SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - PPGME

EXISTÊNCIA, UNICIDADE E DECAIMENTO EXPONENCIAL PARA UM SISTEMA DE EDP'S NÃO LINEAR COM ACOPLAMENTO NA PARTE NÃO LINEAR

Por: Antonio da Costa Gomes

Orientador

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira

Belém
2007

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - PPGME

EXISTÊNCIA,UNICIDADE E DECAIMENTO EXPONENCIAL PARA UM SISTEMA DE EDP'S NÃO LINEAR COM ACOPLAMENTO NA PARTE NÃO LINEAR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará como requisito final para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais

Belém
2007

ANTONIO DA COSTA GOMES

EXISTÊNCIA,UNICIDADE E DECAIMENTO EXPONENCIAL PARA UM SISTEMA DE EDP'S NÃO LINEAR COM ACOPLAMENTO NA PARTE NÃO LINEAR

Essa dissertação, foi julgada e aprovada, para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Corpo Docente do Programa de Pós - Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará.

Belém, 15 de junho de 2007

....

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha
Coordenador do PPGME-UFPA

Banca Examinadora

....
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
UFPA/FACI
Orientador

....
Prof. Dr. Marcus P. da Costa da Rocha
UFPA
Examinador

....
Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark
UFF
Examinador

....
Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
UFPA
Examinador

Ao nosso futuro: Doutorado.

Agradecimentos

• A Deus por me conceder sempre sua proteção nos momentos difíceis.

• A Universidade Federal do Pará - UFPA.

• Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME.

• Ao professor Marcus, pela forma como conduz a direção do nosso programa.

• Gostaria de aqui fazer uma referência especial à pessoa do professor Jorge Ferreira, por ter proposto uma primeira versão desta dissertação e por ter sido sempre atencioso e compreensivo.

• Ao meu orientador professor Ducival, por me conceder o prazer do seu valioso auxílio, se mostrando sempre solícito as minhas infindáveis dúvidas.

• Ao professor Mauro por ter contribuído, mesmo que indiretamente na conclusão desse trabalho e ter sido amigo na longa jornada.

• Faz-se necessário lembrar dele, que sempre dá um jeitinho para tudo, que me propôs para trabalhos futuros, a parte numérica deste nosso trabalho, o professor João Protázio.

• Agradeço de um modo especial a professores importantes, que de certo modo me incentivaram para que chegasse até aqui, são eles: João Batista, Augusto e Hermínio.

• A minha irmãzinha querida Silvana, que sempre me incentivou, é minha companheira nessa longa caminhada em busca de mais conhecimentos e está sempre muito prestativa.

• A minha irmãzinha Simone, que está carinhosamente no fundo de meu coração.

• A minha Mãe Benedita, que nunca exitou em me conceder a oportunidade de buscar o conhecimento e está sempre pronta para me ajudar.

• A minha família de um modo geral, os vivos e em especial aos meus queridos parentes já falecidos: Meu pai Benjamim, meus tios, seu João, seu Antonio e minha tia Maria. Devo minha vida a eles e a Karlinha.

• Aos meus atuais alunos, ex-alunos, colegas da UEPA, colegas do estado, a todos que me conhecem como profissional e que me deram muita força.

- Aos amigos do mestrado, que foram pessoas, que de uma forma ou outra me ajudaram a nunca desistir. Dentre eles, Reiville, Hércio, Antenor, Irazel, Luiz Neto, Silvana, Helena, Pedrão, Baena, Deiziane, Raquel, Heleno, Adiel, Aubedir, Carlos Alessandro, Márcio Bahia, Elizardo, Lindomar, Leandro, Karla e outros.

- Agradeço a parceria com o amigo Renatão, que sem sombra de dúvida o seu grande incentivo foi de grande valia.

- Ao meu amigo Carlos Rayol.

- Agradeço as pessoas que contribuíram negativamente, pois me incentivaram sobremaneira para continuar a luta.

- E ao grande amor de minha vida, que sem ela em meu coração não seria nada, que apesar de não estar mais com ela, fiz tudo isso com a doce ilusão que um dia possamos ser felizes juntos, para sempre. Essa pessoa é minha infelizmente ex-noiva, futura esposa Karlinha.

- Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram de maneira positiva.

"A dúvida permite extrair um núcleo de certeza, que cresce à medida que ela se radicaliza: é indubitável que, se duvido, penso."

René Descartes

Resumo

Neste trabalho estuda-se existência, unicidade de solução fraca global e decaimento exponencial para o problema misto (P).

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
u_t - a(l(u))\Delta u = f_1(v) & em\ \ Q = \Omega \times (0,T);\\[2mm]
v_t - a(l(v))\Delta v = f_2(u) & em\ \ Q = \Omega \times (0,T);\\[2mm]
u(t) = v(t) = 0 & sobre\ \ \sum = \partial\Omega \times (0,T);\\[2mm]
u(x,0) = u_0(x) & em\ \ \Omega;\\[2mm]
v(x,0) = v_0(x) & em\ \ \Omega,
\end{cases}
$$

onde $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um operador lipschitz-contínuo, $f_i \in lip_{\gamma_i}$, com $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, i $= 1, 2$, ou seja, cada f_i com $i = 1, 2$ é Lipschtziana com constante de Lipschitz γ_i e $l : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma linear e contínua.

A existência é feita usando-se o método de Faedo-Galerkin, teorema de compacidade de Aubin-Lions e algumas desigualdades relevantes da Análise Funcional. A unicidade é feita pelo método tradicional, onde supõem-se a existência de duas soluções e mostra-se que estas são iguais e finalmente para o decaimento exponencial, usa-se o Método da Energia.

Palavras Chaves: Existência, Unicidade, Solução Fraca Global, Decaimento Exponencial.

Abstract

In this work we study the existence, uniqueness and asymptotic behaviour of global weak solutions for the mixed evolution problem (P).

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
u_t - a(l(u))\Delta u = f_1(v) & in\ \ Q = \Omega \times (0,T);\\
v_t - a(l(v))\Delta v = f_2(u) & in\ \ Q = \Omega \times (0,T);\\
u(t) = v(t) = 0 & on\ \ \sum = \partial\Omega \times (0,T);\\
u(x,0) = u_0(x) & in\ \ \Omega;\\
v(x,0) = v_0(x) & in\ \ \Omega,
\end{cases}
$$

where $a : \mathrm{I\!R} \longrightarrow \mathrm{I\!R}$ is a continuous lipschitz operator, $f_i \in lip_{\gamma_i}$, with $f_i : \mathrm{I\!R} \longrightarrow \mathrm{I\!R}$, i $= 1, 2$ and $l : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathrm{I\!R}$ is a continuous linear form.

For the existence we used Faedo Galerkin Method, Aubin Lions' theorem of compactness, important inequalities of Functional Analysis, while for the uniqueness we used the standard method and for the asymptotic behaviour we used the energy method.

Keywords: Existence, Uniqueness, Global Weak Solution, Asymptotic Behaviour.

Sumário

Introdução

O sistema (P) abaixo tem origem nos trabalhos de Chipot e Rodrigues [3] e de Corrêa, Menezes e Ferreira [4] a partir da equação $u_t - a(l(u))\Delta u = f(u)$, por meio de um acoplamento na parte não linear. Tal equação descreve diversos problemas que aparecem em várias situações físicas. Por exemplo, quando deseja-se estudar a questão relacionada com a cultura de bactérias u, a equação em questão pode descrever a população dessas bactérias, sujeita ao espalhamento onde o coeficiente de difusão a é suposto dependente da população inteira. Porém, para o problema (P), até o presente momento, ainda não foi encontrado aplicação fisica que descreva tal situação.

$$
(\mathrm{P}) \begin{cases}
u_t - a(l(v))\Delta u = f_1(u) & em \;\; Q = \Omega \times (0,T); \\[2ex]
v_t - a(l(u))\Delta v = f_2(v) & em \;\; Q = \Omega \times (0,T); \\[2ex]
u(t) = v(t) = 0 & sobre \;\; \sum = \partial\Omega \times (0,T); \\[2ex]
u(x,0) = u_0(x) & em \;\; \Omega; \\[2ex]
v(x,0) = v_0(x) & em \;\; \Omega.
\end{cases}
$$

Nos capítulos 1 e 2, enuncia-se e demonstra-se alguns resultados muito relevantes de Análise Funcional e E.D.P que serão utilizados posteriormente. No capítulo 3, apresenta-se formalmente o problema (P), com suas respectivas considerações, como notações e hipóteses, mostra-se existência de solução fraca, usando-se o método de Faedo-Galerkin, encontra-se limitações para as funções $u_m(t)$ e $v_m(t)$ em espaços adequados, através das estimativas à priori, assim prolonga-se a solução $(u_m(t), v_m(t))$ ao intervalo $[0,T]$, fazendo a passagem ao limite. Verificam-se as condições iniciais. Para a unicidade, utiliza-se a hipótese $\mathcal{H}_4$ apresentada no capítulo 1 e para o decaimento exponencial utiliza-se fortemente a desigualdade de Poincaré.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentam-se algumas definições e resultados, de grande relevância, que serão utilizados posteriormente.

Definição 1.1.1 (Convergência Fraca): Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então diz-se que, u_ν converge fraco para u e denota-se por $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle\varphi, u_\nu\rangle \to \langle\varphi, u\rangle$, $\forall\ \varphi \in E^{'}$.

Definição 1.1.2 (Convergência Fraca Estrela): Sejam E um espaço de *Banach*, $\varphi \in E^{'}$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de $E^{'}$. Então diz-se que, φ_ν converge fraco estrela para φ e denota-se por $\varphi_\nu \overset{\star}{\rightharpoonup} \varphi$ se, e somente se, $\langle\varphi_\nu, u\rangle \to \langle\varphi, u\rangle$, $\forall\ u \in E$.

Teorema 1.1.1(Banach - Steinhaus): Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja $(T_i)_{i\in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de E em F.

Suponha que $\sup\limits_{i\in I} \|T_i X\| < \infty$, $\forall\ x \in E$, então $\sup\limits_{i\in I} \|T_i X\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$.

Ou seja, existe uma constante C tal que $\|T_i x\| \leq C\|x\|$, $\forall\ x \in E$ e $\forall\ i \in I$.

Demonstração: Ver [1].

Proposição 1.1.1: Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma sucessão em E. Verifica-se:

(I) $[x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')]$ $[\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\ f \in E']$;

(II) Se $x_n \to x$ fortemente, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E, E')$;

(III) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E, E')$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;

(IV) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \to f$ fortemente em E'(isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [1].

Observação 1.1.1: A parte (III) da proposição (1.1.1) é uma consequência do teorema de Banach-Steinhaus.

Proposição 1.1.2: Seja E um espaço de Banach e (f_n) uma sucessão em E'. Verifica-se:

(I) $[f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f \ \ em \ \ \sigma(E', E)] \Longleftrightarrow [\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \forall \ x \in E]$;

(II) Se $f_n \to f$ forte, então $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$;

(III) Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$, então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$;

(IV) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\|$ está limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$;

(V) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$ e se $x_n \to x$ fortemente em E, então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [1].

Teorema 1.1.2: Seja E um espaço de Banach separável e seja (f_n) uma sucessão limitada em E'. Então existe uma subsucessão (f_{n_k}) que converge na topologia $\sigma(E', E)$.

Demonstração: Ver [1].

Teorema 1.1.3 (Banach-Alouglu-Bourbaki): Sejam E um espaço de Banach separável e E' o seu dual topológico. Então o conjunto

$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca estrela.

Demonstração: Ver [14].

Lema 1.1.1: (**Compacidade de Aubin-Lions**): Sejam $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$ e B_0, B, B_1 espaços de Banach sendo que B_0 e B_1 são reflexivos tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ ($\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta). Para $0 < T < \infty$, considera-se o espaço

$W = \{w; \ \ w \in L^{p_0}(0, T; B_0) \ \ e \ \ w' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$, com a norma

$\|w\|_W = \|w\|_{L^{P_0}(0,T;B_0)} + \|w\|_{L^{P_1}(0,T;B_1)}$. Então:

(I) W é um espaço de Banach;

(II) $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{P_0}(0, T; B)$.

Demonstração: Ver [15].

