

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
*campus* de Rio Claro

***PROPRIEDADES DE TRANSPORTE, CAOS E DISSIPACÃO NUM  
SISTEMA DINÂMICO NÃO LINEAR***

Celso Vieira Abud

Orientador Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós - Graduação em Física - Área de Concentração em Física Aplicada, para obtenção do título de Mestre em Física.

Rio Claro (SP)  
2010

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



# Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (orientador)  
IGCE - UNESP RIO CLARO (SP)

Prof. Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau  
INPE - São José dos Campos (SP)

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas  
IF - USP - São Paulo (SP)

Celso Vieira Abud  
CANDIDATO

Rio Claro, 19 de fevereiro de 2010.

Resultado: APROVADO

À todos aqueles que contribuíram  
para a finalização deste trabalho

---

# Agradecimentos

Primeiramente aos meus pais Antônio e Conceição pelo carinho e apoio incontestável durante todas as decisões que tomei na minha vida. Ao meu super irmão Felipe, pela super amizade e pelos momentos de diversão.

À minha namorada Denise, pelo companheirismo, carinho, amizade e simplesmente pela paciência em aturar minhas impetulâncias durante a escrita desta dissertação.

Ao Ricardo Egydio, pela orientação e respeito às minhas opiniões.

Aos professores que contribuíram para minha formação.

Aos meus colegas de laboratório, por tornarem este período árduo mais divertido.

Por fim, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP (processo número 2007/57992-4) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro.

”O que importa não é o homem que critica ou aquele que aponta como o bravo tropeçou...  
Importante, em verdade, é o homem que está na arena,  
com a face coberta de poeira, suor e sangue;  
que luta com bravura, erra e, seguidamente, tenta atingir o alvo.  
É aquele que, no sucesso, melhor conhece o triunfo final dos grandes feitos e que, se fracassa, pelo menos falha com ousadia, de modo que o seu lugar jamais será entre as almas tímidas, que não conhecem nem a vitória, nem a derrota.”

---

**Theodore Roosevelt (1858 - 1919)**

# Resumo

**Abud, C. V.**, Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2010.

Procuramos nesta dissertação, entender e desenvolver estudos relacionados com o movimento de trajetórias caóticas num sistema dinâmico não linear. Esses estudos, envolvem uma abordagem sobre a quantificação de recorrências de trajetórias à uma região e sobre o transporte no espaço de fases. Nós escolhemos como modelo o bilhar anular em duas configurações: primeiramente com as fronteiras estáticas e posteriormente, uma dependência temporal (*pulsante*) é introduzida. Inicialmente reproduzimos os resultados sobre aprisionamentos para caso do bilhar estático, existentes na literatura, a fim de ganharmos experiência para estudar o sistema pulsante. Nesse caso, a topologia dos dois planos de fases possíveis constituídos de variáveis canônicas, apesar de bastante complexas, apresentaram resultados interessantes. Os principais resultados obtidos foram: a observação de regiões de aprisionamentos nos dois planos de fases conectadas entre si; a aceleração de Fermi caracterizada por vários regimes anômalos; ( uma explicação para a diferença desses regimes é dada por aprisionamentos no plano do bilhar) e a evolução do espaço de fases, dito *geométrico*, que tende a se recuperar conforme a velocidade relativa partícula-fronteira aumenta. Estudamos ainda os efeitos de dissipação no sistema pulsante através de colisões inelásticas. Os resultados indicam que qualquer dissipação desse tipo, independente da magnitude, é suficiente para saturar o crescimento de energia. Porém, em situações especiais essa mesma dissipação pode ser usada para que na média o sistema ganhe energia.

**Palavras chaves:** tempo de recorrência de Poincaré, estatística dos tempos de recorrência, bilhar anular, aceleração de Fermi, dissipação.

# Abstract

**Abud, C. V.**, Master Dissertation, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2010.

We reach in this dissertation, understand and develop studies related to the motion of the chaotic trajectories in a non-linear dynamical system. These studies require an approach on the quantification of the recurrences of trajectories to a region and on the transport in the phase space. We choose as a model the annular billiard with two configurations: firstly with the static boundaries and next, a time-dependent (*pulsating*) is introduced. Initially we reproduced some results about stickiness in the static case in order to gain experience to study the pulsating system. In such case the topology of the two possible phase space of canonical variables, showed interesting results. The main results were: the observation of sticky regions in both connected phase spaces; the Fermi acceleration characterized by different anomalous regimes ( an explanation to this diferent regimes is given by the stickiness on the billiard plane) and the evolution of the phase space, called *geometric*, which tends to be recovered as the relative velocity particle-boundary increases. We also studied the effects of dissipation in the pulsating system through inelastic collisions. The results show that this kind of dissipation, regardless of its magnitude, is enough to saturate the energy growth. However, in special situations the mean average of the system can increase with the introduction of inelastic collisions.

**Keywords:** Poincaré recurrence time, recurrence time statistic, annular billiard, Fermi acceleration, dissipation.

## Lista de siglas e principais variáveis

**WGO** - Whispering Gallery Orbits

**MUPO** - Marginally unstable periodic orbit.

**DTR** - Distribuição dos tempos de recorrência,  $P(T)$ .

**ETR** - Estatística dos tempos de recorrência,  $\rho(\tau)$ .

**BAE** - Bilhar anular estático.

**BAP** - Bilhar anular pulsante.

**TA** - Transporte anômalo.

**AF** - Aceleração de Fermi.

$\gamma$  - Expoente de decaimento do tipo lei de potência para o **ETR**.

$\beta$  - Expoente do transporte anômalo para o crescimento do desvio quadrático médio.

$\nu$  - Expoente do crescimento da energia média.

$f_l$  - Fração de órbitas laminares.  $e$  - Coeficiente de dissipação.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivações a partir de resultados anteriores . . . . .	4
1.2	Bilhares . . . . .	5
1.3	O espaço de fases e suas propriedades . . . . .	6
1.3.1	Mapa e seção de Poincaré . . . . .	6
1.3.2	Noções básicas sobre a dinâmica caótica . . . . .	6
1.3.3	Zonas singulares . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Recorrência</b>	<b>9</b>
2.1	Recorrência de Poincaré . . . . .	9
2.2	Estatística dos tempos de recorrência . . . . .	11
2.2.1	Armadilhas dinâmicas . . . . .	13
2.2.2	O cálculo numérico para a ETR . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Aprisionamentos no bilhar anular</b>	<b>17</b>
3.1	O bilhar anular estático . . . . .	17
3.1.1	Órbitas periódicas marginalmente instáveis: MUPOs . . . . .	20
3.1.2	Expoente $\gamma = 2$ para MUPOs . . . . .	23
3.1.3	Expoente $\gamma < 2$ para espaços de fases mistos . . . . .	25
3.2	O bilhar anular pulsante . . . . .	27
3.2.1	O aprisionamento no caso concêntrico . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Aprisionamento e difusão</b>	<b>39</b>
4.1	Transporte anômalo no espaço dos momentos . . . . .	39
4.2	Órbitas laminares . . . . .	42
4.3	Supressão da AF via propriedades dinâmicas . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Dissipação</b>	<b>53</b>
5.1	Supressão da AF por colisões inelásticas . . . . .	53
5.2	O ganho de energia induzido por crise . . . . .	54

<i>SUMÁRIO</i>	ix
<b>6 Conclusões</b>	<b>61</b>
6.1 Resumo . . . . .	61
6.2 Lista de resultados . . . . .	62
<b>Apêndice</b>	<b>64</b>
<b>A Mapas</b>	<b>65</b>
A.1 Mapa para o bilhar anular estático . . . . .	65
A.2 Mapa para o bilhar anular pulsante . . . . .	67
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>73</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A existência do movimento caótico foi observada por Henry Poincaré (1854-1912) no final do século XIX no famoso problema de três corpos [1] que, posteriormente, foi fortalecido pelas contribuições de G. D. Birkhoff (1884-1944) à teoria ergódica e fundamentos da mecânica estatística [2]. Nota-se porém que os trabalhos desenvolvidos para sistemas dinâmicos permaneceram isolados até meados do século XX, devido a dificuldade do tratamento analítico sob as equações não lineares. Foi a partir de 1970, devido ao desenvolvimento de computadores, que o movimento caótico foi estabelecido como uma propriedade geral de sistemas dinâmicos não-lineares e caracterizado pela sensibilidade que as trajetórias possuem às ligeiras modificações das condições iniciais, ou seja: trajetórias próximas divergem uma das outras, exponencialmente, no tempo. Apesar dos importantes resultados obtidos entre o trabalho de Poincaré e a invenção dos computadores, a possibilidade de investigar fenômenos não lineares através de métodos numéricos extraordinariamente rápidos revela-se, a cada trabalho, um campo fascinante.

Hoje em dia, sabe-se, por exemplo, que os sistemas Hamiltonianos <sup>1</sup> não são nem completamente caóticos nem puramente regulares, exibindo na maioria das vezes ambos os tipos de movimentos. Sendo assim, na maioria das vezes, a dinâmica exibe diversas cadeias de ilhas que dividem espaço com um mar estocástico (*mar de caos*) no espaço de fases. Tais ilhas por sua vez, são principalmente quase-periódicas e as trajetórias dentro destas ilhas são isoladas do domínio externo. Um fato importante é o comportamento que as trajetórias caóticas possuem nas proximidades das ilhas regulares: elas gastam **longos** e **consecutivos** períodos de tempo antes de visitar outras partes do espaço de fases. Este fenômeno bem conhecido, mas nem sempre bem entendido, é denominado aprisionamento (do inglês *stickiness*). É de suma importância dizer que devido à ergodicidade para tempos longos do mar de caos, uma trajetória não gasta mais tempo próxima às ilhas do que em outras regiões de igual volume do espaço de fases. Entretanto, a ergodicidade não

---

<sup>1</sup>Sistemas Hamiltonianos são sistemas de equações diferenciais na forma de equações de Hamilton:  $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$  e  $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ , com  $H = T_{cinetica} + V_{potencial}$

assegura nenhuma informação sobre a frequência, na qual as trajetórias visitam tal região, enquanto o efeito de aprisionamento é justamente caracterizado pelo caráter recorrente. O retorno de uma trajetória para a vizinhança de sua condição inicial é uma propriedade fundamental de trajetórias no espaço de fases e foi estudada, a partir do teorema de recorrência de Poincaré [3, 4] de 1890, caracterizada pelos tempos de recorrência ou de retornos, que constituem de boas informações para se quantificar os aprisionamentos (capítulo 2).

O fenômeno de aprisionamento é atribuído simplesmente devido à existência de *Cantoros* ao redor de uma região. *Cantoros* são conjuntos de cantor [5] formados nas regiões onde existiam os toros. Tais conjuntos ocorrem devido à natureza hierárquica da destruição dos toros frente à ação de perturbações (primeiro os racionais e depois os irracionais) e são constituídos por buracos sobre os antigos toros. Os *Cantoros* possuem dimensão fracionária e sua presença no mar de caos constitui um espécie de barreira parcial para o movimento da partícula.

O efeito topológico causado por trajetórias aprisionadas é analisado em diversos ramos da física tais como: astronomia [6], plasmas [7, 8], nano-física [9] entre outros. Quando o efeito de aprisionamento ocorre em uma determinada região do espaço de fases entendemos que há uma armadilha dinâmica.

Não há uma classificação bem conhecida para as armadilhas dinâmicas. De um modo geral, qualquer contorno ou conjunto dentro do espaço de fases pode representar este papel. Porém, algumas descrições qualitativas sobre armadilhas, tais como: ilhas *tangle*, hierarquia de ilhas, camada estocástica e armadilha em rede, são conhecidas e relacionadas com problemas de aprisionamento e transporte [10, 11].

O aprisionamento de trajetórias no espaço de fases têm total influência sobre as quantificações da dinâmica caótica, especialmente, no que diz respeito ao *transporte*. O transporte refere-se à dispersão de trajetórias caóticas e é frequentemente caracterizado pelo desvio quadrático médio (segundo momento) de uma variável  $r$  pertencente a um espaço de fases ilimitado. Devido à natureza hierárquica (mar de caos + ilhas) do espaço de fases de sistemas Hamiltonianos, a evolução temporal da dispersão  $\langle \Delta r^2 \rangle$  não é dada linearmente com o tempo (capítulo 4).

Muitos sistemas foram arduamente estudados com o intuito de observar o fenômeno de aprisionamento e uma possível conexão com o transporte. Os mais frequentes são mapas com preservação de área [12], embora algo tenha sido feito considerando dissipações [13], e bilhares com plano <sup>2</sup>[14] ou horizonte infinito <sup>3</sup>[15, 16]. Alguns destes sistemas conduzem ao transporte anômalo (TA) isto é, ao crescimento não linear do desvio quadrático médio

---

<sup>2</sup>Como um exemplo mais conhecido temos o bilhar de Sinai estendido por todo o plano conhecido como gás de Lorentz.

<sup>3</sup>Feito juntando-se bilhares iguais ou diferentes, através de um orifício, ao longo de um único eixo.

de alguma observável para um *ensemble* de condições iniciais.

## *A Aceleração de Fermi*

Em 1949 E. Fermi [17] apresentou um estudo sobre a origem da radiação cósmica e dos processos de aceleração que as partículas são submetidas. Este trabalho fundamentou-se na hipótese de que partículas cósmicas são aceleradas devido aos campos magnéticos oscilantes, presentes em todo o espaço interestelar. Fermi sugeriu que a interação entre tais partículas e os campos cósmicos fossem representados por sucessivas reflexões de uma partícula em obstáculos de massa infinita, movendo-se desordenadamente.

Posteriormente, a representação proposta por Fermi mostrou-se consistente sob o enfoque da teoria de sistemas dinâmicos não lineares discretos [18], principalmente em modelos de bilhares com fronteiras dependentes do tempo. A questão fundamental neste tipo de estudo é saber se a aceleração de Fermi (**AF**) é observada, isto é, se a partícula ganha energia indefinidamente e, caso isso se confirme, temos um mecanismo físico de aceleração de partículas suficientemente eficaz ao ponto de aumentar sua energia ilimitadamente. Este fenômeno pode ser considerado anômalo sob o fato de que o crescimento da energia ( obtida realizando médias sobre as velocidades de um “*ensemble*” de condições iniciais) pode acontecer não linearmente com o tempo.

Neste contexto, nós estudamos o modelo do bilhar anular em duas configurações: a primeira com as fronteiras estáticas e depois com uma dependência temporal (*pulsante*) sendo que em ambas as situações a configuração dos círculos que formam o bilhar anular podem estar dispostos concentricamente ou excentricamente. O objetivo principal deste estudo é analisar e compreender a ocorrência de armadilhas dinâmicas em ambos os casos e as suas diversas influências nas propriedades de transporte no espaço de fases. Para finalizar o conteúdo nós adicionamos também um efeito dissipativo causado por colisões inelásticas entre a partícula e as fronteiras. Os efeitos dissipativos têm recebido grande atenção em diferentes campos da ciência. Alguns trabalhos reportam sobre a minimização ou eliminação dos efeitos dissipativos [19, 20], enquanto outros tiram vantagens de sua presença [21, 22]. Diferentes abordagens para os efeitos dissipativos em bilhares, foram estudadas em [29, 23, 24]

A seção posterior, apresenta a motivação dessa dissertação como uma consequência de trabalhos desenvolvido anteriormente. As seções 1.2 e 1.3, abordam de uma maneira geral sobre o que são bilhares e a visualização da dinâmica completa por um espaço de configuração, respectivamente. O capítulo 2 trata da idéia por trás de estudos envolvendo recorrências bem como a apresentação de uma ferramenta para quantificarmos fenômenos de aprisionamento. Os capítulos 3 e 4 apresentam resultados originais obtidos da análise de propriedades de aprisionamento e transporte no bilhar anular estático e pulsante. Os efeitos de dissipação é abordado no capítulo 5. As conclusões sobre nosso trabalho está

sumarizada no capítulo 6. No apêndice A os leitores encontrarão o mapeamento completo dos dois modelos considerados nesta tese.

## 1.1 Motivações a partir de resultados anteriores

Este trabalho apresenta-se como uma continuidade aos trabalhos desenvolvidos pelo nosso grupo nos últimos anos. O principal interesse está em compreender e analisar a complexidade de sistemas dinâmicos não-lineares.

Um dos sistemas dinâmicos desenvolvido pelo grupo foi o bilhar anular com fronteiras dependentes do tempo [25, 26, 27]. Tal sistema foi proposto inicialmente com a finalidade de verificar a aplicabilidade da conjectura **LRA** (Loskutov-Ryabov-Akinshin) que diz que se um bilhar bi-dimensional estático, apresenta uma parte caótica no espaço de fases, isso é suficiente para afirmar que ao acrescentar perturbações periódicas em sua(s) fronteira(s) o fenômeno da aceleração de Fermi seja observado [28]. Mesmo com uma quantidade grande de parâmetros que poderiam ser modificados, os resultados apresentados pelo trabalho seguiram tal conjectura.

Uma vez estabelecido o modelo, em outro estudo foi abordado os efeitos de dissipação causado por colisões inelásticas da partícula com a fronteira [29]. Como resultado principal, nós apontamos a possibilidade de adquirir um ganho de energia médio através de fracas dissipações no sistema. Este ganho está vinculado à posição de atratores em regiões do espaço de fases de maior energia do que a média do sistema conservativo.

Outro recente trabalho que nos motivou foi desenvolvido em [30] onde os autores identificaram uma variedade de órbitas periódicas imersas no mar de caos que contribuem para o aprisionamento das trajetórias no bilhar anular estático simplesmente entre as regiões integráveis e não-integráveis do espaço de fases (seção 3.1 e sub-seção 3.1.1).

O principal objetivo deste trabalho será estudar as propriedades dinâmicas do bilhar anular para as duas configurações: estática e dependente do tempo. Para o bilhar anular estático, nós revisaremos os aprisionamentos devido a uma classe particular de órbitas periódicas imersas no mar de caos. A configuração com fronteiras dependentes do tempo apresenta uma riqueza maior de detalhes, especialmente pelo fato da dinâmica do sistema evoluir em  $N = 4$  dimensões, originário de dois planos canonicamente conjugados. Neste caso, o aprisionamento de órbitas próximas às ilhas de regularidade e o transporte (aceleração de Fermi), serão analisados. Como complemento, nós avaliaremos os efeitos dissipativos sob a aceleração de Fermi observada no bilhar anular dependente do tempo e também sob a topologia do espaço de fases, quando considerarmos uma magnitude de dissipação mais alta.

## 1.2 Bilhares

Bilhares são sistemas dinâmicos onde uma partícula pontual tem seu movimento limitado em uma determinada região  $A$  por uma fronteira  $\partial A$  (veja figura 1.1). As fronteiras geralmente são paredes de potencial infinito ( $V_{fronteira} = \infty$ ) que podem adquirir diversas formas: retangular, circular, ovóide, elíptica, entre outras, definindo um sistema Hamiltoniano:  $H = p^2/2m + V$ .

Para sistemas no qual a energia é conservada, a partícula ao colidir com a fronteira sofre uma reflexão especular isto é, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, portanto, as sequências de reflexões formam um mapa que descreve o movimento da partícula. Em um sistema genérico com  $N = 2$  graus de liberdade, o estado do sistema fica completamente caracterizado pelas coordenadas de posição  $(x, y)$  e os *momentum*  $(p_x, p_y)$  ou seja, quatro dimensões. Como a trajetória só se altera no momento das colisões com a fronteira, as coordenadas de *Birkhoff*  $(s, \text{sen}(\alpha))$  são convenientes [31]. A coordenada  $s$  é relacionada a fronteira que localiza a posição de uma colisão, enquanto  $\alpha$  fornece a direção do movimento. Assim, dada uma condição inicial identificada pelo par  $(s_0, \text{sen}(\alpha_0))$  o problema consiste em encontrar os pares  $(s_n, \text{sen}(\alpha_n))$  com  $n=1,2,3,\dots$  que representará a órbita da partícula.

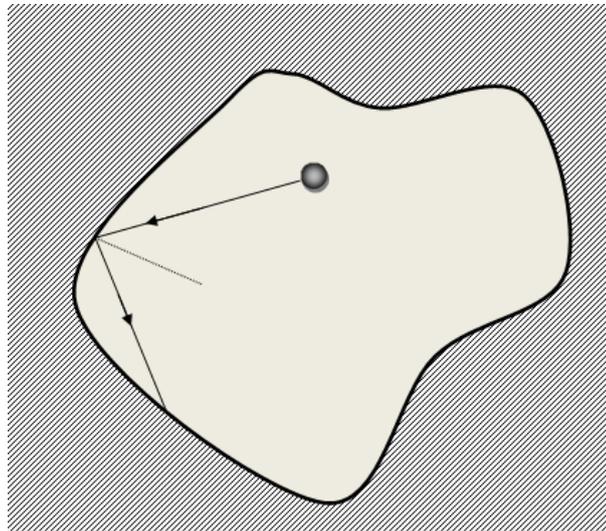


Figura 1.1: Ilustração do movimento de uma partícula no plano de um bilhar

## 1.3 O espaço de fases e suas propriedades

### 1.3.1 Mapa e seção de Poincaré

Em sistemas dinâmicos, o estudo da evolução das trajetórias pode ser feito através de uma hipersuperfície  $\Omega$  transversal ao fluxo dessas trajetórias, denominada seção de Poincaré. A cada passagem po  $\Omega$ , defini-se um ponto. A dinâmica discreta relacionando esses pontos é governada por uma mapa, denominado mapa de Poincaré, isto é, os conjuntos de pontos  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  que interceptam  $\Omega$  geram o mapa:

$$(p_{n+1}, q_{n+1}) = \hat{T}(p_n, q_n).$$

Caso a dinâmica desenvolvida pelo conjunto  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  seja quasi-periódica, ela será representada na seção de Poincaré por uma curva ou *toro invariante*, enquanto a dinâmica caótica é observada por pontos randomicamente distribuídos (*mar de caos*).

### 1.3.2 Noções básicas sobre a dinâmica caótica

Nesta seção, descreveremos algumas noções básicas sobre o espaço de fases, que apesar de hoje em dia serem muito bem compreendidas, merecem destaque:

**Ergodicidade:** Um espaço de fases é dito ergódico quando para tempos longos, uma trajetória típica visita volumes  $(\mu)$  iguais em tempos iguais. A igualdade entre as médias no tempo e as médias no espaço pode ser formulada como:

$$\bar{f}(x(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x(\tau)) d\tau = \int_{\Omega} f(x(t)) d\mu = \langle f(x(t)) \rangle. \quad (1.1)$$

onde  $f$  é uma função do espaço de fases, e  $\langle \cdot \rangle$  simboliza média no espaço e  $\bar{(\cdot)}$  a média no tempo

**Preservação de volumes espaço de fases:** Segundo o teorema de Liouville, para sistemas conservativos, os volumes encerrados pelas trajetórias no espaço de fases são conservados.

$$\mu(\Omega)_T = \mu(\Omega)_0 = cte, \quad (1.2)$$

onde  $\mu$  é chamada medida de Liouville e pode obter valores maiores ou igual a zero.

Ao conjunto  $A \in \Omega$  no qual  $\mu(A) > 0$ , dizemos que possui medida positiva de Liouville e portanto delimita um volume no espaço de fases. Nesta definição encaixam-se o mar de caos e também as ilhas. No mar de caos, uma única trajetória preenche uniformemente

o espaço de fases acessível, o que significa dizer que a medida de Liouville é positiva e a dinâmica associada é ergódica. Para trajetórias quase periódicas, que são representadas por toros no espaço de fases formando ilhas, uma medida pode ser definida como uma função delta do espaço de fases  $\Omega$ . Sendo assim, a integral sobre todas as funções deltas, possui uma medida positiva de Liouville que corresponde ao volume da ilha.

Ao contrário dos casos anteriores, o conjunto de medida zero não delimita volume no espaço de fases. Estas medidas zero são frequentes em espaço de fases gerados por bilhares. O caso mais simples são as órbitas que batem perpendicularmente entre as fronteiras do bilhar (veja seção 3.1.1).

**Invariante de Movimento:** Uma função  $G(p, q, t)$  é uma invariante de movimento se:

$$\frac{dG}{dt} = 0 = \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t} \quad (1.3)$$

onde  $\{ \}$  definem os colchetes de Poisson. Quando  $H$  não depende do tempo,  $G$  é dita invariante de movimento se  $\{G, H\}=0$ .

Uma consequência direta da existência de invariantes de movimento é a redução da dimensão da dinâmica do sistema, ou seja, se existem  $M$  invariantes e  $N$  graus de liberdade então, o movimento da dinâmica ocorre em  $(2N - M)$  dimensões.

### 1.3.3 Zonas singulares

A principal característica de sistemas Hamiltonianos é a não uniformidade do espaço de fases onde algumas ilhas regulares de diversas origens (ressonâncias, bifurcações e etc), contrastam com a existência de um mar de caos tornando-o repleto de domínios de aprisionamento que chamaremos de zonas singulares. As zonas singulares podem ser de diferentes tamanhos ou formas e embora muitas delas possam ser pequenas ou até mesmo invisíveis, suas considerações são inevitáveis para a teoria, influenciando diretamente na cinética e no transporte.

Durante décadas de estudos envolvendo caos e dinâmica não linear foram apresentados diversos tipos de domínios de ilhas, relacionados com o fenômeno de aprisionamento que a princípio pode ser observado através da constatação de regiões mais densas no espaço de fases, indicando um domínio onde a trajetória gasta muito mais tempo (veja por exemplo as figura 3.13 e 3.20(b)). Observou-se que tal fenômeno aparecia devido a existência de *cantors* próximo às ilhas de estabilidade. Recentemente, alguns estudos relacionaram os aprisionamento de trajetórias também à existência de órbitas periódicas instáveis imersas no mar de caos, observadas por manchas de linhas retas no espaço de fases [32] e também ao longo das variedades que compõem os espaços de fases [33, 34] .



# Capítulo 2

## Recorrência

O caráter recorrente das trajetórias no espaço de fases, apresentado neste capítulo, é conhecida como recorrência de Poincaré. Mostraremos através da definição dos tempos de recorrência, que uma interessante conexão com o fenômeno de aprisionamento bem como a utilização de algumas ferramentas estatísticas para caracterizá-la.

### 2.1 Recorrência de Poincaré

A recorrência de Poincaré, ou simplesmente recorrência, é uma propriedade fundamental de sistemas Hamiltonianos no que diz respeito às visitas repetidas de trajetórias a uma determinada região. Pelo teorema de Poincaré [3, 4], em sistemas Hamiltonianos confinados, seja  $\mathbf{A} \in \Omega$  um conjunto tal que,  $\mu(\mathbf{A}) > 0$ , para quase todas as trajetórias  $\omega \in \mathbf{A}$  (exceto aquelas de medida zero), existe um tempo  $T$  na qual:  $M_T\omega \in \mathbf{A}$ , isto é, a trajetória retornará repetidas vezes à vizinhança de sua condição inicial (veja figura 2.1). Para sistemas dinâmicos,  $\Omega$  representa o espaço de fases e  $M$  a dinâmica que rege este espaço.

O resultado de Poincaré tornou-se mais conhecido pela comunidade física devido aos debates entre Boltzman e Zermello, envolvendo a descrição da mecânica estatística para a termodinâmica. Os argumentos de Ernest Zermelo (1871-1953), em resumo, dizem

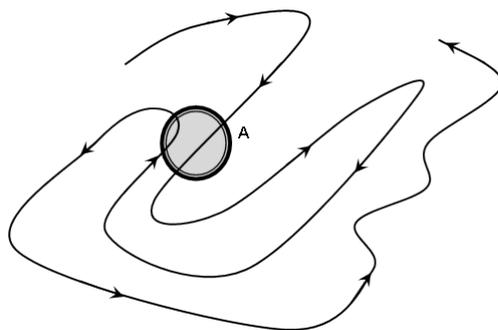


Figura 2.1: Recorrência de Poincaré para uma região  $\mathbf{A}$  do espaço de fases.

que [35]: se um sistema termodinâmico é descrito através de propriedades estatísticas das partículas, um infinito número de retornos próximos às condições iniciais serão observados de acordo com o teorema de recorrência de Poincaré. Uma vez que, a recorrência no espaço de fases implica também na recorrência de todas os observáveis possíveis, espera-se portanto, o retorno do valor da entropia em seu estado inicial o que contraria a segunda lei da termodinâmica, que estipula o crescimento monotônico da entropia com o tempo. Boltzman, por sua vez, argumentou que a probabilidade de uma recorrência acontecer em um sistema termodinâmico (muitas partículas) é muito pequena. Seu resultado apontou que o tempo médio de recorrência para um sistema termodinâmico é enorme, de fato, muitas vezes maior do que a idade do universo [36]. A resposta de Boltzmann foi direta e irônica [37]: “embora o teorema de Poincaré seja correto, quando o senhor Zermelo concluiu que as hipóteses da teoria dos gases devem ser rejeitadas ou mudadas nos seus fundamentos - a partir de um fato teórico de que os estados iniciais de um gás devem recorrer, sem ter calculado o tempo que isto irá acontecer - ele se iguala a um jogador de dados que verifica que a possibilidade de uma sequência de 1000 números 1 não é zero e concluiu que seu dado deveria estar viciado pois ele nunca observou este tipo de sequência.”

A solução de Boltzman admite a violação da segunda lei da termodinâmica, mas argumenta que ela é estatisticamente improvável, ressaltando a importância do cálculo do tempo médio de recorrência. Para sistemas caóticos de baixa dimensão, ao contrário dos sistemas termodinâmicos, o tempo médio de recorrência não são tão longos de forma que nenhuma contradição existe com relação às recorrências de Poincaré.

Vamos definir alguns intervalos característicos relacionados com as recorrências, os quais irão nos auxiliar no decorrer deste trabalho: Sendo  $\{t^-\}$  o instante de tempo quando a trajetória sai do domínio  $\mathbf{A}$  e  $\{t^+\}$  o instante em que a trajetória entra em  $\mathbf{A}$ . Os intervalos:

$$\{T_i^{(fora)}\}_A = \{t^+ - t^-\}_A, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

são os tempos que uma trajetória gasta fora do domínio  $\mathbf{A}$ . O sub-índice  $i$  é colocado para diferenciar a quantidade de eventos ocorridos. Analogamente, podemos obter os intervalos entre a entrada em  $\mathbf{A}$  e a saída de  $\mathbf{A}$ , ou seja, o tempo gasto por uma trajetória para que ela escape do domínio  $\mathbf{A}$ :

$$\{T_i^{(escape)}\}_A = \{t^- - t^+\}_A, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Uma representação didática dos dois eventos (equações 2.1 e 2.2) através de um domínio  $\mathbf{A}$ , que chamaremos de região de recorrência (ou retorno), pode ser vista na figura 2.2.

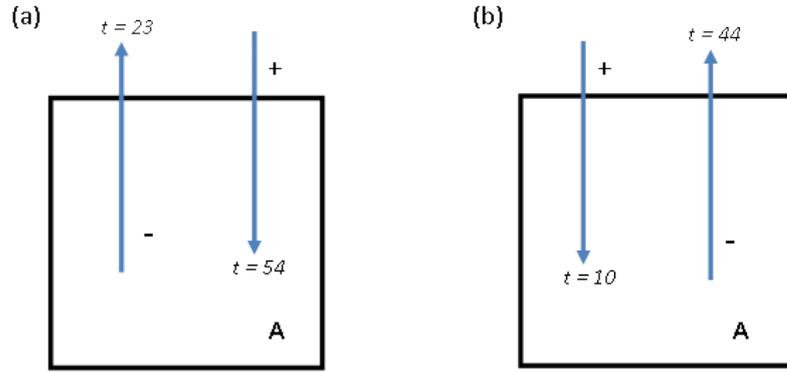


Figura 2.2: Ilustrações dos eventos apresentados pelas equações 2.1 em (a) e 2.2 em (b). As setas com os sinais + ou -, indicam respectivamente o tempo em que uma entrada ou uma saída ocorreu. Portanto em (a) temos  $T_1^{fora} = t_{54} - t_{23} = t_{31}$  o tempo em que a trajetória gastou fora da região **A** e (b)  $T_1^{(escape)} = t_{44} - t_{10} = t_{34}$  o tempo que a trajetória passou dentro de **A**

O uso dos eventos citados anteriormente, dependem de como e onde a região de recorrência **A** é escolhida, bem como onde as condições iniciais são dadas; falaremos com mais detalhes sobre estas escolhas nas próximas seções.

Uma conexão com o fenômeno de aprisionamento torna-se evidente considerando o procedimento: seja no espaço de fases  $\Omega$ , uma região de recorrência  $A \in E$ , onde  $E$  é a componente caótica (mar de caos). Iterando uma condição inicial dentro de  $A$  e considerando o tempo ( $T_A^{fora}$ ) entre a saída e o retorno da trajetória em  $A$ , a recorrência de Poincaré afirma que esse processo ocorrerá repetidas vezes, formando uma sequência de tempos de recorrência como na equação 2.1:  $T_i = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ . Logo, quando uma trajetória é aprisionada em uma zona singular do espaço de fases, teremos  $T_i$  muito grande.

## 2.2 Estatística dos tempos de recorrência

Considerando o teorema de Poincaré, teremos para longos períodos uma sequência de tempos de recorrência para uma região **A** dada por  $T_i = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}_A$  para  $n \rightarrow \infty$ . Sendo  $T_i$  uma variável contínua, podemos definir uma função de densidade de probabilidade  $P(T)$ . Assim,  $P(T)dT$  é a probabilidade de encontrarmos um tempo de recorrência  $T_k$  entre  $T_i$  e  $T_i + dT_i$ . A função  $P(T)$  é conhecida como *distribuição dos tempos de recorrência* (DTR) e satisfaz duas condições:

(i) normalização

$$\int_0^{\infty} P(T)dT = 1, \quad (2.3)$$

(ii) lema de Kac

$$\langle T \rangle = \int_0^{\infty} TP(T)dT = 1/\mu(A). \quad (2.4)$$

onde  $\mu(A)$  é a medida (volume) da região de recorrência.

O lema obtido por Kac seguindo os resultados de Smoluchowski e publicado originalmente em [38], é considerado um dos mais relevantes resultados obtido em estudos envolvendo recorrência. Seu resultado, diz respeito ao tempo médio ou primeiro momento da distribuição de recorrências durante um intervalo de tempo muito grande e sua importância decorre das interpretações sobre a equação (2.4). Primeiramente, a equação 2.4 implica na presença de uma média finita para os tempos de recorrência. Além disso, o lema de Kac pode ser interpretado como uma consequência da ergodicidade (equação 1.1), ou seja, dizer que a probabilidade de encontrar uma trajetória na região  $\mathbf{A}$  é igual ao inverso de  $\langle T \rangle$ , é semelhante em apontar que uma trajetória gasta em média tempos iguais em volumes iguais da componente caótica (mar de caos) do espaço de fases. Desta forma o significado do tempo de recorrência fica unicamente definido pela medida da região de recorrência  $\mathbf{A}$  ( $\mu(A)$ ).

É numericamente conveniente usar a distribuição dos tempos de recorrência maiores do que  $\tau$ :

$$\rho(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} P(T)d(T), \quad (2.5)$$

também chamada de *estatística dos tempos de recorrência* (ETR). Essa é uma função decrescente em  $\tau$ , começando de  $\rho(0) = 1$  devido a (2.3).

Alguns estudos envolvendo recorrências mostraram dois possíveis tipos de distribuição:

(i) decaimento exponencial:

$$\rho(\tau) \approx e^{-\mu\tau} \quad (2.6)$$

para sistemas com propriedades caóticas uniformes (totalmente caótico)

(ii) decaimento do tipo lei de potência:

$$\rho(\tau) \approx \tau^{-\gamma} \Rightarrow P(T) \approx T^{-(\gamma+1)}; \quad (2.7)$$

como resultado da não uniformidade do espaço de fases, ou seja, da presença de zonas singulares. Chamamos  $\gamma$  o expoente de recorrência.

Perceba que o expoente da ETR difere do expoente da DTR como consequência da equação 2.5. Na literatura existem outras funções de densidade de probabilidade di-

retamente correlacionadas com problemas de aprisionamento que conduzem às mesmas características do decaimento  $\tau^{-\gamma}$ . No entanto, cabe ressaltar dois pontos onde o expoente  $\gamma$  do ETR também difere de  $\pm 1$  das demais: (i) o tipo de distribuição e (ii) onde as trajetórias são iniciadas.

Com relação ao tipo de distribuição, além da distinção causada quando uma distribuição acumulativa é usada (por exemplo a equação 2.5), podemos também lidar com situações que envolvem um *ensemble* de condições iniciais fornecidas dentro de uma região. Neste caso, podemos calcular o número de trajetórias que permanecem na região em função do tempo (*probabilidade de sobrevivência*), e obter  $f(t) \approx t^{-\gamma^*}$ . Porém, se optarmos em calcular a taxa de trajetórias que deixam a região (*taxa de escape*), teremos  $df(t)/dt \approx t^{-(\gamma^*-1)}$ .

O segundo aspecto que trata de onde as condições são iniciadas, apresentam resultados que diferem de -1, no expoente de recorrência, quando são iniciadas em contato ou longe de uma zona singular. Diferentes explicações aparecem em [39, 40, 41, 42].

Na próxima seção, ficará evidente que o decaimento do tipo lei de potência para as distribuições dos tempos de recorrência é uma condição necessária e suficiente para a determinação de uma região aprisionante no espaço de fases. Portanto a ETR constitui uma ótima ferramenta para estudar o fenômeno de aprisionamento em regiões singulares do espaço de fases.

### 2.2.1 Armadilhas dinâmicas

Como foi visto na seção anterior, o teorema de Poincaré não implica em sérias restrições sobre a função de distribuição  $P(T)$ , exceto o lema de Kac para o tempo médio finito (equação 2.4). Porém, esta restrição é bastante fraca, uma vez que, os momentos de ordem superior  $\langle T^m \rangle$  ( $m > 1$ ) podem divergir. Neste momento mostraremos as condições para que uma zona singular do espaço de fases, que tenha uma distribuição do tipo lei de potência para os tempos de recorrência de Poincaré, seja uma armadilha dinâmica, ou melhor dizendo, uma quase armadilha, pois armadilhas no sentido estrito da palavra são proibidas em dinâmicas com preservação de área.

Considere um pequeno domínio  $\mathbf{A}$  no espaço de fases e um grande número de trajetórias  $N_A$  que começam em  $\mathbf{A}$ . Sendo  $\Delta N_A(T, A)$  o número de trajetórias que saem de  $\mathbf{A}$  entre o intervalo de tempo  $T$  e  $T+\Delta T$ . Logo, a densidade de probabilidade para sair de  $\mathbf{A}$  é:

$$\psi(T, A) = \lim_{N_A \rightarrow \infty} \frac{\Delta N(t, A)}{N_A} \quad (2.8)$$

Para o caso em que o domínio  $\mathbf{A}$  seja uma zona singular e conseqüentemente,  $\psi(T; A)$  tenha um decaimento do tipo lei de potência para os tempos de retorno quando  $T \rightarrow \infty$ , ou seja:

$$\psi(T; A) \approx P(T) \approx T^{-\gamma_{DTR}}, \quad (2.9)$$

onde  $\gamma_{DTR}$  é o expoente de recorrência para a DTR. Os momentos de  $\psi(t; A)$  serão dados por:

$$\langle T^m \rangle = \int_0^\infty T^m \frac{1}{T^{\gamma_{DTR}}} dT, \quad m = 1, 2, 3... \quad (2.10)$$

Portanto diremos que o domínio  $\mathbf{A}$  será uma armadilha dinâmica se existir algum número inteiro  $m_0$  tal que, o tempo médio ou primeiro momento seja finito e os demais momentos sejam divergentes. Ou formalmente, se existir  $m_0$  tal que:

$$\langle T^m \rangle = \int_0^\infty T^m P(T) dT = \infty, \quad m \geq m_0 > 1, \quad \langle T \rangle < \infty. \quad (2.11)$$

onde a condição  $m_0 > 1$  é devido ao Lema de Kac (equação 2.4).

Duas implicações decorrem dessa definição: (i) nenhum  $m_0$  é possível, isto é, nenhuma armadilha existe se o decaimento é do tipo exponencial (equação 2.6) e (ii) se o decaimento dos tempos de recorrência é do tipo lei de potência (equação 2.7) então para  $m_0 = \gamma_{DTR} - 1$  uma armadilha existe. Como o expoente da ETR ( $\gamma_{ETR}$ ) é igual ao expoente da DTR ( $\gamma_{DTR}$ ) menos 1 (veja equação 2.7), o próprio expoente  $\gamma_{ETR}$  é o  $m_0$  que satisfaz as condições para existência de armadilhas dinâmicas. Sendo assim, daqui por diante o fato de encontrarmos uma lei de potência para tempos de recorrência via ETR, será condição suficiente para dizermos que a região em estudo constitui uma armadilha dinâmica.

### 2.2.2 O cálculo numérico para a ETR

Na seção 2.2, vimos que a ETR pode ser usada para caracterizar o aprisionamento de trajetórias em certa região do espaço de fases. Nesta parte mostraremos os passos para obtê-la numericamente.

A ETR é obtida por uma única trajetória, sendo então independente da escolha de um *ensemble* de condições iniciais. Essa é a sua principal vantagem sobre as outras funções de densidade de probabilidade e portanto, o principal parâmetro para um resultado satisfatório é o número de vezes que o mapa é iterado. Em todas as nossas simulações envolvendo ETR foram feitas  $10^{11}$  iterações.

Apresentamos a seguir os principais passos a serem seguidos para o cálculo da ETR:

Pela equação 2.5, a função  $\rho(\tau)$  é um acúmulo de densidades de probabilidades para tempos de recorrência  $T > \tau$ . Logo:

$$\rho(\tau) = \frac{M_\tau}{M} \quad (2.12)$$

onde  $M_\tau$  é o número de recorrências com tempo  $T \geq \tau$  e  $M$  é o número total de recorrências observadas durante todo processo de iterações. Apresentamos então os passos para o estudo dos tempos de recorrência de Poincaré via ETR:

*Passo 1* - Observar o espaço de fases do sistema e identificar possíveis regiões de aprisionamento. Geralmente estas regiões apresentam-se ao redor de ilhas de regularidade ou podem ser vistas por manchas de linhas retas no espaço de fases.

*Passo 2* - Escolher uma região de retorno ao redor da região de aprisionamento. A região de retorno para a ETR deve ser a maior possível, porém, nunca “tocando” a região aprisionante (veja o esquema da figura 2.3). A necessidade de escolher uma região de retorno grande é evitar recolher pequenos tempos de recorrência (que correspondem ao movimento aleatório no mar de caos) dando ênfase aos tempos maiores e consequentemente, ao decaimento do tipo lei de potência durante a maior parte do processo.

*Passo 3* - Iniciar uma *única* condição inicial dentro da região de retorno escolhida. Embora possam ocorrer algumas flutuações para a ETR entre diferentes condições iniciais, a distribuição de tempos de recorrência de um sistema individual é para longos tempos equivalente à média das distribuições sobre diferentes sistemas [49, 48].

*Passo 4* - Guardar os números de retornos para todos os tempos a fim de realizar a equação 2.12.

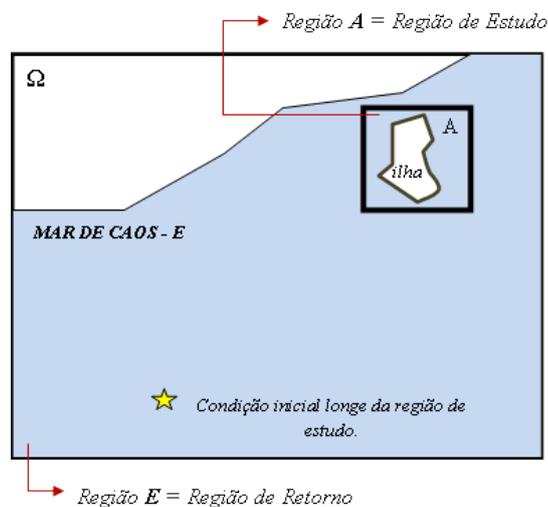


Figura 2.3: Esquema da escolha das regiões de retorno e de estudo.



# Capítulo 3

## Aprisionamentos no bilhar anular

Este capítulo será dedicado ao estudo sobre aprisionamentos no bilhar anular, caracterizados pela ETR como previsto pela teoria desenvolvida no capítulo 2. Primeiramente, analisaremos os aprisionamentos no bilhar anular estático devido às órbitas periódicas instáveis marginalizadas e encerraremos com a análise do comportamento intermitente de trajetórias no bilhar anular pulsante, observando fenômenos de aprisionamento em armadilhas dinâmicas.

### 3.1 O bilhar anular estático

O bilhar anular é composto por dois círculos circunscritos um de raio  $R=1$  (por conveniência) e o outro de raio  $r$  com ( $r < R$ ), que podem estar dispostos concentricamente ou excentricamente, dependendo do parâmetro,  $\delta$ , que mede a excentricidade entre ambos os centros. Uma partícula experimenta colisões elásticas com as fronteiras que por definição são barreiras de potencial infinito.

A dinâmica do sistema é investigada via mapeamento discreto nas coordenadas  $\alpha$  e  $\theta$ . Se  $P$  é um ponto de impacto da partícula com a fronteira externa,  $\alpha$  é o ângulo de reflexão com relação à normal ao círculo externo em  $P$  e  $\theta$  é o comprimento do arco com relação à abscissa. As trajetórias são classificadas em dois grupos dependendo da condição de tangência:

$$|\text{sen}(\alpha) - \delta \text{sen}(\theta - \alpha)| \leq r \quad (3.1)$$

Se as coordenadas  $(\theta, \alpha)$  da trajetória não satisfazem a inequação 3.1, então entre duas colisões consecutivas, a partícula não colide com o círculo interno, também chamado círculo espalhador, e um mapa é obtido. Caso a inequação 3.1 for satisfeita a partícula atinge o círculo espalhador antes de alcançar novamente a fronteira externa e outro mapa é obtido (veja Figura 3.1 e os mapas no Apêndice A1).

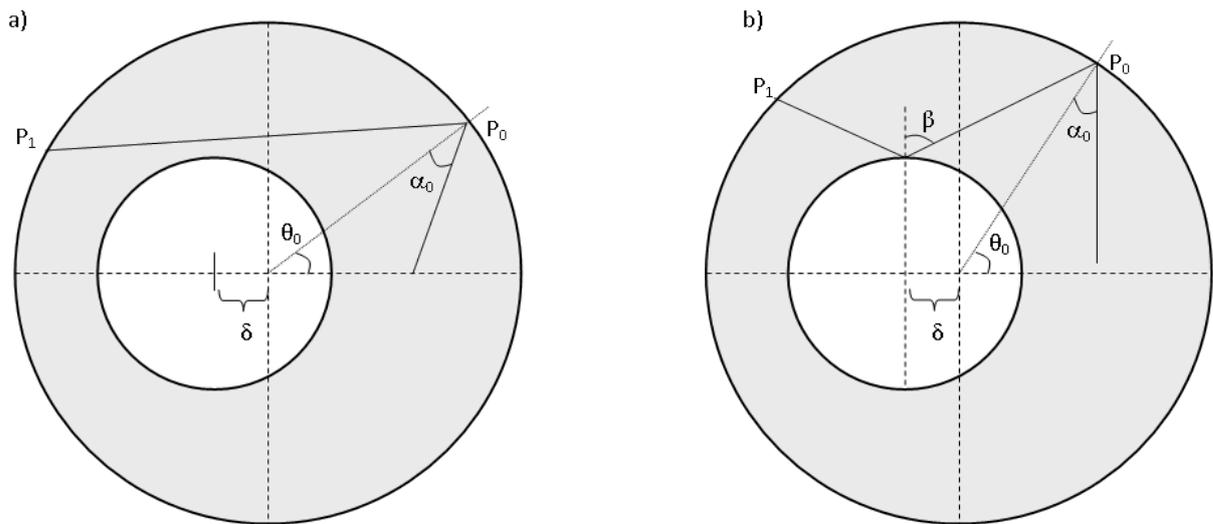


Figura 3.1: Geometria do bilhar anular estático mostrando os dois tipos de movimento possíveis ao checar a inequação 3.1 a) Movimento do tipo A e b) Movimento do tipo B (veja o mapeamento no Apêndice A1)

Seis gráficos do espaço de fases, que chamaremos de **espaço de fases geométrico**, para diferentes excentricidades são mostrados na figura 3.2 obtido pela seção de Poincaré nas coordenadas:  $L = \theta/2\pi$  com  $\theta \in [-\pi, \pi]$  e em  $S = \text{sen}(\alpha)$  com  $\alpha \in [\pi/2, \pi/2]$ . A soma  $r+\delta$  foi fixada em 0.8 para manter a região que limita o mar de caos constante, e consequentemente enfatizar o surgimento de caos causado pela excentricidade na região  $|S| < r + \delta$ .

Quando  $\delta = 0$  (círculos concêntricos) a seção de Poincaré é coberta por pontos e retas paralelas ao eixo  $L$  (figura 3.2 (a)), portanto, o sistema é dito integrável<sup>1</sup>. Os pontos no espaço de fases aparecem devido à periodicidade de algumas órbitas que após  $N$  colisões voltam exatamente para a condição inicial. Por outro lado uma órbita quase-periódica nunca volta à condição inicial que lhe deu origem, preenchendo densamente uma linha na seção de Poincaré. No caso do bilhar anular, o espaço de fases indica a existência de dois tipos de trajetórias: (i) aquelas que não tocam o círculo interno (linhas pretas), também chamadas *Whispering Gallery Orbits* (WGO); (ii) aquelas que colidem com o círculo de raio  $r$  (linhas laranjas). Além disso, a seção de Poincaré é simétrica com relação ao eixo horizontal  $S = 0$ . As trajetórias correspondentes à  $S$  e  $-S$  são equivalentes, porém em sentido contrário uma da outra no plano do bilhar.

Na figura 3.2 (b) percebe-se a existência de uma separatriz e um pequeno mar de caos surgindo próximo às WGOs; este fato é bastante particular, visto que, na maioria dos sistemas caóticos o surgimento de caos inicia-se na vizinhança dos pontos de sela. Este fenômeno gerou muitos estudos na região caótica próximo às WGOs do bilhar, chamada de *região de praia*. Embora alguns autores tenham relacionado certas características à

<sup>1</sup>A utilização da palavra integrável está relacionada com a conservação de alguma constante de movimento. No caso do bilhar anular a integrabilidade do sistema é devido a conservação do momento angular da partícula.

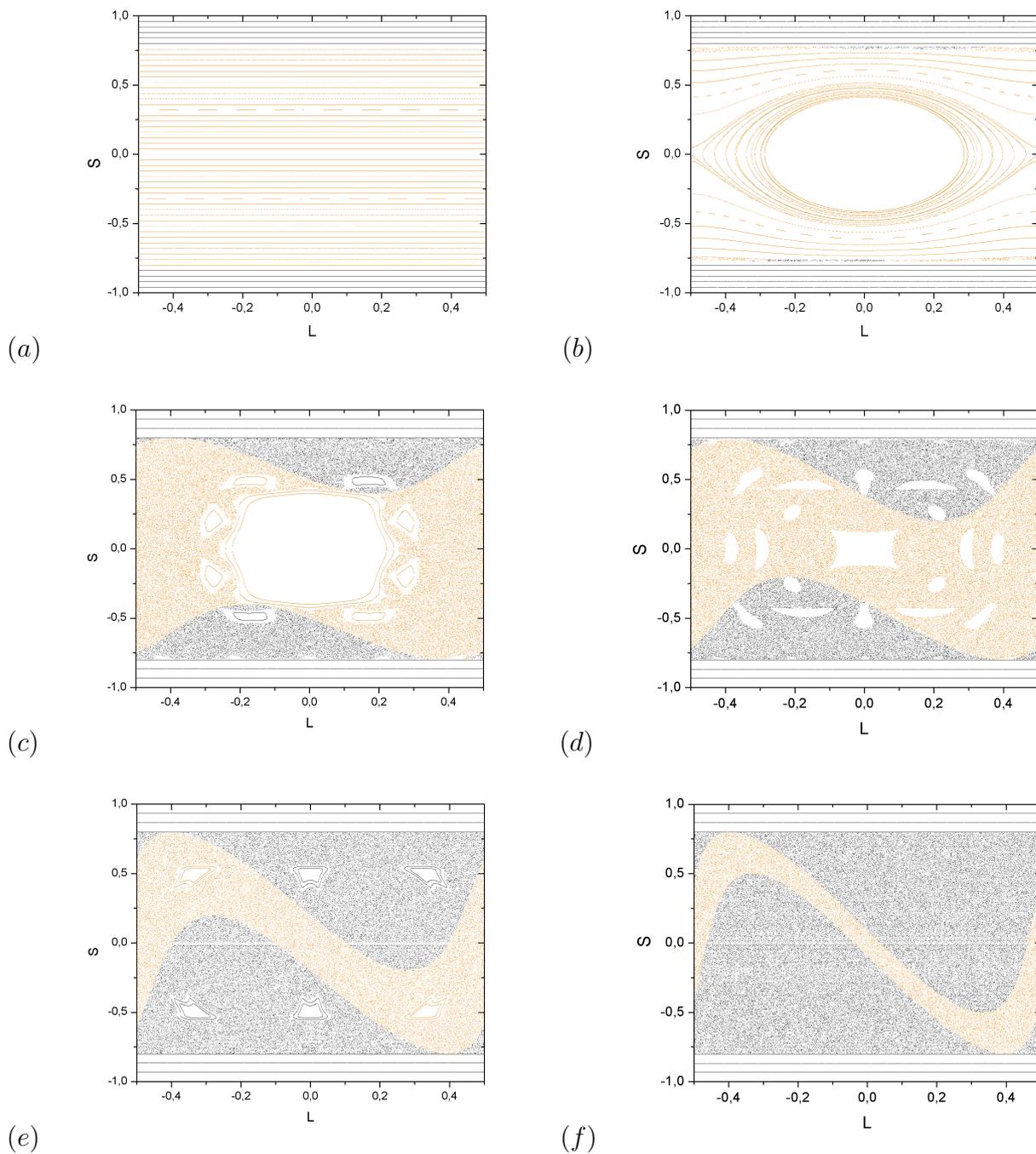


Figura 3.2: Seções de Poincaré para diversos  $\delta$ s com  $r + \delta = 0.8$  (a)  $\delta = 0$ , (b)  $\delta = 0.025$ , (c)  $\delta = 0.2$ , (d)  $\delta = 0.3$ , (e)  $\delta = 0.5$ , (f)  $\delta = 0.65$ ; os pontos de cor laranja correspondem à colisões com a fronteira interna do bilhar

esta região, inclusive via mecânica quântica (tunelamento assistido por caos) [43], ela ainda continua sendo objeto de investigações.

