SHEILA DENIZE GUIMARÃES

A PRÁTICA REGULAR DE CÁLCULO MENTAL PARA AMPLIAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE NOVAS ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO POR ALUNOS DO 4º e 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
Campo Grande/MS
2009

FICHA CATALOGRÁFICA

Guimarães**,** Sheila Denise

A prática regular de cálculo mental para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo por alunos do 4º e 5º ano do ensino fundamental / Sheila Denise Guimarães – Campo Grande, MS, 2009.

261 f. 30 cm

Orientador: José Luiz Magalhães de Freitas .

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Centro de Ciências Humanas e Sociais.

1. Cálculo Mental. 2 Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Engenharia Didática. I. Freitas, José Luiz Magalhães . II. Título.

SHEILA DENIZE GUIMARÃES

A PRÁTICA REGULAR DE CÁLCULO MENTAL PARA AMPLIAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE NOVAS ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO POR ALUNOS DO 4º e 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada como exigência final para obtenção do grau de Doutor em Educação à Comissão Julgadora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul sob a orientação do Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
Campo Grande/MS
2009

COMISSÃO JULGADORA:

____

Prof. Dr.José Luiz Magalhães de Freitas
Orientador

____

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud

____

Profª. Drª. Leny Rodrigues Martins Teixeira

____

Profª. Drª. Marilena Bittar

____

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais

Tiraram de mim essa coisa de fazer conta de cabeça

Na hora que estava fazendo tarefa de Matemática pensei que quando era pequena fazia cálculo mental superbem e agora que tenho dez anos perdi essa facilidade.

Falei isso porque acho que cálculo mental é muito mais prático e depois você tem orgulho de dizer "deu tanto, eu que fiz a conta e acertei".

Perdi assim: fazia de cabeça e as professores diziam que estava errado, só podia fazer no papel.

(Depoimento de NT, participante da experimentação em 2008).

RESUMO

Este estudo teve como objetivo investigar a natureza do cálculo mental e suas contribuições para a aprendizagem dos conceitos aditivos e multiplicativos de alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, em situações didáticas vivenciadas de forma dialógica. A investigação proposta se baseou na seguinte questão investigativa: Quais são as estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos durante a resolução de atividades que envolvem operações aditivas e multiplicativas? Para isso, utilizamos como referenciais teóricos os estudos sobre a Teoria dos Campos Conceituais e sobre a Teoria das Situações. O desenvolvimento experimental da pesquisa se pautou na Engenharia Didática e foi realizado com alunos do Ensino Fundamental de uma escola particular de ensino de Campo Grande/ MS que cursaram o 4º ano no segundo semestre de 2007 e o 5º ano em 2008. Os resultados indicam que: 1) as principais estratégias mobilizadas pelos alunos se concentram em cinco grupos (reproduzir mentalmente o algoritmo, realizar a sobrecontagem com o auxílio dos dedos, usar regras automatizadas, usar propriedades dos números e das operações e realizar cálculos baseando-se na percepção de algumas regularidades dos números anunciados); 2) a verbalização permitiu a troca de informações e conhecimentos, revelando, muitas vezes, o modo particular de cada um ver e fazer a matemática; 3) ouvindo, raciocinando e falando sobre cálculo mental os alunos incorporaram novas estratégias ao repertório numérico;4) os teoremas mobilizados foram adicionados gradativamente ao repertório do grupo pesquisado, à medida que os mesmos eram introduzidos nas discussões. Avaliamos que a dinâmica instaurada em nossa pesquisa deveria ser incorporada à prática dos professores, pois favoreceu o conhecimento das concepções numéricas dos alunos e contribuiu para o desenvolvimento de um ensino mais efetivo. Dessa maneira foi possível insistir naqueles aspectos em que os alunos cometiam erros, antecipando suas respostas e descrevendo estratégias para a correção das mesmas, conduzindo-os a abandonar suas antigas estratégias para adotarem novas, mais eficientes, agregando novos conceitos e significados ao conhecimento matemático.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo Mental; Sistema de Numeração Decimal; Operações Aditivas e Multiplicativas; Anos Iniciais do Ensino Fundamental; Engenharia Didática.

ABSTRACT

This study had as objective to investigate the nature of the mental calculation and its contributions for the learning of the additive and multiplicative concepts of pupils of 4th and 5th year of Basic Teaching, in didactic situations lived in the dialogical form. The inquiry proposal was based on the following investigative question: Which are the strategies of mental arithmetic used by the pupils during the resolution of activities that involve additive and multiplicative operations? For this, we use as theoretical framework the studies on the Theory of the Conceptual Fields and on the Theory of the Situations. The experimental development of the research was guided by the Didactic Engineering and was carried through with pupils of Basic Teaching of a private school of education in Campo Grande/MS who had attended the second term of 4th year in 2007 and the 5th year in 2008. The results indicate that: 1) the main strategies mobilized by the pupils are concentrated in five groups (to reproduce the algorithm mentally, to carry through the counting with the aid of the fingers, to use automated rules, to use properties of the numbers and the operations and to carry through calculations being based on the perception of some regularities of the announced numbers); 2) the verbalization allowed to exchange the information and knowledge, disclosing, many times, the particular way of each one to see and to make the mathematics; 3) listening to, thinking and saying on mental arithmetic the pupils added new strategies to the numerical repertoire; 4) the mobilized theorems were incorporated to the repertoire of the searched group gradually, while the ones were introduced in the discussions. We evaluate that the dynamics restored in our research should be incorporated the teachers' practice, because it favored the knowledge of the numerical conceptions of the pupils and contributed for the development of a more effective teaching. In this way it was possible to insist on those aspects where the same ones committed errors, anticipating the answers of the pupils and describing strategies for the correction of the ones, leading the pupils to abandon their old strategies to adopt new, more efficient ones, adding new concepts and meanings to the mathematical knowledge.

KEY – WORDS: Mental Calculation; System of Decimal Numeration; Additive and Multiplicative Operations; Initial Years of Basic Teaching; Didactic Engineering.

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – Relação das atividades conforme os blocos contemplados na experimentação 44

QUADRO 2 – Grupo de alunos participantes da experimentação, organizados de acordo com a média obtida em Matemática no 1º semestre de 2007 52

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 9
CAPÍTULO I – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA 14
Objetivo geral 21
Objetivos específicos 21
Sujeitos 22
Metodologia 22
CAPÍTULO II – CÁLCULO MENTAL: significados e contribuições 25
CAPÍTULO III – CONCEITOS MATEMÁTICOS EXPLORADOS 33
3.1 - Construção e elementos da seqüência 39
3.1.1 – Variáveis relacionadas ao conteúdo matemático 40
3.1.2 – Variáveis relacionadas à gestão das atividades 42
CAPÍTULO IV – SEQÜÊNCIA DIDÁTICA: descrição e análise dos dados 44
4.1 – Bloco do sistema de numeração decimal: atividades propostas 46
4.1.1 – Bloco do sistema de numeração decimal: dados coletados 53
4.2 – Bloco aditivo: atividades propostas 86
4.2.1 – Bloco aditivo: dados coletados 88
4.3 - Bloco multiplicativo: atividades propostas 158
4.3.1 – Bloco multiplicativo: dados coletados 170
4.4 – DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 220
CAPÍTULO V - UM CASO EXEMPLAR 232
5.1 – Bloco do sistema de numeração decimal 232
5.2 – Bloco aditivo 239
5.3 – Bloco multiplicativo 243
5.4 – Discussão 245
CONSIDERAÇÕES FINAIS 248
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 256

INTRODUÇÃO

A compreensão das regras e propriedades do sistema de numeração decimal constitui-se um desafio e parece não ter o êxito pretendido pela escola, talvez devido à maneira como esse ensino vem sendo conduzido. O que ocorre, muitas vezes, é uma chamada à memorização da seqüência dos números por meio de exercícios escritos das séries numéricas, com intuito de que a automatização da escrita e o reconhecimento de qualquer número se efetivem (LOSITO, 1996). Quanto às operações, a escola, de modo geral, propõe para todas as operações o mesmo processo de cálculo, mais adequado para ser efetuado no papel (MENDONÇA e LELLIS, 1989).

No Brasil, essa maneira de pensar o ensino de Matemática tem início no século XIX, após a carta outorgada por Pedro I, em março de 1824, quando calorosos debates aconteceram na Câmara dos Deputados em torno da Lei de 15 de novembro de 1827, que obrigava a criação de escolas primárias em todas as cidades e vilas do Brasil. Em meio a um dos debates, o deputado Xavier de Carvalho afirma que se fossem exigir requisitos maiores de um professor do ensino primário receava que não tivessem professores. Era preciso exigir apenas que os professores soubessem e ensinassem as quatro operações de aritmética, maquinalmente, tal como ele aprendeu. Nesse período o contar estava relacionado ao aprendizado das tabuadas (VALENTE, 2006).

Cento e vinte e cinco anos após a criação das escolas primárias, em 1952, é publicado o livro de Matemática para o curso primário, que trazia os requisitos mínimos a alcançar nesse ensino. Em relação ao conceito de número e operações, o livro propunha que conhecer número é saber contar e escrever números e a aprendizagem das operações está baseada na memorização dos fatos (NUNES *et al*, 2005).

Cotejando as informações trazidas por Losito (1996) com as apresentadas por Valente (2006) e Nunes *et al* (2005), percebemos que o ensino mecânico, com ênfase na memorização vem sendo praticado desde a criação da escola. Essa postura contraria as recomendações advindas de organismos nacionais e internacionais ligados à Educação Matemática, que são unânimes em propor que se dê um destaque à compreensão do número e das operações, conforme aponta Serrazina (2002):

> O ensino dos números e das operações na educação básica não deve visar a aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras, mas sim uma aprendizagem significativa ligada a uma compreensão relacional das propriedades dos números e das operações. **Não basta aprender os procedimentos; é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento** (grifo nosso, Ibidem, p.59).

Acreditamos que a compreensão das propriedades dos números e das operações possa ser favorecida mediante um trabalho sistemático envolvendo o cálculo mental que permita ao aluno construir novos esquemas de ação, estabelecer um espaço de múltiplas interações em sala de aula, ampliar e automatizar o repertório de cálculo e habilidades como a atenção, a memória e a concentração (ANSELMO e PLANCHETTE, 2006).

Embora os **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática** (BRASIL, 1997) enfatizem a necessidade de ampliação de diferentes procedimentos e tipos de cálculos – mental ou escrito, exato ou aproximado, parece que as escolas brasileiras, em sua maioria, se limitam em utilizar o cálculo escrito e o exato. Uma pesquisa recente realizada por Carnoy, Gove e Marshall (2003) apresenta os resultados de uma análise das práticas de ensino de Matemática em salas de aula de 3ª série em escolas de três países: Brasil, Chile e Cuba. Os dados apontam que as escolas brasileiras se enquadram na categoria de aulas menos exigentes em termos de capacidade cognitiva exigida dos alunos, obtendo a média mais baixa tanto em demanda cognitiva como em proficiência matemática. Essa média está relacionada ao formato das aulas, centradas na aquisição de respostas corretas sem desenvolver a compreensão. "Grande parte das aulas brasileiras consistia na professora escrevendo no quadro-negro, os alunos copiando, com pouca interação. As explicações, quando ocorriam, limitavam-se a descrever o procedimento sendo utilizado" (ibid., p. 21).

Os resultados mostraram, também, que as professoras brasileiras, com algumas exceções, usavam trabalho individual ou trabalho em grupo, sem usar modos múltiplos de interação, como faziam as professoras chilenas e cubanas. Os autores acreditam que o uso de um método mais estático e com pouca interação, nas aulas brasileiras, seja uma forma de exercer controle sobre os alunos, a fim de manter a disciplina.

Quando defendemos uma ampliação nos procedimentos e tipos de cálculos usados pelo aluno acreditamos que esse formato estático acaba se tornando inadequado. Acreditamos que nas aulas que exigem maior capacidade cognitiva, como é o caso das relacionadas com o cálculo mental, é necessário que o professor crie um espaço para que o aluno possa explicitar os procedimentos utilizados na resolução das situações–problema. Isso porque desejamos que novas técnicas mentais "[...] apareçam e sejam utilizadas, de início por certos alunos (em geral os bons alunos), depois progressivamente para a maior parte da classe" (BUTLEN e PEZARD, 1992). Nesse momento é inevitável o aparecimento de modos múltiplos de interação – professor / aluno, aluno / aluno, aluno / turma.

A defesa da utilização de procedimentos e tipos de cálculo variados também se faz presente no **Guia do livro didático 2007** (BRASIL, 2006) que apresenta na ficha de avaliação das coleções de livros didáticos um item que busca diagnosticar a presença de situações que envolvem o cálculo mental. O documento afirma que, em relação ao conjunto de coleções avaliadas, o cálculo mental é abordado em grande parte delas. Em muitas das coleções "[...] é feito um bom trabalho pedagógico para a construção dessa competência indispensável na formação Matemática do aluno. Contudo, em outras, as estratégias de cálculo mental são apresentadas, mas o aluno é pouco incentivado a utilizá-las" (Ibid., p. 27).

No decorrer da nossa atuação como professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental percebemos que, mesmo quando os materiais didáticos trazem atividades relacionadas ao seu desenvolvimento, como sugerem os documentos oficiais, essas acabam sendo realizadas via algoritmo escrito. Confessamos que também fizemos parte do grupo de professores que priorizava esse tipo de registro e buscava ensinar "regrinhas" para facilitar o cálculo, sem estimular a compreensão dos alunos. Verificamos também ao longo de nossa experiência profissional que esses, após cursarem os anos iniciais do Ensino Fundamental e terem supostamente vivenciado situações relacionadas ao Sistema de Numeração Decimal, às operações aditivas e multiplicativas, continuavam sem saber realizar a leitura de um número que atingisse a classe dos milhares ou realizando multiplicações por mil usando o algoritmo convencional, multiplicando todos os zeros existentes, por exemplo.

Situações como essas nos despertaram o interesse pelas questões relativas ao ensino e à aprendizagem da Matemática: Por que isso acontecia se já tínhamos ensinado, por um lado, desde os primeiros anos a separar o número de três em três para facilitar a leitura e por outro lado, que para multiplicar por mil basta acrescentar três zeros à direita do último algarismo do número anunciado?

Como pesquisadora, verificamos também que alguns alunos não conseguem resolver problemas envolvendo as operações aditivas e multiplicativas, mesmo após identificar a operação necessária para resolvê-lo, simplesmente por não dominarem a técnica do algoritmo ensinado pela escola e não conseguirem criar uma estratégia alternativa. Isso nos instigou a desenvolver um trabalho que estimulasse os alunos a perceberem as regularidades e propriedades dos números e das operações e a ampliarem o repertório de cálculo, sem limitá-lo ao cálculo escrito via algoritmo ensinado pela escola.

A partir dos aprofundamentos e considerando por um lado, que o cálculo mental permite desenvolver procedimentos variados de cálculo sem limitar a um processo único, e, por outro, as recomendações tanto dos **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática** (BRASIL, 1997) como do **Guia do livro didático 2007** (BRASIL, 2006), foi se delineando a proposta desta pesquisa, cuja intenção consiste investigar a natureza do cálculo mental e suas contribuições para a aprendizagem dos conceitos aditivos e multiplicativos de alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, em situações didáticas vivenciadas de forma dialógica. Supomos que uma prática regular de cálculo mental possa contribuir para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo.

Para investigar a natureza do cálculo mental e suas contribuições para a aprendizagem dos conceitos aditivos e multiplicativos adotamos como principais referenciais teóricos a Teoria dos Campos Conceituais e a Teoria das Situações propostas por Vergnaud e Brousseau respectivamente, conforme descrito no capítulo I.

No capítulo II apresentamos contribuições apontadas por pesquisas relativas ao trabalho com cálculo mental para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Encerrando o capítulo, discorremos a respeito da importância da metacognição para a aprendizagem.

No capítulo III discutimos os conceitos matemáticos explorados na seqüência didática realizada com alunos do Ensino Fundamental de uma escola particular de ensino de Campo Grande/ MS que cursaram o 4º ano no segundo semestre de 2007 e o 5º ano em 2008 e as variáveis didáticas que estiveram a nossa disposição no decorrer da pesquisa.

No capítulo IV apresentamos as atividades selecionadas para compor a seqüência didática a ser realizada com os alunos, acompanhadas da descrição e análise dos dados coletados durante a aplicação da seqüência, obedecendo a ordem dos três blocos propostos: sistema de numeração decimal, operações aditivas e operações multiplicativas. As informações foram interpretadas e analisadas com base nas teorias apresentadas no capítulo I e nas considerações de outros pesquisadores cujo tema de investigação aborda o ensino e a aprendizagem de Matemática via cálculo mental.

No capítulo V resgatamos o caso de um dos sujeitos envolvidos na experimentação, selecionado por constituir uma espécie de caso exemplar, em razão das respostas apresentadas revelarem contribuições do cálculo mental para a aprendizagem da matemática.

Por fim, fizemos uma reflexão sobre a pesquisa e delineamos algumas perspectivas de pesquisa e pedagógicas.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

Adotamos como principais referenciais teóricos a Teoria dos Campos Conceituais e a Teoria das Situações propostas respectivamente por Vergnaud e Brousseau.

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista que almeja "[...] fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, nomeadamente daquelas que revelam das ciências e das técnicas" (VERGNAUD, 1996a, p.155). Devido ao fato de proporcionar um quadro para a aprendizagem interessa à didática, mas ela não é, por si só, uma teoria didática.

Vergnaud (1985) justifica a necessidade de estudar campos conceituais por considerar uma reciprocidade muito grande entre conceito e situação, tendo em vista que um conceito remete a muitas situações e uma situação remete a muitos conceitos. Sendo assim, o desenvolvimento dos conhecimentos de uma criança se faz por meio de um conjunto relativamente vasto de situações entre as quais existe parentesco, como é o caso da adição / subtração e da multiplicação / divisão.

Para o autor um conceito é uma trinca de conjuntos que .

> [...] envolve um conjunto de situações (S) que dão sentido ao conceito (referência), um conjunto de invariantes (I) em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado) e um conjunto de formas de linguagem (Y) que podem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (VERGNAUD, 1990, p. 8).

O conceito de situação mencionado por Vergnaud (1990) relaciona-se à tarefa cognitiva e abrange duas idéias principais, a de variedade e a da história. A idéia de variedade implica a existência de várias situações dentro de um mesmo campo conceitual e a de história relaciona-se aos conhecimentos elaborados mediante situações enfrentadas e dominadas pelo sujeito, que poderão dar sentido aos conceitos e procedimentos.

Entretanto, sabemos que a forma como a criança age frente a diferentes situações depende dos esquemas que ela possui. Um esquema é uma totalidade organizada que engendra uma classe de comportamentos distintos em função das peculiaridades de cada situação à qual se destina. Vergnaud (S.D.,p.3) afirma que "[...]cada sujeito dispõe de vários esquemas alternativos entre os quais ele pode escolher em função dos valores das variáveis de situação e notadamente dos valores numéricos". Essa diversidade só é possível porque o esquema envolve:

> - invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) que dirigem o reconhecimento, pelo sujeito, dos elementos pertinentes da situação e a tomada da informação sobre a situação a tratar;
> - antecipações da meta a atingir, efeitos esperados e eventuais etapas intermediárias;
> - regras de ação do tipo "se... então..." que permitem gerar a seqüência das ações do sujeito;
> - inferências (ou raciocínios) que permitem "calcular" as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que o sujeito dispõe (VERGNAUD, 1990, p. 19).

Segundo o autor, os invariantes operatórios desempenham o papel de núcleo central da representação, visto que organizam a ação, mediante objetos, propriedades, relações e processos que o pensamento recorta no real. "Os conceitos em ação permitem retirar do meio as informações pertinentes [e ignorar outros aspectos] e selecionar os teoremas em ação necessários ao cálculo [...]" (VERGNAUD, 2005, p.7).

Vergnaud (1990, p.6) afirma que os teoremas em ação são

> [...] invariantes do tipo 'proposição': podem ser verdadeiras ou falsas" e os conceitos-em-ação são "invariantes do tipo 'função proposicional': não são suscetíveis de serem verdadeiras ou falsas, mas constituem marcos indispensáveis à construção das proposições.

Moro (1998, p.8) baseando-se em Vergnaud afirma que os teoremas em ação "[...] designam as propriedades das relações encontradas pelo sujeito quando age sobre a realidade e resolve o problema" e para empregá-los o sujeito não precisa saber explicá-los ou justificá-los.

Podemos evidenciar os teoremas em ação quando pedimos para uma criança contar quantas pedras existem sobre a mesa. A criança vai e conta: um, dois, três. Acrescentamos à quantidade inicial mais duas pedras e perguntamos quantas pedras estão agora sobre essa mesa. Uma criança de 5 anos contaria tudo: um, dois, três, quatro, cinco. Dois anos mais tarde a mesma criança não recontará o todo. Ela vai conservar a quantidade inicial (três) e contar a partir dela: três, quatro, cinco. Esse teorema em ação é simples e pode ser expresso por: Card (A U B) = Card (A) + Card (B) desde que A ∩B = Ø

Os conceitos em ação designam as peças componentes dos teoremas em ação, sendo os instrumentos nocionais para resolver o problema, sem possuir a necessidade de serem explicitados pelo sujeito (MORO, 1998.). Os conceitos em ação não existem sem os teoremas em ação, mas só têm sentido em proposições verdadeiras, por meio das quais podem exercer sua função.

Os conceitos em ação podem ser evidenciados no exemplo mencionado acima, quando a criança faz a enunciação coordenada da série numérica: um, dois, três, quatro.

Por isso podemos afirmar que os invariantes operatórios são percebidos no estudo do sujeito em ação, sendo fontes de pesquisa que podem auxiliar o professor a compreender como o aluno resolveu um dado problema e que elementos foram considerados no momento da resolução que o fez decidir por esta ou aquela estratégia. Como exemplo podemos citar a resolução do cálculo 15 x 8, na qual um aluno poderia explicar que realizou a seguinte operação mental para obter 120: *se* 5 é a metade de 10 e 10 x 8 = 80, *então* 5 x 8 = 40, logo 15 x 8 = (10+5) x 8 = 80 + 40 = 120. Podemos perceber nesse exemplo que a utilização da propriedade distributiva da multiplicação possibilitou obter a solução, sem que fosse preciso usar o algoritmo clássico.

Um outro fator determinante na elaboração dos conceitos, elencado por Vergnaud (1990) e considerado em nosso estudo, é a linguagem, que assume a função de comunicação e representação. A linguagem favorece o cumprimento da tarefa e a resolução do problema enfrentado, na medida em que auxilia o pensamento e se encarrega de fazer a representação do mesmo. Nesse caso, a linguagem Matemática envolvida é a que trata do sistema de numeração decimal e toda a simbologia inerente.

Para Vergnaud (1990, p.18) a linguagem e os outros significantes (gestos, desenhos, tabelas...) assumem uma função tríplice na teoria dos campos conceituais à medida que “[...] ajuda à designação e, portanto, à identificação das invariantes: objetos, propriedades, relações e teoremas; ajuda ao raciocínio e à inferência; ajuda à antecipação dos efeitos e metas, à planificação e ao controle da ação". A linguagem se faz presente em situações em que o sujeito precisa planificar e controlar uma ação que ele não domina, não sendo necessária em atividades automatizadas, sendo um instrumento da ação e não objeto da mesma.

Em síntese, um conceito envolve muitas situações, muitos invariantes e muitas simbolizações possíveis, sendo que são as primeiras que dão sentido ao conceito. É mediante essa estreita relação entre o conceito e as situações que Vergnaud (1985) justifica a necessidade de estudar campos conceituais. Assim é o caso da adição e da subtração, que formam o campo conceitual das estruturas aditivas e o caso da multiplicação e da divisão, que formam o campo conceitual das estruturas multiplicativas.

De acordo com Vergnaud (1997) o campo conceitual das estruturas aditivas é entendido como o conjunto das situações, cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações ou uma combinação destas operações. Vale ressaltar que as atividades propostas em nossa seqüência didática, apesar de não contemplarem o formato dos problemas do tipo aditivo sugerido pelo autor, trazem indícios das relações de base desse campo conceitual, principalmente em relação às equações correspondentes às categorias parte-parte-todo e transformação de estados. No primeiro caso, duas medidas são compostas para dar lugar à outra medida, frequentemente designada pela ação de juntar, tirar e separar. No segundo caso, uma transformação opera sobre uma medida para dar lugar à outra medida e resulta em uma alteração, positiva ou negativa, de um estado inicial.

Já o campo conceitual multiplicativo é entendido como o conjunto de situações que demandam multiplicações e divisões de diferentes tipos ou a combinação dessas operações. Para Vergnaud (1997) não se pode pensar em multiplicação isoladamente, mas como parte de uma estrutura multiplicativa que envolve tanto a multiplicação, como a divisão. Essas operações expressam diferentes significados contidos em várias situações e podem ser identificadas a partir de três categorias: isomorfismo de medidas**,** produto de medidas e proporção múltipla.

Convém esclarecer que não temos a intenção de explorar essas categorias, mas somente investigar o conhecimento dos alunos sobre as propriedades multiplicativas (adição reiterada – 2x50 = 50+50= 100 e 4x50 =50+50+50+50= 100+100=200; associatividade e comutatividade – 40 x 2 = (4x10) 2 = (10x4)x2 =

(4x2)x10=; 8x10 = 80; distributividade e decomposição aditiva ou subtrativa – 41 x 2 = (40 + 1) x 2 = 80 + 2 = 82).

Além de adotarmos a Teoria dos Campos Conceituais como referencial teórico, consideraremos alguns aspectos da Teoria das Situações. Tal referencial toma como pressuposto que "[...] um meio sem intenção didática é decididamente insuficiente para induzir os alunos ao conhecimento cultural que se deseja que eles aprendam" (BROUSSEAU, 1986, p.49).

A noção de meio proporciona uma análise das relações entre os alunos, os conhecimentos e os problemas, bem como as relações entre os próprios conhecimentos e os problemas. A escolha de uma situação didática necessita considerar as "[...] possíveis posições de um sujeito na relação didática, sendo imprescindível identificar essas posições em relação a outras, assim como suas articulações" (ALMOULOUD, 2007, p.42).

Brousseau (1986) afirma que o aluno aprende adaptando-se a um meio, que é gerador de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios. Essa adaptação produz saber e se manifesta por respostas novas, que são a prova da aprendizagem. Para tanto, isso solicita que o professor provoque as adaptações desejadas, mediante a escolha de problemas mais adequados que permitam ao aluno agir, falar, refletir, evoluir com seu próprio movimento e adquirir um novo conhecimento. Ou seja, dentro desses problemas "[...] o sujeito procura produzir ações, formulações, provas, para agir sobre um meio que compreende elementos materiais e eventualmente humanos" (MARGOLINAS, 1998, p.3).

Os problemas escolhidos pelo professor constituem uma parte de uma situação mais ampla, na qual esse comunica ou se abstém de comunicar informações, perguntas, métodos de aprendizagem, heurísticas para que o aluno adquira um novo conhecimento (BROUSSEAU, 1986). Ressaltamos que o conceito de situação mencionado por Brousseau (1986) difere do considerado por Vergnaud (1990), que a toma como tarefa cognitiva, como discorremos anteriormente.

Para Brousseau (1986) existem dois tipos de situação: a *situação didática* e a situação *adidática*. A primeira é entendida como um conjunto de relações estabelecidas explícita e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos e um sistema educativo, num certo meio, que tem por finalidade adquirir um novo conhecimento. A situação *adidática* tem "[...] uma finalidade didática (organizada pelo professor) onde o aluno responde como se a situação não fosse didática (independente da vontade do professor): há então na situação didática elementos que foram um meio *adidático* antagônico ao aluno" (BESSOT, 2003, p. 9)

As relações existentes entre um aluno ou um grupo de alunos, o professor e o saber são insuficientes para entender completamente o conteúdo em questão, necessitando uma vinculação com outros recursos didáticos, como por exemplo, a forma como o professor ensina, os métodos utilizados, a disposição da matéria, enfim, o meio no qual esses elementos estão sendo inseridos. Sendo assim, o professor tem um papel importante dentro da situação *didática*, pois compete a ele organizar a forma de apresentação do conteúdo, preparando e conduzindo problematizações adequadas e compatíveis de modo a propiciar a devolução do problema. A devolução é "[...] definida como o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (*adidática*) ou de um problema aceitando as conseqüências dessa transferência" (ALMOULOUD, 2007, p.35). Ela tem por "[...] objetivo provocar uma interação suficientemente rica e que permita ao aluno desenvolvimento autônomo" (ibid., p.34).

Nesse momento, o trabalho intelectual do aluno é comparado a uma atividade científica, no qual encontrar boas perguntas é tão importante quanto encontrar a solução.

> Uma boa reprodução, por parte do aluno, de uma atividade científica exige que ele atue, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, que as troque com os outros, que reconheça as que estão em conformidade com a cultura, que tome as que lhes são úteis, etc (BROUSSEAU, 1986, p.4, *tradução nossa*).

Frente ao problema proposto pelo professor e garantida a devolução, inicia-se a fase da situação *adidática,* uma parte essencial da situação didática que se caracteriza pelo fato de o problema ter sido escolhido para fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por sua própria iniciativa. Brousseau (1986) afirma que o aluno mostra que adquiriu verdadeiramente um conhecimento quando é capaz de colocá-lo em prática em problemas que se encontram fora do contexto escolar e na ausência de uma situação didática.

Nessa perspectiva o aluno é produtor de conhecimento e não mero consumidor de saberes pré-elaborados. Todavia, para dar lugar à atividade intelectual do aluno o professor não precisa assumir um papel passivo, esperando que o mesmo construa por si mesmo o conhecimento. O professor procura abster-se de intervir e instituir conhecimentos que ele deseja provocar, ou seja, os novos conhecimentos são construídos pelo aluno mediante o contato com as atividades propostas pelo professor. Contudo, o professor necessita coordenar os intercâmbios, evidenciar contradições que o aluno não levou em consideração, formular perguntas que colocam novos problemas, chamar a atenção sobre alguns aspectos da atividade proposta que podem contribuir para superar os conflitos levantados (LERNER,1996).

Na busca de uma solução para a atividade podemos presenciar o aparecimento de conflitos cognitivos individuais e conflitos sócio-cognitivos produzidos na interação com o meio. Todavia, para que isso aconteça

> [...] o sujeito precisa possuir instrumentos intelectuais que possam torná-lo sensível ao conflito [...], [pois, quando] a diferença de nível entre os sujeitos que interagem for muito grande, o sujeito menos avançado pode ignorar o conflito ou não compreender onde o mesmo está localizado (LERNER, 1996 p.109).

As relações do aluno com o meio podem ser classificadas, segundo Brousseau (1986) em três grandes categorias, denominadas de dialética de ação, dialética de formulação e dialética de validação, consideradas fases de uma situação *adidática*.

A dialética da ação, como sugere o próprio nome, consiste em colocar o aluno numa situação de ação, de modo que a melhor solução para o problema proposto tenha raízes no conhecimento a ensinar. Contudo, é preciso que o aluno tenha condições de agir sobre esse problema, ou seja, é preciso que o mesmo disponha de conhecimentos que possibilitem uma estratégia mínima para começar a pensar no problema. Nessa fase as trocas de informações entre os alunos podem ocorrer, mas não são necessárias.

Na dialética de formulação o aluno explicita, por escrito ou oralmente, a solução ou o caminho que percorreu para atingi-la. Destacamos que a formulação emitida pode ou não ser compreendida pelo interlocutor. Nessa dialética deve ocorrer o desenvolvimento progressivo da linguagem de forma que os alunos se compreendam com relação aos objetos e relações matemáticas envolvidas.

A dialética de validação é a fase na qual o aluno precisa mostrar a validade do modelo que criou para obter a solução do problema proposto, devendo justificar a exatidão e a pertinência da mesma para um receptor ou para si mesmo. Esse, por sua vez, pode pedir explicações complementares, recusar aquelas que não entende ou as que discorda, justificando para tanto sua rejeição.

Ressaltamos que essas categorias evidenciam as relações do aluno com o meio e partem da idéia de que "[...] para aprender, o aluno deve encontrar insuficiente [...] [suas formas] de controle, por conseguinte o subsistema com o qual negocia não deve ser um aliado, mas um concorrente" (MARGOLINAS, 1998, p.9).

Segundo a autora, essa concepção de aprendizagem relaciona-se com a existência de um meio antagonista, no qual verificamos uma interação efetiva, capaz de produzir retroações sobre os conhecimentos do aluno e permitir sua aprendizagem, alterando seus estados de conhecimento (BESSOT, 2003). Já no meio aliado o professor procura mostrar ao aluno o que deve ver e compreender, reconhecendo neste meio os conhecimentos que deve adquirir (ibidem).

Um outro ponto que merece destaque diz respeito aos componentes que podem intervir no meio. Em relação a isso Perrin-Glorian (1998, p.19) distingue três componentes:

> - o componente material, constituído de dados objetivos, materiais ou não, compreendidos de instrumentos;
> - o componente cognitivo, constituído de saberes, de conhecimentos disponíveis necessários para instaurar um modo de resolução[...];
> - o componente social, constituído de outros atores que podem intervir na resolução: parceiros, outros alunos, professor. Em princípio ele não intervém do meio didático. Uma intervenção desse tipo pode conduzir a uma mudança cognitiva de níveis inferiores [...] na realidade esta terceira componente pode trazer a segunda [pois] a existência de um parceiro numa situação pode trazer conhecimentos

Partindo desses pressupostos propomos em nossa pesquisa uma seqüência didática que favoreça a instauração de um meio antagônico, que considere esses três componentes e permita o estabelecimento das fases de ação, de formulação e de validação.

OBJETIVO GERAL:

- Investigar a natureza do cálculo mental e suas contribuições para a aprendizagem dos conceitos aditivos e multiplicativos de alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, em situações didáticas vivenciadas de forma dialógica.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Investigar estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental durante a solução das atividades propostas;

- Identificar e validar os teoremas em ação possíveis de serem apresentados pelos alunos durante a solução das atividades propostas.

SUJEITOS

- Alunos do Ensino Fundamental de uma escola particular de ensino de Campo Grande/ MS que cursaram o 4º ano no segundo semestre de 2007 e o 5º ano em 2008.

METODOLOGIA

A metodologia de pesquisa escolhida se baseou na Engenharia Didática, caracterizada como "[...] um esquema experimental baseada sobre 'realizações didáticas' em classe, quer dizer, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino" (ARTIGUE, 1988, p. 3).

O processo experimental da engenharia didática é composto por quatro fases: 1ª) análises preliminares, 2ª) concepção e análise *a priori*, 3ª) experimentação e 4ª) análise *a posteriori.*

As análises preliminares constituíram a fase de composição do quadro teórico didático e dos conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto, incluindo pesquisas realizadas sobre o tema. Nessa fase buscamos fazer análises que contemplassem a epistemologia do conteúdo pesquisado e de como esse vem sendo tratado usualmente no ensino e os efeitos desse tratamento. Diante da falta de trabalhos e de material bibliográfico de apoio sobre esse tema no Brasil, tomamos como referência publicações argentinas e francesas que discutem o lugar e o papel do cálculo mental para a aprendizagem da aritmética na escola elementar (BUENOS AIRES, 2006; BUENOS AIRES, 2004, LETHIELLEUX, 2001) e resultados de pesquisas (BUTLEN e PEZARD, 2003; BUTLEN e PEZARD, 2000; DOUADY, 1994). Nessa fase procuramos também realizar um levantamento das atividades contidas no material didático de matemática utilizado pelos sujeitos envolvidos na pesquisa.

Na segunda fase, concepção e análise *a priori,* foram escolhidas as atividades da seqüência didática, tendo como base as elaboradas por Lethielleux (2001). A escolha desse material se justifica pelo fato de ser organizado para o professor, com atividades que contemplam vários temas (numeração, adição e subtração mental, multiplicação e divisão mental) com nível gradual de dificuldade, acompanhadas de comentários pedagógicos que precisam os objetivos visados, as etapas e os meios pedagógicos para ajudar os alunos na sua aprendizagem.

Essa segunda fase teve por objetivo realizar o delineamento das atividades a serem propostas, descrevendo-as e analisando qual o desafio apresentado em cada uma delas, prevendo os comportamentos possíveis, levantando hipóteses e indicando de que forma os problemas escolhidos propiciarão a aprendizagem dos conceitos aditivos e multiplicativos.

A fase seguinte, a da experimentação, que corresponde ao momento de implementação da pesquisa, ocorreu por meio de sessões de estudo com aproximadamente 15 minutos, perpassando dois encontros semanais em 2007 e três sessões semanais em 2008, nas quais demos prioridade para o cálculo oral. Aplicamos a seqüência para buscarmos um maior controle das variáveis em jogo, relacionadas à Matemática (natureza dos números e natureza das operações) e Gestão da classe (número de alunos interrogados e dinâmica utilizada; duração das sessões).

As quarenta e quatro atividades que contemplam nossa seqüência didática, subdivididas em três blocos (sistema de numeração decimal, operações aditivas e operações multiplicativas) foram submetidas à resolução dos alunos. Como não seria possível acompanhar todos os alunos, priorizamos no início da experimentação acompanhar três grupos, contendo quatro alunos em cada grupo. A escolha desses alunos teve como critério a nota obtida na disciplina Matemática no primeiro semestre de 2007, compondo um grupo com alunos com média superior a 9,0 (GF, GJ, FN, LR), outro com média entre 8,5 e 7,0 (CM, GV, MR, TH) e um terceiro grupo com notas abaixo de 7,0 (FS, JD, ME, ML). Esse critério nos permitiu delimitar a quantidade de sujeitos acompanhados ao longo da experimentação, haja vista a dificuldade de fazer isso com toda a turma.

Apesar de termos conversado anteriormente com a coordenação da escola sobre a necessidade desses doze alunos permanecerem numa mesma sala em 2008 fomos surpreendidos com a notícia de que nosso pedido não pode ser atendido.

Diante do ocorrido, tivemos que mapear a participação de todos os alunos e identificar os que participaram ativamente das sessões destinadas à exploração do primeiro bloco de atividades, ocorridas em 2007. Com essa informação optamos por uma das três salas do 5º ano que possuía uma quantidade expressiva desses alunos para desenvolver os dois blocos restantes. A partir desse mapeamento, consultamos as médias semestrais alcançadas em Matemática no primeiro semestre de 2007 e reorganizamos os três grupos, obtendo um grupo de alunos com média superior a 9,0 (CA, GF, LT), outro com média entre 8,5 e 7,0 (AN, GV, JR, VT) e um terceiro grupo com notas abaixo de 7,0 (JD, ML). Cabe ressaltar que essa alteração não comprometeu o trabalho, tendo em vista que os alunos do 5º ano também participaram da experimentação realizada no 4º ano.

Para a coleta de dados, utilizamos o procedimento Lamartinière, sugerido por Lethielleux (2001), com o intuito de possibilitar a participação de todos os alunos. Tal procedimento se decompõe em três fases:

- O professor formula a questão, os alunos escutam e pesquisam a resposta;
- Ao sinal do professor, os alunos escrevem a resposta;
- Ao sinal, os alunos levantam sua folha para que o professor possa ver a resposta.

Esse procedimento foi adaptado para a aplicação da seqüência proposta, principalmente com relação ao lápis que não foi usado. Somente nós podíamos escrever no quadro, quando julgássemos necessário.

Lethielleux (2001) sugere interrogar um aluno por vez sobre o procedimento de cálculo utilizado. Os outros escutam e são interrogados em caso de contestação ou solicitação para explicarem o procedimento adotado, na tentativa de criar, em cada sessão, um espaço de debate ao redor das estratégias, desencadeando conflitos tanto cognitivo como sócio-cognitivo (BUTLEN e PEZARD, 1992; ANSELMO e PLANCHETTE, 2006). A atenção de todos é cobrada no decorrer da sessão, tendo em vista que não existe uma ordem prévia para a participação. Espera-se que durante as trocas verbais entre os alunos as regularidades dos números e as propriedades das operações sejam percebidas pelos alunos, como por exemplo, que a ordem dos fatores não altera o produto, não sendo necessário, porém, que ele aprenda o nome dessa propriedade, como afirmam Bittar e Freitas (2005).

Esse procedimento, por um lado, exige dos alunos certa disciplina para que possam respeitar a ordem estabelecida, não sendo permitido escrever durante o cálculo, pois impede o desenvolvimento de procedimentos mentais. Por outro, permite ao professor uma leitura rápida de todos os registros realizados pela turma.

A análise *a posteriori* é a última fase do processo experimental, na qual fizemos a análise dos dados colhidos durante a experimentação – observações e produções dos alunos durante as sessões de estudo - levando em consideração as expectativas anunciadas na análise *a priori* e as hipóteses formuladas.

CAPÍTULO II

CÁLCULO MENTAL: significado e contribuições

A prioridade ao cálculo mental tem como fundamento estudos que afirmam que seus procedimentos "[...] se apóiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números" (PARRA, 1996, p.189). Além de recorrer às propriedades das operações, que podem ser implícitas ou explicitamente conhecidas pelos alunos, as estratégias do cálculo são elaboradas a partir de resultados memorizados e dependem das concepções acerca do número.

Também estamos considerando os estudos que apontam que o cálculo mental permite ao aluno se familiarizar com os números, podendo assim explorar diferentes caminhos de resolução de problemas, encorajando-o a não recorrer de imediato ao algoritmo, que apesar de ser confiável é um procedimento dispendioso (BUTLEN e PEZARD, 2000).

Sabemos, por um lado, que os sistemas de numeração em nossa cultura vêm em duas formas: oral e escrita e que mesmo possuindo características em comum, possuem outras bastante distintas (NUNES e BRYANT, 1997). Podemos dizer que uma característica em comum é que ambos são sistemas de base dez. Um diferencial é que o oral recorre a diferentes expressões "[...] para indicar unidades, dezenas, centenas, etc. (cinco, cinqüenta, quinhentos), enquanto o sistema escrito utiliza a posição da direita para a esquerda (o valor do dígito 5 em 50 e em 500 é diferente, embora o dígito seja o mesmo" (NUNES e BRYANT, 1997, p.29).

Por outro lado, é fato que as escolas brasileiras, em sua maioria, se limitam em utilizar o cálculo escrito e o exato, cujo formato de aula se baseia na professora escrevendo e os alunos copiando, na tentativa de adquirir respostas corretas sem desenvolver a compreensão (CARNOY; GOVE; MARSHALL, 2003).

Sendo assim, o cálculo mental proposto pela seqüência didática buscou desenvolver a oralidade, uma prática pouco presente nas escolas brasileiras, com intuito de favorecer a compreensão do sistema de numeração oral, tendo em vista que o escrito vem sendo trabalhado com maior freqüência pelos professores.

Acreditamos que os dados coletados nos fornecerão alguns elementos para tentarmos responder à questão central do nosso trabalho: Quais são as estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos durante a resolução de atividades que envolvem o sistema de numeração decimal, as operações aditivas e as multiplicativas?

Considerando tal questão convém fazermos alguns esclarecimentos. O que significa cálculo mental? "Será que é importante saber efetuar cálculos mentalmente? [...] É possível resolver um problema de Matemática sem usar papel e lápis [...]?" (BITTAR e FREITAS, 2005, p.85).

Iniciemos pela explicação do que estamos considerando cálculo mental.

Consideramos cálculo mental como um conjunto de estratégias mobilizadas de cabeça ou de memória, que faz (ou não) uso dos dedos para obter resultados exatos ou aproximados, podendo ser utilizado, no mesmo sentido, a expressão cálculo oral (GÓMEZ, 2005; CORREA, 2004). Convém ressaltar, que não nos reportaremos ao procedimento que "põe a operação dentro da cabeça" como cálculo mental, pois esse recorre a um algoritmo preestabelecido e consiste em efetuar mentalmente um procedimento de cálculo escrito (LETHIELLEUX, 2001).

Acreditamos que o cálculo mental, diferentemente do cálculo escrito, permite ao aluno, dentre outros motivos, desenvolver seu próprio procedimento de cálculo sem se limitar a um processo único, o que o torna mais autônomo, possuindo liberdade em escolher caminhos para obter soluções aos problemas propostos. Além disso, estimula o raciocínio, tendo em vista que há sempre um desafio na busca do melhor procedimento de cálculo (BITTAR e FREITAS, 2005). A utilização ou a escolha de um procedimento ocorre em função das possibilidades de memorização, das habilidades e dos conhecimentos que o aluno possui.

Algumas pesquisas apontam contribuições em relação ao trabalho com cálculo mental. Tomemos inicialmente a pesquisa realizada por Butlen e Pezard (1992) em escolas elementares da região parisiense e da cidade de Moulins do nível CP ao CM2[1]. Tal pesquisa se baseia em duas idéias sobre o papel do cálculo mental nas aprendizagens numéricas. A primeira está relacionada ao fato de admitir que o

[1] CP – Primeiro ano da escola elementar 6-7 anos
CE1- Segundo ano da escola elementar 7-8 anos
CE2- Terceiro ano da escola elementar 8-9 anos
CM1- Quarto ano da escola elementar 9-10 anos
CM2- Quinto ano da escola elementar 10-11 anos

cálculo mental parece ser um campo privilegiado para testar as concepções numéricas dos alunos e sua disponibilidade. A outra idéia diz respeito às sessões de cálculo mental, consideradas espaços de trabalho intensivo, pois os alunos trabalham rápido, buscam novas técnicas, explicitam as estratégias adotadas, comparam e fazem escolhas entre elas.

Os autores verificaram que a interação social desencadeada durante as sessões de cálculo mental favorece a aprendizagem tanto do ponto de vista individual como do ponto de vista coletivo. Do ponto de vista individual ajuda o aluno, por um lado, a organizar seu pensamento, devido ao fato de ter de expressá-lo para outras pessoas aumentando o grau de articulação e de precisão na verbalização. Por outro, agiliza o trabalho cognitivo, pois o aluno é estimulado a encontrar rapidamente uma solução para o problema apresentado, buscando técnicas eficazes e adequadas, bem como levando-o a explorar outros caminhos.

Do ponto de vista coletivo é possível verificar um maior envolvimento dos alunos, pois esses são incitados a comparar os diferentes procedimentos, fazendo escolhas por um em específico "[...] em função de suas concepções numéricas, e por interesse pessoal em economia [...]" (BUTLEN; PEZARD, 1992, p. 336), permitindo enriquecer suas capacidades de cálculo.

Além do conflito sócio-cognitivo desencadeado quando o aluno faz uma comparação entre a estratégia empregada por ele e a empregada por outros, o estado de desequilíbrio provocado pelo problema proposto permite a construção de novos esquemas. Tais esquemas ajudarão o aluno a enfrentar outros desafios e automatizar o cálculo. Contudo, a automatização do cálculo é o resultado de um processo atingido após várias sessões de estudo nas quais o aluno é desafiado a estimar valores, testar hipóteses, comparar diferentes procedimentos e descobrir estratégias variadas de cálculo.

A prática do cálculo mental, apesar de não ser muito estimulada pelas escolas brasileiras, pode desenvolver habilidades como a atenção, a memória e a concentração e possibilitar a memorização de um repertório básico de cálculo. O trabalho sistemático com cálculo mental em sala de aula, como ocorre em alguns países, indica que ele ajuda a desenvolver esses tipos de habilidades. Essa possibilidade que parece não ser percebida, de modo geral, pelo currículo escolar brasileiro, que dedica pouca atenção ao cálculo mental e o reduz "[...] à memorização mecânica de fatos numéricos sem que sejam levadas em consideração as estratégias nele envolvidas" (CORREA e MOURA, 1997, p. 2).

Talvez por esse motivo, alguns professores acreditam que o uso do cálculo mental é sinônimo de cálculo decorado, incentivado pela teoria comportamentalista, proposta por Skinner. Contudo, no trabalho com o cálculo mental não basta reter uma quantidade enorme de informações é preciso colocá-la em ação diante de problemas, pois somente o aluno que compreendeu as regras contidas no seu repertório é que poderá ter êxito em problemas envolvendo cálculos dessa natureza. É necessário que antes de atingir a memorização, o processo de aquisição desse repertório passe pela construção e organização de fatos fundamentais de uma dada operação e, por isso mesmo, podemos denominá-la de memorização compreensiva.

De acordo com Anselmo e Planchette (2006), o trabalho de memorização se apóia sobre algumas idéias fortes:

- A memorização ocorre através da ação, quando compreendemos e quando respondemos a uma questão que nós formulamos;
- Para memorizar temos de utilizar todos os sentidos;
- A verbalização para si e para os outros ajuda a interiorizar novas estratégias de cálculo e a ganhar tempo, permitindo a certos alunos libertar-se das dificuldades da passagem ao escrito.

Além disso, dispor de resultados memorizados permite liberar a memória de trabalho e a melhorar o desempenho em cálculo, contribuindo para tornar mais disponíveis as propriedades dos números e das operações. Tal afirmação se apóia nos trabalhos desenvolvidos por Butlen e Pezard (2003) que afirmam também que uma prática regular de cálculo mental favorece a automatização dos cálculos e contribui para liberar espaço mental para a construção da representação do problema.

Cabe ressaltar que o trabalho com o cálculo mental é um trabalho individual de desenvolvimento da memória, pois cada um possui estratégias e procedimentos diferentes que serão disponibilizados no contato com o problema (LETHIELLEUX, 2001). O cálculo mental também contribui para um maior domínio do cálculo escrito à medida que o agiliza, além de permitir ao aluno perceber algumas propriedades e regularidades das operações.

Uma outra pesquisa, também realizada por Butlen e Pezard (2000), com alunos do 2º ciclo do ensino básico, constatou que o trabalho com o cálculo mental gera realmente um ganho de tempo, proveniente da economia realizada por não recorrer à escrita e pelo ritmo e sucessão rápida das atividades. Os alunos conduzidos para o cálculo mental não somente calculam melhor como também reconhecem mais as operações a efetuar e cometem menos erros de cálculo.

Os autores afirmam ainda que, graças ao cálculo mental, os alunos se familiarizam com os números e podem explorar rapidamente diferentes caminhos de resolução dos problemas, encorajando-os a não recorrer imediatamente a certos algoritmos confiáveis, mas que necessitam de maior tempo para resolução.

A pesquisa realizada por Gómez (1995), com estudantes espanhóis, buscou analisar os erros cometidos pelos alunos durante a resolução de exercícios de cálculo mental com números naturais e decimais. Após a resolução, os alunos tinham que explicar como encontraram o resultado, mediante entrevistas individualizadas, sendo essa informação utilizada para caracterizar os tipos de erros em cálculo mental. Tais entrevistas "[...] permitiram uma melhor compreensão do significado e das propriedades das operações, do uso das noções do sistema de numeração, das expressões numéricas equivalentes, da representação simbólica da linguagem horizontal das equações [...]" (GÓMEZ, 1995, p. 320).

Correa e Moura (1997), realizaram um estudo com crianças de 1ª à 4ª série do Ensino Fundamental na resolução de adições e subtrações, no intuito de investigar o uso de múltiplas estratégias na resolução oral destas operações. Os problemas possuíam o mesmo formato verbal, contendo somas e subtrações com um ou dois algarismos. Foram identificados três grupos principais de estratégias: contagem, composição e decomposição.

Os resultados de tal estudo indicam que as estratégias usadas "[...] no cálculo mental são flexíveis e parecem desenvolver-se como resultado da compreensão intuitiva da criança acerca do número e das propriedades do sistema de numeração, refletidas sob a forma de verdadeiros teoremas em ação [...]" (ibid., p.11).

De acordo com Boulay, Le Bihan e Violas (2004), o trabalho com o cálculo mental possui duas funções: a social e a pedagógica. A função social se justifica pelo uso em cálculos do dia-a-dia, que se manifestam na diversificação de estratégias de cálculo complexo e na utilização de cálculos aproximados. Já a função pedagógica tem um papel importante para a compreensão e domínio das noções ensinadas, haja vista que sua prática pode contribuir para:

- construir e reforçar os primeiros conhecimentos relativos à estruturação aritmética dos números naturais inteiros (relações aditivas e multiplicativas dos números), bem como para compreensão das propriedades das operações;
- ampliar a capacidade de raciocínio dos alunos na elaboração de procedimentos originais;
- auxiliar na resolução de problemas, permitindo reconduzir um problema ao seu campo conceitual.

Cabe ressaltar, também, que podemos observar dois tipos de cálculo mental: o automatizado e o refletido. De acordo com a equipe ERMEL (1991), o automatizado é o cálculo que mobiliza resultados e regras disponíveis no repertório do aluno, ligados às tabelas das operações e ao sistema de numeração; e o cálculo refletido é aquele que o aluno não dispõe de um modelo padrão, de um algoritmo memorizado para efetuar o cálculo proposto, no qual se evidencia a presença de um método original e pessoal para encontrar o resultado.

Podemos encontrar também em Anselmo e Planchette (2006), argumentos que ajudam a distinguir esses dois tipos de cálculos. Enquanto no cálculo automatizado os resultados são produzidos imediatamente de maneira espontânea, sem consciência do caminho seguido, no cálculo refletido os resultados são obtidos por uma reconstrução pessoal. Esse tipo de cálculo se apóia sobre propriedades conhecidas e dominadas pelo sujeito e revela graus de parentesco dos conceitos no campo conceitual. As estratégias são elaboradas a partir das propriedades implícita ou explicitamente conhecidas das operações (comutatividade, distributividade, associatividade) e de resultados memorizados.

De acordo com os autores, o resultado de um mesmo cálculo pode revelar um cálculo automatizado ou refletido, as estratégias variam conforme os indivíduos, o momento e o contexto onde esse cálculo é proposto.

Podemos inferir, diante dos resultados apresentados, que o trabalho sistemático com o cálculo mental permite ao aluno construir novos esquemas de ação, estabelecer um espaço de múltiplas interações em sala de aula, desenvolver habilidades como a atenção, a memória e a concentração, ampliar o repertório de cálculo e agilizar seu uso. Além disso, tal prática poderá auxiliar o professor a identificar invariantes operatórios mobilizados e atuar diretamente neles.

Acreditamos que para essa atuação aconteça precisamos propor uma dinâmica de trabalho que incentive a oralidade, fato que foge aos padrões normalmente estabelecidos pela escola, que prioriza a forma escrita, tanto para apresentação como para resolução das atividades, implicando mudança de postura tanto do pesquisador, que conduzirá a aplicação da seqüência, quanto dos alunos. Em relação a isso, Douady (1994, p.38) afirma que a "escuta ativa" e o respeito precisam ser estabelecidos, pois "[...] quando o professor se dirige aos alunos ou um aluno se dirige a outros alunos, aqueles que não falam, escutam e tentam compreender o que diz aquele ou aquela que fala".

Os alunos que escutam, além de tentar compreender o que foi dito, podem a qualquer momento serem convidados a emitir seu pensamento sobre a fala do colega, tanto para concordar quanto para discordar. Contudo, essa exposição deve ser respalda por argumentos, pois não basta, por exemplo, concordar com o colega, É preciso dizer o porquê, o que exige uma escuta ativa também do professor, que precisa ficar atento ao debate que está sendo desenvolvido para intervir no momento propício, não para institucionalizar, mas para trazer elementos novos para o debate.

Nesse sentido, todos os alunos são convidados a exercitar a memória constantemente. Ora para compreender a atividade proposta, ora para acompanhar a resolução atribuída pelo colega, ora para conseguir se posicionar em relação ao que está sendo debatido, tendo em vista que as primeiras mensagens são basicamente orais. O registro escrito só é usado pelo pesquisador, para que os alunos consigam comparar diferentes estratégias relacionadas a um mesmo cálculo.

Essa forma de organizar o meio tem por finalidade permitir aos alunos:

> - tomar consciência do que sabem;
> - reconhecer a utilidade (economia, segurança) de utilizar determinados recursos (resultados memorizados, certos procedimentos, etc.);
> - ter uma representação do que se deve conseguir, e do que precisa saber;
> - "medir" seu progresso;
> - escolher, entre diferentes recursos, os mais pertinentes;
> - serem capazes de fundamentar suas opções, suas decisões (PARRA, 1996, p.223).

Esses objetivos elencados pela autora possuem estreita relação com o que Flavell designou metacognição, ou seja, conhecer quando e como utilizar determinada estratégia, sua utilidade, eficácia e oportunidade, bem como a capacidade de planificar, de dirigir a compreensão e de avaliar o que foi aprendido (RIBEIRO, 2003). Segundo o autor, "[...] a prática da metacognição conduz [o aluno] a uma melhoria da atividade cognitiva e motivacional e, portanto, a uma potencialização do processo de aprender” (ibidem, p.110).

Vergnaud (2003, p.25) aponta que é

> [...] impossível dar conta disso sem um mínimo de conceitualização [...] [que] implica em um retorno reflexivo sobre a própria atividade [...]. Uma atividade que há trinta anos denomina-se metacognição. É a idéia de que devemos ser cognitivos, para dar conta de uma tarefa, e metacognitivos, para compreender o que fizemos.

O professor tem um papel importante no desenvolvimento dessas capacidades metacognitivas, tendo em vista que elas começam a se desenvolver a partir dos 5 a 7 anos e melhoram ao longo da vida escolar (RUIZ BOLÍVAR, 2002). Segundo o autor, o uso de perguntas do tipo:

> [...] por quê, para quê, como, o que aconteceria se..., de que outra maneira se poderia [...] [instiga o aluno a raciocinar e tomar] consciência das atividades que realiza; isso lhe possibilitará construir seu próprio conhecimento, uma vez que induzirá a produzir estratégias e desenvolver um pensamento reflexivo e organizado, crítico e criativo que lhe permitia tratar, de maneira efetiva, tanto as situações acadêmicas como as da vida real (RUIZ BOLÍVAR, 2002, p. 7-8).

Aliás, o trabalho do professor começa bem antes, na escolha dos problemas que vão ser apresentados ao aluno, na tentativa de promover o seu desenvolvimento. Segundo Vergnaud (2003, p.53) é preciso escolher problemas que favoreçam o desequilíbrio. Todavia,

> Como desequilibrar o aluno e, ao mesmo tempo, conduzi-lo nessa nova situação de maneira que ele focalize a atenção sobre os aspectos necessários? Qual o interesse [...] [dos problemas] que serão [...] [escolhidos], com vistas a favorecer a surpresa do aluno nessas situações de aprendizagem? (Vergnaud, 2003, p.53)

Buscamos instaurar essa prática durante a aplicação da nossa seqüência didática e esperamos que, ao longo das sessões designadas ao trabalho com o cálculo mental, os alunos se sintam instigados a pensar sobre seus pensamentos, bem como comecem a tomar consciência do seu estilo de pensamento.

CAPÍTULO III

CONCEITOS MATEMÁTICOS EXPLORADOS

Antes de apresentarmos os elementos que compõem a seqüência didática proposta em nossa Engenharia Didática, consideramos importante apresentar os conceitos matemáticos explorados, tomando como referência os objetivos propostos em cada bloco.

A seqüência de aprendizagem que propomos envolve três blocos de atividades. O primeiro deles é composto por atividades relacionadas ao Sistema de Numeração Decimal e tem por objetivo identificar o domínio e o conhecimento da seqüência dos números por meio da linguagem oral, bem como identificar possíveis teoremas em ação mobilizados pelos alunos na realização das atividades.

O segundo bloco é composto por atividades aditivas, cujo tratamento implica adições ou subtrações e tem por objetivo: investigar o conhecimento sobre as propriedades das classes e ordens da escrita do Sistema de Numeração Decimal (composição e decomposição aditiva) e das operações envolvidas (comutatividade, associatividade) e possíveis teoremas em ação mobilizados pelos alunos ao desenvolver estratégias para agilizar o cálculo mental dos fatos fundamentais da adição e da subtração.

O terceiro bloco é composto por atividades multiplicativas, cujo tratamento implica multiplicações e divisões e tem por objetivo: investigar o conhecimento sobre as propriedades multiplicativas das classes e ordens da escrita do Sistema de Numeração Decimal –adição reiterada – 2x50 = 50+50= 100 e 4x50 = 100+100; associatividade e comutatividade – 40 x 2 =; [4x10] x 2 =; [10x4] x2=; [4x2]x10=; 8x10=80; distributividade e decomposição aditiva ou subtrativa – 41 x 2 = [40 + 1] x 2 = 80 + 2 = 82 – e possíveis teoremas em ação mobilizados pelos alunos ao desenvolver estratégias para agilizar o cálculo mental dos fatos fundamentais da multiplicação e da divisão.

A organização adotada favorece a escolha de atividades que contemplem os objetivos propostos em cada bloco. Contudo, sabemos que as propriedades dos números e operações permeiam toda seqüência, ou seja, observaremos a mobilização da composição e decomposição do número, consideradas propriedades do número, ligadas à resolução de atividades do segundo e do terceiro bloco. Isso porque, quando um aluno

> [...] efetua 325+123 decompondo os números e somando as ordens iguais [...] ele utiliza o princípio aditivo e o princípio do valor posicional da escrita dos números. Ele avança, portanto, na compreensão de nosso sistema de numeração (MENDONÇA e LELLIS, 1989, p.52).

Como já afirmamos anteriormente, a compreensão das regras e propriedades do sistema de numeração decimal constitui-se um desafio, tendo em vista que isso não tem o êxito pretendido pela escola, talvez devido à forma com que o ensino é tratado. Observamos, muitas vezes, um apelo à memorização da seqüência dos números por meio de exercícios escritos como forma de promover a automatização da escrita (LOSITO, 1996) e a proposição de um único processo de cálculo para todas as operações, mais adequado de ser efetuado no papel (MENDONÇA e LELLIS, 1989).

Isso se torna ainda mais contundente quando nos reportamos a criação das escolas primárias e descobrimos que o contar estava relacionado ao aprendizado das tabuadas (VALENTE, 2006) ou quando percebemos que cento e vinte e cinco anos após a criação dessas escolas o livro de Matemática publicado para o curso primário propunha que conhecer número se resumia em saber contar e escrever números (NUNES *et al*, 2005).

É preciso que a escola dê um destaque à compreensão do número e das operações (SERRAZINA, 2002), de modo que o sujeito consiga discutir e pensar sobre as relações numéricas e espaciais utilizando as convenções, demonstrando certo domínio do sistema numérico e das operações aritméticas. Isso implica considerá-lo numeralizado, ou seja, é necessário, por um lado, ter

> [...] uma "familiaridade" com números e a habilidade de fazer uso das habilidades matemáticas que capacitam um indivíduo a enfrentar as demandas matemáticas práticas de sua vida cotidiana. [Por outro lado, desenvolver a] habilidade de ter alguma apreciação e compreensão das informações que são apresentadas em termos matemáticos [...] (NUNES e BRYANT, 1997 , p.19).

Diante do exposto, podemos afirmar que esses atributos estão diretamente ligados ao objetivo para ensinar número proposto por Piaget e resgatados por Kamii (1991). Segundo a autora, é preciso "[...] encorajar a criança a pensar ativa e autonomamente em todos os tipos de situações. Uma criança que pensa ativamente, à sua maneira, incluindo quantidades, inevitavelmente, constrói o número" (Ibidem, p.41).

Contrariamente a esse objetivo, muitos professores enfatizam desde a educação infantil o contar, o ler e o escrever numerais, acreditando que assim estão ensinando conceitos numéricos. Isso é importante, mas é preciso que, além disso, a criança construa uma estrutura mental do número. Entretanto, como essa não pode ser ensinada diretamente, o professor deve proporcionar momentos para a criança criar todos os tipos de relações, quantificar objetos e interagir com os colegas e adultos, considerados por Kamii (1991) como princípios de ensino.

Em relação ao primeiro princípio, as situações conflituosas podem se constituir favoráveis para a criança colocar as coisas em relação, desde que seja encorajada a pensar e agir com autonomia. Nesse momento, segundo a autora, alguns conceitos matemáticos como primeiro e segundo, antes e depois e a correspondência um-a-um, que são partes das relações que a criança cria na vida cotidiana, vão sendo construídos.

No segundo princípio apontado, a criança deveria ser encorajada a pensar sobre quantidades quando sentisse necessidade ou interesse e não porque existe um horário estabelecido na rotina da escola para isso. Pensar sobre quantidades não significa recitar a seqüência numérica, nem tão pouco reproduzir estratégias corretas fornecidas pelo professor, mas sim aproveitar todas as situações vivenciadas pela criança.

O terceiro princípio destaca a importância da interação social como geradora de aprendizagem, tendo em vista que o confronto com a idéia do outro motiva a criança "[...] a pensar outra vez sobre o problema, a retificar sua idéia ou encontrar um argumento para defendê-la" (KAMII, 1991, p.62). Por um lado, a interação possibilita à criança um meio de retroalimentação diferente daquele advindo da figura do professor, pois o desacordo com outras crianças pode estimulá-la a rever suas próprias idéias. Por outro, permite ao professor descobrir como a criança está pensando e intervir no processo de raciocínio.

Acreditamos que, apesar de terem sido pensados para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos, no que dizem respeito ao ensino do número, esses princípios precisam ser considerados no trabalho com as crianças ao longo do ensino. Diante disso, compactuamos com Vergnaud (1991a) quando afirma que a apropriação do conceito de número é um processo de muito fôlego.

> A formação do conceito de número é um processo rico e complexo, que provavelmente, jamais acaba. Mas, ao contrário, a criança encontra mais cedo do que acreditamos normalmente na sua experiência escolar e extra-escolar, ocasiões diversificadas de pensar o número e de inscrevê-lo nos seus esquemas de ações e de raciocínios (Ibidem, p.8).

Convém esclarecer que o conhecimento da seqüência dos números extrapola a simples recitação, fato que não nos permite afirmar que a criança saiba contar (VERGNAUD, 1991b) ou que tenha o entendimento de número, mesmo se disser seus nomes em uma seqüência perfeita (NUNES e BRYANT, 1997). De acordo com Nunes *et al* (2005), a seqüência numérica supõe uma organização denominada composição aditiva. Além da composição aditiva, a construção do número inteiro positivo também supõe uma composição multiplicativa.

Em relação à composição aditiva do número, observamos que a criança passa por três fases até atingir um pensamento operatório reversível. Vejamos essas fases atuando no seguinte exemplo: dados dois conjuntos A e B, no qual A é formado por 4 grãos + 4 grãos e B formado por 1 grão + 7 grãos.

Na primeira fase a criança não consegue coordenar todas as relações em questão, ficando ligada às comparações dentro de um mesmo conjunto. A criança não consegue perceber a equivalência entre os conjuntos (1+7) = (4+4), podendo acreditar que exista mais elementos no conjunto B (1+7), haja vista que um dos termos possui uma quantidade superior às partes do outro conjunto (7>4).

Já na segunda fase a criança começa a reagir como na primeira fase: como as partes do conjunto B são distribuídas diferentemente (1+7), esse conjunto pode ser considerado mais ou menos numeroso que o conjunto A (4+4), dependendo do foco de atenção da criança (7>4 ou 1<4). A igualdade é construída por correspondência ou enumeração, mediante conservação intuitiva. Esta técnica

> [...] permite, portanto, de saída, demonstrar que para os pequenos, uma totalidade numérica de valor cardinal 8 não é o resultado de uma

> composição aditiva, mas consiste num todo intuitivo ou em tantos conjuntos globais, quantas partes percebidas em blocos há, com a soma dessas partes não possuindo então significação (PIAGET e SZEMINSKA, 1975, p.255).

A criança, embora compare e perceba a igualdade entre os conjuntos intuitivamente, não consegue estabelecer relação entre os mesmos. Não consegue, por um lado, perceber que o aumento dos elementos do subconjunto com 7, compensa a diminuição do outro composto por 1 elemento, quando comparado ao conjunto A (4+4). Por outro lado, não percebe que ao deslocar 3 elementos do subconjunto com 7 elementos para o subconjunto com 1 elemento poderá reconstituir o conjunto A. Não existe, portanto, uma soma operatória para comparar as partes ou subordinação das partes ao todo, ficando, a criança, presa a critérios únicos de percepção imediata.

Finalmente, na terceira fase, a coordenação dessas relações torna possível a elaboração de uma totalidade numérica e permanente, decorrente de uma composição aditiva sem que a criança tenha necessidade de proceder a coordenações intuitivas. “Esta passagem da não-conservação intuitiva à conservação operatória permite-nos, ao mesmo tempo, assistir à gênese da adição e compreender a diferença que opõe esta adição aritmética à lógica das classes [...]” (PIAGET e SZEMINSKA, 1975, p.259). Essa diferença é marcada pela passagem de uma adição de classes para uma adição numérica, ou seja, os conjuntos deixam de apresentar características qualitativas e adquirem um sentido numérico.

Convém esclarecer que a composição aditiva também é percebida quando a criança, por um lado, igualiza quantidades, mediante o emprego de subtrações e decomposições numéricas, prevendo antecipadamente o valor do resíduo a dividir. Por outro lado, quando dissocia uma quantidade em duas partes iguais por meio da soma e não mais pela distribuição termo a termo. Ambos, igualização e repartição, com equivalência durável e conservação da totalidade.

Os autores pontuam que “[...] a repartição, à primeira vista, parece originar-se da composição multiplicativa e não da aditiva [...]. Entretanto, sendo um todo qualquer a reunião de suas duas metades, pode-se estudar a igualdade [...] como aditiva [...]” (Ibidem, p.268).

Quando a criança consegue compreender que um todo pode ser dividido em partes e que a soma dessas permite compor o todo inicial, vemos a passagem da composição aditiva à composição multiplicativa.

Para Piaget e Szeminska (1975, p.271) "[...] a multiplicação aritmética é uma eqüidistribuição, tal que, se n x m, tem-se n coleções de m termos, ou m coleções de n termos, que se correspondem biunivocamente entre si".

Segundo os autores, é somente quando o sujeito estabelece uma correspondência entre diversas coleções, que a multiplicação passa a ser usada de maneira consciente e explícita. Isso porque, ao adicionar duas coleções *A+A'= B*, também podemos obter uma multiplicação do tipo *B x (A+A')= BA+BA'*. Nesse sentido, é possível afirmar que as composições aditivas e multiplicativas estão intimamente ligadas e que a conquista de uma implica a da outra.

Vejamos como a criança constrói a composição das relações de equivalência e como essa pode ser generalizada à correspondência biunívoca e recíproca entre *n* conjuntos e de multiplicação numérica.

Durante a primeira fase a criança não é capaz de realizar a correspondência termo a termo e compor relações de equivalência e, naturalmente, não consegue efetuar multiplicações numéricas, nem mesmo sob a forma de duplicações. Isso acontece no decorrer da segunda fase.

Na segunda fase a criança inicia a composição das relações de equivalência por uma correspondência termo a termo, com auxílio da intuição e sem equivalência durável. Ou seja, a correspondência ocorre mediante um contato perceptivo, não generalizável operatoriamente. A criança só consegue concluir que se *X=Y* e *Y= Z*, logo *X=Z* quando "[...] os conjuntos permanecem à vista e apresentam os mesmos caracteres perceptivos: portanto não [...] [sabe] ainda compor operatoriamente e se [...] [limita] a constatar intuitivamente" (PIAGET e SZEMINSKA, 1975, p.288). Em relação à correspondência biunívoca e recíproca entre *n* conjuntos e de multiplicação numérica, não podemos dizer que quando a criança

> [...] consegue compreender que se dois conjuntos de valor n correspondem respectivamente a um terceiro segundo uma correspondência "1 por 1", então os dois primeiros reunidos corresponderão ao terceiro segunda a relação "2 por 1"[...] já [...] [domina] a relação n+n como uma multiplicação propriamente dita [...] (Ibidem, p.296).

Podemos justificar isso por três motivos. Primeiramente, porque a criança ainda não domina a composição das relações de equivalência, compreendendo vagamente a multiplicação aritmética $n+n=2n$ e consequentemente, sem um domínio das relações lógicas inerentes à composição dessas equivalências.

Em segundo lugar, a criança só consegue atingir a correspondência múltipla ao perceber que há um resíduo após várias tentativas para estabelecer a equivalência. Ou seja, a criança consegue perceber $n+n=2n$ intuitivamente.

Em terceiro lugar, essa percepção não é generalizável, pois como dissemos acima, essa relação é descoberta empiricamente.

É somente na terceira fase que a composição correta das relações de equivalência apresenta-se sob a forma de coordenação imediata, na qual a criança busca a igualdade pela operação, ou seja, consegue perceber que $X = Z$, sem auxílio da intuição. Nessa fase também ocorre a "[...] compreensão das relações de correspondência múltipla e [...] sua generalização sob a forma de operações multiplicativas" (PIAGET e SZEMINSKA, 1975, p.296-7). Nesse sentido, podemos dizer que a criança busca a equivalência por eqüidistribuição, ou seja, mediante o uso da própria multiplicação.

Em síntese, podemos afirmar que "[...] as operações aditivas e multiplicativas [...] se acham implícitas no número como tal, pois um número é uma reunião aditiva de unidades e a correspondência termo a termo entre duas coleções envolve uma multiplicação" (PIAGET e SZEMINSKA, 1975, p.223). Por esse motivo, mesmo no bloco que envolve o sistema de numeração decimal proposto por nossa seqüência didática presenciaremos estratégias ligadas às operações aditivas e às operações multiplicativas, como veremos a seguir.

3.1 – Construção e elementos da seqüência

A construção da seqüência didática aplicada demandou um processo de seleção de atividades que buscassem atender os objetivos que nos propomos atingir. A cada atividade escolhida identificamos as variáveis didáticas (elementos que estariam a nossa disposição envolvendo o sistema de numeração decimal, as operações aditivas e as multiplicativas propostas na seqüência didática. Discutimos, a seguir, a partir da fundamentação teórica, a importância e a influência possível dos valores das variáveis consideradas na elaboração da seqüência relacionadas à:

- Matemática:

Natureza dos números;

Natureza e propriedades das operações;

- Gestão das atividades:

Número de alunos interrogados;

Duração das sessões.

3.1.1 – Variáveis relacionadas ao conteúdo matemático

Natureza dos números

Nossa primeira variável refere-se à natureza dos números escolhidos para compor as atividades propostas. Dentre as categorias numéricas, consideramos os números naturais, envolvendo: grandeza dos números (pequenos ou grandes); diferentes formas de decomposição (por exemplo, 562 é igual a cinqüenta e seis dezenas mais duas unidades e também a três centenas, vinte e seis dezenas e duas unidades e, ainda, a cinco centenas e sessenta e duas unidades, etc); o zero intercalado, isto é, o zero entre dois algarismos diferentes de zero, por exemplo, 2095; números redondos, ou seja, números terminados em 0, 00, 000 (BUENOS AIRES, 2006); números pares ou ímpares; números próximos aos "nós", ou seja, números próximos de onde ocorre a mudança de ordem na representação no sistema de numeração decimal, por exemplo, de 9999 para 10000 (LERNER e SADOVSKY, 1996), entre outros.

Tais escolhas se justificam em razão de buscarmos, por um lado, colocar em jogo dificuldades apontadas por algumas pesquisas realizadas a respeito do processo de apropriação do sistema de numeração decimal pela criança (LERNER e SADOVSKY, 1996; NUNES e BRYANT, 1997) e por outro, ampliar o repertório numérico dos alunos participantes da experimentação.

Em relação aos números próximos aos "nós" acreditamos que esses representarão um fator de maior dificuldade, pois os alunos precisarão perceber as regularidades dos números terminados em nove e lidar com a mudança de ordem desses números. Resta-nos estabelecer uma dinâmica de trabalho que permita encontrar respostas para as seguintes questões: Como intervir para que os alunos avancem na manipulação da seqüência oral, sem que interrompam a contagem quando se aproximarem dos "nós"? Qual a mudança que se produz ao enunciar variadas seqüências que contenham números próximos aos "nós"?

Natureza e propriedades das operações

As atividades propostas na seqüência envolvem operações aditivas e multiplicativas. A resolução de tais atividades via cálculo mental é uma ocasião privilegiada para fazer funcionar as propriedades das operações em relação às características do sistema de numeração posicional e decimal (BUENOS AIRES, 2006).

Por propriedades das operações entendemos:

- Associatividade da adição ou da multiplicação, ou seja, quando a adição tem várias parcelas ou a multiplicação tem vários fatores, como por exemplo:

2 + 9 + 5 =	18x50 =
2+(9+5) =	18x(5x10) =
2+14 = 16	(18x5)x10 =
	90x10 = 900

- A comutatividade da adição ou da multiplicação, ou seja, o fato de poder alterar a ordem dos termos da adição ou da multiplicação, sem alterar o resultado, conforme ilustramos a seguir:

2+9=	2x9=
9+2=11	9x2=18

- A distributividade da multiplicação sobre a adição ou subtração, como mostra o exemplo a seguir:

15x3

(10+5)x3=	(20-5)x3=
30+15=45	60-15=45

- A compensação, ou seja, acréscimo e retirada de uma mesma quantidade, como observamos a seguir :

8+5	29x30=
(8+2)+5	(20+9) x (30:10)=
10+5	(20+9)x3=
15-2=13	60+27=
	87x10=870

Além disso, acreditamos que os resultados e as estratégias utilizadas na resolução das atividades envolvendo tais operações vão se tornando disponíveis na memória, podendo ser facilmente reconstruídas para solucionar outras atividades. Isso acontece, por exemplo, aplicando-se o conhecimento de uma adição com números de um algarismo (6+5=11) para obter o resultado com números de dois ou mais algarismos (60+50=110).

3.1.2 – Variáveis relacionadas à gestão das atividades

Número de alunos interrogados

Apesar de a aplicação da seqüência acontecer na presença de todos os alunos, interrogamos os alunos individualmente para que realizem o cálculo e apresentem as estratégias utilizadas. Pesquisas apontam (DOUADY, 1994) que nesse momento, a escuta e o respeito vão sendo construídos tanto na relação professor e alunos quanto na relação entre alunos. Isso porque quando o professor se dirige aos alunos ou um aluno se dirige à classe, aqueles que não falam, precisam escutar e tentar compreender o que está sendo falado Além disso, a verbalização para si e para os outros ajuda a memorização, como afirmam Anselmo e Planchette (2006).

Outro fator que nos levou a optar por essa dinâmica tem relação com a gravação das sessões, que serão transcritas para que os dados pudessem ser analisados. Dessa forma, para proporcionar nitidez à gravação, os alunos não puderam se manifestar ao mesmo tempo. Era preciso solicitar a palavra e aguardar nossa autorização.

Contudo, o fato de interrogarmos os alunos individualmente não eximiu os demais de estarem atentos à fala do interpelado, pois poderiam ser solicitados a emitirem sua opinião sobre o que estava sendo dito, sendo necessário para isso, acompanharem o raciocínio apresentado. Essa dinâmica não ocorreu em todos os momentos da sessão, se fazendo presente somente nos momentos que julgamos pertinente. Ressaltamos que a participação também ocorreu por vontade própria, à medida que sentirem necessidade de expressar sua opinião.

Cabe esclarecer que priorizamos interrogar os alunos pertencentes aos três grupos formados de acordo com a média obtida em Matemática no primeiro semestre de 2007, conforme apresentamos no capítulo I. Tal critério não excluiu a participação dos demais alunos nos debates desencadeados durante as sessões, tampouco os eximiu de se tornarem sujeitos da pesquisa.

Duração das sessões

O tempo de duração das sessões não ultrapassou 20 minutos, tendo em vista que pesquisas direcionadas à prática de cálculo mental, dentre elas Douady (1994) e Lethielleux (2001), evidenciaram que o método previsto para apresentação oral das atividades solicita e desenvolve nos alunos a atenção, a escuta e a memória de maneira intensa. Sendo assim, optamos por sessões de curta duração, para que a atenção fosse permanente.

CAPÍTULO IV

SEQÜÊNCIA DIDÁTICA: descrição e análise dos dados

Neste capítulo apresentamos as atividades selecionadas para compor a seqüência didática a ser realizada com os alunos, acompanhadas de suas respectivas análises *a priori,* bem como a descrição e análise dos dados coletados durante a aplicação da seqüência obedecendo a ordem dos três blocos propostos: sistema de numeração decimal, operações aditivas e operações multiplicativas.

Aplicamos a seqüência didática com acompanhamento da professora regente. Acreditamos que essa escolha permitiu um maior controle das variáveis elencadas e uma exploração das atividades de modo a atingir os objetivos propostos.

Cabe ressaltar que apesar da seqüência proposta ser constituída por vários exercícios agrupados por temas e graduados na dificuldade não tivemos a finalidade de treinar técnicas e estratégias. Isso porque, como afirmamos anteriormente, no trabalho com o cálculo mental não basta reter uma quantidade enorme de informações é preciso colocá-la em ação diante de outras situações. Além disso, a dinâmica de aplicação da seqüência visou, por um lado, investigar estratégias de cálculo mental utilizadas pelos alunos e não trazer estratégias e técnicas para serem reproduzidas, exercitadas e memorizadas. Por outro lado, criar um espaço onde predomine a verbalização, para que as estratégias mobilizadas possam ser compreendidas, discutidas e ampliadas.

As atividades escolhidas buscaram evidenciar e ampliar o repertório numérico, incluindo a mobilização de propriedades aditivas e multiplicativas pelos alunos. As atividades foram organizadas em três blocos, conforme listado a seguir:

QUADRO 1 – Relação das atividades conforme os blocos contemplados na experimentação

PRIMEIRO BLOCO: Atividades envolvendo o sistema de numeração decimal	Atividades de 1 à 9.
SEGUNDO BLOCO: Atividades aditivas	Atividades de 10 à 26
TERCEIRO BLOCO: Atividades multiplicativas	Atividades de 27 à 44

Convém esclarecer que a lista de atividades que compõe os três blocos será realizada ao longo da engenharia, num movimento de ir-e-vir com intuito de verificar a estabilidade das estratégias empregadas. Isso porque, mesmo nas atividades multiplicativas, que compõem o terceiro bloco, observaremos a presença de conhecimentos do sistema de numeração decimal, suas propriedades e regularidades, tendo em vista que esses blocos estão imbricados. Além disso, mesmo em relação às atividades de um mesmo bloco, poderemos realizar esse movimento, retomando a atividade 3, por exemplo, mesmo quando já estivermos explorando a atividade 6.

Como engendramos as atividades da seqüência baseados em nosso estudo bibliográfico, focando sempre os nossos objetivos ao longo de nossa pesquisa, estas atividades foram sendo ajustadas mediante as análises e observações das reações e conhecimentos dos alunos. Aliás, essa é uma característica própria da metodologia adotada – a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988), pois apesar de ter fases pré-estabelecidas não nos impede, por exemplo, de ampliar discussões da primeira fase (análise preliminar) mesmo que tenhamos iniciado a última fase (análise *a posteriori*).

As sessões foram, por um lado, acompanhadas pela professora regente e, por outro, foram gravadas e transcritas pela pesquisadora ao término de cada sessão, como forma de garantir que outras linguagens que não podem ser captadas pela gravação pudessem ser recuperadas, como por exemplo, o uso da sobrecontagem com o auxílio dos dedos.

A seguir, apresentamos as atividades, agrupadas de acordo com a semelhança dos desafios oferecidos, acompanhadas da justificativa de escolha de cada uma delas, de possíveis resoluções e de possíveis teoremas em ação mobilizados pelos alunos. Cabe destacar que as estratégias previstas para as atividades desse bloco, assim como para os outros dois que serão apresentados, têm como referência publicações argentinas e francesas (BUENOS AIRES, 2006; BUENOS AIRES, 2004, FRANÇA, 2002; LETHIELLEUX, 2001), resultados de várias pesquisas, dentre elas as realizadas por Butlen e Pezard (2003; 2000; 1992) e Douady (1994).

4.1 – Bloco do sistema de numeração decimal: atividades propostas

As atividades 1 e 2 envolvem a contagem oral para frente e a regressiva a partir de um determinado número. Tais escolhas visam possibilitar a compreensão das mudanças relacionadas ao agrupamento, troca e posição manifestada pela verbalização na seqüência dos números.

1. Conte oralmente a partir de um determinado número e pare ao ouvir o sinal:

578 a 603	**345** a 361
1097 a 1105	**1064** a 1083

2. Faça a contagem regressiva a partir de um determinado número falado e pare ao ouvir o sinal:

35 a 18
21 a 9
701 a 685
8 970 a 8 959
10 001 a 9990
1 000 000 a 999 989

A escolha dos números que compõem a atividade 1 obedece ao critério de estarem localizados próximos aos "nós" da escrita numérica, quer dizer das dezenas, centenas, unidades de mil..., exatas. Essa escolha auxilia a evidenciar o nível de conhecimento do sistema de numeração decimal e de suas regularidades, tal como a troca realizada a cada agrupamento de dez. Não temos a intenção de solicitar uma contagem exaustiva, mas esperamos que essa contagem apresente os elementos que consideramos necessários para verificar como o aluno está lidando com mudança de ordem dos números próximos aos "nós".

Nossas escolhas se justificam em virtude do que apontam as pesquisas sobre apropriação da escrita convencional dos números ao afirmarem que essa "[...] não segue a ordem da série numérica: as crianças manipulam em primeiro lugar a escrita dos "nós" [...] e só depois elaboram a escrita dos números que se posicionam nos intervalos entre estes nós" (LERNER e SADOVSKY, 1996, p. 87).

Essa preocupação também se faz presente na escolha dos números da atividade 2. Contudo, para essa atividade iniciamos com números menores haja vista que a contagem regressiva, por não ser tão usual na escola, poderá se constituir num elemento de dificuldade aos alunos, porque eles terão de realizar a contagem pensando sempre no número anterior, o que demanda maior atenção. Sendo assim, acreditamos que iniciar com números menores ajuda os alunos a se familiarizarem com a regra da contagem regressiva, podendo auxiliar na contagem com os números maiores.

Demos prioridade para a apresentação e realização oral das atividades, em primeiro lugar porque o nosso objeto é o cálculo mental e não o escrito, além disso, por compreendermos que na oralidade é possível verificar, com maior eficiência e rapidez, o nível de conhecimento da seqüência dos números por parte dos alunos. Tínhamos a intenção de verificar se existiria diferença para enunciar a seqüência numérica na atividade 1 quando apresentássemos o número na forma escrita. Porém, percebemos que a forma de apresentação (escrita ou oral) do número que desencadeará a contagem parece não eliminar ou diminuir o aparecimento de estratégias incorretas, diferentemente do que talvez ocorreria se os alunos pudessem fazer todo o registro da seqüência numérica por escrito.

Dentre os possíveis erros esperados, tanto para a atividade 1 como para a atividade 2, destacamos os relacionados à realização das trocas quando o último número anunciado terminar em 9, porque se localizam próximo aos "nós". Pesquisas apontam que "[...] algumas crianças de primeira série, quando têm de passar à dezena seguinte interrompem a contagem ou passam diretamente a qualquer outra dezena cujo nome conhecem" (LERNER e SADOVSKY, 1996, p. 133). Acreditamos que isso também possa ocorrer com os sujeitos da pesquisa, principalmente porque não estão habituados a realizar a contagem oralmente com números tão grandes, nem tampouco foram estimulados a perceber a regularidade na notação numérica.

Supomos que os alunos interrompam a contagem quando chegarem, por exemplo, no número 989 por não conseguirem realizar a troca para 990. Provavelmente, isso aumentará ainda mais quando a passagem for do número 999 para 1000, tendo em vista que o número de trocas será maior, alterando o registro de todas as ordens, envolvendo a mudança de mais de duas ordens e uma mudança de classe. Acreditamos que uma estratégia incorreta para essa passagem seria o aluno anunciar, depois do 999, o número 900 e 100. Podemos inferir que quando isso acontece o aluno realiza a decomposição do número anunciado em 900+99 e soma mais um ao 99, chegando ao 900 e 100. Porém, não mobiliza corretamente essa estratégia, deixando de fazer 900+100 para obter 1000. O que talvez também ocorra na passagem de 989 para 900 e 90, contudo como oralmente isso parece certo, não causa estranheza, diferentemente do que ocorre ao ouvirmos 900 e100.

Nesse caso, uma estratégia correta seria que o aluno conseguisse obter o resultado 1000 relacionando 900 e 100 com 900+100. Contudo, isso implica perceber que o *e* representa uma coordenada aditiva, possuindo o mesmo significado da expressão *mais*, fato que não acontece espontaneamente.

Corroboramos com Lerner e Sadovsky (1996, p. 133) quando afirmam que se quisermos

> [...] conseguir – por exemplo – que as crianças adquiram ferramentas a partir das quais possam "autocriticar" as escritas baseadas na correspondência com a numeração falada, é preciso garantir a circulação de informação referente às regularidades.

Acreditamos que isso acontecerá mediante intervenção didática, propondo atividades que permitam às crianças não somente detectar regularidades, mas compreender o funcionamento do sistema de numeração.

Outra estratégia correta seria o uso da sobrecontagem (contagem a partir de um certo número diferente de um), acompanhado de uma pausa quando fosse o momento da troca do 999 para o 1000, para desse modo calcular a soma 999 + 1, até mesmo organizando o algoritmo mentalmente ou para recordar a seqüência numérica e descobrir o número seguinte, pautando-se no seguinte teorema em ação: *Para descobrir o próximo número da seqüência basta acrescentar mais uma unidade ao último número anunciado* .

Podemos observar também uma contagem automatizada da seqüência numérica, produzida imediatamente de maneira espontânea, sem consciência do caminho seguido, mesmo nas trocas próximas aos "nós", sendo uma estratégia válida para as duas atividades.

As atividades 3 e 4 correspondem à leitura na forma corrente e à escrita de números com algarismos, respectivamente. Essas atividades são importantes para verificar a leitura correta dos números, bem como para discutir as mudanças de classes e ordens no trabalho com grandes números.

3. Leia os números expressos em algarismos, utilizando a leitura corrente. Ex.: 350 (trezentos e cinqüenta).

82	158	48 010	172
78	10 000	9025	26 026 026

4. Diga com quais algarismos escrevemos os números apresentados oralmente:

76	1050	50 201	7 450 032	
106	1402	196	10 080	
177	80	26 260 026	3070	7075

Tivemos a preocupação de escolher números grandes e pequenos para essas atividades, com o zero intercalado na maior parte dos casos, o que talvez possa ser um fator de dificuldade para aqueles que ainda não dominam regularidades do sistema de numeração decimal, como por exemplo: o valor posicional, o princípio de composição e decomposição aditiva e o princípio multiplicativo.

Estamos variando entre números pequenos e grandes na tentativa de observar em que momentos essa dificuldade aparece com maior freqüência. Supomos, por um lado, que independente de apresentarmos números pequenos ou grandes para a leitura dos números na forma corrente (atividade 3) é provável que os alunos, de modo geral, consigam realizar com destreza tal atividade, pois terão o apoio do registro escrito. Por outro lado, acreditamos que, em relação à escrita dos números com algarismos (atividade 4) poderemos identificar alunos que tenham dificuldade no registro escrito dos números grandes, muito mais do que nos pequenos, quando os mesmos apresentarem zeros intercalados. Lerner e Sadovsky (1996, p.96) afirmam que

> [...] a coexitência de escritas convencionais e não-convencionais pode também estar presente em números da mesma quantidade de algarismos: algumas crianças escrevem convencionalmente números compreendidos entre cem e duzentos (187, 174, etc.), porém não generalizam esta modalidade às outras centenas (e registrando então 80094 para representar oitocentos e noventa e quatro ou 90025 para novecentos e vinte e cinco). Por outro lado, muitas crianças produzem escritas convencionais e outras que não o são, dentro da mesma centena ou da mesma unidade de mil: 804 (convencional), porém 80045 para oitocentos e quarenta e cinco; 1006 para mil e seis, porém 100324 para mil trezentos e vinte e quatro.

As dificuldades no registro dos números maiores podem estar relacionadas à concepção que as crianças possuem acerca da numeração escrita. Pesquisas apontam que, por um lado, as crianças acreditam que a numeração escrita corresponde à numeração falada, não fazendo diferenciação entre ambas (LERNER e SADOVSKY, 1996). Por outro, “[...] a relação entre uma grafia isolada, sua denominação e significação é mais clara no caso dos algarismos do que no das letras (assim p é um fonema e dois significa dois)” (TEIXEIRA, 2005, p.28), justificando o aparecimento de registros como 60020 quando o número anunciado for 620. Por isso, privilegiamos na atividade 4 números que contenham zeros intercalados, no intuito de identificar o domínio do registro escrito em relação ao valor posicional e investigar a superação de tal dificuldade, caso exista.

As atividades 5, 6 e 7 estão relacionadas à identificação do número correspondente aos agrupamentos anunciados (dezenas e centenas) e na identificação da quantidade de dezenas e centenas existentes nos números propostos. Tais atividades são importantes para a compreensão do processo de decomposição dos números em dezenas, centenas...

5. Que números correspondam aos valores abaixo?

50 dezenas	20 centenas	30 dezenas e 8 unidades
45 dezenas	50 centenas	42 dezenas e 5 unidades
20 dezenas	248 centenas	4 centenas e 7 unidades
200 dezenas	1100 centenas	8 centenas
1000 dezenas	2020 dezenas	1250 dezenas
1400 dezenas		

6. Quantas dezenas existem nos números abaixo?

52	975	2358	820
74	991	2456	500
100	1000	851	
180	1500	750	

7. Quantas centenas existem nos números abaixo?

200	1758	9960	1250	1980	9965
950	1880	1650	8800	1000	1750

Iniciamos essas atividades com números pequenos, no intuito dos alunos colocarem em ação os conhecimentos referentes a dezenas e centenas. Após a compreensão das atividades buscamos intercalar números pequenos e grandes.

É provável que no início da atividade tenhamos que recuperar o significado de dezena e de centena, sendo esse conhecimento indispensável, principalmente, na realização da atividade nº. 5.

Dentre as estratégias que conduzirão ao acerto destacamos algumas relacionadas às regras ensinadas pela escola:

- Multiplicar por 10 (no caso das dezenas) ou por 100 (no caso das centenas) os números anunciados;
- Fazer uso do seguinte teorema em ação: para descobrir o número formado por uma quantidade de dezenas ou de centenas basta acrescentar um ou dois zeros à direita, respectivamente, sem necessariamente vincular essa estratégia a multiplicação;

- Somar de 10 em 10 (no caso de uma quantidade pequena das dezenas) ou de 100 em 100 (no caso de uma quantidade pequena de centenas) até obter a composição solicitada.

Vale notar, por um lado, que a mobilização dessas estratégias implica compreender que uma dezena corresponde a dez unidades e uma centena equivale a cem unidades. Por outro lado, dentre as estratégias previstas é possível inferir que este último demandará um tempo maior para resolução, pois evoca a sobrecontagem em torno de agrupamentos de dez em dez ou cem em cem.

Acreditamos que as atividades 6 e 7 vão além da identificação do significado de dezena e de centena, necessitando descobrir a quantidade de dezenas ou centenas existentes no número anunciado. É provável que os alunos, de modo geral, ao serem questionados sobre a quantidade de dezenas ou centenas dos números identifiquem o algarismo correspondente à ordem das dezenas e das centenas como sendo a quantidade solicitada. Acreditamos que tal fato pode ocorrer porque o ensino que envolve composição e decomposição de quantidades está baseado em uma segmentação linear, no qual "[...] a utilização das tabelas ou casas das unidades, dezenas e centenas condicionam uma leitura unilateral e segmentada da numeração escrita" (TEIXEIRA, 2002, p. 206).

Nesse caso, o teorema em ação verdadeiro que pode ser mobilizado é o seguinte:

- *"Para determinar a quantidade de dezenas de um número despreza-se o último algarismo da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa a quantidade de dezenas. Para determinar a quantidade de centenas de número desprezam-se os dois últimos algarismos da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa a quantidade de centenas e assim analogamente para determinar milhares, dezenas de milhar ,..."*.

As atividades 8 e 9 retomam questões anunciadas nas atividades 1 e 2 referentes à realização das trocas dos algarismos na ordem da unidade para a dezena, da dezena para a centena e assim sucessivamente, tanto para descobrir o sucessor como para descobrir o antecessor, visando verificar a estabilidade dos conhecimentos relativos às mudanças de posição, agrupamento e troca que envolve grandes números. Para tanto, selecionamos para essas atividades números que contemplem tal passagem, iniciando com números pequenos para depois passarmos para números grandes, como podemos observar a seguir:

8. Que número vem depois?
Depois de 99, qual é o próximo número?

199	75 879	109 999	1 000 9999
9 999	79 999	999 899	
19 999	58 989	999 999	
15 789	1019	199 889	

9. Que número vem antes de 100?

200	500 900	11 0001	200 000
500	100 000	300 800	10 000 000
1000	1 000 000	590 090	492 790

Acreditamos que quando o número atingir a ordem da centena de milhar em diante, será necessário registrá-lo no quadro, para que os alunos consigam realizar a troca solicitada, tanto para a atividade 8 como para a 9. Contudo, esperamos que ao término da seqüência didática os alunos tenham condições de realizar as atividades desse formato oralmente, sem necessitar do apoio escrito, mostrando compreensão do funcionamento do sistema de numeração decimal, mediante o domínio da seqüência dos números, tanto na escrita como na oralidade.

Apresentaremos a seguir a descrição e a análise dos dados coletados durante a aplicação da seqüência didática, de acordo com a ordem das atividades desse primeiro bloco e dos fatos que desejamos examinar, independente da disposição das sessões. Destacamos que trouxemos para essa parte excertos que, por um lado, contêm elementos que contemplam aspectos levantados na *análise a priori* ou apresentam outros que não haviam sido previstos. Por outro lado, priorizamos trechos das discussões desencadeadas durante as sessões que expressam conhecimentos dos sujeitos escolhidos em nossa pesquisa, conforme ilustra o quadro 2:

QUADRO 2 – Grupo de alunos participantes da experimentação, organizados de acordo com a média obtida em Matemática no 1º semestre de 2007

MÉDIA OBTIDA EM MATEMÁTICA NO 1º SEMESTRE DE 2007	**Alunos do 4º e 5º anos (*)**	
	2007	**2008**
Superior a 9,0	GF, GJ, FN, LR2	CA, GF, LT
Entre 8,5 e 7,0	CM, GV, MR, TH	AN, GV, JR, VT
Abaixo de 7,0	FS, JD, ME, ML	JD, ML

(*) os alunos de 2007 e 2008 participaram da experimentação desde o início da experimentação

[2] Usaremos siglas para identificação dos sujeitos, na tentativa de preservar o anonimato.

Cabe ressaltar também que, o fato de resgatarmos fragmentos das discussões das quais esses sujeitos fizeram parte, não exclui a possibilidade de trazermos excertos de outros alunos que também contribuíram para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo dos alunos envolvidas na experimentação, tanto no ano de 2007 como em 2008.

O primeiro contato com os alunos serviu primeiramente, para a apresentação da pesquisadora e, posteriormente, para explicar a dinâmica das atividades desenvolvidas e fixar alguns combinados relacionados à gestão das atividades, como, não se pronunciarem ao mesmo tempo, o que dificultaria a transcrição das sessões.

Acreditávamos que, durante a experimentação, iríamos explorar duas ou três atividades por sessão, pois as atividades propostas, principalmente nesse primeiro bloco, recorriam a conhecimentos do Sistema de Numeração Decimal explorados desde o início da escolaridade, fato que permitiria iniciar as atividades do segundo bloco ainda em 2007. Entretanto, isso não ocorreu, tendo em vista que algumas atividades geraram maiores discussões, como foi o caso da atividade 4, relacionada à escrita de números com algarismos. Diante disso, exploramos no segundo semestre de 2007, com os alunos do 4º ano, somente as nove atividades relacionadas ao primeiro bloco, perfazendo 16 sessões, ocorridas duas vezes por semana, nos 15 minutos finais das aulas de Matemática.

4.1.1 – Bloco do sistema de numeração decimal: dados coletados

Iniciamos a experimentação em setembro de 2007 com a exploração das atividades 1 e 2, que envolviam a contagem para frente e a contagem regressiva a partir de um determinado número. Em relação a essas atividades supomos na análise *a priori* que os alunos iriam interromper a contagem quando chegassem aos números próximos dos “nós” (dezenas, centenas, unidades de mil..., exatas) por não conseguirem realizar a mudança de ordem. Esse fato pode ser percebido na transcrição a seguir quando a aluna é chamada a contar para frente a partir de novecentos e oitenta e dois.

> ME: Novecentos e oitenta e três, novecentos e oitenta e quatro, novecentos e oitenta e cinco, novecentos e oitenta e seis, novecentos e oitenta e sete, novecentos e oitenta e oito, novecentos e oitenta e nove (pausa) É (pausa)Mil.
> P: Novecentos e oitenta e nove (pausa) (interrompo lembrando-a em qual número havia parado a contagem).

> ME: Novecentos e noventa, novecentos e noventa e um, novecentos e noventa e dois, novecentos e noventa e três, novecentos e noventa e quatro.
> P: Como você fez a passagem de novecentos e oitenta e nove para novecentos e noventa?
> ME: Eu fui contando. [...] Peguei o oitenta e nove e passei pro noventa, aí deu novecentos e noventa.

É possível perceber que a estratégia usada para essa passagem está relacionada à decomposição do número anunciado em novecentos mais oitenta e nove (900+89), no qual a aluna soma mais um ao oitenta e nove, chegando ao número novecentos e noventa. Estratégia semelhante pode ser usada para obter o número posterior a novecentos e noventa e nove: decomposição em novecentos mais noventa e nove (900+99), seguida de soma de mais uma unidade ao noventa e nove, que pode originar novecentos e cem. Contudo, como no primeiro caso isso não causa estranheza e tal estratégia é aceitável, pois a composição aditiva ocorre naturalmente na fala, diferentemente do que ocorre ao ouvirmos novecentos e cem, que mobiliza o mesma estratégia.

Essa decomposição não apareceu durante as contagens propostas nessa sessão. Porém, após três encontros essa atividade foi retomada com a mesma criança que havia utilizado a decomposição para descobrir o próximo número da seqüência, com intenção de verificar se essa passagem aconteceria.

> ME: Novecentos e oitenta, novecentos e oitenta e um, novecentos e oitenta e dois, [...], novecentos e noventa e sete, novecentos e noventa e oito, novecentos e noventa e nove (pausa) Humm!Mil.
> P: ME, explica uma coisa [...]. Você foi superbem: novecentos e noventa e sete, novecentos e noventa e oito, novecentos e noventa e nove. Aí você parou um pouquinho pra falar o mil. Por que você não continuou no embalo que estava antes? O que aconteceu?
> ME: Por causa da mudança.

Percebemos que houve uma interrupção na contagem, justificada talvez em função da mudança que ocorre do novecentos e noventa e nove para o mil, como afirma ME. Isso provavelmente ocorreu para que a seqüência pudesse ser recuperada na memória ou talvez para que o algoritmo fosse organizado mentalmente, trazendo indícios do seguinte teorema em ação: *Para saber o próximo número da seqüência basta acrescentar mais uma unidade.*

A dificuldade apresentada por ME foi prevista na análise *a priori*, tendo em vista que nessa passagem ocorre um maior número de trocas, alterando o registro de todas as ordens, além de uma mudança de classe.

Contudo, como não conseguimos descobrir a estratégia utilizada pela criança para dar prosseguimento a contagem, a discussão foi aberta para o grupo que resgatou a dificuldade apontada pelas pesquisas em relação à contagem dos números próximos aos "nós" (LERNER e SADOVSKY, 1996), cogitando a possibilidade de passar do 999 para o 900 e 100 como um estratégia errada.

> P: Como você descobriu que depois novecentos e noventa e nove teria que vir o mil?
> ME: Não sei explicar.
> JR: Eu sei!
> P: Vamos ver o que o JR tem pra falar. [...]
> JR: É porque tava mudando da centena pro milhar.
> P: E mudar da centena pro milhar é mais difícil?
> JR: É, porque assim (pausa)Você tava contando da (pausa) como que é? Dá (pausa) do grupo do cem, da centena, daí deu novecentos e noventa e nove e tinha que ir pro milhar. Aí, tipo assim, é a mesma coisa quando a gente vai do nove pro dez, a gente meio que para né?! Do novecentos e noventa e nove [também para] [...] pra ver o próximo número.
> MA: É por causa que teve a mudança pra unidade de milhar.
> P: Igual o JR falou?
> MA: Isso! Aí ela devia pensar um pouco para não se confundir, porque ela tava na centena ela podia (pausa)
> P: O que ela podia ter feito?
> MA: Ela poderia ter se confundido, depois do novecentos e noventa e nove ela poderia ter falado cem. Alguma coisa assim.
> [...]
> JR: Ela poderia ter confundido o novecentos e noventa e nove com noventa e nove.

Observamos também no excerto momentos *adidáticos* quando JR e MA estabelecem um diálogo na tentativa de justificar como é possível descobrir que depois de novecentos e noventa e nove vem o mil.

A dificuldade em realizar a contagem dos números próximos aos "nós" parece aumentar quando o número proposto atinge a classe dos milhares. Tal dificuldade pode vir associada à falta de costume em realizar essas contagens oralmente, tendo em vista que provavelmente isso não apareceria se fosse uma atividade escrita.

> GV: Mil e noventa e oito, mil e noventa e nove, mil e (pausa) (rsrs) Ai.
> P: Quer ajudar GF?
> GF: Mil e cem, mil cento e um, mil cento e dois, mil cento e três, mil cento e quatro, mil cento e cinco.
> P: Ok. GV, explica pra mim porque você travou na hora do mil e noventa e nove para falar o próximo número?
> GV: Por que eu não to acostumada a contar rápido e o mil não está gravado, [quer dizer] mil e noventa e nove. [...] No mil e noventa e nove eu não consegui por que eu fiquei confusa. [...]Porque eu pensei que era mil e dez. Eu não conseguia saber qual era o próximo.

Observamos que a justificativa apresentada por GV parece relacionar-se, por um lado, com a presença de números próximos aos "nós" (dezenas, centenas,... exatas) e por outro, com a dificuldade de percepção das regularidades do sistema de numeração, conforme pontuamos na análise *a priori* (LERNER e SADOVSKY, 1996).

Um teorema em ação recorrente e previsto na análise *a priori* para esse tipo de contagem foi expresso pelos alunos e trata de acrescentar mais uma unidade para descobrir o próximo número, induzindo a uma organização mental do algoritmo ensinado pela escola podendo inibir o aparecimento de novas técnicas mentais (BUTLEN e PEZARD, 1992), como pode ser percebido na transcrição seguinte:

> P: Como que eu faço essa passagem do mil e noventa e nove para mil e cem? Tem que fazer o que?
> CA: Mais um.
> P: Mais um aonde?
> CA: Mais um no último número.
> P: Tá. E aí, vou fazer o quê?
> A[3]: Vai dar dez, deixa o zero e manda o um lá pro outro nove. Vai dar dez de novo, deixa o zero e manda o um lá no lugar do zero.

Talvez nossa intervenção tenha sugerido uma reprodução mental do algoritmo ensinado pela escola, permitindo que CA retirasse as informações pertinentes, ignorasse outros aspectos e selecionasse o teorema em ação necessário ao cálculo (VERGNAUD, 2005).

Na contagem regressiva nem foi cogitada a possibilidade de usar a decomposição do número anunciado seguido de uma subtração, mas a dificuldade em relação aos "nós" também se fez presente. Fato que pode ser percebido no excerto abaixo, porém a explicação para tal dificuldade está relacionada, mais uma vez, à falta de uso desse tipo de contagem.

> AN: Sete mil oitocentos e nove, sete mil oitocentos e oito, sete mil oitocentos e sete, [...] sete mil oitocentos e um, sete mil (pausa).Ai.
> P: Vou te ajudar, o último que você falou foi sete mil oitocentos e um.
> AN: Sete mil e oitocentos, sete mil setecentos e noventa e nove, sete mil setecentos e noventa e oito [...].
> P: Foi difícil fazer AN?
> AN: Só quando passou de sete mil e oitocentos para sete mil setecentos e noventa e nove.
> P: Por que será que é difícil? O que você acha MA?

[3] Usaremos a letra A nos trechos em que não pudermos identificar o aluno que emitiu a fala correspondente.

> MA: Mais ou menos, porque a gente confunde.
> P: Aí que tá. Por que a gente confunde?
> MA: Porque quando é de trás para frente dá impressão que você tá contando normal. Aí a gente mistura pra frente e pra trás.
> P: Por que será que isso acontece?
> FN: É que a gente tá tão acostumado a contar sempre pra frente que quando temos que contar pra trás a gente confunde.

Inferimos que as pausas observadas durante a contagem feita por AN podem ter relação com a mobilização do seguinte teorema em ação: *Para descobrir o número que vem antes basta diminuir uma unidade do último número anunciado*. Tal teorema induz a montagem mental do algoritmo ensinado pela escola ou simplesmente ajuda a recuperar na memória a seqüência numérica, como parece ter ocorrido com AN.

Percebemos, tanto na contagem para frente como na contagem regressiva, algumas contagens automatizadas da seqüência numérica, produzidas imediatamente de maneira espontânea, sem consciência do caminho seguido (ANSELMO E PLANCHETTE, 2006), independente de serem números pequenos ou grandes. Nesse momento, quando os alunos eram instigados a justificar como conseguiram realizar a contagem com êxito, às vezes sem variar o ritmo, ouvíamos as seguintes explicações: *"Eu fui pensando no número que vinha depois"* (ME) ou *"Ah! Eu pensei (pausa). Ah! Eu não sei explicar direito* (GF). Nesse momento perguntamos: *O que passou pela sua cabeça quando você contava?* GF responde*: Ah! Os números"*. Essas falas nos permitem inferir que algumas contagens já fazem parte do repertório numérico dos alunos, estando automatizadas ou que precisam ser apenas recuperadas na memória.

Quanto às atividades 3 e 4, relacionadas à leitura na forma corrente e à escrita de números com algarismos, respectivamente, foi possível perceber que os números que possuíam o zero intercalado foram um fator de dificuldade para os alunos quando se tratava de números grandes. Apesar de supormos que isso não apareceria para a atividade 3, para a qual acreditávamos que independente do tamanho dos números era provável que os alunos, de modo geral, conseguissem realizar com destreza tal atividade, observamos isso em ambas as atividades.

Na atividade 3, para que a leitura na forma corrente pudesse ser realizada registrávamos no quadro um número por vez, solicitando em seguida que algum aluno procedesse à leitura. Percebemos que em relação aos números pequenos a atividade transcorreu normalmente. Contudo, quando apresentamos um número com mais de cinco algarismos os alunos interpelados emitiam leituras que não correspondiam ao número proposto, como mostra o excerto a seguir:

> P: (Registro no quadro o número quarenta e oito mil e dez – 48010 – e pergunto) CM que número é esse?
> CM: Quatro mil e dez.

Nesse momento os alunos se manifestaram na tentativa de proceder à correção da leitura apresentada:

> [...] VT: Eu não concordo.
> P: Por que não VT?
> VT: Porque é quarenta e oito mil e dez. Se fosse quatro mil e dez seria quatro, zero, um e outro zero.
> P: (Enquanto VT fala vou registrando o número anunciado 4010). [...] Então, se esse é quatro mil e dez (aponto para o registro 4010), aquele (mostro o 48 010) pode ser também?
> A: Não!

Até então só apareciam falas que buscavam corrigir o número explicitado por CM, até que percebemos uma justificativa que usou como referência a quantidade de algarismos existentes, possibilitando ampliar a discussão:

> [...] CA: Eu vi que não estava certo porque quarenta e oito mil e dez tem cinco dígitos.
> P: Quando tem cinco dígitos, cinco algarismos, como que eu tenho que ler?
> A: De dez mil pra cima.
> GF: Vai de dez mil até noventa mil.
> P: Só até noventa mil?
> GF: Não, até noventa e nove mil, novecentos e noventa e nove.
> P: E quando tem quatro dígitos?
> GF: De mil até nove mil, novecentos e noventa e nove.

Ao nos reportarmos para a explicação de CA verificamos que talvez ela tenha como suporte o seguinte teorema em ação: *Para saber a classe a qual um determinado número pertence basta identificar a quantidade de algarismos existentes no mesmo.*

O debate iniciado na atividade 3, relacionado a quantidade de algarismos necessários para compor um determinado número vem acompanhado, na atividade 4, da necessidade do ponto para separar os algarismos e facilitar sua leitura, principalmente em relação aos números grandes.

Destacamos por um lado, que para a realização da atividade 4 funcionamos como um escriba para os alunos, pois o número era anunciado para um determinado aluno, que ditava os algarismos que o compunham para que nós o registrássemos no quadro.

Por outro lado, não foi cogitado na análise *a priori* que o uso do ponto pudesse ser explorado com tanta ênfase pelos alunos, mesmo sabendo que esse vem sendo usado, na escola, para organizar o número e facilitar a leitura, sendo essencial ao entendimento dos números escritos por parte das crianças (BRIZUELA, 2006). Essa discussão foi tão forte que perpassou três sessões consecutivas e foi retomada pelos alunos todas as vezes que surgia uma dúvida quanto ao registro do número anunciado:

> P: Próximo número: sete milhões, quatrocentos e cinqüenta mil e trinta e dois. Como escreve VT?
> VT: Sete, ponto, quatrocentos e cinqüenta, ponto, trinta e dois.
> P: Assim VT? (registro no quadro 7.450.32).
> VT: É!
> P: AN, o que você acha?
> AN: Tá certo.

Ao percebermos que AN não notou a falta de um zero na ordem da centena, questionamos a turma sobre a possibilidade de alguém ter feito diferente. Foi quando GJ apresentou uma nova série, que também não condizia com o registro do número anunciado: 745000032.

Diante de dois registros diferentes apresentados para um mesmo número, questionamos novamente AN para que emitisse sua opinião sobre esse impasse. Entretanto, esse não consegue perceber os erros cometidos pelos dois colegas e elimina apenas o registro proposto por VT.

Nesse momento FN participou da discussão acrescentando um novo elemento, como observamos a seguir:

> FN: Os dois estão errados. Tem que colocar um ponto a cada três números.
> P: Ah! A cada três algarismos coloco um ponto, assim oh? (distribuo os pontos da direita para a esquerda no número 745. 003.2 que o VT ditou e pergunto se é assim)
> FN: Não! Pego o trinta e dois e coloco um zero na frente e aí separo quatrocentos e cinqüenta.
> P: Ah! Então é da direita pra esquerda que eu separo os algarismos de três em três?
> FN: É!
> P: Entre, o que disse o GJ e o que disse o VT, quem fez mais certo?
> FN: O VT.

> P: Corrige então.
> FN: Sete, ponto, quatrocentos e cinqüenta, ponto, zero trinta e dois.
> P: E se eu colocar assim também no número que o GJ disse, está certo também?
> FN: Não! Porque tem muito zero. E é sete milhões.
> P: Por que tem que ficar aqui o ponto FN? Como que eu sei que desse jeito é sete milhões?
> FN: Porque tem dois pontos.

Além de colocar o ponto a cada três algarismos uma outra estratégia que surge está ligada ao fato de que os pontos devem ser colocados da direita para a esquerda, respeitando assim a formação dos números: a cada três ordens surge uma classe. Convém destacar que a estratégia associada à quantidade de pontos para realizar a leitura do número apareceu em momentos distintos, podendo ser considerada recorrente, ao menos para uma aluna, pois se repetiu em sessões diferentes: a quantidade de pontos existentes em um número determina a classe a qual ele pertence.

Tentamos estabelecer essa relação também na fala de JL, porém essa ainda não conseguia perceber tal fato e continuava atribuindo importância ao ponto apenas para proceder a leitura do número, como ilustra o excerto seguinte:

> FN: A classe muda de acordo com a quantidade de ponto. Se tiver um ponto é mil, dois pontos milhão, quando é bilhão são três pontos.
> JL: A cada ponto muda a seqüência (pausa)
> P: Muda a classe.
> JL: Muda a leitura dos números.

Percebemos que apesar de frisarem, durante a atividade 4, a necessidade de colocar o ponto a cada três algarismos, podendo ser considerado um teorema em ação recorrente, os alunos ainda não sabiam explicar o porquê da sua existência, relacionando-o à facilidade na leitura e organização do número, o que provavelmente seja decorrente da memorização de uma regra ensinada pela escola.

> P: Por que não pode ser de quatro em quatro?
> MA: Para não ficar confuso.
> P: Só por isso?
> JL: Você coloca o ponto pra separar, um algarismo, outro algarismo...
> P: Mas, por que eu separo de três em três?
> LT: Porque é assim, dezena, unidade, centena, milhar...
> P: A cada três algarismos acontece o que então?
> LT: Muda.
> P: Muda a classe então né? O ponto ajuda a fazer o que então?
> A: A olhar o número e fazer a leitura.

Por esse motivo, permanecemos durante três sessões nessa atividade, pois a cada número trabalhado essa questão vinha à tona, demonstrando que esta questão ainda não estava resolvida, a não ser para FN, que acrescentava uma informação a cada reinvestida da atividade:

> FN: O maior número que pode ficar nos três é novecentos e noventa e nove. Porque é assim, na centena, dezena e unidade, se colocar em cima de cada número, pra ficar tudo certinho, o maior número que vai conseguir ficar é novecentos e noventa e nove em cada um, entre os pontinhos.

É possível perceber pelo excerto que FN sabia o porquê dos algarismos serem separados de três em três na escrita de um número, mesmo sem usar a expressão “classe”, como dizemos. Porém, para os demais alunos o ponto exercia a função de facilitar a leitura e organizar o número, ficando a questão da mudança de classe em segundo plano, mesmo que isso aparecesse ao final das discussões, como podemos observar nas falas dos excertos anteriores e do seguinte:

> P: Vamos recordar o que a FN falou ontem (falo isso após escrever 1.50 no quadro). Vocês lembram o que ela disse em relação ao ponto?
> MA: A cada três algarismos tem um ponto.
> CA: A cada três algarismos tem um ponto, por causa da centena, unidade e (pausa) dezena.

Observamos que CA consegue reproduzir a explicação atribuída por FN no dia anterior, sem que isso fizesse sentido para a turma, que ainda atribuía ao ponto a função de separar os números ou facilitar sua leitura, conforme observamos a seguir:

> ML: Para separar os números.
> P: Só para separar?
> ML: Humm!(balança a cabeça, sem saber o que dizer).
> P: AN, o que Você acha?
> AN: Pra (pausa). Pra ver os números.
> P: Só pra ver os números? GF, ajuda o AN.
> GF: Pra ler melhor o número.
> P: LR, por que eu coloco um ponto a cada três algarismos? Por que não pode ser a cada dois algarismos?
> LR: Eu não sei explicar.
> P: AE, Você quer ajudar a LR? Por que a cada três algarismos eu coloco um ponto?
> AE: Pra separar dezena de dezena, milhar dezena de centena.

Verificamos que AE tenta usar sem êxito o mesmo argumento de FN, recuperado por CA, apresentando as ordens sem respeitar o arranjo padronizado no

Quadro Valor de Lugar – QVL. Insistimos na questão de separar os algarismos de três em três, induzindo a turma a perceber o que acontece nesse intervalo:

> P: O que acontece a cada três algarismos? Por que não pode ser de quatro em quatro?
> VT: Não sei, não sou matemático. Rsrsrs
> P: JL quer falar?
> JL: Por que eu tenho que separar unidade, dezena e centena e depois vem milhar, milhão, bilhão,...
> P: Então, a cada três algarismos acontece o que?
> A: A troca de casas.

Apesar de aparecer tal explicação, percebemos que ela ainda não ganhou eco e precisava ser retomada em outros momentos. Sendo assim, demos prosseguimento à atividade e identificamos que a questão do zero intercalado na escrita de números também foi um fator de dificuldade para aqueles que ainda não dominam regularidades do sistema de numeração decimal, como por exemplo: o valor posicional, o princípio de composição e decomposição aditiva e o princípio multiplicativo. Entretanto, durante a discussão algumas falhas foram percebidas e corrigidas, como podemos observar na transcrição:

> P: O próximo foi?
> A: Mil e cinqüenta.
> P: JR, como você escreveu mil e cinqüenta?
> JR: Um, cinco e zero.
> A: Eu também.
> P: JR, isso que você falou é mil e cinqüenta?
> JR: Não! É cento e cinqüenta.
> P: TH, o que faltou para ser mil e cinqüenta?
> TH: O zero depois do um.

A dificuldade com o zero intercalado, conforme previmos, aconteceu na escrita de números grandes, ou seja, números acima da classe das unidades simples. Tal percepção nos levou a organizar uma sessão para averiguarmos se isso talvez tenha ocorrido devido à ausência de atividades na escola que exigissem a passagem da numeração falada para a numeração escrita de números pertencentes a classe dos milhares em diante. Em relação a isso, pesquisas apontam que as crianças não fazem diferenciação entre ambas (LERNER e SADOVSKY, 1996), necessitando que essa seja explorada pela escola, como tentamos realizar durante a experimentação, como ilustra o excerto seguinte:

> P: Três mil e setenta. Alguém teve dificuldade nesse?

> [...]
> MA: Eu fiz três, sete, zero, zero.
> P: E como que eu leio MA?
> MA: Três mil e setecentos.
> P: Alguém fez diferente?
> JL: Eu fiz três, ponto, zero, zero, zero, setenta. Eu coloquei três mil (3000) e setenta (70).
> P: Você escreveu como a gente lê né?
> JL: (Balança a cabeça concordando.)
> A: Tá certo?
> P: Não! Pra falar tá certo, mas pra escrever não. Quando eu escrevo com algarismos, o que acontece?
> A: Eu vou juntando.

É possível observar, nesse excerto, que no momento da discussão os alunos perceberam, após a interpelação, a necessidade da justaposição aditiva dos valores para realizar a passagem da numeração falada para a escrita, fato que reforça a afirmação que fizemos anteriormente em relação ao papel da escola.

A dificuldade na passagem da numeração falada para a escrita ocorreu também em relação à escrita dos "nós" (números próximos de onde ocorre a mudança de ordem na representação no sistema de numeração decimal). Essa dificuldade apareceu mais uma vez ligada aos números grandes, como ilustra a transcrição seguinte:

> P: Vou pedir pra CM me dizer como que eu escrevo um milhão com algarismos.
> CM: Um milhão?! Um, ponto, zero, zero, zero.
> P: Ok? (registro no quadro 1.000)
> CM: Acho que tem mais um zero.
> P: Assim CM? (registro no quadro 1.0000 e CM balança a cabeça concordando com a alteração).

Durante a discussão os alunos perceberam apenas o erro cometido em relação à quantidade de zeros após o ponto, reforçando o seguinte teorema em ação: *o ponto deve ser colocado a cada três algarismos e ajuda a ler o número*.

> P: GJ, eu falei pra CM dizer os algarismos que compõem um milhão. O que você acha?
> GJ: Tá errado!
> P: E você ML, o que você pensa disso? O GJ disse que tá errado. E você?
> ML: Eu também acho que tá errado.
> P: Por que ML?
> ML: Porque ela colocou quatro zeros e não é quatro zeros [...] tinha que ser um, ponto e três zeros.
> [...]
> P: Agora a pergunta que eu faço é a seguinte. MR, por que tem que ser de três em três?
> MR: Porque não daria pra ler o número.

Esse teorema em ação parece ser tão forte que sobrepõe o erro na passagem da linguagem falada para a escrita, afinal o número anunciado foi um milhão e não mil, como reforça ML. Reinvestimos na discussão desencadeada por ML, para que os alunos pudessem perceber que a cada três algarismos existe uma mudança de classe e que o ponto serve justamente para marcar essa mudança.

> P: [...] por que tem que ser de três em três? O que acontece a cada três algarismos? Alguém sabe me dizer?
> JL: Eu acho que a gente tem que separar. Porque a cada três algarismos vale uma unidade e se eu colocar outro número, não vai mais ser unidade, vai ser dezena.

Ao percebermos a dificuldade de JL de usar a linguagem Matemática adequada para se referir às ordens, decidimos organizar o QVL para que a discussão fosse enriquecida.

> P: Mas espera lá JL. A gente tem os números organizados assim centena dezena unidade (escrevo no quadro C D U, construindo o QVL). Então JL, a esquerda da unidade tem um ponto?
> JL: Não!
> P: E a cada três algarismos, não é?
> JL: Sim.
> P: O que vem depois da centena JL?
> JL: Depois da centena vem o milhar.
> P: (Acrescento essa informação ao QVL e continuo a perguntar) até montar o QVL) E depois?

Podemos observar pelo excerto que a cada interferência da JL o QVL foi sendo construído no quadro, ficando da seguinte forma:

CMI	**DMI**	**UMI**	**CM**	**DM**	**UM**	**C**	**D**	**U**

A exposição do QVL no quadro possibilitou, ao menos para JL, compreender que colocamos um ponto a cada três algarismos para organizar o número, para facilitar a leitura e também para marcar a mudança de classe (GUIMARÃES; BITTAR; FREITAS, 2008), como ilustra o excerto a seguir:

> P: Dá para perceber alguma diferença?
> JL: Dá. Eu percebi. Por exemplo, cada um desses aí tem centena, dezena e unidade. Milhão tem centena, dezena e unidade, trilhão tem centena, dezena e unidade.
> P: A unidade, dezena e a centena aparecem sempre.
> JL: Ah! Entendi! Cada um, por exemplo, milhão tem unidade, dezena e centena, por isso que a cada três algarismos tem um ponto. Pra

> diferenciar! [...]Eu percebi que a unidade, dezena e centena elas se repetem, sempre tem os três [...] Sempre tem os três em cada classe.
> P: Isso, em cada classe aparece a unidade, a dezena e a centena. Além disso, aparece também um outro componente ou é a unidade simples, ou a unidade de milhar, ou a unidade de milhão. Por isso que eu coloco o pontinho, pra separar o quê ?
> A: O milhão do bilhão...
> P: Separar os números e fazer o que MA?
> MA: Saber qual é a classe.

Após a descoberta de JL, compartilhada pela turma mesmo que ainda obscura para alguns alunos, voltamos à questão do registro de um milhão, sugerido erroneamente por CM. Porém, ao invés de retomar esse registro, anunciamos um novo número, também pertencente à classe das unidades de milhão, para que pudéssemos contrapor com o apresentado por CM.

> P: Quais são os algarismos que compõem um milhão e cem?
> AN: Um, ponto, zero, zero, zero, ponto, um, zero, zero.
> P: O que vocês acham?
> A: Eu concordo!
> P: Então um milhão é isso aqui? (mostro o registro feito no quadro 1.000) Então espera lá. Eu pedi para o AN escrever um milhão e cem e ele escreveu com esses algarismos (1.000.100) A CM escreveu um milhão assim (mostro mais uma vez o 1.000). E aí?
> A: Hurumm! Não! Ela colocou (pausa)
> MA: Ela colocou um milhão, só que com quatro zeros.
> P: Espera aí MA, depois corrigimos e tiramos o zero que estava sobrando. (Recordo o que foi feito) Eu pedi pra escrever um milhão também e ela escreveu com quatro zeros. Depois conversamos e corrigimos. E aí, isso aqui é um milhão GJ (mostro o registro 1.000)?
> GJ: Não!
> P: Pra ser um milhão ML, tá faltando o quê?
> ML: Três zeros.
> P: Por que três zeros ML?
> ML: Porque o um com três zeros vai ficar mil.
> P: E pra ser um milhão tem que ter mais três zeros? (digo isso em função da fala de ML).
> ML: É!

O excerto reforça nosso pensamento em relação à dinâmica de interpelação adotada em nossa pesquisa, pois aqueles que não falavam, precisavam escutar e tentar compreender o que estava sendo falado, fato que pode auxiliar na memorização, conforme apontam as pesquisas (ANSELMO e PLANCHETTE, 2006; DOUADY, 1994). Entretanto, é possível observar que direcionamos para a resposta correta, fornecendo uma dica ao invés de devolver a pergunta a ML para que a mesma chegasse a essa conclusão.

Provavelmente, as discussões desencadeadas acerca do uso do ponto para marcar a mudança de classe podem ainda não fazer sentido para todos os alunos, podendo aparecer em outras sessões. Contudo, o fato de ter sido criado um espaço para que esse uso pudesse ser analisado e não somente reproduzido, pode contribuir para o entendimento e representação dos números escritos por parte dos alunos. Aliás, cabe ressaltar que “[...] os tipos de sinais de pontuação – pontos, vírgulas, dois pontos, ponto-e-vírgula – usados são arbitrários, e o uso de vírgulas ou pontos nos números não é consistente em todas as partes do mundo” e nem os pontos nem as vírgulas são, muitas vezes, considerados uma parte do sistema numérico escrito (BRIZUELA, 2006, p. 59).

Pensando nisso, propusemos uma nova questão acerca do ponto na escrita do número: Será que eu preciso ter o ponto para fazer a leitura do número?

> A: Não!
> P: O ponto serve pra que?
> A: Pra você conseguir ler melhor (pausa)
> P: Pra ajudar na leitura.
> JL: Mas você não precisa colocar o ponto pra você ler.

Essa afirmação de JL foi contestada por CA que nos chama ao final da sessão para dizer que sem o ponto não existe nenhum número. Guardamos a asserção para ser retomada quando surgisse uma nova discussão relacionada à presença do ponto no número. Isso ocorreu após dez sessões, quando retomamos a escrita dos números com algarismos. Pedimos aos alunos que ditassem os algarismos que compunham alguns números grandes, identificados como os que ainda geravam dificuldades na passagem da numeração falada para a escrita.

> P: GJ, quais são os algarismos que formam o número 5201?
> GJ: Cinco, ponto, dois, zero, um.
> [...]
> P: TH, você [agora]. Quais são os algarismos que formam o número 7075?
> TH: sete, ponto, zero, sete, cinco.

Nesse momento percebemos que poderíamos voltar com a discussão sobre o papel do ponto e verificar a estabilidade dos teoremas elencados anteriormente, como mostra o excerto seguinte:

> P: O ponto serve pra que então?
> CM: Humm! (Mostra-se confusa com a pergunta).
> [...]
> P: Vai lá GF!
> GF: É para separar o milhar da centena, da dezena e da unidade.

> P: E por que tem que separar o milhar? Coitado do milhar!
> VT: O que ele fez de errado? (risos)
> P: Boa pergunta VT? (risos)
> GF: Ah! Porque cada casa, milhar, milhão tem que separar. Sete milhões (pausa) tem que separar.

Aproveitamos a afirmação de GF e registramos no quadro vários algarismos, compondo o seguinte registro 2354679 e pedimos para que GF inserisse o ponto onde achasse necessário:

> GF: Depois do dois, ponto.
> P: E depois tem mais ponto?
> GF: Depois do quatro.
> P: Agora, me diz uma coisa. Como você sabia que depois do dois tinha um ponto, depois do quatro outro? Como você fez para separar esses algarismos?
> GF: Dois milhões tem que separar do milhar.
> P: Cadê o milhar?
> GF: Ta aí, [no] trezentos e cinqüenta e quatro.
> P: Separar o milhar de quem?
> GF: Da centena, dezena e unidade. Aí é ponto.

Após GF ter inserido os pontos, alterando o registro exposto no quadro para dois milhões trezentos e cinqüenta e quatro mil seiscentos e setenta e nove (2. 354. 679), incluímos TH na discussão, pois ela havia dito no início da conversa que não lembrava o porquê do ponto a cada três algarismos, afirmando naquele momento que o ponto servia apenas para não misturar os números. Afirmação que foi alterada após a explicação de GF.

> P: Então TH, você ouviu o que o Gabriel falou?
> TH: (Balança a cabeça).
> P: Ele usa o ponto pra fazer o quê?
> TH: Pra separar o milhar da centena.
> P: Só milhar da centena? Por que eu tenho que separar o milhar da centena? Quando eu separo o milhar da centena o que acontece? Isso é bom pra mim?
> TH: É!
> P: Bom pra quê?
> TH: Porque cada número que você fala dá um valor.

Podemos observar que TH apresenta um outro aspecto do sistema numérico escrito, o valor posicional. Antes de discutir essa questão, vamos retomar a fala de CA sobre a importância do ponto. O excerto a seguir reforça a necessidade criada pelo leitor para o uso do ponto, como forma de facilitar a organização e leitura do número (BRIZUELA, 2006), mesmo que seja por meio de uma imagem mental. É possível perceber indícios de uma situação *adidática*, quando os alunos FN e CA buscaram estabelecer motivos para o uso ou não do ponto pela lógica interna da situação, sem apelo às razões didáticas. Ainda que houvesse nossa intervenção, conduzindo o debate, CA parece ignorar as falas ocorridas nos trechos de 16 a 18, prosseguindo a discussão a partir da fala emitida por FN no trecho 13.

1. P: [...] O CA falou: tem que ter o ponto pra ser número, senão tiver ponto não é número!
2. FN: Aí né, todo mundo discordou.
3. CA: Mas pode não ter ponto, mas ele tá na cabeça.
4. P: Ele falou, se eu tirar o ponto não é número, porque não tem ponto. Tem que ter o ponto pra ser número. E aí CA?
5. CA: É uai! Como você vai pensar no número sem o ponto? Você vai pensar na cabeça ou então no quadro.
6. P: Senão tiver o ponto no quadro, eu coloco o ponto na cabeça. Por que eu coloco o ponto na cabeça?
7. CA: Pra você saber o número.
8. P: Pra identificar o número?
9. CA: É!
10. P: Então, o ponto ajuda a fazer o que então?
11. CA: Ajuda a fazer tudo. Como você vai fazer esse número mais algum número. Porque esse número é um dois quatro cinco. Não dá pra pensar como se fosse mil ou outra coisa.
12. P: Ajuda a identificar se é milhão, ou mil.
13. FN: Mas ler o número sem ponto é fácil, é só você pegar de três em três números e fingir que tem o ponto(pausa)
14. CA: Tem que ter o ponto de qualquer jeito.

15. FN: Eu não to pensando em ponto, eu coloco na minha cabeça o número só.
16. P: Você coloca os algarismos de três em três, mas sem colocar o ponto?
17. FN: É!
18. P: Então o ponto na verdade ajuda a separar os algarismos?
19. CA: Mas por que você coloca de três em três? Porque é a ordem do ponto.
20. FN: É! De três em três, sem colocar o ponto. Por que fica mais fácil de ler.

O diálogo entre CA e FN fez com que outros exemplos, onde o ponto muitas vezes não comparece, fossem trazidos, como é o caso de alguns números premiados que aparecem na televisão e dos registrados nas máquinas de combustível. Tal discussão fez com que, por um lado, JL inferisse que tanto o ponto quanto as vírgulas servem pra separar os algarismos, corroborando com afirmação de Brizuela (2006, p.59) que pontua que “[...] os pontos ou as vírgulas marcam os diferentes valores posicionais nos números”. Por outro, permitiu a GF afirmar que não usa o ponto na conta, a não ser quando o número é grande.

GF: Eu não uso ponto na conta.
P: E não faz falta na conta?

> GF: Ah! Às vezes, mas às vezes não.
> P: Quando você sente falta do ponto?
> GF: Quando o número é muito grande.

Analisando essa fala de GF, que faz uso do ponto somente quando o número é grande e a apresentada por TH referente ao valor posicional, organizamos uma atividade que consistia em registrar um número grande e ir retirando o último algarismo a cada leitura realizada. Tal atividade não havia sido prevista e teve como intuito fazer com que os alunos percebessem que ao retirarmos o algarismo da ordem das unidades o valor dos demais sofre alteração, implicando simultaneamente uma nova leitura do número e uma nova posição do ponto.

A atividade ocorreu da seguinte forma: registramos no quadro vários algarismos sem nenhum ponto, formando o número vinte e seis milhões duzentos mil e seis (26200006) e solicitamos ao JD que fizesse a leitura. Esse afirmou estar difícil, pois não tinha os pontos. JD dispôs os pontos da esquerda para direita, mostrando-se satisfeito conforme ilustra o excerto:

> JD: Pra mim é assim (mostrando o registro que ficou 262. 000.06)!
> P: RF, você falou não por quê?
> RF: Porque ta errado. Tem que ser de trás pra frente.
> P: Da direita pra esquerda (registro o número novamente sem o ponto para que RF corrija).
> RF: Põe no outro zero e na frente do dois.
> P: Assim (mostro no quadro o registro 26.200.006)?!
> RF: Ai!
> P: E aí JD, o que você acha? É o seu ou o da RF?
> JD: Não sei!
> P: Não sabe? Tem que ser o seu ou o da RF [porque não é possível dois registros para o mesmo número]?
> JD: O da RF, porque senão ia ficar (pausa) duzentos e sessenta e dois e alguma coisa.

Após a interferência da colega, JD diz que fez errado porque não poderia sobrar dois no final, pois não iria fazer sentido e não daria para ler o número.

> JD: Porque se sobrasse dois no ali último ia ficar errado, mas se sobrasse dois ali ia ficar certo, porque (pausa) não iria fazer sentido se sobrasse dois ali (mostrando o final), não dava pra ler o número.

A questão do ponto permeou mais uma vez a discussão, agora sendo complementada em relação à direção que devemos adotar para dispô-lo no número. As explicações remeteram a seguinte formulação: o ponto serve para separar o milhar, o milhão e a centena, ou seja, para marcar a mudança de classe. Contudo, agora tínhamos que entender porque devíamos dispor o ponto da direita para a esquerda. Depois de algumas tentativas, alguns alunos conseguiram explicar os motivos de tal direção:

> JL: Eu acho que é assim, a unidade, a dezena e a centena não vêm da direita primeiro?
> P: Vêm!
> JL: E o milhar e o milhão não vêm da esquerda?! Então, o número começa pela direita por causa da centena.

Ao percebermos que JL estava com dificuldade para expressar seu pensamento, que supostamente relacionava-se à formação dos números naturais inteiros, solicitamos a ajuda de outros colegas:

> P: FS consegue ajudar JL?
> FS: Não!
> P: LR, por que tem que ser da direita pra esquerda? Alguém discorda disso?
> A: Não!

> LR: É porque tem um grupo que é centena, dezena e unidade e aí ia ficar, unidade e dezena só. E tem que ficar o grupo de três.
> [...]
> MA: Eu vou falar mais ou menos o que a LR disse. Que a unidade e a dezena estão sozinhos, mas como o grupo é de três estava errado o do JD. Ele não formava o grupo que precisava pra formar [...]
> GF: É que o número começa na unidade, dezena e centena e depois vai pro milhar, milhão, bilhão...

Depois de chegarem a um consenso e JD conseguir realizar a leitura do número, retiramos o último algarismo, deixando os pontos no mesmo lugar.

> P: MR, que número é esse (26.200.00)?
> MR: Vinte e seis milhões?
> A: Não!
> P: Deixa o MR! Eu tirei o seis, pois estava muito grande esse número.
> MR: Dois milhões seiscentos e vinte mil.
> P: Por que não é vinte e seis milhões? O que mudou nesse número?
> MR: Porque você tirou um número.
> P: Porque eu tirei um algarismo e daí?
> MR: Aí tem que mudar o ponto de novo.
> P: Por que MR?
> MR: Senão o número fica errado outra vez.

Parece que o objetivo da atividade foi alcançado, pois os alunos perceberam que ao retirarmos o algarismo da ordem das unidades o número é alterado, gerando uma nova posição do ponto e uma nova leitura do número.

Na atividade 5, que corresponde à identificação do número anunciado em agrupamentos de dezenas e centenas, funcionamos mais uma vez como escriba para registrar as colocações feitas pelos alunos durante a resolução das atividades e para auxiliá-los na compreensão das falas dos colegas, de modo a enriquecer o debate.

A exploração dessa atividade foi iniciada recuperando o significado de dezena e de centena. Aliás, a compreensão desses significados possibilitou ao GJ e ao AN gerar uma estratégia eficaz para descobrir o número anunciado, por um lado somando de 10 em 10 até obter a composição solicitada:

> P: GJ, [...] Que número é formado por cinqüenta dezenas?
> GJ: Cinco mil.
> P: Cinco mil?
> GJ: Não! Quinhentos!
> P: Como você descobriu que cinqüenta dezenas é quinhentos e não cinco mil?
> GJ: E porque eu fui contando de dez em dez.
> P: E por que você contou de dez em dez?
> GJ: Porque uma dezena tem dez.

Por outro, somando de 100 em 100:

> P: AN, cinqüenta e oito centenas forma que número?
> AN: Cinco mil e oitocentos.
> P: Como você descobriu isso?
> AN: Eu fui contando de cem em cem.
> P: Como assim? Explica pra gente.
> AN: Cem, duzentos, trezentos...
> P: Quantas vezes você contou de cem em cem?
> AN: Cinqüenta e oito vezes.

Podemos perceber, pelo excerto, que AN reconhece que é preciso contar cinqüenta e oito vezes a quantidade cem para obter o resultado, mas não se dá conta que multiplicando cinqüenta e oito por cem vai obter o mesmo resultado. Como gostaríamos que os alunos percebessem isso lançamos uma pergunta que pode ter induzido essa relação, como ilustra o excerto a seguir:

> P: O que ele pode fazer ao invés de contar de cem em cem?
> A: Ele pode fazer 58 vezes 100.
> [...]
> MA: Fica mais fácil e fica a mesma coisa, dá o mesmo resultado. É a mesma coisa.

Sabemos que as duas estratégias conduzem a uma resposta correta, porém, a segunda pode gerar rapidamente uma resposta correta desde que o aluno consiga mobilizar o seguinte teorema em ação previsto na análise *a priori*: *Para identificar o número formado por uma quantidade de centenas basta acrescentar dois zeros à direita da quantidade anunciada.*

Essa estratégia que consiste em multiplicar por 100, no caso das centenas, também apareceu no caso das dezenas, multiplicando o número anunciado por 10, porém sem ligação com esse teorema em ação.

> P: Qual número que eu posso formar com cinqüenta dezenas LT?
> LT: Quinhentos!
> P: Quinhentos? Como você descobriu que é quinhentos?
> LT: Porque se cinco dezenas é cinqüenta, então cinqüenta dezenas vão ser quinhentos.
> P: Por que LT cinco dezenas é cinqüenta?
> LT: Ah! Não sei explicar! Ah, ta! Porque cinco dezenas quer dizer cinco vezes dez. Cada dezena é dez.
> P: Então, em cada dezena eu tenho dez unidades. Então, se cinco dezenas é cinco vezes dez, que é igual a cinqüenta. Então cinqüenta dezenas [valem] (pausa)
> LT: Quinhentos!
> P: Por que mesmo?
> LT: Porque cinqüenta dezenas são como (pausa), por exemplo: todas as vezes em dez. Quinhentos! Todas as cinqüenta [dezenas] vezes dez, que vai dar quinhentos!

Observamos que essa estratégia foi associada, em alguns momentos ou com o algoritmo da multiplicação armado mentalmente, ou com o acréscimo do zero ao final do número anunciado, conforme ilustra o excerto a seguir:

> P: Como que dá pra fazer de cabeça cinqüenta e oito vezes cem?
> MA: Soma ou fazer a conta na cabeça. Fazer oito vezes zero (pausa) zero. E aí você vai indo, vai descobrindo quanto vai dar.
> P: A MA disse que ela faz de cabeça, ela arma a continha, o algoritmo na cabeça. Agora, além de fazer de cabeça, armar a continha na cabeça, o que mais eu posso fazer pra descobrir cinqüenta e oito vezes cem? [...]
> LT: Você pode pegar os dois zeros do cem e colocar no número, que vai dar o resultado.
> P: Os dois zeros e colocar no cinqüenta. Por que você pode fazer isso LT?
> LT: Porque vai dar o mesmo resultado. Você tira os dois zeros e coloca naquele lado. É como se você pegasse e multiplicasse.

A reprodução mental do algoritmo da multiplicação parece estar associada à mobilização dos seguintes teoremas em ação:

- *Para identificar o número formado por uma quantidade de dezenas basta multiplicar por dez.*
- *Para identificar o número formado por uma quantidade de centenas basta multiplicar por cem.*

Cabe ressaltar que o acréscimo do zero ao final do número foi uma estratégia bastante recorrente, que gerava um resultado correto, mas que necessitava ser compreendido por alguns alunos.

> P: [...] Quero saber: quarenta e cinco dezenas formam que número? [...] ML, [...] consegue descobrir qual é?
> ML: Quatrocentos e cinqüenta.
> P: Por que quatrocentos e cinqüenta?
> ML: Porque vai aumentando os zeros.
> P: Como assim, explica pra mim?
> ML: Ta o quarenta e cinco, não pode ser quarenta e cinco, tem que colocar um zero, pra ficar quatrocentos e cinqüenta.
> P: Por que tenho que colocar um zero?
> ML: Pra ficar quatrocentos e cinqüenta.
> [...]
> LC: É porque é igual ao cinqüenta. O cinqüenta não é cinco vezes dez, só precisa aumentar o zero. É igual ao quarenta e cinco.
> P: Tem que fazer o que então?
> LC: Só precisa colocar um zero.
> P: Porque só um zero? Por que não pode ser dois?
> LC: Porque aí ficaria quatro mil e quinhentos.
> P: Por que tem que ser só um zero?
> LC: Não sei!

É possível perceber pelo excerto que os alunos sabem a quantidade de zeros que devem acrescentar ao número para obter o resultado correto, talvez porque tenham resolvido atividades onde esse conhecimento é solicitado. Contudo, não conseguem explicar os motivos que o levam a inserir aquela determinada quantidade. Reinvestimos nessa questão até que conseguíssemos atingir uma explicação que extrapolasse o emprego da regra e que fosse compreendida pela classe.

> JL: Eu acho que é porque você faz quarenta e cinco vezes dez que dá quatrocentos e cinqüenta, né?
> P: Mas por que quarenta e cinco vezes dez?
> JL: Porque a centena tem dez.
> P: A centena?!
> JL: A dezena representa dez.
> P: Então, para eu descobrir um número formado por dezenas eu multiplico o número por dez.

Nesse momento é possível perceber que anunciamos precocemente um teorema em açãoque ainda estava em processo de construção (*Para identificar o número formado por uma quantidade de dezenas basta acrescentar um zero à direita da quantidade anunciada)* e, em seguida, ainda induzimos os alunos a buscar outros relacionados ao número formado por uma quantidade de centenas e milhares.

P: [...] E se fosse centena JL?
JL: Eu multiplico por cem.
P: E se fosse unidade de milhar CA?
CA: Multiplicaria por mil.
P: Todo mundo concorda com isso?
A: Sim.

Todavia, sabemos que assimilar e reconstruir uma informação exige, por um lado, que o indivíduo consiga aplicá-la em outras situações e por outro lado, que haja tempo para essa reconstrução (VERGNAUD, 1990). Essa afirmação pode ser ilustrada no trecho a seguir, que mostra GV logo após o diálogo ocorrido acima.

P: Então vamos lá GV, que número é formado por cinqüenta e oito centenas?
GV: (silêncio)
P: (Escrevo no quadro para que todos visualizem cinqüenta e oito centenas) Uma perguntinha antes: uma centena é igual a quantos?
GV: Igual a cem.
P: Então, se uma centena é igual a cem, cinqüenta e oito centenas é igual a que número?
GV: (silêncio).

Podemos observar que a informação trazida por JL e CA não fez sentido para GV, que não conseguiu emitir nenhuma resposta ao questionamento proposto naquele momento e nem após oito sessões, quando retomamos a atividade. Uma explicação para isso talvez esteja relacionada com a seguinte afirmação:

FN: Ao invés de multiplicar, porque tem gente que não sabe a tabuada direito, dá pra fazer o dez. O dez não tem um zero? Aumenta um zero.

Os teoremas em ação que propõem que para identificar o número formado por uma quantidade de dezenas basta acrescentar um zero à direita da quantidade anunciada e que para identificar o número formado por uma quantidade de centenas basta acrescentar dois zeros à direita da quantidade anunciada ainda é pouco utilizado por alguns alunos. Uma explicação para isso talvez seja realmente a dificuldade de operar corretamente a multiplicação necessária para obter o resultado esperado, como afirmou FN. Diante disso, alguns alunos buscam estratégias alternativas, mas que se mostram ineficientes quando exigem uma quantidade considerável de repetições, como ilustra o trecho a seguir:

P: ML, sessenta e uma centenas quanto dá?
ML: (silêncio). Não sei!
P: Você tentou fazer o que pra descobrir.

> ML: Eu fui pensando assim. Uma centena é cem, aí eu fui pensando assim: cem duzentos...
> P: Você foi contando de cem em cem?
> P: Só que tem que contar quantas vezes de cem em cem?
> ML: (silêncio)
> P: Quanto TH?
> TH: Sessenta e uma vezes.
> P: É fácil contar de cem em cem sessenta e uma vezes?
> A: Não!
> P: Mas se eu contar de cem em cem dá certo?
> A: Dá!
> P: Dá, mas vai demorar muito. Além de contar de cem em cem, ML e TH, o que mais eu posso fazer? Contar de cem em cem dá certo, mas o que eu posso fazer pra ser mais rápido?
> TH: Multiplicar.
> P: Então multiplica TH!
> TH: Seiscentos e dez.
> P: Tem que multiplicar por cem ou por dez?
> TH: Tanto faz!

Verificamos que TH sem conseguir uma explicação plausível para a pergunta, tentando encerrar o assunto, afirma que tanto faz multiplicar por cem ou por dez, talvez porque não tenha tido tempo para assimilar e reconstruir essa informação. Diferentemente do que ocorria com outros alunos conforme pontuamos anteriormente e como ilustra este excerto:

> P: GF, quanto dá sessenta e uma centenas?
> GF: Seis mil e cem.
> P: Como você fez?
> GF: É só aumentar dois zeros.

Quando ouvimos essa afirmação imediatamente a relacionamos com a multiplicação por cem e explicitamos isso para a turma: *É só multiplicar por cem!* Ao percebermos nossa precipitação tentamos devolver a situação a GF para que explicasse porque era preciso colocar os dois zeros.

> GF: Eu coloquei os dois zeros do cem.

A resposta de GF confirma nossa inferência e, analisando as formulações e validações apresentadas por ele ao longo das sessões, acreditamos que não foi somente nossa intervenção que produziu essa explicação.

Em relação à atividade 6, que corresponde à identificação da quantidade de dezenas existente no número anunciado, uma estratégia incorreto que havíamos previsto ocorreu. Os alunos ao serem questionados sobre a quantidade de dezenas dos números identificaram o algarismo correspondente à ordem das dezenas como sendo a quantidade solicitada, talvez, devido à segmentação linear do ensino relacionado à composição e decomposição de quantidades que condicionam uma leitura unilateral e segmentada da numeração escrita (TEIXEIRA, 2002).

> P: Então, me explica uma coisa CM. O número cento e vinte e cinco tem quantas dezenas?
> CM: Hummm!Duas!
> P: Duas?! Por que CM ?
> CM: Porque o dois tá na dezena.
> P: O dois tá na dezena, então o número tem duas dezenas?
> CM: Ahamm!

O emprego dessa estratégia incorreta ocorreu apenas quando iniciamos a exploração da atividade. Logo após, outras estratégias começaram a aparecer, como contar de dez em dez até chegar ao número anunciado. Porém, seu uso limitou-se aos números pequenos, mostrando-se ineficaz quando o número anunciado era grande.

> P: TH, o número cem tem quantas dezenas?
> TH: Dez.
> P: Como você descobriu?
> TH: Eu contei de dez em dez: dez, vinte, trinta, ... cem.
> P: Essa estratégia funciona sempre?
> A: Sim!
> FN: Depende.
> P: Depende do que FN?
> FN: Se for contar de unidade ou se for contar de centena de milhar, de milhão, de bilhão...
> P: Se for, vamos supor cinqüenta mil e quinhentos, dá pra contar de dez em dez para saber quantas dezenas tem?
> A: Não!
> FN: Dá, mas vai demorar muito.

Essa percepção apareceu na sessão seguinte quando retomamos a atividade:

> CA: Mas se na prova a gente for fazer isso e o número for dez mil ou um milhão, vai demorar muito.
> P: Vocês ouviram o que o CA falou? Repete CA.
> CA: Se ele for fazer isso na hora da aula, com números mais altos, tipo dez mil ele vai ficar meia hora!
> P: Olha! Com número pequeno isso funciona. Agora se eu pegar um número muito grande como o CA ta falando, não vai funcionar. Não é que não funciona, funciona. Só que vai demorar mais tempo pra descobrir.
> CA: Tem que descobrir uma coisa mais fácil.

Essa estratégia mais fácil apareceu e resulta no seguinte teorema em ação: *"Para determinar a quantidade de dezenas de um número despreza-se o último algarismo da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa a* *quantidade de dezenas”*, contudo, desvinculada de compreensão, como ilustra o trecho seguinte:

> P: GJ, e aí, o número cento e vinte e cinco tem quantas dezenas?
> GJ: Doze dezenas e cinco unidades.
> P: Explica pra gente de onde você encontrou doze dezenas. Como você chegou em doze dezenas?
> GJ: Eu tirei o cinco, fiz cento e vinte e contei de dez em dez.
> P: Por que você tirou só o cinco?
> GJ: Pra ficar cento e vinte e daí contar de dez em dez.

Após investirmos nessa discussão o fato de desprezarem o último algarismo da direita para descobrir quantas dezenas possui um determinado número passou a fazer sentido, afinal esse algarismo está localizado na ordem das unidades.

> P: GV, explica primeiro o que o GJ falou? Por que você acha que ele tirou só o cinco pra fazer a contagem das dezenas do número cento e vinte e um?
> GV: Não sei explicar.
> P: JR e você?
> JR: Você ta pedindo as dezenas né? E o cinco tá na ordem das unidades.

Tal explicação foi complementada em uma outra sessão destinada à exploração dessa atividade: despreza-se a unidade porque ela não forma dezena.

> P: [...] Mas é aqui FN, em cinqüenta mil e quinhentos. Quantas dezenas têm nesse número?
> FN: Cinco mil e cinqüenta.
> P: Como você descobriu que tem cinco mil e cinqüenta?
> FN: Eu tirei o zero da unidade e peguei esses quatro números.
> P: Por que você tirou esse zero da unidade?
> FN: Porque é unidade, não dá dezena.
> P: Os outros formam dezena?
> FN: Sim.
> P: Somente quem não forma dezena?
> A: A unidade.

Essa estratégia parece satisfazer a necessidade apontada anteriormente por CA, quando afirma ser preciso encontrar algo mais fácil para ser usado em qualquer tamanho de número, como ilustra o excerto:

> P: Essa estratégia serve pra qualquer tipo de número, pequeno e grande?
> ME: Não sei!
> JL: Se tem alguma diferença? Não tem nenhuma diferença. Ali estão todas as casas e o último zero vale como unidade. O MR desprezou a unidade e o último zero vale como unidade. Então, eles desprezaram a

> unidade e olharam pra frente. Não tem nenhuma diferença. Isso funciona pra qualquer número.

Devido as discussões decorrentes dessa atividade, quando iniciamos a exploração da atividade 7 que solicitava identificar a quantidade de centenas existentes nos números anunciados, aquele estratégia incorreto, relacionado ao algarismo correspondente à ordem das centenas como sendo a quantidade de centenas do número, não apareceu. Porém, a estratégia de contar de 100 em 100 para descobrir a quantidade de centenas do número se fez presente, como no caso das dezenas que a contagem era de dez em dez.

> P: [...] quantas centenas tem o número duzentos?
> TH: Dois.
> P: Como você descobriu que tem dois?
> TH: Porque cem mais cem dá duzentos.

O uso dessa estratégia permaneceu até o final da sessão, quando foi possível observar indícios do teorema em ação usado para determinar a quantidade de dezenas, usado agora para determinar a quantidade de centenas de número. Tal teorema em ação propõe desprezar os dois últimos algarismos da direita do número anunciado para determinar a quantidade de centenas, representada pelos algarismos restantes.

> P: Quantos grupos de cem tem em novecentos e cinqüenta? [...]
> GV: silêncio!
> P: MR?
> MR: Nove.

Contudo, ao solicitarmos que explicitasse o pensamento que a conduziu a tal resposta, verificamos que MR ao invés de identificar a quantidade de centenas do número anunciado usando o teorema em ação, parece transformar o número em centenas exatas e proceder a contagem de cem em cem:

> MR: É que eu fui contando de cem em cem, até novecentos.
> P: Por que você não pegou o cinqüenta pra contar?
> MR: Porque o cinqüenta não tinha nada pra fazer com ele.

Ao retomarmos essa atividade, na sessão seguinte, essa estratégia que traz indícios do uso desse teorema em ação manifestou-se novamente de maneira discreta.

P: TH, novecentos e cinqüenta tem quantas centenas?
TH: (silêncio) Nove?!
P: Como você descobriu? Explica pra gente?
TH: Porque centena é de cem.
P: Centena é grupo de cem e aí?
TH: Mas só que novecentos tem nove.
P: Novecentos tem nove centenas? O cinqüenta não entra como centena? O número é novecentos e cinqüenta. O cinqüenta eu não conto como centena também?
TH: É dezena. Cinqüenta é dezena.
P: Por que eu não posso contar como centena?
TH: Porque não é cem!

Contudo, esse começou a aparecer com mais precisão em vários momentos da sessão. Em alguns casos a reprodução das regras ensinadas pela escola, parecia ganhar compreensão, como ilustra o excerto a seguir:

P:[...] Quando eu vou trabalhar com a centena...
JL: Eu tenho que descartar as outras unidades.
P: Eu descarto as outras ordens e trabalho só com a centena pra frente. Fala FN.
FN: Isso dá pra fazer com a unidade, dezena, centena, milhar e vai indo (pausa). Porque a unidade pega do primeiro número pra frente
P: [...] Como FN? Olha o número aqui (registro no quadro 1333). [Ele] tem quantas unidades?
FN: Mil trezentos e trinta e três unidades.
P: Explica para a gente como você chegou nesse resultado.
FN: Eu peguei do primeiro número pra frente [...].
[...] P: A unidade não ta só aqui? (mostro o três da unidade)
FN: Tá! (pausa) Não! Mas dá pra ir contando de um em um até chegar lá.
P: A unidade está onde?
FN: Em tudo.
P: Quantas dezenas têm o número mil trezentos e trinta e três FN?
FN: Cento e trinta e três.
P: Como você descobriu?
FN: Porque eu fiz a mesma coisa. Como dezena é dez, eu peguei assim (pausa) E como se eu pegasse (pausa) Eu pego e descarto o número que tá na unidade. Aí eu conto pra frente.

Apesar de ser constantemente utilizada, sempre acompanhada de uma explicação, alguns alunos ainda não conseguiram entender o funcionamento da estratégia, ou até mesmo utilizá-la, como ilustra o excerto a seguir:

P: Vamos lá, o último. FS mil e quinhentos e sessenta tem quantas centenas?
FS: Não sei!
P: O que a FN explicou pra gente? Como que eu faço pra descobrir quantas centenas tem o número? Ele explicou uma regrinha ali. Ela deu uma dica. GV, e aí? mil e quinhentos e sessenta têm quantas centenas?
GV: Quinze.
P: Como você descobriu? Explica pra gente.
GV: Ah, não sei explicar!
P: FS, a GV disse que em mil e quinhentos e sessenta tem quinze centenas. Você concorda?

> FS: (silêncio) Não sei!

Após três sessões, retomamos a atividade, na tentativa de verificar a estabilidade do teorema em ação usado para descobrir a quantidade de dezenas e centenas dos números anunciados (*Para determinar a quantidade de dezenas de um número despreza-se o último algarismo da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa a quantidade de dezenas).* Entretanto, percebemos que para alguns alunos, dentre eles GV e FS, as dificuldades permaneciam.

> P: FS, quantas dezenas existem em oitocentos e vinte?
> FS: (silêncio)
> [...]
> P: Como que eu faço pra descobrir quantas dezenas tem no número? O número é oitocentos e vinte? [Fala GV].
> GV: Vinte?!
> (Enquanto registro o número no quadro ela faz uma leitura de acordo com as ordens, como se quisesse localizá-las no número).

Podemos observar que GV, ao ser questionada sobre a quantidade de dezenas do número parece tentar identificá-la por meio do algarismo correspondente à ordem das dezenas, demonstrada pela leitura unilateral e segmentada da numeração escrita (TEIXEIRA, 2002). Cabe ressaltar que, depois que a atividade foi explorada e discutida pelos colegas, propusemos um novo número e GV conseguiu mobilizar o teorema em ação com êxito. Porém, quando a pergunta extrapola a aplicação é possível perceber suas limitações e não compreensão do mesmo.

> P: Então, pra descobrir quantas dezenas tem o número eu desprezo a unidade, porque ela não forma dezena e leio o que ficou do número. Então, vamos lá! GV, quinhentos tem quantas dezenas?
> GV: (silêncio) cinqüenta?!
> P: Você fez o que GV?
> GV: Eu tirei o zero da unidade.
> [...]
> P: GV, mil e quinhentos tem quantas dezenas?
> GV: (silêncio) cento e cinqüenta?!
> P: O que você fez GV?
> GV: Desprezei o zero da unidade.
> P: Agora uma pergunta GV.[...] Essa regra de tirar a unidade vale pra qualquer número?
> GV: Não! Ah, eu não sei!

A estabilidade do teorema em ação também não ocorreu para TH, que parecia ter demonstrado compreensão ao usá-lo como destacamos anteriormente.

Porém, após o intervalo de três sessões oscila em confirmar a resposta fornecida, mesmo estando correta.

> P: TH, oito mil quinhentos e noventa e dois.
> TH: silêncio. Não sei! (Ela escreve o número na perna com os dedinhos, como se quisesse apoiar o pensamento).
> P: Não sabe por que TH? O que ta faltando pra você?
> TH: Eu não consigo decorar o número;
> P: Se eu escrever pra você te ajuda? E agora, ajuda? (Pergunto após registrar o número no quadro).
> TH: Oitocentos e cinqüenta e nove? (O registro faz com que a regra seja aplicada rapidamente sem problema).
> P: Eu quero saber quantas dezenas tem? Têm quantas?
> TH: (silêncio). Não sei!
> P: Qual é a regra que o MR ensinou pra gente?
> TH: Tirar a unidade.
> P: E aí? Da pra aplicar aqui? Dá pra aplicar essa regra aqui?
> TH: Não!
> P: Por que você acha que não?
> TH: Porque não tem zero. Porque aqui tem o dois.

É possível perceber que a estratégia permeada pelo teorema em ação proposto foi, por um lado, memorizada por TH sem compreensão e, por outro, relacionado ao fato do número terminar em zero, o que talvez esteja atrelado às últimas discussões realizadas no decorrer das sessões, nas quais os números anunciados terminavam em zero.

Diante da afirmação de TH foi preciso retomar com cautela a atividade, para que essa estratégia pudesse ser ampliada, pois a dúvida apresentada poderia estar sendo compartilhada por outros alunos.

> P: JD, e aí?
> JD: Oitocentos e cinqüenta e nove. Porque o dois tá na unidade.
> P: Então, me diz uma coisa. Qualquer número que tiver aí, um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, eu desprezo ele sempre?
> JD: Ahãm! Porque aí é unidade.
> P: Aí eu faço o que?
> JD: É só tirar ele e fica Oitocentos e cinqüenta e nove.
> P: TH, GV e FS conseguiram entender a lógica, a regra dos meninos? Independente do algarismo que tiver na unidade, ele sempre vai ser desprezado. Por que JD? Repete.
> JD: Porque aí ta na unidade.
> P: E se eu quero saber dezena eu faço o que?
> JD: Eu tiro a unidade e leio partir da dezena.

Parece que JD consegue mobilizar com compreensão o teorema em ação que propõe desprezar o último algarismo da direita do número anunciado para determinar a quantidade de dezenas. A partir disso, JL apresenta uma dúvida: se o número terminar em zero não é preciso desprezar a unidade, como propõe a estratégia, pois a unidade já é inexistente. JD, intrigado com a fala de JL, ao ser solicitado que explicasse a estratégia adotado, tenta solucionar a dúvida:

> JD: É lógico que vai funcionar porque o dez vai tirar o zero e vai ficar uma dezena.

Ao final das discussões desencadeadas pela mobilização do teorema em ação anunciado por JD ouvimos a seguinte explicação, que parece expressar a compreensão de que para obter a resposta de um problema existem vários caminhos a serem seguidos:

> MA: Isso que o JD falou (pausa) como vou dizer: é um modo de descobrir.

Quanto às atividades 8 e 9, que buscam descobrir o sucessor e o antecessor de números próximos aos "nós", anunciados aos alunos, percebemos que a dificuldade parece aumentar quando a passagem solicitada envolve grandes números. Em relação a isso, observamos duas respostas incorretas, ocorridas em momentos distintos, relacionadas ao mesmo número.

> P: GV, depois de nove mil novecentos e noventa e nove, qual é o próximo número?
> GV: Nove mil novecentos e noventa e nove?! Nove mil e cem?!

Podemos deduzir que GV realizou uma decomposição do número anunciado em duas partes: 1) nove mil; 2) novecentos e noventa nove. Porém, ao invés de somar mais um ao novecentos e noventa e nove, o transforma em noventa e nove, chegando em nove mil e cem. Estratégia igual parece ter sido usada por FS, na sessão seguinte quando retomamos a atividade.

> P: [...] qual o número que vem depois de nove mil novecentos e noventa e nove?
> MR: silêncio
> P: Não sabe?
> MR: To pensando.
> P: Posso pedir ajuda pra alguém MR?
> MR: Não(pausa) Não sei!
> P: FS, qual é o próximo número?
> FS: Nove mil e cem?!

Diante das respostas semelhantes de GV e de FS, tivemos duas estratégias diferentes, advindas dos colegas, que conduziram ao acerto. A primeira nos permite inferir que a criança armou mentalmente o algoritmo ensinado pela escola, baseando-se talvez no seguinte teorema em ação: *Para saber o número que vem depois basta somar mais um ao número anunciado.*

> P: Então, qual seria o próximo número depois de nove mil novecentos e noventa e nove?
> ML: Dez mil.
> P: Como você descobriu?
> ML: Porque depois do nove vem o dez né? Aí eu coloquei um dez e fui pensando nos zeros.
> P: Espera lá. Você disse que disse que depois do nove vem o dez, mas aqui tem um monte de nove. Você começou por qual nove?
> ML: O primeiro.
> P: Você fez o que com ele?
> ML: Coloquei um zero embaixo, aí eu coloquei outro zero no outro nove, outro, outro e aí eu coloquei o um.

Parece que ML tenta usar uma outra estratégia, mas "[...] abandona o processo de desenvolvimento de algoritmos ditos espontâneos, abdicando do pensamento autônomo e criativo, para, então, filiar-se cegamente aos algoritmos impostos pela escola [...]" (MUNIZ, 2006, p. 164), talvez induzida pela nossa intervenção: *Você disse que disse que depois do nove vem o dez, mas aqui tem um monte de nove. Você começou por qual nove?*

A segunda estratégia tem origem na observação dos algarismos que compõem o número anunciado e tem por princípio o seguinte teorema em ação: *como todos os algarismos terminam em nove, basta alterar o primeiro e acrescentar zero nos demais:*

> P: Como você chegou ao dez mil?
> JD: Eu vi que tinha quatro nove, não tinha como colocar outro nove ali. Aí eu peguei e depois do nove vem o dez, aí ficou dez mil.
> P: Você descobriu dez mil de uma vez só?
> JD: Não!
> P: Explica passo a passo para a gente entender?
> JD: Eu peguei o nove da frente, transformei em dez. Porque do nove vem o dez e não tem como colocar outro nove ali.
> P: E aí?
> JD: Aí eu peguei aqueles nove e coloquei zero.

Essa estratégia acabou sendo recorrente para os demais alunos, inclusive para GV, que havia demonstrado dificuldade na realização da atividade em outros momentos, mas que agora realiza os cálculos propostos com rapidez e eficiência.

P: GV, qual o próximo número depois de setenta e nove mil novecentos e noventa e nove?

GV: Oitenta mil.

P: Como você fez para chegar em oitenta mil?

GV: Eu usei a prática do JD.

Contudo, quando propusemos um número que possui o algarismo nove em mais de uma ordem, diferente dos outros anunciados (9 999, 19 999 e 79 999), GV tenta aplicar a mesma estratégia, sem perceber que essa não se aplica ao número anunciado, sendo considerada uma proposição falsa para aquela situação.

P: Então GV, depois de quinze mil setecentos e oitenta e nove quem vem depois?

GV: (Silêncio). Quinze mil setecentos e oitenta e nove?

P: O próximo é?

GV: É (pausa) dezesseis mil setecentos e setenta?!

Após ouvirmos essa resposta, a registramos no quadro juntamente com o número anunciado, fato que pode ter auxiliado GV a perceber o que havia feito e a emitir uma nova resposta.

P: Explica para mim como você fez. Não quero saber se tá certo ou errado. Quero saber como você pensou para chegar a dezesseis mil setecentos e setenta.

GV: Eu peguei (pausa) e o maior é dezesseis

P: Você pegou o quinze e transformou em dezesseis.

GV: É! O oitenta e nove eu transformei em setenta.

P: Olhando o registro, você acha que ta certo?

GV: Não sei!

P: Que número vem depois do nove?

GV: Dez.

P: Do nove pro dez aumentou quantos GV?

GV: Um!

P: Aumentou um. Então, depois de quinze mil setecentos e oitenta e nove tem que aumentar quantos?

GV: Mais um.

P: Então, qual é o próximo número?

GV: Noventa?

P: Onde vai o noventa?

GV: Ali é noventa (mostrando no oitenta e nove).

P: Qual tá certo agora?

15 789

16 770 **15 790**

GV: O segundo.

É possível observar que o uso do registro escrito ajudou GV no raciocínio e na inferência e, principalmente a planificar e controlar as ações que não dominava completamente (VERGNAUD, 1990).

Verificamos que a dificuldade em realizar as trocas, tanto para descobrir o sucessor (atividade 8) como para descobrir o antecessor (atividade 9), ocorreu, quando o número anunciado correspondia, por um lado, a números próximos aos "nós" (LERNER e SADOVSKY, 1996), como por exemplo 9.999, 15. 789 e, por outro lado, a números com dezenas de milhar redondas – 11.000, 12.000. Em ambos os casos isso acontecia quando o número de trocas ultrapassava quatro ordens. Acreditamos que em atividades escritas essa dificuldade não apareceria porque os alunos poderiam compor o sucessor ou o antecessor alterando apenas o valor dos algarismos sem precisar reter na memória o número obtido para em seguida, verbalizá-lo, como ocorria nessas atividades da seqüência.

Cabe ressaltar que, apesar de darmos prioridade para as mensagens orais, acreditamos que a presença do registro auxilie o pensamento dos alunos quando os números anunciados são grandes. No caso de números pequenos a correção ocorre sem esse apoio, pois a memória é capaz de armazenar a informação e mobilizar os conhecimentos necessários para alterar a resposta emitida, como ilustra o fragmento a seguir:

> P: Quem vem antes de quinhentos?
> GV: Quinhentos e noventa e nove.
> P: Quinhentos e noventa e nove? Se o número vem antes tem que ser maior ou menor?
> A: Menor!
> GV: Quatrocentos e noventa e nove.

Isso pode não acontecer com os números grandes, talvez porque quando temos que lidar com esses no dia-a-dia recorremos ao papel ou a calculadora, para apoiar o pensamento. Por isso, em alguns casos, registramos no quadro esses números até que nas últimas sessões destinadas a exploração desse bloco alguns alunos começaram a questionar essa prática, como verificamos no trecho seguinte:

> JR: Espera aí! (pausa) Rapidão, cento e o que?
> P: Cento e noventa e nove mil oitocentos e oitenta e nove.
> JR: Tá, espera aí! Tem como você escrever ali?
> RF: Aí fica muito fácil.
> JR: É porque ta confundindo minha cabeça.
> P: Por que você tá confundindo?
> JR: Por que você tá pedindo centena, aí você falou o número é(pausa)
> P: Cento e noventa e nove mil oitocentos e oitenta e nove.
> JR: Aí eu to me confundindo com as duas centenas, a do mil lá..
> P: RF, por que não pode escrever?
> RF: Aí fica muito fácil.

Esperamos que ao longo da aplicação da seqüência os alunos consigam realizar todas as atividades propostas oralmente, usando o registro escrito apenas nos cálculos intermediários, quando necessário e consigam mobilizar as propriedades dos números e das operações com compreensão.

4.2 – Bloco aditivo: atividades propostas

O segundo bloco de atividades é composto por atividades aditivas, cujo tratamento implica adições ou subtrações e tem por objetivo: investigar o conhecimento sobre as propriedades das classes e ordens da escrita do Sistema de Numeração Decimal (composição e decomposição aditiva) e das operações envolvidas (comutatividade, associatividade) e possíveis teoremas em ação mobilizados pelos alunos ao desenvolver estratégias para agilizar o cálculo mental dos fatos fundamentais da adição e da subtração.

A atividade 10, também denominada tabela de adição, permite identificar as relações que os alunos estabelecem entre os números de 1 a 9, possibilitando a mobilização de propriedades da adição.

10. Calcule as somas:

1+7	4+8	1+9	2+7	6+4	7+8
4+6	5+7	4+9	8+3	8+5	6+5
2+9	9+9	7+6	7+4	8+2	9+7
9+6	9+3	5+6	3+7	6+7	9+8

Exploramos nessa atividade todas as combinações possíveis para as somas dos números de 1 a 9, pois esperamos que os resultados da tabela de adição fiquem disponíveis em momentos posteriores e se tornem automatizados, agilizando os cálculos que envolvam essas somas.

É possível que os alunos recorram a estratégias do tipo:

- realizar a sobrecontagem com o auxílio dos dedos, por um lado, pelo fato dos números serem pequenos e, por outro, porque os dedos estão incorporados nas práticas de contagem;
- recorrer à propriedade comutativa e contar a partir do número maior, pois relacionam-se ao “princípio da economia”:

4+8
8+4=12

- decompor um dos valores visando obter uma dezena, porque a base do sistema é dez e os agrupamentos envolvendo essa base facilita a adição:

8+4
8+(2+2)
(8+2)+2
10+2=12

8+4
(6+2) +4
2+ (4+6)
2+10=12

- recorrer a compensação, em torno de uma dezena e a conservação da quantidade, sendo esse último aspecto necessário para obter o resultado esperado:

8+4
(8+2)+4
10+4
14-2=12

Além das estratégias listadas, os alunos podem recorrer a resultados disponíveis em seu repertório para calcular somas da tabela de adição. Por exemplo, para obter 6+5, poderá recorrer à soma de 5+5, acrescentando 1 ao resultado 10.

Supomos que os reagrupamentos em torno da decomposição em duas parcelas iguais, dobro, poderão ser mobilizados com maior freqüência para que a partir deles apareçam as composições ou as decomposições para se obter o resultado desejado.

A atividade 11 está relacionada com somas entre os algarismos 1 a 9 para obter dez, retomando o princípio da base dez.

11. Complete para chegar a dez:

3	8
7	4
5	2
1	6

Supomos que os alunos obtenham os resultados, por um lado, por meio da sobrecontagem com o auxílio dos dedos (ex. 3 para chegar em 10) e, por outro, já tenham esses resultados disponibilizados na memória (ex. 8 para o 10). Acreditamos que quando a atividade iniciar com números maiores (ex. 7 para chegar a 10), os resultados serão emitidos com rapidez mesmo com o auxílio da sobrecontagem. Isso porque, nesses casos, essa estratégia tende a ser mais econômica do que em contagens a partir de números menores, como no caso do 2 para chegar a 10.

Outra estratégia possível compreende recorrer à subtração com o auxílio das duas mãos abertas de modo que seja possível obter o resultado retirando a quantidade anunciada.

As atividades 12 e 13 abordam questões relacionadas à formação de quantidades inteiras. Nessa atividade o aluno deve em primeiro lugar identificar qual é a dezena ou a centena superior[4] e em seguida encontrar o valor que falta.

Na atividade 12, os primeiros números escolhidos atingem somente a ordem das dezenas. Isso porque queremos identificar se os alunos conseguem chegar à dezena superior, sem que o aparecimento de outras ordens possa interferir na resolução, pois alguns alunos ainda podem ter dúvida em localizar a dezena superior quando o número possuir outras ordens.

12. Complete para chegar à **dezena superior**:
O que devemos fazer para chegar a 20 a partir de 14?

25	125	993
56	345	
32	873	
47	491	

13. Complete para chegar à **centena superior**:
O que devemos fazer para chegar a 400 a partir de 398?

450	2128	
235	5450	
1235		1630
128	2528	

Dentre as estratégias de resolução que conduzirão ao acerto nessa atividade, os alunos podem primeiramente somar uma dezena ao número dado para descobrir qual a dezena superior e a partir dessa informação realizar a sobrecontagem com os dedos para descobrir o que fazer para obtê-la a partir do número dado. Os alunos poderão, por exemplo, mobilizar os seguintes teoremas em ação:

- *Para descobrir a dezena superior é preciso acrescentar mais uma dezena ao número dado e em seguida, acrescentar ao valor das unidades desse número o que falta para atingir a dezena superior exata.*

[4] A dezena inteira compreende o menor número formado por uma quantidade exata de dezenas e o maior número que o número dado e a centena inteira compreende o menor número formado por uma quantidade exata de centenas e o maior número que o número dado.

Por exemplo*: se* 14+10= 24, *então* a dezena superior é 20 e 14 para chegar em 20 basta acrescentar 6.

- *Para descobrir quanto falta para chegar à dezena superior, basta subtrair de uma dezena os valores dos algarismos da ordem das unidades ou completar os valores desses algarismos para obter uma dezena.*

Por exemplo: dado o número 14, subtrai-se 4 de uma dezena, obtendo 6. Então, 14 para chegar a dezena superior basta acrescentar 6.

Outra estratégia que poderá conduzir ao acerto na atividade 12 é realizar a sobrecontagem sem necessitar descobrir o valor da dezena superior ao número dado.

A escolha dos números da atividade 13 obedece a critérios semelhantes aos da atividade 12, considerando apenas que ao invés de dezena estamos utilizando centena.

Dentre as estratégias de resolução que conduzirão ao acerto nessa atividade podemos considerar as listadas anteriormente:

- realizar a sobrecontagem com os dedos em torno de agrupamentos de dez em dez para obter a centena superior
- fazer a soma de uma centena ao número para descobrir qual a centena superior e a partir dessa informação realizar a sobrecontagem em torno de agrupamentos de dez em dez.

A utilização de uma estratégia ou outra dependerá do tamanho do número anunciado e implicará na mobilização do seguinte teorema em ação:

- *Se ao acrescentar uma centena ao número dado é possível descobrir a centena superior, então basta completar o número dado para descobrir quanto falta para chegar à centena superior.*

Outra estratégia é subtrair de uma centena o número composto pela dezena e unidade do número dado ou completar essas ordens para obter uma centena. Nesse caso o teorema em ação verdadeiro que poderiam utilizar é o seguinte

- *Para descobrir quanto falta para chegar à centena superior, basta subtrair de uma centena os valores dos algarismos das dezenas e/ou unidades ou completar os valores desses algarismos para obter uma centena.*

As atividades 14 e 15 envolvem a contagem para frente e as atividades 16 e 17 relacionam-se a contagem regressiva com intervalos acima de dois, diferenciando-as das atividades 1 e 2, que solicitavam a contagem para frente e para trás de um em um e buscavam evidenciar a mudança de ordem dos números próximos aos “nós”. Isso provavelmente também pode aparecer, mas o objetivo principal de tais atividades é verificar se os alunos reinvestem as propriedades dos números e das operações utilizadas anteriormente (comutatividade, compensação, decomposição), apresentando estabilidade.

14. Conte de n em n, até ouvir o sinal, a partir de: (n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) 18 37 64 23 25 37 51	15. Conte de n em n, até ouvir o sinal, a partir de: (n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20, 30, 50, 100) 234 458 986 356 327
16. Faça contagem regressiva de n em n, até ouvir o sinal, a partir de: (n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) 45 32 74 38 64 65 52	17. Faça contagem regressiva de n em n, até ouvir o sinal, a partir de: (n=10, 9, 11, 20) 265 496 643 324 587 102 534

Os números anunciados para começar a contagem tanto para as atividades 14 e 15 como para as atividades 16 e 17 são números “quebrados”, pois como não realizaremos uma contagem exaustiva, tal escolha parece ser adequada para nos auxiliar, desde o início, na identificação do uso do cálculo mental refletido[5]. Acreditamos que iniciando com dezenas e centenas inteiras talvez demandasse um tempo maior para o aparecimento desse tipo de cálculo, haja vista que a contagem poderia se apoiar em resultados completamente memorizados e disponíveis imediatamente ou nas regularidades da seqüência dos algarismos (LETHELLIEUX, 2001).

Uma das estratégias prováveis de serem utilizadas nas atividades 14 e 15 é a realização da sobrecontagem com o auxílio dos dedos quando os intervalos de

[5] O cálculo refletido é aquele que o aluno não dispõe de um modelo padrão, de um algoritmo memorizado para efetuar o cálculo proposto, no qual se evidencia a presença de um método original e pessoal para encontrar o resultado (ERMEL, 1991).

contagem estiverem entre 3 e 9, pois com números maiores outras estratégias mais econômicas poderão surgir, como veremos a seguir .

Outra estratégia possível consiste em recorrer à propriedade associativa ou à decomposição do número visando obter uma dezena, tendo em vista que isso facilita o cálculo. No caso de contar de 3 em 3 a partir do 18, por exemplo, os alunos podem acrescentar 2 ao 18 para obter 20 e depois somar a quantidade restante, ou seja 20 + 1 = 21. Essa estratégia pode ser mais recorrente quando a soma alterar o valor da ordem das dezenas, agilizando o cálculo, pois em outros momentos algumas somas podem estar automatizadas:

21+3=24

$$\left.\begin{array}{l} 24+3=27 \\ 27+3=30 \\ 30+3=33 \\ 33+3=36 \\ 39+3; \end{array}\right\} \text{somas que talvez estejam automatizadas}$$

39+(1+2); (39+1)+2; 40+2=42

É possível encontrar alunos que percebam, durante o início da contagem, algumas regularidades existentes em cada intervalo, como por exemplo, na contagem de 5 em 5, quando o número anunciado for 14. Nesse caso, os números terminarão sempre em 9 ou em 4, alternando apenas o valor da dezena: 19, 24, 39, 44, 49, 54, 59 e assim sucessivamente.

Dentre as estratégias possíveis para a contagem de 10 em 10, por exemplo, os alunos podem somar sempre mais um a ordem das dezenas. Para isso devem compreender que, por um lado, somar sempre 10 ao número só altera o valor da dezena, permanecendo o mesmo valor para a unidade. Por outro, que o valor da centena só vai ser alterado quando a dezena chegar no valor 9.

Nas atividades 16 e 17 podemos observar estratégias atuando de maneira isolada ou integradas, tais como :

- retornar à dezena inteira e subtrair as unidades

74 - 3
70+(4-3)
70+1=**71**

- decomposições aditivas do número a subtrair tendo como critério o fato de gerar um número múltiplo do valor anunciado para n

Faça contagem regressiva de 6 em 6 a partir de 32

32-6
(20+12) -6
20 +(12-6)

20+6=26

- decomposições aditivas do número a subtrair e ligação com a passagem por um número inteiro de dezenas

71-3
71- (2+1)
(71-1) -2
70-2=68

- cálculos efetuados de maneira automatizada:

68 – 3= **65**
65 – 3 = 62

Nas atividades 18 e 19 os alunos devem retomar conhecimentos mobilizados na tabela de adição de maneira ampliada, pois trazem somas de números que contemplam a ordem das dezenas ou das centenas com números que contêm apenas a ordem das unidades. Tais escolhas permitem retomar propriedades já utilizadas em atividades anteriores.

18. Some números de dois algarismos com números de um algarismo ou vice-versa:

8+56	48+9	49+4	28+2
3+91	7+52	8+35	6+52
73+8	2+50	73+6	1+87

19.Some números de três algarismos com números de um algarismo ou vice-versa:

255+4	125+6	292+8	6+119
3+157	165+8	999+2	7+509
5+164	5+136	231+8	9+215

Dentre as propriedades dos números e operações que podem ser evidenciadas destacamos:

- “realizar a sobrecontagem com o auxílio dos dedos”;
- “recorrer à propriedade comutativa e contar a partir do número maior”;
- “decompor um dos valores visando obter uma dezena e aplicar em seguida a propriedade associativa”;
- “decompor um dos valores para obter um número redondo”
- “recorrer à compensação”;
- “calcular de maneira automatizada, sem consciência do caminho seguido”;

É possível que algumas dessas propriedades sejam combinadas durante a realização das atividades propostas. Para calcular, por exemplo, 7+52 é possível:

- "recorrer à propriedade comutativa e contar a partir do número maior";

52+7

- "decompor um dos números para obter um número redondo"

(50+2)+7
50+9=59

A atividade 20, também denominada tabela de subtração, visa, por um lado, identificar as relações que os alunos estabelecem entre os números de 1 a 20, possibilitando a mobilização de propriedades da subtração. Por outro lado, busca auxiliar na memorização de alguns resultados que poderão ser mobilizados nas próximas atividades, fato que justifica a escolha dos números apresentados.

20. Subtraia (tabela de subtração):

12-8	10-7	15-6
7-5	11-6	17-9
14-7	9-5	11-7
13-6	8-4	18-9
9-5	7-1	14-8
15-8	13-8	12-6

Dentre as estratégias possíveis, os alunos poderão usar a forma de completar o valor menor para obter o maior, por meio da sobrecontagem quando os dois números contiverem apenas a ordem da unidade. Por exemplo, para obter o resultado de 9-5, soma-se de um em um a partir do 5 até obter o valor 9 (5+1=6; 6+1=7; 7+1=8; 8+1=9).

Os alunos também podem calcular algumas das subtrações da tabela a partir de reagrupamentos em torno de uma dezena para que a partir deles se obtenha o resultado desejado, quando o valor do minuendo for superior a dez, mobilizando o seguinte teorema em ação:

- *Para descobrir o resultado da subtração, basta decompor o número do subtraendo em duas partes, de modo que uma contenha o mesmo valor da unidade expresso no minuendo. Em seguida, realizar as subtrações, sendo que a primeira compreende as unidades iguais.*

Por exemplo, para descobrir o resultado de 15-8, basta decompor o 8 em 5+3:

15-8
15-(5+3)
(15-5)-3
10-3=7

Na atividade 21 os alunos devem subtrair para chegar à dezena inteira inferior ao número dado e tem por objetivos recuperar o significado de dezena inteira inferior.

21. Subtraia para chegar à dezena inteira inferior ao número dado:
58 (Quanto subtrair do 58 para que chegue na dezena inteira inferior?)

1345	74	175
62	2687	174
47	45	1234

Nessa atividade, os alunos devem perceber que basta subtrair o valor da unidade mais uma dezena para obter a dezena inteira inferior ao número dado. Por exemplo, para chegar à dezena inteira inferior ao número 58, basta subtrair uma dezena e oito unidades, obtendo o número 40.

A atividade 22 contêm números no subtraendo formados apenas por unidades, de modo que os alunos realizem subtrações que possam exigir decomposições das dezenas do minuendo em unidades. Tal escolha se justifica em razão de os alunos poderem retomar resultados da tabela de subtração vistos anteriormente.

22. Subtraia:

85-3	74-9		12-5	54-6	
46-8		89-7	123-4	150-6	314-8

Neste caso, a escolha das estratégias adotadas para a resolução dependerá dos números propostos.

- Quando o algarismo da ordem das unidades do minuendo for maior que o expresso no subtraendo, os alunos podem recorrer à decomposição aditiva do minuendo para subtrair os valores da ordem das unidades, como por exemplo 85-3:

(80+5)-3
80+ (5-3)
80+2 = 82

- Quando o algarismo da ordem das unidades do minuendo for menor que o expresso no subtraendo os alunos podem, por um lado decompor o valor do minuendo, como no caso de 74-9:

(60+14)-9
60+(14-9)
60+5 = 65

Por outro lado, podem decompor o valor expresso no subtraendo, de modo que um dos valores seja igual ao da unidade do minuendo, da seguinte forma:

74-9
74-(5+4)
(74-4) -5
70-5=65

A atividade 23 contém números no minuendo que, por um lado, não necessitam de decomposições das dezenas em unidades e, por outro, possuem o valor da ordem das unidades ou o valor da ordem das dezenas semelhante ao expresso no subtraendo. Pretendemos com isso observar a presença de teoremas em ação que demonstram a percepção da regularidade existente na operação dos valores propostos.

23. Calcule a diferença

27 -22	98-91	377-53
79-75	231-21	376-46
358-48	264-34	418-13
850-30	280-30	376-32
570-80	332-12	925-23
357-37	605-35	647-33

Dentre as estratégias possíveis e que indicam a percepção da regularidade dos números anunciados, podemos observar que quando os valores expressos em alguma das ordens (unidade ou dezena) dos números envolvidos forem coincidentes, o zero ocupará o lugar desses valores no resultado. Isso permite a mobilização dos seguintes teoremas em ação:

- *Se os algarismos das dezenas são iguais, então basta subtrair as unidades dos números dados.*

27-22
(20+7) –(20+2)
7-2=5

- *Se os algarismos das unidades são iguais, então basta subtrair os algarismos das outras ordens dos números dados e colocar zero na ordem das unidades.*

264-34
200+(64-34)
200+(60-30)
200+30=230

- *Se os valores dos algarismos das dezenas e unidades do subtraendo são menores que os do minuendo, então o resultado da operação será sempre o valor do* *algarismo da centena do minuendo mais o valor obtido pela subtração dos outros algarismos dos números dados.*

Esses teoremas em ação podem vir acompanhados de propriedades mobilizadas em outros momentos, como por exemplo, a decomposição.

A atividade 24, relacionada à soma com duas parcelas, contém números com o zero nas ordens das unidades e/ou das dezenas em uma das parcelas ou nas duas e visa retomar as propriedades mobilizadas em atividades anteriores.

24. Somar (números de dezenas inteiras):

80+110	540+870	460+30	520+700
130+50	340+40	50+850	350+400

Dentre as estratégias possíveis para a atividade 24 os alunos podem desprezar o zero, retomando-o somente no resultado, anunciando a presença de dois teoremas em ação.

O primeiro teorema em ação propõe que se os valores dos algarismos das unidades dos números anunciados é zero, então basta somar os outros algarismos e acrescentar o zero à ordem das unidades. Já o segundo teorema em ação sugere que se o valor do algarismo da ordem das unidades e das dezenas de uma das parcelas é zero, então basta somar os outros e acrescentar, no resultado, o zero na ordem das unidades e/ou dezenas.

Podemos observar a mobilização das propriedades expressas em atividades descritas anteriormente. O uso de uma ou outra propriedade dependerá dos números envolvidos na operação. Dentre elas destacamos:

- "recorrer à propriedade comutativa", pois relaciona-se ao princípio da economia;

540+870	80+5422
870+540	5422+80

- "decompor os valores visando obter uma centena inteira", tendo em vista que a base do sistema é dez e os agrupamentos envolvendo essa base facilita os cálculos:

870+(510+30)
(870+30)+510
900+510=1410

- "decompor os valores em centenas, dezenas e/ou unidades", porque esses agrupamentos facilitam os cálculos:

(5420+2)+80	540+870
(5420+80)+2	(500+40) +(800+70)
5500+2=5502	(500+800)+(40+70)

1300+110=1410

A atividade 25 propõe somas com os algarismos das unidades inferiores ou superiores a 10 ou somas com os algarismos das unidades e das dezenas superiores a 10. A organização da atividade em três grupos interfere na escolha dos números, pois esses devem atender os critérios estabelecidos para cada grupo. A escolha dos números deve possibilitar o reinvestimento de estratégias mobilizadas anteriormente, visando verificar o nível de estabilidade dos mesmos.

25. Somar:
(Grupo 1: soma dos algarismos das unidades inferior a 10)

25+812	745+44
483+13	67+721

(Grupo 2: soma dos algarismos das unidades superior a 10)

645+38	56+245
854+26	336+37

(Grupo 3: soma dos algarismos das unidades e das dezenas superior a 10)

126+84	38+287
352+88	567+45

As atividades permitem a mobilização do seguinte teorema em ação:

- *Se apenas um dos números anunciados possui a ordem das centenas, então basta somar os valores dos algarismos das outras ordens e acrescentar ao resultado o valor correspondente a ordem das centenas.*

Dentre as estratégias que podem conduzir ao acerto é possível recorrer à decomposição dos números dados para obter valores redondos na dezena, depois realizar a soma desses valores e em seguida, acrescentar a esse resultado o valor da soma das unidades.

<u>Grupo 1</u>

483+13

(480+3)+ (10+3)

(480+10)+(3+3)

490+6 = 496

<u>Grupo 2</u>

854+26 =

(850+4) +(20+6)

(850+20)+(4+6)

870+10 = 880

Grupo 3

126+84

(120+6) + (80+4)

(120+80) + (6+4)

200+10=210

A atividade 26 traz subtrações que visam retirar centenas inteiras dos valores dados.

26. Subtrair de uma quantidade um número inteiro nas centenas: 325-100 1502-100 3028-100 370-200 302-300 652-400 1000-700 1000-300

Nessa atividade é esperado que os alunos lidem com os dois valores como se fossem redondos e somente ao final acrescentem a quantidade restante ao resultado. Nesse momento espera-se poder observar a mobilização do seguinte teorema em ação:

- *Se for pedido para retirar centenas inteiras do número dado, então basta lidar com os dois valores como se fossem números redondos e ao final acrescentar o valor desprezado.*

1502-100=

(1500+2)-100

(1500-100)+2=

1400+2=1402

Ressaltamos que podemos observar a mobilização de estratégias ligadas às propriedades dos números e das operações mobilizadas anteriormente, tais como a decomposição e a compensação.

4.2.1 – Bloco aditivo: dados coletados

Para que conseguíssemos realizar com tranqüilidade os dois blocos restantes (aditivo e multiplicativo) ampliamos nossos encontros com os alunos para três sessões semanais, negociando mais 15 minutos do horário da professora de História.

Sendo assim, em 2008, iniciamos no mês de março com a exploração da atividade 10, denominada tabela de adição, que permitia identificar as relações que os alunos estabelecem entre os números de 1 a 9 e a mobilização de propriedades da adição.

A aplicação da atividade 10 perpassou duas sessões, nas quais pudemos observar a presença de todas as estratégias previstas na análise *a priori*:

▪ realizar a sobrecontagem com o auxílio dos dedos, por um lado, pelo fato de os números serem pequenos e, por outro, porque os dedos estão incorporados nas práticas de contagem:

> P: ML, nove mais seis?
> ML: (silêncio) Quinze!
> P: ML, conta pra gente como que você chegou ao resultado quinze?
> ML: Eu fui somando.
> P: Somando como? De um em um?
> ML: Eu fui somando de um em um (mexe os dedos enquanto pensa nos resultados).

A estratégia de contar de um em um permanece no repertório de ML mesmo após ouvir os colegas, em várias sessões, usando estratégias mais econômicas como a compensação ou a decomposição para obter uma dezena inteira. Quando solicitamos que faça uso de algumas dessas propriedades afirma não conseguir, prevalecendo a sobrecontagem:

> P: ML, setenta e seis mais sete?
> ML: (Silêncio) Oitenta e três.
> P: Tem gente lá trás que não viu você fazendo. Você fez como ML?
> ML: Eu fui contando de um em um.
> P: Você consegue usar a estratégia do PE: completar o número para chegar à dezena inteira?
> ML: Não!

Isso reforça que a escolha de uma estratégia entre as diferentes estratégias apresentadas deve ser do aluno, que opta por uma em específico “[...] em função de suas concepções numéricas, e por interesse pessoal em economia [...]” (BUTLEN; PEZARD, 1992, p. 336).

Quando desafiamos ML a usar a estratégia de PE queríamos instigá-la a pensar na possibilidade desse uso, buscando compreender como ela funciona. Sabemos que não podemos ensinar diretamente essas propriedades (compensação e decomposição), mas podemos favorecer “[...] o intercâmbio entre os alunos de maneira que os ‘jeitos de resolução’ de cada aluno se convertam em terreno comum” (PARRA, 1996, p.211).

▪ recorrer a compensação, em torno de uma dezena e a conservação da quantidade, sendo esse último aspecto necessário para obter o resultado esperado:

> PE: Eu faço assim, de nove eu somo mais um, aí vai ficar dezesseis, aí eu faço menos um.
> P: Vocês entenderam o que o PE fez? Eu falei para ML, nove mais seis e a ML foi somando de um em um até chegar em quinze. O que o PE falou: se fosse eu faria diferente. Como você faria PE?
> PE: Tava nove, eu ia somar mais um e ia ficar dez, aí ia ficar dezesseis. Eu faço menos um depois.
> [...]
> PE: O nove eu faço dez..
> P: Você transforma o nove em dez. Aumenta mais um no nove (pausa).
> PE: Aí fica dezesseis, eu faço menos um.
> P: Por que menos um PE?
> PE: Porque eu aumentei um no nove, então depois eu você tem que diminuir.

É possível observar que PE usa a propriedade com compreensão, tendo em vista que explica com clareza que após acrescentar uma unidade ao nove para torná-lo uma dezena inteira e facilitar o cálculo, tem que retirar a mesma quantidade do resultado.

▪ recorrer à propriedade comutativa e contar a partir do número maior, pois relacionam-se ao "princípio da economia":

> P: Vamos lá GF. Eu quero saber o resultado de um mais sete.
> GF: Oito.
> P: Como você fez pra chegar ao oito?
> GF: Ah! Eu pensei um mais sete é oito (risos)
> P: Você começou a contagem pelo um ou pelo sete?
> GF: Pelo sete.
> P: Você fez o que com ele?
> GF: Sete mais um.
> P: Por que você acha mais fácil contar assim?
> GF: Porque sete é maior que um.

▪ decompor um dos valores visando obter uma dezena, porque a base do sistema é dez e os agrupamentos envolvendo essa base facilita a adição:

> P: [...] sete mais quatro?
> [...]
> AD: Eu pegaria sete mais três que daria dez, com mais um, porque era quatro, eu colocaria esse um e daria onze.
> P: Ao invés de trabalhar com sete mais quatro, o que ele faz? Me diz uma coisa AD, por que você pegou sete mais três?
> AD: Porque sete mais três dá dez. Aí já facilita.