Observação 1.1.2: Como conseqüência da Compacidade de Aubin-Lions, tem-se que, se $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em $L^2(0,T;B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue-se que, existe uma subseqüência $(u_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (u_ν) tal que $u_{\nu_k} \longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T;B)$.

Teorema de Carathéodory - Prolongamento de Solução

O próximo resultado é de grande importância para solução do problema principal, visto que, nos permite prolongar a solução, ou seja, a solução se torna global. Vejamos primeiramente algumas condições para depois enunciarmos e demonstrarmos o teorema a seguir.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$. Diz-se que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se

i) $f(t,x)$ é mensurável em t, para cada x fixo;

ii) $f(t,x)$ é contínua em x, para cada t fixo;

iii) Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que

$$|f(t,x)| \leq m_K(t), \forall (t,x) \in D. \tag{1.1}$$

Considere o retângulo $R = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t-t_0| \leq a, |x-x_0| \leq b\right\}$, com $a,b>0$.

Teorema 1.1.4 (Carathéodory): Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então, sobre algum intervalo $|t-t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$, existe uma solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X' = f(t,X); \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Demonstração:

Para o caso $t \geq \tau$, tem-se:

Define-se a função M como sendo

$$M(t) = 0 \quad (t<\tau); \tag{1.3}$$

$$M(t) = \int_\tau^t m(s)ds \ (\tau \leq t \leq \tau + a); \tag{1.4}$$

M é contínua e não decrescente, pois $m(t) \geq 0$,

$M(\tau) = 0$.

Portanto, $(t, \xi \pm M(t)) \in R$ para algum intervalo $\tau \leq t \leq \tau + \beta$. Escolhendo-se β de modo que $\tau + \beta \leq \tau + a$ define-se as seguintes aproximações φ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ por

$$\varphi_j(t) = \xi \quad \left(\tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j}\right); \tag{1.5}$$

$$\varphi_j(t) = \xi + \int_{\tau}^{t-\beta/j} f(s, \varphi_j(s))ds \quad \left(\tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \beta\right). \tag{1.6}$$

Note que $\varphi_1(t) = \xi, \quad \forall \ t \in (\tau, \tau + \beta)$.

Fixado $j \geq 1$ a integral em (1.6) só tem sentido se

$$\tau < t - \frac{\beta}{j} < \tau + \frac{\beta}{j} \Leftrightarrow \tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \frac{2\beta}{j}.$$

Daí segue, que em (1.6) tem-se φ_j contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j}$, e pelo exposto acima, desde que $(t, \xi) \in R$, a equação (1.6) define φ_j como uma função contínua no intervalo $\tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \frac{2\beta}{j}$. Além disso, tem-se:

$$\varphi_j(t) = \xi + \int_{\tau}^{t-\beta/j} f(s, \varphi(s))ds \Rightarrow |\varphi_j(t) - \xi| = \left| \int_{\tau}^{t-\beta/j} f(s, \varphi(s))ds \right|$$

$|\varphi_j(t) - \xi| \leq \displaystyle\int_{\tau}^{t-\beta/j} |f(s, \varphi(s))|ds \Rightarrow |\varphi_j(t) - \xi| \leq \int_{\tau}^{t-\beta/j} m(s)ds$, por (1.1) e, portanto,

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right). \tag{1.7}$$

Afirmação 1: $\varphi_j(t)$ é uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \beta$.

Prova-se essa afirmação usando indução finita.

Demonstração da Afirmação 1:

Para $n = 1$. Ok!

Suponha que para $n = k$, φ_j esteja definida em $\tau \leq t \leq \tau + \frac{k\beta}{j}$ para $1 < k < j$. Assim tem-se que

$$\varphi_j(t) = \xi + \int_{\tau}^{\tau - \frac{k\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s))ds.$$

De modo análogo, concluí-se que $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau + \dfrac{k\tau}{j} \leq t \leq \tau + \dfrac{(k+1)\tau}{j}$. Portanto, $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \dfrac{(k+1)\tau}{j}$. É fácil ver que φ_j satisfaz (1.7).

Segue-se então por indução que, (1.6) define φ_j como uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \beta$, para todo $j \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_j(t) = \xi, \quad \tau \leq t \leq \tau + \dfrac{\beta}{j} \ ; \\ \\ |\varphi_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \dfrac{\beta}{j}\right), \ \ \tau + \dfrac{\beta}{j} \leq t \leq \tau + \beta. \end{array} \right.$$

$\square$

Afirmação 2: φ_j é equicontínua.

Demonstração da Afirmação 2:

Deve-se mostrar que, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que, para quaisquer t_1, t_2, onde $|t_1 - t_2| < \delta$ tem-se $|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| < \epsilon, \ \forall j$.

De fato, sabe-se que

$$|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| \leq \left| M\left(t_1 - \frac{\beta}{j}\right) - M\left(t_2 - \frac{\beta}{j}\right) \right|.$$

Sendo M contínua em $[\tau, \tau + \beta]$ vem que M é uniformemente contínua. Logo,

$$|t_1 - t_2| = \left| \left(t_1 - \frac{\beta}{j}\right) - \left(t_2 - \frac{\beta}{j}\right) \right| < \delta \Rightarrow \left| M\left(t_1 - \frac{\beta}{j}\right) - M\left(t_2 - \frac{\beta}{j}\right) \right| < \epsilon.$$

Donde segue nossa afirmação.

$\square$

Afirmação 3: φ_j é equilimitada.

Demonstração da Afirmação 3:

Note que $|\varphi_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \dfrac{\beta}{j}\right), \forall j \in \mathbb{N}$.

Sendo M contínua em $[\tau, \tau+\beta]$, logo limitada, então existe $C > 0$ tal que $|M(t)| \leq C$, desde que

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right).$$

Segue que $|\varphi_j(t)| \leq |\xi| + C, \ \forall \ j \in \mathbb{N}$.

□

Desta forma, a sequência (φ_j) está nas condições do teorema de Arzelà-Ascoli, assim existe uma subsequência (φ_{j_k}) que converge uniformemente em $[\tau, \tau+\beta]$ para uma função continua φ.

Afirmação 4: A função φ é solução de (1.2).

Demonstração da Afirmação 4:

Sendo $f(t,x)$ contínua em x, para cada t fixo, decorre que $f(t, \varphi_{j_k}(t)) \longrightarrow f(t, \varphi(t)), \ \forall \ t \in \mathbb{R}$.

Usando (1.1), segue que $|f(t, \varphi_{j_k})(t)| \leq m(t)$.

Desde que $m(t)$ é Lebesgue integrável, então a função f está nas condições do teorema da *Convergência Dominada de Lebesgue* (Ver [2]), resultando que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\tau^t f(s, \varphi_{j_k}(s))ds = \int_\tau^t f(s, \varphi(s))ds.$$

Além disso, para todo $t \in [\tau, \tau+\beta]$ tem-se:

$$\varphi_{j_k}(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi_{j_k}(s))ds - \int_{t-\beta/j_k}^t f(s, \varphi_{j_k}(s))ds.$$

Quando $k \to \infty$, o segundo termo da integral tende a zero, e usando as considerações anteriores vem que

$$\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi(s))ds.$$

Donde segue o resultado.

□

Corolário 1.1.1 (Prolongamento de solução):

Seja $D = [0, \omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}, b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja ainda $\varphi(t)$ uma solução de

$$\begin{cases} X' = f(t, X); \\ X(0) = X_0, \ \ |X_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponha que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha, $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0, \omega]$.

Demonstração: Ver [10].

Lema 1.1.2 (Lema de Gronwall) : Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas.

Se $\varphi(t) \leq \alpha + \displaystyle\int_a^t \varphi(s)\psi(s)\,ds$, (com $\alpha \geq 0$), então $\varphi(t) \leq \alpha \exp\left[\displaystyle\int_a^t \psi(s)\,ds\right]$, $\forall\ t \in [a, b]$.

Em particular, $\varphi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração:

Fazendo $\omega(t) = \alpha + \displaystyle\int_a^t \varphi(s)\psi(s)\,ds$, decorre da hipótese que $\varphi(t) \leq \omega(t)$ e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, segue que $\omega'(t) = \varphi(t)\psi(t)$. Logo, $\omega'(t) \leq \omega(t)\psi(t)$, donde segue

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \psi(t).$$

Integrando a última desigualdade em $[a, t]$, obtem-se

$$\int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)} ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

Assim,

$$\int_a^t \frac{d}{ds} \ln(\omega(s))\,ds \leq \int_a^t \psi(s)\,ds.$$

Logo,

$$\ln\left(\frac{\omega(t)}{\omega(a)}\right) \leq \int_a^t \psi(s)\,ds,$$

isto é,

$$\omega(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \psi(s)\,ds\right), \quad t \in [a, b].$$

Portanto, desta desigualdade e de $\varphi(t) \leq \omega(t)$, segue o Lema.

$\square$

Lema 1.1.3: Seja $\gamma(t)$ contínua e não-negativa em $[0,T]$. Se $\gamma(t) \leq C_1 + C_2 \int_a^t \left[\gamma(s) + \gamma(s)^2\right] ds$, $0 \leq t \leq T$, então existem $T_0 > 0$ e $C > 0$ tais que $\gamma(t) \leq C, \ \forall \ t \in [0, T_0]$, onde $C_1, C_2 \geq 0$.

Demonstração:

Sejam $\varphi(t) = \int_a^t \left[\gamma(s) + \gamma(s)^2\right] ds$ e $Y(t) = C_1 + C_2\varphi(t)$.

Decorre da hipótese que

$$\gamma(t) \leq C_1 + C_2\varphi(t),$$

ou ainda,

$$\gamma^2(t) \leq [C_1 + C_2\varphi(t)]^2.$$

E pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue,

$$\varphi'(t) = \gamma(t) + \gamma(t)^2,$$

logo,

$$\varphi'(t) \leq Y(t) + Y^2(t). \tag{1.8}$$

Por outro lado, $Y'(t) = C_2\varphi'(t) \leq C_2\left[Y(t) + Y^2(t)\right]$, daí segue

$$Y'(t) \leq C_2\left[Y(t) + Y^2(t)\right], \ \ 0 \leq t \leq T. \tag{1.9}$$

Observando que

$\frac{d}{dt}\left[Y(t)e^{-C_2 t}\right] = Y'(t)e^{-C_2 t} - C_2 Y(t)e^{-C_2 t}$ e aplicando esse resultado em (1.9), segue

$$\frac{d}{dt}\left[Y(t)e^{-C_2 t}\right] \leq C_2 Y^2(t)e^{-C_2 t}. \tag{1.10}$$

Integrando a última desigualdade em $[0,t]$ e tomando $Y(0) = C_1$, resulta

$$Y(t) \leq C_1 e^{C_2 t} + C_2 e^{C_2 t}\int_0^t Y^2(s)e^{-C_2 s} ds. \tag{1.11}$$

Seja $z(t) = \int_0^t Y^2(s)e^{-C_2 s} ds$. Assim resulta de (1.11) que $Y(t) \leq \left[C_1 + C_2 z(t)\right]e^{C_2 t}$ e, novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$z^{'}(t) = Y^{2}(t)\, e^{-C_2 t}.$$

Logo,

$z^{'}(t) \leq [C_1 + C_2 z(t)]^2 e^{C_2 t}$, donde segue, $\dfrac{z^{'}(t)}{[C_1 + C_2 z(t)]^2} \leq e^{C_2 t}$.

Integrando a última desigualdade em $[0,t]$, obtem-se

$$\int_0^t \frac{z^{'}(t)}{[C_1 + C_2 z(t)]^2} dt \leq \int_0^t e^{C_2 t} dt.$$

Daí segue,

$$-\frac{1}{[C_1 + C_2 z(t)]} + \frac{1}{C_1} \leq \frac{e^{C_2 t}}{C_2} - \frac{1}{C_2},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{[C_1 + C_2 z(t)]} \geq \frac{1}{C_1} - \frac{e^{C_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2}.$$

Agora suponha que,

$$\frac{1}{C_1} - \frac{e^{C_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2} > 0 \iff \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} > \frac{e^{C_2 t}}{C_2} \iff C_2 t < \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Logo,

$$t < \frac{1}{C_2} \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right).$$

Seja $T^* = \dfrac{1}{C_2} \ln\left(1 + \dfrac{C_2}{C_1}\right)$ onde $T^* > 0$.

Escolha T_0 tal que $0 < T_0 < T^*$, então $0 \leq t \leq T_0$, logo

$$C_1 + C_2 z(t) \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{C_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1},$$

ou ainda,

$$C_1 + C_2 z(t) \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{C_2 T_0}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right]^{-1}.$$

Assim,

$$Y(t) \leq (C_1 + C_2 z(t))\, e^{C_2 t}.$$

Por outro lado,

$$(C_1 + C_2 z(t))\, e^{C_2 t} \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{C_2 T_0}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right] e^{C_2 T_0}.$$

Portanto,

$$Y(t) \leq C, \;\; 0 \leq t \leq T_0.$$

Desta desigualdade e de $\gamma(t) = Y(t)$, segue o Lema.

$\square$

Capítulo 2

Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev

Neste capítulo introduz-se à teoria de Distribuições e os Espaços de Sobolev. Tais tópicos, nos permitem estender o conceito de solução de uma e.d.p. No que se segue, tem-se definições, notações, proposições, lemas e teoremas que servirão de base teórica para o bom entendimento do problema principal. Dessa maneira, no capítulo que se segue, não existem todas as demonstrações dos resultados utilizados de forma preliminar, mas menciona-se o referencial bibliográfico para posterior consulta.

2.1 Teoria das Distribuições Escalares

2.1.1 Espaços das Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, uma função contínua. Denomina-se suporte de φ, ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denota-se o suporte de φ por $supp\,(\varphi)$. Simbolicamente, tem-se

$$supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi\,(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula e valem as seguintes relações:

1) $supp\,(\varphi + \psi) \subset supp\,(\varphi) \cup supp\,(\psi)\,;$

2) $supp\,(\varphi\psi) \subset supp\,(\varphi) \cap supp\,(\psi)\,;$

3) $supp\,(\lambda\varphi) = \lambda \;\; supp\,(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 2.1.1.1: Seja $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = 1, \ \forall \ x \in (0,1)$.

Verifica-se que o *supp* $(\varphi) = (0,1)$, não é um conjunto compacto.

Faz-se um destaque especial as funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que, sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito considere a seguinte definição:

Definição 2.1.1.1: $C_0^\infty(\Omega)$ é o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω.

Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Exemplo 2.1.1.2: Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, denota-se por $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 de raio r, isto é, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\| < \mathrm{r}\}$. Se $B_r(x_0) \subset \Omega$, define-se $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{r^2}{\|x - x_0\|^2 - r^2}\right) & \text{se } \ \|x - x_0\| < r; \\ \\ 0 & \text{se } \ \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verifica-se que *supp* $(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $C_0^\infty(\Omega)$ é não vazio. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares contínuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Observação 2.1.1.1: Por um multi-índice, entende-se como uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denota-se por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α o operador derivação parcial, de ordem $|\alpha|$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$, tem-se por definição $D^0\varphi = \varphi$.

A seguir dar-se noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

2.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Diz-se que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

$i)$ Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp\,(\varphi) \subset K \;\text{ e }\; supp(\varphi_n) \subset K, \;\; \forall\; n \in \mathbb{N};$$

$ii)$ $D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima, é um espaço vetorial topológico que denota-se por $\mathcal{D}(\Omega)$, e denomina-se espaços das funções testes.

Observação 2.1.2.1: Sendo Ω limitado, obtemos $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)\;\forall\; p$, tal que $1 \leq p < \infty$, com imersão contínua e densa.

Demonstração:

De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tem-se que

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p\,dx \leq \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|^p\, m(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica.

Para a continuidade, seja $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostra-se que

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx \to 0.$$

De fato, note que,

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx.$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx$$

$$= \int_K \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\,dx = 0.$$

Pode-se ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [12].

$\square$

2.1.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω, introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Definição 2.1.3.1: Denomina-se distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \ \forall \ \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_\nu) \to T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

O valor da distribuição T na função teste φ, é denotado por $\langle T, \varphi\rangle$. Muniremos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considere o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, converge para T, quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω, com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuições que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 2.1.3.2: Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo tem-se

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int_K |u(x)|\, dx < \infty \text{ para todo compacto } K \subset \Omega.$$

Exemplo 2.1.3.1: Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e define-se $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx.$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω.

Demonstração:

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta mostrar que T_u é contínua.

De fato, seja dada uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ, então

$$\begin{aligned}
|\langle T_u,\varphi_\nu\rangle - \langle T_u,\varphi\rangle| = |\langle T_u,\varphi_\nu-\varphi\rangle| &= \left|\int\limits_\Omega u(x)\left(\varphi_\nu-\varphi\right)(x)\,dx\right| \\
&\leq \int\limits_\Omega |u(x)\left(\varphi_\nu-\varphi\right)(x)|\,dx \\
&\leq \sup|\varphi_\nu-\varphi|\int_\Omega |u(x)|\,dx \to 0.
\end{aligned}$$

Pois, $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

□

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u"e, usando **Lema Du Bois Raymond**, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identifica-se u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis, pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 2.1.3.1 (de Du Bois Raymond): Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Ver [11].

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.3.2: Seja x_0 um ponto de Ω e define-se a função $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como sendo

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \varphi(x_0).$$

É fácil verificar que δ_{x_0} é uma distribuição. Tal distribuição é conhecida por **Distribuição de Dirac**, em homenagem ao físico inglês Paul A.M. Dirac (1902-1984). Entretanto, mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \;\; \forall \;\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Demonstração:

De fato, supõe-se que a distribuição δ_{x_0} é definida por alguma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tomando $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por $\xi(x) = \|x - x_0\|^2 \varphi(x)$, tem-se que

$$\xi(x_0) =< \delta_{x_0}, \xi >= \int_\Omega u(x) \|x - x_0\|^2 \varphi(x)dx = 0, \ \forall \ \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Portanto, tem-se $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ quase sempre em Ω, logo $u(x) = 0$ quase sempre em Ω, isto é, $< \delta_{x_0}, \varphi >= 0, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que é uma contradição.

□

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e segue a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas:

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^P(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

2.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A motivação no conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por **Sobolev**, se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada (no sentido das distribuições de ordem α de T) é definida como sendo o funcional linear $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, tal que

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima, que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que

$$\lim_{v \longrightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \longrightarrow \infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 2.1.4.1: Outro resultado interessante a ser mencionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, não é, em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.4.1: Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$, mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$, basta verificar que $u' = \delta_0$.

Demonstração:

De fato,

$$< u', \varphi >= - < u, \varphi' >= - \int_0^\infty \varphi'(x)dx = \int_\infty^0 \varphi'(x)dx = \varphi(0) = < \delta_0, \varphi >, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

$\square$

Tal fato, motiva a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de ***Espaços de Sobolev***.

Observação 2.1.4.2: Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}, \ \forall \ |\alpha| \leq k,$$

é uma conseqüência simples da fórmula de integração de ***Gauss***.

2.2 Espaços de Sobolev

Apresenta-se nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os ***espaços de Sobolev***.

2.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bastante regular Γ. Observou-se na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$, porém estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$, tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev.*

O espaço vetorial $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das (classes de) funções reais $v : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis, tais que $|v|^p$ é integrável à *Lebesgue* em Ω.

Este espaço quando munido da norma

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

é um espaço de *Banach.* Ver [3].

O conjunto de todas as funções mensuráveis v essencialmente limitadas em Ω é denotado por $L^\infty(\Omega)$, define-se a norma de v por

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = supess\,|v(x)|\,, \ \forall \ v \in L^\infty(\Omega)\,.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é também um espaço de *Banach.* Ver [3].

No caso particular onde $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert.* Neste caso o produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx,$$

cuja norma induzida é

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo tem-se

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,, \ \forall \ \alpha, \text{multi-índice, com } \ |\alpha| \leq m\}\,.$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} .$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach.*

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, no qual denota-se por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; D^\alpha u \in L^2(\Omega) , \ \forall \ \alpha, \ |\alpha| \leq m \right\},$$

as derivadas D^α, evidentemente, são no sentido das distribuições.

Define-se em $H^m(\Omega)$ o produto escalar

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \, dx, \ \forall \ u, v \in H^m(\Omega),$$

com norma induzida por este produto escalar dada por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)^2_{L^2(\Omega)} \, dx \right)^{1/2} .$$

Mostra-se que $H^m(\Omega)$ é espaço de *Hilbert separável.* Ver [11].

Para se ter uma idéia mais apurada dos espaços de Sobolev, descreve-se alguns casos particulares.

Em dimensão $n = 1$, tem-se,

$$H^1(a,b) = \left\{ u \in L^2(a,b) ; u' \in L^2(a,b) \right\}, \ u' = \frac{du}{dt}.$$

Neste caso

$$\|u\|^2_{H^1(a,b)} = \int_a^b [u(t)]^2 \, dt + \int_a^b [u'(t)]^2 \, dt.$$

Em dimensão $n \geq 2$, tem-se

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) , \ \ i = 1, \ldots, n \right\}$$

e neste caso,

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega [u(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 \, dx_1 dx_2 \ldots dx_n + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

ou, de modo mais conciso, escreve-se

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

É oportuno observar que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior"que a norma de $L^p(\Omega)$ e por isso $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos seqüências convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$, como sendo a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$ denota-se esta aderência por $H_0^m(\Omega)$.

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos *Espaços de Sobolev* e por conseguinte, na Teoria das EDP's.

O Traço em $H^1(\Omega)$

Demonstra-se que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, onde $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é o conjunto $\{\varphi_{|\overline{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω. Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, considere uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathcal{N}}$ em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \ \text{ em } \ H^1(\Omega).$$

Define-se o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k|_\Gamma \, ,$$

sendo o limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$. O operador γ_0, denominado operador traço, que é contínuo, linear, cujo núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples escreve-se $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0\varphi$, assim pode-se caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por: $H_0^1(\Omega) = \left\{\varphi \in H^1(\Omega) ; \ \ \varphi_{|\Gamma} = 0\right\}$. A generalização do operador traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m = 2$, tem-se

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega) ; \varphi_{|_\Gamma} = 0, \ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_\Gamma = 0 \right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$, com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|_{\mathcal{D}(\Omega)}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual recebe a notação $H^{-m}(\Omega)$. A seguir enuncia-se sem demonstrar, o teorema que caracteriza o espaço $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 2.2.1.1: Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.

Demonstração: Ver $[9]$.

Proposição 2.2.1.1: [Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$] Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Demonstração: Ver $[15]$.

De posse destes dois resultados pode-se concluir que, se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 2.2.1.1(Desigualdade de Poincaré): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\, |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração:

Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado na direção do eixo x_1. Sendo $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\varphi_\nu \to v \ \text{ em } \ L^2(\Omega) \ \text{ e } \ \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \ \text{ em } \ L^2(\Omega), \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Como Ω é limitado, existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que, $\forall\ x \in \Omega,\ \ a < proj\ x < b$, onde a $proj\ x$ é a projeçãode x sobre o eixo coordenado x_1. Agora dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\varphi(a, x_1, \ldots, x_n) = 0$, tem-se

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi.$$

E da desigualdade de *Schwarz*, obtem-se

$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 = \left(\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\right|^2 d\xi.$$

Aplicando o *Teorema de Fubini* tem-se

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2\, dx &\leq (b-a)\int_\Omega \int_a^b \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\right|^2 d\xi dx \\ &\leq (b-a)^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\right|^2 dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$|\varphi|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a)\left[\sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right|^2_{L^2(\Omega)}\right]^{1/2}.$$

Portanto,

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\, |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}.$$

□

Observação 2.2.1.1: Utilizando-se da desigualdade de Poincaré pode-se concluir que, em $H^1_0(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

Demonstração:

De fato, considere a norma em $H^1_0(\Omega)$. Se $v \in H^1_0(\Omega)$, tem-se

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = |v|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)} \geq |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, obtem-se

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C)\, |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Conclui-se das desigualdades acima que, em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

$\square$

2.3 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real, com a norma $\| \cdot \|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E. Uma função vetorial $\varphi :]0,T[\to X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i} \varphi_i,$$

onde cada $E_i \subset (0,T)$ é mensurável, $i = 1, 2, \ldots, k$, e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, k$, define-se a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t)\, dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i)\, \varphi_i.$$

Diz-que uma função vetorial $u : (0,T) \longrightarrow X$ é Bochner integrável ($\mathcal{B}-integrável$) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que

(i) $\varphi_\nu \longrightarrow u$ em X, q.s em $(0,T)$;

(ii) $\displaystyle\lim_{k,m \longrightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X \, dt = 0.$

Neste caso, a integral de *Bochner* de u, é por definição, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^T \varphi_\nu(t)\, dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X.

Uma função vetorial $u : (0,T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow$ X é fracamente mensurável quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall\ \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X e diz-se que u é fortemente mensurável, quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, se u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é integrável a Lebesgue.

Denota-se por $L^p(0,T;X)\,, 1\leq p<\infty$, o espaço vetorial das funções ou classes de funções $u:(0,T)\longrightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t\mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lesbegue em $(0,T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}=\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Quando $p=2$ e $X=H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;H)$ é também um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)}=\int_0^T (u(s),v(s))_H\,ds.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representa-se o espaço de Banach das (classes de) funções

$$u:(0,T)\subset \mathbb{R}\longrightarrow \mathrm{X},$$

que são fortemente mensuráveis e tais que $t\mapsto \|u(t)\|_X\in L^\infty(0,T)$. A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é definida por

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)}=supess_{t\in]0,T[}\,||u(t)||_X\,.$$

Se X é reflexivo e separável e $1<p<\infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0,T;X')$, onde p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. No caso, $p=1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral

$$\langle u,v\rangle_{(L^p(0,T;X))'\times L^p(0,T;X)}=\langle u,v\rangle_{L^q(0,T;X')\times L^p(0,T;X)}\,.$$

Definição 2.3.1: Uma função $f:[0,T]\to X$ é integrável se existe uma seqüência $\{S_k\}_k$ de funções vetoriais simples, tal que,

$$\int_0^T ||S_k(t)-f(t)||_X dt\to 0,\ \text{ com }\ k\to\infty.$$

Se f é integrável, define-se

$$\int_0^T f(t)d\mu=\lim_{k\to\infty}\int_0^T S_k(t)dt.$$

A expressão $\displaystyle\int_0^T f(t)d\mu$, é dita integral de Bochner de f em relação a μ.

Exemplo 2.3.1: Sejam $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$. Considere a função $T_u : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(s)\,\varphi(s)\,ds,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner em X. A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(0,T)$ em X e por esta razão é denominada distribuição vetorial. A distribuição T_u é univocamente determinada por u e, neste sentido, pode-se identificar u com a distribuição T_u por ela definida e, portanto, $L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X)$ com imersão contínua e densa.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X, denomina-se espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, o qual denota-se por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 2.3.2: Seja $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^nT}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n\varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Por $C^0([0,T];X)$, $0 < T < \infty$, representa-se o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_X .$$

Por $C_v^0([0,T];X)$, denota-se o espaço das funções $u : [0,T] \longrightarrow X$ fracamente contínuas, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X',X}$ é contínua em $[0,T]$, $\forall \ v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de Hilbert, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \longmapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$.

2.4 Um Resultado de Regularidade

Nessa seção, enuncia-se e se demonstra um teorema sobre regularidade, que será de grande importância para garantir as condições do teorema de existência. Antes porém, precisa-se de três lemas auxiliares, os quais se omitem as devidas provas.

Lema 2.4.1: Se $u \in L^2(0,T,X)$, $u' \in L^2(0,T,X')$ e $\theta \in C^\infty([0,T])$, então

1) $\dfrac{d}{dt}(u,\eta)_X = \langle u', \eta\rangle_{X'X}, \ \forall \ \eta \in X$;

2) $\dfrac{d}{dt}(\theta u) = \theta u' + \theta' u$.

Demonstração: Ver [9].

Lema 2.4.2: Considere o espaço de Hilbert $W = \{u; \ u \in L^2(0,T;X) \text{ e } u' \in L^2(0,T;X')\}$, como o produto interno

$$(u,v)_W = (u,v)_{L^2(0,T;X)} + (u',v')_{L^2(0,T;X')}.$$

Então o conjunto dos vetores $v = \theta\eta$, com $\theta \in C^\infty([0,T])$ e $\eta \in X$ é total em W.

Demonstração: Ver [9].

Lema 2.4.3: Seja $u \in W$ e considere um número real $0 < a < T$.

Estende-se a função u ao intervalo $(-a, T+a)$, da seguinte forma

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} u(-t) & se \quad -a < t \leq 0; \\ u(t) & se \quad 0 < t \leq T; \\ u(2T-t) & se \quad T \leq t < T+a. \end{cases}$$

Então, claramente $\widetilde{u} \in L^2(-a,T+a;X)$, onde $\dfrac{d\widetilde{u}}{dt} \in L^2(-a,T+a;X')$.

Demonstração: Ver [9].

Teorema 2.4.1:(**de Regularidade**) Seja Y um espaço de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$, X é denso em Y e a imersão de X em Y é contínua. Tem-se

i) Se $u \in W$ então $u \in C^0([0,T];Y)$;

ii) Se u, v são funções satisfazendo *i*) então a função $t \longrightarrow (u(t),v(t))_Y$ é absolutamente contínua e vale a seguinte igualdade

$$\frac{d}{dt}(u(t),v(t))_Y = \langle u'(t), v(t)\rangle_{X'X} + \langle u(t), v'(t)\rangle_{X'X},$$

onde a derivada no primeiro membro da igualdade é a derivada no sentido das distribuições sobre $(0,T)$ da função $(u(t),v(t))_Y$.

Demonstração:

i) Entende-se a função u como no Lema 2.4.3. Então

$\widetilde{u} \in L^2(-a, T+a; X) e \widetilde{u}' \in L^2(-a, T+a; X')$.

Define-se a função $w = \theta(t)\widetilde{u}(t)$, onde θ é uma função real continuamente diferenciável tal que $\theta = 1$ em $[0, T]$ e $\theta = 0$ em uma vizinhança de $(-a, T+a)$.

Considere a função $j \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tal que $j(t) \geq 0$, $j(t) = 0$, para $|t| \geq 1$, $j(-t) = j(t)$,

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} j(t)dt = 1$ e j é decrescente em $[0, \infty)$.

Seja $j_\nu(t) = \nu j(\nu t)$, então $j_\nu(t) \geq 0, \ \forall \ \nu \in \mathbb{N}$, $j_\nu(-t) = j_\nu(t)$, *supp* $j_\nu \subset \left[-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right]$ e

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} j_\nu(t)dt = 1.$

Define-se a sucessão de funções

$$w_\nu(t) = \int_{-a}^{T+a} j_\nu(t-s)w(s)ds.$$

Então $w_\nu \longrightarrow w$ em $L^2(\mathbb{R}; \mathrm{X})$ e $w_\nu' \longrightarrow w'$ em $L^2(\mathbb{R}; \mathrm{X}')$, e por restrição ao intervalo $[-a, T+a]$, resulta

- $w_\nu \longrightarrow w \quad \text{em} \quad L^2(-a, T+a; X)$;
- $w_\nu' \longrightarrow w' \quad \text{em} \quad L^2(-a, T+a; X')$.

Desde que, w se anula numa vizinhança de $(-a, T+a)$, então

$$w_\nu(t) = \int_{-a+\varepsilon}^{T+a-\varepsilon} j_\nu(t-s)w(s)ds.$$

onde $\varepsilon > 0$ independe de $\nu \in \mathbb{N}$. Em particular,

$$w_\nu(-a) = \int_{-a+\varepsilon}^{T+a-\varepsilon} j_\nu(-a-s)w(s)ds.$$

Desde que, j_ν é par, $\forall \ \nu$, vem que

$$w_\nu(-a) = \int_{-a+\varepsilon}^{T+a-\varepsilon} j_\nu(a+s)w(s)ds.$$

Como $s \in [-a+\varepsilon, T+a-\varepsilon]$ então $a+s \in [\varepsilon, T+2a-\varepsilon]$ e portanto, tomando ν_0 tal que $\dfrac{1}{\nu_0} < \varepsilon$, tem-se que $\forall\ \nu \geq \nu_0,\ j_\nu(a+s) = 0$. Assim, $w_\nu(-a) = 0,\ \forall\ \nu \geq \nu_0$.

Por outro lado, note que $w'_\nu(t) \in X$, logo

$$\|w_\nu(t) - w_\mu(t)\|_Y^2 = \int_{-a}^{t} \frac{d}{dt}\|w_\nu(t) - w_\mu(t)\|_Y^2 ds = \int_{-a}^{t} 2(w'_\nu(s) - w'_\mu(s), w_\nu(s) - w_\mu(s))ds$$

$$\leq \int_{-a}^{t} \frac{d}{dt}\|w'_\nu(s) - w'_\mu(s)\|_{X'}^2 ds + \int_{-a}^{t} \frac{d}{dt}\|w_\nu(s) - w_\mu(s)\|_X^2 ds$$

$$\leq \int_{-a}^{T+a} \frac{d}{dt}\|w'_\nu(s) - w'_\mu(s)\|_{X'}^2 ds + \int_{-a}^{T+a} \frac{d}{dt}\|w_\nu(s) - w_\mu(s)\|_X^2 ds.$$

De onde resulta que (w_ν) é uma sucessão de Cauchy em $C^0\left([-a, T+a]; Y\right)$.

Portanto, modificando os valores $w(t)$ nos conjuntos de medida nula, encontra-se que $w(t) \in Y$ e $\|w_\nu(t) - w(t)\|_Y \longrightarrow 0$ uniformemente em $[-a, T+a]$, ou seja, $w \in C^0\left([-a, T+a]; Y\right)$ e por restrição ao intervalo $[0, T]$, obtém-se $w \in C^0\left([0, T]; Y\right)$. Mas, em $[0, T], w = \widetilde{u} = u$. Logo $u \in C^0\left([0, T]; Y\right)$.

Segue portanto o resultado.

ii) Para esta demonstração indica-se [9], onde se usa os lemas 2.4.1 e 2.4.2.

$\square$

Capítulo 3

O Sistema Acoplado

3.1 Apresentação do Problema de Evolução

Neste capítulo, tem-se como objetivo estudar a existência de solução fraca global, unicidade e decaimento exponencial para o sistema (P) dado abaixo:

$$(P)\quad \begin{cases} u_t - a(l(v))\Delta u = f_1(u) & em\ \ Q = \Omega \times (0,T); \\ v_t - a(l(u))\Delta v = f_2(v) & em\ \ Q = \Omega \times (0,T); \\ u(t) = v(t) = 0 & sobre\ \ \sum = \partial\Omega \times (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x) & em\ \ \Omega; \\ v(x,0) = v_0(x) & em\ \ \Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bem regular e $T > 0$ é um número real fixo, porém arbitrário.

A existência será feita, via método de Faedo-Galerkin, teorema de compacidade de Aubin-Lions e alguns resultados importantes de Análise Funcional.

O procedimento consiste em:

i) Definir o problema (P) em um espaço de dimensão finita, de forma conveniente, onde tem-se um novo problema, que será denominado problema aproximado (PA).

ii) Mostrar que o problema aproximado (PA), possui solução local, na qual denomina-se solução aproximada. Para existência de solução aproximada, transforma-se o sistema referente ao problema aproximado, em um sistema matricial, no qual será equivalente a um sistema de edo's de 1ª ordem. Dessa forma pode-se usar o Teorema de Existência de Carathéodory.

iii) Obter estimativas a priori sobre a sequência de soluções aproximadas. Dessa maneira pode-se fazer a "passagem ao limite"e assim prolongar as soluções ao intervalo $[0,T]$.

iv) A passagem ao limite é o último passo, onde mostra-se, a partir das estimativas a priori, que a sequência de soluções aproximadas, converge numa topologia conveniente para solução do problema (P).

No que se segue, utiliza-se as seguintes notações: $((\ ,\ ))$; $\|\cdot\|$; $(\ ,\ )$; $|\cdot|$, para designar o produto interno e a norma em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ respectivamente e além disso, $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ denota o módulo em $\mathbb{R}$. Aqui considera-se o espaço $H_0^1(\Omega)$, munido da "norma do gradiente", ou seja, se $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, então $\|u(t)\| = |\nabla u(t)|$. Também, considera-se $H^{-1}(\Omega)$ como sendo o dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.

3.2 Hipóteses

Considere as seguintes hipóteses:

$\mathcal{H}_1$) $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, i $= 1, 2$ são lipschitzianas, ou seja, existem constantes $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2$, tais que

$$|f_i(s) - f_i(t)|_{\mathbb{R}} \leq \gamma_i |s - t|_{\mathbb{R}}, \forall s, t \in \mathbb{R} \text{ e } f_i(0) = 0.$$

$\mathcal{H}_2$) A aplicação $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, com $a(t) \geq \alpha_0 > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, sendo $\alpha_0 > \dfrac{\gamma}{\lambda_1}$; $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$, onde λ_1 é o primeiro auto-valor associado ao operador $-\Delta$.

$\mathcal{H}_3$) $l : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, é uma forma linear e contínua, isto é, existe $g \in L^2(\Omega)$ tal que

$$l(u) = l_g(u) = \int_\Omega g(x)u(x)dx, \forall u \in L^2(\Omega).$$

$\mathcal{H}_4$) O operador a é Lipschitz-contínuo, com constante A, isto é:

$$|a(t) - a(t')|_{\mathbb{R}} \leq A|t - t'|_{\mathbb{R}}, \ \forall \ t, t' \in \mathbb{R}.$$

3.3 Existência de Solução Fraca Global

Teorema 3.3.1 - Considere as hipóteses $\mathcal{H}_1$ - $\mathcal{H}_3$ e $(u_0, v_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, então existe um par de funções (u, v) soluções do problema (P) tais que

i) $(u, v) \in \Big[L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))\Big]^2$;

ii) $(u_t, v_t) \in \Big(L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\Big)^2$;

iii) $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$;

iv) $\dfrac{d}{dt}(u, h_1) + a(l(v))(\nabla u, \nabla h_1) = (f_1(u), h_1), \forall\ h_1 \in H_0^1(\Omega)\ \ em\ \ \mathcal{D}'(0, T)$;

v) $\dfrac{d}{dt}(v, h_2) + a(l(u))(\nabla v, \nabla h_2) = (f_2(v), h_2), \forall\ h_2 \in H_0^1(\Omega)\ \ em\ \ \mathcal{D}'(0, T)$.

No que se segue, demonstra-se os ítens (i) e (iii) do Teorema 3.3.1, usando o resultado sobre regularidade (Teorema 2.4.1).

Demonstração do Teorema 3.3.1:

Aplicando o método de Faedo-Galerkin em (P), tem-se:

3.3.1 Problema Aproximado

Considere $\{w_j\}_{j\in N}$ o conjunto ortonormal completo de $H_0^1(\Omega)$, formado por auto-vetores do operador $-\Delta$ e $\{\lambda_j\}_{j\in N}$ a correspondente sequência de auto-valores, em outras palavras,$\{w_j\}_{j\in N}$ é uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$.

Para cada $m = 1, 2, 3, ...$, considera-se o conjunto $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]^T$, sendo o subespaço gerado por $w_1, w_2, ..., w_m$. O problema aproximado (PA), associado a (P) consiste em encontrar uma solução sob a forma

$$(u_m(t), v_m(t)) = \left(\sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t) w_j(x), \sum_{j=1}^{m} \Phi_{jm}(t) w_j(x)\right) \in V_m \times V_m,$$

sendo os coeficientes Θ_{jm}, Φ_{jm} de classe C^∞, determinados de modo a satisfazer (PA)

$$\text{(PA)} \left\| \begin{array}{ll} (u'_m, h_1) - a(l(v_m))(\Delta u_m, h_1) = (f_1(u_m), h_1); & (3.1) \\ (v'_m, h_2) - a(l(u_m))(\Delta v_m, h_2) = (f_2(v_m), h_2); & (3.2) \\ (u_m(0), v_m(0)) = (u_{0m}, v_{0m})\ \text{ em }\ L^2(\Omega), & \end{array} \right.$$

para todo $h_1, h_2 \in V_m$ e $j = 1, ..., m$.

Aqui, u_{0m} e v_{0m} são aproximações de u_0 e v_0 respectivamente, isto é, sendo u_0 e v_0 pertencentes a $L^2(\Omega)$, pode-se aproximá-las por combinações lineares finitas dos w_j, ou seja, existem $\alpha_{jm}, \beta_{jm} \in \mathbb{R}\,(j = 1, ..., m)$ tais que

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} w_j \longrightarrow u_0, \text{ forte em } L^2(\Omega);$$

$$v_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jm} w_j \longrightarrow v_0, \text{ forte em } L^2(\Omega),$$

logo tem-se $u_m(0) = u_{0m}$ e $v_m(0) = v_{0m}$. E como existe uma única combinação linear de vetores da base V_m, segue-se que $\Theta_{jm}(0) = \alpha_{jm}$ e $\Phi_{jm}(0) = \beta_{jm}$, $(j = 1, ..., m)$.

Substituindo $u_m(t), v_m(t)$ e $h_1 = h_2 = w_i(x)$, para $i = 1, ..., m$, em (PA), e usando o fato de que $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ tem-se:

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} \Theta'_{jm}(t) w_j(x), w_i(x)\Big) - a\Big(l\Big(\sum_{j=1}^{m} \Phi_{jm}(t) w_j(x)\Big)\Big)\Big(\Delta\Big(\sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t) w_j(x)\Big), w_i(x)\Big)$$

$$= (f_1(u_m), w_i(x));$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} \Phi'_{jm}(t) w_j(x), w_i(x)\Big) - a\Big(l\Big(\sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t) w_j(x)\Big)\Big)\Big(\Delta\Big(\sum_{j=1}^{m} \Phi_{jm}(t) w_j(x)\Big), w_i(x)\Big)$$

$$= (f_2(v_m), w_i(x)),$$

ou seja,

$$(\overline{PA}) \begin{cases} \Theta'_{jm}(t) - \lambda_j a(l(v_m))\Theta_{jm}(t) = (f_1(u_m), w_j); & (3.3) \\ \Theta_{jm}(0) = \alpha_{jm} \ \ (j = 1, ..., m); \\ \Phi'_{jm}(t) - \lambda_j a(l(u_m)), \Phi_{jm}(t) = (f_2(v_m), w_j); & (3.4) \\ \Phi_{jm}(0) = \beta_{jm} \ \ (j = 1, ..., m). \end{cases}$$

Forma Matricial

Vejamos agora a adequação de nosso problema à forma matricial, onde, por questão de simplificação trabalha-se apenas com a equação (3.3) de $(\overline{PA})$, pois para (3.4) o resultado é análogo.

Fazendo $j = 1, 2, ..., m$ em (3.3), tem-se o seguinte sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \Theta'_{1m} \\ \Theta'_{2m} \\ \vdots \\ \Theta'_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a(l(v_m)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m a(l(v_m)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{1m} \\ \Theta_{2m} \\ \vdots \\ \Theta_{mm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (f_1(u_m), w_1) \\ (f_1(u_m), w_2) \\ \vdots \\ (f_1(u_m), w_m) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$X' = AX + B$, onde tem-se:

$$X' = \begin{bmatrix} \Theta'_{1m} \\ \Theta'_{2m} \\ \vdots \\ \Theta'_{mm} \end{bmatrix}; \text{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a(l(v_m)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m a(l(v_m)) \end{bmatrix}; \text{X} = \begin{bmatrix} \Theta_{1m} \\ \Theta_{2m} \\ \vdots \\ \Theta_{mm} \end{bmatrix} \text{e B} = \begin{bmatrix} (f_1(u_m), w_1) \\ (f_1(u_m), w_2) \\ \vdots \\ (f_1(u_m), w_m) \end{bmatrix}.$$

Observe que podemos escrever:

$$\begin{cases} X' = AX + B = F(t, X); \\ \\ X(0) = X_0, \text{ onde } \quad X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix}^T. \end{cases} \tag{3.5}$$

Tem-se portanto um sistema matricial equivalente a um sistema de edo's de 1ª ordem.

Mostremos que o sistema (3.5) encontra-se nas condições de Carathéodory.

Verificando as Condições de Carathéodory para o sistema (3.5):

1) **Fixemos X:**

Mostra-se que as matrizes A e B são mensuráveis em t.

De fato, observe que a matriz A é formada, pelos elementos: $\lambda_j a(l(v_m))$ com $j = 1, 2, ..., m$. De $\mathcal{H}_3$, l é uma forma linear e contínua e por $\mathcal{H}_2$ o operador a é contínuo, segue-se que a composição $a(l(v_m))$ também é contínua, logo $\lambda_j a(l(u_m))$ também o será para $j = 1, 2, ..., m$. Dessa forma A é mensurável em t.

Agora, observe que B é formada pelos elementos $(f_1(u_m), w_j)$, com $j = 1, 2, ..., m$. Como $f_1 \in lip_{\gamma_1}(s)$ e $w_j \in H_0^1(\Omega)$, configura a continuidade de $(f_1(u_m), w_j)$, consequentemente a continuidade de B, logo B é mensurável em t.

2) **Fixemos t:**

Mostra-se agora, que F é contínua em X.

De fato, note que B é contínua em X, pois é constante em relação a X.

Agora, para continuidade de AX, basta verificar que A é contínua em X. Vejamos:

Seja $\prod_j(X) = \Theta_{jm}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ a projeção $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, que é contínua.

Tomemos $\sigma(X) = \prod_j(X) w_j$.

Para cada t fixo, como $u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t) w_j$, considera-se a função

$$X \longrightarrow a(l(u_m)) = a\Big(l\Big(\sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t) w_j\Big)\Big) = a\Big(l\Big(\sum_{j=1}^{m} \prod_j (X) w_j\Big)\Big),$$

ou seja,

$$X \longrightarrow a\Big(l\Big(\prod_1 w_1 + ... + \prod_m w_m\Big)\Big).$$

Pela hipótese $\mathcal{H}_3$, o fato de que combinação linear de funções contínuas também é contínua e a composição de funções contínuas é contínua, então A é contínua em X.

Desta maneira fixado t, a função $F(t, X)$ é contínua em X.

3) Seja K um compacto de $D = [0,T] \times E$, onde se tem

$$E = \{X \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}\times 1};\ \ \|\mathrm{X}\|_{\mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}\times 1}} \leq \overline{\gamma},\ \ \overline{\gamma} > 0\}$$

Devemos mostrar que existe uma função real $m_k(t)$, integrável em $[0,T]$, tal que

$$\|F(t,X)\|_{\mathrm{I\!R}^{\mathrm{m}\times 1}} \leq m_k(t),\ \ \forall\ \ (t,X) \in D.$$

De fato, sabemos que em $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{k}}$, $k \in \mathrm{I\!N}$, todas as normas são equivalentes, então considera-se $\|\ \ \cdot\ \ \|_{pq}$ a norma do máximo em $\mathrm{I\!R}^{\mathrm{pq}}$.

Como $F(t,X) = AX + B$, segue-se que

$$\|F(t,X)\|_{m\times 1} \leq \|AX\|_{m\times 1} + \|B\|_{m\times 1}.$$

Porém, como $\|AX\|_{m\times 1} \leq \|A\|_{m\times m}\|X\|_{m\times 1}$, então

$$\|F(t,X)\|_{m\times 1} \leq \|A\|_{m\times m}\|X\|_{m\times 1} + \|B\|_{m\times 1}.$$

Como $X \in E$, tem-se que $\|X\|_{m\times 1} \leq \overline{\gamma}$. Dessa maneira, a desigualdade acima resulta em

$$\|F(t,X)\|_{m\times 1} \leq \overline{\gamma}\|A\|_{m\times m} + \|B\|_{m\times 1}.$$

Observe que $\lambda_j a(l(v_m))$, com $j = 1, 2, ..., m$ são funções contínuas. Dessa maneira, todas as entradas da matriz A são limitadas por uma constante. Logo $\|A\|_{m\times m} \leq C\ \ (C > 0)$.

Agora, em relação a matriz B, todas as suas entradas em valor absoluto, são iguais a

$$|(f_1(u_m), w_j)| \leq |f_1(u_m)||w_j| = |f_1(u_m)|.$$

Segue-se que

$$\|F(t,X)\|_{m\times 1} \leq \overline{\gamma}.C + |f_1(u_m)| \equiv m_k(t),$$

onde, $m_k(t)$ é integrável em $[0,T]$, pois $\overline{\gamma}.C$ é constante e $f_1 \in Lip_{\gamma_1}(s)$.

Concluí-se portanto, que o sistema (3.5) satisfaz as condições de Carathéodory, e então existe uma solução $\{u_m(t), v_m(t)\} \in [0,t_m) \times [0,t_m), t_m < T_0$.

Satisfeitas as condições exigidas pelo Teorema de Carathéodory, passaremos a próxima etapa (estimativas à priori), onde poderemos prolongar a solução $u_m(t), v_m(t)$ ao intervalo $[0,T]$.

Para as estimativas I e II, C_1 denota uma constante positiva e independente de m e t.

3.3.2 Estimativas à Priori

Estimativa I:

Considere $h_1 = u_m$ e $h_2 = v_m$ nas equações (3.1) e (3.2) do sistema aproximado (PA). Dessa maneira, tem-se:

$$(u'_m, u_m) - a(l(v_m))(\Delta u_m, u_m) = (f_1(u_m), u_m); \tag{3.6}$$

$$(v'_m, v_m) - a(l(u_m))(\Delta v_m, v_m) = (f_2(v_m), v_m). \tag{3.7}$$

Agora,

$$\frac{d}{dt}|u_m|^2 = \frac{d}{dt}(u_m, u_m) = (u'_m, u_m) + (u_m, u'_m) = 2(u'_m, u_m),$$

logo

$$(u'_m, u_m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2.$$

Pela primeira identidade de Green

$$\int_\Omega (-\Delta u) v dx - \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma,$$

obtem-se,

$$(-\Delta u_m, u_m) = \int_\Omega (-\Delta u_m) u_m dx = \int_\Omega \nabla u_m . \nabla u_m dx = |\nabla u_m|^2 = \|u_m\|^2.$$

Portanto, (3.6) reduz-se a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + a(l(v_m))\|u_m\|^2 = (f_1(u_m), u_m). \tag{3.8}$$

De maneira análoga,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m|^2 + a(l(u_m))\|v_m\|^2 = (f_2(v_m), v_m). \tag{3.9}$$

Adicionando as equações (3.8) e (3.9), integrando em $[0, t]$, com $t \leq t_0$, obtem-se

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{|u_m|^2 + |v_m|^2\Big\} ds + \int_0^t \Big\{a(l(v_m))\|u_m\|^2 + a(l(u_m))\|v_m\|^2\Big\} ds$$

$$= \int_0^t \Big\{(f_1(u_m), u_m) + (f_2(v_m), v_m)\Big\} ds. \tag{3.10}$$

Logo,

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + 2\int_0^t \Big\{a(l(v_m))\|u_m\|^2 + a(l(u_m))\|v_m\|^2\Big\} ds$$

$$= 2\int_0^t \Big\{(f_1(u_m), u_m) + (f_2(v_m), v_m)\Big\} ds + |u_m(0)| + |v_m(0)|.$$

Utilizando a hipótese $\mathcal{H}_2$, obtem-se

$$\int_0^t \Big\{\alpha_0\|u_m\|^2 + \alpha_0\|v_m\|^2\Big\} \leq \int_0^t \Big\{a(l(v_m))\|u_m\|^2 + a(l(u_m))\|v_m\|^2\Big\} ds.$$

Assim,

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + 2\alpha_0\int_0^t \Big\{\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\Big\} ds \leq 2\int_0^t \{(f_1(u_m), u_m) + (f_2(v_m), v_m)\} ds$$

$$+ |u_m(0)|^2 + |v_m(0)|^2. \tag{3.11}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no segundo membro de (3.11), obtem-se

$$2\int_0^t |(f_1(u_m), u_m)|_{\mathbb{R}} ds + 2\int_0^t |(f_2(v_m), v_m)|_{\mathbb{R}} ds \leq 2\int_0^t |f_1(u_m)||u_m| ds + 2\int_0^t |f_2(v_m)||v_m| ds.$$

Por $\mathcal{H}_1$, tem-se

$$2\int_0^t |f_1(u_m)||u_m| ds + 2\int_0^t |f_2(v_m)||v_m| ds = 2\int_0^t |f_1(u_m) - f_1(0)||u_m| ds$$

$$+ 2\int_0^t |f_2(v_m) - f_2(0)||v_m| \leq 2\int_0^t \gamma|u_m||u_m| + 2\int_0^t \gamma|v_m||v_m|$$

$$= 2\gamma\int_0^t |u_m|^2 + 2\gamma\int_0^t |v_m|^2. \tag{3.12}$$

Substituindo (3.12) em (3.11), obtem-se

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + 2\alpha_0\int_0^t \Big(\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\Big) ds \leq 2\gamma\{\int_0^t |u_m|^2 ds + \int_0^t |v_m|^2 ds\}$$

$$+\{|u_{0m}|^2 + |v_{0m}|^2\}. \tag{3.13}$$

Como $-\Delta u_m = \lambda_m u_m$, com $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_m$, então compondo com u_m, tem-se

$$(-\Delta u_m, u_m) = \lambda_m(u_m, u_m),$$

logo

$$\|u_m\|^2 \geq \lambda_1 |u_m|^2 \Longrightarrow |u_m|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}\|u_m\|^2.$$

Portanto, reescreve-se (3.13) como sendo

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + 2\alpha_0 \int_0^t \Big(\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\Big) ds \leq \frac{2\gamma}{\lambda_1} \int_0^t \Big(\|u_m|^2 + |v_m\|^2\Big) ds$$

$$+|u_{0m}|^2 + |v_{0m}|^2. \tag{3.14}$$

Resultando dessa maneira em

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + \left(2\alpha_0 - \frac{2\gamma}{\lambda_1}\right) \int_0^t \Big(\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\Big) ds \leq |u_{0m}|^2 + |v_{0m}|^2. \tag{3.15}$$

Desde que por $\mathcal{H}_2$, tem-se $\lambda_1 > \dfrac{\gamma}{\alpha_0}$, então $\left(2\alpha_0 - \dfrac{2\gamma}{\lambda_1}\right) > 0$,

e como $u_{0m} \to u_0$ e $v_{0m} \to v_0$ forte em $L^2(\Omega)$ então

$$|u_{0m}|^2 + |v_{0m}|^2 \leq C_1^2,$$

ou seja,

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + \left(2\alpha_0 - \frac{2\gamma}{\lambda_1}\right) \int_0^t \Big(\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\Big) ds \leq C_1^2. \tag{3.16}$$

Donde tem-se

$$|u_m(t)|^2 \leq C_1^2 \;\; e \;\; |v_m(t)|^2 \leq C_1^2$$

ou,

$$|u_m(t)| \leq C_1 \text{ e } |v_m(t)| \leq C_1. \tag{3.17}$$

Desde que, por (3.17)

$$supess|u_m(t)| \leq C_1 \;\; e \;\; supess|v_m(t)| \leq C_1,$$

então,

$$(u_m) \text{ e } (v_m) \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.18}$$

Além disso,

$$\int_0^t (\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2)ds \leq C_1^2.$$

Assim,

$$\int_0^t \|u_m\|^2 ds \leq C_1^2 \;\; e \;\; \int_0^t \|v_m\|^2 ds \leq C_1^2.$$

Portanto,

$$(u_m) \text{ e } (v_m) \text{ são limitadas em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.19}$$

Estimativa II:

Usando o sistema (P) como referência e seu respectivo problema aproximado (PA), tem-se

$$u'_m = a(l(v_m))\Delta u_m + f_1(u_m) \in H^{-1}(\Omega); \tag{3.20}$$

$$v'_m = a(l(u_m))\Delta v_m + f_2(v_m) \in H^{-1}(\Omega), \tag{3.21}$$

desde que $-a(l(v_m))\Delta u_m$ e $-a(l(u_m))\Delta v_m$ definem um elemento de $H^{-1}(\Omega)$.

De fato, como u_m e $v_m \in H_0^1(\Omega)$ pela estimativa I, tem-se que $-\Delta v_m$ e $-\Delta u_m$ pertencem a $H^{-1}(\Omega)$, logo $-a(l(v_m))\Delta u_m$ e $-a(l(u_m))\Delta v_m \in H^{-1}(\Omega)$.

Agora, sabendo-se que $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega))$, logo $(u_m),(v_m) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Sendo assim

$$f_1(u_m), f_2(v_m) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Com efeito,

$$\int_\Omega |f_1(u_m)|^2_{\mathbb{R}} dx = \int_\Omega |f_1(u_m) - f_1(0)|^2_{\mathbb{R}} dx \leq \int_\Omega \gamma_1^2 |u_m - 0|^2_{\mathbb{R}} dx = \gamma_1^2 \int_\Omega |u_m|^2_{\mathbb{R}} dx. \tag{3.22}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega |f_2(v_m)|^2_{\mathbb{R}} dx = \int_\Omega |f_2(v_m) - f_2(0)|^2_{\mathbb{R}} dx \leq \int_\Omega \gamma_2^2 |v_m - 0|^2_{\mathbb{R}} dx = \gamma_2^2 \int_\Omega |v_m|^2_{\mathbb{R}} dx. \tag{3.23}$$

Como $|f_i(u_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_0, i = 1,2$, então

$$supess_{t\in[0,T]} |f_i(u_m(t)|^2_{L^2(\Omega)} < C_0,$$

logo

$$f_i(u_m) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Agora, como $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, então $f_1(u_m), f_2(v_m) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Portanto, de (3.20) a (3.23), obtem-se que

(u'_m) e (v'_m) são limitadas em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, onde $T > 0$ é arbitrário, porém fixo. (3.24)

3.3.3 Passagem ao Limite

Das estimativas I e II, anteriormente discutidas, obtem-se os seguintes resultados:

- (u_m) e (v_m) são limitadas em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$; (3.25)
- (u_m) e (v_m) são limitadas em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$; (3.26)
- (u'_m) e (v'_m) são limitadas em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. (3.27)

Agora, pelo corolário de Banach-Alouglu-Bourbaki, pode-se extrair uma subsequência de (u_m) e (v_m) que ainda denotaremos por (u_m) e (v_m) tais que

- $u_m \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$; (3.28)
- $v_m \overset{\star}{\rightharpoonup} v$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$; (3.29)
- $u_m \rightharpoonup u$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$; (3.30)
- $v_m \rightharpoonup v$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. (3.31)

ou seja,

$$\int_0^T (u_m,h_1)dt \longrightarrow \int_0^T (u,h_1)dt,\ \ \forall\ h_1 \in L^2(\Omega); \tag{3.32}$$

$$\int_0^T ((u_m,h_1))dt \longrightarrow \int_0^T ((u,h_1))dt,\ \ \forall\ h_1 \in H_0^1(\Omega); \tag{3.33}$$

$$\int_0^T (v_m,h_2)dt \longrightarrow \int_0^T (v,h_2)dt,\ \ \forall\ h_2 \in L^2(\Omega); \tag{3.34}$$

$$\int_0^T ((v_m,h_2))dt \longrightarrow \int_0^T ((v,h_2))dt,\ \ \forall\ h_2 \in H_0^1(\Omega). \tag{3.35}$$

Por (3.27) segue:

- $u'_m \rightharpoonup u'$ fraco em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$; (3.36)
- $v'_m \rightharpoonup v'$ fraco em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. (3.37)

Usando as convergências (3.28), (3.29), (3.36) e (3.37) e o Lema de Compacidade de Aubin-Lions, onde considera-se: $B_0 = H_0^1(\Omega)$, $B = L^2(\Omega)$ e $B_1 = H^{-1}(\Omega)$ segue

- $u_m \longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$; (3.38)
- $v_m \longrightarrow v$ forte em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. (3.39)

Mostra-se agora que

$$\int_0^T (f_1(u_m),h_1)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (f_1(u),h_1)\theta(t)dt, \ \ \forall \ \theta \in \mathcal{D}([0,T)) \text{ e } \forall \ h_1 \in L^2(\Omega). \tag{3.40}$$

De fato, usando propriedade de produto interno, tem-se que

$$\int_0^T [(f_1(u_m),h_1) - (f_1(u),h_1)]\theta(t)dt = \int_0^T [(f_1(u_m) - f_1(u),h_1)]\theta(t)dt. \tag{3.41}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (3.41), vem que

$$\int_0^T [(f_1(u_m) - f_1(u),h_1)]\theta(t)dt \leq \int_0^T \int_\Omega |f_1(u_m) - f_1(u)||h_1||\theta(t)|dxdt. \tag{3.42}$$

