



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Raimundo Mangabeira da Silva Neto

**Sobre as Equações de Navier-Stokes com
Viscosidade Variável em um Domínio
Cilíndrico**

Belém
ICEN - UFPA
Março 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Raimundo Mangabeira da Silva Neto

Sobre as Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável em um Domínio Cilíndrico

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof^o.Dr. Geraldo Mendes de Araújo

Área de Concentração: ANÁLISE

Belém
ICEN - UFPA
Março 2008



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Raimundo Mangabeira da Silva Neto

Sobre as Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável em
um Domínio Cilíndrico

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
em Matemática e Estatística da Universidade
Federal do Pará, como pré-requisito para a ob-
tenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 07 de Março de 2008.

Conceito: _____

Banca Examinadora

Prof.º Dr. Geraldo Mendes de Araújo
Instituto de Matemática – *UFPA*
(Presidente)

Prof.º Dr. Silvano Dias Bezerra de Menezes
Instituto de Matemática – *UFPA*
(Membro Interno 1)

Prof.º Dr. Ducival Carvalho Pereira
Instituto de Matemática – *UFPA*
(Membro Interno 2)

Prof.º Dr. Luiz Adauto da Justa Medeiros
Instituto de Matemática – *UFRJ*
(Membro Externo 1)

Resumo

Seja $T > 0$ e Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n com fronteira Γ .

Considere-se o sistema de Navier-Stokes com viscosidade variável:

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 \|u(t)\|^2) \Delta u + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \text{grad } p & \text{em } Q \\ \text{div } u = 0 & \text{em } Q \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde Q é o cilindro do \mathbb{R}^{n+1} dado por $Q = \Gamma \times]0, T[$, com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

Neste trabalho investiga-se a existência de soluções fracas para o sistema (P_1) quando $n \leq 4$ e a unicidade das soluções quando $n \leq 3$, usando-se para isso as idéias de J. L. Lions [9].

Palavras-chaves: Equação de Navier-Stokes com viscosidade variável, domínio cilíndrico, soluções fracas.

Abstract

Let $T > 0$ and Ω a bounded open set of with boundary Γ .

Consider the Navier-Stokes Sistem with variable viscosity:

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 \|u(t)\|^2) \Delta u + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \text{grad } p & \text{in } Q, \\ \text{div } u = 0 & \text{in } Q, \\ u = 0 & \text{in } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where Q is the cylinder of \mathbb{R}^{n+1} defined by $Q = \Gamma \times]0, T[$, with lateral boundary $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$.

In this work we investigate the existence of weak solutions to the sistem (P_1) when $n \leq 4$ and uniqueness of solutions when $n \leq 3$, following the ideas of J. L. Lions [9].

Key Words: Navier-Stokes Equations with variable viscosity, cylindrical domain, weak solutions.

Índice

Introdução	1
Capítulo 1 : Resultados Preliminares	7
Capítulo 2 : Existência de Soluções	25
Capítulo 3 : Unicidade de Soluções	46
Apêndice A : Teorema de Aubin - Lions	54
Apêndice B: Teorema de Carathéodory - Prolongamento de Soluções	60
Referências Bibliográficas	71

Introdução

O modelo matemático que descreve o movimento de um fluido incompressível (densidade constante) é dado pelo sistema de equações diferenciais de Navier-Stokes em coordenadas de Euler

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \text{grad } p \\ \text{div } u = 0 \end{cases}$$

Aqui $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ é uma função vetorial com $u = u(x, t)$ onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pertence ao \mathbb{R}^n e $t \geq 0$ um número real.

Note que u é a velocidade do fluido, f é a densidade volumétrica de forças, $p = p(x, t)$ é a pressão no ponto (x, t) e a constante ν é a viscosidade do fluido que supomos $\nu > 0$.

A análise matemática do problema (P) foi iniciado por Leray em 1934 [8]. Um estudo sistemático do problema (P) em continuação ao de Jean Leray foi realizado por Lions (1969)[9], O.A. Ladyzhenskaya (1989)[7], Roger Teman (1979)[15], Luc Tartar (1999)[14] e vários outros matemáticos.

O problema que será analisado neste trabalho foi proposto por Ladyzhenskaya (1989) o qual consiste em supor que em (P) ν é uma função de u .

Quando ν é da forma $\nu = \nu_0 + \nu_1 \|u(t)\|^2$, com ν_0, ν_1 são constantes positivas foi investigado por G.M. de Araújo, M. Milla Miranda, L.A. Medeiros (2003)[4] em um domínio não cilíndrico.

Seguindo as idéias de Lions (1969), G.M. de Araújo, M. Milla Miranda, L.A. Medeiros (2003) estudar-se-à o problema (P) em um domínio cilíndrico $Q = \Omega \times]0, T[$ de \mathbb{R}^{n+1} com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, mais precisamente:

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 \|u(t)\|^2) \Delta u + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \text{grad } p & \text{em } Q, \\ \text{div } u = 0 & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{em } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega, \end{cases}$$

com $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n)$ e

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x, t) \right)^2 dx,$$

onde

$$V = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n; \text{div } u = 0\}$$

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in (D(\Omega))^n; \text{div } \varphi = 0\}$$

$$H = \{v \in (L^2(\Omega))^n, \text{div } v = 0 \text{ em } D'(\Omega), v \cdot \eta = 0 \text{ sobre } \Gamma\}$$

Problema 1. *Sejam $f \in L^{4/3}(0, T; V')$ e $u_0 \in H$. Determinar*

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^4(0, T; V) \text{ e } p \in D'(Q)$$

tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 \|u(t)\|^2) \Delta u + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \text{grad } p & \text{em } D'(Q) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Problema 2. *Sejam $f \in L^{4/3}(0, T; V')$ e $u_0 \in H$. Determinar*

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^4(0, T; V)$$

tal que

$$\begin{cases} \langle u', v \rangle + \nu_0 a(u(t), v) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), v \rangle + b(u(t), u(t), v) = \langle f, v \rangle & \text{em } D'(0, T) \\ \text{para todo } v \in V. \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

onde

$$a(u(t), v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x, t) dx$$

$$\langle \mathcal{A}u(t), v \rangle = -\|u(t)\|^2 \Delta u$$

$$b(u(t), u(t), v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx$$

O plano que se tem em mente é mostrar a equivalência dos dois problemas e a seguir resolver o problema 2.

(i) Problema 1 implica o Problema 2.

Multiplicando e integrando em Ω a equação do problema 1 por $v \in V$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u' \cdot v \, dx - \nu_0 \int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx + \nu_1 \int_{\Omega} -\|u(t)\|^2 \Delta u \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, dx &= \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \\ + \int_{\Omega} -(\text{grad } p) \cdot v \, dx & . \end{aligned}$$

Agora,

$$\int_{\Omega} -\Delta u \cdot v \, dx = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot v \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

Lembrando que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx$$

como $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ logo,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = a(u(t), v)$$

tem-se também que

$$\int_{\Omega} -\|u(t)\|^2 \Delta u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \mathcal{A}u(t) \cdot v \, dx = \langle \mathcal{A}u(t), v \rangle$$

e

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx = b(u(t), u(t), v)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} (p, \operatorname{div} v) &= \int_{\Omega} p \cdot (\operatorname{div} v) \, dx = \int_{\Omega} p \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \, dx = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} p \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \, dx \\ &= \sum_{j=1}^n \left(p \cdot v_j \Big|_{\Gamma} - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_j} v_j \, dx \right) = \sum_{j=1}^n - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_j} v_j \, dx = \int_{\Omega} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial x_j} v_j \, dx \\ &= \int_{\Omega} (-\operatorname{grad} p) \cdot v \, dx = (-\operatorname{grad} p, v) \end{aligned}$$

como $v \in V$ temos que $\operatorname{div} v = 0$, logo, $(-\operatorname{grad} p, v) = (p, \operatorname{div} v) = 0$. Portanto

$$\langle u', v \rangle + \nu_0 a(u(t), v) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), v \rangle + b(u(t), u(t), v) = \langle f, v \rangle \quad \text{em } D'(0, T)$$

para todo $v \in V$ e $u(x, 0) = u_0(x)$

(ii) Problema 2 implica no Problema 1.

Usa-se o seguinte resultado

Teorema 0.1. (De Rham) Seja $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in (D'(Q))^n$ tal que $\langle f, \varphi \rangle = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$, então existe $p \in D'(Q)$ tal que $f = \operatorname{grad} p$.

Para $v \in V$ resulta que

$$\langle u', v \rangle + \nu_0 a(u(t), v) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), v \rangle + b(u(t), u(t), v) - \langle f, v \rangle = 0.$$

Seja L tal que

$$\langle u', \varphi \rangle + \nu_0 a(u(t), \varphi) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), \varphi \rangle + b(u(t), u(t), \varphi) - \langle f, \varphi \rangle = \langle L, \varphi \rangle$$

para todo $\varphi \in \mathcal{V}$, assim $L \in D'(Q)$ e $\langle L, \varphi \rangle = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{V}$. Logo pelo teorema de De Rham existe $p \in D'(Q)$ tal que $L = -grad p$. Portanto

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 \|u(t)\|^2) \Delta u + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - grad p \quad \text{em } D'(Q)$$

e $u(x, 0) = u_0(x)$

Assim definimos solução fraca do problema (P_1)

Definição 0.1. (Solução fraca) Dada $f \in L^{4/3}(0, T; V')$ e $u_0 \in H$. Uma função na classe

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^4(0, T; V)$$

é denominada solução fraca do problema (P_1) se verificar

$$\langle u', v \rangle + \nu_0 a(u(t), v) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), v \rangle + b(u(t), u(t), v) = \langle f, v \rangle \quad \text{em } D'(0, T)$$

para todo $v \in V$ e $u(x, 0) = u_0(x)$

O objetivo no presente trabalho é demonstrar os seguintes resultados:

Teorema 0.2. Sejam $f \in L^{4/3}(0, T; V')$, $n \leq 4$ e $u_0 \in H$. Então existe $u : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ na classe

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^4(0, T; V)$$

satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u', v \rangle + \nu_0 a(u(t), v) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), v \rangle + b(u(t), u(t), v) = \langle f, v \rangle \quad \text{em } D'(0, T) \\ \text{para todo } v \in V \\ div u = 0 \quad \text{em } Q \\ u = 0 \quad \text{em } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{array} \right.$$

Teorema 0.3. *Sejam $f \in L^{4/3}(0, T; V')$, $n \leq 3$ e $u_0 \in H$. Então existe uma única $u : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ na classe*

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^4(0, T; V)$$

satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u', v \rangle + \nu_0 a(u(t), v) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), v \rangle + b(u(t), u(t), v) = \langle f, v \rangle \quad \text{em } D'(0, T) \\ \text{para todo } v \in V \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{em } Q \\ u = 0 \quad \text{em } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{array} \right.$$

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Nesta parte serão fixadas as notações, bem como apresentados os espaços funcionais e resultados importantes utilizados no trabalho.

Seja $T > 0$ um número real e Ω um aberto e limitado do \mathbb{R}^n com fronteira regular Γ . Considere-se o cilindro

$$Q = \Omega \times]0, T[$$

com fronteira lateral

$$\Sigma = \Gamma \times]0, T[$$

a qual supõe-se regular.

Considere-se o seguinte sistema de Navier-Stokes com Viscosidade Variável:

$$(P_1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (\nu_0 + \nu_1 \|u(t)\|^2) \Delta u + \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = f - \text{grad } p & \text{em } Q \\ \text{div } u = 0 & \text{em } Q \\ u = 0 & \text{em } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde ν_0 e ν_1 são constantes positivas e

$$\|u\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x, t) \right)^2 dx$$

Define-se agora os seguintes espaços funcionais:

$$V = \{u \in (H_0^1(\Omega))^n; \operatorname{div} u = 0\}$$

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in (D(\Omega))^n; \operatorname{div} \varphi = 0\}$$

$$H = \{v \in (L^2(\Omega))^n, \operatorname{div} v = 0 \text{ em } D'(\Omega), v \cdot \eta = 0 \text{ sobre } \Gamma\}$$

onde $V = \overline{\mathcal{V}}^{(H_0^1(\Omega))^n}$ com o produto interno e norma dados respectivamente por:

$$((u, v)) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx$$

e $H = \overline{\mathcal{V}}^{(L^2(\Omega))^n}$ com o produto interno e norma dados respectivamente por:

$$(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i(x) v_i(x) dx$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |u_i|^2 dx$$

Denotar-se-à por V' o dual de V e por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a dualidade entre V' e V , quando nada for dito em contrário.

Considere-se a forma bilinear

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = ((u, v))$$

para todo u e v em $(H_0^1(\Omega))^n$ e a forma trilinear

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx$$

para toda u, v e w em $(H_0^1(\Omega))^n$.

Lema 1.1. *Relativamente a forma bilinear $a(u, v)$ tem-se:*

i) $\langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad \forall u, v \in V, \text{ onde } Au = -\Delta u.$

ii) $a(u, u) = \|u\|^2 \quad \forall u \in V.$

iii) $|a(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V.$

Demonstração:

i) Sejam $\varphi, \phi \in \mathcal{V}$, então,

$$\langle A\varphi, \phi \rangle = \langle -\Delta\varphi, \phi \rangle = \int_{\Omega} -\Delta\varphi \phi \, dx = - \int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \phi \, dx + \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\phi \, dx = \int_{\Omega} \nabla\varphi \cdot \nabla\phi \, dx$$

pois $\phi \in \mathcal{V}$, ou seja $\phi \in (D(\Omega))^n$. Assim,

$$\langle A\varphi, \phi \rangle = \langle -\Delta\varphi, \phi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \, dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial\phi_i}{\partial x_j} \, dx = a(\varphi, \phi).$$

Desde que \mathcal{V} é denso em V , resulta que

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad \forall u, v \in V,$$

o que mostra a parte i).

$$\begin{aligned} \text{ii) } a(u, u) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \, dx = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \, dx \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 \, dx = \sum_{i=1}^n \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|u\|^2 \quad \forall u \in V, \end{aligned}$$

o que mostra a parte ii).

$$\begin{aligned} \text{iii) } |a(u, v)| &= \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\nabla u_i| \cdot |\nabla v_i| \, dx \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy- Schwarz segue-se que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

novamente pela desigualdade de Cauchy- Schwarz segue-se que

$$|a(u, v)| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\| \|v\|.$$

Portanto,

$$|a(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in V$$

o que mostra a parte iii). ■

Lema 1.2. *Relativamente a forma trilinear $b(u, v, w)$ para $n \leq 4$, tem-se:*

i) $|b(u, v, w)| \leq C \|u\| \|v\| \|w\| \quad \forall u, v, w \in V.$

ii) *Para todo $u \in V$ a forma linear Bu definida por $v \mapsto \langle Bu, v \rangle = b(u, u, v)$ é contínua sobre V , ou seja, $Bu \in V'$ e*

$$\|Bu\|_{V'} \leq C \|u\|^2.$$

iii) $b(u, u, v) = -b(u, v, u) \quad \forall u, v \in V$

Demonstração:

i) Mostrar-se-à a continuidade de $b(u, v, w)$ em $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$. O espaço $V \cap (L^n(\Omega))^n$ é dotado da norma,

$$v \longrightarrow (\|v\|^2 + \|v\|_{(L^n(\Omega))^n}^2)^{\frac{1}{2}}$$

com

$$\|v\|_{(L^n(\Omega))^n}^2 = \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{L^n(\Omega)}^2.$$

Considera-se $u \in V$, $v \in V$ e $w \in V \cap (L^n(\Omega))^n$. Tem-se que $u_i \in H_0^1(\Omega)$; $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$.

Do teorema de Imersão de Sobolev resulta que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ com $q = \frac{2n}{n-2}$. Se $n > 2$ segue-se que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = 1$$

e $u_i \in L^q(\Omega)$, $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ e $w_i \in L^n(\Omega)$, assim tem-se que

$$|b(u, v, w)| = \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |u_j| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| |w_i| dx$$

da desigualdade de Hölder segue-se que:

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} |u_j|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |w_i|^n dx \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|u_j\|_{L^q(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^n(\Omega)} \end{aligned}$$

Desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ vem que $\|u_j\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}$ assim

$$|b(u, v, w)| \leq C \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)} C \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^n(\Omega)}$$

aplicando a desigualdade de Cauchy relativamente ao índice j resulta

$$|b(u, v, w)| \leq C \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \|u_j\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_i\|_{L^n(\Omega)}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |\nabla v_i|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} = \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Logo,

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\| \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|w_i\|_{L^n(\Omega)}$$

pela desigualdade de Cauchy para somas segue-se que

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\| \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^n(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e assim

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\| \|v\| \|w\|_{(L^n(\Omega))^n}.$$

Mostrando que $b(u, v, w)$ é contínua em $V \times V \times (V \cap (L^n(\Omega))^n)$.

Agora, para $n \leq 4$ temos que $V \cap (L^n(\Omega))^n = V$. De fato, é imediato que $(V \cap (L^n(\Omega))^n) \subset V$. Resta mostrar que $V \subset (V \cap (L^n(\Omega))^n)$. Note que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega)$ quando $n \leq \frac{2n}{n-2}$, devido ao teorema de Imersão de Sobolev, ou seja, quando $n \leq 4$. Seja $u \in V$, desde que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^n(\Omega)$ implica que $V \subset (H_0^1(\Omega))^n \hookrightarrow (L^n(\Omega))^n$ resulta que $u \in (L^n(\Omega))^n$ e assim $u \in V \cap (L^n(\Omega))^n$. Portanto $(V \cap (L^n(\Omega))^n) = V$ para $n \leq 4$, assim

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\| \|v\| \|w\| \quad \forall u, v, w \in V.$$

ii) Fixando u em V , resulta que a aplicação Bu definida por $v \mapsto \langle Bu, v \rangle = b(u, u, v)$ é linear e contínua sobre V , pelo item anterior. Resulta que

$$|\langle Bu, v \rangle| = |b(u, u, v)| \leq C \|u\|^2 \|v\|$$

logo,

$$\sup_{\|v\| \leq 1} |\langle Bu, v \rangle| \leq \|u\|^2$$

portanto

$$\|Bu\|_{V'} \leq C \|u\|^2 \quad \forall u \in V.$$

iii) Basta mostrar que $b(u, u, v) + b(u, v, u) = 0$ para todo u e v em V . De fato,

$$\begin{aligned} b(u, u, v) + b(u, v, u) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_i dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx + \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_i dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_i \right) dx \right) = \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} u_j \frac{\partial (u_i v_i)}{\partial x_j} dx \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(u_j u_i v_i \Big|_{\Gamma} - \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_i v_i dx \right) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_i v_i dx \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_i v_i dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) u_i v_i dx = 0 \end{aligned}$$

pois $u \in V$. ■

Lema 1.3. *Considere o funcional*

$$J : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$J u = \frac{1}{4} \left(\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^2$$

então,

1. J é diferenciável à Gateaux e sua derivada $J'u$ é dada por

$$\langle J'u, v \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = \langle -\|u\|^2 \Delta u, v \rangle \quad \forall v \in V$$

2. J é convexo.

Demonstração:

1. Para todo u e v em \mathcal{V} , tem-se que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = \frac{1}{4} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left[\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right]^2 - \left[\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right]^2.$$

Definindo-se

$$\theta(\lambda) = \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^2$$

fazendo-se $a_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ e $b_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ temos:

$$\theta(\lambda) = \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + \lambda b_{ij})^2 dx \right)^2 \quad (1.1)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \theta'(\lambda) &= 2 \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + \lambda b_{ij})^2 dx \right) \left[\frac{d}{d\lambda} \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + \lambda b_{ij})^2 dx \right) \right] \\ &= 2 \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + \lambda b_{ij})^2 dx \right) \left[\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n 2(a_{ij} + \lambda b_{ij}) \left(\frac{d}{d\lambda}(a_{ij}) + \frac{d}{d\lambda}(\lambda b_{ij}) \right) dx \right] \end{aligned}$$

Resulta que

$$\theta'(\lambda) = 4 \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + \lambda b_{ij})^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + \lambda b_{ij}) b_{ij} dx \right) \quad (1.2)$$

Tem-se, por (1.1) que

$$\theta(0) = \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^2 \quad (1.3)$$

e, por (1.2) que

$$\theta'(0) = 4 \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx \right) \quad (1.4)$$

Assim,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = \frac{1}{4} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\theta(\lambda) - \theta(0)}{\lambda} = \frac{1}{4} \theta'(0). \quad (1.5)$$

Resulta de (1.4) e (1.5) que

$$\langle J'u, v \rangle = \frac{1}{4} \theta'(0) = \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx \right). \quad (1.6)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx \right) &= \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx \right) \\ &= \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

pelo Teorema de Green tem-se

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_i}{\partial \eta} v_i dx - \int_{\Omega} \Delta u_i v_i dx = - \int_{\Omega} \Delta u_i v_i dx \quad (1.8)$$

pois $v_i \in D(\Omega)$.

Resulta de (1.6), (1.7), (1.8) e da densidade de \mathcal{V} em V que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} &= - \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right) \left(\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i dx \right) \\ &= - \left(\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right) \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i dx \right) \\ &= - \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \right) \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \Delta u_i v_i dx \right) \\ &= - \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |\nabla u_i|^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} \Delta u v dx \right) \end{aligned}$$

Logo

$$\langle J'u, v \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = \|u(t)\|^2 \langle -\Delta u, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (1.9)$$

Definindo-se $\langle J'u, v \rangle = \langle -\|u(t)\|^2 \Delta u, v \rangle$ tem-se pelo lema (1.1), partes (i) e (ii) que

$$\begin{aligned} |\langle J'u, v \rangle| &= |\langle -\|u(t)\|^2 \Delta u, v \rangle| = \|u(t)\|^2 |\langle -\Delta u, v \rangle| = \|u(t)\|^2 |\langle \Delta u, v \rangle| \\ &= \|u(t)\|^2 |a(u, v)| \leq \|u(t)\|^2 \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

assim,

$$|\langle J'u, v \rangle| \leq \|u\|^3 \|v\| \quad (1.10)$$

resulta de (1.10) que

$$\|J'u\|_{V'} \leq \|u\|^3 \quad (1.11)$$

ou seja

$$J'u \in V' \quad \forall u \in V$$

segue-se que

$$\langle J'u, v \rangle_{V' \times V} = \langle -\|u(t)\|^2 \Delta u, v \rangle_{V' \times V} \quad \forall v \in V. \quad (1.12)$$

Pondo-se

$$\langle J'u, v \rangle = \langle \mathcal{A}u, v \rangle$$

resulta que

$$\mathcal{A}u = -\|u(t)\|^2 \Delta u \quad (1.13)$$

onde

$$\mathcal{A} : V \longrightarrow V'$$

2. J é convexo.

Observação: Tem-se que $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\theta(s) = s^2$ é convexa, pois $\theta''(s) = 2 > 0$, ou seja,

$$\theta[(1 - \lambda)u + \lambda v] \leq (1 - \lambda)\theta(u) + \lambda\theta(v)$$

ou

$$((1 - \lambda)u + \lambda v)^2 \leq (1 - \lambda)|u|^2 + \lambda|v|^2 \quad (1.14)$$

Mostrar-se-à agora que J é convexo. De fato,

$$J[(1 - \lambda)u + \lambda v] = \frac{1}{4} \left(\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left((1 - \lambda) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^2 \quad (1.15)$$

de (1.14) e (1.15) resulta que

$$\begin{aligned} J[(1 - \lambda)u + \lambda v] &\leq \frac{1}{4} \left\{ \left[(1 - \lambda) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right]^2 + \lambda \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right]^2 \right\} \\ &\leq (1 - \lambda) \left(\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^2 + \lambda \left(\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right)^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$J[(1 - \lambda)u + \lambda v] \leq (1 - \lambda) Ju + \lambda Jv \quad (1.16)$$

o que mostra que J é convexo.

Observação: Sendo $J' = \mathcal{A}$, resulta que \mathcal{A} é monótono conforme J. L. Lions [9]. ■

Lema 1.4. *Seja $\mathcal{A} : V \rightarrow V'$ dado por*

$$\mathcal{A}u = - \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right) \right].$$

Então, \mathcal{A} é hemicontínuo, isto é, para u, v e w fixos em V , porém arbitrários,

$$\lambda \mapsto \langle \mathcal{A}(u + \lambda v), w \rangle \quad \text{é contínua.}$$

Demonstração:

Sejam $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e (λ_n) uma sequência de números reais tais que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Tem-se:

$$\langle \mathcal{A}(u + \lambda_n v), w \rangle = \left\langle - \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i + \lambda_n v_i) \right)^2 dx \right] \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (u + \lambda_n v) \right) \right], w \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \left\langle - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (u + \lambda_n v) \right), w \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \left[- \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (u_i + \lambda_n v_i) w_i dx \right]
\end{aligned}$$

Agora, integrando por partes segue-se que:

$$- \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (u_i + \lambda_n v_i) w_i dx = - \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i + \lambda_n v_i) w_i \Big|_{\Gamma} - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i + \lambda_n v_i) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx \right)$$

desde que $w_i \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$- \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (u_i + \lambda_n v_i) w_i dx = - \sum_{i,j=1}^n \left(- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i + \lambda_n v_i) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx \right)$$

assim,

$$\langle \mathcal{A}(u + \lambda_n v), w \rangle = \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx \right].$$

Como para toda u, v e $w \in V$ implica que

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad \text{para cada } i, j \quad (1.17)$$

resulta que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx + 2 \lambda_n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx + \lambda_n^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx$$

usando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx + \lambda_n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \\
&\quad + \lambda_n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx + \lambda_n^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx < +\infty
\end{aligned}$$

logo,

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \in L^1(\Omega). \quad (1.18)$$

Novamente pela desigualdade $ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$ tem-se

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right)^2 dx < +\infty$$

assim,

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \in L^1(\Omega) \quad (1.19)$$

Além disso, quando $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ resulta, por (1.17), que

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \rightarrow \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{em } L^2(\Omega) \quad (1.20)$$

e

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \rightarrow \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \quad \text{em } L^1(\Omega). \quad (1.21)$$

Portanto existe uma subsequência de (λ_n) ainda denotada por (λ_n) tal que

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \rightarrow \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{q.s em } \Omega \quad (1.22)$$

e

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \rightarrow \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \quad \text{q.s em } \Omega \quad (1.23)$$

segue de (1.22) e (1.23) que

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right]^2 \rightarrow \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right]^2 \quad \text{q.s em } \Omega \quad (1.24)$$

e

$$\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \rightarrow \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \quad \text{q.s em } \Omega. \quad (1.25)$$

Além disso,

$$\left| \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right|^2 \leq \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| + |\lambda_n| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| \right) \right]^2$$

como $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ logo $|\lambda_n| \leq C$, assim

$$\left| \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right|^2 \leq \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| + C \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| \right) \right]^2 \quad \text{q.s em } \Omega. \quad (1.26)$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| + C \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| \right)^2 dx &\leq \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 dx + 2C \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 dx + 2C \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx < +\infty \end{aligned}$$

logo,

$$\left[\sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| + C \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| \right]^2 \text{ é integrável.} \quad (1.27)$$

Tem-se também que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| \\ &\leq \left| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| + \left| \sum_{i,j=1}^n \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| \\ &\leq \left| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| + |\lambda_n| \left| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| \\ &\leq \left| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| + C \left| \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| \text{ q.s em } \Omega. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| + C \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| \right) dx &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right) \\ &\quad + \frac{C}{2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right) < +\infty \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| + C \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right| \text{ é integrável.} \quad (1.29)$$

Resulta do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue aplicado a (1.18), (1.19), (1.24), (1.25), (1.26), (1.27), (1.28), (1.29) que

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \rightarrow \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \quad (1.30)$$

e

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx \rightarrow \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx \quad (1.31)$$

Assim de (1.30) e (1.31) obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}(u + \lambda_n v) \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx \right] \\ &\rightarrow \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x_j} dx \right] \\ &= \langle \mathcal{A}(u + \lambda_0 v) \rangle. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Segue de (1.32) e notando que para qualquer subsequência (λ'_n) de (λ_n) determinamos uma subsequência (λ''_n) de (λ'_n) tal que

$$\langle \mathcal{A}(u + \lambda''_n v) \rangle \rightarrow \langle \mathcal{A}(u + \lambda_0 v) \rangle,$$

isto é, o limite não depende da subsequência (λ_n) , desta forma obtém-se que

$$\langle \mathcal{A}(u + \lambda_n v) \rangle \rightarrow \langle \mathcal{A}(u + \lambda_0 v) \rangle \quad \text{quando} \quad \lambda_n \rightarrow \lambda_0.$$

Portanto, \mathcal{A} é hemicontínuo. ■

Lema 1.5. *Se $n = 2$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ então,*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração:

Sendo $u \in H_0^1(\Omega)$, a função $\tilde{u} = u$ em Ω e nula no complemento de Ω , pertence a $H^1(\mathbb{R}^2)$. Sendo $D(\mathbb{R}^2)$ denso em $H^1(\mathbb{R}^2)$ limitar-nos-emos às funções de $D(\mathbb{R}^2)$.

