UNIVALI

JOSIANE ELIAS NICOLODI

O CONHECIMENTO DOS ALUNOS DE PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE A DIVISÃO

ITAJAÍ (SC)
2009

UNIVALI
UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação, Extensão e Cultura - ProPPEC
Curso de Pós-Graduação *Stricto Sensu*
Programa de Mestrado Acadêmico em Educação – PMAE

JOSIANE ELIAS NICOLODI

O CONHECIMENTO DOS ALUNOS DE PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE A DIVISÃO

Dissertação apresentada ao colegiado do PMAE como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação. *Área de concentração*: **Educação**. (*Linha de Pesquisa*: **Desenvolvimento Humano e Processos de Aprendizagem.** *Grupo de Pesquisa*: **Educação Matemática**).

Orientadora: Profa. Dra. Maria Helena Baptista Vilares Cordeiro.

ITAJAÍ (SC)
2009

FICHA CATALOGRÁFICA

UNIVALI
UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ
Pró-Reitoria de Pesquisa, Pós-Graduação, Extensão e Cultura - ProPPEC
Curso de Pós-Graduação *Stricto Sensu*
Programa de Mestrado Acadêmico em Educação – PMAE

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

JOSIANE ELIAS NICOLODI

O CONHECIMENTO DOS ALUNOS DE PRIMEIRA SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE A DIVISÃO

Dissertação avaliada e aprovada pela Comissão Examinadora e referendada pelo Colegiado do PMAE como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação.

Itajaí (SC), 14 de agosto de 2009.

Membros da Comissão:

Orientadora: ____________________________________
Profª. Dra. Maria Helena Baptista Vilares Cordeiro (UNIVALI)

Membro externo: ____________________________________
Profª. Dra. Maria Lucia Faria Moro (UFPR)

Membro representante do colegiado: ____________________________________
Profª. Dra. Luciane Maria Schlindwein (UNIVALI)

Dedico este trabalho aos meus colaboradores, aos mestres e doutores, ao meu marido, minha filha e aos meus pais. Sem cada um de vocês, eu não teria chegado até aqui.

AGRADECIMENTOS

Minha formação constitui-se de um ato contínuo e compartilhado, um somatório de pequenas e grandes ações, de desafios e provações, de apoio solidário...

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por ter me proporcionado tudo o que alcancei até o momento, e por ser luz para o meu caminho.

Meus agradecimentos a todos os que contribuíram para a finalização desta pesquisa, que acreditaram na proposta de uma busca contínua por uma educação melhor.

À Maria Helena Baptista Vilares Cordeiro, pela sua competência e perseverança, na orientação deste estudo, o meu profundo reconhecimento.

Ao Roberto, Júlia Beatriz, Onécio e Maria, pelo suporte em todos os momentos.

“A educação é um processo social, é desenvolvimento.
Não é preparação para a vida, é a própria vida”.

(John Dewey)

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE APÊNDICE

LISTA DE ANEXOS

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo caracterizar as formas de solução escrita utilizadas por alunos de primeira série do ensino fundamental na resolução de problemas de divisão. A partir dos referenciais teórico-metodológicos propostos por Vergnaud e Nunes, Campos, Magina e Bryant, empreendeu-se uma investigação para responder à seguinte pergunta de pesquisa: Que compreensão da divisão é revelada na solução escrita dos alunos da primeira série do ensino fundamental na resolução de problemas de divisão? A coleta de dados foi realizada com 38 crianças de uma escola pública de Navegantes, as quais foi solicitado que resolvessem um formulário com problemas de divisão, exata e inexata, partição e quotas, de forma a se obter informações sobre o objeto a ser investigado. A análise qualitativa das soluções escritas efetuadas pelos sujeitos, na resolução dos problemas de divisão, resultou em um mapa que relaciona as etapas que ocasionaram nas estratégias, que resultaram nos esquemas utilizados pelas crianças para resolução dos problemas de divisão, e também, na coordenação dos fatores dividendo, divisor e quociente, envolvidos na situação decorrente do enunciado problema. Conclui-se que a compreensão apresentada na solução esperada dos problemas, nas está diretamente a situação descrita no enunciado e denotação de exatos e inexatos. O desempenho das crianças de modo geral nas soluções de problemas de divisão de partição exata foi o que apresentou o melhor índice, enquanto que o problema de quotas inexatos mostrou um nível de aprendizagem melhor que o de partição inexata, quando considerado o resto.

Palavras-chave: Esquemas; Divisão; Soluções.

ABSTRACT

This study aimed to characterize the forms of written solution used by the students in the first grade of primary education in solving problems of division. From the theoretical and methodological frameworks proposed by Vergnaud and Nunes, Fields, Magma and Bryant, took up an investigation to answer the following research question: What understanding of the division is shown in the solution of the students writing the first grade of elementary school in solving problems of division? The piece of information was performed with 38 children from a public school in Navegantes, where it was asked to solve problems with a form of division, exact (accurate) and inexact (inaccurate), partition and quotas in order to obtain information about the object being investigated. Qualitative analysis of written solutions made by the subjects in solving the problems of division, resulted in a map that lists the steps that resulted in strategies that resulted in the schemes used by children to solve the division problems. It also factors in the coordination of divided, divisor and quotient, involved in the situation due to the stated problem. It follows that understanding at the solution of the problems expected in is directly related to the classification of problems, but the situation described in the statement and denotation of accurate and inaccurate. The performance of children in general in the solutions of problems of dividing partition was exactly what had the best rate, while the problem of inaccurate shares showed a level of learning better than partition inaccurate, when we consider the rest.

Key-words: Diagrams; Division; Solutions.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para situar este trabalho e justificar a escolha do tema, apresentarei a situação atual do ensino de matemática revelada pelo Ministério da Educação (MEC) e por entidades internacionais. Nos últimos anos, as organizações brasileiras responsáveis pela Educação vêm se preocupando em reverter a situação da Educação no Brasil.

Dados revelados pelo INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - (INEP, 2007), da pesquisa realizada em 2003 pelo Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA), organizada pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico), e da qual participaram estudantes de 41 países, apontam que o Brasil estava entre os piores no ranking da Educação, especificamente em matemática, com a última colocação. Esse levantamento de dados é realizado de três em três anos, com o objetivo de avaliar o nível dos estudantes com idade média de quinze anos em três habilidades básicas: leitura, matemática e ciências, com foco na resolução de problemas. A mesma avaliação é aplicada em todos os países. Em matemática, concentraram-se 53% (356 pontos) das questões erradas; os alunos brasileiros ficaram atrás de jovens que pertencem a países mais pobres, como a Tunísia e a Indonésia. Os resultados da aplicação do PISA em 2006, em 57 paises, divulgados pelo INEP apresentam uma pequena melhora nos resultados de matemática (370 pontos) em relação aos resultados de 2003.

Preocupando-se com esses dados alarmantes, o Ministério da Educação implantou em 2005, a Prova Brasil, que avaliou o conhecimento de língua portuguesa e matemática (também com foco em resolução de problemas). Dela, participaram alunos das 4ª e 8ª séries das escolas públicas. Os resultados apresentados pelo INEP que operacionalizou a aplicação das provas, foi alarmante. Os dados revelam que, na média, o ensino brasileiro está longe de um padrão mínimo de qualidade. O índice do IDEP (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) foi criado pelo INEP em 2007, e é calculado a partir da taxa de rendimento escolar (aprovação) e as médias de desempenho, sendo esses dois fatores relevantes para a qualidade da educação, por relacionarem fluxo escolar e médias de desempenho em avaliações como a prova Brasil, por exemplo. Para estabelecer a meta de um IDEP nacional igual a 6,0, utilizou-se como referência a qualidade da educação nos países da OCDE, sendo que essa comparação internacional foi possível, graças ao PISA. De modo geral, os dados revelam um baixo desempenho dos alunos brasileiros diante de situações problemas que envolvem as quatro operações básicas da matemática. Segundo Magina (200-), as dificuldades dos alunos em avaliações semelhantes a essas, estavam relacionadas tanto ao raciocínio, quanto ao domínio do procedimento.

Temos nas séries iniciais do ensino fundamental um espaço privilegiado para a alfabetização, e em particular para a alfabetização matemática, que pode permitir reverter o quadro atual do ensino brasileiro. Essa alfabetização requer a construção de conceitos matemáticos elementares, a exemplo daqueles sugeridos nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs (BRASIL, 1997) de Matemática: números naturais e sistema de numeração decimal, operações com números naturais, espaço e forma, grandezas e medidas, tratamento de informação.

É extremamente importante, para a aprendizagem de conceitos matemáticos, a resolução de problemas, pois possibilita apresentar os conceitos matemáticos de acordo com as situações familiares ao aluno, ou seja, permite aproximar a teoria e a prática, para que os conceitos tenham significado para as crianças. Segundo Piaget e Szeminska (1971), a criança constrói suas bases matemáticas pela necessidade de resolução de problemas impostos nas situações do cotidiano. Portanto, como o homem "primitivo", a criança parte de um sentido de número para a construção abstrata, sendo uma construção onde o fator tempo ocupa lugar relevante. Para que o ser humano desenvolva o pensamento lógico matemático, é necessário que faça todas as relações possíveis entre os objetos: é igual, é diferente, é maior, é menor e outras.

Dessa forma, "em todos os níveis do desenvolvimento, uma conduta cognitiva é uma ação (concreta ou interiorizada), cuja função é a adaptação do sujeito a seu meio, pela interação com ele" (PIAGET, 1970, p. 13). Ainda segundo Piaget e Szeminska (op. cit.), esse desenvolvimento é contínuo, pois temos, por um lado, a noção de ação e, por outro, a de função: através de processos de assimilação e acomodação, o sujeito vai, pouco a pouco, coordenando suas ações num nível de complexidade estrutural cada vez mais elevado, o que não é diferente na aprendizagem matemática.

No que se refere à construção de conceitos matemáticos, Piaget (1970), descreve que a construção lógico-matemática não é nem invenção, nem descoberta, é um processo de abstrações reflexivas e é uma construção de combinações novas.

Brun (1996), esclarece em sua obra que Piaget foi levado a juntar a seus trabalhos epistemológicos algumas recomendações sobre o ensino, mas ele próprio não desenvolveu estudos sobre esse assunto.

Segundo Piaget (1970, p. 18), "a maior parte dos esquemas, em lugar de corresponder a uma montagem hereditária acabada, constroem-se pouco a pouco, e dão mesmo lugar a diferenciações, por acomodação às situações modificadas ou por combinações". O significado que Piaget dá à noção de esquema, ou esquemas de ação, é aquilo que se torna comum a diversas aplicações ou repetições da mesma ação. Essa definição se torna um marco fundamental para outras teorias que derivam da teoria piagetiana, como a teoria de Vergnaud, na qual me embasarei para realizar este trabalho.

Do ponto de vista pedagógico, é extremamente importante que o professor leve a criança a construir todas as relações possíveis entre os objetos, nas construções do seu próprio brincar: agrupar objetos por sua semelhança; fazer classificações simples e em série; comparar tamanhos: maior, menor, igual e outros, que irão permitir a construção de conhecimentos matemáticos. Essa construção, que caracteriza o próprio desenvolvimento das estruturas lógicas da criança, é também o objetivo das propostas curriculares para a Educação Infantil e para o Ensino Fundamental, como pode ser constatado nos documentos oficiais, por exemplo, nos PCN's (BRASIL, 1997).

Assim, parte-se do princípio que somente com a construção do conhecimento espontâneo, a criança não consegue suprir as necessidades impostas pela sociedade ao longo de sua vivência. Dessa forma, o papel da escola é o de ajudá-la a transformar esse conhecimento espontâneo em conhecimento científico, fazendo a ligação entre essas duas formas de conhecimento. Sendo assim, nós, educadores, interferimos nesse processo de construção do conhecimento dos nossos alunos. Por isso, o ato de ensinar envolve uma compreensão mais abrangente do que o espaço restrito da sala de aula, ou as atividades propostas pelo professor aos alunos: precisamos identificar o conhecimento já estabelecido por nossos alunos, em seu desenvolvimento, nas diversas experiências de sua vida e propor desafios que os levem a construir o conhecimento científico, apoiando-os nessa construção.

Mesmo antes de entrar na escola, as crianças apresentam um conhecimento espontâneo sobre vários conteúdos matemáticos, e entre esses conteúdos, está o objeto de estudo desta pesquisa, o conceito matemático de divisão (LAUTERT; SPINILLO, 2002). Escolhemos esse objeto porque tenho constatado que a divisão é um dos obstáculos mais difíceis para a criança na aprendizagem da matemática nas séries iniciais do ensino fundamental e, ao mesmo tempo, ela é crucial para a construção de conceitos que são aprendidos posteriormente, como o de fração.

Na minha experiência como professora dos anos finais do ensino fundamental, tenho percebido que as crianças apresentam muitas dificuldades na compreensão da divisão, dificuldades essas relacionadas às relações parte-todo, ao tamanho do todo, aos números das partes, ao tamanho das partes e à diversidade de situações que envolvem a divisão. O que se observa é que as mesmas não conseguem estabelecer um significado matemático entre essas relações, o que as leva a apresentar dificuldades também no algoritmo da divisão.

Vergnaud (1991) considera a divisão uma das operações mais complexas entre as quatro operações, por diversas razões conceituais: ela nem sempre é exata, o quociente nem sempre é o resultado da aplicação do operador ao operado, pode haver restos diferentes de zero, a divisão como regra operatória nem sempre é o inverso da multiplicação. Também, a divisão está relacionada a duas diferentes idéias, repartir e medir, sendo a primeira, de partição, mais enfatizada que a segunda, por quota.

As pesquisas dentro da perspectiva construtivista têm evidenciado que as crianças reconhecem a complexidade do conceito matemático de divisão, demonstram mais facilidade em trabalhar com problemas de partição, têm dificuldades em lidar com o resto e as crianças mais velhas têm mais facilidades no uso de estratégias com papel e lápis ou cálculo mental para trabalhar com o resto do que na utilização de materiais (SELVA, 1998). Outros trabalhos que descrevem a construção inicial do conceito de divisão pela criança, mostram que é importante que a criança reconheça essas duas classes de problemas: o de divisão por partição e o de divisão por quotas (CORREA, 2004), e perceberam o quanto repartir é precoce entre as crianças (MORO, 2004).

Com base nos pressupostos acima colocados, assume-se que é necessário que o professor conheça as soluções das crianças ao resolverem problemas que envolvem a divisão, pois os procedimentos utilizados pela criança são sustentados nas noções que ela construiu sobre esse conceito matemático, em suas experiências diárias. Sendo assim, é necessário conhecer que conhecimentos as crianças já possuem sobre divisão, antes que esse conteúdo lhes seja ensinado na escola, que procedimentos utilizam para resolver problemas de divisão e que notações produzem para registrar suas soluções.

Desde modo, a questão desta pesquisa é: **Que compreensão da divisão é revelada na solução escrita dos alunos da primeira série do ensino fundamental na resolução de problemas de divisão?**

No intuito de responder ao problema apresentado, o objetivo geral desta pesquisa é **caracterizar as formas de solução escrita utilizadas por alunos de primeira série do ensino fundamental na resolução de problemas de divisão, buscando indícios que revelem a compreensão dos mesmos sobre a divisão**. Com vistas a atender a esse objetivo, foram considerados como aspectos fundamentais dessas soluções os termos da divisão, os procedimentos de resolução dos problemas e os esquemas de ação utilizados pela criança, o que permitiu formular os seguintes objetivos específicos:

- Verificar se, nas soluções escritas, estão presentes os termos da divisão (dividendo, divisor) e o resultado (quociente), e se são coerentes com as informações do enunciado do problema.
- Identificar se os alunos na primeira série do ensino fundamental utilizam os esquemas de ação “distribuição equitativa” e “correspondência um a muitos” (NUNES; CAMPOS; MAGINA; BRYANT, 2005), nas soluções escritas; e
- Verificar se as soluções escritas (dos problemas inversos), revelam a existência de coordenação entre esses esquemas de distribuição equitativa e de correspondência um a muitos.

Espero que esta pesquisa possa sugerir aos professores formas para analisarem as soluções escritas dos alunos na solução dos problemas que envolvem o conceito de divisão, e auxiliá-los a compreender as elaborações lógico-matemáticas das crianças, a partir do modo como elas resolvem e representam as soluções dos problemas.

Para auxiliar na compreensão, discussão e análise do tema proposto, serão revistos na literatura os seguintes tópicos: Teoria dos Campos Conceituais, Estruturas Multiplicativas, Divisão e Esquemas pertinentes à divisão.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A teoria dos campos conceituais

Gérard Vergnaud (1998, p. 23), psicólogo, estudioso francês e discípulo de Piaget, busca ampliar e direcionar a teoria piagetiana das operações lógicas, da estrutura do pensamento, para a reflexão sobre o funcionamento cognitivo do "sujeito em situação". Ele centra seus estudos no próprio conhecimento em questão e na análise conceitual do domínio desse conhecimento, diferentemente de Piaget que centrava suas pesquisas na estruturação do pensamento. Sendo um marco na teoria piagetiana, o conceito de esquema também se torna fundamental na teoria de Vergnaud.

Vergnaud (1990), aprimorou as definições de conceito, afirmando que um conceito não assume significado em uma única situação e que essa situação não pode ser analisada através desse conceito. Para o autor, a operacionalidade de um conceito precisa ser provada através de várias situações, como por exemplo, o conceito de divisão, que somente é assimilado através de vários problemas práticos ou teóricos que possibilitem aplicar as propriedades de acordo com as situações, possibilitando, assim, a compreensão do conceito no decorrer da aprendizagem.

Partindo desses princípios, Vergnaud (1990), elaborou a teoria dos campos conceituais, que chama atenção para a noção de situação e para as ações dos sujeitos nessas situações. Para o autor, a teoria dos campos conceituais é:

> [...] de elaboração pragmática não prejulga a natureza dos problemas a serem resolvidos: estes podem ser tanto de natureza teórica como de natureza prática. Isso não prejulga igualmente o papel da linguagem e do simbolismo na conceitualização (p. 135).

Brun (1996, p. 22), afirma que a teoria dos campos conceituais "mais se parece com a psicologia dos conceitos". Teremos assim:

> [...] uma organização dos conhecimentos que se não deixe encerrar imediatamente nas descrições dos saberes e que, para além disso, tenha em conta actividades em curso do sujeito cognoscente em situação. Não esqueçamos que a acção em situação é a fonte da formação dos conceitos.

Vergnaud inspirou-se em seus antecessores, sobretudo Piaget (1896-1980) e Vygotsky (1896- 1934), já que ambos se interessavam por uma teoria da conceitualização. Vygotsky se interessava, principalmente, pelo papel da linguagem e das formas simbólicas e Piaget sempre voltava o foco de seus estudos para as estruturas lógicas e para desenvolvimento das operações do pensamento, de acordo com Vergnaud (1998).

A teoria dos campos conceituais proposta por Vergnaud (1990),

> [...] é uma teoria cognitivista que visa a fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente das que revelam das ciências e das técnicas (p. 133).

Sendo assim, Vergnaud (1990, 1996), desenvolveu a teoria dos campos conceituais para compreender melhor os problemas de desenvolvimento específicos no âmbito de um mesmo campo de conhecimento, segundo ele, pois:

> [...] envolve a complexidade decorrente da necessidade de abarcar em uma única perspectiva teórica todo o desenvolvimento de situações progressivamente dominadas, dos conceitos e teoremas necessários para operar eficientemente nessas situações, e das palavras e símbolos que podem representar eficazmente esses conceitos e operações para os estudantes, dependendo de níveis cognitivos (VERGNAUD, 1994, p. 43).

Para Vergnaud (1990, 1994), o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio acontece por conta do sujeito e isso decorre em longo período de tempo. "Trata-se de uma teoria psicológica do processo de conceitualização do real que permite localizar e estudar continuidades e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual". (id., p. 11).

De acordo com o autor, campo conceitual é:

> um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. O domínio de um campo conceitual não ocorre em tempo determinado, pode levar alguns meses ou até mesmo alguns anos (VERGNAUD, 1990, p. 136).

Dessa forma, ao estudar um campo conceitual ao invés de um conceito, Vergnaud (1990) afirma que numa situação problema qualquer, não teremos um conceito isolado. Por exemplo, se temos uma situação simples que envolve a divisão, "Júlia tem seis bombons e quer dividir entre suas três amigas. Quantos bombons cada amiga vai ganhar?" podemos identificar vários conceitos aqui envolvidos, os quais as crianças precisam ter assimilado para encontrar a resposta esperada do problema. Podemos citar a subtração, a multiplicação e as relações como o tamanho do todo, o número de partes, o tamanho das partes que deve ser o mesmo, a relação direta entre o total de elementos e o tamanho das partes que se fazem necessárias na situação descrita nesse problema de divisão. Sendo assim, para compreensão de um conceito, muitas vezes é necessário compreender outros conceitos.