Aplicando em (3.42) a hipótese $\mathcal{H}_1$, o fato de $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;L^2(\Omega))$, e que $supp(\theta) \subset [0,T]$, tem-se

$$\int_0^T \int_\Omega |f_1(u_m) - f_1(u)||h_1||\theta(t)|dxdt \leq C\gamma_1 \int_0^T \left\{\int_\Omega |u_m - u|^2 dx\right\}^{1/2} \times \ \left\{\int_\Omega |h_1|^2 dx\right\}^{1/2} dt.$$

Aplicando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz neste último resultado, e considerando a convergência (3.38) obtem-se

$$C\gamma_1 \int_0^T \left\{\int_\Omega |u_m - u|^2 dx\right\}^{1/2} \times \ \left\{\int_\Omega |h_1|^2 dx\right\}^{1/2} dt$$

$$\leq C_1\gamma_1 \left(\int_0^T \int_\Omega |u_m - u|^2 dxdt\right)^{1/2} \times \ \left(\int_0^T \int_\Omega |h_1|^2 dxdt\right)^{1/2} \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\int_0^T [(f_1(u_m), h_1) - (f_1(u), h_1)]\theta(t)dt \longrightarrow 0.$$

De forma análoga tem-se

$$\int_0^T (f_2(v_m), h_2)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (f_2(v), h_2)]\theta(t)dt, \ \forall \ \theta \in \mathcal{D}\left([0,T)\right) \text{ e } \forall \ h_2 \in L^2(\Omega). \tag{3.43}$$

Precisa-se mostrar agora, que

$$a(l(v_m))\int_0^T \int_\Omega \nabla u_m.\nabla h_1\theta(t)dt \longrightarrow a(l(v))\int_0^T \int_\Omega \nabla u.\nabla h_1\theta(t)dt, \ \forall \ \theta \in \mathcal{D}\left([0,T]\right)$$

e $\forall \ h_1 \in L^2(\Omega)$. (3.44)

De fato, é suficiente provar que

$$a(l(v_m)) \longrightarrow a(l(v)) \text{ em } L^2(0,T). \tag{3.45}$$

Devido a continuidade de a basta mostrar que

$$l(v_m) \longrightarrow l(v) \text{ forte em } L^2(0,T). \tag{3.46}$$

De fato, da convergência (3.39) tem-se

$$\int_0^T |l(v_m) - l(v)|^2 dt = \int_0^T |l(v_m - v)|^2 dt \leq C_2 \int_0^T |v_m - v|^2 dt \longrightarrow 0.$$

De modo análogo, concluí-se que

$$\int_0^T |l(u_m) - l(u)|^2 dt \longrightarrow 0.$$

Estas convergências implicam que, pode-se tomar limites no problema aproximado (PA), e assim verificam-se as condições $(i), (ii), (iii) \ e \ (iv)$ do teorema 3.3.1.

Com efeito, multiplicando (3.1) e (3.2) por $\theta(t) \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando em $[0,T]$, obtem-se

$$\int_0^T (u_m', h_1)\theta(t)dt - \int_0^T a(l(v_m))(\Delta u_m, h_1)\theta(t)dt = \int_0^T (f_1(u_m), h_1)\theta(t)dt; \tag{3.47}$$

$$\int_0^T (v_m', h_2)\theta(t)dt - \int_0^T a(l(u_m))(\Delta v_m, h_2)\theta(t)dt = \int_0^T (f_2(v_m), h_2)\theta(t)dt. \tag{3.48}$$

Faremos os cálculos da passagem ao limite para a equação (3.47). A equação (3.48) segue de forma análoga.

Tomando o limite quando $m \longrightarrow \infty$, tem-se

$$\int_0^T (u', h_1)\theta(t)dt - \int_0^T a(l(v))(\Delta u, h_1)\theta(t)dt = \int_0^T (f_1(u), h_1)\theta(t)dt.$$

Fazendo as integrações em separado, vem que

- $\displaystyle\int_0^T (u', h_1)\theta(t)dt = (u, h_1)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u, h_1)\theta'(t)dt = \left\langle \frac{d}{dt}(u, h_1), \theta(t) \right\rangle;$

- $\displaystyle -\int_0^T a(l(v))(\Delta u, h_1)\theta(t) = -\langle a(l(v))(\Delta u, h_1), \theta(t)\rangle;$

- $\displaystyle\int_0^T (f_1(u), h_1)\theta(t)dt = \langle (f_1(u), h_1), \theta(t)\rangle.$

Podemos então reescrever (3.47) e (3.48) como sendo

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u, h_1), \theta(t) \right\rangle - \langle a(l(v))(\Delta u, h_1), \theta(t)\rangle = \langle (f_1(u), h_1), \theta(t)\rangle, \ \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T), \ \forall\ h_1 \in H_0^1(\Omega);$$

$$\left\langle \frac{d}{dt}(v, h_2), \theta(t) \right\rangle - \langle a(l(u))(\Delta v, h_2), \theta(t)\rangle = \langle (f_2(v), h_2), \theta(t)\rangle, \ \forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T), \ \forall\ h_2 \in H_0^1(\Omega).$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(u, h_1) - a(l(v))(\Delta u, h_1) = (f_1(u), h_1) \quad \text{no sentido de} \quad \mathcal{D}'(0,T), \ \forall\ h_1 \in H_0^1(\Omega);$$

$$\frac{d}{dt}(v, h_2) - a(l(u))(\Delta v, h_2) = (f_2(v), h_2) \quad \text{no sentido de} \quad \mathcal{D}'(0,T), \ \forall\ h_2 \in H_0^1(\Omega).$$

3.3.4 Verificação das Condições Iniciais

De $u, v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $u', v' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, pelo resultado de regularidade, tem-se

$$u, v \in C^0(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.49}$$

Dessa maneira, faz sentido calcularmos $u(0)$ e $v(0)$. Considere $\theta \in C^1(0,T;\mathbb{R})$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$.

Da convergência (3.24) obtem-se

$$\int_0^T (u_m', z)\theta dt \longrightarrow \int_0^T (u', z)\theta dt, \text{ onde } z \in H_0^1(\Omega). \tag{3.50}$$

Integrando por partes (3.50), tem-se

$$(u_m(t), z)\theta(t) - (u_m(0), z)\theta(0) - \int_0^T (u_m, z)\theta' dt \longrightarrow (u(t), z)\theta(t) - (u(0), z)\theta(0) - \int_0^T (u, z)\theta' dt.$$

Dessa maneira, tem-se

$$-(u_m(0), z) - \int_0^T (u_m, z)\theta' dt \longrightarrow -(u(0), z) - \int_0^T (u, z)\theta' dt. \tag{3.51}$$

Usando a convergência (3.32) em (3.51), tem-se

$$(u_m(0), z) \longrightarrow (u(0), z).$$

Como u_{0m} converge forte para u_0 em $L^2(\Omega)$, consequentemente fraco em $L^2(\Omega)$, então

$$(u_{0m}, z) \longrightarrow (u_0, z).$$

Da unicidade do limite tem-se

$$(u(0), z) \longrightarrow ((u_0, z)) \ \ , \forall z \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$u(0) = u_0.$$

Analogamente,

$$v(0) = v_0.$$

3.4 Unicidade

Teorema 3.4.1 (de Unicidade): Se $(H_1) - (H_4)$ são válidas a solução do problema (P) é única.

Demonstração:

Sejam $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\} : [0, T] \longrightarrow L^2(\Omega)$, funções vetoriais soluções de (P), temos

$$\frac{d}{dt}(u_1, h_1) + a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla h_1 dx = \int_\Omega f_1(u_1) h_1 dx; \tag{3.52}$$

$$\frac{d}{dt}(u_2, h_1) + a(l(v_2)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h_1 dx = \int_\Omega f_1(u_2) h_1 dx; \tag{3.53}$$

$$\frac{d}{dt}(v_1, h_2) + a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla v_1 . \nabla h_2 dx = \int_\Omega f_2(v_1) h_2 dx; \tag{3.54}$$

$$\frac{d}{dt}(v_2, h_2) + a(l(u_2)) \int_\Omega \nabla v_2 . \nabla h_2 dx = \int_\Omega f_2(v_2) h_2 dx. \tag{3.55}$$

Subtraindo (3.53) de (3.52) e (3.55) de (3.54), obtem-se

$$\frac{d}{dt}((u_1 - u_2), h_1) + a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla u_1 \nabla h_1 dx - a(l(v_2)) \int_\Omega \nabla u_2 \nabla h_1 dx$$

$$= \int_\Omega (f_1(u_1) - f_1(u_2)) h_1 dx;$$

$$\frac{d}{dt}((v_1 - v_2), h_2) + a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla v_1 \nabla h_2 dx - a(l(u_2)) \int_\Omega \nabla v_2 \nabla h_2 dx$$

$$= \int_\Omega (f_2(v_1) - f_2(v_2)) h_2 dx.$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}((u_1 - u_2), h_1) + a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla u_1 \nabla h_1 dx = \int_\Omega (f_1(u_1) - f_1(u_2)) h_1 dx$$

$$+ a(l(v_2)) \int_\Omega \nabla u_2 \nabla h_1 dx; \tag{3.56}$$

$$\frac{d}{dt}((v_1 - v_2), h_2) + a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla v_1 \nabla h_2 dx = \int_\Omega (f_2(v_1) - f_2(v_2)) h_2 dx$$

$$+ a(l(u_2)) \int_\Omega \nabla v_2 \nabla h_2 dx. \tag{3.57}$$

Antes de darmos continuidade, mostra-se a seguinte identidade:

$$\frac{d}{dt}((u_1 - u_2), h_1) + a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla (u_1 - u_2) \nabla h_1 dx = \Big(a(l(v_2)) - a(l(v_1))\Big) \int_\Omega \nabla u_2 \nabla h_1 dx$$

$$+ \int_\Omega (f_1(u_1) - f_1(u_2)) h_1 dx. \tag{3.58}$$

Com efeito, pois

$$\Big(a(l(v_2)) - a(l(v_1))\Big) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h_1 dx + \int_\Omega (f_1(u_1) - f_1(u_2)) h_1 dx = a(l(v_2)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h_1 dx$$

$$- a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h_1 dx + \int_\Omega f_1(u_1) h_1 dx - \int_\Omega f_2(u_2)) h_1 dx = a(l(v_2)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h_1 dx$$

$$- a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h_1 dx + \frac{d}{dt}(u_1, h_1) + a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla h_1 dx - \frac{d}{dt}(u_2, h_1)$$

$$- a(l(v_2)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h_1 dx.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}((u_1 - u_2), h_1) + a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla (u_1 - u_2) \nabla h_1 dx = a(l(v_2)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h_1 dx$$

$$- a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla u_2 . \nabla h_1 dx + \int_\Omega (f_1(u_1) - f_1(u_2)) h_1 dx.$$

Note que a identidade (3.58) é equivalente a equação (3.56), pois basta desenvolver o lado esquerdo da igualdade.

De modo análogo, (3.57) é equivalente a identidade (3.59) abaixo:

$$\frac{d}{dt}((v_1 - v_2), h_2) + a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla (v_1 - v_2) \nabla h_2 dx = \Big(a(l(u_2)) - a(l(u_1))\Big) \int_\Omega \nabla v_2 h_2 dx$$

$$+\int_{\Omega}(f_2(v_1)-f_2(v_2))h_2dx. \tag{3.59}$$

Logo, trabalha-se agora com as equações (3.58) e (3.59).

Usando o fato de $f_i \in lip(\gamma_i)$, $i=1,2$, tomando o módulo em (3.58) e (3.59) e considerando $h_1(t)=u_1(t)-u_2(t)$ e $h_2=v_1(t)-v_2(t)$, obtem-se as seguintes inequações:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|u_1-u_2|^2+a(l(v_1))\int_{\Omega}|\nabla(u_1-u_2)|^2dx\\&\leq\Big|\Big(a(l(v_2))-a(l(v_1))\Big)\Big|\int_{\Omega}|\nabla u_2||\nabla(u_1-u_2)|dx+\gamma_1\int_{\Omega}|u_1-u_2|^2dx;\end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|v_1-v_2|^2+a(l(u_1))\int_{\Omega}|\nabla(v_1-v_2)|^2dx\\&\leq\Big|\Big(a(l(u_2))-a(l(u_1))\Big)\Big|\int_{\Omega}|\nabla v_2||\nabla(v_1-v_2)|dx+\gamma_2\int_{\Omega}|v_1-v_2|^2dx.\end{aligned} \tag{3.61}$$

Adicionando as inequações (3.60) e (3.61), obtem-se

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|u_1-u_2|^2+\frac{d}{dt}|v_1-v_2|^2+a(l(v_1))\int_{\Omega}|\nabla(u_1-u_2)|^2dx+a(l(u_1))\int_{\Omega}|\nabla(v_1-v_2)|^2dx\\&\leq\Big|\Big(a(l(v_2))-a(l(v_1))\Big)\Big|\int_{\Omega}|\nabla u_2||\nabla(u_1-u_2)|dx+\Big|\Big(a(l(u_2))-a(l(u_1))\Big)\Big|\int_{\Omega}|\nabla v_2||\nabla(v_1-v_2)|dx\\&+\gamma_1\int_{\Omega}|u_1-u_2|^2dx+\gamma_2\int_{\Omega}|v_1-v_2|^2dx.\end{aligned} \tag{3.62}$$

Aplicando em (3.62) a hipótese $\mathcal{H}_2$, desigualdade de Cauchy-Schwarz e posteriormente usando $\mathcal{H}_4$ e $\mathcal{H}_3$, tem-se

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|u_1-u_2|^2+\frac{d}{dt}|v_1-v_2|^2+\alpha_0\|u_1-u_2\|^2+\alpha_0\|v_1-v_2\|^2\\&\leq A|l(v_1)-l(v_2)|\|u_2\|\|u_1-u_2\|+A|l(u_1)-l(u_2)|\|v_2\|\|v_1-v_2\|\\&+\gamma_1\int_{\Omega}|u_1-u_2|^2dx+\gamma_2\int_{\Omega}|v_1-v_2|^2dx\leq C_1|v_1-v_2|\|u_2\|\|u_1-u_2\|\\&+C_2|u_1-u_2|\|v_2\|\|v_1-v_2\|+\gamma\int_{\Omega}\{|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2\}dx.\end{aligned} \tag{3.63}$$

Aplicando a desigualdade de Young em (3.63), segue que

$$\frac{d}{dt}|u_1-u_2|^2+\frac{d}{dt}|v_1-v_2|^2+\alpha_0\|u_1-u_2\|^2+\alpha_0\|v_1-v_2\|^2$$

$$\leq \frac{\alpha_0}{2}\|v_1-v_2\|^2+\frac{\alpha_0}{2}\|u_1-u_2\|^2+\frac{C_1^2}{2\alpha_0}\|u_2\|^2|v_1-v_2|^2+\frac{C_2^2}{2\alpha_0}\|v_2\|^2|u_1-u_2|^2$$

$$+\ \gamma\{|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2\}. \tag{3.64}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}|u_1-u_2|^2+\frac{d}{dt}|v_1-v_2|^2+\alpha_0\Big\{\|u_1-u_2\|^2+\|v_1-v_2\|^2\Big\}$$

$$\leq \frac{\alpha_0}{2}\Big\{\|u_1-u_2\|^2+\|v_1-v_2\|^2\Big\}+\left\{\frac{C_1^2}{2\alpha_0}\|u_2\|^2+\gamma\right\}|v_1-v_2|^2+\left\{\frac{C_2^2}{2\alpha_0}\|v_2\|^2+\gamma\right\}|u_1-u_2|^2.$$

Considera-se

$\xi(t)=\dfrac{C_1^2}{\alpha_0}\|u_2\|^2+2\gamma$ e $\varphi(t)=\dfrac{C_2^2}{\alpha_0}\|v_2\|^2+2\gamma$, logo

$$\frac{d}{dt}|u_1-u_2|^2+\frac{d}{dt}|v_1-v_2|^2\leq \varphi(t)|u_1-u_2|^2+\xi(t)|v_1-v_2|^2. \tag{3.65}$$

Seja $\mathcal{M}(t)=\sup\{\varphi(t),\xi(t)\}$, em $(0,T)$, então

$$\frac{d}{dt}|u_1-u_2|^2+\frac{d}{dt}|v_1-v_2|^2\leq \mathcal{M}\{|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2\}. \tag{3.66}$$

Integrando (3.66) em $[0,t]$, obtem-se

$$|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2-|u_1(0)-u_2(0)|^2-|v_1(0)-v_2(0)|^2\leq \int_0^t \mathcal{M}\{|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2\}dx.$$

Como $u_1(0)=u_2(0)$ e $v_1(0)=v_2(0)$, tem-se

$$|u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2 \leq \int_0^t \mathcal{M}\{|u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2\} dx.$$

Se $\rho(t) = |u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2$, tem-se

$$\rho(t) \leq \int_0^t \mathcal{M}(s)\rho(s) ds. \tag{3.67}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (3.67), obtem-se

$$\rho(t) = 0, \ \ \forall \ t \in (0, T).$$

Logo,

$$|u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2 = 0, \ \ \forall \ t \in (0, T).$$

Ou seja,

$$|u_1 - u_2| = |v_1 - v_2| = 0.$$

Portanto,

$$u_1(t) = u_2(t) \ \ e \ \ v_1(t) = v_2(t), \ \ \forall \ t \in (0, T).$$

3.5 Decaimento Exponencial

Teorema 3.5.1 A solução do problema (P) decai exponencialmente quando $t \longrightarrow \infty$. Mais precisamente, mostra-se que a energia associada ao sistema decai de forma exponencial.

Aqui considera-se a energia potencial associada a (P) como sendo

$$E(t) = \frac{1}{2}\{|u|^2 + |v|^2\}.$$

Em outras palavras, mostra-se que existe uma constante $\delta > 0$, tal que

$$E(t) \leq E(0)e^{-\delta t}.$$

Com efeito, considerando-se o problema (P), compondo a sua primeira equação com u e a segunda com v, resulta em

$$(u', u) - a(l(v))(\Delta u, u) = (f_1(u), u); \tag{3.68}$$

$$(v', v) - a(l(u))(\Delta v, v) = (f_2(v), v). \tag{3.69}$$

Pelos resultados expostos na primeira estimativa, reescreve-se (3.68) e (3.69) como sendo respectivamente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + a(l(v))|\nabla u|^2 = \int_\Omega f_1(u)udx; \tag{3.70}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2 + a(l(u))|\nabla v|^2 = \int_\Omega f_2(v)vdx. \tag{3.71}$$

Adicionando-se as equações (3.70) e (3.71), obtem-se

$$\frac{d}{dt}E(t) + a(l(v))|\nabla u|^2 + a(l(u))|\nabla v|^2 = \int_\Omega \{f_1(u)u + f_2(v)v\}dx. \tag{3.72}$$

Desde que por $\mathcal{H}_2$, $a(t) \geq \alpha_0 > 0$, então de (3.72) tem-se

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\alpha_0\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) + \int_\Omega \{f_1(u)u + f_2(v)v\}dx. \tag{3.73}$$

Por $\mathcal{H}_1$ tem-se

$$\int_\Omega \{f_1(u)u + f_2(v)v\}dx \leq \int_\Omega \{|f_1(u) - f_1(0)||u| + |f_2(v) - f_2(0)||v|\}dx$$

$$\leq \int_\Omega \{\gamma_1|u|^2 + \gamma_2|v|^2\}dx \leq \int_\Omega \{\gamma|u|^2 + \gamma|v|^2\}dx = \gamma \int_\Omega \{|u|^2 + |v|^2\}dx = \gamma \left(|u|^2 + |v|^2\right).$$

Logo, reescreve-se (3.73) como

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\alpha_0 \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) + \gamma \left(|u|^2_{L^2} + |v|^2_{L^2}\right).$$

Pela desigualdade de Poincaré, segue

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\alpha_0 C \left(|u|^2_{L^2} + |v|^2_{L^2}\right) + \gamma \left(|u|^2_{L^2} + |v|^2_{L^2}\right) = -(\alpha_0 C - \gamma) \left(|u|^2_{L^2} + |v|^2_{L^2}\right). \tag{3.74}$$

Como $\mathbb{R}$ é denso, logo existe $\delta > 0$, de modo que

$$\alpha_0 C - \gamma \geq \delta > 0.$$

Dessa forma, $\alpha_0 \geq \dfrac{\gamma}{C}$, onde $\alpha_0 > \max\left\{\dfrac{\gamma}{C}, \dfrac{\gamma}{\lambda_1}\right\}$.

Assim, de (3.74), vem que

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -\delta E(t).$$

Portanto,

$$E(t) \leq E(0)e^{-\delta t}, \ \ \forall \ t \geq 0,$$

o que conclui a demonstração do teorema.

Considerações Finais

Diante dos resultados obtidos, conseguiu-se mostrar existência, unicidade de solução fraca global e ainda, o comportamento assintótico para (P) mostrando-se dessa maneira, que a solução decai exponencialmente com o tempo.

Para trabalhos futuros, pode-se considerar dados mais bem regulares, ou seja, espaços mais regulares, para obter-se, existência, unicidade de solução forte global, comportamento assintótico e a dependência contínua dos dados iniciais, dessa forma mostra-se que o problema encontra-se bem-posto, pois, segundo o matemático Hadamard, se um problema tem uma única solução e se pequenas perturbações nos dados de entrada, provocam pequenas perturbações nos resultados então o mesmo é dito bem-posto.

Além disso, como já foi garantido através dos cálculos feitos nesse trabalho, chamados de estudos sobre a parte analítica do problema (P), existência e unicidade de solução, pode-se estudar numericamente a solução do sistema (P), utilizando-se do cálculo com elementos finitos e de programas computacionais altamente confiáveis para esse tipo de problema, como por exemplo, o MATLAB 7.5.

Bibliografia

[1] BACHMAN, G. NARICI. *Functional Analysis*, Academic Press. New York and London, 1968.

[2] BRÉZIS, H. *Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones.* Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.

[3] CHIPOT, M., RODRIGUES, J.F. , *On a Class of nonlocal nonlinear problems, Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 26 (3) (1992) 447-448.

[4] CORRÊA, F.J.S.A., MENEZES, Silvano D.B. , FERREIRA, J., *On a class problems involving a nonlocal operator, Communications Applied Mathematics and Computations* 147 (2004) 475-489.

[5] FRIEDMAN, Avner, *Foundations of Modern Analysis*, New York, Dover Publications, 1982.

[6] FEIJÓO, Raul A., TAROCO, Edgard, PADRA, Claudio. *Métodos Variacionais.* LNCC, Petrópolis 2004.

[7] LIONS, J.L. *Quelques Méthodes de Résolutions des Problémes Aux Limites Non Linéaris*, Dunod, Paris, 1969.

[8] LIONS, J.L.and Magenes, *E. Problèmes aux Limites non Homogènes et Aplications, vol I*, Dunod, Paris, 1968.

[9] LIMA, Osmundo Alves. Tese de Doutoramento; *Existência e Unicidade de Soluções Fracas de uma Equação Hiperbólica-Parabólica Não-Linear*, 1985, UFRJ - Instituto de Matemática.

[10] MEDEIROS, L.A. e MIRANDA, M.M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos nº 25*, IM-UFRJ, 1993.

[11] OLIVEIRA, César R. de, *Introdução à Análise Funcional*,Rio de Janeiro. Associação Nacional Instituto de Matemática Pura e Aplicada IMPA, 2001.

[12] LOBATO, Renato F. C. Dissertação de Mestrado: *Solvabilidade e decaimento exponencial para um sistema de E.D.P não linear com acoplamento na fonte.* UFPA, Belém 2006.

[13] RIBEIRO, Lindomar Miranda. Dissertação de Mestrado: *Sobre um Sistema Acoplado de E.D.P´S do Tipo Klein - Gordon com Não-Linearidades do Tipo Kirchhoff - Carrier em Domínio Limitado.* UFPA, Belém 2005.

[14] RIVERA, J.E Muñoz. *Introdução à Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais.* LNCC, Petrópolis 2004.

[15] LIMA, Elon Lages. Espaços Métricos, Rio de Janeiro. Associação Nacional Instituto de Matemática Pura e Aplicada IMPA, 2003