No excerto a seguir JR usa a mesma estratégia

> P: JR, oito mais quatro?
> JR: Oito mais quatro? Doze!
> P: Pensou em algo diferente ou já sabia o resultado?
> JR: Ah! É fácil, igual ele falou. Oito mais dois dá dez e dez mais dois dá doze.
> P: Olha que o ele fez. Trabalhou mais uma vez com a quantidade dez. Chegou primeiro no dez: oito mais dois dá dez, pra quatro faltou dois. Dez mais dois: doze.

Cabe ressaltar que a mobilização dessas propriedades – decomposição (8+4; 8+[2+2]) e associatividade ([8+2]+2; 10+2=12) – parece advir de uma compreensão intuitiva da criança acerca do número e das propriedades do sistema de numeração, conforme evidenciaram Correa e Moura (1997).

Após a fala de JR, outro aluno acrescenta:

> HG: Mas também fica fácil porque a conta de antes foi oito mais três que deu onze e essa conta foi oito mais quatro que vai dar doze.

Observamos que HG percebe que obter o resultado de oito mais quatro ficou fácil porque o anunciado anteriormente (sete mais três) tinha apenas uma unidade a menos no subtraendo do que o solicitado agora, então bastava somar mais um ao resultado de sete mais três para que JR solucionasse o cálculo proposto. Isso demonstra que o fato de dirigirmos a palavra a um determinado aluno, não exclui o outro de se envolver com a atividade, pois ao escutar tenta compreender o que diz aquele ou aquela que fala, ou seja, a escuta ativa parece ter sido instaurada (DOUADY, 1994).

▪ recorrer a resultados disponíveis em seu repertório para calcular somas da tabela de adição:

> P: AN, quatro mais seis?
> AN: Dez!
> P: Conta aí pra gente.
> AN: Porque seis (pausa) depois do seis (pausa) Tipo, eu tenho seis e se eu colocar um quatro vai dar dez. É só aumentar.
> P: Aumentou de um em um até chegar a dez?
> AN: Não!!! Eu já sabia que ia dar dez.
> P: Como você sabia?
> AN: Porque seis mais quatro dá dez

Verificamos que alguns alunos, enquanto vão expondo a sua estratégia, percebem a existência de outros mais sofisticados do que o anunciado primeiramente:

> P: NT, seis mais quatro.
> NT: (sussurra seis, sete, oito, nove) Dez!
> P: Como você descobriu que seis mais quatro dá dez?
> NT: É só somando de um em um, mas também tem outro jeito. É só separar [de] cinco e cinco. Pega um do seis [e] põe no quatro.

Acreditamos que isso seja possível devido, por um lado, à interação social desencadeada durante as sessões concebida como geradora de aprendizagem (KAMII, 1991) e por outro, à tomada de consciência do resultado encontrado, de modo que pelo emprego de subtrações e decomposições numéricas a criança igualize as quantidades sem alterar o mesmo (PIAGET e SZEMINSKA, 1975). Além do mais, a verbalização para si e para os outros parece ajudar NT a interiorizar novas estratégias de cálculo, conforme apontam Anselmo e Planchette (2006).

Nesse momento o aluno que usou pela primeira vez essa estratégia se manifesta, como se quisesse reivindicar exclusividade.

> PE: Ah! É assim que eu faço.

Outro se manifesta afirmando que esse resultado já se encontra disponível na memória e dispensa outros cálculos:

> HG: Seis mais quatro [eu] sei também de cara que vai dar dez.

A fala de HG nos permite inferir que, para ele, alguns cálculos se encontram automatizados, tendo em vista que parece mobilizar resultados disponíveis no seu repertório para obter rapidamente a resposta ao cálculo proposto (ERMEL, 1991).

Propomos a HG outros cálculos cuja soma dá dez:

> P: E sete mais três?
> HG: Sete mais três (pausa) vai dar dez também.
> P: E quatro mais seis?
> HG: Dez.
> P E oito mais dois?
> HG: Dez.

Foi então que percebemos que podíamos introduzir a atividade 11, relacionada com somas entre os algarismos 1 a 9 para obter dez.

> P: AN [...] três para chegar a dez falta quantos?
> AN: Sete.
> P: VT, cinco pra chegar a dez?

> VT: Mais cinco.
> P: LT, um pra chegar a dez?
> LT: Nove.

As respostas eram fornecidas rapidamente como se não houvesse a necessidade de realizar cálculos para obtê-las, dando a impressão de estarem disponíveis na memória. Aliás, já havíamos previsto que quando a atividade iniciasse com números maiores, como no caso de sete para chegar a dez, os resultados seriam emitidos com rapidez, pois a sobrecontagem é mais econômica, fato que não ocorreria quando a contagem iniciasse a partir de números menores, como por exemplo, dois para chegar a dez.

Em alguns desses casos, os alunos contavam de um em um, mas sem o auxílio dos dedos:

> P: Eu tenho quatro CA, para chegar a dez?
> CA: Espera aí! Seis! Eu contei de um em um até chegar no dez.

Em outros, recorreriam à contagem nos dedos para conferirem o resultado anunciado:

> P: Vamos lá VT, três pra chegar a dez, falta quanto?
> VT: Três?! Precisa de sete! É (pausa) calma aí (nesse momento conta nos dedos, acrescentando três ao sete). É sete.
> P: Por que você pediu calma?
> VT: Para fazer a conta. É que eu tinha esquecido.
> P: Você fez que conta?
> VT: É rapidão (pausa) Sete. Oito, nove, dez (levanta os dedos pra contar).
> P: Você contou [a partir] do sete [acrescentando] mais três, para chegar a dez?
> VT: Sim!

Quando VT busca certificar se o resultado está correto com o auxílio dos dedos parece estar materializando o cálculo realizado mentalmente, talvez por não acreditar que possa ter chegado tão rápido a um resultado correto ou talvez por estar acostumado a confiar somente nesse tipo de estratégia, tendo em vista que

> [...] o professor e a escola [muitas vezes] ignoram os esquemas mentais que permeiam [...] [os algoritmos matemáticos] produzidos pelas crianças, [reduzindo] o ensino de matemática [...] a reprodução de algoritmos eleitos como os “corretos”, mesmo que tais algoritmos não tenham relação com os esquemas mentais das crianças (MUNIZ, 2006, p. 163-4).

Outra estratégia prevista, que recorre à subtração com o auxílio das duas mãos abertas de modo que fosse possível obter o resultado retirando a quantidade anunciada, sofreu alteração. Observamos na transcrição a seguir que PE retira da quantidade dez o valor anunciado, mas sem fazer uso das mãos:

> PE: É três, para chegar a dez eu faço dez menos três.
> P: Vocês ouviram o que o PE falou? O VT fez do sete para chegar a dez faltam três. Ele contou: sete, oito, nove, dez. Se fosse o PE ele faria como? Não é três para chegar a dez? O que ele faz? Ele pega o dez e tira três. Como você faz PE, dez tira três? De que forma?
> PE: Como assim? Não entendi.
> P: Você faz uma continha?
> PE: É mais ou menos assim. É porque na minha cabeça já tá gravado. Eu já sei que sete mais três dá dez. Então dez menos três dá sete.

Percebemos, por um lado, que mesmo PE afirmando fazer uma subtração, parece que o resultado já estava automatizado. Por outro, PE ao justificar seu cálculo afirmando que "*se sete mais três dá dez, então dez menos três dá sete*", demonstra ter domínio do pensamento operatório reversível presente na composição aditiva do número (PIAGET e SZEMINSKA, 1975).

Nas atividades 12 e 13, que abordam questões relacionadas à formação de quantidades inteiras sabíamos que os alunos necessitavam, em primeiro lugar, identificar qual é a dezena ou a centena superior[6] do número dado e em seguida encontrar o valor que falta para atingi-la.

Iniciamos apresentando a atividade 12, relacionada à dezena inteira superior:

> P: Bom, agora vai ser mais ou menos semelhante. Ao invés de trabalhar de um a nove, vamos trabalhar com números maiores. A idéia é chegar à dezena superior.

Quando apresentamos a atividade percebemos pela expressão dos alunos que a linguagem usada não favoreceu a comunicação da tarefa e, segundo Vergnaud (1990), isso dificulta seu cumprimento e resolução. Sendo assim, tivemos que proporcionar aos alunos o entendimento de dezena superior para proceder com a atividade:

[6] A dezena inteira compreende o menor número formado por uma quantidade exata de dezenas e o maior número que o número dado e a centena inteira compreende o menor número formado por uma quantidade exata de centenas e o maior número que o número dado.

> P: O que é dezena superior? Vamos supor, eu tenho o número doze. Qual é a dezena superior a doze?
> A: Vinte!!
> P: Entenderam?
> A: Ah!!!!
> P: A dezena (pausa) O que é uma dezena?
> A: É dez.
> P: A dezena superior é vinte. [...] quanto somar ao doze para chegar na dezena superior?
> BA: Sete!
> P: Como você sabe que tem que ser sete?
> BA: Fui contando.
> P: Como você foi contando?

Destacamos um elemento de uma fase *adidática*, ligada à validação, quando BA tenta mostrar a validade do modelo que criou para obter a solução do problema proposto (MARGOLINAS, 1993), sendo o mesmo relacionado à sobrecontagem e previsto na análise *a priori*:

> BA: Eu pego o doze e somo mais sete. Vai contando de um em um: treze, catorze, quinze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove, vinte. Deu oito! (Faz a contagem com o auxílio dos dedos).
> P: Doze pra chegar à dezena superior falta quanto?
> BA: Oito.

Observamos que nossa intervenção possibilitou a BA perceber que a resposta fornecida não era válida, sem que precisássemos dizer que estava certo ou errado. Ouvir uma resposta errada sem manifestar qualquer tipo de avaliação demandou certo controle de nossa parte, pois sabemos que aceitar o erro já é difícil "[...] nas fases de resolução de problema, [sendo] [...] intolerável nas fases de conclusão. [...] [Foi preciso] [...] ter uma confiança muito grande (uma teoria que permita esta confiança) para deixar a situação desenrolar-se" sem avaliar a solução apresentada (MARGOLINAS, 1993, p.40).

Após BA validar sua estratégia, PE pede a palavra para explicar como faz para saber a resposta:

> PE: Eu faço assim, tipo da aula passada: doze mais oito vai dar vinte.
> P: Já sabe que vai dar vinte?
> PE: Não! É que oito mais dois vai dar dez.
> P: O PE ao invés de trabalhar com o doze para chegar à dezena superior, ele trabalha só com o dois.
> PE : É isso!!!

Parece que PE faz uso de uma regra *se... então...* para obter o resultado da questão proposta: *se* dois mais oito é igual a dez, *então* basta somar oito a doze para obter a dezena inteira superior, buscando no seu repertório de cálculo uma estratégia mais econômica.

Retomamos a estratégia adotada por PE e em seguida, propomos a NT um novo cálculo:

> P: Ele tem que saber que número somado ao dois dá dez. NT, cinqüenta e seis para chegar na dezena superior?
> NT: É (pausa) espera aí! (silêncio) Não sei.

No momento em que repassamos a pergunta para outro aluno NT afirma saber o resultado, anunciando-o sem dar chance a ML de responder:

> P: ML, cinqüenta e seis para chegar à dezena superior faltam quantos?
> NT: Eu sei!! É quatro.
> P: Como você descobriu NT?
> NT: É assim: é porque eu não tinha entendido. Aí, agora eu pensei assim: cinqüenta e seis mais quatro dá sessenta. Então, a dezena superior é sessenta.

Inferimos que NT, não deixa de pensar na atividade quando a transferimos para ML. Pelo contrário, parece que aproveita esse tempo para encontrar o número que somado a cinqüenta e seis chegaria a sessenta ou até mesmo buscando o número que somado a seis chegaria a dez. É possível perceber que essa última formulação é mais econômica e remete a estratégia anunciada por PE: somar ao valor da unidade do número anunciado unidades suficientes para atingir uma dezena.

Essa estratégia pode ser melhor visualizada no excerto , sendo recorrente para vários alunos no decorrer da sessão:

> P: JR, eu tenho quarenta e sete. Quanto falta para chegar à dezena superior?
> JR: Três!
> P: Como você sabe que é três?
> JR: Ah! Porque quarenta e sete(pausa) a dezena superior é cinquenta. A mesma coisa que sete e dez. É só pegar cinqüenta menos quarenta e sete, que dá três.

JR ao invés de trabalhar com cinqüenta e sete, parte apenas do valor da unidade para compará-lo com o valor de uma dezena, ou seja, busca uma relação entre sete e dez. Aparentemente a estratégia adotada por JR é semelhante a adotada por PE, porém ao ouvir sua explicação é possível perceber uma diferença:

> P: Mas como você faz esse cálculo na sua cabeça?
> JR: É fácil! É a mesma coisa que você fazer dez menos sete.
> P: Então é igual o PE tá falando. Ao invés de trabalhar com quarenta e sete, você trabalha só com o sete. Você faz como: dez tira sete ou sete para chegar a dez?
> JR: Dez tira sete.

PE busca um número que somado ao valor da unidade do número anunciado atinja uma dezena: sete mais quantos vão dar dez (7+?=10). Já JR tira de uma dezena o valor da unidade do número anunciado: dez menos sete é igual a quantos (10-7=?). Embora as duas estratégias atinjam mesmo resultado, o grau de dificuldade passou a ser maior na estratégia de PE, pois solicita a transformação e não o estado final, como ocorre na estratégia de JR. No primeiro existe um estado inicial e um estado final, buscando uma transformação positiva (sete mais que número é igual a dez). Já na segunda estratégia, existe um estado inicial e uma transformação negativa, buscando o estado final (dez menos sete é igual a que número).

Tanto a primeira quanta a segunda estratégia haviam sido previstas na análise *a priori* e correspondiam a mobilização do seguinte teorema em ação:

- *Para descobrir quanto falta para chegar à dezena superior, basta subtrair de uma dezena os valores dos algarismos das unidades ou completar os valores desses algarismos para obter uma dezena.*

Em relação à atividade 13, relacionada à formação de centenas inteiras, iniciamos apresentando números com o zero na ordem das unidades. Isso porque queríamos que os alunos se familiarizassem com a atividade para depois inserir valores diferentes de zero nessa ordem, pois o aparecimento de outras ordens pode interferir na resolução.

> P: Então vamos lá LT, quanto falta pra chegar à centena superior de quatrocentos e cinqüenta?
> LT: (silêncio) Cem??!!!

Nesse momento percebemos que LT solicitava que validássemos sua resposta. Ao invés de corrigi-la, reorganizamos a situação para que a mesma conseguisse rever o caminho percorrido e buscasse validar sua estratégia com elementos presentes na própria situação:

> P: Primeiro: qual é a centena superior a quatrocentos e cinqüenta?
> LT: Quinhentos.
> P: De quatrocentos e cinqüenta pra chegar a quinhentos faltam quantos?
> LT: Cinqüenta.

> P: Como você sabe LT?
> LT: Porque cinqüenta mais cinqüenta é cem.

Quando justifica a estratégia adotada, expressa na última fala transcrita acima, é possível notar que LT trabalha com os valores das dezenas e das unidades, desprezando os valores das centenas. Ao considerar apenas o cinqüenta, parece que LT busca encontrar um número que somado a esse atinja a quantidade cem, pois é preciso descobrir o valor da centena superior inteira e uma centena corresponde a cem unidades. Isso nos permite inferir que a mesma mobiliza o seguinte teorema em ação previsto na análise *a priori*:

- *Para descobrir quanto falta para chegar à centena superior, basta completar os valores dos algarismos das dezenas e unidades e obter uma centena.*

Diferentemente do processo adotado por LT verificamos outro que despreza os valores das unidades e trabalha apenas com os valores das centenas e dezenas:

> P: GC, duzentos e trinta para chegar à centena superior?
> GC: Duzentos e trinta??! (silêncio). Setenta. Duzentos e trinta mais setenta vai dar trezentos.
> P: Você somou de uma vez duzentos e trinta mais setenta? Como você fez para descobrir que era setenta?
> GC: Era duzentos e trinta, faz de conta (pausa) Só tirar um zero que fica vinte e três.
> P: Era duzentos e trinta e aí?
> GC: Aí eu tiro o zero e fica vinte e três. Aí vinte e três para chegar ao trinta, faltam sete. Igual a sete pra chegar a dez, é três. Aí eu pego o sete para dar o resultado.

Parece que GC, após abandonar o zero das unidades do número duzentos e trinta, transformando-o em vinte e três, busca encontrar um número que somado a ele chegue a trinta, valor que corresponde à dezena exata. A última frase do excerto acima nos permite deduzir que GC tenha usado a sobrecontagem "[...] vinte e três para chegar ao trinta, faltam sete" ou localizando esse resultado no repertório numérico disponível em sua na memória "[...] Igual a sete pra chegar a dez, é três".

Percebemos que a variável natureza dos números exerceu influência na escolha dessa estratégia, pois na ordem das unidades de duzentos e trinta havia o algarismo zero. Sendo assim, propusemos para GC usar a mesma estratégia com um número que não satisfazia essa condição:

> P: [...]Quanto falta para chegar à centena superior a partir de cento e vinte e oito?
> GC: (silêncio) Oitenta e dois.
> P: Explica pra gente.

> GC: Eu fui contando. Cento e vinte e oito (pausa). Eu peguei (pausa) Quanto falta do oito pra chegar a dez? Mais dois. Aí quanto falta pro dois pra chegar a dez? Sete. Não, mais oito.

Parece que GC ao expor a estratégia adotada reconhece que a soma de duas unidades transformou o número cento e vinte e oito em cento e trinta. Porém, a imagem mental construída do número anunciado associado ao algoritmo o impele a trabalhar com os algarismos oito e dois isoladamente, na busca de valores que somados a esses atinjam dez, sem estabelecer qualquer ligação com as transformações ocorridas a cada acréscimo realizado.

Ao percebermos isso, propomos que GC repita seu pensamento:

> P: Fala devagar o que você pensou.
> GC: Coloco dois no oito pra virar dez.

A cada exposição de GC fazemos as intervenções que julgamos necessárias para que o mesmo busque dentro da situação elementos para validar a estratégia adotada:

> P: Era cento e vinte e oito, virou quanto agora?
> GC: Cento e trinta. Aí eu pego o outro dois mais sete (pausa). Não, mais oito pra virar dez.
> P: (represento no quadro a fala de GC.) Você pega o oito pra chegar a dez e o dois pra chegar a dez. E aí?

$$\boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 8 \\ & +8 & +2 \end{array}}$$

> GC: Eu pego cento e vinte e oito mais oitenta e dois para (pausa) É fácil, só, tirar o um e ficar vinte e oito para chegar a cem, aí vai ser mais oitenta e dois.
> P: Se eu somar cento e vinte e oito mais oitenta e dois da quantos?
> GC: Duzentos.
> HG: Cento e trinta mais setenta.

Nesse momento, ao invés de pedirmos para GC demonstrar a validade da sua estratégia (cento e vinte e oito mais oitenta e dois é igual a duzentos), nos deixamos conduzir pela fala de HG, que percebeu o erro do colega e interveio com a soma correta, transformando o cento e vinte e oito em cento e trinta para depois acrescentar setenta a esse valor, obtendo a centena superior. Essa atitude parece não ter sido a mais adequada para que GC encontrasse a solução esperada para seu problema, pois a esse coube apenas a função de concluir o processo de pensamento de HG, como observamos no excerto seguinte:

> P: Vamos retomar desde o início: cento e vinte e oito mais dois chega a cento e trinta. Cento e trinta mais setenta?
> HG: Duzentos.
> P: Então, cento e vinte e oito mais quantos chegam a duzentos GC?
> GC: Setenta e dois.

Embora soubéssemos da importância de possibilitar a GC rever os passos percorridos para atingir a resposta do problema proposto e garantir que a conclusão viesse apenas do meio, essas idéias foram sucumbidas pela pergunta cento e trinta mais setenta. Ao invés disso, deveríamos ter devolvido o problema a GC para que confrontasse com HG como chegou ao resultado duzentos somando cento e vinte e oito mais oitenta e dois. Entretanto, essa passagem também pode ser analisada como uma fase de formulação, na qual GC explicita oralmente o caminho que percorreu para atingir a solução (*Eu fui contando. Cento e vinte e oito (pausa). Eu peguei (pausa) Quanto falta do oito pra chegar a dez? Mais dois. Aí quanto falta pro dois pra chegar a dez? Sete. Não, mais oito)*, mesmo que essa não seja a esperada.

Outra estratégia proposta trabalha com o número anunciado como se fosse exato, ou seja, usa cento e vinte ao invés de cento e vinte e oito. Dessa forma, localiza um número que somado a cento e vinte atinja a centena inteira, subtraindo dele o valor expresso nas unidades:

> AD: Se não tivesse o oito seria mais oitenta para dar duzentos, mas tem o oito. Então eu pego oitenta menos oito, que dá setenta e dois.
> CA: Por que ao invés de somar oitenta, por que você não coloca setenta e dois? Cento e vinte e oito mais setenta e dois não é mais rápido?

CA pede que AD forneça explicações complementares, recusando aquelas que discorda, justificando para tanto sua rejeição, sendo uma característica presente na fase de validação, segundo Brousseau (1986). Antes que a pergunta de CA fosse respondida fizemos uma intervenção que achávamos pertinente naquele momento e, em seguida, AD retomou sua explicação:

> P: Ta! Se eu sei que cento e vinte e oito mais setenta e dois é duzentos eu coloco de uma vez. Mas a questão é, como que eu faço pra chegar a setenta e dois?
> AD: Eu somo oitenta a cento e vinte. Depois eu pego oitenta menos oito, que dá setenta e dois.

Observamos que a fala de AD foi simplificada em relação à explicação fornecida no excerto anterior a esse. Convém relembrar que ele busca inicialmente um número que somado a cento e vinte atinja a centena superior e encontra o valor oitenta. Porém, após localizá-lo afirma que não pode ser oitenta, pois existem oito unidades, ou seja, o número é cento e vinte e oito ao invés de cento e vinte. Dessa forma é preciso subtrair oito unidades de oitenta, atingindo o valor setenta e dois.

Em relação às atividades 14 e 15, que envolvem a contagem para frente pudemos observar que os alunos reinvestiram no uso das propriedades dos números e das operações utilizadas anteriormente (comutatividade, compensação, decomposição). Além disso, começaram a perceber algumas regularidades na contagem conforme os números eram anunciados:

> P: GF, conta pra mim de três em três a partir do dezoito.
> GF: 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54(pausa)

A contagem de três em três foi tão rápida que GF parecia ter usado uma seqüência corriqueira. Ao observarmos a justificativa para essa rapidez ficamos ainda mais intrigados:

> GF: Porque meu raciocínio é rápido.
> P: Você pode explicar como sabia que os números seriam esses?
> GF: Ah!!

Quando o instigamos a explicar a estratégia adotada, começamos a perceber a regularidade que perpassou essa contagem:

> P: Você partiu do dezoito. Como você fez para descobrir os números?
> GF: Ah! Mais(pausa) tabuada do três.
> P: Você está pegando a tabuada do três?
> GF: Não! Não to pegando a tabuada do três. É!

Apesar de termos relacionado os resultados da tabuada do três com a contagem realizada, isso ainda não está tão evidente para GF porque quando questionado sobre o uso da tabuada não conseguiu responder a pergunta que havíamos feito. Contudo, após pensar sobre o teor da mesma confirma que a tabuada do três guiou seu pensamento.

Como a contagem foi muito rápida, percebemos que os colegas não conseguiram acompanhar e tampouco perceberam essa regularidade. Por isso, solicitamos que GF a refizesse mais devagar:

GF: 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51.
P: Ta, agora fala pra mim: você fez a contagem pensando no que mesmo?
GF: Ah! É só somar mais três.
P: Você tinha falado na tabuada do três por quê?
GF: Ah! Porque o dezoito, vinte e um é da tabuada do três.

Essa última fala do excerto acima deixa transparecer a relação estabelecida por GF entre a tabuada do três e a contagem realizada, demonstrando nesse momento ter tomado consciência da ação realizada.

A relação entre a tabuada com a contagem ocorreu novamente em três sessões após essa, quando solicitamos para AD contar de três em três a partir de vinte e três:

AD: vinte e seis, vinte e nove, trinta e (pausa) um, trinta e quatro, trinta e sete, quarenta, quarenta e três, quarenta e seis, quarenta e nove, cinqüenta e(pausa) um, cinqüenta e quatro, cinqüenta e(pausa) sete, sessenta, sessenta e três, sessenta e seis, sessenta e nove.

Percebemos que apesar de AD fazer algumas pausas durante a contagem, essas não foram longas, permitindo-o retomar a mesma rapidamente. Perguntamos como ele havia descoberto a seqüência dos números, tendo em vista que percebemos uma relação com o discurso de GF descrito anteriormente:

AD: Eu só fui somando mais três na cabeça direto, porque eu sei que três mais três dá seis, eu sei os resultados e fui falando.
P: Que resultados você sabe? Fala para a gente.
AD: Que três mais três é seis, seis mais três é nove, nove mais três é onze.
P: É onze?
AD: Doze! Agora que errei.

Para AD a contagem que estava realizando não possuía relação com a tabuada do três. Porém, no momento que anunciava os resultados adquiridos pela soma (três mais três é seis, seis mais três é nove, nove mais três é doze) HG fez um comentário dizendo que essa seqüência correspondia aos resultados da tabuada do três. Após AD terminar sua explicação direcionamos a palavra para esse aluno, na tentativa de compreender sua proposição:

P: HG [...] [o que você disse] quando o AN falou que foi rápido a contagem de três em três?
HG: É igual a tabuada do três
P: Como assim? Explica para a gente.
HG: É só fazer a tabuada do três! Começou do vinte e três. Daí três vezes dois dá seis, daí vinte e seis, vinte e nove. Aí vai usando a tabuada do três.

Apesar de termos compreendido a relação estabelecida por HG percebemos que isso ainda não estava claro para ele, nem tão pouco para a turma que tentava acompanhar sua explicação. Sendo assim, continuamos a questioná-lo:

> P: A tabuada do três ajuda em que momento?
> HG: Porque era mais três, era só fazer (pausa) multiplicando.
> P: Vinte e três vezes três, assim?
> HG: É!
> P: Vinte e três vezes três dá sessenta e nove.
> HG: Não! Porque três vezes três da nove aí você pega o dois da dezena.

Era possível perceber que a multiplicação por três estava restrita a ordem das unidades do número anunciado:

23 =(20+3)	*23= (20+3)*	*23= (20+3)*
20+(3x2)	*20+(3x3)*	*20+(3x4)*
20+6= 26	*20+9 = 29*	*20+12=32*

Entretanto, isso ainda não estava sendo explicitado com clareza para a turma, que começou a tecer conjecturas:

> JD: É a mesma coisa ué! Porque três mais três dá seis, aí é só olhar na tabuada.
> PE: Mas o vinte e três não está na tabuada do três.
> P: O número vinte e três não está na tabuada do três. Eu quero saber qual é a relação da tabuada do três com a contagem de três em três.
> [...]
> CA: O final do número.
> P: Ah! O final do número tem a ver com a tabuada do três?
> CA: O três no final.
> P: Não é o vinte e três então?
> CA: Não! É o três.

CA parecia ter compreendido a relação da tabuada do três com a contagem de três em três:

> P: Três mais três são seis e depois?
> CA: Nove!
> P: Vinte e nove. E depois?
> CA: Doze.

Nesse instante, ao invés de fornecer o número que viria na seqüência propusemos uma pergunta que parece ter destruído a certeza de CA em relação à facilidade fornecida pela tabuada do três para a contagem:

> P: Mas daí não é vinte e nove mais. É quanto?

> CA: Aí vai ter que ser quarenta e (pausa) trinta e dois, mas aí vai dificultar, porque o final não vai ser o três. Verdade!
> P: Tem algum momento que a tabuada ajuda.
> CA: Só quando termina em três. [...] Ou zero.

Na verdade a aplicação da tabuada não é pertinente somente nos números terminados em três ou zero, como anuncia CA, mas em todos os casos. Isso porque o resultado da seqüência de contagens de três em três sempre possuirá uma seqüência numérica terminada em 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7 ou 0, independente do número anunciado. Isso porque nos resultados das multiplicações efetuadas nessa tabuada existe uma seqüência de zero a nove nos valores da unidade. Contudo, essa regularidade não foi totalmente percebida pelos alunos, que buscaram resolver outras situações que envolviam essa contagem usando por um lado, a sobrecontagem:

> P: JD, conta pra gente de três em três a partir de vinte e cinco.
> JD: Vinte e oito (pausa) trinta e um, trinta e quatro (pausa), trinta (pausa) e sete, quarenta, quarenta e três, quarenta e seis (pausa) cinqüenta e dois,(pausa)

Como percebemos que JD passou de quarenta e seis para o cinqüenta e dois sem notar que havia pulado um número, fizemos uma intervenção na tentativa de que ele percebesse o erro:

> P: Quarenta e seis?!
> JD: Cinqüenta e(pausa) quarenta e nove, (pausa) cinqüenta e dois.

Verificamos que JD consegue retomar a contagem de três em três, apesar de oscilar no anúncio do número subseqüente a quarenta e seis. Após o encerramento da contagem, conforme nossa sugestão, buscamos investigar como JD realizou os cálculos para enunciar a seqüência:

> P: [...] Você falou [...] [com rapidez] vinte e oito. Aí depois do vinte e oito para o próximo número você demorou um pouquinho mais porque vinha o trinta e um. Por que em umas contagens você ia mais rápido e em outras mais devagar?
> JD: Porque o cinco mais três é oito.

Quando afirma isso demonstra que tal contagem está automatizada e disponível em sua memória, dispensando outros cálculos, contrariamente do que ocorreu na passagem seguinte:

> P: E do vinte e oito pro trinta e um, você fez como?
> JD: Vinte e oito mais três.
> P: Você contou de um em um: vinte e oito, vinte e nove, trinta, trinta e um? (Quando JD realiza a contagem percebemos que ele anuncia todos os números presentes nesse intervalo, o que nos permitiu fazer essa pergunta).
> JD: É!

Por outro lado, percebemos no decorrer das quatro sessões, que envolveram a contagem para frente, o uso de estratégias ligadas à decomposição:

> PE: Aquela hora [...] do vinte e oito mais três eu faço tipo o encontro passado: vinte e oito mais dois, depois mais um.
> P: Fala de novo PE, o que você faz?
> PE: Vinte e oito mais dois.
> P: Mas não é vinte e oito mais três?
> PE: É, mas depois eu faço mais um.
> P: Você faz o que então com esse número três?
> PE: Nada praticamente. Ah! Eu decomponho ele.
> P: Por que você decompõe em dois mais um?
> PE: Porque fica mais fácil [...]

Ou à decomposição e à associação:

> HG: Tem um jeito mais fácil. Cinqüenta e sete mais cinco: você esquece o cinqüenta e faz sete mais cinco, que dá doze, mais cinqüenta dá sessenta e dois.

Outra estratégia recorrente está relacionada ao uso da sobrecontagem com ou sem o auxílio dos dedos. Em alguns momentos essa estratégia foi usada somente para conferir a contagem realizada, como ilustra o excerto a seguir:

> P: VT, conta pra mim de três em três a partir de trinta e sete.
> VT: trinta e sete, quarenta, e (pausa) quarenta e três, quarenta e seis, cinqüenta.
> P: Quarenta e seis?
> VT: Ops! Quarenta e seis é (pausa) Calma aí (faz uma contagem silenciosa associada aos dedos). Quarenta e nove, cinqüenta e dois (pausa) cinqüenta e cinco (cochicha um dois, três), cinqüenta e oito, sessenta e um.

Em relação ao uso da sobrecontagem para obter a seqüência numérica nas contagens para frente, com intervalos superiores a dois, podemos supor que isso ocasionou a demora no anúncio das seqüências numéricas resultantes dessas contagens, como no caso de vinte e oito para o trinta e um. Outra explicação para a demora, que nos parece bastante pertinente, estava relacionada à mudança ocorrida no valor da dezena durante a contagem:

> AD: Eu acho que ele se demorou do vinte e oito para o trinta e um porque é troca de dezena.
> P: Ah! Tem mais um detalhe né?! Fala mais uma vez AD!
> AD: Ele pode ter demorado do vinte e oito para o trinta e um porque é troca de dezena.
> P: Troca de qual dezena?
> AD: Da dezena do vinte!

Além de pertinente foi recorrente em outras ocasiões e para outros alunos, como na contagem de três em três a partir de cinqüenta e um, sempre associada ao uso da sobrecontagem para realizar essa passagem:

> GV: Cinqüenta e quatro, cinqüenta e sete e (pausa) sessenta, sessenta e três, sessenta e seis, sessenta e (pausa) nove, setenta e dois, setenta e (pausa) cinco.
> P: Foi difícil ou foi fácil fazer essa contagem?
> GV: Foi meio confuso.
> [...]
> CA: Você perguntou pra ela que parte foi difícil, né? Na troca de dezena ela se confundiu mais.

Ou na contagem de quatro em quatro a partir de sessenta e quatro:

> AN: Sessenta e oito (pausa) setenta e dois, setenta e seis, e(pausa) oitenta, oitenta e quatro, oitenta e oito, e(pausa) noventa e dois, noventa e quatro, não!!! Noventa e seis.
> P: Ta. Você falou assim: noventa e quatro, não, não, noventa e seis. Como que você fez para conferir essa contagem?
> AN: Eu contei com o dedo.
> P: Você também contou com o dedo para fazer as outras contagens?
> AN: Não!

E também na contagem de oito em oito a partir de trinta e sete:

> VT: quarenta e cinco, (pausa) cinqüenta e três?! Espera aí (conta de um em um até chegar em cinqüenta e três para conferir).Cinqüenta e três. Humm! Muito difícil.
> P: Difícil por quê?
> VT: Ah! Porque é muito difícil.
> P: Em que momento é difícil?
> VT: Porque eu consigo contar direito de oito em oito, porque para eu contar direito de oito em oito eu tenho que contar na mão.

Estendemos a demora na contagem quando a mudança alterava também a ordem das centenas, como é o caso do excerto seguinte, no qual JR atrela sua dificuldade ao acréscimo de dez unidades ao número trezentos e noventa e seis:

> P: JR, conta pra gente de dez em dez a partir de trezentos e cinqüenta e seis.
> JR: trezentos e cinqüenta e seis, trezentos e sessenta e seis, trezentos e setenta e seis, trezentos e oitenta e seis, trezentos e noventa e seis quatrocentos e dezesseis, quer dizer, quatrocentos e seis, quatrocentos e dezesseis.
> P: O que você achou dessa contagem: foi difícil, foi fácil?
> JR: Foi fácil. Ah! Porque de dez em dez é só(pausa) cinqüenta e seis, por exemplo, aí eu coloco mais dez dá sessenta e seis, se tivesse mudado a unidade, mas eu só mudei a dezena.
> P: Em que momento você se enroscou na contagem?
> JR: Ali, pra passar do trezentos e noventa e seis para o quatrocentos e seis.

Apesar da demora nessa passagem, JR consegue perceber uma regularidade na seqüência anunciada até o momento da troca da centena que permitiu que a mesma fosse mais rápida em determinado momento: "[...] se tivesse mudado a unidade, mas eu só mudei a dezena", referindo-se ao intervalo iniciado com o número trezentos e cinqüenta e seis e finalizado com o trezentos e noventa e seis.

A busca por regularidade na contagem volta à cena quando propomos a GF contar de cinco em cinco a partir de duzentos e catorze e esse anuncia rapidamente a seqüência, sem interrupções. Ao invés de interpelarmos GF resolvemos propor a questão para a turma:

> P: AN, você conseguiu perceber alguma coisa na contagem do GF?
> AN: Não!!
> P: Olha, 214, depois 219, depois 224, 229, 234, 239, 244, 249. Percebeu alguma coisa nessa contagem?
> AN: Só que saia 249, 254.
> P: Sempre no final da contagem saia quatro, nove, quatro, nove. Perceberam isso? 214, 219, 224, 229, 234, 239, 244, 249, 254,259, 264.

Conforme mostra o excerto acima, a formulação inicial de AN foi validada precocemente por nós, sendo que seria preciso propor outras questões para que o mesmo tivesse oportunidade de compreender a regularidade presente na contagem de GF. Tentamos corrigir essa falha interrogando a turma sobre os motivos do aparecimento de números terminados em quatro e nove. CA apresenta uma explicação que foi complementada por HG:

> CA: Por causa do número, ele aumentava (pausa)
> HG: Era porque era de cinco em cinco, daí quatro mais cinco dá nove.

Procuramos trazer essas duas idéias apresentadas de modo que todos pudessem perceber a regularidade:

> P: [...] Duas coisas aconteciam nessa contagem do GF. Primeiro, era de cinco em cinco. Além disso, começou a contagem a partir de que número?
> A: Quatro!
> P: Final quatro, duzentos e catorze. Cinco mais quatro dá quanto?
> A: Nove!
> P: E nove mais cinco?
> A: Catorze.
> P: Final nove, final quatro.
> AC: Eu acho assim: se a contagem começa do [número] cinco, vai dar dez, quinze, vinte. Então, a contagem começou do [número] quatro, aí vai dar nove, quatro, nove.

Observamos que além de demonstrar compreender a regularidade na contagem de cinco em cinco quando o número anunciado terminar em quatro, mesmo não tendo percebido que isso se aplica também aos números terminados em nove, AC trouxe outra regularidade relacionada a essa contagem quando o número proposto é o cinco.

A regularidade na contagem para frente de cinco em cinco trazida por GF voltou a aparecer três sessões depois, quando propusemos a JD contar a partir de duzentos e catorze:

> JD: Duzentos e dezenove (pausa) duzentos e vinte e quatro, duzentos e vinte e no(pausa) não, duzentos e vinte e nove, duzentos e trinta e quatro, duzentos e trinta e nove, duzentos e trinta e quatro, não, duzentos e quarenta e quatro, duzentos e quarenta e nove, duzentos e cinqüenta e quatro, duzentos e cinqüenta e nove.

Depois de anunciar os quatro primeiros números JD deixa transparecer no semblante uma expressão que nos permite inferir que ele captou a regularidade presente nessa contagem, pois anuncia com destreza os demais números.

> P: JD, eu percebi que você começou a contar com calma, depois parece que você mudou a estratégia. Explica para a gente o que aconteceu?
> JD: Quando eu estava contando de cinco em cinco eu percebi que era quatro e nove toda hora.
> HG: Só que aumenta a dezena.

HG traz um elemento, que não tinha sido trazido anteriormente: sempre aparece quatro e nove, necessitando apenas aumentar o valor da dezena.

> P: Será que isso funciona sempre ou foi só porque (pausa)
> PE: Por causa do número que você anunciou.
> P: Se eu falasse para ele contar de cinco em cinco a partir de duzentos e treze.
> GF: Não daria! Ah! Daria sim, porque daria sempre oito e três.

Imediatamente GF descobre outra regularidade associada à contagem para frente de cinco em cinco quando o número anunciado termina em três. Pedimos que GV testasse a formulação de GF, fazendo a contagem a partir de duzentos e treze.

> P: Vamos ver! O que você acha GV? Conta pra gente a partir de duzentos e treze, de cinco em cinco.
> GV: Duzentos e dezesseis?!
> P: De cinco em cinco!
> GV: Duzentos e (pausa) nossa! Duzentos e dezoito (risos) duzentos e vinte e três, duzentos e vinte e oito, duzentos e trinta e três, duzentos e trinta e oito.

Observando a expressão de contentamento e os risos emitidos durante a contagem pudemos verificar que GV havia percebido a regularidade. Isso foi confirmado quando a indagamos sobre o que aconteceu:

> P: [...] No começo você demorou para fazer a contagem. O que você percebeu?
> GV: Percebi que eu falava oito, três, oito, três. Só mudava a dezena.

A busca por regularidades também apareceu nas contagens para frente de nove em nove a partir de trezentos e vinte e sete, quando GF anuncia a seqüência numérica com rapidez, hesitando apenas na passagem do trezentos e sessenta e três para o trezentos e setenta e dois:

> GF: trezentos e trinta e seis, trezentos e quarenta e cinco, trezentos e cinqüenta e quatro, trezentos e sessenta e três, trezentos e cinqüenta e(pausa) não! Trezentos e setenta e dois, trezentos e oitenta e um, trezentos e noventa, trezentos e noventa e nove, quatrocentos e oito, quatrocentos e dezessete, quatrocentos e vinte e seis, quatrocentos e trinta e cinco.

Ao ser solicitado para que explicitasse a estratégia adotada demonstra fazer uso da compensação, afirmando que bastava somar mais dez ao número anunciado e depois tirar um para ir descobrindo a seqüência dos números. Além disso, percebeu que existia uma regularidade nos números anunciados, em especial nos localizados no intervalo de contagem com início em trezentos e trinta e seis e término em trezentos e oitenta e um:

> GF: Porque eu só ia diminuindo um, só que ia aumentando na dezena e diminuindo na unidade. [...] Aumentava a dezena e diminuía a unidade.
> P: Vocês perceberam a lógica do GF? (Registro seqüência anunciada para que essa regularidade possa ser compreendida por todos). Olha o número trezentos e trinta e seis e o número trezentos e quarenta e cinco, a unidade (pausa) (Interrompo minha fala devolvendo à turma uma pergunta para que, ao invés de apresentar a estratégia de GF essa pudesse expor o entendimento do mesmo) O que ele fazia com a unidade?
> GF: Diminuía a unidade e aumentava a dezena!

Apesar de tentarmos envolver a turma na discussão, verificamos que o próprio proponente da estratégia voltou a explicá-la. Porém, isso não impediu a turma de se manifestar e mostrar outras regularidades:

> HG: Eu pensei: se tirar a centena do trezentos fica a tabuada do nove.
> P: Só tirar o valor da centena (pausa) até aonde?
> HG: Até o noventa!

Chamamos a atenção da turma para a fala apresentada, destacando nos números expostos no quadro os pertencentes à tabuada do nove (trinta e seis, quarenta e cinco, cinqüenta e quatro, sessenta e três, setenta e dois, oitenta e um, noventa), ressaltando, conforme afirmou HG, que essa estratégia só é válida até o trezentos e noventa. O que, de imediato, é contrariado por ele, que vislumbra a relação da tabuada do nove com a contagem a partir de quatrocentos e oito:

> HG: Dá pela tabuada do nove, mas aí só vai tirando um. [...] só que aí você faz tipo (pausa) quatrocentos e oito é como se tivesse quatrocentos e nove menos um, quatrocentos e dezessete é como se tivesse quatrocentos e dezoito menos um, daí vai ficando mesmo assim a tabuada do nove, só que menos um.

Após ouvirmos essa explicação e observarmos os números registrados no quadro (336, 345, 354, 363, 372, 381, 390, 399, 408, 417, 426, 435) ressaltamos que a estratégia inicial apresentada por GF – aumentar o valor da dezena e diminuir o valor da unidade - também pode ser retomada na contagem dos números contidos no intervalo de quatrocentos e oito a quatrocentos e trinta e cinco. Essa nossa inferência parece que foi acompanhada por CA, quando afirma que isso só não dá certo com um número, referindo-se ao trezentos e noventa e nove.

Nas contagens para frente também foi possível verificar a criação de estratégias que eram imediatamente abandonadas quando solicitávamos sua aplicação em situações diferentes das que as desencadearam. Isso pode ser percebido quando CA observa que a contagem de quatro em quatro poderia ser mais rápida se fizesse duas contagens de dois em dois. Percebemos que essa estratégia foi pensada porque o número anunciado era par, sendo assim propusemos a contagem de quatro em quatro anunciando o número vinte e três, ou seja, um número ímpar:

> CA: Vinte e sete, trinta e um, (pausa) trinta e (pausa) cinco, trinta e nove, quarenta e três (pausa), quarenta e sete.
> P: Só um pouquinho CA. Você está usando a sua estratégia de contar de dois em dois?

Perguntamos isso porque observamos que CA, ao invés de recorrer à estratégia proposta, estava usando a sobrecontagem para obter os números da seqüência. Ao emitir a resposta para nosso questionamento o aluno afirma que a estratégia anunciada – contar de dois em dois duas vezes – não é válida para números terminados em três, estendendo essa nulidade para todos os números ímpares. Esse fato nos permite inferir que a formulação de CA foi desconsiderada por ele mediante o uso de elementos da própria situação, por intermédio das questões que propusemos.

Quanto às atividades 16 e 17, relacionadas à contagem regressiva com intervalos acima de dois, pudemos observar a mobilização de estratégias previstas na análise *a priori*, tais como:

- Decomposições aditivas do número a subtrair de modo a facilitar a contagem:

> P: Vamos supor: do dezesseis pra chegar ao doze, você fez como?
> CA: Quinze! Mas eu não faço de um em um, eu faço de dois em dois. Quatorze e doze.

Nesse caso é possível perceber que ao explicar sua estratégia o aluno começa a contagem regressiva de um em um, mas depois apresenta outra ligada à decomposição do número a subtrair em duas partes, o que facilitou sua contagem em alguns momentos. Essa idéia que foi compartilhada por outro colega:

> P: O que você pensou quando eu disse conta de quatro em quatro a partir de 30?

HG: É só diminuir de quatro. Só que daí eu diminui dois, que dá trinta e [depois] menos dois.

- Cálculos efetuados de maneira automatizada:

PE: Se estava dezesseis menos quatro era mais fácil para entender: eu faço (pausa) eu sei que quatro mais dois dá seis.
P: É automático para você?
PE: Não! Eu já sei que quatro mais dois dá seis.

Verificamos que PE não reconhece ou não relaciona a palavra automático com saber o resultado sem precisar efetuar cálculos. Contudo, deduzimos pela transcrição que esse cálculo é efetuado de maneira automatizada, assim como acontece em outras contagens, nas quais os alunos anunciam a seqüência sem interrupção.

- Decomposições aditivas do número a subtrair e ligação com a passagem por um número inteiro de dezenas:

P: Você começou a contagem do setenta e quatro, depois setenta e um, aí quando você foi descobrir o próximo número você demorou um pouquinho mais. Como você fez para descobrir que o próximo número era sessenta e oito? Que cálculo você fez para descobrir?
JR: Se onze menos três é oito (pausa) onze menos um dá dez e dez menos dois dá oito. Junta dois mais um: dá três.

Inferimos pela transcrição acima que JR faz duas decomposições aditivas: uma do minuendo (setenta e um) e outra do subtraendo (três). Isso pode ser representado da seguinte maneira:

71=60+11
(60+11)-3
(60+11) – (2+1)
60+ [(11-1)-2]
60+[10-2]
60+8=68

A decomposição aditiva também ocorre somente no valor do subtraendo:

P: Você tira dois, que dá sessenta e oito. Do sessenta e oito tira três que dá sessenta e cinco, tira três que dá sessenta e dois e aí você parou de novo. O que você fez para descobrir?
JR: Sessenta e dois pra passar pro cinqüenta e nove eu tirei mais dois que ia dar sessenta menos um, cinqüenta e nove.

Essa decomposição pode ser assim representada:

62-3
62-(2+1)
(62-2)-1
60-1=59

Em alguns momentos observamos a demora na contagem, justificada com o mesmo argumento usado na contagem para frente, ou seja, a demora está relacionada à mudança ocorrida no valor da dezena dos números anunciados:

> CA: Tem uma hora que ele errou. Era para voltar para o cinqüenta e ele foi para o quarenta. Voltando na aula passada, por causa das dezenas. É mais difícil.

Após a realização da contagem regressiva, durante a investigação das estratégias mobilizadas pelo aluno interpelado algumas regularidades foram percebidas na seqüência enunciada.

No caso da contagem de cinco em cinco essa regularidade foi associada, por um lado à tabuada, como ilustra o excerto seguinte:

> HG: É só pegar a tabuada do cinco ao contrário.

Por outro lado, à presença de números terminados sempre em zero e cinco:

> P: VT, o que tem em comum nos números que o AD e as meninas falaram?
> VT: Tem a ver que sempre vai ser (pausa) como se fosse a tabuada do cinco.
> P: Vai ser o quê?
> VT: Sempre zero e cinco.

Um aluno associou a contagem com esse intervalo ao conteúdo de divisibilidade que havia sido discutido na aula de Matemática dias atrás:

> CA: Tem uma regrinha que (pausa) uma conta (pausa) um negócio que chama divisibilidade do cinco que termina em cinco e em zero.

Para comprovar sua afirmação fez uma busca nas anotações do caderno, instigando os colegas a perceber que essa regra anunciada por VT era semelhante à regra de divisibilidade por cinco.

Nas atividades 18 e 19, que traziam somas de números que contemplavam a ordem das dezenas ou das centenas com números que continham apenas a ordem das unidades, os alunos retomaram, conforme previmos, os conhecimentos mobilizados na tabela de adição. Cabe ressaltar que a exploração dessas atividades perpassou quatro sessões, nas quais algumas propriedades dos números e das operações puderam ser evidenciadas, tais como:

- Realizar a sobrecontagem sem o auxílio dos dedos:

> P: NT, setenta e três mais oito?
> NT: Setenta e três ... Oitenta e um.
> [...] Setenta e oito mais três e foi mais difícil porque era um número grande e teve a troca de dezena.
> P: O número que eu falei era setenta e três mais oito. Você fez setenta e oito mais três. Você mudou o valor das unidades. Como você chegou ao oitenta e um?
> NT: Eu fiz assim: setenta e oito, setenta e nove, oitenta, oitenta e um.

É possível observar pelo excerto que NT ao expor a estratégia adotada na resolução da atividade, além de usar a sobrecontagem, como ilustra a última frase do excerto acima, também recorre, parcialmente, à propriedade comutativa. Isso pode ser percebido quando a mesma troca os valores das unidades dos números anunciados, afirmando somar setenta e oito mais três ao invés de setenta e três mais oito, conforme propusemos. Porém, parece não ter consciência disso ou talvez não conseguimos ajudá-la a perceber que a inversão dos algarismos das unidades é mais econômica e facilita o cálculo.

Acreditamos que ao invés de perguntarmos como ela havia chegado ao oitenta e um deveríamos ter conduzido o diálogo da seguinte maneira: *"O número que eu falei era setenta e três mais oito. Você fez setenta e oito mais três. Por que você mudou o valor das unidades?"*. Dessa forma, possivelmente, NT conseguiria relacionar a estratégia adotada com o fato de poder alterar a ordem dos valores das unidades, sem alterar o resultado do cálculo.

O uso da propriedade comutativa também foi recorrente para outros alunos que explicitaram, em vários momentos durante as quatro sessões, que inverteram a ordem dos números anunciados para facilitar o cálculo:

> GV: Você colocou o três na frente. Eu peguei e coloquei o noventa e um na frente e somei mais três.
> P: Por que você colocou o noventa e um na frente?
> GV: Porque daí fica mais fácil para eu somar.

Verificamos o uso da propriedade comutativa atrelado a outras estratégias, como:

- Decompor um dos valores e usar em seguida a propriedade associativa:

> P: Oito mais cinqüenta e seis.
> VT: Eu pensei no cinqüenta e seis mais seis que é doze, aí (pausa) Eu fiz igual a LT.
> P: Ta, mas conta pra gente. Primeiro, porque você pegou o cinqüenta e seis primeiro?
> CA: Porque ele é maior.
> P: É por issoVT?
> VT: É! Aí eu pensei cinqüenta e seis mais seis que ia dá sessenta e dois, mais dois que ia dar cinqüenta e quatro. Ops! Sessenta e quatro.

Percebemos que VT começa a contagem pelo número cinqüenta e seis e, em seguida, decompõe a quantidade oito em seis mais dois. Isso porque, parece ser mais fácil para VT somar seis unidades ao número cinqüenta e seis e depois acrescentar as duas unidades restantes. Inferimos que essa facilidade ocorre devido ao resultado já automatizado de seis mais seis que é igual a doze. A estratégia adotada pode ser assim representada:

$8+56=$
$56+8=$
$56+(6+2)=$
$(56+6)+2=$
$62+2=64$

Conforme a representação acima é possível perceber também o uso da propriedade associativa, pois as operações puderam ser efetuadas em qualquer ordem, sem que o resultado se alterasse.

- Decompor um dos valores de modo a obter uma dezena inteira:

> P: Oito mais trinta e cinco, JR?
> JR: Oito mais trinta e cinco? É (pausa) Humm! Cinqüenta e três! Opa! Rapidão!(pausa) Oito mais trinta e cinco? Quarenta e três!
> P: Como você chegou ao quarenta e três?
> JR: Do trinta e cinco eu coloquei mais cinco, que deu quarenta. Aí eu coloquei o três que sobrou.

Observamos que JR faz uso da propriedade comutativa antes de realizar a decomposição em torno de uma dezena inteira. Cabe destacar que essas decomposições tornaram os cálculos mais rápidos, fazendo com que alguns alunos ficassem desconfiados dos resultados obtidos e pediam para conferir o cálculo, como ilustra o excerto anterior. Diante do exposto nos indagamos: Por que será que isso acontece? Por que os alunos não confiam de imediato no cálculo realizado quando esse é muito rápido? Será que essa desconfiança é decorrente do pouco uso do cálculo mental nas aulas de Matemática?

Talvez as respostas para algumas dessas perguntas possam estar relacionadas ao ensino escolar, que, como dissemos anteriormente, muitas vezes ignora os esquemas mentais dos alunos, privilegiando os algoritmos canônicos, tidos como corretos (MUNIZ, 2006).

Entretanto, identificamos outros alunos que mobilizaram essa estratégia sem hesitar, como observamos na transcrição a seguir:

> P: LT, seiscentos e vinte e seis mais cinco.
> LT: Seiscentos e trinta e um.
> P: Você fez como LT?
> LT: Eu tirei o cinco do seis, coloquei e formei dez. Aí depois acrescentei mais um.

Supomos que essa segurança demonstra domínio da estratégia, ou seja, os alunos que como LT compreendem os motivos que os permitem usá-la e aos poucos a incorporam ao seu repertório de cálculo. Cabe ressaltar que, gradativamente, o cálculo vai ganhando agilidade. Porém, nas primeiras tentativas de uso, observamos que há um dispêndio maior de tempo para que a estratégia seja elaborada e o aluno possa fornecer um resultado para a soma proposta:

> P: [...]AN, cinco mais cento e trinta e seis?
> AN: Cinco mais cento e trinta e seis? (silêncio) Cento e quarenta e um.
> P: E aí AN, como você fez?
> AN: Eu somei cinco mais cento e trinta e seis.
> P: Você somou cinco, seis, sete...
> AN: Não! Eu fiz cento e trinta e seis mais cinco. Daí eu somo cento e trinta e seis mais quatro que dá cento e quarenta, depois eu coloco mais um.

Acreditamos, assim como Anselmo e Planchette (2006), que a verbalização para si e para os outros ajuda a interiorizar novas estratégias de cálculo, tendo em vista que nesse momento há uma tomada de consciência dos caminhos percorridos até a obtenção dos resultados. Entretanto, esse processo deve ser estimulado constantemente. No caso específico de AN, percebemos que a verbalização das estratégias adotadas durante a realização das atividades propostas era um fator de dificuldade, pois, no início, toda vez que ele era questionado a resposta se limitava a uma única frase, como ilustra o excerto a seguir:

> P: Quanto falta para chegar a quarenta a partir de trinta e dois?
> AN: Oito.
> P: Como você descobriu?

> AN: Ah! Eu não sei explicar.

Supomos que nossa intervenção durante as sessões, permitiu a AN uma melhor compreensão, por um lado, do significado e das propriedades das operações e, por outro, do uso das noções do sistema de numeração, assim como ocorreu com os sujeitos envolvidos no trabalho de Gómez (1995).

- Recorrer à compensação:

O uso da propriedade comutativa ligado à compensação também apareceu durante as sessões destinadas à exploração das atividades 18 e 19. O recurso à compensação foi trazido para o grupo por PE, que em quase todas as estratégias adotadas mobilizava com destreza tal propriedade:

> PE: Cinqüenta e seis mais oito. (pausa) Eu sei que cinqüenta e seis mais dez vai dar sessenta e seis, menos dois depois.

No excerto seguinte é possível verificar que PE sentia-se orgulhoso por estar usando uma estratégia diferente, que não fazia parte do repertório dos colegas. Aos poucos essa estratégia começou a ser incorporada e compreendida pelo grupo, demonstrando que os resultados evidenciados por Butlen e Pezard (1992) em relação à interação social desencadeada durante as sessões de cálculo mental são realmente pertinentes.

> CA: Quanto foi [a soma] da ML?
> P: Duzentos e cinqüenta e cinco mais quatro.
> CA: Tipo: se fosse duzentos e cinqüenta e cinco mais cinco iria dar duzentos e sessenta. Aí você pensa menos um.
> P: Você faz igual os meninos vêem falando: soma para completar a dezena inteira, cinco mais cinco, aí depois menos um. Porque menos um depois CA?
> CA: Porque ficou maior o número, porque você somou mais um e era para ser mais quatro.
> P: Então, o número era quatro, aumentou para cinco, mais um. Depois no resultado você tem que tirar aquilo que você colocou né?!
> PE: Minha fama está acabando.

Do ponto de vista individual afirmamos que os alunos começaram a perceber que a técnica utilizada por PE permitia que o resultado fosse encontrado rapidamente e dessa forma começaram a explorar esse caminho, como ocorreu com CA.

Do ponto de vista coletivo é possível verificar que os alunos foram incitados a comparar, ao longo das sessões, diferentes estratégias e começaram a fazer escolhas por uma que possibilitasse maior agilidade, como aconteceu com JD:

> P: JD, seis mais cento e dezenove.
> JD: Cento e vinte e cinco.
> P: Explica para a gente.
> JD: Eu pego cento e vinte, como eu sei que cento e vinte mais seis é cento e vinte e seis, aí eu tiro um por causa do cento e dezenove. Aí fica cento e vinte e cinco.
> [...]
> P: Esse um que você diminui vem da onde?
> JD: Vem do cento e dezenove que eu coloquei um no lugar do dezenove e ficou cento e vinte. Aí do cento e vinte e seis eu tirei esse um.

Observamos que no início JD baseava seus cálculos na contagem de um em um e após os debates realizados ao longo das sessões destinadas à exploração desse bloco, em especial, percebemos a mobilização de outras estratégias, como a compensação. É possível verificar pelo excerto que ele faz uso das propriedades dos números e das operações com compreensão, ou seja, sua escolha foi guiada pelas suas concepções numéricas e não somente pelo contato com diferentes estratégias. Isso porque alguns alunos, apesar de presenciarem em vários momentos PE fazendo uso da compensação, nem cogitaram a possibilidade de fazer uso de tal propriedade durante os cálculos, como ilustra a transcrição a seguir:

> P: [...] Vamos lá ML: duzentos e cinqüenta e cinco mais quatro.
> ML: (silêncio) Duzentos e cinqüenta e nove.
> P: Você trabalhou como para saber o resultado?
> ML: É (pausa). Eu contei de dois em dois.
> P: Fala pra gente como você fez.
> ML: Duzentos e cinqüenta e cinco, duzentos e cinqüenta e sete, duzentos e cinqüenta e nove.

Observamos, por um lado, que um fato que ainda estava obscuro para ML, era evidente para CA. Por outro lado, nos permite inferir que não basta apresentar uma estratégia para o aluno quando este ainda não possui estruturas mentais suficientes para compreendê-la e mobilizá-la. Isso nos permite inferir que quando Correa e Moura (1997) afirmam que as estratégias usadas no cálculo mental parecem desenvolver-se a partir da compreensão intuitiva da criança querem ressaltar que as aparências enganam. Ou seja, as estratégias de cálculo se desenvolvem não pela compreensão intuitiva, mas é resultado da compreensão dedutiva da criança acerca do número e das propriedades do sistema de numeração, que permite a ela escolher uma estratégia em detrimento de outra.

Acreditamos que foi justamente a compreensão dedutiva acerca desses conhecimentos que permitiu a ML avançar da contagem de um em um apresentada nos primeiros cálculos para a contagem de dois em dois, percebidas nos últimos cálculos como ilustram os excertos seguir:

> P: ML, quarenta e oito mais nove?
> ML: (silêncio) Cinqüenta e sete.
> P: Explica para a gente como você fez.
> ML: Fui contando de um em um
>
> P: ML, quatrocentos e cinqüenta e dois mais nove. [...]
> ML: Quatrocentos e sessenta e um.
> P: Como você chegou nesse resultado?
> ML: Fui contando de dois em dois. [...] Quatrocentos e cinqüenta e dois, quatrocentos e cinqüenta e quatro, quatrocentos e cinqüenta e seis, quatrocentos e cinqüenta e oito (pausa) Aí eu coloquei mais três: quatrocentos e sessenta e um.

Durante a exploração das atividades 18 e 19 também observamos cálculos realizados de maneira automatizada, demonstrando que alguns resultados já haviam sido incorporados no repertório dos alunos, o que de certo modo, facilitou a obtenção dos resultados, como observamos na transcrição seguinte:

> P: JD, a atividade de hoje é semelhante a da aula passada. Qual é o resultado de cento e trinta e sete mais três?
> JD: Cento e quê? Cento e trinta e sete mais três? Calma aí! (pausa) Cento e quarenta.
> P: Como você descobriu?
> JD: Sete mais três (pausa) É só mexer com a unidade.

Destacamos que o cálculo automatizado vem, na maioria das vezes, acompanhado por decomposições:

> ME: Eu faço assim: seis mais oito. Eu pego só a unidade [do cinqüenta e seis e do oito], que **eu já sei** que [a soma] é catorze e coloco lá na conta. Eu aumento uma dezena, que aí fica sessenta e quatro.
>
> PE: **Eu sei** que setenta e dois mais oito vai dar oitenta. Depois só acrescento mais um.
>
> AD: **Eu já sei** que sete mais três é dez, sete mais dois vai dar nove. Diminui uma unidade.
>
> RO: **Se oito mais dois é dez**, vinte e oito mais dois vai ser trinta.

> JR: Porque fica mais fácil somar. Cinco mais cinco **a gente já sabe**, é dez.

Observando os excertos anteriores, percebemos que os alunos frisam que determinados resultados são conhecidos e, por isso, contribuem para tornar o cálculo mais rápido.

Presenciamos também nas atividades 18 e 19 o reaparecimento da regularidade anunciada anteriormente (atividades 14 e 15), relacionada à contagem para frente de nove em nove: para descobrir o resultado do cálculo basta somar uma unidade ao valor da dezena e diminuir uma do valor da unidade. O excerto a seguir ilustra essa afirmação:

> JD: É a mesma coisa, é a tabuada do nove. Só que aí (pausa). Qual é o número mesmo?
> P: Quarenta e oito mais nove.
> JD: Seria cinqüenta e sete o resultado, aumenta a dezena e diminui a unidade.
> P: E se fosse cinqüenta e sete mais nove JD?
> JD: Daria sessenta e seis.
> P: E se fosse setenta e seis mais nove?
> JD: Oitenta e cinco.

Essa regularidade também pode ser associada à compensação, na qual é possível obter o resultado somando dez ao número anunciado e depois subtraindo uma unidade. Entretanto, para JD a regularidade anunciada nas sessões anteriores foi muito mais evidente.

Assim como observamos estratégias que demonstram compreensão das propriedades dos números e das operações, também foi possível verificar, em alguns momentos, a mobilização da estratégia ligada à montagem, na cabeça, do algoritmo canonizado, como o ilustra o excerto seguinte:

> BA: Novecentos e noventa e nove mais dois. Ela soma dois ao nove, que dá onze. Aí ela sobe um no outro nove, que dá dez. Aí sobe mais um no outro nove que dá dez, que é igual a mil e um.

Destacamos mais uma vez que, a estratégia que “põe a operação dentro da cabeça” não é uma estratégia de cálculo mental, mas uma estratégia de cálculo escrito efetuado mentalmente (LETHIELLEUX, 2001). Coincidentemente, ou não, o aparecimento dessa estratégia ocorreu quando o número anunciado (999) estava localizado próximo aos “nós”, ou seja, era um número próximo de onde ocorre a mudança de ordem na representação no sistema de numeração decimal (LERNER E SADOVSKY, 1996). A exploração de atividades contendo números próximos já havia sido motivo de discussão nas atividades 1 e 2, que envolviam a contagem oral para frente e a contagem regressiva a partir de um determinado número. Agora pudemos verificar como os alunos lidam com essa passagem em outro contexto e percebemos que, assim como ocorreu anteriormente, a dificuldade voltou a aparecer:

> P: GV, novecentos e noventa e nove mais dois?
> GV: (silêncio) É (pausa).Ai! Vou chutar: é dez (pausa).
> P: O que você pode fazer com esses valores para ficar mais fácil?
> GV: O que eu posso fazer com esses valores para ficar mais fácil? O número é novecentos e noventa e nove mais dois. O que eu posso fazer para ficar mais fácil a conta? Noventa e nove, aí vai pra dez (pausa). Novecentos e cem.

É possível perceber que GV recorre à decomposição do número anunciado em novecentos mais noventa e nove (900+99), somando mais um ao noventa e nove, chegando ao número novecentos e cem. Assim como ocorreu nas atividades 1e 2, uma estratégia correta seria que GV conseguisse obter o resultado mil relacionando novecentos e cem com novecentos mais cem. Contudo, conforme apontamos anteriormente, isso implica perceber que o *e* representa uma coordenada aditiva, possuindo o mesmo significado da expressão *mais.*

Na sessão seguinte JR parece captar essa idéia, como verificamos na transcrição a seguir:

> JR: Dá para fazer novecentos mais noventa e nove. Somar dois ao noventa e nove. Noventa e nove mais um vai dar cem [e] cem mais um cento e um. Depois soma cento e um ao novecentos, [que vai dar] mil e um.

Esse cálculo parece simples quando efetuado por escrito, mas na oralidade a adição de mais duas unidades ao número novecentos e noventa e nove implica realizar uma mudança nos valores das três ordens e, conseqüentemente, formar uma quarta ordem e identificar o número composto anunciando sua leitura. Essas etapas muitas vezes não são percebidas no registro escrito e a última nem sempre é executada.

Algumas discussões ocorreram em torno das somas com números próximos aos nós e duas sessões após aquela que GV não consegue calcular novecentos e noventa e nove mais dois propomos um outro cálculo:

> P: GV, oitocentos e noventa e nove mais dois?
> GV: Mais dois?!! È (pausa). Novecentos e um.
> P: Como você chegou nesse resultado?
> GV: Oitocentos e noventa e nove, aumenta mais um fica novecentos, mais um, novecentos e um.

Parece que GV conseguiu perceber o que antes estava obscuro. Isso porque quando a questionamos sobre o que ela poderia fazer com os valores anunciados na soma de novecentos e noventa e nove mais dois para ficar mais fácil esperávamos que, naquele momento, ela também arredondasse o número como fez com o oitocentos e noventa e nove. Essa passagem vem ao encontro das idéias apresentadas por Lethielleux (2001) quando afirma que o cálculo mental é um trabalho individual de desenvolvimento da memória, no qual cada sujeito possui estratégias diferentes que serão disponibilizadas no contato com o problema. Acrescentamos que a escolha por uma estratégia ocorrerá por iniciativa do sujeito e não por vontade de outrem.

A atividade 20 também denominada tabela de subtração tinha por objetivo identificar as relações que os alunos estabelecem entre os números de 1 a 20, possibilitando a mobilização de propriedades da subtração, além de contribuir com a memorização de alguns resultados.

Prevíamos que os alunos pudessem calcular algumas das subtrações da tabela a partir de reagrupamentos em torno de uma dezena, mobilizando o seguinte teorema em ação:

- *Para descobrir o resultado da subtração, basta decompor o número do subtraendo em duas partes, de modo que uma contenha o mesmo valor da unidade expresso no minuendo. Em seguida, realizar as subtrações, sendo que a primeira compreende as unidades iguais.*

Essa previsão de fato ocorreu, podendo ser considerado um teorema em ação em construção para AD que recorreu a essa estratégia quando a subtração proposta foi, por um lado, treze menos seis:

> AD: Eu faria assim: dividiria o seis em duas partes, três e três. Treze menos três dá dez, menos três dá sete.

E por outro lado, quinze menos oito:

> AD: Nessa conta do VT eu faria (pausa). Eu dividiria o oito em duas partes, cinco e três. Daí facilitaria a conta.

Outra estratégia prevista está relacionada a completar o valor do menor número anunciado para obter o maior, ou seja, completar o valor do subtraendo para obter o minuendo:

> CA: É menos seis né? Primeiro eu ficava com mais, ficava com sete mais quantos pra chegar ao treze.

Percebemos que CA já sabe que seis mais sete é igual a treze, por isso pode começar a contar a partir do sete para chegar ao treze.

Em outro momento, a mobilização dessa estratégia foi confundida com a decomposição associada à compensação:

> P:[..] dezessete menos nove.
> HG: Dezessete menos sete dá dez, não! (pausa) Pega o nove mais um vai dar dez,
> P: Você decompõe o dezessete em duas partes?

Antes que conseguíssemos completar a idéia, HG nos interrompe, pois percebe que estamos trazendo para sua fala elementos que não existiam:

> HG: Não! (risos) Do nove pra chegar a dez falta mais um, daí vai ficar o sete, daí pega o sete mais um.

Em nossa compreensão HG estava fazendo o seguinte:

17-9=
(10+7) - (9+1)= → decomposição do dezessete e acréscimo de uma unidade ao nove
(10+7) -10=
(10-10)+7=
7+1=8 → compensação

Entretanto, ao analisarmos sua fala verificamos que ele compara os dois valores, na tentativa de torná-los iguais, ou seja, parece que HG busca igualar o dezessete com o nove:

Se eu somar uma unidade à quantidade nove vou obter dez, mas ainda falta acrescentar mais sete para chegar a dezessete. Então, se somando sete mais um posso saber quanto devo acrescentar ao nove para obter dezessete.

Alguns alunos recorreram a cálculos incorporados no seu repertório para obter resultados das subtrações propostas, fazendo uso da estratégia de completar o valor do subtraendo para obter o minuendo:

> D: É só pegar o nove mais nove que dá dezoito, depois menos um.
>
> LT: Eu faria assim: eu sei que nove mais nove é dezoito, só que é dezessete [...]. [Então] não é nove mais nove, é nove mais oito.

Observamos que ambos partem da soma de nove mais nove para descobrir quanto falta ao nove para atingir dezessete. Ao comparar dezoito com dezessete, percebem que esse último é uma unidade maior. Logo, ao invés de somar nove mais nove, é preciso somar nove mais oito para obter a quantidade desejada. Essa estratégia também é usada por outra aluna quando propusemos o cálculo treze menos seis:

> GV: Se eu sei que doze menos seis é seis. Como é treze [...] [basta] aumentar um que fica sete.

Pudemos observar também no decorrer da sessão dedicada à exploração da atividade 20 que os alunos recorreram a estratégias que não haviam sido cogitadas para a resolução da mesma, mas que já haviam sido utilizadas em outros momentos da experimentação. Dentre elas destacamos as ligados à:

- Decomposição visando obter uma dezena inteira:

> GV: Eu pego uma dezena que é dez. Aí eu tiro o nove [...] [e] vai sobrar um. Aí eu pego o sete mais um que dá oito.

Ao usarmos o registro numérico na fala de GV é possível perceber o uso dessa estratégia com mais clareza:

(10+7) -9
(10-9) +7
1+7=8

Outro aluno também demonstra fazer uso dessa estratégia, só que decompondo o subtraendo ao invés do minuendo:

> PE: Eu faço menos sete [e] depois menos dois.

Em registro numérico representamos essa transcrição da seguinte maneira:

17-9=
17- (7+2)=
(17-7)-2=
10-2=8

- Compensação:

> GF: Eu faria assim: diminuiria três do treze e daria dez. Dez menos seis dá quatro, daí eu aumento o três que eu tirei.

Ao observarmos a frase inicial do excerto inferimos que GF decompõe o seis em três mais três, depois subtrai três de treze e obtém a quantidade dez. Contudo, a frase seguinte apresenta uma estratégia ligada à compensação, que pode ser representada da seguinte maneira:

13-6=
(13-3)-6=
10-6=
4+3=7

Além desses, percebemos uma estratégia ligada à contagem regressiva do valor do minuendo associada à marcação nos dedos da quantidade a ser subtraída.

> P: MAR, dezessete menos nove.
> MAR: (silêncio)
> P: Conta para a gente o que você está pensando. Como você está fazendo para chegar ao resultado?
> MAR: To contando de um em um.
> P: A partir de que número?
> MAR: Do dezessete.
> P: Contando de um em um ou tirando de um em um?
> MAR: Tirando.
> P: Então vamos lá!
> MAR: Dezesseis, quinze, quatorze, treze, doze, onze, dez, nove, oito (associa a contagem aos dedos).

Observamos pelo excerto acima que o último número anunciado na contagem regressiva representa o resultado da subtração proposta (dezessete menos nove). Essa estratégia também foi usada por ML ao final da sessão para efetuar doze menos seis. Porém, a mesma não precisou anunciar em voz alta a seqüência da contagem como fez MAR, apenas mexeu com os dedos enquanto realizava o cálculo proposto.

Na atividade 21, os alunos deveriam subtrair uma quantidade exata para chegar à dezena inteira inferior ao número dado.

Supúnhamos que os alunos iriam perceber que bastava subtrair o valor da unidade mais uma dezena para obter a dezena inteira inferior ao número dado. Isso aconteceu logo nos primeiros cálculos e as formulações apresentadas pelos alunos para essa estratégia, apesar de serem variadas, remetiam a essa suposição:

> CA: O número [...] era sessenta e dois né?! É só colocar o um e o número que está do lado.
> AC: É só pegar a unidade mais dez.

> AD: Eu não preciso fazer conta, mas se eu tivesse que fazer a conta eu tiraria primeiro o dez, depois o dois. Seria mais fácil.

Apesar de expressarem a estratégia prevista, percebemos nos excertos acima diferentes níveis de domínio do sistema de numeração decimal. CA e AD parecem lidar com os algarismos sem relacioná-los ao valor posicional ou à ordem que os mesmos ocupam. Diferentemente do que faz AC, que formula uma regra que pode ser entendida mesmo sem visualizarmos o número em questão e pode ser aplicada em outras situações.

Dentre os alunos interpelados, ML mais uma vez nos chama a atenção por não conseguir acompanhar o desenvolvimento das atividades. Quando questionada sobre a dezena exata inferior a quarenta e cinco o silêncio predominou. Ao percebermos sua dificuldade formulamos uma pergunta intermediária, de modo a auxiliar o pensamento de ML:

> P: Qual a dezena exata abaixo de quarenta e cinco ML?
> ML: (silêncio) Trinta?!

Validamos sua resposta ao perguntarmos quanto temos que tirar de quarenta e cinco para chegar a trinta. Naquele momento tínhamos a intenção de ajudá-la a resolver a questão inicial e não de criarmos mais uma dúvida. Entretanto, a resposta de ML deixou claro que nossa ajuda foi insuficiente, pois disse que tínhamos que tirar cinco de quarenta e cinco para chegar a trinta.

Nesse momento percebemos que GV sussurra o resultado correto e passamos a palavra para que explique como chegou a ele. Cabe ressaltar que outros alunos desejavam participar da discussão, porém a escolha por GV não foi aleatória. Queríamos que ela expressasse sua compreensão sobre a atividade, tendo em vista que a mesma apresentava dificuldades ao longo das sessões desenvolvidas.

> GV: Tem que tirar quinze.
> P: Quinze por que GV?
> GV: Porque é quarenta e cinco. Para chegar ao resultado você tira um do quatro, que é dez. Aí você tira o cinco.

Pela explicação fornecida por GV é possível inferir que houve compreensão da estratégia apresentada anteriormente pela turma. Além disso, parece que a mesma quer deixar claro que esse um que está sendo tirado vale uma dezena, demonstrando certo domínio do sistema de numeração decimal.

Após as explicações de GV voltamos a questionar ML, pois acreditávamos que isso a ajudaria entender o que parecia obscuro quando disse que teria que tirar cinco de quarenta e cinco para atingir trinta. Sendo assim, reinvestimos nessa questão:

> P: ML, se eu tirar só cinco unidades eu vou chegar a que valor?
> ML: (silêncio)
> P: Se eu tirar só cinco de quarenta e cinco, em que número eu vou chegar?
> ML: Quarenta!
> P: Falta mais quanto para eu chegar a trinta.
> ML: Dez.

Quanto à atividade 22, relacionada às subtrações com números formados apenas por unidades no subtraendo, observamos as estratégias previstas sendo mobilizadas pelos alunos no decorrer das cinco sessões destinadas a exploração da mesma.

Verificamos que quando o algarismo da ordem das unidades do minuendo era maior que o expresso no subtraendo, os alunos recorreram à decomposição aditiva do minuendo e subtraíram os números contidos na ordem das unidades:

> P: Como você fez [oitenta e cinco menos três]?
> AD: Porque eu sei que dois mais três é cinco, então cinco menos três vai ser dois

É possível notar que AD subtrai apenas os valores das unidades, mantendo o valor da ordem das dezenas. Essa estratégia fica evidente no excerto a seguir, quando JR é solicitado a explicar como obteve oitenta e dois para o cálculo oitenta e nove menos sete.

> JR: Porque eu sei que nove menos sete dá dois. Aí é só pegar a dezena.
> P: Precisa mexer no valor da dezena?
> JR: Não, eu só dividi (pausa). Dividi não! Subtrai os números que estão no final.

Além de fazerem uso da decomposição aditiva do minuendo observamos que os alunos recorrem a resultados disponíveis na memória para efetuarem as subtrações dos valores das unidades. Isso parece patente quando usam a expressão "eu sei" para explicar a estratégia adotada.

Outros, porém, percebem quando o valor da unidade do minuendo é maior que o do subtraendo e usam a idéia de completar, ou seja, “[...] o cálculo começa por uma parte e vai sendo completado até chegar ao todo” (TOLEDO e TOLEDO, 1997, p.110.

> CA: Em todo tipo de subtração só de unidade eu faço de mais até chegar ao número que é. Tipo: se for nove menos quatro eu faço cinco, seis, sete, oito, nove (associa a contagem ao movimento dos dedos).

Essa idéia de completar, em alguns casos, foi associada ao movimento dos dedos, como ilustra a transcrição acima.

Ao término da terceira sessão, na qual voltou a aparecer subtrações que correspondiam aos critérios anunciados anteriormente (valor da ordem das unidades do minuendo maior do que o do subtraendo) um teorema em ação foi anunciado (Quando o número anunciado no minuendo tiver um valor numérico na ordem das unidades superior ao expresso no subtraendo não é preciso realizar trocas, alterando o valor da ordem das dezenas) e acompanhado de um exemplo:

> HG: Que todo número até o nove que for maior que o outro não precisa mexer com a dezena.
> GF: Tipo cinqüenta e nove tira quatro, não vai precisar mexer com a dezena.

Quando o algarismo da ordem das unidades do minuendo era menor que o expresso no subtraendo observamos, por um lado, a decomposição do valor do minuendo:

> AD: [...] eu já sei de cabeça que seis mais oito dá catorze e eu também já sei que catorze menos seis dá oito. Então, se eu sei que catorze menos seis dá oito, cinqüenta e quatro menos seis dá quarenta e oito. Porque só vai mudar a dezena.

Essa transcrição pode ser representada em registro numérico da seguinte forma:

54-6=
(40+14)-6=
40+(14-6)=
40+8=48

É possível observar que a decomposição do minuendo está implícita na fala de AD, pois a grande preocupação do mesmo é anunciar uma regra: Se seis mais oito dá catorze, então qualquer número terminado em quatro, tirando seis, o final vai ser oito. Alteramos a variável numérica apresentada, propondo outras situações para que AD pudesse validar sua formulação, tais como: cento e vinte e quatro menos seis; quinhentos e cinqüenta e quatro menos seis. Diante dos cálculos propostos AD não hesitou para anunciar as respostas. Contudo, quando propusemos cento e trinta e quatro menos dezesseis uma dúvida surgiu:

> AD: Aí já muda a coisa (risos) Não! Muda não! Dá cento e vinte e oito.
> P: Será?! Vamos lá! Menos dezesseis...
> AD: Ah, tá! Então é cento e dezoito.

Acreditamos que nossa intervenção possibilitou o retrospecto das estratégias adotadas e a recuperação dos cálculos para que pudesse apresentar o resultado correto. Após a resposta de AD buscamos sistematizar as informações para que todos pudessem acompanhar o que havia ocorrido:

> P: O final continua oito, pois não tem outro número que somado a seis dá final quatro na unidade. Só que aqui acontece o que com a dezena?
> AD: Tira dois.

Em seguida, perguntamos à turma que conclusão poderia ser tirada da regra apresentada por AD e obtivemos as seguintes respostas:

> NT: Todo número terminado com quatro é que quando tira seis dá oito.
> [...]
> HG: Porque oito mais seis vai dar catorze.

Apesar de NT conseguir exprimir a regra, também revelou uma dúvida quanto à extensão da mesma:

> NT: Também vale para seis menos quatro?

Cabe ressaltar a maneira como fizemos a devolução do problema, pois ao invés de fornecermos a resposta para a pergunta elaborada, deixamos isso a cargo da turma, que estava querendo encontrar uma resposta:

> P: Será que se eu inverter a ordem, colocar cento e vinte e seis menos quatro, essa regra vale?
> A: Não!

> AD: Não, porque o quatro é menor que o seis.

Essa questão de aplicar a regra quando invertemos a ordem dos algarismos expressos na ordem das unidades reapareceu, na sessão seguinte, quando essa regra foi retomada:

> JR: Você falou: cinqüenta e quatro menos seis dá quarenta e oito. Se inverter cinqüenta e seis menos quatro, não dá o resultado que você quer.

E também na sessão subseqüente a essa, quando uma nova regra foi introduzida:

> RO: E se inverter? E se for vinte e seis menos dois?
> P: E se for vinte e seis menos dois? O que você acha? A regra do HG vai dar certo?
> RO: Não! Vai dar quatro.
> HG: É porque seis é maior que quatro.

Por outro lado, quando o algarismo da ordem das unidades do minuendo era menor que o expresso no subtraendo, observamos também a decomposição do valor do subtraendo, de modo que os valores das unidades, tanto do minuendo quanto do subtraendo, ficassem iguais. Essa estratégia foi empregada pela primeira vez por GF, na sessão inicial destinada a exploração dessa atividade (subtrações com números formados apenas por unidades no subtraendo):

> GF: Eu faria assim: setenta e quatro menos nove? Eu faria menos quatro e depois menos cinco.

Na sessão seguinte ele voltou a aparecer e dessa vez foi trazida por AN:

> AN: Podia fazer assim: pegar o seis, tirar dois dele e ia ficar só quatro.
> P: Faria cinqüenta e quatro menos seis. Pega o seis e decompõe (faço o registro no quadro).
> AN: Daí fica quatro. Daí tira [e] fica cinqüenta, porque diminuiu quatro. Daí tira o dois, diminui de cinqüenta [e] fica quarenta e oito.

Cabe ressaltar que o cálculo foi direcionado a outro aluno, mas AN demonstrou interesse em apresentar sua forma de resolução, diferentemente do que ocorria nas primeiras sessões, nas quais sua participação era condicionada a responder as perguntas que direcionávamos e jamais por vontade própria, como presenciamos nessa sessão.

Na terceira sessão de exploração da atividade CA traz essa estratégia de decompor o valor do subtraendo quando apresentamos o cálculo quarenta e seis menos oito:

> CA: Daquele mesmo jeito: quarenta e seis menos oito. Aí faz quarenta e seis menos seis, [que é igual a] quarenta. Depois menos dois.

Quando CA afirma que fez seu cálculo daquele mesmo jeito, está se referindo a estratégia mencionada rapidamente por GF no início da sessão ao calcular cinqüenta e quatro menos seis:

> GF: Eu diminuí quatro [do cinqüenta e quatro e] depois diminuí [o] dois [que faltava para completar seis]. Eu também tenho outro jeito. [...] Cinqüenta e quatro eu coloco menos catorze, dá quarenta, aí eu coloco mais oito.

Percebemos que a grande preocupação de GF era apresentar a compensação, tendo em vista que a decomposição vinha sendo bastante discutida pela turma. A estratégia ligada à compensação só foi mobilizada mais uma vez, logo após CA explicar como chegou ao resultado do cálculo proposto:

> PE: Eu faço quarenta e seis menos dez, que vai dar trinta e seis. Depois mais dois.

Ressaltamos que a compensação havia sido usada nos cálculos relacionados à adição. Quando os alunos queriam, por exemplo, calcular trinta e dois mais nove, geralmente, faziam trinta e dois mais dez e no resultado tiravam uma unidade, ficando assim representado:

32+9=
32+(9+1)=
32+10=
42-1=41

Contudo, a aplicação dessa estratégia na subtração não pode obedecer ao mesmo critério: acrescentar e depois retirar no resultado. Isso foi percebido pelos alunos quando fomentamos a discussão:

> P: Na adição quando a gente compensava, a gente somava e depois no resultado tirava. Se fosse doze mais quatro (registro no quadro):
>
> 12+4
> 12+(4+1)
> 12+5
> 17-1=16
>
> Aqui na subtração essa regra vale: colocar e tirar?
> PE: Sim! (silêncio) Não!!

PE muda de opinião após olhar os registros envolvendo a compensação ligada à adição e à subtração expostos no quadro. Aproveitamos essa passagem para chamar a atenção de todos, de modo que percebessem que a compensação aplicada à subtração deveria funcionar de forma diferente da que ocorre na adição.

> P: Alguém quer dizer algo a respeito disso: na adição quando eu acrescento, eu tiro no resultado. Na subtração, quando eu acrescento também acrescento o mesmo valor no resultado.
> MAR: Para fazer essa estratégia é diferente [a] adição com subtração, porque na adição você diminui no final e aquele lá (referindo-se à subtração) não pode. Porque senão vai ficar diferente

Naquele momento parece que essa questão ficou resolvida. Entretanto, só é possível afirmar isso quando essa estratégia for mobilizada novamente.

Em relação à estratégia de decomposição do subtraendo, esse voltou a aparecer na quarta sessão em diferentes momentos. Primeiramente, no início da sessão, quando propusemos para AN calcular cinqüenta e dois menos seis e o mesmo, mais uma vez, demonstrou destreza ao usar tal estratégia:

> AN: Eu peguei o seis tirei dois e aí vai ficar quatro. Daí eu tirei o dois do cinqüenta e dois que vai dar cinqüenta, daí menos quatro que vai dar quarenta e seis.

No final dessa sessão essa estratégia foi trazida por PE e LT. No caso de PE, vale destacar que outro aluno percebeu imediatamente a estratégia que havia sido adotada e fez questão de explicar para a turma o que tinha sido feito:

> PE: Eu faço quarenta e dois menos dois.
> JR: Ele decompõe o seis em dois mais quatro

É interessante notar que a linguagem trazida por JR era a mesma que costumávamos adotar quando algum aluno mobilizava tal estratégia.

Para LT, a explicação da estratégia adotada permitiu, sob nossa intervenção, que ela percebesse que havia apresentado um resultado errado para o cálculo proposto:

> P: Oitenta e dois menos cinco.
> LT: Setenta e seis.
> P: Como você chegou nesse resultado?
> LT: Primeiro eu tirei o dois, depois eu tirei o três.
> P: Você pegou o cinco e decompôs em três mais dois, tirou o dois que dá oitenta. Depois tirou o três, que dá quantos LT?
> LT: Setenta e sete. Eu fiz errado!

Além das estratégias mencionadas também verificamos a presença de outras, mobilizadas com menor freqüência e por um número restrito de alunos, tais como:

- O uso da contagem regressiva, quando o cálculo proposto era cinqüenta e quatro menos seis.

> P: Como você chegou ao quarenta e oito?
> GV: É só você contar de trás para frente.
> P: Então conta para a gente. Você fez como?
> GV: cinqüenta e quatro, cinqüenta e três, cinqüenta e dois, cinqüenta e um, cinqüenta, quarenta e nove, quarenta e oito.
> P: Como você sabe qual a hora de parar a contagem [...]?
> GV: Porque óh: chega ao quarenta e nove e já dá cinco (faz um gesto com os dedos)

- A descoberta e/ou recordação de regularidades quando o algarismo da ordem das unidades do minuendo era menor que o expresso no subtraendo:

> HG: O número que termina com dois menos seis vai dar um número que termina com seis. [...] É por causa que seis vezes dois é doze.
> [...]
> JR: É igual a gente fez na aula passada. Não era cinqüenta e quatro menos seis?[...] Sempre que tiver quatro no final do primeiro número e a gente for fazer menos seis, vai dar um resultado que no final vai dar oito.
> P: Por que JR?
> JR: Porque a gente sabe que catorze menos seis vai dar oito.

É interessante notar que a regularidade anunciada por HG foi retomada ao final da quarta sessão destinada à exploração da atividade 22, quando propusemos a ML calcular quarenta e dois menos seis. Enquanto ML tentava resolver, CA sussurrou que aquela idéia estava aparecendo de novo.

> P: [...] Que idéia é essa?
> CA: A idéia do HG. Quando a unidade é dois menos seis aí o resultado tem que terminar com seis. Trinta e seis.

Ao anunciar a resposta ao cálculo proposto CA emite risos de contentamento, os quais, supomos, sejam decorrentes do fato do mesmo ter se lembrado da regra e acertado o resultado.

Observamos ainda o surgimento de uma regra, aparentemente nova:

> P: MAR, oitenta e dois menos cinco.
> MAR: Oitenta e dois menos cinco vai dar (pausa) setenta e sete.
> P: Como você chegou a esse resultado?
> MAR: É que eu sei que depois do cinco para chegar ao sete falta dois e daí eu acrescento o sete no final. [...] É que um dia eu descobri isso fazendo uma conta: se eu somar o cinco mais o último vai dar, mas não vai dar com cinco mais cinco.
> P: Por que essa regra [...] dá certo?

Apesar do ineditismo da regra que fornece o resultado de uma subtração envolvendo o algarismo cinco na ordem das unidades do subtraendo, percebemos que a mesma possuía estreita relação com as regularidades discutidas na última sessão. Isso, porém ainda não era perceptível pela turma, por isso a instigamos a pensar sobre o assunto:

> P: Eu sei que o número é oitenta e dois menos cinco. Soma esse com esse (2+5) dá sete e tira um da dezena. Vamos lembrar o que a gente fez ontem e alguns dias atrás.
> AD: Ontem teve a regra do HG e segunda-feira a regra que eu fiz.
> P: Qual a relação dessas regras com essa da MAR?
> AD: Na Matemática, todo número que você somar ou subtrair vai dar o mesmo resultado sempre. A maioria.

AD, ao responder a pergunta proposta, tenta formular uma lei Matemática, mas percebe que está generalizando demais e tenta minimizar sua afirmação. Porém, não consegue ser claro o suficiente para ser compreendido pela turma, por isso, retomamos sua fala referente às regras para fomentar a discussão:

> P: No cinqüenta e quatro menos seis, o que vai aparecer no resultado?
> AD: Oito.
> P: Por quê?
> AD: Porque catorze menos seis é oito.
> P: Vamos ver aqui agora: oitenta e dois menos cinco.
> AD: Sete no final. Porque cinco mais dois é sete.
> P: Ou?
> GF: Doze menos cinco é sete.

Apesar de sabermos que deveríamos permitir que os alunos estendessem essa formulação a outras subtrações com o cinco no algarismo na ordem das unidades, validamos rapidamente a afirmação de GF. Porém, ao percebermos o que tínhamos feito tentamos corrigir nossa conduta:

> P: Então, essa regra da MAR vem daqui também. Isso vale para setenta e quatro menos cinco? Catorze menos cinco?
> AD: Nove.
> P: Setenta e três menos cinco?
> AD: Oito.

Ressaltamos que, só é possível afirmar que essa discussão fez sentido quando a turma voltar a mobilizar essa estratégia em outras situações, como possivelmente ocorreu nos casos JR e CA. Especificamente no caso de CA, observamos que o mesmo parece se reportar a estratégia mobilizada por um colega em dois momentos distintos. Primeiramente, na passagem descrita anteriormente, quando HG afirma que numa subtração em que o minuendo contém o algarismo dois e o subtraendo o algarismo seis, ambos na unidade, obteremos nessa mesma ordem o algarismo seis como resultado. Além disso, na última sessão destinada à exploração da atividade 22, que desencadeou o aparecimento dessa estratégia, CA faz uso da idéia de HG para realizar outro cálculo:

> CA: O número setenta e três menos seis, é que eu ia falar que ia dar a mesma regra do HG, mas aí eu pensei bem. Mas é só tirar um (pausa).
> P: Aqui (registro no quadro setenta e três menos seis).
> CA: Aquela regra do HG.
> P: Tem que dar quanto no final?
> CA: Hummm! Vai ter que dar seis?!
> P: Seis?
> CA: Dá sete, mas na regra do HG ia ter que dar seis, não é? [...] quando é setenta e dois menos seis, deu seis no final. No setenta e três menos seis é só somar mais um ao resultado, por causa do três.

É possível notar que a estratégia proposta por HG além de ser compreendida por CA, parece ter sido ressignificada, pois foi colocada em ação em outra situação. Acreditamos que isso possa ser considerado como indício de aprendizagem, haja vista que a adaptação produziu um saber e se manifestou por uma resposta nova (BROUSSEAU, 1986).

Em relação à atividade 23, destinada a exploração de cálculos ligados à subtração com números no minuendo que, por um lado, não necessitavam de decomposições das dezenas em unidades e, por outro, possuíam o valor da ordem das unidades ou o valor da ordem das dezenas semelhante ao expresso no subtraendo, observamos várias estratégias sendo mobilizadas.

Dentre eles destacamos a percepção da regularidade dos números anunciados quando os valores expressos em alguma das ordens dos números envolvidos eram coincidentes. Isso, de certa forma, agilizou os cálculos, permitindo aos alunos operar apenas com os valores diferentes, tendo em vista que, no resultado, o zero iria ocupar o lugar dos valores iguais. Diante disso, os teoremas em ação subseqüentes puderam ser mobilizados:

- *Se os algarismos das dezenas são iguais, então basta subtrair as unidades dos números dados.*

> HG: [...] Eu tiro primeiro os dois vinte [dos números vinte e sete e vinte e dois]. Aí fica sete menos dois, [ou seja, eu] tiro o dois do sete.

- *Se os algarismos das unidades são iguais, então basta subtrair os algarismos das outras ordens dos números dados.*

> GA: Trinta e nove menos vinte e nove é só tirar [o valor da] unidade [dos dois números], porque uma unidade está igual a outra

A mobilização desses teoremas se fez presente em outros momentos, porém alguns alunos quando questionados sobre a estratégia adotada acreditavam que haviam errado e, dessa forma, víamos a instabilidade instaurada:

> P: Como você chegou a trezentos e vinte?
> JR: Ah! Quer dizer, não é trezentos e vinte.
> P: Quer que eu coloque no quadro?
> JR: Rapidão! Eu me confundi!
> P: (escrevo no quadro o que ele havia falado primeiro) Trezentos e cinqüenta e sete menos trinta e sete é igual a trezentos e vinte. Confere?
> JR: Sim!
> P: Como você chegou em trezentos e vinte?
> JR: Como eu sei que cinco menos dois da três, eu fiz cinqüenta menos trinta e depois eu coloquei o trezentos.

Verificamos nessa última fala que JR percebe, por um lado, que os algarismos das unidades são iguais e apenas subtrai os algarismos da ordem das dezenas. Por outro, lida com o trezentos e cinqüenta na forma decomposta (300+50), retomando o trezentos apenas no resultado. Entretanto, fica inseguro mais uma vez quando o questionamos sobre os motivos dessa escolha:

> P: Por que você não trabalhou com o valor da unidade?
> JR: Humm! Calma aí. Acho que está errado isso. Vai dar trezentos e seis.

Após JR mudar sua resposta outro aluno pede a palavra e emite sua opinião sobre o cálculo realizado:

> JD: Para mim é trezentos e vinte porque é trezentos e cinqüenta e sete, trezentos e quarenta e sete, aí vai trezentos e trinta e sete, aí trezentos e vinte e sete, aí menos sete por causa da unidade: trezentos e vinte. (tira trinta e sete mediante uma contagem regressiva de dez em dez a partir de trezentos e cinqüenta e sete para chegar em trezentos e vinte).

JR, ao perceber que a resposta de JD confere com a sua, emitida desde o início, mostra-se indignado:

> JR: Por que você me confundiu?
> P: Eu só queria saber porque você não mexeu com o sete.
> JR: Porque os valores são iguais.

Acreditamos que a instabilidade instaurada a cada questionamento proposto possa ser decorrente da ausência dessa prática na escola, que, muitas vezes, faz com que o professor priorize apenas o registro escrito, forneça apenas certo ou errado para as respostas dos alunos e desconsidere a importância da metacognição para a aprendizagem (RIBEIRO, 2002).

A instabilidade apontada também pôde ser percebida quando PE forneceu a resposta seiscentos e trinta para o cálculo quinhentos e sessenta e quatro menos trinta e quatro e foi imediatamente questionado por uma colega:

> NT: O quê??
> PE: Qual era mesmo o número?
> P: Espera um pouco, vou repetir. Quinhentos e sessenta e quatro menos trinta e quatro.
> PE: Aí, ela me fez perder a conta agora (demonstra-se impaciente por não conseguir anunciar o resultado). Quinhentos e vinte e seis.

PE mostra-se confuso com a abordagem e acaba fornecendo outra resposta, que é contestada por NT, que fornece rapidamente o resultado que acredita ser o correto: quinhentos e trinta. Nesse momento, procuramos não emitir nossa opinião e levamos os dois resultados para que os alunos se posicionassem:

> P: Deixa-me pegar os dois: quinhentos e trinta e o outro seiscentos e trinta (registro no quadro os dois números). NT, por que quando o PE falou seiscentos e trinta você disse logo: Não, não! Como você chegou ao quinhentos e trinta?
> NT: Porque é assim: eu fiz sessenta e quatro menos quatro. Aí eu fiz seis menos (pausa) tirei três e ficou quinhentos e trinta.
> PE: Eu errei!

Esse fragmento nos permite identificar, na fala de NT, o vestígio do teorema em ação que afirma que se os algarismos das unidades são iguais, então basta subtrair os algarismos das outras ordens dos números dados e acrescentar zero ao resultado na ordem da unidade. Além disso, ressaltamos que o tipo de intervenção do pesquisador/professor parece ter sido suficiente para PE perceber seu erro sem necessitar que o apontássemos. Isso porque PE ao ouvir a explicação da estratégia adotada por NT consegue perceber o erro que havia cometido no cálculo proposto.

Percebemos, também na atividade 23, cálculos ligados à idéia de completar,

> [...] de verificar quanto falta para se obter a quantia desejada. Essa idéia é também chamada de idéia aditiva, pois o procedimento consiste em partir da quantidade que se tem e ir adicionando uma unidade até se obter a quantidade desejada, em seguida, vê-se quantas unidades foram somadas e essa é a resposta (BITTAR e FREITAS, 2005, p. 63).

Em alguns casos essa idéia é acompanhada de gestos, o que, segundo Vergnaud (1990), ajuda a planificação e o controle da ação:

> CA: Eu conto do vinte e dois até chegar no vinte e cinco. Mais um, mais um, mais um. Aí quantas vezes der para completar até chegar no vinte e cinco, aí esse é o número que deu. Eu conto até chegar ao vinte e cinco.
> P: Como que você sabe que vai dar cinco?
> CA: Porque eu vou contando (mostra os dedos para explicar que eles acompanham a contagem).

Observamos também subtrações associadas à idéia de tirar, na qual "[...] apresenta-se um todo e dele se tira uma parte" (TOLEDO e TOLEDO, 1997, p.110):

> P: Trinta e nove menos vinte e nove.
> JD: Dez!
> P: Como você chegou a dez?
> JD: Eu fui contando da dezena para baixo: trinta e nove, vinte e nove, dezenove e depois nove, que sobrou dez.

Essa idéia tem semelhança com a contagem regressiva trabalhada nas atividades 16 e 17, porém as subtrações partem, inicialmente, de um intervalo de dez em dez, e é interrompida ao atingir o valor a subtrair. O trecho seguinte ilustra igualmente essa afirmação:

> P: Trezentos e setenta menos quarenta.
> CA: (silêncio) trezentos e vinte aí. Não! Trezentos e trinta.
> P: Como você chegou ao trezentos e trinta?
> CA: É que eu fui contando de dez em dez.
> P: Conta para a gente.
> CA: Trezentos e setenta: trezentos e sessenta, trezentos e cinqüenta, trezentos e quarenta, trezentos e trinta.

Conforme previmos o uso da decomposição foi recorrente na resolução dos cálculos dessa atividade, na qual observamos a mobilização do teorema em ação que diz: "*Se os valores dos algarismos das dezenas e/ou unidades do subtraendo são menores que os do minuendo, então o resultado da operação será sempre o valor do algarismo da centena do minuendo mais o valor obtido pela subtração dos outros algarismos dos números dados*". Os fragmentos a seguir elucidam essa afirmação:

> ME: O trezentos você finge que é zero, aí você faz o setenta menos quarenta que vai dar para saber que é trinta. Aí depois eu coloco os trezentos de volta.
> GV: Eu posso guardar o trezentos e só trabalho com a dezena, sete menos cinco vai dar dois. Assim fica mais fácil fazer a conta.

Observamos que os dois excertos trazem a decomposição, porém com diferente leitura. No primeiro, ME desagrega os algarismos obedecendo ao valor posicional no momento de subtrair trezentos e setenta menos quarenta. Isso pode ser representado em registro numérico da seguinte maneira:

370-40=

(300+70)-40=

300+(70-40)=

300+30=330

Já no segundo, GV parece lidar com os algarismos como se fossem dígitos separados, pois faz sete menos cinco quando o cálculo proposto é trezentos e setenta menos cinqüenta. Representamos esse cálculo assim:

370-50=

(300+70)-50=

$300+(7\cancel{0}-5\cancel{0})=$

300+20=320

Retomando o trecho da fala de GV é possível perceber que essa impressão fica dissolvida quando a mesma afirma que irá trabalhar só com o valor das dezenas. Essa afirmação parece trazer o teorema em ação explicitado na atividade 24: se os valores dos algarismos das unidades dos números anunciados é zero, então basta somar os outros algarismos e acrescentar o zero a ordem das unidades. No caso da atividade discutida, basta substituir a palavra somar por subtrair.

É possível verificar que esse teorema em ação foi recorrente para outros alunos no decorrer das duas sessões destinadas à exploração da atividade 23, que ao explicarem como executaram o cálculo proposto, indicaram o uso desse teorema. Os fragmentos seguintes elucidam essa afirmação:

> P: AN, oitocentos e cinqüenta menos trinta.
> AN: Oitocentos e cinqüenta menos trinta? Oitocentos e vinte.
> P: Como você chegou a oitocentos e vinte?
> AN: (risos) Oitocentos e cinqüenta menos trinta aí dá vinte. Que nem cinco menos três.
>
> P: Trezentos e setenta menos quarenta.
> [...]
> AD: Eu já sei que três mais quatro é sete, então sete menos quatro dá três.
> P: Por que você trabalhou só com o valor das dezenas?
> AD: Porque assim facilita

Notamos também que alguns alunos empregaram a estratégia de cálculo escrito efetuado mentalmente:

> P: ML, trezentos e setenta menos cinqüenta.
> ML: É (pausa) trezentos e vinte.
> P: Como você chegou ao [resultado] trezentos e vinte?
> ML: O zero menos zero é zero. Aí eu faço sete menos cinco que dá vinte, trezentos e vinte.

Sabemos que o trabalho com o cálculo mental pode contribuir para ampliar a capacidade de raciocínio dos alunos na elaboração de estratégias originais (BOULAY; LE BIHAN; VIOLAS, 2004). Contudo, como o uso do algoritmo tem, de certo modo, predomínio nas aulas de Matemática (MENDONÇA e LELLIS, 1989), parece natural presenciarmos essa estratégia voltando à tona em alguns momentos, mesmo após termos completado até ao final desse encontro trinta e sete sessões.

A atividade 24, destinada à exploração da adição, continha números com o zero nas ordens das unidades e/ou das dezenas em uma das parcelas ou nas duas e visava retomar as propriedades mobilizadas em atividades anteriores.

Dentre as estratégias previstas os alunos recorreram:

- à decomposição dos valores anunciados em centenas inteiras;

> AN: [...] Oitocentos e quarenta mais trezentos e trinta e seis? Mil (pausa) cento (pausa) setenta e seis.
> P: AN, explica para a gente como você chegou ao [resultado] mil cento setenta e seis.
> AN: É (pausa). **Eu tirei o quarenta e o trinta e seis. Trabalhei com o oitocentos e o trezentos**.
> P: E depois?
> AN: Eu aumentei quarenta mais trinta e seis, que dá setenta e seis. Depois, mil e cem mais setenta e seis.

- à decomposição dos valores em centenas e dezenas e à propriedade comutativa;

> P: LT, seiscentos e quatro mais quinhentos e oitenta e quatro.
> LT: Seiscentos e quatro mais?
> P: Vou repetir: seiscentos e quatro mais quinhentos e oitenta e quatro.
> LT: Mil cento e oitenta e oito.
> P: Como você chegou a esse resultado.
> LT: Eu fiz cinco mais seis vai dar onze, daí eu fiz oitenta e quatro mais quatro.

Observamos que AN e LT trazem também duas leituras para os valores expressos nas decomposições realizadas, conforme ilustram os trechos em negrito. O primeiro obedece à leitura do valor posicional:

840+336=
(800+300) + (40+36)=
1100+76=1176

Já o segundo parece lidar com os algarismos como se fossem dígitos isolados, porém quando realiza a leitura do resultado é possível verificar o princípio multiplicativo e o aditivo do sistema de numeração decimal em ação (mil cento e setenta e seis).

60**4**+5**84**

6+5 84+4
(11x100) + 88
1188

O recurso à propriedade comutativa ocorreu todas as vezes que o primeiro número anunciado era menor que o segundo número. No caso de LT, identificamos essa propriedade no cálculo de oitenta e quatro mais quatro.

Em relação à atividade 25, que propunha somas com os algarismos das unidades inferiores ou superiores a 10 ou somas com os algarismos das unidades e das dezenas superiores a 10, pudemos verificar o reinvestimento de estratégias mobilizadas anteriormente.

Conforme previamos, os alunos recorreram à decomposição dos números dados para obter valores redondos na dezena, depois realizar a soma desses valores e em seguida, acrescentar a esse resultado o valor da soma das unidades. O trecho seguinte ilustra essa afirmação:

> P: Quatrocentos e oitenta e três mais treze [...]
> AC: Para mim fica mais fácil assim: do oitenta e três tira o três e do treze tira o dez. [...] Daí eu faço quatrocentos e oitenta mais dez, daí dá quatrocentos e noventa. Aí é só somar três mais três que dá seis.

Além desse tipo de decomposição, que trabalha com os valores redondos das dezenas para depois acrescentar a soma dos valores da ordem das unidades, identificamos outras que indicam o reinvestimento de estratégias mobilizadas ao longo das sessões destinadas à exploração do bloco aditivo. Dentre elas destacamos algumas que puderam ser observadas na atividade 10, denominada tabela de adição:

- decompor um dos valores visando obter uma dezena:

> P: LT cento e vinte e seis mais oitenta e quatro.
> LT: (silêncio)
> P: Cento e vinte e seis mais oitenta e quatro.
> LT: (silêncio) Duzentos e dez.
> P: Explica para a gente como você chegou ao resultado.
> LT: Eu sei que seis mais quatro vai dar dez, aí ficou cento e trinta. [...] Aí eu somo cento e trinta mais oitenta, que dá duzentos e dez.

Identificamos que a decomposição parte de um cálculo automatizado (6+4=10) e, de certa forma, facilitou a busca do resultado.

- decompor um dos valores visando obter uma dezena e usar em seguida a propriedade associativa:

Para essa estratégia observamos a decomposição tanto da primeira parcela quanto da segunda. O excerto seguinte ilustra a decomposição da primeira parcela:

> AN: Quatrocentos e oitenta e três mais treze? (silêncio rompido pelo sussurro da conta anunciada) Quatrocentos e noventa e seis.
> P: O que você fez para chegar nesse número?
> AN: Eu tirei o três do quatrocentos e oitenta e três.
> P: Aí ficou quatrocentos e oitenta.

> AN: Aí eu aumentei treze, aí eu somei o três que sobrou com o quatrocentos e noventa e três. [...] Aí eu aumentei o três, aí ficou quatrocentos e noventa e seis.

O cálculo de AN pode ser representado em registro numérico da seguinte maneira:

483+13=
(480+3)+13 → decomposição visando obter uma dezena inteira
(480+13)+3 → uso da associatividade e comutatividade
493+3=496

Ao observarmos o excerto seguinte identificamos a decomposição da segunda parcela:

> AD: Eu faço quatrocentos e oitenta e três (pausa) aí eu tiro do treze o três e somo no oitenta e três, que vai dar quatrocentos e oitenta e seis, aí depois é só fazer mais dez.

Essa decomposição pode ser assim representada:

483+13=
483+(10+3) → decomposição visando obter uma dezena inteira
(483+3)+10 → uso da associatividade
486+10=496

Diante do exposto, acreditamos que os alunos perceberam que para um mesmo cálculo diferentes estratégias podem ser acionadas sem, portanto, interferir no resultado e experimentaram isso no decorrer das sessões.

- recorrer à propriedade comutativa e contar a partir do número maior:

> P: JR trinta e oito mais duzentos e oitenta e sete.
> JR: Trinta e oito mais duzentos e oitenta e sete? (Fica sussurrando a conta anunciada).
> P: Trinta e oito mais duzentos e oitenta e sete.
> JR: Cento e vinte e cinco. Quer dizer, trezentos e vinte e cinco. [...]
> P: Conta para a gente como você pensou.
> JR: Duzentos e oitenta mais trinta. [...] Que deu trezentos e dez. Aí eu fiz oito mais sete. Que dá trezentos e vinte e cinco.

Ao analisarmos a explicação, observamos que além da comutatividade, JR também faz uso da decomposição para calcular duzentos e oitenta mais trinta e parece recorrer à tabela de adição para acrescentar quinze ao valor trezentos e dez. Entretanto, quando nos remetemos ao trecho que apresenta o anúncio do resultado temos outro olhar sobre o cálculo realizado: “Cento e vinte e cinco. Quer dizer, trezentos e vinte e cinco”. Diante do exposto é possível deduzir que JR isolou o duzentos e calculou oitenta e sete mais trinta e oito, obtendo cento e vinte e cinco, sendo esse o primeiro resultado anunciado. Ao perceber que havia esquecido o duzentos, reformula o cálculo e apresenta o número trezentos e vinte e cinco como resposta final.

Essa segunda leitura do cálculo nos permite inferir que JR parece ter mobilizado o teorema em ação previsto que propõe: *Se apenas um dos números anunciados possui a ordem das centenas, então basta somar os valores dos algarismos das outras ordens e acrescentar ao resultado o valor correspondente a ordem das centenas.*

Identificamos, também, indício desse teorema em ação no excerto a seguir, quando CA após calcular cinqüenta e dois mais setecentos e vinte e quatro e fornecer novecentos e setenta e seis como resultado, é solicitado a explicar a estratégia adotada:

> CA: [...] Eu só fiz uma conta normal. **Tipo, comecei pelo sete, que era a coisa mais fácil**. [...] Eu fiz quatro mais dois, aí depois eu fiz dois mais cinco, que é igual a sete! (pausa) Eu errei ali (percebe o engano no valor da centena). É setecentos e setenta e seis. Por isso que fala que você deve começar de trás para frente.

Ao explicar o resultado percebemos que ele realiza outro cálculo, não estabelecendo conexão com o resultado anunciado anteriormente. Pela explicação conjeturamos que ele começou pelo sete, pois percebeu que não existia outro valor na centena que pudesse ser acrescentado e isso, de certo modo, parece ter facilitado o cálculo. Cabe ressaltar que, diante da dificuldade dos alunos em reter os números propostos, manifestada pelo burburinho da turma e pelas diversas solicitações do interpelado para que repetíssemos o cálculo, nos propomos a registrá-lo no quadro (52+724). Inferimos que o registro escrito, de certa forma, induziu a reprodução mental do algoritmo canonizado pela escola, e conjeturamos isso com base na transcrição acima, quando CA, por um lado, reproduz o cálculo realizado via algoritmo: “Eu fiz quatro mais dois [...] [e] depois dois mais cinco” e, por outro lado, percebe o engano cometido, ao final da explicação e remete à regra para o uso do algoritmo: “Por isso que fala que você deve começar de trás para frente”. Destacamos que essa regra de começar pela direita é restrita ao cálculo via algoritmo e parece que volta à tona quando os números propostos oferecem alguma dificuldade para serem efetuados mediante o uso do cálculo mental. Cabe destacar que, a tendência a reproduzir mentalmente o algoritmo canonizado quando existe o suporte escrito do cálculo ratifica os resultados encontrados por várias pesquisas, dentre elas a realizada por Butlen e Pezard (1992). Os autores pontuam que isso inibe o aparecimento de novas técnicas mentais e, por isso, sugerem que o trabalho coletivo oral seja privilegiado, conforme mencionamos na discussão dos dados do primeiro bloco, quando a reprodução mental do algoritmo apareceu pela primeira vez.

No decorrer das duas sessões destinadas à exploração da atividade 25, destacamos que a variável "tamanho dos números" interferiu na agilidade dos cálculos, tendo em vista que todos os algarismos das ordens das dezenas e das unidades eram diferentes de zero. Essa característica exigia, por um lado, um esforço maior da memória, que buscava na repetição constante do cálculo proposto um auxílio para encontrar o resultado exato e por outro, provavelmente instigou a reproduzir mentalmente o algoritmo, principalmente quando o cálculo era registrado no quadro.

Observamos também, a interferência da variável "tamanho dos números"nos cálculos da atividade 26, que trazia subtrações que visavam retirar centenas inteiras dos valores dados. Durante as duas sessões de exploração da atividade percebemos que alguns alunos solicitavam o registro escrito quando sentiam dificuldade em armazenar o cálculo proposto. Esse recurso acabou contribuindo para o emprego mental do algoritmo, como ilustra o fragmento a seguir:

> P: GV, setecentos e cinqüenta e nove menos cem.
> GV: (silêncio) Você pode escrever no quadro pra mim?
> P: Você acha melhor?
> GV: Harãm!
> P: Setecentos e cinqüenta e nove menos cem (repito o cálculo enquanto registro).
> GV: (pausa) Seiscentos e cinqüenta e nove?!
> P: Você fez o que para descobrir esse resultado?
> GV: É (pausa)! Eu abaixei o nove, o cinco e fiz sete menos um.

Após ouvir a explicação questionamos GV se o cálculo feito tinha relação com o algoritmo. Nesse caso, a suspeita foi imediatamente confirmada pela interpelada. Em outra situação, mostrada no excerto a seguir, o uso dessa estratégia foi detectado pelos colegas:

> P: RO, três mil e vinte e oito menos cem.
> RO: (silêncio) Espera aí! (pausa). Vai dar dois mil oitocentos e vinte e oito.
> P: Vamos lá! O número era três mil e vinte e oito menos cem (registro no quadro o resultado anunciado). Como você chegou ao resultado?
> RO: Eu fiz zero menos oito não vai dar nada, vai dar oito e zero menos dois também vai dar dois. Aí zero menos um, não dá e aí eu emprestei do

> três, ficou dois e o zero ficou dez. Dez menos um é oito e dois menos nada é dois.
> MAR: Ele fez o algoritmo na cabeça. Ele fez a continha do papel na cabeça. Ele primeiro fez: oito menos zero vai dar oito, dois menos zero vai dar dois e aí não tem como tirar um do zero. Então, ele pegou um do três, emprestou e vai ficar dez. Dez menos um vai ficar (pausa) nove.

MAR, além de refazer a estratégia adotada, também descobre a existência de um cálculo errado, pois RO subtrai um de dez e chega ao resultado oito.

Nessa atividade também era esperado que os alunos lidassem com os dois valores como se fossem redondos e somente ao final acrescentassem a quantidade restante ao resultado da subtração realizada, mobilizando o seguinte teorema em ação:

- *Se for pedido para retirar centenas inteiras do número dado, então basta lidar com os dois valores como se fossem redondos e ao final acrescentar o valor desprezado.*

Evidenciamos essa estratégia sendo usada pelos alunos em vários momentos. Ao propormos o cálculo dois mil e cinqüenta e quatro menos cem para AN, o resultado foi anunciado em poucos segundos e pela sua explicação pudemos identificar indícios da presença desse teorema em ação:

> AN: Eu tirei o cinqüenta e quatro, pra facilitar e tirar o cem. [...] Daí eu diminui cem e deu mil e novecentos, mais cinqüenta e quatro.

Cabe ressaltar que esse teorema em ação recorre à decomposição ou à compensação para efetuar os cálculos sugeridos, conforme observamos no trecho acima. Nesse caso, AN deveria calcular dois mil e cinqüenta e quatro menos cem e como pudemos verificar ele procedeu da seguinte maneira:

2054-100
(2054-54)-100
2000-100
1900+54=1954

Pela representação numérica presumimos que AN recorreu à compensação, tirando cinqüenta e quatro de dois mil e acrescentando-o ao resultado. Ao questionarmos sobre a razão que o possibilitou desconsiderar o número cinqüenta e quatro da subtração, ouvimos a manifestação de outro colega:

> CA: Porque tem dois zeros no final do cem.

Essa explicação traz embutida a idéia de que, se o subtraendo possui zero na ordem das unidades e dezenas, o minuendo irá preservar os valores contidos nessas ordens. Essa explicação também parece ter sido recorrente por outra aluna, em relação ao mesmo cálculo:

> AC: Eu tiraria o cinqüenta e quatro e os dois zeros do cem, aí ficaria vinte menos um.

Todavia, ao analisarmos a explicação de AC inferimos que a estratégia adotada faz uso da decomposição do número dois mil e cinqüenta e quatro como dígitos isolados, ou seja, subtrai vinte menos um e acrescenta o cinqüenta e quatro à direita do resultado.

Essa estratégia também é evocada por VT ao subtrair duzentos de trezentos e setenta:

> VT: Tipo: eu só peguei o três e o dois, como três menos dois é um.

Quando indagado sobre o motivo que o permitiu trabalhar somente com o valor da ordem das centenas afirmou que dessa forma era mais fácil. Essa resposta foi imediatamente complementada por um colega:

> JR: Eu sei! É porque, se tivesse falado duzentos e trinta e quatro, aí sim, eu mexeria na dezena, mas como você falou trezentos e setenta menos duzentos só ia mexer na centena. A dezena ia ficar igual.

Finalizando esse bloco, gostaríamos de ressaltar que, parece que o objetivo proposto inicialmente foi atingido, pois conseguimos identificar alguns conhecimentos dos alunos sobre as propriedades dos números e das operações e alguns teoremas em ação mobilizados no decorrer das vinte e cinco sessões destinadas à exploração de cálculos ligados ao campo aditivo. Discutiremos com mais profundidade os resultados encontrados no item 3.4.

4.3 – Bloco multiplicativo: atividades propostas

O terceiro bloco é composto de atividades que envolvem a multiplicação e a divisão e tem por objetivo investigar o conhecimento dos alunos sobre as propriedades multiplicativas (adição reiterada – 2x50 = 50+50= 100 e 4x50 =50+50+50+50= 100+100=200; associatividade e comutatividade – 40 x 2 = (4x10) 2 = (10x4)x2 = (4x2)x10=; 8x10 = 80; distributividade e decomposição aditiva ou subtrativa – 41 x 2 = (40 + 1) x 2 = 80 + 2 = 82); as propriedades das classes e ordens da escrita do Sistema de Numeração Decimal e possíveis teoremas em ação mobilizados pelos alunos ao desenvolver estratégias de cálculo mental envolvendo multiplicação e divisão de números naturais de variadas ordens.

Nas atividades de 27 a 30 são exploradas as tabuadas do 2 ao 9, ora pela multiplicação ora pela divisão, com intuito de favorecer a memorização e a construção das tabelas de multiplicação.

27. Qual é o produto?
(explorar as tabuadas do 2 ao 9)
3 x 6   8 x 4   8 x 5   2 x 9   6 x 5   4 x 7   9 x 8   3 x 7

28. Este resultado está na tabuada?
(explorar ao máximo as possibilidades das tabuadas)

48 está na tabuada do 6?	18 está na tabuada do 9?	36 está na tabuada do 6?
25 está na tabuada do 5?	28 está na tabuada do 9?	56 está na tabuada do 6?

29. Qual é o quociente?
(explorar as tabuadas do 2 ao 9)
42 : 6 - Quanto é 42 dividido por 6?
56 : 8   49 : 7   25 : 5   63 : 9   48 : 6   28 : 4

30. Decomposições multiplicativas:
Quais os números que multiplicados dão o resultado 30?
48   24   12   45   42   54   35

Para a atividade 27 é provável que os alunos:

- recorram à comutatividade para encontrar o produto de algumas multiplicações que ainda não estão disponíveis na memória:

8x5=

5x8=40

- realizem a decomposição em soma de um dos valores ligada à distributividade:

8x5=

(4+4) x5=

20+20=40

- recorram a cálculos já automatizados;

É possível observarmos a utilização da contagem de n em n quando um dos valores não for superior a 5, caso contrário essa estratégia demandará um tempo maior de cálculo ou poderá ser associado a outro:

3x6	8x7	
6+6=12	8x5= 40	(cálculos automatizados)
12+6 = 18	40+8 = 48	
	48+8 = 56	

Nas atividades 28 e 29 uma estratégia possível é o emprego da reversibilidade da tabuada, expressa quando os alunos respondem às perguntas propostas buscando o produto anunciado na tabuada dada, o que implica a mobilização dos seguintes teoremas:

- *Se multiplicando os fatores obtêm-se um produto então é possível obter um dos fatores dividindo o produto pelo outro fator.*
- *Se forem dados o produto e um de seus fatores então para obter o resultado da divisão desse produto pelo fator dado, basta encontrar um número que multiplicado por esse fator resulte no produto dado.*

A mobilização desses teoremas implica compreensão do princípio fundamental da divisão: "Numa divisão de dois números naturais, com o divisor diferente de zero, o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente somado com o resto" (BITTAR e FREITAS, 2005, p. 78).

Na atividade 30 é possível que os alunos procurem localizar primeiro os resultados nas tabuadas, podendo talvez a partir dessa informação recorrer à decomposição multiplicativa de um dos fatores ligada à distributividade. Por exemplo, quando o resultado anunciado for 54 é possível que anunciem primeiramente 6x9 e depois pensem em 18x3 e 27x3, pois são multiplicações provenientes da decomposição de um dos fatores ligada à distributividade: (3x2) x 9

Podemos observar também o emprego de teoremas em açãorelacionados às regras de divisibilidade, principalmente quando o número for par:

- *Se todo número par é divisível por 2 e se o resultado anunciado for par, então, basta dividir o número anunciado por 2 e descobrir decomposições possíveis para o resultado anunciado.*

Por exemplo: Se 48 é par, então 48: 2= 24, logo 24x2=48

A partir do emprego desse teorema em açãooutras decomposições multiplicativas podem ser evidenciadas, para a multiplicação 24x2, por exemplo:

(8x3)x2 (6x4)x2

16x3=48 8x6=48 12x4=48 6x8=48

As atividades 31, 32, 33 e 34 envolvem a multiplicação por 10, 100 e 1000 e visam, por um lado, contribuir para ampliar o repertório multiplicativo, mediante o uso de multiplicações examinadas anteriormente. Por outro lado, têm por finalidade explorar as regras automatizadas, algumas delas, ensinadas pela escola.

31. Multiplique por 10.

12 x 10	10 x 78	68 x 10	10x4
105 x 10	10 x 562	10 x 525	10 x 291
2800 x 10	10 x 8000	3045 x 10	4628 x 10

32. Multiplique por 10 os números anunciados e o próximo resultado também:

8	12	55	102

33. Multiplique por 100:

3 x 100	100 x 89	100 x 90	45 x 100
362 x 100	100 x 840	642 x 100	100 x 204
3524 x 100	5040 x 100	100 x 3852	100 x 6047

34. Multiplique por 1000:

302 x 1000	359 x 1000	3450 x 1000	1000 x 5864
523 x 1000	1000 x 253	1000 x 1200	1000 x 20 000

É possível que, para obter os resultados das multiplicações propostas, os alunos recorram aos seguintes teoremas:

- *Quando multiplicamos por 10 basta acrescentar um zero à direita do último algarismo;*
- *Quando multiplicamos por 100 basta acrescentar dois zeros à direita do último algarismo;*
- *Quando multiplicamos por 1000 basta acrescentar três zeros à direita do último algarismo;*

Nessas atividades o tamanho dos números é uma variável importante a ser considerada. Isso porque além de aplicar a regra, é preciso reorganizar o número mentalmente, de acordo com as ordens obtidas, e verbalizar sua leitura, fato que acreditamos ser facilitado quando se trata de números pequenos. Por exemplo, quando multiplicamos 8x10 o resultado oitenta é facilmente identificado, ao contrário da multiplicação de 8000x10, que resulta no número oitenta mil.

As atividades 35 e 36 envolvem a divisão por 10, 100 e 1000, contendo números com zeros à direita no dividendo.

35. Divida por 10 e os dois resultados também:

12 000	45 000 000
3 450 000	770 000 000

36. Divida por 10, 100 ou por 1000:

60 : 10	120 : 10	8590 : 10	10 000 : 10
320 : 10	1020 : 10	5080 : 10	245 000 : 1000
25 000 : 1000	25 700 : 100	13 800 : 100	250 700 : 100
2500 : 100			

A escolha dos números propostos favorece a mobilização do seguinte teorema em ação:

- *Para determinar o resultado da divisão de um número terminado em zero por 10 despreza-se o último algarismo da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa o resultado.*
- *Para determinar o resultado da divisão de um número terminado em dois zeros por 100 desprezam-se os dois últimos algarismos da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa o resultado e assim analogamente para números terminados em três zeros, quatro zeros, etc. ....*

Convém ressaltar que o teorema em açãoanunciado só é válido para números com zeros à direita, ou seja, o número a ser dividido por 10 deve conter ao menos o último algarismo da direita igual a zero; o número a ser dividido por 100 deve possuir ao menos os dois últimos algarismos da direita iguais a zeros e o número a ser dividido por 1000 ao menos os três últimos algarismos da direita iguais a zeros.

A identificação do número obtido no resultado é facilitada na presença de números pequenos, tendo em vista que após a retirada dos zeros à direita é preciso reorganizar mentalmente o número proposto para fazer a leitura. Por exemplo, ao dividir 2500 por 100 iremos obter vinte e cinco e ao dividir 250 700 por 100 o resultado será dois mil quinhentos e sete.

A atividade 37 contém multiplicações por 5, 50 ou 500 e permitem estabelecer relações com as multiplicações por 10, 100 ou 1000, propostas nas atividades 31, 32, 33 e 34, do seguinte tipo:

... : 5= ... x 10:2 ... : 50=...x 100:2 ...: 500 = ... x 1000:2

Essa estratégia consiste em multiplicar por 10, 100 ou 1000 e depois dividir o resultado por 2:

37. Multiplique por 5, 50 ou 500:

10x5	5x620	540x5	5x230
20x5	840x5	320x5	5x450
64x5	5x30	300x5	1000x5
152x5	5x263	1000x5	30005
3x50	18x50	50x50	
27x5	24x500	27x500	
39x5	39x50	39x500	
18x5	400x50	400x500	

Outras estratégias possíveis de serem empregadas pelos alunos para multiplicar por 5 estão ligadas:

- à associatividade e à comutatividade:

30x5=
(10x3)x5=
10x(3x5)
10x15=150

- ao cálculo sobre as dezenas e para em seguida aplicar a regra da multiplicação por 10, 100 ou 1000:

30x5=
3x5=15
150

- à adição reiterada:

30x5=
30+30=60
60+60=120
120+30=150

- à decomposição aditiva ou subtrativa seguida da distributividade:

64x5=
(60+4)x5=
(60x5)+ (4x5)
300+20=320

Essa estratégia também pode ser aplicada nas multiplicações por 50 e por 500, como podemos observar nos cálculos seguinte:

18x50=

(10+8)x50	(20-2)x50
500+400=900	1000-100=900

39x500=

(30+9)x500 (40-1)x500

15000+4500=19500 20000-500=19500

Para as multiplicações por 50 ou 500 podemos observar a mobilização de estratégias relacionadas à:

- Associatividade da multiplicação:

18x50	39x500
(10x5 + 8x5)x10	(30x5+9x5)x100
(50+40)x10	(150+45)x100
90x10=900	195x100=19500

- Decomposição multiplicativa ligada à associatividade:

18x50
(9x2)x50
9x(2x50)
9x100=900

Algumas estratégias podem ser mobilizadas somente quando o número for par:

- Divisão por 2, seguida da multiplicação por 10, 100 ou 1000:

18x5	18x50=	24x500
(18:2)x10	(18:2)x100	(24:2)x1000
9x10=90	9x100=900	12x1000=12000

- Decomposição multiplicativa em torno de 2 ligada à associatividade:

18x5=	18x50=	24x500=
(9x2)x5	(9x2)x50	(12x2)x500)
9x(2x5)	9x(2x50)	12x(2x500)
9x10=90	9x100=900	12x1000=12000

A atividade 38 contém divisões por 5 e isso demandará um domínio ainda maior da multiplicação do que o exigido nas atividades anteriores, tendo em vista que na divisão “[...] há uma regra que continua a ser geralmente implícita, que consiste em procurar o quociente maior que multiplicado pelo divisor seja menor que o dividendo [ou igual]” (BUENOS AIRES, 2004, p. 314, *tradução nossa*).

38. Divida por 5:

80 : 5	800 : 5	60 :5	325 : 5
100 : 5	90 : 5	180 : 5	115 : 5
1000 : 5	300 : 5	120 : 5	855 : 5

Para a atividade 38 o emprego das estratégias dependerá do número expresso no dividendo, conforme listado a seguir. Contudo, é necessário ressaltar que estamos considerando categorias numéricas relacionadas aos números naturais. Sendo assim, os números escolhidos só permitem divisões exatas, pois terminam em zero ou cinco.

Quando o dividendo possuir o algarismo zero na ordem das unidades é possível observar um divisão por 10 seguida de uma multiplicação por 2. Essa estratégia permite desprezar o último algarismo da direita e encontrar o resultado do cálculo proposto dobrando o valor do número residual:

80: 5
80: (5x2)
80:10=8
8x2=16

Quando o dividendo possuir o algarismo cinco na ordem das unidades é possível que ocorra, por um lado, uma multiplicação do número de dezenas por 2 e em seguida, o acréscimo de uma unidade ao resultado obtido:

115:5
11x2+1
22+1=23

Essa estratégia se justifica em função das decomposições realizadas no dividendo, ou seja, ao dividirmos 115 por 5 é possível realizar a seguinte estratégia:

115:5
(110+5):5
(11x10+5):5
11x2+1=23

Por outro lado, podemos observar uma decomposição aditiva do dividendo seguida de distributividade:

$$(100+10+5):5 \longleftarrow 115:5 \longrightarrow (100+15):5$$

(100:5)+ (10:5)+ (5:5) 20+2+1=23

(100:5) + (15:5) 20+3=23

Talvez esse última estratégia, que tem ligação com a decomposição que leva em conta a numeração decimal, seja mais recorrente devido a sua aplicação em outros cálculos propostos desde o início da seqüência, que de certa forma, pode proporcionar familiaridade e disponibilidade na memória (BUTLEN e PEZARD, 1992). É possível observarmos também decomposições em torno de resultados memorizados, como ilustra a segunda representação numérica acima.

A atividade 39 contém multiplicações de números de dois ou três algarismos por números de um algarismo ou vice-versa.

39. Multiplique um número de dois ou três algarismos por um número de um algarismo:

400x3	800x5	300x7	600x8
200x9	4x600	7x200	700x3
500x8	3x700	800x2	6x800
20x3	7x80	4x50	40x6
4x20	3x90	80x3	80x9
32x4	86x2	3x62	26x6
65x5	54x4	5x64	17x7
22x9	7x82	66x7	5x43
230x4	520x3	170x5	410x5
250x7	340x6	450x3	610x4
180x3	260x5	280x2	520x7
320x5	120x7	190x3	340x6

Tal atividade favorece a retomada de estratégias mobilizadas anteriormente, de modo a verificar a estabilidade (ou disponibilidade) dessas estratégias que trazem indícios de aprendizagem (BROUSSEAU, 1986):

1. Associatividade;
2. Adição reiterada;
3. Cálculo sobre as dezenas e aplicação da regra da multiplicação por 10, 100 ou 1000;
4. Multiplicação por 10 seguida de uma divisão por 2, quando um dos números envolvidos for 5:
5. Decomposição aditiva ou subtrativa seguida da distributividade.

A atividade 40 contém divisões exatas com números de dois algarismos por um número de um algarismo.

40. Divida um número de dois algarismos por um número de um algarismo:

66 : 6	84 : 7	72 : 4	75 : 5
98 : 7	90 : 6	63 : 3	84 : 3
99 : 9	95 : 5	52 : 4	48 : 3
93 : 3	68 : 4	78 : 6	88 : 4
64 : 4	91 : 7	96 : 8	80 : 5

Dentre as estratégias é possível que os alunos obtenham o resultado mediante:

- A busca do resultado por ensaios sucessivos:

84:7=
10x7=70
11x7=77
12x7=84

- A investigação dos múltiplos do divisor por multiplicação e subtração.

84:7=
7x10=70
84-70=14
7 x? ⟶ =14 Que número vezes sete é igual a catorze?

Então o quociente de 84:7 é 10+2=12

Este modo de cálculo parece mobilizar o seguinte teorema: *Para saber o resultado da divisão basta multiplicar o divisor por dez e, em seguida, descobrir quanto falta para chegar ao dividendo do cálculo proposto e buscar esse valor na tabuada.* O resultado da divisão será a soma da quantidade dez ao valor que multiplicado pelo divisor complete o número expresso no dividendo.

- O emprego da distributividade da divisão:

84:7=
(70+14):7=
(70:7)+(14:7)=
10+2=12

Na atividade 41 os alunos devem multiplicar números com dois algarismos no multiplicando e no multiplicador.

41. Multiplique os números:

11x11	12x12	26x11	11x45	17x15
14x11	18x12	42x21	35x12	34x15
25x19	14x18	35x49	64x19	12x15
50x19	25x18	51x69	30x38	15x15

Essa atividade permite que as multiplicações com números redondos sirvam de apoio para multiplicações com outros números particulares (BUENOS AIRES, 2006), por isso os números foram escolhidos de maneira a poder mobilizar estratégias de cálculo diversificadas, tais como:

- Decomposições aditivas ou subtrativas em torno da dezena inteira, seguida da distributividade e, em alguns casos, da compensação:

25x19

25x (20-1)
25x20-25x1=

500-25=475

14 x11

14 x (10+1)
140+14=154

Essa estratégia é bastante eficaz quando um dos números a ser multiplicado terminar em 1, 2, 8 e 9, pois se localizam próximos aos números redondos, como é o caso dos valores propostos para essa atividade, considerados números particulares .

Para valores terminados em 5 essa estratégia sofre uma pequena variação. Além de usar essa estratégia é preciso dividir por 2 um dos valores obtidos pela distributividade

17x15
17x(10+5+5)
17x(10+10)
(17x10) +[(17x10) : 2]
170+[170:2]
170+85=255

É possível verificar que essa estratégia denota domínio das propriedades da multiplicação mediante cálculo refletido e não apenas aplicação de regras (LETHELLIEUX, 2001).

A atividade 42 contém divisões por 50.

42. Divida por 50:

500 :50	2000:50	1500:50	7000:50
350:50	3000:50	6000:50	7250:50
150:50	1000:50	1200:50	2500:50

Os números escolhidos para compor essa atividade possuem, por um lado, zeros à direita no dividendo e por outro, possuem centenas ou unidades de milhar inteiras. Fato que permite a mobilização das seguintes estratégias:

- Desprezar o zero à direita do dividendo e do divisor e recorrer a resultados conhecidos:

500:50 =
50:5 =
Se 10x5=50, então 50:5 = 10

Esperamos que o teorema em açãomobilizado nas atividades 35 e 36 relacionado com a divisão por 10 de números com zeros à direita no dividendo, possa ser recuperado nessa atividade com as devidas ressalvas, pois após desprezar o último algarismo da direita é preciso localizar um número que multiplicado por 5 atinja o valor expresso no dividendo. Afinal, o número formado pelos algarismos restantes não representa o resultado, como ocorria nas divisões por 10.

- Quando o dividendo possuir zero à direita é possível observar uma divisão por 10 ou 100, seguida de uma multiplicação por 2, pois cinqüenta é metade de cem:

2000:100 = 20
20x2 = 40

A escolha por dividir por 10 ou 100 está relacionada à quantidade de zeros que o dividendo possui a sua direita.

A atividade 43 contém multiplicações por 25 e visam identificar a relação desse número com a multiplicação por 100 seguida da divisão por 4, de modo que percebam que multiplicar por 25 é igual a descobrir a quarta parte do produto do número anunciado após multiplicá-lo por 100.

43. Encontre o produto de um número multiplicado por 25:

4x25	18x25	50x25	25x62
16x25	44x25	28x25	68x25
24x25	25x52	48x25	84x25
36x25	100x25	25x46	25x66

Por um lado, a percepção dessa regularidade e, por outro, o fato de todos os números escolhidos serem pares, é possível presenciarmos a mobilização das seguintes estratégias:

- Multiplicar por 100 e depois dividir por 4:

25x36=
36x100=

3600:4=
(3000+600):4=
750+150=900

- Dividir por 4 e depois multiplicar por 100:

25x36=
36:4=
9x100=900

- Decomposição multiplicativa em torno do valor 4 seguida da associatividade:

25x36=
25x (4x9)
100x9=900

Na atividade 44 são exploradas divisões por 25.

44. Encontre o resultado das divisões por 25:

100:25	300:25	500:25	1200:25
75:25	125:25	600:25	1500:25
250:25	1250:25	175:25	675:25
150:25	400:25	1000:25	825:25

Dentre as estratégias mobilizadas possivelmente podemos observar:

- A investigação dos múltiplos do divisor por multiplicação e subtração.

75 : 25=
25x**2**=50
75-50=25
25x**1**=25
75:25=**3**

- A busca do resultado conveniente por ensaios sucessivos:

75:25=
25x2=50
25x3=75

- O emprego da distributividade da divisão:

75:25=
(50+25):25=
2+1=3

4.3.1 – Bloco multiplicativo: dados coletados

A exploração desse bloco teve início em agosto de 2008 com a atividade 27, que consistia em retomar os produtos das tabuadas do 2 ao 9. Para essa atividade previmos que os alunos recorressem a algumas estratégias relacionadas à:

- Comutatividade para encontrar o produto de algumas multiplicações que ainda não estão disponíveis na memória:

> P: JR, oito vezes sete.
> JR: Oito vezes quantos?
> P: Oito vezes o sete.
> JR: (sussurra a tabuada do sete, na tentativa de recordar o resultado). Eu sei! Cinqüenta e seis.

Percebemos que JR faz uso explícito da linguagem para recuperar na memória toda a tabuada do sete até obter o resultado do cálculo proposto. Acreditamos que outros alunos também usaram essa estratégia, tendo em vista a demora para anunciar o resultado, acompanhada, em alguns casos, de outros significantes, como os gestos (movimentos com os olhos e com a cabeça). Vergnaud (1990) afirma que o uso da linguagem e de outros significantes se faz presente em situações em que o sujeito precisa planificar e controlar uma ação que ele não domina, como ilustra o excerto acima.

Essa estratégia também apareceu atrelada à decomposição em soma de um dos valores ligada à distributividade:

> P: AC, oito vezes quatro?
> AC: (silêncio) Trinta e dois.
> P: Como você fez para descobrir?
> AC: Dezesseis mais dezesseis.
> P: Mas de onde você tirou o dezesseis?
> AC: Duas vezes oito.

Usando registro numérico representamos essa estratégia da seguinte maneira:

8x4 = 4x8
(2+2)x8
(2x8)+ (2x8)
16+16=32

Acreditamos que o uso da comutatividade, por um lado, implica no conhecimento de que é possível alterar a ordem dos fatores sem alterar o resultado, assim como ocorreu na exploração de algumas atividades do bloco aditivo. Por outro lado, permite a mobilização do seguinte teorema em ação: Se ao multiplicar **a** por **b** se obtém **c**, então multiplicando **b** por **a** também obteremos **c**.

- Decomposição em soma de um dos valores ligada à distributividade:

> P: GA, sete vezes quatro?
> GA: É (pausa) trinta e oito?!
> P: Como fez para descobrir?
> GA: Eu fiz primeiro duas vezes sete e depois duas vezes catorze.
> P: Duas vezes catorze dá quantos?
> GA: Vinte e oito.

A utilização dessa estratégia ocorreu quase sempre quando um dos valores correspondia ao número quatro, como ilustra o trecho anterior. Nesse caso, os alunos recorriam à tabuada do dois para obter certa agilidade nos cálculos, talvez porque essa tabuada vem sendo explorada desde o início do trabalho com a multiplicação, facilitando sua memorização. Isso de certa forma pode ter possibilitado a mobilização do seguinte teorema em ação: Se $a = 2c$ e sabemos o resultado de $c\ x\ b$ então $a\ x\ b = c\ x\ b + c\ x\ b$, identificado na transcrição a seguir:

> P:NT, quatro vezes sete?
> NT: (silêncio) vinte e oito.
> P: Você fez como para descobrir?
> NT: Eu pensei assim: se duas vezes sete é catorze, aí eu fiz catorze mais catorze.

Supomos que essa estratégia apareceu novamente durante a exploração da atividade 28 que solicitava aos alunos informar se um resultado estava localizado numa determinada tabuada:

> P: JR, cinqüenta e seis está na tabuada do seis?
> JR: (pausa) Não! Espera aí!
> P: Você foi buscar onde para descobrir?
> JR: Eu sei que seis vezes quatro é vinte e quatro, aí seis vezes oito dá quarenta e oito. Seis vezes nove dá quarenta e cinco. Não, dá cinqüenta e quatro.

Acreditamos que JR ao justificar o porquê do número cinqüenta e seis não estar presente na tabuada do seis parece ter buscado essa informação em 6x8, porém como não conseguiu encontrar de imediato o resultado fez uso da seguinte decomposição em soma ligada à distributividade:

6x (4+4)
(6x4)+(6x4)
24+24 = 48

Ao descobrir que 6x8 correspondia a 48, percebeu que era preciso acrescentar mais 6 unidades para obter 54, que representa o resultado de 6x9 e é próximo ao produto anunciado. Ou seja, partiu de um resultado conhecido (6x4 = 24) para convencer o receptor que cinqüenta e seis não pertencia à tabuada do seis, pois 6x9 é igual a cinqüenta e quatro. Acreditamos que nesse momento encontramos indícios da fase de validação, pois não bastava dizer que o produto cinqüenta e seis não estava presente na tabuada divulgada, foi preciso justificar a validade da resposta (MARGOLINAS, 1993).

- Cálculos já automatizados:

Durante a exploração dessa atividade verificamos que muitos alunos recorriam a resultados memorizados, pois emitiam o resultado do cálculo proposto sem titubear. Nos excertos a seguir encontramos elementos que nos permitem fazer tal inferência, pois alguns alunos, ao serem questionados, apresentavam as seguintes justificativas para a validade das respostas emitidas:

P: GF, seis vezes cinco?
GF: Trinta.
P: Como você sabe que é trinta?
GF: Eu sei isso de cor.
P: PE, nove vezes quatro?
PE: Trinta e seis.
P: Como você sabe?
PE: Já está gravado.

- Utilizar a contagem de **n** em **n** quando um dos valores não for superior a 5, caso contrário essa estratégia demandará um tempo maior de cálculo ou poderá ser associada a outra.

Conforme prevíamos, a contagem de **n** em **n**, em alguns casos, pautou-se na decomposição ora do multiplicando ora do multiplicador ligada a cálculos automatizados com uma breve contagem. Cabe ressaltar que, o uso do cálculo automatizado não dispensou o cálculo refletido, tendo em vista que os resultados dos cálculos propostos foram obtidos por uma reconstrução pessoal dos alunos, apoiada em resultados memorizados e disponíveis imediatamente. Essas estratégias foram elaboradas com base nas propriedades das operações e de certas noções do número, implícitas ou explicitamente conhecidas pelos alunos (ANSELMO e PLANCHETE, 2006).

O uso dessa estratégia serviu, por um lado para buscar o resultado do cálculo proposto:

> P: JD, seis vezes sete?
> JD: Hããhh?! Quarenta e dois?!
> P: Você fez como para descobrir?
> JD: Eu sei que seis vezes seis é trinta e seis, mais seis, dá quarenta e dois.

Usando escrita numérica representamos essa estratégia da seguinte forma:

6x7
6x6=36 ⟶ parte de um resultado conhecido
36+6=42 ⟶ realiza a contagem de **n** em **n**

Por outro lado, observamos também que alguns alunos recorreram a essa estratégia para realizar a verificação do resultado apresentado:

> P: GV, cinco vezes nove?
> GV: Cinco vezes nove? Quarenta e cinco.
> P: Quarenta e cinco?
> GV: Não! (silêncio) Cinqüenta. Não! Cinqüenta é vezes dez. Quarenta e cinco.
> P: Como você chegou ao resultado?
> GV: Primeiro eu me confundi. Eu sei que oito vezes cinco é quarenta. Aí eu peguei e somei mais cinco.

Percebemos, pelo excerto, que GV busca validar sua resposta ora partindo da multiplicação de 5x10 ora acrescentando cinco unidades ao resultado de 8x5. Nesse último caso, percebemos a presença da comutatividade para localizar um resultado disponível em seu repertório numérico, haja vista que o cálculo proposto foi 5x9. inferimos que essas duas opções foram suscitadas somente porque há uma compreensão da lógica do sistema numérico (NUNES e BRYANT, 1997), ou seja, que é possível obter o resultado de cinco vezes nove tanto realizando o cálculo de (8x5)+(1x5) como o cálculo de (5x10)-(5x1), tendo em vista que o número nove pode ser decomposto em 8+1 ou 10-1.

O uso dessa propriedade numérica parece ter permeado a mobilização dessa estratégia em vários momentos, como ilustram os excertos a seguir:

> MAR: Eu tenho facilidade na tabuada do nove. Era três vezes nove e eu faço três vezes dez que vai dar trinta menos três.

> AD: Seis vezes nove? Na minha opinião essa conta tá errada. Eu acho que é cinqüenta e quatro.
> P: Como você sabe que é esse resultado?
> AD: Porque todo número assim (pausa) igual a estratégia da MAR. É só você tirar o número que falta.
> P: Como assim?
> AD: Se seis vezes dez é sessenta, basta tirar seis de sessenta aí dá cinqüenta e quatro.
> P: LT, cinco vezes sete?
> LT: (silêncio) Trinta e cinco.
> P: Você fez como LT?
> LT: Como cinco vezes oito é quarenta, eu diminuí cinco.
>
> P: CA, oito vezes seis?
> CA: (silêncio) Quarenta e oito.
> P: Eu vi que você começou a falar algumas coisas [enquanto pensava]. O que você estava fazendo?
> CA: Eu estava diminuindo, tipo de sessenta para baixo.

Além das estratégias previstas identificamos uma única menção a propósito da multiplicação por 5 vinculada à multiplicação por 10 seguida de uma divisão por 2, tendo em vista que multiplicar por 5 é a metade de multiplicar por 10 (BUENOS AIRES, 2006):

> CA: Quando [o cálculo] é vezes cinco eu faço vezes dez e divido por dois.

Em relação aos cálculos envolvendo essa tabuada, também presenciamos o depoimento de uma aluna que justifica a necessidade de decorá-la relacionando seu uso a questões do cotidiano:

> GA: Também a tabuada do cinco é obrigada a decorar porque tem o horário né? O horário das setinhas.

Nas atividades 28 e 29, que exploravam as tabuadas do 2 ao 9, uma estratégia prevista foi o emprego da reversibilidade da tabuada, expressa quando os alunos respondiam às perguntas propostas buscando o produto anunciado na tabuada dada, mesmo quando essas traziam explicitamente a palavra divisão. Acreditamos que o uso da multiplicação em atividades que, aparentemente, tratam da divisão reforça a idéia do campo conceitual multiplicativo, defendido por Vergnaud (1990).

Prevíamos que o emprego da reversibilidade da tabuada permitisse a mobilização de dois teoremas, os quais supomos terem aparecido no decorrer das duas sessões destinadas à exploração dessas atividades. O primeiro revela que:

- *Se multiplicando os fatores obtêm-se um produto então é possível obter um dos fatores dividindo o produto pelo outro fator.*

O uso desse teorema em açãoparece ser visualizado no excerto seguinte quando AD afirma que para resolver uma divisão recorremos aos conhecimentos das tabelas de multiplicação:

> P: GA, sessenta e três dividido por nove?
> GA: (silêncio) Faz vezes para mim [...]! Eu não sei fazer de cabeça divisão.
> P: Tem como partir pela multiplicação para descobrir o resultado?
> A: Tem.
> AD: Sete vezes nove dá sessenta e três, então sessenta e três dividido por nove dá sete.

O segundo teorema em ação previsto desvela que:

- *Se forem dados o produto e um de seus fatores então para obter o resultado da divisão desse produto pelo fator dado, basta encontrar um número que multiplicado por esse fator resulte no produto dado.*

Identificamos o emprego desse teorema no seguinte fragmento, quando GV encontra o resultado do cálculo proposto buscando um número que multiplicado ao fator dado resulte no produto anunciado:

> P: GV, cinqüenta e seis dividido por oito?
> GV: Cinqüenta e seis dividido por oito? (pausa) Espera aí (risos e silêncio) Oito?!
> P: Oito vezes oito dá quantos?
> GV: Aí não sei!
> [...]
> GV: É sete.
> P: Como você fez?
> GV: Sete vezes oito é cinqüenta e seis.

Cabe ressaltar que a mobilização desses teoremas possui estreita relação com o princípio fundamental da divisão (BITTAR e FREITAS, 2005). Contudo, parece que essa relação ainda não está tão evidente para alguns alunos, a ponto de explicitá-la.

Observamos também que para justificar a não pertinência de um produto numa tabuada anunciada (atividade 28) um aluno procurou identificar nessa tabuada, produtos próximos ao comunicado.

> P: AN, quarenta e sete está na tabuada do sete?
> AN: Quarenta e sete? Não!
> GF: Se sete vezes seis é quarenta e dois e sete vezes sete é quarenta e nove, então nenhum vai dar quarenta e sete.
> P: GF, vinte e oito está na tabuada do nove?

> GF: Não! Porque nove vezes três é vinte e sete e nove vezes quatro é trinta e seis.

Além da estratégia prevista, que mobilizou teoremas discutidos anteriormente e que justifica a pertinência de um resultado à determinada tabuada, presenciamos o emprego de outras relacionadas à:

- Cálculos automatizados

Observamos que alguns alunos recorreram a cálculos automatizados quando emitem rapidamente e de forma espontânea o resultado do cálculo proposto (ANSELMO e PLANCHETE, 2006), como ilustram os excertos a seguir:

> P: NT, quarenta está na tabuada do oito?
> NT: Oito vezes cinco.
>
> P: PE, trinta e seis está na tabuada do quatro?
> PE: Tá! Quatro vezes nove.

Em alguns casos, os alunos localizavam rapidamente o número que multiplicado pelo fator dado resultava no produto anunciado e, em seguida, faziam uso da propriedade comutativa, talvez para justificar que se a pergunta estivesse relacionada ao outro fator a resposta também seria encontrada. Isso pode ser visualizado no fragmento a seguir:

> P: Quarenta e oito tá na tabuada do seis?
> GF: Tá!
> P: Que número multiplicado por seis dá quarenta e oito?
> GF: Oito.
> P: Como você descobriu?
> GF: Porque assim tipo: eu já guardei na minha cabeça que seis vezes oito ou oito vezes seis dá quarenta e oito.

- Utilizar a contagem de **n** em **n** quando um dos valores não for superior a 5, caso contrário essa estratégia demandará um tempo maior de cálculo ou poderá ser associada a outra:

Identificamos também o uso dessa estratégia relacionado aos dois casos, valores inferiores a cinco e valores superiores a cinco, como elucidam respectivamente os trechos seguintes:

> P: RO, vinte e oito está na tabuada do sete?
> RO: Sim (pausa) Calma! (silêncio) Sete vezes quatro.
> P: Por que você pediu calma?
> RO: Porque eu contei nos dedos

> P: NT, cinqüenta e seis está na tabuada do oito?
> NT: Tá!
> P: Como você sabe?
> NT: Eu chutei.
> [...]
> GV: Eu sei que oito vezes cinco é quarenta, mais oito quarenta e oito. Eu sei que vezes sete vai dar cinqüenta e seis.

No primeiro trecho, RO conta, com o auxílio dos dedos, de 7 em 7 até chegar em 28, ocasionando uma demora para justificar a resposta dada. No segundo trecho, GV justifica a pertinência do produto na tabuada anunciada realizando a contagem de 8 em 8 a partir de um resultado conhecido.

Em relação ao primeiro trecho, presenciamos também o uso contagem de **n** em **n**, a partir de um resultado conhecido, para localizar o produto anunciado, o que possivelmente poderia ter gerado uma resposta mais rápida:

> GA: No resultado do RO, se ele souber sete vezes três que dá vinte e um é só somar mais sete ao vinte e um.

Usando escrita numérica essa estratégia que visa responder o cálculo proposto (vinte e oito está na tabuada do sete?) pode ser assim representado:

7 x ?=28
7 x 3=21
21+7=28

No que concerne à atividade 30, relacionada à decomposição multiplicativa de um determinado produto, foi possível identificar o uso da estratégia prevista, que consistia em localizar nas tabuadas o produto anunciado, como ilustram os fragmentos a seguir:

> P: AN, quarenta e cinco. Que números multiplicados dão quarenta e cinco?
> AN: Cinco vezes nove.
>
> P: GV, dezoito. Que números multiplicados dão dezoito?
> GV: (silêncio) Nove vezes dois e seis vezes três.

Prevíamos também que os alunos pudessem empregar o teorema em açãorelacionado às regras de divisibilidade, principalmente quando o número fosse par:

- *Se todo número par é divisível por 2 e se o resultado anunciado for par, então, basta dividir o número anunciado por 2 e descobrir decomposições possíveis para o resultado anunciado.*

Consideramos que esse teorema foi empregado parcialmente quando os alunos apresentavam uma possibilidade de decomposição multiplicativa apresentando um determinado número vezes dois, como ilustram os seguintes excertos:

> P: RA, quarenta e dois?
> RA: Quarenta e dois? Aí! Seis (pausa) Não sei!
> RO: Seis vezes sete.
> PE: Dois vezes vinte e um
> P: ML, sessenta?
> ML: Seis vezes dez.
> PE: Duas vezes trinta.

Nesse momento não foi possível verificar outras decomposições decorrentes do emprego desse teorema, pois o tempo destinado à sessão esgotou-se. Contudo, na sessão seguinte essas decomposições apareceram, como verificamos nos trechos seguintes:

> P: [...] Então, me dê dois números que multiplicados dê sessenta.
> [...]
> A1: Dez vezes seis.
> A2: Trinta vezes dois.
> A3: Quinze vezes quatro.
> P: Sessenta e quatro.
> A4: Oito vezes oito.
> A5: Trinta e dois vezes dois.
> A6: Dezesseis vezes quatro.

Em registro numérico essas estratégias podem ser assim representadas:

6x10=60 ➔ tabuada 6
30x2=60
15x4=60
8x8=64 ➔ tabuada do 8
32x2=64
16x4=64

Observando os dois últimos registros de cada coluna é possível perceber a relação metade/dobro nas decomposições multiplicativas, decorrentes da divisão por 2 dos números anunciados, conforme teorema em açãoenunciado anteriormente. Contudo, não foi possível identificar se as respostas emitidas tiveram origem nesse teorema, pois no decorrer dessa sessão os porquês de determinadas respostas não foram solicitados, como vínhamos fazendo até então. Isso porque a sessão que retomou essa atividade não foi, excepcionalmente, conduzida por nós, mas pelo nosso orientador, o que justifica a afirmação que fizemos acima e o uso dos códigos A1, A2, A3, A4, A5 e A6 para apresentar as falas dos alunos.

Antes de darmos prosseguimento à descrição e análise dos dados das atividades seguintes, acreditamos ser necessário fazer um breve esclarecimento a respeito dos acontecimentos que permearam os últimos encontros com a turma e que suscitaram alterações na condução da experimentação nesse dia.

Assim que retomamos a experimentação, após as férias, percebemos que o entusiasmo da turma em relação às atividades propostas havia diminuído, talvez por estarmos explorando algumas atividades do bloco aditivo que já haviam sido discutidas anteriormente. Sentimos certa apatia dos alunos nessas primeiras sessões, inclusive daqueles que costumavam disputar espaço para expor suas estratégias, principalmente quando, após a emissão da resposta, perguntávamos o porquê de uma determinada estratégia. Diante desse fato, fizemos uma análise com nosso orientador, que se propôs a acompanhar as sessões e tentar apontar uma possível solução para esse problema, tendo em vista que ainda tínhamos catorze atividades previstas para serem desenvolvidas.

Após acompanhar o desenvolvimento de duas sessões destinadas às atividades do bloco multiplicativo, decidimos dinamizar o trabalho e retomar o entusiasmo dos alunos. Sendo assim, não foi possível interpelar os alunos pelo nome e isso dificultou a identificação dos mesmos durante a transcrição, por isso usamos os códigos mencionados anteriormente (A1, A2, A3, A4, A5 e A6). Além disso, o ritmo de interpelação provocou euforia e acendeu o ânimo, conforme pretendíamos, porém não permitiu que obtivéssemos as justificativas dos cálculos realizados, haja vista que a intenção dessa sessão era, por meio de uma outra dinâmica de questionamento dos alunos, retomar o entusiasmo da turma para que pudéssemos dar continuidade à experimentação seguindo a mesma dinâmica de aplicação das atividades dos primeiros blocos.

Acreditamos que esse adendo foi importante para fortalecer nossas convicções de que as sessões de cálculo mental precisam ser espaços de trabalho intensivo, para que os alunos desenvolvam a atenção e o dinamismo mental, buscando novas técnicas, explicitando as estratégias adotadas, comparando e fazendo escolhas entre elas, como propõem Butlen e Pezard (1992). Contudo, como necessitamos validar e identificar teoremas em ação possíveis de serem apresentados pelos alunos durante a solução das atividades propostas, optamos por adaptar o procedimento Lamartinière (LETHIELLEUX, 2001) para a coleta de dados, direcionando os debates para que todos não falassem ao mesmo tempo, o que de certa forma , impôs um ritmo mais lento às sessões. Entretanto, a lentidão na condução das atividades, foi necessária para investigar as estratégias utilizadas pelos alunos, pois nossa intenção, além de gerar aprendizagem, era investigar contribuições de uma prática regular de cálculo mental para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo, incluindo o uso de novos teoremas em ação, durante a aprendizagem dos conceitos aditivos e multiplicativos.

Retomando a descrição e análise do terceiro bloco, apresentamos os dados coletados durante a aplicação das atividades 31, 32, 33 e 34, que envolviam a multiplicação por 10, 100 e 1000 e visavam, por um lado, contribuir para ampliar o repertório multiplicativo dos alunos, mediante o uso de multiplicações examinadas anteriormente. Por outro lado, tinham por finalidade explorar as regras automatizadas, algumas delas, aprendidas na escola.

Conforme prevíamos, para obter os resultados das multiplicações propostas, os alunos recorreram ao seguinte teorema: *Quando multiplicamos por 10 basta acrescentar um zero à direita do último algarismo do número, por 100 acrescentamos dois zeros e por 1000 três zeros.*

Os fragmentos a seguir parecem elucidar a mobilização desse teorema:

> P: [...] trezentos e vinte e um vezes dez?
> A8: Três mil duzentos e dez.
> A9: Só colocar um zero no final.
>
> P: Seiscentos e cinqüenta vezes cem.
> JD: Seis mil e cinqüenta.
> AD: Seis mil e quinhentos.
> P: Por que você acha que é seis mil e quinhentos e não seis mil e cinqüenta.
> AD: Porque tem que aumentar os zeros.

Em relação ao primeiro excerto, observamos que A9 após ouvir a resposta do A8 valida o resultado emitido, recorrendo para isso ao teorema em ação anterior: se era para multiplicar por dez, então bastava colocar um zero ao final do número. Essa passagem parece trazer indícios da fase de validação (MARGOLINAS, 1993), na qual A9 buscou dentro da situação elementos para confirmar o resultado anunciado pelo colega.

Já no segundo excerto, observamos que AD apesar de conhecer a regra não conseguiu aplicá-la corretamente, pois ao multiplicar seiscentos e cinqüenta por cem iria obter sessenta e cinco mil ao invés de seis mil e quinhentos. De acordo com Margolinas (1993, p.47) nesse momento teríamos que “[...] relançar [...] [o] aluno na sua investigação [...]”. Contudo, perdemos a oportunidade de devolver o problema e apresentamos outro cálculo para a turma, não dando continuidade ao debate instaurado.

Esse teorema também foi mobilizado por alguns alunos na correção de resultados anunciados pelos colegas, tanto na sessão conduzida por nós quanto na conduzida pelo orientador, que iniciou a exploração das atividades 31, 32, 33 e 34, como observamos a seguir:

> P: AC, mil setecentos e oitenta e nove vezes cem.
> AC: Dezessete mil oitocentos e noventa.
> GF: Cento e setenta e oito mil e novecentos.
> P: O que houve com o número da AC?
> GF: Faltou um zero.
>
> P:[...] doze vezes dez?
> A10: Mil e duzentos.
> A11: Cento e vinte.
> P: Mil e duzentos ele está falando. Está certo?
> A11: Não! Mil e duzentos é vezes cem.
> A10: É cento e vinte! (mostra-se indignado com a resposta fornecida inicialmente).

Usando registro numérico representamos a estratégia adotada da seguinte maneira:

$$1789\mathbf{0}\ (AC) \xrightarrow{1789\text{x}1\mathbf{00}} 178\ 9\mathbf{00}\ (GF) \qquad 12\mathbf{00}\ (A10) \xrightarrow{12\text{x}10} 12\mathbf{0}\ (A11)$$

Inferimos pelo primeiro excerto e pela representação numérica que GF, ao afirmar que faltou um zero ao resultado anunciado por AC, conseguiu aplicar o teorema em ação com compreensão, pois percebeu que ao multiplicar o número por cem, esse atingiria a ordem das centenas de milhar.

Em relação ao segundo trecho A11 afirma que para atingir o resultado anunciado por A10 era preciso multiplicar por cem. Cabe ressaltar que, nesse caso, o erro parece ter sido provocado por um problema de comunicação, na qual a linguagem não cumpriu uma de suas funções - identificação de invariantes presentes na situação – (VERGNAUD, 1990), impedindo que o aluno interpelado respondesse corretamente ao cálculo proposto. Fazemos essa inferência com base na reação do mesmo que, ao ouvir a resposta do colega, mostra-se indignado com o erro cometido e com o equívoco cometido, pois ao invés de multiplicar por dez multiplicou por cem.

Percebemos que muitos alunos tinham conhecimento do teorema, mas, em alguns casos, tinham dificuldade de colocá-lo em ação quando os cálculos propostos estavam relacionados com multiplicações por 10, 100 ou 1000 cujos resultados atingiam, principalmente, a ordem das centenas de milhar.

> P: Duzentos e quarenta e um vezes mil?
> PE: Dois mil quatrocentos (pausa)
> HG: Duzentos e quarenta e um mil.

Como vimos não bastava aplicar a regra, era preciso reorganizar o número mentalmente, de acordo com as ordens obtidas, para conseguir expressá-lo oralmente e isso parece ter sido facilitado quando os números anunciados eram pequenos. Para ilustrar essa afirmação trouxemos dois excertos nos quais temos a participação de um mesmo sujeito. No primeiro, a atividade consistia em multiplicar o número anunciado por dez e o resultado encontrado também por dez (atividade 32), sendo que na maior parte das vezes esse número não atingia a ordem das centenas. Já no segundo excerto, era preciso multiplicar um número grande por cem, o que ocasionou certo desconforto, como observamos na segunda coluna a seguir:

> P: Vocês agora vão multiplicar por dez e por dez mais uma vez. [...] Setenta e um [vezes dez]?
> AN: Setecentos e dez e [vezes dez de novo dá] sete mil e (pausa) e cem.
>
> P: AN, oitocentos e cinqüenta e dois vezes cem?
> AN: Caramba!
> HG: Oitenta e cinco mil e duzentos.

Em relação ao fragmento um, era preciso multiplicar por 10 duas vezes, o que correspondia a multiplicar, de uma só vez, o número anunciado por 100. Cabe ressaltar que, logo que a atividade foi proposta apenas um aluno fez essa constatação e questionou: “Não é mais fácil multiplicar por cem de uma vez?” (GF). Entretanto, como percebemos que isso não foi compartilhado pelos demais, demos continuidade a exploração da atividade sem nos reportar ao questionamento feito, com a intenção de que no desenrolar da atividade isso pudesse voltar ao debate, porém essa discussão não voltou a aparecer. Ao propormos tal atividade conjeturamos que esse conhecimento pudesse ser mobilizado em outras situações, como na multiplicação por cem envolvendo números grandes, Nesse caso, os alunos poderiam multiplicar o número anunciado por 10 duas vezes, o que facilitaria reorganizar o número mentalmente e verbalizar sua leitura, sendo essa uma das maiores dificuldades para a solução do cálculo proposto.

Tomando como exemplo a multiplicação anunciada no outro excerto (852x100) AN poderia obter o resultado recorrendo à decomposição do valor cem ligada à distributividade, o que em registro numérico pode ser assim representado:

852 x (10x10)
(852x10) x10
8520x10=85 200

Isso talvez facilitasse o cálculo com números grandes, tendo em vista que multiplicar um número por dez e depois multiplicar o resultado também por dez parece ser mais simples do que multiplicar por cem de uma só vez. Contudo, ninguém explicitou o uso dessa estratégia quando os cálculos anunciados exigiam a multiplicação por cem.

Em relação às atividades 35 e 36, que envolviam a divisão por 10, 100 e 1000, contendo números com zeros à direita no dividendo, observamos, conforme prevíamos, a mobilização do seguinte teorema:

- *Para determinar o resultado da divisão de um número terminado em zero por 10 despreza-se o último algarismo da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa o resultado.*
- *Para determinar o resultado da divisão de um número terminado em dois zeros por 100 desprezam-se os dois últimos algarismos da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa o resultado e assim analogamente para números terminados em três zeros, quatro zeros, etc ...*

Convém ressaltar que a escolha dos números propostos favoreceu o uso do mesmo, conforme descrevemos no capítulo que discute a construção e os elementos da seqüência didática.

Identificamos tal uso nos fragmentos seguintes, nos quais supomos que a pausa estabelecida antes do anúncio do resultado advenha da mobilização do teorema, que implica reorganização mental do número, após a retirada do zero à direita, e verbalização da leitura correspondente:

> P: LT, cinco mil e oitenta dividido por dez?
> LT: Cinco mil e oitenta? (pausa) Quinhentos e oito

> P: GV, doze mil dividido por dez.
> GV: Doze mil dividido por dez? Mil e (pausa) Mil e (silêncio) Mil e duzentos

Acreditamos que isso seja possível porque esse teorema em ação corresponde à regra ensinada pela escola e talvez faça parte do repertório dos alunos, mesmo que em alguns casos, sua recitação não gere o resultado esperado ou converta na organização mental do algoritmo, como ilustram respectivamente os seguintes excertos:

> P: LT, você vai dividir quinze mil por dez três vezes. Quinze mil dividido por dez?
> LT: (silêncio) Quinze mil dividido por dez? Quinze mil? Cento e cinqüenta.
> P: Confere AN?
> AN: (silêncio)
> LT: Quinze mil menos um zero: deu cento e cinqüenta.
> P:VT, vinte e cinco mil e setecentos dividido por cem?
> VT: Corta o zero (repete em voz alta a regra e faz uma pausa) Vinte e cinco mil?! (pausa)
> P: É vinte e cinco mil e setecentos dividido por cem, corta o zero e fica quanto?
> VT: Ficou duzentos e cinqüenta e sete dividido por um (faz o algoritmo mentalmente).

Em relação à reprodução mental do algoritmo, Mendonça e Lellis (1989, p.51) apontam que essa é "[...] uma das dificuldades das pessoas ao tentarem calcular mentalmente [...] [pois procuram] visualizar o cálculo exatamente como ele é escrito no papel". Contudo, consideram isso natural, tendo em vista que a escola, na maioria das vezes, não ensina outra forma de cálculo além desse, o que parece não ser diferente da vivência escolar de VT.

Identificamos também que os alunos fizeram referência ao teorema em açãodescrito anteriormente para validar ou a resposta anunciada pelo colega interpelado ou um resultado diferente do exposto, como observamos nos trechos a seguir:

> P: GA duzentos e quarenta e cinco mil dividido por mil?
> GA: Duzentos e quarenta e cinco? (pausa) É duzentos e (pausa) quarenta e cinco?!
> P: PE, ela falou duzentos e quarenta e cinco, mas com dúvida. O que você acha?
> PE: Tá certo!
> P: Como você sabe que está certo?
> PE: Porque eu fiz a conta.
>
> P: AN, dois mil e quinhentos dividido por cem?
> AN: Duzentos e cinqüenta.

> CA: Vinte e cinco.
> P: Por que não é duzentos e cinqüenta?
> CA: Porque o cem tem dois zeros.
> GC: Vai diminuir dois zeros
>
> P: Como você fez?
> PE: Eu só cortei os zeros

Observamos que a variável "tamanho dos números" exerceu um papel importante tanto na retenção na memória do número anunciado para que o teorema em açãopudesse ser mobilizado como na identificação do número obtido após essa mobilização, como verificamos nos trechos a seguir:

> P: Dez mil e quinhentos dividido por dez?
> AN: Dez mil e quinhentos? Não sei não!
> P: Alguém sabe?
> GF: Mil e cinqüenta.
>
> P: Três mil quatrocentos e cinqüenta dividido por dez?
> VT: Trinta e quatro mil e quinhentos.
> P: Não! Dividido.
> VT: (silêncio)
> JR: Três mil quatrocentos e cinqüenta? Trezentos e cinco?!

Analisando o segundo excerto percebemos que nossa atitude perante a resposta incorreta do aluno restringiu-se à "correção" tradicional do trabalho. Esquecemos-nos que, naquele momento, como eles estavam vivenciando uma fase *adidática* e era desejável que nela permanecessem, não deveríamos emitir julgamentos do tipo verdadeiro ou falso, certo ou errado (MARGOLINAS, 1993), mas tentar devolver o problema, perguntando, por exemplo, como ele chegou ao resultado anunciado ou então se, ao dividir um número por 10, ele sempre aumenta. Isso permitiria ao aluno tomar consciência da estratégia adotada e da resposta emitida (RUIZ BOLÍVAR, 2002).

Na atividade 37, que continha multiplicações por 5, 50 ou 500, algumas estratégias previstas foram mobilizadas pelos alunos. Dentre eles destacamos:

- Cálculo sobre as dezenas e aplicação da regra da multiplicação por 10, 100 ou 1000:

> P: CA, vinte vezes cinco?
> CA: Vinte vezes cinco? (silêncio)
> JR: Cem.
> P: Como você fez JR?
> JR: Ah, eu já sei de cor que é cem.
> CA: Eu ia fazer duas vezes cinco e colocar o zero na frente.
> GF: Atrás.

> LT: Sessenta e quatro vezes cinco?
> P: Vamos lá LT!
> LT: (risos e silêncio)
> JR: Trezentos e vinte.
> P: JR, conta rapidinho como você chegou ao resultado.
> JR: Eu fiz seis vezes cinco que eu sei que dá trinta, aumentei um zero e depois eu fiz cinco vezes quatro.

Os excertos mostram que os alunos não recorreram ao algoritmo usual do cálculo escrito, pois desde o início começam a calcular da esquerda para a direita.

Observamos que essa estratégia foi recorrente, principalmente, nos cálculos com números redondos, porque com os outros números seria preciso decompor o multiplicando e aplicar as propriedades distributiva e a associativa, como ilustra o segundo excerto. Essa estratégia que se apóia em regras automatizadas e multiplicações conhecidas (BUENOS AIRES, 2006), pode ser assim representada:

64x5
(60+4)x5
[(6x10)+4]x5
[(6x5)x10]+ 4x5
30x10+20
300+20

- Adição reiterada:

> P: [...] vinte vezes cinco?
> GC: Eu só faço assim: Vinte, quarenta, sessenta. Eu só faço vinte vezes cinco.
> P: Agora tenta fazer isso com sessenta e quatro vezes cinco?
> GC: Seiscentos e quarenta.

Identificamos o uso da adição reiterada unicamente no caso em que o número anunciado era um número redondo e permitia recorrer à contagem de 2 em 2 ou a tabela de multiplicação do 2. Observamos pelo excerto que, quando propusemos um número que não atendia a essas condições GC buscou outra estratégia: multiplicar por 10. Porém, não conseguiu aplicá-la com sucesso, pois depois era preciso dividir o resultado por 2, conforme ponderou GF:

> P: E aí GF, o que você acha?
> GF: Sessenta e quatro vezes cinco? Trezentos e vinte.
> P: O GC falou seiscentos e quarenta. Ele multiplicou por quantos?
> GF: Multiplicou por dez.
> P: Dava pra ele chegar ao trezentos e vinte?
> GF: Era só dividir por dois.

Destacamos que a nossa intervenção após GF anunciar um resultado diferente deveria garantir que a situação pudesse desenrolar-se sem necessitar de uma pergunta tão direcionada (MARGOLINAS, 1993). Ao invés de perguntarmos por quantos GC multiplicou para obter seiscentos e quarenta, deveríamos ter solicitado que GF explicasse porque o resultado deveria ser trezentos e vinte, pois isso talvez permitisse a comparação dos resultados e verbalização da estratégia prevista: multiplicar por 10 e depois dividir o resultado por 2. Além disso, era preciso avançar e buscar uma explicação para a regularidade descoberta: "[...] se for metade de dez vezes um certo número, precisa ser feito cinco vezes esse número" (BUENOS AIRES, 2006, p.50).

- Decomposição aditiva seguida da distributividade:

> GV: Cento e cinqüenta e dois vezes cinco?
> [...] Setecentos e (pausa e risos) cinqüenta.
> GF: Não! Tá errado! É setecentos e sessenta.
> P: Como você fez GF?
> GF: Cem vezes cinco quinhentos, cinqüenta vezes cinco, duzentos e cinqüenta. Aí dá setecentos e cinqüenta. Cinco vezes dois dez. [Somando os dois dá:] Setecentos e sessenta.
>
> P: JR, vinte e sete vezes cinco?
> JR: É (pausa) Dá cento e (pausa) trinta e cinco.
> P: Você fez como JR?
> JR: Eu sei que sete vezes cinco dá trinta e cinco. Aí eu fiz vinte vezes cinco que dá cem e depois somei.
>
> GV: Três mil e quinhentos?!
> P: Três mil e quinhentos?
> GF: Não! Sete mil e quinhentos.
> P: Como você fez GF?
> GF: Eu multipliquei mil vezes cinco e depois quinhentos vezes cinco. Aí eu somei.
>
> P: GV, dezoito vezes cinco?
> GV: Dezoito vezes cinco? Aí! (pausa) Dezoito vezes cinco? Sessenta (pausa) Sessenta!
> P: Dezoito vezes cinco sessenta?
> HG: Noventa!
> P: Como você sabe que é noventa HG?
> HG: Eu fiz oito vezes cinco é quarenta. Depois eu fiz cinco vezes dez é cinqüenta. Cinqüenta mais quarenta.

Os excertos acima ilustram que a mobilização da estratégia prevista teve ligação com o sentido da escrita, mas isso não ocorre sempre de forma sistemática (BUTLEN e PEZARD, 1992). Entretanto, em nossa pesquisa essa ligação parece ter se tornado evidente.

- Associatividade da multiplicação:

> P: JD, cinqüenta vezes cinqüenta?
> JD: (silêncio)

> VT: Cem.
> A: (risos)
> GF: Dois mil e quinhentos. Porque cinco vezes cinco é vinte e cinco mais dois zeros.
> VT: Eu pensei que fosse cinqüenta vezes dois. Eu me confundi.

Observamos que o uso dessa propriedade apareceu atrelado à decomposição multiplicativa, sendo recorrente apenas no caso mostrado no excerto acima. Isso talvez corrobore com os resultados evidenciados por Butlen e Pezard (1992, p.334), quando afirmam que "[...] as decomposições multiplicativas não aparecem naturalmente, mas necessitam da intervenção da professora" o que de certa forma justifica a pouca disponibilidade nos alunos do fim do ciclo elementar, pois necessita de um tempo maior para seu aprendizado.

Cabe destacar que nem todas as estratégias previstas, com base nos estudos realizados, foram mobilizadas pelos alunos no decorrer das duas sessões destinadas a exploração dessa atividade. Dentre as estratégias possíveis de serem empregadas não identificamos:

- Nas multiplicações por 5: O uso da associatividade e da comutatividade;
- Nas multiplicações por 50 e 500: Multiplicação por 100 ou 1000 seguida de divisão por 2; Decomposição multiplicativa ligada à associatividade; Decomposição aditiva ou subtrativa seguida de distributividade;
- Na presença de números pares: Divisão por 2, seguida da multiplicação por 10, 100 ou 1000; Decomposições multiplicativas em torno de 2 ligada à associatividade.

Acreditamos que a opção por uma determinada estratégia aconteceu "[...]por uma questão de economia, levando em conta sua prática e sua familiarização [...] [e dependeu] da memória, da disponibilidade de decomposições dos números [e] das dificuldades dos cálculos intermediários" (BUTLEN e PEZARD, 1992, p.326). Isso porque algumas das estratégias conjeturadas exigiam que o aluno guardasse os cálculos intermediários, implicando armazenamento na memória de uma quantidade considerável de informações. Para que essas estratégias aparecessem, talvez fosse necessário, além de atividades curtas e regulares como propunha nossa experimentação, "[...] atividades mais sustentadas (cerca de trinta minutos, uma vez por semana) [...] [para] um esclarecimento das diferentes estratégias utilizadas ou susceptíveis de serem" (BUTLEN, D.; PEZARD, M. *et al.*, 2000, p.13).

Na atividade 38, relacionada às divisões por 5 com cálculos exatos, tendo em vista que os números escolhidos terminavam em zero ou cinco, observamos a mobilização das seguintes estratégias:

Divisão por 10 seguida de uma multiplicação por 2, quando o dividendo possuía o algarismo zero na ordem das unidades:

Identificamos essa estratégia sendo mobilizada unicamente por HG durante as três sessões destinadas à exploração dessa atividade. Porém, observamos uma pequena alteração, pois ao invés de dividir por 10 o aluno fez uma decomposição multiplicativa desse valor, fazendo uma divisão por 2 seguida de outra divisão por 5 para depois multiplicar por 2. Ressaltamos, por um lado que a compreensão dessa estratégia ocorreu somente após a transcrição da sessão, pois durante a mesma não conseguimos entender o que estava acontecendo. Isso corrobora com Muniz (2006, p.161) quando afirma que "[...] o aluno realiza uma atividade matemática muito mais complexa daquela que esperamos". Por outro lado, antes de HG explicitar o uso dessa estratégia observamos uma tentativa mal sucedida, como elucida o fragmento a seguir:

> P: ML, setenta dividido por cinco?
> ML: Setenta dividido por cinco? (silêncio)
> P: NT?
> NT: (pausa) Quinze!
> HG: Catorze!
> MAR: Trinta e cinco!
> P: Como você fez MAR?
> MAR: Eu só dividi o setenta no meio e deu trinta e cinco.

Para obter o resultado esperado era preciso dividir trinta e cinco por cinco e depois multiplicar o resultado encontrado por dois, segundo prevê a estratégia. Contudo, isso aconteceu quando propusemos para a sala decidir qual era o resultado do cálculo proposto:

> P: Eu falei: setenta dividido por cinco. A MAR falou trinta e cinco e a NT quinze.
> HG: É catorze. É só dividir trinta e cinco por cinco, dá sete. Sete mais sete dá catorze.

Percebemos que nesse momento HG inicia a mobilização do seguinte teorema em ação: *Para encontrar o resultado de uma divisão por cinco de um número terminado em zero, basta dividi-lo por dois, seguida de uma divisão por cinco e uma multiplicação por dois*. Ou seja, HG realiza uma compensação multiplicativa.

Retomamos a atividade duas sessões após essa na tentativa de verificar se o teorema em ação anunciado apareceria novamente. Ao propormos um cálculo para

MAR identificamos outra tentativa frustrada, pois ao invés de dividir o número por 2 e o resultado encontrado por 5, para em seguida multiplicar por 2 observamos que a estratégia adotada foi outra, como mostra o trecho a seguir:

> P: MAR, oitenta dividido por cinco?
> MAR: Oitenta dividido por cinco? (silêncio) É... quinze?
> P: Como você fez?
> MAR: Eu fiz oitenta dividido por dois, quarenta. Quarenta dividido por dois vai dar vinte (fica em silêncio, mostrando que perdeu o raciocínio feito).

Ao terminar de ouvir a explicação de MAR um colega busca saber o resultado anunciado e apresenta um novo:

> GF: Ta errado, é dezesseis.
> P: Como você sabe que é dezesseis?
> GF: Porque dezesseis vezes cinco é oitenta.

Verificamos que GF busca validar o resultado recorrendo ao princípio fundamental da divisão (BITTAR e FREITAS, 2005), que implica na mobilização do teorema em ação:

• *Para obter o resultado da divisão, basta encontrar um número que multiplicado pelo divisor resulte no dividendo anunciado.*

Devolvemos a HG o mesmo cálculo proposto para MAR, na tentativa de verificarmos a estabilidade do teorema em ação proposto na primeira sessão de exploração da atividade:

> P: HG, oitenta dividido por cinco?
> HG: Dezesseis?!
> P: Como você fez?
> HG: Porque oito vezes cinco [é] quarenta. Quarenta mais quarenta [é] oitenta. Oito mais oito é dezesseis.
> P: (Registro no quadro o cálculo proposto e peço que repita a explicação da estratégia adotada). Explica novamente como você fez.
> HG: Se oito 8x5 é 40 e 40+40 é 80. Então, oito mais oito dá dezesseis.
> P: Por que você começou pelo quarenta?
> HG: Porque quarenta é metade de oitenta.
> P: É como você tivesse feito isso aqui né HG: oitenta dividido por dois dá quarenta, quarenta dividido por cinco dá oito, oito vezes dois dá dezesseis (registro o cálculo no quadro)
> 80:5
> 80:2=40
> 40:5=8
> 8x2=16 ou 8+8=16
> Você fez a compensação: dividiu por dois, depois multiplicou por dois (mostramos no registro a ocorrência dessa propriedade).

Quando HG explica a estratégia adotada é possível identificar, por um lado, uma mobilização mais explícita daquele teorema em ação, quando ele diz: Se 8x5 é 40 e 40+40 é 80. Então, 8 +8 =16. Por outro lado, parece que na mobilização dessa estratégia a propriedade que fica mais evidente é a compensação ao invés da decomposição, conforme discutimos anteriormente.

Isso volta a ser recorrente após sete sessões, quando propusemos para um aluno dividir noventa por cinco. Diante do silêncio do aluno interpelado outros alunos apresentaram o resultado para o cálculo proposto. Dentre eles HG, que afirmou ter feito como das outras vezes:

> HG: Eu fiz a mesma coisa de antes: dividi o noventa por dois, deu quarenta e cinco. Cinco vezes nove quarenta e cinco e nove mais nove é dezoito.

Entretanto, identificamos que HG não percebeu o campo de validade desse teorema, ou seja, que só podemos aplicá-lo na presença de números terminados em zero. Nesse momento, vimos ser retomada uma outra estratégia relacionada à decomposição aditiva do dividendo seguida de distributividade, quando o dividendo possuía o algarismo cinco na ordem das unidades:

> PE: Sessenta dividido por cinco? Doze!
> P: Como você faz?
> PE: Eu fiz cinqüenta dividido por dez, depois dez dividido por cinco.

Usando registro numérico a estratégia adotada pode ser assim representada:

60:5
(50+10):5
(50:5)+ (10:5)
10+2=12

Ressaltamos que essa estratégia se baseia no teorema em ação anunciado anteriormente, relacionada ao princípio fundamental da divisão: *Para obter o resultado da divisão, basta encontrar um número que multiplicado pelo divisor resulte no dividendo anunciado.* Porém, ao invés de pensar no dividendo anunciado o cálculo é baseado na decomposição aditiva do mesmo, tomando como referência resultados memorizados, relacionados à tabuada do cinco.

Essa estratégia foi usada uma única vez na primeira sessão de exploração dessa atividade, sendo trazida duas sessões depois pelo mesmo aluno, diante do cálculo cento e sessenta e cinco dividido por cinco:

> PE: Eu fiz assim: pensei num número que multiplicado por cinco se aproximasse de cento e sessenta e cinco. Trinta vezes cinco dá cento e cinqüenta. Ainda falta quinze, três vezes cinco é quinze. Trinta e três.

Após sete sessões notamos novamente o uso dessa estratégia, incorporado ao repertório de alguns alunos, como a mobilizada perante o cálculo setenta e cinco dividido por cinco, ilustrada no excerto a seguir:

> P: Como você chegou ao quinze?
> HG: Porque doze vezes cinco eu já sei que é sessenta
> P: Ai faltava quantos para chegar ao setenta e cinco?
> HG: Quinze.

Além dessa decomposição, identificamos outra que leva em conta a numeração decimal. Os excertos a seguir ilustram o uso dessa estratégia:

> P: HG, cento e sessenta e cinco dividido por cinco.
> HG: Cento e sessenta e cinco? (pausa) Espera aí! Trinta e (pausa) três.
> P: Como chegar no trinta e três?
> HG: Eu sei que cinco vezes três é quinze.
> P: Qual a relação do quinze com esse número aqui (registro o cálculo e mostro o cento e sessenta e cinco).
> HG: Ah! Eu fiz a divisão na cabeça. Cinco vezes três dá quinze, aí sobrava um, daí eu já pensei que sobrou quinze e dava três de novo.
> LT: Eu já sei que vinte vezes cinco é cem, aí eu divido o sessenta e o cinco.
> P: Você decompôs o cento e sessenta e cinco em cem, mais sessenta mais cinco.
> JR: Eu pego e faço por cem que eu sei que vai dar vinte, ai depois eu pego mais cinqüenta do sessenta. Ai vai dar trinta, aí fica quinze, que dá três.Trinta e três.
>
> P: JD, cento e vinte dividido por cinco?
> JD: (silêncio) Quanto que é?
> P: Cento e vinte dividido por cinco?
> JD: Dá catorze!
> P: Quanto você acha que dá AN?
> AN: (silêncio) Vinte e dois.
> P: Era cento e vinte dividido por cinco. O JD disse catorze e o AN vinte e dois.
> JD: Eu falei vinte e quatro.
> P: Você falou vinte e quatro?
> JD: Não! Eu falei catorze. Eu me perdi no cálculo.
> P: Você fez como para chegar ao vinte e dois AN?
> AN: Sei lá! Espera aí! (pausa) Eu multipliquei cinco vezes vinte que dá cem. Dois vezes cinco dá vinte, que dá vinte e dois.
> P: Cinco vezes dois dá vinte?
> AN: Cinco vezes dois? Não, dá dez (risos)
> A: Cinco vezes quatro dá vinte.
> P: Aqui (mostro o dois da unidade) tem que ser quantos?
> AN: Quatro. Vinte e quatro.

No primeiro excerto destacamos três trechos que consideramos importantes: um que traz a fala de HG quando explica a estratégia adotada para obter o resultado do cálculo proposto afirmando que fez o algoritmo convencional mentalmente, o outro quando LT apresenta a estratégia adotada e o terceiro quando JR explica como faria esse cálculo.

Ao analisarmos a fala de HG parece que mesmo reproduzindo mentalmente o algoritmo ensinado pela escola como ele afirma, a estratégia adotada traz indícios da decomposição do número cento e sessenta e cinco em dois grupos, tendo como critério a quantidade de dezenas (165 = 16 dezenas e 5 unidades). Após essa decomposição o cálculo parece ser feito da seguinte forma: Buscou-se o número que multiplicado por cinco atingiria dezesseis dezenas ou um número próximo, obtendo três dezenas e um resto de uma dezena. Em seguida, acrescenta-se a dezena restante ao número de unidades, formando quinze unidades, que dividido por cinco resulta em três unidades.

Entretanto, ao analisarmos a fala de LT o uso dessa decomposição que considera a numeração decimal (100+65) fica mais evidente: *Eu já sei que vinte vezes cinco é cem, ai eu dividido o sessenta e o cinco.*

Usando a representação numérica representamos essa estratégia da seguinte forma:

160:5
(100+65): 5
(100:5)+ (65:5)

Quando pegamos o trecho da fala de JR verificamos que existe uma mistura entre a decomposição que considera a numeração decimal com a decomposição baseada em resultados memorizados: *Eu pego e faço por cem [...], depois eu pego mais cinqüenta do sessenta [...] aí fica quinze [...].*

Em relação ao segundo excerto destacamos dois momentos importantes: o primeiro quando JD, ao perceber que não obteve sucesso no cálculo efetuado tenta mudar a resposta anunciada, mas arrepende-se e assume que se perdeu no cálculo: *Não! Eu falei catorze. Eu me perdi no cálculo.* O segundo momento está relacionado à intervenção quando perguntamos para AN: *Você fez como para chegar ao vinte e dois?* e *Cinco vezes dois dá vinte?* Acreditamos que essas perguntas permitiram ao aluno tomar consciência dos caminhos percorridos e refaze-los caso julgasse necessário (RUIZ BOLÍVAR, 2002), sem que fosse preciso avaliar a estratégia adotada mediante nosso julgamento (MARGOLINAS, 1993).

Cabe ressaltar que apenas a estratégia que recorria a uma multiplicação do número de dezenas por 2 e em seguida, o acréscimo de uma unidade ao resultado obtido, quando o dividendo possuía o algarismo cinco na ordem das unidades não foi mobilizada pelos alunos. Talvez por necessitar da decomposição multiplicativa, que como mencionamos anteriormente, necessita da intervenção do professor (BUTLEN e PEZARD, 1992).

Além das estratégias previstas observamos o caso de um único aluno que estabelece relação da divisão anunciada (75:5) com o conteúdo de fração, que estava sendo ensinado no período que ocorreu aquela sessão:

> CA: Sabe o que eu faço? Eu faço cem menos setenta e cinco, que vai dar vinte e cinco, que é quarta parte de cem.

Inferimos que CA ao retirar setenta e cinco de cem descobre que sobram vinte e cinco, parece buscar quantas vezes o cinco cabe no vinte e cinco, obtendo o resultado cinco. Então, se em vinte e cinco existem cinco grupos de cinco e em setenta e cinco existem três grupos de vinte e cinco, logo setenta e cinco dividido por cinco dará quinze (3x5).

Em relação à atividade 39, voltada para multiplicações de números de dois ou três algarismos por números de um algarismo ou vice-versa percebemos que, neste caso, nosso objetivo de retomar as estratégias mobilizadas anteriormente parece ter sido alcançado. Isso porque durante as quatro sessões de exploração dessa atividade identificamos as seguintes estratégias serem mobilizadas novamente:

- Cálculo sobre a dezena ou a centena seguido da aplicação da regra da multiplicação por 10, 100 ou 1000:

> P: JD, três vezes noventa?
> JD: (silêncio) Dois mil e setecentos.
> A: Não! Nossa!!
> P: Três vezes noventa?
> JD: Não, não! Quantos?
> P: Três vezes noventa?
> JD: Duzentos e setenta.
> P: Isso! Como você sabe que é duzentos e setenta e não dois mil e setecentos?
> JD: Ah, porque eu fiz nove vezes três que dá vinte e sete e depois é só acrescentar o zero.
> P: ML, setecentos vezes três.
> ML: (silêncio)
> P: AD?
> AD: Dois mil e cem.
> P: Conta como você fez.
> AD: Eu sei que três vezes sete é vinte e um, aí eu coloquei os dois zeros.

A variável natureza dos números influenciou o uso dessa estratégia, pois na presença de números redondos o cálculo foi facilitado, porque quando o número de dois ou três algarismos possuía em todas as ordens algarismos diferentes de zero, era preciso guardar na memória os resultados dos cálculos intermediários, gerando um fator de dificuldade, como mostra o excerto a seguir:

> P: LT, trinta vezes trinta e oito.
> LT: (silêncio)
> P: Quanto RO?
> RO: Acho que é trezentos e oito
> P: O que você acha AC?
> AC: (silêncio)
> RO: Não, está errado.
> P: (Nesse momento LT sussurra um resultado, mas a gravação não consegue captá-lo). Fala LT.
> LT: Três vezes três dá nove e aí tem que colocar os dois zeros, que dá novecentos. Aí faz oito vezes três
> P: Que dá quantos LT?
> LT: Fiz errado (Percebe que o resultado que havia anunciado está errado, mas não consegue apresentar o esperado).
> P: GV dá quantos?
> GV: Dá mil (pausa) cento (pausa) e quarenta.

Observamos pelo excerto que quando o número atendia os critérios descritos era preciso realizar uma decomposição para depois fazer o cálculo sobre as dezenas seguido da aplicação da regra da multiplicação por 100. Usando registro numérico essa estratégia pode ser assim representada:

30 x 38
30 x (30+8)
(30 x 30) + (30 x 8)
(3 x 3 x100)+ (30 x 8)
900+240=1140

Verificamos que LT chega ao primeiro resultado decorrente da distributiva ligada à associativa, mas não prossegue com o cálculo talvez por não conseguir reter na memória esse resultado até obter o outro e fazer a soma dos dois. Diferentemente do que ocorre com GV, que aproveita parte do cálculo de LT para anunciar o resultado esperado: *Dá mil (pausa) cento (pausa) e quarenta.* Supomos que o anúncio assinalado de acordo com as ordens do número possa ter relação com a junção dos dois resultados: novecentos mais duzentos e quarenta.

Em outro momento, observamos o uso inadequado do cálculo sobre a centena seguido da aplicação da regra da multiplicação por 100, como ilustra o fragmento a seguir:

P: LT, quatrocentos vezes três?
LT: Doze mil.
P: Está certo JR?
JR: Quatrocentos vezes três?
LT: Mil e duzentos! Eu entendi quatro mil.

LT, ao invés de multiplicar por quatro acrescentar os dois zeros do quatrocentos ao resultado da multiplicação dos valores diferentes de zero, adiciona três zeros e justifica seu erro buscando elementos dentro da própria situação, afirmando ter multiplicado por quatro mil (MARGOLINAS, 1993).

- Decomposição aditiva ou subtrativa seguida da distributividade:

P: Três vezes sessenta e dois?
AN: (silêncio) Três vezes sessenta e dois?
P: LT?
JR: Eu sei!! Cento e oitenta e (pausa) seis.
P: Como você sabe?
JR: Eu fiz três vezes seis que dá dezoito e depois eu fiz dois vezes três.
AD: Eu faria assim: eu pegaria sessenta e faria vezes três que dá cento e oitenta.
P: (registro no quadro a estratégia adotada por ele)
3x62
(60+2)x3
(60x3)
AD: Aí eu faço três vezes dois que dará seis, que dá cento e oitenta e seis.
P: (completo o registro numérico)
(60x3) + (3x2)
180+6=186

Percebemos que essa estratégia foi recorrente quando o número contendo dois ou três algarismos possuía valores diferentes de zeros em todas as ordens, o que dificultava o emprego da estratégia descrita anteriormente.

Ao analisarmos o excerto verificamos que as estratégias adotadas por JR e AD, apesar de semelhantes, possuem características peculiares decorrentes, talvez, da diferença de repertório numérico dos alunos. A primeira parece fazer uma junção de várias estratégias: decomposição seguida da distributividade, uso da associatividade ou cálculo sobre a dezena ou a centena seguido da aplicação da regra da multiplicação por 10.

Usando registro numérico o cálculo realizado por JR pode ser assim representado:

3 x 62
3 x (60+2) → decomposição
(3 x 6 x10)+ (3 x 2) → distributividade, associatividade ou cálculo sobre a dezena com aplicação da regra da multiplicação por 10
180+6=168

Já AD parece recorrer à comutatividade seguida da decomposição aditiva ligada à distributividade, que em registro numérico ficaria da seguinte forma:

3x62
(60+2)x3 → comutatividade e decomposição
(60x3) +(2x3) → distributividade

Como vimos o uso da decomposição aditiva com distributividade é "[...] de fácil acesso [...] [e] diretamente utilizável de maneira confiável" (BUTLEN e PEZARD, 1992, p.334), independente das propriedades que possam ser mobilizadas em conjunto. Por isso, percebemos ao longo das quatro sessões de exploração dessa atividade alguns alunos tentando fazer uso dessa estratégia, mesmo que ainda sem sucesso.

> P: GV, sessenta e três vezes quatro.
> GV: Sessenta e três vezes quatro? (silêncio) Ah! Duzentos e quarenta e (pausa) oito. Não! Como que é mesmo?
> P: Sessenta e três vezes quatro.
> GV: Dois mil e (pausa)
> BA: Duzentos e cinqüenta e dois.
> P: Fez como BA? (pergunto isso porque a vi fazendo o cálculo escrito na mesa)
> BA: Multipliquei o sessenta e três por quatro. Primeiro o três pelo quatro e depois o quatro pelo seis, que dá vinte e quatro.
>
> P: LT, seiscentos e dez vezes quatro.
> LT: (silêncio)
> P: Seiscentos e dez vezes quatro.
> LT: (silêncio) Dois mil quatrocentos (pausa)
> LO: Dois mil e quatrocentos!
> P: Como você fez LO?
> LO: Eu fiz a conta! Quatro vezes zero é zero, quatro vezes um dá quatro, aí quatro vezes seis, vinte e quatro (percebe que havia esquecido do quarenta no cálculo realizado).
> P: Dois mil quatrocentos e quarenta. Faltou o quê LT?
> LT: Eu esqueci do dez. Faltou o quarenta.

No primeiro fragmento é possível identificar a tentativa de usar a decomposição ligada à distributividade no momento que GV anuncia o resultado do cálculo proposto faz uma pausa após dizer duzentos e quarenta. Contudo, ao perceber que havia noticiado duzentos e quarenta e oito mostra-se confusa e tenta refazer o cálculo, mas parece perder o raciocínio adotado anteriormente.

Usando a escrita numérica representamos assim a estratégia adotada por GV:

63 x 4
(60+3) x 4
(60 x 4) + **(3 x 4)**
240+ **8**=248 → resultado incorreto para 3 x 4

Verificamos que para GV anunciar o resultado esperado era preciso refazer o cálculo três vezes quatro para somar ao resultado duzentos e quarenta e obter duzentos e cinqüenta e dois. Resultado esse que foi anunciado por BA e obtido mediante o uso do registro escrito do algoritmo canonizado.

Em relação ao segundo excerto LT também busca aplicar aquela estratégia, mas não consegue concluí-la, fazendo apenas uma parte dela, como verificamos no registro numérico seguinte:

610 x 4
(600 + 10) x 4
(600 x 4) = 2400

Esse tipo de erro também foi observado por Butlen e Pezard (1992), porém ligados à utilização da dupla distributividade, por exemplo, no cálculo 25 x 68, quando:

→ havia o esquecimento dos termos retangulares (20 x 60 +5 x 8);

→ calculava-se apenas um produto (20 x 60);

→ fazia a distributividade com relação a um único fator (20 x 60 + 5 x 60).

- Compensação:

Essa propriedade foi mobilizada em dois momentos distintos por um mesmo aluno. No primeiro, após ouvir que um colega reproduziu o algoritmo mentalmente para obter o resultado do cálculo de duzentos vezes nove:

> PE: Eu faço duzentos vezes dez que dá dois mil, depois menos duzentos.
> AD: Assim é mais fácil: é só você colocar mais um zero. Agora vezes nove é mais difícil porque não tem essa regrinha do zero.
> JR: Como eu sei que duas vezes nove é dezoito é fácil. É só colocar os dois zeros.

Vejamos um outro momento quando PE ouviu um resultado que não correspondia ao previsto para o cálculo oitenta vezes nove:

> P: AN, oitenta vezes nove.
> AN: (silêncio) Oitenta vezes nove?!! Setenta e dois?
> A: Ahhhh!
> AN: Cento e setenta e dois?!
> PE: Setecentos e vinte. Eu fiz oitenta vezes dez, depois menos oitenta. Setecentos e vinte.
> JR: É só fazer oito vezes nove e depois aumentar o zero do oitenta.

Neste caso cabe ressaltar que, por um lado, PE mobilizou essa propriedade com destreza desde as atividades do bloco aditivo. Esperamos que o intercâmbio entre os alunos, assim como aconteceu naquele bloco, converta esse uso em terreno comum (PARRA, 1996).

Por outro lado, observamos nos dois excertos a manifestação de JR ao afirmar que em ambos os casos ele mobiliza o cálculo sobre a dezena ou a centena seguido da aplicação da regra da multiplicação por 10 ou 100. Consideramos isso como demonstração de estabilidade da estratégia adotada.

Além disso, verificamos no primeiro excerto outra interferência que merece discussão. Quando AD comenta que a estratégia adotada por PE é mais fácil, pois "vezes nove" não tem a regra do zero, esquece que nesse caso não basta acrescentar o zero, sendo preciso subtrair duzentas vezes um do resultado encontrado. Isso talvez seja mais difícil do que apenas calcular sobre a dezena ou a centena e aplicar a regra da multiplicação por 10 ou 100, como propõe JR.

Em relação ao segundo excerto, vale destacar a participação de AN que busca em cálculos automatizados o resultado para o cálculo proposto, mobilizando apenas a primeira parte daquela estratégia. Contudo, apresenta imediatamente uma outra resposta após se deparar com a surpresa do colega, sem notar que bastava acrescentar um zero à direita do resultado anunciado para obter sucesso na resolução.

- Algoritmo mental

> P: AN, duzentos vezes nove?
> AN: Duzentos vezes nove? (silêncio)
> A: Mil e oitocentos!
> P: ML, duzentos vezes nove?
> ML: (silêncio, demonstrando não perceber que os colegas já tinham dado a resposta).
> GV: Mil e oitocentos.
> P: Você fez como GV?
> GV: Duzentos vezes nove? Nove vezes zero, zero. Nove vezes zero, zero. Nove vezes dois dezoito.
>
> P: [...] ML. Vinte vezes três.
> ML: É seis mil?
> GV: Sessenta.
> P: Como você sabe que é sessenta?
> GV: Eu fiz a conta na minha cabeça.
> P: Conta para a gente.
> GV: Eu fiz três vezes o zero, guarda o zero, faz só o três vezes o dois.

Os dois trechos apresentam o algoritmo mental sendo mobilizado para resolver multiplicações nas quais esperávamos que fosse usado o cálculo sobre a dezena ou a centena seguido da aplicação da regra da multiplicação por 10, 100 ou

1000. Contudo, usar essa regra implica perceber que 20 x 3 corresponde a 2 x 3 x 10, porque 20 é 2 x 10 e equivale mobilizar a propriedade associativa da multiplicação (BUENOS AIRES, 2006) ou simplesmente fazer uso da regra da multiplicação por potências de dez, sem necessitar mencionar tal propriedade, mesmo que essa esteja implícita nessa regra. Por isso, no caso de GV foi mais fácil recorrer à montagem do algoritmo mentalmente. Entretanto, na sessão seguinte retomamos aquele cálculo do segundo excerto e identificamos uma tentativa de aplicar o cálculo sobre a dezena ou a centena seguido da aplicação da regra da multiplicação por 100, como observamos no fragmento a seguir:

> P: ML, duzentos vezes nove?
> ML: Duzentos vezes nove? (silêncio)
> [...]
> P: GV, quanto que dá?
> GV: Mil e oitocentos. Eu fiz assim: eu sei que nove vezes zero é zero, nove vezes (pausa) tá (pausa), coloco os dois zeros lá embaixo e eu sei que nove vezes dois é dezoito. Então, fica mil e oitocentos.

Destacamos que GV começa a explicação buscando elementos no algoritmo mental, mas abandona essa estratégia ao perceber que é possível obter o resultado fazendo o cálculo sobre o valor da centena seguido da regra de multiplicação por cem.

Outro ponto que merece destaque está relacionado à participação de ML nas três sessões em que propusemos cálculos pertencentes à atividade 39, conforme ilustram os excertos anteriores. Na primeira ML não consegue realizar o cálculo proposto nem tampouco repetir a resposta que já havia sido anunciada pelos colegas; talvez se a questionássemos não soubesse explicar a estratégia adotada e teria que reconhecer que copiou a resposta do colega.

Na segunda participação ML, após ouvir os colegas fazendo uso do cálculo sobre o valor da dezena, tenta usá-lo. Contudo, no momento de aplicar a regra da multiplicação acrescenta três zeros ao invés de um, como se ao invés de multiplicar por vinte estivesse multiplicando por dois mil.

Já na terceira participação, quando reapresentamos o cálculo proposto na sua primeira participação ML preferiu o silêncio. Entretanto, sete sessões após essa participação voltamos a propor o mesmo cálculo e dessa vez ML conseguiu emitir a resposta esperada, mesmo que para isso tenha recorrido ao algoritmo escrito, como observamos no trecho a seguir:

> P: ML, duzentos vezes nove.
> ML: (silêncio) Duzentos vezes nove? (silêncio) É (silêncio) Mil e oitocentos?
> P: Fez como ML?
> ML: Eu armei a conta.
> CA: Eu fiz de dois jeitos. O primeiro eu faço dois vezes nove e aí eu acrescento os dois zeros. O outro eu faço duzentos vezes dez menos duzentos, que vai dar mil e oitocentos.
> GC: Eu tiro os dois zeros do duzentos e eu faço, dois, quatro...porque eu já sei a tabuada do dois. Aí eu aumento dois zeros.

Além de podermos visualizar essa conquista de ML também conseguimos perceber nessa última sessão de exploração dessa atividade, que a compensação, mobilizada até então apenas por PE, começa a fazer parte do repertório de CA. Percebemos também o uso de uma estratégia que ainda não havia aparecido: a adição reiterada. Tal estratégia parece ter sido mobilizada por GC para descobrir o resultado de duas vezes nove, para que em seguida pudessem ser acrescentados os dois zeros.

Percebemos que na falta de uma outra estratégia que conduza ao resultado esperado, a reprodução do algoritmo mental ainda é o mais recorrente tendo em vista que na escola, na maioria das vezes, não se ensina outra forma de cálculo além desse (MENDONÇA e LELLIS, 1989). Isso porque observamos outros alunos recorreram a essa estratégia, como observamos no fragmento a seguir:

> P: VT, trinta e dois vezes quatro.
> VT: Trinta e dois vezes quatro? (silêncio) Cento e vinte e oito.
> P: Você fez como?
> VT: Eu pensei: eu peguei o quatro vezes o dois que é oito e o quatro vezes o três que é doze.
> P: Fez como se fosse o algoritmo.
> VT: É!

Após VT emitir o resultado do cálculo proposto e conseguir justificar sua validade, verificamos a mobilização de uma outra estratégia ligada à associatividade, conforme ilustra o excerto a seguir:

> PE: Eu faço quatro vezes trinta.
> P: Você decompõe (vou registrando no quadro a fala dele) o trinta e dois em trinta mais dois.
> PE: Agora eu faço trinta vezes dois, porque o quatro é dois mais dois, vezes dois de novo, que dá cento e vinte. Aí quatro vezes dois: oito.
> A: Mas eu duvido que ele faz isso na prova.
> P: Mas pessoal, é cálculo mental!
> A: Só que ele fica inventando moda!

Em registro numérico representamos essa estratégia da seguinte forma:

32 x 4
(30 + 2) x 4
[(30x2) + (30x2)] + (2x4)
[60+60]+8
120+8=128

Observamos a indignação dos colegas perante a nova estratégia adotada por PE e, possivelmente, por não conseguirem acompanhá-lo mentalmente acabam duvidando que ele faça esse tipo de cálculo na prova. Aliás, uma dúvida para qual eles já tinham a resposta, haja vista que nessa forma de atividade prioriza-se o registro escrito via algoritmo canonizado.

Na atividade 40, relacionada à divisão exata com números de dois algarismos por um número de um algarismo, as estratégias previstas foram mobilizadas pelos alunos durante as três sessões de exploração da mesma e consistiam na:

- A busca do resultado por ensaios sucessivos:

> P: Cinqüenta e dois dividido por quatro.
> AC: (Silêncio).
> MAR: Doze.
> P: Como você fez?
> MAR: Eu sei que na tabuada do quatro não tem nada que dá cinqüenta e dois, aí eu fui continuando do quarenta, mais quatro que dá quarenta e quatro, que é onze. Aí mais quatro, quarenta e oito, mais quatro cinqüenta e dois que é treze.

A estratégia adotada por MAR revela o seguinte registro numérico:

52 : 4 = ?
4 x 10 = 40
40 + 4 = 44 ⟶ 4 x 11 = 44
44 + 4 = 48 ⟶ 4 x 12 =48
48 + 4 = 52 ⟶ 4 x 13 = 52

Essa estratégia parte do maior resultado conhecido na tabela de multiplicação para compor outros e retoma a relação entre a multiplicação e a divisão, pois a partir de uma multiplicação é possível conhecer duas divisões ou a partir de uma divisão exata, anunciar uma multiplicação e uma divisão (BUENOS AIRES, 2006).

- A investigação dos múltiplos do divisor por multiplicação e subtração:

> P: GV, oitenta e oito dividido por oito?
> GV: (silêncio) Onze.
> P: Como você fez ?

> GV: É muito fácil! Eu fiz assim: eu já sei que oitenta e oito dividido (pausa) sei que oito dividido por oito é um.
> P: Você montou a conta na cabeça?
> GV: Eu não fiz a conta, eu já vi e pensei que era onze.
> JR: Faz oito vezes dez que dá oitenta, aí é só colocar mais oito, fica fácil.
> [...]
> AD: A tabuada do onze é bem fácil, porque é o número com ele mesmo, na maioria das vezes.

Verificamos que JR ao propor um novo jeito para descobrir o resultado parece usar essa estratégia, mobilizando para isso o seguinte teorema: *Para saber o resultado de uma divisão de um número de dois algarismos por um número de um algarismo, basta multiplicar o divisor por um número que seja igual ou o mais próximo possível do total de dezenas do dividendo e, em seguida, descobrir quanto falta para chegar ao dividendo do cálculo proposto e buscar esse valor na tabuada. Então, o resultado da divisão será a soma desses valores que multiplicada pelo divisor complete o número expresso no dividendo.* Esse teorema em ação possui relação com o processo americano ou processo das subtrações sucessivas, que

> [...] por tentativas, coloca-se qualquer número no quociente (quociente parcial) e, se o resto permitir, faz-se nova "distribuição", ou seja, define-se um novo total no quociente (outro quociente parcial), continuando o processo até que o resto seja menor que o divisor. No fim, somam-se os quocientes parciais (TOLEDO e TOLEDO, 1997, p.159).

Analisando a fala de GV é possível perceber indícios do emprego da distributividade da divisão: "[...] *sei que oito dividido por oito é um.* Talvez, ao invés de ter reproduzido o algoritmo mentalmente como mencionamos, ela tenha recorrido a seguinte estratégia:

88 : 8
(80+8): 8
(80: 8) + (8: 8) ⟶ fazendo isso (8D : 8) + (8U : 8) ao invés daquilo
10 + 1 =11 1D+1U = 11

Ou talvez tenha percebido que os números que compunham tanto o dividendo como o divisor eram formados por um mesmo algarismo em todas as ordens, logo o resultado teria que ser onze. Isso também permitiu a AD inferir cautelosamente que: "*A tabuada do onze é bem fácil, porque é o número com ele mesmo, na maioria das vezes*". Essa inferência parece ser baseada no seguinte teorema: *Numa divisão que possui tanto o dividendo como o divisor formado por um mesmo algarismo, na qual o divisor possui apenas a ordem das unidades, o* *resultado apresentará o algarismo um repetido de acordo com a quantidade de algarismos expressos no dividendo.*

Essa percepção parece ter conduzido à forma de resolução de GV em outra divisão proposta oito sessões anteriores a essa, quando os números do dividendo e do divisor atendiam aquele critério: um mesmo algarismo em todas as ordens.

> P: ML, noventa e nove dividido por nove?
> ML: (silêncio) Noventa e nove dividido por nove? (silêncio)
> GV: Onze.
> P: Você fez como?
> GV: Eu coloquei o um lá embaixo, ai ficou nove, zero.
> P: Fez o algoritmo mental? Nove por nove dá um, nove por nove dá um...
> GV: Mas depois eu vi que era noventa e nove e já pensei que era onze.

Ao relatar a estratégia adotada percebemos a reprodução mental do algoritmo, que imediatamente é reconhecido por GV. Contudo, a mesma afirma que, após esse uso, percebeu a relação entre os números propostos, identificando que o resultado era realmente onze. Isso talvez seja decorrente da prática da metacognição (RIBEIRO, 2002), instaurada durante a experimentação.

Além das estratégias previstas, identificamos um único caso em que o aluno ao observar os números da divisão anunciada parte do conhecimento sobre múltiplos para descobrir o resultado do cálculo proposto:

> P: RO, sessenta e seis dividido por seis?
> RO: (silêncio)
> GF: Onze!
> P: Como você fez GF?
> GF: Porque seis e sessenta e seis (pausa) um é múltiplo do outro. Aí eu pensei em seis multiplicado por quantos vai dar sessenta e seis.

Ao perceber que a mensagem não foi compreendida pelos colegas, buscou outra explicação que fosse do alcance de todos, tendo em vista que múltiplos não é um conhecimento matemático ensinado no quinto ano do ensino fundamental. Essa última frase de GF está relacionada ao princípio fundamental da divisão, discutido nas atividades 28 e 29. Tal princípio é retomado na última sessão de exploração dessa atividade, oito sessões após essa trazida pelo excerto acima, quando CA anuncia uma regra que pode ser aplicada em qualquer divisão:

> CA: [...] Eu tive uma idéia para qualquer conta de divisão! Eu pego o divisor vezes qualquer número que você acha que vai dar, aí se chega perto.

> P: Vou pegar um cálculo para você testar isso: setenta e cinco dividido por cinco.
> CA: Você tem que chegar ao setenta e cinco, fazendo algum número que vezes cinco dá setenta e cinco.

Ressaltamos que a fala de CA foi carregada de euforia, como se o princípio anunciado não fosse do conhecimento de nenhum dos colegas e que se tratava de um grande achado. Talvez isso seja realmente verdade, haja vista que, na maioria das vezes, quando se ensina divisão a preocupação parece ficar restrita ao domínio do algoritmo, sem justificativas e sem observação de alguns fatos na divisão de dois números naturais, conforme apresentamos no levantamento das atividades propostas pelo material didático, contido no terceiro capítulo.

Em relação à atividade 41, na qual os alunos deveriam multiplicar números com dois algarismos no multiplicando e no multiplicador, identificamos a mobilização das seguintes estratégias durante as quatro sessões de exploração da mesma:

- Decomposições aditivas ou subtrativas em torno da dezena inteira, seguida da distributividade e, em alguns casos, da compensação:

> P: GF, onze vezes onze.
> GF: Cento e vinte e dois. Não! Cento e vinte e um.
> P: Como você fez?
> GF: Eu multipliquei onze vezes dez, que deu cento e dez, mais onze: cento e vinte e um.
>
> P: HG, vinte e cinco vezes dezenove.
> HG: Vinte e cinco? Espera aí! (silêncio) Cento e setenta e cinco.
> GF: Nada a ver.
> HG: Não me deixaram pensar direito.
> GF: Vinte e cinco vezes vinte que deu quinhentos, quinhentos menos vinte e cinco. Quatrocentos e setenta e cinco.

No primeiro excerto verificamos o uso da decomposição aditiva seguida da distributividade. Ressaltamos que essa estratégia foi recorrente principalmente quando um dos números propostos terminava em um ou dois (11, 12, 21, 22...). Logo que foi mobilizada pela primeira vez por GF, observamos ela ser empregada por outros alunos, principalmente quando um dos números anunciados era onze:

> P: Então, vamos lá CA. Catorze vezes onze.
> CA: (silêncio) Cento e cinqüenta e quatro. Fiz a mesma coisa que ele. Fiz catorze vezes dez e depois mais catorze
>
> P: GV, vinte e cinco vezes onze.

> GV: Vinte e cinco vezes onze? (silêncio) É (pausa) Duzentos e setenta e cinco.
> P: Como você fez?
> GV: Eu fiz daquele jeito lá.

Numericamente a estratégia relacionada à decomposição subtrativa seguida da compensação, mobilizada inicialmente por GF poderia ser representada da seguinte maneira:

25x19=
25x (20-1)
25x20 - 25x1=
500-25=475

Após esse passo inicial, outros alunos recorreram ao seu uso, ampliando para outros cálculos, como observamos nos excertos a seguir:

> P: PE, cinqüenta vezes dezenove.
> PE: (silêncio) Novecentos e cinqüenta.
> P: Como você fez PE?
> PE: Cinqüenta vezes vinte é igual a mil, menos cinqüenta.
>
> P: AD, quinze vezes quinze.
> AD: Duzentos e vinte e cinco?
> P: Explica para a gente como você chegou a esse resultado.
> AD: Eu fiz quinze vezes vinte (silêncio) Aí deu trezentos e aí eu peguei e fiz quinze vezes cinco (silêncio)
> P: Por que quinze vezes cinco?
> AD: Porque eu vou tirar depois, para tirar a diferença do vinte. Que dá setenta e cinco.

Apesar de verificarmos alguns alunos usando com destreza a decomposição aditiva seguida da distributividade, com recurso à compensação, também verificamos casos em que os alunos não conseguiam mobilizá-lo corretamente, como mostram os trechos a seguir:

> P: Trinta e dois vezes onze, RO.
> RO: (silêncio) Trezentos e vinte e um.
> P: Como você fez?
> RO: Eu fiz a mesma coisa: peguei o onze e decompus em dez mais um. Aí depois deu trezentos e vinte aumentou mais um, deu trezentos e vinte e um.
>
> AN: Trinta e cinco vezes doze? (silêncio) Trezentos e setenta e cinco?
> P: Vamos lá AN, explica como você fez?
> AN: Eu fiz dois vezes trinta e cinco que dá setenta, depois eu fiz um vezes trinta e cinco que dá trinta e cinco, daí eu coloquei o três na frente do sete, que dá trezentos e setenta. Daí eu aumentei o cinco.

Os dois trechos mostram erros ligados à utilização da dupla distributividade. Observamos no primeiro que RO esquece que ao decompor é preciso aplicar a distributividade aos dois fatores, pois multiplica o primeiro fator e soma o segundo, aspecto já observado anteriormente por Butlen e Pezard (1992): distributividade com relação a um único fator.

Em registro numérico é possível representar a estratégia adotada por RO da seguinte forma:

32 x 11
32 x (10+1)
(32x10) + 1
320+ 1 = 321

Já no segundo trecho AN parece decompor o número do multiplicador considerando seus valores isolados, sem ligação com o valor posicional (12= 1+2). Porém, antes de fornecer o resultado final para o cálculo proposto multiplica por dez, mas esquece que o cinco também deveria ser incluído nesse cálculo (35x10), como observamos na representação a seguir:

35 x 12
35 x (1+2)
(35 x2)+(35x1)
70+35=
70+(30x10+5)=
70+300+5=375

Apesar de não conseguir obter o resultado esperado verificamos uma primeira tentativa de AN em mobilizar essa estratégia, haja vista que anteriormente ele nem se arriscava a fazer cálculos com valores acima de dez, mesmo ouvindo os colegas experimentando em vários momentos, como destacamos posteriormente:

> P: Cinqüenta e quatro vezes onze?
> GA: (silêncio)
> P: AN?
> AN: (silêncio)
> LT:Quinhentos e noventa e quatro.
> P: Como você chegou?
> LT: Eu fiz cinqüenta e quatro vezes dez, deu quinhentos e quarenta e depois mais cinqüenta e quatro.

Ressaltamos que LT também optou pelo silêncio nos primeiros cálculos dessa atividade quando era interpelada, assim como AN, mas sempre nos deparávamos com alunos que arriscavam um palpite, como verificamos a seguir:

> P: LT, doze vezes quinze.
> LT: (silêncio)
> JR: Dá cento e oitenta. Eu fiz quinze vezes dez, que dá cento e cinqüenta e depois eu fiz quinze vezes dois, que dá trinta. Depois eu somei cento e cinqüenta mais trinta.

Percebemos também que os alunos que conseguiam mobilizar essa estratégia estavam preocupados em explicá-la detalhadamente para que essa começasse a fazer parte do repertório dos demais, como ilustram os excertos a seguir:

> P:AN, doze vezes vinte e oito.
> AN: Doze vezes vinte e oito? (silêncio) Espera aí!(silêncio)
> PE: Eu fiz vinte e oito vezes dez, que dá duzentos e oitenta.
> P: De onde você tirou esse dez?
> PE: Do doze, dez mais dois.
> GC: Depois ele faz vinte e oito vezes dois.
> P: Que dá quantos?
> PE: Cinqüenta e seis. Depois soma tudo.
>
> P: JD, vinte e três vezes onze.
> JD: Deixa eu ver? (silêncio) Duzentos e quarenta e um?!
> P: Explica para a gente como você fez para tentarmos te ajudar.
> JD: Não consigo explicar.
> CA: Eu decomponho o onze em dez mais um. Que vai dar duzentos e trinta.
> P: Você multiplica vinte e três por dez que dá duzentos e trinta.
> CA: Depois eu coloco mais vinte e três, que vai dar duzentos e cinqüenta e três.
> P: Ele pegou um dos valores e decompôs. Por que você escolheu onze CA?
> CA: Porque fica mais perto de dez, que é um número redondo.
>
> P: GV, catorze vezes dezoito.
> GV: Catorze vezes dezoito? (silêncio)
> GF: Duzentos e cinqüenta e dois
> P: Como chegar nesse resultado?
> GF: Dezoito vezes dez, como todo mundo faz.
> P: Que dá cento e oitenta.
> GF: Mais vinte e oito vezes quatro.
> P: Que dá quantos?
> GF: Setenta e dois.

Os alunos mostram passo a passo o funcionamento da estratégia adotada, como se quisessem ensinar os colegas a utilizá-la: primeiro é preciso decompor um dos fatores, depois multiplicar os valores decompostos pelo outro fator e, por fim, somar os dois resultados obtidos. Observamos que “[...] eles respondem a uma solicitação do [...] [nossa] e não se arriscam a serem tomados por "pequenos professores" e rejeitados pelos colegas menos dotados matematicamente” (DOUADY, 1994, p.39).

Destacamos que essa atitude não prevaleceu desde o início, principalmente no caso de GF que, ao perceber que existiam poucos alunos que conseguiam usar a decomposição seguida da distributividade, explicava rapidamente a estratégia adotada, como verificamos nos fragmentos anteriores nos quais há sua participação ou fazia uso de outros conhecimentos, como mostra o fragmento a seguir:

> GF, doze vezes doze.
> GF: Cento e quarenta e quatro.
> P: Como chegou Gabriel?
> GF: Porque a raiz quadrada de cento e quarenta e quatro é doze.

Observamos também um erro ligado à percepção dos algarismos de um dos fatores anunciados como unidades isoladas, principalmente em relação ao fator onze, ilustrado nos trechos seguintes:

> P: VT, onze vezes quarenta e cinco.
> VT: (silêncio) Noventa?
> A: Quatrocentos e setenta.
> AD: Quatrocentos e noventa e cinco.
> P: Como você fez AD?
> AD: Eu peguei o quarenta e cinco vezes dez, que dá quatrocentos e cinqüenta mais quarenta e cinco.
> P: Vinte e sete vezes onze?
> VT: (silêncio) Espera um pouquinho. Cinqüenta e quatro.
> P: Como você chegou ao cinqüenta e quatro?
> VT: Eu peguei normal assim: um vezes sete, um vezes dois[...]. Aí eu pensei, sete mais sete catorze, deixei o quatro subiu o um. Cinqüenta e quatro

Observamos que VT usa a mesma estratégia na primeira sessão de exploração da atividade 41 (trecho um) e seis sessões após essa (trecho dois). Contudo, só pudemos identificar a estratégia adotada nessa última sessão, quando solicitamos que o mesmo explicasse como obteve o resultado anunciado. Isso porque, no trecho inicial, não o permitimos explicitar a estratégia usada, pois após ouvir o resultado emitido por AD nos esquecemos de VT e dedicamos nossa atenção para entender como a resposta esperada (a emitida por AD) foi obtida. Tal atitude provavelmente confirma a idéia de que "[...] se o erro já é difícil de aceitar para o professor nas fases de resolução de problema, é intolerável nas fases de conclusão" (MARGOLINAS, 1993, p.40, *tradução nossa*) e, provavelmente, por isso, ignoramos a resposta de VT. Entretanto, como afirma a própria autora, é preciso permitir que o aluno reconheça a verdade ou a falsidade do seu resultado sem que esse se engane ou permaneça no erro, o possivelmente poderia ter ocorrido mediante nossa intervenção, enquanto detentor do saber matemático. E se isso tivesse acontecido talvez VT não repetisse a mesma estratégia no segundo cálculo proposto (trecho dois).

Essa intervenção, acompanhada do registro no quadro da estratégia, nos permitiu compreender o processo de pensamento matemático adotado por VT, que inicia sua explicação dizendo que para descobrir o resultado de vinte e sete vezes onze começou multiplicando um vezes sete. A continuação do diálogo pode ser visualizada no trecho seguinte:

> P: Qual um que você está multiplicando por sete?
> VT: O primeiro.
> P: Esse um vale quantos? (mostro o algarismo da dezena)
> VT: Não, é o outro.
> P: Fez um vezes vinte e sete. E depois?
> VT: Aí eu peguei esse outro um.
> P: Ele vale quantos?
> VT: Dez.
> P: Se ele vale dez, vinte e sete vezes dez, que dá quantos?
> VT: Duzentos e setenta.
> P: E agora, tem que fazer o quê?
> VT: Vinte e sete mais duzentos e setenta.

Ao ouvimos essa resposta de VT pudemos inferir que finalmente ele havia compreendido o funcionamento da estratégia. Contudo, quando perguntamos qual o resultado dessa soma, nos surpreendemos ao ouvir como resposta o número quinhentos e quarenta. Analisando o número anunciado percebemos que VT retornou ao resultado apresentado inicialmente (cinqüenta e quatro), multiplicando-o por dez. Inferimos que isso seja decorrente do diálogo que estabelecemos e, principalmente, oriundo da pergunta que fizemos sobre o valor do segundo algarismo presente na multiplicação realizada:

> VT: Aí eu peguei esse outro um.
> P: Ele vale quantos?
> VT: Dez.
> P: Se ele vale dez, vinte e sete vezes dez, que dá quantos?

Provavelmente VT tenha recorrido a essa multiplicação para transformar o cinqüenta e quatro em quinhentos e quarenta, desprezando o cálculo que ele mesmo havia sugerido e que levaria ao resultado esperado: *Vinte e sete mais duzentos e setenta.*

Cabe ressaltar a participação de JR na penúltima sessão de exploração da atividade, quando esse afirma que é difícil organizar o algoritmo mentalmente quando os fatores são compostos por dois algarismos. Nesse caso, ele recomenda fazer duas contas:

> P: CA, quinze vezes quarenta e oito?
> CA: (silêncio) Quarenta! Não cinqüenta...
> P: Como você está fazendo? Explica para a gente te ajudar.
> CA: Eu fiz (pausa) de cinco em (pausa) primeiro eu fiz (pausa) Eu fiz uma conta normal na minha cabeça [referindo-se ao algoritmo ensinado pela escola].
> [...]
> JR: A hora que eu fui fazer essa conta eu percebi que tinha que fazer duas contas, porque é difícil você pegar quarenta e oito e multiplicar por quinze de uma vez.
> P: Igual o CA fez, de uma vez só.
> JR: É difícil! Aí eu faço: como cinco por quatro dá vinte, fica vinte ali. Cinco vezes oito dá quarenta e ali vinte eu tiro o zero e coloco o quarenta, fica duzentos e quarenta. Depois eu pego quarenta e oito por dez que dá quatrocentos e oitenta. Aí é só somar.

Percebemos o recurso à decomposição seguida da distributividade implícito na fala de JR em multiplicações com fatores formados por dois algarismos. Isso talvez justifique durante a exploração dessa atividade a ausência do algoritmo mental que gerasse os resultados esperados. Tal ausência corrobora com os resultados evidenciados por Butlen e Pezard (1992), quando afirmaram que a freqüência de utilização das diferentes estratégias nas atividades multiplicativas sofreu influência do tamanho dos números e, no caso de multiplicações onde **n** e **n**' são números formados por dois algarismos, o algoritmo escrito reproduzido mentalmente desapareceu completamente.

Na atividade 42, que continha números possuindo zeros à direita ou centenas ou unidades de milhar inteiras divididos por 50, observamos o uso das seguintes estratégias:

- Desprezar o zero à direita do dividendo e do divisor e recorrer a resultados conhecidos:

> P: GF, quinhentos dividido por cinqüenta.
> GF: Ah! (silêncio) Dez.
> P: Explica como você chegou ao dez.
> GF: Eu cortei o zero e divido o cinqüenta por cinco.
>
> P: GA, trezentos e cinqüenta dividido por cinqüenta.
> GA: (silêncio) Espera aí! Seis?! É sete!
> P: Como você sabe que é sete e não seis?
> GA: Porque sete vezes cinco é trinta e cinco
> P: VT, cento e cinqüenta dividido por cinqüenta.
> VT: (silêncio) Três. Eu peguei assim: eu fiz três vezes (pausa) pensei que número na tabuada do cinqüenta que dava cento e cinqüenta. Aí lembrei [que] cinco vezes três quinze. Eu tirei o zero e lembrei.

> P: Tirou por quê?
> VT: Porque eu acho que facilita mais para a gente fazer a conta.

Observamos que os alunos apelaram para a estratégia que consiste em desprezar o zero à direita do dividendo e do divisor para efetuar as divisões propostas, como ilustra os excertos acima. No primeiro excerto, é possível identificar que o aluno, após abandonar o zero, parece buscar um número que multiplicado por cinco gere o resultado cinqüenta. Já no segundo, GA localiza na tabuada do cinco o valor expresso no dividendo após a retirada do zero. Por fim, no último excerto, VT retira os zeros do dividendo e do divisor e recorre a resultados conhecidos para obter a solução do cálculo proposto: *Eu tirei o zero e lembrei.*

Supomos que o teorema em ação mobilizado nas atividades 35 e 36, relacionado com a divisão por 10 de números com zeros à direita no dividendo, foi recuperado e adaptado para essa atividade, pois após desprezar o último algarismo da direita os alunos localizaram um número que multiplicado por 5 atingisse o valor expresso no dividendo.

Porém, identificamos um único caso em que o aluno interpelado obteve êxito na mobilização do teorema em ação quando o número expresso no dividendo possuía apenas um zero assim como o número do divisor, mas não conseguiu usá-lo corretamente quando aquele número não atendia a esse critério, como observamos nos excertos seguintes:

> P: [...] duzentos e cinqüenta dividido por cinqüenta.
> GC: É só você tirar o zero, fica vinte e cinco dividido por cinco, cinco vezes cinco dá vinte e cinco.
> P: Dois mil dividido por cinqüenta, GC.
> GC: É (pausa) quatro.
> GF: Quarenta.
> P: Como você sabe que é quarenta e não quatro?
> GF: Porque quatro é duzentos, se fosse por quinhentos aí iria ser quatro.
> GC: Eu esqueci do zero.

Isso talvez tenha acontecido porque o aluno aplicou de forma automatizada (ANSELMO e PLANCHETTE, 2006) a estratégia de desprezar o zero à direita do dividendo e do divisor e recorrer a resultados conhecidos, concluindo prematuramente o cálculo sem levar em consideração os valores propostos pela divisão.

- Quando o dividendo possuir zero à direita é possível observar uma divisão por 10 ou 100, seguida de uma multiplicação por 2, pois cinqüenta é metade de cem:

Não conseguimos identificar claramente o uso dessa estratégia durante as duas sessões de exploração dessa atividade. Percebemos apenas indícios de sua mobilização quando os números propostos no dividendo atingiam as unidades de milhar e possuíam dois zeros à direita. Os excertos a seguir parecem nos permitir tal inferência, quando HG solicita um tempo para realizar o cálculo e quando GF emite rapidamente a resposta ao cálculo proposto:

> P: HG, dois mil e quinhentos dividido por cinqüenta.
> HG: Espera aí! Cinqüenta.
> P: Sete mil dividido por cinqüenta dá quantos?
> GF: Cento e quarenta.

Outro indício da mobilização dessa estratégia provavelmente apareceu quando JD explica como fez para obter o resultado vinte para o cálculo mil dividido por cinqüenta:

> JD: Porque dez vezes cem é mil e cinqüenta é metade de cem.

Essa estratégia parece se basear na relação metade e dobro, pois se 1000 dividido por 100 é 10, logo 1000 dividido por 50 é 20, porque 50 é metade de 100 e 20 é o dobro de 10.

Observamos, por um lado, alunos que ficavam atentos aos cálculos propostos buscando descobrir os resultados com base nos anunciados na mesma sessão ou na anterior, como ilustram respectivamente os fragmentos a seguir:

> P: VT, mil e cem dividido por cinqüenta.
> VT: (silêncio)
> JD: Vinte e dois.
> P: Como você sabe que é vinte e dois?
> JD: Era quase igual ao que eu fiz, só aumentei dois.
> P: CA, mil e cem dividido por cinqüenta.
> CA: Não sei!
> AD: Vinte e dois.
> P: Como você fez?
> AD: Eu lembrava que mil era vinte ontem, ai eu só aumentei dois.

Por outro lado, percebemos um aluno que estabeleceu relação entre a divisão proposta com uma situação vivenciada no cotidiano:

> JR: Eu fiz assim: na natação a piscina tem vinte e cinco metros e tem que fazer cinqüenta para dar uma chegada. Aí quando ele pede quatrocentos ou mais [...] eu já gravo [...] eu já sei que são sete chegadas.

> JR: Eu te falei aquele dia da natação. Duzentos metros são quatro chegadas, duzentos e cinqüenta são cinco.

Essa relação corrobora com os resultados evidenciados pelo 4º Indicador Nacional do Analfabetismo Funcional - INAF (INSTITUTO PAULO MONTENEGRO 2004, p.16) ao revelar que o “[...] cálculo mental por estimativa [...] [é] um dos recursos mais utilizados na resolução da maioria dos problemas da vida diária que envolvem operações aritméticas”. Isso porque JR parece usar esse cálculo para descobrir quantas voltas deverá dar em torno da piscina durante os treinos da natação, estabelecendo relação com os cálculos propostos pela atividade.

No que se refere à atividade 43, que continha multiplicações por 25, observamos que a relação desse número com a quarta parte de cem foi estabelecida logo no primeiro cálculo:

> P: AN, quatro vezes vinte e cinco.
> AN: Quatro vezes vinte e cinco (silêncio) Cem.
> P: Conta como você fez.
> AN: É (pausa)
> CA: Eu sei professora. É que vinte e cinco é a quarta parte de cem.
> P: (Percebemos que ele lembrou do conteúdo de fração). Você fez como?
> CA: Cem dividido por quatro.

Talvez essa percepção seja decorrente do fato do conteúdo fração ter sido trabalhado pela professora no mesmo período de aplicação dessa atividade, conforme pudemos verificar com a turma. Apesar disso, não observamos, em outros momentos da sessão destinada à exploração da mesma, outros alunos buscando descobrir o resultado do cálculo anunciado partindo dessa informação ou usando as estratégias relacionadas, que consistiam em:

- Multiplicar por 100 e depois dividir por 4;
- Dividir por 4 e depois multiplicar por 100.

Dentre as estratégias previstas também não identificamos o uso da decomposição multiplicativa em torno do valor 4 seguida da associatividade, talvez devido aos motivos destacados anteriormente (atividade 37).

As estratégias mobilizadas pelos alunos para a resolução do cálculo proposto estavam relacionadas, por um lado, à decomposição aditiva de um dos fatores anunciados ligada à distributividade, como observamos nos excertos a seguir:

> P: GF, dezesseis vezes vinte e cinco.

> GF: (sussurra o cálculo realizado) Quatrocentos! Eu fiz vinte e cinco vezes dez, mais cento e cinqüenta.
>
> P: HG, vinte e quatro vezes vinte e cinco.
> HG: (silêncio) Espera aí!
> AD: Seiscentos. Eu fiz vinte vezes vinte, que dá quatrocentos. Aí eu (pausa) Não! Fiz vinte e cinco vezes vinte que dá quinhentos, depois eu peguei vinte e cinco vezes quatro, que dá cem.

Ressaltamos que multiplicações contendo o fator 25 também apareceram na atividade 41, conforme ilustram os dois fragmentos resgatados dessa atividade, nos quais os alunos usaram essa estratégia:

> P: GV, vinte e cinco vezes doze.
> GV: Vinte e cinco vezes onze? (silêncio) É (pausa) Duzentos e setenta e cinco.
> P: Como você fez?
> GV: Eu fiz daquele jeito lá.
> P: Decompôs o onze em dez mais um. Cento e cinqüenta mais vinte e cinco.
>
> P: HG, vinte e cinco vezes dezenove.
> HG: Vinte e cinco? Espera aí! (silêncio) Cento e setenta e cinco.
> GF: Nada a ver.
> HG: Não me deixaram pensar direito.
> GF: Vinte e cinco vezes vinte que deu quinhentos, quinhentos menos vinte e cinco. Quatrocentos e setenta e cinco.

Por outro lado, identificamos a percepção de algumas regularidades, conforme mostram os trechos a seguir:

> P: GV, cem vezes vinte e cinco.
> GV: Cem vezes vinte e cinco? Espera aí! (silêncio)
> P: LT?
> LT: Dois mil e quinhentos. Eu só aumentei dois zeros.
>
> P: PE, trinta e seis vezes vinte e cinco.
> PE: (silêncio) Quinhentos e vinte e dois. Não, espera aí!
> GF: Oitocentos e alguma coisa.
> GC: Não pode dar dois, porque não tem nenhum número que dá dois (referindo-se a tabuada do cinco). Tem que ser zero ou cinco.

O primeiro trecho está relacionado ao teorema em ação mobilizado anteriormente nas atividades 31 à 34, que apregoa que ao multiplicarmos por 10 basta acrescentar um zero à direita do último algarismo , por 100 acrescentamos dois zeros e por 1000 três zeros. O segundo implica mobilização do seguinte teorema: *Todo número multiplicado por 5 termina em 0 ou 5.*

Na atividade 44, que continha divisões por 25, observamos alguns alunos estabelecendo uma relação desse número com a metade de cinqüenta, como é possível observar nos seguintes excertos:

> P: GA, cem dividido por vinte e cinco.
> GA: Quatro. Porque [vinte e cinco é] metade de cinqüenta.
>
> P: VT, setenta e cinco dividido por vinte e cinco.
> VT: (silêncio)
> JR: Três. É fácil, se metade de cinqüenta é vinte e cinco é só aumentar mais vinte e cinco.

Isso nos permite inferir que provavelmente essa informação advenha do conhecimento de que esse número é a quarta parte de cem, conforme anunciado por CA na atividade anterior e resgatado por ele quando o cálculo proposto era duzentos dividido por vinte e cinco:

> CA: Tem a ver com aquele negócio da quarta parte.
> P: Explica para a gente.
> CA: Vinte e cinco é a décima parte do duzentos e cinqüenta.

Cabe ressaltar que essa estratégia ficou restrita a um pequeno grupo, não sendo mobilizada por outros alunos no decorrer da sessão.

Dentre as estratégias previstas identificamos:

- A investigação dos múltiplos do divisor por multiplicação e subtração.

> P: GF, trezentos dividido por vinte e cinco.
> GF: É (pausa) Doze!
> P: Como você sabe que é doze?
> GF: Porque quatro é cem, vezes três é doze.

Após ouvirmos a explicação de GF ficamos atentos aos sinais manifestados pela turma em termos de compreensão ou não-compreensão da estratégia adotada (VERGNAUD, 2003). Nossa impressão foi confirmada quando perguntamos aos alunos se haviam entendido o cálculo realizado por GF e obtivemos um não como resposta. Diante disso, começamos nossa intervenção:

> P: Ele sabe que vinte e cinco vezes quatro... (vou registrando no quadro as informações)
> GF: É igual a cem.
> P: Para chegar a trezentos...
> GF: Então mais duzentos.

> P: Vou repetir o quatro três vezes.
> GF: Que vai dar doze

Fomos registrando no quadro as informações trazidas por GF conforme íamos intervindo, ficando a escrita numérica representada da seguinte forma:

300:25
4x25=100
300-100=200
(4x25)+ (4x25)+ (4x25)
100+100+100 = 300
4+4+4=12
300:25=12

Acreditamos que a intervenção realizada tenha contribuído para que a turma pudesse, naquele momento, compreender a estratégia adotada por GF. Não falamos aprender a estratégia, pois sabemos que "[...] a duração de uma aprendizagem é necessariamente longa" (VERGNAUD, 2003, p. 53) e como vimos essa estratégia não foi mobilizada pelos alunos em outras situações, talvez tenha sido apenas temporariamente compreendida.

- A busca do resultado conveniente por ensaios sucessivos:

> P: AN, duzentos e cinqüenta dividido por vinte e cinco.
> AN: É (silêncio)
> GC: Dez!
> P: Como você fez GC?
> GC: Eu só fui contando assim: porque vinte e cinco mais vinte e cinco dá cinqüenta. Cinqüenta mais cinqüenta dá cem. Aí cento e cinqüenta, duzentos, aí duzentos e cinqüenta.

Verificamos que essa estratégia, ao invés de partir de multiplicações conforme previmos, baseou-se na adição reiterada para localizar o resultado conveniente:

250:25
25+25=50 → 25x2=50
50+50=100 → 25x4=100
100+100=200 → 25x8=200
200+50=250 → 25x10=250

- O emprego da distributividade da divisão:

> P: HG, cento e cinqüenta dividido por vinte e cinco.
> HG: É (pausa) Oito.
> P: Fala PE.
> HG: Espera!

> PE: Seis. Eu já sei que vinte e cinco vezes quatro é cem, aí vinte e cinco vezes dois, cinqüenta.

É possível observar que o critério adotado para empregar a distributividade tem relação com resultados conhecidos, conforme ilustra o trecho anterior e/ou com resultados anunciados anteriormente, conforme mostram os fragmentos a seguir:

> P: [...] JD, cento e vinte e cinco dividido por vinte e cinco.
> JD: (silêncio) Cinco.
> P: Como você fez?
> JD: Porque cento e cinqüenta dividido por vinte e cinco dá seis
> CA: Se a quarta parte é cem, eu só coloquei mais vinte e cinco.
> P: JD, como você sabe que cento e cinqüenta dividido por vinte e cinco dá seis.
> JD: Porque já tinha falado antes.
>
> P: LT, mil dividido por vinte e cinco.
> LT: (silêncio)
> HG: Eu só sei quando ela pergunta para os outros.
> P: Sabe essa HG?
> PE: Quarenta!
> P: Como você sabe?
> PE: Cem dividido por vinte e cinco dá quatro, então quatro vezes dez quarenta.
> CA: Vinte e cinco não é a quarta parte de cem. Então, duzentos e cinqüenta para chegar em mil.
> [...]
> JR: Eu sei que quinhentos dá por vinte, vinte vezes vinte e cinco. Aí eu coloquei quinhentos mais quinhentos dá mil, vinte mais vinte dá quarenta.
> P: JR, cento e setenta e cinco dividido por vinte e cinco.
> JR: Espera aí (pausa) Cento e setenta e cinco? Sete.
> GV: Eu acho que dá oito
> P: Como você fez para dar oito?
> GV: É que eu vi ali (referindo-se no quadro)
> JR: Eu sei porque é sete. O JD acabou de explicar que cento e vinte e cinco dividido por vinte e cinco dá cinco, aí é acrescentar mais cinqüenta, para chegar a cento e setenta e cinco.

O primeiro fragmento tem relação com o cálculo realizado por PE, o segundo mostra que PE e JR partem de resultados conhecidos e o terceiro fragmento apresenta, por um lado, que GV busca o resultado do cálculo proposto em registros disponíveis no quadro e por outro, que JR justifica a pertinência do resultado apresentado por ele baseando-se em cálculos realizados anteriormente.

Convém destacar a participação de HG em dois momentos. No primeiro, quando é interpelado, e no segundo quando o cálculo é proposto a um colega, como observamos nos trechos a seguir:

> P: [...] HG, cento e cinqüenta dividido por vinte e cinco.
> HG: É (pausa) Oito.
> P: Fala PE.

> HG: Espera!
> [...]P: Como você chegou a oito HG?
> HG: Eu chutei.
> P: LT, mil dividido por vinte e cinco.
> LT: (silêncio)
> HG: Eu só sei quando ela pergunta para os outros.

No primeiro HG faz uma pausa antes de anunciar o resultado oito para o cálculo cento e cinqüenta dividido por vinte e cinco, mostrando-se frustrado quando PE pede para explicitar seu comentário. Parece que ao pedir para esperar HG repete a indignação demonstrada na atividade 41, quando tem início uma fase em que os cálculos propostos não geram resultados satisfatórios como vinha acontecendo até então: *Não me deixaram pensar direito.* Já no segundo excerto presenciamos um desabafo quando propomos que LT calculasse mil dividido por vinte e cinco: *Eu só sei quando ela pergunta para os outros.*

Uma explicação possível para o comportamento apresentado por HG pode estar relacionada ao fato de que, no primeiro caso, existe uma cobrança implícita para que o resultado anunciado seja o esperado e isso talvez o impeça de ter êxito no cálculo realizado, devido ao *status* conquistado diante da turma em outras situações. Em relação ao segundo caso, não existe a mesma pressão, tendo em vista que o cálculo foi direcionado a outro colega, o que provavelmente o permitiu mobilizar os conhecimentos disponíveis para obter o resultado desejado. Essa inferência pode ser comprovada quando propomos o cálculo duzentos e cinqüenta dividido por vinte e cinco e HG relacionou a resposta anunciada por GC com uma estratégia mobilizada nas atividades 31 à 34, referentes às multiplicações por 10, 100 e 1000, conforme mostra o excerto seguinte:

> HG: Duzentos e cinqüenta é o resultado de vinte e cinco com o zero atrás.

Essa fala de HG, por um lado, parece reforçar mais uma vez as imbricações existentes entre a multiplicação e a divisão, e por outro, fortalece a necessidade de um trabalho que explore conjuntamente essas operações, assim como no caso da adição e da subtração, que formam respectivamente o campo conceitual multiplicativo e o campo conceitual aditivo (VERGNAUD, 1990).

4.4 – Discussão dos resultados

Os dados coletados durante a experimentação nos forneceram alguns elementos por um lado, para respondermos à questão central do nosso trabalho (Quais são as estratégias de cálculo mental utilizadas por alunos, do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, durante a resolução de atividades que envolvem o sistema de numeração decimal, as operações aditivas e as multiplicativas?). Por outro lado, os dados nos permitiram identificar e validar os teoremas em ação apresentados pelos alunos durante a solução das atividades propostas.

Analisando os resultados apresentados na resolução das atividades dos três blocos destacamos as principais estratégias e teoremas mobilizados pelos alunos no decorrer da experimentação:

- Reproduzir o algoritmo mentalmente;

Apesar de considerarmos que a estratégia que “põe a operação dentro da cabeça” não é uma estratégia de cálculo mental, mas uma estratégia de cálculo escrito efetuado mentalmente (LETHIELLEUX, 2001), acreditamos ser importante discuti-la, tendo em vista que a mesma permeou a resolução das atividades dos três blocos da experimentação.

Presenciamos seu uso nas contagens para frente e regressiva ou nas atividades que buscam descobrir o sucessor e o antecessor dos números a próximos dos “nós” da escrita numérica, quer dizer das dezenas, centenas, unidades de mil... (LERNER e SADOVSKY, 1996), como observamos no trecho a seguir. Ressaltamos que essa variável numérica (números próximos aos “nós”) parece sintetizar uma das principais dificuldades enfrentadas pelos alunos que ainda não dominam as propriedades e regularidades do sistema de numeração decimal.

> P: Como que eu faço essa passagem do mil e noventa e nove para mil e cem? Tem que fazer o que?
> CA: Mais um.
> P: Mais um aonde?
> CA: Mais um no último número.
> P: Tá. E aí, vou fazer o quê?
> A: Vai dar dez, deixa o zero e manda o um lá pro outro nove. Vai dar dez de novo, deixa o zero e manda o um lá no lugar do zero.
>
> P: Então, qual seria o próximo número depois de nove mil novecentos e noventa e nove?
> ML: Dez mil.
> P: Como você descobriu?
> ML: Porque depois do nove vem o dez né? Aí eu coloquei um dez e fui pensando nos zeros.

> P: Espera lá. Você disse que disse que depois do nove vem o dez, mas aqui tem um monte de nove. Você começou por qual nove?
> ML: O primeiro.[...] Coloquei um zero embaixo, aí eu coloquei outro zero no outro nove, outro, outro e aí eu coloquei o um.

Observamos as regras do algoritmo da adição implícitas na fala de ML: começar pela coluna das unidades e continuar pela coluna das dezenas, depois das centenas, e assim sucessivamente, calculando a soma dos números em cada coluna até ao esgotamento das mesmas. Se a soma dos números de uma coluna for inferior a dez, inscrever essa soma na linha do total, mas se for igual ou superior a dez, escrever o algarismo das unidades dessa soma e transportando algarismo das dezenas para o alto da coluna imediatamente à esquerda, e somando-o aos restantes números desta última coluna. Sabemos que é "[...] difícil e quase impossível as crianças explicitarem estas regras, embora sejam capazes de executar a seqüência das operações" (VERGNAUD, 1996a, p. 159), via registro escrito ou mentalmente.

Foi possível verificar o uso do algoritmo mentalmente também para identificar o número formado por agrupamentos de dezenas e centenas, como mostra o excerto seguinte:

> P: Como que dá pra fazer de cabeça cinqüenta e oito vezes cem?
> MA: Soma ou fazer a conta na cabeça. Fazer oito vezes zero (pausa) zero. E aí você vai indo, vai descobrindo quanto vai dar.

Identificamos a mobilização da estratégia ligada à montagem, na cabeça, do algoritmo canonizado também na resolução de atividades que traziam somas de números que contemplavam a ordem das centenas com números que continham apenas a ordem das unidades e em atividades relacionadas à formação de centenas inteiras, como ilustram os fragmentos a seguir:

> BA: Novecentos e noventa e nove mais dois. Ela soma dois ao nove, que dá onze. Aí ela sobe um no outro nove, que dá dez. Aí sobe mais um no outro nove que dá dez, que é igual a mil e um.

> P: [...]Quanto falta para chegar à centena superior a partir de cento e vinte e oito?
> GC: (silêncio) Oitenta e dois.
> P: Explica pra gente.
> GC: Eu fui contando. Cento e vinte e oito (pausa). Eu peguei (pausa) Quanto falta do oito pra chegar a dez? Mais dois. Aí quanto falta pro dois pra chegar a dez? Sete. Não, mais oito.

Observamos também, que o registro escrito do cálculo proposto parece ter induzido o emprego mental do algoritmo, ratificando os resultados encontrados por várias pesquisas, dentre elas a realizada por Butlen e Pezard (1992). como ilustram os seguintes fragmentos:

> P: GV, setecentos e cinqüenta e nove menos cem.
> GV: (silêncio) Você pode escrever no quadro pra mim?
> P: Você acha melhor?
> GV: Harãm!
> P: Setecentos e cinqüenta e nove menos cem (repito o cálculo enquanto registro).
> GV: (pausa) Seiscentos e cinqüenta e nove?!
> P: Você fez o que para descobrir esse resultado?
> GV: É (pausa)! Eu abaixei o nove, o cinco e fiz sete menos um.
> P: RO, três mil e vinte e oito menos cem.
> RO: (silêncio) Espera aí! (pausa). Vai dar dois mil oitocentos e vinte e oito.
> P: Vamos lá! O número era três mil e vinte e oito menos cem (registro no quadro o resultado anunciado). Como você chegou ao resultado?
> RO: Eu fiz zero menos oito não vai dar nada, vai dar oito e zero menos dois também vai dar dois. Aí zero menos um, não dá e aí eu emprestei do três, ficou dois e o zero ficou dez. Dez menos um é oito e dois menos nada é dois.

Verificamos essa estratégia relacionada à divisão exata com números de dois algarismos por um número de um algarismo, à multiplicações de números de dois ou três algarismos por números de um algarismo ou vice-versa e à multiplicações de números com dois algarismos no multiplicando e no multiplicador, como observamos nos fragmentos a seguir:

> P: ML, noventa e nove dividido por nove?
> ML: (silêncio) Noventa e nove dividido por nove? (silêncio)
> GV: Onze.
> P: Você fez como?
> GV: Eu coloquei o um lá embaixo, ai ficou nove, zero.
>
> ****
> P: VT, trinta e dois vezes quatro.
> VT: Trinta e dois vezes quatro? (silêncio) Cento e vinte e oito.
> P: Você fez como?
> VT: Eu pensei: eu peguei o quatro vezes o dois que é oito e o quatro vezes o três que é doze.
> P: Fez como se fosse o algoritmo.
> VT: É!
> *****
> P: Vinte e sete vezes onze?
> VT: (silêncio) Espera um pouquinho. Cinqüenta e quatro.
> P: Como você chegou ao cinqüenta e quatro?
> VT: Eu peguei normal assim: um vezes sete, um vezes dois[...]. Aí eu pensei, sete mais sete catorze, deixei o quatro subiu o um. Cinqüenta e quatro

Identificamos nos dados apresentados durante a experimentação alguns teoremas mobilizados pelos alunos que talvez induzam a uma organização mental do algoritmo ensinado pela escola:

- Para saber o próximo número da seqüência basta acrescentar mais uma unidade.
- Para descobrir o número que vem antes basta diminuir uma unidade do último número anunciado.
- Para identificar o número formado por uma quantidade de dezenas basta multiplicar por dez.
- Para identificar o número formado por uma quantidade de centenas basta multiplicar por cem.
- Para descobrir quanto falta para chegar à centena superior, basta completar os valores dos algarismos das dezenas e unidades e obter uma centena.

Percebemos que na falta de uma outra estratégia que conduzisse ao resultado, o uso do algoritmo mental foi o mais recorrente, talvez porque na escola, na maioria das vezes, não se ensina outra forma de cálculo além desse (MENDONÇA e LELLIS, 1989).

- Realizar a sobrecontagem com o auxílio dos dedos;

Consideramos que o uso dos dedos faz parte do cálculo mental como forma de apoio em contagens, ordenações e comparações, pois o gesto e o pensamento estão intimamente ligados (VERGNAUD, 1996b, p. 12). Nesse sentido, o uso da bijeção, caracterizada pela correspondência biunívoca do conjunto dos dedos sobre o conjunto dos números, foi identificada com as seguintes finalidades: 1) auxiliar na delimitação do número de parcelas a serem consideradas para o cálculo; 2) controlar a quantidade de parcelas prevista pelo sujeito na relação entre o conjunto de números de referência e o conjunto a ser contado, 3) materializar o cálculo realizado mentalmente.

Observamos desde a bijeção de 1 (dedo) para 1 (unidade) até valores maiores do que a unidade como 10 e 100, por exemplo.

> BA: Eu pego o doze e somo mais sete. Vai contando de um em um: treze, catorze, quinze, dezesseis, dezessete, dezoito, dezenove, vinte. Deu oito! (Faz a contagem com o auxílio dos dedos).
> ****
> MR: É que eu fui contando de cem em cem, até novecentos.

****

P: Como você chegou ao quarenta e oito?
GV: É só você contar de trás para frente.
P: Então conta para a gente. Você fez como?
GV: cinqüenta e quatro, cinqüenta e três, cinqüenta e dois, cinqüenta e um, cinqüenta, quarenta e nove, quarenta e oito.
P: Como você sabe qual a hora de parar a contagem [...]?
GV: Porque óh: chega ao quarenta e nove e já dá cinco (faz um gesto com os dedos)

• Usar regras automatizadas: desprezar ou acrescentar zeros ao final do número; desprezar o último algarismo da direita para descobrir quantas dezenas possui um determinado número; desprezar os dois últimos algarismos da direita do número anunciado para determinar a quantidade de centenas.

No caso da nossa pesquisa, verificamos que o recurso a regras automatizadas foi favorecido, principalmente, pela variável numérica em jogo: números terminados em zero. Os alunos tiveram facilidade no trabalho com esses números, justificada em função de esses diminuírem "[...] a quantidade de elementos a serem processados e [...] [permitirem] à criança, aproveitar-se de seu conhecimento da tabuada [...], [facilitando o cálculo mental], ao contrário do que acontece com o cálculo escrito" (CARRAHER, CARRAHER E SCHLIEMANN, 1995, p.53). Além disso, esses números permitiram aos alunos mobilizar regras ensinadas pela escola, em virtude da operação proposta nos cálculos a serem efetuados.

Destacamos que o "[...] funcionamento cognitivo do aluno comporta operações que se automatizam progressivamente [...] e decisões conscientes [aliás,] todas as nossas condutas comportam uma parte de automaticidade e uma parte de decisão consciente" (VERGNAUD, 1996a, p. 158). Acreditamos que o trabalho sistemático envolvendo o cálculo mental desenvolvido favoreceu a automatização de certos cálculos à medida que tornou alguns resultados completamente memorizados e disponíveis imediatamente, liberando espaço na memória, melhorando o desempenho em cálculo e possivelmente mobilizando propriedades dos números e das operações (ANSELMO e PLANCHETTE, 2006; BUTLEN e PEZARD, 2003).

Os fragmentos seguintes ilustram a mobilização dessa estratégia:

P: Seiscentos e cinqüenta vezes cem.
JD: Seis mil e cinqüenta.
AD: Seis mil e quinhentos.
P: Por que você acha que é seis mil e quinhentos e não seis mil e cinqüenta.
AD: Porque tem que aumentar os zeros.
*****

P: AN, dois mil e quinhentos dividido por cem?
AN: Duzentos e cinqüenta.
CA: Vinte e cinco.
P: Por que não é duzentos e cinqüenta?
CA: Porque o cem tem dois zeros.
GC: Vai diminuir dois zeros
*****
P: [...] Quero saber: quarenta e cinco dezenas formam que número? [...] noventa ou quatrocentos e cinqüenta?
P: ML, [...] consegue descobrir qual é?
ML: Quatrocentos e cinqüenta.
P: Por que quatrocentos e cinqüenta?
ML: Porque vai aumentando os zeros.
****
FN: Ao invés de multiplicar, porque tem gente que não sabe a tabuada direito, dá pra fazer o dez. O dez não tem um zero? Aumenta um zero.
*****
P: [...] Mas é aqui FN, em cinqüenta mil e quinhentos. Quantas dezenas têm nesse número?
FN: Cinco mil e cinqüenta.
P: Como você descobriu que tem cinco mil e cinqüenta?
FN: Eu tirei o zero da unidade e peguei esses quatro números.
*****

Identificamos alguns teoremas subjacentes ao uso das regras automatizadas:

- Para determinar a quantidade de dezenas de um número despreza-se o último algarismo da direita do número anunciado. O número formado pelos algarismos restantes representa a quantidade de dezenas
- Para determinar a quantidade de centenas de um número desprezam-se os dois últimos algarismos da direita do número anunciado. O número formado pelos algarismos restantes representa a quantidade de centenas.
- Quando multiplicamos por 10 basta acrescentar um zero à direita do último algarismo do número, por 100 acrescentamos dois zeros e por 1000 três zeros.
- Para determinar o resultado da divisão de um número terminado em zero por 10 despreza-se o último algarismo da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa o resultado.
- Para determinar o resultado da divisão de um número terminado em dois zeros por 100 desprezam-se os dois últimos algarismos da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa o resultado e assim analogamente para números terminados em três zeros, quatro zeros, etc ...

- Usar propriedades dos números e das operações (decomposição, comutatividade, associatividade, compensação, distributividade):

Acreditamos que o debate ao redor das estratégias permitiu, por um lado, trabalhar o raciocínio, construir o sentido a propósito das propriedades utilizadas e a desenvolver conhecimentos aritméticos (ANSELMO e PLANCHETTE, 2006). Por outro lado, apesar de sabermos que o uso das propriedades dos números e das operações facilita a memorização dos cálculos intermediários, a escolha de uma estratégia entre as diferentes apresentadas ocorreu em virtude das concepções numéricas dos alunos, e por interesse pessoal em economia (BUTLEN; PEZARD, 1992).

Evidenciamos nos trechos a seguir o recurso as propriedades dos números e operações:

> P: HG, vinte e quatro vezes vinte e cinco.
> HG: (silêncio) Espera aí!
> AD: Seiscentos. Eu fiz vinte vezes vinte, que dá quatrocentos. Aí eu (pausa) Não! Fiz vinte e cinco vezes vinte que dá quinhentos, depois eu peguei vinte e cinco vezes quatro, que dá cem.
>
> P: JR, vinte e sete vezes cinco?
> JR: É (pausa) Dá cento e (pausa) trinta e cinco.
> P: Você fez como JR?
> JR: Eu sei que sete vezes cinco dá trinta e cinco. Aí eu fiz vinte vezes cinco que dá cem e depois somei.
>
> PE: Eu faço quatro vezes trinta (no cálculo trinta e dois vezes quatro).
> P: Você decompõe (vou registrando no quadro a fala dele) o trinta e dois em trinta mais dois.
> PE: Agora eu faço trinta vezes dois, porque o quatro é dois mais dois, vezes dois de novo, que dá cento e vinte. Aí quatro vezes dois: oito.
>
> GF: Vinte e cinco vezes vinte que deu quinhentos, quinhentos menos vinte e cinco. Quatrocentos e setenta e cinco (no cálculo 25x19).

Listamos a seguir os teoremas relacionados a essa estratégia e que foram mobilizados pelos alunos ao longo da experimentação:

- Para descobrir o resultado da subtração, basta decompor o número do subtraendo em duas partes, de modo que uma contenha o mesmo valor da unidade expresso no minuendo. Em seguida, realizar as subtrações, sendo que a primeira compreende as unidades iguais.
- Para encontrar o resultado de uma divisão por cinco de um número terminado em zero, basta dividi-lo por dois, seguida de uma divisão por cinco e uma multiplicação por dois.
- Se ao multiplicar **a** por **b** se obtém **c**, então multiplicando **b** por **a** também obteremos **c**.

Identificamos outros teoremas subjacentes à mobilização das idéias associadas às operações multiplicativas (BITTAR e FREITAS, 2005):

- Se multiplicando os fatores obtêm-se um produto então é possível obter um dos fatores dividindo o produto pelo outro fator.
- Se forem dados o produto e um de seus fatores então para obter o resultado da divisão desse produto pelo fator dado, basta encontrar um número que multiplicado por esse fator resulte no produto dado.
- Para obter o resultado da divisão, basta encontrar um número que multiplicado pelo divisor resulte no dividendo anunciado.
- Para saber o resultado de uma divisão de um número de dois algarismos por um número de um algarismo, basta multiplicar o divisor por um número que seja igual ou o mais próximo possível do total de dezenas do dividendo e, em seguida, descobrir quanto falta para chegar ao dividendo do cálculo proposto e buscar esse valor na tabuada. Então, o resultado da divisão será a soma desses valores que multiplicada pelo divisor complete o número expresso no dividendo.

- Realizar cálculos baseando-se na percepção de algumas regularidades dos números anunciados;

As atividades permitiram aos alunos refletir sobre os números, buscando regularidades entre os números propostos, usando-as para antecipar resultados de outros cálculos.

Os excertos a seguir evidenciam momentos dessa percepção na realização de alguns cálculos:

> P: [...] No começo você demorou para fazer a contagem [a partir de duzentos e treze, de cinco em cinco]. O que você percebeu?
> GV: Percebi que eu falava oito, três, oito, três. Só mudava a dezena.
> ***
> HG: Eu pensei: se tirar a centena do trezentos fica a tabuada do nove (contagens para frente de nove em nove a partir de trezentos e vinte e sete).
> ***
> GA: Trinta e nove menos vinte e nove é só tirar [o valor da] unidade [dos dois números], porque uma unidade está igual a outra
> ***
> HG: Que todo número até o nove que for maior que o outro não precisa mexer com a dezena.
> GF: Tipo cinqüenta e nove tira quatro, não vai precisar mexer com a dezena.

Identificamos nos cálculos realizados a presença dos seguintes teoremas:

- Se os algarismos das unidades são iguais, então basta subtrair os algarismos das outras ordens dos números dados e acrescentar zero ao resultado na ordem da unidade.
- Se apenas um dos números anunciados possui a ordem das centenas, então basta somar os valores dos algarismos das outras ordens e acrescentar ao resultado o valor correspondente a ordem das centenas.
- Se for pedido para retirar centenas inteiras do número dado, então basta lidar com os dois valores como se fossem inteiros e ao final acrescentar o valor desprezado.
- Se os valores dos algarismos das unidades dos números anunciados é zero, então basta somar os outros algarismos e acrescentar o zero a ordem das unidades.
- Quando o número anunciado no minuendo tiver um valor numérico na ordem das unidades superior ao expresso no subtraendo não é preciso realizar trocas, alterando o valor da ordem das dezenas.
- Se os algarismos das dezenas são iguais, então basta subtrair as unidades dos números dados.
- Se os algarismos das unidades são iguais, então basta subtrair os algarismos das outras ordens dos números dados.
- Se os valores dos algarismos das dezenas e/ou unidades do subtraendo são menores que os do minuendo, então o resultado da operação será sempre o valor do algarismo da centena do minuendo mais o valor obtido pela subtração dos outros algarismos dos números dados.
- Se apenas um dos números anunciados possui a ordem das centenas, então basta somar os valores dos algarismos das outras ordens e acrescentar ao resultado o valor correspondente a ordem das centenas.
- Todo número multiplicado por 5 termina em 0 ou 5.
- Numa divisão que possui tanto dividendo como o divisor formado por um mesmo algarismo, na qual o divisor possui apenas a ordem das unidades, o resultado apresentará o algarismo um repetido de acordo com a quantidade de algarismos expressos no dividendo.

Em síntese, acreditamos que os cinco grupos apresentados (reprodução mental do algoritmo, sobrecontagem com o auxílio dos dedos, propriedades dos números e das operações, regras automatizadas e percepção de algumas regularidades dos números anunciados) revelam as principais estratégias mobilizadas pelos alunos no decorrer da experimentação, conforme verificamos no ANEXO I.

Verificamos que o recurso a uma ou a outra estratégia dependeu das concepções numéricas dos alunos, permitindo que eles abandonassem estratégias mais primitivas de contagem passo a passo para mobilizar outras que envolviam decomposições aditivas ou subtrativas de números, como verificamos no exemplo a seguir:

> P: Como você descobriu que seis mais quatro dá dez?
> NT: É só [ir] somando de um em um, mas também tem outro jeito. É só separar cinco e cinco. Pega [um] do seis [e] põe no quatro.

Os dados revelam que o fato dos alunos estarem vinculados a uma pesquisa que buscou instaurar uma prática regular de cálculo mental que os fez ouvir, raciocinar e falar sobre cálculo mental possibilitou aos mesmos incorporar novos conceitos e significados ao repertório numérico.

No que diz respeito às estratégias que recorrem às propriedades dos números e das operações, ressaltamos que essas apareceram e foram utilizadas de início por certos alunos, depois progressivamente para a maior parte da classe.

> P: Oito mais cinqüenta e seis.
> VT: Eu pensei no cinqüenta e seis mais seis que é doze, aí (pausa) Eu fiz igual a LT. [...] eu pensei cinqüenta e seis mais seis que ia dá sessenta e dois, mais dois que ia dar cinqüenta e quatro. Ops! Sessenta e quatro.
>
> AD: Seis vezes nove? Na minha opinião essa conta tá errada. Eu acho que é cinqüenta e quatro.
> P: Como você sabe que é esse resultado?
> AD: Porque todo número assim (pausa) igual a estratégia da MAR. É só você tirar o número que falta.
> P: Como assim?
> AD: Se seis vezes dez é sessenta, basta tirar seis de sessenta aí dá cinqüenta e quatro.

Em relação aos teoremas listados, destacamos que a incorporação ao repertório do grupo pesquisado ocorreu gradativamente, à medida que os mesmos eram introduzidos nas discussões, geralmente por alunos com maior domínio das propriedades dos números e das operações – GF, PE, HG, AD, FN. Esses também se incumbiam de verificar a mobilização correta dos teoremas propostos, como ilustram os trechos seguintes:

> P: AC, mil setecentos e oitenta e nove vezes cem.
> AC: Dezessete mil oitocentos e noventa.
> GF: Cento e setenta e oito mil e novecentos.
> P: O que houve com o número da AC?
> GF: Faltou um zero.
> P: Seiscentos e cinqüenta vezes cem.
> JD: Seis mil e cinqüenta.
> AD: Seis mil e quinhentos.
> P: Por que você acha que é seis mil e quinhentos e não seis mil e cinqüenta.
> AD: Porque tem que aumentar os zeros.

Em alguns casos, observamos que a incorporação dos teoremas ao repertório da turma incomodou aqueles que primeiro os mobilizava, como mostra o fragmento a seguir:

> P: [...] [Você] soma para completar a dezena inteira, cinco mais cinco, aí depois menos um. Porque menos um depois CA?
> CA: Porque ficou maior o número, porque você somou mais um e era para ser mais quatro.
> P: Então, o número era quatro, aumentou para cinco, mais um. Depois no resultado você tem que tirar aquilo que você colocou né?!
> PE: Minha fama está acabando.

Os dados coletados durante a experimentação corroboram a afirmação de Vergnaud (1990) no que se refere aos invariantes operatórios, em especial, em relação aos teoremas. O autor pontua que esses são percebidos no estudo do sujeito em ação, sendo fontes de pesquisa que podem auxiliar o professor a compreender como o aluno resolveu um dado problema e que elementos foram considerados no momento da resolução que o fez decidir por esta ou aquela estratégia. Nos invariantes operatórios identificados, percebemos a complexidade das estruturas cognitivas utilizadas pelos sujeitos, como mostra o seguinte fragmento referente à divisão de noventa por cinco:

> HG: Eu fiz a mesma coisa de antes: dividi o noventa por dois, deu quarenta e cinco. Cinco vezes nove quarenta e cinco e nove mais nove é dezoito.

A estratégia usada por HG revela a mobilização do seguinte teorema, ligado à compensação: *Para encontrar o resultado de uma divisão de um número terminado em zero por cinco, basta dividi-lo por dois e em seguida efetuar uma divisão por cinco e uma multiplicação por dois.*

Um outro ponto importante está relacionado à dinâmica de interpelação, permitindo que esses teoremas pudessem, por um lado, ser identificados tanto na forma operatória (o fazer) como na forma predicativa do conhecimento (o explica, o dizer) (VERGNAUD, 2003). Por outro lado, fossem incorporados gradativamente ao repertório da turma, à medida que desenvolviam uma "escuta ativa" (DOUADY, 1994).

Destacamos também que as atividades escolhidas permitiram aos alunos vivenciar fases *adidáticas* (MARGOLINAS, 1998), num meio organizado para ser antagonista e não aliado. Nesse sentido, verificamos uma interação efetiva, capaz de produzir retroações sobre os conhecimentos dos alunos e permitir aprendizagem, alterando os seus estados de conhecimento (BESSOT, 2003).

Verificamos ao longo das sessões que os alunos precisaram "[...] analisar seu repertório de conhecimento [...] e fazer conjecturas" sobre quais conhecimentos poderiam ajudá-los a obter a solução esperada para cada atividade proposta (ALMOULOUD, 2007, p.47).

CAPÍTULO V

UM CASO EXEMPLAR

Vi certas pessoas se enturmarem. Uma pessoa quase não falava e nas últimas aulas essa pessoa queria falar toda hora.

(Depoimento de CA sobre o trabalho realizado).

Neste capítulo pretendemos resgatar a trajetória de GV, um dos sujeitos envolvidos na experimentação. Selecionamos esse sujeito por dois motivos. Primeiro, por esse ter participado da aplicação de todos os blocos da seqüência didática, diferentemente de outros que só iniciaram em 2008, devido às razões que explicitamos no capítulo I. O segundo motivo da escolha se deve ao fato desse sujeito constituir uma espécie de caso exemplar, em razão de as respostas apresentadas revelarem contribuições do cálculo mental para a aprendizagem dos conceitos aditivos e multiplicativos, em situações didáticas vivenciadas de forma dialógica.

Os dados que emergem deste caso foram suscitados a partir da análise das transcrições das sessões e foram utilizados com a intenção de ressaltar o impacto de uma prática regular de cálculo mental no desenvolvimento cognitivo do sujeito em questão.

Analisaremos a participação de GV em cada um dos três blocos da experimentação, ressaltando suas principais dificuldades e avanços, bem como os principais teoremas mobilizados.

5.1 –Bloco do Sistema de Numeração Decimal

Convém relembrar que GV fazia parte do grupo de alunos com média entre 8,5 e 7,0 (CM, GV, MR, TH) obtida na disciplina Matemática no primeiro semestre de 2007, conforme relatamos no primeiro capítulo. Apesar de sabermos que o cálculo mental parece ser um campo privilegiado para testar as concepções numéricas dos alunos e sua disponibilidade (BUTLEN e PEZARD, 1992) e que a nota nem sempre reflete a aprendizagem, tínhamos a ingênua crença de que os alunos pertencentes a esse grupo não teriam dificuldades na resolução das atividades propostas pela seqüência didática. Entretanto, quando começamos a observar a participação de GV logo nas primeiras sessões, bem como a dos demais alunos alvos da pesquisa, verificamos que a nota adquirida serviu apenas como critério de seleção dos sujeitos, não podendo ser considerada como parâmetro para avaliar o desempenho dos mesmos durante a experimentação por dois motivos. Primeiro, porque a dinâmica utilizada nas atividades propostas por nós difere da exigida nas avaliações, pois o aluno tem que abandonar o registro escrito e resolver mentalmente, explicitando o caminho percorrido, ou seja, precisa ser cognitivo para dar conta da atividade e metacognitivo para compreender o que fez (VERGNAUD, 2003). Dinâmica que em geral não é exigida nas avaliações realizadas pela escola, nas quais o aluno, dias antes, estuda exaustivamente na tentativa de memorizar uma quantidade de informações para conseguir reproduzi-la depois.

O segundo motivo relaciona-se ao fato de que as atividades de cálculo mental exigem domínio das propriedades dos números e das operações, levando aluno a abandonar técnicas de cálculo como o algoritmo canonizado, exigido na maioria das vezes nas avaliações escolares.

Logo nas primeiras sessões, quando interpelada mostrava-se insegura, mantendo-se em silêncio ou interrompendo a verbalização de suas respostas com um sorriso tenso, não dando continuidade à sua explanação, como podemos observar no excerto seguinte.

> P: Então vamos lá GV, que número é formado por 58 centenas?
> GV: (Silêncio)
> P: Uma perguntinha antes. Uma centena é igual a quanto?
> GV: Igual a cem.
> P: Então, se uma centena é igual a cem, 58 centenas é igual a que número?
> GV: (Silêncio).

Acreditávamos, inicialmente, que esse comportamento de GV era apenas timidez, mas como no decorrer das sessões isso permaneceu, fomos impelidos a conhecer um pouco sobre sua vida escolar. Obtivemos com a professora regente de Matemática algumas informações que nos ajudaram a compreender aquele comportamento. Essa nos comunicou que GV participava pouco das aulas e nas vésperas das provas a família passava horas estudando para que ela tivesse um bom desempenho, o que justifica a média obtida no 1º semestre de 2007. Isso era diferente do que ocorria nas sessões, pois ela era chamada a participar e, principalmente, não sabia quando isso aconteceria nem tampouco que tipo de cálculo seria proposto para que pudesse se preparar.

Decidimos mudar de estratégia. Ao invés de sempre interrogá-la e solicitar sua participação, procuramos conquistar sua confiança e chamá-la ao debate, por um lado, para resolver cálculos previstos na análise *a priori*, mas que sabíamos que ela conseguiria resolver, como ilustra o excerto a seguir:

> P: GV [com quais algarismos formamos o número] cento e seis.
> GV: Um, zero e seis.

Segundo Margolinas (1998) essa é a maior razão do docente: saber qual tipo de conhecimento o aluno pode utilizar para ter êxito. É claro que aos poucos fomos mudando os números, jogando com as variáveis numéricas, permitindo que ela avançasse em sua aprendizagem

> P: GV, como eu leio esse [número]? (registro no quadro 102. 458)
> GV: Cento e dois mil e quatrocentos... quinhentos... quatrocentos e cinqüenta e oito
> P: Fala mais uma vez.
> GV: Cento e dois mil e quatrocentos e cinqüenta e oito.

Por outro lado, GV era chamada à discussão para emitir sua opinião sobre um cálculo realizado por um colega. Quando percebíamos sua dificuldade para responder o que propúnhamos, direcionávamos a pergunta para outro colega para que ela não se sentisse pressionada:

> P: [FS] Como você conseguiu fazer a leitura do número? Como você identificou que esse número era dois mil, quinhentos e sessenta e um?
> FS: Hummm!
> P: Não consegue explicar?
> P: GV, você concorda com a leitura que a FS fez?
> GV: Sim.
> P: O que você fez pra ler esse número? Como você pode dizer que esse número é dois mil, quinhentos e sessenta e um e não é duzentos e cinqüenta e seis?
> GV: É porque (pausa)
> P: ME ajuda a GV, como que eu sei que número é esse?

Isso foi possível devido às variáveis didáticas que tínhamos a nossa disposição, relacionadas ao conteúdo matemático e à gestão das atividades, que nos permitiu pouco a pouco integrá-la na discussão, de modo a favorecer aprendizagem do ponto de vista individual e do ponto de vista coletivo, à medida que tinha que organizar seu pensamento para expressá-lo para outras pessoas, aumentando o grau de articulação e de precisão na verbalização. (BUTLEN e PEZARD, 1992), mesmo que lentamente como mostra o excerto seguinte. Aliás, a duração da aprendizagem é necessariamente longa (VERGNAUD, 2003) e perceber o envolvimento de GV, mesmo que ainda de forma desarticulada, reforça nossas convicções de que uma prática regular de cálculo mental favorece a ampliação e a construção de novos procedimentos de cálculo.

> P: [...] Eu quero saber o seguinte MR, quantas dezenas existem no número cento e vinte e cinco?
> MR: Silêncio.
> P: GV vai te ajudar Murilo.
> MR: Não! Peraí! Tem doze.
> P: GV, o que você acha?
> GV: Doze.
> P: Como você acha que o Murilo chegou ao doze? Como você chegou ao doze?
> GV: Eu contei de cinco em cinco. Chegou no dez eu parei e somei mais dois.
> P: Explica mais uma vez.
> GV: Eu contei de cinco em cinco e deu dez.
> P: Por que dez?
> GV: Porque uma dezena é dez. Ai eu peguei mais dois da dezena. Ai eu vi que era doze.
> P: E o cinco, você pegou de onde?
> GV:Ahh!
> P: De onde você pegou o cinco? Ele veio de onde?
> GV: Aí eu não sei explicar!

Observamos nas falas de GV indícios do seguinte teorema: *Se um número possui três algarismos então para determinar sua quantidade de dezenas basta desprezar o último algarismo da direita e considerar o número formado pelos algarismos que restam.* Esse teorema em ação pode ser fruto tanto dos debates instaurados no decorrer das sessões como dos estudos que vinha realizando em casa, segundo afirmação da mesma no final de uma das sessões, na qual afirmou estudar com a mãe atividades semelhantes às desenvolvidas em nossos encontros.

Ao analisarmos detalhadamente outros excertos de GV verificamos que eles apresentam as principais dificuldades que havíamos previsto na análise *a priori* para esse bloco:

- contagem dos números próximos aos "nós" (LERNER e SADOVSKY, 1996):

> P: [...]. Agora GV, conta partir de mil e noventa e sete.
> GV: Mil e noventa e oito, mil e noventa e nove (pausa acompanhada de risos) Ai...

- leitura unilateral e segmentada da numeração escrita (TEIXEIRA, 2002):

> P: Como que eu faço pra descobrir quantas dezenas tem no número [...] oitocentos e vinte?
> GV: Vinte?! Oitocentos e vinte (pausa). Unidade, dezena e centena. (Enquanto registro no quadro o número ela faz uma leitura decomposta de acordo com as ordens).

Embora tivéssemos presenciado momentos de dificuldade para a realização dos cálculos propostos, observamos outros nos quais GV consegue obter êxito na resolução, mesmo sem conseguir fundamentar suas opções e decisões.

> P: GV [...] mil quinhentos e sessenta tem quantas centenas?
> GV: Quinze.
> P: Como você descobriu? Explica pra gente.
> GV: Ah, não sei explicar.
>
> P: GV, mil e quinhentos tem quantas dezenas?
> GV: (silêncio). Cento e cinqüenta!
> P: O que você fez GV?
> GV: Desprezei o zero da unidade.
> P: Agora uma pergunta GV. O número pode ser de qualquer tamanho, essa regra vale? Essa regra de tirar a unidade vale para qualquer número?
> GV: Não! Ah, eu não sei.

Examinando as soluções apresentadas identificamos a presença de teoremas em ação mobilizados pela turma durante a exploração de atividades desse formato, mas que inicialmente não faziam parte do repertório de GV:

- *Para determinar a quantidade de dezenas de um número despreza-se o último algarismo da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa a quantidade de dezenas.*

- *Para determinar a quantidade de centenas de número desprezam-se os dois últimos algarismos da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa a quantidade de centenas.*

Identificamos ocasiões em que GV, além de apresentar a solução desejada conseguia justificá-la, apoiando-se nas regras e propriedades dos números, como no caso do uso do ponto, como forma de facilitar a organização e leitura do número (BRIZUELA, 2006).

> P: Vamos encerrar com a FS. [Quais algarismos formar o número] dez mil e oitenta?
> FS: Um, zero, ponto, oito, zero.
> P: Ok.
> P: E aí GV? O que você acha?
> GV: Tá errado.
> P: Está errado por que GV?
> GV: O número é (pausa)?
> P: Dez mil e oitenta.
> GV: Um, zero, ponto, zero, oito, zero.
> P: Por que isso aqui ta errado (mostro o registro do número anunciado por FS)? Por que não pode ser assim?
> GV: Porque aí só tá a unidade e a dezena.

Ressaltamos a importância da mediação para superação das dificuldades de GV, na qual oferecíamos uma variedade de ocasiões para que a mesma conseguisse desenvolver suas competências (VERGNAUD, 2005), como na passagem da numeração falada para a escrita em relação à escrita dos "nós" – números próximos de onde ocorre a mudança de ordem na representação no sistema de numeração decimal (LERNER e SADOVSKY, 1996).

> P: GV, qual o próximo número depois de setenta e nove mil novecentos e noventa e nove?
> GV: Oitenta mil.
> P: Depois de setenta e nove mil novecentos e noventa e nove vem oitenta mil. Como você fez para chegar em oitenta mil?
> GV: Eu usei a prática do JD.
> P: Pegou o setenta e nove transformou em oitenta e colocou os zeros.
> GV: É!

Nesse momento, propusemos um outro número, que não terminava em 999, mas que estava localizado próximo aos "nós" da escrita numérica e que não exigia somente aplicar uma regra, como observamos no excerto anterior.

> P: Então GV, depois de quinze mil setecentos e oitenta e nove quem vem depois?
> GV: (Silêncio). Quinze mil setecentos e oitenta e nove? [...] É (pausa) dezesseis mil setecentos e setenta?!
> P: Dezesseis mil setecentos e setenta GV? (falo isso e registro no quadro os dois números:15 789 e 16 770). Explica para mim como você fez. Não quero saber se está certo ou errado. Quero saber como você pensou para chegar a dezesseis mil setecentos e setenta
> GV: Eu peguei (pausa) o maior é dezesseis.
> P: Você pegou o quinze e transformou em dezesseis?
> GV: É! O oitenta e nove eu transformei em setenta.
> P: Olhando o registro, você acha que está certo?
> GV: Não sei!
> P: O número que vem depois do nove?
> GV: Dez.
> P: Do nove para o dez aumentou quantos GV?
> GV: Um!
> P: Aumentou um. Então, depois de quinze mil setecentos e oitenta e nove tem que aumentar quanto?
> GV: Mais um.
> P: Então qual é o próximo número?
> GV: Noventa?
> P: Aonde vai o noventa?
> GV: Ali (mostrando o oitenta e nove). Quinze mil setecentos e noventa.
> P: Qual está certo agora?
> GV: O segundo.

Ao analisarmos o excerto anterior percebemos que GV tenta incorporar o teorema em ação proposto por um colega (C*omo todos os algarismos terminam em nove, basta alterar o primeiro e acrescentar zero nos demais)*, como reitera a mesma na seguinte afirmação: "*Eu usei a prática do JD*". Contudo, quando propomos um número que extrapolava a aplicação do teorema, exigindo que o mesmo fosse adaptado para a atividade proposta, o resultado anunciado não correspondeu ao esperado. Isso só foi possível depois da nossa intervenção. Vergnaud (2005, p.14) aponta que o ato de mediação do professor "[...] consiste em chamar a atenção sobre informações pertinentes ou tomar para si uma parte das ações a serem efetuadas de modo a diminuir o espaço de incertezas no qual o aluno deve navegar".

Acreditamos que talvez nossa intervenção tenha contribuído para que GV pudesse apresentar uma nova solução para a atividade proposta sem desistir quando questionada sobre a resposta dada inicialmente, como ocorria nas primeiras sessões. Porém, poderíamos ter conseguido isso com um subterfúgio diferente do escolhido, principalmente no momento que solicitamos que explicasse o caminho percorrido para obter a resposta anunciada, pois ao invés de perguntar se estava certo poderíamos ter perguntado por que havia transformado o oitenta e nove em setenta.

Talvez dessa forma também percebesse o erro cometido, sem que precisasse emitir um julgamento, como de fato não o fez.

Analisando a participação de GV no decorrer das sessões desse primeiro bloco percebemos contribuições da prática de cálculo mental instaurada durante as sessões da experimentação de nossa pesquisa, que permitiram que ela saísse do estado de inércia que se encontrava no início para envolver-se com as atividades. Dentre elas destacamos o fato de GV permitir-se errar, testar hipóteses e mobilizar estratégias propostas pela turma, buscando incorporá-las ao seu repertório numérico.

5.2 – Bloco aditivo

Durante a exploração das atividades aditivas, as estratégias utilizadas por GV revelam um salto qualitativo, de estratégias mais "primitivas" de contagem "passo a passo" ou "de cabeça" para mobilizar decomposições aditivas ou subtrativas dos números. Segundo Butlen e Pezard (1992, p.327) essa "[...] evolução é sem dúvida devida, entre outros [motivos], a um maior conhecimento do repertório aditivo".

Cabe ressaltar que, apesar de observarmos esse salto, presenciamos momentos de retrocesso na escolha das estratégias para a resolução de determinados cálculos em virtude da variável tamanho dos números. Nós distinguimos:

- Contagem (ou descontagem) "um a um": consiste em "contar em voz baixa" (n-1) termos e a escrever o enésimo, acompanhada freqüentemente da contagem com os dedos.

> P: Como você chegou ao quarenta e oito?
> GV: É só você contar de trás para frente.
> P: Então conta para a gente. Você fez como?
> GV: Cinqüenta e quatro, cinqüenta e três, cinqüenta e dois, cinqüenta e um, cinqüenta, quarenta e nove, quarenta e oito.
> P: Como você sabe qual a hora de parar a contagem de trás para frente?
> GV: Porque oh!!Chega ao quarenta e nove e já dá cinco (faz um gesto com os dedos)

Essa estratégia foi usada para superar dificuldade relacionada à passagem dos números próximos aos "nós" – números próximos de onde ocorre a mudança de ordem na representação no sistema de numeração decimal, por exemplo, de 9999 para 10000 (LERNER e SADOVSKY, 1996).

> P: GV, novecentos e noventa e nove mais dois?
> GV: (silêncio) É (pausa) Ai!!!Vou chutar: é dez... O que eu posso fazer com esses valores para ficar mais fácil? O número é novecentos e noventa e nove mais dois. O que eu posso fazer para ficar mais fácil a conta? Noventa e nove, aí vai pra dez (pausa) novecentos e cem.
> P:[...] GV, oitocentos e noventa e nove mais dois?
> GV: Mais dois?!! È (pausa) novecentos e um.
> P: Como você chegou nesse resultado?
> GV: Oitocentos e noventa e nove, aumenta mais um fica novecentos, mais um novecentos e um.

No primeiro excerto GV retoma essa dificuldade, apresentada no primeiro bloco para a atividade 2, usando a estratégia prevista naquela ocasião: decomposição do número novecentos e noventa e nove em novecentos mais noventa e nove (900+99), seguida de soma das unidades solicitadas. Porém, não consegue explorá-la com êxito. Já no segundo trecho, observamos que, apesar de usar uma contagem primitiva, a estratégia de contar passo a passo permitiu a GV superar a dificuldade e obter êxito no cálculo apresentado, o que não havia sido cogitado em outros momentos.

- Estratégias fazendo intervir decomposições aditivas ou subtrativas de números, do tipo canônica ou outras decomposições permitindo ir à dezena superior ou simplificar os cálculos:

> P: Quinhentos e vinte e três mais sete.
> GV: Assim oh: eu pego três e somo com sete até ficar dez, aí é mais fácil formar quinhentos e trinta.
>
> P: Seis mais cento e dezenove.
> LT: Cento e vinte e cinco.
> P: Como você fez para descobrir?
> LT: É seis mais cento e dezenove. Eu pego um do seis e completo dez do dezenove, vai dar cento e vinte, mais cinco, cento e vinte e cinco.
> GV: Você pega um do seis e fica vinte aí você só soma mais cinco.

O segundo excerto revela mais do que uma simples repetição da estratégia adotada por LT, indica compreensão do que foi realizado, implicando um retorno reflexivo sobre a atividade realizada (VERGNAUD, 2003) mediante uma escuta ativa (DOUADY, 1994).

- Aplicação mental do algoritmo escrito:

> P: Como você chegou ao mil e quinhentos?
> GV: (silêncio) Ah! É seiscentos e vinte e cinco mais novecentos e setenta e cinco?
> P: É!

> GV: Ah não! É mil e seiscentos.
> P: Como chegar ao mil e seiscentos?
> GV: Eu armei a conta.
>
> P: Oitocentos e catorze menos sessenta e quatro.
> GV: Menos?
> P: Isso!
> GV: (silêncio) Setecentos e cinqüenta.
> P: Como você fez oitocentos e catorze menos sessenta e quatro (registro no quadro o cálculo proposto e o resultado)?
> GV: Eu sei que quatro menos quatro vai dar zero. Como não dá para subtrair seis de um eu emprestei.
> AC: Lembra aquela conta do papel.

O uso mental do algoritmo escrito aparecia quando os números propostos eram grandes ou quando isso coadunava com o recurso escrito. Nesse último caso, isso poderia gerar uma mudança eventual da estratégia utilizada.

Além dessas estratégias, GV foi capaz de identificar regularidades, por um lado, na seqüência dos números anunciados:

> P: [...] Conta pra gente a partir de duzentos e treze, de cinco em cinco.
> GV: Duzentos e treze?!
> P: De cinco em cinco!
> GV: Duzentos e (pausa) nossa!! Duzentos e dezoito (risos) duzentos e vinte e três, duzentos e vinte e oito, duzentos e trinta e três, duzentos e trinta e oito.
> P: Tá! No começo você demorou fazer a contagem. O que você percebeu?
> GV: Percebi que eu falava oito, três, oito, três. Só mudava a dezena.

A percepção dessa regularidade apresentada no excerto ocorreu após outro aluno despertar a atenção da turma para essa questão, como podemos observar na seguinte fala: *Quando eu estava contando de cinco em cinco eu percebi que era quatro e nove toda hora* (JD). Contudo, ressaltamos que o número escolhido para GV iniciar a contagem não foi o mesmo proposto a JD. Portanto, podemos descartar a hipótese de que houve apenas uma reprodução na regularidade observada pelo colega, pois conseguiu aplicar em outro contexto, agilizando o cálculo.

Por outro lado, a percepção da regularidade também ocorreu quando os valores expressos em alguma das ordens dos números envolvidos nos cálculos eram coincidentes, permitindo a GV operar apenas com os valores diferentes, fazendo uma junção dos teoremas mobilizados anteriormente pelos colegas:

- *Se os valores dos algarismos das dezenas e/ou unidades do subtraendo são menores que os do minuendo, então o resultado da operação será sempre o valor do* *algarismo da centena do minuendo mais o valor obtido pela subtração dos outros algarismos dos números dado;*

- *Se os algarismos das unidades são iguais, então basta subtrair os algarismos das outras ordens dos números dados;*

O excerto a seguir ilustra a afirmação que fizemos anteriormente e a explicação dada por GV elimina a possibilidade do uso mental do algoritmo ensinado pela escola, nos permitindo inferir que os teoremas foram mobilizados:

> P: ML, trezentos e setenta menos cinqüenta.
> ML: É (pausa) trezentos e vinte.
> GV: Eu posso guardar o trezentos e só trabalho com a dezena, sete menos cinco vai dar dois. Assim fica mais fácil fazer a conta.

Observamos também que GV faz uso da propriedade comutativa como forma de facilitar o cálculo:

> P: GV, três mais noventa e um?
> GV: Noventa e quatro!
> P: Como você descobriu?
> GV: Você colocou o três na frente, eu peguei e coloquei o noventa e um na frente e somei mais três. [...] Porque daí fica mais fácil para eu somar.
> GV: Eu fiz assim também, troquei a unidade. Eu peguei o seis coloquei no lugar do dois, aí ficou cinqüenta e seis mais dois, cinqüenta e oito.

Presenciamos momentos que alguns resultados são emitidos a partir da observação de cálculos já realizados pelos colegas, como mostram os trechos seguintes:

> GV: Se eu sei que doze menos seis é seis e como é treze é só aumentar um que fica sete.
>
> GV: Tipo a regra do AD: ali ele colocou (pausa) Era setenta e quatro menos seis. Ele pegou e falou assim que sempre vai dar oito, já que é menor que quatro. Ali é quatro e ali e três, aí eu coloquei sete (ela compara 74-6 com 73-6).

Os excertos revelam a percepção de regularidades, utilizadas depois para efetuar os cálculos propostos, uma atitude que não se fazia presente no início da experimentação.

Os avanços apresentados por GV no decorrer do segundo bloco reforçam nossa convicção de que a resolução de atividades via cálculo mental é uma ocasião privilegiada para fazer funcionar as propriedades das operações em relação às características do sistema de numeração posicional e decimal (BUENOS AIRES, 2006).

5.3 –Bloco multiplicativo

Observamos nas atividades desse bloco GV continuar a incorporar ao seu repertório estratégias e teoremas mobilizados pelos colegas ao longo das sessões, como vinha ocorrendo desde o início da experimentação.

A estratégia ligada à contagem de **n** em **n,** que se pautava na decomposição do multiplicador seguida de cálculos automatizados com uma breve contagem, prevista na análise *a priori* também foi mobilizada por GV:

> P: GV, cinco vezes nove?
> GV: Cinco vezes nove? Quarenta e cinco.
> P: Quarenta e cinco?
> GV: Não! (silêncio) Cinqüenta. Não! Cinqüenta é vezes dez. Quarenta e cinco.
> P: Como você chegou ao resultado?
> GV: Primeiro eu me confundi. Eu sei que oito vezes cinco é quarenta. Aí eu peguei e somei mais cinco.

De certo modo, essa estratégia implica compreensão da lógica do sistema numérico (NUNES e BRYANT, 1997), tendo em vista que era preciso perceber que é possível obter o resultado de cinco vezes nove tanto realizando o cálculo de (8x5)+(1x5) como o cálculo de (5x10)-(5x1).

Outra estratégia usada por GV consiste em encontrar o resultado do cálculo proposto buscando um número que multiplicado ao fator dado resulte no produto anunciado, como mostra o trecho a seguir:

> P: GV, cinqüenta e seis dividido por oito?
> GV: Cinqüenta e seis dividido por oito? (pausa) Espera aí (risos e silêncio) Oito?!
> P: Oito vezes oito dá quanto?
> GV: Aí não sei![...] É sete.
> P: Como você fez?
> GV: Sete vezes oito é cinqüenta e seis.

Essa estratégia parece mobilizar o seguinte teorema: *Se forem dados o produto e um de seus fatores então para obter o resultado da divisão desse produto pelo fator dado, basta encontrar um número que multiplicado por esse fator resulte no produto dado.*

Observamos também a mobilização de outros teoremas ligados à divisão e à multiplicação por 10, 100 ou 1000, como ilustram os fragmentos a seguir:

> P: Eu falei quinze mil dividido por dez. Você falou quanto mesmo? (registro no quadro o cálculo proposto)
> LT: Cento e cinqüenta.
> GV: Você corta o zero e aí fica mil e quinhentos.
>
> P: Agora a GV, quinhentos e sessenta vezes cem?
> GV: Quinhentos e sessenta vezes cem? É (silêncio)! Cinqüenta e seis mil?!
>
> P: GV, quanto que dá [duzentos vezes nove]?
> GV: Mil e oitocentos. Eu fiz assim: eu sei que nove vezes zero é zero, nove vezes (pausa) tá (pausa), coloco os dois zeros lá embaixo e eu sei que nove vezes dois é dezoito. Então, fica mil e oitocentos.

No primeiro excerto encontramos indícios do teorema em ação ligado à divisão por 10, 100 e 1000: *Para determinar o resultado da divisão de um número terminado em dois zeros por 10 desprezam-se o último algarismo da direita. O número formado pelos algarismos restantes representa o resultado.* Acreditamos que isso seja possível porque esse teorema em ação corresponde à regra ensinada pela escola e talvez faça parte do repertório dos alunos.

O segundo excerto traz implicitamente a presença do seguinte teorema: *Quando multiplicamos por 100 basta acrescentar dois zeros à direita do último algarismo*, que também corresponde à regra ensinada pela escola. O tamanho dos números foi uma variável importante a ser considerada, porque além de aplicá-lo GV tinha que reorganizar o número mentalmente, de acordo com as ordens obtidas e isso, provavelmente, gerou demora em verbalizar a leitura do resultado encontrado. Diferentemente do que ocorre nas atividades realizadas na escola, que de certa forma prioriza o registro escrito.

Observando o terceiro trecho verificamos que GV usa mentalmente o algoritmo canonizado pela escola. Porém, ao explicar a estratégia adotada percebe que pode obter o resultado fazendo o cálculo sobre o valor da centena seguido da regra de multiplicação por cem, ampliando o teorema em ação aos valores propostos.

Verificamos também o uso da decomposição aditiva seguida da distributividade, como ilustram os fragmentos a seguir:

> P: GV, vinte e cinco vezes onze.
> GV: Vinte e cinco vezes onze? (silêncio) É (pausa) Duzentos e setenta e cinco.
> P: Como você fez?
> GV: Eu fiz daquele jeito lá.
>
> P: GV, cento e cinqüenta e dois vezes cinco?
> GV: Cento e cinqüenta e dois vezes cinco?
> P: Você ouviu a dica que o GF deu?
> GV: Ouvi. Espera aí. Setecentos e (pausa) vinte
> A: Não!
> GV: Setecentos e (pausa e risos) cinqüenta.
>
> P: LT, trinta vezes trinta e oito.
> LT: (silêncio)
> P: GV dá quantos?
> GV: Dá mil (pausa) cento (pausa) e quarenta

No primeiro fragmento, a variável tamanho do número permitiu êxito na mobilização dessa estratégia, pois permitia acrescentar o número anunciado ao resultado da multiplicação por dez. Já no segundo percebemos que GV apresenta dificuldade nos cálculos intermediários, pois deveria ter somado a setecentos e cinqüenta o resultado da multiplicação do cinco pelo dois antes de anunciar o resultado final. No terceiro fragmento, GV traz o anúncio do resultado assinalado de acordo com as ordens do número, permitindo-nos inferir que isso tenha relação com a junção dos dois resultados: novecentos (30x30) mais duzentos e quarenta (30x 8).

5.4 – Discussão

Observando os dados apresentados podemos afirmar que GV iniciou a experimentação utilizando apenas um tipo de procedimento (uso mental do algoritmo ensinado pela escola) ou às vezes nenhum. A difusão de diversas estratégias na classe, após serem reconhecidas como eficazes, lhe permitiu progredir e incorporar aos poucos essas estratégias ao seu repertório numérico. A esse respeito Butlen e Pezard (1992) afirmam que favorecer essa difusão à toda a classe é o papel do professor, que deveria conduzir os alunos a abandonar suas antigas estratégias para adotarem novas, mais eficientes.

Verificamos que aos poucos GV usou estratégias que extrapolavam a aplicação do algoritmo, elaborando outras a partir das propriedades dos números e das operações, que ainda não são conhecidas, ou seja, usava sem ter consciência de que por trás daquela estratégia existia uma propriedade implícita. Eis mais uma função da difusão das estratégias: permitir construir o sentido a propósito das propriedades utilizadas (ANSELMO e PLANCHETTE, 2006). Contudo, esse é um processo lento, assim como toda a duração da aprendizagem (VERGNAUD, 2003).

Identificamos em alguns momentos a mobilização de teoremas em ação para a resolução das atividades propostas, que já haviam sido explicitados pelos colegas durante os debates instaurados nas sessões. Talvez, o único momento de reconstrução tenha ocorrido quando, ao explicar a estratégia adotada para duzentos vezes nove, GV descreve as etapas do algoritmo canônico e percebe que pode obter o resultado fazendo o cálculo sobre o valor da centena seguido da regra de multiplicação por cem, ampliando o teorema em ação mobilizado anteriormente (*Quando multiplicamos por 10 basta acrescentar um zero à direita do último algarismo do número, por 100 acrescentamos dois zeros e por 1000 três zeros*) aos valores propostos.

Ressaltamos que as atividades permitiram a GV perceber regularidades existentes em alguns cálculos, conduzindo-a a abandonar, em muitos casos, os algoritmos operatórios padronizados que conduzem a resultados corretos, porém são muito lentos, e a utilizar estratégias reveladoras de concepções ligadas à numeração decimal e às propriedades das operações (BUTLEN e PEZARD, 1992).

Acreditamos, por um lado, que o fato de GV sair do estado de inércia que se encontrava no início da experimentação, com medo de se expor, não conseguindo efetuar mentalmente os cálculos propostos, para ao final da experimentação solicitar permissão para mostrar sua estratégia, mesmo quando não tínhamos a intenção de questioná-la, revela a principal conquista obtida pela metodologia adotada para a prática de cálculo mental. Por outro lado, cremos que sua permanência num grupo direcionado para um trabalho sistemático de cálculo mental a possibilitou: 1) ampliar e construir novas estratégias de cálculo; 2) mobilizar e incorporar teoremas que não fizeram parte do seu repertório numérico durante a experimentação; 3) ampliar o campo de atuação dos teoremas para outros domínios e classes de situações (VERGNAUD, 2005).

Concluímos que os resultados alcançados são decorrentes das realizações didáticas direcionadas pela metodologia da Engenharia Didática, que possibilitaram a validação de nossa hipótese de pesquisa: uma prática regular de cálculo mental contribui para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo. Ouvindo, raciocinando e falando sobre cálculo mental, houve a possibilidade de incorporações de novos conceitos e significados no conhecimento matemático de GV, permitindo inclusive as filiações e rupturas no aprendizado (VERGNAUD, 1996a), ligadas, por exemplo, aos hábitos e forma de pensamento adquiridos a respeito das regras do sistema de numeração decimal.

Um outro aspecto que merece destaque diz respeito à seqüência didática proposta pela experimentação, que avaliamos como consistente e coerente, a qual permitiu estabelecer fases *adidáticas* ao longo da experimentação. Ressaltamos, por um lado, que o meio foi organizado para ser antagônico e atender a esse critério, gerando desequilíbrios que favoreceram a aprendizagem e para isso consideramos, por exemplo, o conjunto de atividades aplicadas (componente material), a dinâmica utilizada (componente social) e os conhecimentos necessários à resolução das atividades (componente cognitivo) (PERRIN-GLORIAN, 1998).

Por outro lado, observamos que as atividades propostas na seqüência podem ser reconhecidas como integrantes de um meio antagonista, no qual suas retroações permitiram GV aprender (MARGOLINAS, 1998). Verificamos que as sessões de cálculo mental fizeram com que GV analisasse, reorganizasse e ampliasse o seu repertório numérico, bem como fizesse conjecturas sobre quais conhecimentos poderiam ajudá-la a obter os resultados esperados.

Para finalizar, resgatamos o depoimento de GV sobre as sessões de cálculo mental desenvolvidas em nosso estudo, que revelam não mais nosso olhar, mas o olhar de um sujeito da pesquisa a respeito das contribuições do cálculo mental para a aprendizagem:

> Sheila, eu aprendi a fazer contas de cabeça e sabe quem me ensinou? Foi você. Vamos ao assunto: às vezes eu não sabia fazer a conta de cabeça, porque o meu cérebro ficava meio confuso para fazer a conta e embolava tudo, daí eu me perdia e falava a resposta errada. Também às vezes você falava uma conta e eu achava muito difícil para responder, mas depois eu fui me soltando e aprendi bastante coisas legais e interessantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pretensão principal deste trabalho foi investigar a natureza do cálculo mental e suas contribuições para a aprendizagem dos conceitos aditivos e multiplicativos de alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, em situações didáticas vivenciadas de forma dialógica. Ressaltamos que consideramos o cálculo mental como um conjunto de estratégias mobilizadas de cabeça ou de memória, que faz (ou não) uso dos dedos para obter resultados exatos ou aproximados, sem recorrer a um algoritmo preestabelecido para obter resultados exatos ou aproximados.

A revisão da literatura mostrou que um trabalho sistemático com o cálculo mental permite ao aluno construir novos esquemas de ação, estabelecer um espaço de múltiplas interações em sala de aula, desenvolver habilidades como a atenção, a memória e a concentração, ampliar o repertório de cálculo e agilizar seu uso. Além disso, tal prática auxilia o professor a identificar invariantes operatórios mobilizados e atuar diretamente neles.

Para atingir o objetivo proposto organizamos uma Engenharia Didática, contendo uma seqüência de atividades composta por três blocos: 1º) atividades relacionadas ao Sistema de Numeração Decimal; 2º) atividades aditivas, cujo tratamento implicava adições ou subtrações e 3º) atividades que envolviam a multiplicação e a divisão mental. Essas atividades tinham por objetivo investigar o conhecimento sobre as propriedades das classes e ordens da escrita do Sistema de Numeração Decimal e das operações envolvidas.

Um ponto que consideramos importante se refere à escolha das atividades propostas na seqüência, reconhecidas como integrantes de um meio antagonista, no qual suas retroações permitiram aos alunos aprender (MARGOLINAS, 1998). Nesse sentido, verificamos que as sessões foram permeadas pelas fases *adidáticas* de ação, formulação e validação (BROUSSEAU, 1986), induzidas pelo formato e encaminhamento das atividades, bem como pelo próprio tema escolhido – cálculo mental. Nossas escolhas coadunam com o pensamento de Vergnaud (2003) quando afirma que uma das principais tarefas do professor é escolher situações que favoreçam o desequilíbrio do sistema.

Acreditamos também que as variáveis didáticas que estavam a nossa disposição, tanto as relacionadas ao conteúdo matemático como as relacionadas à gestão das atividades, foram decisivas para o aparecimento dessas fases *adidáticas.*

Em relação às variáveis numéricas escolhidas, verificamos que as dificuldades apontadas pelas pesquisas em relação à contagem dos números próximos aos "nós" e à indiferenciação entre numeração falada para a numeração escrita (LERNER e SADOVSKY, 1996) constituíram-se os principais entraves para a realização das atividades do primeiro bloco. Observamos que a dificuldade em realizar a contagem dos números próximos aos "nós" aumentava quando o número proposto atingia a classe dos milhares.

Será que o fato de criarmos um espaço para que os alunos pudessem pensar sobre os números, chamando a atenção sobre informações pertinentes, discutindo sobre as estratégias adotadas, permitiu que eles percebessem as regularidades existentes nas contagens? Será que conseguimos intervir para que os alunos avançassem na manipulação da seqüência oral, sem que interrompessem a contagem quando se aproximavam dos "nós"? Os alunos conseguiram perceber a mudança que se produzia ao enunciar variadas seqüências que continham números próximos aos "nós"?

Provavelmente, as discussões desencadeadas não fizeram sentido para todos os alunos. Contudo, o fato de ter sido criado um espaço para pensar sobre os números, analisando e não somente reproduzindo regras, contribuiu para que os alunos percebessem as regularidades existentes nas contagens e avançasse na manipulação da seqüência oral.

> Eu vi que tinha quatro nove, não tinha como colocar outro nove ali. Aí eu peguei e depois do nove vem o dez [e] aí ficou dez mil. [...] Eu peguei o nove da frente, transformei em dez. Porque do nove vem o dez e não tem como colocar outro nove ali. [...] Aí eu peguei aqueles nove e coloquei zero (JD).

Quanto ao segundo bloco, identificamos que o maior impedimento para a realização das atividades concentrou-se em reter na memória os cálculos propostos, impelindo os alunos a solicitar o registro escrito. Tal atitude impediu o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, pois quando visualizavam os números, os alunos tenderam a utilizar mentalmente o algoritmo escrito ao invés de pesquisar novas estratégias mentais. Corroboramos com Butlen e Pezard (1992) quando afirmam que se quisermos fazer aparecer estas últimas é preciso privilegiar o trabalho coletivo oral.

> Um dos blocos que eu percebi que os meus colegas tiveram mais dificuldade, inclusive eu, foi no bloco da multiplicação [...] por mim deve ser o bloco mais trabalhado (PE).[7]

No que diz respeito às atividades do terceiro bloco, percebemos que a principal dificuldade diz respeito ao armazenamento na memória dos cálculos intermediários e isso dificultou a mobilização de estratégias que exigiam muitas decomposições.

Vale destacar que tanto para o segundo como para o terceiro bloco as dificuldades apontadas estiveram relacionadas à variável tamanho dos números, considerada pertinente para a evolução dos procedimentos utilizados pelos alunos (BUTLEN e PEZARD, 1992).

> Eu achei mais fácil as contas de + e -, porque é mais fácil fazer sem papel e o que eu achei mais difícil foi de ÷ e x, porque a conta é maior e é mais difícil fazer de cabeça (MAR).

O cálculo mental proposto pela seqüência didática desenvolveu a oralidade, uma prática pouco presente nas escolas brasileiras. Aliás, isso se tornou um fator de dificuldade no início da experimentação, pois os alunos estavam habituados a recorrer ao cálculo escrito para resolver as atividades propostas nas aulas de Matemática e quando interpelados não conseguiam verbalizá-lo.

> Nós não gostávamos quando ela perguntava o porquê do resultado, porque era difícil de explicar (RO).

O cálculo mental também contribui para um maior domínio do cálculo escrito à medida que o agilizava, além de permitir ao aluno perceber algumas propriedades e regularidades das operações.

[7] Esse excerto foi retirado da avaliação realizada no último dia da experimentação, na qual os alunos relataram pontos positivos e negativos do trabalho realizado. Usaremos alguns deles para ilustrar nossas considerações finais.

> [...] aprendi a fazer cálculos mais rápidos do que eu já sabia e ainda por cima "ensinei" uma parte da sala com uma técnica que eu mesmo criei. É assim: 18+6=?; 18+2+4=24 (PE).

Observamos que a linguagem assumiu, durante a experimentação, as duas funções propostas por Vergnaud (1996a) e que constituem o esboço da atividade intelectual:

- as informações pertinentes foram expressas em termos de objetos (argumentos), de propriedades e de relações (funções proposicionais), de teoremas (proposições);
- as operações de pensamento foram expressas em termos de seleção das informações, de inferência, de aceitação ou de recusa, e também em termos de anúncio dos resultados e dos caminhos percorridos.

Vale notar que verbalização, relacionada à variável gestão das atividades**,** resultou em aprendizado, à medida que permitiu a troca de informações e conhecimentos, revelando, muitas vezes, o modo particular de cada um ver e fazer a matemática.

> Eu aprendi que os outros amigos têm pensamento bem diferente do meu. [...] um exemplo de pensamento diferente: eu faço cálculos de cabeça e eles faziam tipo um algoritmo (A).

Corroboramos com Vergnaud (2003, p.22) quando afirma que:

> [...] é tão importante, dos pontos de vista psicológico e pedagógico, confrontar-se com as pessoas em situações diante das quais elas têm de ser ativas. Se observamos não só adultos como também crianças, constatamos que o desenvolvimento abrange vários tipos de atividade: o gesto dos atletas de alto nível, dos artesãos, por exemplo, as competências científicas e técnicas, as formas de interação com os outros, especialmente a atividade da linguagem (VERGNAUD, 2003, p.22).

Ouvindo, raciocinando e falando sobre cálculo mental presenciamos a incorporações de novas estratégias ao repertório numérico, permitindo inclusive as filiações e rupturas no aprendizado (VERGNAUD, 1996a).

O trabalho com o cálculo mental permitiu que os alunos explorassem diferentes caminhos de resolução das atividades, encorajando-os a não recorrer imediatamente ao algoritmo ensinado pela escola (BUTLEN e PEZARD, 2000), cumprindo sua função pedagógica (BOULAY; LE BIHAN; VIOLAS, 2004), haja vista que contribuímos, principalmente, para ampliar a capacidade de raciocínio dos alunos na elaboração de estratégias originais.

> Todos nós inventamos modos para resolver as contas e isso me ajudou (VT).

Durante a experimentação tivemos uma interação intensa com os sujeitos e fomos construindo respostas aos cálculos propostos juntos, buscando não forçar um resultado. A interação entre os sujeitos também favoreceu a utilização de esquemas, seja substituindo totalmente um esquema por outro, seja reelaborando um esquema para que pudesse permitir o cálculo mental mais adequado.

> Com a opinião dos colegas ficou mais fácil resolver (ME)

Vale notar que a escuta ativa (DOUADY, 1994) contribuiu para que a interação resultasse em aprendizado, instigando os alunos a pensarem sobre seus pensamentos e tomarem consciência do seu estilo de pensamento, fazendo um retorno reflexivo sobre a própria atividade (VERGNAUD, 2003).

Verificamos que o ensino do sistema de numeração praticado na escola parece ter sido baseado unicamente na transmissão de regras, como no uso do ponto (atividade 4). Quando isso acontece, os alunos são impedidos de usar e vincular os conhecimentos que são construídos e continuar a construir, e, sobretudo, são impedidos de compreender que as estratégias ligadas às operações estão estreitamente relacionadas com este sistema (TERIGI e WOLMAN, 2007).

Os dados revelam que as soluções apresentadas pelos sujeitos para as atividades da seqüência didática desenvolvida, basearam-se "[...] ao mesmo tempo em hábitos adquiridos" e em teoremas do tipo "[...] decomponha o valor total, separe a parcela conhecida e adicione as demais parcelas iguais" (VERGNAUD, 1996b, p. 80). Os teoremas foram verbalizados e incorporados gradativamente ao repertório dos alunos.

Identificamos em vários momentos o uso de regras automatizadas nos cálculos realizados pelos alunos. Vergnaud (1996a) afirma que a automatização é uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da ação. Nesse sentido, a automatização

> […] não impede que o sujeito conserve o controle das condições sob as quais tal operação é ou não apropriada. Tomemos, por exemplo, o algoritmo da adição, em numeração decimal; sua execução é amplamente automatizada pela maior parte das crianças no fim da escola primária. As crianças, contudo, são capazes de gerar uma série de ações diferentes em função das características da situação: reserva ou não, intercalar ou não, decimal ou não. (VERGNAUD, 1996a, p.158).

No que se refere à possibilidade do uso dos dedos descaracterizar o cálculo mental acreditamos que seu uso é uma forma natural de auxiliar o cálculo mental, apoiando as contagens, ordenações e comparações. Afinal, gesto e pensamento estão intimamente ligados (VERGNAUD, 1996b). Porém, acreditamos que um trabalho sistemático envolvendo o cálculo mental contribui para o aparecimento de estratégias mais sofisticadas, ligadas às propriedades dos números e das operações. Por esse motivo defendemos a instauração de práticas pedagógicas, nas quais os professores não busquem somente desenvolver competência em calcular mentalmente, mas reconheça seu uso (DOUADY, 1994).

Quanto à mobilização das propriedades dos números e das operações, constatamos maior facilidade dos sujeitos com a decomposição, compensação, comutatividade e associatividade. Inferimos que essa facilidade seja decorrente de uma compreensão intuitiva da criança acerca do número e das propriedades do sistema de numeração (CORREA e MOURA, 1997). Além do mais, elas oferecem um universo maior de possibilidades de cálculo.

Um outro aspecto que merece atenção por parte dos professores diz respeito à gestão das atividades. A troca de soluções e estratégias entre os alunos deveria ser uma prática constante na escola, pois favorece a inter-relação de inúmeros pontos de vistas criados e recriados pelos alunos, sem que o professor tenha que corrigir as respostas erradas e assim, dar respostas corretas sem a oportunidade para o aluno pensar sobre o próprio erro. Sabemos que aceitar o erro já difícil “[...] nas fases de resolução de problema, [sendo] [...] intolerável nas fases de conclusão. [...] É necessário [...] ter uma confiança muito grande (uma teoria que permita esta confiança) para deixar a situação desenrolar-se” sem avaliar a solução apresentada (MARGOLINAS, 1993, p.40).

Avaliamos também que a dinâmica instaurada em nossa pesquisa poderia ser incorporada à prática dos professores, pois favoreceu o conhecimento das concepções numéricas dos alunos e contribuiu para o desenvolvimento de um ensino mais efetivo. Dessa maneira foi possível insistir naqueles aspectos em que os mesmos cometiam erros, antecipando as respostas dos alunos e descrevendo estratégias para a correção das mesmas (GÓMEZ, 1995), conduzindo os alunos a abandonar suas antigas estratégias para adotarem novas, mais eficientes, incorporando novos conceitos e significados ao conhecimento matemático.

Conjeturamos, a partir dos dados coletados, que algumas dificuldades apontadas sejam decorrentes da prática pedagógica instaurada na escola, que, muitas vezes, prioriza apenas o registro escrito, fornecendo apenas certo ou errado para as respostas dos alunos e desconsidera a importância da metacognição para a aprendizagem. Diante disso, sugerimos que os professores proponham atividades orais que exijam do aluno:

- contagens com intervalos superiores a um, para que os alunos percebam as regularidades existentes;
- contagens para frente / regressiva, que perpasse números próximos aos nós, permitindo um domínio maior do sistema de numeração decimal;
- a passagem da numeração falada para a numeração escrita de números pertencentes a classe dos milhares em diante;
- múltiplas partições e percebam que é possível estabelecer diversas equivalências sem mudar a quantidade;
- compreensão das regras e propriedades dos números e das operações, para que não sejam tratadas apenas como botões de uma calculadora, repetindo e executando.

Com relação a possíveis encaminhamentos para pesquisas futuras, indicamos questões que permaneceram em aberto. São elas:

- Como hierarquizar os procedimentos utilizados na resolução de atividades que envolvem o Sistema de Numeração Decimal, as operações aditivas e as multiplicativas?
- Quais teoremas falsos aparecem ao longo de um trabalho sistemático envolvendo o cálculo mental?

Finalizamos com a seguinte questão: O que pode ser mais interessante e relevante para o aluno: saber utilizar algoritmos convencionais ou ser capaz de usar estratégias pessoais diversas? Acreditamos que é preciso discutir esse tipo questão nos cursos destinados à formação de professores, seja inicial ou continuada, principalmente nos destinados ao professores dos anos iniciais do Ensino

Fundamental. Esperamos que os dados desvelados no estudo apresentado contribuam para enriquecer o debate e possibilitem a esses professores encontrar subsídios para construir uma resposta que justifique a necessidade de ampliação de diferentes estratégias e tipos de cálculos – mental ou escrito, exato ou aproximado, como propõem os **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática** (BRASIL, 1997).

REFERÊNCIAS BIBLIGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. 1. ed. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ANSELMO, B.; PLANCHETTE, P. , Le calcul mental au collège: nostalgie ou innovation? **Repères IREM**. Num. 62. p. 5-20, Metz: Topiques Editions, 2006.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathémaques**, Vol. 9, nº 3, pp. 281-308, Grenoble : La pensée sauvage, 1988.

BESSOT, A. Introduction a la theorie des situations. **DIDACTIQUES M2 EIAH-D, UE1** " Concepts fondamentaux de la didactique". Université Joseph Fourier, outubro de 2003.

BITTAR, M.; FREITAS, J.L.M.de. **Fundamentos e metodologia de Matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamenta**l. 2ª ed., Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2005.

BOULAY, S.; LE BIHAN, M.; VIOLAS, S. Le calcul mental. **Mathématiques**, 2004. Disponível em: <http://jclebreton.ouvaton.org/IMG/doc/Le_calcul_mental.doc>. Acesso em 26 de out. /2006.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Básica. **Guia do livro didático 2007**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2006.

_____ . Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. V. 3: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança:** explorando notações. Porto Alegre: Artemed, 2006.

BROUSSEAU,G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: Pensée Sauvage, v.7, n.2, p.33-115, 1986.

BUENOS AIRES. Secretaría de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. **Cálculo mental con números racionales: apuntes para la enseñanza**. Coordinado por Susana Wolman – 1ª ed. Buenos Aires: 2006.

_____. Secretaría de Educación del gobierno de la Ciudad de Buenos Aires / Dirección General de Planeamiento / Dirección de Currícula. **Diseño curricular para la escuela primaria: primer ciclo de la escuela primaria-educación general básica**. Dirigido por Silvia Mendonça, 1ª ed. Buenos Aires: 2004.

BUTLEN D. e PEZARD M. Une contribution à l'étude des rapports entre habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège, **Spirale, Revue de Recherche en Education**, vol 31, p. 117-140, Lille, 2003.

_____. Calcul mental et resolution de problemes multiplicatifs, une experimentation du CP au CM2. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble: Pensée Sauvage, Vol. 12, nº. 23, p. 319-368, 1992.

BUTLEN, D.; PEZARD, M. *et al*., Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège, **Repères-IREM**, n° 41, 5-24, Metz: Topiques Editions, 2000.

CARNOY, M., GOVE, A. K., MARSHALL, J.H. As razões das diferenças de desempenho acadêmico na América Latina: dados qualitativos do Brasil, Chile e Cuba. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, *84*, p.7-33, 2003.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1995.

CORREA, J. A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. **Revista Estudos de Psicologia**, Natal, vol.9 nº.1, Jan./Abr.2004.

CORREA, J. E MOURA, M.L. S. de. **Revista Psicologia: Reflexão e Crítica** [Porto Alegre], vol.10, n.1, 1997.

DOUADY, R. Evolução da relação com o saber em matemática na escola primária: uma crônica sobre cálculo mental. **Em Aberto**, Brasília, ano 14, n. 62, abr./jun. 1994.

ERMEL. **Apprentissages numériques** - CP. Institut National de Recherche Pedagogique. Paris: Hatier, 1991.

FRANÇA. Ministère de l'éducation nationale. **Les nouveaux programmes de l'école primaire-Mathématiques**. Document d'accompagnement des programmes de l'école primaire, Le calcul mental, Cycle des apprentissages fondamentaux, Cycle des approfondissements, 2002.

GÓMEZ, Bernardo. La enseñanza del cálculo mental. **Unión- Revista Iberoamericana de Educación Matematica,** n. 4, p. 17-29, dez 2005.

_____ . Tipología de los errores de cálculo mental en el contexto educativo. **Enseñanza de las ciencias**, *13*. 3. p. 313-325, 1995.

GUIMARÃES, S. D.; BITTAR, M.; FREITAS, J. L. M. de. O Ponto nas Notações Numéricas: como alunos do 4º ano do Ensino Fundamental exploram esse aspecto? In: I SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2008, Recife. **Anais...** Recife: PPGEC/UFRPE, 2008.

KAMII, Constance. **A criança e o número***:* implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. Campinas, São Paulo: Papirus, 1991.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA C. & SAIZ, I. (org.) **Didática da Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas,1996, p.36-47.

LERNER, D. O ensino e o aprendizado Escolar – argumentos contra uma falsa oposição. In: CASTORINA et alli. **Piaget Vygotsky:** novas contribuições para o debate. São Paulo:Ática, 1996.

LETHELLIEUX, C. **Le calcul mental au cycle des approfondissements***,* Collection Pratique pédagogique, Armand Colin, Paris: Bordas, 2001.

LOSITO, S. M. **O sistema de numeração decimal e o princípio multiplicativo:** um estudo na 4ª série do 1º grau. 1996. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP: 1996.

MARGOLINAS, C. Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et lánalyse de situations dénseignement. In **Analyses des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques**. Actes de I´Université d' été – 4 – 11 juillet 1998, La Rochelle – Charente Maritime, Edition Coordonnée par: Robert Noirfalise – IREM de Clermont – Ferrand, 1998.

_____. **De L'importance Du Vrai Et Du Faux Dans La Classe De Mathematiques.** Grenoble: Pensée Sauvage, 1993.

MENDONÇA, M. do C.; LELLIS, M. Cálculo mental. **Revista de Ensino de Ciências**. nº 22, p. 50-7, julho, 1989.

MORO, M. L. F. Adição/Subtração: Os caminhos de sua psicogênese na aprendizagem. **VII Simpósio Nacional de Pesquisa e Intercâmbio Científico**, Gramado, 1998.

MUNIZ, C. A. Mediação e Conhecimento Matemático. In: TACCA, M. C. V. R. (Org.). **Aprendizagem e trabalho Pedagógico**. 1ª ed., v. 1, p. 146-166, Campinas: Alínea, 2006.

NUNES, T. e*t al.* **Educação Matemática 1:** números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

NUNES, T. e BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PARRA, C. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA C. & SAIZ, I. (org.) **Didática da Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas,1996, p.36-47.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

PERRIN- GLORIAN, M. J. Analyse d'um problème de fonctions em termes de milieu: structuration du milieu por eleve et pour lê maître. In **Analyses dês pratiques enseignantes et didactique dês mathématiques**. Clermont – Ferrand: IREM, 1998.

RIBEIRO, C. Metacognição: um apoio ao processo de aprendizagem. **Psicologia: Reflexão e Critíca** , Porto Alegre, v. 16, n. 1, 2003 . Disponível em: <http://www.scielo.br >. Acesso em: 10 mar./ 2008.

RUIZ BOLIVAR, C. Mediación de estrategias metacognitivas en tareas divergentes y transferencia recíproca. **Investigación y Postgrado.** [online]. oct. 2002, vol.17, n. 2, p.53-82. Disponível em: <http://www.scielo.org.ve >. Acesso em 10 mar./ 2008.

SERRAZINA, L. Competência matemática e competências de cálculo no 1º ciclo. **Educação e Matemática**, Lisboa, nº. 69, setembro/outubro, 2002.

TEIXEIRA, L. R. M. As representações da escrita numérica: questões para pensar o ensino e a aprendizagem. In: MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C.(orgs.) **Desenhos, palavras e números:** as marcas da matemática na escola. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2005.

_____. Como os professores interpretam os erros dos alunos das séries iniciais sobre sistema de numeração. In: I SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2002, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UTP, 2002.

TERIGI, F.; WOLMAN, S. Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. **Revista Iberoamericana de Educación OEI**, n. 43, 2007.

TOLEDO, M., TOLEDO, M. **Didática de matemática: como dois e dois: a construção da matemática.** São Paulo: FTD, 1997.

VALENTE, W. R. A aritmética na escola de primeiras letras: os livros de aprender a contar no Brasil do século XIX. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática.** Nº 7, p. 71-81, 2006.

VERGNAUD, G. A formação dos conceitos científicos. **GEEMPA**. Porto Alegre. S.D.

_____. Qu'est-ce qu'apprendre ? In R.M. Chevalier (Ed) **Pour une ècole inclusive. Quelle formation pour les enseignants ?** Actes du colloque international des 24, 25 et 26 novembre 2005, IUFM de Créteil.

_____. A gênese dos campos conceituais. In E. P. Grossi (Org.) **Por que ainda há quem não aprende?** A teoria. Rio de Janeiro: Vozes, p. 21-64, 2003.

_____. **Le Moniteur de Mathématique**. Paris: Éditions Nathan, 1997.

_____. A teoria dos campos conceituais. In BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a.

_____. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos**. Revista do GEEMPA,** Porto Alegre 1996b.

_____. **A apropriação do conceito de número: um processo de muito fôlego**. Trad. de Fávero, M. H. Instituto de Psicologia / UNB, 1991a.

_____. El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escula primaria. México: Trillas, 1991b**.**

_____. Teoria dos campos conceituais. **Recherches en Didactique des Mathematiques**. Grenoble: Pensée Sauvage, 1990.

_____. Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação. Trad. de Franchi, A.;Carvalho, D. L. **Psychologie Française**, n 30-3/4, p.245-52, nov.1985.