,600	27	{{8,1},{4,5},{2,7},{1,2},{3,4},{7,5},{6,1},{4,2},{6,7},{1,4},{8,2}, {2,5},{5,3},{5,1},{8,6},{7,8},{8,0},{6,3},{6,5},{3,1},{9,7},{0,6}, {0,1},{8,5},{0,4},{4,6},{2,3}}
25	0,625	28	{{3,5},{5,6},{2,5},{6,3},{1,3},{2,4},{3,8},{5,8},{8,2},{7,1},{3,7}, {8,1},{4,7},{0,8},{1,6},{6,8},{9,5},{5,7},{5,1},{5,4},{6,4},{9,1}, {8,4},{7,6},{3,4},{9,6},{9,2},{2,0}}
26	0,650	29	{{3,5},{5,6},{2,5},{6,3},{1,3},{2,4},{3,8},{5,8},{8,2},{7,1},{3,7}, {8,1},{4,7},{0,8},{1,6},{6,8},{9,5},{5,7},{5,1},{5,4},{6,4},{9,1}, {8,4},{7,6},{3,4},{9,6},{9,2},{2,0},{9,3}}
27	0,675	30	{{3,5},{5,6},{2,5},{6,3},{1,3},{2,4},{3,8},{5,8},{8,2},{7,1},{3,7}, {8,1},{4,7},{0,8},{1,6},{6,8},{9,5},{5,7},{5,1},{5,4},{6,4},{9,1}, {8,4},{7,6},{3,4},{9,6},{9,2},{2,0},{9,3},{3,0}}
28	0,700	32	{{1,7},{6,8},{2,7},{9,7},{5,9},{6,3},{9,0},{6,7},{8,1},{3,4},{5,0}, {5,7},{1,5},{3,9},{2,5},{5,3},{3,1},{9,4},{5,4},{1,2},{8,2},{8,7}, {8,9},{3,8},{6,0},{4,8},{7,0},{2,0},{0,4},{8,5},{2,3},{9,1}}
29	0,725	33	{{1,7},{6,8},{2,7},{9,7},{5,9},{6,3},{9,0},{6,7},{8,1},{3,4},{5,0}, {5,7},{1,5},{3,9},{2,5},{5,3},{3,1},{9,4},{5,4},{1,2},{8,2},{8,7}, {8,9},{3,8},{6,0},{4,8},{7,0},{2,0},{0,4},{8,5},{2,3},{9,1},{8,0}}
30	0,750	34	{{1,7},{6,8},{2,7},{9,7},{5,9},{6,3},{9,0},{6,7},{8,1},{3,4},{5,0}, {5,7},{1,5},{3,9},{2,5},{5,3},{3,1},{9,4},{5,4},{1,2},{8,2},{8,7},

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{8,9},{3,8},{6,0},{4,8},{7,0},{2,0},{0,4},{8,5},{2,3},{9,1},{8,0},{6,1}}
31	0,775	35	{{1,7},{6,8},{2,7},{9,7},{5,9},{6,3},{9,0},{6,7},{8,1},{3,4},{5,0},{5,7},{1,5},{3,9},{2,5},{5,3},{3,1},{9,4},{5,4},{1,2},{8,2},{8,7},{8,9},{3,8},{6,0},{4,8},{7,0},{2,0},{0,4},{8,5},{2,3},{9,1},{8,0},{6,1},{6,2}}
32	0,800	36	{{3,1},{5,8},{0,2},{6,1},{7,3},{7,4},{9,8},{3,8},{7,8},{5,1},{1,4},{5,2},{7,6},{2,3},{6,3},{6,9},{3,4},{0,9},{0,3},{5,9},{7,1},{4,2},{3,5},{8,2},{9,2},{7,2},{7,9},{5,6},{9,3},{5,7},{8,6},{6,4},{0,8},{6,2},{1,2},{0,1}}
33	0,825	37	{{3,1},{5,8},{0,2},{6,1},{7,3},{7,4},{9,8},{3,8},{7,8},{5,1},{1,4},{5,2},{7,6},{2,3},{6,3},{6,9},{3,4},{0,9},{0,3},{5,9},{7,1},{4,2},{3,5},{8,2},{9,2},{7,2},{7,9},{5,6},{9,3},{5,7},{8,6},{6,4},{0,8},{6,2},{1,2},{0,1},{4,5}}
34	0,850	38	{{3,1},{5,8},{0,2},{6,1},{7,3},{7,4},{9,8},{3,8},{7,8},{5,1},{1,4},{5,2},{7,6},{2,3},{6,3},{6,9},{3,4},{0,9},{0,3},{5,9},{7,1},{4,2},{3,5},{8,2},{9,2},{7,2},{7,9},{5,6},{9,3},{5,7},{8,6},{6,4},{0,8},{6,2},{1,2},{0,1},{4,5},{0,6}}
35	0,875	39	{{8,5},{6,8},{3,2},{6,1},{6,4},{5,1},{8,2},{6,9},{1,4},{7,2},{9,3},{0,3},{4,3},{6,3},{5,7},{9,4},{1,3},{1,8},{2,6},{2,4},{4,8},{8,7},{2,5},{5,3},{3,8},{8,9},{0,7},{0,5},{7,9},{9,0},{3,7},{5,9},{9,1},{2,1},{0,2},{0,6},{4,0},{7,1},{7,4}}
36	0,900	41	{{8,5},{6,8},{3,2},{6,1},{6,4},{5,1},{8,2},{6,9},{1,4},{7,2},{9,3},{0,3},{4,3},{6,3},{5,7},{9,4},{1,3},{1,8},{2,6},{2,4},{4,8},{8,7},{2,5},{5,3},{3,8},{8,9},{0,7},{0,5},{7,9},{9,0},{3,7},{5,9},{9,1},{2,1},{0,2},{0,6},{4,0},{7,1},{7,4},{0,8},{4,5}}
37	0,925	42	{{8,5},{6,8},{3,2},{6,1},{6,4},{5,1},{8,2},{6,9},{1,4},{7,2},{9,3},{0,3},{4,3},{6,3},{5,7},{9,4},{1,3},{1,8},{2,6},{2,4},{4,8},{8,7},{2,5},{5,3},{3,8},{8,9},{0,7},{0,5},{7,9},{9,0},{3,7},{5,9},{9,1},{2,1},{0,2},{0,6},{4,0},{7,1},{7,4},{0,8},{4,5},{1,0}}
38	0,950	43	{{8,5},{6,8},{3,2},{6,1},{6,4},{5,1},{8,2},{6,9},{1,4},{7,2},{9,3},

continua ...

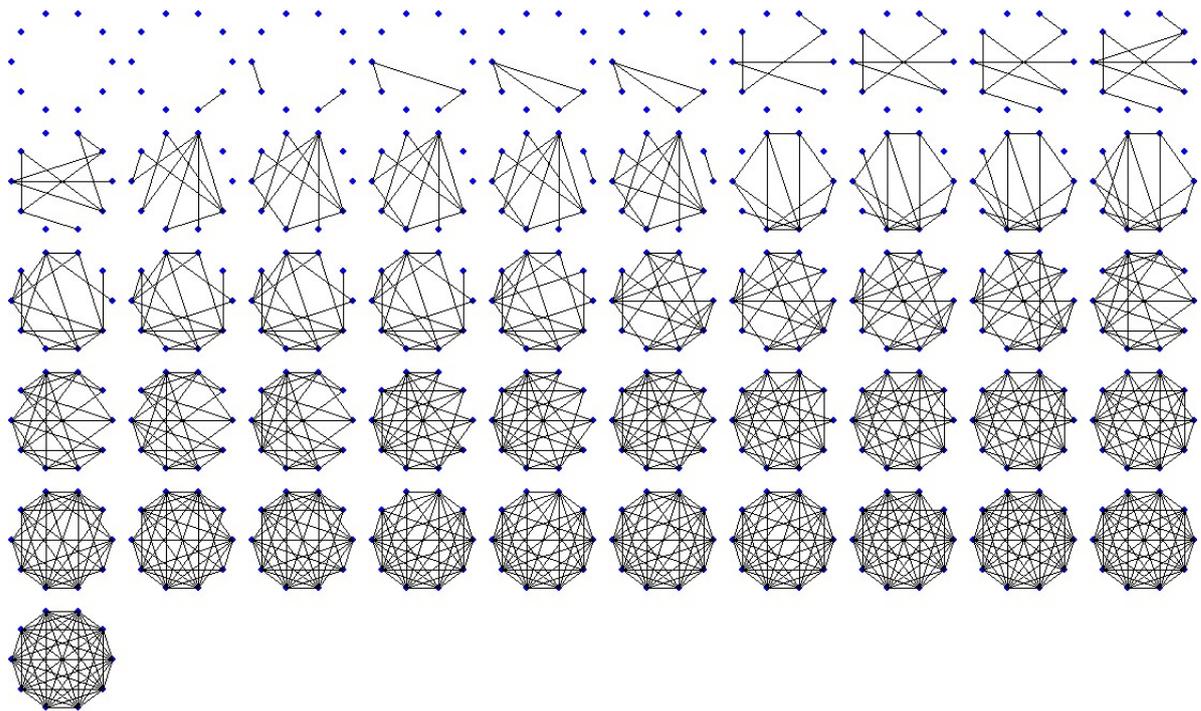


Figura 113: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 51 estágios.

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{0,3},{4,3},{6,3},{5,7},{9,4},{1,3},{1,8},{2,6},{2,4},{4,8},{8,7}, {2,5},{5,3},{3,8},{8,9},{0,7},{0,5},{7,9},{9,0},{3,7},{5,9},{9,1}, {2,1},{0,2},{0,6},{4,0},{7,1},{7,4},{0,8},{4,5},{1,0},{7,6}}
39	0,975	44	{{3,8},{1,0},{8,6},{4,6},{6,2},{8,4},{9,4},{1,2},{3,0},{7,4},{9,5}, {8,5},{9,8},{1,7},{9,1},{3,2},{8,1},{5,3},{3,9},{2,8},{1,6},{0,8}, {2,7},{0,7},{7,3},{5,7},{4,1},{0,4},{2,5},{6,3},{4,5},{7,8},{1,5}, {9,2},{7,6},{4,3},{9,6},{9,7},{6,5},{1,3},{0,2},{5,0},{6,0},{2,4}}
40	1,000	45	{{3,8},{1,0},{8,6},{4,6},{6,2},{8,4},{9,4},{1,2},{3,0},{7,4},{9,5}, {8,5},{9,8},{1,7},{9,1},{3,2},{8,1},{5,3},{3,9},{2,8},{1,6},{0,8}, {2,7},{0,7},{7,3},{5,7},{4,1},{0,4},{2,5},{6,3},{4,5},{7,8},{1,5}, {9,2},{7,6},{4,3},{9,6},{9,7},{6,5},{1,3},{0,2},{5,0},{6,0},{2,4}, {0,9}}

Tabela 19: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 41 estágios.

#	p(N)	n	Elos
00	0,00	0	{}
01	0,02	1	{{1,2}}
02	0,04	2	{{1,2},{5,4}}
03	0,06	3	{{1,2},{5,4},{1,5}}
04	0,08	4	{{1,2},{5,4},{1,5},{5,2}}
05	0,10	4	{{1,2},{5,4},{1,5},{5,2}}
06	0,12	5	{{6,4},{0,5},{4,9},{1,5},{8,9}}
07	0,14	6	{{6,4},{0,5},{4,9},{1,5},{8,9},{1,6}}
08	0,16	7	{{6,4},{0,5},{4,9},{1,5},{8,9},{1,6},{4,2}}
09	0,18	8	{{6,4},{0,5},{4,9},{1,5},{8,9},{1,6},{4,2},{5,9}}
10	0,20	9	{{6,4},{0,5},{4,9},{1,5},{8,9},{1,6},{4,2},{5,9},{8,1}}
11	0,22	10	{{1,7},{5,6},{8,3},{5,8},{7,4},{3,1},{2,8},{1,6},{1,8},{8,4}}
12	0,24	11	{{1,7},{5,6},{8,3},{5,8},{7,4},{3,1},{2,8},{1,6},{1,8},{8,4},{5,3}}
13	0,26	12	{{1,7},{5,6},{8,3},{5,8},{7,4},{3,1},{2,8},{1,6},{1,8},{8,4},{5,3}, {4,3}}
14	0,28	13	{{1,7},{5,6},{8,3},{5,8},{7,4},{3,1},{2,8},{1,6},{1,8},{8,4},{5,3}, {4,3},{0,9}}
15	0,30	14	{{1,7},{5,6},{8,3},{5,8},{7,4},{3,1},{2,8},{1,6},{1,8},{8,4},{5,3}, {4,3},{0,9},{5,1}}
16	0,32	14	{{5,2},{8,0},{2,1},{5,3},{3,0},{7,3},{8,7},{3,2},{7,2},{1,3},{1,0}, {8,2},{7,5},{4,2}}
17	0,34	15	{{5,2},{8,0},{2,1},{5,3},{3,0},{7,3},{8,7},{3,2},{7,2},{1,3},{1,0}, {8,2},{7,5},{4,2},{6,3}}
18	0,36	16	{{5,2},{8,0},{2,1},{5,3},{3,0},{7,3},{8,7},{3,2},{7,2},{1,3},{1,0}, {8,2},{7,5},{4,2},{6,3},{3,4}}
19	0,38	17	{{5,2},{8,0},{2,1},{5,3},{3,0},{7,3},{8,7},{3,2},{7,2},{1,3},{1,0}, {8,2},{7,5},{4,2},{6,3},{3,4},{7,4}}
20	0,40	18	{{1,4},{1,8},{2,3},{6,4},{4,7},{5,6},{5,3},{1,3},{2,4},{6,2},{1,9}, {7,5},{1,2},{5,8},{0,7},{7,2},{1,5},{8,7}}
21	0,42	19	{{1,4},{1,8},{2,3},{6,4},{4,7},{5,6},{5,3},{1,3},{2,4},{6,2},{1,9},

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{7,5},{1,2},{5,8},{0,7},{7,2},{1,5},{8,7},{0,4}}
22	0,44	20	{{1,4},{1,8},{2,3},{6,4},{4,7},{5,6},{5,3},{1,3},{2,4},{6,2},{1,9}, {7,5},{1,2},{5,8},{0,7},{7,2},{1,5},{8,7},{0,4},{3,4}}
23	0,46	21	{{1,4},{1,8},{2,3},{6,4},{4,7},{5,6},{5,3},{1,3},{2,4},{6,2},{1,9}, {7,5},{1,2},{5,8},{0,7},{7,2},{1,5},{8,7},{0,4},{3,4},{6,7}}
24	0,48	22	{{1,4},{1,8},{2,3},{6,4},{4,7},{5,6},{5,3},{1,3},{2,4},{6,2},{1,9}, {7,5},{1,2},{5,8},{0,7},{7,2},{1,5},{8,7},{0,4},{3,4},{6,7},{9,5}}
25	0,50	23	{{5,7},{5,9},{5,6},{2,7},{7,1},{1,3},{0,1},{4,6},{1,5},{3,5},{2,4}, {5,8},{3,0},{1,2},{8,1},{4,8},{5,0},{7,9},{3,2},{3,9},{1,6},{8,7}, {2,0}}
26	0,52	23	{{5,7},{5,9},{5,6},{2,7},{7,1},{1,3},{0,1},{4,6},{1,5},{3,5},{2,4}, {5,8},{3,0},{1,2},{8,1},{4,8},{5,0},{7,9},{3,2},{3,9},{1,6},{8,7}, {2,0}}
27	0,54	24	{{5,7},{5,9},{5,6},{2,7},{7,1},{1,3},{0,1},{4,6},{1,5},{3,5},{2,4}, {5,8},{3,0},{1,2},{8,1},{4,8},{5,0},{7,9},{3,2},{3,9},{1,6},{8,7}, {2,0},{9,4}}
28	0,56	25	{{5,7},{5,9},{5,6},{2,7},{7,1},{1,3},{0,1},{4,6},{1,5},{3,5},{2,4}, {5,8},{3,0},{1,2},{8,1},{4,8},{5,0},{7,9},{3,2},{3,9},{1,6},{8,7}, {2,0},{9,4},{2,8}}
29	0,58	26	{{1,2},{6,0},{5,4},{8,9},{6,1},{5,3},{7,6},{0,8},{4,8},{8,7},{7,2}, {1,5},{2,3},{3,7},{1,3},{7,9},{4,2},{7,4},{7,5},{0,3},{4,9},{8,5}, {4,1},{5,0},{8,6},{4,3}}
30	0,60	27	{{1,2},{6,0},{5,4},{8,9},{6,1},{5,3},{7,6},{0,8},{4,8},{8,7},{7,2}, {1,5},{2,3},{3,7},{1,3},{7,9},{4,2},{7,4},{7,5},{0,3},{4,9},{8,5}, {4,1},{5,0},{8,6},{4,3},{2,6}}
31	0,62	28	{{1,2},{6,0},{5,4},{8,9},{6,1},{5,3},{7,6},{0,8},{4,8},{8,7},{7,2}, {1,5},{2,3},{3,7},{1,3},{7,9},{4,2},{7,4},{7,5},{0,3},{4,9},{8,5}, {4,1},{5,0},{8,6},{4,3},{2,6},{2,5}}
32	0,64	29	{{1,2},{6,0},{5,4},{8,9},{6,1},{5,3},{7,6},{0,8},{4,8},{8,7},{7,2}, {1,5},{2,3},{3,7},{1,3},{7,9},{4,2},{7,4},{7,5},{0,3},{4,9},{8,5}, {4,1},{5,0},{8,6},{4,3},{2,6},{2,5},{6,4}}

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
33	0,66	30	{ {5,4}, {9,7}, {9,6}, {2,4}, {2,7}, {5,2}, {5,9}, {3,4}, {4,7}, {3,8}, {6,0}, {7,8}, {4,9}, {5,3}, {4,6}, {8,6}, {7,1}, {4,8}, {1,3}, {4,1}, {0,4}, {5,1}, {3,7}, {2,9}, {1,6}, {5,0}, {7,5}, {5,6}, {2,3}, {2,0} }
34	0,68	31	{ {5,4}, {9,7}, {9,6}, {2,4}, {2,7}, {5,2}, {5,9}, {3,4}, {4,7}, {3,8}, {6,0}, {7,8}, {4,9}, {5,3}, {4,6}, {8,6}, {7,1}, {4,8}, {1,3}, {4,1}, {0,4}, {5,1}, {3,7}, {2,9}, {1,6}, {5,0}, {7,5}, {5,6}, {2,3}, {2,0}, {6,7} }
35	0,70	32	{ {5,4}, {9,7}, {9,6}, {2,4}, {2,7}, {5,2}, {5,9}, {3,4}, {4,7}, {3,8}, {6,0}, {7,8}, {4,9}, {5,3}, {4,6}, {8,6}, {7,1}, {4,8}, {1,3}, {4,1}, {0,4}, {5,1}, {3,7}, {2,9}, {1,6}, {5,0}, {7,5}, {5,6}, {2,3}, {2,0}, {6,7}, {0,8} }
36	0,72	32	{ {1,7}, {5,2}, {3,1}, {7,6}, {2,1}, {2,3}, {4,8}, {1,6}, {8,2}, {6,0}, {6,5}, {9,6}, {8,3}, {7,4}, {8,7}, {8,5}, {1,9}, {7,5}, {2,7}, {3,4}, {5,9}, {2,6}, {1,5}, {9,8}, {4,2}, {3,9}, {5,0}, {1,8}, {4,5}, {0,4}, {3,6}, {3,5} }
37	0,74	33	{ {1,7}, {5,2}, {3,1}, {7,6}, {2,1}, {2,3}, {4,8}, {1,6}, {8,2}, {6,0}, {6,5}, {9,6}, {8,3}, {7,4}, {8,7}, {8,5}, {1,9}, {7,5}, {2,7}, {3,4}, {5,9}, {2,6}, {1,5}, {9,8}, {4,2}, {3,9}, {5,0}, {1,8}, {4,5}, {0,4}, {3,6}, {3,5}, {0,8} }
38	0,76	34	{ {1,7}, {5,2}, {3,1}, {7,6}, {2,1}, {2,3}, {4,8}, {1,6}, {8,2}, {6,0}, {6,5}, {9,6}, {8,3}, {7,4}, {8,7}, {8,5}, {1,9}, {7,5}, {2,7}, {3,4}, {5,9}, {2,6}, {1,5}, {9,8}, {4,2}, {3,9}, {5,0}, {1,8}, {4,5}, {0,4}, {3,6}, {3,5}, {0,8}, {9,2} }
39	0,78	35	{ {1,7}, {5,2}, {3,1}, {7,6}, {2,1}, {2,3}, {4,8}, {1,6}, {8,2}, {6,0}, {6,5}, {9,6}, {8,3}, {7,4}, {8,7}, {8,5}, {1,9}, {7,5}, {2,7}, {3,4}, {5,9}, {2,6}, {1,5}, {9,8}, {4,2}, {3,9}, {5,0}, {1,8}, {4,5}, {0,4}, {3,6}, {3,5}, {0,8}, {9,2}, {1,0} }
40	0,80	36	{ {5,2}, {7,3}, {4,8}, {6,9}, {7,6}, {7,9}, {2,0}, {4,2}, {1,3}, {1,6}, {7,2}, {5,4}, {4,1}, {6,4}, {2,9}, {8,0}, {5,0}, {3,4}, {3,5}, {7,0}, {8,3}, {8,7}, {0,1}, {2,3}, {0,3}, {7,5}, {6,8}, {0,4}, {9,3}, {2,6}, {8,9}, {8,2}, {4,7}, {3,6}, {1,8}, {5,8} }
41	0,82	37	{ {5,2}, {7,3}, {4,8}, {6,9}, {7,6}, {7,9}, {2,0}, {4,2}, {1,3}, {1,6}, {7,2}, {5,4}, {4,1}, {6,4}, {2,9}, {8,0}, {5,0}, {3,4}, {3,5}, {7,0}, {8,3}, {8,7}, {0,1}, {2,3}, {0,3}, {7,5}, {6,8}, {0,4}, {9,3}, {2,6}, {8,9}, {8,2}, {4,7}, {3,6}, {1,8}, {5,8}, {6,0} }

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
42	0,84	38	{\{5,2\},\{7,3\},\{4,8\},\{6,9\},\{7,6\},\{7,9\},\{2,0\},\{4,2\},\{1,3\},\{1,6\},\{7,2\},\{5,4\},\{4,1\},\{6,4\},\{2,9\},\{8,0\},\{5,0\},\{3,4\},\{3,5\},\{7,0\},\{8,3\},\{8,7\},\{0,1\},\{2,3\},\{0,3\},\{7,5\},\{6,8\},\{0,4\},\{9,3\},\{2,6\},\{8,9\},\{8,2\},\{4,7\},\{3,6\},\{1,8\},\{5,8\},\{6,0\},\{5,1\}}
43	0,86	39	{\{0,4\},\{2,4\},\{6,2\},\{9,2\},\{4,6\},\{4,8\},\{4,5\},\{2,1\},\{4,3\},\{0,6\},\{6,3\},\{3,0\},\{2,3\},\{9,5\},\{8,5\},\{5,7\},\{0,2\},\{1,3\},\{8,1\},\{8,2\},\{8,3\},\{4,9\},\{8,7\},\{2,5\},\{1,7\},\{0,1\},\{1,9\},\{9,0\},\{7,4\},\{3,7\},\{8,0\},\{5,6\},\{5,1\},\{6,8\},\{4,1\},\{5,0\},\{3,5\},\{3,9\},\{8,9\}}
44	0,88	40	{\{0,4\},\{2,4\},\{6,2\},\{9,2\},\{4,6\},\{4,8\},\{4,5\},\{2,1\},\{4,3\},\{0,6\},\{6,3\},\{3,0\},\{2,3\},\{9,5\},\{8,5\},\{5,7\},\{0,2\},\{1,3\},\{8,1\},\{8,2\},\{8,3\},\{4,9\},\{8,7\},\{2,5\},\{1,7\},\{0,1\},\{1,9\},\{9,0\},\{7,4\},\{3,7\},\{8,0\},\{5,6\},\{5,1\},\{6,8\},\{4,1\},\{5,0\},\{3,5\},\{3,9\},\{8,9\},\{6,7\}}
45	0,90	41	{\{0,4\},\{2,4\},\{6,2\},\{9,2\},\{4,6\},\{4,8\},\{4,5\},\{2,1\},\{4,3\},\{0,6\},\{6,3\},\{3,0\},\{2,3\},\{9,5\},\{8,5\},\{5,7\},\{0,2\},\{1,3\},\{8,1\},\{8,2\},\{8,3\},\{4,9\},\{8,7\},\{2,5\},\{1,7\},\{0,1\},\{1,9\},\{9,0\},\{7,4\},\{3,7\},\{8,0\},\{5,6\},\{5,1\},\{6,8\},\{4,1\},\{5,0\},\{3,5\},\{3,9\},\{8,9\},\{6,7\},\{9,7\}}
46	0,92	41	{\{0,4\},\{2,4\},\{6,2\},\{9,2\},\{4,6\},\{4,8\},\{4,5\},\{2,1\},\{4,3\},\{0,6\},\{6,3\},\{3,0\},\{2,3\},\{9,5\},\{8,5\},\{5,7\},\{0,2\},\{1,3\},\{8,1\},\{8,2\},\{8,3\},\{4,9\},\{8,7\},\{2,5\},\{1,7\},\{0,1\},\{1,9\},\{9,0\},\{7,4\},\{3,7\},\{8,0\},\{5,6\},\{5,1\},\{6,8\},\{4,1\},\{5,0\},\{3,5\},\{3,9\},\{8,9\},\{6,7\},\{9,7\}}
47	0,94	42	{\{5,7\},\{6,5\},\{1,5\},\{4,5\},\{3,9\},\{7,1\},\{4,6\},\{2,8\},\{6,0\},\{7,3\},\{8,1\},\{4,9\},\{9,5\},\{3,5\},\{6,8\},\{1,2\},\{5,2\},\{7,4\},\{7,8\},\{3,2\},\{0,3\},\{6,2\},\{2,0\},\{4,2\},\{4,8\},\{0,5\},\{7,2\},\{6,7\},\{8,0\},\{7,0\},\{9,1\},\{3,6\},\{3,4\},\{1,6\},\{9,6\},\{8,3\},\{8,5\},\{9,0\},\{1,3\},\{0,4\},\{9,2\},\{1,0\}}
48	0,96	43	{\{5,7\},\{6,5\},\{1,5\},\{4,5\},\{3,9\},\{7,1\},\{4,6\},\{2,8\},\{6,0\},\{7,3\},\{8,1\},\{4,9\},\{9,5\},\{3,5\},\{6,8\},\{1,2\},\{5,2\},\{7,4\},\{7,8\},\{3,2\},\{0,3\},\{6,2\},\{2,0\},\{4,2\},\{4,8\},\{0,5\},\{7,2\},\{6,7\},\{8,0\},\{7,0\},\{9,1\},\{3,6\},\{3,4\},\{1,6\},\{9,6\},\{8,3\},\{8,5\},\{9,0\},\{1,3\},\{0,4\},\{9,2\},\{1,0\},\{9,8\}}
49	0,98	44	{\{5,7\},\{6,5\},\{1,5\},\{4,5\},\{3,9\},\{7,1\},\{4,6\},\{2,8\},\{6,0\},\{7,3\},\{8,1\},\{4,9\},\{9,5\},\{3,5\},\{6,8\},\{1,2\},\{5,2\},\{7,4\},\{7,8\},\{3,2\},\{0,3\},\{6,2\},\{2,0\},\{4,2\},\{4,8\},\{0,5\},\{7,2\},\{6,7\},\{8,0\},\{7,0\},\{9,1\},\{3,6\},\{3,4\},\{1,6\},\{9,6\},\{8,3\},\{8,5\},\{9,0\},\{1,3\},\{0,4\},\{9,2\},\{1,0\},\{9,8\}}

continua ...

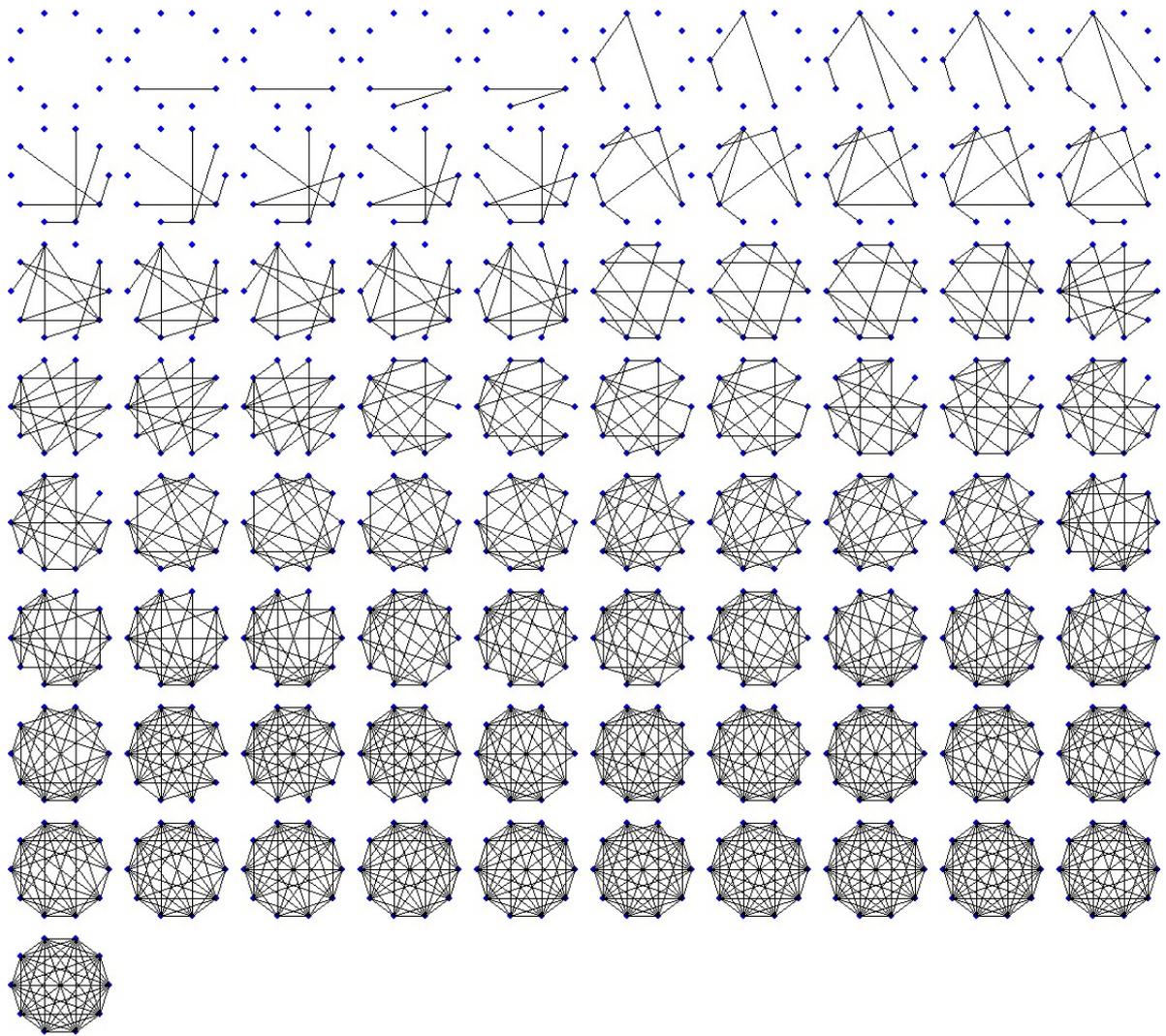


Figura 114: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 81 estágios.

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{1,6},{9,6},{8,3},{8,5},{9,0},{1,3},{0,4},{9,2},{1,0},{9,8},{4,1}}
50	1,00	45	{0,2},{7,6},{1,2},{1,7},{1,8},{6,1},{9,8},{6,2},{4,1},{4,6},{0,4}, {7,9},{6,5},{7,5},{9,4},{5,3},{8,3},{2,8},{8,4},{2,5},{9,1},{5,1}, {2,7},{2,3},{4,2},{4,5},{1,3},{3,7},{6,8},{9,3},{3,4},{6,3},{0,1}, {7,4},{6,9},{5,9},{7,8},{8,0},{9,2},{5,0},{6,0},{8,5},{3,0},{0,7}, {0,9}}

Tabela 20: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 51 estágios.

#	p(N)	n	Elos
00	0,0000	0	{}
01	0,0125	1	{{1,4}}
02	0,0250	1	{{1,4}}
03	0,0375	2	{{1,4},{3,1}}
04	0,0500	2	{{1,4},{3,1}}
05	0,0625	3	{{5,7},{7,2},{4,5}}
06	0,0750	3	{{5,7},{7,2},{4,5}}
07	0,0875	4	{{5,7},{7,2},{4,5},{1,7}}
08	0,1000	4	{{5,7},{7,2},{4,5},{1,7}}
09	0,1125	5	{{5,7},{7,2},{4,5},{1,7},{3,4}}
10	0,1250	6	{{1,0},{2,3},{9,2},{8,2},{1,6},{1,4}}
11	0,1375	6	{{1,0},{2,3},{9,2},{8,2},{1,6},{1,4}}
12	0,1500	7	{{1,0},{2,3},{9,2},{8,2},{1,6},{1,4},{0,4}}
13	0,1625	7	{{1,0},{2,3},{9,2},{8,2},{1,6},{1,4},{0,4}}
14	0,1750	8	{{1,0},{2,3},{9,2},{8,2},{1,6},{1,4},{0,4},{5,3}}
15	0,1875	8	{{5,4},{3,4},{7,6},{9,4},{7,1},{6,8},{5,7},{8,1}}
16	0,2000	9	{{5,4},{3,4},{7,6},{9,4},{7,1},{6,8},{5,7},{8,1},{7,4}}
17	0,2125	10	{{5,4},{3,4},{7,6},{9,4},{7,1},{6,8},{5,7},{8,1},{7,4},{1,4}}
18	0,2250	10	{{5,4},{3,4},{7,6},{9,4},{7,1},{6,8},{5,7},{8,1},{7,4},{1,4}}
19	0,2375	11	{{5,4},{3,4},{7,6},{9,4},{7,1},{6,8},{5,7},{8,1},{7,4},{1,4},{3,2}}
20	0,2500	11	{{1,7},{7,5},{2,9},{4,7},{1,6},{0,4},{3,7},{9,1},{1,3},{4,1},{6,0}}
21	0,2625	12	{{1,7},{7,5},{2,9},{4,7},{1,6},{0,4},{3,7},{9,1},{1,3},{4,1},{6,0}, {3,4}}
22	0,2750	12	{{1,7},{7,5},{2,9},{4,7},{1,6},{0,4},{3,7},{9,1},{1,3},{4,1},{6,0}, {3,4}}
23	0,2875	13	{{1,7},{7,5},{2,9},{4,7},{1,6},{0,4},{3,7},{9,1},{1,3},{4,1},{6,0}, {3,4},{5,4}}
24	0,3000	14	{{1,7},{7,5},{2,9},{4,7},{1,6},{0,4},{3,7},{9,1},{1,3},{4,1},{6,0}, {3,4},{5,4},{8,1}}
25	0,3125	14	{{5,0},{2,6},{5,3},{9,2},{4,1},{3,2},{3,8},{0,7},{2,5},{6,9},{4,3},

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{8,7},{7,6},{5,7}}
26	0,3250	15	{{5,0},{2,6},{5,3},{9,2},{4,1},{3,2},{3,8},{0,7},{2,5},{6,9},{4,3}, {8,7},{7,6},{5,7},{8,0}}
27	0,3375	15	{{5,0},{2,6},{5,3},{9,2},{4,1},{3,2},{3,8},{0,7},{2,5},{6,9},{4,3}, {8,7},{7,6},{5,7},{8,0}}
28	0,3500	16	{{5,0},{2,6},{5,3},{9,2},{4,1},{3,2},{3,8},{0,7},{2,5},{6,9},{4,3}, {8,7},{7,6},{5,7},{8,0},{8,2}}
29	0,3625	16	{{0,4},{4,6},{5,0},{6,3},{3,9},{2,1},{8,2},{5,1},{9,6},{8,5},{7,6}, {7,2},{5,3},{5,6},{0,3},{5,9}}
30	0,3750	17	{{0,4},{4,6},{5,0},{6,3},{3,9},{2,1},{8,2},{5,1},{9,6},{8,5},{7,6}, {7,2},{5,3},{5,6},{0,3},{5,9},{9,4}}
31	0,3875	17	{{0,4},{4,6},{5,0},{6,3},{3,9},{2,1},{8,2},{5,1},{9,6},{8,5},{7,6}, {7,2},{5,3},{5,6},{0,3},{5,9},{9,4}}
32	0,4000	18	{{0,4},{4,6},{5,0},{6,3},{3,9},{2,1},{8,2},{5,1},{9,6},{8,5},{7,6}, {7,2},{5,3},{5,6},{0,3},{5,9},{9,4},{2,0}}
33	0,4125	19	{{5,7},{8,7},{9,3},{1,6},{1,4},{5,6},{2,6},{3,1},{1,2},{7,4},{9,4}, {0,6},{8,9},{5,9},{5,4},{3,5},{8,2},{8,6},{5,2}}
34	0,4250	19	{{5,7},{8,7},{9,3},{1,6},{1,4},{5,6},{2,6},{3,1},{1,2},{7,4},{9,4}, {0,6},{8,9},{5,9},{5,4},{3,5},{8,2},{8,6},{5,2}}
35	0,4375	20	{{5,7},{8,7},{9,3},{1,6},{1,4},{5,6},{2,6},{3,1},{1,2},{7,4},{9,4}, {0,6},{8,9},{5,9},{5,4},{3,5},{8,2},{8,6},{5,2},{0,1}}
36	0,4500	20	{{5,7},{8,7},{9,3},{1,6},{1,4},{5,6},{2,6},{3,1},{1,2},{7,4},{9,4}, {0,6},{8,9},{5,9},{5,4},{3,5},{8,2},{8,6},{5,2},{0,1}}
37	0,4625	21	{{3,9},{3,7},{5,1},{8,2},{5,2},{3,6},{3,4},{5,0},{1,6},{5,8},{1,2}, {8,7},{4,5},{2,0},{8,6},{1,0},{2,3},{1,7},{7,6},{6,0},{8,4}}
38	0,4750	21	{{3,9},{3,7},{5,1},{8,2},{5,2},{3,6},{3,4},{5,0},{1,6},{5,8},{1,2}, {8,7},{4,5},{2,0},{8,6},{1,0},{2,3},{1,7},{7,6},{6,0},{8,4}}
39	0,4875	22	{{3,9},{3,7},{5,1},{8,2},{5,2},{3,6},{3,4},{5,0},{1,6},{5,8},{1,2}, {8,7},{4,5},{2,0},{8,6},{1,0},{2,3},{1,7},{7,6},{6,0},{8,4},{7,5}}
40	0,5000	23	{{3,9},{3,7},{5,1},{8,2},{5,2},{3,6},{3,4},{5,0},{1,6},{5,8},{1,2}, {8,7},{4,5},{2,0},{8,6},{1,0},{2,3},{1,7},{7,6},{6,0},{8,4},{7,5},

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{4,7}}
41	0,5125	23	{{5,3},{7,1},{6,1},{1,4},{8,4},{8,6},{7,0},{5,2},{6,4},{9,7},{0,1}, {3,4},{5,4},{5,1},{6,7},{9,8},{2,7},{1,3},{5,8},{2,9},{4,9},{0,3}, {4,2}}
42	0,5250	24	{{5,3},{7,1},{6,1},{1,4},{8,4},{8,6},{7,0},{5,2},{6,4},{9,7},{0,1}, {3,4},{5,4},{5,1},{6,7},{9,8},{2,7},{1,3},{5,8},{2,9},{4,9},{0,3}, {4,2},{8,1}}
43	0,5375	24	{{5,3},{7,1},{6,1},{1,4},{8,4},{8,6},{7,0},{5,2},{6,4},{9,7},{0,1}, {3,4},{5,4},{5,1},{6,7},{9,8},{2,7},{1,3},{5,8},{2,9},{4,9},{0,3}, {4,2},{8,1}}
44	0,5500	25	{{5,3},{7,1},{6,1},{1,4},{8,4},{8,6},{7,0},{5,2},{6,4},{9,7},{0,1}, {3,4},{5,4},{5,1},{6,7},{9,8},{2,7},{1,3},{5,8},{2,9},{4,9},{0,3}, {4,2},{8,1},{3,2}}
45	0,5625	25	{{0,7},{8,1},{6,7},{7,5},{6,3},{0,6},{4,9},{2,4},{7,8},{8,5},{3,8}, {5,3},{4,1},{5,6},{6,2},{7,4},{0,4},{2,0},{3,9},{4,3},{5,2},{3,1}, {6,8},{4,8},{1,7}}
46	0,5750	26	{{0,7},{8,1},{6,7},{7,5},{6,3},{0,6},{4,9},{2,4},{7,8},{8,5},{3,8}, {5,3},{4,1},{5,6},{6,2},{7,4},{0,4},{2,0},{3,9},{4,3},{5,2},{3,1}, {6,8},{4,8},{1,7},{9,8}}
47	0,5875	26	{{0,7},{8,1},{6,7},{7,5},{6,3},{0,6},{4,9},{2,4},{7,8},{8,5},{3,8}, {5,3},{4,1},{5,6},{6,2},{7,4},{0,4},{2,0},{3,9},{4,3},{5,2},{3,1}, {6,8},{4,8},{1,7},{9,8}}
48	0,6000	27	{{0,7},{8,1},{6,7},{7,5},{6,3},{0,6},{4,9},{2,4},{7,8},{8,5},{3,8}, {5,3},{4,1},{5,6},{6,2},{7,4},{0,4},{2,0},{3,9},{4,3},{5,2},{3,1}, {6,8},{4,8},{1,7},{9,8},{3,0}}
49	0,6125	28	{{5,0},{3,2},{2,9},{5,7},{7,4},{0,3},{6,7},{2,5},{9,0},{2,1},{4,6}, {2,8},{0,7},{7,2},{6,5},{6,8},{1,5},{1,4},{1,3},{2,6},{9,1},{5,9}, {5,4},{3,7},{3,6},{2,0},{6,9},{3,8}}
50	0,6250	28	{{5,0},{3,2},{2,9},{5,7},{7,4},{0,3},{6,7},{2,5},{9,0},{2,1},{4,6}, {2,8},{0,7},{7,2},{6,5},{6,8},{1,5},{1,4},{1,3},{2,6},{9,1},{5,9}, {5,4},{3,7},{3,6},{2,0},{6,9},{3,8}}

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
51	0,6375	29	{ {5,0}, {3,2}, {2,9}, {5,7}, {7,4}, {0,3}, {6,7}, {2,5}, {9,0}, {2,1}, {4,6}, {2,8}, {0,7}, {7,2}, {6,5}, {6,8}, {1,5}, {1,4}, {1,3}, {2,6}, {9,1}, {5,9}, {5,4}, {3,7}, {3,6}, {2,0}, {6,9}, {3,8}, {4,2} }
52	0,6500	29	{ {5,0}, {3,2}, {2,9}, {5,7}, {7,4}, {0,3}, {6,7}, {2,5}, {9,0}, {2,1}, {4,6}, {2,8}, {0,7}, {7,2}, {6,5}, {6,8}, {1,5}, {1,4}, {1,3}, {2,6}, {9,1}, {5,9}, {5,4}, {3,7}, {3,6}, {2,0}, {6,9}, {3,8}, {4,2} }
53	0,6625	30	{ {0,3}, {8,3}, {6,3}, {5,7}, {1,9}, {7,3}, {5,6}, {5,4}, {6,9}, {6,2}, {8,5}, {2,4}, {1,2}, {7,4}, {7,6}, {4,6}, {5,1}, {6,0}, {1,8}, {2,9}, {7,1}, {2,5}, {8,6}, {2,3}, {4,8}, {0,8}, {1,6}, {8,7}, {3,9}, {7,9} }
54	0,6750	30	{ {0,3}, {8,3}, {6,3}, {5,7}, {1,9}, {7,3}, {5,6}, {5,4}, {6,9}, {6,2}, {8,5}, {2,4}, {1,2}, {7,4}, {7,6}, {4,6}, {5,1}, {6,0}, {1,8}, {2,9}, {7,1}, {2,5}, {8,6}, {2,3}, {4,8}, {0,8}, {1,6}, {8,7}, {3,9}, {7,9} }
55	0,6875	31	{ {0,3}, {8,3}, {6,3}, {5,7}, {1,9}, {7,3}, {5,6}, {5,4}, {6,9}, {6,2}, {8,5}, {2,4}, {1,2}, {7,4}, {7,6}, {4,6}, {5,1}, {6,0}, {1,8}, {2,9}, {7,1}, {2,5}, {8,6}, {2,3}, {4,8}, {0,8}, {1,6}, {8,7}, {3,9}, {7,9}, {4,1} }
56	0,7000	31	{ {0,3}, {8,3}, {6,3}, {5,7}, {1,9}, {7,3}, {5,6}, {5,4}, {6,9}, {6,2}, {8,5}, {2,4}, {1,2}, {7,4}, {7,6}, {4,6}, {5,1}, {6,0}, {1,8}, {2,9}, {7,1}, {2,5}, {8,6}, {2,3}, {4,8}, {0,8}, {1,6}, {8,7}, {3,9}, {7,9}, {4,1} }
57	0,7125	32	{ {4,7}, {9,4}, {4,2}, {3,4}, {4,6}, {6,2}, {2,7}, {5,4}, {7,5}, {1,2}, {4,0}, {8,3}, {3,7}, {0,3}, {6,3}, {7,0}, {0,1}, {2,9}, {2,3}, {8,9}, {1,4}, {7,9}, {6,1}, {8,6}, {1,3}, {5,3}, {8,2}, {2,5}, {0,2}, {5,6}, {0,6}, {0,8} }
58	0,7250	33	{ {4,7}, {9,4}, {4,2}, {3,4}, {4,6}, {6,2}, {2,7}, {5,4}, {7,5}, {1,2}, {4,0}, {8,3}, {3,7}, {0,3}, {6,3}, {7,0}, {0,1}, {2,9}, {2,3}, {8,9}, {1,4}, {7,9}, {6,1}, {8,6}, {1,3}, {5,3}, {8,2}, {2,5}, {0,2}, {5,6}, {0,6}, {0,8}, {5,8} }
59	0,7375	33	{ {4,7}, {9,4}, {4,2}, {3,4}, {4,6}, {6,2}, {2,7}, {5,4}, {7,5}, {1,2}, {4,0}, {8,3}, {3,7}, {0,3}, {6,3}, {7,0}, {0,1}, {2,9}, {2,3}, {8,9}, {1,4}, {7,9}, {6,1}, {8,6}, {1,3}, {5,3}, {8,2}, {2,5}, {0,2}, {5,6}, {0,6}, {0,8}, {5,8} }
60	0,7500	34	{ {4,7}, {9,4}, {4,2}, {3,4}, {4,6}, {6,2}, {2,7}, {5,4}, {7,5}, {1,2}, {4,0}, {8,3}, {3,7}, {0,3}, {6,3}, {7,0}, {0,1}, {2,9}, {2,3}, {8,9}, {1,4}, {7,9}, {6,1}, {8,6}, {1,3}, {5,3}, {8,2}, {2,5}, {0,2}, {5,6}, {0,6}, {0,8}, {5,8}, {8,4} }

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
61	0,7625	34	{ {9,0}, {4,5}, {7,5}, {0,6}, {7,2}, {9,7}, {9,6}, {7,8}, {6,1}, {1,5}, {8,5}, {7,4}, {8,3}, {1,4}, {6,4}, {2,9}, {2,5}, {2,8}, {7,1}, {9,4}, {6,5}, {6,7}, {9,3}, {4,0}, {6,8}, {3,7}, {5,0}, {8,0}, {3,1}, {3,6}, {6,2}, {9,5}, {8,4}, {3,4} }
62	0,7750	35	{ {9,0}, {4,5}, {7,5}, {0,6}, {7,2}, {9,7}, {9,6}, {7,8}, {6,1}, {1,5}, {8,5}, {7,4}, {8,3}, {1,4}, {6,4}, {2,9}, {2,5}, {2,8}, {7,1}, {9,4}, {6,5}, {6,7}, {9,3}, {4,0}, {6,8}, {3,7}, {5,0}, {8,0}, {3,1}, {3,6}, {6,2}, {9,5}, {8,4}, {3,4}, {0,1} }
63	0,7875	35	{ {9,0}, {4,5}, {7,5}, {0,6}, {7,2}, {9,7}, {9,6}, {7,8}, {6,1}, {1,5}, {8,5}, {7,4}, {8,3}, {1,4}, {6,4}, {2,9}, {2,5}, {2,8}, {7,1}, {9,4}, {6,5}, {6,7}, {9,3}, {4,0}, {6,8}, {3,7}, {5,0}, {8,0}, {3,1}, {3,6}, {6,2}, {9,5}, {8,4}, {3,4}, {0,1} }
64	0,8000	36	{ {4,3}, {8,6}, {2,8}, {3,2}, {8,1}, {0,7}, {8,4}, {5,0}, {4,5}, {4,6}, {3,5}, {9,4}, {6,2}, {6,3}, {7,2}, {8,5}, {2,1}, {9,3}, {8,3}, {5,2}, {5,6}, {0,3}, {6,9}, {1,3}, {4,2}, {1,4}, {7,9}, {6,7}, {9,1}, {5,1}, {4,7}, {7,1}, {7,3}, {7,5}, {0,8}, {6,1} }
65	0,8125	37	{ {4,3}, {8,6}, {2,8}, {3,2}, {8,1}, {0,7}, {8,4}, {5,0}, {4,5}, {4,6}, {3,5}, {9,4}, {6,2}, {6,3}, {7,2}, {8,5}, {2,1}, {9,3}, {8,3}, {5,2}, {5,6}, {0,3}, {6,9}, {1,3}, {4,2}, {1,4}, {7,9}, {6,7}, {9,1}, {5,1}, {4,7}, {7,1}, {7,3}, {7,5}, {0,8}, {6,1}, {0,2} }
66	0,8250	37	{ {4,3}, {8,6}, {2,8}, {3,2}, {8,1}, {0,7}, {8,4}, {5,0}, {4,5}, {4,6}, {3,5}, {9,4}, {6,2}, {6,3}, {7,2}, {8,5}, {2,1}, {9,3}, {8,3}, {5,2}, {5,6}, {0,3}, {6,9}, {1,3}, {4,2}, {1,4}, {7,9}, {6,7}, {9,1}, {5,1}, {4,7}, {7,1}, {7,3}, {7,5}, {0,8}, {6,1}, {0,2} }
67	0,8375	38	{ {4,3}, {8,6}, {2,8}, {3,2}, {8,1}, {0,7}, {8,4}, {5,0}, {4,5}, {4,6}, {3,5}, {9,4}, {6,2}, {6,3}, {7,2}, {8,5}, {2,1}, {9,3}, {8,3}, {5,2}, {5,6}, {0,3}, {6,9}, {1,3}, {4,2}, {1,4}, {7,9}, {6,7}, {9,1}, {5,1}, {4,7}, {7,1}, {7,3}, {7,5}, {0,8}, {6,1}, {0,2}, {8,7} }
68	0,8500	38	{ {9,7}, {0,7}, {2,5}, {9,3}, {6,0}, {8,6}, {8,5}, {2,0}, {6,5}, {7,5}, {1,0}, {9,6}, {1,2}, {3,4}, {8,0}, {6,4}, {8,7}, {7,1}, {5,1}, {3,8}, {3,6}, {1,3}, {8,1}, {2,4}, {7,6}, {9,5}, {2,8}, {8,4}, {6,1}, {7,2}, {3,2}, {5,3}, {5,4},

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{8,9},{7,3},{0,9},{6,2},{1,4}}
69	0,8625	39	{{9,7},{0,7},{2,5},{9,3},{6,0},{8,6},{8,5},{2,0},{6,5},{7,5},{1,0}, {9,6},{1,2},{3,4},{8,0},{6,4},{8,7},{7,1},{5,1},{3,8},{3,6},{1,3}, {8,1},{2,4},{7,6},{9,5},{2,8},{8,4},{6,1},{7,2},{3,2},{5,3},{5,4}, {8,9},{7,3},{0,9},{6,2},{1,4},{4,7}}
70	0,8750	39	{{9,7},{0,7},{2,5},{9,3},{6,0},{8,6},{8,5},{2,0},{6,5},{7,5},{1,0}, {9,6},{1,2},{3,4},{8,0},{6,4},{8,7},{7,1},{5,1},{3,8},{3,6},{1,3}, {8,1},{2,4},{7,6},{9,5},{2,8},{8,4},{6,1},{7,2},{3,2},{5,3},{5,4}, {8,9},{7,3},{0,9},{6,2},{1,4},{4,7}}
71	0,8875	40	{{9,7},{0,7},{2,5},{9,3},{6,0},{8,6},{8,5},{2,0},{6,5},{7,5},{1,0}, {9,6},{1,2},{3,4},{8,0},{6,4},{8,7},{7,1},{5,1},{3,8},{3,6},{1,3}, {8,1},{2,4},{7,6},{9,5},{2,8},{8,4},{6,1},{7,2},{3,2},{5,3},{5,4}, {8,9},{7,3},{0,9},{6,2},{1,4},{4,7},{0,4}}
72	0,9000	40	{{4,0},{4,8},{5,9},{4,7},{9,0},{8,0},{6,5},{9,6},{5,7},{6,8},{0,7}, {9,1},{4,3},{9,4},{7,8},{8,5},{1,2},{2,3},{4,6},{6,2},{6,7},{1,8}, {8,3},{7,3},{6,1},{7,2},{0,5},{7,1},{5,4},{5,1},{1,0},{2,4},{5,3}, {3,9},{9,7},{2,5},{8,2},{2,0},{8,9},{3,1}}
73	0,9125	41	{{4,0},{4,8},{5,9},{4,7},{9,0},{8,0},{6,5},{9,6},{5,7},{6,8},{0,7}, {9,1},{4,3},{9,4},{7,8},{8,5},{1,2},{2,3},{4,6},{6,2},{6,7},{1,8}, {8,3},{7,3},{6,1},{7,2},{0,5},{7,1},{5,4},{5,1},{1,0},{2,4},{5,3}, {3,9},{9,7},{2,5},{8,2},{2,0},{8,9},{3,1},{2,9}}
74	0,9250	42	{{4,0},{4,8},{5,9},{4,7},{9,0},{8,0},{6,5},{9,6},{5,7},{6,8},{0,7}, {9,1},{4,3},{9,4},{7,8},{8,5},{1,2},{2,3},{4,6},{6,2},{6,7},{1,8}, {8,3},{7,3},{6,1},{7,2},{0,5},{7,1},{5,4},{5,1},{1,0},{2,4},{5,3}, {3,9},{9,7},{2,5},{8,2},{2,0},{8,9},{3,1},{2,9},{1,4}}
75	0,9375	42	{{9,3},{8,3},{9,1},{3,0},{5,7},{4,5},{6,0},{1,5},{3,6},{9,4},{3,1}, {1,7},{2,5},{9,2},{4,3},{8,5},{0,8},{4,6},{7,3},{8,2},{6,8},{4,2}, {2,6},{4,1},{9,7},{5,0},{9,6},{0,9},{1,8},{4,0},{7,6},{4,8},{0,7}, {2,1},{5,6},{3,5},{1,6},{0,1},{2,7},{4,7},{3,2},{9,5}}
76	0,9500	43	{{9,3},{8,3},{9,1},{3,0},{5,7},{4,5},{6,0},{1,5},{3,6},{9,4},{3,1}, {1,7},{2,5},{9,2},{4,3},{8,5},{0,8},{4,6},{7,3},{8,2},{6,8},{4,2},

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{2,6},{4,1},{9,7},{5,0},{9,6},{0,9},{1,8},{4,0},{7,6},{4,8},{0,7}, {2,1},{5,6},{3,5},{1,6},{0,1},{2,7},{4,7},{3,2},{9,5},{8,7}}
77	0,9625	43	{{9,3},{8,3},{9,1},{3,0},{5,7},{4,5},{6,0},{1,5},{3,6},{9,4},{3,1}, {1,7},{2,5},{9,2},{4,3},{8,5},{0,8},{4,6},{7,3},{8,2},{6,8},{4,2}, {2,6},{4,1},{9,7},{5,0},{9,6},{0,9},{1,8},{4,0},{7,6},{4,8},{0,7}, {2,1},{5,6},{3,5},{1,6},{0,1},{2,7},{4,7},{3,2},{9,5},{8,7}}
78	0,9750	44	{{9,3},{8,3},{9,1},{3,0},{5,7},{4,5},{6,0},{1,5},{3,6},{9,4},{3,1}, {1,7},{2,5},{9,2},{4,3},{8,5},{0,8},{4,6},{7,3},{8,2},{6,8},{4,2}, {2,6},{4,1},{9,7},{5,0},{9,6},{0,9},{1,8},{4,0},{7,6},{4,8},{0,7}, {2,1},{5,6},{3,5},{1,6},{0,1},{2,7},{4,7},{3,2},{9,5},{8,7},{0,2}}
79	0,9875	44	{{4,5},{4,1},{3,6},{2,5},{7,3},{7,1},{4,0},{3,1},{6,5},{9,2},{5,0}, {3,2},{6,8},{6,7},{9,7},{0,9},{7,5},{8,7},{3,5},{6,0},{1,8},{4,2}, {0,1},{7,2},{7,4},{8,9},{8,4},{0,8},{2,6},{3,9},{5,1},{4,3},{4,6}, {8,3},{1,2},{3,0},{4,9},{9,5},{2,0},{8,5},{8,2},{0,7},{9,6},{9,1}}
80	1,0000	45	{{4,5},{4,1},{3,6},{2,5},{7,3},{7,1},{4,0},{3,1},{6,5},{9,2},{5,0}, {3,2},{6,8},{6,7},{9,7},{0,9},{7,5},{8,7},{3,5},{6,0},{1,8},{4,2}, {0,1},{7,2},{7,4},{8,9},{8,4},{0,8},{2,6},{3,9},{5,1},{4,3},{4,6}, {8,3},{1,2},{3,0},{4,9},{9,5},{2,0},{8,5},{8,2},{0,7},{9,6},{9,1}, {1,6}}

Tabela 21: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 81 estágios.

#	p(N)	n	Elos
000	0,00	0	{}
001	0,01	0	{}
002	0,02	1	{{4,5}}
003	0,03	1	{{4,5}}
004	0,04	2	{{4,5},{6,1}}
005	0,05	2	{{4,5},{6,1}}
006	0,06	3	{{4,5},{6,1},{3,0}}
007	0,07	3	{{4,5},{6,1},{3,0}}

continua ...

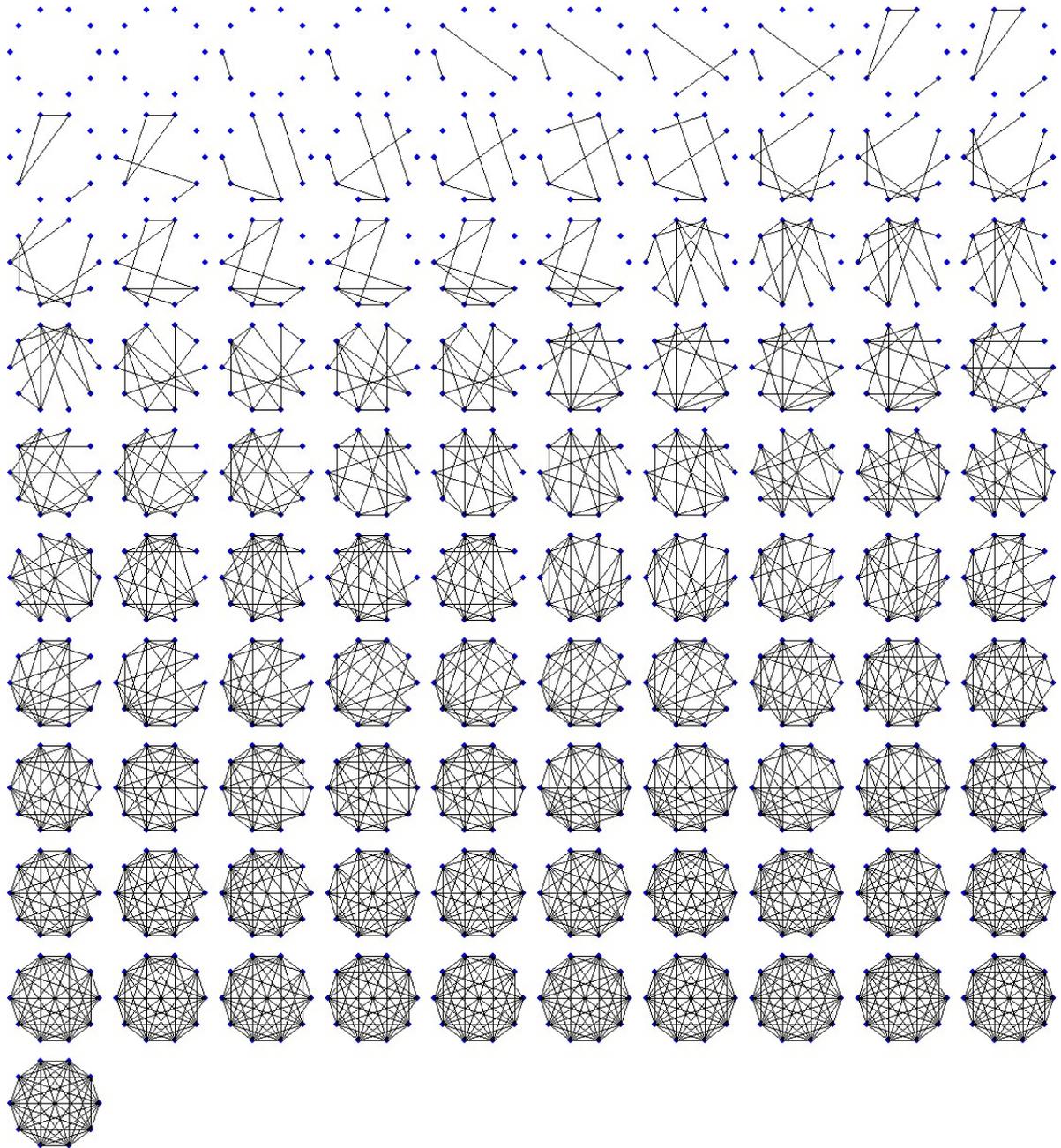


Figura 115: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 101 estágios.

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
008	0,08	4	{{8,7},{1,2},{7,4},{4,8}}
009	0,09	4	{{8,7},{1,2},{7,4},{4,8}}
010	0,10	4	{{8,7},{1,2},{7,4},{4,8}}
011	0,11	5	{{8,7},{1,2},{7,4},{4,8},{1,5}}
012	0,12	5	{{4,2},{2,3},{1,8},{4,5},{2,7}}
013	0,13	6	{{4,2},{2,3},{1,8},{4,5},{2,7},{9,4}}
014	0,14	6	{{4,2},{2,3},{1,8},{4,5},{2,7},{9,4}}
015	0,15	7	{{4,2},{2,3},{1,8},{4,5},{2,7},{9,4},{6,8}}
016	0,16	7	{{4,2},{2,3},{1,8},{4,5},{2,7},{9,4},{6,8}}
017	0,17	8	{{8,5},{6,4},{5,2},{1,3},{2,9},{0,3},{4,2},{3,6}}
018	0,18	8	{{8,5},{6,4},{5,2},{1,3},{2,9},{0,3},{4,2},{3,6}}
019	0,19	9	{{8,5},{6,4},{5,2},{1,3},{2,9},{0,3},{4,2},{3,6},{5,7}}
020	0,20	9	{{8,5},{6,4},{5,2},{1,3},{2,9},{0,3},{4,2},{3,6},{5,7}}
021	0,21	9	{{4,7},{1,5},{8,5},{4,3},{8,7},{3,8},{1,2},{4,2},{4,1}}
022	0,22	10	{{4,7},{1,5},{8,5},{4,3},{8,7},{3,8},{1,2},{4,2},{4,1},{2,3}}
023	0,23	10	{{4,7},{1,5},{8,5},{4,3},{8,7},{3,8},{1,2},{4,2},{4,1},{2,3}}
024	0,24	11	{{4,7},{1,5},{8,5},{4,3},{8,7},{3,8},{1,2},{4,2},{4,1},{2,3},{5,2}}
025	0,25	11	{{4,7},{1,5},{8,5},{4,3},{8,7},{3,8},{1,2},{4,2},{4,1},{2,3},{5,2}}
026	0,26	12	{{8,1},{5,6},{3,8},{8,6},{7,3},{7,1},{6,3},{3,4},{2,7},{7,9},{4,8}, {7,6}}
027	0,27	12	{{8,1},{5,6},{3,8},{8,6},{7,3},{7,1},{6,3},{3,4},{2,7},{7,9},{4,8}, {7,6}}
028	0,28	13	{{8,1},{5,6},{3,8},{8,6},{7,3},{7,1},{6,3},{3,4},{2,7},{7,9},{4,8}, {7,6},{5,8}}
029	0,29	13	{{8,1},{5,6},{3,8},{8,6},{7,3},{7,1},{6,3},{3,4},{2,7},{7,9},{4,8}, {7,6},{5,8}}
030	0,30	14	{{8,1},{5,6},{3,8},{8,6},{7,3},{7,1},{6,3},{3,4},{2,7},{7,9},{4,8}, {7,6},{5,8},{0,8}}
031	0,31	14	{{4,3},{1,7},{6,3},{4,0},{6,7},{1,5},{9,8},{6,1},{8,2},{2,3},{5,7}, {2,6},{4,6},{3,9}}
032	0,32	14	{{4,3},{1,7},{6,3},{4,0},{6,7},{1,5},{9,8},{6,1},{8,2},{2,3},{5,7},

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{2,6},{4,6},{3,9}}
033	0,33	15	{{4,3},{1,7},{6,3},{4,0},{6,7},{1,5},{9,8},{6,1},{8,2},{2,3},{5,7}, {2,6},{4,6},{3,9},{3,8}}
034	0,34	15	{{4,3},{1,7},{6,3},{4,0},{6,7},{1,5},{9,8},{6,1},{8,2},{2,3},{5,7}, {2,6},{4,6},{3,9},{3,8}}
035	0,35	16	{{8,6},{5,8},{0,6},{8,3},{4,3},{4,1},{3,1},{1,7},{9,6},{6,3},{7,3}, {2,1},{0,3},{4,7},{8,1},{3,2}}
036	0,36	16	{{8,6},{5,8},{0,6},{8,3},{4,3},{4,1},{3,1},{1,7},{9,6},{6,3},{7,3}, {2,1},{0,3},{4,7},{8,1},{3,2}}
037	0,37	17	{{8,6},{5,8},{0,6},{8,3},{4,3},{4,1},{3,1},{1,7},{9,6},{6,3},{7,3}, {2,1},{0,3},{4,7},{8,1},{3,2},{5,1}}
038	0,38	17	{{8,6},{5,8},{0,6},{8,3},{4,3},{4,1},{3,1},{1,7},{9,6},{6,3},{7,3}, {2,1},{0,3},{4,7},{8,1},{3,2},{5,1}}
039	0,39	18	{{3,1},{6,9},{0,3},{8,6},{8,4},{3,8},{1,7},{4,2},{0,2},{5,7},{6,1}, {3,6},{7,6},{4,6},{5,0},{3,5},{7,4},{2,5}}
040	0,40	18	{{3,1},{6,9},{0,3},{8,6},{8,4},{3,8},{1,7},{4,2},{0,2},{5,7},{6,1}, {3,6},{7,6},{4,6},{5,0},{3,5},{7,4},{2,5}}
041	0,41	18	{{3,1},{6,9},{0,3},{8,6},{8,4},{3,8},{1,7},{4,2},{0,2},{5,7},{6,1}, {3,6},{7,6},{4,6},{5,0},{3,5},{7,4},{2,5}}
042	0,42	19	{{3,1},{6,9},{0,3},{8,6},{8,4},{3,8},{1,7},{4,2},{0,2},{5,7},{6,1}, {3,6},{7,6},{4,6},{5,0},{3,5},{7,4},{2,5},{2,7}}
043	0,43	19	{{8,3},{4,6},{0,8},{1,6},{2,1},{5,4},{1,3},{2,7},{4,7},{9,5},{1,8}, {3,4},{9,6},{1,5},{3,5},{2,8},{1,7},{6,7},{3,2}}
044	0,44	20	{{8,3},{4,6},{0,8},{1,6},{2,1},{5,4},{1,3},{2,7},{4,7},{9,5},{1,8}, {3,4},{9,6},{1,5},{3,5},{2,8},{1,7},{6,7},{3,2},{3,7}}
045	0,45	20	{{8,3},{4,6},{0,8},{1,6},{2,1},{5,4},{1,3},{2,7},{4,7},{9,5},{1,8}, {3,4},{9,6},{1,5},{3,5},{2,8},{1,7},{6,7},{3,2},{3,7}}
046	0,46	21	{{8,3},{4,6},{0,8},{1,6},{2,1},{5,4},{1,3},{2,7},{4,7},{9,5},{1,8}, {3,4},{9,6},{1,5},{3,5},{2,8},{1,7},{6,7},{3,2},{3,7},{0,7}}
047	0,47	21	{{3,6},{5,2},{7,0},{0,1},{8,1},{5,6},{3,4},{3,8},{1,6},{3,5},{5,1}, {6,2},{7,3},{2,1},{4,9},{7,2},{5,8},{8,0},{1,9},{5,9},{4,1}}

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
048	0,48	22	{{3,6},{5,2},{7,0},{0,1},{8,1},{5,6},{3,4},{3,8},{1,6},{3,5},{5,1},{6,2},{7,3},{2,1},{4,9},{7,2},{5,8},{8,0},{1,9},{5,9},{4,1},{9,7}}
049	0,49	22	{{3,6},{5,2},{7,0},{0,1},{8,1},{5,6},{3,4},{3,8},{1,6},{3,5},{5,1},{6,2},{7,3},{2,1},{4,9},{7,2},{5,8},{8,0},{1,9},{5,9},{4,1},{9,7}}
050	0,50	23	{{3,6},{5,2},{7,0},{0,1},{8,1},{5,6},{3,4},{3,8},{1,6},{3,5},{5,1},{6,2},{7,3},{2,1},{4,9},{7,2},{5,8},{8,0},{1,9},{5,9},{4,1},{9,7},{8,9}}
051	0,51	23	{{0,3},{2,4},{9,6},{8,6},{1,6},{8,2},{1,4},{5,3},{8,5},{2,7},{7,3},{3,8},{1,3},{7,8},{5,1},{5,4},{7,1},{5,7},{4,8},{4,7},{3,6},{1,8},{9,7}}
052	0,52	23	{{0,3},{2,4},{9,6},{8,6},{1,6},{8,2},{1,4},{5,3},{8,5},{2,7},{7,3},{3,8},{1,3},{7,8},{5,1},{5,4},{7,1},{5,7},{4,8},{4,7},{3,6},{1,8},{9,7}}
053	0,53	24	{{0,3},{2,4},{9,6},{8,6},{1,6},{8,2},{1,4},{5,3},{8,5},{2,7},{7,3},{3,8},{1,3},{7,8},{5,1},{5,4},{7,1},{5,7},{4,8},{4,7},{3,6},{1,8},{9,7},{2,3}}
054	0,54	24	{{0,3},{2,4},{9,6},{8,6},{1,6},{8,2},{1,4},{5,3},{8,5},{2,7},{7,3},{3,8},{1,3},{7,8},{5,1},{5,4},{7,1},{5,7},{4,8},{4,7},{3,6},{1,8},{9,7},{2,3}}
055	0,55	25	{{3,1},{5,4},{5,7},{4,0},{6,1},{4,2},{2,6},{7,4},{6,8},{1,9},{5,6},{0,2},{9,7},{8,2},{6,3},{3,0},{1,2},{3,8},{7,6},{3,7},{3,4},{2,7},{6,4},{3,9},{9,2}}
056	0,56	25	{{3,1},{5,4},{5,7},{4,0},{6,1},{4,2},{2,6},{7,4},{6,8},{1,9},{5,6},{0,2},{9,7},{8,2},{6,3},{3,0},{1,2},{3,8},{7,6},{3,7},{3,4},{2,7},{6,4},{3,9},{9,2}}
057	0,57	26	{{3,1},{5,4},{5,7},{4,0},{6,1},{4,2},{2,6},{7,4},{6,8},{1,9},{5,6},{0,2},{9,7},{8,2},{6,3},{3,0},{1,2},{3,8},{7,6},{3,7},{3,4},{2,7},{6,4},{3,9},{9,2},{9,5}}
058	0,58	26	{{3,1},{5,4},{5,7},{4,0},{6,1},{4,2},{2,6},{7,4},{6,8},{1,9},{5,6},{0,2},{9,7},{8,2},{6,3},{3,0},{1,2},{3,8},{7,6},{3,7},{3,4},{2,7},{6,4},{3,9},{9,2},{9,5}}

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
059	0,59	27	{\{8,6\},\{6,5\},\{5,4\},\{1,2\},\{5,9\},\{3,1\},\{7,9\},\{3,7\},\{4,9\},\{1,0\},\{4,1\},\{2,3\},\{8,2\},\{0,3\},\{8,3\},\{5,1\},\{3,4\},\{8,7\},\{7,4\},\{4,6\},\{7,1\},\{5,3\},\{6,3\},\{4,0\},\{2,4\},\{7,6\},\{4,8\}}
060	0,60	27	{\{8,6\},\{6,5\},\{5,4\},\{1,2\},\{5,9\},\{3,1\},\{7,9\},\{3,7\},\{4,9\},\{1,0\},\{4,1\},\{2,3\},\{8,2\},\{0,3\},\{8,3\},\{5,1\},\{3,4\},\{8,7\},\{7,4\},\{4,6\},\{7,1\},\{5,3\},\{6,3\},\{4,0\},\{2,4\},\{7,6\},\{4,8\}}
061	0,61	27	{\{8,6\},\{6,5\},\{5,4\},\{1,2\},\{5,9\},\{3,1\},\{7,9\},\{3,7\},\{4,9\},\{1,0\},\{4,1\},\{2,3\},\{8,2\},\{0,3\},\{8,3\},\{5,1\},\{3,4\},\{8,7\},\{7,4\},\{4,6\},\{7,1\},\{5,3\},\{6,3\},\{4,0\},\{2,4\},\{7,6\},\{4,8\}}
062	0,62	28	{\{8,6\},\{6,5\},\{5,4\},\{1,2\},\{5,9\},\{3,1\},\{7,9\},\{3,7\},\{4,9\},\{1,0\},\{4,1\},\{2,3\},\{8,2\},\{0,3\},\{8,3\},\{5,1\},\{3,4\},\{8,7\},\{7,4\},\{4,6\},\{7,1\},\{5,3\},\{6,3\},\{4,0\},\{2,4\},\{7,6\},\{4,8\},\{6,2\}}
063	0,63	28	{\{3,8\},\{1,6\},\{8,7\},\{6,5\},\{3,4\},\{0,4\},\{0,7\},\{6,4\},\{8,9\},\{1,7\},\{4,5\},\{1,3\},\{7,5\},\{1,4\},\{6,8\},\{2,3\},\{2,9\},\{0,3\},\{7,4\},\{4,2\},\{5,8\},\{8,4\},\{3,5\},\{0,8\},\{4,9\},\{2,1\},\{5,2\},\{6,7\}}
064	0,64	29	{\{3,8\},\{1,6\},\{8,7\},\{6,5\},\{3,4\},\{0,4\},\{0,7\},\{6,4\},\{8,9\},\{1,7\},\{4,5\},\{1,3\},\{7,5\},\{1,4\},\{6,8\},\{2,3\},\{2,9\},\{0,3\},\{7,4\},\{4,2\},\{5,8\},\{8,4\},\{3,5\},\{0,8\},\{4,9\},\{2,1\},\{5,2\},\{6,7\},\{3,7\}}
065	0,65	29	{\{3,8\},\{1,6\},\{8,7\},\{6,5\},\{3,4\},\{0,4\},\{0,7\},\{6,4\},\{8,9\},\{1,7\},\{4,5\},\{1,3\},\{7,5\},\{1,4\},\{6,8\},\{2,3\},\{2,9\},\{0,3\},\{7,4\},\{4,2\},\{5,8\},\{8,4\},\{3,5\},\{0,8\},\{4,9\},\{2,1\},\{5,2\},\{6,7\},\{3,7\}}
066	0,66	30	{\{3,8\},\{1,6\},\{8,7\},\{6,5\},\{3,4\},\{0,4\},\{0,7\},\{6,4\},\{8,9\},\{1,7\},\{4,5\},\{1,3\},\{7,5\},\{1,4\},\{6,8\},\{2,3\},\{2,9\},\{0,3\},\{7,4\},\{4,2\},\{5,8\},\{8,4\},\{3,5\},\{0,8\},\{4,9\},\{2,1\},\{5,2\},\{6,7\},\{3,7\},\{7,9\}}
067	0,67	30	{\{8,1\},\{5,7\},\{3,1\},\{2,9\},\{8,2\},\{3,9\},\{8,9\},\{7,8\},\{4,7\},\{7,2\},\{3,6\},\{3,5\},\{6,4\},\{6,0\},\{4,8\},\{5,1\},\{6,5\},\{7,3\},\{9,6\},\{4,9\},\{4,5\},\{1,4\},\{7,1\},\{3,2\},\{7,6\},\{9,0\},\{2,5\},\{8,6\},\{8,3\},\{0,2\}}
068	0,68	31	{\{8,1\},\{5,7\},\{3,1\},\{2,9\},\{8,2\},\{3,9\},\{8,9\},\{7,8\},\{4,7\},\{7,2\},\{3,6\},\{3,5\},\{6,4\},\{6,0\},\{4,8\},\{5,1\},\{6,5\},\{7,3\},\{9,6\},\{4,9\},\{4,5\},\{1,4\},\{7,1\},\{3,2\},\{7,6\},\{9,0\},\{2,5\},\{8,6\},\{8,3\},\{0,2\},\{2,6\}}
069	0,69	31	{\{8,1\},\{5,7\},\{3,1\},\{2,9\},\{8,2\},\{3,9\},\{8,9\},\{7,8\},\{4,7\},\{7,2\},\{3,6\},

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{3,5},{6,4},{6,0},{4,8},{5,1},{6,5},{7,3},{9,6},{4,9},{4,5},{1,4}, {7,1},{3,2},{7,6},{9,0},{2,5},{8,6},{8,3},{0,2},{2,6}}
070	0,70	32	{{8,1},{5,7},{3,1},{2,9},{8,2},{3,9},{8,9},{7,8},{4,7},{7,2},{3,6}, {3,5},{6,4},{6,0},{4,8},{5,1},{6,5},{7,3},{9,6},{4,9},{4,5},{1,4}, {7,1},{3,2},{7,6},{9,0},{2,5},{8,6},{8,3},{0,2},{2,6},{2,4}}
071	0,71	32	{{3,4},{0,8},{6,5},{5,2},{1,4},{2,7},{6,4},{5,7},{6,7},{2,8},{7,1}, {5,9},{0,1},{9,4},{9,6},{7,3},{7,9},{4,5},{3,8},{3,2},{3,6},{4,2}, {4,8},{9,8},{2,6},{0,5},{6,0},{8,6},{7,8},{1,3},{9,1},{1,5}}
072	0,72	32	{{3,4},{0,8},{6,5},{5,2},{1,4},{2,7},{6,4},{5,7},{6,7},{2,8},{7,1}, {5,9},{0,1},{9,4},{9,6},{7,3},{7,9},{4,5},{3,8},{3,2},{3,6},{4,2}, {4,8},{9,8},{2,6},{0,5},{6,0},{8,6},{7,8},{1,3},{9,1},{1,5}}
073	0,73	33	{{3,4},{0,8},{6,5},{5,2},{1,4},{2,7},{6,4},{5,7},{6,7},{2,8},{7,1}, {5,9},{0,1},{9,4},{9,6},{7,3},{7,9},{4,5},{3,8},{3,2},{3,6},{4,2}, {4,8},{9,8},{2,6},{0,5},{6,0},{8,6},{7,8},{1,3},{9,1},{1,5},{0,9}}
074	0,74	33	{{3,4},{0,8},{6,5},{5,2},{1,4},{2,7},{6,4},{5,7},{6,7},{2,8},{7,1}, {5,9},{0,1},{9,4},{9,6},{7,3},{7,9},{4,5},{3,8},{3,2},{3,6},{4,2}, {4,8},{9,8},{2,6},{0,5},{6,0},{8,6},{7,8},{1,3},{9,1},{1,5},{0,9}}
075	0,75	34	{{8,6},{4,0},{0,8},{1,6},{8,9},{4,2},{0,9},{2,6},{3,0},{4,6},{1,7}, {1,8},{2,3},{8,2},{7,6},{5,2},{1,4},{0,1},{4,9},{9,1},{1,3},{5,3}, {7,9},{4,8},{4,5},{3,7},{0,5},{1,5},{4,7},{3,4},{7,8},{5,6},{2,7}, {3,6}}
076	0,76	34	{{8,6},{4,0},{0,8},{1,6},{8,9},{4,2},{0,9},{2,6},{3,0},{4,6},{1,7}, {1,8},{2,3},{8,2},{7,6},{5,2},{1,4},{0,1},{4,9},{9,1},{1,3},{5,3}, {7,9},{4,8},{4,5},{3,7},{0,5},{1,5},{4,7},{3,4},{7,8},{5,6},{2,7}, {3,6}}
077	0,77	35	{{8,6},{4,0},{0,8},{1,6},{8,9},{4,2},{0,9},{2,6},{3,0},{4,6},{1,7}, {1,8},{2,3},{8,2},{7,6},{5,2},{1,4},{0,1},{4,9},{9,1},{1,3},{5,3}, {7,9},{4,8},{4,5},{3,7},{0,5},{1,5},{4,7},{3,4},{7,8},{5,6},{2,7}, {3,6},{1,2}}
078	0,78	35	{{8,6},{4,0},{0,8},{1,6},{8,9},{4,2},{0,9},{2,6},{3,0},{4,6},{1,7}, {1,8},{2,3},{8,2},{7,6},{5,2},{1,4},{0,1},{4,9},{9,1},{1,3},{5,3},

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{7,9},{4,8},{4,5},{3,7},{0,5},{1,5},{4,7},{3,4},{7,8},{5,6},{2,7}, {3,6},{1,2}}
079	0,79	36	{{3,1},{6,1},{0,5},{7,8},{3,2},{5,2},{7,1},{7,2},{3,8},{6,8},{8,1}, {6,2},{7,5},{7,4},{3,6},{1,4},{7,6},{5,6},{0,8},{2,9},{3,4},{1,2}, {2,8},{0,4},{5,1},{4,8},{5,9},{4,2},{6,9},{7,3},{4,5},{7,0},{4,6}, {9,8},{0,3},{3,5}}
080	0,80	36	{{3,1},{6,1},{0,5},{7,8},{3,2},{5,2},{7,1},{7,2},{3,8},{6,8},{8,1}, {6,2},{7,5},{7,4},{3,6},{1,4},{7,6},{5,6},{0,8},{2,9},{3,4},{1,2}, {2,8},{0,4},{5,1},{4,8},{5,9},{4,2},{6,9},{7,3},{4,5},{7,0},{4,6}, {9,8},{0,3},{3,5}}
081	0,81	36	{{3,1},{6,1},{0,5},{7,8},{3,2},{5,2},{7,1},{7,2},{3,8},{6,8},{8,1}, {6,2},{7,5},{7,4},{3,6},{1,4},{7,6},{5,6},{0,8},{2,9},{3,4},{1,2}, {2,8},{0,4},{5,1},{4,8},{5,9},{4,2},{6,9},{7,3},{4,5},{7,0},{4,6}, {9,8},{0,3},{3,5}}
082	0,82	37	{{3,1},{6,1},{0,5},{7,8},{3,2},{5,2},{7,1},{7,2},{3,8},{6,8},{8,1}, {6,2},{7,5},{7,4},{3,6},{1,4},{7,6},{5,6},{0,8},{2,9},{3,4},{1,2}, {2,8},{0,4},{5,1},{4,8},{5,9},{4,2},{6,9},{7,3},{4,5},{7,0},{4,6}, {9,8},{0,3},{3,5},{8,5}}
083	0,83	37	{{7,4},{1,2},{4,8},{5,3},{6,7},{8,7},{5,1},{3,6},{6,2},{6,8},{8,1}, {3,1},{4,3},{4,2},{5,8},{4,5},{9,8},{8,3},{4,0},{8,0},{1,7},{9,3}, {0,2},{8,2},{1,0},{1,4},{7,2},{3,7},{1,6},{0,3},{9,7},{9,4},{2,3}, {6,4},{6,5},{9,0},{5,0}}
084	0,84	38	{{7,4},{1,2},{4,8},{5,3},{6,7},{8,7},{5,1},{3,6},{6,2},{6,8},{8,1}, {3,1},{4,3},{4,2},{5,8},{4,5},{9,8},{8,3},{4,0},{8,0},{1,7},{9,3}, {0,2},{8,2},{1,0},{1,4},{7,2},{3,7},{1,6},{0,3},{9,7},{9,4},{2,3}, {6,4},{6,5},{9,0},{5,0},{6,0}}
085	0,85	38	{{7,4},{1,2},{4,8},{5,3},{6,7},{8,7},{5,1},{3,6},{6,2},{6,8},{8,1}, {3,1},{4,3},{4,2},{5,8},{4,5},{9,8},{8,3},{4,0},{8,0},{1,7},{9,3}, {0,2},{8,2},{1,0},{1,4},{7,2},{3,7},{1,6},{0,3},{9,7},{9,4},{2,3}, {6,4},{6,5},{9,0},{5,0},{6,0}}
086	0,86	39	{{3,6},{5,3},{7,3},{6,5},{4,8},{8,2},{2,0},{4,1},{9,8},{3,8},{9,3},

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
			{8,5},{2,7},{1,7},{0,9},{7,5},{9,5},{6,1},{6,2},{5,0},{9,7},{3,0}, {6,8},{5,1},{5,2},{3,4},{3,1},{0,4},{4,7},{6,7},{0,6},{0,1},{0,7}, {4,2},{1,8},{6,4},{8,7},{9,2},{1,2}}
087	0,87	39	{{3,6},{5,3},{7,3},{6,5},{4,8},{8,2},{2,0},{4,1},{9,8},{3,8},{9,3}, {8,5},{2,7},{1,7},{0,9},{7,5},{9,5},{6,1},{6,2},{5,0},{9,7},{3,0}, {6,8},{5,1},{5,2},{3,4},{3,1},{0,4},{4,7},{6,7},{0,6},{0,1},{0,7}, {4,2},{1,8},{6,4},{8,7},{9,2},{1,2}}
088	0,88	40	{{3,6},{5,3},{7,3},{6,5},{4,8},{8,2},{2,0},{4,1},{9,8},{3,8},{9,3}, {8,5},{2,7},{1,7},{0,9},{7,5},{9,5},{6,1},{6,2},{5,0},{9,7},{3,0}, {6,8},{5,1},{5,2},{3,4},{3,1},{0,4},{4,7},{6,7},{0,6},{0,1},{0,7}, {4,2},{1,8},{6,4},{8,7},{9,2},{1,2},{2,3}}
089	0,89	40	{{3,6},{5,3},{7,3},{6,5},{4,8},{8,2},{2,0},{4,1},{9,8},{3,8},{9,3}, {8,5},{2,7},{1,7},{0,9},{7,5},{9,5},{6,1},{6,2},{5,0},{9,7},{3,0}, {6,8},{5,1},{5,2},{3,4},{3,1},{0,4},{4,7},{6,7},{0,6},{0,1},{0,7}, {4,2},{1,8},{6,4},{8,7},{9,2},{1,2},{2,3}}
090	0,90	41	{{8,9},{0,4},{2,6},{2,8},{2,7},{5,7},{9,0},{3,0},{3,7},{6,4},{4,8}, {4,9},{7,4},{6,7},{1,4},{1,5},{0,6},{5,4},{8,1},{8,6},{7,1},{3,6}, {2,5},{0,2},{9,3},{2,1},{3,4},{6,5},{2,3},{3,8},{1,3},{0,5},{2,4}, {7,0},{3,5},{8,5},{6,1},{9,2},{9,7},{7,8},{1,9}}
091	0,91	41	{{8,9},{0,4},{2,6},{2,8},{2,7},{5,7},{9,0},{3,0},{3,7},{6,4},{4,8}, {4,9},{7,4},{6,7},{1,4},{1,5},{0,6},{5,4},{8,1},{8,6},{7,1},{3,6}, {2,5},{0,2},{9,3},{2,1},{3,4},{6,5},{2,3},{3,8},{1,3},{0,5},{2,4}, {7,0},{3,5},{8,5},{6,1},{9,2},{9,7},{7,8},{1,9}}
092	0,92	41	{{8,9},{0,4},{2,6},{2,8},{2,7},{5,7},{9,0},{3,0},{3,7},{6,4},{4,8}, {4,9},{7,4},{6,7},{1,4},{1,5},{0,6},{5,4},{8,1},{8,6},{7,1},{3,6}, {2,5},{0,2},{9,3},{2,1},{3,4},{6,5},{2,3},{3,8},{1,3},{0,5},{2,4}, {7,0},{3,5},{8,5},{6,1},{9,2},{9,7},{7,8},{1,9}}
093	0,93	42	{{8,9},{0,4},{2,6},{2,8},{2,7},{5,7},{9,0},{3,0},{3,7},{6,4},{4,8}, {4,9},{7,4},{6,7},{1,4},{1,5},{0,6},{5,4},{8,1},{8,6},{7,1},{3,6}, {2,5},{0,2},{9,3},{2,1},{3,4},{6,5},{2,3},{3,8},{1,3},{0,5},{2,4}, {7,0},{3,5},{8,5},{6,1},{9,2},{9,7},{7,8},{1,9},{6,9}}

continua ...

continuação ...

#	p(N)	n	Elos
094	0,94	42	{ {3,2}, {4,5}, {5,9}, {6,2}, {1,8}, {4,3}, {8,2}, {6,0}, {6,7}, {1,2}, {3,6}, {4,9}, {2,5}, {1,4}, {7,5}, {8,4}, {5,1}, {8,3}, {9,2}, {3,7}, {9,1}, {6,4}, {6,5}, {5,8}, {9,7}, {8,9}, {5,3}, {0,8}, {3,0}, {7,8}, {4,7}, {6,1}, {7,2}, {7,1}, {4,2}, {0,1}, {1,3}, {2,0}, {5,0}, {3,9}, {0,4}, {8,6} }
095	0,95	43	{ {3,2}, {4,5}, {5,9}, {6,2}, {1,8}, {4,3}, {8,2}, {6,0}, {6,7}, {1,2}, {3,6}, {4,9}, {2,5}, {1,4}, {7,5}, {8,4}, {5,1}, {8,3}, {9,2}, {3,7}, {9,1}, {6,4}, {6,5}, {5,8}, {9,7}, {8,9}, {5,3}, {0,8}, {3,0}, {7,8}, {4,7}, {6,1}, {7,2}, {7,1}, {4,2}, {0,1}, {1,3}, {2,0}, {5,0}, {3,9}, {0,4}, {8,6}, {0,9} }
096	0,96	43	{ {3,2}, {4,5}, {5,9}, {6,2}, {1,8}, {4,3}, {8,2}, {6,0}, {6,7}, {1,2}, {3,6}, {4,9}, {2,5}, {1,4}, {7,5}, {8,4}, {5,1}, {8,3}, {9,2}, {3,7}, {9,1}, {6,4}, {6,5}, {5,8}, {9,7}, {8,9}, {5,3}, {0,8}, {3,0}, {7,8}, {4,7}, {6,1}, {7,2}, {7,1}, {4,2}, {0,1}, {1,3}, {2,0}, {5,0}, {3,9}, {0,4}, {8,6}, {0,9} }
097	0,97	44	{ {3,2}, {4,5}, {5,9}, {6,2}, {1,8}, {4,3}, {8,2}, {6,0}, {6,7}, {1,2}, {3,6}, {4,9}, {2,5}, {1,4}, {7,5}, {8,4}, {5,1}, {8,3}, {9,2}, {3,7}, {9,1}, {6,4}, {6,5}, {5,8}, {9,7}, {8,9}, {5,3}, {0,8}, {3,0}, {7,8}, {4,7}, {6,1}, {7,2}, {7,1}, {4,2}, {0,1}, {1,3}, {2,0}, {5,0}, {3,9}, {0,4}, {8,6}, {0,9}, {0,7} }
098	0,98	44	{ {8,5}, {8,6}, {8,3}, {2,6}, {0,3}, {7,8}, {2,7}, {4,9}, {1,6}, {0,8}, {0,7}, {9,7}, {8,4}, {1,5}, {7,3}, {2,3}, {5,7}, {0,5}, {5,6}, {5,2}, {1,0}, {1,8}, {1,2}, {9,1}, {1,4}, {4,5}, {0,6}, {1,3}, {7,4}, {2,4}, {2,8}, {8,9}, {6,3}, {4,6}, {3,5}, {7,6}, {6,9}, {9,5}, {7,1}, {4,3}, {9,3}, {9,2}, {0,2}, {4,0} }
099	0,99	45	{ {8,5}, {8,6}, {8,3}, {2,6}, {0,3}, {7,8}, {2,7}, {4,9}, {1,6}, {0,8}, {0,7}, {9,7}, {8,4}, {1,5}, {7,3}, {2,3}, {5,7}, {0,5}, {5,6}, {5,2}, {1,0}, {1,8}, {1,2}, {9,1}, {1,4}, {4,5}, {0,6}, {1,3}, {7,4}, {2,4}, {2,8}, {8,9}, {6,3}, {4,6}, {3,5}, {7,6}, {6,9}, {9,5}, {7,1}, {4,3}, {9,3}, {9,2}, {0,2}, {4,0}, {9,0} }
100	1,00	45	{ {8,5}, {8,6}, {8,3}, {2,6}, {0,3}, {7,8}, {2,7}, {4,9}, {1,6}, {0,8}, {0,7}, {9,7}, {8,4}, {1,5}, {7,3}, {2,3}, {5,7}, {0,5}, {5,6}, {5,2}, {1,0}, {1,8}, {1,2}, {9,1}, {1,4}, {4,5}, {0,6}, {1,3}, {7,4}, {2,4}, {2,8}, {8,9}, {6,3}, {4,6}, {3,5}, {7,6}, {6,9}, {9,5}, {7,1}, {4,3}, {9,3}, {9,2}, {0,2}, {4,0}, {9,0} }

Tabela 22: Geração de grafos aleatórios de 10 nodos com 101 estágios.

## APÊNDICE C – Códigos Fonte Matlab

Este apêndice apresenta códigos fonte dos programas Matlab escritos para plotar as funções  $p(z)$  apresentadas no Capítulo 4. O objetivo é permitir que qualquer pessoa possa testar a geração dessas superfícies reproduzindo-as em suas instalações. As fotografias em perspectiva, de perfil e de topo, que são mostradas no Capítulo 4, são obtidas usando a ferramenta de movimento de câmera do Matlab.

```

%=====
% PERCOLAÇÃO EM ONDAS
% -----
%
% Senoide Quadrada
%
% Seno da norma de z, usando a Norma Soma (||z|| = |x| + |y|).
% p(z) = po + (1 - po) * |sin(||z||)|
%
% C.Jatene, 12/07/2005.
%=====

%monta as matrizes representativas da area x,y
[x,y] = meshgrid(-500:1:500, -500:1:500);

%gera os valores de p(z)
z = 0.5 + 0.5 * abs( sin( (abs(x) + abs(y)) * pi / 180 ) );

%desenha a superficie
mesh(z);
colormap(copper);
shading faceted;

```

Figura 116: Código para a função “senóide quadrada”.

```

%=====
% PERCOLAÇÃO EM ONDAS
% -----
%
% Senoide Circular
%
% Seno da norma de z, usando a Norma Euclidiana (||z|| = sqrt(x^2 + y^2).
% p(z) = po + (1 - po) * sin(||z||)
%
% C.Jatene, 12/07/2005.
%=====

%monta as matrizes representativas da area x,y
[x,y] = meshgrid(-500:1:500, -500:1:500);

%gera os valores de p(z)
z = 0.5 + 0.5 * abs( sin( sqrt( x.^2 + y.^2 ) * pi / 180));

%desenha a superficie
mesh(z);
colormap(copper);
shading faceted;

```

Figura 117: Código para a função “senóide circular”.

```

%=====
% PERCOLAÇÃO EM ONDAS
% -----
%
% Pulso Quadrado
% p(z) = po + (1 - po) * (mod(||z||,T)=0), ||z|| norma soma
%
% C.Jatene, 29/09/2006.
%=====

%monta as matrizes representativas da area x,y
[x,y] = meshgrid(-500:1:500, -500:1:500);

%% Pulso quadrado
z = 0.5 + 0.5 * ( mod( abs(x) + abs(y), 100) == 0 );

%desenha a superficie
mesh(z);
colormap(copper);
shading faceted;

```

Figura 118: Código para a função “pulso quadrado”.

```

=====
% PERCOLAÇÃO EM ONDAS
% -----
%
% Pulso Circular
%  $p(z) = p_0 + (1 - p_0) * (\text{mod}(\text{round}(\|z\|), T) = 0)$ ,  $\|z\|$  norma euclidiana
%
% C.Jatene, 29/09/2006.
=====

%monta as matrizes representativas da area x,y
[x,y] = meshgrid(-500:1:500, -500:1:500);

%% Pulso circular
z = 0.5 + 0.5 * ( mod( round( sqrt( x.^2 + y.^2 ) ), 100) == 0 );

%desenha a superficie
mesh(z);
colormap(copper);
shading faceted;

```

Figura 119: Código para a função “pulso circular”.

```

=====
% PERCOLAÇÃO EM ONDAS
% -----
%
% Serra Quadrada
%  $p(z) = p_0 + (1 - p_0) * \text{mod}(\|z\|, T) / T$ , onde  $\|z\|$  norma soma.
%
% C.Jatene, 29/09/2006.
=====

%monta as matrizes representativas da area x,y
[x,y] = meshgrid(-500:1:500, -500:1:500);

%% Serra quadrada
z = 0.5 + 0.5 * ( mod( abs(x) + abs(y), 100 ) ./ 100 );

%desenha a superficie
mesh(z);
colormap(copper);
shading faceted;

```

Figura 120: Código para a função “serra quadrada”.

```

%=====
% PERCOLAÇÃO EM ONDAS
% -----
%
% Serra Circular
%  $p(z) = p_0 + (1 - p_0) * \text{mod}(\|z\|, T)/T$ , onde  $\|z\|$  norma euclidiana.
%
% C.Jatene, 29/09/2006.
%=====

%monta as matrizes representativas da area x,y
[x,y] = meshgrid(-500:1:500, -500:1:500);

%% Serra circular
z = 0.5 + 0.5 * ( mod( sqrt(x.^2 + y.^2), 100 ) ./ 100 );

%desenha a superficie
mesh(z);
colormap(copper);
shading faceted;

```

Figura 121: Código para a função “serra circular”.

```

%=====
% PERCOLAÇÃO EM ONDAS
% -----
%
% Cone.
%  $p(z) = p_0 + (1 - p_0) * (\text{sqrt}(x^2 + y^2) / \text{sqrt}(2*L^2))$ 
%
% C.Jatene, 12/07/2005.
%=====

%monta as matrizes representativas da area x,y
[x,y] = meshgrid(-500:1:500, -500:1:500);

%gera os valores de p(z)
z = 0.5 + 0.5 * (sqrt( x.^2 + y.^2) / sqrt(2.*500.^2));

%desenha a superficie
mesh(z);
colormap(copper);
shading faceted;

```

Figura 122: Código para a função “cone”.

```

%=====
% PERCOLAÇÃO EM ONDAS
% -----
%
% Calota.
%  $p(z) = p_0 + (1 - p_0) * (2/L^2) * (x^2 + y^2)$ 
%
% C.Jatene, 12/07/2005.
%=====

%monta as matrizes representativas da area x,y
[x,y] = meshgrid(-500:1:500, -500:1:500);

%gera os valores de p(z)
z = 0.5 + 0.5 * (2 ./ 1000.^2) * (x.^2 + y.^2);

%desenha a superficie
mesh(z);
colormap(copper);
shading faceted;

```

Figura 123: Código para a função “calota”.

```

%=====
% PERCOLAÇÃO EM ONDAS
% -----
%
% 4-plan
%
% Razao da norma de z, usando a Norma Soma (||z|| = |x| + |y|).
%  $p(z) = p_0 + (1 - p_0) * ||z|| / L$ 
%
% C.Jatene, 12/07/2005.
%=====

%monta as matrizes representativas da area x,y
[x,y] = meshgrid(-500:1:500, -500:1:500);

%gera os valores de p(z)
z = 0.5 + 0.5 * ( abs(x) + abs(y) ) / 1000;

%desenha a superficie
mesh(z);
colormap(copper);
shading faceted;

```

Figura 124: Código para a função “4-Plan”.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)