



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

Antenor Noronha Silva

**Existência e Unicidade de Solução Forte e Análise Numérica via Método de
Diferenças Finitas da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira**

Belém/PA
2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

Antenor Noronha Silva

Existência e Unicidade de Solução Forte e Análise Numérica via Método de Diferenças Finitas da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira

Dissertação de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará para obtenção do Título de Mestre em Matemática e Estatística.

Orientador: Prof. Marcus Pinto da Costa da Rocha, *Dr.*

Co-Orientador: Prof. Valcir João da Cunha Farias, *Dr.*

Belém/PA
2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Antenor Noronha Silva

Existência e Unicidade de Solução Forte e Análise Numérica via Método de Diferenças Finitas da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira

Data da defesa: 10 de Novembro de 2006.

Conceito: _____

Banca Examinadora

Prof. Marcus Pinto da Costa da Rocha, *Dr.*
Universidade Federal do Pará
Orientador

Prof. Valcir João da Cunha Farias, *Dr.*
Universidade Federal do Pará
Co-Orientador
Examinador

Prof. Mauro Lima Santos, *Dr.*
Universidade Federal do Pará
Examinador

Prof. João dos Santos Protázio, *Dr.*
Universidade Federal do Pará
Examinador

DEDICATÓRIA

*À memória de Aldenor Pereira Silva,
meu pai, que partiu e não pôde assistir
e dividir este momento de grande
felicidade para mim.*

AGRADECIMENTOS

À Deus, que me permitiu e deu-me forças em todos os momentos da minha vida para que pudesse trilhar essa longa caminhada com saúde e realizar este sonho. Obrigado, Pai.

À Edna, minha mãe, a qual sem ela essa vitória não seria possível.

Ao meu orientador, professor Marcus Pinto da Costa da Rocha, pelo excelente trabalho de orientação e pelo apoio e paciência dispensado a minha pessoa; pela boa vontade em me receber em sua sala em qualquer momento para esclarecer as dúvidas que me ajudaram na realização deste trabalho.

Ao professor Valcir João da Cunha Farias, pelo apoio e excelente trabalho de co-orientação.

Ao professor Mauro Lima Santos, pelos esclarecimentos das dúvidas referentes a este trabalho e pelas valiosas contribuições ao mesmo.

Ao professor João dos Santos Protázio, pela sua boa vontade em sempre me atender para sanar algumas de minhas dúvidas.

Ao professor Jorge Ferreira, pelo grande incentivo e apoio que me deu durante todo o curso.

Às professoras Maria do Socorro Figueiredo Moura e Maria Amélia Monteiro, pelo bom relacionamento quando trabalhamos juntos na coordenação. Agradeço, ainda, pelo apoio e por permitirem minha liberação para conquistar este Título. Jamais esquecerei. Obrigado.

Ao professor Luiz Marconi Fortes Magalhães, por conceder também minha liberação para que eu pudesse cursar essa Pós-Graduação.

A todos os meus colegas do curso de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, desde aqueles que estiveram junto comigo nos estudos para as avaliações, até aqueles que contribuíram de forma direta ou indiretamente na realização deste trabalho.

À Sra. Telma Cristina Lima Mafra, Secretária da Coordenação de Pós-Graduação em Matemática, pelo carinho e boa vontade com que sempre me atendeu.

À Secretaria Municipal de Educação e Cultura da Prefeitura Municipal de Belém(SEMEC-PMB), por conceder minha licença curso.

*“Nunca deixe que lhe digam que não
vale a pena acreditar no sonho que se tem
ou que seus sonhos nunca vão dar certo
ou que você nunca vai ser alguém”.*

Flávio Venturini.

Resumo

Silva, Antenor Noronha. Existência e Unicidade de Solução Forte e Análise Numérica via Método de Diferenças Finitas da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira. 2006. Dissertação (Mestrado em Matemática e Estatística) - PPGME/UFPA, Belém - PA, Brasil.

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de solução forte e fazemos a análise numérica utilizando o método de diferenças finitas para a equação da onda linear com condição de memória na fronteira

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0 \text{ em } (0, 1) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) + \int_0^t g(t-s)u_x(1, s)ds = 0, \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ em } (0, 1) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$, a integral em (2) é uma condição de fronteira que inclui o efeito memória e g representa a função relaxação. Mostramos através dos resultados da análise numérica que a condição de memória na fronteira causa o decaimento da solução no decorrer do tempo.

Palavra-Chave: Existência e Unicidade de Solução Forte, Análise Numérica, Método de Diferenças Finitas e Termo de Memória na Fronteira.

Abstract

Silva, Antenor Noronha. Existence and Uniqueness of Strong Solution and Numerical Analysis way Finite Difference Method of the Wave Equation with Memory Term at the Boundary. 2006. Thesis (Master in Matematic and Statistic) - PPGME/UFPA, Belém - PA, Brazil.

In this work we study the existence and uniqueness of strong solution and make the numerical analysis utilizing the finite difference method for linear wave equation with memory condition at the boundary

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0 \text{ in } (0, 1) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) + \int_0^t g(t-s)u_x(1, s)ds = 0, \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ in } (0, 1) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$ and $\alpha > 0$, the integral em (2) is a boundary condition which includes the memory effect and g represent the relaxation function. We show through the results of the numerical analysis that the memory condition at the boundary cause the decay of the solution in the course of time.

Key Words: Existence and Uniqueness of Strong Solution, Numerical Analysis, finite difference method and Memory Term at the Boundary.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	xi
Introdução	1
1 Existência e Unicidade	3
1.1 Resultados Fundamentais e Definições	3
1.1.1 Equação de Volterra	6
1.1.2 Equação Resolvente	7
1.2 Existência	9
1.3 Unicidade	20
2 Alguns Fundamentos Teóricos da Análise Numérica	22
2.1 Equações Diferenciais e Métodos Numéricos	22
2.1.1 Um Breve Panorama Histórico	22
2.2 Aspectos Teóricos Sobre Equações Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem	23
2.3 Expansões de Taylor	26
2.3.1 Aproximação Polinomial de uma Função Diferenciável	26
2.3.2 Fórmula de Taylor	28
2.4 Erros nas Aproximações Numéricas	30
2.4.1 Principais Tipos de Erro	31
2.5 Método das Diferenças Finitas	34
2.5.1 Discretização	34
2.5.2 Fundamentos do Método de Diferenças Finitas	35
2.5.3 Notações Usuais em Diferenças Finitas	37
2.5.4 Fórmulas de Diferenças Finitas para Discretização das Derivadas	40
2.5.5 O Conceito de Estabilidade	45
3 Análise Numérica	46
3.1 Discretização do Problema	46
3.2 Análise da Estabilidade do Método Explícito	48
3.3 Análise dos Resultados	54

Considerações Finais	60
Bibliografia	61

Lista de Figuras

2.1	Esquema Gráfico Simplificado de um Processo de Determinação de Solução Numérica.	30
2.2	Exemplo de um Processo de Discretização.	35
2.3	Malha Unidimensional.	36
2.4	Malha Bidimensional.	37
2.5	Malha Bidimensional.	43
3.1	Discretização do Domínio $[0, 1] \times [0, \infty)$	46
3.2	Solução Numérica da Equação da Onda sem o Termo de Memória na Fronteira.	54
3.3	Solução Numérica da Equação da Onda sem o Termo de Memória na Fronteira.	55
3.4	Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.	56
3.5	Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.	56
3.6	Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.	57
3.7	Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.	57
3.8	Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.	58
3.9	Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.	58
3.10	Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.	59

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é utilizar o método das diferenças finitas para estudar a solução numérica da equação da onda com termo de memória na fronteira, para isto vamos considerar o seguinte problema de valor inicial e de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0 \text{ em } (0, 1) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) + \int_0^t g(t-s)u_x(1, s)ds = 0, \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ em } (0, 1). \end{array} \right. \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) + \int_0^t g(t-s)u_x(1, s)ds = 0, \forall t > 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ em } (0, 1). \quad (3)$$

A integral em (2) é uma condição na fronteira que inclui o efeito memória e é responsável pela dissipação de energia do sistema. Fisicamente, esse efeito é provocado pelo contato da fronteira $x = 1$ com algum material viscoelástico. Denotamos por u a amplitude da onda e por g a função de relaxamento e k o núcleo resolvente de g' (a derivada da função relaxação) e $\alpha \in \mathbb{R}$, com $\alpha \neq 0$. Assumimos que g é positiva e k satisfaz:

$$\begin{aligned} 0 < k(t) &\leq b_0 e^{-\gamma_0 t}, \\ -b_1 k(t) &\leq k'(t) \leq -b_2 k(t), \\ -b_3 k'(t) &\leq k''(t) \leq -b_4 k'(t) \end{aligned} \quad (4)$$

para algumas constantes positivas $b_i, i = 0, 1, \dots, 4$ e γ_0 .

O problema acima é originado do trabalho de Santos [20] o qual o autor estuda o comportamento assintótico do seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} = 0 \text{ em } (0, 1) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) + \int_0^t g(t-s)\mu(s)u_x(1, s)ds = 0, \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ em } (0, 1). \end{array} \right. \quad (5)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) + \int_0^t g(t-s)\mu(s)u_x(1, s)ds = 0, \quad \forall t > 0 \quad (6)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ em } (0, 1). \quad (7)$$

A existência e unicidade apresentada no capítulo 1 deste trabalho segue o que foi feito no trabalho de Baldez [1] no qual o autor estuda a existência, unicidade e comportamento assintótico para o problema (5) – (7).

Primeiramente, no capítulo 1, enunciamos algumas definições e resultados importantes que são úteis para mostrar a existência e unicidade de solução forte. Em seguida, é enunciado e demonstrado o teorema principal de existência e unicidade para o problema (1) – (3). Para mostrarmos a existência de solução usamos o método de aproximação de Faedo-Galerkin e para a unicidade utilizamos o método da energia.

No capítulo 2, apresentamos um breve comentário histórico sobre a utilização dos métodos numéricos na solução de problemas envolvendo equações diferenciais. Além disso, definimos polinômio de Taylor de ordem n , e em seguida é demonstrado a fórmula de Taylor com resto de Lagrange que é um resultado fundamental para o método numérico que vamos utilizar. Apresentamos ainda, neste capítulo, os fundamentos do método numérico que utilizamos para resolver o problema proposto neste trabalho conhecido como método de diferenças finitas.

No capítulo 3, é utilizado o método de diferenças finitas para se obter a análise numérica do problema (1) – (3). Na análise dos resultados obtidos as duas primeiras simulações numéricas foram feitas sem o termo de memória na fronteira, no caso para $t=20$ segundos e $t=80$ segundos, e podemos observar nesse caso que a energia do sistema não decai, ao passo que, nas demais simulações com o termo de memória na fronteira, observamos que a energia decai à medida que o tempo aumenta. É importante observar que no trabalho de Santos [20] o autor mostra o decaimento de energia à medida em que o tempo aumenta, o que de certa forma confirma os resultados que são obtidos na análise numérica.

Capítulo 1

Existência e Unicidade

Neste capítulo enunciamos e demonstramos o teorema relativo a existência e unicidade de solução do problema (1) – (3), mas para isso inicialmente apresentamos algumas definições e resultados importantes que nos auxilia nessa demonstração.

1.1 Resultados Fundamentais e Definições

Denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das funções reais $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis tais que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue em Ω . O espaço $L^p(\Omega)$, é um espaço de Banach com norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u|^p dx.$$

Quando $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach de todas as funções reais essencialmente limitadas com norma

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|.$$

Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

Representamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções reais continuamente indefinidamente deriváveis em Ω , com suporte compacto em Ω .

Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as condições:

- (i) Todas as φ_n possuem suportes contidos em um compacto fixo K de Ω ;
- (ii) A sucessão $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ uniformemente em K , juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, com a noção de convergência acima definida, é representado por $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Uma distribuição sobre Ω é toda forma linear contínua T sobre $\mathfrak{D}(\Omega)$. Ou seja, uma distribuição sobre Ω é uma forma $T : \mathfrak{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

- (i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$;
- (ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathfrak{D}(\Omega)$ então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em \mathbb{R} .

O valor da distribuição T em φ é representado por $\langle T, \varphi \rangle$.

Representamos por $\mathfrak{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições sobre Ω com a seguinte noção de convergência: Dizemos que a sucessão $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para T , quando a sucessão $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em \mathbb{R} , para toda φ em $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Dada uma distribuição $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$. Denominamos derivada de T segundo schwartz a distribuição representada por $\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \rangle = - \langle T, \frac{d\varphi}{dx} \rangle$ para toda $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$.

Uma distribuição T possui derivadas de todas as ordens segundo schwartz definida por:

$$\langle \frac{d^n T}{dx^n}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \frac{d^n \varphi}{dx^n} \rangle \text{ para toda } \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}).$$

Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço de Sobolev de ordem m , isto é, o espaço das funções reais $u \in L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo $|\alpha| \leq m$. A norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é definida por

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^p dx.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com esta norma é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, o espaço

$W^{m,2}(\Omega)$ é representado por $H^m(\Omega)$, que é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx$$

e norma

$$\|u\|_{m,2}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^2 dx.$$

Dado um espaço V de Hilbert separável. Denotamos por $L^p(0, T; V)$, $0 < T < \infty$ e $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial das funções vetoriais $s :]0, T[\rightarrow V$ que a cada $s \in]0, T[$ associa $v(s) \in V$ tal que $(v(s), w)_V$ é mensurável para todo $w \in V$ e $s \mapsto \|v(s)\|_V \in L^p(0, T)$.

A norma no espaço $L^p(0, T; V)$ é dada por

$$\|v\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^t \|v(s)\|_V^p ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = \infty$, temos que $L^{\infty}(0, T; V)$ é um espaço de Banach com norma

$$\|v\|_{L^{\infty}(0,T;V)} = \sup_{0 < s < T} \text{ess} \|v(s)\|_V.$$

Teorema 1.1.1. (*Banach-Alouglu-Bourbaki*). *Seja E um espaço de Banach. O conjunto $B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Ver referência [3].

Teorema 1.1.2. *Seja E um espaço de Banach separável e seja (f_n) uma sequência limitada em E' . Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Ver referência [3].

Teorema 1.1.3. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja (x_n) uma sequência limitada em E . Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca.*

Demonstração: Ver referência [3].

Denotamos por B_0 , B e B_1 espaços de Banach onde B_0 e B_1 são espaços reflexivos satisfazendo

$$B_0 \subset B \subset B_1, \quad A \text{ imersão de } B_0 \text{ em } B \text{ é compacta.} \quad (1.1)$$

Teorema 1.1.4. (Teorema de Aubin-Lions). *Sejam $1 < p_0, p_1 < \infty$ e suponhamos que (1.1) seja válida. Então, a imersão de W sobre $L^{p_0}(0, T; B)$ é compacta, sendo $W = \{v; v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v_t \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$.*

Demonstração: Ver referência [15].

Lema 1.1.1. *Sejam V, H espaços de Hilbert, com $V \hookrightarrow H$ (imersão contínua). Se $u \in L^p(0, T; V)$, $u_t \in L^p(0, T; H)$, $1 \leq p < \infty$, então $u \in C(0, T; H)$.*

Demonstração: Ver referência [15].

Teorema 1.1.5. (Teorema de Existência de Cauchy-Peano). *Seja $f \in C(R)$, sendo R um retângulo, então existe um intervalo I e uma função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , solução do problema*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Demonstração: Ver referência [5].

Teorema 1.1.6. *Seja $f \in C$ em um domínio do plano (t, x) , e suponha que f é limitada em D . Se φ é uma solução do P.V.I acima em um intervalo (a, b) , então os limites laterais $\varphi(a+0) = \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x)$ e $\varphi(b-0) = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x)$ existem. Se $(a, \varphi(a+0))$ [ou $(b, \varphi(b-0))$] pertence a D , então a solução φ pode ser continuada.*

Demonstração: Ver referência [5].

1.1.1 Equação de Volterra

Definição 1.1.1. *Uma equação integral de Volterra linear é toda equação da forma*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)f(s)ds \quad (1.2)$$

sendo $g(t)$ e $k(t, s)$ funções dadas.

Teorema 1.1.7. *Seja $k(t, s)$ uma função contínua em $0 \leq s \leq t \leq T$, $T > 0$ e $g(t)$ uma função contínua em $0 \leq t \leq T$. Então existe uma única função contínua $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s)f(s)ds.$$

Demonstração: Ver referência [18].

1.1.2 Equação Resolvente

Pelo teorema 1.1.7 acima temos que o operador de Volterra

$$f(t) \rightarrow f(t) - \int_0^t k(t, s)f(s)ds$$

é bijetivo de $C([0, T])$ sobre $C([0, T])$. A função $k(t, s)$ é chamada núcleo do operador de Volterra.

Teorema 1.1.8. *Se $k(t, s)$ e $g(t)$ são contínuas, então a única solução contínua de (1.2) é dada por*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t r(t, s)g(s)ds.$$

Demonstração: Ver referência [18].

A função $r(t, s)$ é chamada o núcleo resolvente de $k(t, s)$.

Observação 1.1.1. *O teorema 1.1.8 acima mostra que o operador inverso de Volterra tem a forma*

$$g(t) \rightarrow g(t) + \int_0^t r(t, s)g(s)ds.$$

Consideramos os seguintes operadores binários:

$$(f \square \varphi)(t) = \int_0^t f(t-s)|\varphi(t) - \varphi(s)|^2 ds,$$

$$(f * \varphi)(t) = \int_0^t f(t-s)\varphi(s)ds,$$

onde $*$ é o produto convolução. O lema abaixo mostra uma importante propriedade do operador convolução.

Lema 1.1.2. *Sejam $f, \varphi \in C^1([0, \infty[: \mathbb{R})$. Então*

$$\int_0^t f(t-s)\varphi(s)ds\varphi_t = -\frac{1}{2}f(t)|\varphi(t)|^2 + \frac{1}{2}f'\square\varphi - \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left[f\square\varphi - \left(\int_0^t f(s)ds \right) |\varphi|^2 \right].$$

Demonstração: Ver referência [1].

Devido a condição $u(0, t) = 0$ definimos o seguinte espaço $V = \{v \in H^1(0, 1); v(0) = 0\}$. O conjunto V é um espaço de Hilbert na norma induzida por $H^1(0, 1)$, como é mostrado em Baldez [1]. Podemos definir em V um produto interno dado por:

$$((u, v)) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx. \quad (1.3)$$

Podemos definir uma norma em V proveniente do produto interno definido acima que é dada por:

$$\|u\|^2 = \int_0^1 \left| \frac{du}{dx} \right|^2 dx. \quad (1.4)$$

O conjunto V é um espaço de Hilbert com a norma definida em (1.4). Para ver tal fato basta consultar Baldez [1].

Diferenciando (2) obtemos a seguinte equação de Volterra

$$u_x(1, t) + \frac{1}{g(0)} g' * u_x(1, t) = -\frac{1}{g(0)} u_t(1, t).$$

Usando o operador inverso de Volterra, obtemos:

$$u_x(1, t) = -\frac{1}{g(0)} \{u_t(1, t) + k * u_t(1, t)\}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} k * u_t(1, t) &= \int_0^t k(t-s) u_t(1, s) ds \\ &= k(t-s) u(1, s) \Big|_0^t - \int_0^t -k'(t-s) u(1, s) ds \\ &= k(0) u(1, t) - k(t) u_0(1) + \int_0^t k'(t-s) u(1, s) ds. \end{aligned}$$

Fazendo $\tau = \frac{1}{g(0)}$ e usando a identidade acima, obtemos

$$u_x(1, t) = -\tau \{u_t(1, t) + k(0) u(1, t) - k(t) u_0(1) + k' * u(1, t)\}.$$

Teorema 1.1.9. (Teorema Principal). *Seja $(u_0, u_1) \in V \times L^2(0, 1)$, então existe uma única solução de (1)-(3) satisfazendo*

$$u \in C([0, T] : V) \cap C^1([0, T] : L^2(0, 1)).$$

Além disso, se $(u_0, u_1) \in H^2(0, 1) \cap V \times V$ satisfazendo a condição de compatibilidade

$$u_{0,x}(1) = -\tau u_1(1) \quad (1.5)$$

então $u \in C([0, T] : H^2(0, 1) \cap V) \cap C^1([0, T] : V)$.

Multiplicando a equação (1) por $v \in V$ e integrando de 0 a 1, temos

$$(u_{tt}, v) + \alpha^2((u, v)) + \alpha^2\tau\{u_t(1, t) + k(0)u(1, t) - k(t)u_0(1) + k' * u(1, t)\}v(1) = 0.$$

A demonstração deste teorema é feita nas seções 1.2 e 1.3 a seguir e é baseada no método de Faedo-Galerkin. Supomos inicialmente que $(u_0, u_1) \in H^2(0, 1) \cap V \times V$ satisfazendo (1.5).

1.2 Existência

Seja $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma base de $V \cap H^2(0, 1)$ a qual é ortonormal em V , e representamos por V_m o subespaço gerado pelos m primeiros vetores dessa base.

$$V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m].$$

Problema Aproximado

Determinar funções $u^m(t) \in V_m$, tais que

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^m h_{jm}(t)w_j$$

satisfazendo:

$$(u_{tt}^m, v) + \alpha^2((u^m, v)) = -\alpha^2\tau\{u_t^m(1, t) + k(0)u^m(1, t) - k(t)u_0^m(1) + k' * u^m(1, t)\}v(1) = 0 \quad (1.6)$$

$$u_0^m = \sum_{j=1}^m \alpha_{j0}w_j, \quad u_1^m = \sum_{j=1}^m \beta_{j1}w_j$$

onde

$$u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{j0}w_j \quad e \quad u_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{j1}w_j, \quad \text{ou seja,}$$

$$u_0^m \rightarrow u_0 \text{ forte em } V \cap H^2(0, 1) \text{ e } u_1^m \rightarrow u_1 \text{ forte em } V.$$

Substituindo $u^m(t)$ na equação (1.6) do problema aproximado acima, obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^m h_{jm}''(t)w_j, v \right) + \alpha^2 \left(\sum_{j=1}^m h_{jm}(t)w_{j,x}, v_x \right) = -\alpha^2\tau \left\{ \sum_{j=1}^m h_{jm}'(t)w_j(1) + K(0) \sum_{j=1}^m h_{jm}(t)w_j(1) \right. \\ & \left. - k(t) \sum_{j=1}^m h_{jm}(0)w_j(1) + k' * \sum_{j=1}^m h_{jm}(t)w_j(1) \right\} v(1) \end{aligned}$$

$$h_{jm}(0) = \alpha_{j0}, \quad h'_{jm}(0) = \beta_{j1}.$$

Sendo a igualdade válida para todo $v \in V_m$, então tomando em particular $v = w_i$, com $1 \leq i \leq m$ e somando em j de 1 a m , obtemos o sistema de equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem:

$$\begin{aligned} h''_{im}(t) + \alpha^2((w_j, w_i)) \sum_{j=1}^m h_{jm}(t) &= -\alpha^2 \tau w_j(1) w_i(1) \sum_{j=1}^m h'_{jm}(t) - \alpha^2 \tau k(0) w_j(1) w_i(1) \sum_{j=1}^m h_{jm}(t) \\ &+ \alpha^2 \tau k(t) w_j(1) w_i(1) \sum_{j=1}^m h_{jm}(0) - \alpha^2 \tau w_j(1) w_i(1) k' * \sum_{j=1}^m h_{jm}(t). \end{aligned}$$

Na forma matricial, temos

$$\begin{cases} H''(t) + \alpha^2 A H(t) = -\alpha^2 \tau B H'(t) - \alpha^2 \tau k(0) B H(t) + \alpha^2 \tau k(t) B H(0) - \alpha^2 \tau B (k' * H)(t) \\ H(0) = H_0 \quad e \quad H'(0) = H_1 \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= [((w_j, w_i))]_{m \times m}, \quad B = [w_j(1) w_i(1)]_{m \times m}, \quad H(t) = [h_{jm}(t)]_{m \times 1}, \quad H_0 = [\alpha_{j0}]_{m \times 1} \quad e \\ H_1 &= [\beta_{j1}]_{m \times 1}. \end{aligned}$$

Fazendo outra notação matricial, onde

$$Y = \begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix} \text{ o sistema acima fica:}$$

$$\begin{cases} Y' = F(t, Y) \\ Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} H(0) \\ H'(0) \end{pmatrix} \end{cases}$$

onde

$$\begin{aligned} F(t, Y) &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\alpha^2 A - \alpha^2 \tau k(0) & -\alpha^2 \tau B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha^2 \tau k(t) B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H(0) \\ H'(0) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha^2 \tau B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k' * H \\ k' * H' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como o sistema acima está nas condições do teorema 1.1.5 de Cauchy-Peano para sistemas de equações diferenciais lineares de 1ª ordem, pois F é contínua então existe uma solução local em um intervalo $[0, t_m)$.

Estimativa a priori I- Observe que nosso problema aproximado é:

$$(u_{tt}^m, w_j) + \alpha^2(u_x^m(t), w_{j,x}) = -\alpha^2\tau\{u_t^m(1, t) + k(0)u^m(1, t) - k(t)u_0^m(1) + k' * u^m(1, t)\}w_j(1).$$

Multiplicando a igualdade acima por $h'_{jm}(t)$ e somando em j de 1 a m , temos:

$$(u_{tt}^m, u_t^m) + \alpha^2(u_x^m, u_{x,t}^m) = -\alpha^2\tau\{u_t^m(1, t) + k(0)u^m(1, t) - k(t)u_0^m(1) + k' * u^m(1, t)\}u_t^m(1, t).$$

Assim, temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u_t^m|^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u_x^m|^2 &= -\alpha^2\tau\{|u_t^m(1, t)|^2 + k(0) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u^m(1, t)|^2 \\ &\quad - k(t)u_0^m(1)u_t^m(1, t) + k' * u^m(1, t)u_t^m(1, t)\}. \end{aligned}$$

Usando o lema 1.1.2 em $k' * u^m(1, t)u_t^m(1, t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |u_t^m|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|u^m\|^2 + \alpha^2\tau(k(t)|u^m(1, t)|^2 - k' \square u^m(1, t)) \} &= -\alpha^2\tau\{|u_t^m(1, t)|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} k'' \square u^m(1, t) - k(t)u_0^m(1)u_t^m(1, t)\} + \alpha^2\tau \frac{1}{2} k'(t)|u^m(1, t)|^2. \end{aligned}$$

Como $\alpha^2\tau \frac{1}{2} k'(t)|u^m(1, t)|^2 \leq 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |u_t^m|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|u^m\|^2 + \alpha^2\tau(k(t)|u^m(1, t)|^2 - k' \square u^m(1, t)) \} \\ \leq -\alpha^2\tau\{|u_t^m(1, t)|^2 + \frac{1}{2} k'' \square u^m(1, t) - k(t)u_0^m(1)u_t^m(1, t)\}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade fundamental $2ab \leq a^2 + b^2$, temos

$$k(t)u_0^m(1)u_t^m(1, t) \leq \frac{1}{2} k^2(t)|u_0^m(1)|^2 + \frac{1}{2} |u_t^m(1, t)|^2.$$

Portanto segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |u_t^m|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|u^m\|^2 + \alpha^2\tau(k(t)|u^m(1, t)|^2 - k' \square u^m(1, t)) \} \\ \leq -\alpha^2\tau|u_t^m(1, t)|^2 - \frac{1}{2} \alpha^2\tau k'' \square u^m(1, t) + \frac{\alpha^2\tau}{2} k^2(t)|u_0^m(1)|^2 + \frac{\alpha^2\tau}{2} |u_t^m(1, t)|^2. \end{aligned}$$

Porém, note que

$$-\frac{\alpha^2\tau}{2} k'' \square u^m(1, t) \leq 0.$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ |u_t^m|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|u^m\|^2 + \alpha^2 \tau (k(t) |u^m(1, t)|^2 - k' \square u^m(1, t)) \} + \alpha^2 \tau |u_t^m(1, t)|^2 \\ & \leq \alpha^2 \tau k^2(t) |u_0^m(1)|^2. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t , temos que:

$$\begin{aligned} & |u_t^m|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|u^m\|^2 + \alpha^2 \tau (k(t) |u^m(1, t)|^2 - k' \square u^m(1, t)) + \int_0^t \alpha^2 \tau |u_t^m(1, t)|^2 \\ & \leq \int_0^t \alpha^2 \tau k^2(s) |u_0^m(1)|^2 + |u_1^m|^2 + \alpha^2 \|u_0^m\|^2 + \alpha^2 \tau k(0) |u_0^m(1)|^2. \end{aligned}$$

Sendo (u_0^m) convergente em $H^2(0, 1) \cap V$ segue que (u_0^m) é limitada e também pelo fato de (u_1^m) ser convergente em V temos que (u_1^m) é limitada. Por (4)₁ temos que $k(t)$ é limitada, e portanto temos que

$$|u_t^m|^2 + \alpha^2 \|u^m\|^2 + \alpha^2 \tau (k(t) |u^m(1, t)|^2 - k' \square u^m(1, t)) + \int_0^t \alpha^2 \tau |u_t^m(1, s)|^2 ds \leq M$$

onde M é uma constante independente de m . Portanto pelo teorema do prolongamento de soluções, podemos estender a solução aproximada u^m a um intervalo $[0, T]$, com T independente de m .

Logo, temos

$$(u^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V)$$

$$(u_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)).$$

Estimativa a priori II- Nosso intuito é estimar o termo $\int_0^1 |u_{tt}^m|^2$. Vamos primeiramente estimar o termo $\int_0^1 |u_{tt}^m(0)|$. Do problema aproximado, temos

$$(u_{tt}^m, v) + \alpha^2 ((u^m, v)) = -\alpha^2 \tau \{ u_t^m(1, t) + k(0) u^m(1, t) - k(t) u_0^m(1) + k' * u^m(1, t) \} v(1) = 0,$$

$$\forall v \in V_m.$$

Fazendo $t \rightarrow 0^+$ e $v = u_{tt}^m(0)$ segue que

$$\int_0^1 |u_{tt}^m(0)|^2 + \alpha^2 ((u_0^m, u_{tt}^m(0))) = \{ -\alpha^2 \tau u_1^m(1) - \alpha^2 \tau k(0) u_0^m(1) + \alpha^2 \tau k(0) u_0^m(1) \} u_{tt}^m(1, 0).$$

Ou seja,

$$\int_0^1 |u_{tt}^m(0)|^2 + \alpha^2 \int_0^1 u_{0,x}^m u_{tt,x}^m(0) = \{ -\alpha^2 \tau u_1^m(1) - \alpha^2 \tau k(0) u_0^m(1) + \alpha^2 \tau k(0) u_0^m(1) \} u_{tt}^m(1, 0).$$

Como

$$\int_0^1 u_{0,x}^m u_{tt,x}^m(0) dx = u_{tt}^m(1,0) u_{0,x}^m(1) - \int_0^1 u_{xx}^m(0) u_{tt}^m(0)$$

e usando a condição de compatibilidade do teorema principal $u_{0,x}(1) = -\tau u_1(1)$.

Então, obtemos que:

$$\int_0^1 |u_{tt}^m(0)|^2 = \alpha^2 \int_0^1 u_{xx}^m(0) u_{tt}^m(0).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\int_0^1 |u_{tt}^m(0)|^2 \leq \alpha^2 \left(\int_0^1 |u_{xx}^m(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |u_{tt}^m(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, obtemos

$$\left(\int_0^1 |u_{tt}^m(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \alpha^2 \left(\int_0^1 |u_{xx}^m(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $u_0^m \rightarrow u_0$ forte em $H^2 \cap V$, resulta que $\left(\int_0^1 |u_{xx}^m(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ é limitada.

Logo,

$$|u_{tt}^m(0)|_{L^2} = \left(\int_0^1 |u_{tt}^m(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M.$$

Nosso problema aproximado é

$$\int_0^1 u_{tt}^m w_j + \alpha^2 \int_0^1 u_{x,t}^m w_{j,x} = -\alpha^2 \tau \{u_t^m(1,t) + k * u_t^m(1,t)\} w_j(1).$$

Derivando a equação acima em t , obtemos

$$\int_0^1 u_{ttt}^m w_j + \alpha^2 \int_0^1 u_{x,tt}^m w_{j,x} = -\alpha^2 \tau \{u_{tt}^m(1,t) + k' * u_t^m(1,t) + k(0) u_t^m(1,t)\} w_j(1).$$

Multiplicando a equação acima por $h''_{jm}(t)$ e somando em j de 1 a m , obtemos

$$(u_{ttt}^m, u_{tt}^m) + \alpha^2 (u_{x,tt}^m, u_{x,tt}^m) = -\alpha^2 \tau \{u_{tt}^m(1,t) + k' * u_t^m(1,t) + k(0) u_t^m(1,t)\} u_{tt}^m(1,t).$$

Portanto segue que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 (|u_{tt}^m|^2 + \alpha^2 |u_{x,t}^m|^2) \right\} = -\alpha^2 \tau \{ |u_{tt}^m(1,t)|^2 + k(0) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_t^m(1,t)|^2 + k' * u_t^m(1,t) u_{tt}^m(1,t) \}.$$

Usando o lema 1.1.2 em $k' * u_t^m(1, t)u_{tt}^m(1, t)$ e substituindo na equação anterior, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 (|u_{tt}^m|^2 + \alpha^2 |u_{x,t}^m|^2) \right\} &= -\alpha^2 \tau |u_{tt}^m(1, t)|^2 + \frac{\alpha^2 \tau}{2} k'(t) |u_t^m(1, t)|^2 - \frac{\alpha^2 \tau}{2} k'' \square u_t^m(1, t) \\ &+ \frac{\alpha^2 \tau}{2} \frac{d}{dt} k' \square u_t^m(1, t) - \frac{\alpha^2 \tau}{2} \frac{d}{dt} k(t) |u_t^m(1, t)|^2. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\alpha^2 \tau}{2} k'(t) |u_t^m(1, t)|^2 \leq 0 \quad e \quad -\frac{\alpha^2 \tau}{2} k'' \square u_t^m(1, t) \leq 0,$$

então

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 (|u_{tt}^m|^2 + \alpha^2 |u_{x,t}^m|^2) \right\} \leq -\alpha^2 \tau |u_{tt}^m(1, t)|^2 - \frac{\alpha^2 \tau}{2} \frac{d}{dt} (k(t) |u_t^m(1, t)|^2 - k' \square u_t^m(1, t)).$$

Portanto segue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 (|u_{tt}^m|^2 + \alpha^2 |u_{x,t}^m|^2) + \alpha^2 \tau (k(t) |u_t^m(1, t)|^2 - k' \square u_t^m(1, t)) \right\} \leq -\alpha^2 \tau |u_{tt}^m(1, t)|^2 \leq 0.$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_0^1 (|u_{tt}^m|^2 + \alpha^2 |u_{x,t}^m|^2) + \alpha^2 \tau (k(t) |u_t^m(1, t)|^2 - k' \square u_t^m(1, t)) \right\} \leq 0.$$

Integrando de 0 a t , temos:

$$\begin{aligned} |u_{tt}^m|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|u_t^m\|^2 + \alpha^2 \tau (k(t) |u_t^m(1, t)|^2 - k' \square u_t^m(1, t)) &\leq |u_{tt}^m(0)|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|u_t^m(0)\|^2 \\ &+ \alpha^2 \tau k(0) |u_1^m(1)|^2. \end{aligned}$$

Porém, temos que

(i) $\int_0^1 |u_{tt}^m(0)|^2$ é limitada

(ii) $\alpha^2 \int_0^1 |u_{x,t}^m(0)|^2$ é limitada, pois $u_1^m \rightarrow u_1$ forte em V e $\alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $|u_1^m(1)|^2$ é limitada devido a imersão contínua de $H^1(0, 1)$ em $C([0, 1])$.

Portanto temos o seguinte:

$$|u_{tt}^m|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|u_t^m\|^2 + \alpha^2 \tau (k(t) |u_t^m(1, t)|^2 - k' \square u_t^m(1, t)) \leq M.$$

Das estimativas anteriores, obtemos:

$$(u^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V) \quad (1.7)$$

$$(u_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \quad (1.8)$$

$$(u_{x,t}^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \quad (1.9)$$

$$(u_{tt}^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \quad (1.10)$$

$$(u_t^m(1, t)) \text{ é limitada em } L^2(0, T). \quad (1.11)$$

De (1.8) e (1.9) vem que $u_t^m \in L^\infty(0, T; V)$. Assim, devido as estimativas (1.7), (1.8) e (1.11) e devido ao teorema 1.1.2 existe uma subsequência de u^m , que continuamos a representar por u^m , tal que

$$u^m \rightharpoonup u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; V) \quad (1.12)$$

$$u_t^m \rightharpoonup u_t \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; V) \quad (1.13)$$

$$u_{tt}^m \rightharpoonup u_{tt} \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \quad (1.14)$$

$$u_t^m(1, t) \rightharpoonup \mathcal{X} \text{ fraco em } L^2(0, T). \quad (1.15)$$

Além disso, segue do lema 1.1.1 que $u \in C(0, T; V)$ e $u_t \in C(0, T; L^2(0, 1))$.

Passagem ao limite

Nosso problema aproximado é:

$$(u_{tt}^m, v) + \alpha^2((u^m, v)) + \alpha^2\tau\{u_t^m(1, t) + k(0)u^m(1, t) - k(t)u_0^m(1) + k' * u^m(1, t)\}v(1) = 0$$

$$\forall v \in V_m.$$

Multiplicando a equação acima por $\theta \in \mathfrak{D}(0, T)$ e integrando de 0 a T , temos:

$$\int_0^T (u_{tt}^m, v)\theta dt + \alpha^2 \int_0^T ((u^m, v))\theta dt + \alpha^2\tau \int_0^T \{u_t^m(1, t) + k(0)u^m(1, t) - k(t)u_0^m(1) + k' * u^m(1, t)\}v(1)\theta dt = 0.$$

Com isso, de (1.12) e (1.14) segue que

$$\int_0^T ((u^m, v))\theta dt \rightarrow \int_0^T ((u, v))\theta dt \text{ pois, } v\theta \in L^1(0, T; V')$$

$$\int_0^T (u_{tt}^m, v)\theta dt \rightarrow \int_0^T (u_{tt}, v)\theta dt \text{ pois, } v\theta \in L^1(0, T; L^2(0, 1)).$$

Como $L^\infty(0, T; V) \hookrightarrow L^2(0, T; V)$, então segue que

$$(u^m) \text{ é limitada em } L^2(0, T; V).$$

Do mesmo modo concluímos que

$$(u_t^m) \text{ é limitada em } L^2(0, T; V).$$

Usando o lema de Aubin-Lions vem que

$$u^m \rightarrow u \text{ forte em } L^2(0, T; V)$$

isto é,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T |u^m(x, t) - u(x, t)|_V^2 dt = 0.$$

E devido a continuidade da imersão de $H^1(0, 1)$ em $C[0, 1]$, vem que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T |u^m(1, t) - u(1, t)|^2 dt = 0.$$

Ou seja, $u^m(1, t) \rightarrow u(1, t)$ forte em $L^2(0, T)$.

Dessa forma, temos que $u(1, t)$ define uma distribuição em $\mathcal{D}(0, T)$ dada por:

$$\langle u(1, t), \theta \rangle = \int_0^T u(1, t)\theta(t) dt.$$

Portanto, podemos pensar em derivada no sentido das distribuições da seguinte forma:

$$\left\langle \frac{d}{dt} u^m(1, t), \theta \right\rangle = - \left\langle u^m(1, t), \frac{d}{dt} \theta \right\rangle \rightarrow - \left\langle u(1, t), \frac{d}{dt} \theta \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} u(1, t), \theta \right\rangle.$$

Logo, $u_t^m(1, t) \rightarrow u_t(1, t)$ em $\mathcal{D}'(0, T)$. Porém, temos que $u_t^m(1, t) \rightharpoonup \mathcal{X}$ em $L^2(0, T)$ o que implica $u_t^m(1, t) \rightarrow \mathcal{X}$ em $\mathcal{D}'(0, T)$ e concluímos pela unicidade do limite que $\mathcal{X} = u_t(1, t)$.

Passando o limite quando $m \rightarrow \infty$, temos:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \{u_t^m(1, t) + k(0)u^m(1, t) - k(t)u_0^m(1) + k' * u^m(1, t)\}v(1)\theta dt \rightarrow \\ & \int_0^T \{u_t(1, t) + k(0)u(1, t) - k(t)u_0(1) + k' * u(1, t)\}v(1)\theta dt \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T \{(u_{tt}, v)dt + \alpha^2((u, v))dt + \alpha^2\tau[u_t(1, t) + k(0)u(1, t) - k(t)u_0(1) + k' * u(1, t)]v(1)\}\theta dt = 0$$

para todo $v \in V_m$ e $\theta \in \mathfrak{D}(0, T)$. (1.16)

Como V_m é denso em $V \cap H^2(0, 1)$ a igualdade acima é válida para todo $v \in V \cap H^2(0, 1)$.

Considerando $v \in \mathfrak{D}(0, 1) \subset V \cap H^2(0, 1)$, resulta que

$$\int_0^T \int_0^1 u_{tt}v\theta dt dx + \int_0^T \int_0^1 \alpha^2 u_x v_x \theta dt dx = 0.$$

Com isso segue que

$$\int_Q (u_{tt} - \alpha^2 u_{xx})v\theta dx dt = 0 \quad \forall v \in \mathfrak{D}(0, 1), \quad \theta \in \mathfrak{D}(0, T), \quad \text{onde } Q = (0, 1) \times (0, T).$$

No entanto, o conjunto das combinações lineares $v\theta$ é total em $\mathfrak{D}(Q)$ com isso segue que a igualdade acima é válida para toda $\psi \in \mathfrak{D}(Q)$, isto é,

$$\int_Q (u_{tt} - \alpha^2 u_{xx})\psi dx dt = 0 \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(Q).$$

Em termos de distribuições, temos:

$$\langle u_{tt} - \alpha^2 u_{xx}, \psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(Q).$$

Como $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ segue que $u_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$. Assim, temos que

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0 \quad \text{q.s. em } Q. \quad (1.17)$$

Multiplicando (1.17) por $v\theta$ com $v \in V \cap H^2(0, 1)$ e $\theta \in \mathfrak{D}(0, T)$ e integrando em Q obtemos

$$\int_0^T (u_{tt}, v)\theta dt + \alpha^2 \int_0^T ((u, v))\theta dt - \alpha^2 \int_0^T u_x(1, t)v(1)\theta dt = 0. \quad (1.18)$$

Comparando (1.16) e (1.18) temos

$$\int_0^T \{\alpha^2 u_x(1, t) + \alpha^2 \tau[u_t(1, t) + k * u_t(1, t)]\}v(1)\theta dt = 0 \quad \forall \theta \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Pelo lema de Du Bois Raymond, temos

$$\{\alpha^2 u_x(1, t) + \alpha^2 \tau[u_t(1, t) + k * u_t(1, t)]\}v(1) = 0 \quad \forall v \in V \cap H^2(0, 1).$$

Agora, tomando $v(x) = x$ vem que

$$\alpha^2 u_x(1, t) = -\alpha^2 \tau [u_t(1, t) + k * u_t(1, t)].$$

Ou seja,

$$u_x(1, t) = -\tau [u_t(1, t) + k * u_t(1, t)].$$

Usando o operador inverso de Volterra resulta que

$$u(1, t) + \int_0^t g(t-s) u_x(1, s) ds = 0, \quad \forall t \in (0, T).$$

Regularidade da solução

Da equação (1.17) vem que

$$\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}.$$

Mas, como $u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ então $\alpha^2 u_{xx} \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$, isto é, $u_{xx} \in L^2(0, 1)$ para todo $t \in (0, T)$. Dessa forma concluímos que

$$u \in C(0, T; V \cap H^2(0, 1)).$$

Sendo $u_t \in C(0, T; L^2(0, 1))$ e de (1.9) temos que

$$u_{x,t}^m \rightharpoonup u_{x,t} \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)).$$

Com isso, temos que

$$u_t \in C(0, T; V).$$

Daí, por regularidade elíptica concluímos que

$$u \in C([0, T] : V \cap H^2(0, 1)) \cap C^1([0, T] : V).$$

Condições iniciais

Vamos mostrar que $u(0) = u_0$.

Pelo fato de $u \in C(0, T; V \cap H^2(0, 1))$ faz sentido calcular $u(0)$.

De (1.13) temos que para $v \in V$ e $\theta \in C(0, T; \mathbb{R})$ com $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$:

$$\int_0^T (u_t^m, v) \theta dt \rightarrow \int_0^T (u_t, v) \theta dt,$$

ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \int_0^T (u_t^m, v) \theta dt - \int_0^T (u_t, v) \theta dt \right| = 0.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| (u^m(0), v) + \int_0^T (u^m, v) \theta' dt - (u(0), v) - \int_0^T (u, v) \theta' dt \right| = 0.$$

Portanto, temos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| |(u_0^m, v) - (u(0), v)| - \left| \int_0^T (u^m, v) \theta' dt - \int_0^T (u, v) \theta' dt \right| \right| = 0.$$

Usando (1.12), temos que:

$$(u_0^m, v) \rightarrow (u(0), v).$$

Como u_0^m converge forte para u_0 em $V \cap H^2(0, 1)$, também converge forte em V . Portanto, converge fraco em V . Com isso, temos que

$$(u_0^m, v) \rightarrow (u_0, v).$$

Pela unicidade dos limites, concluimos que

$$(u(0), v) = (u_0, v) \quad \forall v \in V,$$

e, portanto:

$$u(0) = u_0.$$

Agora, vamos mostrar que

$$u_t(0) = u_1.$$

De (1.14) tem-se que, $\forall v \in L^2(0, 1)$ e $\theta \in C(0, T; \mathbb{R})$ com $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$:

$$\int_0^T (u_{tt}^m, v) \theta dt \rightarrow \int_0^T (u_{tt}, v) \theta dt.$$

Integrando por partes, e do fato de $u_t \in C(0, T; V)$, segue que

$$-(u_t^m(0), v) - \int_0^T (u_t^m, v) \theta' dt \longrightarrow -(u_t(0), v) - \int_0^T (u_t, v) \theta' dt. \quad (1.19)$$

De (1.13) e usando raciocínio análogo ao anterior, concluímos que

$$(u_t^m(0), v) \rightarrow (u_t(0), v), \quad \forall v \in L^2(0, 1).$$

Como $u_t^m(0)$ converge forte para u_1 em V , também converge forte em $L^2(0, 1)$. Portanto, converge fraco em $L^2(0, 1)$. Com isso temos que

$$(u_t^m(0), v) \rightarrow (u_1, v) \quad \forall v \in L^2(0, 1).$$

Da unicidade dos limites segue que

$$(u_t(0), v) = (u_1, v). \quad \forall v \in L^2(0, 1),$$

e portanto:

$$u_t(0) = u_1.$$

1.3 Unicidade

Considere $u, v \in C(0, T; V \cap H^2(0, 1))$ soluções do problema (1) – (3). Com isso, a função $w = u - v$ é solução do seguinte problema

$$w_{tt} - \alpha^2 w_{xx} = 0 \quad \text{em } (0, 1) \times (0, \infty) \quad (1.20)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(1, t) + \int_0^t g(t-s)w_x(1, s)ds = 0, \quad \forall t > 0 \quad (1.21)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w_t(x, 0) = 0 \quad \text{em } (0, 1). \quad (1.22)$$

Multiplicando a equação (1.20) por w_t e integrando em $(0, 1)$ e usando o fato de que

$$w_x(1, t) = -\tau\{w_t(1, t) + k(0)w(1, t) - k(t)w_0(1) + k' * w(1, t)\}, \quad \text{onde } w_0(1) = 0$$

obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_t|_{L^2}^2 + \alpha^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w_x|_{L^2}^2 + \alpha^2 \tau \{|w_t(1, t)|^2 + k(0)w(1, t)w_t(1, t) + k' * w(1, t)w_t(1, t)\} = 0.$$

Usando o lema 1.1.2 no termo $k' * w(1, t)w_t(1, t)$ dessa última equação e levando em conta que

$$-\alpha^2 \tau |w_t(1, t)|^2 \leq 0, \quad \frac{\alpha^2 \tau}{2} k'(t) |w(1, t)|^2 \leq 0 \quad e \quad -\frac{\alpha^2 \tau}{2} k'' \square w(1, t) \leq 0$$

obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |w_t|_{L^2}^2 + \alpha^2 |w_x|_{L^2}^2 + \alpha^2 \tau(k(t)) |w(1, t)|^2 - k' \square w(1, t) \} \leq 0.$$

Multiplicando por 2 essa última desigualdade e integrando de 0 a t , obtemos

$$|w_t|_{L^2}^2 + \alpha^2 |w_x|_{L^2}^2 + \alpha^2 \tau(k(t)) |w(1, t)|^2 - k' \square w(1, t) \leq |w_t(0)|_{L^2}^2 + \alpha^2 |w_x(0)|_{L^2}^2 + \alpha^2 \tau k(0) |w_0(1)|^2.$$

Porém, das condições iniciais e da condição de fronteira, temos

$$|w_t(0)|_{L^2}^2 = |w_x(0)|_{L^2}^2 = 0 \quad e \quad |w_0(1)|^2 = 0.$$

Daí, segue a seguinte igualdade

$$|w_t|_{L^2}^2 + \alpha^2 |w_x|_{L^2}^2 + \alpha^2 \tau(k(t)) |w(1, t)|^2 - k' \square w(1, t) = 0.$$

Dessa última igualdade, concluimos que

$$|w_t|_{L^2}^2 = 0 \quad e \quad |w_x|_{L^2}^2 = 0.$$

Logo, temos que $0 = |w_x|_{L^2}^2 = \int_0^1 |w_x|^2 = \|w\|_V$. Portanto $w = 0$ e daí segue que

$$u = v.$$

Capítulo 2

Alguns Fundamentos Teóricos da Análise Numérica

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos fundamentais que são necessários para um bom entendimento da solução numérica do problema proposto neste trabalho. Expomos inicialmente, um breve comentário histórico sobre o porquê do surgimento e aplicação de métodos numéricos para solucionar os problemas envolvendo equações diferenciais. Apresentamos em seguida, alguns aspectos sobre as equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem, onde adotamos uma classificação para essas EDPs que na maioria das vezes ajuda na análise teórica do problema.

Vemos ainda aqui, os principais tipos de erros que podem ocorrer durante a resolução numérica de um determinado problema, bem como, os fundamentos do método numérico que usamos para resolver nosso problema, conhecido como método das diferenças finitas, o qual se baseia na substituição das derivadas por fórmulas de diferenças finitas.

2.1 Equações Diferenciais e Métodos Numéricos

2.1.1 Um Breve Panorama Histórico

As equações diferenciais começaram a surgir por volta da segunda metade do século XVII, onde elas representavam descrições de problemas físicos, na forma analítica. A procura de soluções aproximadas para essas equações através de procedimentos numéricos passou a ser muito utilizada, à medida que os problemas tornaram-se com um elevado grau de complexidade. Porém, com a evolução constante dos computadores nas últimas décadas, foi possível a abordagem por métodos numéricos de uma gama considerável de problemas tidos como extremamente complexos, ou até mesmo, de impossível resolução por via de procedimentos analíticos.

Uma grande variedade dos problemas ligados à engenharia, depende de resultados que obtemos através da solução de uma equação diferencial. Até a primeira metade do século XX, a busca por soluções analíticas dessas equações eram muito intensas, utilizando ferramentas matemáticas como transformadas e séries de potências. Apesar de muitos problemas terem sido solucionados através dessas ferramentas, ainda sim, a maior parte deles resolvidos correspondiam a problemas simples, no entanto, muitos problemas de engenharia normalmente envolvem geometria e condições de contorno complexas. É claro que, o ideal seria que pudéssemos resolver todos os problemas através de métodos analíticos, pois essas soluções são dadas de forma fechada válida para todos os pontos do domínio considerado.

Devido a todas essas dificuldades com relação à solução analítica, a partir da segunda metade do século XX, esse panorama foi sendo modificado. Ou seja, deixamos de buscar as soluções puramente analíticas para esses problemas e procuramos utilizar os métodos numéricos na tentativa de se conseguir soluções aproximadas. Muitos dos métodos numéricos já eram conhecidos há bastante tempo; antigamente quando se tentava resolver um problema, mesmo que fosse simples, através de métodos numéricos, esse procedimento demandava um enorme tempo em cálculos e às vezes necessitava de uma equipe de pessoas, mas essa dificuldade foi superada e a utilização desses métodos passou a ser mais frequente na resolução dos problemas devido ao grande avanço tecnológico dos computadores. Diante desse quadro de desenvolvimento tecnológico, atualmente são os métodos numéricos que respondem pela maior parte dos problemas complexos que surgem principalmente na engenharia. Os métodos numéricos associados à ferramenta computacional e às linguagens de programação adequadas, permitem a análise e solução de problemas com um grande número de variáveis de modo eficiente e rápido e com um baixo custo computacional.

2.2 Aspectos Teóricos Sobre Equações Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem

Geralmente, quando estudamos um determinado fenômeno físico é comum tentar obtermos uma expressão ou equação que descreva matematicamente esse fenômeno. Em muitas dessas situações, encontramos como modelo matemático uma equação diferencial parcial,

que representa o fenômeno estudado. Atualmente, podemos observar essas equações diferenciais presentes em muitas áreas, tais como biologia, economia, ciências humanas, educação ambiental, e outras, realizando diversos estudos em preservação ambiental, distribuição de temperatura em um meio, nos estudos de aerodinâmica e ecossistemas. Por se tratar nosso problema proposto de uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, fazemos um rápido comentário sobre esse tipo de equação o qual pode ser encontrado em Cunha [7].

Consideremos a seguinte EDP de segunda ordem com duas variáveis independentes, às quais denotamos por x e y ou x e t .

$$a(\cdot)u_{xx} + 2b(\cdot)u_{xy} + c(\cdot)u_{yy} + d(\cdot)u_x + e(\cdot)u_y + f(\cdot)u + g(\cdot) = 0$$

a equação acima é linear se $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $c(\cdot)$ são constantes ou funções somente de x e y .

Os coeficientes $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ e $c(\cdot)$ o qual denotamos simplesmente por a , b e c , devem satisfazer a seguinte condição

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Considerando a forma geral da EDP linear de segunda ordem dada acima e os coeficientes a , b e c , podemos classificar a EDP nos seguintes tipos

$$b^2 - ac > 0 \quad a \quad EDP \quad \text{é} \quad \textit{hiperbólica}$$

$$b^2 - ac = 0 \quad a \quad EDP \quad \text{é} \quad \textit{parabólica}$$

$$b^2 - ac < 0 \quad a \quad EDP \quad \text{é} \quad \textit{elíptica}.$$

A classificação da EDP nesses três tipos tem uma razão prática bem interessante. Pois, quando acoplamos um dos tipos de equações acima com condições iniciais e de fronteira(contorno), o método aplicado para resolvê-las poderá depender do tipo de EDP considerada. Cada um dos tipos de EDP mencionados anteriormente modelam fenômenos disintos. A hiperbólica representa o modelo de propagação de ondas em um meio elástico; a parabólica é o modelo da difusão de calor num corpo e a elíptica é o modelo de diversas aplicações como: distribuições de tensões em placas carregadas, distribuição de temperatura no caso estacionário e potencial gerado por cargas elétricas.

A equação $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ é do tipo elíptica e é chamada também de equação de Poisson. Caso $f(x, y) = 0$ ela é chamada de equação de Laplace.

Considerando a função $a(x, t) > 0$ e $t > 0$, onde t representa a variável temporal, a equação $u_t - a(x, t)u_{xx} = f(x, t)$ é do tipo parabólica e é chamada de equação do calor unidimensional na variável espacial x .

A equação $u_{tt} - a(x, t)u_{xx} = f(x, t)$, com $a(x, t) > 0$ e $t > 0$ representa uma equação do tipo hiperbólica, e é conhecida como a equação da onda.

Em 1902, o matemático Hadamard introduziu o conceito de problema bem-posto: O problema é dito bem posto, quando possui uma solução única e pequenas perturbações nos dados iniciais provocam pequenas variações na solução (estabilidade). Para que possamos definir um problema bem-posto para os três tipos de equações anteriores, é necessário acoplar algumas condições adicionais, como condições de contorno e condições iniciais.

Para a equação de Poisson podemos especificar o valor da função u no contorno de uma região Ω onde é definida essa equação

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \quad (\text{condição de contorno}) \\ \Gamma &= \text{fronteira da região } \Omega. \end{aligned}$$

Já para as equações do calor e da onda, além das condições de contorno devemos impor condições iniciais para a variável temporal, que equivale a fixar o estado inicial do processo em $t=0$. Na equação da onda temos de tomar duas condições iniciais, pois aparece a derivada de segunda ordem com relação à variável temporal. A seguir temos as equações do calor e da onda acopladas com condições de contorno e iniciais

$$\begin{aligned} u_t - a(x, t)u_{xx} &= f(x, t), \quad 0 < x < l \quad \text{e} \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(l, t) &= 0, \quad t > 0 \quad (\text{condição de contorno}) \\ u(x, 0) &= u^0(x), \quad 0 < x < l \quad (\text{condição inicial}). \end{aligned}$$

A situação acima representa o fluxo de calor ao longo de uma barra de comprimento l , onde as condições de contorno indicam a distribuição de temperatura nas extremidades da

barra, e a condição inicial indica a temperatura no instante em que o processo é observado ($t=0$).

$$\begin{aligned} u_{tt} - a(x, t)u_{xx} &= f(x, t), \quad 0 < x < l \quad e \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u^0(x) \quad e \quad u_t(x, 0) = v^0(x), \quad 0 < x < l \quad (\text{condições iniciais}) \\ u(0, t) &= 0 \quad e \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0 \quad (\text{condições de contorno}). \end{aligned}$$

O modelo representado acima indica as vibrações verticais de uma corda elástica de comprimento l com as extremidades fixas. É importante observar que nos três modelos acima, as condições de contorno são dadas pelo valor da função u nos pontos da fronteira. Condições de contorno como essas são ditas condições de contorno de Dirichlet.

2.3 Expansões de Taylor

Nesta seção é feita uma breve explanação teórica sobre o desenvolvimento em Taylor de uma função diferenciável. Tal explanação foi baseada em Larson [12] e Leite [13].

2.3.1 Aproximação Polinomial de uma Função Diferenciável

Consideremos uma função f definida no domínio D_f e derivável no ponto $x_0 \in D_f$. Vamos encontrar uma função polinomial P_1 que aproxima f , de modo que f e P_1 tenham o mesmo valor em x_0 , e ainda que, a inclinação da função polinomial seja igual à inclinação do gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, isto é,

$$P_1(x_0) = f(x_0) \quad e \quad P_1'(x_0) = f'(x_0).$$

Com essas duas condições podemos obter a seguinte aproximação linear de f dada por

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Geometricamente, P_1 representa a reta que tangencia a curva associada à função f no ponto $(x_0, f(x_0))$. Dizemos nesse caso que o polinômio P_1 que aproxima f está expandido em torno de x_0 ou centrado em x_0 . Para todo $x \in D_f$, denotemos por $R_1(x)$ o resto ou erro de aproximação de $f(x)$ por $P_1(x)$, o qual é dado por

$$R_1(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Para $x \neq x_0$, temos

$$\frac{R_1(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Com isso, o resto $R_1(x)$ tende a zero mais rapidamente que $x - x_0$ quando $x \rightarrow x_0$.

Diante desse fato, o polinômio P_1 é uma aproximação de f em torno de x_0 e é chamado de polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de x_0 .

Se considerarmos que $f''(x_0)$ existe, podemos aproximar f por um polinômio P_2 tal que

$$P_2(x_0) = f(x_0), \quad P_2'(x_0) = f'(x_0) \quad e \quad P_2''(x_0) = f''(x_0).$$

Devemos procurar P_2 da seguinte forma

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2.$$

Sendo $P_2(x_0) = a_0$, então $a_0 = f(x_0)$.

Observe que

$$P_2'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) \quad e \quad P_2''(x) = 2a_2.$$

Portanto,

$$P_2'(x_0) = a_1 \quad e \quad P_2''(x_0) = 2a_2.$$

Daí, temos que

$$a_1 = f'(x_0) \quad e \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

E o polinômio P_2 é

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

O polinômio P_2 denominamos polinômio de Taylor de ordem 2, de f em torno de x_0 . Observe que nesse caso, a reta tangente associada a P_2 coincide com a reta tangente

associada a f , no ponto $(x_0, P_2(x_0)) = (x_0, f(x_0))$. Como $P_2''(x_0) = f''(x_0)$, e se ocorrer que $f''(x_0) \neq 0$, então para x próximo de x_0 , os gráficos do polinômio P_2 e da função f apresentam concavidades com mesmo sentido. Com isso, é de se esperar que P_2 apresente uma aproximação melhor que P_1 para a função f nos pontos próximos de x_0 .

Para todo $x \in D_f$ o erro da aproximação de f por P_2 é dado por

$$R_2(x) = f(x) - P_2(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Para todo $x \neq x_0$ e do fato de que f é contínua em x_0 , temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = \frac{0}{0}.$$

Pela regra de L'Hospital segue que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - f''(x_0) \right] \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x)}{(x - x_0)^2} &= \frac{1}{2} [f''(x_0) - f''(x_0)] = 0. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $R_2(x) \rightarrow 0$ mais rapidamente que $(x - x_0)^2$ quando $x \rightarrow x_0$.

2.3.2 Fórmula de Taylor

Definição 2.3.1. (*Polinômio de Taylor de ordem n*). Seja f uma função derivável até a ordem n no intervalo $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$. O polinômio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é chamado de polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de x_0 .

Quando $x_0=0$, o polinômio de Taylor de ordem n , é também chamado de polinômio de Maclaurin de ordem n de f .

Teorema 2.3.1. (*Fórmula de Taylor com resto de Lagrange*). Se uma função f é derivável até a ordem $n+1$ em um intervalo I contendo x_0 , então, para cada $x \in I$, existe um ξ entre x e x_0 , tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$\text{onde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Demonstração: Para encontrar $R_n(x)$, fixamos x em I ($x \neq x_0$) e escrevemos

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

onde $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de $f(x)$.

Consideremos g uma função de t definida por

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \dots - \frac{f^n(t)}{n!}(x-t)^n - R_n(x) \frac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}$$

para todo t entre x_0 e x .

Observe que

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + (n+1)R_n(x) \frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Para x fixo, temos

$$g(x_0) = f(x) - [P_n(x) + R_n(x)] = f(x) - f(x) = 0$$

e

$$g(x) = f(x) - f(x) - 0 - \dots - 0 = f(x) - f(x) = 0.$$

Portanto, g satisfaz as condições do teorema de Rolle, logo existe um número ξ entre x_0 e x tal que $g'(\xi)=0$. Substituindo t por ξ na equação para $g'(t)$ e depois resolvendo para $R_n(x)$, obtemos

$$g'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + (n+1)R_n(x) \frac{(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}} = 0$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Finalmente, como $g(x_0) = 0$, temos

$$0 = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - R_n(x)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x).$$

2.4 Erros nas Aproximações Numéricas

É interessante observar que na resolução de um problema físico utilizando algum método numérico dificilmente chegamos a um resultado exato, pois alguns erros podem ocorrer durante o percurso para se obter a solução do problema. Esses erros podem se originar no próprio modelo matemático que representa o fenômeno físico ou surgirem nas operações numéricas efetuadas pelos computadores. Diante disso, faremos uma breve explanação sobre os possíveis erros que geralmente ocorrem durante a solução numérica desses problemas.

Ilustramos de forma simplificada um processo de determinação da solução numérica de um problema físico.

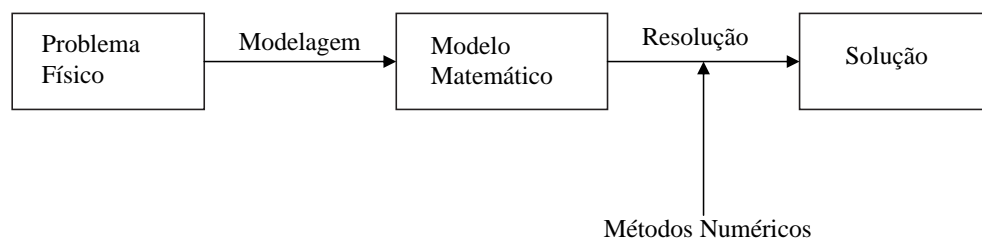


Figura 2.1 *Esquema Gráfico Simplificado de um Processo de Determinação de Solução Numérica.*

Definição 2.4.1. (Número aproximado). Dizemos que um número \bar{x} é um número aproximado ou uma aproximação do número exato x caso exista uma pequena diferença entre eles. Se $\bar{x} < x$ dizemos que \bar{x} é um valor aproximado por falta do valor exato x ; Se $\bar{x} > x$, \bar{x} é um valor aproximado por excesso. Sendo \bar{x} um valor aproximado do número x , então denotamos $\bar{x} \approx x$.

Definição 2.4.2. (Erro). Sendo \bar{x} um valor aproximado do número x . Definimos erro do número \bar{x} , o qual indicamos por $e_{\bar{x}}$, a diferença entre o número exato x e o correspondente número aproximado \bar{x} .

$$e_{\bar{x}} = x - \bar{x}.$$

2.4.1 Principais Tipos de Erro

- (a) **Erros inerentes ao modelo matemático.** É raro as formulações matemáticas apresentarem um modelo fiel do fenômeno físico real. Geralmente esses modelos são idealizados, pois na análise dos fenômenos da natureza somos muitas das vezes, forçados a considerar certas condições que simplificam o problema para que possamos tratá-lo de modo a se obter tal modelo.
- (b) **Erros inerentes aos dados.** Além das equações, os modelos matemáticos apresentam também dados e parâmetros obtidos geralmente de equipamentos de medição, e portanto, o erro nos dados ficam sujeitos à precisão desses equipamentos.
- (c) **Erros de truncamento.** São erros originados de processos que deveriam ser infinitos ou muito grandes para a obtenção de um valor, e que por razões práticas, são truncados. Como se sabe, um processo infinito não se conclui, e com isso, somos forçados a adotar uma aproximação que se obtém após a execução de um número finito de passos.
- (d) **Erros de arredondamento.** Esse tipo de erro surge quando trabalhamos com máquinas digitais para representar os números reais. O erro ocorre devido a aritmética utilizada pela máquina representar apenas números com um número finito de dígitos, fazendo com que os cálculos sejam executados com valores aproximados dos números verdadeiros envolvidos. Esse tipo de erro pode ser melhor entendido quando observamos de que forma os números são tratados pelos computadores. Os cálculos que nós realizamos em nosso cotidiano são feitos utilizando o sistema de numeração decimal, porém, nos computadores esses cálculos são efetuados com base nos impulsos elétricos que indicam dois estados: 0 ou 1, ou seja, os números são representados na base binária, já que na base 2 os únicos dígitos utilizados são 0 ou 1.

Um número inteiro N na base 10 pode ser escrito na forma polinomial com coeficientes de sua expansão binária da seguinte forma

$$N_{10} = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \dots + a_1 2^1 + a_0 2^0,$$

onde $a_n = 1$ e a_{n-1}, \dots, a_0 são 0 ou 1. Dessa forma, a representação binária de N será

$$N_{10} = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2.$$

Consideremos agora N um número real na base decimal cuja parte inteira e fracionária indicamos por p_i e p_f respectivamente, ou seja, $N = p_i + p_f$. A parte fracionária $p_f = N - p_i$ pode ser escrita como uma soma de frações binárias da forma

$$p_f = b_1 2^{-1} + b_2 2^{-2} + b_3 2^{-3} + \dots$$

onde os coeficientes $b_k, k=1,2,3, \dots$ são 0 ou 1. A representação binária do número real N é dada por

$$N = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 b_1 b_2 \dots)$$

onde a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 assumem os valores 0 ou 1 e são os coeficientes correspondentes da expansão binária da parte inteira p_i .

Geralmente, é utilizada a aritmética de ponto flutuante nos cálculos científicos realizados pelos computadores. A representação de um número x em ponto flutuante na base β , é definida da seguinte forma

$$x = \pm (\cdot d_1 d_2 \dots d_n) \times \beta^e$$

onde

β é a base em que a máquina opera

$(\cdot d_1 d_2 \dots d_n)$ é a mantissa

n é o número de dígitos da mantissa; $0 \leq d_j \leq (\beta - 1), j = 1, \dots, n, d_1 \neq 0$

e é o expoente, com $-M < e < M$ para algum $M > 0$.

Existem alguns números que tem representação finita na base decimal, mas possuem representação infinita no sistema binário. Com isso, um computador que opera no sistema binário irá armazenar uma aproximação desses números, já que a máquina possui uma quantidade fixa de posições para guardar os dígitos da mantissa. Portanto, devido a essas limitações no expoente e no número de dígitos da mantissa surgem então os erros de arredondamento.

Definição 2.4.3. (*Erro absoluto*). *Seja \bar{x} um valor aproximado do número exato x . Definimos erro absoluto do número aproximado \bar{x} , o qual indicamos por $EA_{\bar{x}}$, o valor absoluto da diferença entre x e \bar{x} .*

$$EA_{\bar{x}} = |x - \bar{x}|.$$

Na prática o valor exato nem sempre é conhecido, e conseqüentemente o erro $EA_{\bar{x}}$ também não será conhecido. Para resolver esse problema podemos calcular uma cota superior para o erro absoluto. Com isso, mesmo não conhecendo o valor exato podemos determinar entre que valores conhecidos ele está situado. Dizemos que um número $\epsilon > 0$ é uma cota superior do erro absoluto $EA_{\bar{x}}$, se ocorrer

$$EA_{\bar{x}} \leq \epsilon.$$

Note que do fato de $EA_{\bar{x}} = |x - \bar{x}|$, temos

$$|x - \bar{x}| \leq \epsilon \iff \bar{x} - \epsilon \leq x \leq \bar{x} + \epsilon$$

onde $\bar{x} - \epsilon$ e $\bar{x} + \epsilon$ são valores conhecidos.

Definição 2.4.4. (*Erro relativo*). *Seja \bar{x} um valor aproximado do número exato x . Definimos erro relativo do número aproximado \bar{x} , o qual denotamos por $ER_{\bar{x}}$, o módulo do quociente entre o erro absoluto e o valor aproximado \bar{x} .*

$$ER_{\bar{x}} = \left| \frac{EA_{\bar{x}}}{\bar{x}} \right| = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}.$$

Note mais uma vez que nem sempre também podemos calcular o erro relativo, pois o valor exato x nem sempre é conhecido. Nesse caso, podemos tomar como uma cota superior para o erro relativo o valor $\frac{\epsilon}{|\bar{x}|}$, com isso temos

$$ER_{\bar{x}} \leq \frac{\epsilon}{|\bar{x}|}, \quad \text{com } EA_{\bar{x}} \leq \epsilon.$$

2.5 Método das Diferenças Finitas

O conteúdo apresentado nesta seção teve como referência as informações encontradas em Burden [4], Cunha [7] e Lapidus [11].

2.5.1 Discretização

A solução analítica de uma equação diferencial parcial é dada por expressões analíticas que satisfazem essa equação para todos os pontos do domínio contínuo dado. Ao passo que, a solução numérica fornece soluções apenas em um número finito de pontos desse domínio.

O processo de convertermos o domínio contínuo constituído de infinitos pontos em um domínio discreto com um número finitos de pontos é chamado de discretização. Na verdade, a idéia básica de qualquer método numérico é justamente o processo de discretização que faz com que reduzamos o nosso problema físico contínuo a um problema físico discreto com um número finito de incógnitas a ser determinado. Em geral, denominamos o domínio discretizado simplesmente de malha e os pontos que constituem a malha são chamados de nós dessa malha.

Esse processo de discretização é indispensável quando se procura resolver um problema na forma numérica, pois muitos dos cálculos a serem realizados para encontrar essas soluções numéricas dependem de um recurso computacional, e como sabemos, os computadores interpretam os dados de forma discreta e não na forma contínua.

A figura (2.2) a seguir ilustra um exemplo hipotético de um domínio contínuo que sofreu um processo de discretização.

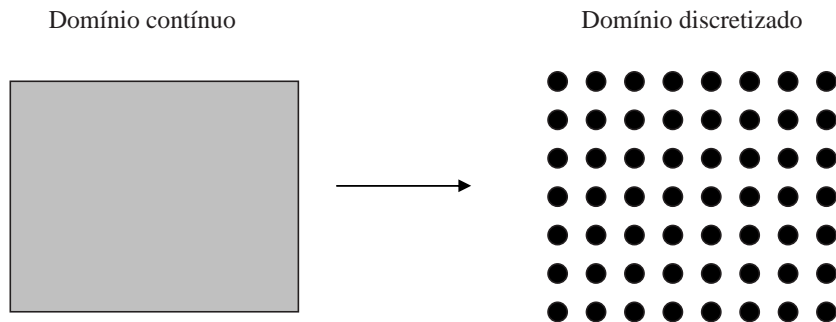


Figura 2.2 Exemplo de um Processo de Discretização.

2.5.2 Fundamentos do Método de Diferenças Finitas

Por se tratar de um método numérico, a idéia básica e fundamental do método de diferenças finitas é a discretização do contínuo, ou seja, devemos discretizar o domínio onde a equação diferencial é definida obtendo dessa forma uma malha. A malha representa o local onde buscamos a solução do problema a ser resolvido utilizando esse método, ou melhor dizendo, a solução é encontrada apenas para os pontos discretos da malha.

No método de diferenças finitas, substituímos as derivadas presentes na equação diferencial por fórmulas de diferenças discretas que representam as aproximações das derivadas que estão na equação diferencial, obtendo com isso a discretização das derivadas contínuas. Essas fórmulas para discretização das derivadas são obtidas através do desenvolvimento em expansão de Taylor de uma função. Após a discretização de cada termo da equação diferencial, temos a versão discretizada da equação original que é definida apenas nos pontos nodais da malha, e para cada um desses pontos da malha temos uma equação, constituindo na maioria das vezes um sistema de equações cujas incógnitas são os valores da função nos pontos da malha.

Geralmente nos problemas onde é aplicado o método de diferenças finitas é usada uma malha uniforme, embora malhas irregulares possam ser usadas também. Na malha uni-

forme os espaçamentos entre os pontos, o qual é chamado de passo da malha, devem ser constantes, enquanto numa malha irregular os espaçamentos entre os pontos variam.

Para uma região unidimensional $[a, b]$ podemos gerar uma malha com $n + 1$ pontos de passo h , com $h = (b - a)/n$ dada por

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

A figura (2.3) a seguir ilustra a malha $x_i = a + ih$.

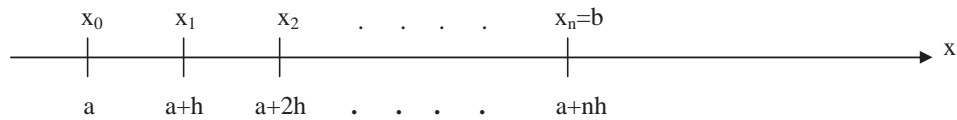


Figura 2.3 *Malha Unidimensional.*

Numa região bidimensional $[a, b] \times [c, d]$ podemos também obter uma malha com $n + 1$ pontos na direção do eixo x , e $m + 1$ pontos na direção do eixo y , sendo h e k o espaçamento entre os pontos na direção x e y respectivamente, com $h = (b - a)/n$ e $k = (d - c)/m$. Os pontos dessa malha são dados pelos pares (x_i, y_j) , tais que

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

e

$$y_j = c + jk, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

A figura (2.4) a seguir exemplifica uma malha desse tipo.

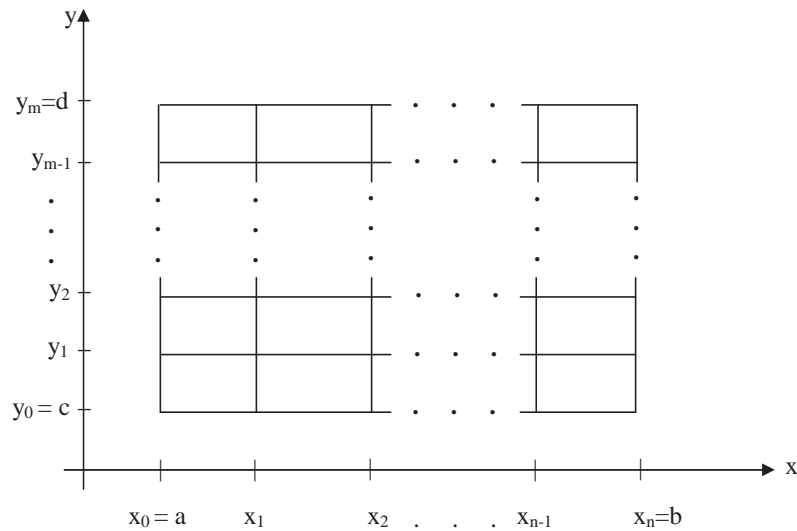


Figura 2.4 *Malha Bidimensional.*

Na maior parte dos problemas onde é utilizado o método de diferenças finitas é conhecido o valor da solução no contorno (fronteira) da região, e isso faz com que determinemos as soluções apenas nos pontos interiores da malha.

2.5.3 Notações Usuais em Diferenças Finitas

Vamos representar primeiramente por $u(x)$ a função incógnita de uma equação diferencial definida em um domínio unidimensional. Nesse caso ao discretizarmos esse domínio obtemos uma malha unidimensional, a qual vamos supor que tenha passo Δx e indicamos por u_i o valor da aproximação da função u no ponto x_i da malha, ou seja,

$$u_i \approx u(x_i).$$

Temos ainda que,

$$u(x_i + \Delta x) \approx u_{i+1}$$

$$u(x_i - \Delta x) \approx u_{i-1}.$$

Para a primeira e segunda derivadas da função u nos pontos x_i da malha temos as

seguintes notações

$$\frac{\partial u(x_i)}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \quad \text{ou} \quad (u_x)_i \quad (\text{derivada primeira})$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \quad \text{ou} \quad (u_{xx})_i \quad (\text{derivada segunda}).$$

Para as demais derivadas de outras ordens podemos seguir essa mesma notação, no entanto, quando se tratar de derivadas de ordem n com $n > 3$, é mais conveniente usarmos uma das notações

$$\frac{\partial^n u(x_i)}{\partial x^n} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right)_i.$$

Consideremos agora uma equação diferencial parcial definida em um domínio bidimensional contido no plano cartesiano, onde $u(x, y)$ representa a função incógnita. Vamos considerar uma discretização para esse domínio de forma que o espaçamento dos pontos na direção do eixo x seja igual a Δx e o espaçamento na direção do eixo y seja Δy , isso resulta em uma malha bidimensional constituída pelos pontos (x_i, y_j) , onde denotamos por $u_{i,j}$ o valor da aproximação da função u no ponto (x_i, y_j) dessa malha, isto é,

$$u_{i,j} \approx u(x_i, y_j).$$

Temos ainda as seguintes notações,

$$u_{i+1,j} \approx u(x_i + \Delta x, y_j) \quad u_{i-1,j} \approx u(x_i - \Delta x, y_j)$$

$$u_{i,j+1} \approx u(x_i, y_j + \Delta y) \quad u_{i,j-1} \approx u(x_i, y_j - \Delta y).$$

Nessa notação apresentada, quando tratamos de problemas de evolução é conveniente, indicarmos com um índice superior a variável temporal e com índices inferiores as variáveis espaciais.

Para uma equação diferencial definida em um domínio espacial unidimensional referente a um problema de evolução a função incógnita é indicada por $u(x, t)$, com x sendo a variável espacial e t a variável temporal. Com essas considerações, denotamos por u_i^j a

aproximação de u no ponto (x_i, t_j) , ou melhor dizendo, u_i^j representa a aproximação de u no ponto x_i e no nível de tempo t_j , isto é,

$$u_i^j \approx u(x_i, t_j)$$

onde i indica o índice da variável espacial e j o índice da variável temporal.

Para uma malha bidimensional formada pelos pontos (x_i, t_j) , onde Δx indica o espaçamento dos pontos que representam a variável espacial e Δt é o espaçamento dos pontos que representam a variável tempo, temos ainda as notações

$$u_{i+1}^j \approx u(x_i + \Delta x, t_j) \quad u_{i-1}^j \approx u(x_i - \Delta x, t_j)$$

$$u_i^{j+1} \approx u(x_i, t_j + \Delta t) \quad u_i^{j-1} \approx u(x_i, t_j - \Delta t).$$

Poderíamos continuar usando essa mesma notação em uma malha bidimensional na variável espacial para representar o valor de $u(x_i, y_j, t_k)$, ou seja,

$$u_{i,j}^k \approx u(x_i, y_j, t_k)$$

onde i, j indicam os índices das variáveis espaciais e k é o índice da variável temporal.

Em uma malha bidimensional segue notação semelhante a que foi adotada anteriormente para as derivadas numa malha unidimensional. Dessa forma, temos as seguintes notações para as derivadas parciais de primeira e segunda ordem da função $u(x, y)$ nos pontos (x_i, y_j) da malha

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \equiv (u_x)_{i,j} \quad ou \quad \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \equiv \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \equiv (u_{xx})_{i,j}$$

$$\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{i,j} \equiv (u_y)_{i,j} \quad ou \quad \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \equiv \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{i,j} \equiv (u_{yy})_{i,j}.$$

Para derivadas de ordem maior vale o mesmo comentário feito para a derivada numa malha unidimensional.

2.5.4 Fórmulas de Diferenças Finitas para Discretização das Derivadas

Vemos aqui, as principais fórmulas de diferenças finitas obtidas da expansão em Taylor que podem ser usadas na discretização das derivadas de primeira e segunda ordens tanto em uma malha unidimensional como em uma malha bidimensional.

Obtenção das Fórmulas para uma Malha Unidimensional

Seja um espaço unidimensional contido no eixo x , onde é feita uma discretização de modo a se obter uma malha com $n + 1$ pontos discretos dados por x_i , com $i = 0, 1, \dots, n$ e considere o espaçamento entre os pontos da malha igual a Δx . Seja $u(x)$ uma função derivável até ordem $n + 1$ em x , sua expansão em um polinômio de Taylor de grau n é dada por

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x^3} + \dots + \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n u(x)}{\partial x^n} + \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(\xi_1)}{\partial x^{n+1}}.$$

O termo $\frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(\xi_1)}{\partial x^{n+1}}$ representa o erro da aproximação de $u(x + \Delta x)$ pelos $n + 1$ primeiros termos da expansão de Taylor.

Se tomarmos $-\Delta x$ em vez de Δx no desenvolvimento acima, obtemos

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x^3} + \dots + \frac{(-\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n u(x)}{\partial x^n} + \frac{(-\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(\xi_2)}{\partial x^{n+1}}$$

onde $\frac{(-\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(\xi_2)}{\partial x^{n+1}}$ é o erro da aproximação de $u(x - \Delta x)$ pelos $n + 1$ primeiros termos da expansão em Taylor.

Se considerarmos que a função $u(x)$ tem derivadas até a ordem 2 e usarmos a expansão em Taylor para $u(x + \Delta x)$ temos

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u(\xi_1)}{\partial x^2}.$$

Resolvendo para $\frac{\partial u(x)}{\partial x}$ obtemos

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u(\xi_1)}{\partial x^2}.$$

Para os pontos x_i da malha, temos a seguinte fórmula de diferença progressiva para discretização da primeira derivada com erro de aproximação da ordem $\mathcal{O}(\Delta x)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

ou ainda,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \equiv u_x|_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x).$$

Outra fórmula de discretização para a primeira derivada pode ser obtida considerando também que $u(x)$ tem derivadas até a segunda ordem e usando o desenvolvimento em Taylor para $u(x - \Delta x)$

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u(\xi_2)}{\partial x^2}.$$

Explicitando $\frac{\partial u(x)}{\partial x}$, temos

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u(\xi_2)}{\partial x^2}.$$

Para os pontos x_i da malha, temos a fórmula de diferença regressiva

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \equiv u_x|_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x).$$

Uma aproximação com erro $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ pode ser obtida para a primeira derivada. Para isso, vamos considerar que $u(x)$ tem derivadas até ordem 3 e usar a expansão de Taylor para $u(x + \Delta x)$ e $u(x - \Delta x)$, ou seja

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(\xi_1)}{\partial x^3} \quad (2.1)$$

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(\xi_2)}{\partial x^3}. \quad (2.2)$$

Subtraindo (2.2) de (2.1) e explicitando $\frac{\partial u(x)}{\partial x}$, obtemos

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 u(\xi)}{\partial x^3}, \text{ com } \xi \in (x - \Delta x, x + \Delta x).$$

Temos portanto, a fórmula de diferença central para a primeira derivada nos pontos x_i da malha

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \equiv u_x|_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (2.3)$$

Uma outra fórmula de aproximação para a derivada primeira com erro $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ pode ser obtida considerando $u(x)$ derivável até terceira ordem e usando Taylor para $u(x + \Delta x)$ e $u(x + 2\Delta x)$

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u(\xi_1)}{\partial x^3} \quad (2.4)$$

$$u(x + 2\Delta x) = u(x) + 2\Delta x \frac{\partial u(x)}{\partial x} + 2\Delta x^2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + 8 \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 u(\xi_2)}{\partial x^3}. \quad (2.5)$$

Multiplicando (2.4) por 4 e depois subtraindo (2.5) obtemos a seguinte fórmula para a primeira derivada utilizando os pontos i , $i + 1$ e $i + 2$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \equiv (u_x)_i \approx \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2\Delta x} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

Agora vamos obter uma expressão para discretizarmos a derivada de segunda ordem.

Suponha $u(x)$ derivável até a quarta ordem, logo temos

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 u(\xi_1)}{\partial x^4}$$

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x \frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x)}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 u(\xi_2)}{\partial x^4}.$$

Somando as duas expressões acima, obtemos a fórmula de aproximação de diferença central para a segunda derivada nos pontos x_i da malha com aproximação $\mathcal{O}(\Delta x^2)$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \equiv (u_{xx})_i \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

As fórmulas obtidas anteriormente são as mais usadas nas discretizações das derivadas, porém, outras podem ser encontradas a partir dessas manipulações de expansões de Taylor.

Obtenção das Fórmulas para uma Malha Bidimensional

As fórmulas de discretização para a primeira e segunda derivadas utilizando uma malha bidimensional são obtidas de modo análogo ao que fizemos na seção anterior. Para isso, vamos considerar uma malha retangular no espaço bidimensional \mathbb{R}^2 dada por $x_i = x_0 + i\Delta x$ e $y_j = y_0 + j\Delta y$, com $i = 0, 1, \dots, n$ e $j = 0, 1, 2, \dots, m$ e sendo Δx e Δy os espaçamentos entre os pontos na direção x e y respectivamente. Na figura abaixo, os pontos são identificados na direção x pelo índice i e na direção y pelo índice j .

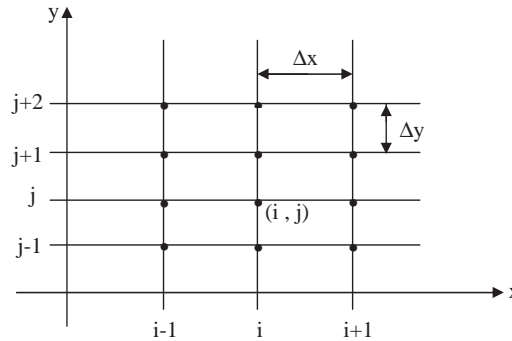


Figura 2.5 Malha Bidimensional.

Considerando que uma função $u(x, y)$ tem derivadas parciais em relação a x até ordem $n + 1$, temos os seguintes desenvolvimentos em expansão de Taylor

$$u(x + \Delta x, y) = u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \dots$$

$$+ \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^n} + \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(\xi_1, y)}{\partial x^{n+1}}$$

$$u(x - \Delta x, y) = u(x, y) - \Delta x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \dots$$

$$+ \frac{(-\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^n} + \frac{(-\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(\xi_2, y)}{\partial x^{n+1}}$$

onde $\frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(\xi_1, y)}{\partial x^{n+1}}$ e $\frac{(-\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{(n+1)} u(\xi_2, y)}{\partial x^{n+1}}$ representam os erros da aproximação de $u(x + \Delta x, y)$ e $u(x - \Delta x, y)$, com $\xi_1 \in (x, x + \Delta x)$ e $\xi_2 \in (x - \Delta x, x)$.

Para obtermos as fórmulas de discretização das derivadas parciais em relação a x , basta fazermos as mesmas considerações anteriores com relação à existência das derivadas em relação à variável x para a função $u(x, y)$.

Dessa forma, obtemos as seguintes fórmulas

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \equiv u_x(x, y) \approx \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \equiv u_x(x, y) \approx \frac{u(x, y) - u(x - \Delta x, y)}{\Delta x} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \equiv u_x(x, y) \approx \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \equiv u_{xx}(x, y) \approx \frac{u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

O mesmo pode ser feito para obtermos as derivadas parciais com relação à variável y tomando agora um acréscimo Δy

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \equiv u_y(x, y) \approx \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta y)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \equiv u_y(x, y) \approx \frac{u(x, y) - u(x, y - \Delta y)}{\Delta y} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta y)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \equiv u_y(x, y) \approx \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y - \Delta y)}{2\Delta y} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \equiv u_{yy}(x, y) \approx \frac{u(x, y + \Delta y) - 2u(x, y) + u(x, y - \Delta y)}{\Delta y^2} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta y^2).$$

Na notação para os pontos (x_i, y_j) da malha temos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \equiv (u_x)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.6)$$

(Fórmula de diferença progressiva para a primeira derivada parcial em relação a x)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \equiv (u_x)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.7)$$

(Fórmula de diferença regressiva para a primeira derivada parcial em relação a x)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \equiv (u_x)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.8)$$

(Fórmula de diferença central para a primeira derivada parcial em relação a x)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \equiv (u_{xx})_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.9)$$

(Fórmula de diferença central para a segunda derivada parcial em relação a x)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \equiv (u_y)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta y) \quad (2.10)$$

(Fórmula de diferença progressiva para a primeira derivada parcial em relação a y)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \equiv (u_y)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta y) \quad (2.11)$$

(Fórmula de diferença regressiva para a primeira derivada parcial em relação a y)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j} \equiv (u_y)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta y^2) \quad (2.12)$$

(Fórmula de diferença central para a primeira derivada parcial em relação a y)

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{i,j} \equiv (u_{yy})_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} \text{ com erro } \mathcal{O}(\Delta y^2). \quad (2.13)$$

(Fórmula de diferença central para a segunda derivada parcial em relação a y)

2.5.5 O Conceito de Estabilidade

O método numérico adotado para a resolução de um problema, não deve permitir que o erro cresça indefinidamente sempre que se avance de um nível de tempo para outro. A idéia de estabilidade traz para os esquemas numéricos a mesma idéia de problemas bem postos formulada pelo matemático Hadamard [Hadamard, 1902], no início do século XX. Segundo Hadamard, se um problema tem uma única solução e se pequenas perturbações nos dados de entrada provocam pequenas perturbações nos resultados, então o problema é dito bem-posto. A questão da estabilidade de um método numérico é importante, pois nos fornece informações quanto à sensibilidade do método aos erros que se acumulam durante os cálculos.

Dessa forma, a estabilidade de um método requer que pequenos erros na condição inicial provoquem pequenos erros nos resultados numéricos. No entanto, quando isso não ocorre, ou seja, se pequenos erros nos dados iniciais fazem com que o erro tenda a crescer na medida que o processo avança no tempo, então dizemos nesse caso que o método é instável.

Capítulo 3

Análise Numérica

Neste capítulo utilizamos o método de diferenças finitas para fazer a análise numérica do problema proposto, bem como a análise dos resultados obtidos

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0 \text{ em } (0, 1) \times (0, \infty) \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) + \int_0^t g(t-s)u_x(1, s)ds = 0, \quad \forall t > 0 \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ em } (0, 1). \quad (3.3)$$

3.1 Discretização do Problema

Consideremos um número inteiro $m > 0$. Sejam $\Delta t > 0$ o tamanho de passo associado à variável temporal e $\Delta x = \frac{1}{m}$ o tamanho de passo associado à variável espacial. Dessa forma, definimos uma malha de pontos (x_i, t_j) dados por

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad e$$

$$t_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots$$

Na figura a seguir ilustramos essa malha de pontos.

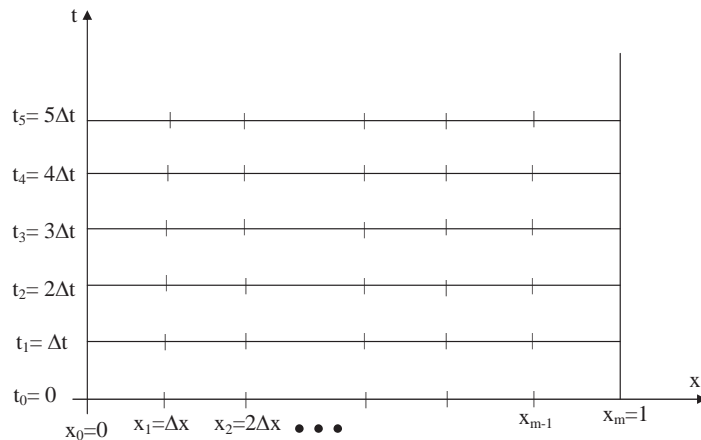


Figura 3.1 *Discretização do Domínio* $[0, 1] \times [0, \infty)$.

Para os pontos interiores (x_i, t_j) dessa malha a equação (3.1) se torna

$$u_{tt}(x_i, t_j) - \alpha^2 u_{xx}(x_i, t_j) = 0.$$

Usando a fórmula (2.9) para aproximar o termo u_{xx} e a fórmula (2.13) para aproximar o termo u_{tt} , obtemos

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} - \alpha^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{\Delta x^2} = 0 \quad (3.4)$$

o qual possui erro de truncamento da ordem de $\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)$.

Fazendo $\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}$ e explicitando u_i^{j+1} , temos o seguinte esquema explícito para calcular u_i^{j+1} associado a (3.4)

$$u_i^{j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_i^j + \lambda^2(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1} \quad (3.5)$$

para $i = 1, 2, \dots, m - 1$ e $j = 1, 2, \dots$.

A discretização da condição inicial $u(x, 0) = u^0(x)$ para os pontos $(x_i, 0)$ da malha é dada por

$$u_i^0 = u^0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m - 1. \quad (3.6)$$

Devemos usar a condição $u_t(x, 0) = u_1(x)$ para encontrar os valores de u_i^1 , para isso usamos a fórmula (2.10) para aproximar $u_t(x, 0) = u_1(x)$

$$u_t(x_i, 0) = u_1(x_i) \approx \frac{u_i^1 - u_i^0}{\Delta t}. \quad (3.7)$$

Daí, temos

$$u_i^1 = u_i^0 + \Delta t u_1(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m - 1. \quad (3.8)$$

Para a condição de fronteira $u(0, t) = 0$, temos

$$u_0^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots. \quad (3.9)$$

Agora, vamos discretizar a condição $u(1, t) + \int_0^t g(t-s)u_x(1, s)ds=0$.

Para a discretização da integral de convolução usamos a forma discretizada encontrada em Leite [14].

$$u(1, t_j) + \Delta t \sum_{k=0}^j g[(j-k)\Delta t] u_x(1, s_k) = 0$$

$$u(1, t_j) = -\Delta t \sum_{k=0}^j g[(j-k)\Delta t] u_x(1, s_k)$$

$$u(1, t_j) = -\Delta t \sum_{k=0}^j g[(j-k)\Delta t] u_x(x_m, s_k), \quad \text{onde } x_m = 1.$$

Utilizando a fórmula (2.7) para aproximar $u_x(x_m, s_k)$, obtemos

$$u(1, t_j) = -\Delta t \sum_{k=0}^j g[(j-k)\Delta t] \frac{u_m^j - u_{m-1}^j}{\Delta x}$$

ou seja,

$$u_m^j = -\Delta t \sum_{k=0}^j g[(j-k)\Delta t] \frac{u_m^j - u_{m-1}^j}{\Delta x}.$$

Para calcular os valores u_i^{j+1} utilizando o esquema (3.5) é necessário conhecer os valores da solução nos níveis de tempo anteriores j e $j-1$. Devemos iniciar o processo tomando $j=1$ e assim obtemos os valores de u_i^2 , ou seja, a solução no nível de tempo $j=2$. Observe que ao fazer $j=1$ vamos precisar dos valores de u_i^0 dado pela condição inicial (3.6) e dos valores de u_i^1 obtidos de (3.8). Após o cálculo dos valores u_i^2 para todo $i=1, 2, \dots, m-1$, podemos calcular os valores de u_i^3 fazendo $j=2$, e assim por diante. As condições de contorno são usadas quando $i=1$ e $i=m-1$.

3.2 Análise da Estabilidade do Método Explícito

No capítulo anterior foi dada uma breve idéia sobre o conceito e a importância da estabilidade de um método numérico à medida em que se busca soluções aproximadas. Nesta seção fazemos o estudo da estabilidade do método numérico para resolver o problema (3.1) – (3.3). A análise dessa estabilidade segue o exposto em Zarowski [21], no qual o autor mostra que a condição para haver tal estabilidade depende de uma relação que envolve os tamanhos de passos da malha.

Utilizando a expansão em Taylor conforme mencionado na seção 2.5.4 os termos u_{tt} e u_{xx} da equação (3.1) podem ser escritos nos pontos (x_i, t_j) da malha na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_j)}{\partial t^4} \quad (3.10)$$

para algum $\eta_j \in [t_{j-1}, t_{j+1}]$, e

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial x^4} \quad (3.11)$$

para algum $\xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, onde $x_i = i\Delta x$ e $t_j = j\Delta t$ para $i = 0, 1, \dots, m$ e $j = 0, 1, 2, \dots$.

Substituindo (3.10) e (3.11) na equação (3.1), temos

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\Delta t^2} - \alpha^2 \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{\Delta x^2} \\ &= \frac{1}{12} \left[\Delta t^2 \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_j)}{\partial t^4} - \alpha^2 \Delta x^2 \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial x^4} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $e_{i,j} = \frac{1}{12} \left[\Delta t^2 \frac{\partial^4 u(x_i, \eta_j)}{\partial t^4} - \alpha^2 \Delta x^2 \frac{\partial^4 u(\xi_i, t_j)}{\partial x^4} \right]$ é o erro de truncamento local.

Como $u_i^j \approx u(x_i, t_j)$, então de (3.12) obtemos a equação de diferença

$$u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1} - \lambda^2 u_{i+1}^j + 2\lambda^2 u_i^j - \lambda^2 u_{i-1}^j = 0 \quad (3.13)$$

onde

$$\lambda = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} \quad (3.14)$$

é às vezes chamado o parâmetro de Courant. Este parâmetro exerce um papel importante na determinação da estabilidade do método implementado. Resolvendo (3.13) para u_i^{j+1} obtemos

$$u_i^{j+1} = 2(1 - \lambda^2)u_i^j + \lambda^2(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1}, \quad (3.15)$$

onde $i = 1, 2, \dots, m - 1$ e $j = 1, 2, \dots$.

O método de diferenças finitas explícito pode se tornar instável se os tamanhos de passos Δx e Δt são selecionados imprópriamente. Como observado em Isaacson [10] e Myint [17], temos

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} u_i^j = u(i\Delta x, j\Delta t)$$

desde que $0 < \lambda \leq 1$. Este é o famoso Courant-Friedrichs-Lewy(CFL) condição para a estabilidade do método de diferenças finitas explícito, e é originalmente devido a Courant et al. [6].

O caso especial onde $\lambda = 1$ é interessante analisar. Neste caso (3.15) reduz-se a

$$u_i^{j+1} = u_{i+1}^j - u_i^{j-1} + u_{i-1}^j. \quad (3.16)$$

Em Zarowski[21] foi mostrado que a solução geral $u(x, t)$ para (3.1) tem a forma

$$u(x, t) = v(x - \alpha t) + w(x + \alpha t).$$

Portanto,

$$u(x_i, t_j) = v(x_i - \alpha t_j) + w(x_i + \alpha t_j).$$

Observe que, como $\Delta x = \alpha \Delta t$ (quando $\lambda = 1$), temos

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_{j-1}) + u(x_{i-1}, t_j) &= v(x_i + \Delta x - \alpha t_j) + w(x_i + \Delta x + \alpha t_j) \\ &\quad - v(x_i - \alpha t_j + \alpha \Delta t) - w(x_i + \alpha t_j - \alpha \Delta t) + v(x_i - \Delta x - \alpha t_j) + w(x_i - \Delta x + \alpha t_j) \\ &= v(x_i - \Delta x - \alpha t_j) + w(x_i + \Delta x + \alpha t_j) = v(x_i - \alpha t_j - \alpha \Delta t) + w(x_i + \alpha t_j + \alpha \Delta t) \\ &= v(x_i - \alpha t_{j+1}) + w(x_i + \alpha t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_{j-1}) + u(x_{i-1}, t_j). \quad (3.17)$$

Observe que a equação (3.17) tem uma forma idêntica a (3.16). Em outras palavras, o algoritmo (3.16) fornece a solução exata para (3.1), mas somente em $x = i\Delta x$ e $t = j\Delta t$ com $\Delta x = \alpha \Delta t$ (que é uma situação bastante restritiva).

No entanto, uma abordagem mais geral para analisar o erro que confirma a condição CFL é às vezes chamada de análise de estabilidade de von Neumann (segundo Myint [17]). Iniciamos essa abordagem definindo o erro de truncamento global.

$$\epsilon_{i,j} = u(x_i, t_j) - u_i^j. \quad (3.18)$$

A equação (3.12) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} & u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}) - \lambda^2[u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)] \\ & = \Delta t^2 e_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Subtraindo (3.13) de (3.19) e simplificando o resultado usando (3.18), obtemos

$$\epsilon_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)\epsilon_{i,j} + \lambda^2[\epsilon_{i+1,j} + \epsilon_{i-1,j}] - \epsilon_{i,j-1} + \Delta t^2 e_{i,j} \quad (3.20)$$

para $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, 3, \dots$.

A equação (3.20) é uma equação de diferença bidimensional para a sequência de erro global $(\epsilon_{i,j})$. O termo $\Delta t^2 e_{i,j}$ é um termo forte, e se $u(x, t)$ é suficientemente suave, o termo forte será limitado para todo i e j . Basicamente, podemos mostrar que a condição CFL $0 < \lambda \leq 1$ evita que $\lim_{j \rightarrow \infty} |\epsilon_{i,j}| = \infty$ para todo $i = 0, 1, 2, \dots, m$. De forma análoga a abordagem de análise de estabilidade para PVI de EDO (Zarowski [21], capítulo 10), podemos considerar o problema homogêneo

$$\epsilon_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)\epsilon_{i,j} + \lambda^2[\epsilon_{i+1,j} + \epsilon_{i-1,j}] - \epsilon_{i,j-1} \quad (3.21)$$

que é justamente (3.20) com o termo forte sendo identicamente zero para todo i e j .

Em (Zarowski [21]) foi usada a separação de variáveis para resolver (3.1) e concluiu-se que uma versão discreta dessa abordagem também é útil na solução de (3.21). Com isso, é postulada uma solução típica de (3.21) da forma

$$\epsilon_{i,j} = \exp[\bar{j}\gamma i \Delta x + \beta j \Delta t], \quad \text{onde } \bar{j} = \sqrt{-1} \quad (3.22)$$

para constantes convenientes $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{C}$ (ver Zarowski [21]).

Observe que

$$|\epsilon_{i,j}| = |\exp[\bar{j}\gamma i \Delta x + \beta j \Delta t]| = |e^{\bar{j}\gamma i \Delta x + \beta j \Delta t}| = |e^{\bar{j}\gamma i \Delta x}| |e^{\beta j \Delta t}|.$$

Sabendo que $e^{\bar{j}\theta} = \cos\theta + \bar{j}\text{sen}\theta$ (identidade de Euler), temos

$$|\epsilon_{i,j}| = |\cos(\gamma i \Delta x) + \bar{j}\text{sen}(\gamma i \Delta x)| |e^{\beta j \Delta t}| = |e^{\beta j \Delta t}|,$$

pois $|\cos(\gamma i \Delta x) + \bar{j}\text{sen}(\gamma i \Delta x)| = 1$.

Portanto, concluímos que

$$|\epsilon_{i,j}| = |(e^{\beta\Delta t})^j| = |S^j|, \text{ onde } S = e^{\beta\Delta t} = \exp[\beta\Delta t].$$

Observamos dessa última igualdade acima que se $|S| \leq 1$, não temos ilimitadamente o crescimento da sequência de erro $(\epsilon_{i,j})$ quando j aumenta.

Substituindo (3.22) em (3.21), temos

$$\begin{aligned} \exp[\bar{j}\gamma i\Delta x + \beta(j+1)\Delta t] &= 2(1-\lambda^2)\exp[\bar{j}\gamma i\Delta x + \beta j\Delta t] + \lambda^2\{\exp[\bar{j}\gamma(i+1)\Delta x + \beta j\Delta t] \\ &+ \exp[\bar{j}\gamma(i-1)\Delta x + \beta j\Delta t]\} - \exp[\bar{j}\gamma i\Delta x + \beta(j-1)\Delta t] \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{\bar{j}\gamma i\Delta x} e^{\beta(j+1)\Delta t} = 2(1-\lambda^2)e^{\bar{j}\gamma i\Delta x} e^{\beta j\Delta t} + \lambda^2 e^{\bar{j}\gamma(i+1)\Delta x} e^{\beta j\Delta t} + \lambda^2 e^{\bar{j}\gamma(i-1)\Delta x} e^{\beta j\Delta t} - e^{\bar{j}\gamma i\Delta x} e^{\beta(j-1)\Delta t}.$$

Dividindo essa última equação por $e^{\bar{j}\gamma i\Delta x} e^{\beta j\Delta t}$, obtemos

$$\exp[\beta\Delta t] = 2(1-\lambda^2) + \lambda^2\{\exp[\bar{j}\gamma\Delta x] + \exp[-\bar{j}\gamma\Delta x]\} - \exp[-\beta\Delta t].$$

Sabendo que $\exp[\beta\Delta t] = S$ e $\exp[\bar{j}\gamma\Delta x] = \cos(\gamma\Delta x) + \bar{j}\text{sen}(\gamma\Delta x)$, então a equação acima toma a forma

$$S^2 - [2(1-\lambda^2) + 2\cos(\gamma\Delta x)\lambda^2]S + 1 = 0.$$

Fazendo $2b = 2(1-\lambda^2) + 2\cos(\gamma\Delta x)\lambda^2$, e usando a identidade $2\text{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$, obtemos

$$b = 1 - 2\lambda^2 \text{sen}^2\left(\frac{\gamma\Delta x}{2}\right).$$

Observe que $|b| \leq 1$ para todo λ tal que $0 \leq \lambda \leq 1$, pois $0 \leq \text{sen}^2\left(\frac{\gamma\Delta x}{2}\right) \leq 1$ para todo $\gamma\Delta x \in \mathbb{R}$.

De fato, sendo $0 \leq \lambda \leq 1$, então $0 \leq \lambda^2 \leq 1$. E daí, temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda^2 \text{sen}^2\left(\frac{\gamma\Delta x}{2}\right) \leq 1 &\Rightarrow 0 \geq -2\lambda^2 \text{sen}^2\left(\frac{\gamma\Delta x}{2}\right) \geq -2 \Rightarrow 1 \geq 1 - 2\lambda^2 \text{sen}^2\left(\frac{\gamma\Delta x}{2}\right) \geq -1 \\ \Rightarrow 1 \geq b \geq -1 &\Rightarrow |b| \leq 1. \end{aligned}$$

Observe que $S^2 - 2bS + 1 = 0$ para $S = S_1, S_2$, onde

$$S_1 = b + \sqrt{b^2 - 1}, \quad S_2 = b - \sqrt{b^2 - 1}.$$

Observe que se $|b| > 1$, então $|S_k| > 1$ para algum $k \in \{1, 2\}$, que pode ocorrer se permitirmos $\lambda > 1$.

De fato, sendo $|b| > 1$ então $b > 1$ ou $b < -1$. Se $b > 1$, então

$$b^2 > 1 \Rightarrow b^2 - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 1} > 0 \Rightarrow b + \sqrt{b^2 - 1} > 1 \Rightarrow S_1 > 1 \Rightarrow |S_1| > 1.$$

Se $b < -1$, então

$$b^2 > 1 \Rightarrow b^2 - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 1} > 0 \Rightarrow -\sqrt{b^2 - 1} < 0 \Rightarrow b - \sqrt{b^2 - 1} < -1 \Rightarrow S_2 < -1 \Rightarrow |S_2| > 1.$$

Com isso, devemos rejeitar a escolha de $\lambda > 1$, pois isso produz o crescimento ilimitado no tamanho de $\epsilon_{i,j}$ quando $j \rightarrow \infty$.

Portanto, restaria a escolha de $|b| \leq 1$, ou seja, $-1 \leq b \leq 1$.

Para os valores $b = -1$ ou $b = 1$, temos

$$|S_k| = 1, \quad \text{com } k \in \{1, 2\}.$$

Para os valores de b com $-1 < b < 1$, temos que S_1 e S_2 seriam números complexos com a parte imaginária diferente de zero, e além disso, as partes imaginárias de S_1 e S_2 seriam simétricas. Observando que o produto $S_1 S_2 = 1$ e denotando por $*$ a conjugação de um número complexo, temos

$$1 = S_1 S_2 = S_1 S_1^* = |S_1|^2 \Rightarrow |S_1| = 1$$

$$1 = S_1 S_2 = S_2^* S_2 = |S_2|^2 \Rightarrow |S_2| = 1.$$

Portanto, $|S_k|=1$, com $k \in \{1, 2\}$ e isso então evita o crescimento ilimitado de $\epsilon_{i,j}$ quando $j \rightarrow \infty$. Logo, fica validada a condição CFL para a escolha do parâmetro Courant λ , ou seja, devemos escolher λ para satisfazer $0 < \lambda \leq 1$. Com isso, a estabilidade do método explícito depende de uma relação entre os passos Δt e Δx . Nesse caso, dizemos que o método explícito é condicionalmente estável.

3.3 Análise dos Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados obtidos da análise numérica para o problema (3.1) – (3.3) utilizando o método de diferenças finitas. Os resultados são apresentados nas figuras (3.4) – (3.10) e essas simulações foram feitas para os níveis de tempo de $t = 20$ segundos até $t = 140$ segundos. Para efeito de comparação desses resultados, mostramos primeiramente nas figuras (3.2) e (3.3) os resultados obtidos sem o termo de memória na fronteira.

Simulação Numérica para $t = 20$ segundos sem o Termo de Memória na Fronteira.

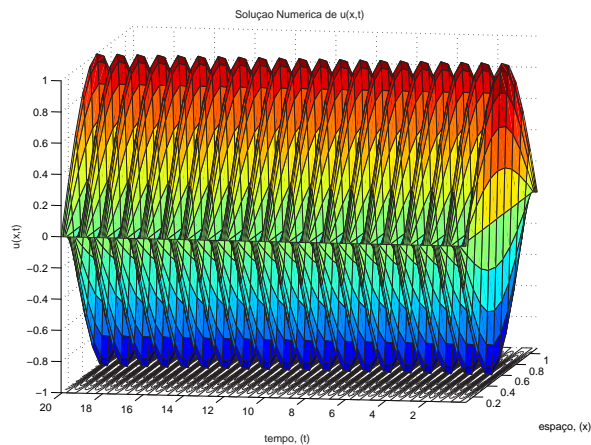


Figura 3.2 Solução Numérica da Equação da Onda sem o Termo de Memória na Fronteira.

A figura (3.2) ilustra a solução $u(x, t)$ no intervalo de tempo $t = 0$ a $t = 20$ segundos, onde consideramos o termo $\int_0^t g(t-s)u_x(1, s)ds$ igual a zero. Neste caso, temos a solução da equação da onda com as condições de fronteira $u(0, t) = u(1, t) = 0$.

Simulação Numérica para $t = 80$ segundos sem o Termo Memória na Fronteira.

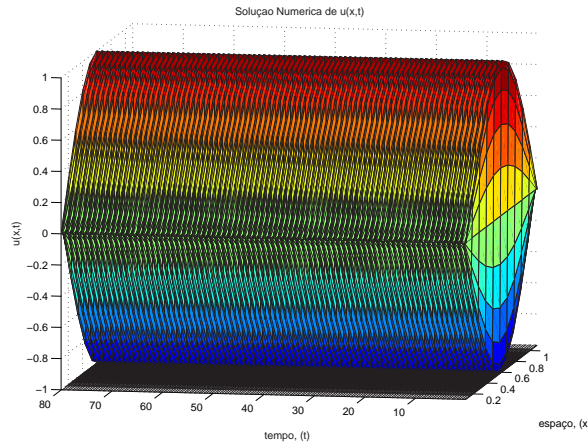


Figura 3.3 Solução Numérica da Equação da Onda sem o Termo de Memória na Fronteira.

A figura (3.3) ilustra a solução $u(x, t)$ no intervalo de tempo $t = 0$ a $t = 80$ segundos, e corresponde também, à solução da equação da onda com as condições de fronteira $u(0, t) = u(1, t) = 0$. Observamos que, as soluções $u(x, t)$ ilustradas nessas duas figuras não sofrem decaimento à medida em que aumentamos o intervalo de tempo.

As figuras (3.4) – (3.10) ilustram as soluções $u(x, t)$ nos níveis de tempo $t = 20$ segundos a $t = 140$ segundos com o termo de memória $\int_0^t g(t-s)u_x(1, s)ds$ na fronteira. Observamos na figura (3.4) que as soluções $u(x, t)$ apresentam um certo decaimento no intervalo de tempo $t = 0$ a $t = 20$ segundos. Na figura (3.5) quando consideramos o intervalo $t = 0$ a $t = 40$ segundos vemos que as soluções $u(x, t)$ continuam a decair, e esse mesmo fato podemos observar nas figuras (3.6) – (3.10). Diante dessas observações, notamos que as soluções $u(x, t)$ decaem aproximando-se de zero à medida em que o intervalo de tempo aumenta.

Simulação Numérica para $t = 20$ segundos com o Termo Memória na Fronteira.

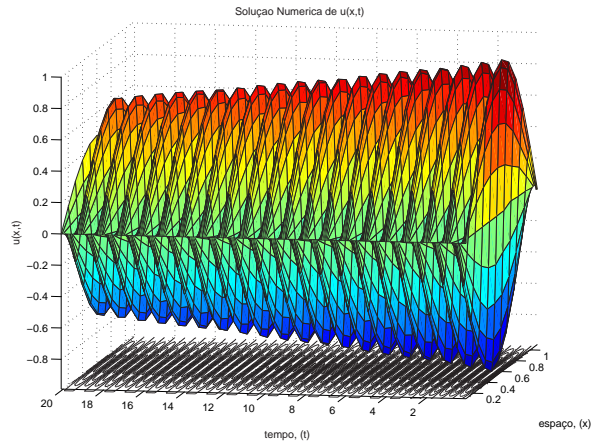


Figura 3.4 *Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.*

Simulação Numérica para $t = 40$ segundos com o Termo Memória na Fronteira.

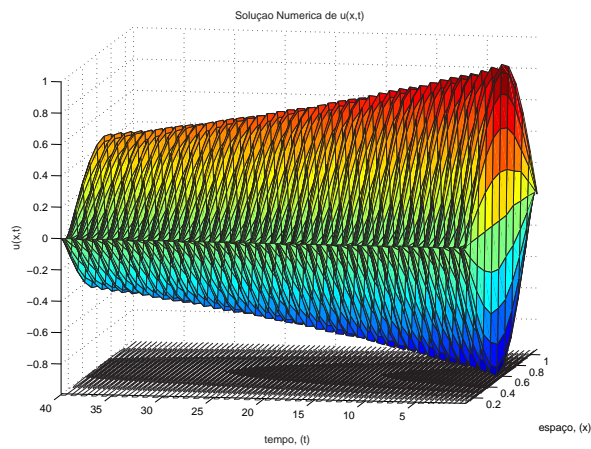


Figura 3.5 *Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.*

Simulação Numérica para $t = 60$ segundos com o Termo Memória na Fronteira.

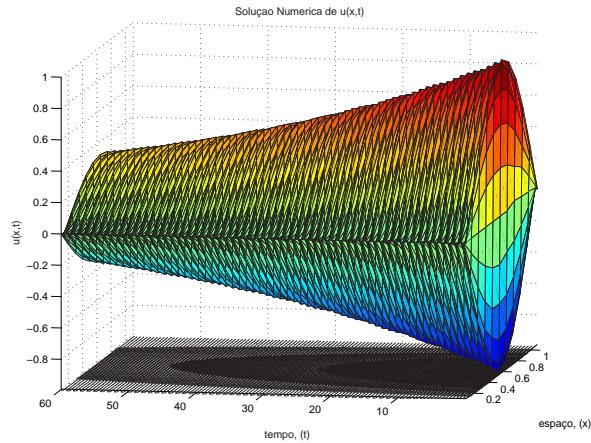


Figura 3.6 *Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.*

Simulação Numérica para $t = 80$ segundos com o Termo Memória na Fronteira.

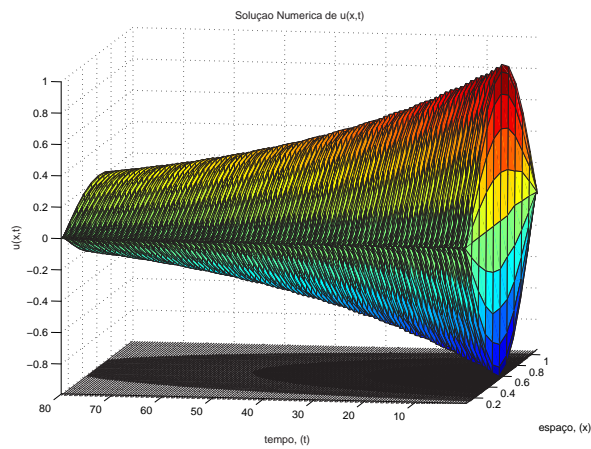


Figura 3.7 *Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.*

Simulação Numérica para $t = 100$ segundos com o Termo Memória na Fronteira.

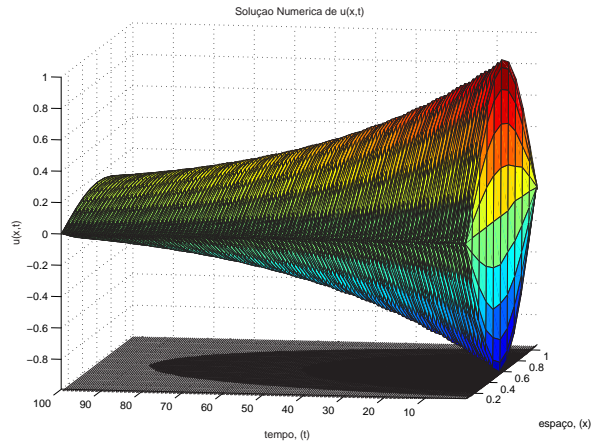


Figura 3.8 *Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.*

Simulação Numérica para $t = 120$ segundos com o Termo Memória na Fronteira.

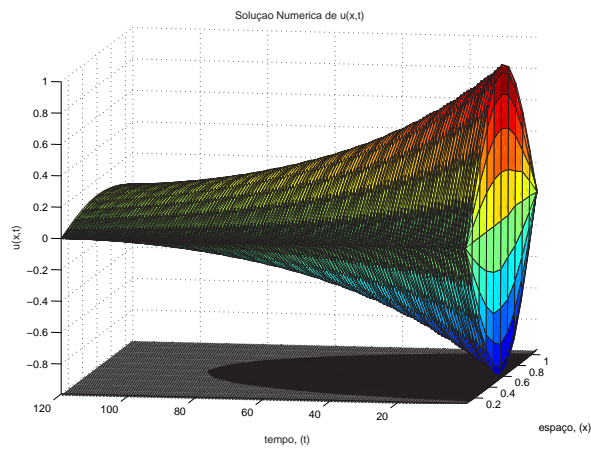


Figura 3.9 *Solução Numéricada da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.*

Simulação Numérica para $t = 140$ segundos com o Termo Memória na Fronteira.

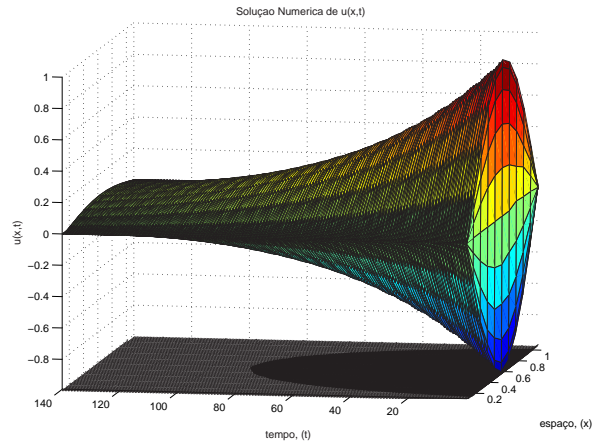


Figura 3.10 *Solução Numérica da Equação da Onda com Termo de Memória na Fronteira.*

Considerações Finais

Diante da exposição feita neste trabalho, podemos observar que o problema (1) – (3) da equação de onda com termo de memória na fronteira, tem uma única solução. (Conforme demonstrado em Baldez [1] para o problema (4) – (6)). Observamos ainda que, através dos resultados da análise numérica, o termo dissipativo $\int_0^t g(t-s)u_x(1,s)ds$ na fronteira $x = 1$, provoca de fato, a dissipação de energia do sistema (1) – (3), fazendo com que a solução desse sistema decaia no decorrer do tempo. (Conforme observamos nas figuras (3.4) – (3.10)).

Tal fato, de certa forma, confirma o que foi demonstrado no trabalho de Santos [20] no qual o autor mostrou de forma analítica, o decaimento exponencial e polinomial da solução da equação da onda com condição de memória na fronteira para o problema (4) – (6).

Uma sugestão para um possível trabalho futuro seria realizar a análise numérica do problema aqui proposto, utilizando o método de elementos finitos e comparar os resultados numéricos obtidos pelos dois métodos.

Bibliografia

- [1] BALDEZ, Carlos Alessandro da C. *Dissertação de Mestrado: Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico da Solução de uma Equação de Onda com Termo de Memória na Fronteira*, 2005.
- [2] BOYCE, William E. & DIPRIMA, Richard C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Editora LTC, Sétima Edição, Rio de Janeiro, 2001.
- [3] BRÉZIS, H. *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.
- [4] BURDEN, Richard L. & FAIRES, J. Douglas *Análise Numérica*, THOMSON, São Paulo, 2003.
- [5] CODDINGTON, E.A. & LEVINSON, N., *Theory of Ordinary Differential Equation*. McGraw-Hill, 1955.
- [6] COURANT, R., FRIEDRICHS, K. & LEWY, H., *Über die Partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen Physik*, Math. Ann. 100, 32-74 (1928).
- [7] CUNHA, M. Cristina C. *Métodos Numéricos*. Editora UNICAMP, 2003.
- [8] DÉMIDOVITCH, B. & MARON, I. *Éléments de Calcul Numérique*, Editions de Moscou, 1973.
- [9] FERNANDO, Honório Joaquim *Tese de Mestrado: Procedimentos Numéricos para a Solução das Equações da Advecção, da Difusão e Advecção-Difusão pelo Método das Diferenças Finitas*, Rio de Janeiro, 2004.
- [10] ISAACSON, E. & KELLER, H.B., *Analysis of Numerical Methods*, Wiley, New York, 1966.
- [11] LAPIDUS, Leon & PINDER, George F. *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. A Wiley-Interscience Publication, Princeton, New Jersey, November, 1981.
- [12] LARSON, R.E., HOSTETLER, R.P. & EDWARDS, B.H. *Cálculo com Geometria Analítica*, volume 2, 5ª edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, 1998.
- [13] LEITE, J.G. & SINGER, J.M. *Métodos Assintóticos em Estatística-Fundamentos e aplicação*, In: 9º Simpósio Brasileiro de Probabilidade e Estatística, ABE-IME-USP, São Paulo, 1990.
- [14] LEITE, Lourenildo W. Barbosa, *Introdução a Análise Espectral em Geofísica*, 1ª edição,

-
- Belém, Pará, MCT/CNPq/PADCT-II/GTM, 1998.
- [15] LIONS, J.L. *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaris*. Dunod, Paris, 1969.
- [16] MIRANDA, M.M. & MEDEIROS, L.A. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais*, Textos de Métodos Matemáticos N° 25, IM-UFRJ, 1993.
- [17] MYINT-U, T. & DEBNATH, L. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, 3rd ed., North-Holland, New York, 1987.
- [18] RIVERA, J.E.M. *Introdução à Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. IM-UFRJ, 2004.
- [19] RUGGIERO, Márcia A.G. & Lopes, Vera L.R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2ª edição, Makron Books Ltda, São Paulo, 1996.
- [20] SANTOS, M.L. *Asymptotic Behavior of Solutions to Wave Equations With a Memory Condition at the Boundary*. Electronic Journal of Differential Equations, vol. 2001(2001), N° 73, pp. 1-11. ISSN:1072-6691.
- [21] ZAROWSKI, Christopher J. *An Introduction to Numerical Analysis for Electrical and Computer Engineers*. A John Wiley & Sons, Inc. Publication, New Jersey.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)