SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Espaços de Lebesgue-Sobolev Generalizados e Problemas de Autovalor Envolvendo o $p(x)$-Laplaciano

por

Marcos Oliveira de Oliveira

sob orientação do

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araujo Corrêa

Belém
ICEN - UFPA
Novembro 2007

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Espaços de Lebesgue-Sobolev Generalizados e Problemas de Autovalor Envolvendo o $p(x)$-Laplaciano

por

Marcos Oliveira de Oliveira

sob orientação do

Prof. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araujo Corrêa

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: ANÁLISE

Belém
ICEN - UFPA
Novembro 2007

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Marcos Oliveira de Oliveira

Espaços de Lebesgue-Sobolev Generalizados e Problemas de Autovalor Envolvendo o $p(x)$-Laplaciano

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa:. Conceito:______________

Banca Examinadora

____

Prof.° Dr.FRANCISCO JÚLIO SOBREIRA DE ARAUJO CORRÊA - Orientador
Faculdade de Matemática - UFPA

____

Prof.º Drº.UBERLÂNDIO BATISTA SEVERO - Membro
Departamento de Matemática - UFPB

____

Prof.° Dr.GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO - Membro
Faculdade de Matemática - UFPA

____

Prof.° Dr.SILVANO DIAS BEZERRA DE MENEZES - Suplente
Faculdade de Matemática - UFPA

Agradecimentos

Agradeço a Deus que no decorrer desses um ano e meio me deu saúde para que este trabalho fosse realizado.

Agradeço à minha família que sempre me incetivou a nunca desistir do curso devido a dificuldades.

Agradeço ao meu orientador Prof°. Dr. Francisco Júlio Sobreira de Araujo Corrêa que durante a realização deste trabalho sempre esteve disposto a esclarecer alguns pontos obscuros do trabalho.

Aos Professores Giovany Figueiredo e Uberlândio Batista Severo, pelas sugestões e por aceitarem a participar da banca examinadora.

Agradeço aos professores com os quais cursei disciplinas no mestrado: Giovany Figueiredo, Mauro Santos, Ducival Pereira, Marcus Rocha e Francisco Corrêa do Departamento da Pós-Graduação de Matemática e Estatistica-PPGEM.

Aos demais professores da UFPA.

A todos os funcionários da UFPA.

A todos os colegas de mestrado.

Finalmente, agradeço a todas as pessoas, em particular:

- Cinthia Helena Míleo de Miranda Bandeira;
- Laila Conceição Fontineli;
- Sofia Rodrigues.

que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

O homem tem ciência das coisas da terra, mas a sabedoria é dom de Deus.
12:Mas onde se achará a sabedoria?
13:O homem não lhe conhece o valor; não se acha na terra dos viventes.
20:Donde pois vem a sabedoria e onde está o lugar da inteligência?
28:Mas disse ao homem: Eis que o temor do Senhor é a sabedoria e apartar-se do mal é a inteligencia.

Jó, Capítulo 28, Bíblia Sagrada.

Resumo

Neste trabalho, abordaremos questões de existência de soluções para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u \;=\; \lambda f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ \quad u = 0 \;\text{ em } \Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um domínio limitado e regular, $p(x) > 1$ é uma função contínua em $\overline{\Omega}$ e $\Delta_{p(x)}$ é o $p(x)-$Laplaciano, ou seja,

$$\Delta_{p(x)}u = div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right).$$

Trabalharemos nos espaços generalizados de Lebesgue e Lebesgue-Sobolev $L^{p(x)}(\Omega)$ e $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e usaremos métodos variacionais e topológicos.

Abstract

In this work we will approach subjects of existence of solutions for the problem

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u \;=\; f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ \quad u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ is a bounded domain and smooth, $p(x) > 1$ it is a continuous function in $\overline{\Omega}$ and $\Delta_{p(x)}$ it is $p(x)$-Laplacian, which is defined by

$$\Delta_{p(x)}u = div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)$$

We will work in the generalized spaces of Lebesgue e Lebesgue-Sobolev $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ and we used of methods variational and topological, we obtain some results of existence of solution for the problems in question.

Sumário

Introdução **1**

1 Os Espaços $L^{p(x)}(\Omega)$ e $W^{1,p(x)}(\Omega)$ **4**
- 1.1 Resultados Básicos e Definições 4
- 1.2 Propriedades do Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ 6
- 1.3 Propriedades do Espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 7
- 1.4 Imersões 8

2 Um Princípio do Máximo Forte **9**
- 2.1 Introdução 9
- 2.2 Preliminares 9
- 2.3 Resultado Principal 11

3 Um Problema Quase-Linear de Autovalor **15**
- 3.1 Introdução 15
- 3.2 Propriedades do Operador $p(x)$-Laplaciano 16

4 Um Problema Singular via Método Topológico **35**
- 4.1 Introdução 35
- 4.2 Hipóteses sobre as funções $p(x)$, $\gamma(x)$, $\alpha(x)$, $h(x)$ e $k(x)$ 36
- 4.3 Existência de Solução 36

A Desigualdades de Simon **45**

B Resultados Básicos Usados na Dissertação **48**

C Minimização de Funcionais **50**

Referências Bibliográficas **55**

Introdução

O principal objetivo dessa dissertação é estudar os Espaços de Lebesgue e Sobolev generalizados, bem como a existência de solução fraca para problemas elípticos do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u \;=\; f(x,u), \quad x \in \Omega, \\ \quad u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um domínio limitado e suave, $p(x) > 1$ é uma função contínua e $\Delta_{p(x)}$ designa o operador $p(x)-$Laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u = div\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right).$$

O operador $p(x)-$Laplaciano ocorre em problemas físicos como, por exemplo, na teoria da elasticidade e mecânica dos fluidos eletroreológicos (ver [8] e [17]), em particular neste último a equação do movimento dos fluidos é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + divS(u) + (u\nabla)u + \nabla\pi = f$$

onde $u : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ é a velocidade do fluido em um ponto do espaço-tempo, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ é o operador gradiente, $\pi : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^1$ é a pressão, $f : \mathbb{R}^{3+1} \to \mathbb{R}^3$ representa forças externas e o tensor "stress" $S : W_{loc}^{1,1} \to \mathbb{R}^{3+3}$ é da forma

$$S(u)(x) = \mu(x)\left(1 + |Du(x)|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} Du(x),$$

onde $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ é a parte simétrica do gradiente de u.

Este trabalho é constituído de quatro capítulos e três apêndices. Observemos que ao longo deste trabalho Ω será sempre um domínio limitado e suave.

No **capítulo 1**, estudaremos o Espaço de Lebesgue Generalizado, definido por

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R};\, u \text{ é } mensurável,\, \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx < +\infty\right\},$$

$p \in C_+(\Omega)$, com $p(x) > 1$ e mencionaremos várias propriedades desse espaço, tais como, completeza, reflexividade, separabilidade e densidade. Apresentamos também um estudo do Espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$, o qual é definido por

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}; |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}$$

onde

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right).$$

Mostraremos vários resultados importantes para essa dissertação.

O **Capítulo 1** é baseado em Guimarães [5] e Fan [9].

No **Capítulo 2** apresentamos um princípio do máximo forte para equações envolvendo o operador $p(x)-$Laplaciano, isto é,

$$-div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + d(x)|u|^{q(x)-2}u \;=\; 0 \; q.t.p \; em \; \Omega, \tag{1}$$

onde Ω é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p(x) > 1$ para $x \in \overline{\Omega}$, $q(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, $p \leq q(x) < p^*(x)$, onde

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N-p(x)}, & \text{se } p(x) < N, \\ +\infty, & \text{se } p(x) \geq N. \end{cases}$$

$d(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $d(x) \geq 0$ em Ω.

O **Capítulo 2** é baseado no artigo de Fan e Zhang [9].

No **Capítulo 3**, estudaremos a existência de solução fraca em $W^{1,p(x)}(\Omega)$ para o problema de Dirichlet

$$(P) \quad \begin{cases} -\triangle_{p(x)} u = \lambda |u|^{q(x)-2}u \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \;\; \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $p > 1$, $p \in C(\overline{\Omega})$.

O **Capítulo 3** é baseado no artigo de Rădulescu [13].

No **Capítulo 4**, estudamos a existência de solução fraca para a seguinte classe de problemas elípticos quase-lineares:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \dfrac{h(x)}{u^{\gamma(x)}} + k(x)u^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \qquad\qquad em \; \Omega, \\ u = 0 \qquad\qquad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um domínio limitado e p, h, k, α , $\gamma \in C(\overline{\Omega})$.

Para o **Capítulo 4**, temos como referência o artigo de Corrêa,Costa e Figueiredo [6].

No **Apêndice A** demonstramos que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N$, valem as seguintes desigualdades clássicas:

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle \geq \begin{cases} \dfrac{2^{3-p}}{p}|x-y|^p, & \text{se } p \geq 2, \\ (p-1)\dfrac{|x-y|^2}{(|x|^p+|y|^p)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2. \end{cases}$$

As desigualdades, acima, foram muito importantes no desenvolvimento dos **Capítulos 3** e **4**.

No **Apêndice B**, enuciamos vários resultados utilizados na dissertação.

No **Apêndice C**, demonstramos alguns resultados sobre minimização de funcionais, entre os quais o famoso Princípio Variacional de Ekeland.

Capítulo 1

Os Espaços $L^{p(x)}(\Omega)$ e $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Neste capítulo, estudaremos o Espaço de Lebesgue Generalizado $L^{p(x)}(\Omega)$ e apresentaremos um estudo do Espaço de Sobolev Generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Demonstrações podem ser encontradas em Fan [9] e Guimarães [5], respectivamente.
Define-se

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável}, \int_\Omega \mid u(x) \mid^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável.

1.1 Resultados Básicos e Definições

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, um conjunto mensurável. Considere o conjunto

$$C_+(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega});\, u(x) > 1, \forall\, x \in \overline{\Omega}\}.$$

Para cada $p \in C_+(\Omega)$ e $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, definimos

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx,$$

$$p^- = \min_{\overline{\Omega}} p \quad e \quad p^+ = \max_{\overline{\Omega}} p.$$

A função ρ é chamada de modular.

Proposição 1.1. *Para cada u, $v \in L^{p(x)}(\Omega)$, tem-se*

(a) $\rho(u) = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$*;*

(b) $\rho(-u) = \rho(u)$*;*

(c) $\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v)$*, para todo* $t \in [0,1]$*, isto é,* ρ *é uma função convexa;*

(d) $\rho(u + v) \leq 2^{p^+}[\rho(u) + \rho(v)]$*;*

(e) *Se* $\lambda > 1$, *então*

$$\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+}\rho(u),$$

e se $0 \leq \lambda \leq 1$, *temos*

$$\lambda^{p^+}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \rho(u).$$

(f) *Para cada* $u \in L^{p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$, $\rho(\lambda u)$ *é uma função crescente, contínua e convexa em* $\lambda \in [0, \infty)$.

Pelos itens anteriores, podemos concluir:

Proposição 1.2. $L^{p(x)}(\Omega)$ *é um espaço vetorial.*

Vamos, agora, definir uma norma no espaço $L^{p(x)}(\Omega)$, que será denotada por $\|\cdot\|_{p(x)}$ e apresentar algumas propriedades.

Proposição 1.3. $\|u\|_{p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$ *é uma norma em* $L^{p(x)}(\Omega)$.

Proposição 1.4. *Se a função* $p(x) = p$ *é constante, então*

$$\|\cdot\|_{p(x)} = \|\cdot\|_p,$$

onde $\|\cdot\|_p$ *é a norma usual do espaço* $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Proposição 1.5. *Seja* $u \in L^{p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$. *Então,*

$$\|u\|_{p(x)} = a \text{ se, e somente se, } \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1.$$

Proposição 1.6. *Seja* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$. *Então,*

(1) $\|u\|_{p(x)} < 1\,(= 1; > 1)$ *se, e somente se,* $\rho(u) < 1\,(= 1; > 1)$;

(2) *Se* $\|u\|_{p(x)} > 1$, *então* $\|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}$;

(3) *Se* $\|u\|_{p(x)} < 1$, *então* $\|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}$.

Proposição 1.7. *Seja* $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$. *Se* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, *então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = 0$.

1.2 Propriedades do Espaço $L^{p(x)}(\Omega)$

Nesta seção, apresentaremos as principais propriedades de $L^{p(x)}(\Omega)$.

O resultado abaixo é um corolário da demonstração da Proposição 1.7.

Teorema 1.1. *Seja $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$. Então existe uma subseqüência (u_{n_k}) tal que*

(a) $u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x),$ *q.s. em* Ω;

(b) $|u_{n_k}(x)| \leq h(x),$ *para* $k \geq 1,$ *q.s. em* $\Omega,$ $h \in L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.2. *Se $p^- > 1$, então $L^{p(x)}(\Omega)$ é um espaço reflexivo.*

A seguir, apresentamos uma versão do **Teorema da Representação de Riesz** para o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.3. *Seja $p^- > 1$ e seja $q \in L^{\infty}_{+}$ tal que*

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Então, dado $f \in (L^{p(x)}(\Omega))^*$ existe um único $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ tal que

$$f(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \text{ para todo } u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Agora, abordaremos a questão da densidade em $L^{p(x)}(\Omega)$

Teorema 1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $C_0(\Omega)$ é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Teorema 1.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $C_0^{\infty}(\Omega)$ é denso em $L^{p(x)}(\Omega)$.*

Teorema 1.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Então, o espaço $L^{p(x)}(\Omega)$ é separável.*

1.3 Propriedades do Espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Nesta seção, estudaremos o espaço de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$, ou seja, o seguinte espaço

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{p(x)}(\Omega), j = 1, \ldots, N \right\},$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um domínio. Tal espaço é muito importante em nosso trabalho, pois é sobre ele que estudaremos a existência de solução para os problemas considerados nos capítulos seguintes.

Observamos que, para $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, então $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ denota a $j-\acute{e}sima$ derivada fraca de u, ou seja,

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_\Omega -\frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx, \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Em $W^{1,p(x)}(\Omega)$, temos a seguinte norma

$$\|u\|_* = \|u\|_{p(x)} + \sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{p(x)}. \tag{1.1}$$

Se $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, definimos o gradiente de u, por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

Note que podemos escrever o espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ como

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega);\ |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}.$$

Neste caso, é mais conveniente usarmos a norma equivalente

$$\|u\| = \|u\|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}.$$

Teorema 1.7. *$W^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Teorema 1.8. *O espaço $W^{1,p(x)}(\Omega)$ é separável e reflexivo, se $p^- > 1$.*

Definição 1.1. *Definimos o espaço $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Segue, imediatamente da definição de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ e das propriedades de $W^{1,p(x)}(\Omega)$, o seguinte resultado:

Teorema 1.9. *$W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach, separável e reflexivo, se $p^- > 1$.*

1.4 Imersões

Temos alguns resultados de imersão que serão bastante úteis nos capítulos subseqüêntes. Dentre esses resultados, destacamos um teorema que generaliza os teoremas de Sobolev e Rellich-Kondrachov, bem como uma desigualdade do tipo Poincaré.

Teorema 1.10. *Sejam $p, q \in C_+(\Omega)$ tais que $q(x) \leq p(x)$, q.s. em Ω. Então*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \quad \hookrightarrow \quad W^{1,q(x)}(\Omega),$$

e tal imersão é contínua.

No que segue, temos

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}, & p(x) < N, \\ \infty, & p(x) \geq N. \end{cases}$$

Teorema 1.11. *Sejam $p, q \in C(\overline{\Omega})$ tais que $p^-, q^- \geq 1$. Se*

$$q(x) \leq p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega),$$

e tal imersão é contínua e compacta.

Observação 1.1. *É possível mostrar que, se p e $q \in C(\overline{\Omega})$ são tais que*

$$1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(x), \text{ para todo } x \in \overline{\Omega},$$

então

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega),$$

com imersão contínua.

Teorema 1.12. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja $p \in C(\overline{\Omega})$ tal que $p^- > 1$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{p(x)} \quad \leq \quad C\|\nabla u\|_{p(x)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Observação 1.2. *Como conseqüência da Desigualdade de Poincaré, temos*

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \leq \|u\| = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)} \leq (C+1)\|\nabla u\|_{p(x)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, ou seja, as normas $\|u\|$ e $\|\nabla u\|_{p(x)}$ são equivalentes em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Capítulo 2

Um Princípio do Máximo Forte

2.1 Introdução

Consideremos a seguinte equação envolvendo o $p(x)-$Laplaciano

$$-div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + d(x)|u|^{q(x)-2}u \quad = \quad 0 \text{ q.t.p em } \Omega, \tag{2.1}$$

onde Ω é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $p(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $p(x) > 1$ para $x \in \overline{\Omega}$, $q(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, $p(x) \leq q(x) < p^*(x)$, onde

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N-p(x)}, & \text{se } p(x) < N, \\ +\infty, & \text{se } p(x) \geq N. \end{cases}$$

$d(x) \in L^\infty(\Omega)$ e $d(x) \geq 0$ em Ω.

No caso em que $p(x)$ não é idêntico a uma constante, até agora, não existia nenhum princípio do máximo, para a $p(x)$-Laplaciano, porque os métodos tratavam com $p-$Laplaciano. Nesta seção, estudaremos o artigo "A strong maximum principe for $p(x)-$laplace equations"de Fan X.L.; Zhao, D.; Zhang, Q. H.[11], que usando o ideal de Montenegro [14] e algumas técnicas especiais, estabelecemos um princípio do máximo forte para equação (2.1).

2.2 Preliminares

Definindo a aplicação

$$A : W^{1,p(x)}(\Omega) \to (W^{1,p(x)}(\Omega))^*$$

como

$$\langle Au, \varphi\rangle \quad = \quad \int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla\varphi + d(x)|u|^{q(x)-2}u\varphi)dx,$$

$\forall u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, $\forall \varphi \in W^{1,p(x)}(\Omega)$,

Verifica-se que A é uma aplicação contínua e limitada.

Lema 2.1. *(ver [9]). Seja $h \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, $X = h + W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Então, $A : X \to (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ é estritamente monótono e coercivo com respeito a h e é um homeomorfismo.*

Seja $g \in (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$. Se

$$\langle g, \varphi \rangle \geq 0, \forall \varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),\ \varphi \geq 0 \text{ q.t.p em } \Omega,$$

então denotemos por $g \geq 0$ em $(W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$. Correspondentemente, se $-g \geq 0$ em $(W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$, então denotemos $g \leq 0$ em $(W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$.

Definição 2.1. *Dizemos que $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca de (2.1) se $Au = 0$ e u é chamada uma super-solução (sub-solução fraca) de (2.1) se $Au \geq 0$ ($Au \leq 0$) em $(W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$.*

Lema 2.2. *(Princípio de Comparação). Sejam $u, v \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ satisfazendo $Au - Av \geq 0$ em $(W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ e $\varphi(x) = \min\{u(x) - v(x), 0\}$. Se $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$(isto é, $u \geq v$ sobre $\partial\Omega$), então $u \geq v$ q.t.p. em Ω.*

Demonstração. Seja $\Omega_1 = \{x \in \Omega : u(x) < v(x)\}$. Então,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Au - Av, \varphi \rangle \\ &= -\int_{\Omega_1} [(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v)(\nabla u - \nabla v) \\ &\quad + d(x)(|u|^{q(x)-2}u - |v|^{q(x)-2}v)(u - v)]dx \leq 0, \end{aligned}$$

assim, $\nabla\varphi = 0$ q.t.p. em Ω e portanto $\varphi = 0$ q.t.p. em Ω desde que $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Conseqüentemente, $u \geq v$ q.t.p. em Ω. ■

Lema 2.3. *(ver [10]) Se $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ é uma solução fraca de (2.1), então $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$, onde $\alpha \in (0,1)$ é uma constante.*

Observação 2.1. *Para alguma constante positiva $p > 1$, T, a e k_1, seja*

$$v(t) = \frac{a}{e^{\frac{k_1 T}{p-1}} - 1}(e^{\frac{k_1 T}{p-1}} - 1), \forall t \in [0,T], \tag{2.2}$$

Derivando, obtemos

$$v'(t) = \frac{a\frac{k_1}{p-1}}{e^{\frac{k_1 T}{p-1}} - 1} e^{\frac{k_1}{p-1}t}, \tag{2.3}$$

e é facilmente segue que para $t \in [0,T]$, temos $v'(t) > 0$, $v''(t) > 0$. Portanto, $v(t)$ e $v'(t)$ são estritamente crescentes em $[0,T]$. Além disso, $v(t)$ satisfaz

$$(p-1)v''(t) = k_1 v'(t), \forall t \in (0,T). \tag{2.4}$$

Por (2.3), temos

$$v'(0) = \frac{a}{T}\frac{\frac{k_1 T}{p-1}}{e^{\frac{k_1 T}{p-1}} - 1} > \frac{a}{T} e^{\frac{k_1 T}{p-1}} \tag{2.5}$$

e

$$v'(T) = \frac{\frac{a}{T}\frac{k_1}{p-1}}{e^{\frac{k_1 T}{p-1}} - 1} e^{\frac{k_1 T}{p-1}} < \frac{a}{T} e^{\frac{k_1 T}{p-1}}. \tag{2.6}$$

Sejam $\frac{a}{T} < 1$, $b > 0$ *e*

$$k_1 = -b \ln \frac{a}{T} + \frac{2(N-1)}{T}. \tag{2.7}$$

Então por (2.5) e (2.6) segue que

$$v'(0) > e^{\frac{-2(N-1)}{p-1}} (\frac{a}{T})^{1+\frac{bT}{p-1}}, \tag{2.8}$$

e

$$v'(T) < e^{\frac{-2(N-1)}{p-1}} (\frac{a}{T})^{1+\frac{bT}{p-1}}. \tag{2.9}$$

2.3 Resultado Principal

Apresentaremos agora, os enuciados dos resultados principais de capítulo, que serão demonstrados logo em seguida em duas etapas, para melhor entendimento:

Teorema 2.1. *Seja u uma super-solução fraca de (2.1),* $u \geq 0$ *q.t.p. em* Ω*, e seja u não idêntica a zero em* Ω*. Então, para algum subconjunto compacto não-vazio* $K \subset \Omega$*, existe uma constante positiva c tal que* $u \geq c$ *q.t.p em* K*.*

Teorema 2.2. *Sejam u como no Teorema 2.1,* $x_1 \in \partial\Omega$*,* $u \in C^1(\Omega \cup \{x_1\})$ *e* $u(x_1) = 0$*. Se* Ω *satisfaz a condição de bola interior, então* $\frac{\partial u(x_1)}{\partial \gamma} > 0$*, onde* γ *é o vetor unitário normal dentro de* $\partial\Omega$ *sobre* x_1*.*

Demonstração. Seja $u \geq 0$ um super-solução de (2.1) e em que não idêntica a zero em Ω. Provaremos o teorema (2.1) em dois passos:
Passo1: Prova do Teorema 2.1, no caso em que $u \in C^1(\Omega)$.
Afirmamos que $u > 0$ em Ω. Suponha o contrário, então podemos encontrar $x_1, x_2 \in \Omega$ e uma bola aberta $B(x_2, 2T) \subset\subset \Omega$ tal que $x_1 \in \partial B(x_2, 2T)$, $u(x_1) = 0$ e $u > 0$ em $B(x_2, 2T)$. O raio $2T = |x_1 - x_2|$ pode ser escolhido suficientemente pequeno (fixe x_1, varie x_2).

Seja

$$a = \inf\{u(x) : |x_1 - x_2| = T\},$$

Então $a > 0$. Note que $\nabla u(x_1) = 0$ desde que $u_1(x) = 0$. Quando $T \to 0$, temos $a \to 0$ e fracamente $T \to 0$.

Denote

$$\begin{aligned} Y &= \{x \in \Omega : T < |x - x_2| < 2T\},\ p = p(x_1), \\ d &= \sup\{d(x) : x \in Y\},\ L = \sup\{|\nabla p(x)| : x \in Y\}, \\ b &= 8L + 2,\ k_1 = -b \ln \frac{a}{T} + \frac{2(N-1)}{T}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sejam $T < 1$ *e* $\frac{a}{T}$ suficientemente pequeno tais que

$$\frac{p(x) - 1}{p - 1} \geq \frac{1}{2},\ \forall x \in Y, \tag{2.11}$$

e

$$-\ln \frac{a}{T} \geq d. \tag{2.12}$$

Sejam p, T, a, k_1 escolhidos como acima, e $v(t)$ a função definida por (2.2). Então

$$\left(\frac{a}{T}\right)^3 \leq v'(t) < 1,\ \forall t \in [0, T]. \tag{2.13}$$

Sem perda de generalidade, considere $x_2 = 0$. Sejam $r = |x - x_2| = |x|$ e $t = 2T - r$. Para $t \in [0, T]$ e $r \in [T, 2T]$, definido

$$w(r) = v(2T - r) = v(t),$$

então $w'(r) = -v'(t)$ e $w''(r) = v''(t)$.

Seja $w(x) = w(r)$ *para* $x \in Y$ *com* $|x| = r$, então $w \in C^2(Y)$.

A seguir, provaremos que $w(x)$ é uma sub-solução fraca de (2.1) em Y. Temos que

$$\begin{aligned} div(|\nabla w(x)|^{p(x)-2} \nabla w(x)) &= (p(x) - 1)(v'(t))^{p(x)-2} v''(t) \\ -(v'(t))^{p(x)-1} \ln v'(t) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \frac{x_i}{r} &- \frac{N-1}{r}(v'(t))^{p(x)-1}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Segue de (2.4) e (2.11) que

$$(p(x) - 1)(v'(t))^{p(x)-2} v''(t) \geq \frac{1}{2} k_1 (v'(t))^{p(x)-1}. \tag{2.15}$$

Por (2.10) e (2.13),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} k_1 (v'(t))^{p(x)-1} - (v'(t))^{p(x)-1} \ln v'(t) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial p(x)}{\partial x_i} \frac{x_i}{r} - \frac{N-1}{r}(v'(t))^{p(x)-1} \\ &\geq (v'(t))^{p(x)-1} (\frac{1}{2} k_1 + L \ln v'(t) - \frac{N-1}{r}) \\ &\geq (v'(t))^{p(x)-1} (\frac{b}{2} k_1 + L \ln \frac{a}{T} - \frac{N-1}{T} + L \ln (\frac{a}{T})^3 - \frac{N-1}{r}) \\ &\geq (v'(t))^{p(x)-1} (\frac{a}{T}). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Note que

$$v'(t) = \frac{1}{T}v(t) \geq v(t),$$

que juntamente com (2.12), mostra que

$$(v'(t))^{p(x)-1}(-\ln\frac{a}{T}) - d(v(t))^{q(x)-1}(-\ln\frac{a}{T} - d) \geq 0. \tag{2.17}$$

Segue de (2.14)-(2.17) que

$$div(|\nabla w(x)|^{p(x)-2}\nabla w(x)) \geq d(x)|w(x)|^{q(x)-1},$$

isto é, $w(x)$ é uma sub-solução de (2.1) em Y.

Note que $w \leq u$ sobre ∂Y. Pelo Lema2.2, obtemos $w \leq u$ em Y. Assim,

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0^+}\frac{u(x_1+s(x_2-x_1))-u(x_1)}{s}\\ &\geq \lim_{s\to 0^+}\frac{w(x_1+s(x_2-x_1))-w(x_1)}{s} = v'(0) > 0\end{aligned}$$

contradizendo o fato que $\nabla u(x_1) = 0$, o que finaliza a etapa 1.

Etapa 2. Prova do Teorema 2.1 para uma super-solução fraca geral $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Seja $\Omega_0 = \{x \in \Omega : \exists B(x,\epsilon) \subset \Omega\}$, tal que $u = 0$ q.t.p em $B(x,\epsilon)$, seja $\Omega_+ = \Omega \setminus \Omega_0$.

Lema 2.4. *Para $x_0 \in \Omega_+$, existe $B(x,\epsilon) \subset \Omega$ e uma constante positiva c tal que $u \geq c$, q.t.p. em Ω.*

Prova. Seja $x_0 \in \Omega_+$, então existe $B(x_0, 2\epsilon) \subset\subset \Omega$ tal que u é não identicamente nula sobre $\partial B(x_0, 2\epsilon)$.

Considere o problema

$$Aw = 0 \text{ em } B(x_0, 2\epsilon),\ w = u \text{ sobre } \partial B(x_0, 2\epsilon). \tag{2.18}$$

Então pelo Lema 2.1 (2.18) tem uma única solução w. Conseqüentemente

$$w \in C^{1,\alpha}_{loc}(B(x_0, 2\epsilon)).$$

Pelo Lema 2.3, w é não identicamente nula em $B(x_0, 2\epsilon)$ pois w é não identicamente nula sobre $\partial B(x_0, 2\epsilon)$. Aplicando o princípio da comparação para w e $v \equiv 0$, concluímos que $w \geq 0$ em $B(x_0, 2\epsilon)$. Pela etapa 1, $w > 0$ em $B(x_0, 2\epsilon)$. Assim existe $c > 0$ tal que $w \geq c$ em $B(x_0, 2\epsilon)$. Conseqüentemente, $u \geq c$ q.t.p. em $B(x_0, 2\epsilon)$ pela aplicação do princípio da comparação para w e u em $B(x_0, 2\epsilon)$.

Lema 2.5. *$\Omega_0 = \phi$, isto é, $\Omega = \Omega_+$.*

Prova. Obviamente, $\Omega_0 \subset \Omega$ é aberto e $\Omega_0 \neq \Omega$ pois u é não identicamente nula em Ω. Se $\omega_0 \neq \phi$, então existe $x_0 \in \Omega_+ \cap \partial\Omega_0$ e uma bola $B = B(x_0, \epsilon) \subset \Omega$ tal que $u > 0$ q.t.p.

em B pelo Lema 2.4, especificamente, $u > 0$ q.t.p. em $B \cap \Omega_0$; que contradiz a definição de Ω_0.

Agora, podemos terminar a etapa 2, pelo Lema 2.1 e Lema 2.2. De fato, para qualquer compacto não-vazio $K \subset \Omega$, existem finitas bolas abertas B_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, tais que $K \subset \cup_{i=1}^m B_i \subset \Omega$ e $u \geq c_i$ q.t.p. em B_i, onde c_i são constantes positivas. Seja $c = \min\{c_i : i = 1, 2, \ldots, m\}$, então $u \geq c$ q.t.p. em K. Logo, o Teorema 2.1. está provado.

Prova do Teorema 2.2. Escolha $T > 0$ suficientemente pequeno. Seja $x_2 = x_1 + 2T\gamma$, então $B(x_2, 2T) \subset \Omega$, $x_1 \in \partial B(x_2, 2T)$. Denote $Y = \{x \in \Omega : T < |x - x_2| < 2T\}$, nós escolhemos $0 < a < \inf\{u(x) : |x - x_2| = T|\}$ e considere a tão pequeno quanto se queira, da mesma maneira que a etapa 1 da prova de Teorema 2.1, existe uma sub-solução $w \in C^{\overline{Y}}$ de (2.1) em Y e w satisfaz: $w \leq u$ em Y, $w(x_1) = 0$, $\dfrac{\partial w(x_1)}{\partial \gamma} > 0$. Conseqüêntemente

$$\frac{\partial u(x_1)}{\partial \gamma} > \frac{\partial w(x_1)}{\partial \gamma} > 0$$

. ■

Capítulo 3

Um Problema Quase-Linear de Autovalor

3.1 Introdução

Um dos problemas de grande importância em Equações Diferenciais Parciais é o estudo do **Espectro do Laplaciano no Espaço de Sobolev** $H_0^1(\Omega)$. Mais precisamente, dado um domínio Ω de $\mathbb{R}^n$, devemos estudar o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \text{ em } \Omega \\ \quad u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

ou seja, encontrar valores de λ e funções $u \not\equiv 0, u \in H_0^1(\Omega)$, que satisfaçam (3.1).

Segue-se da **Teoria Espectral de Operadores Compactos e Auto- Adjuntos** que existe uma sequência de autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots, \lambda_j \to \infty$ e tal sequência é exatamente o espectro de $-\Delta$. Além disso, segue-se do **Princípio do Máximo** que se designarmos por $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ as autofunções correspondentes, temos que φ_1 é a única que possui sinal definido e λ_1 é simples, isto é , seu autoespaço possui dimensão igual a um. Tem-se, também, que $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ constitui uma base ortonormal hilbertiana em $H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j = 0, \text{se } i \neq j$$

$$\int_\Omega |\nabla\varphi_i|^2 = 1, \text{se } i = j$$

Este é o caso isotrópico. O caso anisotrópico:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x) u \text{ em } \Omega \\ \ u = 0 \qquad \text{em } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

também tem sido estudado por Manes-Micheletti [12] e Hess-Kato [15].

Neste capítulo, estaremos interessados na existência da solução fraca em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ para o seguinte problema de autovalor não-linear, dado por:

$$\begin{cases} -\triangle_{p(x)}u = \lambda|u|^{q(x)-2}u \text{ em } \Omega, \\ \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ é um domínio limitado e suave, $\lambda \geq 0$ é um parâmetro real e p,q $\in C(\overline{\Omega})$, onde $\Delta_{p(x)}$ denota o operador $p(x)-$Laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u = div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$$

Estudaremos o problema (3.3) considerando a hipótese

$$1 < \min_{x\in\overline{\Omega}} q(x) < \min_{x\in\overline{\Omega}} p(x) < \max_{x\in\overline{\Omega}} q(x) \tag{3.4}$$

O principal resultado deste capítulo estabelece a existência de uma família contínua de autovalores do problema (3.3). Mais precisamente, mostraremos que existe $\lambda^* > 0$, tal que todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ é um autovalor para o problema (3.3).

3.2 Propriedades do Operador $p(x)$-Laplaciano

Daqui por diante, denotaremos $E = W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Teorema 3.1. *O funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$I(u) \;=\; \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx$$

é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$.

Demonstração. Para demonstrar que o funcional I é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$, basta mostrar que a derivada de Gateuax de I existe e é contínua.

Existência da derivada de Gateaux: Sejam $u, v \in E$. Dados $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, considere $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em $(0, 1)$, definida por

$$g(s) \;=\; |\nabla u + st\nabla v|^{p(x)}.$$

Pelo teorema do valor médio de Lagrange, existe $\lambda(x, t) = \lambda \in (0, 1)$ tal que

$$g'(\lambda) \;=\; \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} g'(s) &= p(x)\,|\nabla u + st\nabla v|^{p(x)-1}\,\frac{t\nabla v(\nabla u + st\nabla v)}{|\nabla u + st\nabla v|} \\ &= p(x)t|\nabla u + st\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + st\nabla v)\nabla v. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{g(1)-g(0)}{1-0} = g'(\lambda) = p(x)t|\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \lambda t \nabla v)\nabla v, \tag{3.5}$$

o que implica que

$$\frac{|\lambda t\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} = |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2}|(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v. \tag{3.6}$$

Observe que

$$h := |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v \to |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v, \text{ quase sempre } em\ \Omega \tag{3.7}$$

quando $t \to 0$
Notemos que

$$|h| \leq |\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-1}|\nabla v| \leq (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v|. \tag{3.8}$$

Como

$$|\nabla u|, |\nabla v| \in L^{p(x)}(\Omega).$$

temos que

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}(\Omega).$$

Aplicando a desigualdade do tipo Hölder, obtemos

$$\int_\Omega (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}\nabla v\, dx = C\|(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}\|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}}\|\nabla v\|_{p(x)} < \infty.$$

Portanto,

$$(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p(x)-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega). \tag{3.9}$$

Logo, utilizando (3.5) a (3.9) e o Teorema da Convergência Dominada, teremos

$$\begin{aligned} I'(u)v &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega (|\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)-2}(\nabla u + \lambda t\nabla v)\nabla v)\, dx \\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{|\nabla u + \lambda t\nabla v|^{p(x)} - |\nabla u|^{p(x)}}{p(x)t} dx \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla v\, dx. \end{aligned}$$

Continuidade da derivada de Gateaux: Consideremos $\{u_n\} \subset E$, tal que $u_n \to u$ em E, desse modo,

$$\nabla u_n \quad \longrightarrow \quad \nabla u \;\text{ em }\; (L^{p(x)}(\Omega))^N \tag{3.10}$$

De acordo com o teorema 1.1, existe uma subseqüência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e uma função $g \in L^{p(x)}(\overline{\Omega})$, tais que

$$\nabla u_n(x) \quad \longrightarrow \quad \nabla u(x) \text{ quase sempre } em\ \Omega, \tag{3.11}$$

$$|\nabla u_n| \quad \leq \quad g, \text{ quase sempre } em\ \Omega \tag{3.12}$$

Por (3.11), ocorre que:

$$|\nabla u_n(x)| \quad \longrightarrow \quad |\nabla u(x)|,\ q.t.p.\ em\ \Omega \tag{3.13}$$

Para todo $v \in E$, temos

$$\begin{aligned}
|I'(u_n) - I'(u), v| &= \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla v\, dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v\, dx \right| \\
I'(u_{u_n})v &= \left| \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) \nabla v|\, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega ||\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\, ||\nabla v|\, dx.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Consideremos

$$f_n \quad = \quad ||\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\, ||\nabla v|,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f_n &\leq ||\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n| + ||\nabla u|^{p(x)-2}(-\nabla u)| \\
&\leq |\nabla u_n|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Observando que:

$$|\nabla u_n|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1} \in L^{q(x)}(\Omega),$$

onde $q(x) = \dfrac{p(x)}{p(x)-1}$. De (3.16), concluímos que

$$\{f_n\} \subset L^{q(x)}(\Omega)$$

Pela desigualdade de Hölder em (3.14), temos

$$\begin{aligned}
|I'(u_n) - I'(u), v| &\leq \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla v\, dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v\, dx \right| \\
I'(u_n)v &\leq \int_\Omega f_n |\nabla v|\, dx \\
&\leq C\|f_n\|_{q(x)} \|\nabla v\|_{p(x)} \\
&\leq C\|f_n\|_{q(x)} \|v\|,
\end{aligned}$$

de onde segue que

$$\|I'(u_n) - I'(u)\| \leq C\|f_n\|_{q(x)}. \tag{3.17}$$

Usando agora (3.11) e (3.13) em (3.15), temos

$$f_n : ||\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u| \longrightarrow ||\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u| = 0,$$

ou seja,

$$f_n(x) \longrightarrow 0 \text{ quase sempre em } \Omega \tag{3.18}$$

Por (3.12) e (3.16), obtemos

$$f_n(x) \leq g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x-1)} \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Daí,

$$\begin{aligned} f_n(x)^{q(x)} &\leq \left(g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x-1)}\right)^{q(x)} \\ &\leq 2^{q(x)} \left(g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x-1)}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_n(x)^{q(x)} \leq 2^{q^+} \cdot \left(g(x)^{p(x)-1} + |\nabla u(x)|^{p(x-1)}\right) \in L^1(\Omega), \text{ quase sempre em } \Omega. \tag{3.19}$$

De (3.18), (3.19) e usando o Teorema da Convergência Dominada, ocorre que

$$\int_\Omega f_n(x)^{q(x)} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim, pela proposição 1.7, tem-se

$$\|f_n\|_{q(x)} \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Desse fato e de (3.17), temos

$$\|I'(u_n) - I'(u)\| \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

ou seja, a derivada de Gateaux I é contínua.

Teorema 3.2. *O funcional $G : E \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por*

$$G(u) = \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)}\, dx$$

é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$.

Demonstração. Para mostrar que o funcional G é de classe $C^1(E,\mathbb{R})$ podemos proceder de modo análogo, com no Teorema (3.1).
Existência da derivada de Gateaux: Sejam $u, v \in E$, $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$. Considere a função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em $(0,1)$, definida por $f(s) = |u + stv|^{q(x)}$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda(x,t) = \lambda \in (0,1)$, tal que

$$f'(\lambda) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}.$$

Observe que

$$f'(s) = q(x)|u + stv|^{q(x)-1}\frac{tv(u + stv)}{|u + stv|}$$

$$f'(s) = q(x)t|u + stv|^{q(x)-2}(u + stv)(v).$$

Logo,

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = q(x)t|u + \lambda tv|^{q(x)-2}(u + \lambda tv)(v),$$

ou seja,

$$\frac{|u + stv|^{q(x)} - |u|^{q(x)}}{q(x)t} = |u + \lambda tv|^{q(x)-2}(u + \lambda tv)(v). \tag{3.20}$$

Note que

$$h := |u + \lambda tv|^{q(x)-2}(u + \lambda tv)(v) \longrightarrow |u|^{q(x)-2}uv, \text{ quando } t \to 0. \tag{3.21}$$

Observe que

$$|h| \leq |u + \lambda tv|^{q(x)-1}v \leq (|u| + |v|)^{q(x)-1}|v|. \tag{3.22}$$

Desde que $|u|, |v| \in L^{p(x)}(\Omega)$, temos

$$(|u| + |v|)^{q(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{q(x)-1}}(\Omega)$$

Pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\int_\Omega (|u| + |v|)^{q(x)-1}|v|\, dx \leq C\|(|u| + |v|)^{q(x)-1}\|_{\frac{p(x)}{q(x)-1}}\|v\|_{p(x)} < \infty.$$

Assim,

$$(|u| + |v|)^{q(x)-1}|v| \in L^1(\Omega). \tag{3.23}$$

De (3.21) - (3.23) e usando o Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\begin{aligned} G'(u) &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{1}{q(x)t}(|u+tv|^{q(x)} - |u|^{q(x)})\,dx \\ &= \lim_{t\to 0}\int_\Omega |u+\lambda tv|^{q(x)-2}(u+\lambda tv)v\,dx \\ &= \int_\Omega |u|^{q(x)-1}uv\,dx. \end{aligned}$$

Continuidade da derivada de Gateaux: Consideremos $\{u_n\}\subset E$, tal que $u_n \longrightarrow u$ em E, de acordo com o teorema (ver), existem uma subseqüência, ainda denotada por $\{u_n\}$, e uma função $g\in L^{p(x)}(\overline{\Omega})$ tais que

$$u_n(x) \longrightarrow u \text{ quase sempre em } \Omega, \tag{3.24}$$

e

$$|u_n| \leq h(s), \text{ quase sempre em } \Omega. \tag{3.25}$$

Logo, por (3.24), temos

$$|u_n(x)| \longrightarrow |u|, \text{ quase sempre em } \Omega. \tag{3.26}$$

Para todo $v\in E$, tem-se

$$\begin{aligned} |< G'(u_n)v - G'(u), v >| &= \left|\int_\Omega |u_n|^{q(x)-2}u_n v\,dx - \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uv\,dx\right| \\ &= \left|\int_\Omega (|u_n|^{q(x)-2}u_n - |u|^{q(x)-2}u)v\,dx\right| \\ &\leq \int_\Omega ||u_n|^{q(x)-2}u_n - |u|^{q(x)-2}u||v|\,dx. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Definindo

$$g_n = ||u_n|^{q(x)-2}u_n - |u|^{q(x)-2}u||v|, \ n\in\mathbb{N}, \tag{3.28}$$

tem-se

$$g_n \leq |u_n|^{q(x)-1} - |u|^{q(x)-1}, \ \forall\, n\in\mathbb{N}. \tag{3.29}$$

Note que

$$|u_n|^{q(x)-1} + |u|^{q(x)-1} \in L^{\frac{p(x)}{q(x)-1}}(\Omega)$$

e de (3.29) segue que

$$\{g_n\} \subset L^{\frac{p(x)}{q(x)-1}}(\Omega).$$

Utilizando a desigualdade de Hölder em (3.27), obtemos

$$\begin{aligned}
|G'(u_n) - G'(u), v| &\leq \int_\Omega ||u_n|^{q(x)-2}u_n - |u|^{q(x)-2}u||v||\, dx, \\
&\leq \int_\Omega g_n|v|\, dx \\
&\leq C\|g_n\|_{\frac{p(x)}{q(x)-1}}\|v\|_{p(x)}.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\|G'(u_n) - G'(u)\| \leq C\|g_n\|_{\frac{p(x)}{q(x)-1}} \tag{3.30}$$

Usando (3.24),(3.26) e (3.28), obtemos

$$g_n := ||u_n|^{q(x)-2}u_n - |u|^{q(x)-2}u| \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$g_n(x) \longrightarrow 0 \text{ quase sempre em } \Omega. \tag{3.31}$$

Por (3.26) e (3.29), temos

$$g_n(x) \leq h(x)^{q(x)-1} + |u(x)|^{q(x)-1} \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
[g_n(x)]^{\frac{p(x)}{q(x)-1}} &\leq \left[g_n(x)^{q(x)-1} + |u(x)|^{q(x)-1}\right]^{\frac{p(x)}{q(x)-1}} \\
&\leq 2^{\frac{p(x)}{q(x)-1}}\left(g_n(x)^{q(x)} + |u(x)|^{q(x)}\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$[g_n(x)]^{\frac{p(x)}{q(x)-1}} \in L^1(\Omega), \text{ quase sempre em } \Omega \tag{3.32}$$

Utilizando de (3.30)-(3.31) e o Teorema da Convergência Dominada, obtemos

$$\int_\Omega [g_n(x)]^{\frac{p(x)}{q(x)-1}}\, dx \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Desse modo, pela Proposição 1.7, ocorre

$$\|g_n\|_{\frac{p(x)}{q(x)-1}} \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Desse fato e (3.30), obtemos

$$\|G'(u_n) - G'(u)\| \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty$$

e isto conclue a continuidade da derivada de Gateaux G'.