Embora a teoria dos campos conceituais tenha sido elaborada para explicar o processo de conceitualização das estruturas aditivas e multiplicativas, ela não é especifica da Matemática, se aplica também às demais ciências. Vergnaud (1990), cita o exemplo do campo conceitual das estruturas multiplicativas, que consiste no conjunto das situações que requerem uma multiplicação, uma divisão, ou uma combinação dessas operações. Sendo assim, vários conceitos matemáticos estão envolvidos nas situações que constituem o campo conceitual das estruturas multiplicativas e no pensamento necessário para dominar essas situações. Entre tais conceitos temos os de função linear, de fração, de razão, de taxa, de número racional, de multiplicação e de divisão. O mesmo acontece com o campo conceitual das estruturas aditivas, que "é o conjunto de situações cujo domínio requer uma adição, uma subtração ou uma combinação de tais operações" (VERGNAUD, 1990, p. 146).

Como apresentado em seu livro a Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud (1990) descreve que configuram-se nas operações das estruturas aditivas, os diversos esquemas pertinentes à adição, com graus diferenciados de complexidade e aplicáveis às diversas situações que envolvem uma adição, sendo que esses esquemas se coordenam progressivamente, atingindo uma construção cada vez mais complexa, em níveis psicogenéticos diferentes. Da mesma forma, configuram-se nas operações das estruturas multiplicativas, os diversos esquemas pertinentes à multiplicação e à divisão.

Dentre os conceitos relevantes da teoria dos campos conceituais, darei maior atenção à definição dada por Vergnaud aos conceitos de campo conceitual; ao de esquema (organização invariante da conduta para determinada classe de situações, na acepção utilizada pela epistemologia genética), ao de situação; ao de invariantes e à sua concepção de conceito, para sustentar a possibilidade de comunicação na aprendizagem da matemática na escola.

Vejamos que a idéia de campo conceitual utilizada por Vergnaud (1990) em sua obra, a Teoria dos Campos Conceituais, está relacionada a uma função tríplice (referente, significado e significante). Porém, para o autor, o sentido é uma relação do sujeito com as situações e os significantes. Sendo assim, chegamos ao conceito de situação e dele ao de esquema, que nos levará ao conceito de invariante operatório de acordo com Vergnaud (1990).

2.1.1 Conceito

Vergnaud define conceito com três conjuntos (S, I e R):

> S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto; e R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas (1990, p. 145).

Segundo Vergnaud (1990), o primeiro conjunto, o de situações, permite fazer com que o conceito tenha sentido; o segundo, de invariantes operatórios, é o que dá significado ao conceito. São os “teoremas em ação” e os “conceitos em ação” que interferem nos esquemas utilizados para essas situações, permitindo a operacionalidade do conceito; e o terceiro, de representações simbólicas é o significante, o que permite representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, os procedimentos de tratamento e as situações nas quais se aplica o conceito, dessa forma, indicam e representam os invariantes operatórios do conceito.

> Isso implica que para estudar o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem ou de sua utilização, é necessário considerar esses três conjuntos simultaneamente. Não há, em geral, correspondência biunívoca entre significantes e significados, nem entre invariantes e situações; não se pode, portanto, reduzir o significado nem aos significantes nem às situações (VERGNAUD, 1990, p. 146).

Para Vergnaud (1990), um conceito não pode ser reduzido a sua definição, e os conceitos tornam-se significativos através das situações, pois é através das situações que um conceito adquire sentido para uma criança. Portanto, são as situações e não os conceitos que constituem a principal entrada de um campo conceitual segundo Vergnaud (1990). “Um campo conceitual é, em primeiro lugar, um conjunto de situações [...]” (Ibid., p. 145).

O sentido atribuído ao conceito é determinado pelo conjunto de ações e relações a que o sujeito recorre para compreender as situações e os significantes. Dessa forma, “são os esquemas, os comportamentos e sua organização, evocados no sujeito por uma situação ou por um significante (representação simbólica) que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo” (VERGNAUD, 1990, p. 158). Talvez não seja necessário o sujeito recorrer a todos os esquemas que possui, que adquiriu em situações familiares (semelhantes), ou até mesmo seja necessário organizar outros esquemas de acordo com a situação. Trata-se de um subconjunto dos esquemas que o sujeito possui, ou dos esquemas possíveis. Na sequência, veremos as definições de situação e esquema de acordo com Vergnaud (1990).

2.1.2 Situações

Vergnaud (1990), quando se refere ao termo situação afirma:

> [...] limitar-nos-emos ao sentido que lhe atribui usualmente os psicólogos, ou seja, os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com as quais são confrontadas (p. 50).

O autor define duas idéias principais em relação ao sentido de situação:

> - a de variedade: existe uma grande variedade de situações em um campo conceitual dado, e as variáveis de situação são um meio de gerar de maneira sistemática o conjunto de classes possíveis;
> - a de história: os conhecimentos dos alunos são elaborados pelas situações que eles enfrentaram e dominaram progressivamente, sobretudo pelas primeiras situações em que esses conhecimentos foram constituídos (p. 50).

Sendo assim, “muitas de nossas concepções vêm das primeiras situações que fomos capazes de dominar ou de nossas experiências tentando modificá-las” (VERGNAUD, 1996, p. 10). A ideia de história para o autor, não se delimita à história da matemática, mas sim, à história da aprendizagem da matemática, que é individual e que se pode, entretanto:

> [...] constatar regularidades impressionantes de uma criança a outra na maneira por que elas abordam e tratam uma mesma situação, nas concepções primitivas que desenvolvem a respeito dos objetos, de suas propriedades e de suas relações, e das etapas por que passam. Essas etapas não são totalmente ordenadas; elas não obedecem a um calendário restrito; as regularidades

> incidem sobre distribuições de procedimentos e não são univocamente determinadas (VERGNAUD, 1990, p. 157).

Para o autor, é preciso classificar as situações de acordo com as ordens psicológicas e com a matemática. Dessa forma, o principal desafio da psicologia da aprendizagem matemática é:

> [...] o de estabelecer classificações, descrever procedimentos, formular conhecimentos em ação, analisar a estrutura e a função das enunciações e representações simbólicas em termos que tenham um sentido matemático (VERGNAUD, 1990, p. 156).

Entretanto, esses fatores identificam os esquemas relativos a uma classe de situações, que segundo Vergnaud (1990), tem uma validade restrita, e podem ser reorganizados de acordo com as situações ou mesmo aplicado de forma indevida para larga classe de situações, como veremos adiante, na definição de esquema.

2.1.3 Esquemas

Para Vergnaud (1990), o esquema é a organização invariante do comportamento para uma determinada classe de situações. Para ele, é nos esquemas que podemos verificar os conhecimentos em ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória. Logo, vários esquemas podem ser evidenciados sucessivamente.

Segundo Vergnaud (1994), esquema é o conceito introduzido por Piaget para dar conta das formas de organização, tanto das habilidades sensório-motoras, como das habilidades intelectuais. Na organização de um esquema, geraremos as ações e teremos as regras, que não podem ser utilizadas de forma padronizada, pois a sequência de ações depende dos parâmetros da situação, de acordo com o autor. Um esquema pode ser utilizado eficientemente para diversas situações e pode gerar diferentes sequências de ação, de coleta de informações e de controle, dependendo das características de cada situação particular. Para o autor um esquema não é:

> [...] um estereótipo e sim uma função temporalizada de argumentos que permitem gerar diferentes seqüências de ações e tomadas de informação em

> função dos valores das variáveis da situação. Isso só é possível porque um esquema comporta:
> - invariantes operatórios (teoremas em ato e conceitos em ato) que pilotam o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes da situação e a apreensão da informação sobre a situação a tratar;
> - antecipações do objeto a alcançar, dos efeitos a considerar e das etapas intermediárias eventuais;
> - regras de ação do tipo "se [...] então", que permitem gerar a seqüência de ações do sujeito;
> - inferências, que permitem calcular as regras de antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que dispõe o sujeito (VERGNAUD, 1990, p. 159).

Segundo o autor, os esquemas podem ser mais ou menos elaborados, por exemplo, os esquemas utilizados por crianças ou por adultos, e "quando o sujeito usa um esquema ineficaz para uma determinada situação, as experiências o levam a mudar de esquema ou a modificar o esquema" (1990, p. 138). Voltamos à ideia piagetiana de que os esquemas estão no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas, por meio da assimilação e da acomodação.

Um exemplo de esquema, apresentado por Vergnaud (1996), é a enumeração de uma pequena coleção de objetos discretos por uma criança de cinco anos: por mais que variem os objetos a serem contados, por exemplo, cadeiras da sala, lápis na mesa, alunos da turma, não deixa de haver uma organização invariante para o funcionamento do esquema: coordenação dos movimentos dos olhos e gestos dos dedos e das mãos, enunciação correta da série numérica, identificação do último elemento da série como o cardinal do conjunto enumerado (acentuação ou repetição do último "número" pronunciado). Nota-se facilmente que esse esquema inclui atividades perceptivo-motoras, significantes (as palavras, os numerais) e as construções conceituais, tais como a de correspondência biunívoca entre conjuntos de objetos e subconjuntos de números naturais, a de cardinal e ordinal e outras. Recorre igualmente a conhecimentos, tais como os que identificam o último elemento da série ordinal ao cardinal do conjunto.

Podemos utilizar como exemplo o problema quatro dessa pesquisa, já citado anteriormente: "Júlia tem seis bombons e quer dividir entre suas três amigas. Quantos bombons cada amiga vai ganhar?". De acordo com a situação descrita nesse problema, a criança pode iniciar a distribuição dando um bombom para cada amiga até que se esgote os seis bombons (esquema de distribuição um-a-um) ou pode dar direto dois bombons para cada amiga (esquema de distribuição um muitos). Dessa forma, para um mesmo problema ou para uma mesma classe de situações, como no exemplo da enumeração, segundo Verganud (1990), as crianças mobilizam diferentes esquemas e no exemplo de divisão, o sentido de divisão para um sujeito individual é o conjunto dos esquemas ao qual ele pode pôr em prática ao tratar das situações com as quais ele se defronta e que implica na ideia de divisão.

Como já citado anteriormente, em relação aos conceitos contidos nos esquemas, Vergnaud se refere como "conceito-em-ação" e "teorema-em-ação" e, em uma definição mais abrangente como "invariantes operatórios". Para o autor, os teoremas em ação são avaliados como verdadeiros ou falsos, e é a forma como o sujeito aprende e mobiliza uma propriedade matemática. Ele utiliza para exemplo de teorema-em-ação a seguinte situação proposta para alunos de 13 anos:

"O consumo de farinha é, em média, 3,5kg por semana para dez pessoas. Qual a quantidade de farinha necessária para cinquenta pessoas durante 28 dias? Reposta de um aluno: 5 vezes mais pessoas, 4 vezes mais dias, 20 vezes mais farinha; logo, 3,5 x 20 = 70kg" (VERGNAUD, 1994, p. 49).

Segundo Vergnaud,

> [...] é impossível dar conta desse raciocínio sem supor o seguinte teorema implícito na cabeça do aluno: f(n1x1, n2x2) = n1n2 f(x1, x2), [ou seja], consumo (5 x 10, 4 x 7) = 5 x 4, consumo (10, 7). Evidentemente este teorema está disponível porque a razão de 50 para 10 pessoas e a razão 28 dias para 7, são simples e visíveis (1994, p. 49).

Assim o autor explica que esse teorema é facilmente aplicado nessa situação, o que não ocorreria com outros valores numéricos, ou seja, sua disponibilidade é limitada a algumas situações.

Portanto, por permitir tratar de modo mais consistente as quatro operações da aritmética clássica como estruturas conceituais, e de dar espaço para estudar suas inter-relações psicogenéticas, a teoria dos campos conceituais interessa, sobremaneira, ao ensino escolar porque permite melhor analisar a relação dialética ali ocorrente entre ação, situação prática e verbalização teórica (VERGNAUD, 1990).

Dessa forma, podemos identificar os esquemas de ação que estão presentes nas soluções dos problemas de divisão, escritas pelos alunos na primeira série do ensino fundamental, para evidenciar os esquemas pertinentes à divisão e facilitar a aprendizagem desse conceito matemático.

2.2 O campo conceitual das estruturas multiplicativas

Segundo Vergnaud, "é necessário que o conhecimento que as crianças adquirem seja construído por elas mesmas, numa relação que as mesmas são capazes de fazer sobre a realidade, que são capazes de perceber, compor e transformar os conceitos que constroem progressivamente" (1991, p. 9).

Os conceitos matemáticos, segundo Vergnaud, "formam um conjunto de noções, de relações, de sistemas de relações que se apóiam umas nas outras" (1991, p. 10), e a forma como o professor expõem isso para as crianças é primordial para a aprendizagem das mesmas.

Segundo Vergnaud (1986) as estruturas matemáticas não se constroem em blocos, mas em pedaço por pedaço, pois a apropriação não se transmite facilmente e leva tempo. Para o professor de matemática pode ser um procedimento banal de resolução, mas para a criança, trata-se de um sistema de tratamento evidente e eficaz, por esse motivo, precisamos verificar as soluções escritas de nossos alunos com maior atenção, buscando evidenciar quais procedimentos a criança utilizou na resolução.

Segundo os PCNs (BRASIL, 1997), as operações básicas que gradativamente precisam ser trabalhadas desde as séries iniciais do ensino fundamental, são as quatro operações clássicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Por isso, vários estudos têm sido realizados para uma educação matemática mais eficiente e significativa; muito se tem investigado a respeito da natureza dos conceitos e relações que marcam a natureza daquelas operações, bem como dos modos de compreensão dos alunos a respeito. Para esses estudos, têm sido fundamentais as contribuições de Vergnaud (1990).

Vergnaud (1986), centra seus estudos nas estruturas aditivas e multiplicativas, para compreender as dificuldades que os alunos têm nessas áreas, e chama atenção para o fato de que essas estruturas aditivas e multiplicativas se constroem num período de tempo mais longo, a que os programas escolares desconhecem. Essa construção, não é independente dos conteúdos físicos e dos conteúdos vivenciados que lhes dão sentido.

Já existem vários trabalhos sobre a elaboração de conceitos e situações envolvidas na solução de problemas de multiplicação e de divisão. Neles, são considerados dois tipos essenciais de relações multiplicativas: aquelas que comportam multiplicação e as que comportam divisão. Como já descrito anteriormente, faz parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas toda situação que envolva uma multiplicação, divisão ou as duas operações simultaneamente. Segundo a teoria de Vergnaud (1990), os vários conceitos, situações e relações envolvidas nas várias formas de multiplicação e de divisão podem constituir o mesmo campo conceitual, nesse caso, o das estruturas multiplicativas.

Dessa forma, fazem parte desse campo conceitual os conceitos matemáticos como: problemas de proporções, função linear e não linear, fração, razão, espaço vetorial, análise dimensional, taxa, número racional, multiplicação e divisão, segundo Vergnaud (1990).

Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005) dedicam um capítulo de seu livro para discutir a necessidade de ampliar a concepção sobre multiplicação que é normalmente transmitida na sala de aula. Segundo esses autores, a ideia que está sendo transmitida na prática educacional, de que a multiplicação é uma soma de parcelas iguais, não é mais a única alternativa para se ensinar o conceito matemático de multiplicação. Para eles, a relação que existe entre a adição e a multiplicação não é conceitual. Essa relação se deve ao fato do processo de cálculo da multiplicação poder ser feito através da adição, pois a multiplicação é distributiva em relação à adição.

Vergnaud (1991), destaca duas categorias de relações multiplicativas: o isomorfismo de medidas e o produto de medidas (produto cartesiano) que se referem a elementos de mesma natureza ou de natureza diferente, em diferentes classes de problemas, com quantidades discretas ou contínuas (números inteiros ou decimais). Segundo o autor, o isomorfismo de medidas é uma relação quaternária, na apresentação de um problema, isto é, aquela em que duas quantidades são medidas de um certo tipo, e as restantes, medidas de outro tipo diferente. No âmbito escolar, grande parte dos problemas apresenta uma relação quaternária, bastante utilizada para introduzir ou exercitar o conceito da multiplicação e esses problemas são comumente conhecidos pelos professores como problemas de multiplicação do tipo somas sucessivas.

Segundo Vergnaud (1991), para resolver um problema de isomorfismo de medidas simples as crianças não apresentam grandes dificuldades, pois as quatro quantidades colocadas em relação são medidas de correspondência de dois tipos de quantidades, exemplo:

- Multiplicação: “Temos três caixas com quatro carrinhos cada, quantos carrinhos temos?”
- Divisão: “Tenho 12 canetas, vou dar três canetas para cada amiga. Quantas amigas tenho?”

Problemas Adaptados de Vergnaud (1991, p. 198).

Na situação multiplicativa as quantidades são: o número de caixas e o número de carrinhos, e a resolução pode ser feita por meio de adições sucessivas, utilizando os códigos convencionais: “3 caixas com 4 carrinhos são: 4 carrinhos, mais 4 carrinhos, mais 4 carrinhos” ou “4 + 4 + 4 = 12”, que antecedem o algoritmo da multiplicação 4 x 3 = 12. Na situação de divisão, temos as duas quantidades, o preço e as canetas, e a resolução pode ser feita por meio de subtrações sucessivas, utilizando os esquemas de correspondência um-a-muitos, ou seja, três canetas para uma amiga, três canetas para outra amiga, três para outra amiga, e três canetas para outra amiga, ou seja, vai se retirando do total de canetas a quantidade correspondente para cada amiga, até que se esgote o total de canetas. Detalharei mais essa classe de problemas de isomorfismos de divisão na sequência deste estudo nos esquemas pertinentes à divisão, pois esse é o foco deste estudo.

Já os problemas do tipo produto de medidas são equivalentes ao produto cartesiano que podem ser representados de acordo com Vergnaud (1991), segundo a tabela de dupla entrada, exemplo: “Em uma sala de aula com três alunos e três alunas, quantas duplas de um aluno e uma aluna podemos formar?” Nesse caso, têm-se três espaços de medidas: como exemplo, o de alunos, o de alunas e o de duplas de um menino e uma menina (A1, A2, A3), correspondendo a uma função bilinear, o seja, ao dispor de duas quantidades iniciais, ambas devem ser consideradas simultaneamente para que se consiga resolver o problema.

Entretanto, “qualquer situação multiplicativa envolve duas quantidades em relação constante entre si” (NUNES et al., 2005, p. 85). Dessa forma, o invariante do raciocínio multiplicativo é a existência de uma relação fixa entre as variáveis.

Portanto, nos problemas multiplicativos é necessário encontrar uma “medida-produto” através da combinação de duas ou mais medidas elementares dadas, e na divisão, busca-se encontrar uma medida elementar a partir de outra combinada a uma medida produto.

Dessa forma, as relações multiplicativas presentes nos problemas do tipo produto de medidas, são subjacentes à elaboração dessas relações, e nessas relações estão presentes esquemas e sistemas de esquemas organizadores da cognição humana. Nos problemas de isomorfismos de divisão, temos os esquemas de correspondências um para um e distribuição equitativa, e de correspondência um-a-muitos, segundo Nunes et al. (2005).

Esta pesquisa tem por objetivo caracterizar as formas de solução escrita utilizadas por alunos de primeira série do ensino fundamental na resolução de problemas de divisão, portanto é uma pesquisa no âmbito das estruturas multiplicativas.

- A divisão

Vergnaud (1991), considera a divisão uma das operações mais complexas entre as quatro operações, pois ela nem sempre é exata, envolve regras operatórias complexas, como a utilização de divisões sucessivas, a multiplicação, a subtração, ou mesmo a busca de um quociente que nem sempre é o resultado do operador ao operador, podendo envolver um resto igual a zero ou maior que zero, incluindo, também, números fracionários. Além disso, a divisão requer do aluno estabelecer relações diversas como, considerar o tamanho do todo, o número de partes, o tamanho das partes que deve ser o mesmo, a relação direta entre o total de elementos e o tamanho das partes, a relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes. Sendo que essa diversidade pode ser contextualizada através da resolução de problemas, um dos princípios norteadores afirmados nos PCNs de Matemática do Ensino Fundamental.

Segundo Vergnaud (1985), a divisão está relacionada a duas diferentes idéias: partição (repartir) que as crianças apresentam um raciocínio natural e de quotas (medir) que se trata de uma proporcionalidade inversa, em que não se divide o total por um escalar. Posso afirmar, mediante experiências com o ensino desse conceito, que o motivo das dificuldades apresentadas pelas crianças é o uso de seu algoritmo somado à falta de contextualização de situações de divisão, às situações-problema.

Segundo os PCNs (BRASIL, 1997), em relação às operações básicas, o ensino deve se concentrar na compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, nas relações existentes entre elas e no estudo do cálculo (exato e aproximado, mental e escrito). Além disso, o documento cita a importância das situações-problema na compreensão da existência dos números e das operações, bem como o estudo de questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático. Um dos princípios norteadores dos PCN (1998, p. 57) afirma que “o conhecimento matemático é historicamente construído e, portanto, está em permanente evolução”. O ensino de Matemática deve possibilitar ao aluno “reconhecer as contribuições que ela oferece para compreender as informações e posicionar-se criticamente diante delas”.

> A operação de divisão envolve conhecimentos além daquele relativo à obtenção de parcelas equivalentes quando se reparte. Como uma operação multiplicativa, requer a coordenação dos fatores envolvidos - dividendo, divisor e quociente - através do entendimento das relações que estes termos podem estabelecer entre si (CORREA, 2000, p. 5).

Portanto, as

> Investigações acerca da relação entre a experiência quotidiana da criança ao partilhar e o seu conhecimento intuitivo de divisão, indicam que esta experiência, embora necessária, não é suficiente para que a criança entenda as relações estabelecidas entre os termos envolvidos em situações de divisão (CORREA, 2002, p. 4).

De um ponto de vista informal, divisão é o ato de repartir, separar as partes de um todo e distribuir como evidencia Nunes e Bryant (1997). Segundo Vergnaud (1991), dentro da divisão temos os termos que compõem essa operação e estes (dividendo e divisor) estão unidos por uma relação de equivalência:

- **Dividendo**: o "todo" (totalidade), o qual se quer distribuir em partes iguais.
- **Divisor**: delimita a quantidade de partes ao qual se deve distribuir o todo (o escalar).
- **Quociente**: a quantidade correspondente a cada uma das partes em que se distribuiu o todo (o tamanho da parte ou extensão da parte).
- **Resto**: a quantidade que sobrou, ou seja, não suficiente para mais uma rodada de distribuição.

Pelo fato de estar utilizando neste estudo problemas de divisão por partição e por quotas, vou me reportar a utilizar a nomenclatura de número de partes para o divisor e o tamanho da parte para o quociente.

Segundo Vergnaud (1985), dentre os problemas que relacionam a divisão, temos os exatos e inexatos, partição e quotas.

- **Problemas de divisão exata**: quando temos o resto é igual a zero.
- **Problemas de divisão inexata**: quando temos o resto diferente de zero.
- **Problemas de partição**: procurar obter a extensão da parte (quociente ou quantidade das partes), conforme o valor escalar indicado (divisor ou número de partes), ou seja, devemos distribuir o todo em partes iguais.
- **Problemas de quotas**: procurar obter o número de partes (a quota), conforme sua extensão indicada, ou seja, precisamos estabelecer qual o número de partes.

De acordo com Vergnaud (1991) o grau de dificuldade desses problemas varia, como é o caso dos problemas de isomorfismo denominados de divisão por partição e divisão por quotas que vou abordar com maior ênfase neste estudo. Dessa forma, utilizarei exemplos como os que foram utilizados no estudo de Lautert e Spinillo (2002) para essas classificações de problemas de divisão.

> Paguei R$16,00 por quatro pulseiras, qual é o preço de cada pulseira? (LAUTERT; SPINILLIO, 2002).

> "Júlia comprou 15 balas e tinha cinco caixinhas. Ela queria colocar o mesmo número de balas em todas as caixinhas. Quantas balas ela tinha que colocar em cada caixinha?"
>
> Formulário de problemas desta pesquisa (Anexo C)

Segundo Verganud (1985), esses problemas de divisão são classificados como problemas de divisão por partição, em que temos, a quantidade inicial (totalidade) e o número de partes em que essa quantidade deve ser distribuída (o escalar), para encontrar as quantidades de cada parte (extensão parte). Nessas situações, para que a criança consiga resolver esses problemas, ela precisa estabelecer a relação parte-todo, ou seja, é preciso saber que a quantidade das partes (quociente ou extensão da parte) a ser obtido, se refere ao tamanho das partes (R$ 4,00 cada pulseira e 3 balas em cada caixinha), que o dividendo é representado pela totalidade (R$ 16,00 e 15 balas), e que o número de partes (divisor ou escalar) refere-se à quantidade em que o todo vai ser dividido (quatro pulseiras e cinco caixinhas). Em ambos os problemas, a relação fixa é desconhecida. No primeiro, a relação a ser descoberta é quatro reais por pulseira e, no segundo, três balas por caixinha.

Nos problemas de divisão por quota, é dada uma quantidade inicial, que precisa ser dividida por quotas pré-estabelecidas (extensão da parte). Exemplos:

> Tenho R$16,00, e quero comprar algumas pulseiras que custam R$4,00 cada uma. Quantas pulseiras possa comprar, com essa quantia? (SPINILLIO; LAUTERT, 2002).
>
> Júlia comprou 15 balas e queria colocar cinco balas em cada caixinha. Quantas caixinhas ela vai precisar?
>
> Formulário de problemas dessa pesquisa (Anexo C)

Nesse caso, para que a criança consiga resolver esses problemas ela precisa considerar que o resultado a ser obtido refere-se ao número de partes (quotas) em que o todo foi divido (número de pulseiras e de caixinhas), que o dividendo é representado pela totalidade (R$ 16,00 e 15 balas, respectivamente) e que a quantidade das partes (R$ 4,00 por pulseira e cinco balas por caixinha) também é dada no enunciado. Portanto, nesta situação, a relação fixa é conhecida (R$ 4,00 por pulseira e cinco balas por caixinha) e o que é desconhecido é o número de partes, ou quotas, o que caracteriza um problema inverso, segundo Vergnaud (1991).

Ao compararmos os problemas citados anteriormente veremos que eles se parecem muito, pois possuem as mesmas representações numéricas, mas não podem ser considerados da mesma natureza, pois se mudamos a incógnita a ser determinada, consequentemente, alterarmos a natureza da operação a ser aplicada na resolução. Confirmamos com esses exemplos, que há diversas situações que decorrem do domínio de propriedades diferentes para compreensão de um mesmo conceito, uma das principais afirmações que Vergnaud (1990), cita em sua teoria.

Percebemos na literatura, que problemas de partição são considerados pelas crianças mais fáceis do que os de divisão por quota (SELVA, 1998), e ocorrem naturalmente, segundo Vergnaud (1991). As crianças já trazem consigo ao iniciarem sua vida escolar, a noção de distribuir quantidades em partes iguais até que não seja mais possível distribuir, noção essa que adquiriram por situações já vivenciadas. Talvez esse seja o motivo pelo qual a divisão por partição é considerada mais fácil. As noções sobre a divisão decorrem da idéia de distribuir, como evidencia Selva (1998), Moro (2004, 2005), Lautert e Spinillo (2002) e Ferreira e Lautert (2003).

Segundo Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005), nos problemas de divisão por partição, temos a ação de distribuir quantidades iguais entre as classes, a partir da correspondência um-a-um ou distribuição equitativa. Já nos problemas de divisão por quota, inicia-se o processo de resolução com base no tamanho de cada parte.

a) Os esquemas de ação pertinentes à divisão

As situações quotidianas de repartir com as quais as crianças mais novas se defrontam podem ser trabalhadas, do ponto de vista matemático, pelo algoritmo da divisão. “Em relação aos esquemas de ação envolvidos, estas mesmas situações podem ser relacionadas à operação de divisão a partir do uso da correspondência termo a termo e da noção de equivalência", segundo Correa (2000, p. 4).

Dentre os esquemas utilizados pelas crianças nas soluções de problemas de divisão na literatura, como citado anteriormente, destacam-se a distribuição equitativa (noção de equivalência), que é ação de distribuir as quantidades iguais entre os elementos. Em uma ação menos elaborada, percebeu-se a correspondência um a um (termo a termo), ou seja, um para cada um, até que não se tenha mais o que distribuir, ou a quantidade a ser distribuída seja insuficiente para mais uma roda de distribuições e a distribuição equitativa, quando a criança faz somente uma rodada de distribuição ou menos rodadas de distribuição do que a correspondência um-a-um e a correspondência um-a-muitos, ação feita quando a quota é conhecida: separa-se o todo em quantidades estabelecidas e, dessa forma, encontra-se o total de partes. Veremos os exemplos da utilização desses esquemas:

Exemplo 1: "Júlia tem 6 bombons e quer dividir entre 3 amigas. Quantos bombons, cada amiga vai ganhar?".

Exemplo 2: "Marta tinha 18 doces e queria colocar 6 doces em cada bandeja. Quantas bandejas serão necessárias?".

Para resolver problemas como o primeiro exemplo, a criança utiliza diversos procedimentos, dentre esses, o procedimento de distribuir um bombom para cada amiga, até que se esgote a totalidade de bombons, utilizando várias rodadas de distribuição, ou seja, a utilização do esquema de correspondência um-a-um ou termo a termo, e também o procedimento de distribuir diretamente dois bombons por amiga, esgotando a totalidade em uma única rodada de distribuição, o que corresponde à utilização do esquema de distribuição equitativa. Já no segundo exemplo, o procedimento utilizado é separar a totalidade em quotas já estabelecidas, ou seja, separar os 18 doces em bandejas, sendo que cada bandeja contenha seis doces, seis doces, seis doces e seis doces, a correspondência um-a-muitos.

Ao repartir, a criança se vale, principalmente, dos esquemas de correspondência com o objetivo de estabelecer a equivalência entre as partes. Dessa forma, a criança pode lançar mão apenas de procedimentos que envolvem a adição onde tudo o que necessita fazer, por exemplo, é repetir o mesmo conjunto de ações até que não haja mais elementos disponíveis para uma segunda distribuição. Neste processo, a equivalência é conseguida através da adição ou subtração, de alguns elementos a serem distribuídos (CORREA, 2000, p. 5).

Segundo Nunes et al (2005), as crianças entre 4 e 5 anos não sabem coordenar os esquemas de ação: correspondência um-a-muitos e distribuição equitativa, que originam os conceitos de multiplicação e divisão. Em seus estudos um dos problemas foi o seguinte:

> “Em cada casa moram 4 cachorros. Cada cachorro vai ganhar um biscoito igual ao que está desenhado no quadro. Desenhe o número de biscoitos que precisamos ter para que cada cachorro ganhe um biscoito” (NUNES et al., 2005, p. 88).

Esse problema foi apresentado através de desenhos e instruções orais. Houve uma diferença na porcentagem de respostas corretas, quando apresentado com materiais que permitiam a aplicação direta do esquema de ação, e a porcentagem de acertos, quando aplicado com lápis e papel.

Já nos problemas de multiplicação e divisão com a mesma estrutura:

> “Problema 1: “Márcio convidou três amigos para sua festa de aniversário. Para cada amigo ele quer dar 5 bolas de gude. Quantas bolas de gude precisa comprar?”.
> Problema 2: “Márcio tem 15 bolas de gude. Ele vai distribuí-las igualmente entre seus três amigos. Quantas bolas de gude cada um vai ganhar?” (NUNES et al., 2005, p. 89).

Foi observado que, para resolver esses problemas, as crianças utilizaram esquema de ação de distribuir. Na sequência, outros problemas como esses foram propostos às crianças e ao final se concluiu que, mesmo os alunos da primeira série que não receberam explicações sobre os conceitos matemáticos de multiplicação e divisão, utilizam esquemas de ação e resolvem corretamente os problemas. Ficou evidente, também, que é possível melhorar o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo se os conceitos de multiplicação e divisão com base em esquemas de ação forem propostos, ao invés de se utilizar como ponto chave a adição e a subtração de parcelas iguais.

Vários estudos descrevem que o início da compreensão do conceito de divisão ocorre muito antes do ensino formal. Dessa forma, existe a necessidade do professor conhecer esses esquemas de ação, que as crianças utilizam na solução escrita, de situações que envolvem a divisão, antes de formalizar esse conceito. Vergnaud (1990), afirma que é através de situações e de problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança.

Nessa pesquisa, abordarei o conceito de divisão dos campos conceituais das estruturas multiplicativas com problemas de divisão exata, inexata, partição e quotas, para crianças das primeiras séries do ensino fundamental.

b) Estudos brasileiros sobre divisão que utilizaram a teoria dos campos conceituais

A teoria dos Campos Conceituais não se aplica somente à matemática, mas à outras disciplinas como Biologia, Física, Ciências, sendo que, segundo Vergnaud (1985), um campo conceitual é definido pelo seu conteúdo e refere-se ao conjunto de situações que contribuem para lhe dar significado, ilustrando a variedade de propriedades e teoremas presentes nesse conteúdo. Na sequência, destacam-se algumas pesquisas que envolvem o campo conceitual das estruturas multiplicativas, mais precisamente, sobre o conceito de divisão, que é a temática deste estudo.

Moro (2004), realizou sua pesquisa com crianças com idade de 6 anos e 4 meses a 9 anos e 5 meses, de uma escola na periferia urbana, com os seguintes objetivos:

- descrever a natureza e as transformações de notações infantis relativas a tarefas centradas na igualização de parcelas e na repartição de grandezas, destinadas à elaboração de relações aditivas e multiplicativas;
- verificar a significação das notações produzidas no exame das relações psicogenéticas entre as estruturas aditivas e multiplicativas (MORO, 2004, p. 251).

A autora esteve preocupada em obter subsídios para compreender a passagem das estruturas aditivas para as multiplicativas na ótica piagetiana. Foram utilizados problemas de divisão por partição em que era dado o divisor e o dividendo e a criança descobriria a extensão da parte (o quociente) com a utilização de materiais concretos (fichas, caixa, bonecos, canetas hidrocor). Os sujeitos foram agrupados em tríades por sorteio aleatório, sendo que, esse sorteio para composição das tríades seguiu o critério de defasagem ótima, grau próximo de heterogeneidade entre os participantes. Dessa forma, a autora fez, anteriormente, uma classificação dos sujeitos em três níveis de avanço cognitivo em noções ligadas aos conceitos trabalhados nas tarefas. As tarefas eram propostas oralmente pela pesquisadora, que fazia suas intervenções de acordo com as necessidades observadas.

Nas tarefas de igualização, Moro (2004) identificou categorias que expressavam as relações aritméticas que as crianças estabeleciam com o material utilizado, sempre de acordo com a interpretação das próprias crianças. Os diferentes tipos de notações encontrados foram categorizados pela autora da seguinte forma:

a) Composição identificada de duas parcelas não equivalentes de uma adição, obtidas pelo acaso. Nessas notações, verificou-se a presença de desenhos e algarismos. Nos desenhos, a criança registrava o total equivalente ou não equivalente ao composto pelas parcelas, e também registros em que eram representadas as duas parcelas, equivalentes às parcelas compostas anteriormente com o material em que a criança tinha percepção das parcelas mais e menos numerosas, falava os números correspondentes à quantidade das parcelas e identificava a extensão da diferença entre as parcelas. As crianças utilizaram para controle das parcelas a contagem unitária, o emparelhamento de elementos, e uma distribuição equitativa com a diferença das parcelas mais numerosas para igualar as parcelas, excluindo o elemento restante. Os algarismos eram utilizados por algumas crianças para representar cada elemento das parcelas e, por outras, para representar a quantidade das parcelas.

b) Igualização de duas parcelas de uma adição. Nessas notações, verificou-se, também, a presença de desenhos e algarismos. Nas notações, foram encontrados sete registros de desenhos diferentes em que a criança registrava: somente o total equivalente ou não ao informado, sem e com o elemento restante; as parcelas com quantidades diferentes (não igualizadas), mas sendo o total o trabalhado, com a exclusão do elemento restante; duas parcelas com quantidades diferentes (não igualizadas), mas pela dimensão do desenho considerado iguais pela criança; parcelas igualizadas em que a criança colocava, inicialmente, o valor total em cada parcela, e depois tirava elementos correspondentes em ambas parcelas, e a adição dessas parcelas, corresponde ao total; parcelas igualizadas, mas a extensão corresponde ao dobro do total trabalhado; duas parcelas igualizadas, correspondentes às trabalhadas, sem e com elemento restante; duas parcelas desiguais inicialmente, mas que por marcas de subtração e traço limitador na parcela mais numerosa, tornam-se iguais os algarismos, como na classificação das notações anteriores, foram utilizados como etiquetas nas parcelas e em outros, registros no total. Predominou nessas notações a presença de marcas para os estados inicial e final, ou seja, parcelas e o seu total.

c) Repartição de coleções em 2, 3 e 4. Nessas notações, verificou-se, também, a presença de desenhos, algarismos e escrita alfabética. Nas notações, foram observados desenhos com: (a) a presença do total (dividendo) não equivalente ou equivalente ao trabalhado; (b) a presença das partes da repartição, em número (divisor) e extensão numérica (quociente) não equivalentes às trabalhadas, sem e com resto pertinente; (c) a presença do total e em separado suas partes sem e com o resto pertinentes; (d) a presença dos termos da divisão (dividendo, divisor, quociente e resto) vistos como decorrentes das ações efetuadas; (e) a presença do total (dividendo) não equivalente ou equivalente ao trabalhado, contendo as partes resultantes da repartição (marcadas no próprio total), sem e com resto. Os algarismos foram utilizados em duas sequências de numerais, em ordem inversa, para registrar os elementos das parcelas; como etiqueta para as quantidades desenhadas nas parcelas; na forma de uma expressão aditiva das parcelas e como traçado repetido e separado de numeral correspondente à extensão das partes, lido como resultado da ação de repartir, sem e com o resto pertinente. A escrita alfabética foi utilizada para a escrita da resposta do problema, com o registro dos algarismos das parcelas tendo a ideia de que o resultado do repartir é a extensão numérica da parte (quociente), e a escrita dos numerais correspondentes às quantidades das partes.

A autora (MORO, 2004), constatou o frequente uso de desenho com algarismos, sendo que os algarismos eram utilizados com etiquetas dos desenhos, para deixar clara a significação do desenhado, o que possibilitou que fizessem as correspondências entre essas diferentes formas de representar um mesmo significado, papel esse importante para construção conceitual, segundo Vergnaud (1985). Devido à semelhança com a minha pesquisa, é importante salientar que nas notações de repartição deste estudo, os desenhos foram as formas mais avançadas em que se identificou a divisão, pois os algarismos e a escrita alfabética apresentaram formas menos adiantadas e, segundo Moro (2004), o desenho foi, para os sujeitos, um recurso "natural" para marcar o total repartido, o resultado dessa repartição e a própria ação de repartir.

A autora identificou uma diferença entre as notações para situações de igualização e repartição. Na notação da igualização, as crianças representavam com maior frequência as parcelas e o total, enquanto que nas notações de repartição, representavam o resultado do repartir, seguido das marcas do repartir. Verificou-se, também, que as crianças com um grau de instrução escolar mais avançado dominam a divisão mas desconhecem os sinais aritméticos para a divisão e as formas canônicas de expressar, ou seja, formulam algumas dessas relações ao seu modo, utilizando a escrita alfabética para descrever o repartir efetuado. Também, na igualização, não apresentaram a tomada de consciência da relação de transformação aditiva de uma grandeza inicial para uma final.

As crianças que não dispunham de qualquer noção de divisão foram provocadas pela pesquisadora, mas, mesmo assim, limitavam-se somente a desenhar a coleção total. Nas tarefas propostas, observou-se que os sujeitos primeiro desenharam as partes, para depois, traçarem marcas de separação entre as partes, identificando-as melhor em extensão e número, ou desenharam a separação em partes no próprio desenho da coleção total, registrando, assim, o estado inicial (dividendo) seguido da ação que o transformava em partes. Uma das contribuições dessa pesquisa para o meu estudo é que a construção das relações aditivas-subtrativas identificadas nas notações mostrou a relevância e a complexidade da construção de esquemas de igualar e desigualar parcelas, e os esquemas de repartir grandezas.

Moro (2005), se dedica à pesquisa das estruturas multiplicativas e à tomada de consciência, a partir do repartir para dividir, com sujeitos com idade de 7 anos e 3 meses a 8 anos e 10 meses em uma escola pública, com os objetivos:

> [...] de reexaminar níveis de construção infantil inicial da divisão conforme a provável relevância do repartir grandezas na passagem das estruturas aditivas às multiplicavas e os de identificar e descrever níveis de tomada de consciência de relações básicas da divisão em tarefas de repartição (MORO, 2005, p. 2).

Também, como na pesquisa de 2004, foram utilizados materiais concretos (fichas, caixa, bonecos, canetas hidrocor) para resolução de problemas de divisão por partição. Sendo que as análises dos dados videografados, obedeceram a diferentes níveis de descrição qualitativa, microgenética, das características das realizações práticas e notacionais de cada criança, interpretadas por elas para: identificar e descrever os tipos de concepção ali revelados; apreender a relação entre as modificações de cada criança e os diferentes patamares dessas realizações. Foi observado que o conceito de divisão está centrado nas concepções pré-aditivas, no repartir em quantidades e no distribuir. E é interessante salientar que os resultados sobre as notações de divisão vão desde sem significado atribuído à divisão até as concepções aditivas. As notações de divisão por partição retratam o resultado do repartir e a ação sobre a grandeza repartida, em que os invariantes observados nas realizações dos sujeitos, são de correspondência "um a um". Dessa forma, se atribuiu a cada divisor um elemento até se esgotar o total, com a preocupação que sejam partes equivalentes, porém com a inferência de que a cada elemento do divisor cabe uma parte. Assim dessa correspondência surgiria a correspondência "um para muitos" e o invariante referente à relação parte-todo, que, de modo integrado organizaria a decomposição e a recomposição da grandeza total na quantidade de partes equivalentes. Esses argumentos para a autora falam da necessidade do esquema de repartir na elaboração das concepções aditivas da divisão por partição, ou seja, a ação do repartir assume forte sentido aditivo, em que recompondo as partes equivalentes teremos o total inicial, a decomposição-recomposição da grandeza total em partes equivalentes, a relação parte-todo. Também que os progressos observados na compreensão da divisão por partição de cada criança, estavam interligados com a utilização de esquemas e relações pertinentes ao conceito, ou seja, como os esquemas de correspondência um-a-um e partindo desse, a correspondência um-a-muitos e com a relação parte-todo.

Já Ferreira e Lautert (2003), se dedicaram a um estudo de caso com um sujeito de 6 anos e 4 meses de idade em dois momentos: no primeiro momento, a criança era solicitada a resolver um problema de divisão inexata de partição, utilizando papel e lápis, e no segundo, momento utilizando materiais concretos (fichas) para analisar a tomada de consciência a partir do conceito de divisão. Na análise qualitativa, foram observados cinco momentos de tomada de consciência: (a) a ausência de consciência da totalidade dos elementos; (b) a consideração da totalidade dos elementos, sem tomada de consciência do resto; (c) o surgimento de conflito cognitivo como possibilitador da tomada de consciência das relações entre os termos; (d) resolução do conflito a partir um esquema cognitivo já existente, ausência de tomada de consciência do resto; e (e) representação do termo resto, sem a tomada de consciência da relação deste com os demais. A análise qualitativa dos resultados revelou graus diferenciados de tomada de consciência da divisão, e não atingiu a conceituação, ou seja, a concepção de que a divisão remete-se à ideia de totalidade e interdependência entre seus termos, que ao lidar com um dado novo a criança recorria a seus esquemas de adição já construídos, para resolver o problema de divisão, fator esse que contribui para análise e compreensão dos resultados da nossa pesquisa.

Correa (2004), se dedica à pesquisa com crianças com idade entre 6 anos e 10 anos de uma escola pública de Oxford, Reino Unido, investigando o desempenho das crianças em tarefas de divisão resolvidas por cálculo mental, em problemas de divisão por partição e por quotas com utilização de materiais concretos para a resolução. Os resultados foram analisados em duas maneiras: através do número de respostas corretas dadas às tarefas e pelo tipo de explicação dada pela criança para encontrar o resultado. Os dados referentes ao sucesso nas tarefas foram codificados em termos binários (acerto e erro), e foi utilizada a regressão logística para estabelecer a importância de três fatores e sua interação para a compreensão do desempenho das crianças: (a) idade/escolaridade, (b) dividendo e (c) divisor.

A autora observou um progressivo aumento do número de respostas corretas às tarefas de acordo com a idade/escolaridade e que as crianças tiveram melhor aceitação nas tarefas em que foram utilizados números menores para o dividendo e o divisor. Concluí que o sucesso nas resoluções das tarefas não está relacionado apenas ao tipo de problema de divisão apresentado, mas é influenciado, também, pelas quantidades escolhidas para os termos da divisão.

As explicações dadas pelas crianças para os problemas de partição e quotição ocasionaram onze categorias: (a) respostas sem explicação, em que as crianças respondiam "não sei"; (b) respostas com explicação arbitrária que expressavam alguma competência da criança ou habilidade (eu pensei muito, eu sou bom em matemática); (c) distribuição um a um, em que as crianças tentavam organizar as situações com os dedos; (d) recontagem das quantidades já apresentadas no problema, em que as crianças contavam de um em um até atingir o dividendo; (e) contagem a partir de um dado fator, em que as crianças fazem a contagem a partir de um número conhecido por elas; (f) dupla contagem: a criança realizava a distribuição em cada rodada, contando até alcançar o dividendo; (g) adição repetida: a criança adiciona uma determinada quantidade repetidas vezes, até o valor de o dividendo ser atingido; (h) subtração repetida: a criança subtrai um valor repetidas vezes do dividendo até esgotá-lo; (i) metades; (j) conhecimento de fatos multiplicativos: a criança utiliza conhecimentos aprendidos sobre a divisão ou multiplicação; e (k) partição associada ao produto: a criança decompõe o dividendo em uma soma de números inteiros de modo a facilitar a totalização.

As contribuições de Correa (2004) para nossa pesquisa, referem-se ao melhor desempenho nos problemas de divisão por partição que dependem em última instância, dos valores numéricos utilizados para o dividendo e para o divisor, sendo que quando utilizado um valor maior para o divisor, as crianças apresentaram mais facilidade nos problemas de divisão por quotas. Também, são interessantes os resultados quanto às estratégias presentes: na divisão por partição estavam relacionadas à partição dos números, seja em partes iguais (adição repetida e metades), seja em parcelas diferentes, que na divisão por quotas, observou-se o uso de estratégias relacionadas, às vezes, em que uma determinada quantidade pode "estar contida" em outra quantidade.

Selva (1998) se dedica à pesquisa sobre o resto da divisão e faz uma análise das estratégias presentes na resolução de problemas de divisão por partição e por quotição, com resto diferente de zero, numa perspectiva de desenvolvimento, destacando a compreensão dos sujeitos com idade entre cinco e oito anos (alfabetização, primeira e segunda série do ensino fundamental) sobre o resto e as estratégias de raciocínio. Os sujeitos foram divididos em três grupos e foi fornecido para um grupo fichas, para outro, papel e lápis e para o outro, nenhum material. Analisando as respostas, a autora constatou seis estratégias para lidar com o resto: (a) a solicitação de maior quantidade; (b) o fato de aceitar uma desigualdade, ou seja, aceitar que um dos grupos ficasse com mais; (c) a remoção do resto; (d) a formação de grupos iguais independente do enunciado do problema; (e) a situação onde era refeito o problema; e (f) dividir o resto em partes que pudessem ser distribuídas entre todos os grupos.

As contribuições interessantes para esta pesquisa é que os resultados obtidos por Selva (1998), apresentaram que as crianças têm mais facilidades em trabalhar com problemas de divisão exata de partição, pois as mesmas tratam o resto como um problema independente. Sendo que não foram observadas diferenças na forma de lidar com o resto nos problemas de partição e quotição. Foi notável que a situação-problema desempenha um papel importante, pois a autora percebeu que nesses problemas as divisões ocorreram com naturalidade na medida em que os sujeitos relacionavam dados de sua experiência pessoal com a situação escolar. Outro fator relevante foi a utilização de material concreto que influencia as estratégias das crianças mais novas, mas deixa de ser interessante a partir do momento em que as crianças desenvolvem estratégias mais avançadas.

Já Lauter e Spinillo (2002), realizaram sua pesquisa com problemas de divisão inexata por partição e por quotas com sujeitos com idade de 5 a 9 anos (jardim, alfabetização, primeira e segunda série do ensino fundamental), e analisaram o desempenho dos sujeitos em problemas de divisão e as definições dos mesmos sobre o que é dividir. Para coleta de dados num primeiro momento, o pesquisador fazia a leitura dos problemas e aos sujeitos foi somente permitido utilizar papel e lápis, diferentemente das pesquisas anteriores de Moro (2004, 2005) e de Selva (1998), as quais foram realizadas com a utilização de material concreto. No segundo momento, foi realizada uma entrevista para identificar as concepções das crianças sobre o dividir. Na análise dos dados, em função do número de acertos, cada criança foi classificada nos grupos de desempenho: (G1) crianças que erraram ambos os problemas; (G2) crianças que acertaram o problema de divisão por partição, mas erraram o divisão por quotas; (G3) crianças que erraram o problema de divisão por partição, mas acertaram o divisão por quotas; e (G4) crianças que acertaram ambos os problemas. A autora identificou que a maioria das crianças com instrução escolar acertou ambos os problemas, diferentemente daquelas sem instrução que erram ambos os problemas, sendo que nenhuma criança dessa classificação acertou ambos os problemas. Dessa forma, o desempenho depende mais do nível de instrução do que do tipo de problema. É interessante ressaltar que a porcentagem de crianças com instrução que acertaram apenas o problema de quotas é igual a porcentagem das crianças sem instrução.

Foram identificados diferentes tipos de definições que variavam desde definições sem um significado matemático até definições que expressavam um significado matemático exclusivamente de divisão, sendo essas definições: (a) a criança não define; (b) definição que não envolve um significado matemático; (c) definição que envolve um significado matemático de natureza geral associado às operações diferentes de divisão; e (d) definição que envolve um significado matemático associado, exclusivamente, à divisão por partição ou por quotas. Essa variação das definições, segundo as autoras, está relacionada ao nível de instrução escolar, sendo que a idéia de partição é mais familiar às crianças do que a de quotas.

É importante ressaltar para esta pesquisa que foi notável em Lauter e Spinillo (2002), que o tipo de problema não é fator determinante no desempenho dos problemas, e sim a instrução formal dada às crianças sobre a divisão, pois as crianças instruídas apresentaram um percentual ligeiramente maior nos problemas de partição, e as crianças menos instruídas tiveram dificuldades em ambos os problemas. Também, que a ideia de distribuição está fortemente associada à partição, justificando, assim, o fato da ideia de número de partes ser mais familiar que a idéia de tamanho das quotas.

Como pode ser observado as pesquisas de Moro (2004, 2005), Ferreira e Lautert (2003), Correa (2004), Selva (1998) e Lautert e Spinillo (2002) sobre esta mesma temática, destinadas a verificar as questões em relação ao conceito matemático de divisão, foram realizadas com sujeitos de idade inferior ou igual a dez anos, ou seja, todos iniciando o ensino fundamental. Percebemos que todas essas pesquisas buscavam evidenciar a compreensão das crianças sobre a divisão. Entretanto, elas recorreram a diferentes estratégias metodológicas. Os estudos de Moro (2004, 2005) e Ferreira e Lautert (2003), foram realizados observando as crianças com auxílio de materiais para resolução de problemas de divisão por partição. Os mesmos procedimentos foram adotados no estudo de Selva (1998) e Correa (2004). O diferencial foi que nestes estudos foram utilizados problemas de partição e de quotas. Já no estudo de Lautert e Spinillo (2002) foi fornecido lápis e papel e permitido que resolvesse da forma que desejasse os problemas de divisão exata, de partição e de quotas, e entrevistas.

Dos estudos observados, o que possui mais semelhanças com este estudo é o de Lautert e Spinillo (2002), pois a metodologia utilizada é similar à que será utilizada nesta pesquisa: os problemas serão apresentados oralmente, sendo problemas de divisão inexata e exata, de partição e de quotas e as crianças receberão papel e lápis e serão orientadas para resolver da forma que desejarem.

Todos os estudos descritos envolvem problemas de divisão por partição, ou por quotas, ou ambas as situações. Correa (2004), chama a atenção para a construção inicial do conceito de divisão pela criança; o quanto é importante a criança conhecer essas duas classes de problemas: o de divisão por partição e o de divisão por quotas. Em Moro (2005), percebemos o quanto o repartir é precoce entre as crianças, e Selva (1998), descreve que esses problemas são tratados igualmente pelos alunos e que os problemas de partição são considerados mais fáceis que os de divisão por quota.

A literatura mostra, de modo geral, que os problemas de partição são mais fáceis para as crianças de que os de quotas. Uma das explicações para isso é a noção inicial que a criança tem sobre a noção de divisão, que deriva da sua vivência, a de distribuir o todo em partes iguais até que não se tenha mais o que distribuir. As noções de divisão decorrem da idéia de distribuir, como evidenciam Selva (1998), Moro (2004, 2005), Lautert e Spinillo (2002) e Ferreira e Lautert (2003).

Algumas conclusões gerais podem ser delineadas a partir das discussões das pesquisas acima citadas. Inicialmente, vê-se relato nos diferentes trabalhos, dos diversos procedimentos utilizados pelas crianças na resolução de problemas de divisão, que muitas vezes aparecem nos estudos com nomenclaturas diferentes. Nos estudos de Correa (2004) e Lautert e Spinillo (2002) esses procedimentos são organizados em categorias para melhor compreensão dos dados. Esses estudos apresentam categorias semelhantes às que são utilizadas nesta pesquisa.

De modo geral, observa-se uma diferença no modo de resolução de acordo com a idade dos sujeitos. As crianças mais novas utilizam procedimentos que modelam a situação descrita no enunciado dos problemas, enquanto que as mais velhas usam fatos aritméticos com maior frequência para resolução dos problemas.

Por outro lado, os estudos apresentados relatam a compreensão de divisão revelada pelas crianças com a utilização de materiais ou em entrevistas, sendo que essa compreensão está diretamente relacionada com os esquemas de ação pertinentes à divisão.

Nesse sentido, o presente trabalho revela a compreensão da divisão relacionada aos esquemas de ação de distribuição e correspondência nas soluções escritas de crianças que frequentam a primeira série do ensino fundamental, descrevendo os procedimentos presentes nessas soluções, da mesma forma que um professor deve fazer ao corrigir uma avaliação de seu aluno.

3 METODOLOGIA

Para atingir aos objetivos propostos neste trabalho, foi utilizada na coleta de dados, um formulário de conhecimentos matemáticos com problemas de divisão, exata e inexata, partição e quotição, de forma a se obter informações sobre o objeto a ser investigado. A análise qualitativa dos registros usados pelos sujeitos, na resolução dos problemas de divisão, possibilitou conhecer a variedade das estratégias utilizadas e, em alguns casos, inferir os conceitos e os esquemas de ação utilizados pelos sujeitos.

3.1 Sujeitos

O presente estudo, de natureza exploratória, foi realizado, inicialmente, com 38 alunos da primeira série do ensino fundamental, com idades entre seis e sete anos, em duas salas de aula escolhidas por conveniência do período matutino de uma escola municipal de Navegantes, SC.

Percebi que as pesquisas de Moro (2004, 2005), que investigou esse tema foram desenvolvidas com sujeitos pouco escolarizados, geralmente de escolas situadas em comunidades carentes. Essa escolha permite observar a utilização de estratégias diversificadas, já que esses sujeitos não sofreram tanta influência do ensino escolar, que tende a homogeneizar os procedimentos de resolução de problemas. Diante desse fato, decidi também, optar por escolas com as mesmas características socioeconômicas.

3.2 Instrumentos

Para a coleta de dados, foi elaborado um formulário com problemas envolvendo o conceito de divisão, exata e inexata, partição e quotição. Os resultados serão comparados conforme o tipo de problema, procurando-se comparar os problemas dois a dois, conforme suas semelhanças e diferenças. Ou seja, os problemas eram diferenciados em termos de unidade (continua x discreta), tipo de problema (partição x quotição) e existência ou não de resto como representado no quadro 1.

Problemas	Quantidade	Classificação (tipo)	Resto
PO1	Contínua	Partição	Não
PO2	Discreta	Partição	Sim
PO3	Discreta	Quotição	Sim
PO4	Discreta	Partição	Não

Quadro 1 - Classificação dos problemas

Dessa forma, as semelhanças e diferenças dos problemas serão:

- **Tipo de quantidade**: continua x discreta (PO1 x PO4) - efeitos de unidade.
- **Tipo de problema**: partição x quotas (PO2 x PO3) - efeitos de tipo.
- **Existência ou não de resto** (PO2 x PO4) - efeitos do resto.

O formulário de pesquisa foi elaborado com os seguintes problemas de divisão:

1. PO1 - Divisão por Partição (exata): **"Um amigo meu chegou a casa morrendo de fome e fez dois sanduíches de pão, presunto e queijo. Quando ele ia dar a primeira mordida, chegaram três amigos seus. Não tinha mais pão, presunto e queijo. O que você faria se estivesse no lugar dele?"** Esse problema foi retirado do livro: Problemas? Mas que Problemas?!, de autoria de Mercedes Carvalho (2005), em que a autora aborda, principalmente, a reclamação dos professores de que os alunos não sabem interpretar os problemas. Esse problema envolve o conceito de frações: dois inteiros divididos por quatro. No enunciado desse problema, não temos as quantidades citadas diretamente.

Nesse caso, temos o dividendo que são os dois sanduíches, o número de partes (divisor) que é o protagonista e os três amigos dele, ou seja, quatro, e o esperado é a quantidade das partes (quociente) que pode ser tanto um pedaço de pão (1/2) ou dois pedaços de pão (2/4). Para este problema, o resto é zero, ou não se tem resto. O possível esquema de ação esperado para resolver esse problema (de acordo com Nunes et al., 2005), deve ser o de distribuição equitativa, devido à relação entre o todo e as partes é desconhecida.

2. PO2 - Divisão por Partição (inexata): **Pedro havia comprado 16 carrinhos e tinha 5 caixinhas. Ele queria colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixinhas.**

Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixinha? Esse problema é semelhante aos problemas que Selva (1998), aplicou para crianças da alfabetização, quando o objetivo era o de investigar a resolução de problemas de divisão com resto diferente de zero, ou seja, problemas de divisão inexata.

No enunciado desse problema, temos o dividendo: os dezesseis carrinhos e o número de partes (divisor): as cinco caixinhas, e o esperado é a quantidade das partes (quociente), três carrinhos em cada caixinha com resto igual a um, ou seja, sobraria um carrinho.

Para facilitar a verificação de qual esquema de ação a criança utilizou na sua solução escrita, organizamos os problemas (PO2, PO3 e PO4) em quadros (Quadros 2, 3 e 4), inicialmente atribuindo diferentes valores às variáveis para identificar qual a relação fixa do problema, como nos exemplos de Nunes et al. (2005).

PO2 - Partição	**Dados do problema**		
Pedro havia comprado 16 carrinhos e tinha 5 caixinhas. Ele queria colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixinhas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixinha?	Nº de caixas	Nº de carrinhos por caixa	Nº de carrinhos
	1		3
	2		6
	3	3	9
	4		12
	5		15 (+1)
	:		:

Quadro 2 - Denotação da relação fixa do PO2

Com esse quadro, não temos dúvidas de que a relação fixa desse problema é o número de carrinhos por caixa, nesse caso, três, que traduz o número de carrinhos para cada caixa. Segundo essa relação fixa há determinados esquemas em jogo, mas esses não necessariamente são os esperados e, obrigatoriamente, presentes para que haja uma resposta correta. Como essa relação fixa não está descrita no problema, não é conhecida. O esquema de ação esperado para se ter a resposta correta desse problema deve ser o de distribuição equitativa.

3. <u>PO3 - Divisão por quotição (inexata)</u>: **Marta tinha 19 doces e queria colocar 6 doces em cada bandeja. Quantas bandejas serão necessárias?** Segundo Vergnaud (1994), para a operação de divisão encontramos dois tipos de problemas básicos, que são os problemas de isomorfismo, (denominados como por partição) e os de divisão por quota. Nesta situação, temos um problema de divisão por quotas como o do exemplo já abordado no referencial teórico. Entretanto, neste caso, trata-se, também, de uma divisão inexata.

No enunciado desse problema, temos o dividendo: dezenove doces e a quantidade das partes: seis doces em cada bandeja, e o esperado é o número de partes: três bandejas e o resto é um, um doce.

<table>
<tr><th>PO3 – Quotição</th><th colspan="3">Dados do problema</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Marta tinha 19 doces e queria colocar 6 doces em cada bandeja. Quantas bandejas serão necessárias?</td><td>Nº de bandejas</td><td>Nº de doces por bandeja</td><td>Nº de doces</td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="3">6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>12</td></tr>
<tr><td>3</td><td>18 (+1)</td></tr>
<tr><td>:</td><td>:</td><td>:</td></tr>
</table>

Quadro 3 - Denotação da relação fixa do PO3

Neste problema, percebemos que a relação fixa é o número de doces por bandejas, que nessa situação são seis, e esse número está expresso no enunciado. Por isso, o esquema de ação esperado para resolvê-lo corretamente é o de correspondência um-a-muitos.

4. <u>Divisão por Partição (exata)</u>: **Júlia tem 6 bombons e quer dividir entre 3 amigas. Quantos bombons, cada amiga vai ganhar?** Esse problema, segundo Vergnaud, se enquadra como um problema de partição, de divisão exata.

Temos no enunciado desse problema, o dividendo, os seis bombons e o número de partes (divisor) é as três amigas, e o esperado é a quantidade das partes (quociente), dois bombons para cada amiga, e o resto é zero, não sobra nada.

<table>
<tr><th>PO4 – Partição</th><th colspan="3">Dados do problema</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Júlia tem 6 bombons e quer dividir entre 3 amigas. Quantos bombons, cada amiga vai ganhar?</td><td>Nº de amigas</td><td>Nº de bombons por amiga</td><td>Nº de bombons</td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="3">2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>6</td></tr>
</table>

Quadro 4 - Denotação da relação fixa do PO4

A relação fixa desse problema é o número de bombons por amiga, nesse caso dois. E esse número também não é conhecido no enunciado desse problema. Portanto, como no PO2, o esquema de ação esperado (também segundo Nunes et al., 2005), que indicará a resposta correta desse problema, é o de distribuição equitativa.

3.3 Procedimentos de coleta de dados

Após a aprovação do projeto pela comissão de ética, foi apresentado à escola um termo de autorização para realização da pesquisa (apresentado no anexo B) e também foi encaminhado aos pais um termo de autorização, para que seus filhos participassem da pesquisa (apresentado no anexo D).

Para preservar a identidade dos sujeitos, os formulários foram codificados.

A coleta de dados foi realizada pela própria pesquisadora no ambiente escolar. A aplicação foi realizada por turma, uma em cada dia. Os formulários foram aplicados e entregues a todos os alunos presentes em sala no momento da aplicação (38 sujeitos). A pesquisadora fazia a leitura de cada problema e esperava até que todos concluíssem os registros de suas soluções antes de apresentar o problema seguinte. A pesquisadora e as professoras de sala, presentes no momento da aplicação, não interferiram na resolução dos sujeitos. A aplicação demorou, aproximadamente, uma hora e meia em cada turma.

Aos sujeitos foi permitido utilizar papel e lápis e lhes foi dito que poderiam resolver os problemas da forma que desejassem.

A análise dos dados será feita mediante categorias que serão estabelecidas de acordo com os procedimentos observados na solução escrita das crianças da primeira série do ensino fundamental.

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise qualitativa dos procedimentos das soluções escritas empregadas pelos sujeitos na resolução dos problemas de divisão resultou em seis categorias semelhantes às de Moro (2004) e Correa (2004), que revelaram ou não, indícios dos esquemas de ação, distribuição equitativa e correspondência um-a-muitos que foram utilizados pelos alunos das primeiras séries e, dessa forma, a compreensão sobre a divisão.

4.1 Levantamento das soluções

Verifiquei, nas soluções escritas, a presença dos registros pictóricos e simbólicos na sua maioria, como resolução dos problemas de divisão propostos. Algumas crianças utilizaram numerais em suas soluções simplesmente para representar os fatores da divisão, mas não utilizaram os numerais para representar a operação. Assim, o algoritmo de resolução da divisão não foi encontrado em nenhuma das soluções, talvez pela faixa etária das crianças. Em nossa pesquisa, notei que a forma como a criança apresentou seus registros na solução do problema não está relacionada com diferenças nos procedimentos de solução adotados, por isso, não foi considerado o tipo de representação na análise dos dados.

Para caracterizar as soluções escritas utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de divisão, procurei primeiro quantificar as informações em uma tabela. Visto que dessa forma não foi possível visualizar os procedimentos, optei pela elaboração de um esquema gráfico (Anexo A), para que fosse mais fácil definir as categorias, o que facilitou a identificação dos esquemas de ação. O esquema gráfico foi organizado de acordo com os procedimentos que foram identificados nas soluções escritas, após a análise das mesmas.

4.2 Análise dos problemas de divisão

Foram encontradas seis categorias nas soluções escrita na resolução dos problemas de divisão, que possibilitarão identificar os procedimentos utilizados pelas crianças. Para esclarecer as categorias encontradas, irei relatar a organização dos procedimentos e comentar. Como as crianças não foram observadas individualmente enquanto resolviam os problemas, a realização de mais de uma rodada foi presumida com base nas características dos desenhos (portanto, pode haver algum erro nessa classificação).

1) Repartição sem critério aparente: a solução representada mostra a noção de repartir um todo em partes sem a preocupação de equivalência das mesmas. Também não existe preocupação em respeitar as quantidades definidas no enunciado. Esse procedimento de registrar parcelas com quantidades diferentes, independentemente do resto, aconteceu em ambos os problemas (partição e quotas).

a) Nos problemas de partição: como é exemplificado na solução do PO2, a criança não se preocupou em seus registros com os termos da divisão definidos no enunciado, pois a quantidade de bolinhas não é igual em cada retângulo, o número de partes ela considerou seis e a totalidade ela considerou trinta e nove, enquanto que no enunciado desse problema, temos 16 carrinhos que devem ser distribuídos em 5 caixinhas (Figura 1).

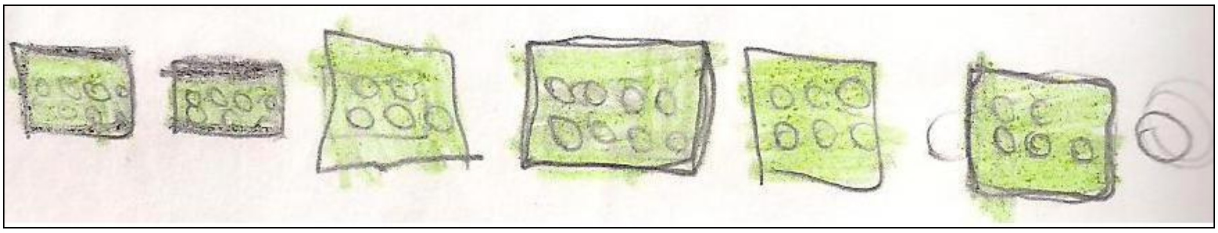


Figura 1 - Solução escrita de uma criança que representou parcelas com quantidades diferentes mesmo sem considerar o resto, para o segundo problema do formulário

b) No problema de quota: na figura 2, temos a solução do PO3, de uma criança que não se preocupou em seu registros com os termos da divisão, pois a quantidade de bolinhas não é igual em cada retângulo, o número de partes ela considerou cinco, era o valor esperado nesse problema, e a totalidade ela considerou 46, enquanto que no enunciado desse problema, temos 19 doces que devem ser organizados em seis doces por bandejas.

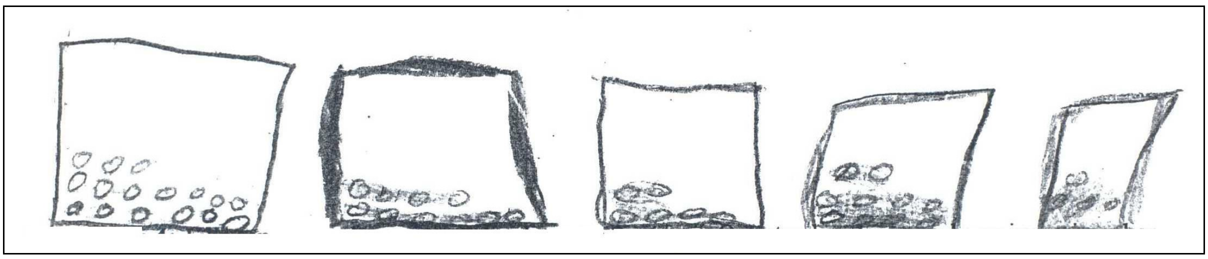


Figura 2 - Solução escrita de uma criança que representou parcelas com quantidades diferentes mesmo em considerar o resto, para o terceiro problema do formulário

2) Registra somente o dividendo: na solução apresentada não foi possível identificar nenhum indício de ação sobre o dividendo.

Nessa categoria, não identifiquei nas soluções escritas nenhuma ideia de divisão, pois notei que as crianças apenas representavam o dividendo, mas não utilizavam esse registro para outras ações, ou seja, para distribuir ou repartir. Esse procedimento também ocorreu nos dois tipos de problemas.

a) Nos problemas de partição: conforme a figura 3, em que a criança simplesmente desenhou os seis bombons equivalentes à totalidade, correspondente ao PO4, mas não registrou nenhuma (ação) marca de divisão.

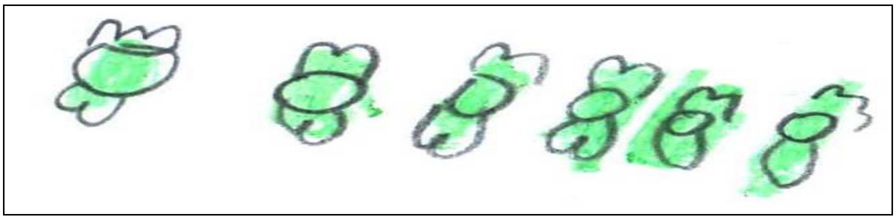


Figura 3 - Solução escrita de uma criança que representou somente o dividendo para o quarto problema do formulário

b) No problema de quotas: conforme a figura 4, em que a criança simplesmente desenhou os 19 doces equivalentes à totalidade, correspondente ao PO3, mas não registrou nenhuma (ação) sobre esse valor, ou seja, ideia de divisão.

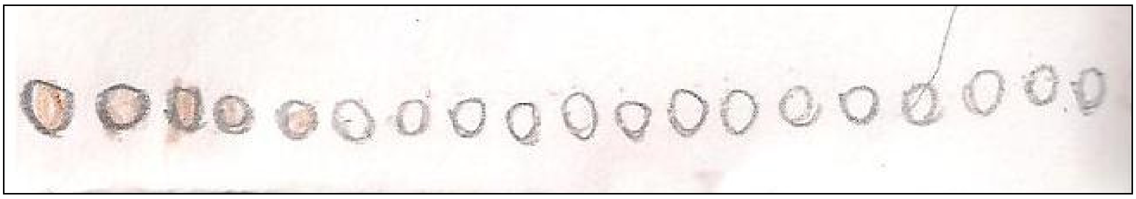


Figura 4 - Solução escrita de uma criança que representou somente o dividendo para o quarto problema do formulário

3) Registra em separado as etapas da ação de dividir: registra separadamente o dividendo, o divisor (o número de partes), de acordo ou não com o enunciado. Registra também o quociente (tamanho das partes), respeitando a equivalência das partes. Esta solução também foi observada nos dois tipos de problema.

a) Nos problemas de partição: na figura 5, a criança representou para o PO2 o dividendo com 16 carrinhos separadamente e em seguida representou as cinco caixinhas (o divisor), com três bolinhas cada uma que denota o tamanho das partes (quociente) e uma bolinha fora da última caixinha representado o resto igual a um.

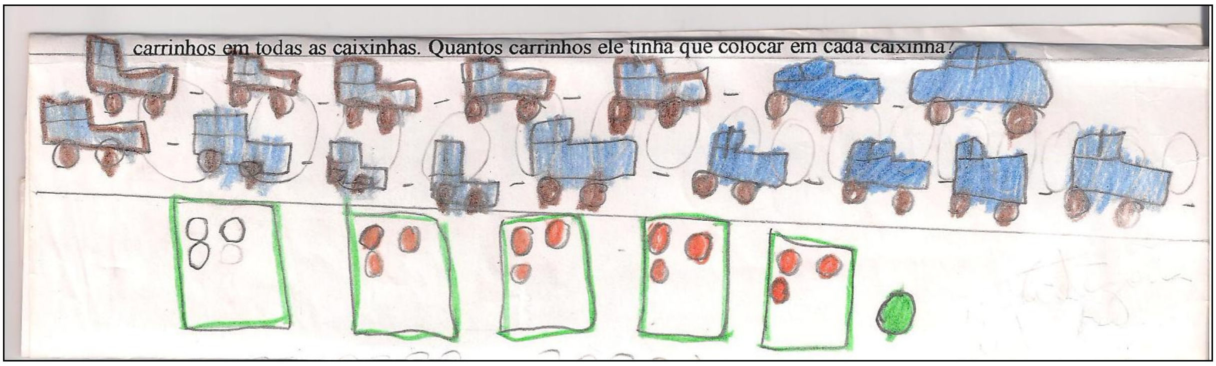


Figura 5 - Solução escrita de uma criança que representou o dividendo, divisor e quociente para o segundo problema do formulário

Na figura 6, a criança representou o dividendo, 16 carrinhos e em separado, as cinco caixinhas correspondentes ao número de partes (o divisor) e não se preocupou em esgotar o dividendo, pois colocou em cada caixinha somente dois carrinhos.

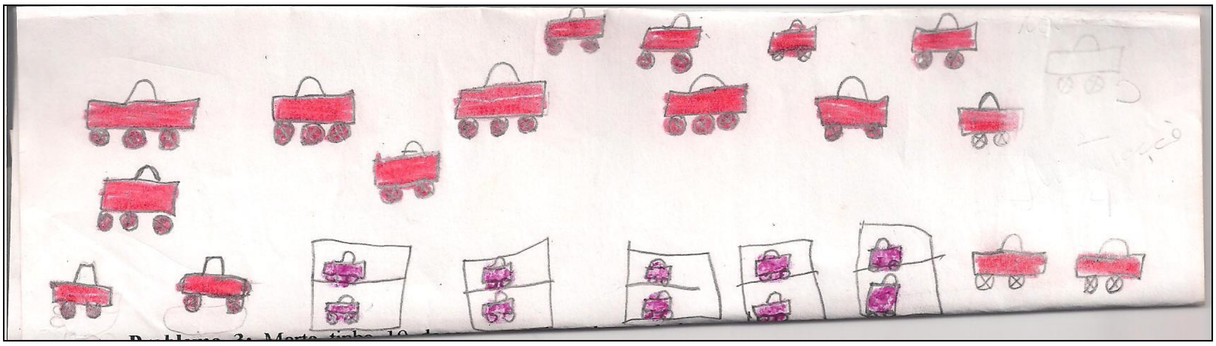


Figura 6 - Solução escrita de uma criança que representou o dividendo, divisor e quociente para o segundo problema do formulário

b) No problema de quotas: No enunciado deste problema tínhamos 19 doces que deveriam ser colocados em bandejas com seis doces cada bandeja. Na figura 7, observei que essa criança representou os 19 doces em separado, o que corresponde ao dividendo proposto no enunciado, cinco bandejas para o número de partes, sendo que esse valor não tem relação direta com as informações do enunciado; talvez ela tenha se confundido com o número de partes informado no PO2, que é cinco. Neste caso, como a criança desenhou cinco bandejas, colocou quatro doces em cada, mas, como o total seria 20 e não 19, ela deixou um doce do lado de uma das bandejas o que pode revelar um conflito entre o respeito ao dividendo definido no enunciado e a consciência da necessidade de equivalência entre as partes.

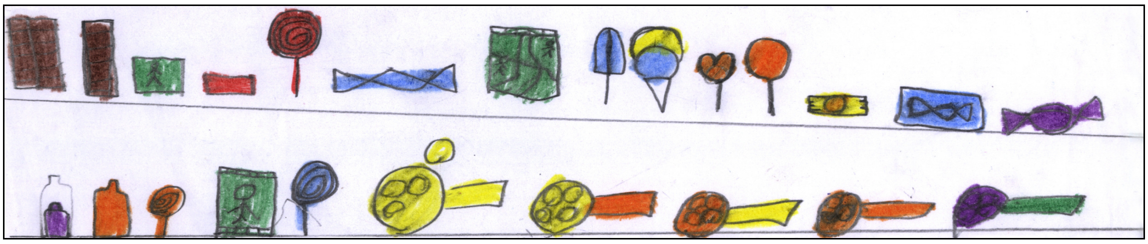


Figura 7 - Solução escrita de uma criança que representou o número de partes diferente do valor descrito no enunciado para o terceiro problema

4) Registro de partes equivalentes sem respeitar o valor do dividendo (o número de partes) definido no enunciado: registra partes equivalentes, mas não se preocupa com o valor do dividendo apresentado no enunciado. Encontrei os seguintes procedimentos nessa categoria:

A) Iguala o divisor e o quociente, ou seja, representa o mesmo valor para o número de partes e para o tamanho de cada parte. Nesta situação a criança faz uma correspondência um-a-muitos, porque ela utiliza o número de partes como a quantidade da parte, e faz as distribuições.

a) Nos problemas de partição: conforme figura 8, que é a solução de uma criança para o PO4, em que a criança distribui três bombons para cada uma de suas três amigas, não se preocupando com a totalidade das parcelas (dividendo) descrita na situação desse problema que é somente seis bombons para ser distribuído entre três amigas, ou seja, não utilizou o dividendo para controlar o tamanho de cada parte.

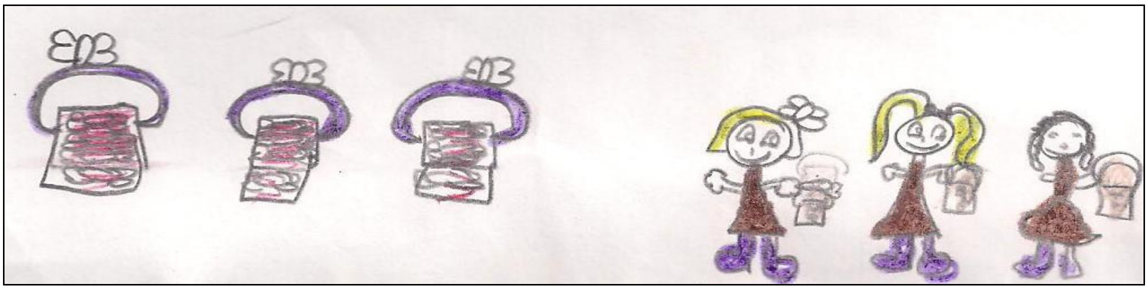


Figura 8 - Solução escrita de uma criança que utilizou o número de partes como a quantidade da parte e não se preocupou com o dividendo, na resolução do quarto problema

b) No problema de quotas: conforme figura 9, em que a criança registra as seis bandejas e coloca seis doces em cada bandeja, ou seja, ela utilizou o mesmo valor para o número de partes e para o tamanho das partes, não se preocupando com a totalidade, pois tínhamos somente 19 doces, e cada bandeja deveria ficar com seis doces.

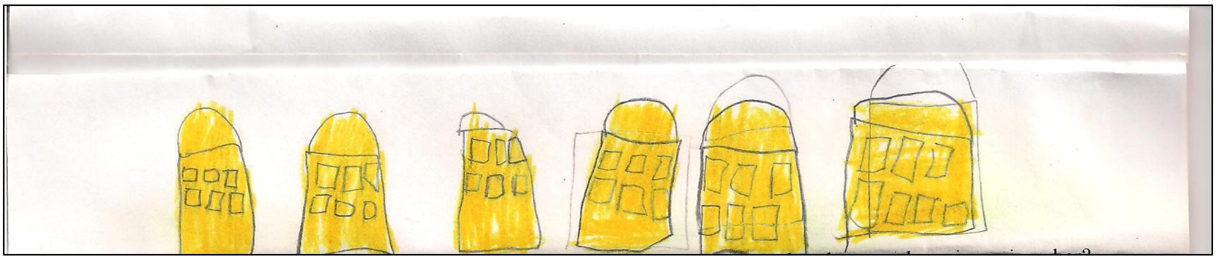


Figura 9 - Solução escrita de uma criança que utilizou o número de partes como a quantidade da parte e não se preocupou com o dividendo, na resolução do terceiro problema

B) Utiliza o número de partes definido no enunciado, mas não esgota o total (dividendo) definido, sendo que o tamanho de cada parte (quociente) resulta em um valor inferior ao esperado. Identifiquei que a criança iniciou rodadas de distribuição de acordo com o número de partes nessas soluções, mas percebi que a criança não se preocupou em esgotar o dividendo descrito no enunciado, fazendo apenas algumas rodadas de distribuição, em que utilizou a correspondência um-a-um,

a) Nos problemas de partição: conforme figura 10, que é a solução de uma criança para o PO4, em que a criança distribui um bombom para cada amiga e desenhou o restante dos bombons (os outros três bombons) juntos. Sendo assim, não se preocupou com a relação parte-todo da divisão.

Figura 10 - Solução escrita de uma criança que representou o número de partes de acordo com o enunciado, mas não se preocupou em esgotar o dividendo descrito no quarto problema

b) No problema de quotas: conforme figura 11, em que a criança utilizou o número de partes correto, três bandejas, mas não se preocupou em esgotar o dividendo, pois registrou somente cinco doces em cada bandeja (o tamanho das partes), totalizando 15 dozes, enquanto que no enunciado tínhamos 19 doces. Não sabemos como ela chegou nessa conclusão; talvez ela tenha copiado de algum amigo a informação do número de partes e não se ateve a esgotar o dividendo.

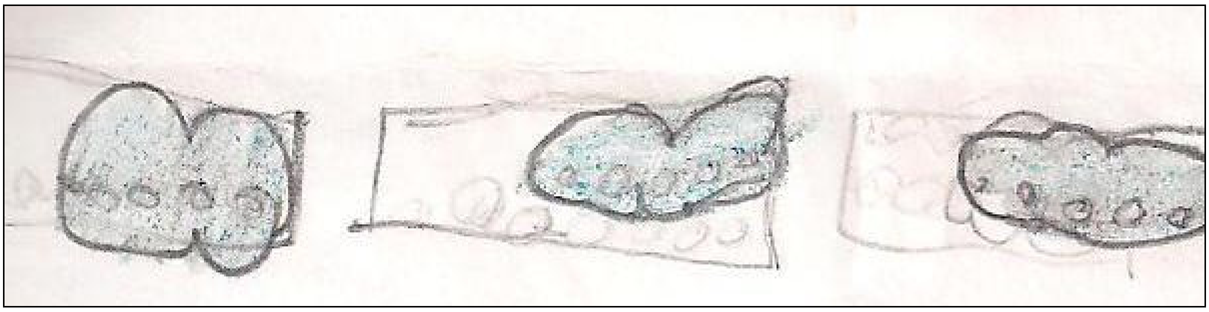


Figura 11 - Solução escrita de uma criança que representou o número de partes de acordo com o enunciado, mas não se preocupou em esgotar o dividendo descrito no terceiro problema

C) Utiliza outro valor para o dividendo, **e também não se preocupa com o divisor (o número de partes)**, utilizando para ambos um valor desconhecido. Neste caso, o dividendo e número de partes foram representados com valores diferentes daqueles descritos no enunciado do problema, ou seja, as crianças não representavam o dividendo equivalente, mas realizavam ação sobre esse valor, com ou sem a consideração do resto. Não podemos dizer que não estão presentes, nessas soluções escritas, estratégias que evidenciam formas de distribuição.

a) Nos problemas de partição: na figura 12, do problema PO2, observei que a criança registrou três caixinhas para o número de partes, sendo esse um valor inferior ao do descrito no problema que era cinco caixinhas, e não se preocupou com o dividendo, pois a totalidade resulta em 13 carrinhos, enquanto que no enunciado, tínhamos 16 carrinhos para ser distribuído em cinco caixinhas (o número de partes).

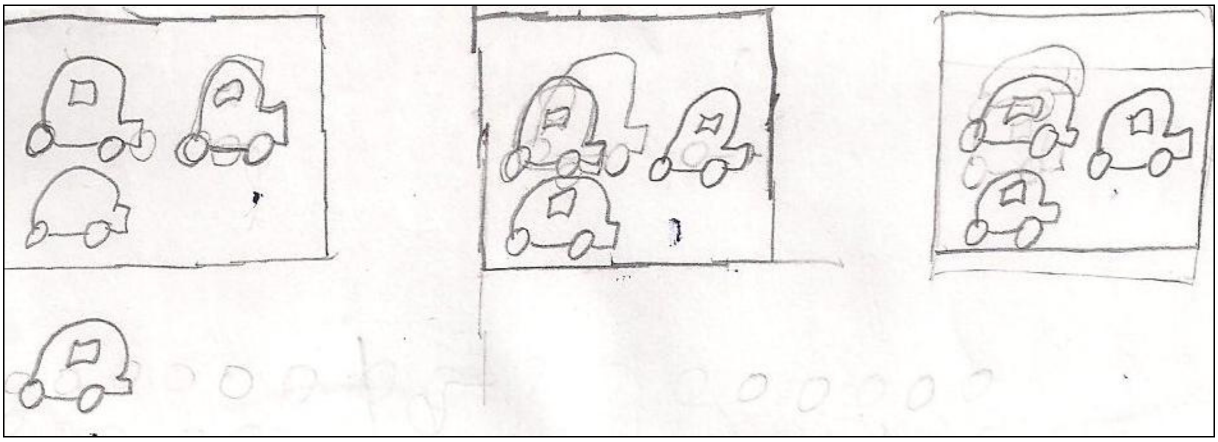


Figura 12 - Solução escrita de uma criança que representou o número de partes diferente do valor descrito no enunciado para o segundo problema

Entretanto, como a solução era três carrinhos por caixinha, que foi o que a criança representou, não podemos saber se ela calculou mentalmente ou procurou reproduzir a solução encontrada por algum colega.

b) No problema de quotas: conforme figura 13, em que a criança registrou quatro para o número de partes e três para o tamanho das partes. Totalizando 12 para o dividendo, enquanto que tínhamos no enunciado 19 doces para dispor seis doces em cada parcela. Não identificamos o motivo pelo qual a criança fez esse procedimento.

Figura 13 - Solução escrita de uma criança que representou o número de partes e o tamanho das mesmas, diferente do valor descrito no enunciado para o terceiro problema

5) Registro de partes equivalentes respeitando o valor do dividendo definido no enunciado: registra partes equivalentes e se preocupa com a relação parte todo da divisão. Encontrei os procedimentos:

A) Visualmente se percebeu mais de uma rodada de distribuição e a representação correta do resto: nessa situação, percebi pelos borrões e marcas de apagar que a criança fez mais de uma rodada de distribuição.

a) Nos problemas de partição: como no exemplo mostrado na figura 14, que é a solução de uma criança para PO4, em que a criança primeiro desenhou um bombom para cada amiga, e depois desenhou mais um bombom para cada uma, fazendo duas rodadas de distribuição com um elemento em cada rodada, o que caracteriza, em primeiro momento, a correspondência um-a-um, pois se atribui a cada parte um elemento até se esgotar o total, a serem obtidas partes equivalentes, incorporando o esquema de distribuição equitativa.

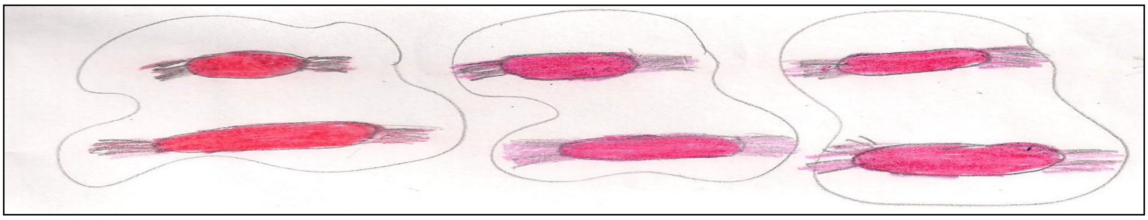


Figura 14 - Solução escrita de uma criança para o quarto problema

Esse procedimento somente foi encontrado nos problemas de partição, não estando presente nas soluções do problema de quotas, pois esse procedimento não caberia na resolução desse problema, devido à relação fixa ser conhecida.

B) Somente uma rodada de distribuição: visualmente pela semelhança dos desenhos percebi que as crianças fizeram uma única rodada de distribuição. Dessa forma, chegam ao valor da quantidade da parte, mesmo quando ela é desconhecida no enunciado do problema. Ou seja, quando a relação fixa não está presente no enunciado dos problemas, que são os problemas de divisão por partição. Caracterizei assim, nesse procedimento, que os problemas de partição foram resolvidos utilizando o esquema da distribuição equitativa e o esquema de correspondência um-a-muitos foi utilizado para resolver os problemas de quotas.

a) Nos problemas de partição: conforme as figuras 15 e 16 (soluções PO2), em que as crianças colocaram três carrinhos ou três "bolinhas" em cada uma das cinco caixinhas, com ou sem a representação do resto, totalizando os 16 carrinhos (dividendo). Evidencia-se pela semelhança dos registros que as crianças distribuíram diretamente a quantidade da parte, talvez por utilizar uma partição associada a multiplicação.

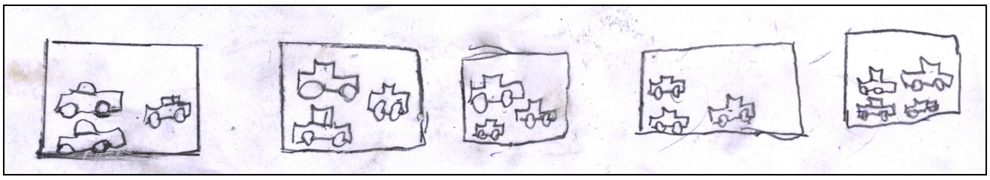


Figura 15 - Solução escrita de uma criança que representou visualmente somente uma rodada de distribuição e colocou o resto em uma das parcelas para o segundo problema

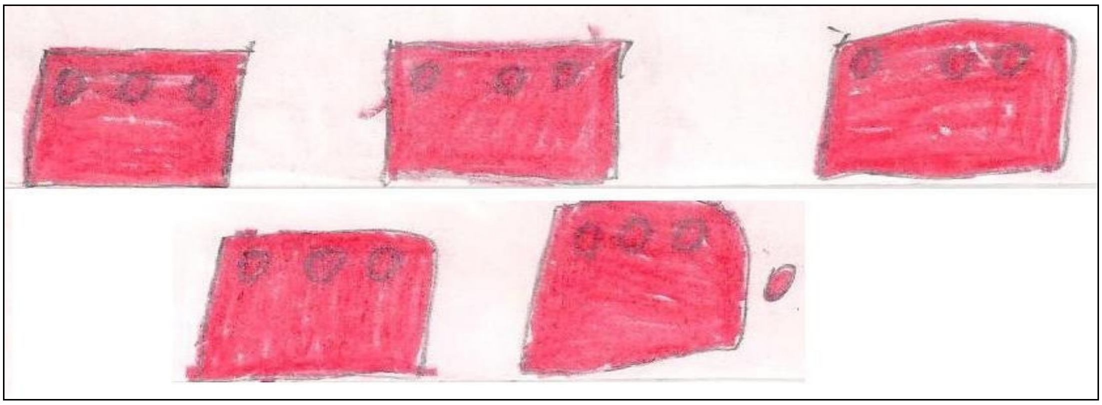


Figura 16 - Solução escrita para o segundo problema de uma criança que representou visualmente somente uma rodada de distribuição e representou o resto corretamente

b) No problema de quotas: conforme figura 17, em que a criança registrou três bandejas com seis "bolinhas" (doces) cada uma, sem a representação do resto, por isso totalizando 18 bolinhas (doces) para o dividendo. Devido esse problema ser de quotas (PO3), justifica-se a utilização do esquema um-a-muitos como descrito na literatura (NUNES et al., 2005), e esperado para solução desses problemas.

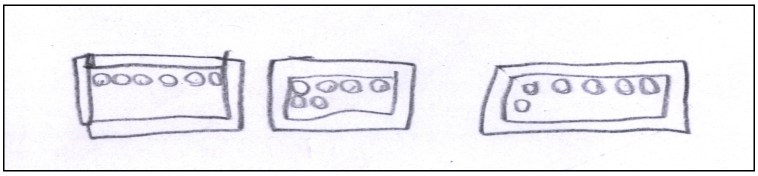


Figura 17 - Solução escrita de uma criança que representou visualmente somente uma rodada de distribuição e não representou o resto para o terceiro problema

Sendo que nesse procedimento, caracterizei os esquemas de ação de distribuição equitativa para os problemas de partição e os de correspondência um-a-muitos para os problemas de quotas (Tabela 1).

Tabela 1 - Quantificação dos procedimentos referentes à representação do resto para os problemas

Procedimentos	**Problemas**				**Total**	
	PO2					
	F	**FR(%)**	**F**	**FR(%)**	**F**	**FR(%)**
Resto em uma das parcelas	5	8,33	1	1,67	6	10,00
Representa o resto separadamente	7	11,67	7	11,67	14	23,34
Remoção do resto	1	1,67	4	6,67	5	8,34
Total	13	21,67	12	20,01	25	41,68

Encontrei nesse procedimento 60 soluções, dessas, 35 foram para os problemas exatos (PO1 e PO4), ou seja, as crianças apresentam mais facilidade em trabalhar com os problemas de divisão exata (PO1 e P04) em que não existe resto (resto igual a zero), não apresentaram diferenças significantes em lidar com o resto nos problemas de divisão por partição e por quotas, pois representam o resto como um fator independente na maioria das vezes.

Para os problemas de quotas verificamos mais dois procedimentos para essa categoria, que são:

c) Utilizou outro valor para o número de partes: sendo esse valor maior do que o descrito no enunciado dos problemas. Somente uma criança que registrou o dividendo esperado em sua solução para o PO3, mas utilizou cinco como o número de partes, e colocou quatro doces nas quatro primeiras bandejas e três doces na última bandeja conforme a figura 18, totalizando 19 doces que é o valor descrito no enunciado para o dividendo que deve ser distribuídos em seis doces por bandejas. Não consegui explicar por que ela não utilizou o valor seis descrito no enunciado para a quantidade das partes. Talvez ela simplesmente utilizou o número de partes do problema anterior (PO2) que era cinco caixinhas.

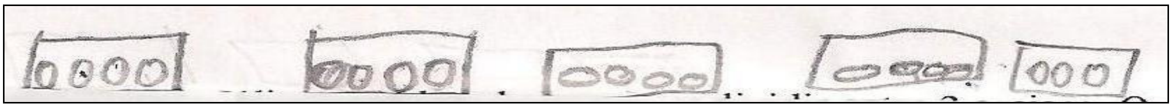


Figura 18 - Solução escrita de uma criança que utilizou o número de partes com valor maior do que o esperado para o terceiro problema

d) Trocou o número de partes e a quantidade da partes, fez a distribuição e representou o resto na última parcela, nessa situação as crianças em suas soluções para o P03, conforme a figura 19, utilizaram o valor descrito no enunciado, seis doces para cada bandeja como sendo o número de partes, ou seja, desenharam seis bandejas e não seis doces em cada bandeja e colocaram nas cinco primeiras bandejas três doces, e na última bandeja, quatro doces, totalizando 19 doces (dividendo). Percebi pela semelhança dos desenhos que o esquema utilizado para essa resolução foi provavelmente, o de correspondência um-a-muitos, mas a criança não se preocupou com as informações do problema, que eram seis doces por bandejas e colocou três doces por bandejas, tornando a solução inválida para o problema.

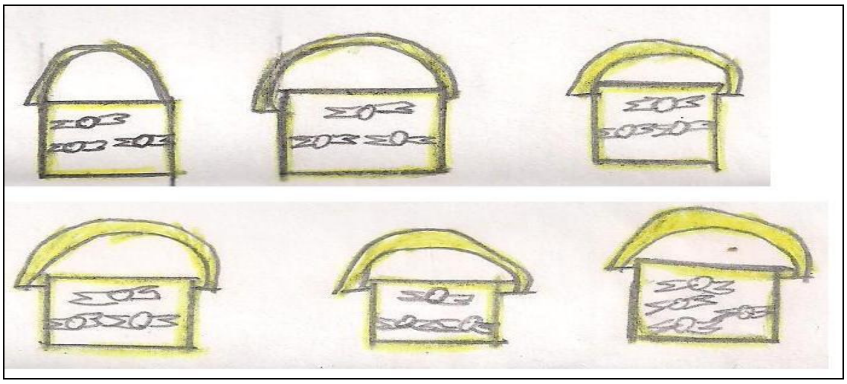


Figura 19 - Solução escrita de uma criança que trocou o número de partes pela quantidade da parte e fez a distribuição na solução do terceiro problema

6) Outros: reuni nesta classificação soluções em que não foi possível identificar qualquer aspecto da compreensão da ação sobre a divisão. As crianças procuravam respeitar alguns aspectos da situação, mas não se preocupavam em representar as quantidades definidas no enunciado, nem tão pouco, a ação de repartir. Incluí também nesta categoria aquelas soluções em que era apresentado somente o resultado, correto ou incorreto, o que impossibilitou a análise dos procedimentos.

A) Registros de desenhos em que não são representadas as quantidades definidas no enunciado, e ação de repartir:

a) Nos problemas de partição: como podemos observar na figura 20, que é a solução de uma criança para o PO1, a criança desenhou três bonecos, sendo que o boneco central segura os dois sanduíches descritos no problema. Nesse registro, não temos nenhuma ação de partição identificada, ou seja, não há registros da ideia de divisão, pois no enunciado os dois sanduíches deveriam ser repartidos entre os quatro amigos. Notei que a criança simplesmente desenhou uma ação pertinente a situação descrita no enunciado.

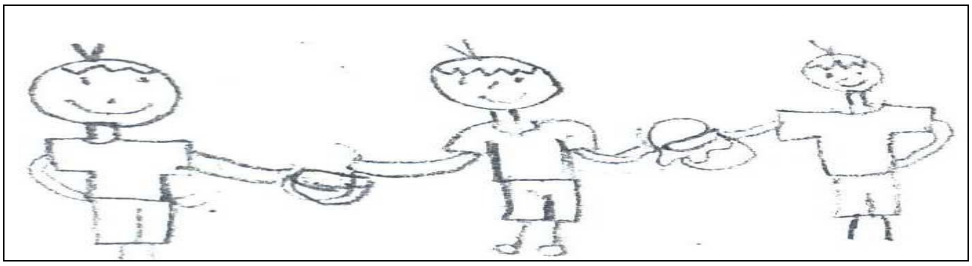


Figura 20 - Solução escrita de uma criança que em seu desenho não representou os termos da divisão de acordo com o esperado, sem a idéia de divisão, para o primeiro problema do formulário

b) No problema de quotas: somente uma criança registrou para o terceiro problema 16 doces, talvez ela tenha se confundido que o dividendo informado no PO2, mas como ela simplesmente desenhou 16 doces ao invés de 19 e não utilizou este registro para ações futuras incluí essa criança nessa categoria (Figura 21).

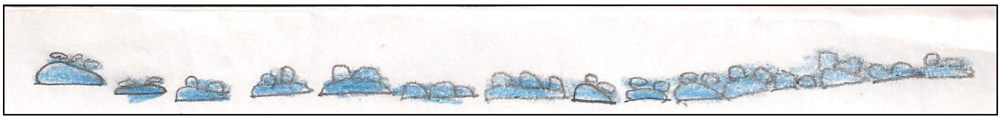


Figura 21 - Solução escrita de uma criança que em seu desenho não representou os termos da divisão de acordo com o esperado, sem a idéia de divisão, para o terceiro problema do formulário

c) Registraram somente o resultado: nessas soluções não foi possível verificar a estratégia de resolução, ou a forma de divisão. O procedimento de registrar somente o resultado, correto ou incorreto, ocorreu nas soluções em que não apresentaram qualquer registro da ação de divisão, mostrando, apenas, o resultado final. Sendo assim, nesses casos não é possível inferir quais foram os esquemas mobilizados pelas crianças, ou se elas apenas copiaram as soluções dos colegas e, por isso, essas soluções foram classificadas neste grupo, mesmo quando o resultado era correto. Conforme já descrito por Moro (2004), os algarismos e a escrita alfabética são as formas menos adiantas de se conceber a divisão com crianças dessa faixa etária, sendo que a autora identificou que a escrita alfabética foi utilizada para a escrita da resposta do problema; como ela fez o acompanhamento dos sujeitos pode revelar também indícios de divisão, o que não foi possível nesta pesquisa, pois a coleta de dados foi feita coletivamente com todos os sujeitos.

d) Nos problemas de partição: conforme as figuras 22 e 23, observei que foi registrado somente o resultado esperado, e em outras soluções somente o resultado incorreto.

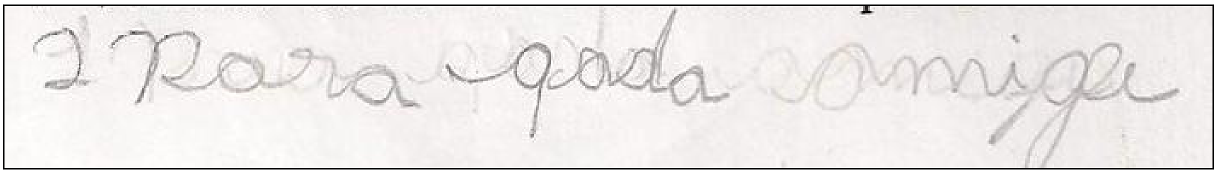


Figura 22 - Solução escrita de uma criança que representou somente o resultado correto para o quarto problema do formulário

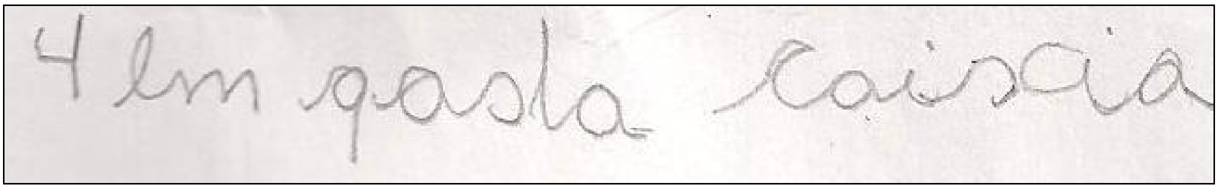


Figura 23 - Solução escrita de uma criança que representou somente o resultado incorreto para o segundo problema do formulário

e) No problema de quotas: conforme figura 24, observei que foi registrado somente o resultado incorreto.

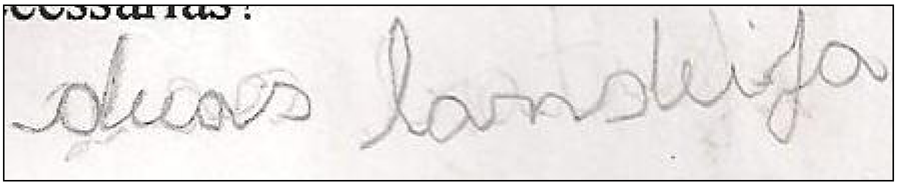


Figura 24 - Solução escrita de uma criança que representou somente o resultado incorreto para o terceiro problema do formulário

Encontramos 152 soluções, que foram organizadas nas categorias (Tabela 2):

Tabela 2 - Quantificação das formas de solução escrita por problemas

Categorias		**PO1**	**PO2**	**PO3**	**PO4**	**TOTAL**
Repartição sem critério aparente		-	4	11	1	16
Registra somente o dividendo		-	5	2	2	9
Registra em separado o dividendo e a ação de dividir		-	2	1	2	5
Registro de partes equivalentes, sem respeitar o dividendo	Iguala divisor e quociente.	-	2	5	2	20
	Utiliza o número de partes descrito no enunciado mas não esgota o dividendo.	-	1	3	2	
	Utiliza o outro valor para o dividendo, e também não se preocupa com o divisor (o número de partes).	-	5	-	-	
Registro de partes equivalentes, respeitando o dividendo	Visualmente se percebeu mais de uma rodada de distribuição.	5	-	-	3	68
	Somente uma rodada de distribuição.	18	12	12	15	
	Utilizou outro valor para o número de partes.	-	-	1	-	
	Trocou o número de partes e o tamanho da partes, fez a distribuição e representou o resto na última parcela.	-	-	2	-	
Outros	Registros de desenhos em que não são representadas as quantidades definidas no enunciado, e ação de repartir.	13	5	-	4	34
	Registraram somente o resultado.	2	2	1	7	

Nas 34 soluções da categoria "outros" e nas 16 soluções da categoria "repartição sem critério aparente" não foi representado um valor para os termos da divisão (dividendo e divisor); não se percebeu nenhum indício de divisão. Ficou evidente que as crianças apresentaram maiores dificuldades em fazer uma repartição em partes equivalentes para o problema PO3, pois na categoria "repartição sem critério aparente" este foi o problema que se destacou. Isso se justifica, por este problema ser de quotas e não apresentar o número de partes no enunciado. Outro fator interessante é que somente duas crianças representaram o dividendo e não realizaram ação sobre esse valor, sendo que esse procedimento ocorreu somente para os problemas inexatos de partição e de quotas, percebi então que as crianças que denotam o dividendo, em sua maioria, procuram realizar alguma ação sobre esse valor, ou seja, alguma repartição.

Já em 20 soluções, observei que as crianças utilizavam os esquemas de ação correspondentes à divisão, mas não se preocupavam com a totalidade (o dividendo), registrando assim o dividendo com valor diferente do informado no enunciado. Dessas, 14 crianças não controlam o dividendo nos problemas inexatos de partição e de quotas, sendo assim, a classificação do problema em inexato e exato, interfere na relação parte todo da divisão.

Em 68 soluções encontrei os esquemas de ação correspondentes à divisão e o dividendo representado de acordo com o enunciado, ou seja, indícios que revelem a compreensão dos mesmos sobre a divisão. O procedimento de somente uma rodada de distribuição foi o mais frequente, indiferentemente da classificação dos problemas; percebi que as crianças provavelmente utilizam a multiplicação para realizar repartição, pois realizam somente uma rodada de distribuição mesmo nos problemas de partição. A correspondência um-a-um, que é ação inicial da distribuição equitativa encontrei em soluções dos problemas de partição exata somente, talvez por essa ação ser uma ação inicial da ideia de divisão.

Somente em sete soluções para o problema PO3 presentes nos procedimentos: iguala divisor e quociente, ou seja, utiliza o mesmo valor para o número de partes e o tamanho das partes; e trocou o número de partes e o tamanho da parte, fez a distribuição e representou o resto na última parcela, em que as crianças não coordenaram os esquemas correspondência um-a-muitos e distribuição equitativa, pois fizeram uma distribuição que itativa, quando utilizaram outro valor para o número de partes.

No problema PO1 foi o que as crianças apresentaram soluções com maiores semelhanças, pois esse problema foi classificado em apenas duas categorias: registro de partes equivalentes, respeitando o dividendo e na categoria outros, ou seja, ou as crianças apresentaram as soluções esperadas para esse problema, ou simplesmente registraram o resultado ou desenhos sem a ideia de divisão. Isso se justifica pela situação definida no problema ser familiar.

Os problemas inexatos originaram mais categorias, portanto, percebi que as crianças apresentam mais dificuldades nestes problemas, e por isso recorreram a diferentes procedimentos.

Sendo assim, caracterizei os esquemas esperados nas soluções escritas em que foram apresentadas idéias de divisão, das crianças da primeira série do ensino fundamental, onde verificamos que os esquemas de ação esperados foram utilizados nos procedimentos em que se evidenciou somente uma rodada de distribuição ou visualmente se percebeu mais de uma rodada de distribuição.

4.3 Síntese: a presença dos termos da divisão na representação escrita

Faremos agora uma síntese da presença dos termos da divisão nas soluções escritas das crianças pesquisadas (Tabela 3).

Tabela 3 - Quantificação das soluções em que foram registrados os termos da divisão de acordo com o enunciado do problema

Problemas	Representação esperada dos termos da divisão		
	Dividendo	O número das partes	A quantidade da parte
PO1	23	23	23
P02	16	13	13
P03	17	12	12
PO4	22	20	20
Total	**78**	**58**	**58**

Quanto à representação esperada para os termos da divisão, o dividendo foi representado corretamente na categoria "registro de partes equivalentes respeitando o dividendo" e também na categoria em que representaram somente o dividendo, o que corresponde a 78 soluções.

Já o número de partes e o tamanho das partes, foram representados em 58 soluções de acordo com o enunciado dos problemas somente para alguns procedimentos da categoria em que o dividendo foi representado de acordo com o enunciado do problema ou não. Dessa forma, as crianças chegaram aos procedimentos que representaram o número de partes esperado, encontraram o tamanho da partes esperado, dessa forma, toda criança que representou o número de partes esperado conseguiu encontrar o resultado esperado da divisão.

Como foi observado por Correa (2004), o sucesso no desempenho das crianças não está relacionado somente ao tipo de problema, mas às quantidades, pois as crianças têm mais aceitação nos problemas que envolvem quantidades menores, como é o caso do problema PO4.

Observamos que as crianças apresentaram vários níveis de assimilação dos termos da divisão, algumas identificavam somente o dividendo, outras já fazia a coordenação do dividendo e do divisor, utilizando este para controlar o processo de distribuição equitativa nos problemas de partição. E também que algumas crianças, na média em que respondia os problemas, apresentavam níveis de assimilação diferenciados, ou seja, para o PO1 e PO2 o sujeito 11, por exemplo, foi classificado na categoria 1, que não apresenta nenhum indício de divisão, e para os problemas PO3 e PO4 o mesmo sujeito, foi classificado na categoria 4, que já revela alguma compreensão sobre a divisão. Dessa forma, há uma compreensão maior do conceito, a medida que as crianças vão vivenciando as situações (Quadro 5).

Problemas / Sujeitos	PO1	PO2	PO3	PO4
1	Categoria 5	Categoria 4	Categoria 4	Categoria 5
2	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 4
3	Categoria 1	Categoria 2	Categoria 2	Categoria 3
4	Categoria 1	Categoria 3	Categoria 2	Categoria 3
5	Categoria 1	Categoria 3	Categoria 3	Categoria 1
6	Categoria 1	Categoria 3	Categoria 2	Categoria 1
7	Categoria 1	Categoria 4	Categoria 2	Categoria 1
8	Categoria 1	Categoria 4	Categoria 5	Categoria 1
9	Categoria 1	Categoria 4	Categoria 4	Categoria 1
10	Categoria 5	Categoria 1	Categoria 5	Categoria 5
11	Categoria 1	Categoria 1	Categoria 4	Categoria 4
12	Categoria 1	Categoria 1	Categoria 4	Categoria 4
13	Categoria 1	Categoria 4	Categoria 5	Categoria 5
14	Categoria 5	Categoria 3	Categoria 2	Categoria 5
15	Categoria 1	Categoria 1	Categoria 2	Categoria 1
16	Categoria 1	Categoria 1	Categoria 5	Categoria 1
17	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5
18	Categoria 5	Categoria 2	Categoria 2	Categoria 5
19	Categoria 5	Categoria 6	Categoria 2	Categoria 6
20	Categoria 5	Categoria 2	Categoria 4	Categoria 5
21	Categoria 5	Categoria 2	Categoria 2	Categoria 5
22	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 2
23	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5
24	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 2	Categoria 1
25	Categoria 5	Categoria 4	Categoria 4	Categoria 5
26	Categoria 1	Categoria 1	Categoria 2	Categoria 1
27	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 3	Categoria 5
28	Categoria 1	Categoria 4	Categoria 5	Categoria 4
29	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5
30	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5
31	Categoria 5	Categoria 1	Categoria 1	Categoria 1
32	Categoria 5	Categoria 4	Categoria 5	Categoria 5
33	Categoria 1	Categoria 3	Categoria 4	Categoria 5
34	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 1
35	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5
36	Categoria 5	Categoria 6	Categoria 6	Categoria 6
37	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 5
38	Categoria 5	Categoria 5	Categoria 4	Categoria 5

Quadro 5 - Relação das categorias por sujeitos

5 DISCUSSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa aqui relatada foi realizada com as crianças que frequentavam a primeira série do ensino fundamental, de uma unidade escolar municipal de Navegantes e pretendeu caracterizar as formas de solução escrita utilizadas por alunos de primeira série do ensino fundamental na resolução de problemas de divisão, buscando indícios que revelem a compreensão dos mesmos sobre a divisão. Para isso, foi necessário caracterizar as formas de solução escrita utilizadas pelos alunos, contemplando os seguintes objetivos específicos: 1. verificar se nas soluções escritas estão presentes os termos da divisão (dividendo, divisor) e o resultado (quociente), e se são coerentes com as informações do enunciado do problema; 2. identificar se os esquemas de ação: distribuição equitativa e correspondência um a muitos (NUNES; CAMPOS; MAGINA; BRYANT, 2005), estão presentes nas soluções escritas dos alunos; e 3. verificar se as soluções escritas revelam a existência de coordenação entre os esquemas.

A análise qualitativa das soluções escritas efetuadas pelos sujeitos resultou em seis categorias que relacionam os diferentes procedimentos utilizados pelas crianças para resolução dos problemas de divisão. Nessas categorias, procurei destacar como as crianças registraram os termos da divisão (dividendo, o número de parte e a quantidade da parte), envolvidos na situação apresentada do enunciado do problema. Procurei, também, discriminar os registros de acordo com as ações que eles representavam, com um intuito de se tentar inferir a compreensão das crianças acerca da divisão.

Verifiquei que, quando o problema apresenta uma escrita adequada à realidade da criança, que a criança se remete à história descrita no enunciado do problema, ela consegue resolvê-lo com mais facilidade. Foram identificados esses fatores especificamente no primeiro problema que tem o enunciado diferente dos problemas abordados nos livros didáticos, e que se remete a uma situação que a criança se transfere para o contexto do enunciado, e esse problema foi aquele em que as crianças demonstraram o melhor índice de aproveitamento.

No que se refere ao melhor desempenho nos problemas de quotas inexatos, quando considerado o resto, se justifica pela utilização do esquema de correspondência um-a-muitos, pois facilita a percepção do que sobra, ou seja, o resto.

Como em Moro (2004), outras escreveram na língua materna a resposta para o problema apresentado e outras utilizaram diversas formas de representação, por exemplo, a pictórica ou a simbólica e os numerais, sendo que autora destaca que as formas mais avançadas que ela percebeu a divisão, estavam nos desenhos, por esse motivo não preocupamos com a forma de registro utilizada pela criança.

As crianças que registraram parcelas com quantidades diferentes, independentemente do resto, não compreendendo a necessidade de equivalência entre os termos da divisão, como propõe Vergnaud (1991). Já as que realizam mais de uma rodada, que segundo Moro (2005), é quando se atribui a cada parte um elemento até se esgotar o total, estão estabelecendo a ideia de divisão, de serem obtidas partes equivalente, incorporando o esquema de distribuição equitativa, segundo Nunes et al. (2005).

Em Moro (2004), as crianças quando não tinham qualquer noção de divisão, mesmo provocadas pela autora, também se limitavam a desenhar somente a totalidade como observamos em algumas soluções deste estudo. E quando o dividendo e número de partes foram representados com valores diferentes daqueles descritos no enunciado do problema, conforme categoria já evidenciada por Moro (2004), em que as crianças não representavam o dividendo equivalente, mas realizavam ação sobre esse valor, com ou sem a consideração do resto. Não podemos dizer que não estão presentes, nessas soluções escritas, estratégias que evidenciam formas de distribuição.

As crianças que registram somente o resultado, conforme já descrito por Moro (2004), os algarismos e a escrita alfabética são as formas menos adiantadas de se conceber a divisão com crianças dessa faixa etária, sendo que a autora identificou que a escrita alfabética foi utilizada para a escrita da resposta do problema; como ela fez o acompanhamento dos sujeitos pode revelar também indícios de divisão, o que não foi possível nessa pesquisa pois a coleta de dados foi feita coletivamente com todos os sujeitos.

Nas soluções em se evidenciou somente uma rodada de distribuição, podemos justificar esse procedimento com o enunciado do problema, que traduz uma situação vivenciada pelos alunos e com quantidades conhecidas, segundo Vergnaud (1991). Evidencia-se pela semelhança dos registros que as crianças distribuíram diretamente a quantidade da parte, talvez por utilizar uma partição associada ao produto, conforme já evidenciado por Correa (2004), e no problema de quotas, em que a criança registrou três bandejas com seis “bolinhas” (doces) cada uma, sem a representação do resto, por isso totalizando 18 bolinhas (doces) para o dividendo. Devido esse problema ser de quotas (PO3), justifica-se a utilização do esquema um-a-muitos como descrito na literatura (NUNES et al., 2005), e esperado para solução desses problemas. Esse procedimento ocasionou na classificação do resto, em: resto em uma das parcelas; representa o resto; e aqui foram classificados também o PO1 e o PO4 que o resto é igual a zero, e a situação que a criança não representa o resto, remoção do resto, categorias essas semelhantes ao do estudo de Selva (1998).

Tabela 4 - Quantificação dos resultados em relação ao tipo de problema de divisão

Tipo de problema		Respostas consideradas corretas de acordo com o enunciado e com a denotação do resto
Partição	Exata (PO1)	23
	(PO4)	20
	Inexata (PO2)	9
Quotas	Inexata (PO3)	11

Analisando o PO1 e o PO4, observei as particularidades em relação às unidades descritas no enunciado dos problemas. No PO4, que temos unidades discretas e no PO1, contínuas. O índice de acerto foi ligeiramente maior no PO1 (23 acertos, ou seja, contra 20 acertos no PO4), mas essa diferença é muito pequena para que possamos tirar alguma conclusão (Tabela 4). Ambos os problemas representam situações familiares, onde algo tem que ser distribuído entre os amigos. Sobretudo a situação descrita no enunciado do PO1, é provavelmente uma situação vivenciada frequentemente pela criança, ao dividir o seu lanche com amigos ou irmãos. Como lembra Vergnaud (1990), a familiaridade das situações permite que a criança recorra aos esquemas já elaborados para resolver situações semelhantes e os aplique na resolução do novo problema. Percebi esse fato no PO1, que tem o enunciado diferente dos problemas abordados com ênfase nos livros didáticos e que se remete a uma situação onde a criança se imagina no contexto do enunciado. Isso foi evidenciado no fato das crianças terem representado esse problema predominantemente utilizando o registro pictórico, e também porque as crianças demonstraram o melhor índice de acerto. É interessante verificar que a principal diferença na resolução desses problemas se refere ao tipo de erros encontrados: apenas no PO4 foram encontrados registros em que somente foi registrado o dividendo, ou em que o registro não representa a mesma quantidade do dividendo enunciado.

Para analisar as diferenças da resolução de acordo com o tipo do problema de divisão, confrontei as soluções do segundo (PO2) e do terceiro problema (PO3). Se não considerarmos os efeitos causados pelo resto, o problema de partição inexata (PO2) mostrou um nível de desempenho (12 soluções), exatamente igual ao de quotas inexata (12 soluções), o que não confirma a literatura que afirma que as crianças têm maior dificuldade nos problemas de quotas (SELVA, 1998).

Mesmo assim, concluímos que o desempenho das crianças nas soluções de problemas de divisão de partição exata foi o que apresentou o melhor índice.

Dessa forma, percebi que o nível de acertos dos problemas de quotas e partição não está somente associado à classificação dos problemas de partição ou quotas, mas também, ao fato de serem inexatos ou exatos.

Analisando as soluções em relação ao resto, observei que a criança dessa faixa etária, tem dificuldades para representar o resto, quando ele é diferente de zero, como apresentado na literatura por Selva (1998). Quando confrontamos o PO2 com o PO3, e consideramos os efeitos do resto, percebemos o melhor índice de respostas corretas para o PO3 (Tabela 4), problema esse de quota inexato. Segundo Correa (2004), o melhor desempenho das crianças em problemas de partição não está relacionado somente ao tipo de problema, mas às quantidades escolhidas para o número de partes, sendo que quando esse assume um menor maior, a criança apresenta mais facilidade nos problemas de quota, o que justifica, também, esses resultados apresentados com os problemas (PO2 e PO3), em que o número de partes do PO2 são cinco caixinhas e do PO3 são três bandejas.

Constatei, também, na quantificação dos termos da divisão por problema, na tabela 3, que o número de registros que apresentou os termos corretamente, se manteve constante no PO1, já para o problema PO2, PO3 e PO4, a quantificação do dividendo, divisor e quociente foi decrescente, nessa mesma ordem, ou seja, as crianças representaram o dividendo mais vezes do que o divisor, e o divisor mais vezes do que o quociente. Mas a diferença entre a representação desses termos não são significativas.

Nos problemas PO1 e PO4 as crianças apresentaram mais facilidade em representar os termos da divisão, e consequentemente os esquemas pertinentes a cada situação descrita nos enunciados. Isso se justifica como já citado, pela familiaridade descrita no enunciado, segundo Vergnaud (1990), e pela as quantidades, segundo Correa (2004). Sendo assim, as crianças que representaram todos os termos esperados para o problema, em sua maioria, conseguiram inferir o esquema esperado para resolução e obter o resultado esperado.

Observando-se os dados da pesquisa, foi possível compreender que a divisão revelada nas soluções das crianças está diretamente relacionada aos esquemas de correspondência e distribuição utilizados por elas, pois as mesmas, não têm noção referente ao algoritmo da divisão, devido a sua faixa etária. Assim, as crianças buscaram encontrar soluções utilizando seus próprios recursos e não o que é ensinado nas escolas.

É possível, o professor, ao corrigir criteriosamente a avaliação do seu aluno, identificar os procedimentos presentes nessas soluções para verificar os invariantes operatórios, e a assimilação da criança em relação ao conceito trabalho.

Constatei que, das 152 soluções produzidas pelas crianças, 89 revelavam algum indício de divisão, no sentido de uma distribuição em partes iguais. Ainda assim, em 20 casos (22,6% dos 93), não houve indícios de que as crianças compreendessem o significado do dividendo e a necessidade de utilizá-lo para controlar a quantidade de rodadas de distribuição, ou a quantidade de objetos em cada rodada. Desta forma, elas também não revelaram qualquer compreensão do significado e da função do número de partes. Em outras palavras, foram observadas 16 soluções que revelaram uma noção de divisão limitada à ação de distribuir objetos, sem preocupação com as quantidades envolvidas.

Em 68 soluções, as crianças revelaram uma compreensão mais sofisticada de divisão, que não se limitava à ação de distribuir, mas incluía formas de controle das quantidades envolvidas, ou seja, uma compreensão maior do significado do dividendo e do número de partes. Nesses casos, foi possível inferir que elas utilizaram os esquemas de ação mencionados na literatura (NUNES et al., 2005). Entre essas 68 soluções, três revelaram a dificuldade de compreender a distinção entre número de partes e a quantidade da parte, em problemas de quotas. Em oito soluções relativas a problemas de partição, os registros sugerem que foi utilizado o esquema de distribuição equitativa, tendo sido realizadas várias rodadas de distribuição. Somente em cinco soluções identifiquei o registro do dividendo e das etapas do repartir, estando correta, somente três soluções para os problemas de partição (PO2 e PO4).

Em relação às soluções encontradas pelas crianças para lidar com o resto, foram observadas 54 soluções em que o resto foi excluído ou representado à parte, mostrando que muitas crianças já têm noção de que o resto não pode ser incluído em uma das partes em que o todo foi dividido, pois isso faria com que uma das partes fosse diferente, contrariando a noção de divisão.

Os resultados confirmam o que é defendido por Nunes et al. (2005), de que mesmo as crianças de primeira série, já têm alguns conhecimentos acerca do campo conceitual das estruturas multiplicativas, portanto muito antes desses conhecimentos lhes serem ensinados sistematicamente na escola.

Com a teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1990), é possível perceber que é através das diversas situações que envolvem uma multiplicação ou uma divisão que esses conceitos adquirem sentido para as crianças. E o sentido, de acordo com Vergnaud (1990), é o conjunto de ações e relações que o sujeito recorre para compreender as situações e os significantes, sendo que o domínio desses conceitos acontece por conta delas mesmas, podendo ou não, levar um longo período de tempo. Para tanto, as situações descritas no enunciado do problema facilitam a percepção da criança em relação ao sentido do conceito e, consequentemente, essa situação facilita a aprendizagem do conceito.

A pesquisadora esperava e ainda espera que, a partir desta pesquisa, os professores conheçam a compreensão revelada nas soluções das crianças para os problemas de divisão, e reflitam sobre elas, e havendo possibilidades, promovam um ensino que leve os alunos a desenvolver e conhecer as habilidades necessárias para compreensão desse conceito e dessa disciplina.

Por outro lado, sugiro outros estudos longitudinais para verificar se existe um processo evolutivo na construção da compreensão sobre os termos da divisão, estudos em que as crianças sejam entrevistadas individualmente.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª série)**: matemática/Secretaria de Educação. Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1997.

BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CARVALHO, Mercedes. **Problemas? Mas que Problemas**?: estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula. Rio de Janeiro: Vozes, 2005.

CORREA, Jane. A compreensão intuitiva da criança acerca da divisão partitiva de quantidades contínuas. **Estudos de Psicologia**, Natal, v. 5, n. 1, 2002. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php>. Acesso em: 5 out. 2009.

______. A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. Um estudo de caso. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Natal, v. 9, n. 1, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php>. Acesso em: 24 mar. 2008.

______; MEIRELES, Elisabet de Souza. A compreensão intuitiva da criança acerca da divisão partitiva de quantidades contínuas. **Estudos de Psicologia**, Natal, v. 5, n. 1, 2000. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php>. Acesso em: 24 mar. 2008.

FERREIRA, Sandra Patrícia Ataíde; LAUTERT, Síntria Labres. A tomada de consciência analisada a partir do conceito de divisão. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Porto Alegre, v. 16, n. 3, 2003. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php>. Acesso em: 24 mar. 2008.

INEP. Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. PISA 2006. **Sinopse estatística da Educação Básica:** Brasil, Regiões e Unidades das Federações. Brasília: INEP, 2007. Disponível em: <http: www.inep.gov.br>. Acesso em: 10 mar. 2009.

LAUTERT, Síntria Labres; SPINILLO, Alina Galvão. As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**, Brasília, v. 18, n. 3, 2002. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php>. Acesso em: 10 abr. 2008.

MAGINA, Sandra. **A teoria dos campos conceituais**: contribuições da psicologia para a prática docente. [200-]. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/conf/conf_01.pdf>. Acesso em: 20 out. 2009.

MORO, Maria Lucia Faria. Notações da matemática infantil. Igualar e repartir grandezas na origem das estruturas multiplicativas. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, Porto Alegre, v. 17, n. 2, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php>. Acesso em: 10 abr. 2008.

______. Estruturas multiplicativas e tomada de consciência: repartir para dividir. **Psicologia: Teoria e pesquisa**, Porto Alegre, v. 21, n. 2, 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php>. Acesso em: 10 abr. 2008.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

______; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. **Educação matemática**: os números e as operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança.** Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

______; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança.** Tradução C. M. Oiticica. Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

SELVA, Ana Coelho Vieira. Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas e divisão. In: SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (Orgs.). **A compreensão de conceitos aritméticos**. **Ensino e pesquisa**. Campinas: Papirus, 1998.

VERGNAUD, Gérard. Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação. Tradução Anna Franchi e Dione Luchesi de Carvalho. **Revista do Psychologie Française**, n. 30-3/4, p. 245-252, 1985.

______. **L.enfant, la mathématique et la réalité**. 3. ed. Berne: Peter Lang, 1985.

______. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v. 1, n. 5, p. 76-90, 1986. (Espanhol).

______. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

______. **El niño, las matemáticas y la realidad**: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escula primaria. México: Trillas, 1991.

______. Multiplicative conceptual field: what and why? In: GUERSHON, H.; CONFREY, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

______. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, n. 4, p. 9-19, 1996.

______. Entrevista na Gerárd Vergnaud in Pátio. **Revista Pátio**, Porto Alegre, n. 5, p. 22-26, 1998.

REFERÊNCIAS CONSULTADAS

PESTANA, Maria Inês. **Resultados da Prova Brasil e os desafios para os dirigentes municipais**: desafio evidente, melhorar a qualidade da educação brasileira. Disponível em: <http://www.undime.org.br/htdocs/download.php>. Acesso em: 10 set. 2008.

PIAGET, JEAN; GRÈCO, Pierre. **Aprendizagem e conhecimento.** Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974.

______; INHELDER, B. **O desenvolvimento das quantidades físicas na criança.** Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

APÊNDICE

APÊNDICE A - Quadro das pesquisas com a mesma temática

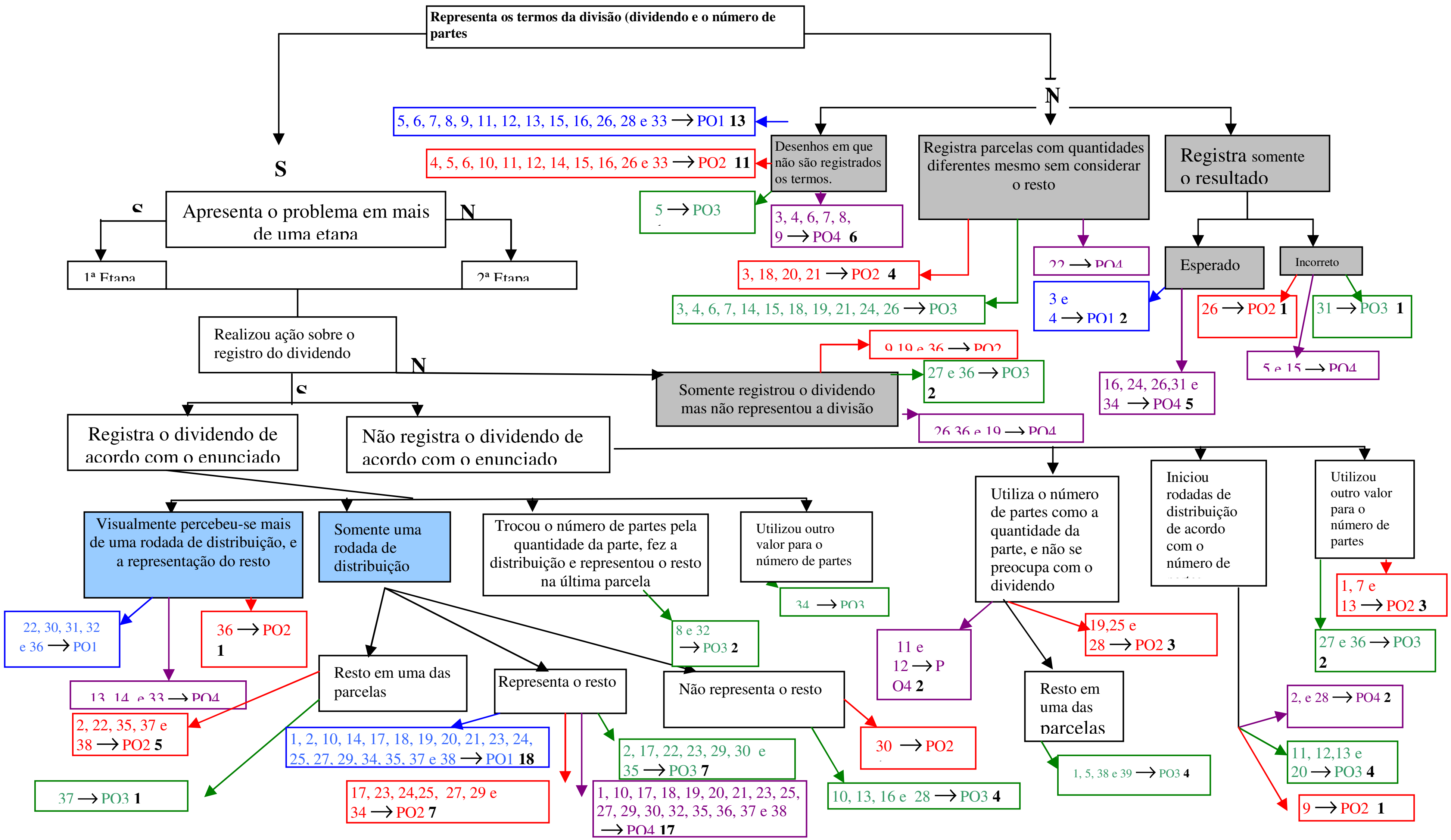
Pesquisas	Sujeitos	Objetivos	Metodologia	Conclusões
Selva (1998). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão.	108 crianças cursando alfabetização, primeira série e segunda série de uma escola particular do Recife.	• Evidenciar a compreensão das crianças sobre a definição de resto da divisão • Analisar a influência que cada tipo de representação (concreta, escrita e mental) pode exercer na compreensão do conceito de divisão.	Após a sondagem, as crianças foram organizadas em três grupos. Para o 1º grupo foram dadas fichas do mesmo tamanho e cor, para o 2º, papel e lápis e para o 3º, não foi oferecido nenhum tipo de material. Foi solicitado que cada criança resolvesse oito problemas de divisão, sendo quatro de partição e quatro de quota.	As crianças tiveram melhor desempenho nos problemas de partição, mas tiveram dificuldades para trabalhar com o resto. Em relação ao uso do material, notou-se que ele é interessante, na medida em que criança desenvolve estratégias mais avançadas, mas deixa de ser interessante para as crianças mais velhas que já têm mais flexibilidade no uso de estratégias com papel e lápis ou cálculo mental.
Lautert e Spinillo, (2002). As relações entre os problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão.	80 crianças com idade entre cinco e nove anos de escolas particulares do Recife.	Investigar o conhecimento matemático de divisão das crianças sob dois aspectos: desempenho em problemas de divisão e concepções sobre a divisão	Problemas de divisão exata, de partição e de quotas foram apresentados oralmente, no primeiro momento. A criança recebeu papel e lápis e foi orientada para resolver da forma que desejasse. No segundo momento, foram feitas entrevistas de natureza clínica, onde se perguntava: "O que é dividir?" para que a criança evidenciasse com um sentido matemático.	As crianças que tinham recebido instruções escolares sobre a divisão tiveram facilidade para resolver os problemas de partição e quota correta-mente. As outras apresentaram dificuldades. As suas definições sobre o que é dividir revelaram: inexistência de significado matemático; significado matemático não associado à divisão; e significado matemático associado diretamente à divisão.

Pesquisas	Sujeitos	Objetivos	Metodologia	Conclusões
Ferreira, Lautert, (2003). A tomada de consciência analisada a partir do conceito de divisão: um estudo de caso	Uma criança do sexo masculino com seis anos e quatro meses, cursando a alfabetização em uma escola particular do Recife	Discutir a tomada de consciência através de um estudo de caso com criança, sob a resolução de problemas de divisão.	Foi solicitado à criança que resolvesse um problema de divisão com duas condições: situação gráfica onde era fornecido à criança papel e lápis e situação concreta onde eram fornecidas fichas e objetos parecidos com os que o problema descrevia. O problema foi lido pelo examinador e a criança deveria representar como quisesse.	Revelaram-se graus diferenciados de tomada de consciência da divisão, e não atingiu a conceituação, ou seja, a concepção de que a divisão remete-se ideia de totalidade e interdependência entre seus termos. A criança recorria a seus esquemas de adição já construídos para resolver o problema de divisão.
Correa (2004) A resolução oral de tarefas de divisão por crianças.	83 crianças com idade aproximada entre seis e nove anos. As crianças frequentavam uma escola pública de Oxford (Reino Unido)	Examinar o desempenho das crianças com diferentes níveis de escolaridade em aritmética na solução oral de problemas de divisão por partição e por quotas e descrever essas estratégias.	Foi apresentada às crianças a situação, na qual certa quantidade de blocos representava a comida que deveria se repartida entre um certo número de ursinhos, e as crianças precisam dizer quantos blocos cada ursinho receberia, individualmente. Foram usados nesse estudo, quatro tamanhos de dividendos (4, 8, 12 e 24) e dois divisores (2 e 4).	O desempenho das crianças variou de acordo com a idade e escolaridade. Os procedimentos de dupla contagem e o uso de fatos multiplicativos apareceram com maior frequência nas situações de divisão por quota, enquanto que os procedimentos baseados em adições repetidas e partição de quantidades apareceram nas situações de divisão por partição. Observou-se também uma pequena porcentagem que utilizou os procedimentos baseados em subtração repetida.

Pesquisas	Sujeitos	Objetivos	Metodologia	Conclusões
Moro (2004) Notações de matemática infantil: igualar e repartir grandezas na origem das estruturas multiplicativas.	12 alunos, com idade entre seis e dez anos, de duas escolas públicas de municípios diferentes, localizados na periferia urbana de duas grandes cidades.	Descrever a natureza e as transformações de notações infantis relativas a tarefas de igualar parcelas e repartir grandezas, destinadas à elaboração de relações aditivas e multiplicativas; Verificar significação das notações produzidas no exame das relações aditivas e as multiplicativas.	Sorteio para composição das tríades, segundo o critério de defasagem ótima. As tarefas (partição e quotição) foram propostas oralmente pelo pesquisador, com situações problema. O material usado consiste em 18 fichas de plástico (mesma cor), uma caixa com uma divisória repartindo em duas metades, dois bonecos, folhas de cartolina e canetas hidrocor.	As crianças que dominavam a divisão em um grau mais avançado, desconheciam os sinais aritméticos para a divisão e as formas canônicas de a expressar . Não apresentaram a tomada de consciência da relação de transformação aditiva de uma grandeza inicial para uma final. A construção das relações aditivas-subtrativas identificadas nas notações mostram a relevância e a complexidade da construção de esquemas de igualar e desigualar parcelas. Fortemente evidenciou-se esquemas de repartir grandezas. As ações de igualar e desigualar, relacionadas ao repartir quantidades numéricas foram centrais neste estudo.
Moro (2005) Estruturas Multiplicativas e tomada de consciência: repartir para dividir.	Seis alunos de primeira e segunda série do ensino fundamental, de aproximadamente sete a oito anos de idade de uma escola pública da região de Curitiba.	• Descrever as concepções das crianças em relação à divisão por partição. • Identificar níveis de tomada de consciência em relação ao conceito de divisão.	Agrupados em tríades, lhes foram oferecidos tarefas com problemas de divisão por partição propostas oralmente pelo pesquisador para solução conjunta dos participantes, de acordo com suas estratégias. Materiais utilizados: fichas de plástico, uma caixa com divisória repartida em duas metades, dois bonecos, folhas de cartolina e canetas hidrocor.	O conceito de divisão está centrada nas concepções pré-aditivas, no repartir em quantidades menores e depois maiores e no distribuir. Os progressos observados na compreensão da divisão por partição de cada criança estão interligados com o "dar-se conta" de esquemas e relações pertinentes ao conceito.

ANEXOS

ANEXO A - Esquema gráfico dos procedimentos de resolução dos problemas



ANEXO B - Termo de autorização para a escola

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ
Centro de Educação de Ciências Humanas e da Comunicação – CECHOM
Curso de Pós-Graduação Stricto Sensu
Programa de Mestrado Acadêmico em Educação – PMAE

Navegantes, 02 de março de 2008.

Prezado Diretor Roberto Nicolodi.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Solicitamos sua autorização para aplicar o instrumento de pesquisa com quatro problemas de divisão (em anexo), com os alunos das primeiras e segundas séries da Escola Profª Maria Ivone Muller dos Santos, para realização da pesquisa: O CONHECIMENTO DOS ALUNOS DAS SÉRIES INICIAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA (EB) SOBRE O CONCEITO MATEMÁTICO DE DIVISÃO, cujo objetivo principal é conhecer como se estabelece o conceito matemático de divisão, para os alunos das séries iniciais da Educação Básica. A aplicação do instrumento de pesquisa será realizada pela pesquisadora mestranda Josiane Elias Nicolodi, nas salas de aulas, durante o horário letivo, não se estendendo por mais de trinta minutos e será garantido o sigilo de todas as informações prestadas pelos participantes.

Contamos com sua compreensão!

Josiane Elias Nicolodi
Pesquisadora **Orientador**

ANEXO C - Formulário de problemas de divisão

OBS: Não precisa colocar nome.
Código: 01

EXERCÍCIOS

Problema 1: "Um amigo meu chegou em casa morrendo de fome e fez dois sanduíches de pão, presunto e queijo. Quando ele ia dar a primeira mordida, chegaram três amigos seus. Não tinha mais pão, presunto e queijo. O que você faria se estivesse no lugar dele?"

Problema 2: Pedro havia comprado 16 carrinhos e tinha 5 caixinhas. Ele queria colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixinhas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixinha?

Problema 3: Marta tinha 19 doces e queria colocar 6 doces em cada bandeja. Quantas bandejas serão necessárias?

Problema 4: Júlia tem 6 bombons e quer dividir entre 3 amigas. Quantos bombons cada amiga vai ganhar?

ANEXO D - Termo de autorização para os pais

UNIVERSIDADE DO VALE DO ITAJAÍ
Centro de Educação de Ciências Humanas e da Comunicação – CECHOM
Curso de Pós-Graduação Stricto Sensu
Programa de Mestrado Acadêmico em Educação – PMAE

Navegantes, 23 de março de 2008.

Prezados Pais.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Estamos realizando uma pesquisa sobre o conhecimento dos alunos das séries iniciais da educação básica sobre o conceito matemático de divisão, com o consentimento da direção desta escola e gostaríamos que seu filho participasse resolvendo quatro problemas de divisão durante o horário letivo e será garantido o sigilo de todas as informações prestadas pelos participantes. Essa pesquisa é sem fins lucrativos, visando entender o processo de aprendizagem das crianças.

Solicitamos sua autorização!

( ) Sim ( ) Não

Agradecemos sua atenção!

Josiane Elias Nicolodi
Pesquisadora

Orientador

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo