UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

Carla Cristina de Souza Tavares

SOBRE AS EQUAÇÕES DAS PLACAS DE KIRCHHOFF COM EFEITO TÉRMICO E CONDIÇÕES DE FRONTEIRA NÃO LOCAL

Orientador: Prof. Dr. Mauro de Lima Santos

Belém-PA
2008

Carla Cristina de Souza Tavares

SOBRE AS EQUAÇÕES DAS PLACAS DE KIRCHHOFF COM EFEITO TÉRMICO E CONDIÇÕES DE FRONTEIRA NÃO LOCAL

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística - UFPA, como quisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: **Equações Diferenciais Parciais**

Orientador: **Prof. Dr. Mauro de Lima Santos**

Belém-PA

2008

Carla Cristina de Souza Tavares

SOBRE AS EQUAÇÕES DAS PLACAS DE KIRCHHOFF COM EFEITO TÉRMICO E CONDIÇÕES DE FRONTEIRA NÃO LOCAL

Esta Dissertação foi julgada e aprovada pelo Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Belém, 06 junho de 2008

Prof. Dr. Mauro De Lima Santos
(Coordenador do PPGME - UFPA)

Banca Examinadora

Prof. Dr. Mauro De Lima Santos
Universidade Federal do Pará, UFPA- PPGME
Orientador

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Universidade Estadual do Pará, UEPA
Examinador

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
Universidade Federal do Pará, UFPA-PPGME
Examinador

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto
Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ
Examinador

À memória de meu Pai, Antônio Carlos S. Tavares
e a minha mãe Angélica S. Tavares.

Agradecimentos

⋆ À Deus, meu Senhor, por ter me iluminado para chegar ao final deste trabalho;

⋆ À minha mãe Angélica e aos meus irmãos Andréa, Carlos e Antônio pelo amor, força e apoio;

⋆ Ao meu avô Manuel João Ribeiro Tavares , que sempre foi uma fonte da minha inspiração e ás minhas tias Rosa Tavares e Deise Tavares que são exemplos de vida para mim.

⋆ Ao meu orientador, Prof. Mauro de Lima Santos, pela forma precisa e profissional, além da paciência, disponibilidade, atenção e confiança, que conduziu no decorrer deste trabalho;

⋆ À todos os professores do PPGME/UFPA

⋆ A minha filha Paula Cristina pelo amor e estímulo.

"Aquilo que o homem semear, isso mesmo colherá."

Epístola de Paulo.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de soluções fracas e fortes bem como o decaimento exponencial e polinomial da energia para o Sistema de Placas de Kircchoff (1.1)-(1.7) com efeito térmico e condições de fronteira não local. Mostramos que a dissipação produzida pelo efeito memória não depende do presente valor do gradiente da temperatura, isto é, mostramos que a dissipação produzida pelo efeito memória é forte o suficiente para produzir o decaimento exponencial da solução desde que as funções relaxamento também decaiam exponencialmente. Quando as funções relaxamento decaem polinomialmente, mostraremos que a solução decai polinomialmente com a mesma taxa.

Abstract

In this work we study the existence of weak and strong global solutions and the exponential and polynomial decays of the energy to a system for Kirchhoff plates equations with thermal and nonlocal conditions working at the boundary. We show that the dissipation produced by the memory effect not depend on the present values of temperature gradient, that is, we show that the dissipation produced by memory effect is strong enough to produce exponential decay of the solution provided the relaxation functions also decays exponentially. When the relaxation functions decays polynomially, we show that the solution decay polynomially with the same rate.

SUMÁRIO

Introdução

0.1 Aspectos gerais

Neste trabalho discutiremos a existência, unicidade e regularidade de soluções, bem como o comportamento assintótico da energia associado ao seguinte sistema das equações das placas de Kirchhoff na presença de efeito térmico e condições de fronteira não local

$$
\begin{aligned}
u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha\Delta\theta = 0 \quad \text{em} \;\; \Omega \times (0,\infty) \qquad (1.1)\\
\theta_t - \Delta\theta - \alpha\Delta u_t = 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega \times (0,\infty) \qquad (1.2)\\
\theta = 0 \;\; \text{sobre} \;\; \Gamma \times (0,\infty) \qquad (1.3)\\
u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \;\; \text{sobre} \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \qquad (1.4)\\
\frac{\partial u}{\partial \nu} + \int_0^t g_1(t-s)\left(\mathfrak{B}_1 u(s) + \rho_1 \frac{\partial u(s)}{\partial \nu(s)}\right) ds = 0 \;\; \text{sobre} \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty) \qquad (1.5)\\
u - \int_0^t g_1(t-s)\left(\mathfrak{B}_2 u(s) + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \nu}(s) - \rho_2 u(s)\right) ds = 0 \;\; \text{sobre} \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty) \qquad (1.6)\\
u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x), \;\; \theta(0,x) = \theta_0(x) \;\; \text{em} \quad \Omega. \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

Aqui por Ω estaremos denotando um domínio aberto limitado do $\mathbb{R}^2$ com fronteira Γ regular e suponhamos que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ tal que $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$, ambas com medida positiva e $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ o vetor unitário normal exterior à γ, por $\tau = (-\nu_1, \nu_2)$ o vetor unitário tangente. Consideremos por $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$, os segintes operadores diferenciáveis.

$$\mathfrak{B}_1 u = \Delta u + (1-\mu)\mathrm{B}_1 u,$$

$$\mathfrak{B}_2 u = \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + (1-\mu)\frac{\mathrm{B}_2 u}{\partial \tau},$$

onde $\mu \in]0, \frac{1}{2}[$ é o raio de Poisson e

$$\mathrm{B}_1 u = 2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\mathrm{B}_2 u = (\nu_1^2 - \nu_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \nu_1\nu_2(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}).$$

Nas equações (1.1) e (1.2), u denota o deslocamento transversal da placa, θ a diferença de temperatura. Em (1.5) e (1.6) as funções relaxamento $g_1, g_2 \in \mathrm{C}^1(0,\infty)$ são positivas e não-decrescentes e α, ρ_1 e ρ_2 são constantes positivas. Também, assumiremos que existe $x_0 \in \Re^2$ tal que

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma; \nu(x).(x - x_0) \leq 0\}, \quad \Gamma_1 = \{x \in \Gamma; \nu(x).(x - x_0) > 0\}. \tag{1.8}$$

Considerando $m(x) = x - x_0$, a compacidade de Γ_1 implica que existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$m(x)\nu(x) \geq \delta_0 > 0, \forall x \in \Gamma_1.$$

RESULTADOS ANTERIORES ASSOCIADOS AO SISTEMA (1.1)-(1.7).

O Sistema de equações das placas de Kirchhoff com dissipação foi estudado por diferentes pesquisadores. Todos eles consideram essencialmente três mecanismos dissipativos:

a)A dissipação de atrito, obtida pela introdução de um "damping de atrito"que pode agir sobre todo o domínio, na fronteira ou parte da fronteira ou em alguma vizinhança localizada da fronteira;

b)A dissipação térmica obtida pelo acoplamento da equação do CALOR.

A estabilidade exponencial de soluções foi provada por [4, 5, 16].

Finalmente a dissipação viscoelástica dada pelo efeito memória como em [22].

O "damping de atrito"é o mecanismo dissipativo mais simples. Ele age sobre todo o domínio Ω

ou em alguma parte estratégica do domínio(damping localizado).
Foi provado por [2, 3, 4, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 24] que a energia de primeira-ordem decai exponencialmente para zero quando o tempo vai para o infinito.

A dissipação térmica, produzida pela lei de Fourier para a temperatura é mais interessante que o "damping de atrito "tanto do ponto de vista físico como do matemático. Aqui as condições de fronteira fazem um papel importante , não por influenciarem no comportamento assintótico, mas por causa das mudanças formidáveis nos aspectos matemáticos, tornando mais difíceis a análise assintótica. A estabilidade exponencial de soluções foi provada por [4, 5, 16].

Finalmente, o efeito memória sobre o tensor de tensão produz um mecanismo dissipativo satisfatório que depende da função relaxamento (ver [22]). Eles provaram que a energia decai uniformente exponencialmente ou algebricamente com a mesma taxa de decaimento da função relaxamento, isto é, quando a função relaxamento decai exponencialmente, a energia correspondente também decai exponencialmente. Por outro lado, quando a função relaxamento decai polinomialmente então a energia correspondente também decai polinomialmente e com a mesma taxa.

A principal contribuição do presente trabalho é mostrar que apesar do efeito térmico considerado, só a dissipação dada pelo efeito memória prevalece no final, isto é, os mecanismos dissipativos presentes no sistema competem entre si e só o mais fraco é ativo no final.

Como é bem conhecido, a presença de efeito térmico produz dissipação para a energia. Assim, deveriamos esperar que para alcançar a estabilidade uniforme para a energia não fosse necessário a adição de alguma dissipação mecânica. Na realidade isto é o que ocorre para muitos sistemas de equações das Placas de Kircchoff na presença de efeito térmico onde a taxa uniforme de decaimento foi obtida sem qualquer dissipação mecânica, veja [9].

Na clássica teoria linear de termoelásticidade a lei de Fourier é usada para descrever a condução do calor num corpo. Esta teoria tem dois problemas principais. Primeiro é incapaz de levar em conta o efeito memória que pode prevelecer em alguns materiais, particularmente, a baixa temperatura. Segundo, a parte parabólica correspondente do sistema prediz um resultado irreal:

A perturbação térmica produzida em um ponto do corpo se espalha imediatamente para todo o corpo. As observações levam a acreditar que para materiais com memória a lei de Fourier não é um bom modelo e que devemos procurar outras relações constitutivas mais gerais que levem em considerações o fluxo de calor produzido em materiais com memória. Aqui no lugar da lei de Fourier seguimos o modelo introduzido por Gurtin-Pipkin [7].

Desse modo, com o objetivo de completar os trabalhos $[5, 9, 10]$ trabalharemos com efeito memória que age somente na fronteira . A principal diferença é que essa dissipação não depende sobre o presente valor do gradiente da temperatura; ela é de natureza não local dada por duas convoluções da função relaxamento sobre a fronteira . Sendo assim, mostramos que a energia decai exponencialmente para zero desde que g_1, g_2 decaiam exponencialmente para zero. Quando g_1, g_2 decaem polinomialmente, mostramos que a correspondente energia do sistema $(1.1) - (1.7)$ também decai polinomialmente para zero com a mesma taxa de decaimento. Isso significa que o efeito memória produz dissipação forte, resultando em taxa uniforme de decaimento para a energia.

O método usado é baseado na construção de um conveniente funcional $\mathcal{L}$ satisfazendo

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -C_1\mathcal{L}(t) + C_2 e^{-\gamma t} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -C_1\mathcal{L}(t)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{C_2}{(1+t)^{1+\alpha}},$$

para algumas constantes positivas $C_1,\ C_2,\ \gamma_1$ e γ_1.

Note que pela condição (1.4) a solução do sistema (1.1)-(1.7) pertence ao seguinte espaço.

$$V = \{u \ \in \ H^2(\Omega) : u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_0\}.$$

Definimos a seguinte forma bilinear

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big) + 2(1-\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\Big\} dxdy.$$

Como $\Gamma_0 \neq \emptyset$ temos que a norma de $a(u,u)$ em v é equivavlente a norma em $H^2(\Omega)$, isto é,

$$C_0||u||_{H^2(\Omega)} \leq a(u,u) \leq C_1||u||_{H^2(\Omega)},$$

onde C_0 e C_1 são constantes positivas.

Lema 1. Para uma $u \in H^4(\Omega)$ e $u \in H^2(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega (\Delta^2 u)v dx = a(u,v) + \int_\Gamma \Big\{(\mathfrak{B}_2 u)v - (\mathfrak{B}_1 u)\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\} d\Gamma$$

□

Demonstração. Ver [14,16].

As notações usadas neste trabalho são padrões e seguem as encontradas no livro de J. L. Lions [18]. Na sequência por C, algumas vezes por $(C_1, C_2, ...)$, denotamos várias constantes positivas independentes do tempo ou das condições iniciais. Este trabalho foi organizado do seguinte modo: no Capítulo 1 são enunciados alguns teoremas de compacidade e algumas desigualdades que serão fundamentais para o desenvolvimento do trabalho. Alguns desses resultados serão demonstrados e outros sua demonstração será omitida porém indicada a bibliografia adequada. No capítulo 2, estabeleceremos a existência, unicidade e regularidade de soluções fortes para o problema $(1.1) - (1.7)$. Para isso usaremos o método das aproximações de Galerkin, seguindo as idéias introduzidas por J. L. Lions [18] e o Lema 2.5; resultado crucial para a demonstração da unicidade de solução fraca (ver [11]). Finalmente no capítulo 3, estudaremos a estabilidade das soluções fortes para o sistema $(1.1) - (1.7)$. Mais precisamente, mostraremos que a dissipação dada pelo efeito memória é forte o suficiente para produzir decaimento uniforme exponencial ou polinomial, desde que as funçoes relaxamento g_1,g_2 também decaiam exponencialmente ou polinomialmente. Usaremos a técnica dos multiplicadores introduzida por Komornik [11] e Lions [18] juntamente com alguns lemas técnicos e algumas idéias técnicas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Teoria das Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços das Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Denominamos suporte de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denotamos o suporte de φ por $supp\,(\varphi)$. Simbolicamente, temos que

$$supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi\,(x) \neq 0\}} \quad \Omega$$

Concluímos que o $supp\,(\varphi)$ é o menor fechado fora do qual φ se anula e valem as seguintes relações:

1. $supp\,(\varphi + \psi) \subset supp\,(\varphi) \cup supp\,(\psi)$,

2. $supp\,(\varphi\psi) \subset supp\,(\varphi) \cap supp\,(\psi)$,

3. $supp\,(\lambda\varphi) = \lambda\ supp\,(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Aqui, daremos destaque especial às funções $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto contido em Ω que sejam infinitamente diferenciáveis. Com esse objetivo definimos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço vetorial das funções indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto contido em Ω. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω.

Observação 1.1.1. *Por um multi-índice, entendemos, uma n-upla* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *de números inteiros não negativos. Denotamos por* $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ *a ordem do multi-índice e por* D^α *o operador derivação parcial, de ordem* $|\alpha|$*,*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \ldots, 0)$*, temos por definição* $D^0\varphi = \varphi$*.*

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$supp\,(\varphi) \subset K \text{ e } supp(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) $D^\alpha\varphi_n \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ juntamente com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é denominado espaços das funções testes.
Denota-se por $L^p(\Omega),\ 1 \le p < \infty$, o espaço das funções reais $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis tais que $|u|^p$ são Lebesgue integráveis em Ω. O espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p dx.$$

Quando $p = \infty,\ L^\infty(\Omega)$ denota o espaço de Banach de todas as funções reais essencialmente limitadas com norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|.$$

Quando $p = 2,\ L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

e norma induzida

$$|u|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx.$$

Observação 1.1.2. *Sendo* Ω *limitado, obtemos* $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$*, para todo* p*, tal que* $1 \leq p < \infty$ *com imersão contínua e densa. De fato, dado* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *temos que*

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^p \, dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p \, \mu(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, suponhamos que $\varphi_n \to \varphi$ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$*. Mostraremos que*

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \to 0.$$

Notemos que

$$\int_\Omega |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \, dx \leq \mu(\Omega) \sup_{x \in K} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Para a demostração de que a imersão anterior é densa veja [17].

1.1.3 Distribuições Escalares

Com o objetivo de generalizar o conceito de funções sobre Ω, introduziremos o conceito de distribuições escalares.

Denominamos distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para φ, em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será denotado por $\langle T, \varphi \rangle$. Considere no espaço vetorial das distribuições escalares a seguinte noção de convergência:

A sucessão $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para T quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O espaço das distribuições sobre Ω, com esta noção de convergência, será denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuiçoes que aparecem com mais freqüência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.1.1. *Uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω quando u é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos*

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \Longleftrightarrow \int_K |u(x)|\, dx < \infty,$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

Lema 1.1.1 (Du Bois Raymond)**.** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: veja [18].

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u"e, usando o *Lema de Du Bois Raymond* temos que T_u é univocamente determinada por u no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

É importante ressaltar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$. Veja o exemplo seguinte.

Com essa noção de convergência $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o objetivo de estudar os espaços de Sobolev introduzimos o conceito de derivada distribucional.

A motivação do conceito de derivada fraca e, posteriormente, o conceito de derivada distribucional dado por *Sobolev,* se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$, por L.Schwartz. Veja [23].

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada no sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$D^{\alpha}T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que

$$\lim_{v \longrightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \longrightarrow \infty} D^{\alpha}T_v = D^{\alpha}T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.1.3. *Outro resultado interessante a ser mencionado é que a derivada de uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$ não é, em geral, uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$ como mostra o exemplo a seguir.*

Exemplo 1.1.1. *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em $\mathbb{R}$ e tem a seguinte forma*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$. Esta função pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$, mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$.

De fato

$$< u', \varphi > = - < u, \varphi' > = - \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = < \delta_0, \varphi >, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tal fato motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.

Observação 1.1.4. *Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é*

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}, \quad \forall\, |\alpha| \leq k.$$

É conseqüência da fórmula de integração de Gauss.

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais. Esta classe é conhecida como *espaços de Sobolev.*

1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular. Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observamos que $D^\alpha u$, em geral, não é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços são denominados *Espaços de Sobolev.*
Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$ constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } |\alpha| \leq m\right\}.$$

Em $W^{m,p}(\Omega)$ considere a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach*. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$. No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, sendo denotado por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) ; D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, \text{ com } \ |\alpha| \leq m \right\}.$$

O Traço em $H^1(\Omega)$

Em [18], é demonstrado que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$ por função de $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$, onde $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right) = \{ \varphi|_{\overline{\Omega}} ; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \}$. Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}\left(\overline{\Omega}\right)$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Consideremos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ definido por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k|_\Gamma = \varphi|_\Gamma,$$

sendo este limite considerado na norma de $L^2(\Gamma)$.

O operador γ_0 denominado operador traço é contínuo, linear e seu núcleo é $H_0^1(\Omega)$. De forma mais simples escrevemos $\varphi|_\Gamma$ em vez de $\gamma_0(\varphi)$. Assim, podemos caracterizar, o espaço $H_0^1(\Omega)$ por $H_0^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) ; \ \ \varphi|_\Gamma = 0 \right\}$. A generalização do operador traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de forma natural e no caso $m = 2$, temos

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega) ; \varphi|_\Gamma = 0, \ \ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_\Gamma = 0 \right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi_{|_{\mathcal{D}(\Omega)}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ será denotado por $H_0^m(\Omega)$ cujo dual é $H^{-m}(\Omega)$.

O teorema seguinte caracteriza o espaço $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.2.1. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tais que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Demonstração: veja [17].

1.3 Equações de Volterra

Nesta seção será feita uma introdução à teoria das equações integrais de Volterra.

Definição 1.3.1. *Uma equação integral de Volterra linear de primeira ordem é toda equação da forma*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s)ds, \tag{1.1}$$

sendo $g(t)$ e $k(t,s)$ funções dadas.

Teorema 1.3.1. *Seja $k(t,s)$ uma função contínua em $0 \leq s \leq t \leq T$, $T > 0$ e $g(t)$ uma função contínua em $0 \leq t \leq T$. Então, existe uma única função contínua $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s)ds.$$

Demonstração: **Existência**

A demonstração é baseada nas aproximações sucessivas de Picard. Para isto, considere a seguinte sequência de funções

$$\{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\},$$

sendo

$$\begin{aligned} f_0(t) &= g(t), \\ f_1(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)g(s)ds, \\ \vdots &= \vdots \\ f_n(t) &= g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-1}(s)ds, \end{aligned}$$

com $n = 1, 2, \ldots$. Desta forma,

$$f_n(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-1}(s)ds,$$

$$f_{n-1}(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f_{n-2}(s)ds.$$

Portanto,

$$f_n(t) - f_{n-1}(t) = \int_0^t k(t,s)[f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)]ds.$$

Definindo a sequência $\varphi_n(t) = f_n(t) - f_{n-1}(t)$ com $\varphi_0(t) = g(t)$ temos

$$\varphi_n(t) = \int_0^t k(t,s)\varphi_{n-1}(s)ds.$$

Logo

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(t).$$

Sejam G e K constantes positivas tais que

$$|g(t)| \leq G, \quad 0 \leq t \leq T, \quad |k(s,t)| \leq K, \quad 0 \leq s \leq \ t \leq T.$$

Afirmação.

$$|\varphi_n(t)| \leq \frac{G(Kt)^n}{n!}, \quad 0 \leq t \leq T,\ n = 0, 1, \ldots .$$

A demonstração será feita por indução. Para $n = 0$ temos

$$|\varphi_0(t)| = |g(t)| \leq G = \frac{G(Kt)^0}{0!}.$$

Suponha que a propriedade seja válida para $n = i$. Resta mostrar que é válida para $n = i + 1$. Por hipótese, temos

$$|\varphi_i(t)| \leq \frac{G(Kt)^i}{i!}.$$

Para $n = i + 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
|\varphi_{i+1}(t)| &= |\int_0^t k(t,s)\varphi_i(s)ds| \\
&\leq \int_0^t |k(t,s)|\ |\varphi_i(s)|ds \\
&\leq \int_0^t K\frac{G(Ks)^i}{i!}ds \\
&\leq \frac{GK^{i+1}}{i!}\int_0^t s^i ds.
\end{aligned}$$

Assim

$$|\varphi_{i+1}(t)| \leq \frac{G(Kt)^{i+1}}{(i+1)!}.$$

O que conclui a demonstração. Portanto, vale a seguinte desigualdade

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{G(Kt)^i}{i!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(KT)^n}{n!} = Ge^{KT}.$$

Desta forma, pelo teste M de Weirstrass, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)$ é absoluta e uniformemente convergente. Denotando por $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)$, concluímos que f é contínua. De fato, seja $t_0 \in [0, T]$. Então,

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \lim_{t\to t_0} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{t\to t_0} (\varphi_n(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t_0) = f(t_0)$$

o que mostra a continuidade de f. A função f é solução da equação integral de Volterra dada em (1.1). Com efeito,

$$\sum_{n=1}^{m} \varphi_n(t) = \int_0^t k(t,s)\left(\sum_{n=1}^{m} \varphi_{n-1}(s)\right) ds.$$

Fazendo $m \to \infty$ e usando a convergência uniforme, obtemos

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \varphi_n(t) = \int_0^t k(t,s) \lim_{m\to\infty} (\varphi_{n-1}(s))\, ds,$$

ou

$$f(t) - g(t) = \int_0^t k(t,s)f(s)ds,$$

isto é,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)f(s)ds.$$

Unicidade

Suponha que existam funções $f_1,\ f_2$ contínuas satisfazendo (1.1). Portanto,

$$|f_1(t) - f_2(t)| = |\int_0^t k(t,s)(f_1(s) - f_2(s)ds|. \tag{1.2}$$

Pela continuidade de f_1 e f_2, existe $C > 0$ tal que

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq C \quad, \ 0 \leq t \leq T.$$

Substituindo a expressão acima em (1.2) obtemos

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq KCt, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Repetindo esse processo n-vezes em (1.2), obtemos

$$|f_1(t) - f_2(t)| \leq \frac{C(Kt)^n}{n!}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Fazendo $n \to \infty$ vem que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C(Kt)^n}{n!} = 0$. Assim, concluímos que

$$f_1(t) = f_2(t).$$

$\square$

1.4 Equação Resolvente

Vimos pelo teorema anterior que dada $g \in C([0,T])$ existe uma única $f \in C([0,T])$, tal que

$$f(t) - \int_0^t k(t,s)f(s)ds = g(t)$$

Desta forma, podemos considerar o operador

$$K : C[0,T] \longrightarrow C[0,T]$$
$$f \longmapsto K[f] = f(t) - \int_0^t k(t,s)f(s)ds.$$

O operador K é linear e bijetivo. De fato,

K é linear.

$$\begin{aligned} K[f_1+\lambda f_2] &= f_1(t)+\lambda f_2(t)+\int_0^t k(t,s)(f_1(s)+\lambda f_2(s))ds \\ &= f_1(t)+\lambda f_2(t)+\int_0^t k(t,s)f_1(s)ds+\lambda\int_0^t k(t,s)f_2(s))ds \\ &= f_1(t)+\int_0^t k(t,s)f_1(s)ds+\lambda(f_2(t)+\int_0^t k(t,s)f_2(s)ds) \\ &= K[f_1]+\lambda K[f_2]. \end{aligned}$$

K é bijetivo.

A sobrejetividade segue do fato que, dada $g \in C[0,T]$, pelo teorema de existência e unicidade, existe uma única $f \in C[0,T]$ tal que $K[f] = g$. A injetividade é obtida de maneira análoga, pois $K[f] = 0$ pode ser interpretada como a equação $K[f] = g$ sendo $g \equiv 0$ e pelo teorema de existência e unicidade existe uma única $f \in C[0,T]$ que satisfaz essa equação, a saber $f(x) = 0$. A função $k(t,s)$ é chamada núcleo do operador de Volterra. Notemos que, como foi definido, $\varphi_1(t) = \int_0^t k(t,s)\varphi_0(s)ds$, de onde segue que

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \int_0^t k(t,s)\varphi_1(s)ds \\ &= \int_0^t k(t,s)\int_0^s k(s,\tau)g(\tau)d\tau ds \\ &= \int_0^t\int_\tau^t k(t,s)k(s,\tau)g(\tau)d\tau ds \\ &= \int_0^t\int_\tau^t k(t,s)k(s,\tau)dsg(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

pois o integrando é contínuo em $0 \leq \tau \leq s \leq t$. Assim

$$\varphi_2(t) = \int_0^t k_2(t,\tau)g(\tau)d\tau,$$

sendo

$$k_2(t,\tau) = \int_\tau^t k(t,s)k(s,\tau)ds.$$

Indutivamente

$$\varphi_n(t) = \int_0^t k_n(t,s)g(s)ds \quad \forall n \geq 1,$$

sendo $k_1(t,s) = k(t,s)$, $\quad k_n(t,s) = \displaystyle\int_s^t k(t,\tau)k_{n-1}(\tau,s)d\tau$ para $n \geq 2$. Como $f_n(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^n \varphi_i(t)$ temos

$$f_n(t) = \int_0^t r_n(t,s)g(s)ds,$$

sendo $r_n(t,s) = \displaystyle\sum_{i=1}^n k_i(t,s)$. Usando a continuidade da função k temos, $|k(t,s)| \leq K$. analogamente podemos mostrar que $|k_n(t,s)| \leq \dfrac{K^n(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$. Daí, segue que a série $r(t,s) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty k_n(t,s)$ é absoluta e, portanto, uniformemente convergente. A função $r(t,s)$ é chamada o núcleo resolvente de $k(t,s)$.

Teorema 1.4.1. *Se $k(t,s)$ e $g(t)$ são contínuas então a única solução contínua de (1.1) é dada por*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t r(t,s)g(s)ds.$$

Demonstração. Das relações anteriores

$$\int_0^t r(t,s)g(s)ds = \int_0^t \sum_{i=1}^\infty k_i(t,s)g(s)ds.$$

Como a série converge uniformemente podemos permutar a ordem d somatório com a integração, obtendo

$$\int_0^t r(t,s)g(s)ds = \sum_{i=1}^\infty \int_0^t k_i(t,s)g(s)ds = \sum_{i=1}^\infty \varphi_i(t) = f(t) - g(t),$$

ou seja,

$$f(t) = g(t) + \int_0^t r(t,s)g(s)ds.$$

$\square$

Observação 1.4.1. *O teorema anterior mostra que o operador inverso K^{-1} tem a forma de uma equação integral de Volterra, ou seja*

$$K^{-1} : C[0,T] \longrightarrow C[0,T]$$
$$g \mapsto K^{-1}[g] = g(t) + \int_0^t r(t,s)g(s)ds.$$

1.5 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Definição 1.5.1 (Convergência Fraca)**.** *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de E. Temos que $u_\nu \rightharpoonup u$ fracamente se, e somente se,*

$$\langle \varphi, u_\nu \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall u \in E'.$$

onde é E' o dual topólogico de E

Definição 1.5.2 (Convergência Fraca Estrela)**.** *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de E'. Temos que $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ fraco estrela se, somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u \rangle \to \langle \varphi, u \rangle, \quad \forall u \in E.$$

Lema 1.5.1 (Lema de Gronwall)**.** *Sejam $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas, $\alpha \geq 0$. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s)\,\psi(s)\,ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left[\int_a^t \psi(s)\,ds\right], \quad \forall t \in [a,b].$$

Em particular, se $\psi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração

Se $\alpha > 0$, chamemos $w(t) = \alpha + \displaystyle\int_a^t \varphi(s)\psi(s)ds$. Observe que $w(a) = \alpha$, $w(t) \geq \alpha > 0$ e $\varphi(t) \leq w(t)$. De $w'(t) = \varphi(t)\psi(t) \leq \psi(t)w(t)$, obtemos $\dfrac{w'(t)}{w(t)} \leq \psi(t)$.

Integrando entre a e t obtemos

$$\ln w(t) - \ln w(a) \leq \int_a^t \psi(s)ds$$

$$\ln \frac{w(t)}{\alpha} \leq \int_a^t \psi(s)ds$$

$$\frac{w(t)}{\alpha} \leq \exp \int_a^t \psi(s)ds$$

onde concluímos que $\varphi(t) \leq w(t) \leq \alpha \exp \int_a^t \psi(s)ds$.

Se $\alpha = 0$, e ψ é limitada, do caso anterior concluímos que $\varphi(t) \equiv 0$.

$\square$.

Capítulo 2

Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Neste capítulo estabeleceremos existência e unicidade para as soluções do sistema (1.1)-(1.7), bem como a regularidade da solução, consideremos os operadores

$$
\begin{aligned}
(g*\varphi)(t) &= \int_0^t g(t-s)\varphi(s)ds,\\
(g\Box\varphi)(t) &= \int_0^t g(t-s)|\varphi(t)-\varphi(s)|^2 ds
\end{aligned}
$$

onde $*$ denota a convolução. Uma importante relação entre esses dois operadores é dado pelo seguinte Lema.

Lema 2.1. Para $g, \varphi \in C^1([0,\infty[;\mathbb{R})$ temos

$$
(g*\varphi)(t)\varphi_t = \frac{1}{2}g'\Box\varphi - \frac{1}{2}g(t)|\varphi(t)|^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[g\Box\varphi - (\int_0^t g(s)ds)|\varphi|^2\right].
$$

Demonstração. Diferenciando o termo $(g\Box\varphi)(t)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}g\Box\varphi(t) = \int_0^t g'(t-s)|\varphi(t)-\varphi(s)|^2 ds\\
&-2\int_0^t g(t-s)\varphi_t(t)\varphi(s)ds + \Big(\int_0^t g(t-s)ds\Big)\frac{d}{dt}|\varphi|^2.
\end{aligned}
$$

Daí, segue que

$$
\begin{aligned}
2\int_0^t g(t-s)\varphi_t(t)\varphi(s)ds &= -\frac{d}{dt}\Big\{g\Box\varphi - \int_0^t g(t-s)ds|\varphi(s)|^2\Big\}\\
&\quad + \int_0^t g'(t-s)|\varphi(t)-\varphi(s)|^2 ds - g(t)|\varphi|^2.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$(g*\varphi)(t)\varphi_t = \frac{1}{2}g'\Box\varphi - \frac{1}{2}g(t)|\varphi(t)|^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[g\Box\varphi - (\int_0^t g(s)ds)|\varphi|^2\right].$$

$\Box$.

O nosso objetivo, agora, é determinar uma expressão apropriada para $\mathfrak{B}_1 u$ e $\mathfrak{B}_2 u$ sobre a fonteira. Para isso usaremos as condições de fronteira (1.5) e (1.6) do sistema .

Derivando a equação (1.5) em relação a t, obtemos

$$\frac{\partial u_t}{\partial \nu} + g_1' * \Big(\mathfrak{B}_1 u + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big) + g_1(0)\Big(\mathfrak{B}_1 u + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big) = 0.$$

Daí, resulta

$$\Big(\mathfrak{B}_1 u + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big) + \frac{1}{g_1(0)} g_1' * \Big(\mathfrak{B}_1 u + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big) \quad = \quad -\frac{1}{g_1(0)}\frac{\partial u_t}{\partial \nu}. \tag{2.1}$$

Analogamente, derivando (1.6) em relação a t, obtemos

$$(\mathfrak{B}_2 u + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \nu} - \rho_2) + \frac{1}{g_2(0)} g_2' * (\mathfrak{B}_2 u + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \nu} - \rho_2 u) \quad = \quad \frac{1}{g_2(0)} u_t. \tag{2.2}$$

Aplicando o operador inverso de Volterra em (2.1) – (2.2) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_1 u + \rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} &= -\frac{1}{g_1(0)}\Big\{\frac{\partial u_t}{\partial \nu} + k_{1.5} * \frac{\partial u_t}{\partial \nu}\Big\}, \\
\mathfrak{B}_2 u + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \nu} - \rho_2 u &= \frac{1}{g_2(0)}\{u_t + k_2 * u_t\},
\end{aligned}$$

onde o núcleos resolventes $k_i, i = 1, 2$ são soluções de

$$k_i + \frac{1}{g_i(0)} g_i' * k_i = -\frac{1}{g_i(0)} g_i'.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
k_1 * \frac{\partial u_t}{\partial \nu} &= \int_0^t k_1(t-s)\frac{\partial u_t}{\partial \nu}(s)ds \\
&= k_1(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)\Big|_0^t - \int_0^t k_1'(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds \\
&= k_1(0)\frac{\partial u}{\partial \nu} - k_1(t)\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + k_1' * \frac{\partial u}{\partial \nu}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} k_2 * u_t &= \int_0^t k_1(t-s)u_t(s)ds \\ &= k_2(t-s)u(s)\Big|_0^t - \int_0^t k_2'(t-s)u(s)ds \\ &= k_2(0)u - k_2(t)u_0 + k_2' * u. \end{aligned}$$

Assim, denotando por $\eta_1 = \frac{1}{g_1(0)}$ e $\eta_2 = \frac{1}{g_2(0)}$ podemos reescrever $\mathfrak{B}_1 u$ e $\mathfrak{B}_2 u$ da seguinte forma

$$\mathfrak{B}_1 u = -\rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} - \eta_1 \Big\{ \frac{\partial u_t}{\partial \nu} + k_1(0)\frac{\partial u}{\partial \nu} - k_1(t)\frac{\partial u_0}{\partial \nu} + k_1' * \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big\}, \tag{2.3}$$

$$\mathfrak{B}_2 u = -\alpha_1 \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \rho_2 u + \eta_2\{u_t + k_2(0)u - k_2(t)u_0 + k_2' * u\}. \tag{2.4}$$

Porém, como estamos interessados nas funções relaxamento que decaiam exponencialmente ou polinomialmente e as condições de fronteira (2.3) e (2.4) que envolvem os núcleos resolutivos k_1 e k_2, seria interessante saber se $k_i, (i = 1, 2)$ possui as mesmas propriedades de g_1 e g_2. Essa questão é respondida pelo lema abaixo.

Sejam h uma função relaxamento e k seu núcleo resolvente tal que

$$k(t) - k * h(t) = h(t). \tag{2.5}$$

Lema 2.2. Se h é uma função contínua e positiva, então k também é uma função contínua e positiva. Além disso,

1. Se existem constantes positivas C_0 e γ, com $C_0 < \gamma$, tal que

$$h(t) \leq C_0 e^{-\gamma t},$$

então a função k satisfaz

$$k(t) \leq \frac{C_0(\gamma - \epsilon)}{\gamma - \epsilon - C_0} e^{-\epsilon t},$$

para todo $0 < \epsilon < \gamma - C_0$.

2. Se $p > 1$, $C_p = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \int_0^t (1+t)^p (1+t-s)^{-p}(1+s)^{-p} ds$ e existe C_0 com $C_0 C_p < 1$, satisfazendo

$$h(t) \leq C_0(1+t)^{-p},$$

então a função k satisfaz

$$k(t) \leq \frac{C_0}{1 - C_0 C_p}(1+t)^{-p}.$$

Demonstração. A continuidade da função k segue imediato da identidade (2.5).

Supondo $t = 0$ em (2.5) segue que

$$k(0) - k * h(0) = h(0) > 0,$$

pela definição de convolução segue que

$$k * h(0) = 0 \Rightarrow k(0) = h(0) > 0.$$

Considere $t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : k(t) = 0\}$ então , se $t \in [0, t_0[,\ k(t) > 0$.

Agora , seja $t \in \mathbb{R}^+$, e tomemos $t = t_0$ em (2.5) segue daí que

$$k(t_0) - k * h(t_0) = h(t_0) \Rightarrow -k * h(t_0) = h(t_0),$$

mas isto contraria o fato de h ser uma função positiva, portanto $k(t) > 0\ \forall\, t \in \mathbb{R}^+$. Seja ϵ uma constante fixa, tal que $0 < \epsilon < \gamma - c_0$ e definamos

$$k_\epsilon(t) = e^{\epsilon t} k(t) \quad e \quad h_\epsilon(t) = e^{\epsilon t} h(t). \tag{2.6}$$

Multiplicando (2.5) por $e^{\epsilon t}$, obtemos

$$k_\epsilon(t) \;=\; h_\epsilon(t) + e^{\epsilon t}(k * h(t)). \tag{2.7}$$

Note que $e^{\epsilon t}(k * h(t)) \;=\; k\epsilon * h\epsilon(t)$, além disso

$$h_\epsilon(t) \leq C_0 e^{t(\epsilon - \gamma)} \leq C_0. \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8) temos

$$k_\epsilon(t) \leq h_\epsilon(t) + \int_0^t k_\epsilon(t-s) C_0 e^{s(\epsilon - \gamma)} ds. \tag{2.9}$$

Tomando o sup em (2.9) com $s \in [0,t]$, resulta

$$\sup_{s\in[0,t]} k_\epsilon(t) \leq \sup_{s\in[0,t]} h_\epsilon(s) + \int_0^\infty C_0 e^{s(\epsilon-\gamma)} ds \sup_{s\in[0,t]} k_\epsilon(s). \tag{2.10}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty C_0 e^{s(\epsilon-\gamma)} ds &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda C_0 e^{\alpha s} ds \\ &= C_0 \lim_{\lambda\to\infty} (\frac{e^{(\epsilon-\gamma)\lambda}}{\epsilon-\gamma} - \frac{1}{\epsilon-\gamma}) \\ &= \frac{C_0}{\gamma-\epsilon}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Daí, substituindo (2.8) e (2.11) em (2.10), obtemos

$$\sup_{s\in[0,t]} k_\epsilon(s) \leq C_0 + \frac{C_0}{\gamma-\epsilon} \sup_{s\in[0,t]} k_\epsilon(s),$$

ou seja,

$$\sup_{s\in[0,t]} k_\epsilon(s)(\frac{\gamma-\epsilon-C_0}{\gamma-\epsilon}) \leq C_0.$$

Segue-se que

$$k(t) \leq \frac{C_0(\gamma-\epsilon)}{\gamma-\epsilon-C_0} e^{-\epsilon t}.$$

$\square$.

Para demonstrar o item 2, consideremos

$$k_p(t) = (1+t)^p k(t) \quad e \quad h_p(t) = (1+t)^p h(t).$$

Multiplicando a equação (2.5) por $(1+t)^p$, obtemos

$$k_p(t) = h_p(t) + \int_0^t k(t-s)h(s)ds(1+t)^p \tag{2.12}$$

ou seja,

$$k_p(t) = h_p(t) + \int_0^s k_p(t-s)(1+t-s)^{-p}(1+t)^p(1-s)^{-p}h_p(s)ds \tag{2.13}$$

pois,

$$k(t-s) = (1+t-s)^{-p}k_p(t) \quad e \quad h(s) = (1+s)^{-p}h_p(s).$$

Multiplicando, $h(t) \leq C_0(1+t)^{-p}$ por $(1+t)^p$ resulta

$$h_p(t) \leq C_0. \tag{2.14}$$

Assim, tomando o sup de (2.13), com $s \in [0,t]$

$$\sup_{s\in[0,t]} k_p(s) \leq \sup_{s\in[0,t]} h_p(s) + \sup_{s\in[0,t]} k_p(s) \sup_{s\in[0,t]} h_p(s) \int_0^t (1+t-s)^{-p}(1+t)^p(1-s)^{-p}ds.$$

Devido a condição para C_0, obtemos

$$\sup_{s\in[0,t]} k_p(s) \leq \sup_{s\in[0,t]} h_p(s) + C_0C_p \sup_{s\in[0,t]} k_p(s),$$

isto é,

$$\sup_{s\in[0,t]} k_p(s)(1-C_0C_p) \leq \sup_{s\in[0,t]} h_p(s). \tag{2.15}$$

Substituindo (2.14) em (2.15) obtemos

$$\sup_{s\in[0,t]} k_p(s) \leq \frac{C_0}{1-C_0C_p}.$$

Portanto,

$$k_p(t) \leq \frac{C_0}{1-C_0C_p}.$$

Segue daí que

$$k(t) \leq \frac{C_0}{1-C_0C_p}(1+t)^{-p}$$

$\square$.

.

2.1 Existência

Definição 2.1. Dizemos que o par (u, θ) é uma solução fraca do sistema $(1.1) - (1.7)$ quando

$$u, u_t \in L^\infty(0, T : V(\Omega) \times H^1(\Omega)),$$
$$\theta \in L^\infty(0, T : L^2(\Omega))$$

e satisfaz

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega u_t \psi_t dxdt + \int_0^T a(u, \psi) dt + \alpha \int_0^T \int_\Omega \theta \Delta \psi dxdt \\
&= \int_\Omega u_1 \psi(., 0) dx \\
&-\eta_1 \int_0^T \int_{\Gamma_1} \Big\{ \frac{\partial u_t}{\partial \nu} + \Big(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0) \Big) \frac{\partial u}{\partial \nu} - k_1(t) \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + k_1' * \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big\} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\Gamma_1 dt \\
&-\eta_2 \int_0^T \int_{\Gamma_1} \Big\{ u_t + \Big(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0) \Big) u - k_2(t) u_0 + k_2' * u \Big\} \psi d\Gamma_1 dt, \qquad (2.16) \\
&-\int_0^T \int_\Omega \theta \phi_t dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla \theta \nabla \phi dxdt - \alpha \int_0^T \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_t dxdt \\
&= \int_\Omega \theta(0) \phi(0) dx + \alpha \int_\Omega \nabla u(0) . \nabla \phi(0) dx. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

com , $\psi \in C^1([0, T] : H^2(\Omega))$ tal que $\psi(., T) = 0$ e $\phi \in C^1([0, T] : H_0^1(\Omega))$ tal que $\phi(., T) = 0$.

Como conseqüência do teorema do traço temos que a forma

$$(u, w) \mapsto a(u, w) + \int_{\Gamma_1} \Big(\rho_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial w}{\partial \nu} + \rho_2 uw \Big) d\Gamma_1$$

é estritamente coerciva em V. Veja [14].

O funcional de energia do sistema (1.1)-(1.7) é dado por

$$\begin{aligned}
E(t, u, \theta) := \quad & \frac{1}{2} \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} a(u, u) + \frac{1}{2} \int_\Omega |\theta|^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \Big(\rho_1 \Big| \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|^2 + \rho_2 |u|^2 \Big) d\Gamma_1 \\
& + \frac{\eta_1}{2} \int_{\Gamma_1} \Big(k_1(t) \Big| \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|^2 - k_1' \Box \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big) d\Gamma_1 \\
& + \frac{\eta_2}{2} \int_{\Gamma_1} \Big(k_2(t) |u|^2 - k_2' \Box u \Big) d\Gamma_1.
\end{aligned}$$

Teorema 2.1. Sejam $k_i \in C^2(0,\infty)$ tal que $k_i, -k_i', k_i'' > 0$ para $i = 1,2$. Se $(u_0, u_1, \theta_0) \in V \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ então existe uma única solução fraca do sistema (1.1)-(1.7).

Demonstração. A prova deste teorema é baseada no método de Faedo-Galerkin. Seja $w_j, j \in \mathbb{N}$, uma base do V e $z_j, j \in \mathbb{N}$ uma base de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Sejam $u^m(.,t) \in W_m$ e $\theta^m(.,t) \in Z_m$, onde W_m e Z_m são subespaços gerados pelos n primeiros vetores $w_1, w_2, ..., w_m$ e $z_1, z_2, ..., z_m$, respectivamente.Do teoremas de existência de soluções locais para E.D.O de primeira ordem nos segue que existe uma única solução local

$$u^m(.,t) = \sum_{j=1}^{m} h_{j,m}(t) w_j(.),$$

$$\theta^m(.,t) = \sum_{j=1}^{m} f_{j,m}(t) z_j(.),$$

do sistema aproximado

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_{tt}^m w_j dx + a(u^m, w_j) - \alpha \int_\Omega \nabla\theta^m \nabla w_j dx \\
&= -\eta_1 \int_{\Gamma_1} \left\{ \frac{\partial u_t^m}{\partial\nu} + \left(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0)\right) \frac{\partial u^m}{\partial\nu} - k_1(t)\frac{\partial u_0^m}{\partial\nu} + k_1' * \frac{\partial u^m}{\partial\nu} \right\} \frac{\partial w_j}{\partial\nu} d\Gamma_1 \\
&-\eta_2 \int_{\Gamma_1} \left\{ u_t^m + \left(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0)\right) u^m - k_2(t) u_0^m + k_2' * u^m \right\} w_j d\Gamma_1, \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega \theta_t^m z_j dx + \int_\Omega \nabla\theta^m . \nabla z_j dx + \alpha \int_\Omega \nabla u_t^m . \nabla z_j dx = 0 \qquad (2.19)$$

para $j = 1, ..., m$ com dados iniciais

$$u^m(.,0) = u_{0,m} \to u_0 \ \text{ em } \ V,$$

$$u_t^m(.,0) = u_{1,m} \to u_1 \ \text{ em } \ L^2(\Omega),$$

$$\theta^m(.,0) = \theta_{0,m} \to \theta_0 \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

A extensão desta solução para todo intervalo $[0,T], 0 < T < \infty$ é uma consequência da estimativa a seguida.

Estimativa a priori

Multiplicando (2.18) por $h'_{j,m}$ e somando em j obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_{tt}^m u_t^m dx + a(u^m, u_t^m) - \alpha \int_\Omega \nabla\theta^m \nabla u_t^m dx \\
&= -\eta_1 \int_{\Gamma_1} \Big\{ \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} + \Big(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0)\Big)\frac{\partial u^m}{\partial \nu} - k_1(t)\frac{\partial u_{0,m}}{\partial \nu} + k_1' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu}\Big\}\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} d\Gamma_1 \\
&-\eta_2 \int_{\Gamma_1} \Big\{ u_t^m + \Big(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0)\Big)u^m - k_2(t)u_{0,m} + k_2' * u^m \Big\} u_t^m d\Gamma_1.
\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t^m| dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u^m, u^m) - \alpha \int_\Omega \nabla\theta^m \nabla u^m \\
&= -\eta_1 \int_{\Gamma_1} \Big\{ \Big|\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}\Big|^2 + \Big(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0)\Big)\frac{\partial u^m}{\partial \nu}\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} - k_1(t)\frac{\partial u_{0,m}}{\partial \nu}\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} + k_1' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu}\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}\Big\} d\Gamma_1 \\
&-\eta_2 \int_{\Gamma_1} \Big\{ |u_t^m|^2 + \Big(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0)\Big)u^m u_t^m - k_2(t)u_{0,m}u_t^m + k_2' * u^m u_t^m \Big\} d\Gamma_1. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Agora, multiplicando (2.19) por $f_{j,m}$ e somando em j temos

$$\int_\Omega \theta_t^m \theta^m dx + \int_\Omega \nabla\theta^m \nabla\theta^m dx + \int_\Omega \nabla u_t^m \nabla\theta^m dx = 0,$$

de onde vem que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta_t^m|^2 dx + \int_\Omega |\nabla\theta^m|^2 dx + \int_\Omega \nabla u_t^m \nabla\theta^m dx = 0. \qquad (2.21)$$

Somando (2.20) – (2.21) encontramos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u_{tt}^m u_t^m dx + a(u^m, u_t^m) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta_t^m|^2 dx + \int_\Omega |\nabla\theta^m|^2 dx \\
&= -\eta_1 \int_{\Gamma_1} \Big\{ \Big|\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}\Big|^2 + \Big(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0)\Big)\frac{\partial u^m}{\partial \nu}\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} - k_1(t)\frac{\partial u_{0,m}}{\partial \nu}\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} + k_1' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu}\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}\Big\} d\Gamma_1 \\
&-\eta_2 \int_{\Gamma_1} \Big\{ |u_t^m|^2 + \Big(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0)\Big)u^m u_t^m - k_2(t)u_{0,m}u_t^m + k_2' * u^m u_t^m \Big\} d\Gamma_1. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.1, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} k_1' * \frac{\partial u^m}{\partial \nu}\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} d\Gamma_1 \;=\; & -\frac{1}{2}k_1'(t)\int_{\Gamma_1}\Big|\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}\Big|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k_1''\Box\frac{\partial u^m}{\partial \nu} d\Gamma_1 \\
& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1}\Big[k_1'\Box\frac{\partial u^m}{\partial \nu} - \Big(\int_0^t k'(s)ds\Big)\Big|\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu}\Big|^2\Big] d\Gamma_1, \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} k_2' * u^m u_t^m d\Gamma_1 &= -\frac{1}{2}k_1'(t)\int_{\Gamma_1}|u^m|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k_2''\Box u^m d\Gamma_1 \\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma}[k_2'\Box u^m - \Big(\int_0^t k'(s)ds\Big)|u^m|^2]d\Gamma_1. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Substituindo (2.23) e (2.24)em (2.22) obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt}E(t,u^m,\theta^m) + \int_\Omega |\nabla\theta^m|^2 dx \leq CE(0,u^m,\theta^m).$$

Integrando a desigualdade acima em $[0,t]$ e levando em consideração as condições iniciais de u^m e θ^m concluimos que

$$E(t,u^m,\theta^m) + \int_0^t\int_\Omega |\theta^m|^2 dxdt \leq C, \forall t\in[0,T], \forall m\in\mathbb{N}.$$

Da estimativa acima concluimos que

$$\begin{aligned} u^m &\to u \ \text{ fraco-estrela } \ em \ \ L^\infty(0,T:V), \\ u_t^m &\to u_t \ \text{ fraco-estrela } \ em \ \ L^\infty(0,T:L^2(\Omega)), \\ \theta^m &\to \theta \ \text{ fraco-estrela } \ em \ \ L^\infty(0,T:L^2(\Omega)), \\ \nabla\theta^m &\to \nabla\theta \ \text{ fraco } \ em \ \ L^2(0,T:L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Multiplicando a equação (2.19) por $\beta\in C^1[0,T]$, tal que $\beta(T)=0$ e integrando em $[0,T]$ temos

$$\begin{aligned} &-\int_0^T\int_\Omega u_t^m w_j\beta_t dxdt + \int_0^T a(u^m,w_j)\beta - \alpha\int_0^T\int_\Omega \theta_t^m\beta_t\Delta w_j dxdtdt \\ &= -\int_\Omega u_{0,m}w_j\beta_t(0)dx + \int_\Omega u_{1,m}w_j\beta(0)dx \\ &-\eta_1\int_0^T\int_\Omega\Big\{\frac{\partial u_t^m}{\partial\nu} + \Big(\frac{\rho_1}{\eta_1}+k_1(0)\Big)\frac{\partial u^m}{\partial\nu} - k_1(t)\frac{\partial u_{0,m}}{\partial\nu} + k_1' * \frac{\partial u^m}{\partial\nu}\Big\}\frac{\partial w_j}{\partial\nu}\beta d\Gamma_1 dt \\ &-\eta_2\int_0^T\int_\Omega\Big\{u_t^m + \Big(\frac{\rho_2}{\eta_2}+k_2(0)\Big)u^m - k_2(t)u_{0,m} + k_2' * u^m\Big\}w_j\beta dxdt. \end{aligned}$$

Visto que

$$u^m \to u \ \text{ forte } \ em \ \ L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

e usando a densidade do conjunto $\{w_j\beta : j\in\mathbb{N}, \beta\in C^1([0,T])\}$ em $C^0([0,T]:H^2(\Omega))\cap$

$C^1([0,T] : L^2(\Omega))$ concluimos a prova de (2.17). Analogamente, multiplicando (2.20) por β temos

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega \theta^m z_j \beta_t dxdt + \int_0^T\int_\Omega \nabla\theta^m.\nabla z_t \beta dxdt - \alpha\int_0^T\int_\Omega \nabla u^m.\nabla z_t\beta_t dxdt\\
&= \int_\Omega \theta_{0,m} z_j \beta(0)dx + \alpha\int_\Omega \nabla u_{0,m}.\nabla z_j\beta(0)dx.
\end{aligned}
$$

Fazendo $m \to \infty$ obtemos (2.18). Desta forma completamos a prova da existência de solução fraca.

$\square$.

2.2 Unicidade

Sejam (u^1, θ^1) e (u^2, θ^2) duas soluções de $(1.1) - (1.6)$ com os mesmos dados iniciais. Tomando $(u, \theta,) = (u^1 - u^2, \theta^1 - \theta^2)$, obtemos o seguinte sistema com dados iniciais nulos

$$
\begin{aligned}
& u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha\Delta\theta = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times(0,\infty)\\
& \theta_t - \Delta\theta - \alpha\Delta u_t = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times(0,\infty)\\
& \theta = 0 \ \text{ em } \Gamma\times(0,\infty)\\
& u = \frac{\partial u}{\partial\nu} = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma_0\times(0,\infty)\\
& u_0(x) = u_1(x) = \theta_0(x) = 0 \ \text{ em } \ \Omega.
\end{aligned}
$$

Com as condições de fronteira (2.3) e (2.4)

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{B}_1 u &= -\rho_1\frac{\partial u}{\partial\nu} - \eta_1\Big\{\frac{\partial u_t}{\partial\nu} + k_1(0)\frac{\partial u}{\partial\nu} - k_1(t)\frac{\partial u_0}{\partial\nu} + k_1' * \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big\},\\
\mathfrak{B}_2 u &= -\alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial\nu} + \rho_2 u + \eta_2\{u_t + k_2(0)u - k_2(t)u_0 + k_2' * u\}.
\end{aligned}
$$

Multiplicando a primeira equação do sistema acima por u_t, integrando sobre Ω e usando o Lema 2.1 e a Fórmula de Green, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a(u,u) + \int_{\Gamma_1}\{(\mathcal{B}_2u)u_t - (\mathcal{B}_1u)\frac{\partial u_t}{\partial\nu})\}d\Gamma_1\\
&+\alpha\int_\Omega \Delta\theta u_t dx = 0. \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Agora, multiplicando a segunda equação do sistema por θ e integrando sobre Ω, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta|^2 dx + \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx - \alpha\int_\Omega \Delta u_t \theta dx = 0. \tag{2.26}$$

Somando (2.25) e (2.26), resulta que (u,θ) satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t,u,\theta) &= -\frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_1}\Big(2\Big|\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\Big|^2 + k_1''\Box\frac{\partial u}{\partial\nu} - k_1'(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2\Big)d\Gamma_1 \\ &\quad -\frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_1}\Big(2|u_t|^2 + k_2''\Box u - k_2'(t)|u|^2\Big)d\Gamma_1 - \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx, \end{aligned}\tag{2.27}$$

onde

$$\begin{aligned}E(t,u,\theta) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\Big(\rho_1\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2 + \rho_2|u|^2\Big)d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_\Omega|\theta|^2dx \\ &\quad +\frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_1}\Big(k_1(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2 - k_1'\Box\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big)d\Gamma_1 + \frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_1}(k_2(t)|u|^2 - k_2'\Box u)d\Gamma_1.\end{aligned}$$

Integrando a equação (2.27) no intervalo $[0,t]$. Obtemos

$$\begin{aligned}E(t,u,\theta) &= E(0,u,\theta) - \frac{\eta_1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\Big(2\Big|\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\Big|^2 + k_1''\Box\frac{\partial u}{\partial\nu} - k_1'(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2\Big)d\Gamma_1\, dt \\ &\quad -\frac{\eta_2}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1}\Big(2|u_t|^2 + k_2''\Box u - k_2'(t)|u|^2\Big)d\Gamma_1\, dt - \int_0^t\int_\Omega|\nabla\theta|^2dxdt. \end{aligned}\tag{2.28}$$

Levando em consideração os dados iniciais nulos e as hipóteses do teorema 2.1 sobre k_i, concluímos que $u^1 = u^2$ e $\theta^1 = \theta^2$ o que conclui a demonstração da unicidade.

$\Box$.

2.3 Regularidade

Para mostrar a regularidade de soluções usaremos o seguinte Lema.

Lema 2.5. Suponhamos que $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ e $h \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$ então , a solução de

$$a(u,w) = \int_\Omega fwdx + \int_{\Gamma_1} gwd\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} h\frac{\partial w}{\partial \nu}d\Gamma_1, \forall\, w \in H^2(\Omega)$$

satisfaz

$$u \in H^4(\Omega).$$

Demonstração. Veja [17]

Teorema 2.2. Seja $k_i \in C^2(0,\infty)$ tal que $k_i, -k_i', k_i'' \geq 0$ para $i = 1,2$. Se $(u_0, u_1, \theta_0) \in H^4(\Omega) \cap V \times V \times [(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))]$ e satisfaz as condições de compatibilidade

$$\mathfrak{B}_1 u_0 = -\rho_1 \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \eta_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu}, \quad \mathfrak{B}_2 u_0 = -\alpha \frac{\partial \theta_0}{\partial \nu} - \rho_2 u_0 + \eta_2 u_1 \text{ sobre } \Gamma_1. \tag{2.29}$$

então a solução de (1.1) – (1.7) tem a seguinte regularidade

$$(u, u_t, \theta) \in \mathcal{C}([0,T] : (H^4(\Omega) \cap V) \times V \times (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Demonstração. Derivando a equação (2.18) em relação a t, temos

$$\int_\Omega u_{ttt}^m w_j dx + a(u_t^m, w_j) - \alpha \int_{\Gamma_1} \nabla\theta_t^m \nabla w_j dx =$$

$$-\eta_1 \int_{\Gamma_1} \Big\{ \frac{\partial u_{tt}^m}{\partial \nu} + \Big(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0)\Big)\frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} + k_1' * \frac{\partial u_t^m}{\partial \nu} \Big\} \frac{\partial w_j}{\partial \nu} d\Gamma_1$$

$$-\eta_2 \int_{\Gamma_1} \Big\{ u_{tt}^m + \Big(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0)\Big) u_t^m + k_2' * u_t^m \Big\} w_j d\Gamma_1.$$

Multiplicando a equação acima por $h''_{j,m}(t)$ e somando em j obtemos

$$\int_\Omega u_{ttt}^m u_{tt}^m dx + a(u_t^m, u_{tt}^m) - \alpha \int_{\Gamma_1} \nabla\theta_t^m \nabla u_{tt}^m dx =$$

$$-\eta_1 \int_{\Gamma_1} \Big\{ \frac{\partial u^m_{tt}}{\partial \nu} + \Big(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0) \Big) \frac{\partial u^m_t}{\partial \nu} + k'_1 * \frac{\partial u^m_t}{\partial \nu} \Big\} \frac{\partial u^m_{tt}}{\partial \nu} d\Gamma_1$$
$$-\eta_2 \int_{\Gamma_1} \Big\{ u^m_{tt} + \Big(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0) \Big) u^m_t + k'_2 * u^m_t \Big\} u^m_{tt} d\Gamma_1.$$

Daí, resulta

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u^m_{tt}|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u^m_t, u^m_t) + \alpha \int_{\Gamma_1} \theta^m_t \Delta u^m_{tt} dx =$$
$$-\eta_1 \int_{\Gamma_1} \Big\{ \frac{\partial u^m_{tt}}{\partial \nu} + \Big(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0) \Big) \frac{\partial u^m_t}{\partial \nu} + k'_1 * \frac{\partial u^m_t}{\partial \nu} \Big\} \frac{\partial u^m_{tt}}{\partial \nu} d\Gamma_1$$
$$-\eta_2 \int_{\Gamma_1} \Big\{ u^m_{tt} + \Big(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0) \Big) u^m_t + k'_2 * u^m_t \Big\} u^m_{tt} d\Gamma_1. \tag{2.30}$$

Por outro lado, derivando (2.19) em relação a t, obtemos

$$\int_\Omega \theta^m_{tt} z_i dx + \int_\Omega \nabla \theta^m_t \nabla z_i dx + \alpha \int_\Omega \nabla u^m_{tt} \nabla z_i dx = 0.$$

Multiplicando a equação acima por $f'_{j,m}$ e somando em j temos:

$$\int_\Omega \theta^m_{tt} \theta^m_t dx + \int_\Omega \nabla \theta^m_t \nabla \theta^m_t dx + \alpha \int_\Omega \nabla u^m_{tt} \nabla \theta^m_t dx = 0.$$

Daí segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta^m_t|^2 dx + \int_\Omega |\nabla \theta^m_t|^2 dx = \alpha \int_\Omega \theta^m_t \Delta u^m_{tt} dx. \tag{2.31}$$

Somando (2.31) e (2.32) , segue-se

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u^m_{tt}|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} a(u^m_t, u^m_t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\theta^m_t|^2 dx + \int_\Omega |\nabla \theta^m_t|^2 dx =$$
$$-\eta_1 \int_{\Gamma_1} \Big\{ \frac{\partial u^m_{tt}}{\partial \nu} + \Big(\frac{\rho_1}{\eta_1} + k_1(0) \Big) \frac{\partial u^m_t}{\partial \nu} + k'_1 * \frac{\partial u^m_t}{\partial \nu} \Big\} \frac{\partial u^m_{tt}}{\partial \nu} d\Gamma_1$$
$$-\eta_2 \int_{\Gamma_1} \Big\{ u^m_{tt} + \Big(\frac{\rho_2}{\eta_2} + k_2(0) \Big) u^m_t + k'_2 * u^m_t \Big\} u^m_{tt} d\Gamma_1.$$

Usando o Lema (2.1) obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t, u^m_t, \theta^m_t) dx$$
$$+ \int_\Omega |\nabla \theta^m_t|^2 dx =$$
$$-\frac{\eta_1}{2} \int_{\Gamma_1} \Big\{ 2\Big|\frac{\partial u_{tt^m}}{\partial \nu}\Big|^2 - k'_1(t) \Big|\frac{\partial u^m_t}{\partial \nu}\Big|^2 + k''_1 \Box \frac{\partial u^m_t}{\partial \nu} \Big\} d\Gamma_1$$
$$-\frac{\eta_1}{2} \int_{\Gamma_1} \Big\{ 2|u_{tt^m}|^2 - k'_2(t) |u^m_t|^2 + k''_2 \Box u^m_t \Big\} d\Gamma_1.$$

Integrando a expressão acima em $[0,t]$ obtemos

$$E(t,u_t^m,\theta_t^m)+\int_0^t\int_\Omega|\nabla\theta_t^m|^2dxdt\le E(0,u_t^m,\theta_t^m),$$

de onde segue que

$$\begin{aligned}(u_{tt}^m,u_t^m) &\text{ é limitado em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)\times H^2(\Omega))\\ (\theta_t^m,\nabla\theta_t^m) &\text{ é limitado em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)\times L^2(\Omega))\end{aligned}$$

Usando a equação (1.2) e tomando a projeção P_m sobre o subespaço $Z_m=[z_1,...,z_m]$ concluimos que

$$P_m(\Delta\theta^m)=\theta_t^m-\alpha P_m(\Delta u_t^m)$$

e portanto

$$\Delta\theta^m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

A estimativa acima implica que

$$(u_{tt}^m,u_t^m,\theta_t^m)\to(u_{tt},u_t,\theta_t)\quad\text{fraco-estrela em}\quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)\times H^2(\Omega)\times L^2(\Omega)).$$

Da equação $(1,2)$ com $\theta_t,\Delta u_t\in L^2(\Omega)$ e usando a regularidade elipítica temos que $\theta\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1)$. Integrando por partes a equação (1.1) com relação ao tempo usando a fórmula de Green e a identidade de Green obtemos

$$\begin{aligned}a(u,w)= \quad & -\int_\Omega u_{tt}w+\int_\Omega\nabla\theta.\nabla wdx\\ &+\eta_1\int_\Gamma\Big\{-\frac{\partial u_t}{\partial\nu}-k_1(0)\frac{\partial u}{\partial\nu}+k_1(t)\frac{\partial u_0}{\partial\nu}-k_1'*\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big\}\frac{\partial w}{\partial\nu}d\Gamma\\ &-\eta_2\int_\Gamma\{u_t+k_2(0)u-k_2(t)u_0+k_2'*u\}wd\Gamma.\end{aligned}$$

para toda $w\in H^2(\Omega)$. Pelo Lema 2.5 obtemos que

$$u\in L^\infty(0,T;H^4(\Omega)).$$

que conclui a prova do teorema.

$\square$.

Capítulo 3

Comportamento Assintótico

Neste capítulo, mostraremos que a solução do sistema (1.1) – (1.7) decai exponencialmente e polinomialmente quando o tempo vai ao infinito, com uma taxa de decaimento dependente da taxa de decaimento dos núcleos resolventes k_1 e k_2.

3.1 Decaimento Exponencial

Nesta seção mostraremos que a solução do sistema (1.1)-(1.7) decai exponencialmente desde que os núcleos resolventes satisfaçam

$$k_i(0) > 0, \quad k_i'(t) \leq -C_1 k_i(t), \quad k_i''(t) \geq -C_2 k_i'(t), \quad i = 1, 2 \tag{3.1}$$

para todo $t \geq 0$ e C_1 e C_2 constantes positivas.

Considerando $E(t) = E(t, u, \theta)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) = &-\frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_1}\Big(2\Big|\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\Big|^2 + k_1''\Box\frac{\partial u}{\partial \nu} - k_1'(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|^2 - 2k_1(t)\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\Big)d\Gamma_1\\ &-\frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_1}(2|u_t|^2 + k_2''\Box u - k_2'(t)|u|^2 - 2k_2(t)u_0u_t)d\Gamma_1 - \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx.\end{aligned}$$

Notando que

$$2k_1(t)\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial \nu} \leq k_1^2(t)\Big|\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|^2,$$

$$2k_2(t)u_0u_t \leq k_2^2(t)|u_0|^2 + |u_t|^2$$

obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) \leq &-\frac{\eta_1}{2}\int_{\Gamma_1}\Big(\Big|\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\Big|^2 + k_1''\Box\frac{\partial u}{\partial \nu} - k_1'(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big| - k_1^2(t)\Big|\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\Big|^2\Big)d\Gamma_1\\ &-\frac{\eta_2}{2}\int_{\Gamma_1}(|u_t|^2 + k_2''\Box u - k_2'(t)|u|^2 - k_2^2(t)|u_0|^2)d\Gamma_1 - \int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx,\end{aligned} \tag{3.2}$$

Esta desigualdade será usada posteriormente.

Lema 3.1.1. Para toda $\varphi \in H^4(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega (m.\nabla\varphi)\Delta^2\varphi dx = a(\varphi,\varphi) + \int_{\Gamma_1}\Big[(\mathcal{B}_2\varphi)m.\nabla\varphi - (\mathcal{B}_1\varphi)\frac{\partial}{\partial\nu}(m.\nabla\varphi)\Big]d\Gamma_1$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} m.\nu\Big[\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big)^2 + 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + 2(1-\mu)\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\Big)^2\Big]d\Gamma_1.$$

Demonstração. Veja [14].

Introduziremos os funcionais

$$\mathcal{N}_1(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^2 dx + \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\Big(\rho_1\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2 + \rho_2|u|^2\Big)d\Gamma_1.$$

e

$$\psi(t) = \int_\Omega \Big(m.\nabla u + \frac{1}{2}u\Big)u_t dx.$$

O Lema seguinte tem grande importância na construção do funcional desejado.

Lema 3.1.2. A solução forte do sistema $(1.1)-(1.7)$ satisfaz

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi(t) \quad &\leq \quad -\lambda_1\mathcal{N}_1(t) + \mathrm{C}\int_{\Gamma_1}\Big\{\Big|\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\Big|^2 + k_1^2(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2 + \Big|k_1'\diamond\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2\Big\} + k_1^2(t)\Big|\frac{\partial u_0}{\partial\nu}\Big|^2\Big\}d\Gamma_1\\ &\quad +\mathrm{C}\int_{\Gamma_1}\{|u_t|^2 + k_2^2(t)|u|^2 + k_2^2(t)|u_0|^2\}d\Gamma_1 + \mathrm{C}_\epsilon\int_\Omega|\nabla\theta|^2dx,\end{aligned}$$

onde λ_1,C e C_ϵ são constantes positivas. Aqui $\diamond$ indica

$$(k\diamond h) = \int_0^t k(t-s)(h(t)-h(s))ds.$$

Demonstração. Derivando ψ em relação a t, usando a equação (1.1) e fazendo $\varphi = u$ no Lema 3.1 obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi(t) \quad &= \quad \int_\Omega\Big(m.\nabla u_t + \frac{1}{2}u_t\Big)u_t dx + \int_\Omega\Big(m.\nabla u + \frac{1}{2}u\Big)u_{tt}dx\\ &= \int_\Omega\Big(m.\nabla u_t + \frac{1}{2}u_t\Big)u_t dx + \int_\Omega\Big(m.\nabla u + \frac{1}{2}u\Big)(-\Delta^2 u - \alpha\Delta\theta)dx. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Gauss temos

$$\int_{\Omega}\Big(m.\nabla u_t+\frac{1}{2}u_t\Big)u_t dx=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}(m.v)|u_t|^2 d\Gamma_1-\int_{\Omega}|u_t|^2 dx. \tag{3.4}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\Big(m.\nabla u+\frac{1}{2}u\Big)(-\Delta^2 u-\alpha\Delta\theta)dx &= -a(u,u)-\int_{\Gamma_1}\{\mathfrak{B}_2 u(m.\nabla u)-\mathfrak{B}_1 u\frac{\partial}{\partial\nu}(m.\nabla u)\}d\Gamma_1\\ &-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}m.\nu\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]d\Gamma_1\\ &-\alpha\int_{\Gamma_1}(m.\nabla u)\frac{\partial\theta}{\partial\nu}d\Gamma_1+\alpha\int\nabla(m.\nabla u)\nabla\theta dx\end{aligned} \tag{3.5}$$

Usando o Lema 1.1 e novamente a Identidade de Green obtemo

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\frac{1}{2}u(-\Delta^2 u-\alpha\Delta\theta)dx &= -\frac{1}{2}a(u,u)-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\{(\mathfrak{B}_2\mathfrak{u})u+(\mathfrak{B}_1\mathfrak{u})\frac{\partial u}{\partial\nu}\}d\Gamma_1\\ &-\frac{\alpha}{2}\int_{\Gamma_1}u\frac{\partial\theta}{\partial\nu}d\Gamma_1-\frac{\alpha}{2}\int_{\Omega}\nabla u.\nabla\theta dx\end{aligned} \tag{3.6}$$

Substituindo as equações (3.4), (3.5) e (3.6) em (3.3) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi(t) &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}(m.v)|u_t|^2 d\Gamma_1-\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2dx-\frac{3}{2}a(u,u)\\ &-\int_{\Gamma_1}\mathfrak{B}_2\mathfrak{u}(m.\nabla u+\frac{1}{2}u)d\Gamma_1+\int_{\Gamma_1}\mathfrak{B}_1\mathfrak{u}\frac{\partial}{\partial\nu}(m.\nabla u-\frac{1}{2}u)d\Gamma_1\\ &-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}m.\nu\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]d\Gamma_1\\ &-\alpha\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\theta}{\partial\nu}(m.\nabla u+\frac{u}{2})d\Gamma_1+\alpha\int_{\Omega}\nabla\theta.(\nabla(m.\nabla u)-\frac{1}{2}\nabla u)dx.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Usando a hipótese (1.9) temos

$$\left|\alpha\int_{\Omega}\nabla\theta.(\nabla(m.\nabla u)-\frac{1}{2}\nabla u)dx\right| \le \epsilon a(u,u)+C_\epsilon\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx \tag{3.8}$$

onde ϵ uma contante positiva. Segue do Teorema do Traço que

$$\left|\int_{\Gamma_1}(\mathfrak{B}_2\mathfrak{u}+\alpha\frac{\partial\theta}{\partial\nu})(m.\nabla u+\frac{1}{2}u)d\Gamma_1\right|\leq\epsilon||u||^2_{H^2(\Omega)}$$
$$+C_\epsilon\int_{\Gamma_1}|\mathfrak{B}_2u+\alpha\frac{\partial\theta}{\partial\nu}-\rho_2u|^2d\Gamma_1-\Big(\frac{\rho_2}{4}-C_\epsilon\rho_2^2\Big)\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma_1. \tag{3.9}$$

Usando a hipótese (1.8) temos

$$\left|\int_{\Gamma_1}\mathfrak{B}_1u\frac{\partial}{\partial\nu}(m.\nabla u-\frac{1}{2}u)d\Gamma_1\right|\leq C\epsilon\int_{\Gamma_1}\left|\mathfrak{B}_1u+\rho_1\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2$$

$$-\Big(\frac{\rho_1}{4}-C_\epsilon\rho_1^2\Big)\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2d\Gamma_1+\epsilon a(u,u)$$

$$+\epsilon\int_{\Gamma_1}m.\nu\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)^2+2\mu\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]d\Gamma_1. \tag{3.10}$$

Substituindo as condições as desigualdades (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.7) e usando as condições de fronteira (2.3) e (2.4) a qual podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$\mathfrak{B}_1u+\rho_1\frac{\partial u}{\partial\nu}=-\eta_1\Big\{\frac{\partial u_t}{\partial\nu}+k_1(t)\frac{\partial u}{\partial\nu}-k_1'\diamond\frac{\partial u}{\partial\nu}-k_1(t)\frac{\partial u_0}{\partial\nu}\Big\},$$
$$\mathfrak{B}_2u-\rho_2u+\alpha\frac{\partial\theta}{\partial\nu}=+\eta_2\{u_t+k_2(t)u-k_2'\diamond u-k_2(t)u_0\}.$$

Concluindo a demontração do teorema. □.

Lema 3.1.4 Seja f uma função real positiva de classe C^1. Se existem constantes positivas γ_1,γ_2 e C_0 tal que

$$f'(t)\leq-\gamma_2f(t)+C_0e^{-\gamma_1t},$$

então existem constantes positivas γ e C tal que

$$f(t)\leq(f(0)+C)e^{-\gamma t}.$$

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que $\gamma_2 < \gamma_1$. Definimos $F(t)$ por

$$F(t) := f(t) + \frac{C_0}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_1 t}.$$

Derivando $F(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} F'(t) \quad & := f'(t) - \frac{\gamma_1 C_0}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_1 t} \\ & \leq -\gamma_1 f(t) + C_0 e^{-\gamma_1 t} + \frac{\mathrm{C}_0}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_1 t} \\ & \leq -\gamma_1 f(t) - \frac{\gamma_0 C_0}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_1 t} \end{aligned}$$

Da hopótese sobre f' vem que

$$F'(t) \leq -\gamma_2 F(t).$$

Daí

$$\frac{d}{dt} \ln F(t) \leq -\gamma_2.$$

Integrando de 0 a t obtemos

$$\ln \frac{F(t)}{F(0)} \leq -\gamma_2 t$$

Isto é

$$f(t) + \frac{C_0}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_1 t} \leq \left[f(0) + \frac{C_0}{\gamma_1 - \gamma_2} \right] e^{-\gamma_2 t}$$

Como

$\dfrac{C_0}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_1 t} \; > \; 0$ pois $\quad \gamma_2 < \gamma_1$ Segue que

$$f(t) \leq \left(f(0) + \frac{C_0}{\gamma_1 - \gamma_2} \right) e^{-\gamma_2} t.$$

Tomando $\quad \dfrac{C_0}{\gamma_1 - \gamma_2} e^{-\gamma_1 t} \; = \; C$ e $\gamma_2 \; = \; \gamma$ segue

$$f(t) \leq (f(0) + C)\, e^{-\gamma t}.$$

Agora, assumiremos que $\gamma_2 \geq \gamma_1$ isto implica que $-\gamma_2 \leq -\gamma_1$.

Como

$$f'(t) \leq -\gamma_2 f(t) + C_0 e^{-\gamma_1 t}$$

Resulta

$$f'(t) \leq -\gamma_1 f(t) + C_0 e^{-\gamma_1 t}$$

Isto é

$$f'(t)e^{\gamma_1 t} + f(t)e^{\gamma_1 t} \leq C_0 \;\Rightarrow\; [f(t)e^{\gamma_1 t}]' \leq C_0$$

Integrando de 0 de t e obtemos

$$f(t) \leq (f(0) + C_0 t)e^{-\gamma_1 t}. \tag{3.11}$$

Como

$t \leq (\gamma_1 - \epsilon)e^{(\gamma_1 - \epsilon)t}$ para $0 < \epsilon < \gamma_1$ e t suficientemente grande .

Substituindo a expressão acima em (3.11) segue

$$f(t) \leq (f(0) + C_0(\gamma_1 - \epsilon)e^{(\gamma_1 - \epsilon)t})e^{-\gamma_1 t}.$$

Ou seja

$$f(t) \leq (f(0)e^{-\gamma_1 t} + C_0(\gamma_1 - \epsilon))e^{-\epsilon t}.$$

Como

$\epsilon < \gamma_1$ para todo $t > 0$ segue que $\epsilon t < \gamma_1 t$ logo $-\epsilon t > -\gamma_1 t$.

Assim

$$f(t) \leq [f(0) + C_0(\gamma_1 - \epsilon)]\, e^{-\epsilon t}$$

Considerando $C = C_0(\gamma_1 - \epsilon)$ e $\gamma = \epsilon$ resulta

$$f(t) \leq (f(0) + C)e^{-\gamma t}.$$

Concluindo a demonstração do teorema $\square$.

Consideremos o funcional de Lyapunov, que será de fundamental importância para e estudo do decaimento da solução do sistema (1.1) – (1.7)

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + \psi(t)$$

com $N > 0$. Podemos verificar a seguinte desigualdade

$$q_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq q_1 E(t) \tag{3.12}$$

para as constantes positivas q_0 e q_1. Vamos demonstrar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.1. Suponhamos que o dado inicial $(u_0, u_1, \theta_0) \in H^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Se os núcleos resolventes k_1 e k_2 satisfazem a condição (3.1) e ρ_1, ρ_2 são constantes positivas, então existem constantes positivas C e γ tal que

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}E(0)$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Demonstraremos o teorema para soluções fortes , isto é, para soluções com dados $(u_0, u_1, \theta_0) \in (H^4(\Omega) \cap V) \times V(\times(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ satisfazendo as condições de compatibilidade (2.29), a conclusão do resultado segue por argumentos de densidade.

Dos Lemas (3.1.1) – (3.1.3) temos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) = N\frac{d}{dt}E(t) + \frac{d}{dt}\psi(t). \tag{3.13}$$

Usando as hipóteses (3.1) obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
k_1'' \Box \frac{\partial u}{\partial \nu} &\leq C_2 k_1' \Box \frac{\partial u}{\partial \nu}, \\
k_2'' \Box u &\leq C_2 k_2' \Box u, \\
k_1'(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|^2 &\leq -C_1 k_1(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|^2, \\
k_1'(t)|u|^2 &\leq -C_1 k_1(t)|u|^2.
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades acima e a desigualdade de Poincarè na desigualdade (3.2) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) \quad &\leq -\frac{\eta_1 C}{2}\int_{\Gamma_1}\Big\{\Big|\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\Big|^2 - k_1'\Box\frac{\partial u}{\partial\nu} + k_1(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2 - k_1^2(t)\Big|\frac{\partial u_0}{\partial\nu}\Big|^2\Big\}d\Gamma_1\\ &-\frac{\eta_1 C}{2}\int_{\Gamma_1}\{|u_t|^2 - k_2'\Box u + k_2(t)|u|^2 - k_2^2(t)|u_0|^2\}d\Gamma_1\\ &-C\int_\Omega|\theta|^2dx - \frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\theta|^2dx.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Por outro lado, pelo Lema 3.1.3, vem que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi(t) \quad \leq \quad & -\lambda_1\mathcal{N}_1(t) + C\int_\Gamma\Big\{\Big|\frac{\partial u_t}{\partial\nu}\Big|^2 + k_1(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2 - k_1'\Box\frac{\partial u}{\partial\nu} + k_1^2(t)\Big|\frac{\partial u_0}{\partial\nu}\Big|^2\Big\}d\Gamma\\ &+\mathrm{C}\int_\Gamma\{|u_t|^2 + k_2(t)|u|^2 - k_2'\Box u + k_2^2(t)|u_0|^2\}d\Gamma.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Substituindo (1.14) e (3.15) em (3.13) resulta

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\lambda_2 E(t) + CN(k_1+k_2)^2E(0).\tag{3.16}$$

Escolhendo N suficientemente grande obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\lambda_2 E(t) + CNR^2(t)E(0),$$

onde $R(t) = k_2 + k_1$ e λ_2 uma pequena constante positiva.

De (3.12) obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{\lambda_2}{q_1}\mathcal{L}(t) + CNR^2(t)E(0).$$

Considerando $-\gamma_1 = \dfrac{-\gamma_2}{q_0} < 0$ e $C_0e^{-\gamma_1 t} = CNE(0)R^2 > 0$. Portanto de acordo com o Lema 3.1.4 existem constantes positivas C e γ tais que

$$\mathcal{L}(t) \leq \{\mathcal{L}(0) + C\}e^{-\gamma t}.$$

para $C, \gamma > 0$.

Como

$$q_0E(t) \leq \mathcal{L}(t).$$

Segue que

$$q_0E(t) \leq (\mathcal{L}(0) + C)e^{-\gamma_1} \tag{3.17}$$

Além disso temos

$$\mathcal{L}(t) \leq q_1E(t), \forall t$$

Logo

$$\mathcal{L}(0) \leq q_1E(0). \tag{3.18}$$

Substituindo (3.18) em (3.17) e escolhendo uma constante q_3 positiva de modo que $C \leq q_3E(0)$ resulta,

$$E(t) \leq (\frac{q_1 + q_3}{q_0})E(0)e^{-\gamma t}.$$

Consedere $C = (\dfrac{q_1 + q_3}{q_0})$ segue,

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}E(0), \forall t \geq 0.$$

Concluindo a demonstreação do teorema.

$\square$.

3.2 Decaimento Polinomial

Aqui, nossa atenção será na taxa de decaimento uniforme quando os núcleos resolventes k_1 e k_2 decaem polinomialmente com uma taxa do tipo $(1+t)^{-p}$. Neste caso, mostraremos que a solução também decai polinomialmente com a mesma taxa. Consideremos as seguintes hipóteses

$$k(0) > 0, \quad -k_i'(t) \leq -b_1k_i^{1+\frac{1}{p}}(t), \quad k_i''(t) \geq b_2[-k_i'(t)]^{1+\frac{1}{p+1}}, \quad i = 1, 2 \tag{3.19}$$

onde $p > 1$ e b_1 e b_2 constantes positivas.

Os Lemas seguintes são de fundamental importância para a obtenção do decaimento polinomial.

Lema 3.2.1. Seja m e h funções integráveis, $0 \leq r < 1$ e $q > 0$. Então, para $t \geq 0$

$$\int_0^t |m(t-s)h(s)|ds \leq \Big(|m(t-s)|^{1+\frac{1-r}{q}}|h(s)|ds\Big)^{\frac{q}{q+1}}\Big(|m(t-s)|^r|h(s)|ds\Big)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Demonstração. Fazendo

$$v(s) := |m(t-s)|^{1-\frac{r}{q+1}}|h(s)|^{\frac{q}{q+1}} \qquad w(s) := |m(t-s)|^{\frac{r}{q+1}}|h(s)|^{\frac{1}{q+1}},$$

para $t > 0$ arbitrário, porém fixo. Segue-se, facilmente que

$$|v(s)w(s)| = |m(t-s)|\ |h(s)| \Longrightarrow \int_0^t |v(s)w(s)|ds = \int_0^t |m(t-s)|\ |h(s)|ds.$$

Usando a desigualdade de Hölder para $\delta = \dfrac{q+1}{q}$ e $\delta^* = q+1$ vem que

$$\begin{aligned}\int_0^t |m(t-s)h(s)|\ ds \quad &\leq \quad \left[\int_0^t (|m(t-s)|^{1-\frac{r}{q+1}}|h(s)|^{\frac{q}{q+1}})^{\frac{q+1}{q}}ds\right]^{\frac{q}{q+1}} \\ &\quad\quad \left[\int_0^t (|m(t-s)|^{\frac{r}{q+1}}|h(s)|^{\frac{1}{q+1}})^{q+1}ds\right]^{\frac{1}{q+1}},\end{aligned}$$

de onde segue o resultado $\square$.

Lema 3.2.2 Denotamos por $(\phi_1, \phi_2) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial v}, u\right)$ onde u é a solução de $(1.1)-(1.7)$. Então para $p > 1$, $0 \leq r < 1$ e $t \geq 0$), temos

$$\Big(\int_\Gamma |k_i'|\Box\phi_i d\Gamma\Big)^{\frac{1+(1-r)(p+1)}{(1-r)(p+1)}} \leq 2\Big(\int_0^t |k_i'(s)|^r ds||\phi_i||^2_{L^\infty(0,t,L^2(\Gamma))}\Big)^{\frac{1}{(1-r)(p+1)}}\int_\Gamma |k_i'|^{1+\frac{1}{p+1}}\Box\phi_i d\Gamma$$

e para $r = 0$ obtemos

$$\Big(\int_\Gamma |k_i'|\Box\phi_i d\Gamma\Big)^{\frac{p+2}{p+1}} \leq 2\Big(\int_0^t ||\phi_i(s,.)||^2_{L^2}(\Gamma)ds + t||\phi_i(s,.)||^2_{L^2(\Gamma)}\Big)^{p+1}\int_\Omega |k_i'|^{1+\frac{1}{p+1}}\Box\phi_i d\Gamma,$$

para $i = 1, 2$.

Demonstração. As desigualdades acima são consequências do Lema 3.2.1 para

$$m(s) := |k_i'(s)|, \quad h(s) := \int_{\Gamma_1} |\phi_i(t,x) - \phi_i(s,x)|^2 d\Gamma_1, \quad q := (1-r)(p+1)$$

com t fixo.

Caso $r > 0$.

Temos que

$$|k_i'|\Box\phi_i = \int_0^t |k_i'(t-s)|\ |\phi(t,x)-\phi(s,x)|^2 ds.$$

Daí, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^t |k_i'(t-s)||\phi(t,x)-\phi(s,x)|^2 ds \quad &\leq \quad \Big(\int_0^t |k_i'(t-s)^{1+\frac{1-r}{(1-r)(p+1)}}||\phi(t,x)-\phi(s,x)|^2 ds\Big)^{\frac{(1-r)(p+1)}{(1-r)(p+1)+1}}.\\ &\Big(\int_0^t |k_i'(t-s)|^r|\phi(t,x)-\phi(s,x)|^2\ ds\Big)^{\frac{1}{(r+1)(r+1)+1}}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}|k_i'|\Box\phi_i \quad &\leq \quad \Big(\int_0^t |k_i'(s)|^r|\phi(t,x)-\phi(s,x)|^2 ds\Big)^{\frac{(1-r)(p+1)}{(1-r)(p+1)+1}}.\\ &\Big(|k_i'|^{1+\frac{1}{p+1}}\Box\phi_i\Big)^{\frac{(1-r)(p+1)}{(1-r)(p+1)+1}}\end{aligned}$$

sendo $\displaystyle\int_0^t |k_i'(t-s)|^r ds = \int_0^t |k_i'(s)|^r\ ds.$

Agora, usando a desigualdade elementar $2ab \leq a^2+b^2$, obtemos

$$\begin{aligned}|k_i'|\Box\phi_i \quad &\leq \quad 2\Big(\int_0^t |k_i'(s)|^r ds||\phi||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1))}\Big)^{\frac{(1-r)(p+1)}{(1-r)(p+1)+1}}.\\ &\Big(|k_i'|^{1+\frac{1}{p+1}}\Box\phi_i\Big)^{\frac{(1-r)(p+1)}{(1-r)(p+1)+1}}.\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros à potência $\frac{(1-r)(p+1)+1}{(1-r)(1+p)}$ segue o resultado.

Caso $r = 0$

Temos que

$$\begin{aligned}&\int_0^t |k_i'(t-s)||\phi(t,x)-\phi(s,x)|^2 ds\\ &\leq \Big(\int_0^t |k_i'(t-s)^{1+\frac{1}{(1)(p+1)}}||\phi(t,x)-\phi(s,x)|^2 ds\Big)^{\frac{1}{p+2}} \cdot \Big(\int_0^t |\phi(t,x)-\phi(s,x)|^2\ ds\Big)^{\frac{p+1)}{p+2}}.\end{aligned}$$

Como $|\phi(t,x)-\phi(s,x)|^2 \leq 2(|\phi(t,x)|^2+|\phi(s,x)|^2)$, segue que

$$|k_i'|\Box\phi_i \leq 2\Big(\int_0^t |\phi(t,x)|^2+|\phi(s,x)|^2 ds\Big)^{\frac{1}{p+2}}.\Big(|k_i'|^{1+\frac{1}{p+1}}\Box\phi_i ds\Big)^{\frac{p+1}{p+2}}.$$

Assim

$$|k_i'|\Box\phi_i \leq 2\Big(\int_0^t ||\phi(t,x)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\phi(s,x)||^2_{L^2(\Omega)} ds\Big)^{\frac{1}{p+2}} . \Big(|k_i'|^{1+\frac{1}{p+1}}\Box\phi_i ds\Big)^{\frac{p+1}{p+2}}.$$

Elevando ambos os membros à potência $\frac{p+2}{p+1}$ segue o resultado . $\Box$.

Lema 3.2.3 Seja $f \geq 0$ uma função diferenciável satisfazendo

$$f'(t) \geq -\frac{\mathrm{C}_1}{f(0)^{\frac{1}{\alpha}}} f(t)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \frac{\mathrm{C}_2}{(1+t)^{\beta}} f(0), \forall t \geq 0$$

para as constantes positivas C_1, C_2, α, e β tal que

$$\beta \geq \alpha + 1.$$

Então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$f(t) \leq \frac{\mathrm{C}}{(1+t)^{\alpha}} f(0), \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Denotamos por

$$F(t) = f(t) + \frac{2C_2}{\alpha}(1+t)^{-\alpha} f(0).$$

Deferenciando esta função, temos

$$\begin{aligned} F'(t) \quad &= f(t) - 2C_2(1+t)^{-\alpha+1} f(0) \\ &\leq -\frac{C_1}{f(0)^{\frac{1}{\alpha}}} f(t)^{1+\frac{1}{\alpha}} - C_2(1+t)^{(-\alpha+1)} f(0) \\ &\leq -\frac{C}{f(0)^{\frac{1}{\alpha}}}\Big[f(t)^{1+\frac{1}{\alpha}} + \Big(\frac{f(0)}{(1+t)^{\alpha}}\Big)^{1+\frac{1}{\alpha}}\Big] \\ &\leq -\frac{C}{f(0)^{\frac{1}{\alpha}}} F(t)^{1+\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Daí vem que

$$F(t) = \frac{F(0)}{(1+Ct)^{\alpha}} \leq \frac{C}{(1+t)^{\alpha}} f(0)$$

Portanto

$$f(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{\alpha}} f(0)$$

$\square$.

Teorema 3.2.1 Suponhamos $(u_0, u_1, \theta_0) \in H^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Se os núcleos k_1 e k_2 satisfazem a condição (3.12) e ρ_1, ρ_2 são constantes positivas então existe uma constante positiva C tal que

$$E(t) = \frac{C}{(1+t)^{p+1}} E(0).$$

Demonstração. Demonstraremos o teorema para soluções fortes, isto é, para soluções com dados iniciais $(u_0, u_1, \theta_0) \in H^4(\Omega) \cap V) \times V \times (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ satisfazendo as condições de compatibilidade (2.29). O resultado segue usando os argumentos de densidade.

Usando as hipóteses (3.19) podemos reescrever desigualdade (3.2) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) \quad & \leq -\frac{\eta_1 C}{2}\int_{\Gamma_1}\Big\{\Big|\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\Big|^2 + [-k_1']^{1+\frac{1}{p+1}}\square\frac{\partial u}{\partial \nu} + k_1^{1+\frac{1}{p}}(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|^2 - k_1^2(t)\Big|\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\Big|^2\Big\}d\Gamma_1 \\ & -\frac{\eta_1 C}{2}\int_{\Gamma_1}\{|u_t|^2 + [-k_2']^{1+\frac{1}{p+1}}\square u + k_2^{1+\frac{1}{p}}(t)|u|^2 - k_2^2(t)|u_0|^2\}d\Gamma_1 \\ & -C\int_\Omega |\theta|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\theta|^2 dx \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde C é uma constante positiva. Usando a hipótese (3.19) novamente, vem que existe uma outra constante positiva $C > 0$ tal que

$$\Big|k_1' \diamond \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|^2 \leq C[-k_1']^{1+\frac{1}{p+1}}\square\frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad |k_2' \diamond u|^2 \leq C[-k_2']^{1+\frac{1}{p+1}}\square u.$$

Usando esta estimativa o lema (3.1.2) e escolhendo N grande, de (3.20) – (3.21) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(t) \quad & \leq -\lambda_1\mathcal{N}_1(t) + C\int_{\Gamma_1}\{|u_t|^2 + k_2^{1+\frac{1}{p}}(t)|u|^2 + [-k_2']^{1+\frac{1}{p+1}}\square u + k_2^2(t)|u_0|^2\}d\Gamma_1 \\ & +C\int_{\Gamma_1}\Big\{\Big|\frac{\partial u_t}{\partial \nu}\Big|^2 + k_1^{1+\frac{1}{p}}(t)\Big|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|^2 + [-k_1']^{1+\frac{1}{p+1}}\square\frac{\partial u}{\partial \nu} + k_1^2(t)\Big|\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\Big|^2\Big\}d\Gamma_1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Escolhendo N grande, de (3.20) – (3.21) resulta que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\lambda_2\mathcal{N}(t) - \lambda_1\int_{\Gamma_1}\Big([-k_1']^{1+\frac{1}{p+1}}\square\frac{\partial u}{\partial \nu} + [-k_2']^{1+\frac{1}{p+1}}\square u\Big)d\Gamma_1 + CNR^2(t)E(0). \tag{3.22}$$

para $\lambda_2 > 0$ onde

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}_1(t) + \int_\Omega |\theta|^2 dx.$$

Fixemos $0 < r < 1$ tal que $\frac{1}{p+1} < r < \frac{p}{p+1}$. Nesta condição, pela hipótese (3.12) temos

$$\int_0^\infty [-k_i']^r \leq C \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^{r(p+1)}} < \infty \;\; \forall \;\; i = 1, 2.$$

Usando a estimativa acima e o Lema (3.2.2) resulta que

$$\int_\Gamma [-k_1']^{1+\frac{1}{p+1}} \Box \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_1 \geq CE(0)^{-\frac{1}{(1-r)(1+p)}} \Big(\int_{\Gamma_1} [-k_1'] \Box \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_1 \Big)^{1+\frac{1}{(1-r)(1+p)}}, \tag{3.23}$$

$$\int_{\Gamma_1} [-k_2']^{1+\frac{1}{p+1}} \Box u d\Gamma_1 \geq CE(0)^{-\frac{1}{(1-r)(1+p)}} \Big(\int_{\Gamma_1} [-k_2'] \Box u d\Gamma_1 \Big)^{1+\frac{1}{(1-r)(1+p)}}. \tag{3.24}$$

Por outro lado, como a energia é limitada temos

$$\mathcal{N}(t)^{1+\frac{1}{(1-r)(1+p)}} \leq CE(0)^{\frac{1}{(1-r)(1+p)}} \mathcal{N}(t). \tag{3.25}$$

Substituindo (3.23) – (3.25) em (3.22) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \quad & \leq -\mathrm{C}E(0)^{-\frac{1}{(1-r)(1+p)}} \mathcal{N}(t)^{1+\frac{1}{(1-r)(1+p)}} + CNR^2(t)E(0) \\ & -\mathrm{C}E(0)^{-\frac{1}{(1-r)(1+p)}} \Big\{ \Big(\int_{\Gamma_1} [-k_1'] \Box u d\Gamma_1 \Big)^{1+\frac{1}{(1-r)(1+p)}} + \Big(\int_{\Gamma_1} [-k_2'] \Box u d\Gamma_1 \Big)^{1+\frac{1}{(1-r)(1+p)}} \Big\}. \end{aligned}$$

Considerando a desigualdade (3.12) obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{C}{\mathcal{L}(0)}^{\frac{1}{(1-r)(p+1)}} \mathcal{L}(t)^{1+\frac{1}{(1-r)(1+p)}} + CNR^2(t)E(0). \tag{3.26}$$

Portanto, pelo Lema (3.2.3) obtemos

$$\mathcal{L}(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{(1-r)(p+1)}} \mathcal{L}(0). \tag{3.27}$$

Como $(1-r)(p+1) > 1$ resulta, para $t \geq 0$, as seguintes estimativas

$$t||u(t,.)||^2_{L^2(\Gamma_1)} + t\Big|\Big|\frac{\partial u(t,.)}{\partial \nu}\Big|\Big|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq Ct\mathcal{L}(t) < \infty,$$

$$\int_0^t ||u(s,.)||^2_{L^2(\Gamma_1)} \Big|\Big|\frac{\partial u(s,.)}{\partial \nu}\Big|\Big|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq C\mathcal{L}(t) < \infty.$$

Usando a estimativa acima no Lema (3.2.2) com $r = 0$, obtemos

$$\int_{\Gamma_1} [-k_1']^{1+\frac{1}{p+1}} \Box \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma_1 \geq \frac{\mathrm{C}}{E(0)^{\frac{1}{1+p}}} \Big(\int_{\Gamma_1} [-k_1'] \Box \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma \Big)^{1+\frac{1}{1+p}},$$

$$\int_{\Gamma_1}[-k_2']^{1+\frac{1}{p+1}}\square u d\Gamma_1 \geq \frac{\mathrm{C}}{E(0)^{\frac{1}{1+p}}}\Big(\int_{\Gamma_1}[-k_2']\square u d\Gamma_1\Big)^{1+\frac{1}{1+p}}.$$

Usando essas desigualdades e os mesmos argumentos como em (3.26) obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{C}{\mathcal{L}(0)^{\frac{1}{p+1}}}\mathcal{L}(t)^{1+\frac{1}{1+p}} + CNR^2(t)E(0).$$

Aplicando o Lema (3.2.3) obtemos

$$\mathcal{L}(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{p+1}}\mathcal{L}(0).$$

Usando a desigualdade (3.11) concluimos que

$$E(t) \leq \frac{\mathrm{C}}{(1+t)^{p+1}}E(0)$$

$\square$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. M. Ball, *Initial-boundary value problems for an extensible beam.* J. Math. Anal. Appl. 42(1), (1973), 61-90.

[2] M. A. Horn, *Uniform decay rates for the solutions to the Euler-Bernoulli plate equation with boundary feedback acting via bending moments.* Diff. Integral Equations, 5(1992), 1121-1150.

[3] M. M. Cavalcanti, *Existence and uniform decay for the Euler-Bernoulli viscoelastic equation with nonlocal boundary dissipation.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 8(3), (2002), 675-695.

[4] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, T. F. Ma, *Exponential decay of the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains.* Diff. Integral Eqs. 17(5-6), (2004), 495-510.

[5] A. Pazoto, G. Perla Menzala, *Uniform stabilization of a nonlinear beam model with thermal effects and nonlinear boundary dissipation. Funkcialaj Ekvacioj, 43(2), 339-360, (2000).*

[6] C. M. Dafermos, J. A. Nohel, *Energy methods for nonlinear hyperbolic Volterra integro-differential equations.* Comm. Partial differential Equations 4(1979), 219-278.

[7] M. E. Gurtin, A. C. Pipkin, *A general theory of heat conduction with finite wave speeds.* Arch. Rational Mech. Anal., 31(1968), 113-126.

[8] G. Ji, I. Lasiecka, *Nonlinear boundary feedback stabilization for a semilinear Kirchhoff plate with dissipation acting only via moments-limiting behavior.* J. Math. Anal. Appl. 229, (1999), 452-479.

[9] Z. Liu, S. Zheng, *Exponential energy decay of the Euler-Bernoulli beam with shear diffusion or thermal dissipation.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 196, (1995), 467-478.

[10] Z. Liu, S. Zheng, *Exponential stability of the Kirchhoff plate with thermal or viscoelastic damping.* Quarterly of Applied Mathematics 3, (1997), 551-564.

[11] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*, John Wiley and Sons-Masson, Paris (1994).

[12] S. Kouémou Patcheu, *On a global solution and asymptotic behaviour for the generalized damped extensible beam equation.* J. Diff. Eqs. 135, (1997), 299-314.

[13] J. E. Lagnese, G. Leugering, *Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback.* J. Diff. Equations 91(1991), 355-388.

[14] J.E. Lagnese, *Boundary Stabilization of Thin Plates.* SIAM. Society for industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1989).

[15] J. L. Lagnese, G. Leugering, *Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback.* J. Diff. Eqs. 91, (1991), 355-388.

[16] J.E. Lagnese, J.L. Lions, *Modelling analysis of thin plates.* Celletion Recherches en Mathématiques Appliquées 6. Masson, Paris, (1989).
[17] J.L. Lions, E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications* Springer-Verlag, New York, Vol. I, (1972).
[18] J. L. Lions, *Quelques Mèthodes de resolution de problèmes aux limites non lineaires.* Dunod Gauthiers Villars, Paris, (1969).
[19] H. Lange, G. Perla Menzala, *Rates of decay of a nonlocal beam equations.* Diff. Integral Equations, 10(6), (1997), 1075-1092.
[20] I. Lasiecka, *Exponential decay rates for the solutions of the Euler-Bernoulli equations with boundary dissipation occuring in the moments only.* J. diff. Eqs. 95, (1992), 169-182.
[21] J. E. Muñoz Rivera, R. Racke, *Magneto-thermo-elasticity-large time behavior for linear system.* Adv. Differential Equations 6 (2001), 359-384.
[22] J. Muñoz Rivera, E. C. Lapa, R. Barreto, *Decay rates for viscoelastic plates with memory.* J. of Elasticity 44(1), (1996), 61-87.
[23] R. Racke, *Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems.* Aspect of Mathematics E19. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, (1992).
[24] M. Tucsnack, *Semi-internal stabilization for a nonlinear Bernoulli-Euler equation.* Math. Meth. Appl. Sciences, 19(1996), 897-907.