Se definirmos $L := I' : E \longrightarrow E^*$, então

$$(L(u), v) \;=\; \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\, dx, \text{ para todo } u, v \in E.$$

Vamos estudar agora, algumas propriedades interessantes e úteis desse operador com intuito de obtermos solução fraca para o problema (3.3).

Teorema 3.3. *O operador $L : E \longrightarrow E^*$ é:*

(a) *contínuo;*

(b) *limitado;*

(c) *estritamente monótono, isto é, $(L(u) - L(v), u - v) > 0$, $\forall\, u, v \in E$, com $u \neq v$;*

(d) *do tipo S_+, isto é, se*

$$u_n \rightharpoonup u \quad e \quad \lim_{n\to\infty}(L(u) - L(v), u - v) \leq 0,$$

então

$$u_n \longrightarrow u \quad em \quad E;$$

(e) *um homeomorfismo.*

Demonstração.
(a) Como $(L(v), v) = (I'(u), v)$, para todos $u, v \in E$, temos que L é contínua devido a continuidade da derivada de Gateaux de I.
(b) Considere $B \subset E$ um conjunto limitado. Portanto, existe $K > 0$ tal que

$$\|u\| \;\leq\; K, \text{ para todo } u \in B. \tag{3.33}$$

Se $u \in B$ e $v \in E$, então,

$$(L(u), v) \;=\; \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\, dx \Rightarrow |(L(u), v)| \leq \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla v|\, dx \tag{3.34}$$

Pela desigualdade de Hölder em (3.34), temos:

$$\begin{aligned} |(L(u), v)| \;&\leq\; C\| \mid \nabla u \mid^{p(x)-1} \|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \|\nabla v\|_{p(x)} \\ &=\; C\|g\|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \|\nabla v\|_{p(x)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|L(v)\| \leq C\|g\|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}},\ \forall u \in B \tag{3.35}$$

onde $g = |\nabla u|^{p(x)-1}$.
Desde que

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \leq \|u\| \leq K, \ para\ todo\ u \in B,$$

então existe $\ddot{k} > 0$ tal que

$$\int_\Omega g(x)^{p(x)}\,dx = \int_\Omega (|\nabla u|^{p(x)-1})^{\frac{p(x)}{p(x)-1}} dx = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \leq \ddot{k}.$$

Portanto, por (3.35), concluímos que L é limitado.
(c) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N$, valem as desigualdades (ver apêndice B):

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle \geq \begin{cases} \dfrac{2^{3-p}}{p}|x-y|^p, & \text{se } p \geq 2, \\ (p-1)\dfrac{|x-y|^2}{(|x|^p+|y|^p)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2, \end{cases}$$

Considere $u, v \in E$, tais que $u \neq v$. Então, $\nabla u \neq \nabla v$. Considere os conjuntos

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega;\, p(x) \geq 2\} \ e \ \Omega_- = \{x \in \Omega;\, 1 < p(x) < 2\}.$$

A monotonicidade estrita de L segue fazendo $x = \nabla u$ e $y = \nabla v$ nas desigualdades acima e integrando sobre Ω_+ ou Ω_-, conforme seja $p(x) \geq 2$ ou $1 < p(x) < 2$, respectivamente.
(d) Se $u_n \rightharpoonup u$ e $\lim\limits_{n\to\infty}(L(u_n) - L(u), u_n - u) \leq 0$, então

$$\lim_{n\to\infty}(L(u_n) - L(u), u_n - u) = 0.$$

Se $p(x) \geq 2$, então

$$\int_{\Omega_+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\,dx \leq (L(u_n) - L(u), u_n - u) \to 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Se $1 < p(x) < 2$, então utilizando a desigualdade tipo Hölder, ocorre

$$\begin{aligned} C_2 \int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\,dx &= C_2 \int_{\Omega_-} \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}\,dx \\ &\leq C\|g_n\|_{\frac{2}{p(x)}} \|h_n\|_{\frac{2}{2-p(x)}}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

onde

$$g_n := \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}}$$

e

$$h_n := (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em E, então (u_n) é limitada. Portanto, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n|^{p(x)}\, dx \ \ \leq \ \ C_3.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho_{\frac{2}{2-p(x)}}(h_n) &= \int_{\Omega_-} |h_n|^{\frac{2}{2-p(x)}}\, dx = \int_{\Omega_-} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{p(x)}\, dx & (3.37)\\ &\leq 2^{p^+}\left(\int_{\Omega_-} |\nabla u_n|^{p(x)}\, dx + \int_{\Omega_-} |\nabla u|^{p(x)}\, dx\right) \leq C_4. & (3.38)\end{aligned}$$

Temos também

$$\rho_{\frac{2}{p(x)}}(h_n) \ \ = \ \ \int_{\Omega_-} |g_n|^{\frac{2}{p(x)}}\, dx \leq C_5 \cdot (L(u_n) - L(u), u_n - u) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty. \qquad (3.39)$$

Usando (3.37) e (3.39) em (3.36), obtemos

$$\int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\, dx \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\, dx = \int_{\Omega_+} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\, dx + \int_{\Omega_-} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\, dx \longrightarrow 0.$$

Logo, pela Proposição 1.7, temos

$$\|\nabla(u_n - u)\|_{p(x)} \ \ \longrightarrow \ \ 0.$$

o que implica

$$\|u_n - u\| \ \ \longrightarrow \ \ 0.$$

(e) Como L estritamente monótona, então L é injetivo.
Suponhamos que $\|\nabla u\|_{p(x)} > 1$. Pela Proposição 1.5, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)}\, dx \ \ \geq \ \ \|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-} \qquad (3.40)$$

Pela desigualdade de Poincaré, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \ \ \geq \ \ C\|u\| \qquad (3.41)$$

Por (3.40) e (3.41), segue que

$$\frac{(L(u), u)}{\|u\|} \ \ = \ \ \frac{\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \cdot \nabla u \cdot \nabla v\, dx}{\|u\|}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}}{\|u\|} \\
&\geq \frac{\|\nabla u\|_{p(x)}^{p^-}}{\|u\|} \\
&\geq \frac{C^{p^-} \cdot \|u\|_{p(x)}^{p^-}}{\|u\|} \\
&\geq \ddot{C}\|u\|_{p(x)}^{p^- -1}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{(L(u), u)}{\|u\|} = \infty, \tag{3.42}
$$

ou seja, L é coercivo. Usando essa última propriedade, a continuidade e a monotonicidade de L, concluímos que L é sobrejetivo.

Dessa forma, existe o operador inverso

$$
L^{-1} : E^* \longrightarrow E. \tag{3.43}
$$

Vamos demonstrar que L^{-1} é contínuo. Seja $\{g_n\} \subset E^*$, tal que $g_n \longrightarrow g$ em E^*.

Considere

$$
u_n = L^{-1}(g_n) \text{ e } u = L^{-1}(g).
$$

Desde que L é uma bijeção, ocorre

$$
L(u_n) = g_n \; e \; L(u) = g \tag{3.44}
$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{(L(u_n), u_n)}{\|u_n\|} &= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla u_n \, dx}{\|u_n\|} \\
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}}{\|u_n\|}.
\end{aligned}
$$

Pela limitação $\{g_n\}$ e por (3.42), concluímos que $\{u_n\}$ é limitada em E. Sendo E um Espaço de Banach reflexivo, então a menos de subseqüência podemos supor

$$
u_n \rightharpoonup u_0.
$$

Notemos que

$$
(L(u_n) - L(u_0), u_n - u_0) = (g_n, u_n - u_0) - (L(u_0), u_n - u_0)
$$

Por outro lado, temos

$$(g_n, u_n - u_0) \;=\; (g_n - g, u_n - u_0) + (g, u_n - u_0)$$

Mas, $g_n \longrightarrow g$ e $u_n \longrightarrow u_0$, de onde segue que

$$\lim_{n\to\infty}(L(u_n) - L(u_0), u_n - u_0) \;=\; 0$$

Como L é do tipo (S_+), temos

$$u_n \;\longrightarrow\; u_0 \tag{3.45}$$

Sendo L contínua, temos

$$L(u_n) \;\longrightarrow\; L(u_0)$$

Por (3.44), obtemos

$$L(u) \;=\; L(u_0)$$

Desde que L é injetivo, temos $u = u_0$. Portanto, de (3.45) temos

$$u_n \;\longrightarrow\; u \text{ em } E,$$

mostrando que L^{-1} é contínuo, assim concluímos que L é um homeomorfismo.

Observação 3.1. *Pelos Teoremas 3.1 e 3.2, o funcional energia $J_\lambda : E \to \mathbb{R}$, definido por*

$$J_\lambda(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx - \lambda \int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx.$$

é de classe $C^1(E, \mathbb{R})$, com

$$J'_\lambda(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uv dx, \;\forall\, u, v \,\in\, E$$

Dessa forma, as soluções fracas de (3.3) são os pontos críticos de J_λ.

Lema 3.1. *Existe $\lambda^* > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ existem ρ, $a > 0$ tais que $J_\lambda(u) \geq a$ para todo $u \in E$ com $||u|| = \rho$.*

Demonstração Desde que $q(x) < p^*(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, temos que E está imerso continuamente em $L^{q(x)}(\Omega)$. Assim, existe uma constante positiva C_1, tal que

$$|u|_{q(x)} \leq C_1||u||\,, \forall u \in E. \tag{3.46}$$

Fixemos $\rho \in (0, 1)$, tal que $\rho < \dfrac{1}{C_1}$, Esta condição implica que

$$u \in E\,,\; ||u|| = \rho$$

então

$$|u|_{q(x)} \leq C_1||u|| = C_1\,\rho < 1 \tag{3.47}$$

Além disso, pela relação (1.6), temos

$$\rho_{q(x)}(u) = \int_\Omega |u|^{\,q(x)}dx \leq |u|^{q-}_{q(x)}\,,\ \forall u \in E\,,\ ||u|| = \rho \tag{3.48}$$

De (3.46) e (3.48), obtemos

$$\int_\Omega |u|^{\,q(x)}dx \leq |u|^{\,q-}_{\,q(x)} \leq C_1^{q-}||u||^{\,q-}\,,\ \forall u \in E\,,\ ||u|| = \rho \tag{3.49}$$

De (1.6) e (3.49), teremos que, para cada $u \in E\,,\ ||\,u|| = \rho$,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx - \lambda\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}dx \\ &\geq \int_\Omega \frac{1}{p^+}|\nabla u|^{p(x)}dx - \lambda\int_\Omega \frac{1}{q^-}|u|^{q(x)}dx \\ &\geq \frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{q^-}\int_\Omega |u|^{q(x)}dx \\ &\geq \frac{1}{p^+}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx - \frac{\lambda}{q^-}\,C_1^{q-}||u||^{\,q-} \end{aligned}$$

Agora, observamos que $||u|| = |\nabla u|_{p(x)} < 1$ e da relação (1.6) tem-se

$$||u|| = |\nabla u|_{p(x)} < 1 \ \ e\ \ \rho_{p(x)}(|\nabla u|) \geq |\nabla u|^{p+}_{p(x)} = ||u||^{\,p+}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p^+}||u||^{\,p^+} - \frac{\lambda}{q^-}\,C_1^{q^-}||u||^{\,q^-} \\ &= \frac{1}{p^+}\rho^{\,p^+} - \frac{\lambda}{q^-}\,C_1^{q^-}\,\rho^{\,q^-} \\ &= \rho^{\,q-}\left(\frac{1}{p^+}\rho^{\,p^+-\,q^-} - \frac{\lambda}{q^-}\,C_1^{q^-}\right) \end{aligned}$$

Definamos

$$\lambda^* = \frac{\rho^{\,p^+-\,q^-}}{2p^+}\cdot\frac{q^-}{C_1^{q^-}} \tag{3.50}$$

Observando que, em virtude da condição (3.4), temos $p^+ > q^-$. Então, para $\lambda < \lambda^*$, teremos

$$\lambda < \frac{\rho^{\,p^+-\,q^-}}{2p^+}\ \frac{q^-}{C_1^{q^-}}$$

$$\frac{\lambda C_1^{q^-}}{q^-} < \frac{\rho^{\,p^+-\,q^-}}{2p^+} < \frac{\rho^{\,p^+-\,q^-}}{p^+}$$

Assim,

$$\frac{\rho^{p^+-q^-}}{p^+}-\frac{\lambda C_1^{q^-}}{q^-}>0$$

Portanto, tomando $a=\dfrac{\rho^{p^+}}{2p^+}>0$, teremos para $\lambda\in(0,\lambda^*)$, $||u||=\rho$.

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &\geq \rho^{q-}\left(\frac{1}{p^+}\rho^{p^+-q^-}-\frac{\lambda}{q^-}C_1^{q^-}\right)\\
&=\rho^{q-}\left(\frac{1}{p^+}\rho^{p^+-q^-}-\frac{\rho^{p^+-q^-}}{2p^+}\cdot\frac{q^-}{C_1^{q^-}}\cdot\frac{C_1^{q^-}}{q^-}\right)\\
&=\rho^{q-}\frac{1}{2p^+}\rho^{p^+-q^-}=\frac{\rho^{p^+}}{2p^+}=a>0
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração do Lema 2.1.

Lema 3.2. *Existe $\phi\in E$ tal que $\phi\geq 0$ e $\phi\not\equiv 0$ e $J_\lambda(t\phi)<0$ para $t>0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração. A hipótese (3.4) nos afirma que

$$1<\min_{x\in\overline{\Omega}}q(x)<\min_{x\in\overline{\Omega}}p(x)<\max_{x\in\overline{\Omega}}q(x)$$

o que implica que $q^-<p^-$. Considere $\varepsilon_0>0$ tal que $q^-+\varepsilon_0<p^-$.

Por outro lado, desde que $q\in C(\overline{\Omega})$, segue-se que existe um conjunto aberto $\Omega_0\in\Omega$, tal que $\overline{\Omega}_0\in\Omega$ e $\mid q(x)-q^-\mid<\varepsilon_0$, $\forall x\in\Omega_0$.

Assim,

$$-\varepsilon_0<q(x)-q^-<\varepsilon_0,\forall x\in\Omega_0$$

$$q^--\varepsilon_0<q(x)<q^-+\varepsilon_0,\forall x\in\Omega_0$$

desse modo:

$$q(x)<q^-+\varepsilon_0<p^-,\forall x\in\Omega_0$$

Seja $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$, tal que $supp(\phi)\supset\overline{\Omega}_0$, $\phi=1,\forall x\in\overline{\Omega}_0$ e $0\leq\phi(x)\leq 1$, em Ω.