As figuras 3.2 (c)-(e) mostram a existências de ilhas KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) envoltas por um mar de caos, limitadas à região  $|S| = r + \delta$  até o ponto em que nenhuma ilha é aparente (f). Uma observação importante é o aparecimento de manchas causadas por linhas retas no espaço de fases, mais evidente nas figuras 3.2 (e) e (f). Estas linhas são órbitas regulares imersas no mar de caos e estão diretamente relacionadas com o fenômeno de aprisionamento como mostraremos na próxima seção.

### 3.1.1 Órbitas periódicas marginalmente instáveis: MUPOs

As órbitas periódicas marginalmente instáveis, que serão designadas aqui pela sigla MUPOs [44] do inglês *marginally unstable periodic orbits*, são órbitas periódicas dentro do mar de caos que existem em bilhares não integráveis de geometria retangular ou circular. Tais órbitas são classificadas como marginalmente instáveis, pois, qualquer perturbação que não esteja em uma direção ao longo das fronteiras (o que acarretaria apenas em outra órbita de uma família de órbitas periódicas), é suficiente para que a trajetória eventualmente deixe a região próxima às órbitas periódicas. Muitas destas órbitas existem para diferentes parâmetros de controle. Os mais famosos e triviais exemplos de MUPOs são as órbitas que batem perpendicularmente entre fronteiras paralelas como no bilhar estádio (ou Bunimovich) [45] e Sinai [46] (veja figura 3.3).

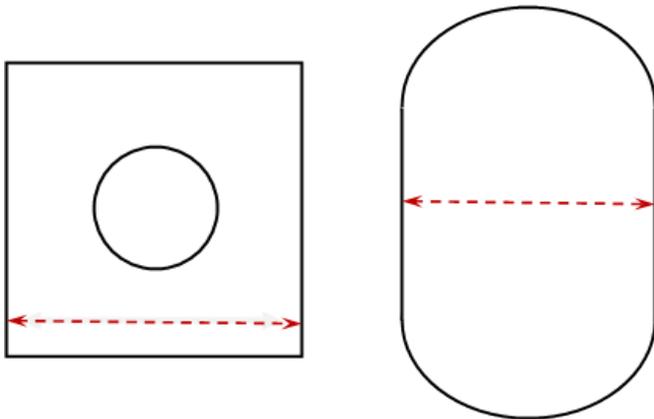


Figura 3.3: (a) Bilhar de Sinai (b) Bilhar estádio.

A condição para se gerar uma órbita periódica em um bilhar circular é conhecida [47] e pode ser definida por dois números inteiros: o período  $q$  e o número de rotação  $\eta$  (números de voltas em torno do centro do círculo). O ângulo de reflexão  $\alpha_p$  destas órbitas é dado por

$$\alpha_p(q, \eta) = \frac{\mp \pi(q - 2\eta)}{2q} \Rightarrow \text{sen}(\alpha_p) = \cos\left(\pi \frac{\eta}{q}\right). \quad (3.2)$$

Para bilhares não integráveis de forma circular, há duas condições suficientes para que uma órbita periódica, caracterizada por  $(q, \eta)$ , seja uma MUPO:

- A trajetória deve estar contida na componente caótica;
- A trajetória não pode colidir com qualquer obstáculo, preservando assim sua estabilidade marginal.

No caso do bilhar anular, as duas condições para a existência de MUPOs citadas acima geram que uma órbita periódica do tipo  $(q, \eta)$  será uma MUPO quando [48]:

- MUPOs externas (outer MUPOs): acontece quando uma MUPO  $(q, \eta)$  gera um polígono regular que passa por fora do círculo espalhador que acontece se e somente se:

$$\cos\left(\pi\frac{\eta}{q}\right) < r + \delta < \frac{\cos(\pi\eta/q)}{\cos(\pi/q)} + r\left(1 - \frac{1}{\cos(\pi/q)}\right). \quad (3.3)$$

- MUPOs internas (inner MUPOs): a órbita passa somente pela parte anular interna.

$$\delta < \frac{r}{\cos(\pi(1-\eta)/q)} + \cos(\pi\eta/q) + \operatorname{sen}(\pi\eta/q)\tan(\pi(1-\eta)/q). \quad (3.4)$$

Na figura 3.4 (a) são mostradas os dois casos possíveis de MUPOs no plano do bilhar bem como suas posições no espaço de fases, figura 3.4 (b).

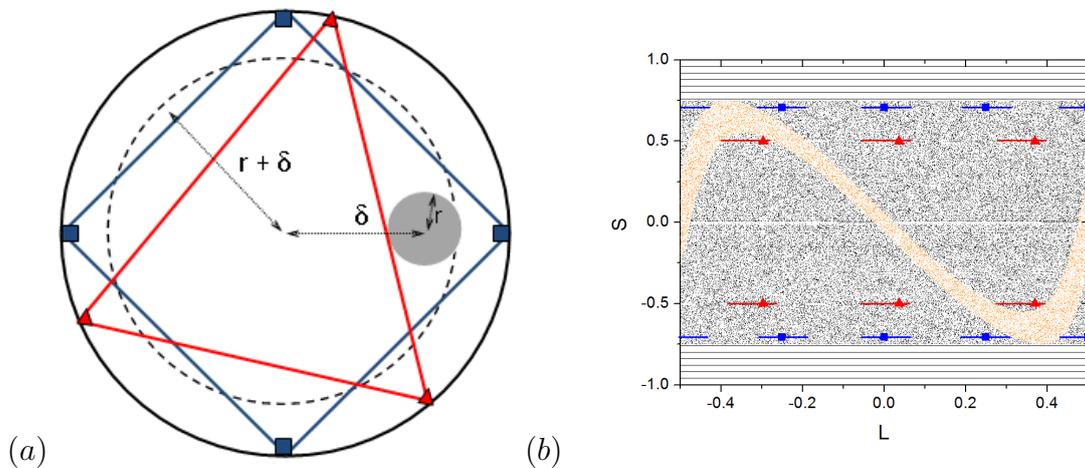


Figura 3.4: (a) espaço das trajetórias e (b) espaço de fases geométrico, identificando a MUPO externa (4,1), e a (3,1) com  $r=0.1$  e  $\delta = 0.65$ .

Uma pergunta imediata que podemos fazer é: quantas MUPOs podem ser inscritas em um círculo, dadas as restrições de cruzar a componente caótica, porém nunca colidir com qualquer obstáculo dentro dela? Uma resposta foi dada por E. G. Altman em sua tese de doutorado [48] e publicada em [30], quando o autor deduziu a existência de infinitas famílias de MUPOs como uma propriedade genérica de bilhares circulares não integráveis. O expoente de recorrência  $\gamma = 2$  para a ETR foi deduzido analiticamente e confirmado numericamente para o caso em que somente as MUPOs são responsáveis pelo aprisionamento isto é, não existe **nenhuma** ilha visível no espaço de fases. Discute-se também em [48] que cada família de MUPO contribui com o mesmo expoente  $\gamma = 2$  e portanto, a distribuição dos tempos de recorrência não depende da presença de outras famílias de MUPOs.

Um estudo pioneiro sobre órbitas periódicas imersas no mar de caos foi desenvolvido em [32], para os bilhares de Sinai e Bunimovich (veja figura 3.3). O trabalho mostrou que todas as órbitas são caóticas, exceto para aquelas de medida zero (não contribuem para o volume do mar de caos) que correspondem à órbitas estagnadas em infinitas colisões entre as fronteiras, isto é, todo espaço de fases têm uma componente ergódica excluindo os domínios de medida zero. Estes domínios geram manchas (linhas retas) no espaço de fases e possuem uma forte influência nas propriedades do mesmo, como o aprisionamento e conseqüentemente a distribuição dos tempos de recorrência. Isso porque as órbitas que colidem paralelamente entre as fronteiras podem permanecer neste movimento por um tempo muito grande, dependendo do ângulo. Os autores obtiveram numericamente a distribuição das recorrências:  $P(T) \approx T^{-3} \Rightarrow$ , ou seja,  $\rho(\tau) \approx \tau^{-2}$ .

Como a maioria dos espaços de fases de sistemas Hamiltonianos são mistos (ilhas + mar de caos), o expoente  $\gamma = 2$  é raramente observado <sup>2</sup>. Alguns estudos [49, 50] apontam o expoente  $\gamma \approx 1.5$  para espaços mistos como um expoente assintótico universal. Particularmente em [49], os autores obtiveram resultados convincentes ao generalizar as árvores de Markov [51] para uma árvore estocástica onde a probabilidade de transição fosse escolhida aleatoriamente. Neste caso, expoente estimado foi  $\gamma \approx 1.57$ . Resultado semelhante foi obtido através de estudos sob diferentes mapas com preservação de área, observando a presença constante do valor  $\gamma = 1.5$  em diversos sistemas [50].

Como visto na seção anterior, o bilhar anular apresenta um espaço de fases que depende da excentricidade  $\delta$ , possibilitando espaços de fases integráveis, alguns com ilhas KAM espalhadas de várias maneiras, até quando não se é possível observar nenhuma ilha dentro do mar de caos. Mostraremos na seção 3.1.2 a obtenção do expoente  $\gamma = 2$  para espaços de fases sem hierarquia de ilhas e na seção 3.1.3 o expoente  $\gamma < 2$  para espaços mistos de acordo com o observado e previsto na literatura.

<sup>2</sup>De fato o expoente  $\gamma = 2$  só será observado se o espaço de fases não apresentar nenhuma ilha

### 3.1.2 Expoente $\gamma = 2$ para MUPOs

Segundo a teoria desenvolvida em [48], o expoente  $\gamma = 2$  para MUPOs só será obtido se nenhuma forma de aprisionamento, como ilhas de regularidade, estiver presente. Observações com relação aos parâmetros de controle para o bilhar anular feitas em [52], sugerem a condição  $\delta \geq 3r$  para se obter um espaço de fases visualmente caótico onde nenhuma estrutura fosse observada. Na figura 3.5 são mostradas oito curvas da ETR, sendo que as quatro primeiras correspondem às escolhas de condições (sem observação no espaço de fases) que respeitassem a condição  $\delta \geq 3r$  e as quatro últimas foram escolhidas pelo motivo da não visualização de ilhas no espaço de fases. Em todos os gráficos realizamos  $|S| < 0.3$  como nossa região de retorno, ou seja, analisamos o efeito de aprisionamento próximo às WGOs (região de praia).

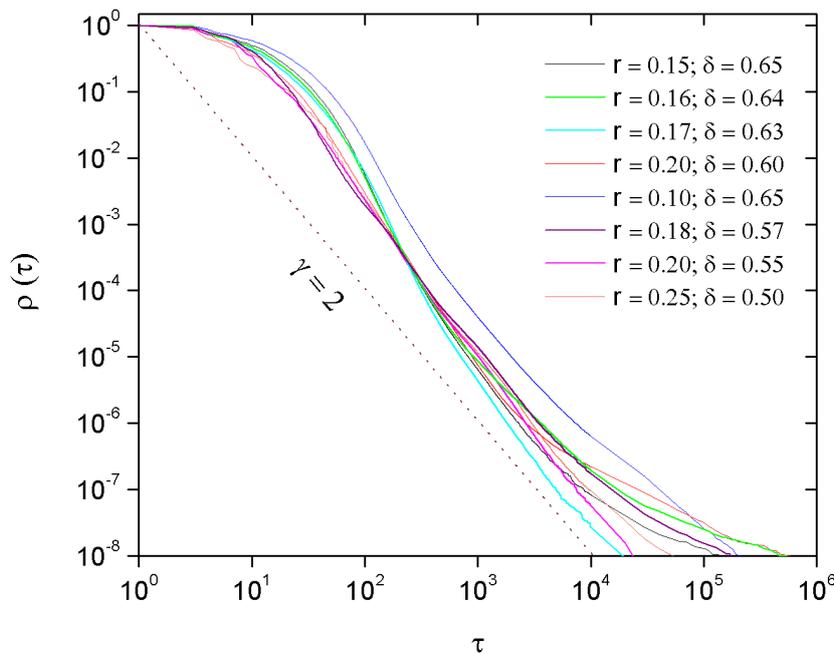


Figura 3.5: ETR para oito diferentes configurações do bilhar anular. O expoente  $\gamma = 2$  é mostrado pela linha pontilhada.

Pela figura 3.5 o leitor perceberá que a maioria dos casos estudados seguem o expoente  $\gamma = 2$  como previsto, porém as curvas: vermelha ( $r = 0.2, \delta = 0.6$ ), verde ( $r = 0.16, \delta = 0.64$ ) e preta ( $r = 0.15, \delta = 0.65$ ) possuem um comportamento assintótico que difere do decaimento  $\gamma = 2$ . Como discutimos no início desta dissertação, a ocorrência de zonas singulares pode acontecer em diferentes tamanhos ou formas, de maneira que, por menor que ela seja, e muitas vezes invisível na escala adotada, suas considerações são inevitáveis. Desta maneira, realizamos uma análise minuciosa sobre os espaços de fases das três curvas citadas anteriormente, nas quais descobrimos, em todas, a presença de minúsculas ilhas submersas na região de estudo. Veja por exemplo a figura 3.6 para  $r = 0.2$  e  $\delta = 0.6$

onde uma cadeia de ilhas (1:6), está presente. Ambos os casos  $r = 0.16, \delta = 0.64$  e  $r = 0.15, \delta = 0.65$  apresentaram também um conjunto (1:14) de pequenas ilhas quase que imperceptíveis como podemos observar na figura 3.7(a) e a ampliação de uma das ilhas em (b).

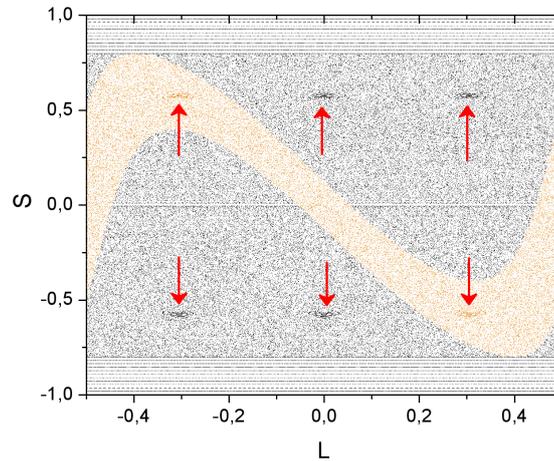


Figura 3.6: Espaço de fases para o bilhar anular com os parâmetros  $r = 0.2$  e  $\delta = 0.6$ . As setas apontam a presença de pequenas ilhas (1:6) imersas na região de estudo escolhida.

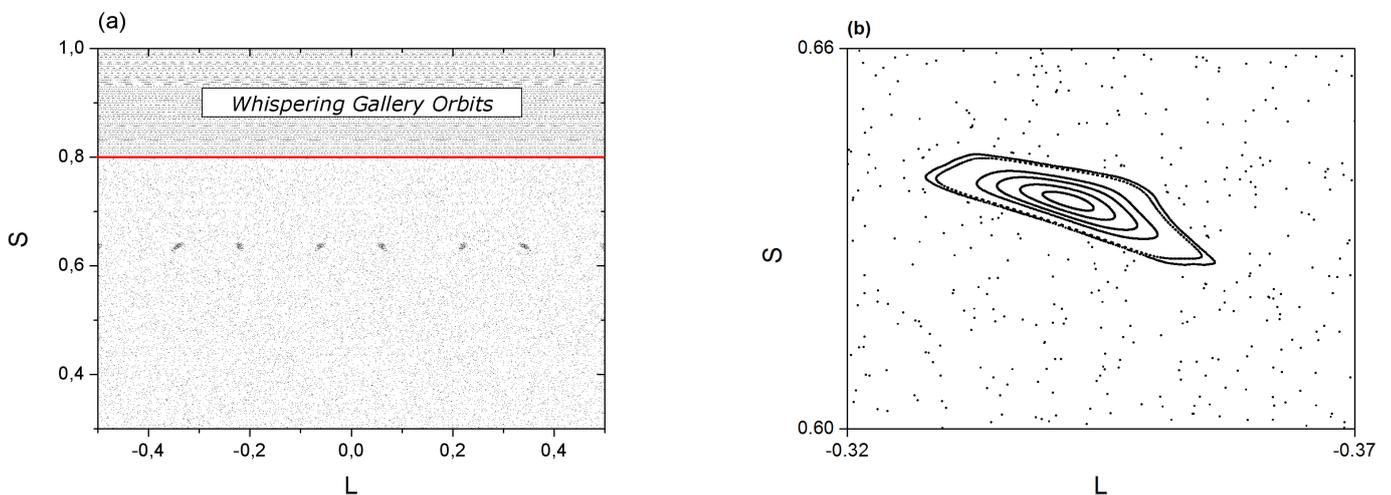


Figura 3.7: Espaço de fases para o bilhar anular com os parâmetros  $r = 0.14$  e  $\delta = 0.64$ . (a) Ampliação na região  $S > 0.5$  que nos permitiu verificar a presença de ilhas (1:7) quase invisíveis. Estas ilhas também aparecem na ampliação  $S < 0.5$  formando uma sequência de ilhas (1:14). Em (b) temos uma ampliação mais detalhada de apenas uma das ilhas. A presença destas minúsculas ilhas, alteraram o comportamento assintótico da ETR.

Vimos assim, que o comportamento da lei de decaimento em espaços de fases, que existam somente MUPOs, seguem o expoente  $\gamma = 2$ , mas alguns cuidados devem ser tomados pois, uma ilha, por menor que seja, pode alterar o processo.

### 3.1.3 Expoente $\gamma < 2$ para espaços de fases mistos

Para verificarmos o decaimento da ETR para os tempos de recorrência de espaços de mistos (ilhas + mar de caos) do bilhar anular, optamos por espaços de fases onde algumas ilhas estão próximas as WGOs.

Escolhemos quatro configurações diferentes para  $r$  e  $\delta$ . A presença de ilhas, na mesma região ( $|S| > 0.3$ ), escolhida para o estudos do efeito das MUPOs em espaços onde nenhuma estrutura é visível, altera significativamente a ETR como indica a figura 3.8. As ilhas imersas no mar de caos passam a ser responsáveis por um aprisionamento mais eficiente levando a um expoente de recorrência entre  $1 < \gamma < 2$ . Os respectivos espaços de fases, para os parâmetros das quatro curvas, são mostrados na figura 3.9. Percebam que tais ilhas, presentes na região de estudo, possuem formas e volumes diferentes.

Há uma observação importante com relação à ETR apresentada na figura 3.8. Perceba que na verdade, as curvas da figura 3.8 apresentam um “crossover” entre decaimentos com tempos em torno de  $\tau = 10^4$ . Isso ocorre exclusivamente devido às formas de aprisionamento envolvidas, ou seja, a ETR reflete a presença de aprisionamento devido às MUPOs e às ilhas de regularidade, independentemente de suas formas e tamanhos.

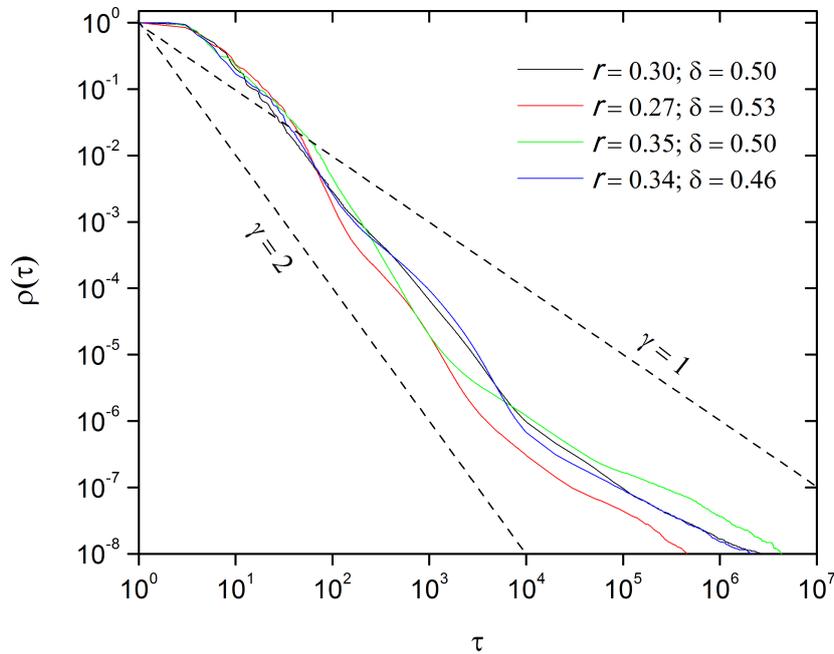


Figura 3.8: ETR para quatro configurações do bilhar anular com espaço de fases misto (ilhas + mar de caos).

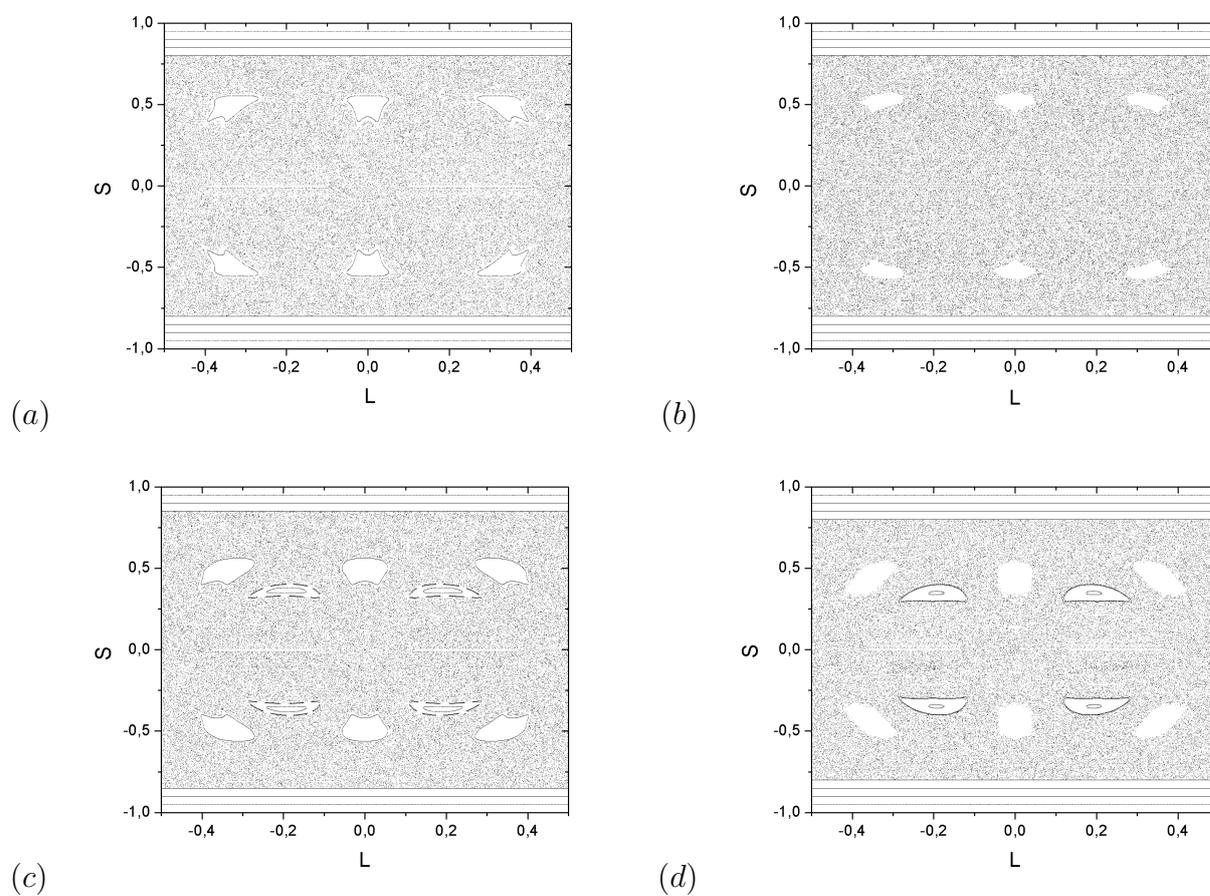


Figura 3.9: Seções de Poincaré para os parâmetros  $r$  e  $\delta$  utilizados para a ETR da figura 3.8. (a)  $r = 0.30$  e  $\delta = 0.50$ , (b)  $r = 0.27$  e  $\delta = 0.53$ , (c)  $r = 0.35$  e  $\delta = 0.50$ , (d)  $r = 0.34$  e  $\delta = 0.46$ .

## 3.2 O bilhar anular pulsante

No bilhar anular estático, os raios das fronteiras são mantidos fixos. Quando uma, ou as duas fronteiras forem perturbadas, isto é, quando os raios das fronteiras não permanecerem constantes ao longo do movimento da partícula, a mesma poderá ganhar ou perder energia. Os bilhares com fronteiras perturbadas pertencem a uma classe de sistemas Hamiltonianos dependentes do tempo e constituem de bons modelos para o estudo do mecanismo da aceleração de Fermi (AF).

Nesta seção, estudaremos o bilhar anular com fronteiras dependentes do tempo, o que chamamos bilhar anular pulsante (BAP). A introdução da perturbação temporal nas fronteiras do bilhar anular juntamente com as zonas singulares que compõe o espaço de fases quando  $\delta=0$ , será proposta neste capítulo para estudar a fenomenologia e suas consequências na dinâmica quadri-dimensional.

O bilhar anular com dependência temporal é uma extensão natural do caso estático com uma perturbação periódica que controla as fronteiras segundo as leis:

$$R(t) = 1 + \epsilon_R \cos(t + \varphi) \quad (3.5)$$

$$r(t) = r_0 + \epsilon_r \cos(t + \phi) \quad (3.6)$$

onde  $(1, \epsilon_R, \varphi)$  e  $(r_0, \epsilon_r, \phi)$  são os raios estáticos, as amplitudes e as fases de oscilação dos círculos externo e interno respectivamente.

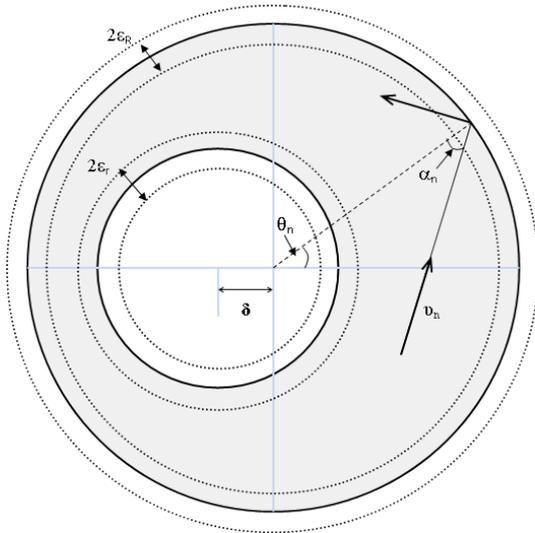


Figura 3.10: Esquema do bilhar anular pulsante. As setas indicando  $(2\epsilon_R)$  e  $(2\epsilon_r)$  indicam as chamadas zonas de colisão.