Seja $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \varphi^2(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial s} (\varphi^2(s, x_2)) ds \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} 2\varphi(s, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, x_2) ds \\ &= 2 \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(s, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, x_2) ds \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} |\varphi(x_1, x_2)|^2 &= 2 \left| \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(s, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, x_2) ds \right| \leq 2 \int_{-\infty}^{x_1} |\varphi(s, x_2)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, x_2) \right| ds \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(s, x_2)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, x_2) \right| ds \end{aligned} \tag{1.33}$$

Analogamente,

$$\varphi^2(x_1, x_2) = 2 \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x_1, s) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(x_1, s) ds$$

e

$$|\varphi(x_1, x_2)|^2 \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x_1, s)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s}(x_1, s) \right| ds \tag{1.34}$$

multiplicando-se (1.33) e (1.34) membro a membro, obtém-se,

$$|\varphi(x_1, x_2)|^4 \leq 4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x_1, x_2)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right| dx_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x_1, x_2)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right| dx_2 \right).$$

Integrando-se a inequação acima em \mathbb{R}^2 tem-se, com $x = (x_1, x_2)$, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4 dx_1 dx_2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} 4 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right| dx_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right| dx_2 \right) \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right| dx_1 dx_2 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right| dx_1 dx_2 \right) \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4 dx \leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right| dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right| dx \right).$$

Usando a desigualdade de Hölder resulta que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^4 dx &\leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 4 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

usando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi^4(x) \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right|^2 dx \right)$$

assim,

$$|\varphi|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 \leq 2 |\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \|\varphi\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}^2$$

segue-se que

$$|\varphi|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{\frac{1}{4}} |\varphi|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^2)$$

Usando-se a densidade de $D(\mathbb{R}^2)$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ resulta

$$|u|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{\frac{1}{4}} |u|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Sejam $u \in H_0^1(\Omega)$ e \tilde{u} a extensão por zero fora de Ω , então $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ e tem-se

$$|\tilde{u}|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{\frac{1}{4}} |\tilde{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}}.$$

Tem-se também que

$$|\widetilde{u}|_{L^4(\mathbb{R}^2)} = |u|_{L^4(\Omega)} \quad \text{e} \quad |\widetilde{u}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = |u|_{L^2(\Omega)}.$$

Além disso, se $u \in H_0^1(\Omega)$ e Ω aberto do \mathbb{R}^2 , então $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ com $i = 1, 2$. Desse modo,

$$\|\widetilde{u}\|_{H_0^1(\mathbb{R}^2)}^2 = \sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_j} \right|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Portanto,

$$|u|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{4}} |u|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

■

Lema 1.6. *Suponhamos que $n \geq 3$ e $r, s \in \mathbb{R}$ com $s > 2$, $r > n$, verificando*

$$\frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1 \tag{1.35}$$

então, se $u \in (L^r(\Omega))^n$ tem-se a desigualdade

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\|_{(L^r(\Omega))^n} \|v\| |w|^{\frac{2}{s}} \|w\|^{\frac{n}{r}} \quad \forall u, v, w \in V.$$

Demonstração:

Temos que

$$|b(u, v, w)| \leq \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |u_j| \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| |w_i| dx$$

se

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \tag{1.36}$$

pela desigualdade de Hölder tem-se

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} |u_j|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |w_i|^\rho dx \right)^{\frac{1}{\rho}} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|u_j\|_{L^r(\Omega)} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^\rho(\Omega)}. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy relativamente ao índice j

$$\begin{aligned} |b(u, v, w)| &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \|u_j\|_{L^r(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_i\|_{L^\rho(\Omega)} \\ &= \|u\|_{(L^r(\Omega))^n} \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|w_i\|_{L^\rho(\Omega)} \end{aligned}$$

novamente pela desigualdade de Cauchy obtem-se

$$|b(u, v, w)| \leq \|u\|_{(L^r(\Omega))^n} \|v\|_V \|w\|_{(L^\rho(\Omega))^n} \quad (1.37)$$

de (1.35) segue-se que

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{2r} = \frac{1}{2} \quad (1.38)$$

substituindo em (1.36) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{n}{2r} &\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{s} + \frac{n}{2r} - \frac{1}{r} \\ \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{s} + \frac{n-2}{2r} &\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{2/s}{2} + \frac{2n}{2n(2r/n-2)} \end{aligned}$$

Segue-se que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2/s}{2} + \frac{n/r}{2n/n-2} \quad (1.39)$$

Como $w_i \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$, pois $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$. Resulta da desigualdade de interpolação

que

$$\|w_i\|_{L^\rho(\Omega)} \leq \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^{2/s} \|w_i\|_{L^{2n/n-2}}^{n/r} \quad (1.40)$$

usando novamente o fato que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ pode-se escrever

$$\|w_i\|_{L^\rho(\Omega)} \leq C \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^{2/s} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}^{n/r} \quad (1.41)$$

ou seja

$$\|w_i\|_{L^\rho(\Omega)}^2 \leq C \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^{4/s} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}^{2n/r}$$

e daí

$$\sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^\rho(\Omega)}^2 \leq C \sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^2(\Omega)}^{4/s} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}^{2n/r}$$

pela desigualdade de Holder com $\left(\frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1\right)$ segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^\rho(\Omega)}^2 &\leq C \left(\sum_{i=1}^n \left(|w_i|_{L^2(\Omega)}^{4/s} \right)^{s/2} \right)^{2/s} \left(\sum_{i=1}^n \left(\|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}^{2n/r} \right)^{r/n} \right)^{n/r} \\
&\leq C \left(\sum_{i=1}^n |w_i|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{2/s} \left(\sum_{i=1}^n \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{n/r} \\
&\leq C \left(|w|_{(L^2(\Omega))^n} \right)^{2/s} \left(\|w\|_V^2 \right)^{n/r} \\
&\leq C \left(|w|_{(L^2(\Omega))^n}^{2/s} \right)^2 \left(\|w\|_V^{n/r} \right)^2
\end{aligned}$$

portanto

$$\|w\|_{(L^\rho(\Omega))^n} \leq C |w|^{2/s} \|w\|^{n/r} \quad (1.42)$$

segue- se então de (1.37) e (1.42)

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\|_{(L^r(\Omega))^n} \|v\| |w|^{2/s} \|w\|^{n/r}$$

■

Capítulo 2

Existência de Soluções

Teorema 2.1. (*Solução fraca*)

Considera-se $n \leq 4$. Se $f \in L^{4/3}(0, T; V')$ e $u_0 \in H$, então existe $u : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ na classe

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^4(0, T; V)$$

satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u'(t), v \rangle + \nu_0 a(u(t), v) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u(t), v \rangle + b(u(t), u(t), v) = \langle f(t), v \rangle \quad \text{em } D'(0, T) \\ \text{para todo } v \in V \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{em } Q \\ u = 0 \quad \text{em } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{array} \right.$$

Demonstração:

Como $V \xrightarrow{\text{comp}} H = H' \hookrightarrow V'$ tem-se o seguinte problema espectral

$$((u, v)) = \lambda(u, v) \tag{2.1}$$

Sejam (w_ν) e (λ_ν) soluções de (2.1).

Considera-se $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros vetores da base Hilbertiana (w_ν) e,

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j$$

solução do problema aproximado,

$$\left\{ \begin{array}{l} (u'_m(t), w_j) + \nu_0 a(u_m(t), w_j) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle + b(u_m(t), u_m(t), w_j) = \langle f(t), w_j \rangle \\ j = 1, \dots, m; \\ u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ forte em } H, \quad u_{0m} \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m}; \end{array} \right. \quad (2.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle &= \left\langle - \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j^2} \right], w_j \right\rangle \\ &= - \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_{im}}{\partial x_j} \right)^2 dx \right] \left(\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (u_{im})}{\partial x_j^2} w_j dx \right) \end{aligned}$$

O sistema (2.2) possui solução $u_m(t)$ em $[0, t_m]$, $t_m > 0$ e as estimativas que serão obtidas permitirão estender a solução a todo intervalo $[0, T]$.

Estimativas à Priori

Estimativa I.

Multiplicando (2.2) por g_{jm} e somando de $j = 1$ a $j = m$ obtém-se

$$\begin{aligned} (u'_m(t), u_m(t)) + \nu_0 a(u_m(t), u_m(t)) + \nu_1 \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t) \rangle \\ + b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = \langle f(t), u_m(t) \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

pelo lema (1.2) segue que $b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)) = 0$.

Agora

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u_m(t), u_m(t) \rangle &= a(u_m(t), u_m(t)) = \|u_m(t)\|^2 \\ \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t) \rangle &= \langle -\|u_m(t)\|^2 \Delta u_m(t), u_m(t) \rangle = \|u_m(t)\|^2 \langle -\Delta u_m(t), u_m(t) \rangle = \|u_m(t)\|^4 \\ \frac{d}{dt} (\|u_m(t)\|^2) &= \frac{d}{dt} (u_m(t), u_m(t)) = 2(u'_m(t), u_m(t)) \end{aligned}$$

Assim (2.3) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu_0 \|u_m(t)\|^2 + \nu_1 \|u_m(t)\|^4 &= \langle f(t), u_m(t) \rangle_{V' \times V} \\ &\leq \|f(t)\|_{V'} \|u_m(t)\| = \frac{1}{\varepsilon^{3/4}} \|f(t)\|_{V'} \varepsilon^{3/4} \|u_m(t)\| \end{aligned}$$

para qualquer $\varepsilon > 0$.

Pela desigualdade de Young, com $p = \frac{4}{3}$ e $q = 4$, tem-se:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu_0 \|u_m(t)\|^2 + \nu_1 \|u_m(t)\|^4 \leq \frac{3}{4} \left(\frac{\|f(t)\|_{V'}}{\varepsilon^{3/4}} \right)^{4/3} + \frac{1}{4} (\|u_m(t)\| \varepsilon^{3/4})^4,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu_0 \|u_m(t)\|^2 + \nu_1 \|u_m(t)\|^4 \leq \frac{3}{4\varepsilon} \|f(t)\|_{V'}^{4/3} + \frac{\varepsilon^3}{4} \|u_m(t)\|^4 \quad (2.4)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Segue-se que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu_0 \|u_m(t)\|^2 + \left(\nu_1 - \frac{\varepsilon^3}{4} \right) \|u_m(t)\|^4 \leq \frac{3}{4\varepsilon} \|f(t)\|_{V'}^{4/3} \quad (2.5)$$

para todo $\varepsilon > 0$. Desta forma basta que $0 < \varepsilon < \sqrt[3]{4\nu_1}$.

Assim (2.5) torna-se

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu_0 \|u_m(t)\|^2 + C_1 \|u_m(t)\|^4 \leq C_2 \|f(t)\|_{V'}^{4/3} \quad (2.6)$$

multiplicando-se por 2 em ambos os membros de (2.6) e integrando de 0 a t , tem-se:

$$\int_0^t \frac{d}{dt} |u_m(s)|^2 ds + 2\nu_0 \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds + 2C_1 \int_0^t \|u_m(s)\|^4 ds \leq 2C_2 \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^{4/3} ds$$

ou

$$|u_m(t)|^2 - |u_m(0)|^2 + 2\nu_0 \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds + 2C_1 \int_0^t \|u_m(s)\|^4 ds \leq 2C_2 \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^{4/3} ds$$

logo,

$$\begin{aligned} |u_m(t)|^2 + 2\nu_0 \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds + 2C_1 \int_0^t \|u_m(s)\|^4 ds &\leq |u_m(0)|^2 \\ &+ 2C_2 \int_0^T \|f(s)\|_{V'}^{4/3} ds \quad (2.7) \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} |u_m(0)| < K & \quad \text{pois} \quad \lim u_m(0) = u_0 \\ \int_0^T \|f(s)\|_{V'}^{4/3} ds < \infty & \quad \text{pois} \quad f \in L^{4/3}(0, T, V') \end{aligned}$$

Assim, $|u_m(t)| \leq K$ que independe de m e $t < T$. Pelo teorema de Carateodory, podemos prolongar a solução ao intervalo $[0, T]$.

Note que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess} |u_m(t)| \leq K$$

daí

$$(u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; H) \quad (2.8)$$

como podemos prolongar a solução $u_m(t)$ ao intervalo $[0, T]$ temos,

$$\int_0^T \|u_m(t)\|^2 dt \leq K \quad \text{que independe de } m \text{ e } t < T$$

logo

$$\|u_m\|_{L^2(0, T; V)} \leq K$$

isto é,

$$(u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0, T; V) \quad (2.9)$$

Do mesmo modo tem- se que

$$(u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^4(0, T; V) \quad (2.10)$$

Estimativa II

Seja $P_m : V \longrightarrow V_m \subset V$ a projeção ortogonal de V sobre V_m , isto é,

$$P_m \varphi = \sum_{j=1}^m \left(\left(\varphi, \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right) \right) \frac{w_j}{\sqrt{\lambda_j}} \quad \text{com} \quad \varphi \in V$$

pela escolha da base especial (w_ν) tem- se,

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(V, V)} \leq 1 \quad (2.11)$$

$$\|P_m^*\|_{\mathcal{L}(V', V')} \leq 1 \quad (2.12)$$

multiplicando-se a expressão aproximada pelo vetor w_j e somando-se de $j = 1$ a $j = m$ obtém-se, usando-se as notações dos lemas (1.1) e (1.2)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m (u'_m(t), w_j) w_j &+ \nu_0 \sum_{j=1}^m \langle Au_m(t), w_j \rangle w_j + \sum_{j=1}^m \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle \\ &+ \sum_{j=1}^m \langle Bu_m(t), w_j \rangle w_j = \sum_{j=1}^m \langle f(t), w_j \rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

com \mathcal{A} monótono e hemicontínuo conforme os lemas (1.3) e (1.4).

Segue-se de (2.12), observando que $P_m^* u'_m(t) = u'_m(t)$ devido $u'_m(t) \in V_m$, que

$$\begin{aligned} P_m^* u'_m(t) &+ \nu_0 P_m^* Au_m(t) + P_m^* \mathcal{A}u_m(t) + P_m^* Bu_m(t) = P_m^* f(t) \\ u'_m(t) &= P_m^* f(t) - \nu_0 P_m^* Au_m(t) - P_m^* \mathcal{A}u_m(t) - P_m^* Bu_m(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

agora pelas partes (i) e (ii) do lema (1.1)

$$|\langle Au_m(t), w \rangle| = |a(u_m(t), w)| \leq \|u_m(t)\| \|w\| \quad (2.15)$$

assim

$$\sup_{\|w\| \leq 1} |\langle Au_m(t), w \rangle| \leq \|u_m(t)\|$$

logo

$$\|Au_m(t)\|_{V'} \leq \|u_m(t)\| \quad (2.16)$$

e, portanto

$$\int_0^T \|Au_m(t)\|_{V'}^4 dt \leq \int_0^T \|u_m(t)\|^4 dt \leq C \quad (2.17)$$

pois $(u_m) \in L^4(0, T; V)$. Desta forma

$$(Au_m) \text{ é limitada em } L^4(0, T; V'). \quad (2.18)$$

resulta de (2.18) que

$$(P_m^* Au_m) \text{ é limitada em } L^4(0, T; V')$$

como $L^4(0, T; V') \hookrightarrow L^{4/3}(0, T; V')$, segue-se que

$$(P_m^* Au_m) \text{ é limitada em } L^{4/3}(0, T; V'). \quad (2.19)$$

Tem- se que

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{A}u_m(t), w \rangle| &= |\langle -\|u_m(t)\|^2 \Delta u_m(t), w \rangle| = \|u_m(t)\|^2 \langle -\Delta u_m(t), w \rangle \\
&= \|u_m(t)\|^2 \langle \mathcal{A}u_m(t), w \rangle = \|u_m(t)\|^2 |a(u_m(t), w)| \\
&\leq \|u_m(t)\|^2 \|u_m(t)\| \|w\|
\end{aligned}$$

e assim

$$|\langle \mathcal{A}u_m(t), w \rangle| \leq \|u_m(t)\|^3 \|w\| \quad (2.20)$$

segue- se que

$$\sup_{\|w\| \leq 1} |\langle \mathcal{A}u_m(t), w \rangle| \leq \|u_m(t)\|^3$$

logo

$$\|\mathcal{A}u_m(t)\|_{V'} \leq \|u_m(t)\|^3 \quad (2.21)$$

resulta que

$$\int_0^T \|\mathcal{A}u_m(t)\|_{V'}^{4/3} dt \leq \int_0^T \|u_m(t)\|^4 dt \quad (2.22)$$

desde que (u_m) é limitada em $L^4(0, T; V)$ tem- se

$$(\mathcal{A}u_m) \text{ é limitada em } L^{4/3}(0, T; V') \quad (2.23)$$

por (2.23) temos que

$$(P_m^* \mathcal{A}u_m) \text{ é limitada em } L^{4/3}(0, T; V'). \quad (2.24)$$

Pela parte (ii) do lema (1.2) resulta

$$\|Bu_m(t)\|_{V'} \leq C \|u_m(t)\|^2 \quad (2.25)$$

segue- se que

$$\int_0^T \|Bu_m(t)\|_{V'}^2 dt \leq C \int_0^T \|u_m(t)\|^4 dt$$

desde que u_m é limitada em $L^4(0, T; V)$ tem-se que

$$(Bu_m) \text{ é limitada em } L^2(0, T; V')$$

daí

$$(P_m^* Bu_m) \text{ é limitada em } L^2(0, T; V')$$

sendo $L^2(0, T; V') \hookrightarrow L^{4/3}(0, T; V')$ segue-se que

$$(P_m^* Bu_m) \text{ é limitada em } L^{4/3}(0, T; V'). \quad (2.26)$$

Também como $f \in L^{4/3}(0, T; V')$, resulta que

$$(P_m^* f) \text{ é limitada em } L^{4/3}(0, T; V'). \quad (2.27)$$

segue-se então por (2.14), (2.19), (2.24), (2.26) e (2.27) que

$$(u'_m) \text{ é limitada em } L^{4/3}(0, T; V'). \quad (2.28)$$

Usando-se o teorema de compacidade de Aubin- Lions, com $B_0 = V$, $B = H$, $B_1 = V'$, $p_0 = 2$, $p_1 = \frac{4}{3}$ e

$$W = \{u_m; u_m \in L^2(0, T; V), u'_m \in L^{4/3}(0, T; V')\}$$

resulta que

$$W \xrightarrow{comp} L^2(0, T; H) \quad (2.29)$$

conclui-se que existe uma subsucessão, ainda representada por (u_m) tal que

$$u_m \rightarrow u \text{ forte em } L^2(0, T; H) \quad (2.30)$$

logo,

$$u_{mi} \rightarrow u_i \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q) \quad (2.31)$$

segue-se que existe uma subsucessão de (u_{mi}) , ainda denotada por (u_{mi}) tal que

$$u_{mi} \rightarrow u_i \text{ q.s em } Q \quad (2.32)$$

portanto

$$u_{mi}u_{mj} \rightarrow u_iu_j \quad \text{q.s em } Q. \quad (2.33)$$

Por outro lado, para $n \leq 4$, tem- se

$$u_{mi} \in L^4(0, T, H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^4(0, T, L^4(\Omega))$$

logo,

$$\begin{aligned} \|u_{mi}u_{mj}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &= \int_0^T |u_{mi}u_{mj}|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \left(\int_{\Omega} |u_{mi}u_{mj}|^2 dx \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\int_{\Omega} |u_{mi}|^2 |u_{mj}|^2 dx \right) dt \\ &\leq \int_0^T \left[\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}|u_{mi}|^4 + \frac{1}{2}|u_{mj}|^4 \right) dx \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_{\Omega} |u_{mi}|^4 dx \right) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_{\Omega} |u_{mj}|^4 dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \|u_{mi}\|_{L^4(\Omega)}^4 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|u_{mj}\|_{L^4(\Omega)}^4 dt \leq K \end{aligned} \quad (2.34)$$

e, segue- se que

$$(u_{mi}u_{mj}) \quad \text{é limitada em } L^2(0, T, L^2(\Omega)). \quad (2.35)$$

Usando- se o lema de Lions com(2.32) e (2.34) resulta que

$$u_{mi}u_{mj} \rightarrow u_iu_j \quad \text{fraco em } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \quad (2.36)$$

Além disso, tem- se por (2.8), (2.9), (2.10), (2.23) e (2.28)

$$u_m \rightarrow u \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0, T, H) \quad (2.37)$$

$$u_m \rightarrow u \quad \text{fraco em } L^2(0, T, V) \quad (2.38)$$

$$u_m(T) \rightarrow \xi \quad \text{fraco em } H \quad (2.39)$$

$$u_m \rightarrow u \quad \text{fraco em } L^4(0, T, V) \subset L^4(0, T, V') \quad (2.40)$$

$$\mathcal{A}u_m \rightarrow \chi \quad \text{fraco em } L^{4/3}(0, T, V') \quad (2.41)$$

$$u'_m \rightarrow u' \quad \text{fraco em } L^{4/3}(0, T, V') \quad (2.42)$$

Desde que, para $v = w_j \in V$ tem-se que

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega).$$

Considere-se $\theta \in D(0, T) \subset L^2(0, T)$, assim,

$$\begin{aligned} \left\| \theta(t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2 &= \int_0^T \left| \theta(t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \int_{\Omega} \left| \theta(t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} |\theta(t)|^2 \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx dt = \int_0^T |\theta(t)|^2 dt \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx < +\infty \end{aligned}$$

logo

$$\theta(t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.43)$$

Por (2.36) tem-se, para toda $\psi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, que

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_{mi} u_{mj} \psi(x, t) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} u_i u_j \psi(x, t) dx dt$$

fazendo $\psi(x, t) = \theta(t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)$, que é lícito por (2.43), vem que

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_{mi} u_{mj} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \theta(t) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \theta(t) dx dt.$$

Somando-se de $i = 1$ a $i = m$ e $j = 1$ a $j = m$ resulta que

$$\sum_{i,j=1}^m \int_0^T \int_{\Omega} u_{mi} u_{mj} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \theta(t) dx dt \rightarrow \sum_{i,j=1}^m \int_0^T \int_{\Omega} u_i u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \theta(t) dx dt. \quad (2.44)$$

Como

$$\begin{aligned} \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), v) \theta(t) dt &= - \int_0^T b(u_m(t), v, u_m(t)) \theta(t) dt \\ &= - \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^m \int_{\Omega} u_{mi} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_{mj} dx \right) \theta(t) dt = - \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^m \int_{\Omega} u_{mi} u_{mj} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \theta(t) dx \right) dt \end{aligned}$$

segue de (2.44) que,

$$\int_0^T b(u_m(t), u_m(t), v) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T b(u(t), u(t), v) \theta(t) dt$$

para toda $\theta \in D(0, T) \subset L^2(0, T)$ e $v \in V$. Em particular, temos

$$b(u_m(t), u_m(t), w_j) \rightarrow b(u, u, w_j) \quad \text{fraco em } L^2(0, T). \quad (2.45)$$

Agora

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u'_m(t), w_j \rangle \theta(t) dt &= \int_0^T \frac{d}{dt} \langle u_m(t), w_j \rangle \theta(t) dt \\ &= \langle u_m(t), w_j \rangle \theta(t) \Big|_0^T - \int_0^T \langle u_m(t), w_j \rangle \theta'(t) dt \\ &= - \int_0^T \langle u_m(t), w_j \rangle \theta'(t) dt \end{aligned}$$

por (2.37) tem-se que $u_m \rightarrow u$ fraco estrela em $L^\infty(0, T, H)$, assim

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u'_m(t), w_j \rangle \theta(t) dt &= - \int_0^T \langle u_m(t), w_j \rangle \theta'(t) dt \\ &\rightarrow - \int_0^T \langle u(t), w_j \rangle \theta'(t) dt = \int_0^T \langle u'(t), w_j \rangle \theta(t) dt. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Agora,

$$\begin{aligned} u_m &\rightarrow u \quad \text{fraco em } L^2(0, T, V) \\ \frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j} &\rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{fraco em } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \end{aligned}$$

logo,

$$\int_0^T \left(\frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j}, \varphi \right) dt \rightarrow \int_0^T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \varphi \right) dt \quad \forall \varphi \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

em particular, $\varphi = \frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j} \theta(t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, com $v = w_j$ como anteriormente, temos

$$\int_0^T \left(\frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \theta(t) dt.$$

Somando-se em $i = 1$ a $i = m$ e $j = 1$ a $j = m$ tem-se

$$\int_0^T \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \theta(t) dt$$

assim

$$\int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^m \int_{\Omega} \frac{\partial u_{mi}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \right) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^m \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \right) \theta(t) dt$$

logo,

$$\int_0^T a(u_m(t), v) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T a(u(t), v) \theta(t) dt$$

e portanto,

$$\int_0^T a(u_m(t), w_j) \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T a(u(t), w_j) \theta(t) dt \quad \forall \in D(0, T) \quad (2.47)$$

por (2.41)

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle \theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \langle \chi, w_j \rangle \theta(t) dt \quad (2.48)$$

Tem-se da equação aproximada que,

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u'_m(t), w_j) \theta(t) dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), w_j) \theta(t) dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle \theta(t) dt \\ & + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j) \theta(t) dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \theta(t) dt \end{aligned} \quad (2.49)$$

para toda $\theta \in D(0, T)$.

Integrando- se por partes o primeiro termo de (2.49) resulta

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u_m(t), w_j) \theta'(t) dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), w_j) \theta(t) dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle \theta(t) dt \\ & + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j) \theta(t) dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \theta(t) dt \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Fixando j e tomando- se o limite quando $m \rightarrow \infty$ obtém- se, de (2.45), (2.46), (2.47) e (2.48), que

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u(t), w_j) \theta'(t) dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), w_j) \theta(t) dt + \int_0^T \langle \chi, w_j \rangle \theta(t) dt \\ & + \int_0^T b(u(t), u(t), w_j) \theta(t) dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \theta(t) dt \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.51)$$

para toda $\theta \in D(0, T)$.

Mostrar-se-à agora que $u(0) = u_0$. Por (2.40) e (2.42) resulta que

$$u_m \rightarrow u \quad \text{fraco em } L^{4/3}(0, T; V')$$

Assim,

$$u_m(t) \rightarrow u(t) \text{ fraco em } V' \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.52)$$

portanto

$$u_m(0) \rightarrow u(0) \text{ fraco em } V'$$

como

$$u_{0m} = u_m(0) \rightarrow u_0 \text{ fraco em } V'$$

resulta pela unicidade do limite fraco que

$$u(0) = u_0 \quad (2.53)$$

Usando a densidade de (w_ν) em V tem-se

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u(t), v) \theta'(t) dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), v) \theta(t) dt + \int_0^T \langle \chi, v \rangle \theta(t) dt \\ + \int_0^T b(u(t), u(t), v) \theta(t) dt = \int_0^T \langle f(t), v \rangle \theta(t) dt \end{aligned} \quad (2.54)$$

para toda $v \in V$ e $\theta \in D(0, T)$.

Segue-se de (2.54) que pode-se escrever

$$\begin{aligned} \left\langle - \int_0^T u(t) \theta'(t) dt, v \right\rangle_{V' \times V} + \nu_0 \left\langle \int_0^T Au(t) \theta(t) dt, v \right\rangle_{V' \times V} + \left\langle \int_0^T \chi \theta(t) dt, v \right\rangle_{V' \times V} \\ + \left\langle \int_0^T Bu(t) \theta(t) dt, v \right\rangle_{V' \times V} = \left\langle \int_0^T f(t) \theta(t) dt, v \right\rangle_{V' \times V} \end{aligned} \quad (2.55)$$

para toda $v \in V$ e $\theta \in D(0, T)$.

Por (2.55)

$$\begin{aligned} - \int_0^T u(t) \theta'(t) dt + \nu_0 \int_0^T Au(t) \theta(t) dt + \int_0^T \chi \theta(t) dt \\ + \int_0^T Bu(t) \theta(t) dt = \int_0^T f(t) \theta(t) dt \end{aligned} \quad (2.56)$$

em V' para toda $\theta \in D(0, T)$. Resulta de (2.56) que

$$\begin{aligned} \langle u'(t), \theta(t) \rangle_{D' \times D} + \nu_0 \langle Au(t), \theta(t) \rangle_{D' \times D} + \langle \chi, \theta(t) \rangle_{D' \times D} \\ + \langle Bu(t), \theta(t) \rangle_{D' \times D} = \langle f(t), \theta(t) \rangle_{D' \times D} \end{aligned} \quad (2.57)$$

em V' para toda $\theta \in D(0, T)$. Assim

$$u' + \nu_0 Au + \chi + Bu = f \quad \text{em } D'(0, T; V')$$

isto é,

$$u' = -\nu_0 Au - \chi - Bu + f \quad \text{em } D'(0, T; V'). \quad (2.58)$$

Como o segundo membro de (2.58) pertence a $L^{4/3}(0, T; V')$ resulta que a distribuição u' pode ser identificada a uma função de $L^{4/3}(0, T; V')$. Desta forma,

$$u' + \nu_0 Au + \chi + Bu = f \quad \text{em } L^{4/3}(0, T; V') \quad (2.59)$$

Mostrar-se-à agora que $\chi = \mathcal{A}u(t)$.

Sendo \mathcal{A} monótono temos

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t) - \mathcal{A}\varphi, u_m(t) - \varphi \rangle dt \geq 0 \quad \forall \varphi \in L^4(0, T; V)$$

isto é,

$$\int_0^T [\langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t) - \varphi \rangle - \langle \mathcal{A}\varphi, u_m(t) - \varphi \rangle] dt \geq 0$$

assim,

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u_m(t) - \varphi \rangle dt \geq 0 \quad (2.60)$$

para toda $\varphi \in L^4(0, T; V)$.

Por outro lado, da equação aproximada (2.2), temos

$$\begin{aligned} \int_0^T (u'_m(t), u_m(t)) dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), u_m(t)) dt \\ + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t) \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u_m(t) \rangle dt \end{aligned} \quad (2.61)$$

desde que $(u'_m(t), u_m(t)) = \frac{d}{dt}|u_m(t)|^2$ resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), u_m(t)) dt \\ + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t) \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u_m(t) \rangle dt \end{aligned} \quad (2.62)$$

logo, por (2.62) tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), u_m(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle f(t), u_m(t) \rangle dt - \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 \\ &\quad - \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), u_m(t)) dt \end{aligned} \quad (2.63)$$

substituindo (2.63) em (2.60) resulta,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle f(t), u_m(t) \rangle dt + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 - \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 - \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), u_m(t)) dt \\ - \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u_m(t) - \varphi \rangle dt \geq 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Mostrar-se-à agora que, $\xi = u(T)$, onde ξ foi definido em (2.39) e a convergência do termo não linear $\int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j)\theta(t) dt$ foi mostrada em (2.45).

Seja $\theta \in C^1[0, T]$ com $\theta(T) = 1$ e $\theta(0) = 0$, tem-se da equação aproximada (2.2) que

$$\begin{aligned} \int_0^T (u'_m(t), w_j)\theta(t) dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), w_j)\theta(t) dt + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle \theta(t) dt \\ + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j)\theta(t) dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \theta(t) dt \end{aligned}$$

integrando por partes,

$$\begin{aligned} (u_m(t), w_j)\theta(t) \Big|_0^T - \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t) dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), w_j)\theta(t) dt \\ + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle \theta(t) dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j)\theta(t) dt \\ = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \theta(t) dt \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} (u_m(T), w_j) - \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t) dt + \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), w_j)\theta(t) dt \\ + \int_0^T \langle \mathcal{A}u_m(t), w_j \rangle \theta(t) dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j)\theta(t) dt \\ = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \theta(t) dt. \end{aligned}$$

Fixando j e tomando-se o limite com $m \rightarrow +\infty$ resulta,

$$(\xi, w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t) dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), w_j)\theta(t) dt$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \langle Au(t), w_j \rangle \theta(t) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), w_j) \theta(t) dt \\
& = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \theta(t) dt.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Por outro lado por (2.59) tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u', w_i \rangle \theta(t) dt & + \nu_0 \int_0^T \langle Au, w_j \rangle \theta(t) dt + \int_0^T \langle \chi, w_j \rangle \theta(t) dt \\
& + \int_0^T \langle Bu, w_j \rangle \theta(t) dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \theta(t) dt
\end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u', w_i \rangle \theta(t) dt & + \nu_0 \int_0^T a(u(t), w_j) \theta(t) dt + \int_0^T \langle \chi, w_j \rangle \theta(t) dt \\
& + \int_0^T b(u(t), u(t), w_j) \theta(t) dt = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \theta(t) dt
\end{aligned}$$

integrando- se por partes,

$$\begin{aligned}
(u(t), w_j) \theta(t) \Big|_0^T & - \int_0^T (u(t), w_j) \theta'(t) dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), w_j) \theta(t) dt \\
& + \int_0^T \langle \chi, w_j \rangle \theta(t) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), w_j) \theta(t) dt \\
& = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \theta(t) dt
\end{aligned}$$

desta forma

$$\begin{aligned}
(u(T), w_j) & - \int_0^T (u(t), w_j) \theta'(t) dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), w_j) \theta(t) dt \\
& + \int_0^T \langle \chi, w_j \rangle \theta(t) dt + \int_0^T b(u(t), u(t), w_j) \theta(t) dt \\
& = \int_0^T \langle f(t), w_j \rangle \theta(t) dt
\end{aligned} \tag{2.66}$$

de (2.65) e (2.66) tem- se

$$(u(T), w_j) = (\xi, w_j) \quad \forall j$$

e portanto

$$u(T) = \xi$$

logo

$$u_m(T) \rightarrow u(T) \quad \text{fraco em } H \tag{2.67}$$

assim,

$$|u(T)| \leq \liminf |u_m(T)|$$

logo,

$$|u(T)|^2 \leq \liminf |u_m(T)|^2$$

isto é,

$$-|u(T)|^2 \geq -\liminf |u_m(T)|^2$$

então,

$$-|u(T)|^2 \geq \limsup [-|u_m(T)|^2]$$

e portanto

$$-\frac{1}{2}|u(T)|^2 \geq \limsup \left(-\frac{1}{2}|u_m(T)|^2 \right). \quad (2.68)$$

Tomando-se o \limsup em ambos os membros de (2.64) e usando (2.2), (2.40) e (2.41) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle dt + \nu_0 \limsup \left(-\int_0^T a(u_m(t), u_m(t)) dt \right) + \frac{1}{2}|u(0)|^2 \\ & + \limsup \left[-\frac{1}{2}|u_m(T)|^2 \right] - \int_0^T \langle \chi, \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u(t) - \varphi \rangle dt \geq 0 \end{aligned}$$

por (2.68) tem-se

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle dt + \nu_0 \limsup \left(-\int_0^T a(u_m(t), u_m(t)) dt \right) + \frac{1}{2}|u(0)|^2 \\ & - \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \int_0^T \langle \chi, \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u(t) - \varphi \rangle dt \geq 0 \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle dt - \nu_0 \liminf \int_0^T a(u_m(t), u_m(t)) dt + \frac{1}{2}|u(0)|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 \\ & - \int_0^T \langle \chi, \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u(t) - \varphi \rangle dt \geq 0. \quad (2.69) \end{aligned}$$

De (2.59), usando as notações dos lemas (1.1), (1.2) e (1.3), faz sentido escrever

$$\langle u'(t), u(t) \rangle + \nu_0 \langle Au(t), u(t) \rangle + \langle \chi, u(t) \rangle + \langle Bu(t), u(t) \rangle = \langle f(t), u(t) \rangle$$

para toda $u \in L^4(0, T; V)$. Ou seja,

$$\langle u'(t), u(t) \rangle + \nu_0 a(u(t), u(t)) + \langle \chi, u(t) \rangle + b(u(t), u(t), u(t)) = \langle f(t), u(t) \rangle$$

assim,

$$\langle u'(t), u(t) \rangle + \nu_0 a(u(t), u(t)) + \langle \chi, u(t) \rangle = \langle f(t), u(t) \rangle$$

obté- se daí que,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + \nu_0 a(u(t), u(t)) + \langle \chi, u(t) \rangle = \langle f(t), u(t) \rangle \quad (2.70)$$

integrando- se de 0 a T ,

$$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} |u(t)|^2 dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), u(t)) dt + \int_0^T \langle \chi, u(t) \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle dt$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} |u(T)|^2 - \frac{1}{2} |u(0)|^2 + \nu_0 \int_0^T a(u(t), u(t)) + \int_0^T \langle \chi, u(t) \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle dt$$

donde

$$\begin{aligned} \nu_0 \int_0^T a(u(t), u(t)) + \int_0^T \langle \chi, u(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle dt \\ &+ \frac{1}{2} |u(0)|^2 - \frac{1}{2} |u(T)|^2 \end{aligned} \quad (2.71)$$

substituindo (2.71) em (2.69) tem- se

$$\begin{aligned} &- \liminf \nu_0 \int_0^T a(u_m(t), u_m(t)) dt + \nu_0 \int_0^T a(u(t), u(t)) dt + \int_0^T \langle \chi, u(t) \rangle dt \\ &- \int_0^T \langle \chi, \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u(t) - \varphi \rangle dt \geq 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

como pela lema (1.1)

$$\|u(t)\|^2 = a(u(t), u(t)),$$

Tem-se, integrando de 0 a T , que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt = \int_0^T a(u(t), u(t)) dt &\implies \left(\int_0^T \|u(t)\|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^T a(u(t), u(t)) dt \right)^{1/2} \\ &\implies \|u\|_{L^2(0,T;V)} = \left(\int_0^T a(u(t), u(t)) dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

desde que

$$u_m \rightarrow u \text{ fraco em } L^2(0, T; V)$$

tem-se que

$$\|u\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq \liminf \left(\|u_m\|_{L^2(0,T;V)}^2 \right)$$

ou seja

$$\int_0^T a(u(t), u(t)) dt \leq \liminf \left(\int_0^T a(u_m(t), u_m(t)) dt \right)$$

logo,

$$-\liminf \left(\int_0^T a(u_m(t), u_m(t)) dt \right) + \int_0^T a(u(t), u(t)) dt \leq 0 \quad (2.73)$$

segue-se de (2.72) e (2.73) que,

$$\int_0^T \langle \chi, u(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \chi, \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mathcal{A}\varphi, u(t) - \varphi \rangle dt \geq 0$$

ou seja,

$$\int_0^T (\langle \chi, u(t) - \varphi \rangle - \langle \mathcal{A}\varphi, u(t) - \varphi \rangle) dt \geq 0$$

assim,

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}\varphi, u(t) - \varphi \rangle dt \geq 0 \quad (2.74)$$

para toda $\varphi \in L^4(0, T; V)$.

Seja $\varphi(t) = u(t) - \lambda v(t)$, $\lambda > 0$, $v \in L^4(0, T; V)$ arbitrário. Tem-se por (2.74)

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], u(t) - (u(t) - \lambda v(t)) \rangle dt \geq 0$$

assim,

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], \lambda v(t) \rangle dt \geq 0 \quad (2.75)$$

dividindo-se (2.75) por $\lambda > 0$,

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], v(t) \rangle dt \geq 0 \quad (2.76)$$

para toda $v \in L^4(0, T; V)$.

Mostrar-se-à agora que

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], v(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \chi - Au(t), v(t) \rangle dt$$

quando $\lambda \rightarrow 0$.

Com efeito, tem-se usando o fato que $\|\mathcal{A}u(t)\|_{V'} \leq \|u(t)\|^3$ dado por (1.11) com $J'u(t) = \mathcal{A}u(t)$ e a desigualdade $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$, que

$$\begin{aligned} & \| \langle \mathcal{A}[u(s) - \lambda v(s)], v(s) \rangle \|_{L^1(0,T)} = \int_0^T | \langle \mathcal{A}[u(s) - \lambda v(s)], v(s) \rangle | ds \\ & \leq \int_0^T \| \mathcal{A}[u(s) - \lambda v(s)] \|_{V'} \|v(s)\| ds \leq \int_0^T \|u(s) - \lambda v(s)\|^3 \|v(s)\| ds \\ & \leq \int_0^T (\|u(s)\| + |\lambda| \|v(s)\|)^3 \|v(s)\| ds \leq \int_0^T 2^2 (\|u(s)\|^3 + |\lambda|^3 \|v(s)\|^3) \|v(s)\| ds \\ & = \int_0^T (C_1 \|u(s)\|^3 + C_2 \|v(s)\|^3) \|v(s)\| ds \\ & = C_1 \int_0^T \|u(s)\|^3 \|v(s)\| ds + C_2 \int_0^T \|u(s)\|^4 ds \end{aligned}$$

como $u, v \in L^4(0, T; V)$, resulta que $\|u(s)\| \in L^4(0, T)$, logo $\|u(s)\|^3 \in L^{4/3}(0, T)$ e $\|v(s)\| \in L^4(0, T)$. Segue-se então da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \| \langle \mathcal{A}[u(s) - \lambda v(s)], v(s) \rangle \|_{L^1(0,T)} & \leq C_1 \left(\int_0^T (\|u(s)\|^3)^{4/3} ds \right)^{3/4} \left(\int_0^T \|v(s)\|^4 ds \right)^{1/4} \\ & \quad + C_2 \int_0^T \|u(s)\|^4 ds \end{aligned}$$

portanto

$$\| \langle \mathcal{A}[u(s) - \lambda v(s)], v(s) \rangle \|_{L^1(0,T)} \leq K$$

isto é,

$$\langle \mathcal{A}[u(s) - \lambda v(s), v(s)] \rangle \quad \text{é integrável.} \quad (2.77)$$

Além disso, para cada $t \in [0, T]$, t fixado, tem-se pela hemicontinuidade de \mathcal{A} que

$$\langle \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t), v(t)] \rangle \rightarrow \langle \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle \quad (2.78)$$

quase sempre em $[0, T]$, quando $\lambda \rightarrow 0$.

Por outro lado, para cada $t \in [0, T]$, t fixado tem-se

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], v(t) \rangle| &\leq \|\mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)]\|_{V'} \|v\| \leq \|u(t) - \lambda v(t)\|^3 \|v\| \\ &\leq (\|u(t)\| + |\lambda| \|v(t)\|)^3 \|v(t)\| \\ &\leq 4(\|u(t)\|^3 + |\lambda|^3 \|v(t)\|^3) \|v(t)\| \\ &= C_1 \|u(t)\|^3 \|v(t)\| + C_2 \|v(t)\|^4 \end{aligned} \quad (2.79)$$

note-se que $\|u(t)\|^3 \in L^{4/3}(0, T)$ e $\|v(t)\| \in L^4(0, T)$. Assim $\|u(t)\|^3 \|v(t)\| \in L^1(0, T)$ e como $\|v(t)\|^4 \in L^1(0, T)$, resulta que o segundo membro de (2.79) é integrável quase sempre em $[0, T]$.

Segue-se então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue aplicado a (2.77) e (2.78), que

$$\int_0^T \langle \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], v(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle dt$$

portanto,

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}[u(t) - \lambda v(t)], v(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle dt \quad (2.80)$$

para toda $v \in L^4(0, T; V)$.

Por (2.76)

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle dt \geq 0 \quad \forall v \in L^4(0, T; V) \quad (2.81)$$

em particular, para $-v \in L^4(0, T; V)$. Tem-se por (2.81)

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle dt \leq 0 \quad \forall v \in L^4(0, T; V)$$

ou seja

$$0 \leq \int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle dt \leq 0 \quad \forall v \in L^4(0, T; V)$$

logo,

$$\int_0^T \langle \chi - \mathcal{A}u(t), v(t) \rangle dt = 0 \quad \forall v \in L^4(0, T; V) \quad (2.82)$$

segue-se que

$$\chi - \mathcal{A}u = 0 \quad \text{em } L^{4/3}(0, T; V')$$

portanto

$$\mathcal{A}u = \chi \quad \text{em } L^{4/3}(0, T; V') \quad (2.83)$$

■

Capítulo 3

Unicidade de Soluções

A seguir será demonstrada a unicidade de soluções do problema estudado no capítulo anterior.

O método utilizado é o da energia, usando-se os resultados obtidos pelo teorema (2.1)

Vamos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Supondo-se $n = 2, 3$,*

$$f \in L^{4/3}(0, T; V') \quad e \quad u_0 \in H,$$

então existe uma única $u : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ na classe

$$u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^4(0, T; V) \tag{3.1}$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} u' + \nu_0 Au + \mathcal{A}u + Bu &= f \quad em \quad L^{4/3}(0, T; V') \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Demonstração:

Sejam u e \hat{u} na classe (3.1) verificando (3.2) e $w = u - \hat{u}$. Tem-se:

$$u' + \nu_0 Au + \mathcal{A}u + Bu = f \tag{3.3}$$

$$\hat{u}' + \nu_0 A\hat{u} + \mathcal{A}\hat{u} + B\hat{u} = f \tag{3.4}$$

subtraindo-se (3.4) de (3.3) temos

$$w' + \nu_0(Au - A\hat{u}) + \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u} + Bu - B\hat{u} = 0 \quad \text{em } L^{4/3}(0, T; V')$$

e

$$u(0) - \hat{u}(0) = 0 \implies w(0) = 0$$

obtendo-se,

$$\begin{aligned} w' + \nu_0(Au - A\hat{u}) + \mathcal{A}u - \mathcal{A}\hat{u} + Bu - B\hat{u} &= 0 \quad \text{em } L^{4/3}(0, T; V') \\ u(0) - \hat{u}(0) &= 0 \implies w(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Faz sentido então, escrever, $\forall v \in V$

$$\begin{aligned} \langle w'(t), v \rangle + \nu_0 \langle Au(t) - A(\hat{u}(t)), v \rangle + \langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\hat{u}(t), v \rangle \\ + \langle Bu(t) - B\hat{u}(t), v \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Segue-se de (3.6), usando-se as linearidades de A e a notação do lema (1.2) que

$$\langle w'(t), v \rangle + \nu_0 \langle A(u(t) - \hat{u}(t)), v \rangle + \langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\hat{u}(t), v \rangle + \langle Bu(t) - B\hat{u}(t), v \rangle = 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle w'(t), v \rangle + \nu_0 \langle A(w(t)), v \rangle + \langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\hat{u}(t), v \rangle \\ + b(u(t), u(t), v) - b(\hat{u}(t), \hat{u}(t), v) &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como $w(t) = u(t) - \hat{u}(t)$, e deixando de escrever a variável t para facilitar a escrita, resulta

$$\begin{aligned} b(u, u, v) - b(\hat{u}, \hat{u}, v) &= b(u - \hat{u} + \hat{u}, u, v) - b(\hat{u} - u + u, \hat{u} - u + u, v) \\ &= b(w + \hat{u}, u, v) - b(-w + u, -w + u, v) \\ &= b(w, u, v) + b(\hat{u}, u, v) - [b(-w, -w + u, v) + b(u, -w + u, v)] \\ &= b(w, u, v) + b(\hat{u}, u, v) - b(-w, -w + u, v) - b(u, -w + u, v) \\ &= b(w, u, v) + b(\hat{u}, u, v) - b(-w, -w, v) - b(-w, u, v) - b(u, -w, v) - b(u, u, v) \\ &= b(w, u, v) + b(\hat{u}, u, v) - b(w, w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(u, u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b(w, u, v) + b(\widehat{u} - u, u, v) - b(w, w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) \\
&= b(w, u, v) + b(-w, u, v) - b(w, w, v) + b(w, u, v) + b(u, v, w) \\
&= b(w, u, v) - b(w, u, v) - b(w, w, v) + b(w, u, v) + b(u, w, v) \\
&= b(w, u, v) + b(u, w, v) - b(w, w, v)
\end{aligned}$$

obtendo-se

$$b(u(t), u(t), v) - b(\widehat{u}(t), \widehat{u}(t), v) = b(w(t), u(t), v) + b(u(t), w(t), v) - b(w(t), w(t), v). \quad (3.8)$$

Portanto, de (3.7) e (3.8) resulta,

$$\begin{aligned}
&\langle w'(t), v \rangle + \nu_0 \langle A(w(t)), v \rangle + \langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\widehat{u}(t), v \rangle \\
&+ b(w(t), u(t), v) + b(u(t), w(t), v) - b(w(t), w(t), v) = 0, \quad \forall v \in V. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Em particular (3.9) é válida para $v = w \in V$, isto é,

$$\begin{aligned}
&\langle w'(t), w \rangle + \nu_0 \langle A(w(t)), w \rangle + \langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\widehat{u}(t), w \rangle \\
&+ b(w(t), u(t), w) + b(u(t), w(t), w) - b(w(t), w(t), w) = 0, \quad \forall v \in V. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
b(u(t), w(t), w(t)) &= 0 \\
b(w(t), w(t), w(t)) &= 0 \quad \text{e} \\
\langle \mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}\widehat{u}(t), u(t) - \widehat{u}(t) \rangle &\geq 0
\end{aligned}$$

temos,

$$\langle w'(t), w \rangle + \nu_0 \langle \mathcal{A}w(t), w(t) \rangle + b(w(t), u(t), w(t)) \leq 0.$$

Resulta do lema (1.1) partes (i) e (ii) que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu_0 \|w(t)\|_V^2 + b(w(t), u(t), w(t)) \leq 0 \quad (3.11)$$

ou,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu_0 \|w(t)\|_V^2 \leq -b(w(t), u(t), w(t)) \leq |b(w(t), u(t), w(t))|.$$

Usando-se o fato de que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, resulta,

$$\begin{aligned}
|b(w(t), u(t), w(t))| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} w_i dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)} \right) \|w_i\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right] \|w_i\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \|w\|_{(L^4(\Omega))^n} \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \|w_i\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq \|w\|_{(L^4(\Omega))^n} \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
&= \|w\|_{(L^4(\Omega))^n} \|u\| \|w\|_{(L^4(\Omega))^n}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu_0 \|w(t)\|_V^2 \leq \|w(t)\|_{(L^4(\Omega))^n}^2 \|u(t)\|. \quad (3.12)$$

Supondo-se $n = 2$, tem-se pelo lema (1.7) que para $w_i \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|w_i\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} |w_i|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}^{1/2}$$

ou seja,

$$\|w_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq 2^{1/2} |w_i|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)}$$

resulta daí que,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^2 \|w_i\|_{L^4(\Omega)}^2 &\leq C \sum_{i=1}^2 |w_i|_{L^2(\Omega)} \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C \left(\sum_{i=1}^2 |w_i|_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^2 \|w_i\|_{H_0^1(\Omega)} \right)^{1/2} \\
&= C |w| \|w\|
\end{aligned}$$

portanto,

$$\|w\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C |w(t)| \|w(t)\|. \quad (3.13)$$

De (3.12) e (3.13) temos,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu_0 \|w(t)\|^2 \leq C |w(t)| \|w(t)\| \|u(t)\|$$

ou,

$$\frac{d}{dt} |w(t)|^2 + 2\nu_0 \|w(t)\|^2 \leq 2C |w(t)| \|w(t)\| \|u(t)\|.$$

Agora,

$$2C |w| \|w\| \|u\| \leq \frac{2\sqrt{\nu_0}}{\sqrt{2\nu_0}} 2C |w| \|w\| \|u\| = 2\sqrt{\nu_0} |w| \frac{2C}{\sqrt{2\nu_0}} |w| \|u\| \quad (3.14)$$

pois $1 \leq \frac{2\sqrt{\nu_0}}{\sqrt{2\nu_0}} = \frac{2\sqrt{\nu_0}}{\sqrt{2}\sqrt{\nu_0}} = \sqrt{2}$

Por (3.14) segue-se que,

$$\frac{d}{dt} |w(t)|^2 + 2\nu_0 \|w(t)\|_V^2 \leq 2\sqrt{\nu_0} |w|_V \frac{2C}{\sqrt{2\nu_0}} |w| \|u(t)\|_V$$

e usando a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ resulta,

$$\frac{d}{dt} |w(t)|^2 + 2\nu_0 \|w(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} 4\nu_0 |w|_V^2 + \frac{1}{2} \frac{4C^2}{2\nu_0} |w|^2 \|u(t)\|_V^2$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} |w(t)|^2 + 2\nu_0 \|w(t)\|^2 \leq 2\nu_0 \|w(t)\|_V^2 + 2\frac{C^2}{\nu_0} |w|^2 \|u(t)\|^2$$

e portanto,

$$\frac{d}{dt} |w(t)|^2 \leq 2\frac{C^2}{\nu_0} |w|^2 \|u(t)\|_V^2.$$

Fazendo-se $\theta(t) = \frac{C^2}{\nu_0} |w|^2 \|u(t)\|_V^2$ e $\varphi(t) = |w(t)|^2$, segue-se que $\theta \in L^1(0, T)$. De fato,

$$\int_0^T |\theta(t)| dt = \frac{C^2}{\nu_0} \int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt < \infty$$

pois $u \in L^2(0, T; V)$.

Desde que a norma é uma aplicação contínua temos,

$$\varphi \in C([0, T]; \mathbb{R})$$

com isso temos que

$$\varphi'(t) \leq \theta(t) \varphi(t)$$

logo,

$$\int_0^t \varphi'(s) ds \leq \int_0^t \theta(s) \varphi(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

resulta que

$$\varphi(t) - \varphi(0) \leq \int_0^t \theta(s) \varphi(s) ds$$

Notando-se que $\varphi(0) = 0$, pois $\varphi(0) = |w(0)|^2 = 0$ temos,

$$\varphi(t) \leq \int_0^t \theta(s) \varphi(s) ds \tag{3.15}$$

usando-se a desigualdade de Gronwall em (3.15) resulta,

$$\varphi(t) \leq 0 \exp\left(\int_0^t \varphi(s) ds\right)$$

ou seja,

$$\varphi(t) \leq 0.$$

Como $\varphi(t) = |w(t)|^2 \geq 0$ resulta

$$\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

e, portanto

$$w(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

mostrando que

$$u(t) = \widehat{u}(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

quando $n = 2$.

Considere-se agora $n = 3$, então se $u \in V$ tem-se que $u \in (L^6(\Omega))^3$ pois $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$.
Aplicando o lema (1.8) para o caso $s = 4$, $n = 3$ e $r = 6$, isto é,

$$\frac{2}{s} + \frac{n}{r} = 1$$

segue-se que,

$$|b(u, v, w)| \leq C \|u\|_{(L^6(\Omega))^3} \|v\| |w|^{1/2} \|w\|^{1/2}$$

desta desigualdade resulta,

$$\begin{aligned} |b(w(t), u(t), w(t))| &= |b(w(t)), w(t), u(t)| \leq C \|w\|_{(L^6(\Omega))^3} \|u(t)\| |w(t)|^{1/2} \|w(t)\|^{1/2} \\ &\leq C_1 \|w(t)\| \|u(t)\| |w(t)|^{1/2} \|w(t)\|^{1/2} \end{aligned}$$

isto é,

$$|b(w(t), u(t), w(t))| \leq C_1 \|w(t)\|^{3/2} |w(t)|^{1/2} \|u(t)\|. \quad (3.16)$$

Tem-se de (3.11) e (3.16) que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu_0 \|w(t)\|^2 \leq C_1 \|w(t)\|^{3/2} |w(t)|^{1/2} \|u(t)\|.$$

Fazendo-se $M(t) = \|u(t)\|^4$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu_0 \|w(t)\|^2 &\leq C_1 |M(t)|^{1/4} \|w(t)\|^{3/2} |w(t)|^{1/2} \\ &\leq C_1 \left(\frac{3}{4\nu_0}\right)^{3/4} |M(t)|^{1/4} |w(t)|^{1/2} \left(\frac{4\nu_0}{3}\right)^{3/4} \|w(t)\|^{3/2} \end{aligned}$$

e, como

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

segue-se da desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu_0 \|w(t)\|^2 &\leq \frac{1}{4} C_1^4 \left(\frac{3}{4\nu_0}\right)^3 |M(t)| |w(t)|^2 + \frac{3}{4} \left[\left(\frac{4\nu_0}{3}\right)^{3/4} \right]^{4/3} (\|w(t)\|^{3/2})^{4/3} \\ &\leq C_2 |M(t)| |w(t)|^2 + \nu_0 \|w(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Resulta de(3.17) que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu_0 \|w(t)\|^2 \leq C_2 |M(t)| |w(t)|^2$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 + \nu_0 \|w(t)\|^2 \leq C_2 \|u(t)\|^4 |w(t)|^2 \quad (3.18)$$

integrando-se (3.18) em $[0, T]$, resulta

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 - \frac{1}{2}|w(0)|^2 \leq \int_0^t C_2 \|u(s)\|^4 |w(s)|^2 ds$$

como $w(0) = 0$ temos,

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 \leq \int_0^t C_2 \|u(s)\|^4 |w(s)|^2 ds. \quad (3.19)$$

Fazendo-se $\varphi(t) = |w(t)|^2$ e $\theta(t) = C_2 \|u(t)\|^4 |w(t)|^2$ temos que

$$\theta \in L^1(0, T)$$

pois $u \in L^4(0, T; V)$. Desde que a norma é uma aplicação contínua temos que

$$\varphi \in C^0([0, T], \mathbb{R})$$

com isso,

$$|w(t)|^2 \leq \int_0^t \theta(s) \varphi(s) ds$$

usando-se a desigualdade de Gronwall em (3.19) resulta

$$|w(t)|^2 \leq 0$$

. Como $|w(t)|^2 \geq 0$ logo

$$w(t) = 0$$

portanto,

$$u(t) = \hat{u}(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

quando $n = 3$. ■

Apêndice A

Teorema de Aubin - Lions

No presente apêndice demonstrar-se-à o teorema de compacidade de Aubin-Lions usado na demonstração do teorema de existência de solução do sistema de Navier-Stokes, ver Aubin [1], Lions [9].

Teorema A.1. *Considera-se $1 < p_i < +\infty$, $i = 1, 2$ e $B_0 \xrightarrow{comp} B \hookrightarrow B_1$ espaços de Banach.*

Para $0 < T < +\infty$, seja

$$W = \left\{ v : v \in L^{p_0}(0, T; B_0); \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\}$$

munido da norma

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}} + \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^{p_1}}$$

resulta que W é um espaço de Banach.

Demonstração:

Seja (v_n) uma sequência de Cauchy em W . Logo,

$$\|v_n - v_m\|_W \rightarrow 0$$

se $m, n \rightarrow +\infty$. Assim,

$$\|v_n - v_m\|_W = \|v_n - v_m\|_{L^{p_0}} + \left\| \frac{dv_n}{dt} - \frac{dv_m}{dt} \right\|_{L^{p_1}}$$

desta forma,

$$\|v_n - v_m\|_{L^{p_0}} \rightarrow 0$$

e

$$\left\| \frac{dv_n}{dt} - \frac{dv_m}{dt} \right\|_{L^{p_1}} \rightarrow 0.$$

Logo (v_n) é uma sequência de Cauchy em L^{p_0} e $\left(\frac{dv_n}{dt}\right)$ é uma sequência de Cauchy em L^{p_1} . Desde que L^{p_0} e L^{p_1} são completos, temos que

$$v_n \rightarrow v \quad \text{em} \quad L^{p_0}(0, T; B_0) \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; B_1) \hookrightarrow L^{p_1}(0, T; B_1)$$

e

$$\frac{dv_n}{dt} \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^{p_1}(0, T; B_1) \implies \frac{dv_n}{dt} \rightarrow u \quad \text{em} \quad D'(0, T; B_1),$$

como

$$v_n \rightarrow v \quad \text{em} \quad D'(0, T; B_1) \implies \frac{dv_n}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} \quad \text{em} \quad D'(0, T; B_1)$$

pela unicidade do limite temos que $u = \frac{dv}{dt}$ logo,

$$\frac{dv_n}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} \quad \text{em} \quad L^{p_1}(0, T; B_1)$$

portanto

$$v_n \rightarrow v \quad \text{em} \quad W \quad \text{com} \quad v \in W$$

Mostrando que W é um espaço de Banach.

Teorema A.2. *Com as hipóteses acima sobre $B_0 \subset B \subset B_1$, $0 < p_i < +\infty$, $i = 1, 2$ resulta ser compacta a imersão de W em $L^{p_0}(0, T; B)$*

Lema A.1. *Sendo $B_0 \subset B \subset B_1$ nas condições anteriores, então para cada $\varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon)$ tal que*

$$\|u\|_B \leq \varepsilon \|u\|_{B_0} + c(\varepsilon) \|u\|_{B_1} \tag{A.1}$$

para toda $u \in B_0$

Demonstração:

Suponha falsa a conclusão do Lema (A.1). Resulta que para algum $\varepsilon > 0$ existe um vetor $u_n \in B$ tal que,

$$\|u_n\|_B > \varepsilon \|u_n\|_{B_0} + n \|u_n\|_{B_1}. \quad (\text{A.2})$$

Sendo $u_n \neq 0$ faz sentido considerar

$$w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{B_0}} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo-se (A.3) em (A.2) obtem-se,

$$\begin{aligned} \|w_n\|_B &> \varepsilon \|w_n\|_{B_0} + n \|w_n\|_{B_1} \\ &> \varepsilon \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|_{B_0}} \right\|_{B_0} + n \left\| \frac{u_n}{\|u_n\|_{B_0}} \right\|_{B_1} \\ &> \varepsilon + n \frac{\|u_n\|_{B_1}}{\|u_n\|_{B_0}} \end{aligned}$$

ou,

$$\|w_n\|_B > \varepsilon + n \|w_n\|_{B_1} \quad (\text{A.4})$$

Da continuidade de $B_0 \subset B$ tem-se que,

$$\|u_n\|_B \leq C \|u_n\|_{B_0} \implies \frac{\|u_n\|_B}{\|u_n\|_{B_0}} \leq C$$

ou seja,

$$\|w_n\|_B \leq C. \quad (\text{A.5})$$

De (A.4) e (A.5) temos,

$$\begin{aligned} \varepsilon + \eta \|w_n\|_{B_1} &< \|w_n\|_B \leq C \\ \frac{\varepsilon}{n} &< \frac{\varepsilon}{\eta} + \|w_n\|_{B_1} < \frac{\|w_n\|_B}{n} < \frac{C}{n} \end{aligned}$$

da qual resulta pelo teorema do confronto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|w_n\|_{B_1} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Sendo B_0 reflexivo e de (A.3) $\|w_n\|_{B_0} = 1$, conclui-se que existe uma subsucessão de (w_n) que converge fraco em B_0 e sendo $B_0 \subset B$ compacta, existe uma subsucessão (w_ν) que converge forte em B para um vetor w .

Da continuidade de $B_1 \subset B$, juntamente com (A.6) resulta que (w_ν) converge forte para zero em B . De fato,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|w_\nu\|_B &\leq C\|w_\nu\|_{B_1} \\ 0 \leq \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|w_\nu\|_B &\leq C \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|w_\nu\|_{B_1} \end{aligned}$$

logo,

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \|w_\nu\|_B = 0$$

pela unicidade do limite $w = 0$, o que é contraditório, porque $\|w_\nu\|_B > \varepsilon > 0$. Conclui-se a validade do Lema (A.1).

Demonstração do Teorema A.2

Dever-se-à demonstrar que de toda sucessão (v_n) limitada em W pode-se extrair uma subsucessão, ainda representada por (v_n) fortemente convergente para v em $L^{p_0}(0, T; B)$

A demonstração será feita para o caso $v = 0$, sem perda de generalidade.

Do lema (A.1), para cada $\varepsilon > 0$ existe $c(\varepsilon) > 0$ tal que,

$$\|v_n(t)\|_B \leq \varepsilon \|v_n(t)\|_{B_0} + c(\varepsilon) \|v_n(t)\|_{B_1}$$

pois $v_n \in W$. Tomando-se a norma $L^{p_0}(0, T)$ de ambos os membros, obtem-se que para cada $\eta > 0$ existe $d(\eta) > 0$ tal que,

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B)} \leq \eta \|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + d(\eta) \|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B_1)} \quad (\text{A.7})$$

sendo (v_n) limitada em W , obtém-se

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} \leq \|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \left\| \frac{dv_n}{dt} \right\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)} = \|v_n\| \leq C$$

de (A.7)

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B)} \leq \eta C + d(\eta) \|v_n\|_{L^{p_0}(0, T; B_1)}, \quad (\text{A.8})$$

sendo W reflexivo, pois B_i o são, resulta que da sucessão (v_n) extrai-se uma subsucessão (v_n) tal que,

$$v_n \rightarrow 0 \text{ fraco em } W.$$

De (A.8) e da arbitrariedade do $\eta > 0$, para demonstrar-se que (v_n) converge forte em $L^{p_0}(0, T; B)$, o que implica que a injeção de W neste espaço é compacta. É suficiente verificar que (v_n) converge forte para zero em $L^{p_0}(0, T; B_1)$. De fato, tem-se que a injeção de W em $C^0([0, T]; B_1)$ é contínua, ver Lions-Magenes [10]. Logo,

$$\|v_n(s)\|_{B_1} \leq \max_{s \in [0, T]} \|v_n(s)\|_{B_1} = \|v_n\|_{C^0([0, T]; B_1)} \leq C_0 \|v_n\|_W \leq K, \quad (\text{A.9})$$

sendo K uma constante, pois (v_n) é limitada em W .

Se demonstrarmos que $\|v_n(s)\|_{B_1}$ converge para zero quase sempre em $(0, T)$, obtém-se de (A.9) que $\|v_n\|_{B_1}^{p_0}$ é limitada e $\|v_n\|_{B_1}^{p_0}$ converge para zero em $(0, T)$. Logo o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue garante que $\|v_n\|_{B_1}^{p_0}$ converge para zero em $L^1(0, T)$, isto é, (v_n) converge para zero em $L^{p_0}(0, T; B_1)$. Assim retornando a (A.8) conclui-se que (v_n) converge em $L^{p_0}(0, T; B)$ mostrando a compacidade de W em $L^{p_0}(0, T; B)$.

Portanto resta apenas mostrar que $\|v_n(s)\|_{B_1}$ converge para zero em $(0, T)$. Limitar-se-à ao ponto $s = 0$. De fato, seja w_n definida por,

$$w_n(t) = v_n(\lambda t), \quad \lambda > 0, \quad \text{a fixar,} \quad (\text{A.10})$$

obtém-se

$$w_n(0) = v_n(0)$$

$$\|w_n(t)\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} \leq C_1 \lambda^{-\frac{1}{p_0}}$$

$$\|w'_n(t)\|_{L^{p_0}(0, T; B_1)} \leq C_2 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}}.$$

Seja $\theta \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ sendo $\theta(0) = -1$ e $\theta(T) = 0$ tem-se:

$$\int_0^T (\theta w_n)' dt = \theta(T)w_n(T) - \theta(0)w_n(0) = w_n(0)$$

assim,

$$w_n(0) = \int_0^T (\theta w_n)' dt = \int_0^T \theta w'_n dt + \int_0^T \theta' w_n dt = \beta_n + \gamma_n$$

isto é,

$$w_n(0) = \beta_n + \gamma_n$$

Resulta que,

$$\|w_n(0)\|_{B_1} \leq \|\beta_n\|_{B_1} + \|\gamma_n\|_{B_1} \leq C_3 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}} + \|\gamma_n\|_{B_1}$$

para cada $\varepsilon > 0$ considera-se $\lambda > 0$ tal que,

$$C_3 \lambda^{1-\frac{1}{p_0}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se demonstrarmos que $\|\gamma_n\|_{B_1}$ converge para zero, ou seja, se γ_n converge forte para zero em B_1 , resulta que $v_n(0) = w_n(0)$ converge forte para zero em B_1 . Assim resta mostrar que γ_n converge forte para zero em B_1 . De fato, tem-se que

$$v_n \rightarrow 0 \text{ fraco em } W$$

sendo $W \subset L^{p_0}(0, T; B_0)$ resulta que

$$v_n \rightarrow 0 \text{ fraco em } L^{p_0}(0, T; B_0)$$

logo para $\lambda > 0$ fixo, resulta que

$$w_n \rightarrow 0 \text{ fraco em } L^{p_0}(0, T; B_0)$$

seja

$$\gamma_n = \int_0^T \theta' w_n dt \quad \gamma_n \in B_0$$

para toda $\psi \in B'_0$, dual de B_0 tem-se

$$\psi(\gamma_n) = \int_0^T \theta' \psi(w_n) dt \quad \gamma_n \in B_0$$

que converge para zero. Logo γ_n converge fraco para zero em B_0 . Sendo $B_0 \subset B$ compacta, resulta que γ_n converge forte em B . ■

Enunciamos agora o Lema de Lions, resultado utilizado na demonstração do teorema de existência de soluções, cuja demonstração encontra-se em Lions [9]

Lema A.2. *Sejam Q um subconjunto limitado de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_n e g duas funções de $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$ tal que*

$$\|g_n\|_{L^q(Q)} \leq C \quad g_n \rightarrow g \text{ quase sempre em } Q$$

então

$$g_n \rightarrow g \text{ fraco em } L^q.$$

Apêndice B

Teorema de Carathéodory - Prolongamento de Solução

O resultado abordado neste apêndice é de grande importância para a solução do problema principal deste trabalho visto que, nos permite prolongar a solução. Aplicamos este resultado para mostrar a existência de soluções aproximadas, segundo Galerkin.

Seja D um subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} cujos elementos serão denotados por (t, x) , $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua. O problema é encontrar uma função absolutamente contínua $x(t)$ definida em algum intervalo da reta I tal que $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$ e

$$x' = f(t, x) \quad \text{para quase todo } t \text{ em } I \quad (\text{B.1})$$

se uma tal função $x(t)$ e um intervalo I existem, então diz-se que $x(t)$ é uma solução de (B.1) sobre I

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diz-se que as condições de Carathéodory são satisfeitas sobre D se

- i) $f(t, x)$ é mensurável em t , para cada x fixo;
- ii) $f(t, x)$ é contínua em x , para cada t fixo;
- iii) Para cada compacto K em D , existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que

$$|f(t, x)| \leq m_K(t), \quad \forall (t, x) \in D$$

Considere o retângulo

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \quad \text{com } a, b > 0$$

Teorema B.1. (*Carathéodory*)

Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R . Então, sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ ($\beta > 0$), existe uma solução do problema de valor inicial

$$(P_0) \begin{cases} X' &= f(t, X) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases}$$

Demonstração:

Seja $m(t) = m_R(t)$, isto é,

$$|f(t, x)| \leq m(t) \quad \forall (t, x) \in R. \quad (\text{B.2})$$

Consideremos o caso $t \geq t_0$, a demonstração do caso $t \leq t_0$ é semelhante.

Seja $M(t)$ definido por,

$$M(t) = 0 \quad \text{se } t_0 - a < t < t_0 \quad (\text{B.3})$$

$$M(t) = \int_{t_0}^t m(s) ds \quad \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + a \quad (\text{B.4})$$

Note que $M(t)$ é contínua e não decrescente, pois $m(t) \geq 0$ e $M(t_0) = 0$

Seja $M(t) \in \mathbb{R}^n$ então, $(t, x_0 \pm M(t)) \in R$ para algum intervalo, $t_0 \leq t \leq t_0 + \beta \leq t_0 + a$, $\beta > 0$ arbitrário. Definimos, por indução, as seguintes aproximações φ_j ($j = 1, 2, \dots$) da seguinte maneira:

$$\varphi_j(t) = x_0 \quad \text{se } t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\beta_0}{j} \quad (\text{B.5})$$

$$\varphi_j(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t - \frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s)) ds \quad \text{se } t_0 + \frac{\beta}{j} < t \leq t_0 + \beta \quad (\text{B.6})$$

Expliquemos esta definição por indução com relação as partições do intervalo $[t_0, t_0 + \beta]$.

Temos que

$$\varphi_1(t) = x_0 \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \beta).$$

Note que (B.6) define $\varphi_j(t)$ sobre $t_0 + \frac{\beta}{j} < t \leq t_0 + \frac{2\beta}{j}$, pois para qualquer t neste intervalo se tem que $t_0 < t - \frac{\beta}{j} \leq t_0 + \frac{\beta}{j}$, portanto (B.6) está bem definida.

Notamos que $\varphi_j(t)$ é contínua em $[t_0, t_0 + \frac{2\beta}{j}]$, além disso,

$$\varphi_j(t) = \int_{t_0}^{t - \frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s)) ds \implies |\varphi_j(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t - \frac{\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s)) ds \right|$$

logo,

$$|\varphi_j(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t - \frac{\beta}{j}} |f(s, \varphi_j(s))| ds \leq \int_{t_0}^{t - \frac{\beta}{j}} m(s) ds$$

por (B.1) e, portanto

$$|\varphi_j(t) - x_0| \leq M \left(t - \frac{\beta}{j} \right) \quad (\text{B.7})$$

Mostremos que $\varphi_j(t)$ é uma função contínua em $[t_0, t_0 + \beta]$. Suponhamos que para $1 < k < j$, $\varphi_j(t)$ está definida sobre $t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{k\beta}{j}$, é contínua e sobre este intervalo se tenha (B.7) então, (B.6) define $\varphi_j(t)$ para $t_0 + \frac{k\beta}{j} < t \leq t_0 + \frac{(k+1)\beta}{j}$. Também sobre $t_0 < t \leq t_0 + \frac{(k+1)\beta}{j}$ a função $\varphi_j(t)$ é contínua e vale (B.7) sobre este intervalo. Por conseguinte, por indução (B.6) define funções contínuas $\varphi_j(t)$ sobre $[t_0, t_0 + \beta]$ tal que

$$|\varphi_j(t) - x_0| \leq M \left(t - \frac{\beta}{j} \right) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \beta]$$

Sendo M contínua em $[t_0, t_0 + \beta]$, logo limitada, então existe $C > 0$ tal que $|M(t)| \leq C$, desde que

$$|\varphi_j(t) - x_0| \leq M \left(t - \frac{\beta}{j} \right)$$

segue-se que

$$|\varphi_j(t)| \leq |x_0| + C \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Mostremos agora que φ_j é equicontínua. Para isto devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer t_1, t_2 onde $|t_1 - t_2| < \delta$ tem-se que $|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| < \varepsilon$, $\forall i \in \mathbb{N}$. De fato, sabe-se que

$$|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| \leq \left| M \left(t_1 - \frac{\beta}{j} \right) - M \left(t_2 - \frac{\beta}{j} \right) \right|$$

novamente usando a continuidade de M em $[t_0, t_0 + \beta]$ vem que, M é uniformemente contínua. Logo,

$$|t_1 - t_2| = \left| \left(t_1 - \frac{\beta}{j} \right) - \left(t_2 - \frac{\beta}{j} \right) \right| < \delta \implies \left| M \left(t_1 - \frac{\beta}{j} \right) - M \left(t_2 - \frac{\beta}{j} \right) \right| < \varepsilon$$

donde segue o resultado.

Desta forma, a sequência (φ_j) está nas condições do teorema de Arzelà-Ascoli, assim existe uma subsequência (φ_{j_k}) que converge uniformemente em $[t_0, t_0 + \beta]$ para uma função contínua φ .

Resta mostrar que φ é solução do problema de valor inicial (P_0) .

Sendo $f(t, x)$ contínua em x , para cada t fixo, decorre que,

$$f(t, \varphi_{j_k}(t)) \rightarrow f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Usando (B.2) segue que $|f(t, \varphi(t))| \leq m(t)$. Desde que $m(t)$ é Lebesgue integrável, então a função f está nas condições do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, resultando que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{j_k}(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

além disso, para todo $t \in [t_0, t_0 + \beta]$ tem-se que

$$\varphi_{j_k}(t)x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{j_k}(s)) ds - \int_{t - \frac{\beta}{j_k}}^t f(s, \varphi_{j_k}(s)) ds$$

tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$ resulta que,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

assim, $\varphi(t)$ é a solução que procuramos. ■

Corolário B.1. *Seja D aberto de \mathbb{R}^{n+1} e f satisfazendo as condições de Carathéodory sobre D , então o problema de valor inicial (P_0) tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.*

Seja $\varphi(t)$ uma solução de (B.1) sobre I e $I \subset I_1$, então diz-se que $\varphi(t)$ tem um prolongamento até I_1 se existe $\varphi_1(t)$ tal que $\varphi_1(t)$ é uma solução de (B.1) sobre I_1 e $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ para todo $t \in I$

Teorema B.2. *Sejam D aberto, limitado e conexo em \mathbb{R}^{n+1} , f satisfazendo as duas primeiras condições de Carathéodory sobre D e uma função $m(t)$ integrável em D tal que $|f(t, x)| \leq m(t)$ para todo $(t, x) \in D$. Seja φ uma solução de (B.1) sobre o intervalo aberto (a, b) então,*

i) existem $\varphi(a+0)$, $\varphi(b-0)$;

ii) se $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então φ pode ser prolongada até $(a, b + \delta]$ para algum $\delta > 0$.

Análogo resultado para a ;

iii) $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, w) tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0))$, $(w, \varphi(w-0)) \in \partial D$ (fronteira de D).

Demonstração:

i) Tem-se por hipótese que $\int_a^b m(t) dt < \infty$. Seja

$$M(t) = \int_a^t m(s) ds \quad a \leq t \leq b.$$

Desde que $\varphi(t)$ é solução de (B.1) tem-se que,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad a \leq t \leq b$$

onde $t_0 \in (a, b)$ e $\varphi(t_0) = x_0$, então se $t_1, t_2 \in (a, b)$, obtém-se,

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq |M(t_2) - M(t_1)|,$$

de onde, por ser $M(t)$ contínua em $[a, b]$ o resultado (i) segue aplicando o critério de Cauchy.

ii) Definamos $\tilde{\varphi}(t)$ como,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) &= \varphi(t) \quad \text{se } t \in (a, b) \\ \tilde{\varphi}(t) &= \varphi(b-0) \quad \text{se } t = b \end{aligned}$$

tem-se que

$$\tilde{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{\varphi}(s)) ds \quad \forall t \in (a, b]$$

com t_0 e x_0 como na parte (i), pois a igualdade é verdadeira para $t \in (a, b)$ e se $t = b$, então $\tilde{\varphi}(b) = \varphi(b-0)$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(b) &= x_0 + \int_{t_0}^b f(s, \tilde{\varphi}(s)) ds = x_0 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{b-\epsilon} f(s, \tilde{\varphi}(s)) ds \\ &= x_0 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{b-\epsilon} f(s, \varphi(s)) ds = x_0 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\varphi(b-\epsilon) - \varphi(t_0)] = \varphi(b-0) \end{aligned}$$

sendo $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então, pelo teorema anterior, segue que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(b) &= \varphi(b-0) \end{cases}$$

tem solução $\psi(t)$ no intervalo $[b, b + \delta]$ para algum $\delta > 0$.

Seja

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(t) &= \widetilde{\varphi}(t) \quad \forall t \in (a, b] \\ \widehat{\varphi}(t) &= \psi(t) \quad \forall t \in (b, b + \delta] \end{aligned}$$

tem-se que

$$\widehat{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \widehat{\varphi}(s)) ds \quad \forall t \in (a, b + \delta]$$

pois a igualdade é verdadeira para $t \in (a, b]$ e se $b < t \leq b + \delta$ tem-se,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(t) &= \psi(t) = \varphi(b-0) + \int_b^t f(s, \psi(s)) ds = x_0 + \int_{t_0}^b f(s, \widetilde{\varphi}(s)) ds + \int_b^t f(s, \psi(s)) ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \widehat{\varphi}(s)) ds \end{aligned}$$

Assim, $\widehat{\varphi}(t)$ é um prolongamento de $\varphi(t)$ ao intervalo $(a, b + \delta]$.

iii) Demonstraremos para o lado direito, análoga demonstração se faz para o lado esquerdo. Se tem que $(b, \varphi(b-0)) \in D$, de onde $(b, \varphi(b-0)) \in \partial D$ ou $(b, \varphi(b-0)) \in D$.

Suponhamos que $(b, \varphi(b-0)) \in D$, então por (ii) φ pode ser prolongada até um intervalo da forma $(a, b + \delta]$ para algum $\delta > 0$.

Seja U um subconjunto de D compacto, conexo, cujo interior é diferente do vazio tal que $(t, \varphi(t)) \in U$ para todo $t \in (a, b + \delta]$. Agora se $(a, \varphi(a+0)) \in \partial D$ então escolhamos a' tal que $a < a' < b$ e trabalhamos com a' no lugar de a .

Seja $[c, d]$ a projeção de U sobre o eixo dos t e escolhamos $\epsilon > 0$ tal que a projeção de D sobre o eixo dos t contenha o intervalo $[c - \epsilon, d + \epsilon]$.

Seja

$$N(t) = \int_{c-\epsilon}^t m(s) ds \quad t \in [c - \epsilon, d + \epsilon] \quad (\text{B.8})$$

Assim existem $p, q > 0$ tais que qualquer retângulo

$$R_{s_0, y_0} : |t - s_0| \leq p; |x - y_0| \leq q$$

com (s_0, y_0) percorrendo U , está contido em D . Existe $\beta > 0$, tal que se $|t - s_0| \leq \beta$, com $t, s_0 \in [c - \epsilon, d + \epsilon]$, então

$$|N(t) - N(s_0)| = \left| \int_{s_0}^t m(s) ds \right| \leq q$$

de onde pela demonstração do teorema (B.1), para qualquer R_{s_0, y_0} sempre existe uma solução φ_{s_0, y_0} do problema de valor inicial no intervalo $[s_0, s_0 + \beta]$. Disto segue que, pela compacidade de U , depois de um número finito de passos, podemos prolongar $\varphi(t)$ até um intervalo $(a, b_U]$ tal que $(b_U, \varphi(b_U)) \notin U$.

Agora, seja (V_m) uma sucessão de conjuntos abertos de D tais que

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = D$$

\bar{V} é compacto e $\bar{V} \subset V_{m+1}$ com $m = 1, 2, \dots$. Suponhamos que $(t, \varphi(t)) \in V_{m_0}$, $t \in (a, b)$ então prolongamos φ até um intervalo $(a, b_{m_0}]$ tal que $(b_{m_0}, \varphi(b_{m_0})) \notin \bar{V}_{m_0}$. Suponhamos que $(t, \varphi(t)) \in V_{m_1}$, $t \in (a, b)$ então prolongamos φ até um intervalo $(a, b_{m_1}]$ tal que $(b_{m_1}, \varphi(b_{m_1})) \notin \bar{V}_{m_1}$, e assim sucessivamente. Desta forma consegue-se uma sucessão (b_{m_j}) não decrescente de números reais. Seja $\omega = \sup_j b_{m_j}$ então $\varphi(t)$ tem um prolongamento até (a, ω) e pela construção de ω , $(\omega, \varphi(\omega-0))$ não pode pertencer a D , daí $(\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$. Assim fica demonstrada a parte (iii) ■

Corolário B.2. *Seja $D = [0, T] \times B$, com $0 < w < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja ainda $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} X' &= f(t, X) \\ X(t_0) &= X_0, |X_0| \leq b \end{cases}$$

Suponha que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha, $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0, T]$.

Demonstração:

Pelo teorema (B.2) $\varphi(t)$ tem um prolongamento até um intervalo $[0, \omega]$ tal que $(\omega, \varphi(\omega)) \in \partial D$. Pela natureza do conjunto D , tem-se que

$$\begin{aligned} (\omega, \varphi(\omega)) &\in \Gamma_1 = \{(t, x); |x| = b, 0 \leq t < T\} \quad \text{ou} \\ (\omega, \varphi(\omega)) &\in \Gamma_2 = \{(t, x); |x| \leq b, 0 \leq t < T\}. \end{aligned}$$

Acontece que $|\varphi(t)| \leq M$ para todo $t \in I$, I intervalo qualquer onde está definido $\varphi(t)$, assim $(\omega, \varphi(\omega)) \in \Gamma_2$, donde $\omega = T$, o que prova o corolário. \blacksquare

O que faremos agora é adequar o nosso problema de forma a obtermos o prolongamento da solução.

Do problema aproximado (2.2) temos

$$\begin{cases} (u'_m(t), w_i) + \nu_0 a(u_m(t), w_j) + \langle \mathcal{A}u_m(t), w_i \rangle + \langle Bu_m(t), w_i \rangle = \langle f(t), w_j \rangle \\ u_{0m} \rightarrow u_0 \quad \text{forte em } H \end{cases}$$

Queremos mostrar, a priori, a existência de solução $u_m(t)$ em $[0, t_m]$. Temos que,

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j \quad \text{e} \\ u'_m(t) &= \sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)w_j \end{aligned}$$

assim por temos,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)w_j, w_i \right) + \nu_0 a \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j, w_i \right) + \left\langle \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j \right), w_i \right\rangle \\ + \left\langle B \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j \right), w_i \right\rangle = \langle f(t), w_i \rangle \end{aligned}$$

agora,

$$\left(\sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)w_j, w_i \right) = \sum_{j=1}^m g'_{jm}(w_j, w_i) = g'_i m(t)$$

e

$$\begin{aligned} a \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j, w_i \right) &= a(u_m(t), w_i) = ((u_m(t), w_i)) = \lambda_i(u_m(t), w_i) \\ &= \lambda_i \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j, w_i \right) = \lambda_i g_{im}(t) \end{aligned}$$

desta forma o problema aproximado fica,

$$g'_{im}(t) + \nu_0 \lambda_i g_{im}(t) + \left\langle \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \right), w_i \right\rangle + \left\langle B \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \right), w_i \right\rangle = \langle f(t), w_i \rangle$$

temos que $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é denso em V , como V é denso em H resulta que $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é denso em H .

Logo, se $u_0 \in H$ existirá

$$\xi = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} w_i \in [(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}]$$

tal que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{im} w_i \rightarrow u_0 \text{ forte em } H \quad (\text{B.9})$$

queremos também que

$$u_{0m} = \sum_{i=1}^m g_{im}(0) w_i \rightarrow u_0 \text{ forte em } H. \quad (\text{B.10})$$

Resulta de (B.9) e (B.10) que,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{im} w_i = \sum_{i=1}^m g_{im}(0) w_i \implies \sum_{i=1}^m (\alpha_{im} - g_{im}(0)) w_i = 0$$

como os w_i são linearmente independentes temos que,

$$\alpha_{im} = g_{im}(0).$$

Resulta da equação (2.2) que o sistema de equações diferenciais ordinárias é dado por,

$$\begin{cases} g'_{im}(t) + \nu_0 \lambda_i g_{im}(t) + \left\langle \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \right), w_i \right\rangle + \left\langle B \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \right), w_i \right\rangle = \langle f(t), w_i \rangle \\ j = 1, \dots, m \\ g_{im}(0) = \alpha_{im} \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix} + \nu_0 \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left\langle \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \right), w_1 \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \right), w_m \right\rangle \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \langle Bw_1, w_1 \rangle + \dots + \langle Bw_m, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Bw_1, w_m \rangle + \dots + \langle Bw_m, w_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(t), w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f(t), w_m \rangle \end{bmatrix}$$

$$\text{com } \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1m} \\ \vdots \\ \alpha_{mm} \end{bmatrix}$$

Definindo-se,

$$Z(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}; G(Z(t)) = \begin{bmatrix} \langle \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \right), w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathcal{A} \left(\sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \right), w_m \rangle \end{bmatrix}$$

$$\text{e } D = \begin{bmatrix} \langle Bw_1, w_1 \rangle + \dots + \langle Bw_m, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Bw_1, w_m \rangle + \dots + \langle Bw_m, w_m \rangle \end{bmatrix}$$

Tem-se

$$Z'(t) + \lambda Z(t) + G(Z(t)) + D Z(t) = F$$

ou seja,

$$Z'(t) + [D + \lambda] Z(t) + G(Z(t)) = F$$

assim

$$Z'(t) = F - [D - \lambda] Z(t) - G(Z(t))$$

Define-se a função auxiliar,

$$\begin{aligned} h : [0, T] \times R^{2m} &\longrightarrow R^{2m} \\ (t, Z) &\longrightarrow h(t, Z) = F - [D - \lambda] Z(t) - G(Z(t)) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} Z' &= h(t, Z) \\ Z(0) &= Z_0 \end{cases}$$

Mostra-se que h satisfaz as condições de Carathéodory em um subconjunto B de R^{2m+1} , o que resulta do teorema (B.1) que nosso problema de valor inicial acima possui uma solução. As estimativas obtidas no capítulo 2 garantem o prolongamento da solução a todo intervalo $[0, T]$, pelo corolário (B.2).

Referências Bibliográficas

- [1] Aubin, J.P., Un Théorème de Compacité, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Juin, 1963 (5042-5044)
- [2] Brézis, H., Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, ed. Masson, 1983.
- [3] De Araújo, G.M., Sobre as Equações de Navier- Stokes com Viscosidade Variável em Domínio Não Cilíndrico, Tese de Doutorado, UFRJ,2003.
- [4] De Araújo, G.M.,Milla Miranda, M.,Medeiros,L.A., On the Navier- Stokes equations with variable viscosity in a noncylindrical domain. Applicable Anaysis, vol.86, N° 3,287-313, March 2007.
- [5] Gomes, A.C., Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial para um Sistema de EDP'S Não Linear com Acoplamento na Parte Não Linear, Dissertação de Mestrado, UFPA, 2007.
- [6] Kreyszig, E., Introductory Funcional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [7] Ladyzhenskaya, O.A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, 2nd Edn, New York, London: Gordon and Beach, 1989.
- [8] Leray,J., Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois. Journal de Mathematiques Pures et Applliques., **XIII**,331-418.
- [9] Lions, J.L., Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

- [10] Lions, J.L., Magenes, E., Problèmes aux Limites non homogènes et applications, Vol.1, Dunod, Paris, 1969.
- [11] Medeiros, L.A., Milla Miranda, M., Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elícticos Não Homogêneos), Instituto de Matemática- UFRJ, 2000.
- [12] Milla Miranda, M., Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos- UFRJ, nº 28, 1990.
- [13] Medeiros, L.A., Tópicos em Equações Diferenciais Parciais- parte 1, Instituto de Matemática- UFRJ, 2005.
- [14] Tartar, L., Partial Differential Equations Models in Oceanography (Pittsburg: Carnegie Mellon University), 1999.
- [15] Temam, R., Navier- Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis (Amstendam: North- Holland Publishing Company), 1979.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)