Para $t\in(0,1)$, temos

$$\begin{aligned}
J_\lambda(u) &= \int_\Omega\frac{1}{p(x)}\mid\nabla u\mid^{p(x)}dx-\lambda\int_\Omega\frac{1}{q(x)}\mid u\mid^{q(x)}dx\\
&= \int_\Omega\frac{t^{p(x)}}{p(x)}\mid\nabla u\mid^{p(x)}dx-\lambda\int_\Omega\frac{t^{q(x)}}{q(x)}\mid u\mid^{q(x)}dx\\
&\leq \frac{t^{p^-}}{p^-}\int_\Omega\mid\nabla u\mid^{p(x)}dx-\lambda\cdot\frac{t^{q^-+\varepsilon_0}}{q}\int_{\Omega_0}\mid u\mid^{q(x)}dx
\end{aligned}$$

Para $J_\lambda(u)<0$, devemos ter

$$\frac{t^{p^-}}{p^-}\int_\Omega\mid\nabla u\mid^{p(x)}dx-\lambda\cdot\frac{t^{q^-+\varepsilon_0}}{q^+}\int_{\Omega_0}\mid u\mid^{q(x)}dx<0$$

$$\frac{t^{p^-}}{p^-}\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx < \lambda\cdot\frac{t^{q^-+\varepsilon_0}}{q^+}\int_{\Omega_0}|u|^{q(x)}dx$$

$$\frac{t^{p^-}}{t^{q^-+\varepsilon_0}} < \frac{\frac{\lambda p^-}{q^+}\displaystyle\int_{\Omega_0}|u|^{q(x)}dx}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx}$$

$$t^{p^- - q^- - \varepsilon_0} < \frac{\frac{\lambda p^-}{q^+}\displaystyle\int_{\Omega_0}|u|^{q(x)}dx}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx}.$$

Desde que $p^- - q^- - \varepsilon_0 > 0$, ocorre

$$t < \left(\frac{\frac{\lambda p^-}{q^+}\displaystyle\int_{\Omega_0}|u|^{q(x)}dx}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx}\right)^{\frac{1}{p^- - q^- - \varepsilon_0}}.$$

Definindo

$$0 < \delta < \min\left\{1, \frac{\frac{\lambda p^-}{q^+}\displaystyle\int_{\Omega_0}|u|^{q(x)}dx}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx}\right\},$$

temos que, $J_\lambda(u) < 0$ para $t < \delta^{\frac{1}{p^- - q^- - \varepsilon_0}}$.

Observemos que $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx > 0$. De fato, é claro que

$$\int_{\Omega_0}|u|^{q(x)}dx \leq \int_\Omega |u|^{q(x)}dx \leq \int_\Omega |u|^{q^-}dx$$

Por outro lado, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^{q^-}(\Omega)$ e, assim, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$|\phi|_{q^-} = C_2\|\phi\|.$$

Esta desigualdade nos diz que $\|\phi\| > 0$.

(a) Se $\|\phi\| > 1$, pela relação (1.6), temos

$$1 < |\nabla\phi|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho_{p(x)}(\nabla\phi) = \int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx.$$

(b) Se $\|\phi\| < 1$, pela Proposição 1.6, ocorre:

$$|\nabla\phi|^{p^+} \leq \rho_{p(x)}(\nabla\phi) = \int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^{p(x)}dx \quad > \quad 0$$

concluindo, assim, a demonstração do lema. ■

Definição 3.1. *Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do problema (3.3) se existir $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega |u|^{q(x)-2}uvdx = 0, \tag{3.51}$$

para todo $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Observemos que se λ for um autovalor do problema (3.3), então a função correspondente $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ é uma solução fraca de (3.3).

Temos o seguinte resultado central desse capítulo:

Teorema 3.4. *Suponhamos que condição (3.4) seja satisfeita,*

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} p(x) < N \text{ e } q(x) < p^*(x), \, \forall x \in \overline{\Omega}$$

Então existe $\lambda^* > 0$ tal que todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$ é um autovalor do problema (3.3).

Esse Teorema implica que

$$\inf_{u\in W_0^{1,p(x)}\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^{q(x)}dx} = 0$$

de onde segue-se que dado qualquer $C > 0$, existe $u_0 \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ tal que

$$C\int_\Omega |u_0|^{q(x)}dx \geq \int_\Omega |\nabla u_0|^{p(x)}dx$$

Demonstração. Seja λ^* definido em (3.50). Pelo Lema 3.1, existe uma bola centrada na origem, $B_\rho(0)$ tal que

$$\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda \quad > \quad 0.$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2, existe $\phi \in E$ tal que $J_\lambda(t\phi) < 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno. Já sabemos que $u \in B_\rho(0)$, teremos

$$J_\lambda(u) \quad \geq \quad \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{q^-}C_1^{q^-}\|u\|^{q^-}.$$

Como $p^+ > q^-$, segue-se que

$$-\infty \quad < \quad \underline{C} = \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda < 0.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$\epsilon < \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda - \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J_\lambda \tag{3.52}$$

Aplicando o Princípio Variacional de Ekeland (ver Apêndice C) ao funcional

$$J_\lambda : \overline{B_\rho(0)} \longrightarrow \mathbb{R},$$

encontramos $u_\epsilon \in \overline{B_\rho(0)}$ tal que

$$J_\lambda(u_\epsilon) \;<\; \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J_\lambda + \epsilon$$

e

$$J_\lambda(u_\epsilon) \;<\; J(u) + \epsilon\|u_\epsilon - u\|,\ u \neq u_\epsilon.$$

Desde que

$$J_\lambda(u_\epsilon) \;\leq\; \inf_{\overline{B_\rho(0)}} J_\lambda + \epsilon < \inf_{B_\rho(0)} J_\lambda < J_\lambda(u),\, \forall u \in\; \partial B_\rho(0),$$

concluimos que $u_\epsilon \in B_\rho(0)$.
Agora definimos

$$\begin{aligned} I_\lambda \;\;:\;\; & \overline{B_\rho(0)} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & I_\lambda(u) = J_\lambda(u) + \epsilon\|u - u_\epsilon\|. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} & J_\lambda(u_\epsilon) < J(u) + \epsilon\|u - u_\epsilon\| \\ & J_\lambda(u_\epsilon) + \|u_\epsilon - u_\epsilon\| < J(u) + \epsilon\|u - u_\epsilon\| \\ & I_\lambda(u_\epsilon) < J(u) + \epsilon\|u - u_\epsilon\|,\ u \neq u_\epsilon, \end{aligned}$$

tem-se que u_ϵ é ponto mínimo de I_λ.
Assim,

$$\frac{I_\lambda(u_\epsilon + tv) - I_\lambda(u_\epsilon)}{t} \;\;\geq\;\; 0,\ \text{se } t > 0 \,\text{for pequeno},\ \text{para todo } v \in\; B_1(0).$$

A relação acima implica que

$$\begin{aligned} & \frac{J_\lambda(u_\epsilon + tv) - \epsilon\|u_\epsilon + tv - u_\epsilon\| - J_\lambda(u_\epsilon) - \epsilon\|u_\epsilon - u_\epsilon\|}{t} \geq 0, \\ & \frac{J_\lambda(u_\epsilon + tv) - J_\lambda(u_\epsilon)}{t} + \epsilon\|v\| \geq 0. \end{aligned}$$

Fazendo $t \longrightarrow 0$, segue-se que

$$\begin{aligned} & \left\langle J_\lambda'(u_\epsilon), v \right\rangle + \epsilon\|v\| \geq 0, \\ & \left\langle J_\lambda'(u_\epsilon), -v \right\rangle + \epsilon\| - v\| \geq 0, \\ & -\left\langle J_\lambda'(u_\epsilon), v \right\rangle + \epsilon\|v\| \geq 0 \\ & \left\langle J_\lambda'(u_\epsilon), v \right\rangle \leq \epsilon\|v\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\langle J_\lambda'(u_\epsilon), v\rangle}{\|v\|} \quad \leq \quad \epsilon.$$

Portanto,

$$\|J_\lambda'(u_\epsilon)\|_{E^*} \quad = \quad \sup \frac{\langle J_\lambda'(u_\epsilon), v\rangle}{\|v\|} \leq \epsilon.$$

Dessa forma, tomando $\epsilon \subset \frac{1}{n}$ encontramos uma seqüência $(w_n) \in B_\rho(0)$, tal que

$$J_\lambda(w_n) \quad \longrightarrow \quad \underline{C} \;\; e \;\; J_\lambda^{'}(w_n) \longrightarrow 0. \tag{3.53}$$

Desde que $w_n \in B_\rho(0)$, temos que (w_n) é limitada em E. Assim, existe $w \in E$, tal que

$$w_n \quad \longrightarrow \quad w \text{ em } E.$$

Desde que $q(x) < p^*(x)$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$, E está imerso compactamente em $L^{q(x)}(\Omega)$ e, assim, a menos de subseqüência,

$$w_n \quad \longrightarrow \quad w \text{ em } L^{q(x)}(\Omega).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |w_n|^{q(x)-2} w_n(w_n - w)\, dx\right| \quad &\leq \quad \int_\Omega \left||w|^{q(x)-2} w_n(w_n - w)\right|\, dx \\ &= \quad \int_\Omega |w_n|^{q(x)-1}(w_n - w)\, dx.\end{aligned}$$

Pela desiguladade de Hölder, temos

$$\left|\int_\Omega |w_n|^{q(x)-2} w_n(w_n - w)\, dx\right| \quad \leq \quad C\left||w|^{q(x)-1}\right|_{q'(x)} |w_n - w|$$

onde

$$\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1 \quad \frac{1}{q(x)} = \frac{q(x)-1}{q(x)}$$

Desde que

$$\left||w|^{q(x)-1}\right|_{q'(x)} \quad = \quad \inf\left\{\lambda > 0;\ \int_\Omega \left|\frac{|w|^{q(x)-1}}{\lambda}\right|^{q'(x)} dx \leq 1\right\},$$

temos que $\left||w|^{q(x)-1}\right|_{q'(x)}$ é limitada por uma constante e $|w_n - w|_{q(x)} \longrightarrow 0$,

concluímos que

$$\int_\Omega |w_n|^{q(x)-2} w_n(w_n - w)\, dx \quad \longrightarrow \quad 0.$$

A relação (3.53) implica que

$$\Big\langle J'_\lambda(w_n), w_n - w\Big\rangle \;=\; \int_\Omega |\nabla w_n|^{p(x)-2}\nabla w_n \nabla(w_n - w)\,dx - \lambda\int_\Omega |w_n|^{q(x)-2}w_n(w_n - w)\,dx.$$

de onde concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |\nabla w_n|^{p(x)-2}\nabla w_n\nabla(w_n - w)\,dx \;=\; 0 \tag{3.54}$$

Sabemos que para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^N$, vale a desigualdade seguinte (ver apêndice A):

$$\Big\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y\Big\rangle \;\geq\; C|x - y|^p,\ se\ p \geq 2.$$

Pondo $x = \nabla w_n$ e $y = \nabla w$ na desigualdade acima, temos

$$\begin{aligned}\Big\langle |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n - |\nabla w|^{p-2}\nabla w, \nabla w_n - \nabla w\Big\rangle \;&\geq\; C|\nabla(w_n - w)|^{p(x)}\\ \Big\langle |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n, \nabla(w_n - w)\Big\rangle - \Big\langle |\nabla w_n|^{p-2}\nabla w, \nabla(w_n - w)\Big\rangle \;&\geq\; C|\nabla(w_n - w)|^{p(x)}\end{aligned}$$

Integrando ambos os membros, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|\nabla w_n|^{p-2}\nabla w_n\nabla(w_n - w) - |\nabla w|^{p-2}\nabla w, \nabla(w_n - w))\,dx \;&\geq\\ C\int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^{p(x)}\,dx&\end{aligned} \tag{3.55}$$

Desde que $w_n \rightharpoonup w$ em E, temos

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla(w_n - w) \;\longrightarrow\; 0,$$

logo

$$\int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^{p(x)}\,dx \;\longrightarrow\; 0.$$

Portanto,

$$\rho_{p(x)}(\nabla(w_n - w)) \;\longrightarrow\; \int_\Omega |\nabla(w_n - w)|^{p(x)}\,dx \longrightarrow 0.$$

Pela Proposição 1.7, ocorre que

$$\|\nabla(w_n - w)\|_{p(x)} \;\longrightarrow\; 0$$

donde

$$\|w_n - w\|_{p(x)} \;\longrightarrow\; 0.$$

Logo, $w_n \longrightarrow w$ em E. Pela relação (3.53), segue que

$$J_\lambda(w) \;=\; \underline{C}\ e\ J'_\lambda(w) = 0. \tag{3.56}$$

Assim, concluímos que w é solução fraca não-trivial do problema (3.1), mostrando que
Assim, todo $\lambda \in\ (0, \lambda^*)$ é autovalor de (3.1).

Capítulo 4

Um Problema Singular via Método Topológico

4.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos a existência de solução fraca em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ para o seguinte problema singular elíptico proposto por Corrêa, Costa e Figueiredo [6]:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \dfrac{h(x)}{u^{\gamma(x)}} + k(x)u^{\alpha(x)} & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ é um domínio limitado, p, h, k, α e $\gamma \in C(\overline{\Omega})$ e $\Delta_{p(x)}$ designa o operador $p(x)-$laplaciano, o qual é definido por

$$\Delta_{p(x)}u \;\; = \;\; div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u).$$

Aqui, usaremos o seguinte resultado devido a Rabinowitz: [16]

Proposição 4.1. *Considere um espaço de Banach X e $T : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ uma aplicação contínua e compacta tal que*

$$T(0,u) \;\; = \;\; 0, \; \textit{para todo } u \in X.$$

Então a equação

$$u \;\; = \;\; T(\lambda, u),$$

possui um conjunto conexo, fechado e não limitado $C \subset \mathbb{R}^+ \times X$ de soluções com $(0,0) \in C$

Os resultados aqui apresentados são generalizações daqueles para o problema de Dirichlet envolvendo o operador $p-$laplaciano.

No que segue, denotemos

$$\begin{aligned} C_+(\overline{\Omega}) &= \{h;\, h \in C(\overline{\Omega}), h(x) > 1, \forall\, h \in C(\overline{\Omega})\}, \\ h^+ &= \max_{x \in \overline{\Omega}} h(x) \;\; e \;\; h^- = \min_{x \in \overline{\Omega}} h(x), \;\; \forall\, h \in C(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

4.2 Hipóteses sobre as funções $p(x)$, $\gamma(x)$, $\alpha(x)$, $h(x)$ e $k(x)$

Ao longo desse capítulo assumiremos as seguintes hipóteses preliminares:

(H_1) $h, k \in C(\overline{\Omega})$, $h, k \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, $h, k \neq 0$ em $\overline{\Omega}$

(H_2) $\alpha, \gamma \in C(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha(x), \gamma(x) < 1$, $\forall x \in \overline{\Omega}$

(H_3) $r \in C_+(\overline{\Omega})$ é uma função satisfazendo

$$\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{p^*(x)} \quad < \quad 1,$$

onde $p^*(x)$ é o expoente crítico de Sobolev.

(H_4) $1 < r(x) < p^*(x)$ em $\overline{\Omega}$.

(H_5) $\alpha^+ < p^- - 1$.

A condição (H_5) é natural, pois quando $\alpha\, e\, p$ são constantes a condição usada é

$$0 < \alpha < p - 1$$

(H_6) $\alpha(x) + 1 < p^*(x)$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$.

As hipóteses (H_3) e (H_4), não são imcompatíveis, por exemplo, suponha que

$$\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{p^*(x)} \quad < \quad 1 \ e \ r(x) > 2 \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Realmente, se $r(x) < p^*(x)$, temos

$$\frac{1}{p^*(x)} \quad < \quad \frac{1}{r(x)}.$$

Assim,

$$\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{p^*(x)} \quad < \quad \frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r(x)} = \frac{2}{r(x)} < 1, \ \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

o que mostra que (H_4) implica em (H_3).

4.3 Existência de Solução

Nesta seção, discutiremos a existência de solução fraca para o problema (4.1).

Definição 4.1. *Dizemos que $u \in E$ é uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = f(x, u), \ x \in \Omega, \\ \qquad u = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

Se

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v\, dx \quad = \quad \int_\Omega f(x, u) v\, dx, \ \forall\ v \in E.$$

Proposição 4.2. *Se $f(x,u) = f(x)$, $f \in L^{r(x)}(\Omega)$, onde $r(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ é tal que*

$$\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{p^*(x)} \;<\; 1, \text{ para qualquer } x \in \overline{\Omega},$$

então, o problema (4.2), tem uma única solução fraca.

Demonstração. Considere o funcional $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$g(v) \;=\; \int_\Omega f(x)\, v\, dx.$$

É claro que g é linear. Mostraremos agora que g é contínuo.

Considere $\beta \in C_+(\overline{\Omega})$, tal que

$$\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{\beta(x)} \;=\; 1, \;\forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Assim

$$\frac{1}{\beta(x)} \;=\; \frac{r(x) - 1}{r(x)}$$

por hipótese, temos

$$\frac{1}{\beta(x)} \;>\; \frac{1}{p^*(x)}, \text{ para } x \in \overline{\Omega}.$$

Portanto,

$$\beta(x) \;<\; p^*(x), \;\forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Pelo Teorema 1.11, a imersão

$$E \;\hookrightarrow\; L^{\beta(x)}(\Omega) \text{ é contínua,}$$

então existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|v\|_{\beta(x)} \;\leq\; C_1\|v\|, \forall\, v \in E. \tag{4.3}$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$|g(v)| \;=\; \left|\int_\Omega f(x) v\, dx\right| \leq C\|f\|_{r(x)}\|v\|_{\beta(x)} \tag{4.4}$$

sendo

$$C \;=\; \frac{1}{r^-} + \frac{1}{\beta^-}.$$

Por (4.3) e (4.4), temos

$$|g(v)| \leq C_2 \cdot \|v\|, \forall\, v \in E,$$

o que demonstra que g é contínua.

Como $g \in E^*$ e L é um homeomorfismo, então existe um único $u \in E$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega f(x) \cdot v \, dx, \ \forall\, v \in X,$$

isto é, o problema (4.1) possui uma única solução fraca.

As três próximas proposições estabelecem alguns resultados relativos ao Princípio para a equação envolvendo o $p(x)-$Laplaciano, que se encontram no capítulo anterior.

Proposição 4.3. *(Princípio da Comparação.) Sejam $u, v \in E$ satisfazendo*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx \geq \int_\Omega |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \nabla \varphi \, dx,$$

para qualquer $\varphi \in E$, $\varphi > 0$ em Ω.
Seja $\Psi(x) = \min\{u(x) - v(x), 0\}$. Se $\Psi \in E$ então $u \geq v$ em Ω.

Proposição 4.4. *Considere $u \in E$ uma função que satisfaça*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla \varphi \, dx \geq 0, \ \forall \varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega),$$

$\varphi > 0$ em Ω, $u \geq 0$ em Ω e $u \neq 0$. Então, para qualquer subconjunto compacto $K \subset \Omega$, existe uma constante positiva $C = C(K)$ tal que $u \geq C$ em K.

Proposição 4.5. *Sejam u como na Proposição 4.4, $x_1 \in \partial\Omega$, $u \in C^1(\Omega \cup \{x_1\})$ e $u(x_1) = 0$. Se Ω satisfaz a condição de bola interior em x_1, então $\frac{\partial u}{\partial \eta} > 0$, onde η é um vetor unitário normal interior em x_1.*

Proposição 4.6. *Seja S uma aplicação, definida por*

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R}^+ \times L^{r(x)}(\Omega) &\longrightarrow W_0^{1,p(x)}(\Omega) \\ (\lambda, u) &\longmapsto v = S(\lambda, u), \end{aligned}$$

onde v é a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} v = \lambda \left[\frac{h(x)}{(|u|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] \ \text{em } \Omega, \\ \\ v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então S é uma aplicação contínua.

Demonstração. Seja $(\lambda_n, u_n) \subset \mathbb{R}^+ \times L^{r(x)}(\Omega)$, tal que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda \text{ em } \mathbb{R}^+ \; e \; u_n \longrightarrow u \text{ em } L^{r(x)}(\Omega).$$

Fixando $v_n = S(\lambda_n, u_n)$, teremos

$$v_n \longrightarrow v \text{ em } L^{r(x)}(\Omega).$$

Pela definição de S, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} v_n & = \lambda \left[\frac{h(x)}{(|u_n|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u_n|^{\alpha(x)}\right] \text{ em } \Omega, \\ \qquad v_n & = 0 \quad \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} v & = \lambda \left[\frac{h(x)}{(|u|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)}\right] \text{ em } \Omega, \\ \qquad v & = 0 \quad \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

Usando $v_n - v$ como função-teste em (4.5) e (4.6), obtemos pela definição de solução fraca:

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^{p(x)-2}\nabla v_n \nabla(v_n - v)\, dx = \lambda_n \int_\Omega \left[\frac{h(x)}{(|u_n|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u_n|^{\alpha(x)}\right](v_n - v)dx$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v_n \nabla(v_n - v)\, dx = \lambda \int_\Omega \left[\frac{h(x)}{(|u|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)}\right](v_n - v)\, dx$$

Subtraindo as equações anteriores, temos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[|\nabla v_n|^{p(x)-2}\nabla v_n \nabla(v_n - v) - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v_n \nabla(v_n - v)\right] dx \\ &= \lambda_n \int_\Omega \left[\frac{h(x)}{(|u_n|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u_n|^{\alpha(x)}\right](v_n - v)dx \\ &\quad -\lambda \int_\Omega \left[\frac{h(x)}{(|u|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)}\right](v_n - v)\, dx \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left\langle |\nabla v_n|^{p(x)-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v, \nabla v_n - \nabla v\right\rangle dx = \\ &\lambda_n \int_\Omega \left[\frac{h(x)}{(|u_n|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u_n|^{\alpha(x)}\right](v_n - v)dx - \\ &\quad -\lambda \int_\Omega \left[\frac{h(x)}{(|u|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)}\right](v_n - v)\, dx \end{aligned}$$

na desigualdade do Apêndice A,
Fazendo $x = \nabla v_n$ e $y = \nabla v$, ocorre que

$$\begin{aligned} C_p \|\nabla v_n - \nabla v\|^{p(x)} &\leq C \int_\Omega \left[\frac{h(x)}{(|u_n| + \epsilon)^{\gamma(x)}} - \frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} \right] (v_n - v) dx \\ &+ C \int_\Omega k(x)[|u_n|^\alpha - |u|^\alpha](v_n - v)\, dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

Se $v_n \longrightarrow v$ em E, então $v_n \longrightarrow v$ em $L^{r(x)}(\Omega)$ o que conclui a prova.

Teorema 4.1. *Considere as hipóteses* $(H_1) - (H_6)$*. O problema (4.1) possui uma solução fraca.*

Demonstração. Começaremos a prova, considerando o seguinte problema auxiliar:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} v &= \frac{h(x)}{(|u|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.7}$$

onde $0 < \epsilon < 1$ é um número fixo.
Afim de aplicar aplicarmos a Proposição (4.1). Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} v &= \lambda \left[\frac{h(x)}{(|u|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] \text{ em } \Omega, \\ \\ v &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.8}$$

Para cada $u \in L^{r(x)}(\Omega)$, onde $\lambda \geq 0$ é um parâmetro real.

Observe

$$\begin{aligned} v \in L^{r(x)}(\Omega)\text{então}|u|^{\alpha(x)} \in L^{\frac{r(x)}{\alpha(x)}}(\Omega) \\ 0 \leq \frac{h(x)}{(|u| + \epsilon)^{\gamma(x)}} \leq \frac{h(x)}{\epsilon^{\gamma(x)}} \in L^{\frac{r(x)}{\alpha(x)}}(\Omega) \end{aligned}$$

Devido a hipótese (H_3), o problema (4.7) possui uma única solução $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Usando a Proposição 4.1, consegue-se uma componente C de soluções $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^+ \times L^{r(x)}(\Omega)$ de $u = S(\lambda, u)$, (observe que $S(0, u) = 0$), isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u &= \lambda \left[\frac{h(x)}{(|u|+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] \text{ em } \Omega, \\ \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela Proposição 4.4, temos $u > 0$ em Ω e

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u &= \lambda \left[\frac{h(x)}{(u+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)} \right] \text{ em } \Omega, \\ \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.9}$$

Agora, iremos mostrar que a componente C é não-limitada com respeito a $\lambda \geq 0$. Suponha que isso não aconteça, ou seja, existe $\lambda^* > 0$ tal que se $(\lambda, u) \in C$ então $0, \leq \lambda \leq \lambda^*$.

Assim, usando u como função-teste na equação (4.9), temos

$$\int_\Omega |\nabla u|\, dx \;=\; \int_\Omega \lambda \left[\frac{h(x)}{(u+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)+1}\right] dx.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{h(x)u}{(u+\epsilon)^{\gamma(x)}}\, dx &\leq \int_\Omega \|h\|_\infty \frac{u}{\epsilon^{\gamma(x)}}\, dx \\
\leq \|h\|_\infty \int_\Omega \frac{u}{\epsilon^{\gamma^+}}\, dx & \\
&\leq C\int_\Omega u\, dx \\
&\leq C|\nabla u|_{p(x)}.
\end{aligned}$$

Usando a imersão contínua $W_0^{1,p(x)} \hookrightarrow L^1(\Omega)$, também temos

$$\int_\Omega k(x)u^{\alpha(x)+1} \;\leq\; \|k\|_\infty \int_\Omega u^{\alpha(x)+1}\, dx = \|k\|_\infty \rho_{\alpha(x)+1}(u),$$

e, pela hipótese (H_6), temos $W_0^{1,p(x)} \hookrightarrow L^{\alpha(x)+1}(\Omega)$ o que nos que $|u|_{\alpha(x)+1} \leq C|\nabla u|_{p(x)}$.

Consideraremos dois casos:

(i) Se $|u|_{\alpha(x)+1} > 1$ pela Proposição 1.6, temos

$$\rho_{\alpha(x)+1}(u) \;=\; |u|_{\alpha(x)+1}^{\alpha^+ +1}.$$

(ii) Se $|u|_{\alpha(x)+1} < 1$, ocorre pelo mesmo fato que

$$\rho_{\alpha(x)+1}(u) \;=\; |u|_{\alpha(x)+1}^{\alpha^- +1}.$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\rho(\nabla u) &= \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\, dx = \lambda \int_\Omega \left[\frac{h(x)}{(u+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x)|u|^{\alpha(x)+1}\right] dx \\
&\leq C\|u\|_{p(x)} + C|\nabla u|_{\alpha(x)+1}^{\beta+1} \\
&\leq C\|u\|_{p(x)} + C|\nabla u|_{p(x)}^{\beta+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\rho(\nabla u) \leq C(\|u\| + \|u\|^{\beta+1})$, onde $1 < \beta + 1 < 2$.

Utilizando novamente a Proposição 1.6, obtemos

(a) Se $|\nabla u|_{p(x)} > 1$ então $\rho_{p(x)}(\nabla u) \geq |\nabla u|_{p(x)}^{p^-}$.

(b) Se $|\nabla u|_{p(x)} < 1$ então $\rho_{p(x)}(\nabla u) \geq |\nabla u|_{p(x)}^{p^+}$. Conseqüêntemente,

$$|\nabla u|_{p(x)}^{p^-} \;\leq\; C(|\nabla u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}^{\beta+1})$$

ou

$$|\nabla u|_{p(x)}^{p^+} \;\; \leq \;\; C(|\nabla u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}^{\beta+1}),$$

onde $\alpha^+ = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} p(x) < p^- - 1 = \min\limits_{x\in\overline{\Omega}} p(x) - 1$, o que demonstra que $|\nabla u|_{p(x)}$ é limitada. Desde que $W_0^{1,p(x)} \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$, conclui que $|u|_{p(x)}$ é limitada.

Destas considerações, temos que C é não-limitada com respeito ao parâmetro λ e assim C intersecta $\{1\} \times L^{r(x)}(\Omega)$ produz uma solução $u_\epsilon \in W_0^{1,p(x)}$, satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u_\epsilon & = \frac{h(x)}{(u_\epsilon+\epsilon)^{\gamma(x)}} + k(x) u_\epsilon^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ \\ \qquad u_\epsilon & > 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } \Omega, \\ \\ \qquad u_\epsilon & = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

no sentido fraco, tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$, $u_{1/n} = u_n$, obtemos:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u_\epsilon & = \dfrac{h(x)}{(u_\epsilon + \frac{1}{n})^{\gamma(x)}} + k(x) u_n^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ \\ \qquad u_\epsilon & \geq \dfrac{h(x)}{(u_\epsilon + \frac{1}{n})^{\gamma(x)}} + k(x) u_n^{\alpha(x)} \text{ em } \Omega, \\ \\ & \geq C\left[\frac{1}{(u_n+1)^{\gamma(x)}} + u_n^{\alpha}\right], \qquad\qquad em\ \Omega, \end{cases}$$

ocorre que

$$\frac{1}{(u_n+1)^{\gamma(x)}} \;\; \geq \;\; \frac{1}{(u_n+1)^{\gamma^+}}$$

(c) Se $u_n(x) \geq 1 \Rightarrow [u_n(x)]^{\alpha(x)} \geq [u_n(x)]^{\alpha^-}$

(d) Se $o < u_n(x) < 1 \Rightarrow [u_n(x)]^{\alpha(x)} \geq [u_n(x)]^{\alpha^+}$

Portanto, existe uma constante $m_0 > 0$ tal que

$$C\left[\frac{1}{[u_n+1]^{\gamma(x)}} + [u_n(x)]^{\alpha(x)}\right] \;\; \geq \;\; m_0 > 0.$$

Seja $w \in W_0^{1,p(x)}$ a única solução positiva do problema

$$\begin{cases} \Delta_{p(x)} w & = m_0 > 0 \text{ em } \Omega \\ \qquad w & = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo forte (ver Capítulo 2)

$$u_n(x) \;\; \geq \;\; w(x) > 0, \; \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

Logo, encontraremos uma sucessão limitada aproximando u_n. Argumentando como antes, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}dx = \int_\Omega \frac{h(x)}{(u_n+\frac{1}{n})^{\gamma(x)}}\,dx + \int_\Omega k(x)u_n^{\alpha(x)+1}dx.$$

Por argumentos já utilizados, temos

$$\int_\Omega k(x)u_n^{\alpha(x)+1}dx \leq C|\nabla u_n|_{p(x)}^{\beta+1}, \text{ com } 0<\beta+1<2.$$

onde $\beta = \alpha^{\pm}$.

Ocorre também que

$$\int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(u_n+\frac{1}{n})^{\gamma(x)}} \leq C\int_\Omega \frac{u_n}{(u_n)^{\gamma(x)}}\,dx = C\int_\Omega u_n^{1-\gamma(x)}\,dx$$

Se $u_n(x) \geq 1$ temos $[u_n(x)]^{1-\gamma(x)} \leq [u_n(x)]^{1-\gamma^-}$ e se $u(x)<1$, ocorre $[u_n(x)]^{1-\gamma(x)} \leq [u_n(x)]^{1-\gamma(x)}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega [u_n(x)]^{1-\gamma(x)}dx &\leq \int_\Omega [u_n(x)]^{1-\gamma^-}dx + \int_\Omega [u_n(x)]^{1-\gamma^+}dx,\\ &\leq C|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} + C|u_n^{1-\gamma^+}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^+}}.\end{aligned}$$

Com respeito a $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}}$, consideremos dois casos:
(i) Se $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} > 1$ então

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}}^{\frac{r^-}{1-\gamma^-}} \leq \rho_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}}(u_n^{1-\gamma^-}) = \int_\Omega u_n^{r(x)}dx$$

o que implica que

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} \leq \left(\int_\Omega u_n^{r(x)}\right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^-}}.$$

(ii) Se $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} < 1$, obtemos

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} \leq \left(\int_\Omega u_n^{r(x)}dx\right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^+}}.$$

Suponhamos que exista $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande tal que
(a) $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} > 1$ e $|u_n|_{r(x)} > 1$. Neste caso,

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} \leq \left(\int_\Omega u_n^{r(x)}dx\right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^-}} \leq \left(|u_n|_{r(x)}^{r^+}\right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^-}} \leq |u_n|_{r(x)}^{\frac{1-\gamma^-}{r^- r^+}} \leq |u_n|_{r(x)}^{1-\gamma^-}.$$

(b) $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}}$ e $|u_n|_{r(x)} < 1$.

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} \leq \left(\int_\Omega u_n^{r(x)} dx\right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^-}} \leq |u_n|_{r(x)}^{\frac{1-\gamma^-}{r^- r^+}} \leq 1.$$

(c) $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} < 1$ e $|u_n|_{r(x)} > 1$.

$$|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} \leq \left(\int_\Omega u_n^{r(x)} dx\right)^{\frac{1-\gamma^-}{r^+}} \leq |u_n|_{r(x)}^{\frac{1-\gamma^-}{r^+ r^-}} \leq |u_n|_{r(x)}^{1-\gamma^-}.$$

(d) $|u_n^{1-\gamma^-}|_{\frac{r(x)}{1-\gamma^-}} < 1$ e $|u_n|_{r(x)} < 1$. podem ser executados os casos relacionados a u de um modo análogo.

mostraremos isso agora:
(1) $|\nabla u_n|_{p(x)} < 1 \Rightarrow \rho_{p(x)}(|\nabla u_n|) \geq |\nabla u_n|_{p(x)}^{p^-}$
e
(2) $|\nabla u_n|_{p(x)} < 1 \Rightarrow \rho_{p(x)}(|\nabla u_n|) \geq |\nabla u_n|_{p(x)}^{p^+}$.

Uma situação possível a ser considerada é:

$$|\nabla u_n|_{p(x)}^{p^-} \leq C\left[|\nabla u_n|_{p(x)}^{\beta+1} + |u_n|_{r(x)}^{1-\gamma^-} + |u_n|_{r(x)}^{1-\gamma^+} + C'\right]$$

e pela da imersão contínua $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$ obtemos

$$|\nabla u_n|_{p(x)}^{p^-} \leq C\left[|\nabla u_n|_{p(x)}^{\beta+1} + |u_n|_{p(x)}^{1-\gamma^-} + |u_n|_{p(x)}^{1-\gamma^+} + 1\right]$$

e porque $p^- > \beta+1$, $1-\gamma^-, 1-\gamma^+$ temos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Os outros casos são cumpridos do mesmo modo para obter a limitação de (u_n) em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, talvez para subseqüências. Desde que $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Considerando $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ como função-teste temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(u_n+\frac{1}{n})^{\gamma(x)}}dx + \int_\Omega k(x)u_n^{\alpha(x)}dx.$$

Do Teorema 1.11 de Sobolev, temos uma subseqüência $u_n \longrightarrow u$ em $L^{t(x)}(\Omega)$, $1 \leq t(x) < p^*(x)$.
Usando $u_n - u$ como função-teste e discutindo como na prova da afirmação 1, temos $u_n \longrightarrow u$ em $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Assim, devido ao Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\nabla\varphi\, dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\varphi\, dx,$$
$$\int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{(u_n+\frac{1}{n})^{\gamma(x)}}dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{h(x)\varphi}{u^{\gamma(x)}}dx,$$

e

$$\int_\Omega k(x)u_n^{\alpha(x)}dx \longrightarrow \int_\Omega k(x)u^{\alpha(x)}dx.$$

Portanto, u é solução fraca de (4.2) e a prova do teorema está concluída. ■

Apêndice A

Desigualdades de Simon

Neste Apêndice, demonstraremos duas desigualdades que foram utilizadas nos capítulos 3 e 4.

Lema A.1. *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$. Então:*

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle \geq \begin{cases} \dfrac{2^{3-p}}{p}|x-y|^p, & se\ p \geq 2, \\ (p-1)\dfrac{|x-y|^2}{(|x|^p+|y|^p)^{2-p}}, & se\ 1 < p < 2, \end{cases}$$

Demonstração. Consideremos $x, y \in \mathbb{R}^N$. Suponhamos $\|x\| = 1$ e $\|y\| \leq 1$, pois caso contrário, supondo $\|x\| \geq \|y\|$, bastava considerar

$$\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}\ e\ \tilde{y} = \frac{y}{\|y\|}$$

Suponha também

$$x = (1, 0, 0, \dots, 0)\ e\ y = (y_1, y_2, 0, \dots, 0)$$

De acordo, da escolha de uma base conveniente.
(i) Se $1 < p < 2$, a desigualdade é equivalente à

$$\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle \geq \frac{C|x-y|^2}{(|x|^p+|y|^p)^{2-p}}$$

$$g(y_1, y_2) = \left\{1 - y_1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} + \frac{y_1^2+y_2^2}{|y|^{2-p}}\right\}\frac{(1+|y|^p)^{2-p}}{(1-y_1)^2+y_2^2} \geq C$$

ou

$$g(y_1, y_2) := \left\{\left(1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}}\right)(1-y_1) + \frac{y_2^2}{|y|^{2-p}}\right\}\frac{(1+|y|^p)^{2-p}}{(1-y_1)^2+y_2^2} \geq C$$

Caso $0 \leq y_1 \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} &\geq 1 - \frac{y_1}{|y_1|^{2-p}} = (1-y_1)\left(1 + \frac{1}{|y_1|^{2-p}}\right) + y_1 - \frac{1}{|y_1|^{2-p}} \\ &\geq (1-y_1)p + y_1 - 1 = (p-1)(1-y_1) \end{aligned}$$

Caso $y_1 < 0$, ocorre que:

$$1 - \frac{y_1}{|y|^{2-p}} \geq 1 - y_1 \geq (p-1)(1-y_1)$$

Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned}
g(y_1, y_2) &\geq \left\{(1-y_1)^2(p-1) + \frac{y_2^2}{|y|^{2-p}}\right\} \frac{(1+|y|^p)^{2-p}}{(1-y_1)^2 + y_2^2} \\
&\geq \left\{(1-y_1)^2(p-1) + (p-1)y_2^2\right\} \frac{1}{(1-y_1)^2 + y_2^2} \\
&\geq (p-1)\left\{(1-y_1)^2 + y_2^2\right\} \frac{1}{(1-y_1)^2 + y_2^2} \\
&= (p-1).
\end{aligned}$$

(ii) Se $p \geq 2$. Substituindo $t = |y|$ e $s = \dfrac{\langle x, y\rangle}{|y|}$ na expressão

$$\frac{\left\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \right\rangle}{|x-y|^p}$$

Obtemos

$$h(t,s) := \frac{\left\langle |x|^p - \langle x,y\rangle\, |x|^{p-2} - \langle x,y\rangle\, |y|^{p-2} + |y|^p, x-y \right\rangle}{\{(x-y)^2\}^{p/2}}$$

$$h(t,s) := \frac{1 - st - stt^{p-2} + t^p}{(1-2st+t^2)^{p/2}} = \frac{1 - (t+t^{p-1})s + t^p}{(1-2st+t^2)^{p/2}} \tag{A.1}$$

Mostraremos que a função acima é limitada inferiormente

Fixando t, temos

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{-t-t^p}{(1-2st+t^2)^{p/2}} + \frac{(1-(t+t^{p-1})s+t^p)pt}{(1-2st+t^2)^{p/2}((1-2st+t^2))}$$

Se $\dfrac{\partial h}{\partial s} = 0$, ocorre:

$$(1-2st+t^2)(-t-t^p) + (1-(t+t^{p-1})s+t^p)pt = 0,$$

ou seja,

$$(1-(t+t^{p-1})s+t^p) = \frac{1}{p}(1+t^{p-2})(1-2st+t^2). \tag{A.2}$$

Portanto, se s_0 é um ponto crítico de h, substituindo (A.2) em (A.1), obtemos

$$\begin{aligned}
h(t,s_0) &= \frac{1+t^{p-2}}{p(1-2s_0t+t^2)^{\frac{p-2}{2}}} \\
&\geq \frac{1+t^{p-2}}{p(1+t)^{p-2}} \\
&\geq \frac{1}{p}\min_{0\leq t\leq 1} \frac{1+t^{p-2}}{(1+t)^{p-2}}
\end{aligned}$$

Ocorrendo o mínimo, quando

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1+t^{p-2}}{p(1+t)^{p-2}}\right] = 0,$$

ou seja,

$$\frac{(p-2)t^{p-2}}{t(1+t)^{p-2}} - \frac{(1+t^{p-2})(p-2)}{(t+1)(1+t)^{p-2}} = 0$$

Resolvendo, obtemos $t = 1$, logo

$$h(t, s_0) \geq \frac{1}{p}\frac{2}{2^{p-2}} = \frac{2^{3-p}}{p}$$

■

Apêndice B

Resultados Básicos Usados na Dissertação

No que segue, denotaremos

- $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida,
- $M^+ =$ conjunto das funções mensuráveis não-negativas definidas em X e assumindo valores em $\overline{\mathbb{R}}$,
- $L = L(X, \mathcal{X}, \mu)-$ espaço das funções reais integráveis.

Teorema B.1. *(Teorema da Convergência Monótona) Se uma seqüência não-decrescente $\{f_n\} \subset M^+$ converge em quase todo ponto para uma função f, então*

$$\int f d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja [3], Teorema 4.6 e Corolário 4.12.

Teorema B.2. *(**Teorema da Convergência Dominada**) Seja uma seqüência $\{f_n\} \subset L$ que converge em quase todo ponto para uma função real mensurável f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$, $\forall n$, então $f \in L$ e*

$$\int f d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja [3], Teorema 5.6.

Lema B.1. *(**Du Bois-Reymond**) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ é tal que*

$$\int f d\mu \;=\; 0,\ \forall u \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $f = 0$, q.s. em Ω.

Demonstração. Veja [3], Lema IV.2 e [18], Proposição 1.31.

Teorema B.3. *(**Sobolev-Gagliardo-Nirenberg**) Seja* $1 \leq p < N$, *então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \subset \quad L^{p^*}(\mathbb{R}^N), onde \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

e existe uma constante $C = C(p, N)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^*} \quad \leq \quad C\|\nabla u\|_{L^p}, \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Demonstração. Veja [4], Teorema IX.9.

Corolário B.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado de classe* C^1. *Se* $1 \leq p < N$, *então*

$$W^{1,p}(\Omega) \quad \subset \quad L^q(\Omega), \forall\, q \in [p, p^*],$$

com imersão contínua.

Demonstração. Veja [4], Corolário IX.14.

Teorema B.4. *(**Rellich-Kondrachov**) seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado de classe* C^1. *Se* $p < N$, *então*

$$W^{1,p}(\Omega) \quad \subset \quad L^q(\Omega), \,\forall\, q \in [1, p^*), onde \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

com imersão compacta.

Demonstração. Veja [4], Teorema IX. 16.

Teorema B.5. *Sejam* X *um espaço de Banach reflexivo e uma seqüência* $(x_n \subset X)$ *limitada. Então, existem uma subseqüência* (x_{n_k}) *e* $x \in X$ *tais que* $x_{n_k} \rightharpoonup x$.

Demonstração. Veja [4], Teorema III.27.

Teorema B.6. *Sejam* X, Y *espaços vetoriais normados e* $T : X \longrightarrow Y$ *um operador linear compacto. Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* X, *então* $Tx_n \longrightarrow Tx$ *em* Y.

Demonstração. Veja [18], Teorema 8.1-7.

Teorema B.7. *Sejam* X *um espaço vetorial normado e uma seqüência* $(x_n) \subset X$. *Tem-se*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *se, e somente se,* $\langle f, x_n, \rangle \to \langle f, x \rangle, \forall f \in X^*$;

(ii) *se* $x_n \to x$, *então* $x_n \rightharpoonup x$;

(iii) *se* $x_n \rightharpoonup x$ *então* $\|x\|$ *é limitada e* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;

(iv) *se* $x_n \rightharpoonup x$ *e* $f_n \to f$ *em* X^{ast}, *então* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração. Veja [4], Proposição III.5.

Observação B.1. *(Desigualdade de Young) Se* $1 < p < +\infty$ *e* a, b *são números reais não-negativos, então*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Apêndice C

Minimização de Funcionais

Neste Apêndice estudaremos alguns resultados básicos de minimização de funcionais, os quais foram importantes nessa dissertação.

Definição C.1. *Seja X um Espaço Topológico, um funcional $\Phi : X \to (-\infty, +\infty]$ é dito ser semicontínuo inferior (s.c.i), se o conjunto*

$$[\Phi \leq \lambda] \ = \ \{x \in \ X;\ \Phi(x) \leq \lambda\}$$

for fechado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Note que esse conjunto ser fechado é equivalente a

$$\{x \in \ X;\ \Phi > \lambda\}$$

ser aberto.

Teorema C.1. *Sejam X um Espaço Topológico Compacto e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional semicontinuo inferiormente. Então*

(i) *Φ é limitado inferiormente,*

(ii) *O ínfimo de Φ é atingido, isto é, existe $x_0 \in X$ tal que*

$$\Phi(x_0) \ = \ \inf_X \Phi = \min_X \Phi.$$

Demonstração. (i) Sendo Φ um funcional s.c.i, temos que os conjuntos

$$A_n \ = \ \{x \in X;\ \Phi(x) > -n\},$$

são abertos para cada $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x \in \ A_n$ e assim $X \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ o que mostra que

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{é} \quad \textit{cobertura de } X$$

Como X é compacto, existe $n_0 \in \ \mathbb{N}$, tal que $X = \cup_{j=1}^{n_0} A_j$. Assim, $\Phi(x) > -n_0$, para todo $x \in X$, de modo que Φ é limitado inferiormente.
(ii) Seja $l = \inf\limits_{x} \Phi$, $l > -\infty$. Suponhamos por absurdo, que tal ínfimo não seja atingido. Assim, se $x \in X$, então $J(x) > l \Rightarrow \Phi(x) - l > 0$. Dessa forma, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Phi(x) - l \ > \ \frac{1}{n} \Rightarrow \Phi(x) > l + \frac{1}{n}.$$

Então, $X = \cup_{n=1}^{\infty}\{x \in X;\, \Phi(x) > l + \dfrac{1}{n}\}$, pela compacidade de X, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$X \;=\; \cup_{n=1}^{n_1}\{x \in X;\, \Phi(x) > l + \frac{1}{n_1}\}.$$

Mas, isto implica que

$$\Phi(x) \;>\; l + \frac{1}{n} > l,\, \forall\, x \in\, X.$$

O que contraria a definição de ínfimo. Portanto, existe $x_0 \in X$, tal que

$$\Phi(x_0) \;=\; \inf_{x \in X} \Phi(x)$$

■

Teorema C.2. *Princípio Variacional de Ekeland*

Seja (M, d) um espaço métrico completo e $\Phi : M \to (-\infty, +\infty]$ um funcional s.c.i e limitado inferiormente e tal que $\Phi \not\equiv +\infty$. Então, dados $\epsilon > 0$ e $u_\epsilon \in\, M$, tais que

$$\Phi(u_\epsilon) \;\leq\; \inf_M \Phi + \epsilon.$$

Existe $v \in M$, com

(c1) $\Phi(v) \leq \Phi(u)$ *e* $d(u, v) \leq 1$. *Além disso, para cada $w \in M$, $w \neq v$, tem-se:*

(c2) $\Phi(w) > \Phi(v) - \epsilon d(w, v)$

Demonstração. Considere $\epsilon > 0$, definimos a seguinte relação de ordem parcial sobre M, por

$$w \prec v \;\;\Leftrightarrow\;\; \Phi(w) + \epsilon d(w, v) \leq \Phi(v).$$

Verificaremos que $\prec$ é uma ordem parcial em M
(i) $\prec$ é reflexiva.

$$\Phi(w) \;\leq\; \Phi(w) - \epsilon d(w, v) \Rightarrow \Phi(w) \leq \Phi(u) \Leftrightarrow w \leq u$$

(ii) $\prec$ é anti-simétrica

$$w \prec v \;\;\Leftrightarrow\;\; \Phi(w) \leq \Phi(v) - \epsilon d(w, v) \tag{C.1}$$
$$v \prec w \;\;\Leftrightarrow\;\; \Phi(v) \leq \Phi(w) - \epsilon d(u, w) \tag{C.2}$$

Substituindo (C.2) em (C.1), obtemos:
o que implica

$$d(w, v) \;\leq\; 0 \Rightarrow d(w, v) = 0 \Leftrightarrow w = v.$$

(iii) $\prec$ é transitiva.

$$w \prec v \;\;\Leftrightarrow\;\; \Phi(w) \leq \Phi(v) - \epsilon d(w, v) \tag{C.3}$$
$$v \prec u \;\;\Leftrightarrow\;\; \Phi(v) \leq \Phi(u) - \epsilon d(v, u) \tag{C.4}$$

Substituindo (C.4) em (C.3), obtemos

$$\Phi(w) \quad \leq \quad \Phi(u) - \epsilon(d(w,v) + d(v,u))$$

Portanto,

$$\Phi(w) \quad \leq \quad \Phi(u) - \epsilon d(w,u) \Leftrightarrow w \leq u, \ para\ todo\ u, v\, e\, w \in\ M.$$

Defininamos agora uma seqüência (s_n) de subseqüências de X como se segue:

$$S_0 \quad = \quad \{w \in M;\ w \leq u_o\};\ u_1 \in\ S_0\ tal\ que\ \Phi(u_1) \leq \inf_{S_1} \Phi + \frac{1}{2} \tag{C.5}$$

e indutivamente definimos o conjunto

$$S_n \quad = \quad \{w \in\ M;\ w \leq u_n\}$$

Agora escolhermos $u_{n+1} \in\ S_n$, tal que

$$\Phi(u_{n+1}) \quad \leq \quad \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1}$$

Observe que, para cada $n \in\ \mathbb{N}$.
(a) $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$ De fato, $u_{n+1} \in S_{n+1} \Rightarrow u_{n+1} \in S_n$, para $n = 1, 2, \ldots$
(b) S_n é fechado.
De fato, seja (w_j) uma seqüência de S_n tal que

$$w_j \quad \longrightarrow \quad w \in\ M.$$

Provemos que $w \in\ S_n$, como $w_j \in\ S_n$, segue-se que $w_j \leq u_n$, temos

$$\Phi(w_j) \quad \leq \quad \Phi(u_n) - \epsilon(w_j, u_n)$$

Como Φ é um funcional s.c.i e d é contínua, os conjuntos

$$A \quad = \quad \{w_j \in\ S_n;\ \Phi(w_j) \leq 2\Phi(u_n)\}$$

e

$$B \quad = \quad \{w_j \in\ S_n;\ \Phi(w_j) \leq -2\epsilon d(w_j, u_n)\}.$$

São fechados, portanto o conjunto

$$A \cup B \quad = \quad \{w_j \in\ S_n;\ \Phi(w_j) \leq \Phi(u_n) - \epsilon d(w_j, u_n)\},$$

é fechado.

Tomando o limite em ambos os membros da desigualdade quando $j \to \infty$ e usando a smicontinuidade de Φ, obtemos

$$\begin{aligned}
\Phi(w) &\leq \liminf \Phi(w_j) \leq \liminf\, [\Phi(u_n) - \epsilon d(w,u_n)] \\
\Phi(w) &\leq \liminf \Phi(w_j) - \lim_{j \to +\infty} -\epsilon d(w,u_n) \\
\Phi(w) &\leq \Phi(u_n) - \epsilon d(w,u_n) \Leftrightarrow w \leq u_n \Rightarrow w \in S_n.
\end{aligned}$$

Seja $w \in S_{n+1}$. Então $w \leq u_{n+1} \leq u_n$, e daí

$$\begin{aligned}
\Phi(w) &\leq \Phi(u_{n+1}) - \epsilon d(w, u_{n+1}) \\
\epsilon d(w, u_{n+1}) &\leq \Phi(u_{n+1}) - \Phi(w) \\
\epsilon d(w, u_{n+1}) &\leq \inf_{S_n} + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n} \Phi = \frac{1}{n+1} \\
d(w, u_{n+1}) &\leq \frac{1}{\epsilon(n+1)}.
\end{aligned}$$

Portanto, considerando $w, v \in S_{n+1}$, então

$$\begin{aligned}
d(w, v) &= d(w, u_{n+1}) + d(v, u_{n+1}) \\
&\leq \frac{1}{\epsilon(n+1)} + \frac{1}{\epsilon(n+1)} = \frac{2}{\epsilon(n+1)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$diam S_{n+1} = \sup d(w, v) \leq \frac{2}{\epsilon(n+1)}$$

e, portanto, $diam S_{n+1} \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$, isto é, $diam S_n \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$ (C5).

Desde que $(S_n) \subset M$ é uma seqüência decrescente de conjuntos fechados, verificando (C5) e M e compacto temos

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n = \{v\},$$

para algum $v \in M$. Em particular $v \in S_0$, logo,

$$v \leq u_0 = u \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(v) \leq \Phi(u) - \epsilon d(v, u) \leq \Phi(u)$$

e

$$\begin{aligned}
d(v, u) &= \epsilon^{-1}(\Phi(u) - \Phi(v)) ver \\
d(v, u) &= \epsilon^{-1}\left(\inf_M \Phi + \epsilon - \inf_M \Phi\right) = 1
\end{aligned}$$

Com isto, obtendo (C1).

Para obter (C2), suponha que $w \prec v$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $w \prec u_n$, logo,

$$w \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \quad e \quad assim \ w = v.$$

Dessa forma, concluímos que $w \neq v$

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \epsilon d(w, v).$$

■

Observação C.1. *Se usarmos a métrica λd, com $\lambda > 0$, as conclusões $(C1)$ e $(C2)$ podem ser substituidas, respectivamente, por*

$$\begin{aligned} d(u,v) &\leq \frac{1}{\lambda} \\ \Phi(w) &> \Phi(v) - \epsilon\lambda d(w,v). \end{aligned}$$

Teorema C.3. *Seja X um espaço de Banach, $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional s.c.i e limitado inferiormente. Se for Fréchet-diferenciável em todo $x \in X$. Então para cada $\epsilon > 0$, existe $u_\epsilon \in X$ tal que*

$$\Phi(u_\epsilon) \leq \inf_X \Phi + \epsilon$$

e

$$\|\Phi'(u_\epsilon)\|_{X^*} \leq \epsilon$$

Demonstração. Usando a apresentação $(C.1)$, com $\lambda = \epsilon^{1/2}$ pelo teorema anterior, temos

$$\Phi(u_\epsilon) \leq \inf_X \Phi + \epsilon$$

e

$$\Phi(u_\epsilon) < \Phi(u) + \epsilon\lambda d(u_\epsilon), \textit{ com } u \neq u_\epsilon,$$

Portanto, $\Phi(u_\epsilon) < \Phi(u_\epsilon + \epsilon th) + \epsilon t\|h\|$

$$\frac{\Phi(u_\epsilon) - \Phi(u_\epsilon + \epsilon th)}{t} < \epsilon\|h\|.$$

Tomando o limite em ambos os membros da desigualdade, quanto $t \to \infty$, obtem-se:

$$-\langle \Phi'(u_\epsilon), h\rangle < \epsilon\|h\|.$$

Assim,

$$\frac{\langle \Phi'(u_\epsilon), h\rangle}{\|h\|} < \epsilon.$$

Então,

$$\|\Phi'(u_\epsilon)\|_{X^*} = \sup \frac{\langle \Phi'(u_\epsilon), h\rangle}{\|h\|} \leq \epsilon.$$

■

Definição C.2. *Seja X um espaço de Banach, $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. Diz-se que o funcional Φ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível C, $(PS)_C$, se toda seqüência (u_n) em X, tal que*

$$\Phi(x_n) \longrightarrow C \textit{ e } \Phi'(x_n) \longrightarrow 0$$

possui uma subseqüência convergente.

Teorema C.4. *Seja X um espaço de Banach, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição $(PS)_C$ é limitado inferiormente. Então, o ínfimo de Φ é atingido em um ponto $x_0 \in X$ o qual é um ponto crítico de Φ, isto é,*

$$\Phi'(u_0) \;=\; 0$$

Demonstração. Pelo teorema C.3, para cada inteiro positivo n, existe $u_n \in X$ tal que

$$\Phi(u_n) \;\leq\; \inf_X \Phi + \frac{1}{n} \text{ e } \|\Phi'(u_n)\| \leq \frac{1}{n}.$$

Pela condição $(PS)_C$, temos uma subseqüência u_{n_j} em X e $u_0 \in X$, tal que $u_{n_j} \longrightarrow u_0$.

Da continuidade de Φ e Φ', obtemos

$$\Phi(u_0) = \lim_{n\to\infty} \Phi(u_{n_j}) \;\leq\; \lim_{n\to\infty}\left(\inf_X \Phi + \frac{1}{n}\right)$$
$$\Phi(u_0) \leq \inf_X \Phi \;\Rightarrow\; \Phi(u_0) = \inf_X \Phi.$$

Além disso,

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi'(u_{n_j})\| \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n},$$

o que implica

$$\|\Phi^{-1}(u_0)\| \;\leq\; 0 \Rightarrow \|\Phi'(u_0)\| = 0 \Rightarrow \Phi'(u_0) = 0.$$

■

Este resultado é verdadeiro sem a continuidade de Φ', basta que Φ seja Fréchet-diferenciável em cada ponto de X.

De fato, mostramos que $\Phi(u_0) = \inf_X \Phi$, implica em $\Phi'(u_0) = 0$.

Consideremos $v \in X$, $\|v\| = 1$ e $t > 0$.

Assim,

$$\Phi(u_0) \;\leq\; \Phi(u_0 + tv) = \Phi(u_0) + t\,\langle \Phi'(u_0), v\rangle + \mathcal{O}(t).$$

O que implica

$$t\,\langle \Phi'(u_0), v\rangle + \mathcal{O}(t) \geq 0.$$

Então,

$$-\langle \Phi'(u_0), v\rangle \;\leq\; \frac{\mathcal{O}(t)}{t}, \text{ para todo } v \in X,$$
$$\langle \Phi'(u_0), v\rangle \;\leq\; \frac{\mathcal{O}(t)}{t}.$$

Assim,

$$\|\Phi'(u_0)\| \;=\; \sup_{\|v\|=1} \langle \Phi'(u_0), v\rangle \leq \frac{\mathcal{O}(t)}{t}.$$

Fazendo $t \to 0$, temos

$$\|\Phi'(u_0)\| \;\leq\; 0 \Rightarrow \|\Phi'(u_0)\| = 0 \Rightarrow \Phi'(u_0) = 0$$

■

Referências Bibliográficas

[1] Alves, C.O.,& Souto, M.A.S., Existence of solutions for a class of problems in $\mathbb{R}^N$ involving p(x)-Laplacian, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Aplications, Vol. 66, pp 17-32. Publishe by Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, 2005.

[2] Alves, C.O., do Ó, J.M. & Miyagaki, O.H., On Pertubations of class os a periodic $m-$Laplacian equation with critical growth, Nonlinear Analysis 45 (2001) 849-863.

[3] Bartle, R.G., The Elements of Integration, Jonh Wiley and Sons, Inc., New York, 1995.

[4] Brezis, H., Analyse Functionelle, Thérie et Applications, Dunod, Paris, 2005.

[5] Guimarães, C.J., Sobre os Espaços de Lebesgue e Sobolev Generalizados e Aplicações Envolvendo o p(x)-Laplaciano. Dissertação de mestrado, CCT - UFCG, 2006.

[6] Corrêa, F.J.S.A., Costa, A.C.R. & Figueiredo G.M., On a singular elliptic problem involving the $p(x)-$Laplacian and generalized Lebesgue-Sobolev sapces, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol. 17, (2007).

[7] de Figueiredo, D.G., Lectures on the Ekeland Variotional Principle with Applications and Detours, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[8] Diening, L., Theoretical and Numerical Results for Electrorheological Fluids, Ph.D thesis, University of Freiburg, Germany, 2002.

[9] Fan, Xianling. & Zhang, Qi-Hu, Existence of solutions for $p(x)-$Laplacian Dirichlet problem, Nonlinear Analysis,52, 1843-1852 (2003).

[10] Fan, X. L. & Zhao, D, Local $C^{1,\alpha}$ regularity of weak solutions for p(x)- Laplacian equations, J. Gansu Education College (NS), 15, (2) pp. 1-5, (2001).

[11] Fan Xianling & Zhao Yuanzhang, A strong maximum principle for $p(x)-$Laplace equations. J. Cont. Math., Vol. 24, 277-282 (2003).

[12] A. Manes, Un Estensione Della Teoria Classica Degli Autovalor Por Operatori Ellitici Del Secondo Ordine, Bolletino U.M.I.,7(1973)285-301

[13] Mihăilescu, M. & Rădulescu, V.,on a nonhomogeneuos quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent, Proceendings of the Americam Mathematical Society, 2000.

[14] M., A strong principles for super-solutions of quasi-linear elliptic equations, nonlinear Anal., 37, pp. 431-448, 1999.

[15] P. Hess e T. Kato, On Some Linear And Nonlinear Eigenvalue Problems With An Indefinite Weight Function, Comm. P.D.E., 5(1980)999-1030.

[16] P.H. Rabinowitz , Some global results for nonlinear eigenvalue problems, J. Funct. Anal., vol. 7, 487-513 (1971).

[17] Ruzicka, M., Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[18] Kreyszig, W., Introductory Functional Analyses with Applications, John Wiley e Sons, Inc., New York, 1989.

[19] Vainberg, M.M., Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden-Day, Series in Mathematical Physics, San Francisco, 1964.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo