SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Douglas de Oliveira Maia

Solução Fraca para a Equação Não-Linear do Telégrafo

Belém
ICEN - UFPA
Junho 2008

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Douglas de Oliveira Maia

Solução Fraca para a Equação Não-Linear do Telégrafo

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo

Área de Concentração: ANÁLISE

Belém

ICEN - UFPA

Junho 2008

Solução Fraca para a Equação Não-Linear do Telégrafo

por

Douglas de Oliveira Maia

Esta Dissertação foi julgada e aprovada pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Belém, ________ de ________________ de 2008.

____

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
(Coordenador do PPGME - UFPA)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo PPGME $-UFPA$ (Presidente)	Prof. Dr. Silvano Dias Bezerra de Menezes PPGME $-UFPA$ (Membro Interno I)
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira PPGME $-UFPA$ (Membro Interno II)	Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda Instituto de Matemática $-UFRJ$ (Membro Externo)

AGRADECIMENTOS

A Deus;

Aos meus pais, Lindomar Ferreira Maia e Maria de Fátima de Oliveira Maia;

Ao meu professor e orientador Prof. Dr. Geraldo Mendes de Araújo, pelo acompanhamento e revisão do meu trabalho;

A todos os professores que auxiliaram na minha formação;

A todos meus colegas do curso de mestrado, por estes anos de covivência e amizade.

Resumo

Sejam $T > 0$, Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira Γ e p um número real tal que $p > 2$ se $N = 1, 2$ e $2 < p \leq \dfrac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$.

Considere-se o problema associado a uma Equação Não-Linear do Telégrafo:

$$(P) \begin{cases} u'' + u' - \Delta u + u + |u'|^{p-2}u' = f \quad \text{em} \quad Q \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

onde Q é o cilindro do $\mathbb{R}^{N+1}$ dado por $Q = \Omega \times]0, T[$, com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$. Aqui $u' = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ e $u'' = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Neste trabalho investiga-se a existência e unicidade de soluções fracas para o problema (P), usando-se os métodos de Faedo-Galerkin, da Monotonia de Operadores e da Energia.

Palavras-chaves: Equação Não-Linear do Telégrafo, domínio cilíndrico, soluções fracas.

Abstract

Let $T > 0$, Ω a bounded open set of $\mathbb{R}^N$ with boundary Γ and p a real number where $p > 2$ if $N = 1, 2$ and $2 < p \leq \dfrac{2N}{N-2}$ if $N \geq 3$.

Consider the problem associated with a nonlinear telegraph equation:

$$(P)\begin{cases} u'' + u' - \Delta u + u + |u'|^{p-2}u' = f \quad \text{in} \quad Q \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \Sigma = \Gamma\times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega \\ u'(x, 0) = u_1(x) \quad \text{in} \quad \Omega \end{cases}$$

where Q is the cylinder of $\mathbb{R}^{N+1}$ defined by $Q = \Omega \times]0, T[$, with lateral boundary $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$. Here $u' = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ and $u'' = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

In this work we investigate the existence and uniqueness of weak solutions of problem (P). For that, we use the Faedo-Galerkin, monotone operators and energy methods.

Key Words: Nonlinear Telegraph Equation, cylindrical domain, weak solutions.

Conteúdo

Agradecimentos **i**

Resumo **ii**

Abstract **iii**

Introdução **1**

1 Resultados Preliminares **2**

1.1 Operador A 3

2 Existência e Unicidade de Soluções **6**

Bibliografia **30**

Introdução

O trabalho pretende mostrar a existência de uma solução fraca para o seguinte problema:

$$(P)\quad \begin{cases} u'' + u' - \Delta u + u + |u'|^{p-2}u' = f \quad \text{em} \quad Q = \Omega\times]0,T[\\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma\times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases}$$

sendo $p > 2$ se $N \leq 2$ e $2 < p \leq \dfrac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira regular Γ e $u : Q \to \mathbb{R}$ uma função $u = u(x,t)$ que depende de $x \in \Omega$ e $t \geq 0$.

O problema (P) refere-se a uma Equação Não-Linear do Telégrafo num espaço de dimensão N com coeficientes constantes. Este modelo é estudado em livros clássicos de Física Matemática. A motivação física para este modelo é o fluxo de eletricidade num cabo. O modelo é obtido pela aplicação da Lei de Ohm. Obtém-se uma equação para a intensidade da corrente e uma outra para o potencial elétrico. Ambas do tipo

$$a_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b_0\frac{\partial w}{\partial t} + c_0 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

No problema (P), u refere-se a corrente elétrica e f a densidade das forças externas.

Dentre a extensa bibliografia sobre este assunto, podemos citar R. Dautray, J.L. Lions [3], G.Prodi[12] e, recentemente, G.M. de Araújo, S.B. de Menezes, R.B. Gúzman [5] que mostram a existência de uma solução periódica para o sistema (P) via Regularização Elíptica.

A proposta deste trabalho é provar, através da imposição de algumas condições, a existência e a unicidade de uma solução fraca para o problema (P).

Capítulo 1

Resultados Preliminares

O problema abaixo refere-se a uma Equação Não-Linear do Telégrafo num espaço de dimensão N com coeficientes constantes.

$$(P) \left\{ \begin{array}{c} u'' + u' - \Delta u + u + |u'|^{p-2}u' = f \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times]0,T[\\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times]0,T[\\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega \end{array} \right.$$

sendo $p > 2$ se $N \leq 2$ e $2 < p \leq \dfrac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado com fronteira regular Γ e $u : Q \to \mathbb{R}$ uma função $u = u(x,t)$ que depende de $x \in \Omega$ e $t \geq 0$.

Impondo-se certas condições mostrar-se-á a existência de uma solução fraca para o sistema (P).

Definição 1 *(Solução Fraca) Dada*

$$f \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$$
$$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$
$$u_1 \in H_0^1(\Omega).$$

Uma função u na classe

$$u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$$
$$u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0,T; L^p(\Omega))$$

*é denominada **solução fraca** do problema pontual (P) se verificar*

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v)+\frac{d}{dt}(u(t),v)+((u(t),v))+(u(t),v)+\langle Au'(t),v\rangle=\langle f(t),v\rangle$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$ para todo $v\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $u(x,0)=u_0(x)$, $u'(x,0)=u_1(x)$ e $x\in\Omega$.

Na definição acima introduzimos um operador A tal que

$$Au'(t)=|u'(t)|^{p-2}u'(t).$$

Durante este trabalho consideraremos $(,)$, $|,|$, $((,))$ e $\|,\|$, respectivamente, produto interno e norma usuais em $L^2(\Omega)$ e em $H_0^1(\Omega)$. Assim,

$$\begin{aligned}
(u,v)&=\int_\Omega u(x)v(x)dx\\
|u|&=\int_\Omega |u(x)|^2dx\\
((u,v))&=\int_\Omega \nabla u\nabla v dx\\
\|u\|&=\int_\Omega |\nabla u|^2dx.
\end{aligned}$$

Consideraremos $\langle,\rangle$ um par de dualidade entre X e X', sendo X' o dual topológico de X. E escreveremos, $u'=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ e $u''=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

A seguir, provaremos algumas propriedades referentes ao operador A.

1.1 Operador A

Considere o operador

$$A:L^p(\Omega)\longrightarrow L^{p'}(\Omega)$$

definido por $Au=|u|^{p-2}u$ onde $u\in L^p(\Omega)$. Mostremos as seguintes propriedades:

Propriedade 1: A **é monótono.**

Seja $\theta(\lambda)=|\lambda|^{p-2}\lambda$. Logo, $\theta'(\lambda)=(p-1)|\lambda|^{p-2}\geq 0$, pois, $p>2$. Assim, concluímos que A é crescente. Daí, dados $u,v\in L^p(\Omega)$ tem-se que

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_\Omega \left[|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right][u-v]\,dx \geq 0.$$

Portanto, A é monótono.

Propriedade 2: A **é limitado.**

Sejam $u, v \in L^p(\Omega)$, então,

$$\begin{aligned}|\langle Au, v\rangle| &= \left|\int_\Omega |u|^{p-2}uvdx\right| \\ &\leq \int_\Omega |u|^{p-2}|u||v|dx \\ &= \int_\Omega |u|^{p-1}|v|dx\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder e observando que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow p = p'(p-1)$$

tem-se que

$$\begin{aligned}|\langle Au, v\rangle| &\leq \left(\int_\Omega (|u|^{p-1})^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1} \|v\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

Portanto, A é limitado.

Propriedade 3: A **é hemicontínuo.**

Lembremos que

$$Au = |u|^{p-2}u.$$

Para mostrar que A é hemicontínuo, prova-se que

$$\lambda \mapsto \langle A(u + \lambda v), w\rangle$$

é contínua para quaisquer $u, v, w \in L^p(\Omega)$ fixos, porém, arbitrários.

Assim, seja λ_n uma sucessão real tal que $\lambda_n \to \lambda_0 \in \mathbb{R}$ quando $n \to \infty$. Daí,

$$\begin{aligned}
&\langle A(u+\lambda_n v), w\rangle - \langle A(u+\lambda_0 v), w\rangle = \int_\Omega |u(x)+\lambda_n v(x)|^{p-2}(u(x)+\lambda_n v(x))w(x)dx \\
&- \int_\Omega |u(x)+\lambda_0 v(x)|^{p-2}(u(x)+\lambda_0 v(x))w(x)dx \\
&= \int_\Omega [|u(x)+\lambda_n v(x)|^{p-2}(u(x)+\lambda_n v(x)) - |u(x)+\lambda_0 v(x)|^{p-2}(u(x)+\lambda_0 v(x))]w(x)dx.
\end{aligned}$$

Seja $\theta(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, então,

$$\theta(\xi) - \theta(\eta) = (p-1)|\xi^*|^{p-2}(\xi - \eta)$$

para algum ξ^*. Aplicando este resultado com $\xi = u(x) - \lambda_n v(x)$ e $\eta = u(x) + \lambda_0 v(x)$ resulta que

$$\begin{aligned}
&|\langle A(u+\lambda_n v), w\rangle - \langle A(u+\lambda_0 v), w\rangle| = |(p-1)\int_\Omega |\xi^*|^{p-2}(\lambda_n - \lambda_0)v(x)w(x)dx \\
&\leq (p-1)\int_\Omega [|u(x)+|\lambda_n||v(x)|+|u(x)|+|\lambda_0||v(x)|]^{p-2}\,|\lambda_0-\lambda_0||v(x)||w(x)|dx \\
&\leq |\lambda_n-\lambda_0|C\left[\int_\Omega |u(x)|^{p-2}|v(x)||w(x)|dx + \int_\Omega |u(x)|^{p-2}|v(x)||w(x)|dx\right] \\
&\leq |\lambda_n-\lambda_0|C\left(\int_\Omega \left(|u(x)|^{p-2}\right)^{\frac{p}{p-2}}dx\right)^{\frac{p-2}{p}}\left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |w(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+|\lambda_n-\lambda_0|C\left(\int_\Omega \left(|v(x)|^{p-2}\right)^{\frac{p}{p-2}}dx\right)^{\frac{p-2}{p}}\left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |w(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda_n-\lambda_0|C\left[\|u\|^{p-2}_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)}\|w\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|^{p-2}_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)}\|w\|_{L^p(\Omega)}\right] \longrightarrow 0, \quad se \quad n \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, A é hemicontínuo.

Propriedade 4: A **é coercivo.**

Observe que para $u \in L^p(\Omega)$ tem-se que

$$\langle Au, u\rangle = \int_\Omega |u|^{p-2}uudx = \int_\Omega |u|^p dx = \|u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

o que demonstra a propriedade. ■

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções

Neste capítulo mostraremos a existência e a unicidade de uma soluçõa fraca para o problema (P). Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 1 *Sejam*

$$
\begin{aligned}
& p > 2 \ \textit{se} \ N \leq 2 \\
& 2 < p \leq \frac{2N}{N-2} \ \textit{se} \ N \geq 3 \\
& f \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \\
& u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\
& u_1 \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Então, existe uma única $u : Q \to \mathbb{R}$ na classe

$$
\begin{aligned}
& u \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\
& u' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0,T; L^p(\Omega))
\end{aligned}
$$

satisfazendo

$$
\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}(u'(t), v) + \dfrac{d}{dt}(u(t), v) + ((u(t), v)) + (u(t), v) + \langle Au'(t), v \rangle = \langle f(t), v \rangle \\
\textit{em} \quad \mathcal{D}'(0,T) \quad \textit{para todo} \quad v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\
u = 0 \quad \textit{em} \quad \Sigma \\
u(x,0) = u_0(x) \\
u'(x,0) = u_1(x).
\end{cases}
$$

Demonstração: (Existência)

Para mostrar a existência da solução, usaremos o método de Faedo-Galerkin. Para isto consideraremos (w_ν) a base de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ constituída de vetores próprios de $-\Delta$ com respectivos valores próprios λ_ν. Seja $V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ o subespaço gerado pelos m primeiros vetores da (w_ν) e

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \tag{2.1}$$

solução do problema aproximado

$$\begin{cases} (u''_m(t), w_j) + (u'_m(t), w_j) + ((u_m(t), w_j)) + (u_m(t), w_j) + \langle A u'_m(t), w_j \rangle = \langle f(t), w_j \rangle \\ j = 1, 2, \ldots, m \\ u_{0m} \to u_0 \quad \text{forte em} \quad H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ u_{1m} \to u_1 \quad \text{forte em} \quad H_0^1(\Omega) \\ u_m(0) = u_{om} \quad \text{e} \quad u'_m(0) = u_{1m} \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $\langle A u'_m(t), w_j \rangle = \langle |u'_m(t)|^{p-2} u'_m(t), w_j \rangle$.

O sistema aproximado (2.2) possui solução $u_m(t)$ em $[0, t_m[$, $t_m > 0$ e as estimativas que serão obtidas permitirão estender a solução a todo intervalo $[0, T]$, usando o Teorema de Carathéodory.

Estimativas á Priori

Estimativa I

Por (2.1) tem-se que

$$u'_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) w_j. \tag{2.3}$$

Multiplicando (2.2) por $g'_{jm}(t)$ e somando de $j = 1$ a $j = m$ obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} [(u''_m(t), g'_{jm}(t) w_j) \quad &+ \quad (u'_m(t), g'_{jm}(t) w_j) + ((u_m(t), g'_{jm}(t) w_j)) + (u_m(t), g'_{jm}(t) w_j) \\ &+ \quad (|u'_m(t)|^{p-2} u'_m(t), g'_{jm}(t) w_j)] = \sum_{j=1}^{m} [(f, g'_{jm}(t) w_j)]. \end{aligned}$$

Assim, por (2.3) tem-se que

$$\begin{aligned}(u''_m(t), u'_m(t)) &+ (u'_m(t), u'_m(t)) + ((u_m(t), u'_m(t))) + (u_m(t), u'_m(t)) \\ &+ \langle Au'_m(t), u'_m(t)\rangle = \langle f(t), u'_m(t)\rangle. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Observando que

$$\begin{aligned}(u''_m(t), u'_m(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 \\ (u'_m(t), u'_m(t)) &= |u'_m(t)|^2 \\ ((u_m(t), u'_m(t))) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 \\ (u_m(t), u'_m(t)) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 \\ \langle Au'_m(t), u'_m(t)\rangle &= \|u'_m(t)\|^p_{L_p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Assim, tem-se em (2.4) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^p_{L_p(\Omega)} = \langle f(t), u'_m(t)\rangle.$$

Como $f \in L^2(0, T; H^1_0(\Omega))$, logo, $f \in L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega))$. Então, pode-se escrever

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 &+ |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 \\ &+ \|u'_m(t)\|^p_{L_p(\Omega)} \le \|f(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} \cdot \|u'_m(t)\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Multiplicando e dividindo o lado direito da desigualdade acima por $\left(\frac{2}{p}\right)^{1/p}$, obtém-se

$$\|f(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} \cdot \|u'_m(t)\|_{L^p(\Omega)} = \left(\frac{2}{p}\right)^{1/p} \cdot \|f(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{1/p} \cdot \|u'_m(t)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Assim, pela Desigualdade de Young, tem-se que

$$\begin{aligned}\|f(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} \cdot \|u'_m(t)\|_{L^p(\Omega)} &\le \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{p'}{p}} \frac{\|f(t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}}{p'} + \left(\frac{p}{2}\right) \frac{\|u'_m(t)\|^p_{L_p(\Omega)}}{p} \\ &= \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{p'}{p}} \frac{\|f(t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}}{p'} + \frac{\|u'_m(t)\|^p_{L_p(\Omega)}}{2}.\end{aligned}$$

Fazendo $\frac{C}{2} = \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{p'}{p}} . \frac{1}{p'}$, (2.5) torna-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 &+ |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 \\ &+ \|u'_m(t)\|^p_{L_p(\Omega)} \le \frac{C}{2}\|f(t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|^p_{L_p(\Omega)}.\end{aligned}$$

E, portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m'(t)|^2 \;+\; |u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2$$
$$+\; \frac{1}{2}\|u_m'(t)\|^p_{L_p(\Omega)} \leq \frac{C}{2}\|f(t)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Desta forma, multiplicando a desigualdade acima por 2 e integrando de 0 a t, com $t \in [0, t_m[$, temos

$$\int_0^t \frac{d}{ds}|u_m'(s)|^2 ds + 2\int_0^t |u_m'(s)|^2 ds + \int_0^t \frac{d}{ds}\|u_m(s)\|^2 ds + \int_0^t \frac{d}{ds}|u_m(s)|^2 ds$$
$$+ \int_0^t \|u_m'(s)\|^p_{L_p(\Omega)} ds \leq C\int_0^t \|f(s)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} ds.$$

Assim,

$$|u_m'(t)|^2 - |u_m'(0)|^2 + 2\int_0^t |u_m'(s)|^2 ds + \|u_m(t)\|^2 - \|u_m(0)\|^2 + |u_m(t)|^2 - |u_m(0)|^2$$
$$+ \int_0^t \|u_m'(s)\|^p_{L_p(\Omega)} ds \leq C\int_0^t \|f(s)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} ds.$$

Daí, tem-se que

$$|u_m'(t)|^2 + 2\int_0^t |u_m'(s)|^2 ds + \|u_m(t)\|^2 + |u_m(t)|^2 + \int_0^t \|u_m'(s)\|^p_{L_p(\Omega)} ds \leq |u_m'(0)|^2 + \|u_m(0)\|^2$$
$$+ |u_m(0)|^2 + C\int_0^t \|f(s)\|^{p'}_{L^{p'}(\Omega)} ds < \infty$$

pois,

$$f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$$

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ forte em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \text{ logo}, \|u_m(0)\| < K_1$$

$$\text{logo}, |u_m(0)| < K_2$$

$$u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 \text{ em } H_0^1(\Omega), \text{ logo}, \|u_m'(0)\| < K_3$$

$$\text{logo}, |u_m'(0)| < K_4.$$

Assim, obtém-se

$$u_m' \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.6}$$

$$u_m' \text{ é limitado em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.7}$$

$$u_m \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.8}$$

$$u_m \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.9}$$

$$u_m' \text{ é limitado em } L^p(0,T;L^p(\Omega)). \tag{2.10}$$

Agora, note que, pelo fato de A ser limitado, tem-se para $u, v \in L^p(\Omega)$ que

$$|\langle Au, v\rangle| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Logo,

$$\|Au_m'(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle Au_m'(t), v(t)\rangle| \leq \sup_{\|v\|\leq 1} \|u_m'(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\|v(t)\|_{L^p(\Omega)}.$$

Daí, resulta que

$$\|Au_m'(t)\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|u_m'(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}.$$

E, assim, tem-se que

$$\|Au_m'(t)\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \leq \|u_m'(t)\|_{L^p(\Omega)}^{(p-1)p'}.$$

Lembrando que $(p-1)p' = p$, obtém-se

$$\|Au_m'(t)\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} \leq \|u_m'(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p}.$$

E, portanto,

$$\int_0^T \|Au_m'(t)\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} dt \leq \int_0^T \|u_m'(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p} dt < \infty$$

pois, u_m' é limitado em $L^p(0,T,L^p(\Omega))$. Portanto,

$$Au_m' \text{ é limitado em } L^{p'}(0,T,L^{p'}(\Omega)). \tag{2.11}$$

Estimativa II

Sejam $-\Delta w_j = \lambda_j w_j$. Visto que $u'_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t) w_j$, tem-se que

$$-\Delta u'_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)(-\Delta w_j) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\lambda_j w_j. \tag{2.12}$$

Multiplicando (2.2) por $g'_{jm}(t)\lambda_j$ e somando de $j = 1$ a $j = m$, obtém-se

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} [(u''_m(t), g'_{jm}(t)\lambda_j w_j) + (u'_m(t), g'_{jm}(t)\lambda_j w_j) + ((u_m(t), g'_{jm}(t)\lambda_j w_j)) \\ + \quad & (u_m(t), g'_{jm}(t)\lambda_j w_j) + (|u'_m(t)|^{p-2} u'_m(t), g'_{jm}(t)\lambda_j w_j)] = \sum_{j=1}^{m} [(f, g'_{jm}(t)\lambda_j w_j)]. \end{aligned}$$

Logo, por (2.12) pode-se escrever

$$\begin{aligned} (u''_m(t), -\Delta u'_m(t)) + (u'_m(t), -\Delta u'_m(t)) + ((u_m(t), -\Delta u'_m(t))) + (u_m(t), -\Delta u'_m(t)) \\ + (|u'_m(t)|^{p-2} u'_m(t), -\Delta u'_m(t)) = (f(t), -\Delta u'_m(t)). \end{aligned}$$

Daí, tem-se que

$$\begin{aligned} ((u''_m(t), u'_m(t))) + ((u'_m(t), u'_m(t))) + ((u_m(t), -\Delta u'_m(t))) + ((u_m(t), u'_m(t))) \\ + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (|u'_m(t)|^{p-2} u'_m(t)) \right] \frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i} dx = ((f(t), u'_m(t))). \end{aligned}$$

E, assim, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 + \|u'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 \\ + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left[(p-1)|u'_m(t)|^{p-2} \frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i} \right] \frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i} dx = ((f(t), u'_m(t))). \end{aligned}$$

Observando que $\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left[(p-1)|u'_m(t)|^{p-2} \frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i} \right] \frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i} dx \geq 0$, tem-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 + \|u'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 \leq ((f(t), u'_m(t))).$$

Integrando de 0 a t, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\|u'_m(s)\|^2 ds + \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}|\Delta u_m(s)|^2 ds \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\|u_m(s)\|^2 ds \leq \int_0^t ((f(s), u'_m(s)))ds. \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\frac{1}{2}\|u'_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u'_m(0)\|^2 + \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}|\Delta u_m(t)|^2 - \frac{1}{2}|\Delta u_m(0)|^2$$
$$+ \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 \leq \frac{1}{2}\int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds.$$

E, portanto,

$$\frac{1}{2}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}|\Delta u_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|u_{1m}\|^2 + \frac{1}{2}|\Delta u_{0m}|^2$$
$$+ \frac{1}{2}\|u_{0m}\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|f(s)\|^2 ds < \infty.$$

Obtém-se, desse modo, as seguintes estimativas

$$u'_m \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.13}$$

$$u'_m \text{ é limitado em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.14}$$

$$u_m \text{ é limitado em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)). \tag{2.15}$$

Observando que $\|u_m(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C|\Delta u_m(t)|$ e $|\Delta u_m(t)| \leq K$, segue que u_m é limitado em $L^\infty(0,T,H^2(\Omega))$.

Assim, por (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), (2.11),(2.13),(2.14) e (2.15) tem-se que

$$u'_m \longrightarrow u' \text{ fraco } * \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.16}$$

$$u'_m \longrightarrow u' \text{ fraco em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.17}$$

$$u_m \longrightarrow u \text{ fraco } * \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.18}$$

$$u_m \longrightarrow u \text{ fraco } * \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.19}$$

$$u'_m \longrightarrow u' \text{ fraco em } L^p(0,T;L^p(\Omega)) \tag{2.20}$$

$$Au'_m \longrightarrow \chi \text{ fraco em } L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)) \tag{2.21}$$

$$u'_m \longrightarrow u' \text{ fraco } * \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.22}$$

$$u'_m \longrightarrow u' \text{ fraco em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.23}$$

$$u_m \longrightarrow u \text{ fraco } * \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)). \tag{2.24}$$

Seja $\theta \in \mathcal{D}(O,T)$, então, por (2.17) obtém-se

$$\int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), w_j)\theta(t)dt. \tag{2.25}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_m''(t), w_j)\theta(t)dt &= (u_m'(t), w_j)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt \\ &= -\int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt.\end{aligned}$$

Mas, como

$$-\int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt \longrightarrow -\int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)dt.$$

E, por sua vez

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)dt &= -(u'(t), w_j)\theta(t)\Big|_0^T + \int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)dt \\ &= \int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)dt.\end{aligned}$$

Resulta que

$$\int_0^T (u_m''(t), w_j)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)dt. \tag{2.26}$$

Por (2.18) obtém-se

$$\int_0^T ((u_m(t), w_j))\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T ((u(t), w_j))\theta(t)dt. \tag{2.27}$$

Por (2.19) obtém-se

$$\int_0^T (u_m(t), w_j)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w_j)\theta(t)dt. \tag{2.28}$$

Por (2.23) obtém-se

$$\int_0^T ((u_m'(t), w_j))\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T ((u'(t), w_j))\theta(t)dt. \tag{2.29}$$

E por (2.21) obtém-se

$$\int_0^T \langle Au_m'(t), w_j\rangle\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle\theta(t)dt. \tag{2.30}$$

Agora, observe o seguinte

$$u' \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)),$$

pois, $p > 2$ e, portanto, $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$.

Observe, também, que

$$\chi \in L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)),$$

$$u \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$$

$$f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$$

$$-\Delta u \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)).$$

Assim, tem-se que

$$u'' + u' - \Delta u + u + \chi = f \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;L^{p'}(\Omega)),$$

isto é,

$$u'' = f - u' + \Delta u - u - \chi \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;L^{p'}(\Omega)).$$

Como o segundo membro está em $L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$, resulta que a função u'' pode ser identificada por uma função de $L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$. Assim, tem-se que

$$u'' + u' - \Delta u + u + \chi = f \text{ em } L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)). \tag{2.31}$$

Agora, verifiquemos os dados inicias.

Note que

$$\begin{aligned} u' &\in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u'' &\in L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

implica que

$$u' \in C^0([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) H^2(\Omega)) \subset L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T; H_0^1(\Omega)) \\ u' &\in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T; H_0^1(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T; H^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

implica que

$$u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Logo, faz sentido calcular u e u' em 0 e T.

Agora, mostrar-se-á que $u(0) = u_0$.

Seja $\theta \in C^1[0,T]$ com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Da Equação Aproximada obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_m''(t), w_j)\theta'(t)dt \;&+\; \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u_m(t), w_j))\theta' dt + \int_0^T (u_m, w_j)\theta'(t)dt \\ &+\; \int_0^T \langle A u_m'(t), w_j\rangle \theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \theta'(t)dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes o terceiro termo, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_m''(t), w_j)\theta'(t)dt \;&+\; \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt + ((u_m(t), w_j))\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T ((u_m'(t), w_j))\theta(t)dt \\ &+\; \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle A u_m'(t), w_j\rangle \theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \theta' dt. \end{aligned}$$

Daí, resulta que

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u_m''(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt - ((u_m(0), w_j)) - \int_0^T ((u_m'(t), w_j))\theta(t)dt \\ +\; &\int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle A u_m'(t), w_j\rangle \theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \theta'(t)dt. \end{aligned}$$

Fixando j e tomando o limite quando $m \to \infty$, tem-se que

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u''(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)dt - \lim_{m\to\infty} ((u_m(0), w_j)) - \int_0^T ((u'(t), w_j))\theta(t)dt \\ +\; &\int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle \theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \theta'(t)dt. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Agora, multiplicando (2.31) por $w_j\theta' \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$ e integrando de 0 a T, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle u''(t),w_j\rangle\theta'(t)dt &+ \int_0^T \langle u'(t),w_j\rangle\theta'(t)dt + \int_0^T \langle -\Delta u(t),w_j\rangle\theta'(t)dt + \int_0^T \langle u(t),w_j\rangle\theta'(t)dt\\ &+ \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta'(t)dt,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t),w_j)\theta'(t)dt &+ \int_0^T (u'(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u(t),w_j))\theta'(t)dt\\ &+ \int_0^T (u(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta'(t)dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes o terceiro termo, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t),w_j)\theta'(t)dt &+ \int_0^T (u'(t),w_j)\theta'(t)dt + ((u(t),w_j))\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T ((u'(t),w_j))\theta(t)dt\\ &+ \int_0^T (u(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta'(t)dt.\end{aligned}$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t),w_j)\theta'(t)dt &+ \int_0^T (u'(t),w_j)\theta'(t)dt - ((u(0),w_j)) - \int_0^T ((u'(t),w_j))\theta(t)dt\\ &+ \int_0^T (u(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta'(t)dt.\end{aligned} \tag{2.33}$$

De (2.32) e (2.33), resulta que $\lim_{m\to\infty}((u_m(0),w_j)) = ((u(0),w_j))$, $\forall j$. Como $u_{0m} = u_m(0) \longrightarrow u_0$ forte em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, tem-se pela unicidade do limite que

$$u(0) = u_0.$$

Agora, mostrar-se-á que $u'(0) = u_1$.

Seja $\theta \in C^1[0,T]$ com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Da Equação Aproximada, obtém-se que

$$\begin{aligned}&\int_0^T (u''_m(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (u'_m(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_m(t),w_j))\theta(t)dt\\ + &\int_0^T (u_m(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle Au'_m(t),w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes o primeiro termo, tem-se que

$$\begin{aligned}(u_m'(t),w_j)\theta(t)\Big|_0^T &- \int_0^T (u_m'(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u_m'(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_m(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u_m(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle Au_m'(t),w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt.\end{aligned}$$

Como, por definição, $\theta(0)=1$ e $\theta(T)=0$, tem-se que

$$\begin{aligned}-(u_m'(0),w_j) &- \int_0^T (u_m'(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u_m'(t),w_j)\theta dt + \int_0^T ((u_m(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u_m(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle Au_m'(t),w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt.\end{aligned}$$

Fixando j e tomando o limite quando $m\to\infty$, obtém-se

$$\begin{aligned}-\lim_{m\to\infty}(u_m'(0),w_j) &- \int_0^T (u'(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u'(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt. \quad (2.34)\end{aligned}$$

Agora, seja $\theta w_j \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$, sendo, novamente, $\theta\in C^1[0,T]$ com $\theta(0)=1$ e $\theta(T)=0$. multiplicando (2.31) por θw_j e integrando de 0 a T, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle u''(t),w_j\rangle\theta(t)dt &+ \int_0^T \langle u'(t),w_j\rangle\theta(t)dt + \int_0^T \langle -\Delta u(t),w_j\rangle\theta(t)dt + \int_0^T \langle u(t),w_j\rangle\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes o primeiro termo, tem-se que

$$\begin{aligned}(u'(t),w_j)\theta(t)\Big|_0^T &- \int_0^T (u'(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u'(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt.\end{aligned}$$

Daí, obtém-se

$$\begin{aligned}-(u'(0),w_j) &- \int_0^T (u'(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u'(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt. \qquad (2.35)\end{aligned}$$

De (2.34) e (2.35) resulta que $\lim_{m\to\infty}(u_m'(0),w_j)=(u'(0),w_j)$, $\forall j$. Como $u_{1m}=u_m'(0)\to u_1$ forte em $H_0^1(\Omega)$, tem-se pela unicidade do limite que

$$u'(0)=u_1.$$

Agora, mostrar-se-á que $Au'(t) = \chi$.

Como A é monótono, tem-se que para toda $\varphi \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$

$$\int_0^T \langle Au'_m(t) - A\varphi, u'_m(t) - \varphi \rangle dt \geq 0,$$

isto é,

$$\int_0^T \langle Au'_m(t), u'_m(t) - \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle A\varphi, u'_m(t) - \varphi \rangle dt \geq 0,$$

portanto,

$$\int_0^T \langle Au'_m(t), u'_m(t) \rangle dt - \int_0^T \langle Au'_m(t), \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle A\varphi, u'_m(t) - \varphi \rangle dt \geq 0 \tag{2.36}$$

$\forall \varphi \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$.

Da Equação Aproximada, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^T (u''_m(t), u'_m(t))dt \quad &+ \quad \int_0^T (u'_m(t), u'_m(t))dt + \int_0^T ((u_m(t), u'_m(t)))dt + \int_0^T (u_m(t), u'_m(t))dt \\ &+ \quad \int_0^T \langle Au'_m(t), u'_m(t) \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u'_m(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Daí, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 dt \quad &+ \quad \int_0^T |u'_m(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 dt \\ &+ \quad \int_0^T \langle Au'_m(t), u'_m(t) \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u'_m(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u'_m(T)|^2 \quad &- \quad \frac{1}{2}|u'_m(0)|^2 + \int_0^T |u'_m(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\|u_m(T)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 + \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 \\ &- \quad \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 + \int_0^T \langle Au'_m(t), u'_m(t) \rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u'_m(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle Au'_m(t), u'_m(t) \rangle dt \quad &= \quad \int_0^T \langle f(t), u'_m(t) \rangle dt - \frac{1}{2}|u'_m(T)|^2 + \frac{1}{2}|u'_m(0)|^2 - \int_0^T |u'_m(t)|^2 dt \\ &- \quad \frac{1}{2}\|u_m(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 - \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Substituindo (2.37) em (2.36), obtém-se

$$\int_0^T \langle f(t), u_m'(t)\rangle dt - \frac{1}{2}|u_m'(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_m'(0)|^2 - \int_0^T |u_m'(t)|^2 dt - \frac{1}{2}\|u_m(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2$$
$$- \frac{1}{2}|u_m(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2 - \int_0^T \langle Au_m'(t), \varphi\rangle dt - \int_0^T \langle A\varphi, u_m'(t) - \varphi\rangle dt \geq 0. \quad (2.38)$$

De (2.16) tem-se que existe $\xi \in L^2(\Omega)$ tal que

$$u_m'(T) \longrightarrow \xi \text{ fraco em } L^2(\Omega).$$

Mostrar-se-á que $u'(T) = \xi$.

Seja $\theta \in C^1[0,T]$ com $\theta(T) = 1$ e $\theta(0) = 0$. Da Equação Aproximada, obtém-se

$$\int_0^T (u_m''(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_m(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle Au_m'(t), w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\theta(t)dt.$$

Integrando por partes o primeiro termo, resulta que

$$(u_m'(t), w_j)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_m(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle Au_m'(t), w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\theta(t)dt.$$

Como, por definição, $\theta(T) = 1$ e $\theta(0) = 0$, tem-se que

$$(u_m'(T), w_j) - \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta dt + \int_0^T ((u_m(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle Au_m'(t), w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\theta(t)dt.$$

Fixando j e tomando o limite quando $m \to \infty$, obtém-se

$$\lim_{m\to\infty}(u_m'(T), w_j) - \int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u'(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u(t), w_j))\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (u(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\theta(t)dt. \quad (2.39)$$

Agora, seja $\theta w_j \in L^p(0,T; L^p(\Omega))$ sendo, novamente, $\theta \in C^1[0,T]$ com $\theta(T) = 1$ e $\theta(0) = 0$. Multiplicando (2.31) por θw_j e integrando de 0 a T, obtém-se

$$\int_0^T \langle u''(t), w_j\rangle\theta(t)dt + \int_0^T \langle u'(t), w_j\rangle\theta(t)dt + \int_0^T \langle -\Delta u(t), w_j\rangle\theta(t)dt + \int_0^T \langle u(t), w_j\rangle\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\theta(t)dt.$$

Integrando por partes o primeiro termo, tem-se que

$$\begin{aligned}(u'(t),w_j)\theta(t)\Big|_0^T &- \int_0^T (u'(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u'(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle \theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle \theta(t)dt.\end{aligned}$$

Daí, resulta que

$$\begin{aligned}(u'(T),w_j) &- \int_0^T (u'(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u'(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle \theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle \theta(t)dt. \qquad (2.40)\end{aligned}$$

Logo, por (2.39) e (2.40) tem-se que

$$\lim_{m\to\infty} (u'_m(T),w_j) = (u'(T),w_j), \ \forall j.$$

Como $u'_m(T) \longrightarrow \xi$ fraco em $L^2(\Omega)$. tem-se pela unicidade do limite que

$$u'(T) = \xi.$$

Portanto,

$$u'_m(T) \longrightarrow u'(T) \text{ fraco em } L^2(\Omega). \qquad (2.41)$$

Por (2.19) existe $\alpha \in L^2(\Omega)$, tal que

$$u_m(T) \longrightarrow \alpha \text{ fraco em } L^2(\Omega).$$

Mostrar-se-á que $u(T) = \alpha$.

Seja $\theta \in C^1[0,T]$ com $\theta(T) = 1$ e $\theta(0) = 0$. Da Equação Aproximada, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''_m(t),w_j)\theta(t)dt &+ \int_0^T (u'_m(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_m(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u_m(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle Au'_m(t), w_j\rangle \theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle \theta(t)dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes o segundo termo, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''_m(t),w_j)\theta(t)dt &+ (u_m(t),w_j)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u_m(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u_m(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u_m(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle Au'_m(t), w_j\rangle \theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle \theta(t)dt.\end{aligned}$$

Daí, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_m''(t),w_j)\theta(t)dt &+ (u_m(T),w_j) - \int_0^T (u_m(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u_m(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u_m(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle A u_m'(t),w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt.\end{aligned}$$

Fixando j e tomando o limite quando $m \to \infty$, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t),w_j)\theta(t)dt &+ \lim_{m\to\infty}(u_m(T),w_j) - \int_0^T (u(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Multiplicando (2.31) por $\theta w_j \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$ e integrando de 0 a T, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle u''(t),w_j\rangle\theta(t)dt &+ \int_0^T \langle u'(t),w_j\rangle\theta(t)dt + \int_0^T \langle -\Delta u(t),w_j\rangle\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T \langle u(T),w_j\rangle\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes o segundo termo, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t),w_j)\theta(t)dt &+ (u(t),w_j)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt.\end{aligned}$$

Daí, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t),w_j)\theta(t)dt &+ (u(T),w_j) - \int_0^T (u(t),w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u(t),w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T \langle \chi,w_j\rangle\theta(t)dt = \int_0^T \langle f(t),w_j\rangle\theta(t)dt.\end{aligned} \tag{2.43}$$

De (2.42) e (2.43) tem-se que

$$\lim_{m\to\infty}(u_m(T),w_j) = (u(T),w_j),\ \forall j.$$

Como $u_m(T) \longrightarrow \alpha$ fraco em $L^2(\Omega)$, tem-se pela unicidade do limite que

$$u(T) = \alpha.$$

Portanto,

$$u_m(T) \longrightarrow u(T) \text{ fraco em } L^2(\Omega) \tag{2.44}$$

Por (2.22), existe $\gamma \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_m(T) \longrightarrow \gamma \text{ fraco em } H_0^1(\Omega).$$

Mostrar-se-á que $u(T) = \gamma$.

Seja $\theta \in C^1[0,T]$ com $\theta(T) = 1$ e $\theta(0) = 0$. Da Equação Aproximada obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_m''(t), w_j)\theta'(t)dt \quad &+ \quad \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u_m(t), w_j))\theta' dt + \int_0^T (u_m, w_j)\theta'(t)dt \\ &+ \quad \int_0^T \langle Au_m'(t), w_j\rangle\theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\theta'(t)dt\end{aligned}$$

Integrando por partes o terceiro termo, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_m''(t), w_j)\theta'(t)dt \quad &+ \quad \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt + ((u_m(t), w_j))\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T ((u_m'(t), w_j))\theta(t)dt \\ &+ \quad \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle Au_m'(t), w_j\rangle\theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\theta' dt.\end{aligned}$$

Daí, resulta que

$$\begin{aligned}&\int_0^T (u_m''(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta'(t)dt + ((u_m(T), w_j)) - \int_0^T ((u_m'(t), w_j))\theta(t)dt \\ + \quad &\int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle Au_m'(t), w_j\rangle\theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\theta'(t)dt.\end{aligned}$$

Fixando j e tomando o limite quando $m \to \infty$, obtém-se

$$\begin{aligned}&\int_0^T (u''(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)dt + \lim_{m\to\infty}((u_m(T), w_j)) - \int_0^T ((u'(t), w_j))\theta(t)dt \\ + \quad &\int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle\theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\theta'(t)dt.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Multiplicando (2.31) por $w_j\theta' \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$ e integrando de 0 a T, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle u''(t), w_j\rangle\theta'(t)dt \quad &+ \quad \int_0^T \langle u'(t), w_j\rangle\theta'(t)dt + \int_0^T \langle -\Delta u(t), w_j\rangle\theta'(t)dt + \int_0^T \langle u(t), w_j\rangle\theta'(t)dt \\ &+ \quad \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle\theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle\theta'(t)dt.\end{aligned}$$

Daí, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t), w_j)\theta'(t)dt &+ \int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u(t), w_j))\theta'(t)dt \\ &+ \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle \theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \theta'(t)dt.\end{aligned}$$

Integrando por partes o terceiro termo, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t), w_j)\theta'(t)dt &+ \int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)dt + ((u(t), w_j))\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T ((u'(t), w_j))\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle \theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \theta'(t)dt,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\int_0^T (u''(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)dt + ((u(T), w_j)) - \int_0^T ((u', w_j))\theta(t)dt \\ + &\int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T \langle \chi, w_j\rangle \theta'(t)dt = \int_0^T \langle f(t), w_j\rangle \theta'(t)dt. \qquad (2.46)\end{aligned}$$

De (2.45) e (2.46) temos

$$\lim_{m\to\infty} ((u_m(T), w_j)) = ((u(T), w_j)), \ \forall j.$$

Como $u_m(T) \longrightarrow \gamma$ fraco em $H_0^1(\Omega)$, tem-se pela unicidade do limite fraco que

$$u(T) = \gamma.$$

Portanto,

$$u_m(T) \longrightarrow u(T) \text{ fraco em } H_0^1(\Omega). \qquad (2.47)$$

De (2.41) tem-se que

$$\begin{aligned}|u'(T)|^2 &\leq \liminf |u_m'(T)|^2 \\ -|u'(T)|^2 &\geq -\liminf |u_m'(T)|^2 \\ -\frac{1}{2}|u'(T)|^2 &\geq \limsup \left[-\frac{1}{2}|u_m'(T)|^2\right]. \qquad (2.48)\end{aligned}$$

Analogamente, de (2.44) e (2.47) tem-se que

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}|u(T)|^2 &\geq \limsup \left[-\frac{1}{2}|u_m(T)|^2\right] && (2.49)\\
-\frac{1}{2}\|u(T)\|^2 &\geq \limsup \left[-\frac{1}{2}\|u_m(T)\|^2\right]. && (2.50)
\end{aligned}
$$

Tomando o $\limsup$ em ambos os membros de (2.38) e usando (2.20) e (2.21) obtém-se

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \langle f(t), u'(t)\rangle dt &+ \limsup \left[-\frac{1}{2}|u_m'(T)|^2\right] + \frac{1}{2}|u'(0)|^2 + \limsup \left[-\int_0^T |u_m'(t)|^2 dt\right]\\
&+ \limsup \left[-\frac{1}{2}\|u_m(T)\|^2\right] + \frac{1}{2}\|u(0)\|^2 + \limsup \left[-\frac{1}{2}|u_m(T)|^2\right]\\
&+ \frac{1}{2}|u(0)|^2 - \int_0^T \langle \chi, \varphi\rangle dt - \int_0^T \langle A\varphi, u'(t) - \varphi\rangle dt \geq 0.
\end{aligned}
$$

Usando as desigualdades obtidas em (2.48), (2.49) e (2.50), tem-se que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \langle f(t), u'(t)\rangle dt &- \frac{1}{2}|u'(T)|^2 + \frac{1}{2}|u'(0)|^2 + \limsup \left[-\int_0^T |u_m'(t)|^2 dt\right]\\
&- \frac{1}{2}\|u(T)\|^2 + \frac{1}{2}\|u(0)\|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 + \frac{1}{2}|u(0)|^2\\
&- \int_0^T \langle \chi, \varphi\rangle dt - \int_0^T \langle A\varphi, u'(t) - \varphi\rangle dt \geq 0. \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

Por (2.31) faz sentido escrever

$$
\langle u'' + u' - \Delta u + u + \chi, \bar{u}\rangle = \langle f, \bar{u}\rangle, \qquad \forall \bar{u} \in L^p(0,T;L^p(\Omega)).
$$

Em particular, como $u' \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$ tem-se que

$$
\langle u'' + u' - \Delta u + u + \chi, u'\rangle = \langle f, u'\rangle.
$$

E, daí, obtém-se

$$
\langle u''(t), u'(t)\rangle + \langle u'(t), u'(t)\rangle + \langle -\Delta u(t), u'(t)\rangle + \langle u(t), u'(t)\rangle + \langle \chi, u'(t)\rangle = \langle f(t), u'(t)\rangle.
$$

Assim, tem-se que

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(t)|^2 + |u'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \langle \chi, u'(t)\rangle = \langle f(t), u'(t)\rangle.
$$

Integrando de 0 a T, resulta que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u'(t)|^2 dt &+ \int_0^T |u'(t)|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}|u(t)|^2 dt\\
&+ \int_0^T \langle \chi, u'(t)\rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u'(t)\rangle dt.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|u'(T)|^2-\frac{1}{2}|u'(0)|^2 &+ \int_0^T |u'(t)|^2dt+\frac{1}{2}\|u(T)\|^2-\frac{1}{2}\|u(0)\|^2+\frac{1}{2}|u(T)|^2-\frac{1}{2}|u(0)|^2\\ &+ \int_0^T \langle \chi, u'(t)\rangle dt = \int_0^T \langle f(t), u'(t)\rangle dt,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\int_0^T |u'(t)|^2dt+\int_0^T \langle \chi, u'(t)\rangle dt &= \int_0^T \langle f(t), u'(t)\rangle dt-\frac{1}{2}|u'(T)|^2+\frac{1}{2}|u'(0)|^2-\frac{1}{2}\|u(T)\|^2\\ &+ \frac{1}{2}\|u(0)\|^2-\frac{1}{2}|u(T)|^2+\frac{1}{2}|u(0)|^2. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Substituindo (2.52) em (2.51), tem-se que

$$\begin{aligned}\limsup\left[-\int_0^T |u_m'(t)|^2dt\right] &+ \int_0^T |u'(t)|^2dt+\int_0^T \langle \chi, u'(t)\rangle dt-\int_0^T \langle \chi, \varphi\rangle dt\\ &- \int_0^T \langle A\varphi, u'(t)-\varphi\rangle dt \geq 0. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}\int_0^T |u'(t)|^2dt &= ||u'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\\ \int_0^T |u_m'(t)|^2dt &= ||u_m'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

Logo, por (2.17) tem-se que

$$||u'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf\left[||u_m'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right].$$

Então, obtém-se

$$-\liminf\left[||u_m'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right]+||u'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq 0.$$

Daí, resulta que

$$\limsup\left[-||u_m'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right]+||u'||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq 0.$$

Portanto,

$$\limsup\left[-\int_0^T |u_m'(t)|^2dt\right]+\int_0^T |u'(t)|^2dt \leq 0. \tag{2.54}$$

De (2.54) em (2.53) tem-se que

$$\int_0^T \langle \chi, u'(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \chi, \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle A\varphi, u'(t) - \varphi \rangle dt \geq 0.$$

Logo,

$$\int_0^T \langle \chi, u'(t) - \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle A\varphi, u'(t) - \varphi \rangle dt \geq 0.$$

Portanto,

$$\int_0^T \langle \chi - A\varphi, u'(t) - \varphi \rangle dt \geq 0, \qquad \forall \varphi \in L^p(0, T; L^p(\Omega)).$$

Agora, sejam $\varphi(t) = u'(t) - \lambda v(t)$, $\lambda > 0$ e $v \in L^p(0, T; L^p(\Omega))$ arbitrário. Obtém-se, então, o seguinte resultado na desigualdade acima

$$\int_0^T \langle \chi - A(u'(t) - \lambda v(t)), u'(t) - (u'(t) - \lambda v(t)) \rangle dt \geq 0.$$

Logo,

$$\int_0^T \langle \chi - A(u'(t) - \lambda v(t)), \lambda v(t) \rangle dt \geq 0.$$

Dividindo por λ, obtém-se

$$\int_0^T \langle \chi - A(u'(t) - \lambda v(t)), v(t) \rangle dt \geq 0. \tag{2.55}$$

Agora, devemos mostrar que

$$\int_0^T \langle \chi - A(u'(t) - \lambda v(t)), v(t) \rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle \chi - Au'(t), v(t) \rangle dt$$

quando $\lambda \to 0$. Observe que pela propriedade 2 do operador A e pela desigualdade $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ tem-se que

$$\begin{aligned}
\|\langle A(u'(t) - \lambda v(t)), v(t) \rangle\|_{L^1(0,T)} &= \int_0^T |\langle A(u'(t) - \lambda v(t)), v(t) \rangle| dt \\
&\leq \int_0^T \|u'(t) - \lambda v(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} dt \\
&\leq \int_0^T (\|u'(t)\|_{L^p(\Omega)} + |\lambda| \|v(t)\|_{L^p(\Omega)})^{p-1} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} dt \\
&\leq \int_0^T 2^{p-2}(\|u'(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + |\lambda|^{p-1} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}) \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} dt \\
&= \int_0^T (C_1 \|u'(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} + C_2 \|v(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}) \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} dt \\
&= C_1 \int_0^T \|u'(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} dt + C_2 \int_0^T \|v(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p} dt.
\end{aligned}$$

Como $u', v \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$, temos que $\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \in L^p(0,T)$, logo, $\|u(t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \in L^{p'}(\Omega)$ e $\|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \in L^p(0,T)$. Segue-se da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}\|\langle A(u'(t)-\lambda v(t)), v(t)\rangle\|_{L^1(0,T)} \leq C_1 &\left(\int_0^T (\|u(s)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)})^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T \|v(t)\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &+ C_2 \int_0^T \|v(t)\|^p_{L^p(\Omega)} dt,\end{aligned}$$

portanto,

$$\|\langle A(u'(t)-\lambda v(t)), v(t)\rangle\|_{L^1(0,T)} \leq K,$$

isto é,

$$\langle A(u'(t)-\lambda v(t)), v(t)\rangle \quad \text{é integrável.} \tag{2.56}$$

Além disso, para cada $t \in [0,T]$, t fixado, tem-se pela hemicontinuidade de A que

$$\langle A(u'(t)-\lambda v(t), v(t))\rangle \;\; \rightarrow \;\; \langle Au'(t), v(t)\rangle \tag{2.57}$$

quase sempre em $[0,T]$, quando $\lambda \rightarrow 0$.

Por outro lado, para cada $t \in [0,T]$, t fixado tem-se que

$$\begin{aligned} |\langle A(u('t)-\lambda v(t)), v(t)\rangle| &\leq \|u'(t)-\lambda v(t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq (\|u'(t)\|_{L^p(\Omega)} + |\lambda| \|v(t)\|_{L^p(\Omega)})^{p-1} \|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq 2^{p-2}(\|u'(t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + |\lambda|^{p-1}\|v(t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)})\|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \\ &= (C_1\|u'(t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + C_2\|v(t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)})\|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \\ &= C_1 \int_0^T \|u'(t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|v(t)\|_{L^p(\Omega)} dt + C_2 \int_0^T \|v(t)\|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Note que $||u'(t)||^{p-1}_{L^p(\Omega)} \in L^{p'}(0,T)$ e $||v(t)||_{L^p(\Omega)} \in L^p(0,T)$. Assim $||u(t)||^{p-1}_{L^p(\Omega)}||v(t)||_{L^p(\Omega)} \in L^1(0,T)$ e como $||v(t)||^p_{L^p(\Omega)} \in L^1(0,T)$, resulta que o segundo membro de (2.58) é integrável quase sempre em $[0,T]$.

Segue-se então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue aplicado à (2.56), (2.57) e (2.58), que

$$\int_0^T \langle A(u'(t)-\lambda v(t)), v(t)\rangle dt \;\; \rightarrow \;\; \int_0^T \langle Au'(t), v(t)\rangle dt,$$

portanto,

$$\int_0^T \langle \chi - A(u'(t)-\lambda v(t)), v(t)\rangle \;\; \rightarrow \;\; \int_0^T \langle \chi - Au'(t), v(t)\rangle \, dt \tag{2.59}$$

para toda $v \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$. Assim tem-se por (2.55) que

$$\int_0^T \langle \chi - Au'(t), v(t)\rangle\, dt \geq 0, \qquad \forall v \in L^p(0,T;L^p(\Omega)). \tag{2.60}$$

Tomando, em particular, $-v \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$ tem-se por (2.60) que

$$\int_0^T \langle \chi - Au'(t), v(t)\rangle\, dt \leq 0, \qquad \forall v \in L^p(0,T;L^p(\Omega)). \tag{2.61}$$

Segue-se de (2.60) e (2.61) que

$$0 \leq \int_0^T \langle \chi - Au'(t), v(t)\rangle\, dt \leq 0, \qquad \forall v \in L^p(0,T;L^p(\Omega)),$$

isto é,

$$\int_0^T \langle \chi - Au'(t), v(t)\rangle\, dt = 0, \qquad \forall v \in L^p(0,T;L^p(\Omega)).$$

Assim, obtém-se

$$\chi - Au' = 0 \quad \text{em} \quad L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)).$$

Portanto,

$$Au' = \chi \quad \text{em} \quad L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)).$$

(Unicidade)

Sejam u e v funções satisfazendo as condições do Teorema 1. Logo, tem-se que

$$u'' + u' - \Delta u + u + Au' = f \text{ em } L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)) \tag{2.62}$$

$$v'' + v' - \Delta v + v + Av' = f \text{ em } L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)) \tag{2.63}$$

$$u(0) = v(0) = u_0 \tag{2.64}$$

$$u'(0) = v'(0) = u_1. \tag{2.65}$$

Logo, por (2.62) e (2.63) tem-se que

$$(u'' - v'') + (u' - v') - \Delta(u - v) + (u - v) + (Au' - Av') = 0 \text{ em } L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega)).$$

Seja, $w = u - v$, logo, $w' = u' - v'$ e $w'' = u'' - v''$. Agora, note que para todo $z \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$ faz sentido escrever

$$(w''(t), z(t)) + (w', z(t)) + (-\Delta w(t), z(t)) + (w(t), z(t)) + \langle Au'(t) - Av'(t), z(t)\rangle = 0. \quad (2.66)$$

Em particular, tomemos $z = w'$ em (2.66), obtém-se

$$(w''(t), w'(t)) + (w'(t), w'(t)) + ((w(t), w'(t))) + (w(t), w'(t))$$
$$+ \langle Au'(t) - Av'(t), u'(t) - v'(t)\rangle = 0.$$

Daí, resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + |w'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 + \langle Au'(t) - Av'(t), u'(t) - v'(t)\rangle = 0.$$

Como $|w'(t)|^2 \geq 0$ e $\langle Au'(t) - Av'(t), u'(t) - v'(t)\rangle \geq 0$, tem-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq 0.$$

Integrando de 0 a t, onde $t \in [0,T]$, e multiplicando por 2 obtém-se

$$\int_0^t \frac{d}{dt}|w'(t)|^2 dt + \int_0^t \frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 dt + \int_0^t \frac{d}{dt}|w(t)|^2 dt \leq 0.$$

Logo,

$$|w'(t)|^2 - |w'(0)|^2 + \|w(t)\|^2 - \|w(0)\|^2 + |w(t)|^2 - |w(0)|^2 \leq 0.$$

Note que por (2.53) e (2.65) tem-se que

$$w(0) = (u - v)(0) = u(0) - v(0) = u_0 - u_0 = 0$$

e

$$w'(0) = (u' - v')(0) = u'(0) - v'(0) = u_1 - u_1 = 0.$$

Logo,

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + |w(t)|^2 \leq 0.$$

Assim, $\|w(t)\| = 0$ para todo $t \in [0,T]$. Daí,

$$u(t) - v(t) = 0$$

para todo $t \in [0,T]$. Portanto,

$$u(t) = v(t)$$

para todo $t \in [0,T]$. ■

Bibliografia

[1] Bartle, R.G., The Elements of Integration, Jonh Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[2] Brézis, H., Analyse Functionelle, Théorie et Applications, ed. Masson, 1983.

[3] Dautray, R., Lions, J.L., Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Verlag, Germany, 2000.

[4] De Araújo, G.M., Sobre as Equações de Navier-Stokes com Viscosidade Variável em Domínio Não Cilíndrico, Tese de Doutorado, UFRJ,2003.

[5] De Araújo, G.M., De Menezes, S.D., Gúzman, R.D.B., Periodic Solutions for Nonlinear Telegraph Equation via Elliptic Regularization, to appear.

[6] De Araújo, G.M., Milla Miranda, M., Medeiros, L.A., On the Navier-Stokes equations with variable viscosity in a noncylindrical domain. Applicable Anaysis, vol.86, N^o 3,287-313,March 2007.

[7] De Mello, E.A., Medeiros, L.A., A Integral de Lebesgue, Textos de Métodos Matemáticos 18, Instituto de Matemática-UFRJ, 1989.

[8] Lions, J.L., Quelques Methodes de Resolution des Problemés Aux Limites Non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[9] Medeiros, L.A., Milla Miranda, M., Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, Instituto de Matemática-UFRJ, 1989.

[10] Medeiros, L.A., Milla Miranda, M., Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos), Instituto de Matemática-UFRJ, 2000.

[11] Medeiros, L.A., Tópicos em Equações Diferenciais Parciais - parte 1, Instituto de Matemática-UFRJ, 2005.

[12] Prodi, G., Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde com termine dissipativo non-lineare, Rend. Sem., Pandova, 35, 1965.