O mapeamento do BAP é então descrito por:  $T(\alpha_n, \theta_n, v_n, \varphi_n) = (\alpha_{n+1}, \theta_{n+1}, v_{n+1}, \varphi_{n+1})$ . O modelo completo deste sistema, consiste na utilização de métodos numéricos (bisseção) para encontrar cada instante de colisão entre a partícula e as fronteiras móveis, sendo

possíveis ainda sucessivas colisões antes que a partícula deixe uma zona de colisão<sup>3</sup>. A evolução numérica deste sistema é lento e exige um esforço computacional bem grande.

Como alternativa ao modelo completo, propõem-se manter as fronteiras fixas (como no bilhar estático), porém capazes de transferir *momentum* para a partícula no instante da colisão como se estivessem movendo. Assim, nós eliminamos a necessidade de utilizarmos métodos numéricos para encontrar os instantes de colisões e passamos a calcular somente o tempo de vôo entre uma colisão e outra (veja o mapeamento no apêndice A.2). Chamamos este modelo de simplificado e sem perda de generalidade o usaremos nos nossos estudos posteriores.

Uma das principais consequências da introdução de uma perturbação dependente do tempo no BAP, é a dependência sob quatro coordenadas,  $(\alpha, \theta, v, \varphi)$ , que definem dois planos de fases canonicamente conjugados. Um deles nós já conhecemos e denominamos como espaço de fases geométrico, caracterizado por  $(L, S)$ <sup>4</sup>, o outro, será formado pela fase de oscilação da fronteira externa, que joga o papel do tempo, e a componente radial da velocidade  $(\varphi, -V_\eta)$ . A este novo plano de fases nós denominaremos **espaço de fases das energias**.

### 3.2.1 O aprisionamento no caso concêntrico

O caso concêntrico do bilhar anular pulsante ( $\delta = 0$ ) não apresenta AF, ou seja, o crescimento ilimitado de energia. Esta característica pode ser identificada pela ocorrência de curvas “spanning” no espaço de fases  $(\varphi, -V_\eta)$ <sup>5</sup> (veja figura 3.11 (a)) onde  $V_\eta$  é a componente radial da velocidade da partícula com relação ao centro do círculo externo. A presença de curvas “spanning” no espaço de fases foi observada como uma explicação do movimento confinado no modelo Fermi Ulam<sup>6</sup> [18]. Estas curvas, limitam o mar de caos e portanto, uma condição inicial fornecida dentro do mar de caos fica impedida de visitar as regiões limitadas por elas.

Embora para  $\delta = 0$  o crescimento da energia da partícula seja limitado, abaixo das curvas spanning o comportamento é caótico e rico em estruturas. Exemplificamos a seguir, dois tipos de estruturas encontradas frequentemente em espaços de fases de sistemas Hamiltonianos, que apareceram também na dinâmica do BAP.

---

<sup>3</sup>Chamamos zonas de colisão a região no plano do bilhar onde podem acontecer colisões entre a partícula e alguma fronteira. Para o bilhar anular as zonas de colisões para as fronteiras externa e interna são:  $[R \pm \epsilon_R]$  e  $[r \pm \epsilon_r]$  respectivamente

<sup>4</sup>Lembre-se que  $L = \theta/2\pi$  e  $S = \text{sen}(\alpha)$

<sup>5</sup>O fato de utilizarmos, para o espaço de fases das energias, a componente radial da velocidade da partícula,  $V_\eta$ , é apenas uma questão de escolha. Poderíamos também optar pela velocidade total  $v$ .

<sup>6</sup>O modelo de Fermi Ulam consiste de uma partícula movendo-se entre duas fronteiras rígidas sendo uma fixa e outra com dependência periódica no tempo.

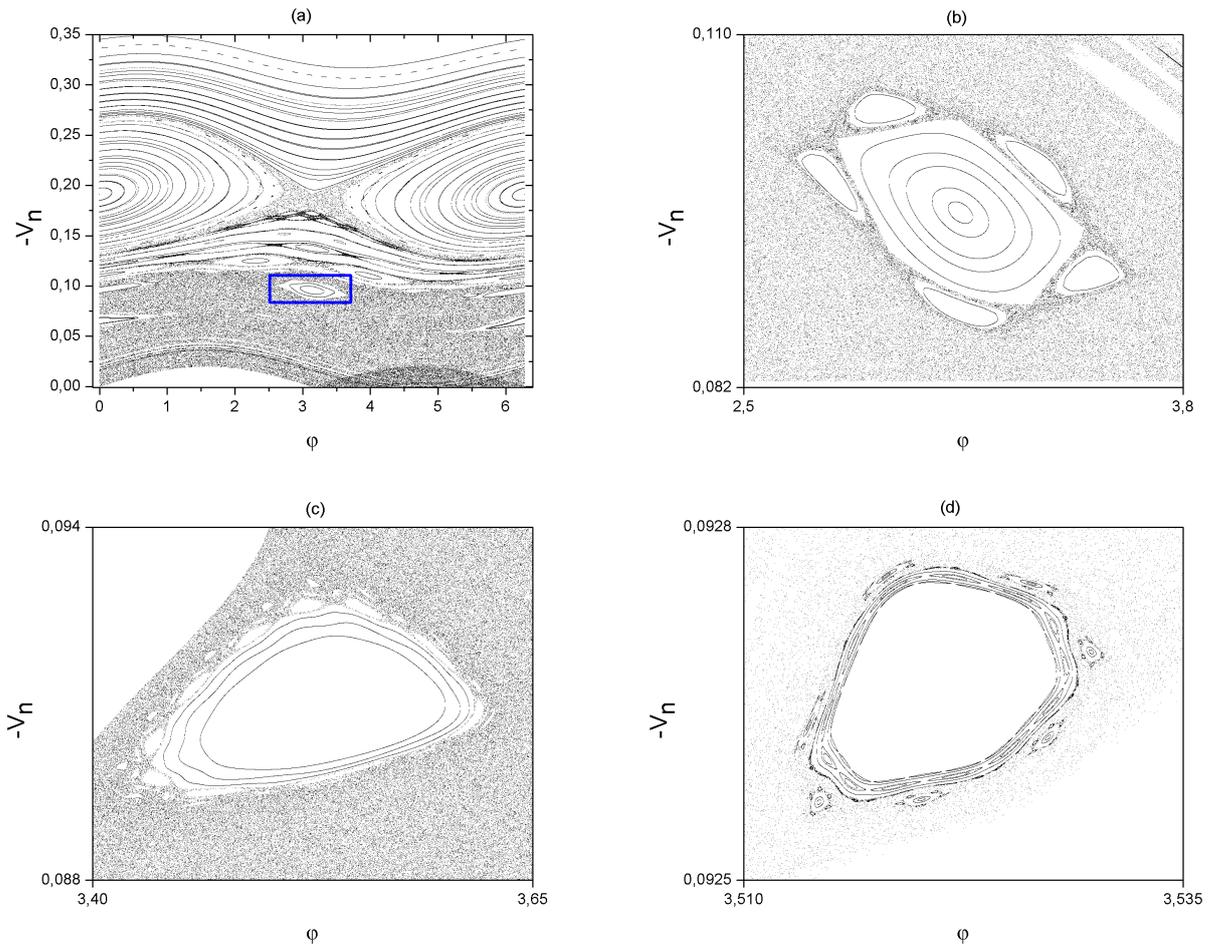


Figura 3.11: (a) Gráfico de  $-V_n \times \phi$  para o BAP concêntrico com  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.01$  e  $r = 0.4$ ; (b)-(d) algumas ampliações de uma singularidade mostrando uma hierarquia de ilhas

### Exemplo 1: Hierarquia de Ilhas

Como um primeiro exemplo, mostramos na figura 3.11 a ocorrência de uma hierarquia de ilhas de 4 gerações existente no **BAP** com parâmetros:  $r=0.4$ ,  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.01$  e  $\phi - \varphi = 0$ . A figura 3.11 (a) mostra o espaço de fases das energias, onde o quadrado azul indica a estrutura escolhida para o nosso estudo que esta detalhada em (b). Uma sequência de ampliações foram feitas nas figuras 3.11 (c) e (d), as quais indicam a presença de ilhas em diferentes escalas (gerações).

O fato de encontrarmos ilhas de gerações (escalas) e configurações (estruturas) diferentes expõe o caráter multi-fractal (diferentes estruturas em diferentes escalas) da região. Para quantificar o aprisionamento ao redor da ilha da figura 3.11(b), nós definimos uma região de retorno em volta da ilha (exatamente a mesma medida apresentada pela figura 3.11(b)) e iniciamos uma condição inicial longe da ilha, porém, dentro do mar de caos afim de calcular a ETR. Iteramos  $10^{11}$  vezes e montamos o gráfico da figura 3.12, no qual percebe-se um efeito de multi-escala, ou seja, diferentes decaimentos durante o

processo. Para tempos de retornos curtos ( $\tau < 20$ ) o decaimento é aproximadamente exponencial e como vimos anteriormente, corresponde à partícula desenvolvendo um movimento aleatório fora de qualquer aprisionamento. Para tempos intermediários e longos o decaimento é do tipo lei de potência.

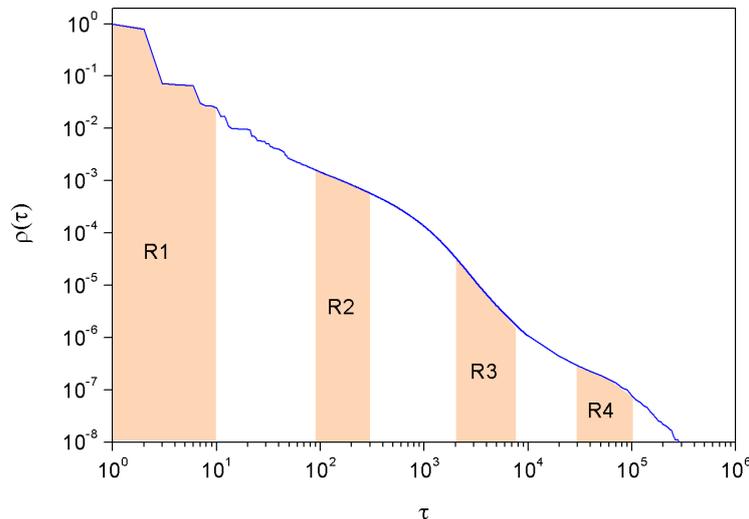


Figura 3.12: ETR para a singularidade observada na figura 3.11 (b) para o bilhar anular. Os intervalos R1 [1:10], R2 [100:300], R3 [ $2 \times 10^3$ : $8 \times 10^3$ ] e R4 [ $3 \times 10^4$ : $1 \times 10^5$ ] foram escolhidos para estudar os diferentes decaimentos

Como visto na figura 3.11 uma única estrutura aprisionadora pode conter uma hierarquia de outras estruturas em escalas diferentes. As maneiras de como estas estruturas se apresentam são muito importantes, por exemplo: se cada cadeia interna da ilha preserva as propriedades das cadeias anteriores, isto é, se a topologia se repetir da mesma forma para cada nova escala, diríamos que a estrutura é fractal. Sendo assim, a distribuição dos tempos de recorrência seria dada uniformemente (uma única lei de potência) pois cada escala aprisiona da mesma maneira das demais escalas. Na figura 3.11 observamos topologias diferentes para cada escala, portanto, a trajetória sofre aprisionamentos diferentes provocando mais de um regime de lei de potência.

## Espectro de aprisionamento

Considerando nossas discussões sobre os efeitos de múltiplos expoentes na ETR e suas consequências, podemos então identificar quais regiões do espaço de fases, pertencem cada um dos decaimentos. Para esta análise, dividimos a ETR em quatro intervalos R1-R4 (os intervalos estão mostrados na figura 3.12), para determinarmos em que região do espaço de fases estão as órbitas que possuem tempos de recorrência para os intervalos citados. Logo, uma trajetória que retorna com tempo de recorrência  $T \in R1$  será identificada, por densidade de pontos, separada dos outros intervalos. Perceba que os intervalos estão

definidos nos diferentes decaimentos da ETR ( $\rho(\tau)$ ), porém a trajetória será classificada analisando os tempos de recorrências  $T$  e não os tempos acumulativos  $\tau$ .

O gráfico da densidade de pontos foi desenvolvido dividindo o espaço de fases, mostrado na figura 3.11(b), em uma matriz de  $10^3 \times 10^3$ , na qual cada elemento foi composto pelo número total de pontos que durante as iterações passaram pelo elemento. Assim, é possível obter com boa qualidade um gráfico bi-dimensional da mesma seção (figura 3.11(b)) com um terceiro eixo que representa a densidade de pontos identificada por cores diferentes.

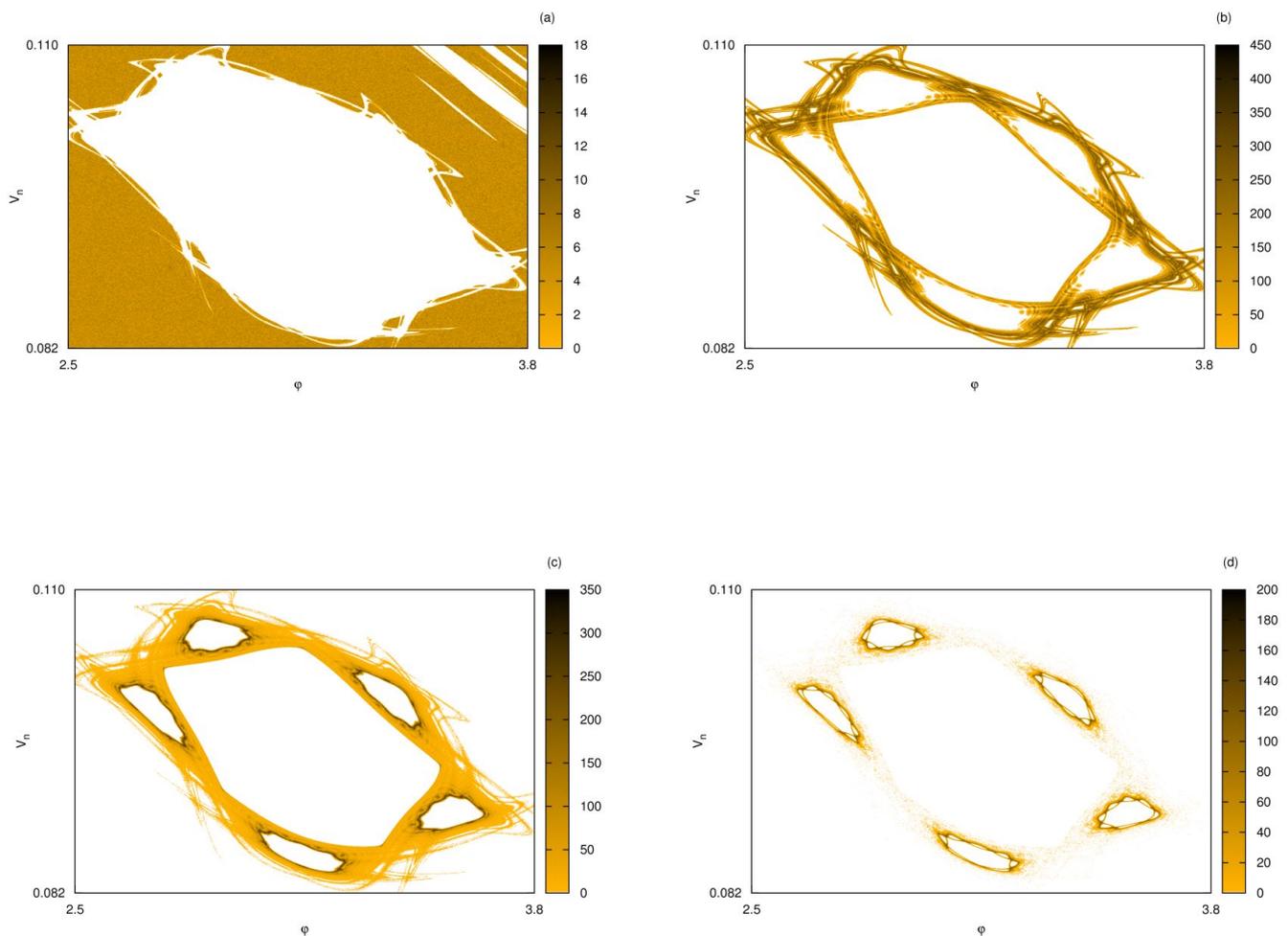


Figura 3.13: Densidade de pontos na região singular do espaço de fases mostrado na figura 3.11 para trajetórias com tempos de recorrência divididas em intervalos dados pela figura 3.12: R1 (a), R2 (b), R3 (c), R4 (d).

Combinando o tipo de decaimento observado na figura 3.12 com as figuras de densidade de pontos para cada intervalo mostrado na figura 3.13 podemos identificar e explicar os regimes da seguinte maneira:

**R1** → Figura 3.13(a): regime para tempos curtos, caracterizados por um decaimento exponencial da ETR, pertencem às trajetórias desenvolvendo um movimento aleatório no mar de caos.

**R2** → Figura 3.13(b): para tempos intermediários, a figura formada desenhou finos contornos que se assemelham às variedades que formam as ilhas KAM. Percebemos que algumas destas finas camadas oscilam e desenvolvem intersecções homoclínicas formando um conjunto de “línguas” para cada ilha da cadeia. A princípio parece razoável aceitar que uma órbita, primeiramente, aprisiona-se às variedades das ilhas, pois, estas conduzem à sua formação. Um resultado semelhante foi apresentado em [33] no qual, o autor denomina como “stickiness in chaos” (aprisionamento em caos) os aprisionamentos devido às variedades do sistema, porém, nenhum resultado foi comentado sobre o intervalo, ou seja, para quais tempos de recorrência, este tipo de aprisionamento ocorre.

**R3** → Figura 3.13(c): os tempos de recorrência começam a se tornar longos e as trajetórias penetram nas ilhas de segunda geração. Neste regime as trajetórias gastaram algum tempo nas finas camadas (variedades) registradas pelo intervalo **R2**, porém em direção as ilhas ao redor (segunda geração) da ilha principal.

**R4** → Figura 3.13(d): é possível observar que as regiões mais internas são as responsáveis por aprisionamentos de tempos longos. Um fator importante neste regime é que o intervalo desenhado na figura 3.13 (d) não retoma às figuras anteriores, ou seja, quando uma órbita está no intervalo **R4** e desenha o espaço da figura 3.13 (d), a mesma não gasta muito tempo por nenhum dos intervalos anteriores e converge rapidamente para as estruturas em escalas mais internas.

## Análise em 4-D

Uma das principais motivações do desenvolvimento deste trabalho, foi a possibilidade de analisar a dinâmica que ocorre no nosso modelo, através de dois planos de fases de variáveis canonicamente conjugadas. A dinâmica do **BAP** evolui em quatro dimensões  $(\alpha, \theta, v, \varphi)$  definindo uma superfície 4D nos limites:  $[-1, 1] \times [-1/2, 1/2] \times [0, v] \times [0, 2\pi]$ , portanto, uma análise sob esta dinâmica fica extremamente difícil. Porém, as informações sobre a dinâmica observadas por dois planos de fases canonicamente conjugados, podem ser analisadas em cooperação. Por serem dois planos pertencentes a uma mesma dinâmica 4D, há possibilidade de que processos como o aprisionamento de trajetórias em certas regiões de um dos planos de fase, esteja conectado com aprisionamento no outro plano.

Para verificar esta hipótese nós fizemos a densidade do espaço de fases geométrico para  $10^8$  iterações de uma única partícula com velocidade inicial  $v = 0.02$  e os mesmos parâmetros utilizados para desenhar o espaço de fases das energias na figura 3.11(a).

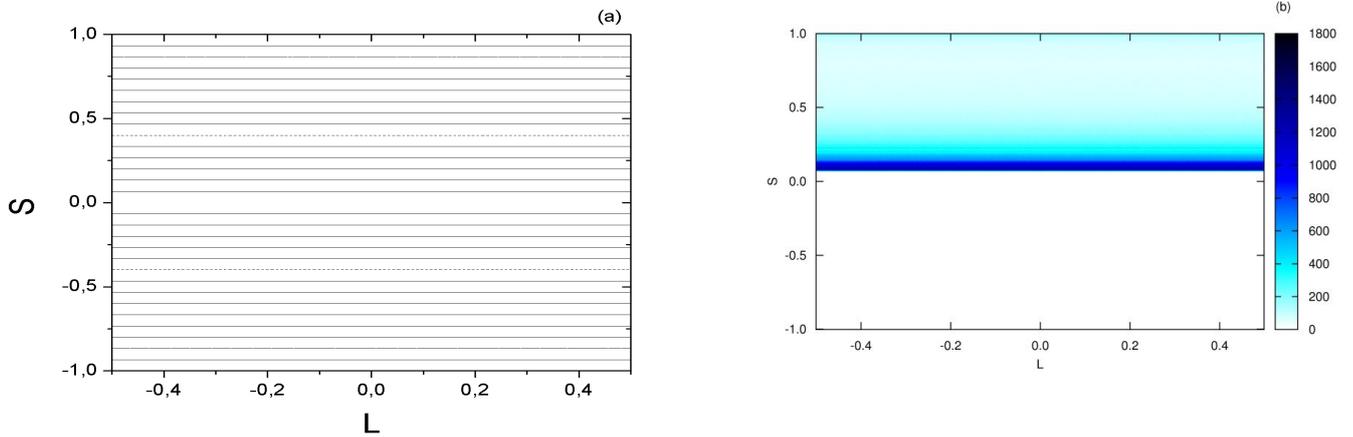


Figura 3.14: (a) Densidade de pontos para o espaço de fases geométrico do BAP com com  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.01$ ,  $r = 0.4$  e  $\delta = 0$ . (b) Espaço de fases geométrico para o caso estático e concêntrico para comparação

Na figura 3.15(b) está o gráfico da densidade de pontos, para o caso pulsante, no espaço geométrico ( a figura (a) corresponde ao espaço geométrico do caso estático para comparação). Percebemos que o movimento do caso concêntrico fica limitado em um único sentido, motivo pelo qual somente a metade da região do espaço de fases geométrico da figura 3.15 (b) foi preenchida. Percebemos também que as  $10^8$  primeiras iterações indicam que a região  $S < 0.3$  (parte mais escura da figura 3.14 (b)) destaca-se como uma região recorrente, no entanto, nenhuma estrutura (ilhas) deste plano de fases está causando tal fenômeno.

Para analisar este fato, nós decidimos verificar se as estruturas, presentes no espaço de fases das energias, é que estão contribuindo para o caráter recorrente da região  $S < 0.3$ . Iniciamos nosso estudo sob às hierarquia de ilhas apresentadas na figura 3.11, ou seja, nós analisaremos as coordenadas  $L$  e  $S$  que pertencem ao conjunto de pontos que desenham as ilhas, porém, não estão colocadas no espaço de fases das energias, pois pertencem ao outro plano. Como vimos anteriormente, a hierarquia de ilha possui diferentes decaimentos para a ETR oque caracterizava um aprisionamento diferenciado para cada escala, uma vez que a estrutura é multi-fractal. Portanto, nós recolhemos separadamente os pares  $(L, S)$  conforme definimos as diferentes regiões: R1, R2, R3 e R4 para a hierarquia de ilhas. Os resultados estão na figura 3.15 em gráficos de densidade de pontos.

Pelas figuras 3.15 (a)-(d), podemos afirmar que neste caso, não houve qualquer ligação entre estruturas nos diferentes planos analisados, ou seja, a constatação de uma estrutura singular (hierarquia de ilhas) no plano das energias, não significou, necessariamente, na existência de uma estrutura também singular no plano geométrico. Porém, a presença

das hierarquias de ilhas, tornou a região  $S < 0.3$  do espaço  $(L,S)$  recorrente durante todo tempo de amostra.

Para confirmar o caráter recorrente da região  $S < 0.3$  do espaço de fases geométrico nós realizamos a ETR (figura 3.16), na qual o decaimento do tipo lei de potência confirma as constantes visitas na região. Neste caso, escolhemos a região  $S < 0.3$  como nossa região de estudo, ou seja, a região de retorno, onde iniciamos apenas uma condição inicial, ficou definida como  $S > 0.3$ .

Devemos ressaltar que se somente a hierarquia de ilhas fosse responsável pela recorrência da região  $S < 0.3$ , a ETR para esta região teria as mesmas características da curva para a ETR da figura 3.12. No entanto, conforme observamos na figura 3.16, isso não aconteceu pois o mar de caos do espaço  $(\varphi, V_\eta)$  é repleto de estruturas próximas que contribuem de maneiras diferentes.

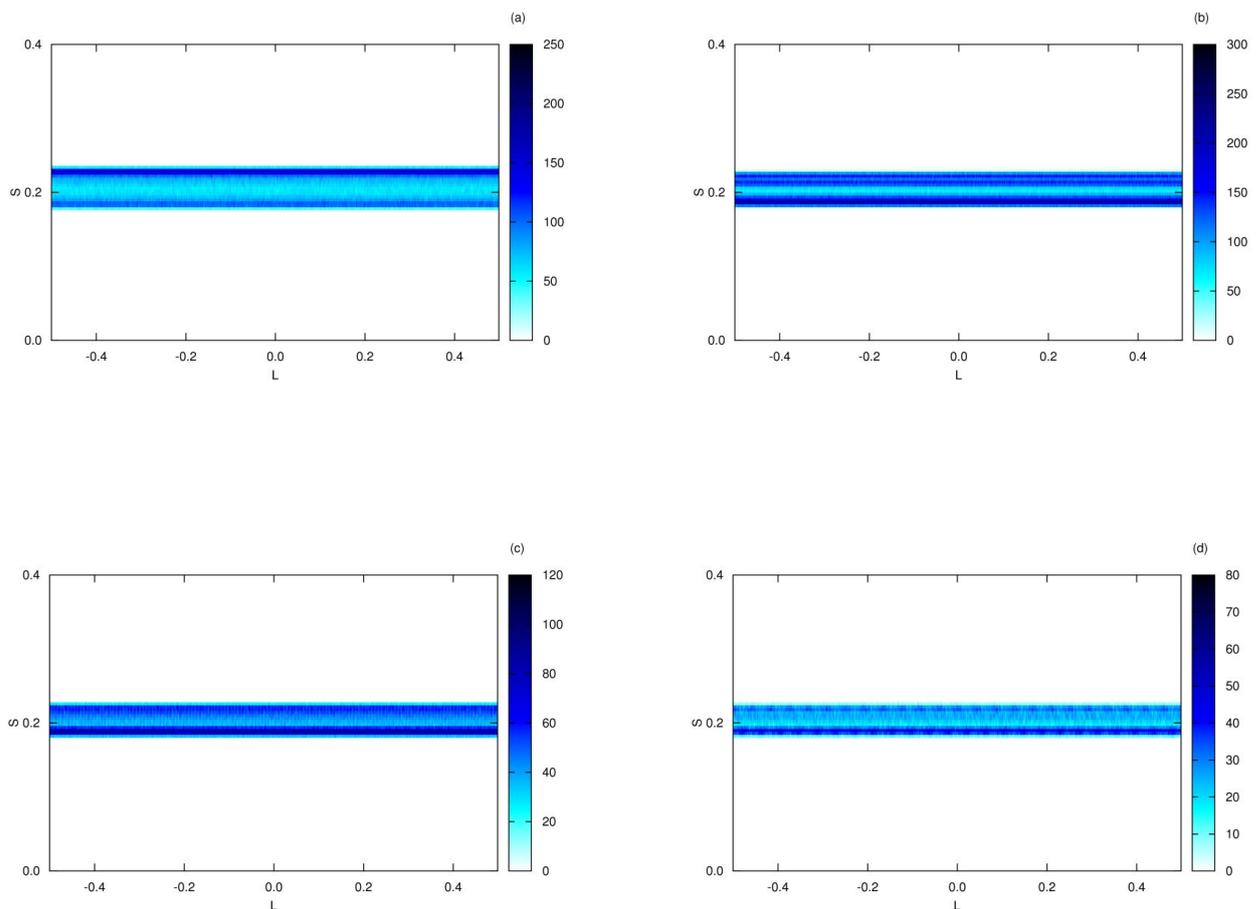


Figura 3.15: Densidade do espaço de fases geométrico referentes aos mesmos intervalos da figura 3.13. (a) R1, (b) R2, (c) R3, (d) R4.

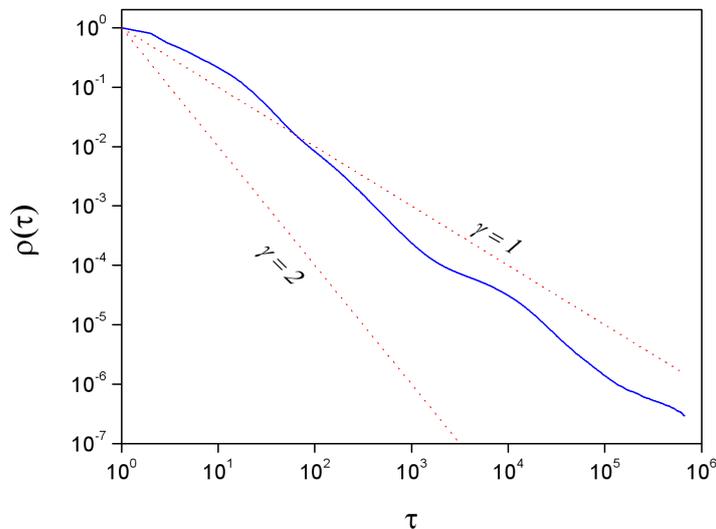


Figura 3.16: ETR para o espaço geométrico para  $v = 0.02$ ,  $r = 0.4$ ,  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.01$  e  $\varphi - \phi = 0$

### Exemplo 2: Barreira dinâmica

As barreiras dinâmicas ocorrem frequentemente em sistemas dinâmicos e podem ser observadas por regiões mais densas no espaço de fases. Além das cadeias de ilhas, a presença de cantos também é responsável por tais barreiras, dificultando a passagem das trajetórias que desenvolvem seu movimento pelo mar de caos. Veja por exemplo a figura 3.17, onde as condições iniciais dadas com velocidades maiores (pontos vermelhos), gastam longos períodos em torno de  $-V_n = 0.12$  e eventualmente descem para regiões de menor energia, enquanto as condições iniciais com velocidades menores (pontos azuis) dificilmente ultrapassam o valor  $-V_n = 0.12$ , e se caso o fizer, gastará um longo tempo acima desta região antes de voltar a visitar outras regiões. Os parâmetros utilizados para fazer a figura 3.17 foram:  $r=0.4$ ,  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.01$  e  $\phi - \varphi = 0$ .

Na figura 3.18 (a) mostramos a coordenada  $-V_n$  como função do número de iterações  $n$ , para os mesmos parâmetros usados para a figura 3.11, na qual percebemos um período muito longo ( $T=4 \times 10^4$ ) de aprisionamento em torno de  $-V_n = 0.12$ . A região pertencente ao aprisionamento é mostrada na figura 3.18 (b).

Realizamos novamente a ETR (figura 3.19) para a região 3.18(b) e a dividimos em três intervalos (R1, R2, R3). Posteriormente, identificamos a região do espaço de fases a que elas pertencem na figura 3.20.

Para calcular a ETR nesta região, nós escolhemos como região de retorno  $-V_n < 0.1$ , ou seja, se a trajetória ultrapassasse a estrutura, seria possível identificá-la em algum dos intervalos utilizados para o gráfico de densidade de pontos. Porém, mesmo utilizando um número bem alto de iterações ( $10^{11}$ ) isso não ocorreu. Logo, esta estrutura está

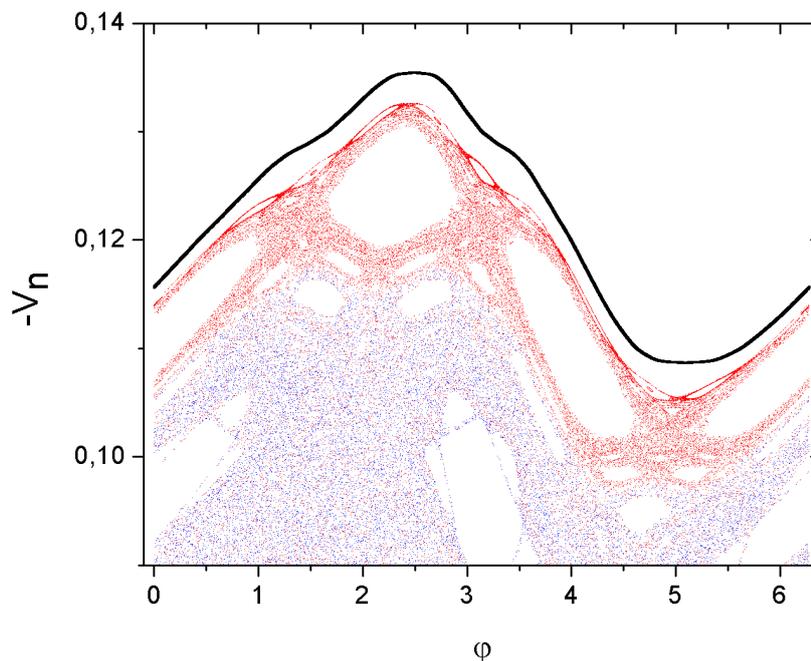


Figura 3.17: Condições iniciais dadas em locais diferentes. Os pontos azuis quase não ocupam a região dos pontos vermelhos, indicando a presença de uma barreira. A linha preta representa uma curva do tipo "spanning" que separa duas regiões do espaço de fases.

agindo como uma barreira dinâmica, característica evidente em regiões com *cantors*, que dificulta ou até mesmo impede o acesso à região que ela limita.

O tipo de decaimento observado, embora semelhante àquele mostrado pela hierarquia de ilhas (veja figura 3.12), não apresenta mais do que duas leis de potência para o expoente de recorrência, sendo que, para tempos intermediários o aprisionamento é mais efetivo, o que indica uma região de intensa recorrência.

Na figura 3.20, mostramos o gráfico de densidade de pontos para os intervalos R2 e R3. Em R2 o aprisionamento ocorre para tempos intermediários e identifica as trajetórias que passeiam ao redor da estrutura. Já em R3 os tempos são mais longos e correspondem às trajetórias que penetram em estreitos espaços da estrutura. Aparentemente, a figura desenhada pelo intervalo R2 (figura 3.20(a)) aparece novamente em (b).

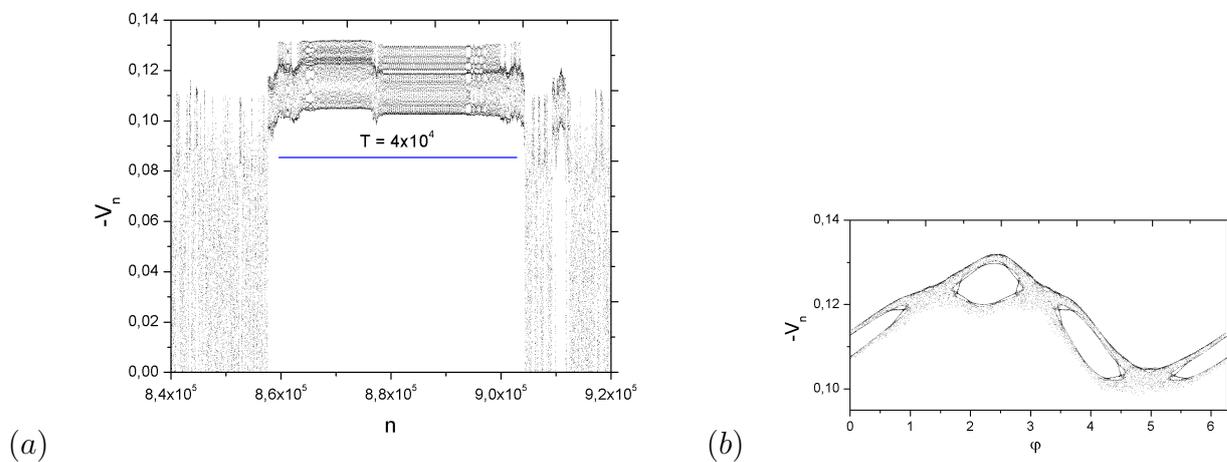


Figura 3.18: Em (a) gráfico de  $-V_n \times n$  onde nota-se um período muito longo de aprisionamento em torno de  $-V_n \approx 0.12$ . A figura (b) mostra a região do plano de fases a que se refere o aprisionamento em (a).

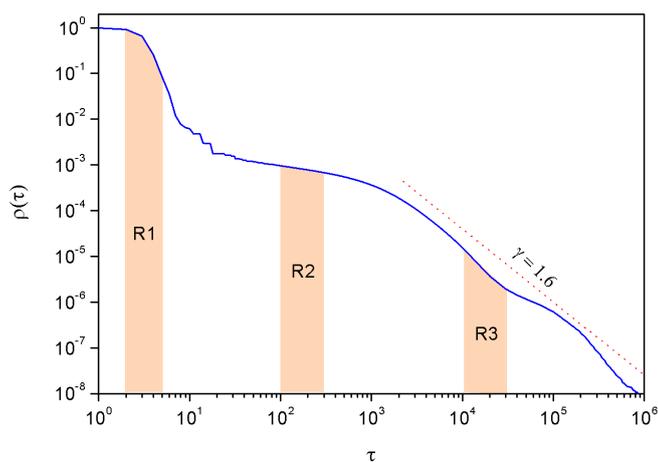


Figura 3.19: ETR para a região mostrada na figura 3.18 com intervalos divididos para o estudo de regiões: R1 [2:5], R2 [10:30], R3 [ $1 \times 10^4$ : $3 \times 10^4$ ]

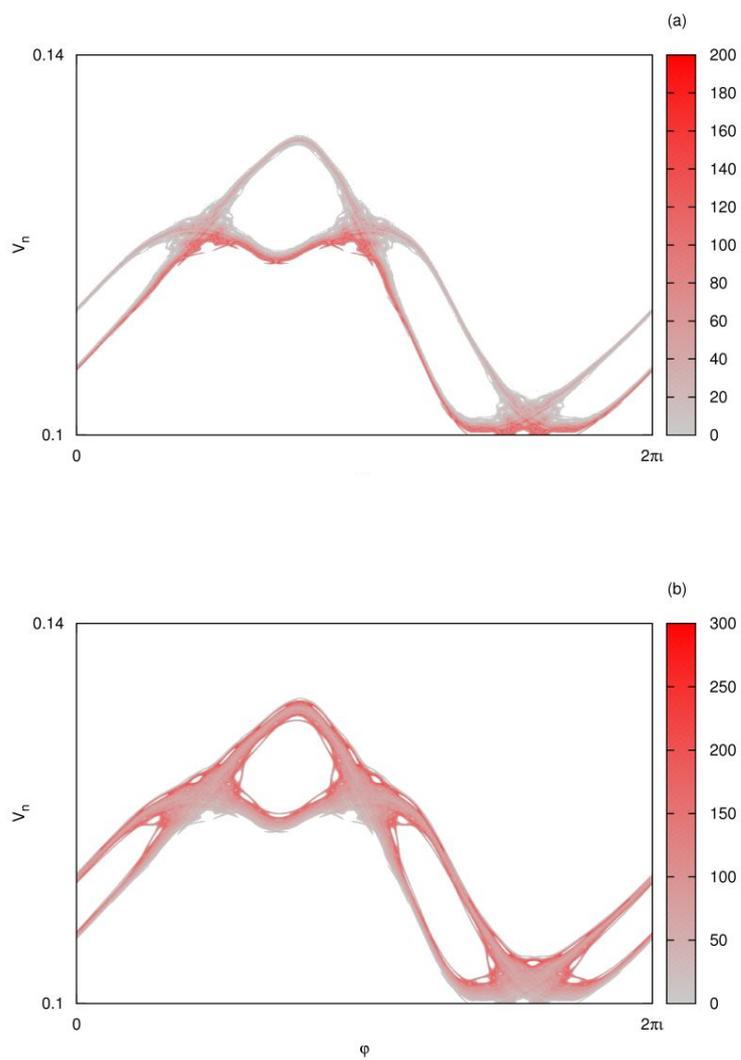


Figura 3.20: Gráfico de densidade de pontos do espaço de fases das energias, para as regiões (a)R2 e (b)R3 da figura 3.19.

# Capítulo 4

## Aprisionamento e difusão

Neste capítulo estudaremos a dependência do crescimento não linear da velocidade, para um *ensemble* de partículas dentro do BAP, com o espaço de fases geométrico, especialmente, por conta de algumas órbitas que se mantêm em um movimento quase periódico. Em bilhares, o mecanismo conhecido como aceleração de Fermi (**AF**) se manifesta, a princípio, por uma introdução de um potencial dependente do tempo, como aquele realizado nas seções anteriores. Dentre os bilhares que apresentam AF destacamos: o bilhar estádio [53], Sinai [28], elíptico [54] e oval [55].

Para o bilhar anular, através da introdução de uma perturbação dependente do tempo, ou seja, a não conservação da energia do sistema, não é suficiente para que se possa observar o crescimento ilimitado da energia, pois o momento angular da partícula com relação ao centro do círculo externo ainda é conservado quando os círculos estão dispostos concêntricamente ( $\delta = 0$ ). Para se observar a **AF** temos que quebrar a simetria da parte anular do modelo, isto é, trabalhar o modelo com  $\delta \neq 0$  [26, 27].

### 4.1 Transporte anômalo no espaço dos momentos

Antes de adentrarmos nesta seção, algumas definições com respeito às palavras transporte fazem-se necessárias. O transporte anômalo refere-se à dispersão global de órbitas caóticas através de regiões do espaço de fases<sup>1</sup> durante longos períodos de tempo. Em diversos bilhares, a dependência temporal das fronteiras gera o fenômeno da aceleração de Fermi. Dessa forma, o espaço de fases em coordenadas canonicamente apropriadas (*tempo e energia*) ou no caso do BAP,  $(\varphi, V_\eta)$ , apresenta o eixo das velocidades aberto de zero a  $\infty$ . Fisicamente, sabe-se que dizer que a velocidade cresce ilimitadamente, ou seja, que a velocidade tende ao infinito é impossível segundo a teoria da relatividade. No entanto os cálculos que serão apresentados não consideram correções relativísticas<sup>2</sup>. Sendo

---

<sup>1</sup>Perceba que o estudo do transporte anômalo só faz sentido quando o espaço de fases em questão, possui uma ou os dois eixos abertos (não confinado) para a dispersão das trajetórias

<sup>2</sup>O leitor pode obter maiores informações sobre bilhares relativísticos em [58, 59]

o eixo das velocidades aberto, podemos caracterizar o comportamento das velocidades de um *ensemble* de partículas não interagentes, analisando o primeiro ou segundo momento, também conhecidos como velocidade média e desvio quadrático médio respectivamente:

$$\text{primeiro momento: } \langle \Delta V \rangle (n) = (1/N_p) \sum_{j=1}^{N_p} (V(n) - V(0))_j \quad (4.1)$$

$$\text{segundo momento: } \langle \Delta V^2 \rangle (n) = \sum_{j=1}^{N_p} \frac{(V(n) - V(0))_j^2}{N_p} - \left[ \sum_{j=1}^{N_p} \frac{(V(n) - V(0))_j}{N_p} \right]^2 \quad (4.2)$$

onde  $N_p$  é o número de condições iniciais distinguidas pelo índice  $j$ .

O transporte para a AF pode então ser caracterizado pelo crescimento algébrico tanto do primeiro momento, quanto do segundo momento, da velocidade ( $V$ ) da partícula calculada sobre um *ensemble* de condições iniciais:

$$\langle \Delta V \rangle \approx n^\nu, \quad (4.3)$$

$$\langle \Delta V^2 \rangle \approx n^\beta, \quad (4.4)$$

onde  $\langle . \rangle$  significa a média sobre um *ensemble*, isto é, uma média sobre muitas órbitas. Nota-se que as equações 4.3 e 4.4 são do tipo lei de potência e como decorrência da própria definição, têm-se a relação:  $\beta = 2\nu$ .

Se  $\beta=1$ , o transporte é dito difusivo ou normal, se  $\beta \neq 1$  então o transporte é anômalo e classificado como: sub-difusivo  $0 < \beta < 1$  ou superdifusivo  $1 < \beta \leq 2$ . Quando  $\beta = 2$  o transporte é balístico e corresponde a partículas viajando com velocidade constante no espaço de fases.

Para os bilhares, não há uma razão criteriosa para se estudar o comportamento de um *ensemble* de partículas através da média (primeiro momento) ou pelo segundo momento. Em geral, como estes estudos envolvem um esforço computacional muito grande opta-se por aquele que forneça um resultado satisfatório em um período de tempo mais curto. Como geralmente para sistemas Hamiltonianos o transporte é caracterizado pelo segundo momento, nós o utilizaremos nesta seção para caracterizar o fenômeno da AF, porém na seção 4.3 e no próximo capítulo nós usaremos o primeiro momento por conveniência.

Na figura 4.1 apresentamos o desvio quadrático médio da velocidade (segundo momento) como função do número de iterações, para um ensemble de partículas no BAP com:  $(\phi - \varphi = 0)$ ;  $r + \delta = 0.8$  em dois casos: (a)  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.05$  e (b)  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.1$ . Em cada um dos casos, modificamos a excentricidade  $\delta$  para observarmos possíveis mudanças

de comportamento. Iniciamos  $10^4$  condições iniciais com  $V_0 = 0.1$ ,  $\alpha = \theta = 0.2$  e  $\varphi$  entre  $[0, 2\pi]$  e iteramos  $10^7$  vezes.

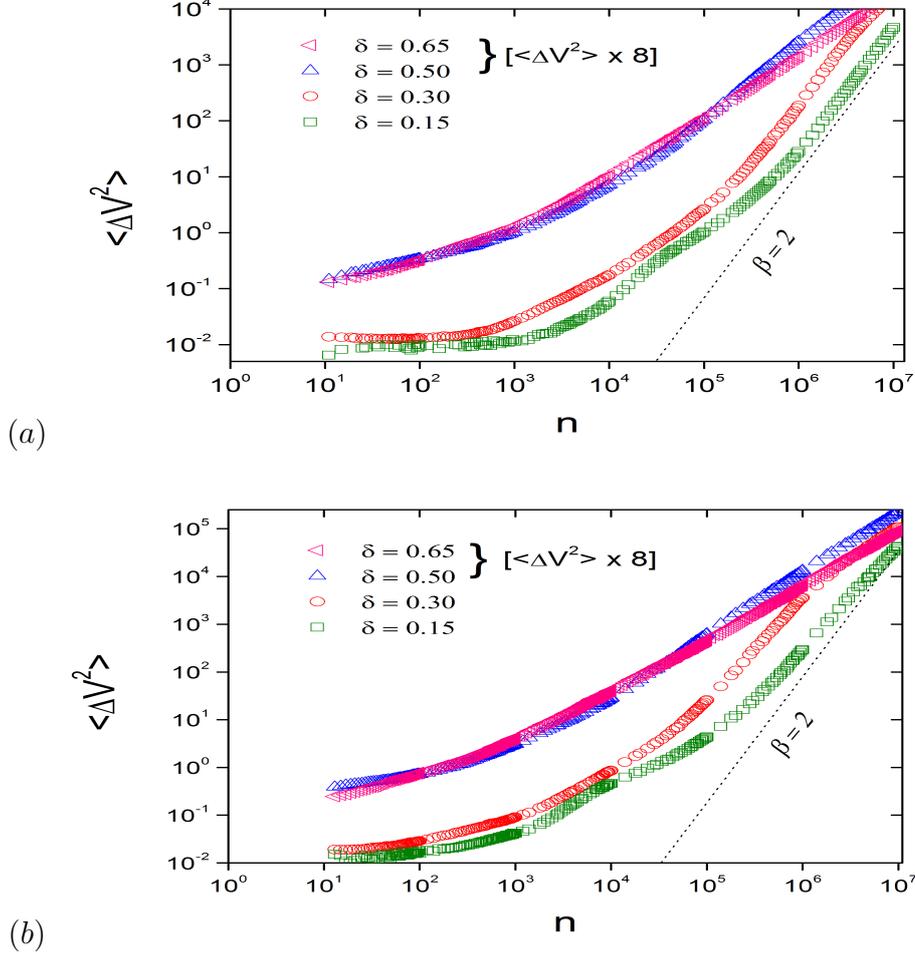


Figura 4.1: Transporte ao longo da componente V (velocidade) do bilhar anular pulsante. (a)  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.05$ , (b)  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.1$ . Os casos  $\delta = 0.65$  e  $\delta = 0.5$  foram trocados de escala para melhor visualização

A figura 4.1 mostra que a alteração das amplitudes das fronteiras, não modificou significativamente o expoente de crescimento  $\beta$ , ao passo que a excentricidade torna-se responsável pelo surgimento de transporte desde sub-difusivo até balístico em um mesmo sistema. Na tabela 4.1 indicamos os valores do expoente  $\beta$ , obtido depois de  $5 \times 10^5$  iterações para  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.05$ . Portanto, o bilhar anular com fronteiras dependentes do tempo, possui um parâmetro ( $\delta$ ) que possibilita observar a dispersão da velocidade por diversos regimes anômalos.

$\delta$	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	0.65
$\beta$	1.84(4)	1.922(3)	1.88(9)	1.30(1)	1.24(6)	1.12(3)

Tabela 4.1: Valores dos expoentes  $\beta$ , obtido depois de  $5 \times 10^5$  iterações para  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.05$

A princípio o resultado obtido para o bilhar anular era esperado, uma vez que, para cada excentricidade,  $\delta$ , temos uma configuração diferente do bilhar anular e logo comportamentos diferentes. Porém, seria razoável aceitar que, sendo a excentricidade a responsável pelo surgimento do fenômeno da aceleração de Fermi, devido à quebra da integrabilidade do sistema, quanto maior ela fosse maior seria o expoente de transporte, o que efetivamente não acontece durante todo o processo. Nas primeiras interações observa-se realmente que quanto maior  $\delta$ , maior o expoente  $\beta$ . Porém, depois de certo instante há uma inversão e encontramos pequenas excentricidades que, depois de um transiente  $\mathcal{O}(10^4)$  se aproximam do transporte balístico ao passo que as excentricidades maiores tendem ao transporte normal ou difusivo. Esta inversão aconteceu quando a dispersão da velocidade é muito grande, ou seja, quando a partícula está com velocidade muito alta comparada a sua velocidade inicial.

Outra mudança de comportamento acontece subsequente ao transiente da ordem de  $10^4$ , quando o desvio quadrático médio da velocidade, para baixas excentricidades, apresentam uma difusão normal até  $5 \times 10^5$  e então uma mudança súbita de comportamento acontece e um “crossover” para o transporte superdifusivo ( $\approx$  balístico) pode ser observado.

Quando o sistema apresenta o crescimento ilimitado de energia, o espaço  $(\varphi, V_\eta)$  fica completamente preenchido e sem qualquer estrutura (ilhas) observável, que possa explicar tais mudanças. Para estudar o fato de observarmos diferentes regimes de transporte no BAP para altas velocidades, devemos encontrar um vínculo entre alguma coordenada do espaço de fases geométrico com as velocidades ao longo do tempo de estudo. Na próxima seção, estabeleceremos esta conexão ao quantificarmos algumas órbitas que se mantêm, durante um certo período de tempo, em um movimento quase regular sem mudança significativa na velocidade.

## 4.2 Órbitas laminares

Como adiantamos na introdução deste capítulo. Uma das formas de observarmos a **AF** no bilhar anular é “quebrar” a conservação do momento angular da partícula, impondo excentricidades ( $\delta \neq 0$ ), além de introduzir uma dependência temporal nas fronteiras, fazendo com que a energia da partícula também não se conserve. Sendo o momento angular definido em relação à fronteira externa como:

$$\begin{aligned} l &= |\vec{L}| = |\vec{R} \times \vec{V}| \\ l &= (1 + \epsilon_R \cos \varphi) v \sin \alpha, \end{aligned} \tag{4.5}$$

percebemos que o momento angular da partícula depende somente de uma das coordenadas do espaço geométrico ( $S = sen\alpha$ ) e das outras duas do espaço das energias ( $\varphi, v$ ). Portanto, iremos nos fixar em uma busca por uma relação entre duas coordenadas vinculadas à espaços canonicamente diferentes, no caso:  $V$  (velocidade total da partícula depois de cada colisão) e  $S$  ( $S = sen\alpha$ , ângulo de reflexão da partícula), para explicarmos os diferentes regimes anômalos apresentados na seção anterior. Para verificar esta proposta nós analisamos o comportamento de uma única órbita iniciada sob o modelo excêntrico,  $\delta = 0.65$  e  $r = 0.15$ , com amplitudes de oscilação  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.05$ . A figura 4.2 mostra a evolução de  $S$  e  $V$  como função do número de colisões  $n$ .

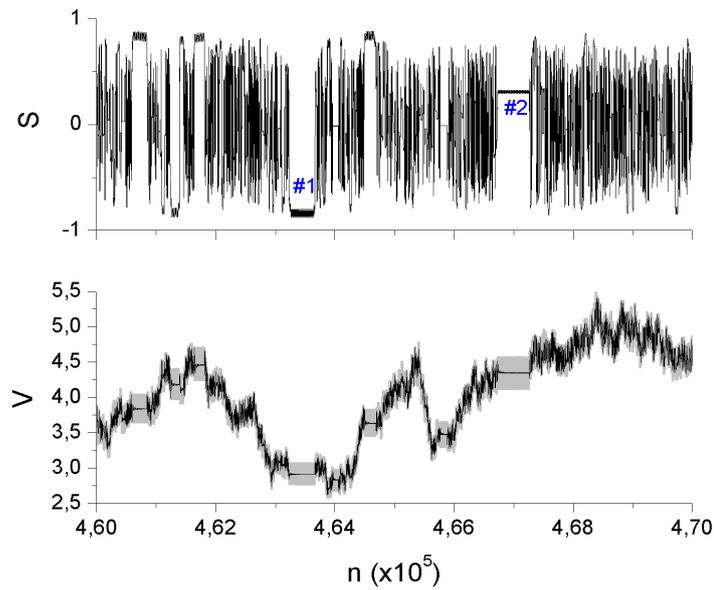


Figura 4.2: Funções  $S(n)$ (preta) e  $V(n)$ (cinza) para uma única trajetória no bilhar pulsante para  $\delta = 0.65$  e  $r = 0.15$ . A linha preta para  $V(n)$  indica a média acumulativa.

De acordo com a figura 4.2, a função  $S(n)$  alterna entre períodos regulares (fases laminares) e irregulares (fases turbulentas). Durante as fases laminares,  $S(n)$  permanece constante ou com pequenas oscilações, ou seja, os ângulos de reflexão quase não se modificam durante estes intervalos, ao passo que nas fases turbulentas,  $S(n)$  preenche constantemente o intervalo entre  $[-1;1]$ . Duas órbitas laminares correspondentes aos intervalos #1 e #2, indicados na figura 4.2, estão ilustradas na figura 4.3. Note, ainda na figura 4.2, que durante uma fase laminar a velocidade ( $V$ ) oscila entre um valor médio, já durante a fase turbulenta ocorre o aumento ou perda de energia. O comportamento mencionado anteriormente revela uma forte relação entre a componente  $S$  do espaço geométrico com a velocidade  $V$  do espaço das energias. Isso significa que o comportamento de um ensemble de partículas para o estudo da **AF** depende do comportamento dos ângulos de reflexão durante todo processo e sendo assim, podemos prever que quanto maior for a quantidade de fases laminares durante as iterações, menor será o expoente de transporte para a **AF** visto que tais fases possuem velocidades oscilando entre um valor médio. Este valor médio

é obtido através da média acumulativa calculada por:  $V(n)_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i^j$  onde  $j$  define os intervalos laminares e  $n$  neste caso, recebe valores  $n = 1, 2, \dots, l_j$  com  $l_j$  sendo o número de colisões em que a partícula permanece em fase laminar (veja figura 4.3).

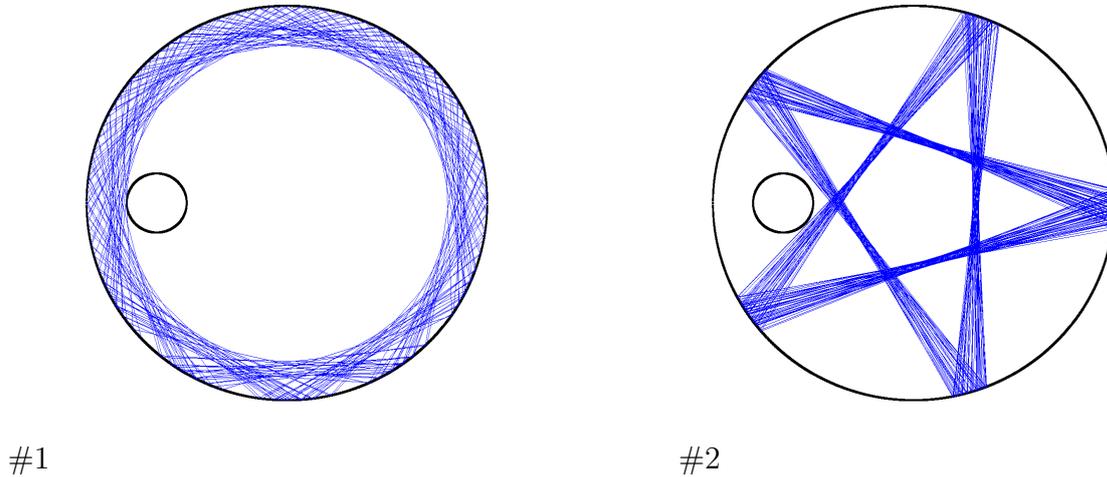


Figura 4.3: Órbitas no plano do bilhar indicado pelos intervalos #1 e #2 na figura 4.2

Para o BAP, existe uma grande dificuldade em determinar quais são os intervalos de  $S$  que têm velocidades em torno de um valor médio, isto é, qual é o tamanho das fases laminares, principalmente por dois motivos:

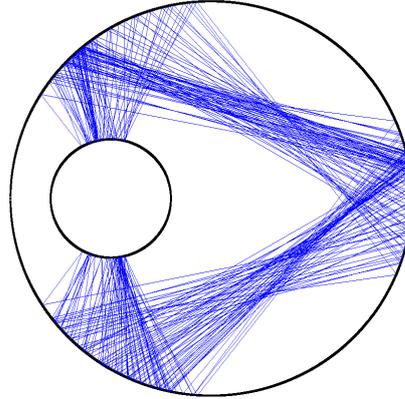
(i) as órbitas laminares que exercem seu movimento sem colidir com o círculo espalhador (fronteira interna), não são as únicas que possuem velocidades em torno de um valor médio. Algumas órbitas que colidem com o círculo espalhador, realizando quase o mesmo movimento, também possuem um valor central para velocidade e não podem ser descartadas. Veja por exemplo a órbita da figura 4.4 que representa o intervalo #3 para o caso  $\delta = 0.5$  da figura 4.5.

(ii) não há uma escala (tamanho) pré estabelecido para diferenciarmos as fases laminares. Portanto, deve-se analisar sua presença especificamente para cada sistema.

Para resolver este problema, nós adotamos os seguintes critérios:

*Critério 1:* Para que se possa quantificar grande parte das órbitas laminares, deve-se analisar  $|S_n - S_{n+1}|$ , isto é, a diferença entre dois ângulos consecutivos, ao invés apenas  $S(n)$ .

**Motivo:** Analisando a diferença entre ângulos consecutivos, as fases laminares com grandes oscilações, como aquela representada na figura 4.4, tornam-se menores. Assim, podemos quantificá-la em nossos cálculos, adotando uma tolerância  $\xi$ . Portanto o primeiro



#3

Figura 4.4: Órbita no plano do bilhar das iterações entre  $S \in [2.4 \times 10^5; 2.6 \times 10^5]$  da figura 4.5.

critério exige que a priori, consecutivos valores de  $S$  devem respeitar:  $|S_n - S_{n+1}| = \xi$ .

*Critério 2:* O primeiro critério não resolve, totalmente, o problema pois, mesmo com uma escolha conveniente de  $\xi$ , pode existir fases turbulentas que respeitem o primeiro critério e conseqüentemente serão incluídos nos cálculos. Uma solução prática pode ser tomada ao exigirmos um tamanho mínimo ( $l_{min}$ ) para que uma órbita seja laminar.

**Motivo:** Ao estipularmos um  $l_{min}$  nós excluímos boa parte das órbitas turbulentas, que por acaso venham a respeitar o primeiro critério. Mesmo algumas órbitas respeitando a condição  $|S_n - S_{n+1}| = \xi$ , esta, se for uma órbita turbulenta, não permanecerá por muito tempo.

Na figura 4.5 mostramos o comportamento de  $S_n$  e também o equivalente  $|S_n - S_{n+1}|$  para uma órbita que evolui no bilhar anular com  $\delta = 0.5$ ,  $v_0=0.02$  e  $\varphi_0 = 0$ .

Perceba que o conceito de órbitas laminares para o caso específico do BAP, fica definido então, não somente por pequenas oscilações em  $S(n)$  e sim por todas as órbitas que ao longo de um intervalo possuem uma velocidade média central.

Para obter informações de quantas partículas estão na verdade em fases laminares, nós definimos  $f_l(n)$  como a fração de partículas de um *ensemble* que permanecem nesta fase em função do número de iterações  $n$ . Na figura 4.6 mostramos  $f_l(n)$  para  $\delta = 0.65$ ,  $\delta = 0.5$  e  $\delta = 0.3$ , na qual utilizamos o mesmo *ensemble* daquele usado para os estudos do desvio quadrático médio da velocidade. Para definir uma fase laminar nós definimos  $\xi = 0.15$  e  $l_{min} = 15$ .

Da figura 4.6, percebe-se que a quantidade de fases laminares para o caso  $\delta = 0.65$  é maior do que para  $\delta = 0.5$  que por sua vez é maior do que  $\delta = 0.3$ . Nota-se ainda que para

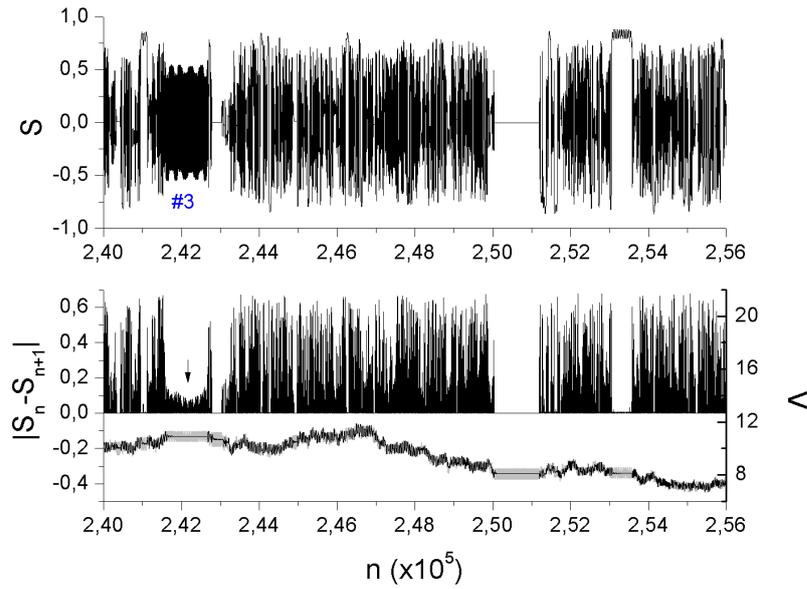


Figura 4.5: Funções  $S(n)$ ,  $V(n)$  e  $|S_n - S_{n+1}|$  (linhas cinzas plotadas no mesmo gráfico). As linhas pretas no gráfico de baixo indicam a média acumulativa.

$\delta = 0.3$ ,  $f_l(n)$  cresce até  $n \approx 10^4$ , mantêm-se constante e depois de  $n \approx 5 \times 10^5$  decresce, enquanto para  $\delta = 0.5$  e  $\delta = 0.65$ ,  $f_l(n)$  também cresce até  $n = 10^4$  porém, mantêm-se em uma média durante o resto do processo. Este resultado, qualifica nossa previsão de que a quantidade de órbitas laminares de um *ensemble* de partículas é inversamente proporcional ao expoente  $\beta$  que caracteriza os regimes anômalos, ou seja, quanto maior a fração de órbitas laminares, menor será  $\beta$  (veja a comparação na tabela 4.2). Um fator que corroborou com esta afirmação, foi o fato da função  $f_l$  evidenciar o “crossover” de difusão normal para super-difusivo ( $\approx$  balístico) que ocorre no caso  $\delta = 0.3$ , quando decresceu aproximadamente no mesmo ponto onde ocorreu o “crossover” do desvio quadrático médio (Figura 4.6 (a) e (b)).

$\delta$	0.3	0.5	0.65
$\beta$	1.88(9)	1.24(6)	1.12(3)
$f_l(n)(\%)$	15	30	43

Tabela 4.2: Valores dos expoentes  $\beta$ , e das porcentagens de fases laminares para um mesmo *ensemble* de condições iniciais. A tabela sugere que quanto maior for a quantidade de órbitas laminares, menor será o expoente  $\beta$  da aceleração de Fermi.

A partir das quantificações das órbitas laminares, reconfiguramos o espaço geométrico, por densidade de pontos, utilizando somente as órbitas laminares recolhidas depois de  $n = 10^4$  iterações para uma única condição inicial típica. As figuras 4.7 (b), (d) e (e) mostram os espaços geométricos reconfigurados para  $\delta = 0.3$ ,  $\delta = 0.5$  e  $\delta = 0.65$  respectivamente. Para compararmos com o caso estático, as figuras devem ser analisadas aos pares: (a)-(b), (c)-(d) e (e)-(f), onde as figuras (a), (c) e (e) correspondem justamente aos casos estáticos

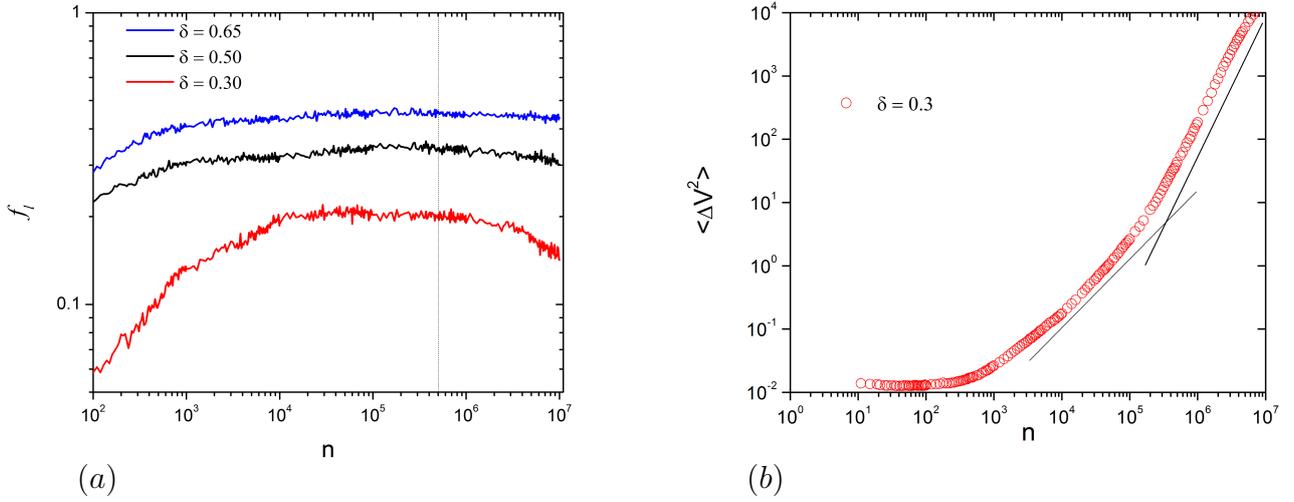


Figura 4.6: (a) Fração de órbitas laminares em função do número de iterações para os casos  $\delta = 0.3$  e  $\delta = 0.5$ . (b) Desvio quadrático médio para  $\delta = 0.3$  indicando um *crossover* de difusão normal para super-difusivo. A linha pontilhada em (a) indica a diminuição na quantidade de órbitas laminares e consequentemente o *crossover* em (b).

do bilhar anular. Podemos perceber que as órbitas laminares predominam em duas regiões principais: (i) regiões de praia, entre o limite integrável e não integrável do espaço de fases geométrico e (ii) Em regiões ao redor das ilhas. Para os casos  $\delta = 0.5$  e  $\delta = 0.65$  ainda há uma intensa densidade de órbitas em regiões de pequenos ângulos de reflexão:  $S \approx 0$ . A figura 4.7 contém uma informação muito importante pois na verdade ela revela que conforme a velocidade da partícula aumenta, as órbitas tendem a reconstruir ou se aproximar das regiões regulares do espaço de fases estático, como as ilhas e as MUPOs que existem no bilhar anular. As figuras 4.7 (b) e (d) mostram claramente a reconstituição de algumas ilhas no espaço de fases geométrico pulsante. Este fato têm um papel importante na dinâmica do sistema e será cuidadosamente avaliado na seção 4.3.

Nós gostaríamos de salientar que os critérios apresentados para quantificar as órbitas laminares, são particulares ao BAP. No entanto, a presença das órbitas laminares é comum a todos os bilhares bi-dimensionais de forma que sua quantificação têm uma ligação direta sobre o comportamento da AF.

### 4.3 Supressão da AF via propriedades dinâmicas

Nesta seção nós analisaremos a sensibilidade da aceleração de Fermi para com as condições iniciais em um espaço de fases quadri-dimensional (4D). No contexto dos bilhares há uma robusta conjectura para bilhares bi-dimensionais, proposta por Loskutov, Ryabov e Akinshin [28], conhecida como conjectura LRA que estabelece a existência de caos no espaço de fases do modelo (bilhar) estático como condição suficiente para se observar a AF no mesmo bilhar dependente do tempo. Sendo assim, nós discutiremos o

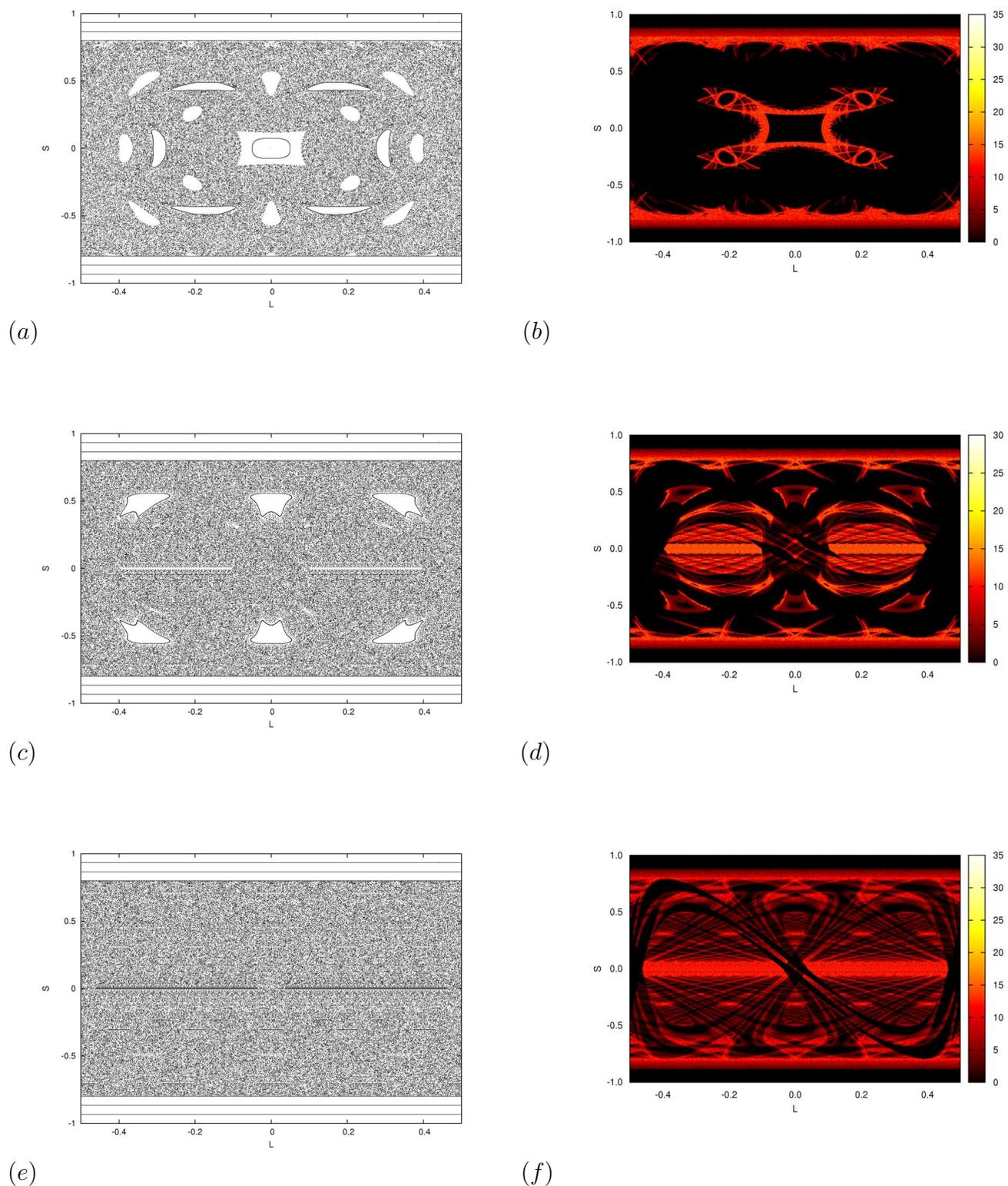


Figura 4.7: Regiões no espaço de fases geométrico onde predominam as órbitas laminares. As figuras (a), (c) e (e) correspondem ao caso estático com  $\delta = 0.3$ ,  $\delta = 0.5$  e  $\delta = 0.65$  respectivamente, para comparação com as figuras (b), (d) e (f) que mostram as regiões predominantes de órbitas laminares

modelo do bilhar anular sob o enfoque da conjectura LRA, porém, iremos acompanhar a dinâmica nos dois planos de fases  $(L, S)$  e  $(\varphi, V_\eta)$ . Outra questão que será discutida diz respeito a tendência do espaço de fases geométrico recuperar sua topologia do caso estático conforme a velocidade da partícula aumenta.

Para o caso estático, no contexto não dissipativo, como vimos na seção 3.1, a partícula colide elasticamente com ambas as fronteiras e a dinâmica é governada por um mapa não linear que resulta em um plano de fases obtido pela posição da partícula com relação à fronteira externa,  $(L, S)$ . O caso do bilhar anular dependente do tempo, a energia total da partícula pode variar no tempo e outro plano, o espaço  $(\varphi, V_\eta)$ , deve ser observado.

Neste cenário uma condição inicial tem quatro componentes  $(L, S, \varphi, v)$ <sup>3</sup>. Para verificar a evolução da partícula no espaço de fases 4D, consideramos o BAP com três valores diferentes para a velocidade inicial da partícula:  $v = 0.1, v = 10, v = 100$  para  $\varphi = 0$  e vinte valores de  $(L, S)$  escolhidos dentro do mar de caos do espaço geométrico estático (veja figura 4.8(a)), onde percebe-se a existência de 1:6 ilhas de ressonâncias.

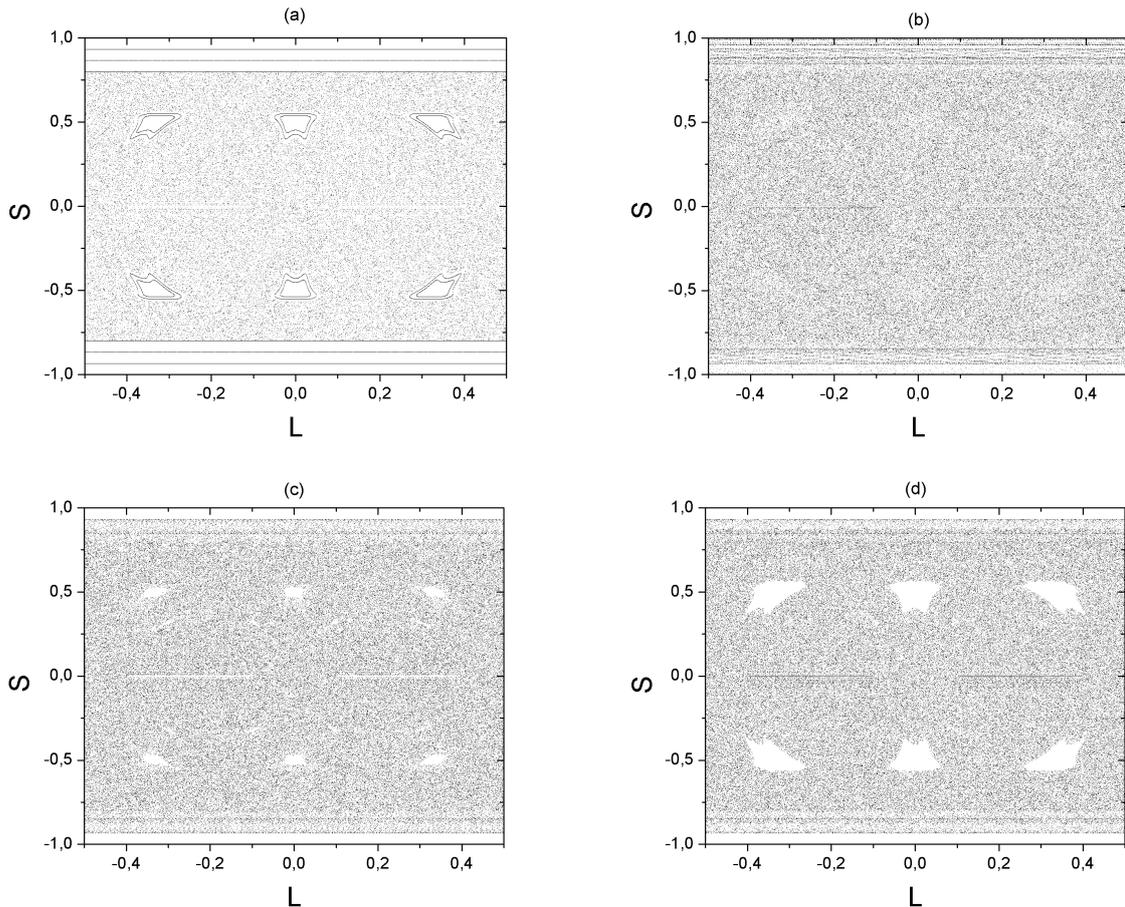


Figura 4.8: Espaço de fases geométrico com  $\delta = 0.5$  e  $r = 0.3$  para: (a) caso estático, (b - d) casos pulsantes com  $v_0 = 0.1, v_0 = 10$  e  $v_0 = 100$  respectivamente.

<sup>3</sup>Embora o espaço de fases das energias seja obtido por:  $(\varphi, V_\eta)$ , onde  $V_\eta$  é a componente radial da velocidade, a condição inicial para velocidade é dada pela velocidade total para que então no momento da colisão com a fronteira externa, se possa obter a componente radial

Da figura 4.8, nós observamos que a dinâmica em (b) é bastante diferente da figura (a) (referente ao caso estático para comparação), e nenhuma estrutura ressonante existe. Em (c) pode-se perceber certa “lembrança” das 1:6 ilhas de ressonância. Já em (d) a similaridade com (a) é bem realçada, a dinâmica do bilhar dependente do tempo quase recuperou totalmente a dinâmica estática, isso porque a velocidade relativa partícula-fronteira é grande o suficiente para que a partícula quase não perceba as oscilações das fronteiras. Uma pergunta natural que pode surgir: se as estruturas das ilhas ressonantes podem ser recuperadas no limite de altas energias então, o que ocorre dentro delas? E quais as possíveis consequências para a aceleração de Fermi?

Afim de responder a estas questões, nós escolhemos duas condições iniciais sendo a primeira anexada ao marcador (1) dentro da ilha recuperada da figura (c) e a outra com o marcador (2) fora do contorno visual. A figura 4.9(a) mostra uma ampliação de apenas uma das ilhas com as condições iniciais escolhidas. O contorno indica o limite da ilha ressonante para o caso estático apenas para comparação. É visível que a condição inicial (2) espalha-se pelo mar de caos enquanto a condição (1) permanece confinada na pequena ilha recuperada.

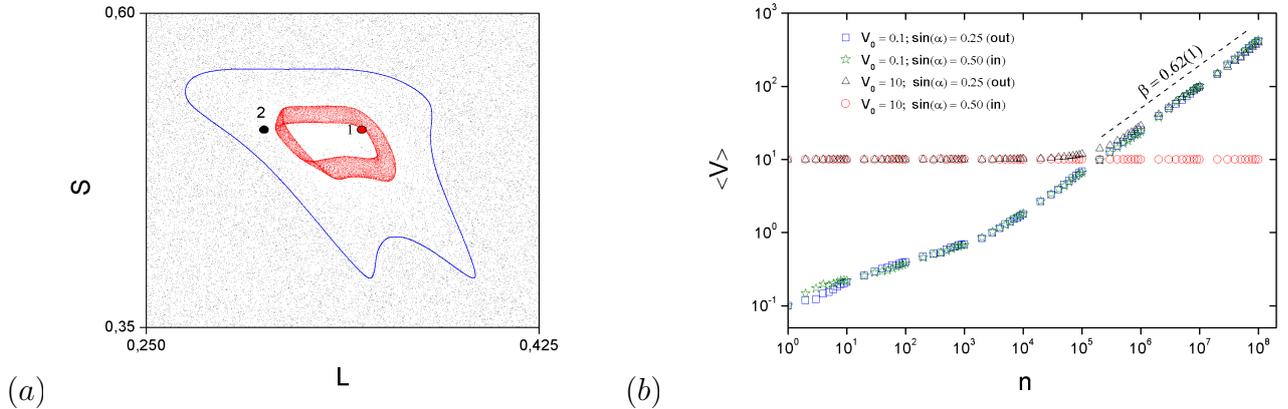


Figura 4.9: (a) Ampliação de uma das ilhas quase recuperadas com  $\delta = 0.5$ ,  $r = 0.3$  e  $v = 10$ . O número (1) consiste de um par  $(L, S)$  dado dentro da ilha recuperada enquanto (2) foi dado próximo à ilha porém fora. A linha azul representa a ilha do caso estático para comparação. (b) Velocidade média em função do número de iterações. Dois ensembles foram usados para  $v = 0.1$  e  $v = 10$ . Para  $v = 0.1$  com (1) ou (2) e  $v = 10$  com (2), observamos a AF. Para  $v = 10$  com (1) ocorreu a supressão total da AF.

Neste cenário, nós investigamos o comportamento da velocidade média de um ensemble com 500 condições iniciais para a fase da fronteira externa com dois valores iniciais de velocidade,  $v = 0.1$  e  $v = 10$ . Fixamos também os valores escolhidos (1) e (2) que formaram a figura 4.9 de forma que o conjunto de condições iniciais foram formados por:  $(\varphi, v; L, S) = (\varphi(\text{ensemble}), 0.1, (1)\text{ou}(2))$  e  $(\varphi(\text{ensemble}), 10; (1)\text{ou}(2))$ . A figura 4.9 mostra os resultados obtidos até  $10^8$  iterações.

Observamos a ocorrência da AF para três dos quatro conjuntos iniciais selecionados. Os símbolos: quadrado (azul), estrela (verde) e triângulo (preto) que apresentam AF acumulam em uma curva dada pela lei:  $\langle V \rangle \approx n^\nu$  com  $\nu \approx 0.62(1)$  (superdifusivo). Porém,

quando escolhemos  $v = 10$  como velocidade inicial, os comportamentos diferem entre as escolhas (1) ou (2). Analisando a figura 4.9(a) vemos que a condição inicial (1) mantém-se confinada em uma região que lembra uma recuperação da ilha ressonante estática. Este confinamento no espaço de fases geométrico tem um efeito poderoso no comportamento da velocidade média para um *ensemble* de condições iniciais dadas no espaço das energias. A velocidade já não cresce mais e a aceleração de Fermi é totalmente suprimida: círculo (vermelho) na figura 4.9 (b). Nós afirmamos que a supressão da aceleração de Fermi ocorreu somente devido aos aspectos dinâmicos observados e não houve nenhum efeito dissipativo agindo no sistema (os efeitos de dissipação serão estudados no próximo capítulo).

Para confirmar os resultados nós obtivemos o espaço das energias para dois casos discutidos acima. Na figura 4.10(a), nós consideramos condições iniciais começando de (1) para 30 diferentes valores de  $\varphi$  e fixamos  $v = 10$ . Observa-se depois de  $10^4$  iterações que, a velocidade da partícula permanece confinada em uma determinada camada enquanto que para a escolha (2), figura 4.10 (b), as velocidades se espalham, alcançando valores maiores.

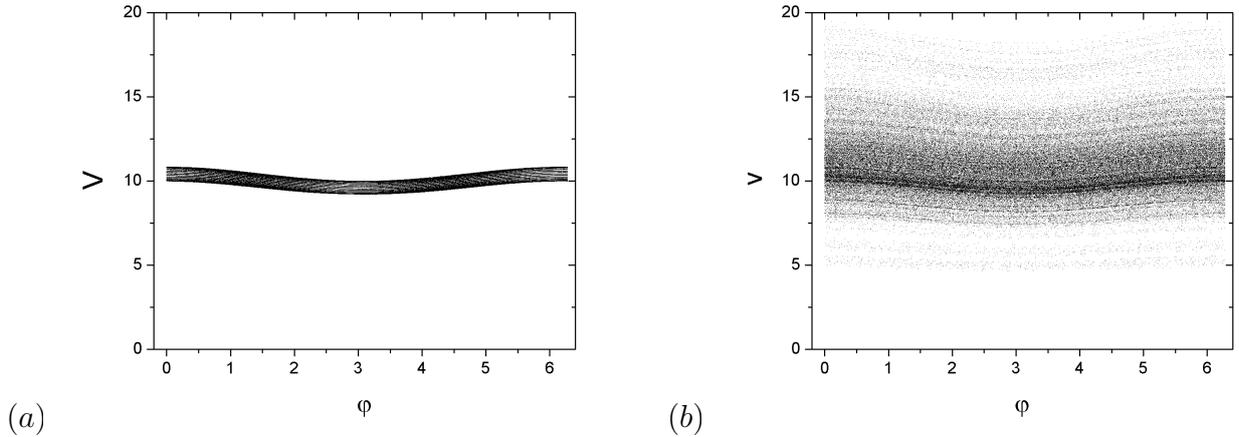


Figura 4.10: Condições iniciais no espaço de fases das energias (a) da marcação (1), as velocidades permanecem confinadas em uma fina camada enquanto (b) da marcação (2) espalham-se para energias maiores.

Nós gostaríamos de ressaltar que nosso resultado não desqualifica a conjectura LRA, ao contrário, nosso resultado também mostrou que o mar de caos para a versão estática foi necessário para a ocorrência da AF para condições iniciais fornecidas dentro do mar de caos. Entretanto, existe uma pequena nuância, para altas velocidades iniciais e mesmo quando existe um mar de caos no espaço de fases do correspondente caso estático, a AF ocorrerá somente quando as condições iniciais não estiverem dentro de qualquer ilha recuperada.



# Capítulo 5

## Dissipação

Neste capítulo nós trataremos dos efeitos de dissipação no bilhar anular pulsante. Por opção, decidimos considerar uma dissipação causada por colisões inelásticas da partícula com as fronteiras de forma que, as equações A.16 e A.25 da velocidade normal da partícula é alterada segundo a expressão:

$$v_{1\eta} = -|-ev_{0\eta} + (1 + e)U| \quad (5.1)$$

onde  $U$  representa a velocidade de uma das fronteiras (equação A.10 e A.11), dependendo em qual delas ocorre a colisão. O parâmetro  $e \in [0; 1]$  é o coeficiente de dissipação. Os casos limites, retomam ao caso elástico ( $e = 1$ ), estudado nos capítulos anteriores e o caso totalmente inelástico ( $e = 0$ ), onde a dinâmica se limita a apenas uma iteração.

Na seção 5.1, nós mostraremos para o caso excêntrico,  $\delta \neq 0$ , que independente da magnitude do coeficiente de dissipação, o fenômeno da aceleração de Fermi é sempre suprimido. A seção 5.2 é uma extensão do trabalho [29] e tratará do caso concêntrico do bilhar anular para mostrar que em sistemas dinâmicos dissipativos, os atratores são formados principalmente onde haviam regiões regulares (*ilhas KAM*) no correspondente caso elástico e a formação destes atratores em regiões favoráveis pode gerar um ganho de energia médio do sistema, maior do que a energia média do mesmo sistema conservativo.

### 5.1 Supressão da AF por colisões inelásticas

Uma das questões que envolvem a AF em bilhares, trata da capacidade de suprimir tal mecanismo por considerar dissipação no sistema. Estudaremos aqui o comportamento de um *ensemble* de partículas não interagentes, sob efeito dissipativo no bilhar anular pulsante excêntrico, no qual o caso elástico apresenta **AF**. Para realizar este estudo nós escolhemos, aleatoriamente, 1000 condições iniciais diferentes para  $\varphi \in [0; 2\pi]$  e  $v = 0.02$ . Para esta velocidade inicial, não precisamos nos preocupar com o surgimento das ilhas

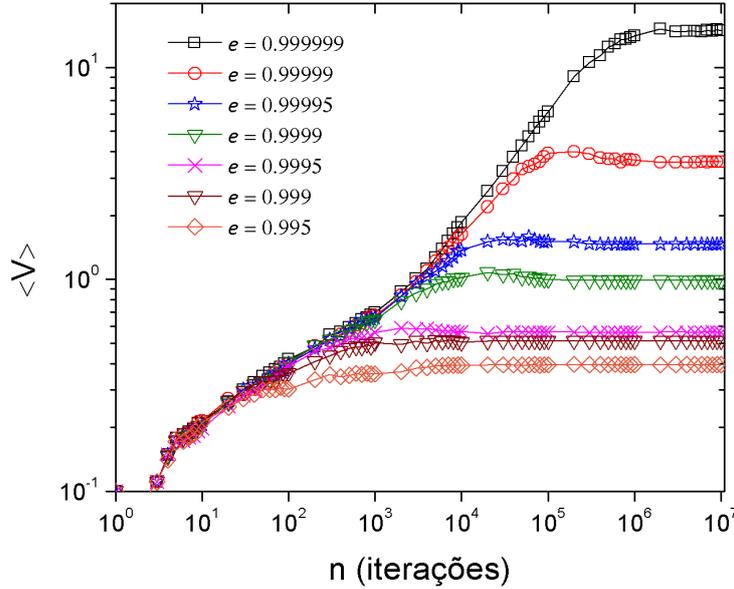


Figura 5.1: supressão da **AF** por colisões inelásticas no bilhar anular pulsante.

recuperadas (seção 4.3 no espaço de fases geométrico de forma que nossa escolha pôde ser aleatória em  $S \in [-1, 1]$  e  $L \in [-1/2, 1/2]$ ). Os demais parâmetros usados foram:  $\delta = 0.5$ ,  $r = 0.3$  e  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.01$ . A figura 5.1 mostra o comportamento de 8 curvas com fracas dissipações entre  $0.999 \leq e \leq 0.999999$  onde podemos perceber que mesmo baixas magnitudes de dissipação são suficientes para que o fenômeno da *AF* não seja mais observado.

## 5.2 O ganho de energia induzido por crise

Esta seção é uma extensão do estudo apresentado no artigo [29] “*Dissipation as a mechanism of energy gain*”, no qual nós discutimos sobre a possibilidade de se obter um ganho de energia médio ao considerar dissipações no sistema, que no caso tratava-se também do bilhar anular pulsante. No referido artigo, propomos que o espaço de fases das energias  $(\varphi, V_\eta)$ , quando composto por ilhas regulares imersas em um mar de caos limitado por curvas do tipo “spanning”, torna-se uma topologia favorável ao aparecimento de atratores (*focos*), quando consideramos os efeitos dissipativos. Isto porque tais atratores formam-se a partir das ilhas que compõem o caso conservativo criando uma bacia de atração que captura grandes extensões do espaço de fases. Caso os atratores formados estejam imersos no mar de caos e em regiões de maior energia do que a energia média do sistema, há um deslocamento da velocidade média de um *ensemble de partículas* proporcionando um ganho de energia. Para tanto, o regime de fracas dissipações é o mais indicado, pois, conforme aumentamos a magnitude do coeficiente de dissipação, os atratores em regiões

de energia mediana desaparecem, prevalecendo outros de energias mais baixas. Agora, nossa proposta é fazer o caminho inverso, ou seja, nós partiremos de um regime de forte dissipação e diminuiremos ligeiramente a magnitude desta dissipação, para observarmos quando e como o primeiro atrator é formado e quais são os ganhos conquistados.

Para iniciarmos nossos estudos escolhemos um coeficiente de restituição:  $0.8674$ ,  $\cong 24\%$  menor do que o caso conservativo. Iniciamos 100 condições com os parâmetros,  $\alpha$  e  $\theta$  fixados em  $0.2$  e variamos  $\varphi \in [0; 2\pi]$  e  $v \in [0.02; 0.3]$  com as configurações:  $\delta = 0$ ,  $r = 0.4$ ,  $\epsilon_R = \epsilon_r = 0.01$  e  $\varphi - \phi = 0$ , para montar a figura 5.2. A figura 5.2 mostra que todas as condições iniciadas em nossas simulações evoluíram para dois atratores sendo um ponto fixo do tipo (*foco*) e um outro aparentemente caótico situado em baixas energias. De fato, devido a complexidade do mapeamento do bilhar anular com dependência temporal, não podemos afirmar com absoluta certeza sobre a classificação do atrator como caótico, isso porque os cálculos envolvem a determinação dos coeficientes de Lyapunov.

O expoente de Lyapunov é uma quantidade que caracteriza a taxa de separação de duas órbitas iniciais, infinitesimalmente próximas. Em sistemas hamiltonianos bidimensionais, por exemplo, os expoentes de Lyapunov aparecem aos pares e com sinais opostos. Para sistemas conservativos a soma dos coeficientes se anula enquanto para sistemas dissipativos a soma é menor do que zero. A classificação de um atrator como sendo caótico, pode ser definida a partir dos coeficientes de Lyapunov sendo que: a soma de todos os expoentes deve ser menor do que zero, caracterizando um sistema dissipativo, e pelo menos um dos expoentes deve ser maior do que zero, indicando a sensibilidade da região às condições iniciais. Os expoentes de Lyapunov raramente são obtidos analiticamente e muito embora existam alguns métodos para sua obtenção, eles tornam-se ineficientes ou impraticáveis para sistemas com mais de duas dimensões como é o caso do bilhar anular pulsante.

O cálculo da velocidade média para o caso  $e = 0.8669$  (veja figura 5.5) indica que o *ensemble* de partículas iniciadas em baixas velocidades não é capaz de alcançar médias maiores, mesmo com a presença de um atrator situado em uma região de maior energia. Isso ocorre porque o *ensemble* de condições iniciais fornecidas, não conseguem ultrapassar os limites da bacia do atrator caótico, ou seja, os limites das bacias de atração do atrator caótico, bem como a do ponto fixo estão bem delineadas pelo espaço de fases. Porém, há uma possibilidade de destruímos o atrator caótico através de um fenômeno chamado *crise*.

As *crises* são repentinas transições no atrator caótico conforme um parâmetro do sistema é variado. Tais transições foram primeiramente estudadas por C.Grebogi et al. [56]. São distinguidos três tipos de crises que um atrator pode sofrer:

- **Destruição do atrator caótico** (crise de fronteira)
- **Aumento do atrator caótico** (crise interior)
- **Fusão de atratores caóticos** (crise de fusão)

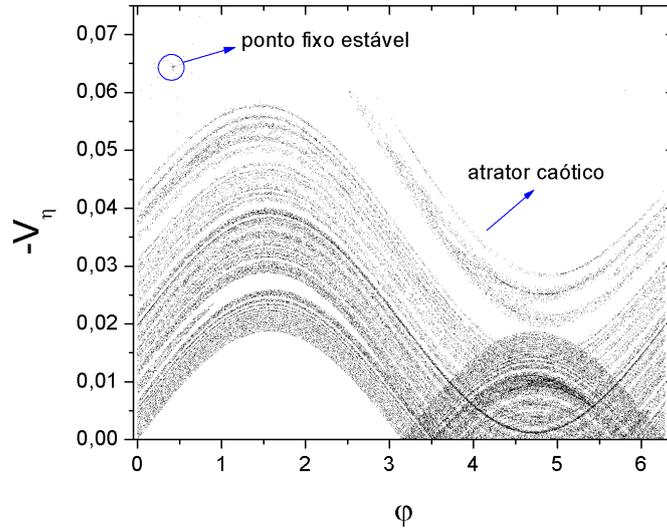


Figura 5.2: Espaço de fases das energias do bilhar anular pulsante para o caso  $\delta = 0$  e dissipativo com  $e = 0.8669$  indicando a presença de um ponto fixo atrativo e um possível atrator caótico.

Particularmente, estamos interessados em um evento de crise de fronteira pois, tal destruição pode ser útil como um mecanismo de controle das trajetórias localizadas no atrator caótico uma vez que depois de um evento de crise, as trajetórias são capturadas pelo ponto fixo atrativo (*foco*). Um evento de crise de fronteira está associado a ligeiras modificações em um parâmetro do sistema, culminando na colisão do atrator caótico com um dos ramos da variedade estável do ponto de sela. Sabe-se que em sistemas dissipativos, para um ponto fixo do tipo sela existem pelo menos duas variedades, sendo: *(i)* dois ramos estáveis e *(ii)* dois instáveis. As variedades instáveis são formadas por uma família de órbitas que se afastam do ponto de sela. Uma delas evolui para um ponto fixo atrativo (*foco*) enquanto a outra forma o atrator caótico. As variedades estáveis, por sua vez, formam as bordas da bacia de atração de ambos os atratores: ponto fixo atrativo e o atrator caótico.

Normalmente, as variedades são obtidas através do mapeamento do sistema. Primeiro, deve-se encontrar a expressão do ponto de sela. Depois, calcula-se os auto-valores e auto-vetores. Assim, as variedades instáveis são obtidas a partir da iteração do mapa com pequenos incrementos nas componentes dos auto-vetores. A variedade estável, por sua vez, é obtida pelo mapeamento inverso do sistema. Ressaltamos que devido a complexidade do mapeamento do BAP, mesmo para o modelo simplificado, o método descrito acima fica extremamente complicado. Contudo, podemos contornar este problema, desenhando as bacias de atração do ponto fixo atrativo e do atrator caótico. Tais bacias de atração foram obtidas ao dividirmos as componentes  $V_\eta$  e  $\varphi$  em 2000 partes, resultando em  $4 \times 10^6$  condições iniciais diferentes que foram iteradas e divididas entre aquelas, que caminham para o ponto fixo atrativo (região azul) e aquelas que seguem para o atrator caótico (região

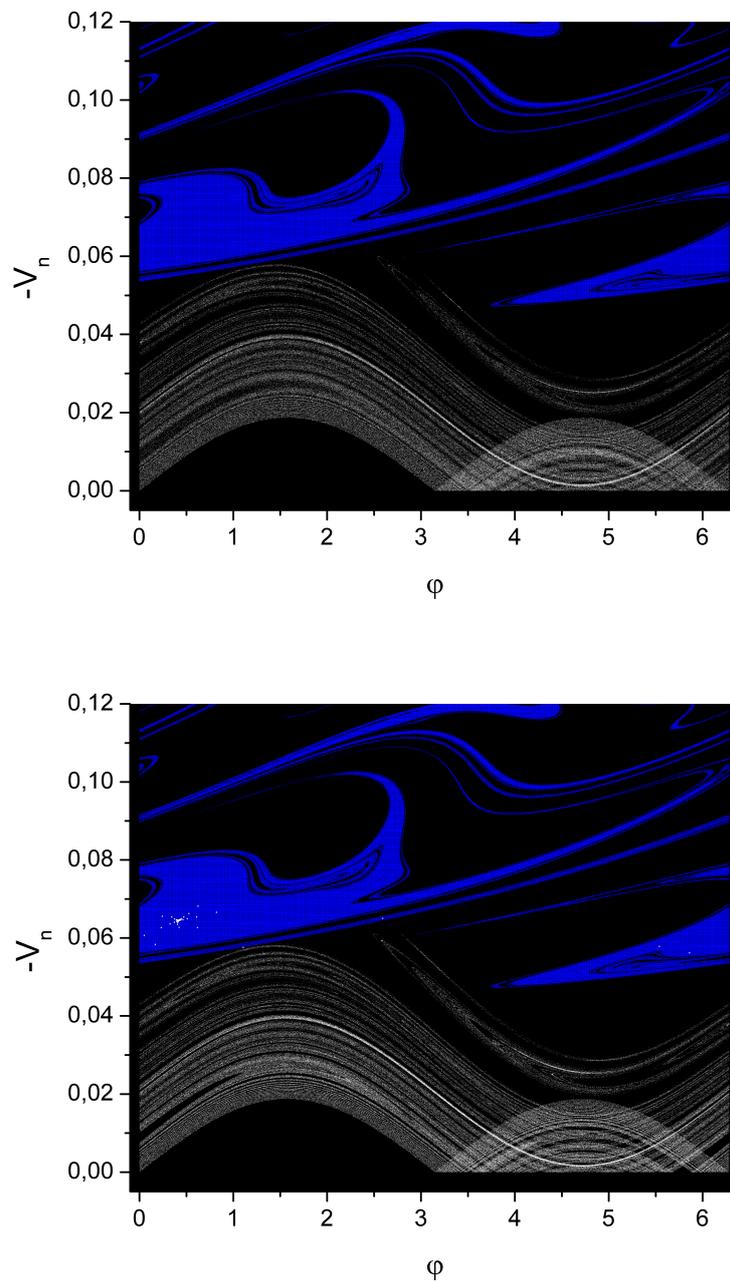


Figura 5.3: Bacias de atração para o ponto fixo atrativo e o atrator caótico. Em (a)  $e = 0.8671$  antes da crise de fronteira. Na figura (b) temos  $e = 0.8712$  após a crise de fronteira, que pode ser identificada pelos pontos (*brancos*) que saem do atrator caótico em direção ao ponto fixo.

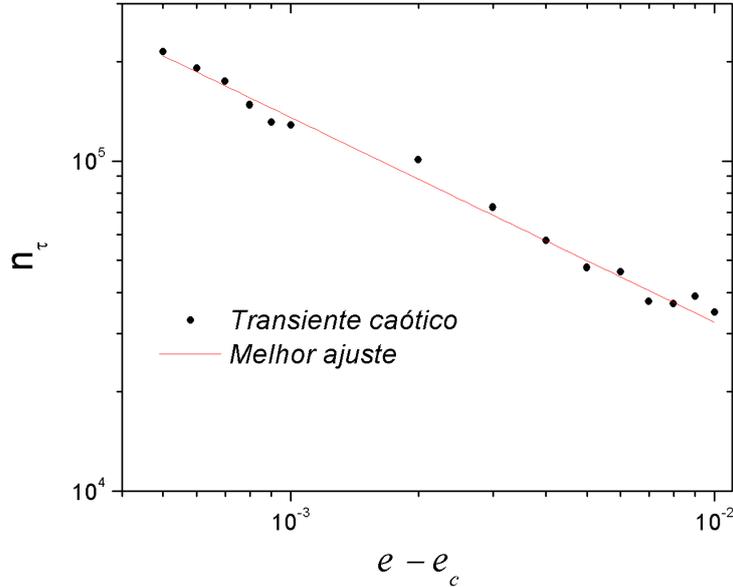


Figura 5.4: Comportamento do transiente caótico médio como função de  $e - e_c$

preta). Nós desenhamos as bacias de atração para  $e = 0.8671$  e reduzimos gradativamente a intensidade do coeficiente até o ponto  $e = 0.8712$  quando a borda da bacia de atração do ponto fixo (*variedade estável*) interceptou a borda do atrator caótico (*variedade estável*), veja figura 5.3.

Sendo assim, o evento de crise de fronteira para o BAP nos parâmetros descritos anteriormente, acontece no limite crítico  $0.8671 < e_c < 0.8712$ . Para  $e > e_c$  o atrator caótico é destruído subitamente, dando origem a um transiente caótico,  $n_\tau$ , bastante longo [57]. Tal transiente é equivalente ao número de colisões que um órbita leva para sair do domínio do atrator caótico e ser capturada pelo ponto fixo atrativo. O transiente caótico depende sensitivamente das condições iniciais, sendo então necessário o cálculo de um transiente caótico médio sob um ensemble de condições iniciais. Mostramos na figura 5.4 o comportamento do transiente caótico médio como função de  $e - e_c$ , para 500 condições iniciais escolhidas aleatoriamente no eixo  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . O transiente caótico médio obedece a lei:  $n_\tau \propto (e - e_c)^{-z}$ , com  $e > e_c$  e  $e_c = 0.8696$ . Para os parâmetros utilizados na figura 5.4, o melhor ajuste dos pontos retorna o expoente,  $z = 0.62(0)$ .

A destruição do atrator caótico implica na possibilidade de que, praticamente todas as condições iniciadas nas regiões de baixas energias, onde existia o atrator caótico, possam "caminhar" para o ponto fixo atrativo. Isso significa um ganho enorme no que diz respeito a média da energia do sistema. Na figura 5.5, comparamos os casos  $e = 0.8674$  (antes da crise),  $e = 0.8715$  (depois da crise) com a média do caso conservativo. Em termos percentuais, um evento de crise de fronteira ocasionou um ganho de aproximadamente

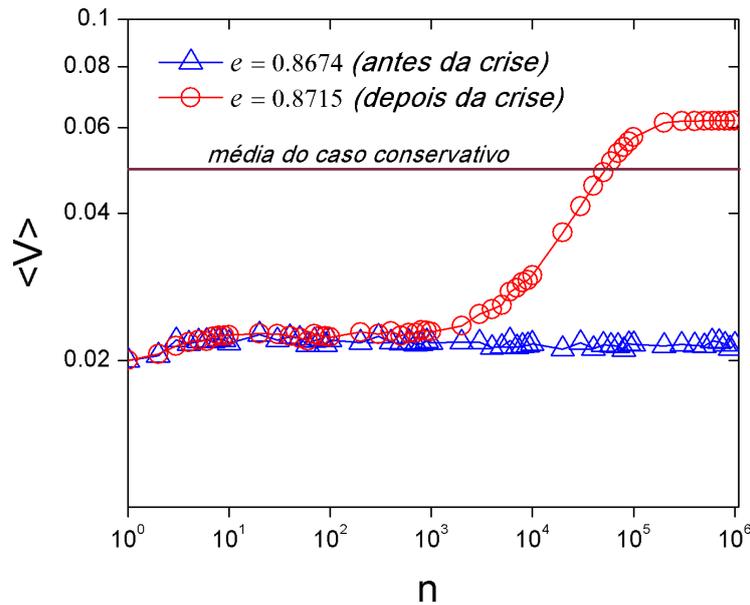


Figura 5.5: Velocidade média para um ensemble de condições iniciais para dois casos:  $e = 0.8674$  (antes da crise - triângulos azuis) e  $e = 0.8715$  (depois da crise - círculos vermelhos)

160%, entre um evento pré e pós crise, e quando comparado com o caso conservativo ( $e = 1$ ) o ganho foi de 20% mesmo considerando um regime de alta intensidade dissipativa.

Mostramos assim um evento nada intuitivo, porém dinamicamente consistente, no qual ao considerarmos dissipações (colisões inelásticas) no sistema, este, pode apresentar na média, uma energia superior àquela do caso conservativo. Nós gostaríamos de ressaltar que, se caso escolhessemos um ensemble com velocidades iniciais superior à velocidade do ponto fixo atrativo, é óbvio que o sistema não ganharia energia, pois as condições iniciais evoluiriam ou para o ponto fixo atrativo ou para o atrator caótico, ambos em regiões de baixas energias. Porém, para o propósito do trabalho, ou seja, obter um ganho de energia considerando efeitos dissipativos, este tipo de análise não faria sentido.



# Capítulo 6

## Conclusões

Os principais resultados obtidos nesta dissertação estão resumidos e discutidos neste último capítulo. Na seção 6.1 apresentaremos um resumo sobre o nosso estudo. Na seção 6.2, listamos os resultados obtidos.

### 6.1 Resumo

Nesta dissertação, estudamos algumas propriedades da dinâmica caótica em um sistema não - linear, através de análises do espaço de fases e de cálculos numéricas. O sistema utilizado foi o bilhar anular em duas configurações: (i) estático e (ii) pulsante. Em ambas configurações do modelo, o aprisionamento de órbitas em certas regiões, dos respectivos espaços de fases, foi a propriedade de maior destaque no nosso trabalho. Tais aprisionamentos caracterizam-se por um longo e consecutivo período de tempo que uma órbita gasta em uma região.

Para analisar os aprisionamentos, nós introduzimos no capítulo 2 a idéia das recorrências de Poincaré, afim de quantificarmos todo o processo através de uma estatística dos tempos de recorrência (ETR). A ETR exhibe um comportamento do tipo lei de potência,  $\rho(\tau) \approx \tau^{-\gamma}$ , caso a região de estudo aprisione a órbita e,  $\rho(\tau) \approx e^{-\tau}$ , caso a região for caótica.

Iniciamos o capítulo 3 mostrando a versão estática do bilhar anular, a qual utilizamos para revisar os aprisionamentos próximo às MUPOs ( família de órbitas periódicas marginalmente instáveis). Para este caso, o expoente  $\gamma = 2$  somente é obtido quando nenhuma ilha está presente no espaço de fases, caracterizando aprisionamentos devido exclusivamente às MUPOs. Para espaços mistos (ilhas + mar de caos), que constituem a grande maioria dos espaços de fases de sistemas Hamiltonianos, o aprisionamento é mais efetivo, retornando um expoente  $1 < \gamma < 2$ , como previsto em [48]. Neste mesmo capítulo apresentamos o BAP, cuja dinâmica depende explicitamente de quatro coordenadas, definindo um espaço quadri-dimensional. Neste cenário, obtivemos dois planos de fases canonicamente conjugados (espaço de fases geométrico e das energias) e estudamos as propriedades dinâmicas do sistema através deles. Exemplificamos duas estruturas para o

caso concêntrico do bilhar ( $\delta = 0$ ): (i) hierarquia de ilhas, (ii) barreira dinâmica, frequentemente observadas em espaço de fases de sistemas Hamiltonianos.

O caso excêntrico do BAP foi utilizado, no capítulo 4, para analisar o transporte devido ao crescimento da velocidade (aceleração de Fermi). Verificamos que as modificações no parâmetro responsável pela excentricidade entre os círculos (fronteiras) do bilhar, possibilitaram a observação de diferentes regimes anômalos que subsequentemente foram relacionados com a presença de órbitas laminares no plano do bilhar. Este fato acontece quando a velocidade da partícula é suficientemente alta ao ponto de quase recuperar algumas propriedades do caso estático (veja as ilhas recuperadas na seção 4.3).

Por fim, abordamos os efeitos dissipativos ocasionados por colisões inelásticas entre a partícula e as fronteiras. Concluimos, através do BAP excêntrico, que as colisões inelásticas suprimem a AF, independente da magnitude da dissipação. Mostramos também um interessante evento de crise de fronteira que acontece para altas dissipações, no qual observamos um ganho de energia médio extraordinário quando comparamos a média do sistema entre antes da crise e depois da crise.

## 6.2 Lista de resultados

Nossas conclusões estão listadas a seguir e referem-se basicamente às observações feitas sobre a dinâmica do bilhar anular estático e também com fronteiras dependentes do tempo.

1. Aprisionamento no bilhar anular estático (seção 3.1)
  - Apresentamos o bilhar anular estático e revimos que este sistema contém em seu espaço de fases infinitas famílias de MUPOs (*marginally unstable periodic orbits*) que contribuem com o expoente de recorrência  $\gamma = 2$ . Identificamos este resultado modificando os parâmetros (raio do círculo interno) $r$  e  $\delta$  (excentricidade entre os círculos) de forma que nenhuma ilha de regularidade pudesse ser vista no mar de caos.
  - Para os espaços de fases mistos observamos que a presença de ilhas imersas no mar de caos gera um aprisionamento mais efetivo, caracterizado pelo expoente da ETR entre  $1 < \gamma < 2$ . Tal expoente independe da forma, disposição e tamanho das ilhas no espaço de fases.
2. Aprisionamento no bilhar anular pulsante (caso concêntrico  $\delta = 0$ ; seção 3.2)

- Algumas armadilhas dinâmicas presentes nas seções de Poincaré do bilhar anular pulsante apresentaram um comportamento de multi-escala para a ETR associada à estrutura multi-fractal das estruturas.
- Cada comportamento do efeito de multi-escala, corresponde a uma determinada escala do espaço de fases sendo estas independentes uma das outras.

### 3. Aprisionamento e Difusão (caso $\delta \neq 0$ ; capítulo 4)

- Estudamos o fenômeno da aceleração de Fermi para o bilhar anular com fronteiras dependentes do tempo no contexto de transporte anômalo analisando o desvio quadrático médio das velocidades para um *ensemble* de partículas. Concluímos que a AF, apresenta-se em todos os regimes: sub-difusivo ( $0 < \beta < 1$ ), difusivo ou normal ( $\beta = 1$ ), super-difusivo ( $1 < \beta < 2$ ) e balístico ( $\beta = 2$ ), sendo definida pela geometria do bilhar e não pelas amplitudes de oscilação de suas fronteiras.
- A ocorrência de diversos regimes anômalos num mesmo sistema nos conduziu a procurar entender o mecanismo da aceleração de Fermi, em sistemas bi-dimensionais dependentes do tempo, no espaço de fases em 4-dimensões (dois espaços de fases). Nossos resultados indicam que ao longo do tempo considerado, os ângulos de reflexão de uma partícula dentro de um bilhar formam dois tipos de órbitas: (i) laminares (quase-periódicas) e (ii) turbulentas, que relacionam-se com as velocidades das partículas e conseqüentemente, com o regime de crescimento de tal forma que, quanto maior a quantidade de órbitas de um *ensemble* de partículas que permanecem nas fases laminares durante o processo, menor será o expoente  $\beta$ .
- Através de uma análise topológica da dinâmica quadri-dimensional em dois planos de fases canonicamente conjugados, realizamos um trabalho no qual percebemos a sensibilidade da **AF** para com as condições iniciais. Conforme a velocidade de uma partícula aumenta, o espaço geométrico recupera gradativamente sua configuração estática e se a **AF** for analisada com condições iniciais dentro de uma ilha recuperada, tal aceleração é dinamicamente suprimida.

### 4. Dissipação (capítulo 5)

- Os efeitos dissipativos causados por colisões inelásticas com as fronteiras, geram atratores onde antes haviam ilhas de regularidade.

- Qualquer magnitude de dissipação causada por colisões inelásticas é suficiente para suprimir a **AF**.
- A criação de atratores em regiões adequadas do espaço de fases das energias pode elevar a média do sistema. O primeiro ganho de energia e até o momento o maior ganho percentual que pôde-se estabelecer, ocorreu para um evento de crise de fronteira. Este evento pode ser obtido pela súbita destruição de um atrator caótico que implica na evolução de grande parte das condições iniciais de baixa energias para as energias onde se situa o ponto fixo atrativo. Tal fenômeno de transição gerou para o bilhar anular incríveis 160% de ganho, quando comparado às energias médias antes e depois da crise. Em comparação com o caso conservativo (colisões elásticas) o ganho médio foi de aproximadamente 20%.

# Apêndice A

## Mapas

Neste apêndice reproduziremos os mapas para o bilhar anular nos casos estático e pulsante que foram utilizados para os resultados obtidos nesse trabalho. Maiores detalhes sobre os mapeamentos podem ser obtidos em [25, 26, 27].

### A.1 Mapa para o bilhar anular estático

A dinâmica do sistema é investigada via mapeamento discreto nas coordenadas  $\alpha$  e  $\theta$  definidas a seguir: se  $P$  é o ponto de impacto da partícula com a fronteira externa, definimos  $\alpha$  como o ângulo de reflexão com relação à normal ao círculo externo em  $P$  e  $\theta$  como o comprimento do arco com relação à abscissa.

Dois tipos de movimentos são possíveis no bilhar anular e são verificados analisando a chamada condição de tangência. Analisamos a seguir como obter tal condição.

---

---

#### Condição de tangência

---

---

A partir do movimento mostrado na figura A.1, ou seja, a partícula depois de colidir com o círculo externo, segue em direção ao círculo interno, colide e têm sua próxima colisão novamente no círculo interno, podemos obter uma condição para que este tipo de movimento ocorra por análises geométricas. Na figura A.1 mostramos a trajetória no plano do bilhar e algumas extensões dessas trajetórias que formam triângulos auxiliares os quais podemos analisar o movimento:

Do triângulo  $WOP_2$ , temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(\theta_0 - \alpha_0)}{OP_0} &= \frac{\text{sen}(\alpha_0)}{WO' + \delta} \\ (WO' + \delta)\text{sen}(\theta_0 - \alpha_0) &= (OP_0)\text{sen}(\alpha_0) \end{aligned} \tag{A.1}$$

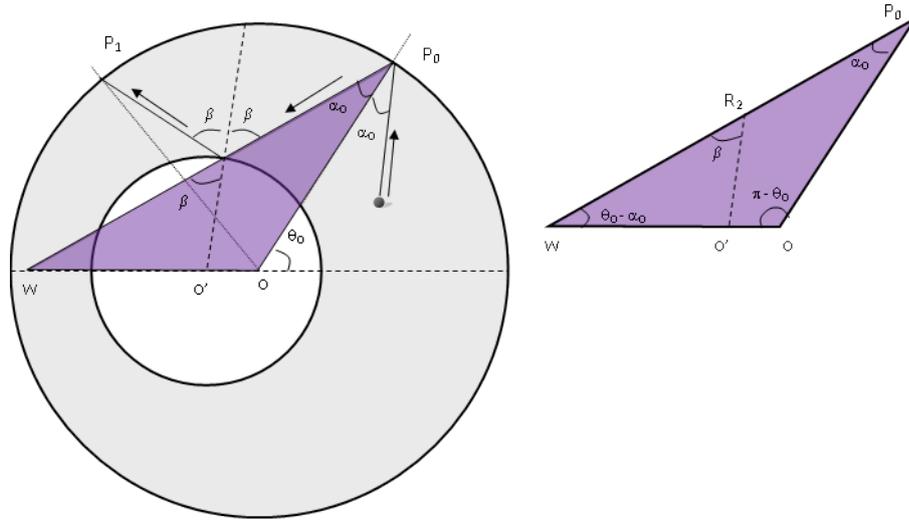


Figura A.1: Geometria do bilhar anular estático mostrando o movimento de uma partícula em direção ao círculo interno. O triângulo  $WOP_0$  obtido pelas extensões do movimento da trajetória da partícula, é o triângulo que auxilia a análise.

e também:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(\theta_0 - \alpha_0)}{O'R_2} &= \frac{\text{sen}(\beta)}{WO'} \\ WO' &= \frac{(O'R_2)\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\theta_0 - \alpha_0)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Relacionando as equações A.1 e A.2 e observando que  $OP_0 = 1$  (raio do círculo externo) e  $O'R_2 = r$  (raio do círculo interno), temos:

$$\begin{aligned} r\text{sen}(\beta) + \delta\text{sen}(\theta_0 - \alpha_0) &= \text{sen}(\alpha_0) \\ \text{sen}(\alpha_0) + \delta\text{sen}(\alpha_0 - \theta_0) &= r\text{sen}(\beta) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Quando a trajetória tangencia o círculo interno temos que  $\beta = \pi/2$ , ou seja:

$$\text{sen}(\alpha_0) + \delta\text{sen}(\alpha_0 - \theta_0) = r \quad (\text{A.4})$$

Como a colisão com o círculo interno só acontece se  $\beta \in [-\pi/2; \pi/2]$  e para isso  $r\text{sen}(\beta) < r$ , então definimos a condição de tangencia quando:

$$|\text{sen}(\alpha_0) + \delta\text{sen}(\alpha_0 - \theta_0)| \leq r \quad (\text{A.5})$$

Analisando a inequação 3.1 temos os movimentos:

- **Tipo A**  $\Rightarrow$  A condição não é satisfeita, então entre dois impactos com a fronteira externa a partícula não colide com o círculo interno. Logo o mapa  $M_A$  é definido por:

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n \\ \theta_{n+1} &= \pi + \theta_n - 2\alpha_n\end{aligned}\tag{A.6}$$

- **Tipo B**  $\Rightarrow$  A condição é satisfeita, logo a partícula colide com o círculo interno, sofre uma reflexão elástica e atinge o círculo externo novamente, definindo o mapa  $M_B$ :

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \arcsen [r \sen(\beta_n) - \delta \sen(\theta_a)] \\ \theta_{n+1} &= -\alpha_{n+1} + 2\beta_n + \theta_n - \alpha_n\end{aligned}\tag{A.7}$$

onde

$$\begin{aligned}\theta_a &= 2\beta_n + \theta_n - \alpha_n \\ \beta_n &= \arcsen \left[ \frac{1}{r} (\sen\alpha_n - \delta \sen(\theta_n - \alpha_n)) \right]\end{aligned}\tag{A.8}$$

O mapeamento apresentado acima pode ser obtido pela análise da conservação do momento angular e por considerações puramente geométricas.

## A.2 Mapa para o bilhar anular pulsante

O caso que descreveremos aqui e que foi usado para as simulações neste trabalho denomina-se: modelo simplificado. Nesse modelo as fronteiras são mantidas fixas, porém, são capazes de transferir *momentum* e energia à partícula como se estivessem pulsando. Essa é uma estratégia usada frequentemente pois o esforço computacional diminui consideravelmente comparado com o modelo completo.

Como dito anteriormente na seção 3.2 escolhemos as fronteiras oscilando periodicamente segundo a regra:

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 + \epsilon_R \cos(t + \phi) \\ r(t) &= r_0 + \epsilon_r \cos(t + \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde  $(\epsilon_R, \epsilon_r)$  são as amplitudes de oscilação e  $(\phi, \varphi)$  são as fases do círculo externo e interno respectivamente.

Logo, as velocidades das fronteiras são dadas por:

$$V_R(t) = \frac{dR(t)}{dt} = -\epsilon_R \text{sen}(t + \phi) \quad (\text{A.10})$$

$$V_r(t) = \frac{dr(t)}{dt} = -\epsilon_r \text{sen}(t + \varphi) \quad (\text{A.11})$$

Sendo assim, teremos uma partícula com condições iniciais dadas por  $(\theta_0, \alpha_0, v_0, \varphi_0)$ . A posição inicial da partícula é dada por:

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos\theta_0 \\ y_0 &= \text{sen}\theta_0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Com velocidades em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} v_{0\eta} &= -v_0 \cos\alpha_0 \\ v_{0\tau} &= v_0 \text{sen}\alpha_0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde os índices,  $\eta$  e  $\tau$  foram usados para representar as componentes radiais e tangenciais, respectivamente. Em coordenadas cartesianas temos,

$$\begin{aligned} v_{0x} &= -v_{0\eta} \cos\theta_0 - v_{0\tau} \text{sen}\theta_0 \\ v_{0y} &= v_{0\eta} \text{sen}\theta_0 + v_{0\tau} \cos\theta_0 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Analogamente ao modelo estático podemos distinguir entre dois tipos de movimento avaliando a condição de tangência (veja apêndice A1).

- TIPO A

A condição de tangência ?? não é satisfeita então a partícula não colide com o círculo espalhador. Assim a próxima colisão no círculo externo será dada no ponto:

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos\theta_1 \\y_1 &= \sen\theta_1\end{aligned}\tag{A.15}$$

onde  $\theta_1$  é dado por:  $\theta_1 = \theta_0 + \pi - 2\alpha_0$ .

Temos que calcular o tempo de vôo entre as duas colisões:

$$t_v = \frac{\Delta d}{v_0} = \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{v_0}$$

Na colisão com a fronteira externa somente a componente radial da velocidade da partícula é alterada segundo:

$$\begin{aligned}v_{1\eta} &= -|-v_{0\eta} + 2V_R(t_v)| \\v_{1\tau} &= v_{0\tau}\end{aligned}\tag{A.16}$$

Então podemos corrigir as novas fases das fronteiras e o novo ângulo de reflexão:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_0 + t_v \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + t_v \\ \alpha_1 &= \arctan\left(-\frac{v_{1\tau}}{v_{1\eta}}\right)\end{aligned}\tag{A.17}$$

- TIPO B

Se a condição de tangência (??) é satisfeita, então a partícula colide com o círculo espalhador nas coordenadas:

$$\begin{aligned}x_r &= r\cos(\theta_b - \delta) \\y_r &= r\sen\theta_b\end{aligned}\tag{A.18}$$

onde  $\theta_b = \beta + \theta_0 + \alpha_0$

O tempo de vôo é obtido igualmente à expressão A.16 e assim a partícula passa a ter a velocidade dada por:

$$\begin{aligned} v_{1\eta} &= |-v_{0\eta} + 2V_r(t_v)| \\ v_{1\tau} &= v_{0\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

A partícula agora dirige-se para o círculo externo. Podemos calcular o tempo de vôo ao encontrar a interseção da trajetória da partícula com o círculo de raio 1. Ou seja:

$$R_p(t) = \sqrt{(x_r + v_x t)^2 + (y_r + v_y t)^2} = 1 \quad (\text{A.20})$$

com

$$\begin{aligned} v_x &= v_{1\eta} \cos \theta_b + v_{1\tau} \sin \theta_b \\ v_y &= -v_{1\eta} \sin \theta_b + v_{1\tau} \cos \theta_b \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Logo, a equação A.20 implica em uma equação do segundo grau cuja solução positiva  $t_f$  corresponde ao tempo de vôo procurado. As novas coordenadas são:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_r + v_x t_f \\ y_1 &= y_r + v_y t_f \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

então,

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \quad (\text{A.23})$$

As componentes polares da velocidade imediatamente antes da colisão são:

$$\begin{aligned} v_{0\eta} &= v_x \cos \theta_1 + v_y \sin \theta_1 \\ v_{0\tau} &= -v_x \sin \theta_1 + v_y \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Ao colidir com a fronteira externa a partícula altera sua velocidade segundo:

$$\begin{aligned}v_{1\eta} &= -|-v_{0\eta} + 2V_R(t_v + t_f)| \\v_{1\tau} &= v_{0\tau}\end{aligned}\tag{A.25}$$

Corrigindo as fases finalmente temos:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_0 + t_v + t_f \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + t_v + t_f\end{aligned}\tag{A.26}$$

Desta forma mapeamos a dinâmica do BAP.



# Referências Bibliográficas

- [1] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, (1892).
- [2] G. D. Birkhoff, *Collected Mathematical Papers*, American Physical Society, Providence (1950); Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (2), 4, 267 (1935)
- [3] E. Ott, *Chaos in dynamical system*, Cambridge University Press, Cambridge, (2002).
- [4] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin e Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [5] K. T. Alligood, T. D. Sauer e J. A. Yorke, *Chaos: an Introduction to Dynamical Systems*. Springer, Berlin (1996).
- [6] R. Cordeiro, *Anomalous diffusion in the asteroid belt*, The Astronomical Journal 132 (2006), 2114:2126.
- [7] V. K. Melnikov, *Transport, Chaos and Plasma Physics 2*, Vol. 142, S.S. Benkadda.
- [8] J. D. Szezech, I. L. Caldas, S. R. Lopes, R. L. Viana e P. J. Morrison, *Transport properties in nontwist area-preserving maps*, Chaos 19 (2009) 043108.
- [9] E. K. Hobbie e D. J. Fry, *Nonequilibrium Phase Diagram of Sticky Nanotube Suspensions*, Phys. Rev. Lett. 97 (2006), 036101.
- [10] J. D. Meiss, *Symplectic maps, variational principles and transport*, Rev. Mod. Phys, 64 (1992) 795.
- [11] G. M. Zaslavsky, *Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport*, Physics Reports 371 (2002), 461.
- [12] P. Leboeuf, *Normal and anomalous diffusion in a deterministic area-preserving map*, Physica D 116 (1998), 8.
- [13] G. M. Zaslavsky e M. Edelman, *Superdiffusion in the dissipative standard map*, Chaos 18 (2008), 033116.

- [14] M. Schmiedeberg e H. Stark, *Superdiffusion in a honeycomb billiard*, Physical Review E 73 (2006), 031113.
- [15] M. Courbage, M. Edelman, S. M. Saberi Fathi, and G. M. Zaslavsky, *Problem of transport in billiards with infinite horizon*, Physical Review E 77 (2008), 036203.
- [16] D. P. Sanders e H. Larralde, *Ocurrence of normal and anomalous diffusion in polygonal billiard channels*, Physical Review E 73 (2006), 026205.
- [17] E. Fermi, *On the origin of the cosmic radiation* Physical Review, 75(8), 1169-1173, 1949
- [18] M. A. Lieberman e A. J. Lichtemberg, Physical Review A 5-4 (1972), 1852:1866.
- [19] G. Katz, M. A. Ramer e R. Kosloff, *Decoherence Control by Tracking a Hamiltonian Reference Molecule*, Physical Review Letter 98 (2007) 203006.
- [20] T. Cubaud e T. G. Mason, *Folding of Viscous Threads in Diverging Microchannels*, Physical Review Letter 96 (2006) 114501.
- [21] K. Yu. Bliokh, Yu. P. Bliokh, V. Freilikher, A. Z. Genak, B. Hu e P. Sebbah, *Localized Modes in Open One-Dimensional Dissipative Random Systems*, Physical Review Letter, 97 (2006) 243904.
- [22] L. Baiotti e L. Rezzola, *Challenging the Paradigm of Singularity Excision in Gravitational Collapse*, Physical Review Letter, 97 (2006) 141101.
- [23] J. J. Barroso, M. V. Carneiro e E. E. N. Macau, *Bouncing ball problem: Stability of the periodic modes*, Physical Review E, 79 (2009), 026206.
- [24] E. D. Leonel e A. L. P. Livorati, *Describing Fermi acceleration with a scaling approach: The Bouncer model revisited*, Physica A, 387 (2008) 1155.
- [25] F. Caetano de Souza, *Aceleração de Fermi no Bilhar Anular*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.
- [26] R. Egydio de Carvalho, F. Caetano Souza, e E. D. Leonel, *Fermi acceleration on the annular billiard*, Physical Review E 73 (2006), 066229
- [27] R. Egydio de Carvalho, F. Caetano Souza, e E. D. Leonel, *Fermi acceleration on the annular billiard: a simplified version*, Journal Physics A, 39 (2006) 3561.
- [28] A. Loskutov, A. B. Ryabov e L. G. Akinshin, *Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries*, Journal Physics A, 33 (2000), 7973.

- [29] R. Egydio de Carvalho, C. Vieira Abud e F. Caetano de Souza, *Dissipation as a mechanism of energy gain*, Phys. Rev. E 77 (2008)036204.
- [30] E. G. Altmann, T. Friedrich, A. E. Motter, H. Kantz e A. Richter, *Prevalence of marginally unstable periodic orbits in chaotic billiards*, Physical Review E 77 (2008), 016205.
- [31] G. D. Birkhoff, *Proof of Poincaré's geometric theorem*, Trans. Am. Math. Soc. 14 (1913), 14.
- [32] G. M. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos x Fractional Dynamics*, Oxford University Press (2005).
- [33] G. Contopoulos e M. Harsoula, *stickiness in chaos*, International Journal of Bifurcation and Chaos 18 (2008), 2929-2949.
- [34] O. Barash e I. Dana, *Type specification of stability island and chaotic stickiness*, Phys. Rev. E 71 (2005) 036222.
- [35] E. Zermelo, Ann. Phys. Board 57 (1896) 485.
- [36] J. L. Lebowitz, *Statistical mechanics: A selective review of two central issues*, Rev. Mod. Phys 71 (1999), 346.
- [37] L.E. Boltzmann, Annalen der Physik 57, 773 (1896).
- [38] M. Kac, *Probability and related topics in physical sciences*, Interscience, New York, (1959).
- [39] D. N. Armstead, B. R. Hunt e E. Ott, *Power-law decay and self-similar distributions in stadium-type billiards*, Physica D 193 (2004), 96.
- [40] B. V. Chirikov e D. L. Shepelyansky, *Asymptotic statistics of Poincaré recurrences in Hamiltonian system*, Physical Review Letters 82 (1999), 528.
- [41] J. D. Meiss, *Average exit time for volume preserving maps*, Chaos 7 (1997), 139.
- [42] E. G. Altmann, A. E. Motter, and H. Kantz, *Stickiness in Hamiltonian system: from sharply divided to hierarchical phase space*, Phys. Rev. E 73 (2006), 026207.
- [43] S. D. Frischat e E. Doron, *Dynamical Tunneling in Mixed Systems*, Physical Review E 57 (1998), 1421: 1443.
- [44] P. Gaspard e J. R. Dorfman, *Chaotic scattering theory, thermodynamic formalism, and transport coefficient*, Physical Review E 52 (1995), 3525.

- [45] L. A. Bunimovich, *On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards*, Commun. Math. Phys. 65 (1979), 295.
- [46] Ya. G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections. ergodic proprieties of dispersing billiards*, Russ. Math. Surv. 25 (1970), 137.
- [47] M. L.de Moraes Costa, *Estudo de Órbitas Periódicas no Bilhar de Círculos não Concêntricos*, Dissertação de mestrado - UFMG, Belo Horizonte, (2001).
- [48] E. G. Altmann, *Intermittent Chaos in Hamiltonian Dynamical Systems*, Dissertação de Doutorado, Max-Planck Institut, Dresden, 2007.
- [49] G. Cristadoro e R. Ketzmerick, *Universality of algebraic decays in Hamiltonian systems*, Physical Review Letters 100 (2008), 184101.
- [50] R. Venegeroles, *Universality of algebraic laws in Hamiltonian systems*, Physical Review Letters 102 (2009), 064101.
- [51] J. D. Meiss e E. Ott, *Markov-Tree Model of Intrinsic Transport in Hamiltonian Systems* Phys. Rev. Lett, 55 (1985) 2741.
- [52] O. Bohigas, D. Boosé, R. Eglydio de Carvalho e V. Marvulle, Nuclear Physics, A560:197-210, (1993).
- [53] A. Loskutov e A. B. Ryabov, *Particle dynamics in time-dependent stadium-like billiards*, J. Stat. Phys. 108 (2002), 995.
- [54] F. Lenz, F. K. Diakonov e P. Schmelcher, *Tunable Fermi acceleration in the driven elliptical billiard*, Physical Review Letters 100 (2008), 014103.
- [55] S. O. Kamphorst, E. D. Leonel e J. K. L. da Silva, *The presence and lack of Fermi acceleration in nonintegrable billiards*, J. Phys. A. 40 (2207) 887.
- [56] C. Grebogi, E. Ott e J. A. York, *Chaotic attractors in crisis*, Physical Review Letters 48(22) (1982), 1507.
- [57] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras e J. A. York, *Critical exponents for crisis-induced intermittency*, Physical Review A, 36(11), 5365.
- [58] L. D. Pustyl'nikov, *A new mechanism for particle acceleration and a relativistic analogue of the Fermi-Ulam model*, Theoret. Math. Phys. 77(1) (1988), 1110.
- [59] M. V. Deryabin e L. D. Pustyl'nikov, *Exponential Attractors in Generalized Relativistic Billiards*, Commun. Math. Phys. 248, (2004), 527.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)