UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

P-SUBESPAÇOS EM ALGUMAS ÁLGEBRAS NÃO ASSOCIATIVAS

Elizardo Fabrício Lima Lucena

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva.

BELÉM

2008

Elizardo Fabrício Lima Lucena

P-SUBESPAÇOS EM ALGUMAS ÁLGEBRAS NÃO ASSOCIATIVAS

Banca Examinadora

Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva

ICEN, UFPA

Prof. Dr. Maria de Nazaré Carvalho Bezerra

ICEN, UFPA

Prof. Dr. Sheila Campos Chagas

Departamento de Matemática, UFAM

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /______

Aos meus pais Eduardo e Elizabeth, pelo amor, renúncia e dedicação

AGRADECIMENTOS

À Deus

À minha família pela paciência, confiança e apoio incondicional;

Às tias Ana e Iracema pela contribuição fundamental em minha formação pessoal e profissional;

Aos amigos, Isaac Daian, Vinícius Santos, Márcio Pinheiro e Marcos Gonçalves, pela motivação e inspiração em problemas de Matemática;

Ao meu orientador, Professor Dr. Juaci Picanço da Silva, pela inspiração e orientação competente e paciente;

Ao coordenador do curso de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da UFPa, professor Dr. Marcus Pinto da Rocha;

A todos os colegas do curso que contribuíram em momentos difíceis;

À Universidade Federal do Pará.

LUCENA, Elizardo F. Lima. **P-subespaços Em Algumas Álgebras Não Associativas**. Dissertação (Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará para a obtenção do título de Mestre em Matemática.) UFPa, 2008.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a invariância de P-subespaços em algumas álgebras não-associativas. Entre elas, as álgebras de Bernstein e as álgebras de Bernstein-Jordan. Foi feita a decomposição de Peirce dessas álgebras usando um idempotente não-nulo. A seguir obtivemos alguns isomorfismos que nos permitiu caracterizar a invariância desses p-subespaços.

LUCENA, Elizardo F. Lima. **P-Subspace Invariance In No-Associative Some Algebras**. Dissertation (Dissertation presented to Mathmatics and Estatistics Post-Graduation Program of Universidade Federal do Pará) UFPa, 2008.

ABSTRACT

In this work we studyed the P-subspace invariance in no-associative some algebras. Among then, the Bernstein algebras and the Bernstein-Jordan´s algebras. We did the Peirce decomposition of those algebras using no-null idempotent. To proceed we obtained some isomorphisms that allowed to characterize us the invariance of the P-subspaces.

"A mente que se abre a uma nova idéia jamais retorna ao tamanho original."

Albert Einstein.

Sumário

Introdução

A introdução de métodos algébricos em genética de populações ocorreu em 1939 com os artigos de I.M.H. Etherington. Ele definiu três tipos de Álgebras não associativas, a saber: álgebras ponderadas, álgebras train e álgebras especiais train, que aparecem mais ou menos naturalmente a partir do simbolismo da genética. Muitas álgebras provenientes de modelos genéticos concretos são álgebras train.

Uma álgebra train de posto 3 é uma álgebra bárica (A, ω) sobre um corpo F satisfazendo uma equação do tipo $x^3 - (1+\gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2 x = 0$, para algum $\gamma \in F$. Fixando um valor para $\gamma \in F$ temos alguns tipos especiais de álgebras train. Por exemplo, devido a um resultado obtido por Etherington em [4], para $\gamma = 0$ a equação train de posto 3 acima, define uma álgebra conhecida como álgebra de Bernstein-Jordan. Há outras importantes classes de álgebras não associativas que podem ser obtidas a partir de uma álgebra train, a exemplo das álgebras de Bernstein. Uma álgebra de Bernstein é uma álgebra bárica (A, ω) que satisfaz a equação $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2$. Podemos ver que essa equação é proveniente de uma equação train de posto 4.

O objetivo desta dissertação é estudar a invariância de p-subespaços em álgebras train de posto 3, bem como em algumas classes especiais de álgebras train. Esse estudo será feito a partir da decomposição da álgebra em função do núcleo do seu caracter, e da decomposição desse núcleo. Conseguimos tal decomposição, chamada decomposição de Peirce, sobretudo, devido a existência de um elemento idempotente de peso 1 na álgebra.

É importante ressaltar que tal desenvolvimento foi feito em [3] para as álgebras satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$ e $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$. No artigo [7] é demonstrada a existência de idempotentes nessas mesmas álgebras. Na dissertação [8] é feito um estudo das álgebras de Bernstein até a decomposição de Peirce, onde tal trabalho toma outra direção. Uma parte do desenvolvimento da decomposição de Peirce para as Train álgebras de posto 3 pode ser encontrada na tese [9].

Aproveitando o estudo feito em [8] e tentando imitar o tratamento dado no artigo [3] para as álgebras satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$ e $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$, pretendemos estudar a invariância de p-subespaços nas álgebras Bernstein. Do mesmo modo, e considerando o tratamento dado na tese na tese [9], pretendemos estudar as Train-álgebras de posto 3. Segue desse estudo em Train-álgebras de posto 3 o caso das álgebras de Bernstein-Jordan.

O capítulo 1 apresenta alguns conceitos e resultados gerais a respeito de caracteres e álgebras báricas.

No capítulo 2, estudamos alguns resultados conhecidos a cerca de álgebras de Bernstein e álgebras de Bernstein-Jordan. Na primeira seção desse capítulo, definimos álgebras de Bernstein a partir das formas invariantes e caracterizamos uma de suas importantes sub-classes, as álgebras conservativas. A seguir, fazemos sua decomposição de Peirce a fim de estudar a invariância de seus p-subespaços. No entanto, limitamo-nos ao estudo da invariância em álgebras de Bernstein satisfazendo uma condição especial. Finalmente, o estudo da invariância em álgebras de Bernstein-Jordan é deixado para o último capítulo.

Nos capítulos 3 e 4, são estudadas respectivamente às álgebras báricas (A, ω) satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$ e $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$. Nesses, obtemos suas decomposições de Peirce e estudamos a invarância dos p-subespaços. Para essas álgebras, vemos que é possível caracterizar completamente a invariância dos p-subespaços. É interessante notar a similaridade dos resultados obtidos.

O último capítulo é dedicado as álgebras train de posto 3. Obtemos um elemento idempotente de peso 1, supondo $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Para esse caso, e supondo F com característica diferente de 2, obtemos uma decomposição de Peirce para a álgebra e conseguimos caracterizar a invariância de seus p-subespaços com um resultado análogo ao obtido nos capítulos anteriores.

Capítulo 1

Preliminares

Este é o capítulo no qual estudaremos alguns resultados básicos do trabalho. Nele será desenvolvido o conceito de álgebras báricas.

1.1 Caracteres

Suponhamos que F seja um corpo com característica diferente de dois ou três. Tomemos A, uma álgebra sobre F, não necessariamente associativa, e de dimensão finita. Diremos que uma forma linear $\omega : A \longrightarrow F$ é um *homomorfismo* quando $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$, quaisquer que sejam $a, b \in A$. Um homomorfismo não nulo $\omega : A \longrightarrow F$ será chamado *caracter* de A. Usaremos as notações introduzidas neste parágrafo em todo o texto, a menos de menção em contrário. Os lemas a seguir dão uma caracterização do núcleo de ω. Vale ressaltar que em todo o texto estaremos trabalhando com álgebras de dimensão finita.

Lema 1. *Seja $\omega : A \longrightarrow F$ um caracter de A. Seu núcleo $\ker\omega$ é um ideal bilateral de A, de codimensão 1, não contendo A^2.*

Demonstração. Observemos inicialmente que, para quaisquer $x \in A$ e $a \in \ker\omega$ temos $\omega(xa) = \omega(x)\omega(a) = 0$. Analogamente $\omega(ax) = 0$. Estes fatos implicam que $ax, xa \in \ker\omega$. Então $\ker\omega$ é um ideal bilateral de A. Existe $x_0 \in A$, tal que $x_0 \notin \ker\omega$, pois ω é não nulo. Tomando esse x_0 e $x \in A$, vemos que $x = \left[x - \frac{\omega(x)}{\omega(x_0)}x_0\right] + \frac{\omega(x)}{\omega(x_0)}x_0$ e $\omega\left[x - \frac{\omega(x)}{\omega(x_0)}x_0\right] = \omega(x) - \frac{\omega(x)}{\omega(x_0)}\omega(x_0) = 0$. Concluímos que todo $x \in A$ se escreve como uma soma $x = n + v$, em que $n \in \ker\omega$ e $v \in Fx_0$. Desse modo $A = \ker\omega + Fx_0$. Além disso se $x \in \ker\omega \cap Fx_0$ então $x = 0$, pois de $x \in Fx_0$ tiramos $x = \alpha x_0$, para algum $\alpha \in F$ e de $x \in \ker\omega$ concluímos $\omega(x) = 0$. Segue-se que $0 = \omega(\alpha x_0) = \alpha\omega(x_0)$, e como $\omega(x_0) \neq 0$, obtemos $\alpha = 0$, o que implica $x = 0$. Temos portanto $A = Fx_0 \oplus \ker\omega$. Assim, $\ker\omega$ é de codimensão 1. Observemos que até esse momento foram exigidas apenas propriedades relativas a linearidade de ω. Para concluir que $\ker\omega$ não contém A^2, tomemos um $x \in A$ tal que $x \notin \ker\omega$ e façamos $\omega(x^2) = \omega(x)^2 \neq 0$. □

Lema 2. *Para todo ideal bilateral I de A, de codimensão 1, existe uma forma linear ϕ tal que* $\ker\phi = I$.

Demonstração. Como I tem codimensão 1 temos $A = I \oplus Fx_0$, com $x_0 \notin I$. Dado $x \in A$, temos $x = i + \alpha x_0$, com $i \in I$ e $\alpha \in F$. Definamos $\phi : A \longrightarrow F$ por $\phi(x) = \phi(i + \alpha x_0) = \alpha$. Notemos que ϕ é linear, pois se $x = i_1 + \alpha_1 x_0$ e $y = i_2 + \alpha_2 x_0$ são elementos de A, com $i_1, i_2 \in I$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in F$, então, tomando $\beta \in F$ temos $\phi(\beta x + y) = \phi(\beta(i_1 + \alpha_1 x_0) + (i_2 + \alpha_2 x_0)) = \phi((\beta i_1 + i_2) + (\beta\alpha_1 + \alpha_2)x_0) = \beta\alpha_1 + \alpha_2 = \beta\phi(x) + \phi(y)$. Além do mais, dado $n \in \ker\phi$, temos $\phi(n) = 0$. Logo, $n \in I$, pois $n = i + \alpha x_0$, com $i \in I$ e $\alpha = \phi(n) = 0$. Por outro lado, todo elemento $i \in I$ pode ser escrito como $i = i + \alpha x_0$, com $\alpha = 0$. Desse modo, $i \in \ker\phi$. Portanto, $\ker\phi = I$. □

Lema 3. *Se $\phi : A \longrightarrow F$ é a forma linear não nula dada no lema acima e $\lambda \neq 0$, então* $\ker\phi = \ker(\lambda\phi)$. *Reciprocamente, se ϕ' é uma forma linear não nula tal que,* $\ker\phi' = \ker\phi$, *então existe $\lambda \neq 0$ satisfazendo $\phi' = \lambda\phi$.*

Demonstração. Para a primeira parte tomemos $x \in \ker\phi$. Teremos $(\lambda\phi)(x) = \lambda\phi(x) = 0$. Por outro lado, tomando $x \in \ker(\lambda\phi)$ temos $0 = (\lambda\phi)(x) = \lambda\phi(x)$. O que nos dá $\phi(x) = 0$, pois $\lambda \neq 0$. Para a segunda parte tomemos ϕ', uma forma linear não nula com $\ker(\phi') = \ker\phi$. Devido ao lema (1) temos $A = \ker\phi \oplus Fx_0$, com $x_0 \notin \ker\phi$. Tomando $x \in A$, na forma $x = i + \alpha x_0$, com $i \in \ker\phi$ e $\alpha \in F$, vem que $\phi'(x) = \phi'(i + \alpha x_0) = \phi'(i) + \alpha\phi'(x_0)$. Como $\ker(\phi') \supset \ker\phi$, vem $\phi'(i) = 0$, ou seja $\phi'(x) = \alpha\phi'(x_0)$. Finalmente, notando que $\ker(\phi') \subset \ker\phi$, temos $\phi'(x_0) \neq 0$. Segue-se que $\phi'(x) = \lambda\phi(x)$, em que $\lambda = \phi'(x_0)$, qualquer que seja $x \in A$. Portanto $\phi' = \lambda\phi$, $\lambda \neq 0$. □

Lema 4. *Seja I um ideal bilateral de A, de codimensão 1 não contendo A^2. Existe um único caracter $\omega : A \longrightarrow F$ tal que, $\ker\omega = I$.*

Demonstração. Continuamos usando ϕ, conforme foi definido no lema (2). Supondo I um ideal bilateral de A de codimensão 1 não contendo A^2, obteremos $\lambda \neq 0$, tal que $\lambda\phi$ será um caracter de A. Para isto, primeiramente observemos que para todo $y \in A$ existe $\psi(y) \in F$, tal que $\phi(x_0 y) = \psi(y)\phi(x_0)$, com $\psi : A \longrightarrow F$ sendo uma forma linear. De fato, tem-se $\phi(x_0) \neq 0$, o que nos dá $\phi(x_0 y) = \phi(x_0 y)\phi(x_0)^{-1}\phi(x_0) = \psi(y)\phi(x_0)$, em que tomamos $\psi(y) = \phi(x_0 y)\phi(x_0)^{-1}$, que é linear. De um modo mais geral mostremos que $\phi(xy) = \psi(y)\phi(x)$, quaisquer que sejam $x, y \in A$. De fato, pois se $x \in \ker\phi$, então $xy \in \ker\phi$, visto que $\ker\phi$ é um ideal bilateral de A, portanto $\phi(xy) - \psi(y)\phi(x) = 0$. Por outro lado, se $x \notin \ker\phi$, então $x = i + \alpha x_0$, com $\alpha \neq 0$. Desse modo $\phi(xy) - \psi(y)\phi(x) = \phi((i + \alpha x_0)y) - \psi(y)\phi(i + \alpha x_0) = \phi(iy + \alpha x_0 y) - \psi(y)\phi(i + \alpha x_0) = [\phi(iy) - \psi(y)\phi(i)] + \alpha[\phi(x_0 y) - \psi(y)\phi(x_0)] = 0$, pois $i \in \ker\phi$. Devido a definição de ψ é fácil ver que $\ker\phi \subset \ker\psi$. Segue-se da demonstração do lema (3) que $\psi = \lambda_0\phi$, para algum $\lambda_0 \in F$. Como não se tem $\ker\phi = \ker\psi$ não se pode concluir $\lambda_0 \neq 0$. No entanto, escrevendo $\phi(xy) = \psi(y)\phi(x) = \lambda_0\phi(y)\phi(x)$ notamos que se fosse $\lambda_0 = 0$ então $\phi(xy) = 0$ para todo $x, y \in A$. Teríamos $A^2 \subset \ker\phi$, o que não ocorre. Portanto, devemos ter $\lambda_0 \neq 0$.

Tomando $\omega = \lambda_0\phi$, obtemos um caracter ω de A cujo núcleo é I. De fato, $\omega(xy) = (\lambda_0\phi)(xy) = \lambda_0\lambda_0\phi(x)\phi(y) = [\lambda_0\phi(x)][\lambda_0\phi(y)] = \omega(x)\omega(y)$. Além do mais, como $\omega = \lambda_0\phi$, temos, a partir do lema (3), $\ker\omega = \ker\phi = I$. Finalmente, se ω_1 e ω_2 são caracteres de A, com $\ker(\omega_1) = \ker(\omega_2)$, então, novamente pelo (3), $\omega_2 = \lambda\omega_1$, com $\lambda \neq 0$. De onde segue que para todo $x \in A$, $\lambda\omega_1(x)^2 = \lambda\omega_1(x^2) = \omega_2(x^2) = \omega_2(x)^2 = [\lambda\omega_1(x)]^2 = \lambda^2\omega_1(x)^2$. Tomando $x \notin \ker\omega$, obtemos $\lambda^2 = \lambda$, logo $\lambda = 1$. Portanto, existe um único caracter $\omega : A \longrightarrow F$, tal que $\ker\omega = I$. $\square$

A partir dos lemas acima concluímos que existe uma bijeção entre o conjunto dos caracteres de uma álgebra A e o conjunto dos ideais bilaterais de A, cuja codimensão é 1, e que não contém A^2. Essa bijeção é dada por $\omega \longmapsto \ker\omega$.

Proposição 1.1. *Todo conjunto finito de caracteres distintos é linearmente independente no espaço dual de A.*

Demonstração. Usaremos indução sobre o número k de caracteres. Se $k = 1$, a demonstração é trivial. Suponhamos $k > 1$ e que o resultado seja válido para qualquer conjunto com menos de k caracteres. Sejam $\omega_1, ..., \omega_k$ caracteres distintos de A e $\alpha_1, ..., \alpha_k \in F$ tais que para todo $x \in A$ tenhamos

$$\alpha_1\omega_1(x) + \alpha_2\omega_2(x)... + \alpha_k\omega_k(x) = 0 \tag{1.1}$$

Se algum α_i, $i \in \{1, ...k\}$, for nulo, essa soma se reduz a uma outra com menos de k parcelas o que, por hipótese, implica $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$. Suponhamos que todos os α_i, $i \in \{1, ...k\}$, são não nulos. Como $\omega_1 \neq \omega_2$, podemos obter $y \in A$, tal que $\omega_2(y) - \omega_1(y) \neq 0$. Substituindo x por xy em (1.1) temos

$$\alpha_1\omega_1(x)\omega_1(y) + \alpha_2\omega_2(x)\omega_2(y)... + \alpha_k\omega_k(x)\omega_k(y) = 0 \tag{1.2}$$

Agora multipliquemos ambos os membros de (1.1) por $\omega_1(y)$ afim de obter

$$\alpha_1\omega_1(x)\omega_1(y) + \alpha_2\omega_2(x)\omega_1(y)... + \alpha_k\omega_k(x)\omega_1(y) = 0 \tag{1.3}$$

Subtraindo (1.3) de (1.2) teremos

$$\alpha_2[\omega_2(y) - \omega_1(y)]\omega_2(x) + ... + \alpha_k[\omega_k(y) - \omega_1(y)]\omega_k(x) = 0 \tag{1.4}$$

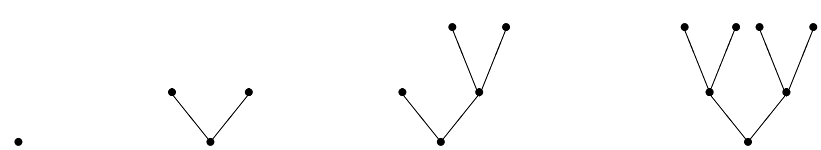
de onde concluímos $\alpha_i[\omega_i(y) - \omega_1(y)] = 0$, $i \in \{2, ..., k\}$. Contradizendo a hipótese $\alpha_2[\omega_2(y) - \omega_1(y)] \neq 0$. Portanto $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$. $\square$

Como estamos supondo que a dimensão de A é finita, segue da proposição anterior o corolário abaixo.

Corolário 1.1.1. *O número de caracteres distintos de A é no máximo igual a* $\dim A = n$.

Os resultados desenvolvidos nesse texto referem-se, em geral, a álgebras não-associativas. Em álgebras desse tipo há diversas maneiras de descrever a potência de um elemento. Por exemplo x^3 pode ser $x(xx)$ ou $(xx)x$. Para eliminar essa ambigüidade usamos o conceito de *árvore binária*. Uma árvore binária T é uma estrutura contendo um número finito de vértices e arestas que definiremos recursivamente como segue: T consta de um único ponto, chamado *vértice* ou *raiz*, ou T possui, além da raiz, que chamaremos R, duas árvores binárias T_1 e T_2, chamadas *sub-árvores esquerda* e *direita* de T, respectivamente. As sub-árvores esquerda e direita possuem raízes R_1 e R_2, respectivamente, e duas arestas ligando R a R_1, e R a R_2. Os vértices que são extremos de uma só aresta são denominados folhas de T.

Exemplo 1. *Abaixo temos os esquemas de algumas árvores binárias.*



Dada uma árvore binária T e $x \in A$, existe uma potência x^{T}, de x associado a T, definido como segue. $x^{\mathrm{T}} = x$, se x consta apenas da raiz e $x^{\mathrm{T}} = x^{\mathrm{T}_1}x^{\mathrm{T}_2}$, se x tem mais de um vértice. A cada potência de x, de grau n, definida em A existe uma árvore binária T, tal que essa potência é representada por x^{T}. De fato, se $n = 1$ tomamos T com apenas um vértice. Caso tenhamos $n > 1$, a potência dada pode ser escrita como produto de duas potências P_1 e P_2, com número de fatores menores que n. Supondo por indução que existem árvores binárias T_1 e T_2 que representam respectivamente P_1 e P_2, toma-se T a árvore binária que tem T_1 e T_2 como sub-árvores.

Exemplo 2. *As árvores do exemplo acima representam respectivamente x, xx, $x(xx)$, $(xx)(xx)$*

Diremos que $x \in A$ é *nilpotente* quando existe uma árvore T, tal que $x^{\mathrm{T}} = 0$. Quando todos os elementos de A forem nilpotentes, diremos que A é *nil*. A proposição seguinte dá uma condição suficiente para que uma álgebra não possua caracteres.

Proposição 1.2. *Uma álgebra nil não possui caracteres.*

Demonstração. Seja $\phi : A \longrightarrow F$ um homomorfismo. Dado $x \in A$, existe T_x, tal que $x^{\mathrm{T}_x} = 0$. Segue-se que $0 = \phi(x^{\mathrm{T}_x}) = \phi(x)^{\mathrm{T}_x} = \phi(x)^n$, em que n é o número de folhas de T_x. Portanto ϕ é nulo. $\square$

Veremos no próximo capítulo um exemplo de álgebra que possui apenas um caracter. A proposição seguinte nos dá uma condição suficiente para isso ocorrer.

Proposição 1.3. *Seja ω um caracter de A. Se $\ker \omega$ é nil, então ω é único.*

Demonstração. Sejam ω e ω_2 caracteres de A e suponhamos que $\ker(\omega)$ é nil. Devemos ter $\omega_2(x) = 0$, qualquer que seja $x \in \ker(\omega)$. Segue-se que $\ker(\omega) \subset \ker(\omega_2)$. Por outro lado, $\ker(\omega)$ e $\ker(\omega_2)$ têm codimensão 1, o que nos dá $\ker(\omega) = \ker(\omega_2)$. Agora segue do lema (4) que $\omega = \omega_2$. $\square$

1.2 Álgebras báricas

Consideremos uma álgebra A sobre F. Dado um caracter ω de A, chamaremos *álgebra bárica* ao par (A, ω). Dado $x \in A$, diremos que $\omega(x)$ é o *peso* de x. Definiremos *ideal bárico* I de (A,ω) por um ideal de A contido em $\ker\omega$. Nesse caso, $(A/I,\overline{\omega})$, em que $\overline{\omega}(a+I)=\omega(a)$, para todo $a\in A$, é uma álgebra bárica. Denotaremos $H=\{x\in A;\ \omega(x)=1\}$. Um elemento $x\in A$ será chamado *idempotente* quando $x^2=x$. Notemos que se $x\in A$ é um idempotente, então $x\in\ker\omega\cup H$, visto que de $x^2=x$ obtemos $\omega(x)^2=\omega(x^2)=\omega(x)$, logo, $\omega(x)=0$ ou $\omega(x)=1$. Vimos que dado $c\notin\ker\omega$ podemos decompor A pondo $A=Fc\oplus\ker\omega$, tomando em particular $c\in H$, podemos escrever $x=\omega(x)c+(x-\omega(x)c)$, qualquer que seja $x\in A$. Desse modo, se J é um ideal à esquerda de $\ker\omega$ e existe $c\in H$ tal que $cJ\subset J$, então J é um ideal à esquerda de A. Vale um resultado análogo para ideais à direita.

Em alguns momentos precisaremos fazer uso de álgebras báricas que posuam idempotentes de peso 1. Podemos obter tais álgebras pelo seguinte processo: tomamos uma álgebra arbitrária N sobre F e aplicações lineares $\lambda,\rho:N\longrightarrow N$, em seguida definimos em $F\oplus N$ uma multilicação dada por

$$(\alpha,a)(\beta,b)=(\alpha\beta,ab+\alpha\lambda(b)+\beta\rho(a))$$

em que $\alpha,\beta\in F$ e $a,b\in N$. Por fim tomamos um caracter ω dado por $\omega(\alpha,a)=\alpha$. Notamos que o elemento $e=(1,0)$ é idempotente de peso 1. A álgebra assim obtida será denotada por $[N,\lambda,\rho]$.

Dadas duas álgebras báricas (A_1,ω_1) e (A_2,ω_2), diremos que $\varphi:A_1\longrightarrow A_2$ é um *homomorfismo bárico* quando φ for um homomorfismo de álgebras e além disso valer $\omega_2\circ\varphi=\omega_1$. Caracterizamos os homomorfismos báricos entre álgebras na forma $[N,\lambda,\rho]$ pela seguinte proposição.

Proposição 1.4. *Consideremos N_1 e N_2 álgebras sobre F, bem como as transformações lineares λ_i,$\rho_i:N_i\longrightarrow N_i$, $i=1,2$.*

(a) *Se $\varphi:[N_1,\lambda_1,\rho_1]\longrightarrow[N_2,\lambda_2,\rho_2]$ é um homomorfismo bárico, então existem $c\in N_2$ e um homomorfismo $\theta:N_1\longrightarrow N_2$ tais que:*

(i) $c^2+\lambda_2(c)+\rho_2(c)=c$*;*

(ii) $\theta \circ \lambda_1 = (\lambda_2 + L_c) \circ \theta$ *e* $\theta \circ \rho_1 = (\rho_2 + R_c) \circ \theta$.

(b) *Reciprocamente, dados um homomorfismo* $\theta : N_1 \longrightarrow N_2$ *e* $c \in N_2$ *tais que valham* (i) *e* (ii), *a aplicação* $\varphi : [N_1, \lambda_1, \rho_1] \longrightarrow [N_2, \lambda_2, \rho_2]$ *definida por* $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$ *é um homomorfismo bárico.*

Demonstração. Supondo que $\varphi : [N_1, \lambda_1, \rho_1] \longrightarrow [N_2, \lambda_2, \rho_2]$ é homomorfismo bárico, temos $\omega_2 \circ \varphi = \omega_1$. Segue-se que $\alpha = \omega_1(\alpha, a) = \omega_2(\varphi(\alpha, a))$ e $\omega_2(\varphi(\alpha, a)) = \omega_2(\varphi_1(\alpha, a), \varphi_2(\alpha, a)) = \varphi_1(\alpha, a)$. Logo $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \varphi_2(\alpha, a))$. Agora tomemos $c = \varphi_2(1, 0)$ e $\theta : N_1 \longrightarrow N_2$ dada por $\theta(a) = \varphi_2(0, a)$ e notemos que $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \varphi_2(\alpha, a)) = (\alpha, \varphi_2((\alpha, 0) + (0, a))) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$. Logo, $\varphi((\alpha, a)(\beta, b)) = \varphi(\alpha\beta, ab + \alpha\lambda_1(b) + \beta\rho_1(a))$, ou seja,

$$\varphi((\alpha, a)(\beta, b)) = (\alpha\beta, \alpha\beta c + \theta(ab) + \alpha\theta\lambda_1(b) + \beta\theta\rho_1(a)) \tag{1.5}$$

Por outro lado, $\varphi(\alpha, a)\varphi(\beta, b) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))(\beta, \beta c + \theta(b))$, de onde concluímos

$$\varphi(\alpha, a)\varphi(\beta, b) = (\alpha\beta, \alpha\beta c^2 + \alpha c\theta(b) + \beta\theta(a)c + \theta(a)\theta(b) + \alpha\beta\lambda_2(c) + \alpha\lambda_2\theta(b) + \alpha\beta\rho_2(c) + \beta\rho_2\theta(a)) \tag{1.6}$$

Igualando (1.5) a (1.6) e agrupando os termos com coeficientes 1 e $\alpha\beta$ obtemos $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$ e $c^2 + \lambda_2(c) + \rho_2(c) = c$. Olhando para os termos com coeficientes α e β vemos que vale (ii).

Segue-se que $\varphi : [N_1, \lambda_1, \rho_1] \longrightarrow [N_2, \lambda_2, \rho_2]$ é homomorfismo bárico se, e somente se, $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$, em que $\theta : N_1 \longrightarrow N_2$ é homomorfismo e $c \in N_2$ satisfazem (i) e (ii). Portanto vale (b). □

Corolário 1.2.1. *Usando as mesmas notações definidas na proposição anterior para* φ *e* θ *temos que* φ *é injetiva (sobrejetiva) se, e somente se,* θ *é injetiva (sobrejetiva).*

Demonstração. Suponhamos que φ é injetiva. Nesse caso $\varphi(\alpha, a) = (0, 0)$ se, e somente se, $(\alpha, a) = (0, 0)$. Supondo $\theta(a) = 0$, como $\varphi(\alpha, a) = (\alpha, \alpha c + \theta(a))$, se tomarmos $\alpha = 0$ teremos $\varphi(0, a) = (0, 0)$. Segue-se que $a = 0$. Portanto, θ é injetiva. Reciprocamente, suponhamos que θ é injetiva. Se $\varphi(\alpha, a) = (0, 0)$, então $(\alpha, \alpha c + \theta(a)) = (0, 0)$. Logo $\alpha = 0$ e $\theta(a) = 0$. Portanto, $\alpha = 0$ e $a = 0$. Segue-se que φ é injetiva.

Se φ é sobrejetiva, então dado $b \in N$ existe $a \in N$ tal que $\varphi(0, a) = (0, b)$. Logo $(0, \theta(a)) = (0, b)$, ou seja, $\theta(a) = b$. Portanto θ é sobrejetiva. Reciprocamente, se θ é sobrejetiva, para cada $b \in N$ e $\beta \in F$ podemos obter $a \in N$ de modo que $\theta(a) = b - \beta c$. Segue-se que $\varphi(\beta, a) = (\beta, \beta c + \theta(a)) = (\beta, b)$. Portanto φ é sobrejetiva. $\square$

Capítulo 2

Álgebras de Bernstein

Uma álgebra bárica (A, ω) é chamada *álgebra de Bernstein* quando todo elemento $x \in A$ verifica

$$(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 \tag{2.1}$$

Neste capítulo estudaremos tais álgebras, algumas de suas importantes subclasses, bem como a invariância certos subespaços.

2.1 Álgebras de Bernstein

Começamos esta seção notando que em uma álgebra de Bernstein (A, ω) o caracter ω é único. De fato, basta lembrarmos da proposição 1.3 e notarmos que dado $x \in \ker \omega$ temos, devido a (2.1), $(x^2)^2 = \omega(x)^2 x^2 = 0$. Portanto, $\ker \omega$ é nil. Segue-se que podemos nos referir a uma álgebra de Bernstein (A, ω) apenas por A, sem mencionar o caracter ω.

A fim de estudarmos algumas subclasses de uma álgebra de Bernstein vamos introduzir a noção de forma invariante. Primeiro tomemos um espaço vetorial A de dimensão finita sobre F. Em seguida consideremos um operador linear em $\mathrm{T} : A \longrightarrow A$ e uma forma linear não-nula $\omega : A \longrightarrow F$, tal que $\omega \circ \mathrm{T} = \omega$. Definimos um produto em A, que torna esse espaço uma álgebra comutativa sobre F, por:

$$2xy = \omega(x)\mathrm{T}(y) + \omega(y)\mathrm{T}(x)$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$.

Observamos que ω é um caracter, visto que é homomorfismo não nulo, pois $2\omega(xy) = \omega(x)\omega(\mathrm{T}(y)) + \omega(y)\omega(\mathrm{T}(x)) = \omega(x)\omega(y) + \omega(y)\omega(x) = 2\omega(x)\omega(y)$. Segue-se que (A, ω) é uma álgebra bárica, chamada *álgebra induzida por* T.

Na próxima seção utilizaremos o conjunto $H = \{x \in A; \omega(x) = 1\}$.

Proposição 2.1. *Em uma álgebra bárica* (A, ω) *induzida por* T*, são equivalentes:*

$$2xy = \omega(x)\mathrm{T}(y) + \omega(y)\mathrm{T}(x), \ \textit{quaisquer que sejam } x, y \in A; \tag{2.2}$$

$$x^2 = \omega(x)\mathrm{T}(x), \ \textit{para todo } x \in A; \tag{2.3}$$

$$x^2 = \mathrm{T}(x), \ \textit{para todo } x \in H. \tag{2.4}$$

Demonstração. Mostremos que (2.3) implica (2.2). Para isso tomemos $(x+y)^2 = \omega(x+y)\mathrm{T}(x+y)$, que após desenvolvido nos dá $x^2+y^2+2xy = \omega(x)\mathrm{T}(x)+\omega(y)\mathrm{T}(y)+\omega(x)\mathrm{T}(y)+\omega(y)\mathrm{T}(x)$. Aplicando (2.3) temos o resultado pedido. Supondo que vale (2.4) podemos obter (2.3) analizando duas possibilidades para $x \in A$. Caso $x \notin \ker\omega$, tomamos $\frac{x}{\omega(x)} \in H$ e aplicamos (2.4). Caso tenhamos $x \in \ker\omega$, basta tomarmos $y \in H$ para obter $x+y \in H$ e por conseguinte, devido a (2.4), teremos $(x+y)^2 = \mathrm{T}(x+y)$. Como $y \in H$, obtemos $x^2 + 2xy = \mathrm{T}(x)$, para todo $y \in H$. Ora, $x + y \in H$, logo $x^2 + 2x(x + y) = \mathrm{T}(x) = x^2 + 2xy$, ou seja, $x^2 = 0$. Portanto, $x^2 = 0 = \omega(x)\mathrm{T}(x)$. Segue-se que em qualquer caso (2.4) implica (2.3). As implicações omitidas são de simples verificação. □

Quando, em uma álgebra (A, ω), induzida por T, o operador T for a identidade em A essa álgebra será chamada *unitária*. Em uma álgebra unitária o produto é dado simplesmente por $2xy = \omega(y)x + \omega(x)y$, quaisquer que sejam $x, y \in A$, o que decorre diretamente de (2.2) e da definição de T. Caso o operador T tenha imagem unidimensional (A, ω) será chamada *constante*, e o produto nessa álgebra será dado por $xy = \omega(x)\omega(y)e$, em que e é um gerador da imagem de T que pertence a H. De fato, suponhamos que $e_1 \in A$ gera a imagem de T. Tem-se, para todo $x \in A$, $\mathrm{T}(x) = \lambda_x e_1$, $\lambda_x \in F$. Note que $\omega(e_1)$ é não nulo, pois $\omega(x) = \omega(\mathrm{T}(x)) = \lambda_x \omega(e_1)$ e $\omega \neq 0$. Logo, podemos escrever $\mathrm{T}(x) = \lambda_x \omega(e_1)\frac{e_1}{\omega(e_1)}$. Pondo $\frac{e_1}{\omega(e_1)} = e$ e $\lambda_x \omega(e_1) = \rho_x$, temos que $\omega(x) = \rho_x$. Concluímos que $\mathrm{T}(x) = \omega(x)e$. Finalmente (2.2) nos fornece $xy = \omega(x)\omega(y)e$.

Seja f uma forma linear em A, em que (A, ω) é uma álgebra bárica comutativa e de dimensão finita sobre F. Diremos que f é uma *forma invariante* em A quando

$$2f(xy) = f(x)\omega(y) + f(y)\omega(x) \tag{2.5}$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$.

Proposição 2.2. *Se (A, ω) é uma álgebra bárica e f, uma forma linear em A então são equivalentes.*

$$2f(xy) = f(x)\omega(y) + f(y)\omega(x), \text{ quaisquer que sejam } x, y \in A; \tag{2.6}$$

$$f(x^2) = \omega(x)f(x), \text{ para todo } x \in A; \tag{2.7}$$

$$f(x^2) = f(x), \text{ para todo } x \in H. \tag{2.8}$$

Demonstração. Primeiramente notemos que se vale (2.7), então $f((x+y)^2) = \omega(x+y)f(x+y)$, quaiquer que sejam $x, y \in A$. Daí decorre (2.6). Supondo (2.8), tomamos $y \in H$ e estudamos dois casos. Se tivermos $x \notin \ker \omega$ podemos escrever $f(\frac{x^2}{\omega(x)^2}) = f(\frac{x}{\omega(x)})$, de onde concluímos (2.7). Caso tenhamos $x \in \ker \omega$, teremos, devido a (2.8), $f((x+y)^2) = f(x+y)$, que implica em $f(x^2) + 2f(xy) = f(x)$, para todo $y \in H$. Ora, $x + y \in H$, logo $f(x^2) + 2f(x(x+y)) = f(x) = f(x^2) + 2f(xy)$. Segue-se que $f(x^2) = 0 = \omega(x)f(x)$. Portanto, em qualquer caso vale (2.7). As implicações omitidas são de verificação imediata. □

Denotaremos por Υ o *conjunto das formas invariantes em* A. Notamos que esse conjunto é um subespaço do espaço dual de A, A^*, cuja dimensão é maior do que, ou igual a 1, pois $\omega \in \Upsilon$. Observamos também que quando (A, ω) é induzida por T, temos

$$\Upsilon = \ker(I - \mathrm{T}^*) \tag{2.9}$$

em que I denota a identidade em A^* e $\mathrm{T}^* : A^* \longrightarrow A^*$ é a transposta de T, conforme definidas em [6]. De fato, suponhamos que $f \in \Upsilon$, tomando $x \in A$ temos dois casos a analisar. Caso tenhamos $x \notin \ker \omega$, teremos $f(\mathrm{T}(x)) = f\left(\frac{x^2}{\omega(x)}\right) = \frac{f(x^2)}{\omega(x)} = f(x)$. Caso seja, $x \in \ker \omega$, usando (2.2), obtemos $2xy = \omega(x)\mathrm{T}(y) + \omega(y)\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}(x)$, qualquer que seja $y \in H$. Segue-se que $f(\mathrm{T}(x)) = f(2xy) = \omega(x)f(y) + \omega(y)f(x) = f(x)$, em que supomos $y \in H$. Portanto, $f \circ \mathrm{T} = f$, ou seja $f \in \ker(I - \mathrm{T}^*)$. Notamos que em uma álgebra unitária o conjunto Υ das formas invariantes coincide com A^*. Em uma álgebra constante temos $\mathrm{T}(x) = \omega(x)e$, para todo $x \in A$, segue-se que $f \in \Upsilon$ implica $f(x) = f(\mathrm{T}(x)) = f(\omega(x)e) = f(e)\omega(x)$. Portanto, quando (A, ω) é constante temos $\Upsilon = \{\lambda\omega; \lambda \in F\}$.

Definimos $\Upsilon^\perp = \{x \in A; f(x) = 0, \text{ para toda } f \in \Upsilon\}$ e $\mathrm{ann}(A) = \{x \in A;\ xy = 0 \text{ para qualquer } y \in A\}$. Tomando $x \in \mathrm{ann}(A)$ e $f \in \Upsilon$, como $xy = 0$ para todo $y \in A$, supondo $y \in H$ vem $0 = 2f(xy) = \omega(x)f(y) + \omega(y)f(x) = \omega(x)f(y) + f(x)$. Observamos também que $x \in \ker \omega$, pois $0 = \omega(xy) = \omega(x)\omega(y) = \omega(x)$. Portanto, $f(x) = 0$, logo

$$\mathrm{ann}(A) \subset \Upsilon^\perp \tag{2.10}$$

Diremos que uma álgebra bárica comutativa (A, ω) é *conservativa* quando

$$\mathrm{ann}(A) = \Upsilon^\perp \tag{2.11}$$

A proposição seguinte mostra-nos em que casos uma álgebra induzida por um operador é conservativa.

Proposição 2.3. *Consideremos uma álgebra bárica comutativa* (A, ω) *induzida por um operador* T*. Nesse caso* (A, ω) *é conservativa se, e somente se* T *é projeção.*

Para demonstrar essa proposição precisamos de dois lemas.

Lema 5. *Sejam* $\mathrm{T} : A \longrightarrow A$ *um operador linear e* I *a identidade em* A*. Temos*

$$\ker(I - \mathrm{T}^*)^\perp = \mathrm{Im}(I - \mathrm{T})$$

Demonstração. Temos

$$\ker(I - \mathrm{T}^*)^\perp = \{x \in A;\ f(x) = 0,\ \text{para qualquer } f \in \ker(I - \mathrm{T}^*)\}$$

$$\mathrm{Im}(I - \mathrm{T}) = \{y \in A;\ y = (I - \mathrm{T})(x),\ \text{com } \ x \in A\}$$

Se $I - \mathrm{T}$ é sobrejetor, então $\mathrm{Im}(I - \mathrm{T}) = A \supset \ker(I - \mathrm{T}^*)^\perp$. Caso contrário, teremos $\mathrm{Im}(I - \mathrm{T}) \subsetneqq A$. Nesse caso, tomamos uma base de $\mathrm{Im}(I - \mathrm{T})$, dada por $\{z_i; 1 \leqslant i \leqslant k,\ z_i \in A\}$, que pode ser completada para uma base de A dada por $D = \{z_i; 1 \leqslant i \leqslant n,\ z_i \in A\}$. Em seguida tomamos a base dual de D em A^*, dada por $\{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n,\ f_i \in A^*\}$. Agora, se $x \in \ker(I - \mathrm{T}^*)^\perp$, então

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j z_j$$

em que $\alpha_i \in F$. Segue-se que $f_{k+l}(x) = \alpha_{k+l}$, $1 \leqslant l \leqslant n - k$. Por outro lado, notemos que f_{k+l} restrita a imagem de $I - \mathrm{T}$ é identicamente nula, ou seja $0 = f_{k+l} \circ (I - \mathrm{T}) = f_{k+l} \circ I - f_{k+l} \circ \mathrm{T}$. Logo, $f_{k+l} \in \ker(I - \mathrm{T}^*)$. E como, $x \in \ker(I - \mathrm{T}^*)^\perp$, concluímos que $\alpha_{k+l} = 0$ para todo $1 \leqslant l \leqslant n - k$. Portanto $x \in \mathrm{Im}(I - \mathrm{T})$. A outra inclusão é de fácil verificação. □

Analogamente podemos mostrar que $\ker(\mathrm{T}^*)^\perp = \mathrm{Im}(\mathrm{T})$

Lema 6. *Seja* (A, ω)*, uma álgebra bárica induzida por* T*. Vale a igualdade* $ann(A) = \ker \mathrm{T}$*.*

Demonstração. Suponhamos que $x \in \ker \mathrm{T}$, como ω é T-invariante, temos $x \in \ker \omega$. Devido a (2.2), temos $2xy = 0$, ou seja $x \in \mathrm{ann}(A)$. Supondo agora $x \in \mathrm{ann}(A)$, usamos (2.3) para ver que $x \in \ker \omega$ ou $x \in \ker \mathrm{T}$. Se $x \in \ker \omega$, tomamos $y \in H$

e novamente por (2.2), temos $0 = 2xy = \omega(x)\mathrm{T}(y) + \omega(y)\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}(x)$. Assim $x \in \ker \mathrm{T}$. $\square$

Finalmente podemos demonstrar a proposição 2.3. Sabemos que (A, ω) é conservativa se, e somente se $\Upsilon^{\perp} \subset \mathrm{ann}(A)$ e que T ser projeção significa $\mathrm{T}\circ(I-\mathrm{T}) = 0$. Agora, usando os lemas acima vemos que $\Upsilon^{\perp} = \ker(I-\mathrm{T}^*)^{\perp} = \mathrm{Im}(I-\mathrm{T}) \subset \ker(\mathrm{T}) = \mathrm{ann}(A)$ se, e somente se $\mathrm{T} \circ (I - \mathrm{T}) = 0$. $\square$

Dado um espaço vetorial A e W, um subespaço de A, definimos $W^{\perp}$ como o subespaço do espaço vetorial dual de A, A^* tal que $f(x) = 0$, quaisquer que sejam $x \in A$ e $f \in W^{\perp}$. De modo contrário, dado um subespaço $U \subset A^*$ definimos $U^{\perp}$ como o subespaço de A, tal que $f(x) = 0$, quaisquer que sejam $f \in U$ e $x \in U^{\perp}$.

A próxima proposição nos dá uma caracterização das álgebras conservativas por meio de uma equação. Para demonstra-la precisaremos de um resultado conhecido, dado como lema.

Lema 7. *Sejam A um espaço vetorial de dimensão finita, W um subespaço de A e U um subespaço de A^*, tais que $W^{\perp} \subset U$. Nessas condições $U^{\perp} \subset W$.*

Demonstração. De fato, tomemos uma base de W dada por $\{x_1, ..., x_k\}$ e completemo-la a uma base de A, dada por $B = \{x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n\}$. Em seguida tomemos a base de A^*, dual de B, dada por $\{f_1, ..., f_n\}$. Dado $x \in U^{\perp}$, temos

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j x_j$$

Ora, $f_{k+l}(x) = \alpha_{k+l}$ e $f_{k+l} \in W^{\perp}$, logo $\alpha_{k+l} = 0$. Portanto, $x \in W$. $\square$

Proposição 2.4. *Uma álgebra bárica comutativa (A, ω) é conservativa se, e somente se*

$$x^2 y = \omega(x) xy \tag{2.12}$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$.

Demonstração. Suponhamos que (A, ω) seja conservativa. Se f é uma forma invariante, então $f(x^2) = \omega(x)f(x)$, para todo $x \in A$. Logo $f(x^2 - \omega(x)x) = 0$, para todo $x \in A$, ou seja $x^2 - \omega(x)x \in \Upsilon^{\perp}$, para todo $x \in A$. Como $\Upsilon^{\perp} = \operatorname{ann}(A)$, tem-se $x^2y = \omega(x)xy$, quaisquer que sejam $x, y \in A$. Reciprocamente se $x^2y = \omega(x)xy$, quaisquer que sejam $x, y \in A$, então $x^2 - \omega(x)x \in \operatorname{ann}(A)$, qualquer que seja $x \in A$. Tomando $f \in \operatorname{ann}(A)^{\perp}$, teremos $f(x^2 - \omega(x)x) = 0$, para todo $x \in A$, ou seja $f \in \Upsilon$. Logo, $\operatorname{ann}(A)^{\perp} \subset \Upsilon$. Portanto, $\Upsilon^{\perp} \subset \operatorname{ann}(A)$. □

Corolário 2.1.1. *Toda álgebra bárica conservativa (A, ω) é uma álgebra de Bernstein.*

Demonstração. De fato, substituindo y por x^2 e em seguida por x em (2.12), obtemos, respectivamente, $x^2x^2 = \omega(x)xx^2$ e $x^2x = \omega(x)xx$, de onde segue $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$.

□

Proposição 2.5. *Seja uma álgebra (A, ω) induzida por um operador T. Temos que (A, ω) é Bernstein se, e somente se T é projeção.*

Demonstração. Suponhamos que (A, ω) é Bernstein. Então, combinando (2.1) com (2.3) vem

$$(x^2)^2 = \omega(x)^3\mathrm{T}(x) \tag{2.13}$$

para todo $x \in A$.

Agora, elevando ao quadrado ambos os membros de (2.3), obtemos $(x^2)^2 = \omega(x)^2\mathrm{T}(x)^2$, para todo $x \in A$.

Podemos obter $\mathrm{T}(x)^2$ substituindo x por $\mathrm{T}(x)$ em (2.3). Posto isso e lembrando que ω é T-invariante conseguimos $\mathrm{T}(x)^2 = \omega(x)\mathrm{T}^2(x)$. Portanto

$$(x^2)^2 = \omega(x)^3\mathrm{T}^2(x) \tag{2.14}$$

para todo $x \in A$.

Combinando (2.13) com (2.14) obtemos $\omega(x)^3[\mathrm{T}(x)-\mathrm{T}^2(x)] = 0$, para todo $x \in A$. Logo, se $x \notin \ker\omega$, temos $\mathrm{T}^2 = \mathrm{T}$. Se $x \in \ker\omega$, tomando $y \in H$, teremos $x + y \notin \ker\omega$. Daí vem, $\mathrm{T}(x) + \mathrm{T}(y) = \mathrm{T}(x + y) = \mathrm{T}^2(x + y) = \mathrm{T}^2(x) + \mathrm{T}^2(y)$, o que nos dá novamente $\mathrm{T}^2 = \mathrm{T}$. Portanto, se (A, ω) é Bernstein, concluímos que T é projeção. A outra implicação decorre diretamente da proposição 2.3 e do corolário 2.1.1. □

Consideremos o subespaço de A^* dado por $B = (A^2)^\perp = \{f \in A^*;\ f(x^2) = 0$, para todo $x \in A\}$. Temos $B \cap \Upsilon = 0$. De fato, sejam $f \in B \cap \Upsilon$ e $x \in A$. Se $x \notin \ker(\omega)$, então, devido a (2.7) e a definição de B, temos $0 = f(x^2) = \omega(x)f(x)$, logo $f(x) = 0$. Caso tenhamos $x \in \ker\omega$, tomamos $y \in H$ e obtemos $0 = 2f(xy) = \omega(x)f(y) + \omega(y)f(x) = f(x)$, usando (2.6).

Como Υ e B são subespaços de A^*, temos $\dim(\Upsilon) + \dim(B) \leqslant \dim(A^*)$. A igualdade ocorre se, e somente a álgebra (A, ω) é induzida por uma projeção. Esse é o conteúdo do próximo teorema. Antes, contudo, precisaremos de alguns resultados preliminares.

Lema 8. *Sejam A um espaço vetorial de dimensão finita sobre F e W um subespaço de A. Temos $(W^\perp)^\perp = W$*

Demonstração. Dado $w \in W$, temos $w \in (W^\perp)^\perp$. Por outro lado, para vermos que $(W^\perp)^\perp \subset W$, tomemos uma base de W dada por $\{v_1, ..., v_k\}$ e completemo-la a uma base de V, $B = \{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$. A seguir tomemos a base $\{f_1, ..., f_k, f_{k+1}, ...f_n\}$, dual de B. Dado $v \in (W^\perp)^\perp$, temos

$$v = \sum_{i=1}^{k} f_i(v)v_i + \sum_{j=k+1}^{n} f_j(v)v_j = \sum_{i}^{k} f_i(v)v_i$$

pois $f_{k+l} \in W^\perp$. Portanto, $v \in W$. □

Lema 9. *Sejam A um espaço vetorial e* T *um operador linear em A, tal que* $\mathrm{T}^2 = \mathrm{T}$. *Temos* $\ker(I - \mathrm{T}^*) \oplus \ker(\mathrm{T}^*) = A^*$

Demonstração. De fato, se $f \in A^*$ então $f = f \circ \mathrm{T} + (f - f \circ \mathrm{T})$, em que

$f \circ \mathrm{T} \in \ker(I - \mathrm{T}^*)$ e $f - f \circ \mathrm{T} \in \ker(\mathrm{T}^*)$. Além do mais, vê-se sem dificuldades que $\ker(I - \mathrm{T}^*) \cap \ker(\mathrm{T}^*) = 0$. $\square$

Lema 10. *Se $\Upsilon \oplus B = A^*$, então $\Upsilon^\perp \oplus B^\perp = A$.*

Demonstração. De fato, como $\Upsilon \oplus B = A^*$, então $\Upsilon^\perp$ e $B^\perp$ são subespaços de A, com interseção nula. Logo, basta mostrarmos que $\dim(\Upsilon^\perp) + \dim(B^\perp) = \dim(A)$. Para estabelecer isso, tomemos um subespaço S de A^* e uma base sua dada por $\{f_i; 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Em seguida completemos essa base à uma base de A^* dada por $D = \{f_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Tomemos agora, a base dual de D em A dada por $\{x_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Dado $v \in S^\perp$, temos $v = \sum_{i=1}^{k}(\alpha_i x_i) + \sum_{j=k+1}^{n}(\alpha_j x_j)$, com $\alpha_i \in F$. É claro que $0 = f_i(v) = \alpha_i$, logo $v = \sum_{j=k+1}^{n}(\alpha_j x_j)$. Portanto, $\dim(S^\perp) = n - k = \dim(A^*) - \dim(S)$. Em particular temos $\dim(\Upsilon^\perp) = \dim(A^*) - \dim(\Upsilon)$ e $\dim(B^\perp) = \dim(A^*) - \dim(B)$. Segue-se o resultado $\dim(\Upsilon^\perp) + \dim(B^\perp) = \dim(A)$. $\square$

Teorema 2.1. *Uma álgebra bárica (A, ω) é induzida por projeção se, e somente se $A^* = \Upsilon \oplus B$.*

Demonstração. Começamos mostrando que em uma álgebra induzida por T temos $A^2 = \mathrm{Im}(\mathrm{T})$. De fato, se $xy \in A^2$, devido a (2.2), temos $xy = \frac{1}{2}\omega(x)\mathrm{T}(y) + \frac{1}{2}\omega(y)\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}\left[\frac{1}{2}\omega(x)y + \frac{1}{2}\omega(y)x\right] \in \mathrm{Im}(\mathrm{T})$. Por outro lado, se $x \notin \ker\omega$ então, devido a (2.3), temos $\mathrm{T}(x) = \frac{x^2}{\omega(x)} \in A^2$. E, se $x \in \ker\omega$, tomando $y \in H$ e usando (2.2), vem que $A^2 \ni 2xy = \omega(x)\mathrm{T}(y) + \omega(y)\mathrm{T}(x) = \mathrm{T}(x)$. Portanto $\mathrm{Im}(\mathrm{T}) \subset A^2$. Segue-se a igualdade.

Agora, suponhamos que (A, ω) é induzida por uma projeção T. Sabemos que $\ker(\mathrm{T}^*)^\perp = \mathrm{Im}(\mathrm{T})$. Usando o lema 8, temos $B = (A^2)^\perp = \mathrm{Im}(\mathrm{T})^\perp = \ker(\mathrm{T}^*)$. Devido ao lema 9 temos $\Upsilon \oplus B = \ker(I - \mathrm{T}^*) \oplus \ker(\mathrm{T}^*) = A^*$. Reciprocamente, supondo $\Upsilon \oplus B = A^*$, o lema 10 nos diz que $A = \Upsilon^\perp \oplus B^\perp$. Consideremos a projeção T, definida por $\mathrm{Im}(\mathrm{T}) = B^\perp$ e $\ker(\mathrm{T}) = \Upsilon^\perp$, e tomemos $z = x^2 - \omega(x)\mathrm{T}(x)$, com $x \in A$. Se $f \in B$, então, como $\mathrm{Im}(\mathrm{T}) = B^\perp$, temos $f(x^2 - \omega(x)\mathrm{T}(x)) = f(x^2) - \omega(x)f(\mathrm{T}(x)) = 0$, para todo $x \in A$. Caso tenhamos $f \in \Upsilon$, então $f(x^2 - \omega(x)\mathrm{T}(x)) = f(x^2) - \omega(x)f(\mathrm{T}(x)) =$

$\omega(x)f(x) - \omega(x)f(\mathrm{T}(x)) = \omega(x)[f(x - \mathrm{T}(x))]$. Como $x - \mathrm{T}(x)$ está no $\ker(\mathrm{T})$, que é projeção, temos $f(x^2 - \omega(x)\mathrm{T}(x)) = 0$. Portanto, $z = 0$, ou seja, (A, ω) é induzida pela projeção T. $\square$

Corolário 2.1.2. *Uma álgebra bárica (A, ω) é unitária se, e somente se $A^* = \Upsilon$.*

Demonstração. Já sabemos que se (A, ω) é unitária, vale $A^* = \Upsilon$. Reciprocamente, supondo que $A^* = \Upsilon$, tomemos a projeção T dada por $\mathrm{Im}(\mathrm{T}) = B^{\perp} = A$. É claro que T é a identidade em A. Logo (A, ω) é unitária. $\square$

2.2 Decomposição de Peirce em álgebras de Bernstein

Nesta seção trataremos da decomposição de uma álgebra de Bernstein (A, ω) a partir de $\ker \omega$. Para isso será fundamental a existência de um idempotente de peso um em A. Essa decomposição nos permitirá estudar certos subespaços de A, conhecidos como p-subespaços. Mais adiante, usando o mesmo processo, obteremos uma decomposição similar para outras álgebras. Começamos obtendo uma generalização de (2.1), obtida por linearização dessa equação. Isso é o que diz o seguinte lema.

Lema 11. *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein sobre um corpo F, com característica diferente de 2. Se F tiver mais de 3 elementos então*

$$2x^2(xy) = \omega(x)^2 xy + \omega(x)\omega(y)x^2 \tag{2.15}$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$.

Demonstração. Substituindo x por $\alpha x + y$, $\alpha \in F$, em (2.1) temos $((\alpha x + y)^2)^2 = \omega(\alpha x + y)^2(\alpha x + y)^2$. Logo,

$$\alpha^4(x^2)^2 + 4\alpha^3 x^2(xy) + 4\alpha^2(xy)^2 + 4\alpha y^2(xy) + (y^2)^2 + 2\alpha^2 x^2 y^2 =$$

$$\alpha^4\omega(x)^2x^2+2\alpha^3\omega(x)^2xy+\alpha^2\omega(x)^2y^2+2\alpha^3\omega(x)\omega(y)x^2$$

$$+4\alpha^2\omega(x)\omega(y)xy+2\alpha\omega(x)\omega(y)y^2+\alpha^2\omega(y)^2x^2+2\alpha\omega(y)^2xy+\omega(y)^2y^2 \qquad (2.16)$$

Devido a (2.1) obtemos

$$\alpha^3(4x^2(xy)-2\omega(x)^2xy+2\omega(x)\omega(y)x^2)+\alpha^2(4(xy)^2+2x^2y^2-\omega(x)^2y^2-4\omega(x)\omega(y)xy-\omega(y)^2x^2)$$

$$+\alpha(4y^2(xy)-2\omega(x)\omega(y)y^2-2\omega(y)^2xy)=0 \qquad (2.17)$$

Substituindo α por $-\alpha$ em (2.17) e subtraindo o resultado de (2.16) obtemos uma identidade que multiplicada por $\frac{1}{4}$ nos dá

$$\alpha^3(2x^2(xy)-\omega(x)^2xy-\omega(x)\omega(y)x^2)+\alpha(2y^2(xy)-\omega(x)\omega(y)y^2-\omega(y)^2(xy))=0 \quad (2.18)$$

Como F tem mais de três elementos, tomamos $\beta\notin\{0,1,-1\}$. Substituindo α por β em (2.18) e simplificando o resultado por β temos

$$\beta^2(2x^2(xy)-\omega(x)^2xy-\omega(x)\omega(y)x^2)+(2y^2(xy)-\omega(x)\omega(y)y^2-\omega(y)^2(xy))=0 \quad (2.19)$$

Substituindo α por 1 em (2.18), temos

$$(2x^2(xy)-\omega(x)^2xy-\omega(x)\omega(y)x^2)+(2y^2(xy)-\omega(x)\omega(y)y^2-\omega(y)^2(xy))=0 \quad (2.20)$$

Subtraindo (2.20) de (2.19), vem

$$(\beta^2-1)(2x^2(xy)-\omega(x)^2xy-\omega(x)\omega(y)x^2)=0$$

Portanto, como $\beta^2\neq 1$, temos

$$2x^2(xy)-\omega(x)^2xy-\omega(x)\omega(y)x^2=0$$

$\square$

Segue de (2.15) que

$$x^2(xy)=0$$

quaisquer que sejam $x, y \in \ker \omega$. Logo, linearizando essa identidade obtemos

$$x_1^2(x_2x_3) + 2(x_1x_2)(x_1x_3) = 0 \tag{2.21}$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2, x_3 \in \ker \omega$

Notamos que toda álgebra de Bernstein possui idempotente de peso um. De fato, como ω é sobrejetor, podemos tomar $x \in A$ tal que $\omega(x) = 1$. Então, da relação que define uma álgebra de Bernstein temos $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2 = x^2$. Portanto x^2 é idempotente, e além do mais $\omega(x^2) = \omega(x)^2 = 1$. A seguir caracterizamos o conjunto dos idempotentes de uma álgebra de Bernstein.

Lema 12. *Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein e $\mathrm{Id}(A)$ o conjunto dos idempotentes de A. Temos*

$$\mathrm{Id}(A) = \{x^2; \omega(x) = 1\} \cup \{0\}$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que todo idempotente não nulo em uma álgebra de Bernstein (A, ω) tem peso 1. De fato, se $x \in A$ é tal que $x^2 = x$, com $x \neq 0$, então $x = x^2 = (x^2)^2 = \omega(x)^2x^2 = \omega(x)^2x$. Segue-se que $x(1 - \omega(x)^2) = 0$. Portanto, $\omega(x)^2 = 1$, ou seja $\omega(x) = 1$, pois todo idempotente tem peso 0 ou 1, visto que $e^2 = e$ implica em $\omega(e^2) = \omega(e)$, logo $\omega(e)(\omega(e) - 1) = 0$. Reciprocamente, é fácil ver que $0 \in \mathrm{Id}(A)$. Além disso, se x^2 é tal que $\omega(x) = 1$, então $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2 = x^2$, ou seja $x^2 \in \mathrm{Id}(A)$. $\square$

Proposição 2.6. *Seja e um idempotente não nulo de uma álgebra de Bernstein (A, ω) sobre um corpo F. Se F possui pelo menos quatro elementos então*

$$2e(2ey) = 2ey \tag{2.22}$$

$$2ey^2 + (2ey)^2 = y^2 \tag{2.23}$$

$$(2ey)y^2 = 0 \tag{2.24}$$

$$(y^2)^2 = 0 \tag{2.25}$$

qualquer que seja $y \in \ker \omega$.

Demonstração. Para obter (2.22) tomemos $x = e$ e $y \in \ker \omega$ em (2.15) e em seguida substituímos ey por $2ey$. Ainda usando (2.15), tomemos x em $\ker \omega$ e substituamos y por e. Desse modo obtemos, $2x^2(xe) = 0$, com $x \in \ker \omega$, de onde decorre (2.24). Ainda em (2.15), substituindo x por $e + z$, com $z \in \ker \omega$ e também substituindo y por e, obtemos $2e+2e(ez)+2e(2ez)+(2ez)(2ez)+2ez^2+2(ez)z^2 = 2e+3ez+z^2$. Em seguida usamos as relações (2.22) e (2.24) para obter $2ez^2 + (2ez)^2 = z^2$, com $z \in \ker \omega$, ou seja (2.23). Finalmente obtemos (2.25) substituindo x por $y \in \ker \omega$ em (2.1). $\square$

Definamos $M_e : \ker \omega \longrightarrow \ker \omega$, que a cada $y \in \ker \omega$ associa $2ey$. Devido a (2.22) M_e é projeção, portanto $\ker \omega = U_e \oplus Z_e$, $U_e = \mathrm{Im} M_e$ e $Z_e = \ker M_e$. Portanto, dada uma álgebra de Bernstein (A, ω) e um idempotente não nulo e, temos

$$A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e \tag{2.26}$$

Em que $U_e = \{y \in \ker \omega; 2ey = y\}$ e $Z_e = \{y \in \ker \omega; ey = 0\}$. A decomposição (2.26) é chamada *decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente e*.

O próximo resultado mostra como os subespaços U_e, Z_e, U_eZ_e, U_e^2 e Z_e^2 se relacionam com relação a inclusão e será muito utilizado no que segue.

Proposição 2.7. *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein. Valem as seguintes inclusões.*

$$U_e^2 \subset Z_e \quad Z_e^2 \subset U_e \quad U_eZ_e \subset U_e$$

Demonstração. Devido a (2.23) temos $M_e(y^2) + M_e(y)^2 = y^2$. Linearizando essa relação obtemos $M_e(y_1y_2) + M_e(y_1)M_e(y_2) = y_1y_2$, em que $y_1, y_2 \in \ker \omega$. Tomando $y_1, y_2 \in U_e$ vem $M_e(y_1y_2) = 0$, ou seja $y_1y_2 \in Z_e$. Portanto, $U_e^2 \subset Z_e$. Além disso, notemos que tomando $y_1 \in \ker \omega$ e $y_2 \in Z_e$, teremos $M_e(y_1y_2) = y_1y_2$. Portanto, $\ker \omega Z_e \subset U_e$. Em particular, $Z_e^2 \subset U_e$ e $U_eZ_e \subset U_e$. $\square$

O próximo resultado nos dá algumas identidades em uma álgebra de Bernstein.

Corolário 2.2.1. *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein com idempotente não nulo e. Então*

$$u^3 = 0 \quad u(uz) = 0 \quad uz^2 = 0 \tag{2.27}$$

$$(u^2)^2 = 0 \quad (uz)^2 = 0 \tag{2.28}$$

quaisquer que sejam $u \in U_e$ e $z \in Z_e$.

Demonstração. Tomando $y \in \ker \omega$, $y = su + tz$, com $s, t \in F$ e $u \in U_e$, $z \in Z_e$ e levando em (2.24) temos $0 = [2e(su + tz)](su + tz)^2 = s^3u^3 + 2s^2tu(uz) + st^2uz^2$. Fazendo $t = 0$ e $s = 1$, temos $u^3 = 0$, restando apenas $2s^2tu(uz) + st^2uz^2 = 0$. Pondo $s = t = 1$ e, em seguida, $t = 1$ e $s = -1$, vem, respectivamente, $2u(uz) + uz^2 = 0$ e $2u(uz) - uz^2 = 0$, de onde obtemos $u(uz) = 0$ e $uz^2 = 0$. Portanto, (2.24) implica (2.27). Analogamente e usando (2.25), vemos que $0 = (y^2)^2 = [(su + tz)^2]^2$ implica

$$(u^2)^2 = (uz)^2 = u^2z^2 = (z^2)^2 = u^2(uz) = (uz)z^2 = 0 \tag{2.29}$$

□

Em uma álgebra de Bernstein podemos obter várias outras identidades envolvendo os elementos de $\ker \omega$, a partir das linearizações das relações (2.27) e (2.28). Esse é o conteúdo do próximo corolário.

Corolário 2.2.2. *Em uma álgebra de Bernstein valem:*

$$u(z_1z_2) = 0 \tag{2.30}$$

$$u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0 \quad u^2(u^2z) = 0 \quad u_1(u_2u_3) + u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2) = 0 \tag{2.31}$$

$$u_1(u_2z) + u_2(u_1z) = 0 \quad u_1^2(u_1u_2) = 0 \quad u_1^2(u_2z) + 2(u_1u_2)(u_1z) = 0 \tag{2.32}$$

$$(u_1z)(u_2z) = 0 = (uz_1)(uz_2) \quad (u_1u_2)z^2 = u^2(z_1z_2) = 0 \tag{2.33}$$

quaisquer que sejam $u, u_1, u_2 \in U_e$ e $z, z_1, z_2 \in Z_e$.

Demonstração. Linearizando $uz^2 = 0$ e lembrando que $u^2 \in Z_e$ obtemos (2.30). Linearizando duas vezes $u^3 = 0$ temos $u_1(u_2u_3) + u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2) = 0$. Tomando $u_1 = u_3$ nessa relação, obtemos $u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0$. A segunda relação em (2.31) é obtida escrevendo $u^2(u^2z) = -2u(u(u^2z))$ utilizando a primeira relação de (2.31). Como $u(u^2z) = 0$, segue que $u(u(u^2z)) = 0$. As identidades em (2.32) são obtidas respectivamente por linearização de $u(uz) = 0$, $(u^2)^2 = 0$ e $u^2(uz) = 0$. Por fim, linearizando $(uz)^2 = 0$ e $u^2z^2 = 0$ obtemos (2.33). □

Definimos $\mathrm{Id}_1(A)$ como o conjunto dos idempotentes não-nulos de A.

O próximo corolário conta-nos que, em uma álgebra de Bernstein, o conjunto $\mathrm{Id}_1(A)$ pode ser parametrizado por U_e.

Corolário 2.2.3. *Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein e e um idempotente não-nulo nessa álgebra. A correspondência $u \mapsto e + u + u^2$ define uma bijeção entre U_e e o conjunto $Id_1(A)$, dos idempotentes não-nulos de A.*

Demonstração. Dado $u \in U_e$, usando as relações do teorema 2.2.1, temos $(e + u + u^2)^2 = e + u + u^2$. Portanto, $e + u + u^2$ é idempotente não nulo. Segue-se que a correspondência $u \mapsto e + u + u^2$ define, de fato, uma função $\varphi : U_e \longrightarrow \mathrm{Id}_1(A)$. Mostremos que φ é uma bijeção. Como $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, vemos sem dificuldades que φ é injetiva. Seja $x \in A$ um idempotente não-nulo. Sabemos que $\omega(x) = 1$, logo $x = e+u+z$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Segue-se que $(e+u+z)^2 = e+(u+2uz+z^2)+u^2$. Da igualdade $x^2 = x$, obtemos $(2uz + z^2) + u^2 = z$. Como $(2uz + z^2) \in U_e$ e $u^2 \in Z_e$, temos $z = u^2$. Portanto, φ é sobrejetiva. □

Segue desse corolário que $\mathrm{Id}_1(A) = \{e + u + u^2; u \in U_e\}$. Assim, se e e f são idempotentes não-nulos em uma álgebra de Bernstein, existe $u_0 \in U_e$ tal que $f = e + u_0 + u_0^2$. Com base nessa observação podemos demonstrar o próximo corolário.

Corolário 2.2.4. *Dados os idempotentes não-nulos e e f de uma álgebra de Bernstein A, com $f = e+u_0+u_0^2$, para algum $u_0 \in U_e$ e supondo $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. As aplicações $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$ e $\iota : Z_e \longrightarrow Z_f$, tais que $\sigma(x) = x + 2u_0x$ e $\iota(z) = z - 2u_0z - 2u_0^2z$,* *com $x \in U_e$ e $z \in Z_e$ são isomorfismos de espaços vetoriais.*

Demonstração. Notemos inicialmente que dados $u_0, x \in U_e$ e $z \in Z_e$, temos $M_f(x+2u_0x) = 2f(x+2u_0x) = 2(e+u_0+u_0^2)(x+2u_0x)$. Desenvolvendo e usando as definições de U_e e Z_e, bem como as identidades obtidas no teorema 2.2.1 e no corolário 2.2.2, obtemos $M_f(x+2u_0x) = x+2u_0x$. Segue-se que σ está bem definida. Analogamente e usando as linearizações obtidas no corolário 2.2.2, temos $M_f(z-2u_0z-2u_0^2z) = 0$. Isso nos mostra que ι também está bem definida. Como $U_e \cap Z_e = 0$, então σ e ι são injetivas. Como $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ tem dimensão finita, pondo $x = \alpha e + u + z$, com $\alpha \in F$, $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, vemos que $\Psi : A \longrightarrow A$, dada por $\Psi(x) = \alpha f + \sigma(u) + \iota(z)$ é sobrejetiva. Logo σ e ι também o são. $\square$

Notamos a partir desse último corolário que as dimensões de U_e e Z_e independem da escolha do indepotente e. Desse modo o par $(1+\dim(U_e), \dim(Z_e))$ é um invariante para as álgebras de Bernstein de dimensão finita. Chamamos esse invariante de *tipo* da álgebra (A, ω).

Podemos obter caracterizações de algumas álgebras de Bernstein a partir de seu tipo, como nos mostra o próximo teorema.

Teorema 2.2. *Uma álgebra bárica (A, ω) é uma álgebra de Bernstein do tipo $(n, 0)$ se, e somente se (A, ω) é uma álgebra unitária.*

Demonstração. Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein e e um idempotente não nulo em A. Tomemos $M_e : \ker \omega \longrightarrow \ker \omega$ tal que $M_e(y) = 2ey$. Notemos que $M_e(y) = y$, para todo $y \in U_e$. Logo M_e é a identidade em $\ker \omega$. Portanto, $2ey = y$. Por outro lado, usando (2.23), temos $2ey^2 + (2ey)^2 = y^2$, que implica em $2ey^2 = 0$. Mas $2ey^2 = M_e(y^2) = y^2$. Segue-se que $y^2 = 0$. Tomando $x \in A$, com $x = \omega(x)e + y$, vem $x^2 = \omega(x)^2 e + 2\omega(x)ey = \omega(x)[\omega(x)e + y] = \omega(x)x$. Portanto (A, ω) é unitária. Reciprocamente, se (A, ω) é unitária, então sabemos que ela é Bernstein. Além do mais, $M_e(y) = 2ey = \omega(e)y + \omega(y)e = y$, qualquer que seja $y \in \ker \omega$. Logo, $M_e(y) = Id_{\ker \omega}$, ou seja, $\dim(Z_e) = 0$. Portanto, (A, ω) é do tipo $(n, 0)$. $\square$

Teorema 2.3. *Uma álgebra bárica* (A, ω) *é Bernstein do tipo* $(1, n-1)$ *se, e somente se* (A, ω) *é uma álgebra constante.*

Demonstração. Notemos que se $\dim(Z_e) = n-1 = \dim(\ker\omega)$, então M_e é identicamente nula. Logo, $2ey = M_e(y) = 0$. Usando (2.23), temos $2ey^2+(2ey)^2 = y^2$, de onde tiramos $2ey^2 = y^2$. No entanto, $2ey^2 = M_e(y^2) = 0$, ou seja, $y^2 = 0$. Tomando $x = \omega(x)e+y$, temos $x^2 = \omega(x)^2e+2\omega(x)ey+y^2 = \omega(x)^2e$. Logo, $x^2 = \omega(x)\mathrm{T}(x)$, com $\mathrm{T}(x) = \omega(x)e$. Portanto (A, ω) é constante. Reciprocamente, se (A, ω) é constante, então (A, ω) é Bernstein e satisfaz $2ey = 2\omega(e)\omega(y)e = 0$, para todo $y \in \ker\omega$. Logo, M_e é identicamente nula, ou seja, (A, ω) é do tipo $(1, n-1)$. □

Corolário 2.2.5. *Uma álgebra de Bernstein de dimensão* $n \leqslant 2$ *é uma álgebra unitária ou constante.*

Demonstração. Se $n = 1$, então (A, ω) é do tipo $(1, 0)$. Portanto, unitária. Caso tenhamos $n = 2$, então há duas possibilidades: (A, ω) é do tipo $(1, 1)$ ou do tipo $(2, 0)$. No primeiro caso (A, ω) é constante e no segundo, unitária. □

Corolário 2.2.6. *Uma álgebra de Bernstein* A *de dimensão* $n > 1$ *não possui elemento unidade.*

Demonstração. De fato, suponhamos que A possui unidade 1. Ponhamos $e = 1$. Tem-se $M_e(y) = 2ey = 2y$, qualquer que seja $y \in \ker\omega$. Logo, $\dim(U_e) = n-1$, ou seja (A, ω) é do tipo $(n, 0)$. Segue-se que (A, ω) é unitária, de onde tiramos $2x = 2ex = x+\omega(x)e$, ou seja, $x = 2\omega(x)e$. Isso no diz que $\dim(A) = 1$, contradizendo a hipótese. □

2.3 Álgebras de Bernstein-Jordan

Uma álgebra comutativa A é chamada *Álgebra de Jordan* quando

$$(x^2y)x = x^2(yx) \tag{2.34}$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$. Uma álgebra de *Bernstein-Jordan* é uma álgebra de Bernstein que também é álgebra de Jordan.

Proposição 2.8. *Seja (A, ω) uma álgebra de Bernstein sobre F com decomposição $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. São equivalentes:*

(a) *A é Jordan;*

(b) *$Z_e^2 = 0$ para todo idempotente não-nulo e;*

(c) *Existe um idempotente não-nulo e tal que $Z_e^2 = 0$ e $(uz)z = 0$, quaisquer que sejam $u \in U_e$ e $z \in Z_e$;*

(d) *A satisfaz a equação $x^3 = \omega(x)x^2$.*

Demonstração. Para mostrar que (a) implica (b) tomemos $x = e + z$ e $y = e$ em (2.34), em que e é um idempotente não nulo e $z \in Z_e$. Teremos $\frac{1}{2}z^2 = z^3$. Substituindo z por $-z$ nessa expressão obtemos $\frac{1}{2}z^2 = -z^3$. Somando as duas últimas expressões obtidas, temos $z^2 = 0$. Como z e e foram tomados arbitrariamente, segue-se que $Z_e^2 = 0$ qualquer que seja o idempotente não nulo e. Supondo que $Z_e^2 = 0$ para todo idempotente não-nulo e, tomamos um idempotente não-nulo e', tal que, devido ao corolário 2.2.3, $e' = e + u_0 + u_0^2$, $u_0 \in U_e$. Sabemos do corolário 2.2.4 que

$$U_{e'} = \{u + 2uu_0; u \in U_e\} \quad \text{ e } Z_{e'} = \{z - 2(u_0 + u_0^2)z; z \in Z_e\}$$

Como $Z_{e'}^2 = 0$, tomamos $z_0' = z_0 - 2(u_0 + u_0^2)z_0$, com $z_0 \in Z_e$ e concluímos que $0 = (z_o')^2 = z_0^2 - 4(u_0z_0)z_0 - 4(u_0^2z_0)z_0 + 4[(u_0 + u_0^2)z_0]^2 = -4(u_0z_0)z_0$. Portanto, $(u_0z_0)z_0 = 0$ quaisquer que sejam $u_0 \in U_e$ e $z_0 \in Z_e$. Supondo (c), tomemos $x = \alpha e + u + z$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, e substituamos em $x^3 - \omega(x)x^2$. Obtemos $x^3 - \omega(x)x^2 =$

$u^3 + u^2z + uz^2 + z^3 + 2u(uz) + 2(uz)z - \frac{1}{2}\alpha z^2 = 0$. Finalmente, supondo que (e) seja válido, linearizamos $x^3 - \omega(x)x^2 = 0$ para obter

$$2x(xy) + x^2y - \omega(y)x^2 - 2\omega(x)xy = 0 \tag{2.35}$$

para quaisquer $x, y \in A$. Depois, multiplicando (2.35) por x obtemos

$$2x[x(xy)] + x(x^2y) - \omega(y)x^3 - 2\omega(x)x(xy) = 0 \tag{2.36}$$

para quaisquer $x, y \in A$. Agora, substituindo y por xy em (2.35) vem

$$2x[x(xy)] + x^2(xy) - \omega(x)\omega(y)x^2 - 2\omega(x)x(xy) = 0 \tag{2.37}$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$. Por fim, subtraindo (2.37) de (2.36), chegamos a $x(x^2y) - x^2(xy) - \omega(y)[x^3 - \omega(x)x^2] = 0$. Devido a hipótese (d) temos $x(x^2y) = x^2(xy)$. Portanto, A é Jordan. $\square$

Linearizando a relação $(uz)z = 0$, obtemos as identidades do corolário abaixo.

Corolário 2.3.1. *Em uma álgebra de Bernstein-Jordan A, com decomposição de peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, para algum idempotente não nulo e, são válidas as identidades:*

$$z_1z_2 = 0 \tag{2.38}$$

$$(uz_1)z_2 + (uz_2)z_1 = 0 \tag{2.39}$$

quaisquer que sejam $u \in U_e$, $z \in Z_e$.

$\square$

Corolário 2.3.2. *Sejam (A, ω) uma álgebra de Bernstein e I um ideal de A contido em* $\ker\omega$. *A álgebra quociente A/I é Jordan se, e somente se $Z_e^2 \subset I$, para cada decomposição $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$.*

Demonstração. Suponhamos que A/I seja Jordan. Tomando $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ e $A/I = F_{e+I} \oplus U_{e+I} \oplus Z_{e+I}$, como A/I é Jordan, vem $Z_{e+I}^2 = 0$. Segue-se que $(z+I)(z_1+I) = 0+I$, quaisquer que sejam $z, z_1 \in Z_e$, ou seja, $Z_e^2 \subset I$. Reciprocamente, tomando $z, z_1 \in Z_e$, se $Z_e^2 \subset I$, então $zz_1 \in Z_e^2$. Logo, $0+I = zz_1+I = (z+I)(z_1+I) = (Z_{e+I}^2)$. Portanto, $(Z_{e+I}^2) = 0$. $\square$

Tomando $A + Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ e $L = \{u \in U_e; uU_e = 0\}$, temos que L é um ideal de A. De fato, dado $u_0 \in L$, vem $2eu_0 = M_e(u_0) = u_0 \in L$. Temos também $uu_0 = 0 \in L$, para todo $u \in U_e$. Finalmente tomando $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, temos $uz \in U_eZ_e \subset U_e$, de onde concluímos que $u_0(uz) = 0$. Levando esse resultado na primeira identidade de (2.32) temos $u(u_0z) = 0$. Portanto, $u_0z \in L$. O próximo resultado nos diz um pouco mais a respeito do ideal L.

Proposição 2.9. *Seja A uma álgebra de Bernstein. O ideal $L = \{u \in U_e; uU_e = 0\}$ é a interseção de todos os subespaços U_e, com $e \in Id_1(A)$.*

Demonstração. Sejam os idempotentes não nulos $e, f \in \mathrm{Id}_1(A)$ e $u_0 \in U_e$ tal que $f = e + u_0 + u_0^2$. Sabemos, devido ao corolário 2.2.4 que

$$U_f = \{u + 2u_0u; u \in U_e\}$$

Portanto, se $u \in U_e \cap U_f$ então existe $u' \in U_e$ tal que $u = u' + 2u_0u'$. Segue-se que $u - u' = 2u_0u'$, logo $u - u' \in U_e \cap U_e^2 \subset U_e \cap Z_e = 0$. Concluímos que $u = u'$ e $u_0u = 0$. Como $\mathrm{Id}_1(A) = \{e + u_0 + u_0^2; u_0 \in U_e\}$, se

$$u \in \bigcap_{e \in \mathrm{Id}_1(A)} U_e,$$

então $u_0u = 0$, para todo $u_0 \in U_e$. Portanto, $u \in L$. Por outro lado, se $u \in L$, então $u = u + 2uu_0 \in U_{e+u_0+u_0^2}$, para todo $u_0 \in U_e$. Logo,

$$u \in \bigcap_{e \in \mathrm{Id}_1(A)} U_e$$

$\square$

Corolário 2.3.3. *Se (A, ω) é uma álgebra de Bernstein, então $(A/L, \overline{\omega})$ é uma álgebra de Bernstein-Jordan.*

Demonstração. Começamos notando que $L \subset \ker \omega$. Além disso, devido a primeira identidade em (2.30), temos $u(zz_1) = 0$, quaisquer que sejam $u \in U_e$ e $z, z_1 \in Z_e$. Segue-se que $zz_1 \in L$, para quaisquer $z, z_1 \in Z_e$, ou seja, $Z_e^2 \subset L$. Portanto, A/L é Jordan. □

Para finalizar esta seção, temos a seguir uma condição para que uma álgebra de Bernstein seja Jordan.

Corolário 2.3.4. *Seja (A, ω) uma Bernstein do tipo $(1 + r, s)$ com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. Seja também $\delta = \dim(U_e^2)$. Se $\delta > \frac{1}{2}r(r-1)$, então A é Jordan.*

Demonstração. Tomemos U', um subespaço complementar de L em U_e, ou seja $U_e = L \oplus U'$. Temos $U_e^2 = L^2 + (U')^2 + LU' = (U')^2$. Supondo $L \neq 0$, concluímos que $\dim(U') = r - \dim(L) \leqslant r - 1$. Logo, $\dim(U_e^2) = \dim((U')^2) \leqslant \frac{1}{2}r(r-1)$. Portanto, se $\dim(U_e^2) > \frac{1}{2}r(r-1)$, então $L = 0$. Segue-se do corolário anterior que $A/L \cong A$ é uma álgebra de Jordan. □

2.4 P-subespaços em álgebras de Bernstein

Seja uma álgebra de Bernstein (A, ω) com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. Usando os subespaços U_e e Z_e podemos obter subespaços do tipo $(U_eZ_e + Z_e^2) \oplus Z_e$. Certos subspaços de $\ker \omega$ como esse, permanecem inalterados se trocarmos o idempotente na decomposição da álgebra $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. Há um interesse especial em estudar subespaços de $\ker \omega$ com essa propriedade. Esse será o caminho a percorrer nesta seção, na qual estudaremos os p-subespaços em uma álgebra de Bernstein, bem como a invariância desses subespaços pela troca do idempotente na decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$.

Exemplo 3. *Tomemos uma álgebra de Bernstein* (A, ω) *com idempotente não nulo* e*. Consideremos sua decomposição de Peirce* $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$*. Mostremos que o subespaço de* $\ker \omega$ *dado por* $(U_eZ_e + Z_e^2) \oplus Z_e$ *permanece inalterado se trocarmos o idempotente* e*. De fato, tem-se* $\Upsilon^\perp = (U_eZ_e + Z_e^2) \oplus Z_e$*, em que* Υ *é, como foi definido anteriormente, o conjunto das formas invariantes em* A*. Para estabelecer isso, tomemos* $x \in A$*, na forma* $x = \omega(x)e + u + z$*, com* $u \in U_e$ *e* $z \in Z_e$*. Sabemos que* f *é uma forma invariante quando* $f(x^2) = \omega(x)f(x)$*, ou seja* $f[(\omega(x)e + u + z)^2] = \omega(x)f(\omega(x)e + u + z)$*, que desenvolvido nos dá* $\omega(x)f(u) + f[(u+z)^2] = \omega(x)f(u+z)$*. Essa expressão equivale a* $f[(u+z)^2] = 0$ *e* $f(u+z) = f(u)$*, que por sua vez equivale a* $f(z) = f(u^2) = f(uz) = f(z^2) = 0$*. Mostramos que* $\Upsilon \subset [(U_eZ_e + Z_e^2) \oplus Z_e]^\perp$*. Por outro lado se* $f \in [(U_eZ_e + Z_e^2) \oplus Z_e]^\perp$*, então* $f(z) = f(uz) = f(z^2) = 0$*, e como* $U_e^2 \subset Z_e$*, tem-se* $f(u^2) = 0$*. Segue-se que* $f \in \Upsilon$*. Portanto,*

$$\Upsilon^\perp = (U_eZ_e + Z_e^2) \oplus Z_e \tag{2.40}$$

Nesse exemplo, estabelecemos que $(U_eZ_e + Z_e^2) \oplus Z_e$ não varia pela troca do idempotente, mostrando que esse espaço é, na verdade, um espaço conhecido e que não depende do idempotente, qual seja: $\Upsilon^\perp$. Veremos como estabelecer quando um espaço desse tipo não varia pela troca do idempotente por outro processo. Antes, porém, precisamos de algumas definições.

Consideremos uma decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ de uma álgebra de Bernstein. Os subespaços de A, obtidos a partir de expressões monomiais contendo U_e e Z_e são chamados *p-monômios*. São exemplos de p-monômios

$$U_e \quad Z_e \quad U_e^2 \quad Z_e^2 \quad U_eZ_e \quad U_e^2(U_eZ_e)$$

Se m_e denota um p-monômio, então ∂m_e indica o *grau* de m_e. Devido as inclusões do lema (2.7, válidas em uma álgebra de Bernstein, temos duas possibilidades para um p-monômio: $m_e \subset U_e$ ou $m_e \subset Z_e$. Um *p-subespaço* de A é uma soma finita de p-monômios, como por exemplo:

$$U_e \quad Z_e \quad U_e + Z_e \quad U_eZ_e + Z_e^2 \quad (U_e^2 + Z_e^2) + U_e$$

De um modo preciso, um p-subespaço é obtido a partir de um polinômio $p(x, y)$, sem termo constante e com todos os coeficientes iguais a 1, de variáveis comutativas e não-associativas, pela substituição de x por U_e e y por Z_e. Tais p-subespaços serão denotados por p_e. Dado um p-subespaço existem dois subespaços $g_e \subset U_e$ e $h_e \subset Z_e$, tais que $p_e = g_e \oplus h_e$. Quando $p_e = p_f$, para todo par de idempotentes $e, f \in A$, diremos que p_e é *invariante*. Caso tenhamos $\dim(p_e) = \dim(p_f)$, para todo par $e, f \in \mathrm{Id}(A)$, diremos que p_e tem *dimensão invariante*. É claro que $U_e \oplus Z_e = \ker\omega$ é invariante, logo tem dimensão invariante. Devido ao corolário (2.2.4), U_e e Z_e também possuem dimensão invariante. A expressão $\langle X\rangle$, denota o *espaço gerado pelo conjunto* X.

Essas definições serão usadas nos demais capítulos.

Exemplo 4. *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma decomposição de Peirce para a álgebra de Bernstein A. Tomemos o polinômio $p(x, y) = X + X^2$ e mostremos que $p_e = p_f$, para todo par de idempotentes $e, f \in Id_1(A)$. Tomemos σ, conforme definido no corolário (2.2.4) por $\sigma(u) = u + 2uu_0$. Dados dois idempotentes não nulos $e, f \in A$, pelo corolário 2.2.3, temos $f = e + u_0 + u_0^2$ para algum $u_0 \in U_e$. Desse modo, $p_f = U_f + U_f^2 = \langle\sigma(u_1) + \sigma(u_2)^2; u_1, u_2 \in U_e\rangle$. Logo $p_f = \langle u_1 + 2u_1u_0 + (u_2 + 2u_2u_0)^2; u_1, u_2 \in U_e\rangle = \langle u_1 + 2u_1u_0 + u_2^2 + 4u_2(u_2u_0) + 4(u_2u_0)^2; u_1, u_2 \in U_e\rangle \subset U_e + U_e^2 = p_e$. Portanto, p é invariante e por conseguinte tem dimensão invariante.*

Vimos no corolário 2.2.4 que $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$ e $\iota : Z_e \longrightarrow Z_f$, dadas por $\sigma(u) = u + 2u_0u$ e $\iota(z) = z - 2u_0z - 2u_0^2z$, com $u_0 \in U_e$ tal que $f = e + u_0 + u_0^2$, são isomorfismos de espaços vetoriais. Consideremos $\xi : U_e \longrightarrow U_e$, dada por $\xi(u) = u - 2u_0^2u$. Afirmamos que, em uma álgebra de Bernstein-Jordan, ξ também é isomorfismo de espaços vetoriais. De fato, se $\xi(u) = 0$, então $u = 2u_0^2u$. Multiplicando essa equação por u_0 e usando (2.34) e (2.32) obtemos $uu_0 = 2u_0(u_0^2u) = 2u_0^2(u_0u) = 0$. Além do mais, devido a primeira relação em (2.31), temos $u = 2u_0^2u = -4u_0(u_0u) = 0$. Portanto, ξ é injetiva, e como $\dim U_e$ é finita, ξ é também sobrejetiva.

Definimos $\phi : A \longrightarrow A$, por $\phi(\alpha e + u + z) = \alpha f + \sigma(u) + \iota(z)$, $u \in U_e$ e $z \in Z_e$.

De acordo com o corolário 2.2.4, ϕ é um isomorfismo. Chamaremo-lo *transformação de Peirce relativa aos idempotentes* $e, f \in Id_1(A)$.

A próxima proposição faz uso desses isomorfismos.

Proposição 2.10. *Seja A uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ satisfazendo $U_e^2Z_e = 0$ e $(uz)z = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Sejam também os isomorfismos σ, ι e ξ definidos acima. Nessas condições valem*

(a) $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = \iota(u_1u_2)$;

(b) $\sigma(u)\iota(z) = \sigma(\xi(u)z)$;

(c) $\iota(z_1)\iota(z_2) = \sigma(z_1z_2) = z_1z_2$;

(d) $\xi(\xi(u)z) = uz$.

quaisquer que sejam $u, u_1, u_2 \in U_e$ e $z, z_1, z_2 \in Z_e$.

Demonstração. Inicialmente observemos que se A é uma álgebra de Bernstein satisfazendo as hipóteses dessa proposição, então vale a identidade

$$(uz_1)z_2 + (uz_2)z_1 = 0 \tag{2.41}$$

para quaisquer $u \in U_e$ e $z_1, z_2 \in Z_e$ que é a linearização de $(uz)z = 0$. Desenvolvendo $\sigma(u_1)\sigma(u_2)$ temos $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = (u_1 + 2u_0u_1)(u_2 + 2u_0u_2) = u_1u_2 + 2u_1(u_0u_2) + 2u_2(u_0u_1) + 4(u_0u_1)(u_0u_2)$. Considerando as relações (2.21) e (2.31), temos $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = \iota(u_1u_2)$. Do mesmo modo, $\sigma(u)\iota(z) = (u + 2u_0u)(z - 2u_0z) =$

$uz - 2u(u_0z) + 2z(u_0u) - 4(u_0u)(u_0z)$. Usando (2.32) e (2.21), vemos que $\sigma(u)\iota(z) = uz + 2u_0(uz) + 2u_0^2(uz)$. Segue de (2.41) que $\sigma(u)\iota(z) = uz + 2u_0(uz) - 2z(u_0^2u)$. Agora devido a (2.31), (2.32) e (2.33), temos

$$u_0((u_0^2u)z) = -(u_0^2u)(u_0z) = 2(u_0(u_0u))(u_0z) = 0 \tag{2.42}$$

Segue-se que $\sigma(u)\iota(z) = \sigma(uz - 2z(u_0^2u)) = \sigma(\xi(u)z)$. Para demonstrar a parte (c), calculemos $\iota(z_1)\iota(z_2) = (z_1 - 2u_0z_1)(z_2 - 2u_0z_2) = z_1z_2 - 2z_2(u_0z_1) - 2z_1(u_0z_2) + 4(u_0z_1)(u_0z_2)$. Agora segue de (2.33) e de (2.41) que $\iota(z_1)\iota(z_2) = z_1z_2$. Finalmente, de (2.30) segue que $\sigma(z_1z_2) = z_1z_2 + 2u_0(z_1z_2) = z_1z_2$. Portanto, vale a igualdade. Para mostrar a validade de (d), notemos inicialmente que, a partir de (2.41), temos $u_0^2((u_0^2u)z) = -z((u_0^2u)u_0^2)) = 0$, pois estamos supondo $(uz)z = 0$. Usando essa relação, bem como (2.41) temos $\xi(\xi(u)z) = \xi(uz - 2z(u_0^2u)) = uz - 2z(u_0^2u) - 2u_0^2(uz) + 4u_0^2((u_0^2u)z) = uz$ □

A partir dessa proposição vemos que se existe um idempotente $e \in A$ tal que $U_e^2Z_e = 0$ e $(uz)z = 0$, quaisquer que sejam $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, então $U_f^2Z_f = 0$ e $(uz)z = 0$ é valido para qualquer idempotente $f \in A$. De fato, seja $f \in A$ um idempotente. Temos $f = e + u_0 + u_0^2$, para algum $u_0 \in U_e$. Logo, $U_f^2Z_f = \langle(\sigma(u_1)\sigma(u_2))\iota(z); u_1, u_2 \in U_e, z \in Z_e\rangle = \langle\iota(u_1u_2)\iota(z); u_1, u_2 \in U_e, z \in Z_e\rangle = \langle(u_1u_2)z; u_1, u_2 \in U_e, z \in Z_e\rangle = 0$. Além do mais, $(\sigma(u)\iota(z))\iota(z) = \sigma(\xi(u)z)\iota(z) = \sigma(\xi(\xi(u)z)z) = \sigma((uz)z) = 0$. Assim, a condição sobre A imposta na proposição 2.10 é invariante com relação a escolha do idempotente.

Observamos também que segue da proposição 2.8 que toda álgebra de Bernstein-Jordan satisfaz as condições da proposição 2.10.

Corolário 2.4.1. *Seja A uma álgebra de Bernstein com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ tal que $U_e^2Z_e = 0$ e $(uz)z = 0$, quaisquer que sejam $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Se $X, X_1, X_2 \subset U_e$ e $W, W_1, W_2 \subset Z_e$ são subespaços de A, então*

(a) $(XW_1)W_2 = (XW_2)W_1$;

(b) $\sigma(X_1)\sigma(X_2) = \iota(X_1X_2)$;

(c) $\sigma(X)\iota(W) = \sigma(\xi(X)W)$;

(d) $\iota(W_1)\iota(W_2) = \sigma(W_1W_2)$.

Demonstração. A demonstração de (a) decorre da aplicação da relação (2.41) aos geradores de X, W_1 e W_2. Os demais ítens decorrem diretamente da proposição anterior. □

Lema 13. *Sejam $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein e p_e um p-subespaço. Se $U_e^2 Z_e = 0$ e $(uz)z = 0$, então $U_e^2 p_e \subset p_e$.*

Demonstração. É suficiente demonstrar o lema para p-monômios. Usaremos indução sobre o grau do p-monômio m_e. Se o grau de m_e for 1, então $m_e = U_e$ ou $m_e = Z_e$. Logo $U_e^2 m_e = U_e^2 U_e$, ou $U_e^2 m_e = U_e^2 Z_e$. No primeiro caso, $U_e^2 U_e \subset Z_e U_e \subset U_e$ e no segundo caso, $U_e^2 Z_e = 0 \subset Z_e$. Em qualquer caso $U_e^2 m_e \subset m_e$. Suponhamos que a assertiva seja válida para todo p-monômio cujo grau é menor do que k. Se m_e é um p-monômio de grau k, $k \geq 2$, então há três possibilidades para m_e: ou $m_e = \mu_{1_e}\mu_{2_e}$, ou $m_e = \nu_{1_e}\nu_{2_e}$, ou $m_e = \mu_e\nu_e$, em que supomos que $\mu_e, \mu_{1_e}, \mu_{2_e} \subset U_e$ e $\nu_e, \nu_{1_e}, \nu_{2_e} \subset Z_e$ são p-monômios de grau menor do que k. No primeiro caso, $m_e = \mu_{1_e}\mu_{2_e}$, temos $U_e^2 m_e = U_e^2(\mu_{1_e}\mu_{2_e}) \subset U_e^2 Z_e = 0 \subset m_e$. Para o segundo caso, $m_e = \nu_{1_e}\nu_{2_e}$, linearizamos a relação $u^2z^2 = 0$, $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, obtida em (2.29), para escrever $(u_1u_2)(z_1z_2) = 0$, quaisquer que sejam $u_1, u_2 \in U_e$ e $z_1, z_2 \in Z_e$. Agora podemos ver que, $U_e^2(\nu_{1_e}\nu_{2_e}) = 0 \subset m_e$. No caso em que $m_e = \mu_e\nu_e$, usamos a hipótese de indução e a parte (a) do corolário 2.4.1, para ver que $U_e^2 m_e = U_e^2(\mu_e\nu_e) = \nu_e(U_e^2\mu_e) \subset \nu_e\mu_e = m_e$. Segue-se que para todo p-monômio m_e, temos $U_e^2 m_e \subset m_e$. □

Lema 14. *Sejam $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra de Bernstein, $g_e \subset U_e$ um p-subespaço e $\xi : U_e \longrightarrow U_e$, dada por $\xi(u) = u - 2u_0^2 u$. Se $U_e^2 Z_e = 0$ e $(uz)z = 0$, quaisquer que sejam $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, então $\xi(g_e) = g_e$.*

Demonstração. Vimos que $\xi : U_e \longrightarrow U_e$ é um isomorfismo. Logo, basta mostrar que $\xi(g_e) \subset g_e$. Tomando $u \in g_e$, temos $\xi(u) = u - 2u_0^2 u \in g_e + U_e^2 g_e = g_e$. $\square$

Finalmente, temos o teorema que caracteriza a invariância de p-subespaços em uma álgebra de Bernstein satisfazendo $U_e^2 Z_e = 0$ e $(uz)z = 0$, quaisquer que sejam $u \in U_e$ e $z \in Z_e$.

Teorema 2.4. *Seja A uma álgebra de Bernstein satisfazendo $U_e^2 Z_e = 0$ e $(uz)z = 0$, quaisquer que sejam $u \in U_e$ e $z \in Z_e$.*

(a) *Todo p-subespaço p_e de A satisfaz $\phi(p_e) = p_f$, em que ϕ é a transformação de Peirce relativa aos idempotentes $e, f \in Id_1(A)$.*

(b) *São equivalentes*

1. *p_e é invariante;*
2. *$U_e p_e \subset p_e$.*

Demonstração. É suficiente demonstrar a primeira parte do teorema para p-monômios. Usaremos indução sobre o grau do p-monômio. Tomemos $e, f \in \mathrm{Id}_1(A)$ e $u_0 \in U_e$ tal que $f = e + u_0 + u_0^2$. Se m_e é um p-monômio de A de grau 1, então $m_e = U_e$ ou $m_e = Z_e$. Temos

$$U_f = \sigma(U_e) = \phi(U_e) \qquad Z_f = \iota(Z_e) = \phi(Z_e)$$

Suponhamos que o resultado seja válido para todo p-monômio de grau menor do que k. Se m_e é um p-monômio de grau k, $k \geq 2$. Existem três possibilidades para m_e:

$$m_e = \mu_e \nu_e \qquad m_e = \nu_{1_e} \nu_{2_e} \qquad m_e = \mu_{1_e} \mu_{2_e}$$

em que $\mu_e, \mu_{1_e}, \mu_{2_e} \subset U_e$ e $\nu_e, \nu_{1_e}, \nu_{2_e} \subset Z_e$ são p-monômios com grau menor do que k. Se $m_e = \mu_e \nu_e$, então $m_f = \mu_f \nu_f = \sigma(\mu_e)\iota(\nu_e) = \sigma(\xi(\mu_e)\nu_e) = \sigma(\mu_e \nu_e) = \sigma(m_e) =$

$\phi(m_e)$. Se tivermos $m_e = \nu_{1_e}\nu_{2_e}$, então $m_f = \nu_{1_f}\nu_{2_f} = \iota(\nu_{1_e})\iota(\nu_{2_e}) = \sigma(\nu_{1_e}\nu_{2_e}) = \sigma(m_e)\phi(me)$. Por fim, caso tenhamos $m_f = \mu_{1_f}\mu_{2_f} = \sigma(\mu_{1_e})\sigma(\mu_{2_e}) = \iota(\mu_{1_e}\mu_{2_e}) = \iota(m_e) = \phi(m_e)$. Para a segunda parte, tomemos $p_e = g_e \oplus h_e$, em que $g_e \subset U_e$ e $h_e \subset Z_e$ são p-subespaços. Da primeira parte temos $p_f = g_f \oplus h_f = \{\sigma(x) + \tau(z) : x \in g_e\ ,\ z \in h_e\}$. Portanto,

$$p_f = \{(x - 2u_0z - 2u_0^2z) + (z + 2u_0x) : x \in g_e\ ,\ z \in h_e\} \tag{2.43}$$

Suponhamos que p_e seja invariante, ou seja, $p_e = p_f$ para todo par de idempotentes $e, f \in Id(A)$. De (2.43) concluímos que existem $x' \in g_e$ e $z' \in h_e$, tais que $x - 2u_0z - 2u_0^2z = x'$ e $z + 2u_0x = z'$. Seguem-se que $u_0z = \frac{1}{2}(x - x') - u_0^2z$ e $u_0x = \frac{1}{2}(z' - z)$. Concluímos que $U_eh_e \subset g_e + U_e^2Z_e = g_e$ e $U_eg_e \subset h_e$. Portanto, $U_ep_e \subset p_e$. Reciprocamente, suponhamos que $U_ep_e \subset p_e$. Reescrevemos (2.43), para obter,

$$p_f = \{x + z + 2u_0(x - z) - 2u_0^2z : x \in g_e \quad z \in h_e\}$$

Segue-se que $p_f \subset p_e + U_ep_e + U_e^2Z_e$. Logo, $p_f \subset p_e$ quaisquer que sejam $e, f \in Id(A)$. Portanto, p_e é invariante. □

Segue imediatamente da parte (a) desse teorema o seguinte corolário.

Corolário 2.4.2. *Todo p-subespaço de uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ que satisfaz $U_e^2Z_e = 0$ e $(uz)z = 0$, para quaisquer $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, tem dimensão invariante.*

Como as álgebras de Bernstein-Jordan satisfazem a condição do corolário anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.4.3. *Nas álgebras de Bernstein-Jordan todo p-subespaço tem dimensão invariante.*

Capítulo 3

Álgebras satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$

Neste capítulo, estudaremos as álgebras báricas comutativas (A, ω) satisfazendo

$$(x^2)^2 = \omega(x)x^3 \tag{3.1}$$

Nosso objetivo é estudar os p-subespaços nessa álgebra, assim como a invariância deles. Veremos que, na presença de um idempotente, essa álgebra possui uma decomposição de Peirce e muitas consequencias obtidas daí são similares aos resultados obtidos para as álgebras de Bernstein.

3.1 Decomposição de Peirce

Seja uma álgebra bárica (A, ω) comutativa satisfazendo $(x^2)^2 - \omega(x)x^3 = 0$ para todo $x \in A$. A partir dessa identidade vemos que

$$(x^2)^2 = 0 \tag{3.2}$$

qualquer que seja $x \in \ker \omega$. A primeira e segunda linearizações dessa equação nos permitem escrever

$$x_1^2(x_1x_2) = 0 \tag{3.3}$$

$$x_1^2(x_2x_3) + 2(x_1x_2)(x_1x_3) = 0 \tag{3.4}$$

quaisquer $x_1, x_2, x_3 \in \ker\omega$. O próximo resultado caracteriza o conjunto dos idempotentes de peso 1 nessa álgebra.

Proposição 3.1. *Seja (A, ω) uma álgebra bárica comutativa satisfazendo (3.1). O conjunto dos idempotentes de peso 1 nessa álgebra é dado por*

$$\mathrm{Id}_1(A) = \{z^3; \omega(z) = 1\} \tag{3.5}$$

Demonstração. Como ω é uma forma linear não nula, ω é sobrejetora. Tomemos $z \in A$, tal que $\omega(z) = 1$ e mostremos que z^3 é um idempotente de não-nulo de A. Primeiramente linearizemos (3.1) para obter

$$4x^2(xy) = \omega(y)x^3 + \omega(x)[x^2y + 2x(xy)] \tag{3.6}$$

válida quaisquer que sejam $x, y \in A$. Em seguida substituímos x por $x + y$ em (3.1). Desenvolvendo e usando (3.6) obtemos

$$4(xy)^2 + 2x^2y^2 = \omega(x)[xy^2 + 2y(xy)] + \omega(y)[x^2y + 2x(xy)] \tag{3.7}$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$. Notemos que, tomando $x = z$ em (3.1) vem $(z^2)^2 = z^3 \neq 0$. Usando essa equação e o resultado da substituição $x = z^2$ em (3.1), temos $(z^3)^2 = (z^2)^3$. Mais ainda, como $(z^2)^3 = z^2(z^2)^2$, temos $(z^3)^2 = z^2z^3$. Tomando sucessivamente $x = z^2$ e $y = z$, e em seguida $x = z$ e $y = z^2$ em (3.6), temos respectivamente

$$4(z^3)^2 = (z^2)^3 + zz^3 + 2z^2z^3 \tag{3.8}$$

$$4z^2z^3 = 2z^3 + 2zz^3 \tag{3.9}$$

Segue-se de (3.8) que $(z^3)^2 = zz^3$. Por outro lado, igualando (3.8) com (3.9) temos $(z^2)^3 + zz^3 + 2z^2z^3 = 2z^3 + 2zz^3$, de onde tiramos $3(z^2)^3 = 2z^3 + zz^3$. Portanto, $(z^3)^2 = z^3$. Desse modo, z^3 tal que $\omega(z) = 1$ é um idempotente de A e como $\omega(z^3) = \omega(z)^3 = 1$, z^3 é não nulo, ou seja $\mathrm{Id}_1(A) \supset \{z^3; \omega(z) = 1\} \neq \phi$. Para ver que outra inclusão é verdadeira, tomemos um idempotente $z \in \mathrm{Id}_1(A)$. Logo $z^2 = z$ e $\omega(z) = 1$. Tomando o Quadrado em ambos os membros de $z^2 = z$, obtemos $(z^2)^2 = z^2 = z$. Como $\omega(z) = 1$, temos de (3.1) que $(z^2)^2 = z^3$, ou seja $z^3 = z$. Portanto, vale (3.5). $\square$

Fazendo $x = e \in \mathrm{Id}_1(A)$ e $y = z \in \ker\omega$ nas equações (3.7) e (3.6) obtemos respectivamente

$$4(ez)^2 + ez^2 = 2z(ez) \tag{3.10}$$

$$2e(ez) = ez \tag{3.11}$$

Tomando $x = z \in \ker\omega$ e $y = e$ em (3.6) vem

$$4z^2(ez) = z^3 \tag{3.12}$$

Tomando um idempotente $e \in \mathrm{Id}_1(A)$ e escrevendo $N = \ker\omega$, definimos $M_e : N \longrightarrow N$, que a cada $z \in N$ associa $M_e(z) = ez$. A relação (3.11) garante que $M_e^2 = \frac{1}{2}M_e$. Segue-se que $N = U_e \oplus Z_e$, em que

$$U_e = \{x \in \ker\omega; ex = \frac{1}{2}x\}$$

$$Z_e = \{z \in \ker\omega; ez = 0\}$$

são a imagem, $\mathrm{Im}(M_e)$, e o $\ker(M_e)$, respectivamente. Ora, sabemos que na presença de um idempotente de peso 1, $e \in \mathrm{Id}_1(A)$, temos a decomposição $A = Fe \oplus N$. Portanto, $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. Essa decomposição obtida para A é chamada *decomposição de Peirce relativa ao idempotente e.*

Proposição 3.2. *Em uma álgebra bárica comutativa (A, ω), satisfazendo (3.1), com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, valem as seguintes inclusões.*

$$U_e Z_e \subset U_e \qquad U_e^2 \subset Z_e \quad e \qquad Z_e^2 \subset Z_e \tag{3.13}$$

Demonstração. Linearizando (3.10) obtemos

$$4(ez_1)(ez_2) + e(z_1 z_2) = z_1(ez_2) + z_2(ez_1) \qquad z_1, z_2 \in \ker \omega \tag{3.14}$$

Tomando $z_1, z_2 \in U_e$ nessa identidade obtemos $z_1 z_2 + e(z_1 z_2) = z_1 z_2$, ou seja $e(z_1 z_2) = 0$. Portanto, $z_1 z_2 \in Z_e$, ou seja $U_e^2 \subset Z_e$. Analogamente, considerando $z_1, z_2 \in Z_e$ nessa mesma identidade temos $e(z_1 z_2) = 0$. Segue-se novamente que $z_1 z_2 \in Z_e$, logo $Z_e^2 \subset Z_e$. Finalmente, e ainda usando (3.14), tomamos $z_1 \in U_e$ e $z_2 \in Z_e$. Consequentemente vem $e(z_1 z_2) = \frac{1}{2} z_1 z_2$. Portanto, $z_1 z_2 \in U_e$, ou seja $U_e Z_e \subset U_e$. $\square$

Tomando $z = u \in U_e$ em (3.12), temos $2u^3 = u^3$, ou seja, $u^3 = 0$. Fazendo $z \in Z_e$ na mesma equação, vem $z^3 = 0$. A partir da primeira linearização de (3.12) temos $8(z_1 z_2)(ez_2) + 4z_2^2(ez_1) = z_1 z_2^2 + 2z_2(z_1 z_2)$, para quaisquer $z_1, z_2 \in \ker \omega$. Supondo nessa igualdade $z_1 = z \in Z_e$ e $z_2 = u \in U_e$, temos $4(uz)u = u^2 z + 2u(uz)$, logo $u^2 z = 2u(uz)$. Analogamente, e ainda usando a mesma equação com $z_1 = u \in U_e$ e $z_2 = z \in Z_e$, temos $2z^2 u = uz^2 + 2z(uz)$. Portanto, $uz^2 = 2z(uz)$. Desse modo, demonstramos a seguinte proposição.

Proposição 3.3. *Em uma álgebra bárica comutativa (A, ω) na qual vale (3.1) são válidas as seguintes identidades.*

$$u^3 = 0 \qquad z^3 = 0 \tag{3.15}$$

$$u^2z = 2u(uz) \tag{3.16}$$

$$uz^2 = 2z(uz) \tag{3.17}$$

quaisquer que sejam $u \in U_e$ *e* $z \in Z_e$

$\square$

Linearizando as identidades da proposição acima obtemos

$$u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0 \tag{3.18}$$

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2) = 0 \tag{3.19}$$

$$z_1(z_2z_3) + z_2(z_1z_3) + z_3(z_1z_2) = 0 \tag{3.20}$$

$$u(z_1z_2) = (uz_1)z_2 + (uz_2)z_1 \tag{3.21}$$

$$(u_1u_2)z = u_1(u_2z) + u_2(u_1z) \tag{3.22}$$

quaisquer que sejam $u, u_1, u_2, u_3 \in U_e$ e $z, z_1, z_2, z_3 \in Z_e$.

Obtemos (3.18) a partir da primeira linearização de $u^3 = 0$. As identidades (3.19) e (3.20) são obtidas linearizando duas vezes $u^3 = 0$ e $z^3 = 0$, respectivamente. A fim de obter (3.21), linearizamos (3.17). Analogamente, (3.22) é obtida de (3.16).

Assim como para as álgebras de Bernstein, notamos que o conjunto $\mathrm{Id}_1(A)$, dos idempotentes de peso um de A, pode ser parametrizado por U_e. Temos a seguinte proposição.

Proposição 3.4. *Sejam* (A, ω) *uma álgebra bárica comutativa satisfazendo (3.1) e* e *um idempotente não-nulo nessa álgebra. A correspondência* $u \mapsto e + u + u^2$ *define uma bijeção entre* U_e *e o conjunto dos idempotentes não-nulos de* A.

Demonstração. Seja $u \in U_e$. Temos $(e + u + u^2)^2 = e + u^2 + (u^2)^2 + 2eu + 2eu^2 + 2u^3$.Usando (3.2), (3.15), as definições de U_e e Z_e e (3.13), obtemos $(e + u + u^2)^2 = e + u + u^2$. Portanto, a correspondência $u \mapsto e + u + u^2$ define uma função

$\varphi : U_e \longrightarrow \mathrm{Id}_1(A)$. Essa função é injetiva, devido a decomposição $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. Além do mais, se $x \in \mathrm{Id}_1(A)$ então $x^2 = x$ e $\omega(x) = 1$. Usando (3.1), vemos que $x = x^2 = x^3$. Pondo $x = e + u + z$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, temos

$$x^2 = e + (u + 2uz) + u^2 + z^2 \tag{3.23}$$

em que $u + 2uz \in U_e$ e $u^2 + z^2 \in Z_e$. Temos também,

$$x^3 = e + (u + 2uz + 2uz^2) + 2u^2z + u^2 \tag{3.24}$$

com $u + 2uz + 2uz^2 \in U_e$ e $2u^2z + u^2 \in Z_e$. Lembrando que $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ e igualando x a (3.23), vem $uz = 0$ e $z = u^2 + z^2$. Da igualdade de (3.23) e (3.24) temos, devido a (3.18) que $z^2 = 2u^2z = 4u(uz)$. Logo, $z^2 = 0$. Portanto, $x = e + u + u^2$. A função φ é, portanto, uma bijeção. $\square$

Segue-se desse resultado que se

$$A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$$

é uma álgebra bárica comutativa satisfazendo (3.1), então

$$\mathrm{Id}_1(A) = \{e + u + u^2; u \in U_e\}$$

Portanto dados $e, f \in Id_1(A)$ temos $f = e + u_0 + u_0^2$, com $u_0 \in U_e$. Em vista desse resultado, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1.1. *Tomemos e, f, idempotentes não nulos em uma álgebra bárica (A, ω), satisfazendo (3.1), tais que $f = e + u_0 + u_0^2$, para algum $u_0 \in U_e$. As aplicações $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$ e $\tau : Z_e \longrightarrow Z_f$, tais que $\sigma(x) = x + 2u_0x$ e $\tau(z) = z - 2u_0z$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, são isomorfismos de espaços vetoriais.*

Demonstração. Tomemos $u \in U_e$ e calculemos $M_f(u + 2u_0u) = f(u + 2u_0u) = (e + u_0 + u_0^2)(u + 2u_0u)$. Desenvolvendo e considerando (3.18), bem como (3.3), chegamos a $M_f(u+2u_0u) = \frac{1}{2}u + u_0u$. Portanto, σ está bem definida. Analogamente, calculando $M_f(z - 2u_0z)$, em que $z \in Z_e$, temos $M_f(z - 2u_0z) = f(z - 2u_0z) = (e + u_0 + u_0^2)(z - 2u_0z)$. Em vista de (3.3) e de (3.16) temos $M_f(z-2u_0z) = 0$. Assim, τ também está bem definida. Tomando $u, u' \in U_e$ e notando que $U_e \bigcap Z_e = \{0\}$, é claro que $u + 2u_0u = u' + 2u_0u'$ implica que $u = u'$. Desse modo, σ é injetiva. Do mesmo modo, dado $z, z' \in Z_e$, $z - 2u_0z = z' - 2u_0z'$ implica em $z = z'$. Logo, τ também é injetiva. Definindo $\varphi : A \longrightarrow A$, dada por $\varphi(\alpha e + u + z) = \alpha e + \sigma(u) + \tau(z)$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Vemos que φ é injetiva, logo, sobrejetiva, pois estamos supondo A de dimensão finita. Portanto, σ e τ são sobrejetivas. □

Ainda supondo $f = e + u_0 + u_0^2$. O corolário acima nos diz que

$$U_f = \{u + 2u_0u; u \in U_e\} \tag{3.25}$$

$$Z_f = \{z - 2u_0z; z \in Z_e\} \tag{3.26}$$

Finalmente, usando as identidades obtidas nessa seção temos

$$x_1(x_1^2x_2) = 0 \tag{3.27}$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in \ker \omega$. De fato, tomemos $x_1 = u_1 + z_1$ e $x_2 = u_2 + z_2$, com $u_1, u_2 \in U_e$ e $z_1, z_2 \in Z_e$. Calculemos $x_1(x_1^2x_2) = (u_1 + z_1)[(u_1 + z_1)^2(u_2 + z_2)]$. Temos $(u_1+z_1)[(u_1+z_1)^2(u_2+z_2)] = u_1(u_1^2u_2) + 2u_1[u_2(u_1z_1)] + u_1(z_1^2u_2) + u_1(u_1^2z_2) + 2u_1[z_2(u_1z_1)] + u_1(z_1^2z_2) + z_1(u_1^2u_2) + 2z_1[u_2(u_1z_1)] + z_1(z_1^2u_2) + z_1(u_1^2z_2) + 2z_1[z_2(u_1z_1)] + z_1(z_1^2z_2)$. Agora, devido a (3.22), (3.3) e (3.15), temos $u_1(u_1^2u_2) = u_1^2(u_1u_2) - u_2(u_1u_1^2) = 0 - 0 = 0$. Além disso, de (3.21), (3.15) e (3.3) concluímos que $u_1(u_1^2z_2) = (u_1u_1^2)z_2 + u_1^2(u_1z_2) = 0 + 0 = 0$, e $z_1(z_1^2u_2) = (z_1z_1^2)u_2 - z_1^2(z_1u_2) = 0 - 0 = 0$. Usando (3.22), (3.4) e (3.17) chegamos a $u_1(z_1^2u_2) + 2z_1[u_2(u_1z_1)] = [(u_1u_2)z_1^2 - u_2(u_1z_1^2)] + \{2(u_1z_1)(u_2z_1) + 2u_2[(u_1z_1)z_1]\} = [(u_1u_2)z_1^2 + 2(u_1z_1)(u_2z_1)] + [-u_2(u_1z_1^2) + u_2(u_1z_1^2)] = 0 + 0 = 0$. Do mesmo modo e usando (3.21), (3.4) e (3.17) vemos que $u_1(z_1^2z_2) + 2z_1[z_2(u_1z_1)] = [(u_1z_1^2)z_2 + (u_1z_2)z_1^2] + \{2(z_1u_1)(z_1z_2) - 2z_2[(u_1z_1)z_1]\} = [(u_1z_2)z_1^2 + 2(z_1u_1)(z_1z_2)] + [(u_1z_1^2)z_2 - (u_1z_1^2)z_2] = 0 + 0 = 0$. Ficamos com $(u_1 +$

$z_1)[(u_1+z_1)^2(u_2+z_2) = 2u_1[u_2(u_1z_1)]+2u_1[z_2(u_1z_1)]+z_1(u_1^2u_2)+z_1(u_1^2z_2)+z_1(z_1^2z_2)$. Novamente, usando algumas manipulações algébricas, vemos de (3.19), (3.21), (3.4) e (3.16) que $2u_1[u_2(u_1z_1)] + z_1(u_1^2u_2) = \{-2u_2[u_1(u_1z_1)] - 2(u_1z_1)(u_1u_2)\} + [u_2(z_1u_1^2) - u_1^2(u_2z_1)] = [-2(u_1z_1)(u_1u_2) - u_1^2(u_2z_1)] + [-u_2(u_1^2z_1) + u_2(u_1^2z_1)] = 0 + 0 = 0$. Vemos também, usando (3.22), (3.20), (3.4) e (3.16) que $2u_1[z_2(u_1z_1)] + z_1(u_1^2z_2) = \{2z_2[u_1(u_1z_1)] - 2(u_1z_1)(u_1z_2)\} + [-z_2(u_1^2z_1) - u_1^2(z_1z_2)] = [-u_1^2(z_1z_2) - 2(u_1z_1)(u_1z_2)] + [-z_2(u_1^2z_1) + z_2(u_1^2z_1)] = 0 + 0 = 0$. Finalmente, devido a (3.20), (3.15) e (3.3) temos $z_1(z_1^2z_2) = -z_2(z_1z_1^2) - z_1^2(z_1z_2) = 0 + 0 = 0$, o que encerra a demonstração do fato proposto. Notemos que as identidades (3.3) e (3.27) implicam que $N = Ker(\omega)$ é uma álgebra de Jordan, pois verifica $x_1^2(x_1x_2) = x_1(x_1^2x_2) = 0$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in N$.

3.2 Invariância de p-subespaços em álgebras satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$

Seja (A,ω) uma álgebra bárica, tal que para todo $x \in A$ se tenha $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$. Tomemos os idempotentes $e, f \in \mathrm{Id}(A)$, de modo que $f = e + u_0 + u_0^2$, para algum $u_0 \in U_e$. Sejam as funções $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$ e $\tau : Z_e \longrightarrow Z_f$, dadas por $\sigma(u) = u + 2u_0u$ e $\tau(z) = z - 2u_0z$. Vimos no corolário 3.1.1 que σ e τ são isomorfismos. Portanto, U_e e Z_e tem dimensão invariante. Segue-se que $\varphi : A \longrightarrow A$, definida por $\varphi(\alpha e + u + z) = \alpha f + \sigma(u) + \tau(z)$ é um isomorfismo, chamado *transformação de Peirce de A, associada aos idempotentes de peso* 1 e, f. Afirmamos que $\xi : U_e \longrightarrow U_e$ e $\zeta : Z_e \longrightarrow Z_e$, dadas por $\xi(u) = u - 2u_0^2u$ e $\zeta(z) = z + 2u_0^2z$ são isomorfismos. De fato, se $\xi(u) = 0$, então $u = 2u_0^2u$. Multiplicando essa equação por u_0 e usando (3.27) obtemos $uu_0 = 2u_0(u_0^2u) = 0$. Além do mais, devido a (3.18), temos $u = 2u_0^2u = -4u_0(u_0u) = 0$. Portanto, ξ é injetiva, e como $\dim U_e$ é finita, ξ é também sobrejetiva. Analogamente, se $\zeta(z) = 0$, então $z + 2u_0^2z = 0$. Multiplicando essa equação por u_0, obtemos $u_0z + 2u_0(u_0^2z) = 0$, ou seja, $u_0z = -2u_0(u_0^2z)$. Novamente, devido a (3.27), temos

$u_0z = 0$. Por outro lado, lembrando de (3.16), temos $z = -2u_0^2z = -4u_0(u_0z) = 0$. Portanto, ζ é injetiva e por conseguinte sobrejetiva.

Lema 15. *As funções σ, τ, ξ e ζ satisfazem as seguintes identidades para quaisquer $u, u_1, u_2 \in U$ e $z, z_1, z_2 \in Z$.*

(a) $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = \tau(\xi(u_1)\xi(u_2))$;

(b) $\sigma(u)\tau(z) = \sigma(\xi(u)\zeta(z))$;

(c) $\tau(z_1)\tau(z_2) = \tau(\zeta(z_1)\zeta(z_2))$.

Demonstração. Para a parte (a), temos $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = (u_1 + 2u_0u_1)(u_2 + 2u_0u_2) = u_1u_2+2u_1(u_0u_2)+2u_2(u_0u_1)+4(u_0u_1)(u_0u_2)$. Por (3.4) e (3.19), temos que $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = u_1u_2-2u_0(u_1u_2)-2u_0^2(u_1u_2)$. Por outro lado, $\xi(u_1)\xi(u_2) = (u_1-2u_0^2u_1)(u_2-2u_0^2u_2) = u_1u_2 - 2u_1(u_0^2u_2) - 2u_2(u_0^2u_1) + 4(u_0^2u_1)(u_0^2u_2)$. Usando (3.2), (3.4) e (3.22) chegamos a $\xi(u_1)\xi(u_2) = u_1u_2 - 2u_0^2(u_1u_2)$. Finalmente, $\tau(\xi(u_1)\xi(u_2)) = \tau(u_1u_2 - 2u_0^2(u_1u_2)) = u_1u_2 - 2u_0^2(u_1u_2) - 2u_0(u_1u_2 - 2u_0^2(u_1u_2))$. Então, por (3.27) temos $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = \tau(\xi(u_1)\xi(u_2))$. Para a parte (b), desenvolvemos $\sigma(u)\tau(z) = (u + 2u_0u)(z - 2u_0z) = uz - 2u(u_0z) + 2z(u_0u) - 4(u_0u)(u_0z)$. Por (3.4) e (3.22), vem $\sigma(u)\tau(z) = uz + 2u_0(uz) + 2u_0^2(uz)$. Desenvolvendo $\xi(u)\zeta(z)$, vem $\xi(u)\zeta(z) = (u - 2u_0^2u)(z + 2u_0^2z) = uz + 2u(u_0^2z) - 2z(u_0^2u) - 4(u_0^2u)(u_0^2z)$. Segue de (3.2), (3.4) e (3.21) que $\xi(u)\zeta(z) = uz + 2u_0^2(uz)$. Por fim, desenvolvemos $\sigma(\xi(u)\zeta(z)) = \sigma(uz + 2u_0^2(uz)) = uz + 2u_0^2(uz) + 2u_0(uz + 2u_0^2(uz))$ e aplicamos (3.27) a fim de obter $\sigma(u)\tau(z) = \sigma(\xi(u)\zeta(z))$. Para a parte (c), temos $\tau(z_1)\tau(z_2) = (z_1 - 2u_0z_1)(z_2 - 2u_0z_2) = z_1z_2 - 2z_1(u_0z_2) - 2z_2(u_0z_1) + 4(u_0z_1)(u_0z_2)$. Devido a (3.4) e (3.21), temos $\tau(z_1)\tau(z_2) = z_1z_2 - 2u_0(z_1z_2) - 2u_0^2(z_1z_2)$. Por outro lado, $\zeta(z_1)\zeta(z_2) = (z_1 + 2u_0^2z_1)(z_2 + 2u_0^2z_2) = z_1z_2 + 2z_1(u_0^2z_2) + 2z_2(u_0^2z_1) + 4(u_0^2z_1)(u_0^2z_2)$. Usando (3.2), (3.4) e (3.20) temos $\zeta(z_1)\zeta(z_2) = z_1z_2-2u_0^2(z_1z_2)$. Notemos agora que, $\tau(\zeta(z_1)\zeta(z_2)) = \tau(z_1z_2 - 2u_0^2(z_1z_2)) = z_1z_2 - 2u_0^2(z_1z_2) - 2u_0(z_1z_2 - 2u_0^2(z_1z_2))$. Portanto, por (3.27), $\tau(z_1)\tau(z_2) = \tau(\zeta(z_1)\zeta(z_2))$. ☐

O corolário seguinte decorre diretamente do lema acima.

Corolário 3.2.1. *Sejam* $X, X_1, X_2 \subset U_e$ *e* $W, W_1, W_2 \subset Z_e$ *subespaços de* $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. *Então*

(a) $\sigma(X_1)\sigma(X_2) = \tau(\xi(X_1)\xi(X_2))$;

(b) $\sigma(X)\tau(W) = \sigma(\xi(X)\zeta(W))$;

(c) $\tau(W_1)\tau(W_2) = \tau(\zeta(W_1)\zeta(W_2))$.

□

Proposição 3.5. *Para todo p-subespaço* p_e *de* A*, satisfazendo (3.1), temos* $Z_e p_e \subset p_e$.

Demonstração. É suficiente mostrar a veracidade da afirmação para p-monômios. Se o grau de m_e é 1, então $Z_e m_e \subset m_e$, pois

$$Z_e U_e \subset U_e \ \text{ e } Z_e Z_e \subset Z_e$$

Suponhamos a assertiva válida para todo p-monômio de grau menor que k. Tomemos um p-monômio m_e, tal que $\partial m = k$, em que $k \geqslant 2$. Existem três possibilidades para m_e:

$$m_e = \mu_e \nu_e \qquad m_e = \mu_{1_e}\mu_{2_e} \qquad m_e = \nu_{1_e}\nu_{2_e}$$

em que $\mu_e, \mu_{1_e}, \mu_{2_e} \in U_e$ e $\nu_e, \nu_{1_e}, \nu_{2_e} \in Z_e$ são p-monômios com grau menor do que k. Tomemos um gerador de $Z_e(\mu_e\nu_e)$, na forma $z(uw)$, com $z \in Z_e$, $u \in \mu_e$ e $w \in \nu_e$. Por (3.21), temos $z(uw) = u(zw) - w(uz) \in \mu(Z_e\nu_e) + \nu_e(\mu_e Z_e) \subset \mu_e\nu_e = m_e$. Tomando $Z_e(\mu_{1_e}\mu_{2_e}) = \langle z(u_1u_2); u_1 \in \mu_{1_e}\ ,\ u_2 \in \mu_{2_e}\ e\ \ z \in Z_e\rangle$, temos de (3.22) que $z(u_1u_2) = u_1(u_2z) + u_2(u_1z) \in \mu_{1_e}(\mu_{2_e}Z_e) + \mu_{2_e}(\mu_{1_e}Z_e) \subset \mu_{1_e}\mu_{2_e} = m_e$. Finalmente, tomando $z(w_1w_2)$, um gerador de $Z_e(\nu_{1_e}\nu_{2_e})$, com $z \in Z_e$, $w_1 \in \nu_{1_e}$ e $w_2 \in \nu_{2_e}$, decorre de (3.20) que $z(w_1w_2) = -w_1(w_2z) - w_2(w_1z) \in \nu_{1_e}(\nu_{2_e}Z_e) + \nu_{2_e}(Z_e\nu_{1_e}) \subset \nu_{1_e}\nu_{2_e} = m_e$. Segue-se que em qualquer caso vale $Z_e m_e \subset m_e$, qualquer que seja o idempotente $e \in Id_1(A)$. □

Corolário 3.2.2. *Quaisquer que sejam os p-subespaços* $g_e \subset U_e$ *e* $h_e \subset Z_e$*, temos que*

$$\xi(g_e) = g_e \text{ e } \zeta(h_e) = h_e$$

Demonstração. Tomemos $u \in g_e$. Devido a proposição anterior, temos $\xi(u) = u - 2u_0^2 u \in g_e + Z_e g_e = g_e$. Portanto, $\xi(g_e) \subset g_e$. Além do mais, $\xi : g_e \longrightarrow g_e$, dada por $\xi(u) = u - 2u_0^2 u$ é um isomorfismo. Portanto, $\xi(g_e) = g_e$. Analogamente, dado $z \in h_e$, temos $\zeta(z) = z + 2u_0^2 z \in h_e + z_e h_e = h_e$. Segue-se que $\zeta(h_e) \subset h_e$. Notemos também que $\zeta : h_e \longrightarrow h_e$, dada por $\zeta(z) = z + 2u_0^2 z$ é um isomorfismo. Portanto $\zeta(h_e) = h_e$ □

Teorema 3.1. *Seja* (A, ω) *uma álgebra bárica satisfazendo* $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$*.*

1. *Todo p-subespaço* p_e *de* A *satisfaz* $\varphi(p_e) = p_f$*, em que* $\varphi : A \longrightarrow$ *é a transformação de Peirce associada aos idempotentes* $e, f \in Id_1(A)$*. Em paraticular, todo p-subespaço tem dimensão invariante.*

2. *São equivalentes*

   (a) p_e *é invariante;*

   (b) $U_e p_e \subset p_e$*;*

   (c) p_e *é um ideal de* A*.*

Demonstração. É suficiente mostrar a primeira parte para p-monômios. Usaremos indução sobre o grau do p-monômio. Sejam e um idempotente de peso um em A e $f = e + u + u^2$, $u \in U_e$. Seja m_e um p-monômio de A. Se $\partial m = 1$, então $m_e = U_e$ ou $m_e = Z_e$. Além disso,

$$U_f = \sigma(U_e) = \varphi(U_e) \ ; \quad Z_f = \tau(Z_e) = \varphi(Z_e)$$

Suponhamos que o resultado seja válido para todo p-monômio com grau menor do que k. Seja m_e um p-monômio com grau igual a k. Há três possibilidades:

$$m_e = \mu_e \nu_e \quad m_e = \nu_{1_e} \nu_{2_e} \quad m_e = \mu_{1_e} \mu_{2_e}$$

em que $\mu_e, \mu_{1_e}, \mu_{2_e} \subset U_e$ e $\nu_e, \nu_{1_e}, \nu_{2_e} \subset Z_e$ são p-monômios com grau menor do que k. Se $m_e = \mu_e\nu_e$, então $m_f = \mu_f\nu_f = \sigma(\mu_e)\tau(\nu_e) = \sigma(\xi(\mu_e)\zeta(\nu_e)) = \sigma(\mu_e\nu_e) = \sigma(m_e) = \varphi(m_e)$. Se for $m_e = \nu_{1_e}\nu_{2_e}$, então $m_f = \nu_{1_f}\nu_{2_f} = \tau(\nu_{1_e})\tau(\nu_{2_e}) = \tau(\zeta(\nu_{1_e})\zeta(\nu_{2_e})) = \tau(\nu_{1_e}\nu_{2_e}) = \tau(m_e) = \varphi(m_e)$. Por fim, se for $m_f = \mu_{1_f}\mu_{2_f} = \sigma(\mu_{1_e})\sigma(\mu_{2_e}) = \tau(\xi(\mu_{1_e})\xi(\mu_{2_e})) = \tau(\mu_{1_e}\mu_{2_e}) = \tau(m_e) = \varphi(m_e)$. Para mostrar a segunda parte, seja $p_e = g_e \oplus h_e$, em que $g_e \subset U_e$ e $h_e \subset Z_e$ são p-subespaços. Da primeira parte temos $p_f = g_f \oplus h_f = \{\sigma(x) + \tau(w) : x \in g_e\ ,\ w \in h_e\}$. Portanto,

$$p_f = \{(x - 2uw) + (w + 2ux) : x \in g_e\ ,\ w \in h_e\} \tag{3.28}$$

Suponhamos que p seja invariante, ou seja, $p_e = p_f$ para todo par de idempotentes $e, f \in Id(A)$. De (3.28) concluímos que existem $x' \in g_e$ e $w' \in h_e$, tais que $x - 2uw = x'$ e $w + 2ux = w'$. Seguem-se que $uw = \frac{1}{2}(x - x')$ e $ux = \frac{1}{2}(w' - w)$. Concluímos que $U_e h_e \subset g_e$ e $U_e g_e \subset h_e$. Portanto, $U_e p_e \subset p_e$. Reciprocamente, suponhamos que $U_e p_e \subset p_e$. Reescrevemos (3.28), para obter,

$$p_f = \{x + w + 2u(x - w) : x \in g_e \quad w \in h_e\}$$

Segue-se que $p_f \subset p_e + U_e p_e$. Logo, $p_f \subset p_e + p_e$, o que implica $p_f \subset p_e$, quaisquer que sejam $e, f \in Id(A)$. Portanto, p_e é invariante. Finalmente, tomando $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, temos $ep_e = e(g_e + h_e) \subset \frac{1}{2}g_e \subset p_e$ e $Z_e p_e \subset p_e$. Portanto, p_e é um ideal se, e somente se $U_e p_e \subset p_e$. $\square$

Capítulo 4

Álgebras satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x^3)x$

Consideremos uma álgebra bárica comutativa (A, ω) de característica diferente de 2 ou 3 satisfazendo

$$(x^2)^2 - \omega(x^3)x = 0 \tag{4.1}$$

para todo $x \in A$. Do mesmo modo como fizemos no capítulo anterior, investigaremos (A, ω) com o objetivo de estudar os p-subspaços e a invariância dos mesmos pela troca do idempotente.

4.1 Decomposição de Peirce

A partir de (4.1) temos

$$(x^2)^2 = 0 \tag{4.2}$$

qualquer que seja $x \in N = \ker \omega$. Linearizando essa equação, obtemos

$$x_1^2(x_1x_2) = 0 \tag{4.3}$$

$$x_1^2(x_2x_3) + 2(x_1x_2)(x_1x_3) = 0 \tag{4.4}$$

válidas para quaisquer $x_1, x_2, x_3 \in N$. Linearizando (4.1) obtemos

$$4x^2(xy) = \omega(x)^3 y + 3\omega(x)^2\omega(y)x \tag{4.5}$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$. Pondo $x = x + y$ em (4.1) e usando (4.5), obtemos

$$4(xy)^2 + 2x^2y^2 = 3\omega(x)^2\omega(y)y + 3\omega(x)\omega(y)^2 x \tag{4.6}$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$.

Podemos caracterizar o conjunto dos idempotentes não-nulos dessa álgebra.

Proposição 4.1. *Seja (A, ω) uma álgebra bárica comutativa satisfazendo (4.1). O conjunto dos idempotentes de peso um nessa álgebra é dado por*

$$\mathrm{Id}_1(A) = \{(z^3)^3; \omega(z) = 1\}$$

Demonstração. Existe $z \in A$ tal que $\omega(z) = 1$. Mostremos que $(z^3)^3$ é idempotente não-nulo de A. Começamos notando, a partir de (4.1), que $(z^2)^2 = z$, $((z^3)^2)^2 = z^3$ e $((z^2)^2)^2 = z^2$. Agora, tomemos $x = z$ e $y = z^2$ em (4.6) para obter

$$4(z^3)^2 = 3(z + z^2) - 2z^3 \tag{4.7}$$

para todo $z \in A$. Do mesmo modo, tomemos $x = z$ e $y = z^2$ e, em seguida $x = z^2$ e $y = z$ em (4.5), a fim de obter respectivamente

$$4z^2z^3 = 3z + z^2 \tag{4.8}$$

$$4zz^3 = z + 3z^2 \tag{4.9}$$

para todo $z \in A$. Multiplicando (4.7) por z^3 temos,

$$4(z^3)^3 = 3(zz^3 + z^2z^3) - 2(z^3)^2 \tag{4.10}$$

para todo $z \in A$. Por outro lado, somando (4.8) e (4.9), obtemos $z^2z^3 + zz^3 = z + z^2$. Usando esse resultado em (4.10), chegamos a $4(z^3)^3 = 3(z + z^2) - 2(z^3)^2$, que devido a (4.7) nos permite escrever $4(z^3)^3 = 4(z^3)^2 + 2z^3 - 2(z^3)^2 = 2(z^3)^2 + 2z^3$. Portanto,

$$(z^3)^3 = \frac{1}{2}[(z^3)^2 + z^3] \tag{4.11}$$

para todo $z \in A$. Elevando ambos os membros dessa equação ao quadrado, vemos que $((z^3)^3)^2 = \frac{1}{4}[((z^3)^2)^2 + (z^3)^2 + 2z^3(z^3)^2] = \frac{1}{4}[z^3 + (z^3)^2] + \frac{1}{2}(z^3)^3$. Finalmente, lembrando de (4.11), temos $((z^3)^3)^2 = \frac{1}{2}(z^3)^3 + \frac{1}{2}(z^3)^3 = (z^3)^3$. Portanto, $(z^3)^3$ é um idempotente de A, e como $\omega(z) = 1$, temos $\omega((z^3)^3) = 1$, ou seja $(z^3)^3 \in \mathrm{Id}_1(A)$. Temos $\mathrm{Id}_1(A) \supset \{(z^3)^3; \omega(z) = 1\} \neq \phi$. Para a outra inclusão, tomemos um idempotente $z \in \mathrm{Id}_1(A)$ e de $z = z^2$ obtemos $z^2 = z^3$, multiplicando ambos os membros por z. Segue-se que $z = z^2 = z^3$, portanto, $z = (z^3)^3$, ou seja $z \in \{(z^3)^3; \omega(z) = 1\}$. $\square$

Tomando $x = e \in \mathrm{Id}_1(A)$ e $y = z \in N$ em (4.5) e (4.6), obtemos

$$4e(ez) = z \tag{4.12}$$

$$4(ez)^2 + 2ez^2 = 0 \tag{4.13}$$

Pondo, agora $x = z \in N$ e $y = e \in \mathrm{Id}_1(A)$ em (4.5), chegamos a

$$4(ez)z^2 = 0 \tag{4.14}$$

Definindo $M_e : N \longrightarrow N$, por $M_e(x) = ex + \frac{1}{2}x$, temos

$$U_e = \{u \in N; eu = \frac{1}{2}u\}$$

$$Z_e = \{z \in N; ez = -\frac{1}{2}z\}$$

em que U_e e Z_e representam respectivamente a imagem e o núcleo do operador M_e. De fato, devido a definição de M_e, dado $x \in N$ temos: $M_e(x) = ex + \frac{1}{2}x$. Logo $M_e(M_e(x)) = M_e(ex + \frac{1}{2}x) = e(ex + \frac{1}{2}x) + \frac{1}{2}(ex + \frac{1}{2}x)$. Levando em conta (4.12), temos $M_e^2(x) = M_e(x)$. Portanto, M_e é uma projeção sobre U_e paralelamente a Z_e.

Segue-se que $M_e(u) = u$, para todo $u \in U_e$ e $M_e(z) = 0$, para todo $z \in Z_e$. Isso significa que $eu + \frac{1}{2}u = u$ e $ez + \frac{1}{2}z = 0$, ou seja, $eu = \frac{1}{2}u$ e $ez = -\frac{1}{2}z$, quaisquer que sejam $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Como M_e é projeção, então $\ker \omega = U_e \oplus Z_e$. De onde obtemos $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, chamada *decomposição de Peirce relativa ao idempotente e*.

Proposição 4.2. *Em uma álgebra bárica (A, ω), satisfazendo (4.1), com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, valem as seguintes inclusões.*

$$U_e Z_e \subset U_e \quad U_e^2 \subset Z_e \quad e \quad Z_e^2 \subset Z_e \tag{4.15}$$

Demonstração. Linearizando (4.13), vem

$$2(ez_1)(ez_2) + e(z_1 z_2) = 0 \tag{4.16}$$

quaisquer que sejam $z_1, z_2 \in N$

Tomando $z_1 \in U_e$ e $z_2 \in Z_e$ nessa identidade temos, $2(\frac{1}{2}z_1)(-\frac{1}{2}z_2) + e(z_1 z_2) = 0$, logo $e(z_1 z_2) = \frac{1}{2}z_1 z_2$. Portanto, $U_e Z_e \subset U_e$. Supondo $z_1, z_2 \in U_e$ em (4.16) virá $2(\frac{1}{2}z_1)(\frac{1}{2}z_2) + e(z_1 z_2) = 0$, logo $e(z_1 z_2) = -\frac{1}{2}z_1 z_2$. Segue-se que $U_e^2 \subset Z_e$. Finalmente, e ainda por (4.16), se $z_1, z_2 \in Z_e$, então, $2(-\frac{1}{2}z_1)(-\frac{1}{2}z_2) + e(z_1 z_2) = 0$. Logo, $e(z_1 z_2) = -\frac{1}{2}z_1 z_2$. Portanto, $Z_e^2 \subset Z_e$. □

Tomando $z = u \in U_e$ em (4.14), temos $4(\frac{1}{2}u)u^2 = 0$, de onde vem $u^3 = 0$. Supondo $z \in Z_e$ na mesma equação teremos, $z^3 = 0$. Linearizando (4.14) obtemos $(ez_1)z_2^2 + 2(ez_2)(z_1 z_2)$. Se nessa equação fizermos $z_1 = z \in Z_e$ e $z_2 = u \in U_e$, teremos $u^2 z = 2u(uz)$. Analogamente, tomando $z_1 = u \in U_e$ e $z_2 = z \in Z_e$ vem, $uz^2 = 2z(uz)$. Desse modo demonstramos o seguinte resultado.

Proposição 4.3. *Se (A, ω) é uma álgebra comutativa satisfazendo (4.1), com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, então*

$$u^3 = 0 \quad z^3 = 0 \tag{4.17}$$

$$u^2z = 2u(uz) \tag{4.18}$$

$$uz^2 = 2z(uz) \tag{4.19}$$

quaisquer que sejam $u \in U_e$ *e* $z \in Z_e$.

$\square$

Linearizando $u^3 = 0$, obtemos

$$u_1^2u_2 + 2u_1(u_1u_2) = 0 \tag{4.20}$$

quaisquer que sejam $u_1, u_2 \in U_e$. Linearizando $u^3 = 0$ e $z^3 = 0$ duas vezes vem que:

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2) = 0 \text{ e } z_1(z_2z_3) + z_2(z_1z_3) + z_3(z_1z_2) = 0 \tag{4.21}$$

para quaisquer $u_1, u_2, u_3 \in U_e$. Linearizando (4.18) obtemos

$$(u_1u_2)z = u_1(u_2z) + u_2(u_1z) \tag{4.22}$$

quaisquer que sejam $u_1, u_2 \in U_e$ e $z \in Z_e$. Analogamente, a linearização de (4.19) nos dá

$$u(z_1z_2) = (uz_1)z_2 + (uz_2)z_1 \tag{4.23}$$

quaisquer que sejam $u \in U_e$ e $z_1, z_2 \in Z_e$.

O conjunto dos idempotentes não-nulos de A, é dado por

$$\mathrm{Id}_1(A) = \{e + u + \frac{1}{2}u^2; u \in U_e\} \tag{4.24}$$

Para ver isso, tomemos um idempotente de peso 1 em $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, dado por $x = e + u + z$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Ora,

$$x^2 = e + (u + 2uz) + (u^2 + z^2 - z) \tag{4.25}$$

em que $u + 2uz \in U_e$ e $u^2 + z^2 - z \in Z_e$;

$$x^3 = 2 + (u + uz^2) + (\frac{1}{2}u^2 - \frac{3}{2}z^2 + u^2z) \tag{4.26}$$

com $u+uz^2 \in U_e$ e $\frac{1}{2}u^2-\frac{3}{2}z^2+u^2z \in Z_e$. Como $x = x^2 = x^3$, usando a decomposição de Peirce de A, bem como (4.20), concluímos $z = \frac{1}{2}u^2$. Portanto, $x = e + u + \frac{1}{2}u^2$. Isso, juntamente com o fato

$$(e + u + \frac{1}{2}u^2)^2 = (e + u + \frac{1}{2}u^2)$$

nos dá $\mathrm{Id}_1(A) = \{e + u + \frac{1}{2}u^2; u \in U_e\}$. Posto isso, e dado um par de idempotentes não nulos $e, f \in \mathrm{Id}_1(A)$, vemos que existe $u_0 \in U_e$, tal que $f = e + u_0 + \frac{1}{2}u_0^2$.

Proposição 4.4. *Seja (A, ω) uma álgebra comutativa satisfazendo (4.1). As dimensões de U_e e Z_e não dependem da escolha particular do idempotente e*

Demonstração. De fato, tomemos uma decomposição de Peirce para A, dada por $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. Dado um idempotente não nulo $f \in A$, existe $u_0 \in U_e$ tal que $f = e + u_0 + \frac{1}{2}u_0^2$. Tomamos $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$ e $\tau : Z_e \longrightarrow Z_f$, dadas por $\sigma(u) = u + u_0u$ e $\tau(z) = z - u_0z$. Mostremos que σ e τ, assim definidas, são isomorfismos de espaços vetoriais. Primeiramente, vejamos que $2f(u+2u_0u) = 2(e+u_0 + \frac{1}{2}u_0^2)(u + 2u_0u) = u - u_0u + 2u_0u + 2u_0(u_0u) + u_0^2u + u_0^2(u_0u)$, logo, por (4.3) e (4.20), chegamos a $2f(u + u_0u) = u + u_0u$. Portanto, $u + u_0u \in U_f$. Analogamente, desenvolvendo $2f(z-u_0z) = 2(u+u_0+\frac{1}{2}u_0^2)(z-u_0z)$, temos $2(u+u_0+\frac{1}{2}u_0^2)(z-u_0z) = -z - u_0z + 2u_0z - 2u_0(u_0z) + u_0^2z - u_0^2(u_0z)$. Agora, devido a (4.3) e (4.18), temos $2f(z - u_0z) = -(z - u_0z)$. Portanto, $z - u_0z \in Z_f$. Segue-se que σ e τ estão bem definidas. Além do mais, como $U_e \bigcap Z_e = \{0\}$, se $u' \in U_e$ é tal que $u+u_0u = u'+u_0u'$, então $u = u'$. Pelo mesmo motivo, se $z - u_0z = z' - u_0z'$, para algum $z' \in Z_e$, então $z = z'$. Segue-se que σ e τ são injetivas. Finalmente, definindo $\varphi : A \longrightarrow A$, dada por $\varphi(\alpha e + u + z) = \alpha e + \sigma(u) + \tau(z)$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Vemos que φ é injetiva, logo, sobrejetiva. Portanto, σ e τ são sobrejetivas. □

Devido ao resultado acima podemos escrever

$$U_f = \{u + u_0u : u \in U_e\}$$

$$Z_f = \{z - u_0z : z \in Z_e\}$$

Para finalizar notamos que uma álgebra bárica comutativa (A, ω) satisfazendo (4.1), também satisfaz

$$x_1(x_1^2 x_2) = 0 \tag{4.27}$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in \ker\omega$. De fato, basta notar que as identidades (3.19), (3.20), (3.21), (3.22), (3.3), (3.4), (3.15), (3.16) e (3.17) do capítulo anterior, também são válidas para a álgebra que estudamos nesse capítulo. Notemos que a identidade (4.27), juntamente com (4.3) implicam que $N = \ker\omega$ é uma álgebra de Jordan, pois verifica $x_1^2(x_1x_2) = x_1(x_1^2x_2) = 0$, quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in N$.

4.2 Invariância de p-subespaços em álgebras satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x^3)x$

Suponhamos que (A, ω) seja uma álgebra bárica sobre F com, característica diferente de e ou 3, satisfazendo a equação do título acima. Procedendo do mesmo modo como na proposição 3.5 podemos mostrar que.

Proposição 4.5. *Seja (A, ω) uma álgebra bárica satisfazendo (4.1). Todo p-subespaço de A satisfaz $Z_e p_e \subset p_e$.*

Demonstração. Mostraremos que a proposição é verdadeira para p-monômios. Se o grau de um p-monômio m_e é 1, então $m_e = U_e$ ou $m_e = Z_e$. Logo $Z_e m_e = Z_e U_e \subset U_e = m_e$, ou $Z_e m_e = Z_e^2 \subset Z_e = m_e$. Suponhamos que a proposição seja válida para todo p-monômio de grau menor do que k. Seja m_e um p-monômio de grau k. Pode ocorrer uma entre as três possibilidades:

$$m_e = \mu_e \nu_e \ , \quad m_e = \mu_{1_e}\mu_{2_e} \ , \quad m_e = \nu_{1_e}\nu_{2_e}$$

em que $\mu_e, \mu_{1_e}, \mu_{2_e} \subset U_e$ e $\nu_e, \nu_{1_e}, \nu_{2_e} \subset Z_e$ são p-monômios de grau menor do que k. Tomamos um gerador de $Z_e(\mu_e\nu_e)$, sob a forma $z(uw)$, com $z \in Z_e$, $u \in \mu_e$ e $w \in \nu_e$.

Devido a (4.21), temos $z(uw) = -u(zw) - w(zu) \in \mu_e(Z_e\nu_e) + \nu_e(Z_e\mu_e) \subset \mu_e\nu_e = m_e$. Do mesmo modo, trabalhando com um gerador de $Z_e(\mu_{1_e}\mu_{2_e})$, na forma $z(u_1u_2)$, com $z \in Z_e$, $u_1 \in \mu_{1_e}$ e $u_2 \in \mu_{2_e}$, vemos por (4.22) que $z(u_1u_2) = u_1(zu_2) + u_2(zu_1) \in \mu_{1_e}(Z_e\mu_{2_e}) + \mu_{2_e}(Z_e\mu_{1_e}) \subset \mu_{1_e}\mu_{2_e} = m_e$. Por fim, se $z(w_1w_2)$, com $z \in Z_e$, $w_1 \in \nu_{1_e}$ e $w_2 \in \nu_{2_e}$, é um gerador de $Z_e(\nu_{1_e}\nu_{2_e})$, então (4.23) nos fornece $z(w_1w_2) = -w_1(zw_2) - w_2(zw_1) \in \nu_{1_e}(Z_e\nu_{2_e}) + \nu_{2_e}(Z_e\nu_{1_e}) \subset \nu_{1_e}\nu_{2_e} = m_e$. Em qualquer caso, temos $Z_em_e \subset m_e$. □

Dados $u_0 \in U_e$ e $\alpha, \beta \in F$, tomemos o operador linear $\mathrm{T}_{(\alpha,\beta)} : N \longrightarrow N$ dado por

$$\mathrm{T}_{(\alpha,\beta)}(x) = x + \alpha u_0 x + \beta u_0^2 x$$

Lema 16. *Para todo $u_0 \in U_e$ e $\alpha, \beta \in F$, temos*

(a) $\mathrm{T}_{(\alpha,\beta)}$ *é um automorfismo de espaços vetoriais;*

(b) $\mathrm{T}_{(0,\beta)}(p_e) = p_e$ *para todo p-subespaço p_e de A.*

Demonstração. Seja $x = u + z \in \ker\omega$, em que $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, tal que $\mathrm{T}_{(\alpha,\beta)}(x) = 0$. Nessas condições $u + z + \alpha u_0(u + z) + \beta u_0^2(u + z) = 0$, e então

$$u + \alpha u_0 z + \beta u_0^2 u = 0$$

$$z + \alpha u_0 u + \beta u_0^2 z = 0$$

Multiplicando essas identidades por u_0 e usando (3.27), (4.17), (4.2), (4.18), bem como suas linearizações chegamos a

$$u_0u + \frac{1}{2}\alpha u_0^2 z = 0$$

$$u_0z - \frac{1}{2}\alpha u_0^2 u = 0$$

Novamente, multiplicando essas duas últimas equações por u_0 e usando (3.27), (4.17), (4.2), (4.18), bem como suas linearizações temos $u_0^2u = u_0^2z = 0$. Então

$u_0u = u_0z = 0$. Portanto, $u = z = 0$, $\mathrm{T}_{(\alpha,\beta)}$ é injetiva e por conseguinte é um automorfismo. Seja $x \in p$. Mostramos que $u_0^2 \in Z_e$, logo, da proposição 4.5, temos

$$\mathrm{T}_{(0,\beta)} = x + \beta u_0^2 x \in p_e + Z_e p_e = p_e$$

Então $\mathrm{T}_{(0,\beta)}(p_e) \subset p_e$ e, como $\mathrm{T}_{(\alpha,\beta)}$ é injetiva qualquer que seja $\alpha \in F$, temos que $\mathrm{T}_{(0,\beta)}(p_e) = p_e$. □

Dados $e, f \in Id_1(A)$ e $u_0 \in U_e$, tal que $f = e + u_0 + \frac{1}{2}u_0^2$. Tomemos $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$ e $\tau : Z_e \longrightarrow Z_f$, dadas por $\sigma(u) = u + 2u_0u$ e $\tau(z) = z - u_0z$. Como vimos anteriormente essas funções são isomorfismos de espaços vetoriais. Sejam $\xi : U_e \longrightarrow U_e$ e $\zeta : Z_e \longrightarrow Z_e$, dadas por $\xi(u) = u - 2u_0^2u$ e $\zeta(z) = z + 2u_0^2z$. Tais funções são isomorfismos de espaços vetoriais, pois ξ é o operador $\mathrm{T}_{(0,-2)}$ restrito a U_e e $\zeta = \mathrm{T}_{(0,2)}$. Além disso, $\sigma = \mathrm{T}_{(2,0)}$, $\tau = \mathrm{T}_{(-1,0)}$,

O seguinte resultado é análogo ao lema 15 e sua demonstração é idêntica àquela feita anteriormente.

Lema 17. *As funções σ, τ, ξ e ζ, conforme definidas acima satisfazem as seguintes identidades para quaisquer $u, u_1, u_2 \in U$ e $z, z_1, z_2 \in Z$.*

(a) $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = \tau(\xi(u_1)\xi(u_2))$;

(b) $\sigma(u)\tau(z) = \sigma(\xi(u)\zeta(z))$;

(c) $\tau(z_1)\tau(z_2) = \tau(\zeta(z_1)\zeta(z_2))$.

Finalmente, do mesmo modo como foi feito no capítulo anterior, temos o seguinte resultado. A demonstração desse fato também é idêntica àquela feita para o teorema 3.1.

Teorema 4.1. *Seja A uma álgebra bárica satisfazendo $(x^2)^2 = \omega(x^3)x$ para todo $x \in A$.*

1. *Todo p-subespaço* p_e *de* A *satisfaz* $\varphi(p_e) = p_f$*, em que* $\varphi : A \longrightarrow A$ *é a transformação de Peirce associada aos idempotentes* $e, f \in Id_1(A)$*, definida por* $\varphi(\alpha e + u + z) = \alpha f + \sigma(u) + \tau(z)$*, com* $u \in U_e$ *e* $z \in Z_e$*. Em paraticular, todo p-subespaço tem dimensão invariante.*

2. *São equivalentes*

   (a) p_e *é invariante;*

   (b) $U_e p_e \subset p_e$*;*

   (c) p_e *é um ideal de* A*.*

Capítulo 5

Álgebras train de posto 3

Uma *álgebra train de posto* 3 é uma álgebra bárica comutativa (A, ω) sobre um corpo F satisfazendo a equação

$$x^3 - (1+\gamma)\omega(x)x^2 + \gamma\omega(x)^2 x = 0 \tag{5.1}$$

para algum $\gamma \in F$.

Neste capítulo serão estudadas as álgebras train de posto 3 sobre um corpo F com característica diferente de 2. Estudaremos a invariância de p-subespaços nessa álgebra a partir de sua decomposição de Peirce. Em todo este capítulo quando fizermos referência a uma álgebra train de posto 3, estaremos supondo uma álgebra train de posto 3 satisfazendo (5.1).

5.1 Decomposição de Peirce

Seja (A, ω) uma álgebra train de posto 3. Notamos que

$$x^3 = 0 \tag{5.2}$$

qualquer que seja $x \in \ker \omega$. Devido a proposição 1.3. ω é único. Por esse motivo podemos nos referir à álgebra train de posto 3 (A, ω) simplesmente por A. As linearizações da relação (5.2) nos fornecem

$$x_1^2 x_2 + 2x_1(x_1 x_2) = 0 \tag{5.3}$$

$$x_1(x_2 x_3) + x_2(x_1 x_3) + x_3(x_1 x_2) = 0 \tag{5.4}$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2, x_3 \in \ker \omega$. O conjunto dos idempotentes de peso 1 será caracterizado na proposição seguinte. Antes, contudo, notemos que linearizando (5.1) duas vezes teremos $(xy)z + (xz)y + (yz)x = (1+\gamma)[\omega(x)yz + \omega(y)xz + \omega(z)xy] - \gamma[\omega(x)\omega(y)z + \omega(y)\omega(z)x + \omega(x)\omega(z)y]$. Fazendo $x = y = e$ e $z = e^2$, com $e \in A$ tal que $\omega(e) = 1$, temos $2e^4 + (e^2)^2 = (1+\gamma)(2e^3 + e^2) - \gamma(e^2 + 2e)$. De (5.1) notamos que $e^3 = (1+\gamma)e^2 - \gamma e$, logo $e^4 = (1+\gamma)e^3 - \gamma e^2$. Agora podemos ver que $(e^2)^2 = (1+\gamma)(2e^3 + e^2) - \gamma(e^2 + 2e) - 2e^4 = (1+\gamma)(2e^3 + e^2) - \gamma(e^2 + 2e) - 2(1+\gamma)e^3 + 2\gamma e^2 = (1+\gamma)(2e^3 + e^2 - 2e^3) + \gamma(-e^2 - 2e + 2e^2) = (1+2\gamma)e^2 - 2\gamma e$. Segue-se que as potências simples e^n definidas recursivamente por $e^1 = e$ e $e^k = e^{k-1}e$, bem como as potências plenas $e^{[n]}$, definidas recursivamente por $e^{[1]} = e$ e $e^{[k]} = e^{[k-1]}e^{[k-1]}$, pertencem ao subespaço gerado por e e e^2.

Proposição 5.1. *Seja A uma álgebra train de posto 3, com $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Dado $x \in A$, o conjunto dos idempotentes de peso 1 nessa álgebra é dado por*

$$Id_1(A) = \left\{ \frac{1}{1-2\gamma}(x^2 - 2\gamma x); \omega(x) = 1 \right\} \tag{5.5}$$

Demonstração. Devido a observação acima o elemento idempotente na álgebra A deve ter a forma $\alpha e^2 + \beta e$, sendo e um elemento de A tal que $\omega(e) = 1$ e $\alpha, \beta \in F$. Desse modo, calculemos α e β de modo que $(\alpha e^2 + \beta e)^2 = \alpha e^2 + \beta e$. Notemos que a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha^2(e^2)^2 + \beta^2 e^2 + e\alpha\beta e^3 = \alpha e^2 + \beta e$. Como $(e^2)^2 = (1+2\gamma)e^2 - 2\gamma e$ e $e^3 = (1+\gamma)e^2 - \gamma e$, então temos $[\alpha^2(1+2\gamma) + \beta^2 + 2\alpha\beta(1+\gamma)]e^2 - (2\alpha^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma)e = \alpha e^2 + \beta e$. Isso ocorre se, e somente se $\alpha^2(1+2\gamma) + \beta^2 + 2\alpha\beta(1+\gamma) = \alpha$

e $2\alpha^2\gamma + 2\alpha\beta\gamma = -\beta$. Daí decorre que

$$\alpha = \frac{1}{1-2\gamma} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{-2\gamma}{1-2\gamma}$$

Portanto, o idempotente tem a forma

$$\frac{1}{1-2\gamma}(e^2 - 2\gamma e)$$

com $\gamma \neq \frac{1}{2}$. $\square$

De agora em diante, para efeito de simplificação, denotaremos $\alpha_0 = \frac{1}{1-2\gamma}$ e estaremos sempre supondo a condição $\gamma \neq \frac{1}{2}$. Linearizando (5.1), obtemos

$$x^2y + 2x(xy) - (1+\gamma)[\omega(y)x^2 + 2\omega(x)xy] + \gamma[2\omega(x)\omega(y)x + \omega(x)^2y] = 0 \qquad (5.6)$$

quaisquer que sejam $x, y \in A$. Tomando $x = e \in \mathrm{Id}_1(A)$ e $y = n \in N = \ker\omega$ em (5.6), temos

$$en + 2e(en) - 2(1+\gamma)en + \gamma n = 0 \qquad (5.7)$$

Supondo $x = n \in \ker\omega$ e $y = e \in Id_1(A)$ em (5.6) vem

$$en^2 + 2n(en) = (1+\gamma)n^2 \qquad (5.8)$$

Dado um idempotente de peso 1 em A e supondo $N = \ker\omega$, definimos $L_e : N \longrightarrow N$ pela relação $L_e(n) = en$. Desse modo, podemos reescrever a identidade (5.7) pondo $L_e(n) + 2eL_e(n) - 2(1+\gamma)L_e(n) + \gamma n = 0$. Resulta que

$$2L_e^2(n) - (1+2\gamma)L_e(n) + \gamma n = 0 \qquad (5.9)$$

Logo o polinômio $p(X) = 2X^2 - (1+2\gamma)X - \gamma = 2(X - \frac{1}{2})(X-\gamma)$ é um anulador de L_e. Notemos que $p_1(x) = X - \frac{1}{2}$ não é um anulador de L_e, pois se assim fosse teríamos $L_e(n) - \frac{1}{2}n = 0$, para todo $n \in N$. Ou seja, $en = \frac{1}{2}n$, para todo $n \in N$. Devido a relação (5.8), teríamos $\frac{1}{2}n^2 + n^2 = (1+\gamma)n^2 = 0$, logo $(\gamma - \frac{1}{2})n^2 = 0$, para todo $n \in N$. Ora, isso implicaria em $\gamma = \frac{1}{2}$, o que não pode ocorrer. Portanto, $p_1(x) = X - \frac{1}{2}$ não é um anulador de L_e. Analogamente, vemos que se $p_2(X) = X - \gamma$ fosse um anulador de L_e, a relação (5.8) nos daria $\gamma n^2 + 2\gamma n^2 = n^2 + \gamma n^2$, para todo $n \in N$. Novamente isso implicaria $\gamma = \frac{1}{2}$, o que não ocorre. Segue-se que $p_2(X) = X - \gamma$ não é um anulador de L_e. Portanto, o polinômio minimal de L_e é $m(X) = (X - \frac{1}{2})(X - \gamma)$. Agora, usando resultados conhecidos da álgebra linear, podemos ver que

$$N = \ker(L_e - \frac{1}{2}I_N) \oplus \ker(L_e - \gamma I_N)$$

em que I_N representa a função identidade em $N = \ker\omega$. Definimos $U_e = \ker(L_e - \frac{1}{2}I_N)$ e $Z_e = \ker(L_e - \gamma I_N)$. Segue-se que

$$U_e = \{u \in \ker\omega; eu = \frac{1}{2}u\} \tag{5.10}$$

$$Z_e = \{z \in \ker\omega; ez = \gamma z\} \tag{5.11}$$

Sabemos que na presença de um idempotente de peso 1, $e \in \mathrm{Id}_1(A)$, temos a decomposição $A = Fe \oplus N$, em que $N = \ker\omega$. Portanto, $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$. Essa decomposição é chamada decomposição de Peirce relativa ao idempotente e.

Proposição 5.2. *Em uma álgebra train de posto* 3, (A, ω), *com decomposição* $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, *valem as relações*

$$U_e Z_e \subset U_e \quad U_e^2 \subset Z_e \quad Z_e^2 = 0 \tag{5.12}$$

Demonstração. Linearizando (5.8) temos

$$e(n_1n_2) + n_1(en_2) + n_2(en_1) = (1+\gamma)n_1n_2 \tag{5.13}$$

em que $n_1, n_2 \in N = \ker\omega$. Tomando $n_1, n_2 \in U_e$ em (5.13) e usando as definições de U_e e Z_e temos $e(n_1n_2) + \frac{1}{2}n_1n_2 + \frac{1}{2}n_1n_2 = (1+\gamma)n_1n_2$, logo $e(n_1n_2) + n_1n_2 = n_1n_2 + \gamma n_1n_2$. Segue-se que $e(n_1n_2) = \gamma n_1n_2$ e $n_1n_2 \in Z_e$. Portanto, $U_e^2 \subset Z_e$. A seguir, tomamos $n_1 \in U_e$ e $n_2 \in Z_e$ em (5.13). Temos, $e(n_1n_2) + \gamma n_1n_2 + \frac{1}{2}n_1n_2 = (1+\gamma)n_1n_2$, logo $e(n_1n_2) = \frac{1}{2}n_1n_2$. Ou seja, $n_1n_2 \in U_e$, portanto, $U_eZ_e \subset U_e$. Finalmente, supondo $n_1, n_2 \in Z_e$ em (5.13) temos $e(n_1n_2) + \gamma n_1n_2 + \gamma n_1n_2 = (1+\gamma)n_1n_2$, de modo que $e(n_1n_2) = (1-\gamma)n_1n_2$. Escrevendo $n_1n_2 = u + z$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, vem $e(u+z) = (1-\gamma)(u+z)$. Logo, $(\frac{1}{2}u - \gamma u) + (z - 2\gamma z) = 0$. Devido ao fato $N = U_e \oplus Z_e$ temos $(\frac{1}{2}u - \gamma u) = 0$ e $(z - 2\gamma z) = 0$. Como estamos supondo $\gamma \neq \frac{1}{2}$ devemos ter $u = z = 0$. Segue-se que $n_1n_2 = u + z = 0$. Portanto, $Z_e^2 = 0$. □

Podemos obter algumas relações envolvendo os elementos de U_e e Z_e. Esse é o conteúdo da proposição seguinte.

Proposição 5.3. *Em uma álgebra train, A, de posto 3 com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus\ z_e$ são válidas as identidades*

$$u^3 = z^3 = 0 \tag{5.14}$$

$$z^2 = u^2z = 0 \tag{5.15}$$

$$u(uz) = z(uz) = 0 \tag{5.16}$$

$$u_0^2u + 2u_0(u_0u) = 0 \tag{5.17}$$

$$u_0^2(u_0u) = u_0^2(u_0z) = 0 \tag{5.18}$$

$$(uz)^2 = 0 \tag{5.19}$$

quaisquer que sejam $u, u_0 \in U_e$ e $z \in Z_e$.

Demonstração. Suponhamos $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Tomando sucessivamente $x = u$ e $y = z$ em (5.2) teremos (5.14). A identidade $z^2 = 0$ em (5.15) decorre diretamente do fato $Z_e^2 = 0$, obtido na proposição 5.2. Linearizando $z^2 = 0$, obtemos $z_1z_2 = 0$, quaisque que sejam $z_1, z_2 \in Z_e$. Da proposição 5.2 temos $u^2 \in Z_e$. Agora, tomando $z_1 = u^2$ e $z_2 = z$, podemos ver que $u^2z = 0$. Isso conclui (5.15). Considerando $x_1 = u$ e $x_2 = z$ em (5.3) obtemos $u^2z + 2u(uz) = 0$. Em vista de (5.15), concluímos $u(uz) = 0$. Tomando agora $x_1 = z$ e $x_2 = u$ em (5.3) temos $z^2u + 2z(uz) = 0$. Novamente devido a (5.15) chegamos a $z(uz) = 0$. Portanto, (5.16) é válida. A relação (5.17) decorre diretamente de (5.3), tomando $x_1 = u_0$ e $x_2 = u$. Notando que $u_0^2, u_0u \in Z_e$ e lembrando de (5.15) vemos que $u_0^2(u_0u) = 0$. Tomemos $z = z_1 + z_2$, com $z_1, z_2 \in Z_e$, na relação $z(uz) = 0$, obtida em (5.16), obtemos $z_1(uz_2) + z_2(uz_1) = 0$. Agora usemos essa relação em $u_0^2(u_0 z)$ para escrever $u_0^2(u_0 z) = -z(u_0 u_0^2) = 0$, pois $u_0^3 = 0$. Isso conclui a demonstração de (5.18). Finalmente, para demonstrar (5.19), tomemos $x = u + z$ e $y = uz$ em (5.3) a fim de obter $u^2(uz) + z^2(uz) + 2(uz)^2 + 2(u+z)[u(uz) + z(uz)] = 0$. Essa igualdade se reduz a $(uz)^2 = 0$ devido as relações (5.15), (5.16) e (5.18). □

As linearizações das relações da proposição 5.3 permitem escrever as identidades do seguinte corolário.

Corolário 5.1.1. *Em uma álgebra train, A, de posto 3 com decomposição de Peirce $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ são válidas as identidades*

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_1u_3) + u_3(u_1u_2) = z_1(z_2z_3) + z_2(z_1z_3) + z_3(z_1z_2) = 0 \tag{5.20}$$

$$z_1z_2 = (u_1u_2)z = 0 \tag{5.21}$$

$$u_1(u_2z) + u_2(u_1z) = z_1(uz_2) + z_2(uz_1) = 0 \tag{5.22}$$

$$(uz_1)(uz_2) = (u_1z)(u_2z) = 0 \tag{5.23}$$

quaisquer que sejam $u, u_1, u_2, u_3 \in U_e$ e $z, z_1, z_2, z_3 \in Z_e$.

Demonstração. Tomemos $u, u_1, u_2, u_3 \in U_e$ e $z, z_1, z_2, z_3 \in Z_e$. As igualdades em (5.20) são a segunda linearização das identidades obtidas em (5.14). Linearizando as identidades (5.15), obtemos (5.21). As igualdades em (5.22) decorrem da linearização das relações em (5.16). Por fim, obtemos (5.23) a partir das linearizações em u e z da relação (5.19). □

Assim como ocorre com as álgebras estudadas nos capítulos anteriores, o conjunto dos idempotentes de peso 1 em uma álgebra train de Posto 3, $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ pode ser caracterizado em função de U_e.

Proposição 5.4. *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra train de posto 3. O conjunto dos idempotentes de peso um nessa álgebra é dado por*

$$Id_1(A) = \{e + u + \alpha_0 u^2; u \in U_e\} \tag{5.24}$$

com $\alpha_0 = \frac{1}{1-2\gamma}$, $\gamma \neq \frac{1}{2}$.

Demonstração. De fato, notemos que $(e + u + \alpha_0 u^2)^2 = e^2 + u^2 + \alpha_0^2(u^2)^2 + 2eu + 2\alpha_0 eu^2 + 2\alpha_0 u^3$. Usando as definições de U_e e Z_e, bem como (5.2) temos $(e+u+\alpha_0 u^2)^2 = e+u+(1+2\gamma\alpha_0)u^2 = e+u+\alpha_0 u^2$, pois, $1+\frac{2\gamma}{1-2\gamma} = \frac{1}{1-2\gamma}$. Portanto, vale a inclusão $\{e+u+\alpha_0 u^2; u \in U_e\} \subset \mathrm{Id}_1(\mathrm{A})$. Agora tomemos um idempotente de peso 1, $x \in \mathrm{Id}_1(A)$, sob a forma $x = e + u + z$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Ora, $x = x^2$, logo $e+u+z = (e+u+z)^2$, de onde decorre $e+u+z = e+u^2+z^2+2eu+2ez+2uz$. Novamente, devido as definições de U_e e Z_e e a proposição 5.2 temos $e + u + z = e+(u+2uz)+(u^2+2\gamma z)$, com $u+2uz \in U_e$ e $u^2+2\gamma z \in Z_e$. Devido a decomposição $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, temos as igualdades $u = u + 2uz$ e $z = u^2 + 2\gamma z$. Logo $uz = 0$ e $z = \alpha_0 u^2$, ou seja $x = e + u + \alpha_0 u^2$. Portanto, $\mathrm{Id}_1(\mathrm{A}) \subset \{\mathrm{e} + \mathrm{u} + \alpha_0 \mathrm{u}^2; \mathrm{u} \in \mathrm{U_e}\}$. □

Segue da proposição 5.24 que dados $e, f \in Id_1(A)$, temos $f = e + u_0 + \alpha_0 u_0^2$, para algum $u_0 \in U_e$.

Corolário 5.1.2. *Tomemos $e, f \in Id_1(A)$, tais que $f = e + u_0 + \alpha_0 u_0^2$, com $u_0 \in U_e$. As aplicações $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$ e $\tau : Z_e \longrightarrow Z_f$ dadas por $\sigma(u) = u + 2\alpha_0 u_0 u$ e $\tau(z) = z - 2\alpha_0 u_0 z$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, são isomorfismos.*

Demonstração. Notemos inicialmente que $2f(u+2\alpha_0 u_0 u) = 2(e+u_0+\alpha_0 u_0^2)(u+2\alpha_0 u_0 u) = 2eu+4\alpha_0 e(u_0 u)+2u_0 u+(4\alpha_0 u_0(u_0 u)+2\alpha_0 u_0^2 u)+2\alpha_0^2 u_0^2(u_0 u)$. Devido as definições de U_e e Z_e e as relações (5.17) e (5.18), temos $u+2(2\alpha_0\gamma+1)(u_0 u)$. Como $2\alpha_0\gamma + 1 = \frac{2\gamma}{1-2\gamma} + 1 = \frac{1}{1-2\gamma} = \alpha_0$, concluímos que $2f(u + 2\alpha_0 u_0 u) = u + 2\alpha_0 u_0 u$. Portanto, $u + 2\alpha_0 u_0 u \in U_f$. Do mesmo modo, vemos que $f(z - 2\alpha_0 u_0 z) = (e + u_0 + \alpha_0 u_0^2)(z-2\alpha_0 u_0 z) = ez-2\alpha_0 e(u_0 z)+u_0 z-2\alpha_0 u_0(u_0 z)+\alpha_0 u_0^2 z-2\alpha_0^2 u_0^2(u_0 z)$. Usando as definições de U_e, Z_e e as relações (5.15), (5.16) e (5.18), concluímos $f(z-2\alpha_0 u_0 z) = \gamma z + (-\gamma + 1)u_0 z$. Como $-\gamma + 1 = -\frac{1}{1-2\gamma} + 1 = -\frac{2\gamma}{1-2\gamma}$. Temos, $f(z - 2\alpha_0 u_0 z) = \gamma(z - 2\alpha_0 u_0 z)$. Portanto, $z - 2\alpha_0 u_0 z \in Z_f$. Desse modo σ e τ estão bem definidas. Dados $u, u' \in U_e$, vemos que $\sigma(u) = \sigma(u')$ implica em $u + 2\alpha_0 u_0 u = u' + 2\alpha_0 u_0 u'$. Devido a decomposição $N = U_e \oplus Z_e$ temos $u = u'$. Do mesmo modo, agora tomando

$z, z' \in Z_e$, temos que $\tau(z) = \tau(z')$ implica em $z - 2\alpha_0 u_0 z = z' - 2\alpha_0 u_0 z'$. Novamente devido a decomposição $N = U_e \oplus Z_e$, vemos que $z = z'$. Portanto, σ e τ são injetivas. Considerando $\phi : A \longrightarrow A$, dada por $\phi(\alpha e + u + z) = \alpha f + \sigma(u) + \tau(z)$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$, vemos que ϕ é injetiva, portanto sobrejetiva. Logo, σ e τ também são sobrejetivas. Portanto, σ e τ são isomorfismos. $\square$

O corolário anterior nos diz que dados $e, f \in Id_1(A)$, tais que $f = e + u_0 + \alpha_0 u_0^2$, para algum $u_0 \in U_e$, temos

$$U_f = \{u + 2\alpha_0 u_0 u; u \in U_e\} \tag{5.25}$$

$$Z_f = \{z - 2\alpha_0 u_0 z; z \in Z_e\} \tag{5.26}$$

Os isomorfismos $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$ e $\tau : Z_e \longrightarrow Z_f$ garantem a invariância da dimensão de U_e e Z_e pela mudança do idempotente $e \in Id_1(A)$.

5.2 Invariância de p-subespaços

A fim de estudar a invariância de p-subespaços em A, consideraremos o operador $\xi : U_e \longrightarrow U_e$, dado por $\xi(u) = u - 2\alpha_0^2 u_0^2 u$, com $u, u_0 \in U_e$. Notemos que $\xi(u) = 0$ implica em $u = 2\alpha_0^2 u_0^2 u$. Multiplicando ambos os membros dessa equação por u_0, temos $u_0 u = 2\alpha_0^2 u_0 (u_0^2 u)$. Segue das relações (5.22) e (5.14) que $u_0 u = 2\alpha_0^2 u_0 (u_0^2 u) = 2\alpha_0^2 u (u_0^3) = 0$. Agora, devido a relação (5.17) temos $2\alpha_0^2 u_0^2 u = -4\alpha_0^2 u_0 (u_0 u)$. Logo, se $u - 2\alpha_0^2 u_0^2 u = 0$, então $u = 2\alpha_0^2 u_0^2 u = -4\alpha_0^2 u_0 (u_0 u) = 0$. Segue-se que $\xi : U_e \longrightarrow U_e$ é injetiva e consequentemente sobrejetiva. Portanto, $\xi : U_e \longrightarrow U_e$ é um isomorfismo.

Proposição 5.5. *Seja $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ uma álgebra train de posto 3. Sejam também os isomorfismos $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$, $\tau : Z_e \longrightarrow Z_f$, $\xi : U_e \longrightarrow U_e$, dados por $\sigma(u) = u + 2\alpha_0 u_0 u$, $\tau(z) = z - 2\alpha_0 u_0 z$ e $\xi(u) = u - 2\alpha_0^2 u_0^2 u$, com $u, u_0 \in U_e$ e $z \in Z_e$. As igualdades*

(a) $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = \tau(u_1 u_2)$

(b) $\sigma(u)\tau(z) = \sigma(\xi(u)z)$

(c) $\tau(z_1)\tau(z_2) = \sigma(z_1z_2)$

(d) $\xi(\xi(u)z) = uz$

são verdadeiras quaisquer que sejam $u, u_1, u_2 \in U_e$ *e* $z, z_1, z_2 \in Z_e$.

Demonstração. Tomemos $u, u_1, u_2 \in U_e$ e $z, z_1, z_2 \in Z_e$. Para ver que (a) é verdade, calculemos $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = (u_1 + 2\alpha_0 u_0 u_1)(u_2 + 2\alpha_0 u_0 u_2) = u_1u_2 + 2\alpha_0 u_1(u_0u_2) + 2\alpha_0 u_2(u_0u_1) + 4\alpha_0^2(u_0u_1)(u_0u_2)$. De (5.20) vem que $2\alpha_0 u_1(u_0u_2) + 2\alpha_0 u_2(u_0u_1) = -2\alpha_0 u_0(u_1u_2)$. Notando que $u_0u_1, u_0u_2 \in Z_e^2$ e lembrando da proposição 5.2 que $Z_e^2 = 0$, temos $(u_0u_1)(u_0u_2) = 0$. Agora, podemos ver que $\sigma(u_1)\sigma(u_2) = u_1u_2 - 2\alpha_0 u_0(u_1u_2) = \tau(u_1u_2)$. Para a parte (b), calculemos $\sigma(u)\tau(z) = (u + 2\alpha_0 u_0 u)(z - 2\alpha_0 u_0 z) = uz - 2\alpha_0 u(u_0z) + 2\alpha_0 z(u_0u) - 4\alpha_0^2(u_0u)(u_0z)$. Notemos que, devido a (5.22), podemos escrever $(u_0u)(u_0z) = -z[u_0(u_0u)]$. Usando (5.17), chegamos a $(u_0u)(u_0z) = -z[u_0(u_0u)] = \frac{1}{2}z(u_0^2u)$. Novamente por (5.22), temos $(u_0u)(u_0z) = -z[u_0(u_0u)] = \frac{1}{2}z(u_0^2u) = -\frac{1}{2}u_0^2(uz)$. Portanto, $-4\alpha_0^2(u_0u)(u_0z) = 2\alpha_0^2u_0^2(uz)$. Usando esse raciocínio juntamente com as relações (5.22) e (5.21) podemos escrever $\sigma(u)\tau(z) = uz + 2\alpha_0 u_0(uz) + 2\alpha_0^2 u_0^2(uz)$. Por outro lado, $\sigma(\xi(u)z) = \sigma((u - 2\alpha_0^2u_0^2u)z) = \sigma(uz - 2\alpha_0^2 z(u_0^2u)) = uz - 2\alpha_0^2 z(u_0^2u) + 2\alpha_0 u_0(uz) - 4\alpha_0^3 u_0[z(u_0^2u)] = uz + 2\alpha_0 u_0(uz) + 2\alpha_0^2u_0^2(uz)$, pois, por (5.22) e (5.17) temos $u_0[z(u_0^2u)] = -(u_0^2u)(u_0z)$ o que, por sua vez, nos permite escrever $u_0[z(u_0^2u)] = 2[u_0(u_0u)](u_0z) = 0$. Desse modo, provamos a relação (b). Notemos que, $\tau(z_1)\tau(z_2) \in Z_f^2 = 0$. Além disso $\sigma(z_1z_2) = 0$, pois $z_1z_2 \in Z_e^2 = 0$. Portanto, vale (c). Para a última parte, calculamos $\xi(\xi(u)z) = \xi((u - 2\alpha_0^2u_0^2u)z) = \xi(uz - 2\alpha_0^2 z(u_0^2u)) = uz - 2\alpha_0^2 z(u_0^2u) - 2\alpha_0^2u_0^2(uz) + 4\alpha_0^4u_0^2[z(u_0^2u)] = uz + 2\alpha_0^2 u_0(uz) - 2\alpha_0^2u_0^2(uz) = uz$, pois, de (5.22) e (5.16), temos $u_0^2[z(u_0^2u)] = -z[u_0^2(u_0^2u)] = 0$. Portanto, a relação (d) é verdadeira. □

Segue da proposição acima o seguinte corolário

Corolário 5.2.1. *Seja* $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$ *uma álgebra train de posto* 3*. Se* $X, X_1, X_2 \subset U_e$ *e* $W, W_1, W_2 \subset Z_e$ *são subespaços de* A*, então*

(a) $(XW_1)W_2 = (XW_2)W_1$

(b) $\sigma(X_1)\sigma(X_2) = \tau(X_1X_2)$

(c) $\sigma(X)\tau(W) = \sigma(\xi(X)W)$

(d) $\tau(W_1)\tau(W_2) = \sigma(W_1W_2)$

Demonstração. O ítem (a) é conseqüência da aplicação da relação (5.22) aos geradores daqueles subespaços. Analogamente, aplicando a proposição anterior aos geradores dos subespaços dados demonstramos os ítens seguintes. □

Proposição 5.6. *Se* p_e *é um p-subespaço da álgebra train de posto* 3 A *então* $Z_e p_e \subset p_e$.

Demonstração. É suficiente demonstrar a proposição para p-monômios. Se m_e é um p-monômio de grau 1, então $Z_e m_e \subset m_e$, pois $Z_e m_e = Z_e U_e \subset U_e$ ou $Z_e m_e = Z_e Z_e = 0 \subset Z_e$. Suponhamos que a proposição seja válida para todo p-monômio de grau menor do que k, $k \geq 2$. Seja m_e, um p-monômio de grau k. Há três possibilidades para m_e: $m_e = \mu_e \nu_e$, $m_e = \mu_{1_e}\mu_{2_e}$ ou $m_e = \nu_{1_e}\nu_{2_e}$, com $\mu_e, \mu_{1_e}, \mu_{2_e} \subset U_e$ e $\nu_e, \nu_{1_e}, \nu_{2_e} \subset Z_e$ são p-monômios de grau menor do que k. Desse ponto em diante vamos supor $u \in \mu_e$, $u_1 \in \mu_{1_e}$, $u_2 \in \mu_{2_e}$ e $v \in \nu_e$. Se $z(uv)$ é um gerador de $Z_e(\mu_e \nu_e)$, então, devido a (5.22), temos $z(uv) = -v(zu) \in \nu_e(Z_e \mu_e) \subset \mu_e \nu_e = m_e$. Analogamente, supondo que $z(u_1u_2)$ é um gerador de $Z_e(\mu_{1_e}\mu_{2_e})$, a relação (5.21) nos dá $Z_e(\nu_{1_e}\nu_{2_e}) = 0 \subset m_e$. □

Corolário 5.2.2. *Qualquer que seja o p-subespaço* $g_e \subset U_e$*, temos* $\xi(g_e) = g_e$

Demonstração. Tomemos $u \in g_e$ e notemos que $\xi(u) = u - 2\alpha_0^2 u_0^2 u \in g_e + Z_e g_e \subset g_e$. Além disso, como $\xi : U_e \longrightarrow U_e$ é um isomorfismo, então temos a igualdade $\xi(g_e) = g_e$. □

Finalmente temos o resultado central do capítulo, dando condições necessárias e suficientes para a invariância de p-subespaços em uma álgebra train de posto 3.

Teorema 5.1. *Sejam A uma álgebra train de posto 3, $e, f \in \mathrm{Id}_1(A)$ e $u_0 \in U_e$ tal que $f = e + u_0 + \alpha_0 u_0^2$. Sejam também os isomorfismos $\sigma : U_e \longrightarrow U_f$ e $\tau : Z_e \longrightarrow Z_f$, dados respectivamente por $\sigma(u) = u + 2\alpha_0 u_0 u$ e $\tau(z) = z - 2\alpha_0 u_0 u$, com $u \in U_e$ e $z \in Z_e$.*

1. *Se $\phi : A \longrightarrow A$, dada por $\phi(\alpha e + u + z) = \alpha f + \sigma(u) + \tau(z)$ é a transfomação de Peirce associada aos idempotentes $e, f \in Id_1(A)$, então todo p-subespaço p_e em A satisfaz $\phi(p_e) = p_f$. Portanto, todo p-subespaço em A tem dimensão invariante.*

2. *São equivalentes:*

   (a) *p_e é invariante;*

   (b) *$U_e p_e \subset p_e$;*

   (c) *p_e é um ideal de A.*

Demonstração. É suficiente demonstrar a primeira parte para p-monômios. Usaremos indução sobre o grau o p-monômio. Sejam $e, f \in Id_1(A)$, como no enunciado. Se m_e é um p-monômio de A, tal que seu grau é 1, então $m_e = U_e$ ou $m_e = Z_e$. Em qualquer dos casos $\phi(m_e) = m_f$, pois

$$\phi(U_e) = \sigma(U_e) = U_f$$

$$\phi(Z_e) = \tau(Z_e) = Z_f$$

Suponhamos que a afirmação (1) seja válida para todo p-monômio de grau menor do que k, $k \geq 2$. Seja m_e um p-monômio de grau k. Há três possibilidades para m_e: $m_e = \mu_e \nu_e$, $m_e = \mu_{1_e} \mu_{2_e}$ ou $m_e = \nu_{1_e} \nu_{2_e}$, com $\mu_e, \mu_{1_e}, \mu_{2_e} \subset U_e$ e $\nu_e, \nu_{1_e}, \nu_{2_e} \subset Z_e$ são p-monômios de grau menor do que k. Se $m_e = \mu_e \nu_e$, então $m_f = \mu_f \nu_f =$

$\sigma(\mu_e)\tau(\nu_e) = \sigma(\xi(\mu_e)\nu_e) = \sigma(\mu_e\nu_e) = \sigma(m_e) = \phi(m_e)$. Caso tenhamos $m_e = \mu_{1_e}\mu_{2_e}$, então $m_f = \mu_{1_f}\mu_{2_f} = \sigma(\mu_{1_e})\sigma(\mu_{2_e}) = \tau(\mu_{1_e}\mu_{1_e}) = \tau(m_e) = \phi(m_e)$. Finalmente, se $m_e = \nu_{1_e}\nu_{2_e}$, então $m_e = 0$, pois $Z_e^2 = 0$, logo $m_f = \phi(m_e)$. Para a segunda parte consideremos $p_e = g_e \oplus h_e$, em que $g_e \subset U_e$ e $h_e \subset Z_e$ são p-subespaços. Da primeira parte, temos $p_f = g_f \oplus h_f = \{\sigma(x) + \tau(v); x \in g_e \quad , \quad v \in h_e\}$. Portanto, $p_f = \{(x + 2\alpha_0 u_0 x) + (v - 2\alpha_0 u_0 v); x \in g_e \quad , \quad v \in h_e\}$. Segue-se que

$$p_f = \{(x - 2\alpha_0 u_0 v) + (v + 2\alpha_0 u_0 x); x \in g_e \quad , \quad v \in h_e\} \tag{5.27}$$

Suponhamos agora que p_e seja invariante, ou seja, $p_e = p_f$ quaisquer que sejam os idempotentes $e, f \in Id_1(A)$. De (5.27), vemos que existem $x' \in g_e$ e $v' \in h_e$, tais que $x - 2\alpha_0 u_0 v = x'$ e $v + 2\alpha_0 u_0 x = v'$. Logo, $u_0 v = \frac{1}{2\alpha_0}(x - x')$ e $u_0 x = \frac{1}{2\alpha_0}(v' - v)$. Ou seja, $U_e h_e \subset g_e$ e $U_e g_e \subset h_e$. Portanto, $U_e p_e \subset p_e$. Reciprocamente, suponhamos que $U_e p_e \subset p_e$. reescrevendo (5.27), temos

$$p_f = \{(x + v) + 2\alpha_0 u_0(x - v); x \in g_e \quad , \quad v \in h_e\}$$

Segue-se que $p_f \subset p_e + U_e p_e \subset p_e$. Portanto, p_e é invariante. Por fim, supondo $A = Fe \oplus U_e \oplus Z_e$, temos $ep_e = e(g_e + h_e) = \frac{1}{2}g + \gamma h \subset p_e$. Como $Z_e p_e \subset p_e$, p_e será um ideal se, e somente se $U_e p_e \subset p_e$. $\square$

Notemos que as álgebras de Bernstein-Jordan são casos particulares das álgebras Train de posto 3. Desse modo o estudo da invariância de p-subespaços nas álgebras de Bernstein-Jordan já foi feito nessa seção, bastando para isso considerar $\gamma = 0$.

Referências Bibliográficas

[1] A. WALKHOFF. **Algebres de Composition Failble, Tese de Doutorado**. Academie de Montpellier, Universite Montpellier, 1996.

[2] C. MALLOL, R. VARRO. **A Propos des Algèbres Vérifiant** $x^{[3]} = \omega(x)^3 x$. **Linear Algebra and its Aplications**, 225, pp. 187-194, 1995.

[3] I. BASSO, R. COSTA, J. PICANÇO. **On the Invariance of Subspaces in Some Baric Algebras**. Universidad Católica del Norte, Antofagasta - Chile, v. 22, n. 1, pp. 91-102, may 2003.

[4] I. M. H. ETHERINGTON. **Comutative train Algebras of rank 2 and 3**. J. London Math. Soc. 15, pp. 136-149, 1940.

[5] K. HOFFMAN, R. KUNZE. **Álgebra Linear**. Ed. Polígono, 356p., São Paulo, 1970.

[6] LIMA, ELON LAGES. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998. 357pp.(Coleção Matemática Universitária)

[7] M. T. ALCADE, C. BURGUEÑO. **Les Pol(n,m)-Algèbres:Identités Polynômiales Symétriques des Algèbres. Linear Algebra and its Aplications**, 191, pp.213-234, 1993.

[8] MURAKAMI, LUCIA SATIE IKEMOTO. **Álgebras de Bernstein: Resultados Recentes, Dissertação de Mestrado**. IME-USP, 1995.

[9] R. BENAVIDES. **Sobre as T-Álgebras de Posto 3 e Questões Correlatas, Tese de Doutorado**. IME-USP, 1995.

[10] S. WALCHER. **Algebras which Satisfy a train Equation for the First Three Plenary Powers**. Arch. Math. 56, pp. 547-551, 1991.