SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - PPGME

SOLVABILIDADE E DECAIMENTO EXPONENCIAL PARA UM SISTEMA DE EDP NÃO LINEAR COM ACOPLAMENTO NA FONTE

Por: Renato Fabrício Costa Lobato

Orientador

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira

Belém

2006

Renato Fabrício Costa Lobato

SOLVABILIDADE E DECAIMENTO EXPONENCIAL PARA UM SISTEMA DE EDP NÃO LINEAR COM ACOPLAMENTO NA FONTE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais

Belém
2006

Renato Fabrício Costa Lobato

SOLVABILIDADE, DECAIMENTO EXPONENCIAL PARA UM SISTEMA DE EDP NÃO LINEAR COM ACOPLAMENTO NA FONTE

Essa dissertação, foi julgada e aprovada, para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Corpo Docente do Programa de Pós - Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará

Conceito:

Belém, 15 de Dezembro de 2006

....

Prof. Dr. Marcus Pinto da Costa da Rocha
Coordenador do PPGME-UFPA

Banca Examinadora

....	....
Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira	**Prof. Dr. Carlos A. Raposo da Cunha**
FACI	UFSJ
Orientador	**Examinador**
....	....
Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher	**Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**
UFPA	UFPA
Examinador	**Examinador**

Ao nosso futuro: Lucas, Beatriz e Byanca

Agradecimentos

• A Deus por me conceder sempre sua proteção nos momentos difíceis.

• A Universidade Federal do Pará - UFPA.

• Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - PPGME.

• Ao professor Marcus, pela forma como conduz a direção do nosso programa.

• Gostaria de aqui fazer uma referência especial a pessoa do professor Jorge Ferreira, por ter proposto uma primeira versão desta dissertação e por ter sido sempre atencioso e compreensivo.

• Ao meu orientador professor Ducival, por me conceder o prazer do seu valioso auxílio, se mostrando sempre solícito as minhas infindáveis dúvidas.

• Ao professor Mauro por ter contribuido de modo decivo na conclusão da dissertação e ter sido amigo na longa jornada.

• Faz-se necessário lembrar dele, que sempre dá um jeitinho pra tudo, professor João Protázio.

• Agradeço de um modo especial a professores importantes, que de um certo modo me incentivaram para que eu chegasse até aqui, são eles: Giovany, José Augusto e Adilson.

• Aos meus pais, Célio e Roza que nunca exitaram em me conceder a oportunidade de buscar o conhecimento. Devo minha vida a eles.

• A família Torres Lobato, meu querido irmão e cumpadre, Tinho, do qual tenho muito orgulho e amor,minha cunhada Rosilene, a qual considero como irmã e aos meus sobrinhos Byanca e Lucas.

• A minha família de um modo geral, em especial aos avós Teca e Salo.

• Aos bons amigos do mestrado que de um modo geral, foram pessoas que me aturaram em momentos difíceis e felizes. Dentre eles, Reiville, Hercio, Edilson, dona Rosinha, Fábio, Andrelino, Antenor, Irazel, Luiz Neto, Silvana, Helena, Pedrão, Baena, Raquel, Adiel, Aubedir, Márcio Bahia, Elizardo, Lindomar, Leandro e outros.

• Agradeço de modo especial a três grandes amigas, que sempre me foram fiéis desde o tempo de graduação: Elize, Paula e Silvia.

• Vai aqui também meu reconhecimento a dois grandes parceiros: Heleno e Carlos Alessandro.

• Também não poderia deixar de lembrar de dois bons amigos estatísticos: Marco Pollo e Zé Gracildo.

• Agradeço a parceria com o amigo Toninho, a qual me rendeu bons frutos.

• Novas e sinceras amizades são sempre bem vindas. A vocês minhas queridas: Carla e Deiziane.

• A querida amiga Telma.

• Esse ficou por último, pois deve ser lembrado de modo muito especial, meu grande irmão Nego-Sabá. Parceiro das horas fáceis e principalmente das difíceis.

• Agradeço as pessoas que contribuiram negativamente, pois me incentivaram sobremaneira para continuar a luta.

• Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuiram de maneira positiva.

Ah, essas cordas de aço
Este minúsculo braço
Do violão que os dedos meus acariciam
Ah, este bojo perfeito
Que trago junto ao meu peito
Só você violão
Compreende porque perdi toda alegria
E no entanto meu pinho
Pode crer, eu adivinho
Aquela mulher
Até hoje está nos esperando
Solte o teu som da madeira
Eu você e a companheira
Na madrugada iremos pra casa
Cantando...

Agenor Oliveira (Cartola)

Resumo

Neste trabalho vamos estudar existência, unicidade e comportamento assintótico de solução fraca global do problema misto de evolução (P)

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u = f_1(v) & em \ \ Q = \Omega \times (0,T) \\ v_t - a(l(v))\Delta v = f_2(u) & em \ \ Q = \Omega \times (0,T) \\ u(t) = v(t) = 0 & sobre \ \ \sum = \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & em \ \ \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) & em \ \ \Omega \end{cases}$$

Onde $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um operador contínuo, $f_i \in Lip_{\gamma_i}$, com $f_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, i $= 1, 2$ e $l : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma linear e contínua.

A existência será feita via método de Faedo-Galerkin, teorema de compacidade de Aubin-Lions e algumas desigualdades relevantes da Análise Funcional, para unicidade, usaremos o método tradicional e para o comportamento assintótico usaremos o método da energia.

Palavras Chaves: Existência, Unicidade, Solução Fraca Global , Comportamento Assintótico

Abstract

In this work we study the existence, uniqueness and asymptotic behaviour of global weak solutions for the mixed evolution problem (P)

$$
(\mathrm{P}) \begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u = f_1(v) & in \;\; Q = \Omega \times (0, T) \\ v_t - a(l(v))\Delta v = f_2(u) & in \;\; Q = \Omega \times (0, T) \\ u(t) = v(t) = 0 & on \;\; \sum = \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & in \;\; \Omega \\ v(x, 0) = v_0(x) & in \;\; \Omega \end{cases}
$$

Where $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous operator, $f_i \in Lip_{\gamma_i}$, with $f_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, i $= 1, 2$ and $l : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous linear form.

For the existence we used Faedo Galerkin Method, Aubin Lions' theorem of compactness, important inequalities of Functional Analysis, while for the uniqueness we used the standard method and for the asymptotic behaviour we used the energy method .

Keywords: Existence, Uniqueness, Global Weak Solution, Asymptotic Behaviour

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a existência e unicidade de solução fraca global, bem como decaimento exponencial para o sistema não linear de equações diferenciais parciais com acoplamento na fonte (P) da seguinte forma:

$$
(\mathrm{P}) \begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u = f_1(v) & em \;\; Q = \Omega \times (0,T) \\ v_t - a(l(v))\Delta v = f_2(u) & em \;\; Q = \Omega \times (0,T) \\ u(t) = v(t) = 0 & sobre \;\; \sum = \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & em \;\; \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) & em \;\; \Omega \end{cases}
$$

O sistema (P) se originou a partir do problema misto $\left(\overline{P}\right)$, por meio de um acoplamento na fonte, onde:

$$
\left(\overline{P}\right) \left| \begin{array}{ll} u_t - a(l(u))\Delta u = f(u) & em \;\; Q = \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 & sobre \;\; \sum = \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & em \;\; \Omega \end{array} \right.
$$

O problema $\left(\overline{P}\right)$ foi estudado em sua parte estacionária e evolutiva por Corrêa, Menezes e Ferreira [5], onde o mesmo descreve diversos modelos que aparecem em várias situações físicas. Por exemplo, quando queremos estudar a questão relacionada com a cultura de bactérias u, a equação em questão pode descrever a população dessas bactérias, sujeita ao espalhamento onde o coeficiente de difusão a é suposto dependente da população inteira.

Nos capítulos 1 e 2 fizemos uma introdução preliminar a alguns resultados e definições de Análise Funcional e Espaços de Sobolev respectivamente. No capítulo 3 é que de fato estudamos o trabalho proposto em questão, onde se mostra a solvabilidade e o comportamento assintótico.

Capítulo 1

Prolegômenos de Análise Funcional

1.1 Espaços Métricos

Definição 1.1.1: Define-se uma métrica em um conjunto M, a função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que faz associar a cada par $(x, y) \in M \times M$ um número real $d(x, y)$, demominado a distância de x a y. Para tal função, considerando-se $x, y, z \in M$ devem ser satisfeitas as seguintes condições:

d_1) $d(x, x) = 0$

d_2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$

d_3) $d(x, y) = d(y, x)$

d_4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Podemos condensar as propriedades d_1 e d_2, dizendo simplesmente que $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$, a propriedade d_3 nos diz que d é uma função simétrica e por fim d_4 trata da desigualdade do triângulo.

Agora podemos dizer que, um espaço métrico é um par (M, d), onde M é um conjunto e d uma métrica. Quando não houver ambiguidade, vamos simplesmente nos referir ao espaço mértrico M

Exemplo 1.1.1: Considere X um conjunto arbitrário e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Sabemos que f é dita limitada em X se existe uma constante $k = k_f > 0$, de modo que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$

Indicando por $\mathfrak{B}(X; \mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos neste conjunto definir uma métrica, pondo para $f, g \in \mathfrak{B}(X; \mathbb{R})$ arbitrárias,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Esta métrica é denominada métrica da convergência uniforme ou do sup. Temos portanto que $\mathfrak{B}(X;\mathbb{R})$ munido da métrica do sup é um espaço métrico

1.1.1 Espaços Normados

Os espaços normados são um caso partibular de um espaço métrico.

Seja E um espaço vetorial real, uma norma é uma aplicação $\|\ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz:

$i)$ $\|\xi\| \geq 0$ para todo $\xi \in E$ e $\|\xi\| = 0 \Longleftrightarrow \xi = 0$ (comprimento positivo)

$ii)$ $\|\lambda\xi\| = |\lambda|\|\xi\|$ para todo $\xi \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (dilatação)

$iii)$ $\|\xi + \zeta\| \leq \|\xi\| + \|\zeta\|$ para todo $\xi, \zeta \in E$ (desigualdade do triângulo)

O par $(\|\cdot\|, E)$ é denominado um espaço normado.

Observação 1.1.1: Note que a definição de espaço normado exige que E seja um espaço vetorial. Em particular todo espaço normado é um espaço métrico. É fácil verificar que toda norma, define ou induz uma métrica d em E, basta por: $d = \|\xi - \delta\|$, onde $\xi, \delta \in E$.

Exemplo 1.1.2: Definamos $L^1(a,b)$ como sendo o espaço de todas as funções definidas sobre $[a,b]$ integráveis a Lebesgue. É fácil verificar que este é um espaço normado. Basta muni-lo da seguinte aplicação:

$\|\ \| : L^1(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$$

a qual vê-se facilmente que é uma norma.

1.1.2 Espaços Métricos Completos

Seja (M,d) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)_{n\in N}$ é dita de Cauchy no espaço métrico M, se dado $\varepsilon > 0$, de modo arbitrário existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n, m > N \Longrightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

Definição 1.1.2: Um espaço métrico é dito completo, quando toda sequência de Cauchy nele é convergente.

Exemplo 1.1.3: Seja o espaço métrico $M = \mathcal{C}(a,b)$ o conjunto das funções contínuas sobre o intervalo $[a,b]$ com a métrica:

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Afirmamos que $\mathcal{C}(a,b)$ é um espaço métrico completo

Com efeito, seja f_n uma sequencia de Cauchy em $\mathcal{C}(a,b)$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$n, m \geq N \Longrightarrow d(f_n, f_m) < \varepsilon,$

ou seja,

$$n, m \geq N \Longrightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Sabemos que na reta real $\mathbb{R}$ toda sequência de Cauchy é convergente, teremos portanto que para cada x, $(f_n(x))_{n\in N}$ converge, isto é, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$

Denotemos por $f(x)$ o limite em questão. Para mostrarmos a completeza de $\mathcal{C}(a,b)$, basta verificar a continuidade de f. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$, devido a convergência existem N_1 e N_2 tais que:

$n > N_1 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, da mesma forma, $n > N_2 \Longrightarrow |f_n(y) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

Tomemos, $N = \max\{N_1, N_2\}$. Da continuidade de f_n e usando o fato de ser de Cauchy, então existe $\delta > 0$, tal que:

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Da desigualdade triangular, segue-se que:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Agora, tomando $n > N$ e $|x - y| < \delta$, vem que:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Donde tem-se a continuidade de f. Dessa forma $f \in \mathcal{C}(a, b)$, o que mostra que a sequência de Cauchy f_n convergiu no próprio espaço e isso acaba por demonstrar a completeza de $\mathcal{C}(a, b)$

1.2 Espaços de Banach

Um espaço normado E é dito um espaço de Banach, se o mesmo é completo, isto é, se toda sequência de Cauchy converge em E.

Vamos a partir de agora estender o conceito de convergência. O que faremos é enfraquecer nossa condição de convergência. Vejamos:

Se a sequência (x_ν) é convergente, então para toda função contínua F teremos que $F(x_\nu)$ também é convergente. Definiremos então uma condição mais fraca que a anterior. Em vez de exigir que a convergência se realize para toda função contínua, exigiremos apenas para as lineares e contínuas. Diremos dessa forma que uma sequência x_n converge fracamente para x, se $f(x_n)$ converge para $f(x)$, para todas as funções lineares e contínuas definidas nela. Este espaço é denominado espaço dual.

1.2.1 O Espaço Dual

Definição 1.2.1: Denotemos por E' o conjunto das funções $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineares e contínuas, isto é:

$E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R};\ f\ \textit{é linear e contínua}\}$. O conjunto E' é chamado o dual de E.

Proposição 1.2.1: Uma aplicação linear f é contínua se, e somente se, ela é limitada.

Demonstração:

Com efeito, pela continuidade de f teremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$\|x\| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Isso significa que para cada $y \in E$, $\dfrac{\delta}{\|y\|}y$ satisfaz a condição: $\left\| \dfrac{\delta}{\|y\|}y \right\| \leq \delta$, daí então segue-se que:

$\left| f\left(\dfrac{\delta}{\|y\|}y\right)\right| < \varepsilon \Longrightarrow |f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{\delta}\|y\|$, donde concluimos que f é uma função limitada.

De maneira recíproca, vamos supor que f seja limitada. Mostraremos que f deve ser contínua. Lembremos que f é limitada se existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C\|x\|$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se:

$\|x - y\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$ e aplicar a linearidade de f

1.2.2 Espaços Reflexivos

Assim como construimos o espaço dual de um espaço vetorial, também podemos construir o espaço dual do dual. Isto é:

$E'' = \{f : E' \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é } \textit{linear e contínua}\}$

Este espaço E'' é também um espaço normado e completo. A norma do espaço bidual esta dada por:

$$\|f\|_{**} = \sup_{g \in E', \|g\|_* \leq 1} f(g)$$

Em geral dado um espaço vetorial E qualquer, podemos definir o espaço dual e bidual. Inclusive podemos relacionar o espaço E com o bidual E^{**}, através da seguinte aplicação:

$J : E \longrightarrow E''$, $x \longmapsto J(x) \in E''$, onde $J(x) : E' \longrightarrow \mathbb{R}$

Definimos de forma natural: $\langle J(x), f\rangle = f(x)$, para todo $f \in E'$

Note que J é uma isometria entre os espaços E e E''

Com efeito,

$$\|J(x)\|_{**} = \sup_{f \in E', \|f\|_* \leq 1} \langle J(x), f\rangle = \sup_{f \in E', \|f\|_* \leq 1} \langle f, x\rangle = \|x\|$$

De onde obtemos uma aplicação injetora entre os espaços E e E''. A aplicação J é chamada de projeção canônica. Não é verdade, em geral, que J definida acima, seja sobrejetora. Os espaços nos quais J seja sobrejetora são chamados de Reflexivos.

Definição 1.2.2: Seja E um espaço de Banach, diremos que E é um espaço reflexivo, quando a aplicação J definida acima é sobrejetora.

Definição 1.2.3: Diremos que um espaço normado E é separável, se existe um subconjunto enumerável e denso em E.

1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Vamos agora introduzir os espaços L^p, o que nos será de grande importância como ferramenta. Faremos uma breve definição e mostraremos alguns resultados relevantes para o que se segue. Aqui fixaremos um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e identificamos funções mensuráveis que são iguais quase sempre.

1.3.1 Definição e Principais Resultados

Seja $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, definimos:

$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$

Considerando agora $p = \infty$ tem-se:

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é mensurável e } \exists\ c \geq 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq c \quad \text{q.s} \quad \text{em } \Omega\}$

Definimos também as normas: $\|\ \cdot\ \|_p : L^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, para $0 < p < \infty$ e $\|\ \cdot\ \|_\infty$, para $p = \infty$, dadas respectivamente por:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p} \quad \text{e} \quad \|f\|_\infty = inf\{c : |f(x)| \leq c \quad \text{q.s.} \quad \text{em } \Omega\}$$

Para efeito ilustrativo, mostremos a seguir que, para $0 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial e $\|\ \cdot\ \|_p$ de fato é norma.

Notação: Se $1 \leq p \leq \infty$ denotamos por q o número definido por:

a) $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se $1 < p < \infty$

b) $q = 1$, se $p = \infty$ e $q = \infty$ se $p = 1$

O número p é denominado expoente conjugado de q.

Lema 1.3.1 (A Desigualdade de Young): Se $1 < p < \infty$ e a, b são números reais não negativos então:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

a igualdade só ocorre quando $a^p = b^q$

Prova: Se $\varphi(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^\lambda \implies \varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda - 1})$ e se $\lambda - 1 < 0$ temos que:

- $\varphi'(t) < 0$ para $t < 1$
- $\varphi'(t) > 0$ para $t > 1$

Logo para $t \neq 1$, temos $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$, de onde $(1-\lambda) + \lambda t \geq t^\lambda$

(a igualdade só vale se $t = 1$)

Se $b \neq 0$ a desigualdade segue substituindo t por $\dfrac{a^p}{b^q}$. Por outro lado, se $b = 0$ o lema é trivial.

Lema 1.3.2 (Desigualdade de Hölder): Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então $f, g \in L^1(\Omega)$ e:

$$\int_\Omega |f.g|dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Prova: Os casos $p = 1$ e $p = \infty$ seguem de modo imediato. Agora se $1 < p < \infty$ temos que:

$|f(x)||g(x)| \leq \dfrac{1}{p}|f(x)|^p + \dfrac{1}{q}|g(x)|^q$, devido a desigualdade de Young.

Dessa forma, temos que:

$$\int_\Omega |f.g|dx \leq \frac{1}{p}\|f\|^p_{L^p} + \frac{1}{q}\|g\|^q_{L^q}$$

mostrando portanto, que $f.g \in L^1(\Omega)$. Substituindo f por λf, $\lambda > 0$, segue-se que

$$\int_{\Omega} |f.g|dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_{L^q}^q$$

Por outro lado, minimizando o lado direito da desigualdade acima para $\lambda \in (0, \infty)$, temos que o mínimo ocorre para $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1}\|g\|_{L^q}^{q/p}$ e o resultado segue.

Teorema 1.3.1 (da Convergência Dominada de Lebesgue):

Seja $(f_n)_n$ uma seqüência de funções integráveis definidas em X. Suponha que:

1. $(f_n)_n$ converge q.s. para uma função real, mensurável, f.
2. Existe uma função integrável g, tal que $|f_n| \leq g, \forall n$. Então, $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$.

Demonstração: Ver [3]

Teorema 1.3.2 (Representação de Riez)

Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^{p'}$ tal que:

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \forall\ f \in L^p$$

Além disso, $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{L^{p'}}$

Demonstração: Ver [16]

Como conseqüência destes resultados temos as seguintes identificações:

$i)$ $L^2 \cong (L^2)'$

$ii)$ $L^{p'} \cong (L^p)'$

Demonstração: Ver [16].

Dizemos que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se $\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que denotaremos por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Definição 1.3.1: Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de H uma seqüência de elementos (ω_n) de H tais que:

i) $|\omega_n| = 1\ \forall n, (\omega_n, \omega_m) = 0\ \forall n, m,\ m \neq n$;

ii) O espaço gerado pela (ω_n) é denso em H.

A seguinte proposição estabelece que a convergência em $L^p(\Omega)$ dá origem a uma convergência pontual.

Proposição 1.3.1: Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $L^p(\Omega)$ convergindo para u em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência de (u_k), ainda denotada por (u_k), tal que:

i) $u_k(x) \longrightarrow u(x)$, *q.s. em* Ω;

ii) $|u_k(x)| \leq h(x)$, *q.s. em* Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$, *com* $h \in L^p(\Omega)$

Demonstração: Ver [3].

1.4 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos algumas definições e resultados, de grande relevância, que serão utilizados posteriormente.

Definição 1.4.1 (Convergência Fraca): Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Entãoo $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle\varphi, u_\nu\rangle \to \langle\varphi, u\rangle\,, \forall u \in E'$

Definição 1.4.2 (Convergência Fraca Estrela): Sejam E um espaço de *Banach*, $\varphi \in E'$e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de E'. Diz-se $\varphi_\nu \to \varphi$ fraco $\star$ se, e somente se, $\langle\varphi_\nu, u\rangle \to \langle\varphi, u\rangle\,, \forall u \in E$

Teorema 1.4.1 - (Banach - Steinhaus):

Sejam E e F dois espaços de Banach. Seja $(T_i)_{i\in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de E em F.

Suponhamos que $\sup\limits_{i\in I} \|T_i X\| < \infty$, $\forall\ x \in E$. Então: $\sup\limits_{i\in I} \|T_i X\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$

Dito de outro modo, existe uma constante C tal que $\|T_i x\| \leq C\|x\|$, $\forall\ x \in E$ e $\forall\ i \in I$

Demonstração: Veja [3]

Proposição 1.4.1: Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma sucessão em E. Se verifica:

(I) $[x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')]$ $[\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall\ f \in E']$

(II) Se $x_n \to x$ fortemente, então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E, E')$

(III) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E, E')$, então $\|x_n\|$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

(IV) Se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \to f$ fortemente em E'(isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$

Demonstração: Veja [3]

Observação 1.4.1- A parte (III) da proposição (1.1) é uma consequência do teorema de Banach-Steinhaus.

Proposição 1.4.2 - Seja E um espaço de Banach e (f_n) uma sucessão em E'. Se verifica:

(I) $[f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f\ \ em\ \ \sigma(E', E)] \Longleftrightarrow [\langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle, \forall\ \ x \in E]$

(II) Se $f_n \to f$ forte, então $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$

(III) Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$, então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$

(IV) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$, então $\|f_n\|$ esta limitada e $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

(V) Se Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em $\sigma(E', E)$ e se $x_n \to x$ fortemente em E, então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [3]

Teorema 1.4.2: Seja E um espaço de Banach separável e seja (f_n) uma sucessão limitada em E'. Então existe uma subsucessão (f_{n_k}) que converge na topologia $\sigma(E', E)$.

Demonstração: Veja [3]

Teorema 1.4.3 (Banach-Alaoglu):

Sejam E um espaço de Banach separável e E' o seu dual topológico. Então o conjunto:

$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca estrela.

Demonstração: Ver [16].

Lema 1.4.1: (Compacidade de Aubin-Lions): Sejam $1 < p_i < \infty$, $i = 0, 1$ e B_0, B, B_1 espaços de Banach sendo que B_0 e B_1 são reflexivos tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$ ($\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta). Para $0 < T < \infty$, consideremos o espaço

$W = \{w;\ \ w \in L^{p_0}(0, T; B_0)\ \ e\ \ w' \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$, com a norma

$\|w\|_W = \|w\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|w\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$. Então:

(I) W é um espaço de Banach

(II) $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p_0}(0, T; B)$

Demonstração: Ver [16]

Observação 1.4.1: Como conseqüência da Compacidade de Aubin-Lions, temos que se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue que existe uma subseqüência $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de (u_ν) tal que $u_{\nu_k} \longrightarrow u$ forte em $L^2(0, T; B)$.

Teorema de Carathéodory - Prolongamento de Solução

O próximo resultado, é de grande importância para solução de nosso problema principal, visto que, nos permite prolongar a solução, ou seja, a solução se torna global. Vejamos primeiramente algumas condições para depois enunciarmos e demonstrarmos o teorema a seguir.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se:

$i)$ $f(t, x)$ é mensurável em t, para cada x fixo;

$ii)$ $f(t, x)$ é contínua em x, para cada t fixo;

$iii)$ Para cada compacto K em D, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que:

$$|f(t, x)| \leq m_K(t), \forall (t, x) \in D \tag{1.1}$$

Consideremos o retângulo $R = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\right\}$, com $a, b > 0$.

Teorema 1.4.4 (Carathéodory): Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então, sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ ($\beta > 0$), existe uma solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Prova: Vamos mostrar para o caso $t \geq \tau$. Definimos a função M

$$M(t) = 0 \quad (t < \tau) \tag{1.3}$$

$$M(t) = \int_{\tau}^{t} m(s)ds \ (\tau \leq t \leq \tau + a) \tag{1.4}$$

M é contínua e não decrescente, pois $m(t) \geq 0$

$M(\tau) = 0$

Portanto, $(t, \xi \pm M(t)) \in R$ para algum intervalo $\tau \leq t \leq \tau + \beta$. Escolhendo β de modo que $\tau + \beta \leq \tau + a$ definimos as seguintes aproximações φ_j $(j = 1, 2, \ldots)$ por:

$$\varphi_j(t) = \xi \quad \left(\tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j}\right) \tag{1.5}$$

$$\varphi_j(t) = \xi + \int_{\tau}^{t-\beta/j} f(s, \varphi_j(s))ds \quad \left(\tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \beta\right) \tag{1.6}$$

Note que $\varphi_1(t) = \xi\ \forall t \in (\tau, \tau + \beta)$

Fixado $j \geq 1$ a integral em (1.6) só tem sentido se:

$$\tau < t - \frac{\beta}{j} < \tau + \frac{\beta}{j} \Leftrightarrow \tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \frac{2\beta}{j}$$

Daí segue, que em (1.6) tem-se φ_j contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \dfrac{\beta}{j}$ e, pelo exposto acima, desde que $(t, \xi) \in R$ a equação (1.6) define φ_j como uma função contínua no intervalo $\tau + \dfrac{\beta}{j} < t \leq \tau + \dfrac{2\beta}{j}$ e além disso, temos:

$$\varphi_j(t) = \xi + \int_\tau^{t-\beta/j} f(s,\varphi(s))ds \Rightarrow |\varphi_j(t) - \xi| = \left|\int_\tau^{t-\beta/j} f(s,\varphi(s))ds\right|$$

$|\varphi_j(t) - \xi| \leq \displaystyle\int_\tau^{t-\beta/j} |f(s,\varphi(s))|ds \Rightarrow |\varphi_j(t) - \xi| \leq \int_\tau^{t-\beta/j} m(s)ds$, por (1.1) e, portanto,

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right) \tag{1.7}$$

Afirmação:

$\varphi_j(t)$ é uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau+\beta$. Provamos essa afirmação usando indução finita

Para $n = 1$ ok!

Suponha que para $n = k$, φ_j esteja definida em $\tau \leq t \leq \tau + \dfrac{k\beta}{j}$ para $1 < k < j$. Assim temos que:

$$\varphi_j(t) = \xi + \int_\tau^{\tau - \frac{k\beta}{j}} f(s,\varphi_j(s))ds.$$

De modo análogo, concluímos que $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau + \dfrac{k\tau}{j} \leq t \leq \tau + \dfrac{(k+1)\tau}{j}$. Portanto, $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \dfrac{(k+1)\tau}{j}$. É fácil ver que φ_j satisfaz (1.7).

Segue-se então que, por indução, (1.6) define φ_j como uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau+\beta$, para todo $j \in \mathbb{N}$ satisfazendo:

$$\left|\begin{array}{lcll} \varphi_j(t) & = & \xi & \tau \leq t \leq \tau + \dfrac{\beta}{j} \\ |\varphi_j(t) - \xi| & \leq & M\left(t - \dfrac{\beta}{j}\right) & \tau + \dfrac{\beta}{j} \leq t \leq \tau + \beta \end{array}\right.$$

Afirmação:

φ_j é equicontínua

Devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer t_1, t_2 tais que $|t_1 - t_2| < \delta$ temos $|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| < \epsilon \ \ \forall j$. Sabemos que:

$$|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| \leq \left| M\left(t_1 - \frac{\beta}{j}\right) - M\left(t_2 - \frac{\beta}{j}\right) \right|$$

Sendo M contínua em $[\tau, \tau + \beta]$ vem que M é uniformemente contínua. Logo,

$$|t_1 - t_2| = \left| \left(t_1 - \frac{\beta}{j}\right) - \left(t_2 - \frac{\beta}{j}\right) \right| < \delta \Rightarrow \left| M\left(t_1 - \frac{\beta}{j}\right) - M\left(t_2 - \frac{\beta}{j}\right) \right| < \epsilon.$$

Donde segue nossa afirmação.

Afirmação:

φ_j é equilimitada

Note que $|\varphi_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \dfrac{\beta}{j}\right) \forall j \in \mathbb{N}$

Sendo M contínua em $[\tau, \tau + \beta]$ logo limitada, então existe $C > 0$ tal que $|M(t)| \leq C$. Desde que:

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right)$$

Segue que $|\varphi_j(t)| \leq |\xi| + C \quad \forall j \in \mathbb{N}$

Desta forma, a sequência (φ_j) está nas condições do teorema de Àrzela-Ascoli, Assim existe uma subsequência (φ_{j_k}) que converge uniformemente em $[\tau, \tau + \beta]$ para uma função continua φ. Mostremos que tal função limite, é solução de (1.2)

Sendo $f(t, x)$ contínua em x para cada t fixo decorre que: $f(t, \varphi_{j_k}(t)) \longrightarrow f(t, \varphi(t)) \ \forall t \in \mathbb{R}$

Usando (1.1) segue que: $|f(t, \varphi_{j_k})(t)| \leq m(t)$

Desde que $m(t)$ é Lebesgue integrável a função f está nas condições do teorema da convergência dominada de Lebesgue, resultando portanto:

$$\lim_{k \to \infty} \int_\tau^t f(s, \varphi_{j_k}(s))ds = \int_\tau^t f(s, \varphi(s))ds$$

Para todo $t \in [\tau, \tau + \beta]$ temos:

$$\varphi_{j_k}(t) = \xi + \int_{\tau}^{t} f(s, \varphi_{j_k}(s))ds - \int_{t-\beta/j_k}^{t} f(s, \varphi_{j_k}(s))ds$$

Quando, $k \to \infty$ o segundo termo integral tende a zero, e usando as considerações anteriores vem que:

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

Donde segue o resultado.

Corolário 1.4.1 (Prolongamento de solução):

Seja $D = [0, \omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja ainda $\varphi(t)$ uma solução de:

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ \\ X(0) = X_0, \ \ |X_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha, $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0, \omega]$.

Demonstração: Ver [10].

Lema 1.4.1 (Lema de Gronwall) : Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas.

Se $\varphi(t) \leq \alpha + \int_{a}^{t} \varphi(s) \psi(s) ds$, (com $\alpha \geq 0$), então: $\varphi(t) \leq \alpha \exp \left[\int_{a}^{t} \psi(s) ds \right], \forall t \in [a, b]$.

Em particular, $\varphi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração:

Fazendo $\omega(t) = \alpha + \int_{a}^{t} \varphi(s) \psi(s) ds$, decorre da hipótese que $\varphi(t) \leq \omega(t)$ e pelo teorema fundamental do cálculo, segue que $\omega'(t) = \varphi(t) \psi(t)$. Logo, $\omega'(t) \leq \omega(t) \psi(t)$, donde segue:

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \psi(t)$$

Integrando a última desigualdade de a até t, obtemos:

$$\int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)} ds \leq \int_a^t \psi(s)\, ds$$

Assim,

$$\int_a^t \frac{d}{ds} \ln(\omega(s))\, ds \leq \int_a^t \psi(s)\, ds$$

Portanto,

$\ln\left(\dfrac{\omega(t)}{\omega(a)}\right) \leq \displaystyle\int_a^t \psi(s)\, ds$, isto é,

$$\omega(t) \leq \alpha \exp\left(\int_a^t \psi(s)\, ds\right), \quad t \in [a,b]$$

Desta desigualdade e de $\varphi(t) \leq \omega(t)$, segue o Lema.

Lema 1.4.2: Seja $\gamma(t)$ contínua e não-negativa em $[0,T]$. Se:

$\gamma(t) \leq C_1 + C_2 \displaystyle\int_a^t \left[\gamma(t) + \gamma(t)^2\right] ds, \;\; 0 \leq t \leq T$, então existem $T_0 > 0$ e $C > 0$ tais que:

$\gamma(t) \leq C, \forall t \in [0,T_0] \;\; C_1, C_2 \geq 0.$

Demonstração:

Sejam $\varphi(t) = \displaystyle\int_a^t \left[\gamma(t) + \gamma(t)^2\right] ds$ e $Y(t) = C_1 + C_2\varphi(t)$.

Decorre da hipótese que:

$$\gamma(t) \leq C_1 + C_2\varphi(t)$$

Ou ainda,

$$\gamma^2(t) \leq [C_1 + C_2\varphi(t)]^2$$

E pelo Teorema Fundamental do Cálculo segue,

$\varphi^{'}(t) = \gamma(t) + \gamma(t)^2$, logo,

$$\varphi^{'}(t) \leq Y(t) + Y^2(t) \tag{1.8}$$

Por outro lado, $Y^{'}(t) = C_2\varphi^{'}(t) \leq C_2\left[Y(t) + Y^2(t)\right]$, daí segue:

$$Y^{'}(t) \leq C_2\left[Y(t) + Y^2(t)\right], \ \ 0 \leq t \leq T \tag{1.9}$$

Observando que:

$\dfrac{d}{dt}\left[Y(t)e^{-c_2t}\right] = Y^{'}(t)e^{-c_2t} + C_2Y(t)e^{-c_2t}$ e aplicando em (1.9), segue

$$\frac{d}{dt}\left[Y(t)e^{-c_2t}\right] \leq C_2Y^2(t)e^{-c_2t} \tag{1.10}$$

Integrando a última desigualdade de 0 até T e notando que $Y(0) = C_1$, resulta:

$$Y(t) \leq C_1e^{c_2t} + C_2e^{c_2t}\int_0^t Y^2(s)e^{-c_2s}ds \tag{1.11}$$

Seja $z(t) = \displaystyle\int_0^t Y^2(s)e^{-c_2s}ds$. Assim resulta de (1.11) que $Y(t) \leq \left[C_1 + C_2z(t)\right]e^{c_2t}$ e, novamente pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$z^{'}(t) = Y^2(t)e^{-c_2s}dt$$

Logo,

$z^{'}(t) \leq \left[C_1 + C_2z(t)\right]^2 e^{c_2t}$, donde segue, $\dfrac{z^{'}(t)}{\left[C_1 + C_2z(t)\right]^2} \leq e^{c_2t}$

Integrando a última desigualdade de 0 até t, obtemos:

$$\int_0^t \frac{z^{'}(t)}{\left[C_1 + C_2z(t)\right]^2}dt \leq \int_0^t e^{c_2t}dt$$

Daí segue,

$-\dfrac{1}{\left[C_1 + C_2z(t)\right]} + \dfrac{1}{C_1} \leq \dfrac{e^{c_2t}}{C_2} - \dfrac{1}{C_2}$, ou ainda, $\dfrac{1}{\left[C_1 + C_2z(t)\right]} \geq \dfrac{1}{C_1} - \dfrac{e^{c_2t}}{C_2} + \dfrac{1}{C_2}$

Agora suponha que,

$$\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 t}}{C_2} + \frac{1}{C_2} > 0 \iff \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} > \frac{e^{c_2 t}}{C_2} \iff C_2 t < \ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)$$

Logo,

$$t < \frac{1}{C_2}\ln\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)$$

Seja $T^* = \dfrac{1}{C_2}\ln\left(1 + \dfrac{C_2}{C_1}\right)$ onde $T^* > 0$

Escolha T_0 tal que $0 < T_0 < T^*$, então $0 \leq t \leq T_0$ isto implica que:

$C_1 + C_2 z\left(t\right) \leq \left[\dfrac{1}{C_1} - \dfrac{e^{c_2 t}}{C_2} + \dfrac{1}{C_2}\right]^{-1}$, ou ainda, $C_1 + C_2 z\left(t\right) \leq \left[\dfrac{1}{C_1} - \dfrac{e^{c_2 T_0}}{C_2} + \dfrac{1}{C_2}\right]^{-1}$

Assim,

$$Y\left(t\right) \leq \left(C_1 + C_2 z\left(t\right)\right) e^{c_2 t}$$

Por outro lado,

$$\left(C_1 + C_2 z\left(t\right)\right) e^{c_2 t} \leq \left[\frac{1}{C_1} - \frac{e^{c_2 T_0}}{C_2} + \frac{1}{C_2}\right] e^{c_2 T_0}$$

Portanto,

$$Y\left(t\right) \leq C, \;\; 0 \leq t \leq T_0$$

Desta desigualdade e $\gamma\left(t\right) = Y\left(t\right)$, segue o Lema

Capítulo 2

Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev

Neste capítulo vamos introduzir à teoria de Distribuições e os Espaços de Sobolev, tais tópicos, nos permitem extender o conceito de solução de uma e.d.p. No que se segue, estaremos fazendo definições, notações, proposições, lemas e teoremas que servirão de base teórica para o bom entendimento do problema principal. Dessa maneira, não nos preocuparemos com todas as demonstrações dos resultados utilizados de forma preliminar, mas mencionaremos o referencial bibliográfico para posterior consulta.

2.1 Teoria das Distribuições Escalares

2.1.1 Espaços Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ, ao fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denota-se o suporte de φ por $supp\,(\varphi)$. Simbolicamente, tem-se:

$$supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi\,(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula e valem as seguintes relações:

1) $supp\,(\varphi + \psi) \subset supp\,(\varphi) \cup supp\,(\psi)$

2) $supp\,(\varphi\psi) \subset supp\,(\varphi) \cap supp\,(\psi)$

3) $supp\,(\lambda\varphi) = \lambda \;\; supp\,(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 2.1.1: Seja $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = 1, \forall x \in (0,1)$:

Verifica-se que o $supp\,(\varphi) = (0,1)$,não é um conjunto compacto.

Neste nosso estudo, damos um destaque especial as funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω que , sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito defininamos o espaços $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis e suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Exemplo 2.1.2: Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\quad r > 0$, denotamos por $B_r\,(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 de raio r, isto é, $B_r\,(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}$. Se $B_r\,(x_0) \subset \Omega$, define-se $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\varphi\,(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{r^2}{\|x - x_0\|^2 - r^2}\right) & \text{se } \|x - x_0\| < r \\ \\ 0 & \text{se } \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verificamos que $supp\,(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $C_0^\infty(\Omega)$ é não vazio. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares continuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$

Observação 2.1.1: Por um multi-índice, entendemos, uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denotamos por $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α o operador derivação parcial, de ordem $|\alpha|$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$

A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

2.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

$i)$ Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$supp\,(\varphi) \subset K$ e $supp(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $D^{\alpha}\varphi_n \longrightarrow D^{\alpha}\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^{\infty}(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$, e é denominado espaços das funções testes.

Observação 2.1.2: Sendo Ω limitado, obtemos $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)\ \forall\ p$, tal que $1 \leq p < \infty$, com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que:

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p\, dx \leq \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|^p\, m(\Omega) < \infty$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, seja $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que:

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx \to 0 \text{ note que,}$$

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx = \int_{K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx$$

$$= \int_{K} \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p\, dx = 0$$

Podemos ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [12]

2.1.3 Distribuições Escalares

Com o intuito de generalizar o conceito de funções sobre Ω, introduz-se o conceito de distribuições escalares.

Denomina-se distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $T(\varphi_\nu) \to T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

O valor da distribuição T na função teste φ, é denotado por $\langle T, \varphi \rangle$. Muniremos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, converge para T, quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω, com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuições que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 2.1.1: Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω.quando u é integrável á Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos:

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int_K |u(x)|\, dx < \infty \text{ para todo compacto } K \subset \Omega.$$

Exemplo 2.1.3: Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x) \varphi(x)\, dx$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω.

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta-nos mostrar que T_u é contínua; seja dada uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ. Então:

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| = |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| &= \left| \int_\Omega u(x) (\varphi_\nu - \varphi)(x)\, dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |u(x) (\varphi_\nu - \varphi)(x)|\, dx \\ &\leq \sup |\varphi_\nu - \varphi| \int_\Omega |u(x)|\, dx \to 0. \end{aligned}$$

Pois, $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u"e, usando

Lema Du Bois Raymond, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 2.1.1 (de Du Bois Raymond): Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: ver [12].

Vale ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.4: Seja x_0 um ponto de Ω e definamos a função $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \varphi(x_0)$$

É fácil verificar que δ_{x_0} é uma distribuição. Tal distribuição é conhecida por **Distribuição de Dirac**, em homenagem ao físico inglês Paul A.M. Dirac (1902-1984). Entretanto, mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

De fato, suponhamos que a distribuição δ_{x_0} é definida por alguma função

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então tem-se:

$$< \delta_{x_0}, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Tomando $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por: $\xi(x) = \|x - x_0\|^2 \varphi(x)$, segue-se que:

$$\xi(x_0) =< \delta_{x_0}, \xi >= \int_\Omega u(x) \|x - x_0\|^2 \varphi(x)dx = 0, \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Portanto, tem-se $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ quase sempre em Ω, logo $u(x) = 0$ quase sempre em Ω, isto é, $< \delta_{x_0}, \varphi >= 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que é uma contradição.

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas:

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^P(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), 1 \leq p < \infty$$

2.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$

A motivação no conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional, dado por **Sobolev**, se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índece. A derivada (no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear:

$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, tal que:

$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação:

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que:

$$\lim_{v \longrightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \longrightarrow \infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Observação 2.1.2: Outro resultado interessante a ser mercionado é que a derivada de uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, que não é, em geral, uma função $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.5: Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$, basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato:

$$< u', \varphi >= - < u, \varphi' >= - \int_0^\infty \varphi'(x)dx = \int_\infty^0 \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \delta_0, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de ***Espaços de Sobolev***.

Observação 2.1.3: Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é:

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u} \forall |\alpha| \leq k,$$

é uma conseqüência simples da fórmula de integração de ***Gauss***.

2.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os ***espaços de Sobolev***.

2.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira bastante regular Γ. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$, pois estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$; tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev.*

O espaço vetorial $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das (classes de) funções reais $v : \Omega \to \mathbb{R}$, mensuráveis, tais que $|v|^p$ é integrável a *Lebesgue* em Ω.

Este espaço quando munido da norma:

$$|v|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

é espaço de *Banach* Ver [3].

O conjunto de todas as funções mensuráveis v essencialmente limitadas em Ω é denotado por $L^\infty(\Omega)$, define-se a norma de v por:

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = supess \, |v(x)|, \forall v \in L^\infty(\Omega)$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é também um espaço de *Banach* Ver [3].

No caso particular onde $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*. Neste caso o produto interno é dado por:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x) \, v(x) \, dx,$$

cuja norma induzida é:

$$|u|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{multi-índice, com } \ |\alpha| \leq m\}$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach.*

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, denotamos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) ; D^{\alpha} u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \ \ |\alpha| \leq m\} \ ,$$

as derivadas D^{α}, evidentemente, no sentido das distribuições.

Define-se em $H^m(\Omega)$ o produto escalar:

$$((u,v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^{\alpha} u, D^{\alpha} v)_{L^2(\Omega)} \, dx, \forall u, v \in H^m(\Omega),$$

com norma induzida por este produto escalar dada por:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^{\alpha} u)^2_{L^2(\Omega)} \, dx \right)^{1/2}$$

Mostra-se que $H^m(\Omega)$ é espaço de *Hilbert separável.*ver [11]

Para se ter uma idéia mais apurada dos espaços de Sobolev, descrevemos alguns casos particulares.

Em dimensão $n = 1$, temos,

$$H^1(a,b) = \left\{u \in L^2(a,b) ; u' \in L^2(a,b)\right\}, \ \ u' = \frac{du}{dt}$$

Neste caso

$$\|u\|^2_{H^1(a,b)} = \int_a^b [u(t)]^2 \, dt + \int_a^b [u'(t)]^2 \, dt$$

Em dimensão $n \geq 2$, teremos

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \ i = 1, \ldots, n \right\}$$

e neste caso,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega [u(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2 \, dx_1 dx_2 \ldots dx_n + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

ou, de modo mais conciso, escrevemos

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

É oportuno observar que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior"que a norma de $L^p(\Omega)$ e por isso $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos seqüência convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$ denotaremos esta aderência por $H_0^m(\Omega)$.

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos *Espaços de Sobolev* e por conseguinte, na Teoria das EDP's.

O Traço em $H^1(\Omega)$

Demonstra-se que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, onde $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é o conjunto $\{\varphi_{|\overline{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ que se pode definir a restrição à fronteira Γ de Ω. Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathcal{N}}$ em $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \ \text{ em } \ H^1(\Omega)$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k|_\Gamma ,$$

sendo o limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$. O operador γ_0, denominado operador de traço, que é contínuo, linear cujo o núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0 \varphi$ assim podemos caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por: $H_0^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega); \ \varphi_{|\Gamma} = 0 \right\}$. A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e, no caso $m=2$, temos:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega)\,;\varphi_{|\Gamma} = 0,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_\Gamma = 0 \right\}$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|_{\mathcal{D}(\Omega)}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p=2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual recebe a notação $H^{-m}(\Omega)$. A seguir anunciaremos sem demonstrar o teorema que caracteriza o $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 2.2.1: Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem funções $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.

Demonstração: ver [9]

Proposição 2.2.1: [Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$] Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de $L^2(\Omega)$, tais que:

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Demonstração: ver [15]

De posse destes dois resultados podemos concluir que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 2.2.1:(Desigualdade de Poincaré) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\, |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}$$

Demonstração: Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado na direção do eixo x_1. Sendo $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funçõesde $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \to v$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\varphi_\nu \to v \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ em } L^2(\Omega), \; i = 1, 2, \ldots, n$$

Como Ω é limitado, existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in \Omega \;\; a < proj\ x < b$ onde a $proj\ x$ é a projeçãode x sobre o eixo coordenado x_1, agora dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, e $\varphi(a, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Temos:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi$$

E da desigualdade de *Schwartz*, obtemos:

$$|\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2 = \left(\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi \right)^2 \le (b-a) \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 d\xi$$

Aplicando o *Teorema de Fubini* temos:

$$\int_\Omega |\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2\, dx \le (b-a) \int_\Omega \int_a^b \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 d\xi dx$$

$$\le (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right|^2 dx$$

Portanto,

$$|\varphi|_{L^2(\Omega)} \le (b-a) \left[\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|^2_{L^2(\Omega)} \right]^{1/2}$$

Logo,

$$|u|^2_{L^2(\Omega)} \le C\, |\nabla u|^2_{L^2(\Omega)}$$

Observação 2.2.1: Utilizando desigualdade de Poincaré podemos concluir que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

De fato, consideremos a norma em $H_0^1(\Omega)$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se:

$$\|v\|^2_{H^1(\Omega)} = |v|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)} \ge |\nabla v|^2_{L^2(\Omega)}$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, obtém-se:

$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1+C)\,|\nabla v|_{L^2(\Omega)}^2$

Conclui-se das desigualdades acima que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

2.3 Espaços $L^p\,(0,T;X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real, com a norma $\|\ \cdot\ \|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E. Uma função vetorial $\varphi :]0,T[\, \to X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0,T) \longrightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi\,(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i}\varphi_i$$

onde cada $E_i \subset (0,T)$ é mensurável, $i = 1,2,\ldots,k$, e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos, $m\,(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1,2,\ldots,k$, definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi\,(t)\,dt = \sum_{i=1}^{k} m\,(E_i)\,\varphi_i$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0,T) \longrightarrow X$ é Bochner integrável ($\mathcal{B} - \textit{integrável}$) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

(i) $\varphi_\nu \longrightarrow u$ em X, q.s em $(0,T)$;

(ii) $\displaystyle\lim_{k,m\longrightarrow\infty} \int_0^T \|\varphi_k\,(t) - \varphi_m\,(t)\|_X\,dt = 0$

Neste caso, a integral de *Bochner* de u, é por defini ção, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u\,(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \varphi_\nu\,(t)\,dt$$

onde o limite é considerado na norma de X.

Uma função vetorial $u : (0,T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{X}$ é fracamente mensurável quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X; dizemos que u é fortemente mensurável quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é integrável a Lebesgue.

Aqui denotaremos por $L^p(0,T;X)\,, 1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0,T) \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis e tais que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lesbegue em $(0,T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;H)$ é também um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$(u,v)_{L^2(0,T;H)} = \int_0^T (u(s)\,, v(s))_H \, ds$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representaremos o espaço de Banach das (classes de) funções

$u : (0,T) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{X}$,

que são fortemente mensuráveis e tais que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$. A norma em $L^\infty(0,T;X)$ é definida por

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} = supess_{t \in]0,T[}\, ||u(t)||_X$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0,T;X')$, onde p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral:

$$\langle u, v \rangle_{(L^p(0,T;X))' \times L^p(0,T;X)} = \langle u, v \rangle_{L^q(0,T;X') \times L^p(0,T;X)}$$

Definição 2.3.1: Uma função $f : [0,T] \to X$ é integrável se existe uma seqüência $\{S_k\}_k$ de funções vetoriais simples, tal que,

$$\int_0^T ||S_k(t) - f(t)||_X dt \to 0, \text{ com } k \to \infty$$

se f é integrável, define-se

$$\int_0^T f(t)d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_0^T S_k(t)dt$$

A expressão $\displaystyle\int_0^T f(t)d\mu$ é dita integral de Bochner de f, em relação a μ.

Exemplo 2.3.1: Sejam $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$. Consideremos a função $T_u : \mathcal{D}(0,T) \longrightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(s)\varphi(s)\,ds,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner em X. A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(0,T)$ em X e por esta razão é denominada distribuição vetorial. A distribuição T_u é univocamente determinada por u e, neste sentido, podemos identificar u com a distribuição T_u por ela definida e, portanto, $L^p(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X)$ com injeção contínua e densa.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, o qual denotaremos por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 2.3.1: Seja $T \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^nT}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n\varphi}{dt^n} \right\rangle \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0,T)$$

Por $C^0([0,T];X)$, $0 < T < \infty$, estamos representando o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X$$

Por $C_w^0([0,T];X)$, denotaremos o espaço das funções $u : [0,T] \longrightarrow X$ fracamente contínuas, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t)\rangle_{X',X}$ é contínua em $[0,T], \forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de Hilbert, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \longmapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$.

2.4 Um Resultado de Regularidade

Vamos enunciar e demonstrar um teorema sobre regularidade, que será de grande importância para garantir as condições do teorema de existência, antes porém, precisamos de três lemas auxiliares, os quais omitiremos as devidas provas (ver [11]). Vejamos:

Lema 2.4.1: Se $u \in L^2(0,T,X)$, $u' \in L^2(0,T,X')$ e $\theta \in C^\infty([0,T])$, então:

1) $\dfrac{d}{dt}(u,\eta)_X = \langle u', \eta\rangle_{X'X}\ \ \forall \eta \in X$

2) $\dfrac{d}{dt}(\theta u) = \theta u' + \theta' u$

Lema 2.4.2: Consideremos o espaço de Hilbert $W = \{u;\ \ u \in L^2(0,T;X)\ \ e\ \ u' \in L^2(0,T;X')\}$, como oproduto interno

$$(u,v)_W = (u,v)_{L^2(0,T;X)} + (u',v')_{L^2(0,T;X')}$$

Então o conjunto dos vetores $v = \theta\eta$ com $\theta \in C^\infty([0,T])$ e $\eta \in X$ é total em W.

Lema 2.4.3: Seja $u \in W$ e consideremos um número real $0 < a < T$. Nós estendemos a função u ao intervalo $(-a, T+a)$, da seguinte forma

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} u(-t) & se \quad -a < t \leq 0 \\ u(t) & se \quad 0 < t \leq T \\ u(2T-t) & se \quad T \leq t < T+a \end{cases}$$

Então, claramente $\widetilde{u} \in L^2(-a, T+a; X)$, onde $\dfrac{d\widetilde{u}}{dt} \in L^2(-a, T+a; X')$

Teorema 2.4.1:(de Regularidade) Seja Y um espaço de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$, X é denso em Y e a imersão de X em Y é contínua. Tem-se:

$i)$ Se $u \in W$ então $u \in C^0([0,T];Y)$

$ii)$ Se u, v são funções satisfazendo $i)$ então a função $t \longrightarrow (u(t), v(t))_Y$ é absolutamente contínua e vale a seguinte igualdade:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t))_Y = \langle u'(t), v(t)\rangle_{X'X} + \langle u(t), v'(t)\rangle_{X'X},$$

onde a derivada no primeiro membro da igualdade é a derivada no sentido das distribuições sobre $(0,T)$ da função $(u(t), v(t))_Y$

Demonstração:

$i)$ Entendemos a função u como no Lema 2.4.3. Então

$\widetilde{u} \in L^2(-a, T+a; X)$ e $\widetilde{u}' \in L^2(-a, T+a; X')$.

Definamos a função $w = \theta(t)\widetilde{u}(t)$, onde θ é uma função real continuamente diferenciável tal que $\theta = 1$ em $[0,T]$ e $\theta = 0$ em uma vizinhança de $-a$ e $T+a$.

Consideremos a função $j \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tal que $j(t) \geq 0$, $j(t) = 0$ para $|t| \geq 1$, $j(-t) = j(t)$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} j(t)dt = 1$ e j é decrescente em $[0,\infty)$

Seja $j_\nu(t) = \nu j(\nu t)$, então $j_\nu(t) \geq 0\ \ \forall \nu \in \mathbb{N}$, $j_\nu(-t) = j_\nu(t)$, $supp\ j_\nu \subset \left[-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right]$ e

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} j_\nu(t)dt = 1$

Definamos a sucessão de funções

$$w_\nu(t) = \int_{-a}^{T+a} j_\nu(t-s)w(s)ds$$

Então: $w_\nu \longrightarrow w$ em $L^2(\mathbb{R}; \mathrm{X})$ e $w'_\nu \longrightarrow w'$ em $L^2(\mathbb{R}; \mathrm{X}')$, e por restrição a intervalo $[-a, T+a]$, resulta

- $w_\nu \longrightarrow w \quad \text{em} \quad L^2(-a, T+a; X)$

- $w'_\nu \longrightarrow w' \quad \text{em} \quad L^2(-a, T+a; X')$

Desde que, w se anula numa vizinhança de $-a$ e $T+a$, então

$$w_\nu(t) = \int_{-a+\varepsilon}^{T+a-\varepsilon} j_\nu(t-s)w(s)ds$$

onde $\varepsilon > 0$ independe de $\nu \in \mathbb{N}$. Em particular,

$$w_\nu(-a) = \int_{-a+\varepsilon}^{T+a-\varepsilon} j_\nu(-a-s)w(s)ds$$

Desde que, j_ν é par $\forall \nu$, vem que

$$w_\nu(-a) = \int_{-a+\varepsilon}^{T+a-\varepsilon} j_\nu(a+s)w(s)ds$$

Como $s \in [-a+\varepsilon, T+a-\varepsilon]$ então $a+s \in [\varepsilon, T+2a-\varepsilon]$ e portanto, se tomarmos ν_0 tal que $\dfrac{1}{\nu_0} < \varepsilon$, tem-se que $\forall \nu \geq \nu_0$, $j_\nu(a+s) = 0$. Assim, $w_\nu(-a) = 0 \;\; \forall \nu \geq \nu_0$.

Por outro lado, notando-se que $w'_\nu(t) \in X$, temos:

$$\|w_\nu(t) - w_\mu(t)\|_Y^2 = \int_{-a}^{t} \frac{d}{dt}\|w_\nu(t) - w_\mu(t)\|_Y^2 ds = \int_{-a}^{t} 2(w'_\nu(s) - w'_\mu(s), w_\nu(s) - w_\mu(s))ds$$

$$\leq \int_{-a}^{t} \frac{d}{dt}\|w'_\nu(s) - w'_\mu(s)\|_{X'}^2 ds + \int_{-a}^{t} \frac{d}{dt}\|w_\nu(s) - w_\mu(s)\|_X^2 ds$$

$$\leq \int_{-a}^{T+a} \frac{d}{dt}\|w'_\nu(s) - w'_\mu(s)\|_{X'}^2 ds + \int_{-a}^{T+a} \frac{d}{dt}\|w_\nu(s) - w_\mu(s)\|_X^2 ds$$

De onde resulta que:

- (w_ν) é uma sucessão de Cauchy em $C^0([-a, T+a]; Y)$

Portanto, modificando os valores $w(t)$ nos conjuntos de medida nula, encontra-se que $w(t) \in Y$ e $\|w_\nu(t) - w(t)\|_Y \longrightarrow 0$ uniformemente em $[-a, T+a]$, ou seja, $w \in C^0([-a, T+a]; Y)$ e por restrição ao intervalo $[0,T]$, obtém-se $w \in C^0([0,T];Y)$. Mas, em $[0,T]$ $w = \widetilde{u} = u$. Logo $u \in C^0([0,T];Y)$.

Segue portanto o resultado.

$ii)$ Para esta demonstração indicamos [10], onde se usa os lemas 2.4.1 e 2.4.2.

Capítulo 3

O Sistema Acoplado

3.1 Apresentação do Problema de Evolução

Neste capítulo, temos como objetivo estudar a existência de solução fraca global , unicidade e decaimento exponencial para o sistema (P) dado abaixo:

$$
(\mathrm{P}) \begin{cases} u_t - a(l(u))\Delta u = f_1(v) & em \;\; Q = \Omega \times (0,T) \\ v_t - a(l(v))\Delta v = f_2(u) & em \;\; Q = \Omega \times (0,T) \\ u(t) = v(t) = 0 & sobre \;\; \sum = \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & em \;\; \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) & em \;\; \Omega \end{cases}
$$

Aqui Ω denota um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$. Para cada real fixo, porém arbitrário $T > 0$, Q denota o cilindro $Q = \Omega \times (0,T)$ com fronteira lateral $\sum = \Gamma \times (0,T)$.

A existência será feita, via método de Faedo Galerkin, teorema de compacidade de Aubin-Lions e alguns resultados importantes de Análise Funcional.

O procedimento consiste em:

i) Definir o problema (P) em um espaço de dimensão finita, de forma conveniente, onde teremos um novo problema, que será denominado problema aproximado (PA)

ii) Mostrar que o problema aproximado (PA), possui solução local; a qual denominaremos solução aproximada. Para existência de solução aproximada, transformaremos o sistema referente ao problema aproximado, em um sistema matricial; o qual será equivalente a um sistema de edo's de 1ª ordem. Dessa forma poderemos usar o Teorema de Existência de Carathéodory.

iii) Obter estimativas a priori sobre a sequência de soluções aproximadas. Dessa maneira poderemos fazer a "passagem ao limite"e assim prolongar as soluções ao intervalo $[0, T]$

iv) A passagem ao limite é o último passo, onde vamos mostrar, a partir das estimativas a priori, que a sequência de soluções aproximadas, converge numa topologia conveniente para solução do problema (P).

No que se segue, utilizaremos as seguintes notações: $((\ ,\ ))$; $\|\ \cdot\ \|$; $(\ ,\ )$; $|\ \cdot\ |$, para designar o produto interno e a norma em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ respectivamente. Aqui estamos considerando o espaço $H_0^1(\Omega)$, munido da "norma do gradiente", ou seja, se $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, então $\|u(t)\| = |\nabla u(t)|$. Também, estamos considerando $H^{-1}(\Omega)$ como sendo o dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.

3.2 Hipóteses

Assumiremos as seguintes hipóteses:

$\mathcal{H}_1$) $f_i : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ são Lipschitzianas, ou seja, existem constantes $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2$, tais que:

$|f_i(s) - f_i(t)| \leq \gamma_i |s - t|\ \forall\ s, t \in \mathbb{R}$ e $f_i(0) = 0$

$\mathcal{H}_2$) A aplicação $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, com $0 < m \leq a(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, sendo $m > \dfrac{\gamma}{\lambda_1}$; $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$, onde λ_1 é o primeiro auto-valor associado ao operador $-\Delta$.

$\mathcal{H}_3$) $l : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, é uma forma linear e contínua, isto é, $\exists g \in L^2(\Omega)$ tal que:

$l(u) = l_g(u) = \displaystyle\int_\Omega g(x)u(x)dx\ \forall u \in L^2(\Omega)$

$\mathcal{H}_4$) O operador a é lipschitz-contínuo, com constante A, isto é: $|a(t) - a(t')| \leq A|t - t'|\ \forall\ t, t' \in \mathbb{R}$

3.3 Existência de Solução Fraca Global

Teorema 3.3.1 - Considerando as hipóteses $\mathcal{H}_1$ - $\mathcal{H}_3$ e $(u_0, v_0) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, então existe um par de funções (u, v) tais que:

i) $(u, v) \in \Big[L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T); L^2(\Omega)\Big]^2$

ii) $(u_t, v_t) \in \Big(L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\Big)^2$

iii) $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$

iv) $\displaystyle \frac{d}{dt}(u, h_1) + a(l(u)) \int_\Omega \nabla u.\nabla h_1 dx = \int_\Omega f_1(v) h_1 dx$

v) $\displaystyle \frac{d}{dt}(v, h_2) + a(l(v)) \int_\Omega \nabla v.\nabla h_2 dx = \int_\Omega f_2(u) h_2 dx$

Para toda $h_1, h_2 \in H_0^1(\Omega)$ no sentido $\mathcal{D}'(0, T)$

No que se segue, para demonstração dos ítens (i) e (iii) do Teorema 3.3.1, estaremos usando o resultado sobre regularidade (Teorema 2.4.1).

3.3.1 Problema Aproximado

Consideremos $\{w_j\}_{j\in N}$ como sendo um conjunto ortonormal completo de $H_0^1(\Omega)$, formado por auto-vetores do operador $-\Delta$ e $\{\lambda_j\}_{j\in N}$ a correspondente sequência de auto-valores, em outras palavras,$\{w_j\}_{j\in N}$ é uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$

Para cada $m = 1, 2, 3, ...$, vamos considerar o conjunto $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ como sendo o subespaço gerado por $w_1, w_2, ..., w_m$. O problema aproximado (PA), associado a (P) consiste em encontrar uma solução sob a forma:

$$(u_m(t), v_m(t)) = \left(\sum_{j=1}^m \Theta_{jm}(t) w_j(x), \sum_{j=1}^m \Phi_{jm}(t) w_j(x) \right) \in V_m \times V_m,$$

sendo os coeficientes Θ_{jm}, Φ_{jm} de classe $\mathcal{C}^\infty$, determinados de modo a satisfazer (PA):

$$(PA) \left\| \begin{array}{ll} (u'_m, h_1) - a(l(u_m))(\Delta u_m, h_1) = (f_1(v_m), h_1) & (3.1) \\ (v'_m, h_2) - a(l(v_m))(\Delta v_m, h_2) = (f_2(u_m), h_2) & (3.2) \\ \{u_m(0), v_m(0)\} = \{u_{0m}, v_{0m}\} \;\; em \;\; L^2(\Omega), & \end{array} \right.$$

para todo $h_1, h_2 \in V_m$ e $j = 1, ..., m$.

Aqui, u_{0m} e v_{0m} são aproximações de u_0 e v_0 respectivamente, isto é, sendo u_0 e v_0 pertencentes a $L^2(\Omega)$, podemos aproxima-las por combinações lineares finitas dos w_j, ou seja, existem $\alpha_{jm}, \beta_{jm} \in \mathbb{R}\,(j = 1, ..., m)$ tais que:

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} w_j \longrightarrow u_0, \text{ forte em } L^2(\Omega)$$

$$v_{0m} = \sum_{j=1}^m \beta_{jm} w_j \longrightarrow v_0, \text{ forte em } L^2(\Omega)$$

Logo tem-se $u_m(0) = u_{0m}$ e $v_m(0) = v_{0m}$. E como existe uma única combinação linear de vetores da base V_m, segue-se que $\Theta_{jm}(0) = \alpha_{jm}$ e $\Phi_{jm}(0) = \beta_{jm}$, $(j = 1, ..., m)$.

Substituindo $u_m(t), v_m(t)$ e $h_1 h_2 = w_i(x)$, para $i = 1, ..., m$, em (PA), e usando o fato de que $\{w_j\}$ em $H_0^1(\Omega)$ temos:

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} \Theta'_{jm}(t) w_j(x), w_i(x)\Big) - a\Big(l\Big(\sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t) w_j(x)\Big)\Big)\Big(\Delta\Big(\sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t) w_j(x)\Big), w_i(x)\Big)$$

$$= (f_1(v_m), w_i(x))$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} \Phi'_{jm}(t) w_j(x), w_i(x)\Big) - a\Big(l\Big(\sum_{j=1}^{m} \Phi_{jm}(t) w_j(x)\Big)\Big)\Big(\Delta\Big(\sum_{j=1}^{m} \Phi_{jm}(t) w_j(x)\Big), w_i(x)\Big)$$

$$= (f_2(u_m), w_i(x)),$$

ou seja,

$$(\overline{PA}) \begin{cases} \Theta'_{jm}(t) - \lambda_j a(l(u_m))\Theta_{jm}(t) = (f_1(v_m), w_j) & (3.3) \\ \Theta_{jm}(0) = \alpha_{jm} \ \ (j = 1, ..., m) & \\ \Phi'_{jm}(t) - \lambda_j a(l(v_m))\Phi_{jm}(t) = (f_2(u_m), w_j) & (3.4) \\ \Phi_{jm}(0) = \beta_{jm} \ \ (j = 1, ..., m) & \end{cases}$$

Forma Matricial

Vejamos agora a adequação de nosso problema à forma matricial, onde, por questão de simplificação trabalharemos apenas com a equação (3.3) de $(\overline{PA})$, para (3.4) o resultado é análogo. Vejamos:

Fazendo $j = 1$ até m em (3.3), teremos o seguinte sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Theta'_{1m} \\ \Theta'_{2m} \\ \vdots \\ \Theta'_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a(l(u_m)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m a(l(u_m)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{1m} \\ \Theta_{2m} \\ \vdots \\ \Theta_{mm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (f_1(v_m), w_1) \\ (f_1(v_m), w_2) \\ \vdots \\ (f_1(v_m), w_m) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$X' = AX + B$, onde se tem:

$$X' = \begin{bmatrix} \Theta'_{1m} \\ \Theta'_{2m} \\ \vdots \\ \Theta'_{mm} \end{bmatrix}; \mathrm{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a(l(u_m)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m a(l(u_m)) \end{bmatrix}; \mathrm{X} = \begin{bmatrix} \Theta_{1m} \\ \Theta_{2m} \\ \vdots \\ \Theta_{mm} \end{bmatrix} e\, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} (f_1(v_m), w_1) \\ (f_1(v_m), w_2) \\ \vdots \\ (f_1(v_m), w_m) \end{bmatrix}$$

Observe que podemos escrever:

$$\begin{cases} X' = AX + B = F(t, X) \\ \\ X(0) = X_0, \quad onde \quad X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix}^T \end{cases} \tag{3.5}$$

Temos portanto um sistema matricial equivalente a um sistema de edo's de 1ª ordem.

Mostremos que o sistema (3.5) encontra-se nas condições de Carathéodory.

Verificando as Condições de Carathéodory para o sistema (3.5):

1) **Fixemos X:**

Nosso objetivo aqui, é mostrar que as matrizes A e B são mensuráveis em t. Vejamos:

Observe que a matriz A é formada, pelos elementos: $\lambda_j a(l(u_m))$ com $j = 1, 2, ..., m$. Como por $\mathcal{H}_3$, l é uma forma linear e contínua e por $\mathcal{H}_2$ o operador a é contínuo, segue-se que a composição $a(l(u_m))$ também é contínua; logo $\lambda_j a(l(u_m))$ também o será para $j = 1, 2, ..., m$. Dessa forma A é mensurável em t.

Agora, observemos que B é formada pelos elementos $(f_1(v_m), w_j)$, com $j = 1, 2, ..., m$. Como $f_1 \in Lip_{\gamma_1}(s)$ e $w_j \in H_0^1(\Omega)$, configura a continuidade de $(f_1(v_m), w_j)$ consequentemente a continuidade de B e por conseguinte sua mensurabilidade.

2) **Fixemos t:**

Mostremos agora, que F é contínua em X.

De fato, note que B é contínua em X, pois é constante em relação a X.

Agora, para continuidade de AX, basta verificarmos que A é contínua em X. Vejamos:

Seja $\prod_j(X) = \Theta_{jm}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ a projeção $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, que é contínua.

Tomemos $\sigma(X) = \prod_j(X) w_j$

Para cada t fixo, como: $u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t)w_j$, podemos considerar a função:

$$X \longrightarrow a(l(u_m)) = a\Big(l\Big(\sum_{j=1}^{m} \Theta_{jm}(t)w_j\Big)\Big) = a\Big(l\Big(\sum_{j=1}^{m} \prod_{j}(X)w_j\Big)\Big),$$

ou seja,

$$X \longrightarrow a\Big(l\Big(\prod_1 w_1 + ... + \prod_m w_m\Big)\Big)$$

Pela hipótese $\mathcal{H}_3$, o fato de que combinação linear de função contínua também é contínua e a composição de funções contínuas é contínua, então A é contínua em X.

Desta maneira fixado t, a função $F(t, X)$ é contínua em X

3) Seja K um compacto de $D = [0, T] \times E$, onde se tem:

$$E = \{X \in \mathbb{R}^{m\times 1};\ \ \|X\|_{\mathbb{R}^{m\times 1}} \leq \overline{\gamma},\ \ \overline{\gamma} > 0\}$$

Devemos mostrar que existe uma função real $m_k(t)$, integrável em $[0, T]$, tal que:

$\|F(t, X)\|_{\mathbb{R}^{m\times 1}} \leq m_k(t)$, $\forall\ (t, X) \in D$.

Sabemos que em $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, todas as normas são equivalentes, então consideraremos $\|\ \cdot\ \|_{pq}$ a norma do máximo em $\mathbb{R}^{pq}$.

Como $F(t, X) = AX + B$, segue-se que:

$$\|F(t, X)\|_{m\times 1} \leq \|AX\|_{m\times 1} + \|B\|_{m\times 1}$$

Porém, como $\|AX\|_{m\times 1} \leq \|A\|_{m\times m}\|X\|_{m\times 1}$, então:

$$\|F(t, X)\|_{m\times 1} \leq \|A\|_{m\times m}\|X\|_{m\times 1} + \|B\|_{m\times 1}$$

Como $X \in E$, temos que $\|X\|_{m\times 1} \leq \overline{\gamma}$. Dessa maneira, a desigualdade acima fica:

$$\|F(t, X)\|_{m\times 1} \leq \overline{\gamma}\|A\|_{m\times m} + \|B\|_{m\times 1}$$

Observe que $\lambda_j a(l(u_m))$, com $j = 1, 2, ..., m$ são funções contínuas. Dessa maneira, todas as entradas da matriz A são limitadas por uma constante. Portanto $\|A\|_{m\times m} \leq C\ \ (C > 0)$.

Agora, em relação a matriz B, todas as suas entradas em valor absoluto, são iguais a: $|(f_1(v_m), w_j)| \leq |f_1(v_m)||w_j| = |f_1(v_m)|$.

Finalmente, temos que:

$\|F(t,X)\|_{m\times 1} \leq \overline{\gamma}.C + |f_1(v_m)| \equiv m_k(t)$.

Aqui, $m_k(t)$ é integrável em $[0,T]$, pois C é constante e $f_1 \in Lip_{\gamma_1}(s)$.

Concluimos portanto, que o sistema (3.5) satisfaz as condições de Carathéodory, e então existe uma solução $\{u_m(t), v_m(t)\} \in [0,t_m) \times [0,t_m), t_m < T_0$.

Satisfeitas as condições exigidas pelo Teorema de Carathéodory, passaremos a próxima etapa (estimativas a priori) onde poderemos prolongar a solução $u_m(t), v_m(t)$ ao intervalo $[0,T]$

No que se segue, $C_i, \;\; i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8$, denotam constantes positivas e independentes de m e t.

3.3.2 Estimativas a Priori

Estimativa I:

Tomemos $h_1 = u_m$ e $h_2 = v_m$ nas equações (3.1) e (3.2) do sistema aproximado PA, dessa maneira, temos:

$$(u_m', u_m) - a(l(u_m))(\Delta u_m, u_m) = (f_1(v_m), u_m) \tag{3.6}$$

$$(v_m', v_m) - a(l(v_m))(\Delta v_m, v_m) = (f_2(u_m), v_m) \tag{3.7}$$

Agora,

$$\frac{d}{dt}|u_m|^2 = \frac{d}{dt}(u_m, u_m) = (u_m', u_m) + (u_m, u_m') = 2(u_m', u_m),$$

logo

$(u_m', u_m) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|u_m|^2$ e pela primeira identidade de Green

$$\int_\Omega (-\Delta u) v dx - \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma, \text{ obtemos:}$$

$$(-\Delta u_m, u_m) = \int_\Omega (-\Delta u_m) u_m dx = \int_\Omega \nabla u_m . \nabla u_m dx = |\nabla u_m|^2 = \|u_m\|^2$$

Portanto, podemos escrever (3.6) como sendo:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + a(l(u_m))\|u_m\|^2 = (f_1(v_m), u_m) \tag{3.8}$$

De maneira inteiramente análoga, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_m|^2 + a(l(v_m))\|v_m\|^2 = (f_2(u_m), v_m) \tag{3.9}$$

Adicionando as equações (3.8) e (3.9), integrando de 0 à t, obtemos:

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{|u_m|^2 + |v_m|^2\Big\} ds + \int_0^t \Big\{a(l(u_m))\|u_m\|^2 + a(l(v_m))\|v_m\|^2\Big\} ds$$

$$= \int_0^t \Big\{(f_1(v_m), u_m) + (f_2(u_m), v_m)\Big\} ds \tag{3.10}$$

Portanto,

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + 2\int_0^t \Big\{a(l(u_m))\|u_m\|^2 + a(l(v_m))\|v_m\|^2\Big\} ds$$

$$= 2\int_0^t \Big\{(f_1(v_m), u_m) + (f_2(u_m), v_m)\Big\} ds + |u_m(0)| + |v_m(0)|$$

Utilizando a hipótese $\mathcal{H}_2$ neste último resultado, obtemos:

$$\int_0^t \Big\{m\|u_m\|^2 + m\|v_m\|^2\Big\} ds \leq \int_0^t \Big\{a(l(u_m))\|u_m\|^2 + a(l(v_m))\|v_m\|^2\Big\} ds$$

Assim,

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + 2m\int_0^t \Big\{\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\Big\} ds \leq 2\int_0^t \{(f_1(v_m), u_m) + (f_2(u_m), v_m)\} ds$$

$$+|u_m(0)|^2 + |v_m(0)|^2 \tag{3.11}$$

Agora usando em (3.11) Cauchy-Schwarz, obtemos :

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + 2m\int_0^t \Big\{\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\Big\}ds \le 2\int_0^t |f_1(v_m) - f_1(0)||u_m|ds$$

$$+2\int_0^t |f_2(u_m) - f_2(0)||v_m|ds + |u_{0m}|^2 + |v_{0m}|^2 \tag{3.12}$$

Por $\mathcal{H}_1$, temos:

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + 2m\int_0^t \Big(\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\Big)ds \le 2\int_0^t \gamma|v_m||u_m|ds$$

$$+2\int_0^t \gamma|u_m||v_m|ds + |u_{0m}|^2 + |v_{0m}|^2$$

Assim,

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + 2m\int_0^t \Big(\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\Big)ds \le 4\gamma\int_0^t |u_m||v_m|ds + |u_{0m}|^2 + |v_{0m}|^2 \tag{3.13}$$

Pela desigualdade fundamental temos:

$$4\gamma\int_0^t |u_m||v_m|ds \le 2\gamma\left[\int_0^t \Big(|u_m|^2 + |v_m|^2\Big)ds\right]$$

Logo de (3.13), segue-se que:

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + 2m\int_0^t \Big(\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\Big)ds \le 2\gamma\int_0^t \Big(|u_m|^2 + |v_m|^2\Big)ds$$

$$+|u_{0m}|^2 + |v_{0m}|^2 \tag{3.14}$$

Observe agora, que $-\Delta u_m = \lambda_1 u_m$, compondo com u_m, temos:

$$(-\Delta u_m, u_m) = \lambda_1(u_m, u_m),$$

logo

$$\|u_m\|^2 = \lambda_1 |u_m|^2 \Longrightarrow |u_m|^2 = \frac{1}{\lambda_1}\|u_m\|^2$$

Portanto, podemos reescrever (3.14) como sendo:

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + 2m\int_0^t \Big(\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2\Big)ds \leq \frac{2\gamma}{\lambda_1}\int_0^t \Big(\|u_m|^2 + |v_m\|^2\Big)ds$$

$$+|u_{0m}|^2 + |v_{0m}|^2 \tag{3.15}$$

Resultando dessa maneira em

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 + \left(2m - \frac{2\gamma}{\lambda_1}\right)\int_0^t \Big(\|u_m|^2 + |v_m\|^2\Big)ds \leq |u_{0m}|^2 + |v_{0m}|^2 \tag{3.16}$$

Desde que por $\mathcal{H}_2$, temos $\lambda_1 > \dfrac{\gamma}{m}$, então $\left(2m - \dfrac{2\gamma}{\lambda_1}\right) > 0$

Como $u_{0m} \rightarrow u_0$ e $v_{0m} \rightarrow v_0$ forte em $L^2(\Omega)$ então:

$$|u_{0m}|^2 + |v_{0m}|^2 \leq C_1^2,$$

ou seja,

$$|u_m(t)|^2 + |v_m(t)|^2 \leq C_1^2$$

Donde se tem:

$$|u_m(t)|^2 \leq C_1^2 \;\; e \;\; |v_m(t)|^2 \leq C_1^2$$

Daí, segue-se que: $\quad |u_m(t)| \leq C_1$ e $|v_m(t)| \leq C_1$ (3.17)

Desde que, por (3.17)

$$supess|u_m(t)| \leq C_1 \quad \text{e} \quad supess|v_m(t)| \leq C_1$$

Então,

$u_m(t)$ e $v_m(t)$ são limitadas em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ (3.18)

Além disso,

$$\int_0^t (\|u_m\|^2 + \|v_m\|^2) ds \leq C_2 \tag{3.19}$$

De (3.19), segue-se que:

$$\int_0^t \|u_m\|^2 ds \leq C_2 \text{ e } \int_0^t \|v_m\|^2 ds \leq C_2$$

Portanto,

$$u_m(t) \text{ e } v_m(t) \text{ são limitadas em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.20}$$

Estimativa II:

Usando o sistema (P) como referência e seu respectivo problema aproximado (PA), tem-se:

$$u'_m = a(l(u_m))\Delta u_m + f_1(v_m) \in H^{-1}(\Omega) \tag{3.21}$$

$$v'_m = a(l(v_m))\Delta v_m + f_2(u_m) \in H^{-1}(\Omega) \tag{3.22}$$

Observe que $-a(l(u_m))\Delta u_m$ define um elemento de $H^{-1}(\Omega)$, dado pela dualidade:

$$\Big\langle - a(l(u_m))\Delta u_m, h_1 \Big\rangle = a(l(u_m)) \int_\Omega \nabla u_m . \nabla h_1 dx \quad \forall\ h_1 \in H_0^1(\Omega) \tag{3.23}$$

De forma análoga tem-se:

$$\Big\langle - a(l(v_m))\Delta v_m, h_2 \Big\rangle = a(l(v_m)) \int_\Omega \nabla v_m . \nabla h_2 dx \quad \forall\ h_2 \in H_0^1(\Omega) \tag{3.24}$$

Usando o fato de que $-a(l(u_m))\Delta u_m, -a(l(v_m))\Delta v_m \in H^{-1}(\Omega)$, ou seja, pertencem ao dual topológico de $H_0^1(\Omega)$, isto é, são formas lineares e contínuas, concluimos que ambos os termos são limitados.

Como: $u_m, v_m \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, então,

$f_1(v_m), f_2(u_m) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;L^2(\Omega))$

Com efeito,

$$\int_\Omega |f_1(v_m)|dx = \int_\Omega |f_1(v_m) - f_1(0)|dx \leq \int_\Omega \gamma_1|v_m - 0|dx = \gamma_1 \int_\Omega |v_m|dx$$

$$\leq C_3\gamma_1 \left(\int_\Omega |v_m|^2\right)^{1/2} \tag{3.25}$$

Analogamente,

$$\int_\Omega |f_2(u_m)|dx = \int_\Omega |f_2(u_m) - f_2(0)|dx \leq \int_\Omega \gamma_2|u_m - 0|dx = \gamma_2 \int_\Omega |u_m|dx$$

$$\leq C_4\gamma_2 \left(\int_\Omega |u_m|^2\right)^{1/2} \tag{3.26}$$

Concluimos portanto, que:

$$(u'_m) \text{ e } (v'_m) \text{ são limitadas em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{3.27}$$

3.3.3 Passagem ao Limite

Das estimativas I e II, anteriormente discutidas, obtemos os seguintes resultados:

- (u_m) e (v_m) são limitadas em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ (3.28)
- (u_m) e (v_m) são limitadas em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ (3.29)
- (u'_m) e (v'_m) são limitadas em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ (3.30)

Agora, pelo corolário de Banach-Alouglu-Bourbaki, podemos extrair uma subsequência de (u_m) e (v_m) que ainda denotaremos por (u_m) e (v_m) tais que:

- $u_m \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ (3.31)
- $v_m \overset{\star}{\rightharpoonup} v$ fraco estrela em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ (3.32)
- $u_m \rightharpoonup u$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ (3.33)

- $v_m \rightharpoonup v$ fraco em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ (3.34)

Consequentemente:

$$\int_0^T (u_m, h_1)dt \longrightarrow \int_0^T (u, h_1)dt \;\; \forall \;\; h_1 \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.35}$$

$$\int_0^T ((u_m, h_1))dt \longrightarrow \int_0^T ((u, h_1))dt \;\; \forall \;\; h_1 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.36}$$

$$\int_0^T (v_m, h_2)dt \longrightarrow \int_0^T (v, h_2)dt \;\; \forall \;\; h_2 \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.37}$$

$$\int_0^T ((v_m, h_2))dt \longrightarrow \int_0^T ((v, h_2))dt \;\; \forall \;\; h_2 \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{3.38}$$

Por (3.30) segue:

- $(u'_m) \rightharpoonup u'$ fraco em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ (3.39)
- $(v'_m) \rightharpoonup v'$ fraco em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ (3.40)

Usando as convergências (3.31), (3.32), (3.39) e (3.40) e o Lema de Compacidade de Aubin-Lions, onde se toma: $B_0 = H_0^1(\Omega)$, $B = L^2(\Omega)$ e $B_1 = H^{-1}(\Omega)$ segue:

- $(u_m) \longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ para todo $T > 0$ (3.41)
- $(v_m) \longrightarrow v$ forte em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ para todo $T > 0$ (3.42)

Mostremos agora que:

$$\int_0^T [(f_1(v_m), h_1) - (f_1(v), h_1)]\theta(t)dt \longrightarrow 0 \;\; \forall \;\; \theta \in \mathcal{D}\left([0,T)\right) \text{ e } \forall \;\; h_1 \in L^2(\Omega) \tag{3.43}$$

Seja T um número positivo tal que $supp(\theta) \subset [0,T]$. Então:

$$\int_0^T [(f_1(v_m), h_1) - (f_1(v), h_1)]\theta(t)dt = \int_0^T (f_1(v_m) - f_1(v), h_1)\theta(t)dt \tag{3.44}$$

Observemos que ao usarmos a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (3.44), vem que:

$$\int_0^T (f_1(v_m) - f_1(v), h_1)\theta(t)dt \leq \int_0^T \int_\Omega |f_1(v_m) - f_1(v)||h_1||\theta(t)|dxdt \tag{3.45}$$

Aplicando em (3.45) a hipótese $\mathcal{H}_1$, o fato de $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se:

$$\int_0^T \int_\Omega |f_1(v_m) - f_1(v)||h_1||\theta(t)|dxdt \leq C_5\gamma_1 \int_0^T \left\{\int_\Omega |v_m - v|^2 dx\right\}^{1/2} \times \left\{\int_\Omega |h_1|^2 dx\right\}^{1/2} dt$$

Aplicando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz neste último resultado, e considerando a convergência (3.42) obtemos:

$$C_5\gamma_1 \int_0^T \left\{\int_\Omega |v_m - v|^2 dx\right\}^{1/2} \times \left\{\int_\Omega |h_1|^2 dx\right\}^{1/2} dt$$
$$\leq C_5\gamma_1 \left(\int_0^T \int_\Omega |v_m - v|^2 dxdt\right)^{1/2} \times \left(\int_0^T \int_\Omega |h_1|^2 dxdt\right)^{1/2} < \varepsilon$$

Portanto, obtemos:

$$\int_0^T [(f_1(v_m), h_1) - (f_1(v), h_1)]\theta(t)dt < \varepsilon$$

Segue dessa forma o resultado

De forma análoga tem-se:

$$\int_0^T [(f_2(u_m), h_2) - (f_2(u), h_2)]\theta(t)dt \longrightarrow 0 \ \forall \ \theta \in \mathcal{D}\left([0,T)\right) \text{ e } \forall \ h_2 \in L^2(\Omega) \tag{3.46}$$

Precisamos mostrar agora, que:

$$a(l(u_m)) \int_0^T \int_\Omega \nabla u_m . \nabla h_1 \theta(t)dt \longrightarrow a(l(u)) \int_0^T \int_\Omega \nabla u . \nabla h_1 \theta(t)dt \tag{3.47}$$

Para todo $\theta \in \mathcal{D}\left([0,T]\right)$ e para todo $h_1 \in L^2(\Omega)$

É suficiente provarmos que:

$$a(l(u_m)) \longrightarrow a(l(u)) \text{ em } L^2(0,T) \ \forall \ T > 0 \tag{3.48}$$

Devido a continuidade de a basta mostramos que:

$$l(u_m) \longrightarrow l(u) \text{ forte em } L^2(0,T) \tag{3.49}$$

De fato, pois:

$$\int_0^T |l(u_m) - l(u))|^2 dt = \int_0^T |l(u_m - u)|^2 dt \leq C_5 \int_0^T |u_m - u|^2 dt < \varepsilon$$

Este último resultado, decorre da convergência (3.41)

Estas convergências implicam que podemos tomar limites no problema aproximado (PA), e assim verificarmos as condições $(i), (ii), (iii) \ e \ (iv)$ do teorema 3.1.1

Com efeito,

Multiplicando (3.1) e (3.2) por $\theta(t) \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 à T, obtemos:

$$\int_0^T (u_m', h_1)\theta(t)dt - \int_0^T a(l(u_m))(\Delta u_m, h_1)\theta(t)dt = \int_0^T (f_1(v_m), h_1)\theta(t)dt \tag{3.50}$$

$$\int_0^T (v_m', h_2)\theta(t)dt - \int_0^T a(l(v_m))(\Delta v_m, h_2)\theta(t)dt = \int_0^{T_0} (f_2(u_m), h_2)\theta(t)dt \tag{3.51}$$

Faremos os cálculos da passagem ao limite, apenas para equação (3.48), (3.49) segue de forma análoga. Vejamos:

Tomando o limite quando $m \longrightarrow \infty$, tem-se:

$$\int_0^T (u', h_1)\theta(t)dt - \int_0^T a(l(u))(\Delta u, h_1)\theta(t)dt = \int_0^T (f_1(v), h_1)\theta(t)dt$$

Fazendo as integrações em separado, vem que:

$$\int_0^T (u', h_1)\theta(t)dt = (u, h_1)\theta(t)\Big|_0^T - \int_0^T (u, h_1)\theta'(t)dt = \left\langle \frac{d}{dt}(u, h_1), \theta(t) \right\rangle$$

$$-\int_0^T a(l(u))(\Delta u, h_1)\theta(t) = -\langle a(l(u))(\Delta u, h_1), \theta(t)\rangle$$

$$\int_0^T (f_1(v), h_1)\theta(t)dt = \langle (f_1(v), h_1), \theta(t)\rangle$$

Podemos então reescrever (3.50) e (3.51) como sendo:

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u, h_1), \theta(t) \right\rangle - \langle a(l(u))(\Delta u, h_1), \theta(t)\rangle = \langle (f_1(v), h_1), \theta(t)\rangle \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T) \tag{3.52}$$

$$\left\langle \frac{d}{dt}(v, h_2), \theta(t) \right\rangle - \langle a(l(v))(\Delta v, h_2), \theta(t)\rangle = \langle (f_2(u), h_2), \theta(t)\rangle \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T) \tag{3.53}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(u, h_1) - a(l(u))(\Delta u, h_1) = (f_1(v), h_1) \quad \text{no sentido de} \quad \mathcal{D}'(0,T) \tag{3.54}$$

$$\frac{d}{dt}(v, h_2) - a(l(v))(\Delta v, h_2) = (f_2(u), h_2) \quad \text{no sentido de} \quad \mathcal{D}'(0,T) \tag{3.55}$$

3.3.4 Verificação das Condições Iniciais

Do resultado de regularidade temos que:

$$u, v \in C^0(0,T; L^2(\Omega)) \tag{3.56}$$

Dessa maneira, faz sentido calcularmos $u(0)$ e $v(0)$. Consideremos $\theta \in C^1(0,T;\mathbb{R})$, com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$

Da convergência (3.35) obtemos:

$$\int_0^T (u_m', z)\theta dt \longrightarrow \int_0^T (u', z)\theta dt, \text{ onde } z \in L^2(\Omega) \tag{3.57}$$

Integrando por partes (3.57) podemos escrever:

$$(u_m(t), z)\theta(t) - (u_m(0), z)\theta(0) - \int_0^T (u_m, z)\theta' dt \longrightarrow (u(t), z)\theta(t) - (u(0), z)\theta(0) - \int_0^T (u, z)\theta' dt$$

Dessa maneira, temos:

$$-(u_m(0), z) - \int_0^T (u_m, z)\theta' dt \longrightarrow -(u(0), z) - \int_0^T (u, z)\theta' dt \tag{3.56}$$

Usando a convergência (3.35) em (3.58) temos:

$$(u_m(0), z) \longrightarrow (u(0), z)$$

Como u_{0m} converge forte para u_0 em $L^2(\Omega)$, consequentemente fraco em $L^2(\Omega)$. Desta maneira:

$$(u_{0m}, z) \longrightarrow (u_0, z)$$

Da unicidade do limite tem-se:

$$(u(0), z) \longrightarrow (u_0, z) \;\; \forall z \in L^2(\Omega)$$

Portanto,

$$u(0) = u_0 \tag{3.59}$$

Analogamente,

$$v(0) = v_0 \tag{3.60}$$

3.4 Unicidade

Teorema 3.4.1 (de Unicidade): Para obter a unicidade de soluções, consideraremos a hipótese $\mathcal{H}_4$.

Demonstração:

Sejam $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\} : [0, T] \longrightarrow L^2(\Omega)$, funções vetoriais soluções de (P), temos então:

$$\frac{d}{dt}(u_1, h_1) + a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla u_1.\nabla h_1 dx = \int_\Omega f_1(v_1) h_1 dx \tag{3.61}$$

$$\frac{d}{dt}(u_2, h_1) + a(l(u_2)) \int_\Omega \nabla u_2.\nabla h_1 dx = \int_\Omega f_1(v_2) h_1 dx \tag{3.62}$$

$$\frac{d}{dt}(v_1, h_2) + a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla v_1.\nabla h_2 dx = \int_\Omega f_2(u_1) h_2 dx \tag{3.63}$$

$$\frac{d}{dt}(v_2, h_2) + a(l(v_2)) \int_\Omega \nabla v_2.\nabla h_2 dx = \int_\Omega f_2(u_2) h_2 dx \tag{3.64}$$

Façamos: (3.61) − (3.62) e (3.63) − (3.64), para obter:

$$\frac{d}{dt}((u_1 - u_2), h_1) + a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla u_1 \nabla h_1 dx - a(l(u_2)) \int_\Omega \nabla u_2 \nabla h_1 dx$$

$$= \int_\Omega (f_1(v_1) - f_1(v_2)) h_1 dx \tag{3.65}$$

$$\frac{d}{dt}((v_1 - v_2), h_2) + a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla v_1 \nabla h_2 dx - a(l(v_2)) \int_\Omega \nabla v_2 \nabla h_2 dx$$

$$= \int_\Omega (f_2(u_1) - f_2(u_2)) h_2 dx \tag{3.66}$$

Agora, fazendo $h_1(t) = u_1(t) - u_2(t)$ e $h_2 = v_1(t) - v_2(t)$ e adicionando as equações (3.65) e (3.66), obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1 - u_2|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_1 - v_2|^2 + a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla u_1 \nabla (u_1 - u_2) dx + a(l(v_1)) \int_\Omega \nabla v_1 \nabla (v_1 - v_2) dx$$

$$-a(l(u_2)) \int_\Omega \nabla u_2 \nabla (u_1 - u_2) dx - a(l(v_2)) \int_\Omega \nabla v_2 \nabla (v_1 - v_2) dx = \int_\Omega (f_1(v_1) - f_1(v_2))(u_1 - u_2) dx$$

$$+ \int_\Omega (f_2(u_1) - f_2(u_2))(v_1 - v_2) dx \tag{3.67}$$

Antes de darmos continuidade, mostremos a seguinte identidade:

$$\frac{d}{dt}((u_1 - u_2), h_1) + a(l(u_1)) \int_\Omega \nabla (u_1 - u_2) \nabla h_1 dx = \Big(a(l(u_2)) - a(l(u_1)) \Big) \int_\Omega \nabla u_2 \nabla h_1 dx$$

$$+\int_\Omega (f_1(v_1) - f_1(v_2))h_1 dx \qquad (3.68-a)$$

Com efeito,pois:

$$\Big(a(l(u_2)) - a(l(u_1))\Big)\int_\Omega \nabla u_2.\nabla h_1 dx + \int_\Omega (f_1(v_1) - f_1(v_2))h_1 dx = a(l(u_2))\int_\Omega \nabla u_2.\nabla h_1 dx$$

$$-a(l(u_1))\int_\Omega \nabla u_2.\nabla h_1 dx + \int_\Omega f_1(v_1)h_1 dx - \int_\Omega f_1(v_2))h_1 dx = a(l(u_2))\int_\Omega \nabla u_2.\nabla h_1 dx$$

$$-a(l(u_1))\int_\Omega \nabla u_1.\nabla h_1 dx + \frac{d}{dt}(u_1, h_1) + a(l(u_1))\int_\Omega \nabla u_1.\nabla h_1 dx - \frac{d}{dt}(u_2, h_1)$$

$$-a(l(u_2))\int_\Omega \nabla u_2.\nabla h_1 dx.$$

Segue portanto o resultado.

De forma análoga, tem-se:

$$\frac{d}{dt}((v_1 - v_2), h_2) + a(l(v_2))\int_\Omega \nabla(v_1 - v_2)\nabla h_2 dx = \Big(a(l(v_2)) - a(l(v_1))\Big)\int_\Omega \nabla v_2 \nabla h_2 dx$$

$$+\int_\Omega (f_2(u_1) - f_2(u_2))h_2 dx \qquad (3.68-b)$$

Voltando ao nosso problema, usemos o fato de $f_i \in Lip(\gamma_i)$, $i = 1, 2$ e modulando (3.65) e (3.66) chegamos as seguintes inequações:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1 - u_2|^2 + a(l(u_1))\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx$$

$$\leq \left|\Big(a(l(u_2)) - a(l(u_1))\Big)\right|\int_\Omega |\nabla u_2||\nabla(u_1 - u_2)|dx + \gamma_1\int_\Omega |v_1 - v_2||u_1 - u_2|dx \qquad (3.69)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_1 - v_2|^2 + a(l(v_1))\int_\Omega |\nabla(v_1 - v_2)|^2 dx$$

$$\leq \left|\Big(a(l(v_2)) - a(l(v_1))\Big)\right| \int_\Omega |\nabla v_2||\nabla(v_1 - v_2)|dx + \gamma_2 \int_\Omega |u_1 - u_2||v_1 - v_2|dx \tag{3.70}$$

Vamos agora adicionar as inequações: (3.69) e (3.70) e assim obter:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1 - u_2|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_1 - v_2|^2 + a(l(u_1)) \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx + a(l(v_1)) \int_\Omega |\nabla(v_1 - v_2)|^2 dx$$

$$\leq \left|\Big(a(l(u_2)) - a(l(u_1))\Big)\right| \int_\Omega |\nabla u_2||\nabla(u_1 - u_2)|dx + \left|\Big(a(l(v_2)) - a(l(v_1))\Big)\right| \int_\Omega |\nabla v_2||\nabla(v_1 - v_2)|dx$$

$$+\gamma_1 \int_\Omega |v_1 - v_2||u_1 - u_2|dx + \gamma_2 \int_\Omega |u_1 - u_2||v_1 - v_2|dx \tag{3.71}$$

Apliquemos em (3.71)a hipótese $\mathcal{H}_2$ a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a hipótese $\mathcal{H}_4$, daí então vem que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1 - u_2|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_1 - v_2|^2 + m\|u_1 - u_2\|^2 + m\|v_1 - v_2\|^2$$

$$\leq A_1|l(u_1) - l(u_2)|\|u_2\|\|u_1 - u_2\| + A_2|l(v_1) - l(v_2)|\|v_2\|\|v_1 - v_2\|$$

$$+\gamma_1 \int_\Omega |v_1 - v_2||u_1 - u_2|dx + \gamma_2 \int_\Omega |u_1 - u_2||v_1 - v_2|dx$$

$$\leq C_6|u_1 - u_2|\|u_2\|\|u_1 - u_2\| + C_7|v_1 - v_2|\|v_2\|\|v_1 - v_2\| + \gamma \int_\Omega |u_1 - u_2||v_1 - v_2|dx \tag{3.72}$$

Aplicando-se a desigualdade de Young em (3.72), temos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1 - u_2|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_1 - v_2|^2 + m\|u_1 - u_2\|^2 + m\|v_1 - v_2\|^2$$

$$\leq \frac{m}{2}\|u_1 - u_2\|^2 + \frac{m}{2}\|v_1 - v_2\|^2 + \frac{C_6^2}{2m}\|u_2\|^2|u_1 - u_2|^2 + \frac{C_7^2}{2m}\|v_2\|^2|v_1 - v_2|^2$$

$$+2\gamma|u_1 - u_2||v_1 - v_2| \leq \frac{m}{2}\|u_1 - u_2\|^2 + \frac{m}{2}\|v_1 - v_2\|^2 + \frac{C_6^2}{2m}\|u_2\|^2|u_1 - u_2|^2 + \frac{C_7^2}{2m}\|v_2\|^2|v_1 - v_2|^2$$

$$+\gamma\Big\{|u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2\Big\} \tag{3.73}$$

Note que neste último resultado aplicamos novamente a desigualdade fundamental.

Finalmente chegamos a:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_1-u_2|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_1-v_2|^2+m\Big\{\|u_1-u_2\|^2+\|v_1-v_2\|^2\Big\}$$

$$\leq \frac{m}{2}\Big\{\|u_1-u_2\|^2+\|v_1-v_2\|^2\Big\}+\left\{\frac{C_6^2}{2m}\|u_2\|^2+\gamma\right\}|u_1-u_2|^2+\left\{\frac{C_7^2}{2m}\|v_2\|^2+\gamma\right\}|v_1-v_2|^2 \quad (3.74)$$

Façamos:

$\varphi(t)=\dfrac{C_6^2}{m}\|u_2\|^2+2\gamma$ e $\xi(t)=\dfrac{C_7^2}{m}\|v_2\|^2+2\gamma$, daí resulta:

$$\frac{d}{dt}|u_1-u_2|^2+\frac{d}{dt}|v_1-v_2|^2\leq\varphi(t)|u_1-u_2|^2+\xi(t)|v_1-v_2|^2 \tag{3.75}$$

Seja $\mathcal{M}(t)=\sup\{\varphi(t),\xi(t)\}$, em $[0,T]$, então:

$$\frac{d}{dt}|u_1-u_2|^2+\frac{d}{dt}|v_1-v_2|^2\leq\mathcal{M}\{|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2\} \tag{3.76}$$

Integrando (3.76) de 0 à t, obtemos:

$$|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2-|u_1(0)-u_2(0)|^2-|v_1(0)-v_2(0)|^2\leq\int_0^t\mathcal{M}\{|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2\}dx$$

Denominando-se $\alpha=|u_1(0)-u_2(0)|^2+|v_1(0)-v_2(0)|^2$, tem-se:

$$|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2\leq\alpha+\int_0^t\mathcal{M}\{|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2\}dx$$

Tomemos, $\rho(t)=|u_1-u_2|^2+|v_1-v_2|^2$, daí então:

$$\rho(t)\leq\alpha+\int_0^t\mathcal{M}(s)\rho(s)ds \tag{3.77}$$

Aplicando-se a desigualdade de Gronwall em (3.77), obtemos:

$$\rho(t) \leq \alpha \exp\left\{\int_0^t \mathcal{M}(s)ds\right\}$$

Como $u_1(0) = u_2(0)$ e $v_1(0) = v_2(0)$, tem-se $\alpha = 0$ e sendo $\rho(t)$ limitada então $\rho \equiv 0$, isto é,

$$|u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2 = 0 \quad \forall\, t \in (0, t)$$

Portanto, $|u_1 - u_2| = |v_1 - v_2| = 0$, ou seja:

$u_1(t) = u_2(t)$ e $v_1(t) = v_2(t)$

3.5 Decaimento Exponencial

Provaremos agora, que a solução do problema (P) decai exponencialmente quando $t \longrightarrow \infty$, mais precisamente, mostremos que a energia associada ao sistema decai de forma exponencial.

Aqui consideramos a energia potencial associada a (P) como sendo:

$$E(t) = \frac{1}{2}\{|u|^2_{L^2} + |v|^2_{L^2}\}$$

Em outras palavras, precisamos mostrar que existem constantes $\delta > 0$ e $\lambda > 0$ tais que:

$$E(t) \leq \delta E(0)e^{-\lambda t}$$

Com efeito, tomemos o problema (P) compondo a primeira equação com u e a segunda com v, resulta portanto em:

$$(u_t, u) - a(l(u))(\Delta u, u) = (f_1(v), u) \tag{3.78}$$

$$(v_t, v) - a(l(v))(\Delta v, v) = (f_2(u), v) \tag{3.79}$$

Pelos resultados expostos na primeira estimativa, podemos reescrever (3.78) e (3.79) como sendo respectivamente:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + a(l(u))|\nabla u|^2 = \int_\Omega f_1(v)u dx \tag{3.80}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2 + a(l(v))|\nabla v|^2 = \int_\Omega f_2(u)v dx \tag{3.81}$$

Adicionando as equações: (3.80) e (3.81), obtemos:

$$\frac{d}{dt}E(t) + a(l(u))|\nabla u|^2 + a(l(v))|\nabla v|^2 = \int_\Omega \{f_1(v)u + f_2(u)v\}dx \tag{3.82}$$

Desde que por $\mathcal{H}_2$ $m \leq a(t)$, então de (3.82) obtemos:

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -m\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) + \int_\Omega \{f_1(v)u + f_2(u)v\}dx \tag{3.83}$$

Por $\mathcal{H}_1$ temos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \{f_1(v)u + f_2(u)v\}dx &\leq \int_\Omega \{|f_1(v) - f_1(0)||u| + |f_2(u) - f_2(0)||v|\}dx \\ &\leq \int_\Omega \{\gamma_1|v||u| + \gamma_2|u||v|\}dx = (\gamma_1 + \gamma_2)\int_\Omega |u||v|dx\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Young nesta última igualdade, e usando $\mathcal{H}_2$ obtemos:

$$\int_\Omega \{f_1(v)u + f_2(u)v\}dx \leq \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)\left(|u|_{L^2}^2 + |v|_{L^2}^2\right) \leq \gamma\left(|u|_{L^2}^2 + |v|_{L^2}^2\right)$$

Finalmente, podemos reescrever (3.83) como:

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -m\left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right) + \gamma\left(|u|_{L^2}^2 + |v|_{L^2}^2\right) \tag{3.84}$$

Apliquemos a desigualdade de Poincaré, para assim, obtermos:

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq -mC_8\left(|u|_{L^2}^2 + |v|_{L^2}^2\right) + \gamma\left(|u|_{L^2}^2 + |v|_{L^2}^2\right) = -(mC_8 - \gamma)\left(|u|_{L^2}^2 + |v|_{L^2}^2\right) \tag{3.85}$$

Tomemos $\delta > 0$, de modo que:

$mC_8 - \gamma \geq \delta > 0$

Dessa forma, $m > \max\left\{\dfrac{\gamma}{C_8}, \dfrac{\gamma}{\lambda_1}\right\}$

Assim, de (3.85), vem que: $\dfrac{d}{dt}E(t) \leq -\delta E(t)$, logo:

$$E(t) \leq C_0 e^{-\delta t} \ \ \forall t \geq 0, \text{ onde } C_0 = E(0) \tag{3.86}$$

Segue portanto o resultado requerido.

Considerações Finais

Diante dos resultados obtidos, conseguimos mostrar a existência, unicidade e ainda, o comportamento assintótico para (P) mostrando dessa maneira, que a solução decaimento exponencialmente com o tempo.

Para trabalhos futuros, podemos estudar a estabilidade, ou seja, a dependência contínua dos dados iniciais, dessa forma mostraremos que o problema encontra-se bem-posto. Segundo o matemático Hadamard, se um problema tem uma única solução e se pequenas perturbações nos dados de entrada, provocam pequenas perturbações nos resultado então o mesmo é dito bem-posto.

Bibliografia

[1] BACHMAN, G. NARICI. Functional Analysis, Academic Press. New York and London, 1968.

[2] BALDEZ, Carlos Alessandro da C. Dissertação de Mestrado: Existência, Unicidade e Comportamento Assintótico da Solução de uma Equação de Onda com Termo de Memória na Fronteira, 2005.

[3] BRÉZIS, H. Análisis Funcional. Teoria y Aplicaciones. Alianza Editorial. Madrid, Paris, 1984.

[4] CHIPOT, M., RODRUIGUES, J.F. , On a Class of nonlocal nonlinear problems, Mathematical Modelling and Numerical Analysis 26 (3) (1992) 447-448

[5] CORRÊA, F.J.S.A., MENEZES, Silvano D.B. , FERREIRA, J., On a class problems involving a nonlocal operator, Communications a Applied Mathematics and Computations 147 (2004) 475-489

[6] FRIEDMAN, Avner, Foundations of Modern Analysis, New York, Dover Publications, 1982

[7] FEIJÓO, Raul A., TAROCO, Edgard, PADRA, Claudio. Métodos Variacionais. LNCC, Petrópolis 2004.

[8] LIMA, Elon Lages. Espaços Métricos, Rio de Janeiro. Associação Nacional Instituto de Matemática Pura e Aplicada IMPA, 2003

[9] LIONS, J.L. Quelques Méthodes de Résolutions des Problémes Aux Limites Non Linéaris, Dunod, Paris, 1969.

[10] LIONS, J.L.and Magenes, E. Problèmes aux Limites non Homogènes et Aplications, vol I, Dunod, Paris, 1968.

[11] LIMA, Osmundo Alves. Tese de Doutoramento; Existência e Unicidade de Soluções Fracas de uma Equação Hiperbólica-Parabólica Não-Linear, 1985, UFRJ - Instituto de Matemática.

[12] MEDEIROS, L.A. e MIRANDA, M.M. Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos nº 25, IM-UFRJ, 1993.

[13] OLIVEIRA, César R. de, Introdução à Análise Funcional,Rio de Janeiro. Associação Nacional Instituto de Matemática Pura e Aplicada IMPA, 2001

[14] RENTERÍA, Eduardo Casas. Introduccion a Las Ecuaciones en Derivadas Parciales, Universidad de CANTABRIA, 1992

[15] RIBEIRO, Lindomar Miranda. Dissertação de Mestrado: Sobre um Sistema Acoplado de E.D.P´S do Tipo Klein - Gordon com Não-Linearidades do Tipo Kirchhoff - Carrier em Domínio Limitado, 2005.

[16] RIVERA, J.E Muñoz. Introdução à Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais. LNCC, Petrópolis 2004.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo