

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
*Campus de Rio Claro*

DINÂMICA RESSONANTE DE ALGUNS SATÉLITES  
ARTIFICIAIS TERRESTRES NO SISTEMA TERRA-LUA-SOL

DIOGO MERGUIZO SANCHEZ

Orientador: Tadashi Yokoyama

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao  
Programa de Pós-Graduação em Física Área  
de Física Aplicada, para obtenção do título de  
Mestre em Física.

Rio Claro (SP)  
2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

520 Sanchez, Diogo Merguizo  
S211d Dinâmica ressonante de alguns satélites artificiais terrestres no sistema Terra-Lua-Sol / Diogo Merguizo Sanchez. - Rio Claro : [s.n.], 2009  
92 f. : il., figs., gráfs., forms., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: Tadashi Yokoyama

1. Astronomia. 2. Dinâmica orbital. 3. Sistema Galileo-GPS. 4. Ressonâncias orbitais. 5. Satélites artificiais. 6. Detritos espaciais. 7. Satélites heliossíncronos. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP  
Campus de Rio Claro/SP

Comissão Examinadora

Tadashi Yokoyama  
Rodolpho Vilhena de Moraes  
Nelson Callegari Jr.

Diogo Merguizo Sanchez  
Aluno

Rio Claro, 22 de Dezembro de 2009

Resultado: APROVADO

*A meus pais.*

*A meus avós.*

*À luz da minha vida, minha noiva.*

## AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo incentivo e pelo grande apoio nas horas difíceis.

Ao Professor Tadashi, pela orientação, apoio e amizade.

Ao Nelson, pelas valiosas discussões, pelo apoio e amizade.

Aos colegas de laboratório: Clair, Rogerio, Pedro, Rafael (pelas valiosas dicas) e em especial ao Marcão e ao Diego, pela grande amizade.

Aos docentes e funcionários do DEMAC.

Ao Programa de Pós Graduação em Física, em especial ao Professor Makoto Yoshida.

À minha família rio-clarense, Seu Irineo, Maria Luísa, André, Bia e Renan.

Aos meus grandes amigos Fábio e Juliana, que considero como irmãos.

À Samuel Murgel Branco (em memória) e sua família.

Aos companheiros de república: Humberto, Valdeci, Sakai, Jaú, Costela, Beronha, Basílio, Heitor, Jó, Gui, Jean, Erus, Rafael, Alexandre, Guilherme e em especial à Amanda e Gui, valorosos amigos.

À toda a equipe da EE “Francisco Graziano”, pela acolhida, incentivo e apoio.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo suporte financeiro.

Finalmente o agradecimento mais importante, à minha noiva, Elizângela, pelo companheirismo, apoio, incentivo e pela enorme paciência.

## RESUMO

A estabilidade dos membros das constelações Galileo e GPS é investigada. Devido à ressonância 2:1 entre  $\omega$  e  $\Omega$ , ocorre um aumento significativo da excentricidade. Este aumento causa riscos de colisão entre os satélites descartáveis e os ativos. Como a ressonância não depende do semi-eixo do satélite, estratégias usuais de aumentar a altitude não resolvem o problema. Então, condições iniciais especiais são achadas tais que os satélites descartáveis permanecem estáveis, com baixa excentricidade por pelo menos 250 anos. Outra estratégia de atacar o problema é mover o objeto descartável para uma órbita particular, acelerando o crescimento da excentricidade. Este estudo é brevemente apresentado. A dinâmica de satélites heliosíncronos é também estudada. Devido o arrasto atmosférico, a altitude do satélite sempre decai e portanto ele cruza o valor ressonante do semi-eixo. Sempre que isso ocorre, um salto na inclinação é observado e em alguns casos, há alguns cruzamentos tais que a inclinação permanece aprisionada (durante algum tempo) no centro de libração. Este evento é importante, pois isso pode ser explorado para realizar manobras de baixo custo para controlar o satélite numa determinada inclinação. Através do sistema exato, investigamos estas quase-capturas e seu aproveitamento em manobras de manutenção de inclinação.

**Palavras chave:** Sistema Galileo-GPS, ressonâncias orbitais, satélites artificiais, detritos espaciais, satélites heliosíncronos.

## ABSTRACT

The stability of the disposed members of the Galileo and GPS constellations is investigated. Due to the 2:1 resonance between  $\omega$  and  $\Omega$ , a significant increase of the eccentricity occurs. These increase cause risk of collisions between the operational and disposed satellites. As the resonance does not depend on the semi-major axis of the satellite, usual strategies of raising the altitude do not solve the problem. Therefore, special initial conditions are found such that the disposed satellites remain stable with small eccentricity, for at least 250 years. Another strategy to attack the problem is to move the disposed object to a particular orbit, accelerating the growth of the eccentricity. This study is briefly presented. The dynamics of the sun-synchronous satellite is also studied. Due to the atmospheric drag, the altitude of the satellite always decays and therefore it crosses the resonant value of the semi-major axis. Whenever this happens, a jump in the inclination is observed and in some cases, there are some crossing such that the inclination remains locked (during some time) in the center of the libration. This event is interesting since it can be exploited to perform inexpensive maneuvers to control the satellite at desired inclination.

**Keywords:** Galileo-GPS systems, orbital resonances, artificial satellites, space debris, sun-synchronous satellites.



## SUMÁRIO

	Página
1. INTRODUÇÃO .....	7
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	12
2.1. Perturbação do Achatamento da Terra .....	12
2.2. Perturbação Solar .....	13
2.3. Análise de algumas ressonâncias .....	24
2.3.1. $\dot{\omega} + \dot{\Omega} + n_{\odot} \approx 0$ .....	24
2.3.2. $2\dot{\omega} - 2n_{\odot} \approx 0$ (Evecção) .....	26
2.3.3. $\dot{\omega} \approx 0$ (Inclinação Crítica) .....	29
2.3.4. $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$ .....	30
2.3.5. $n_{\odot} - \dot{\Omega} \approx 0$ .....	33
2.4. Equações exatas (cartesianas) de movimento .....	37
3. CONSTELAÇÕES GPS, GALILEO E GLONASS .....	39
3.1. Efeitos das ressonâncias $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$ e $\dot{\omega} \approx 0$ .....	39
3.2. Condições iniciais $(\omega, \Omega)$ para o caso Galileo .....	42
3.3. Condições iniciais do par $(\omega, \Omega)$ para o caso GPS .....	46
3.4. Inclusão dos harmônicos tesserais e setoriais .....	49
3.5. Manobras orbitais para o posicionamento em $(\omega, \Omega)$ .....	53
3.6. Estratégia de incremento de excentricidade .....	58
4. DINÂMICA DOS SATÉLITES HELIOSSÍNCRONOS E EFEITOS DA RESSONÂNCIA $n_{\odot} - \dot{\Omega} \approx 0$ .....	61
5. CONCLUSÕES .....	83
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	85
7. APÊNDICE .....	88
7.1. Apêndice A – Evolução dos satélites GPS Bloco II-A, para uma grade de inclinações iniciais .....	88

## 1. INTRODUÇÃO

Em quatro de outubro de 1957 foi inaugurada a era espacial com o lançamento do primeiro artefato construído pelo homem a orbitar a Terra, o soviético Sputnik. Desde então diversos satélites foram lançados e muito se estudou a seu respeito. Entretanto, a dinâmica completa dos satélites artificiais não é totalmente conhecida. Por outro lado, as perturbações orbitais são estudadas pelos astrônomos há muito tempo para conhecer a dinâmica dos satélites naturais. Atualmente, as técnicas de perturbações orbitais são usadas para o estudo de satélites artificiais, seja no planejamento de missões ou descarte de satélites no fim de sua vida útil. Pretendemos estudar a dinâmica de dois tipos de satélites tão importantes quanto distintos, através da análise de ressonâncias orbitais que causam perturbações na órbita destes objetos.

Ocorre que todo satélite e seus componentes tem uma vida útil limitada e quando esta acaba, o objeto se torna descartável. Portanto, a ele se deve dar um destino, de forma a não comprometer os satélites operacionais que estão e devem continuar em funcionamento. Além disso, para ser inserido numa constelação, um satélite é levado pelo último estágio de seu lançador e este também deve ser descartado numa órbita tal que também não colida ou coloque em risco os membros ativos da constelação (GICK e CHAO, 2001). Com o passar dos anos haverá um acúmulo constante de objetos indesejáveis, cujas órbitas podem aumentar o risco de uma colisão com os satélites da constelação operacional, caso invadam a região da constelação. A dinâmica destes objetos deve, portanto, ser conhecida.

Os elementos dos sistemas *Global Positioning System* (GPS), *Global Navigation Satellite System* (GLONASS), Galileo (ESA, 2002) etc., formam uma constelação de satélites cujo objetivo é a determinação da posição de um receptor (navegação), e fazem parte do primeiro grupo de satélites a ser estudado.

O sistema GPS (americano) foi iniciado há cerca de três décadas, se contadas as fases experimentais. Os primeiros membros desta constelação (Bloco I) eram distribuídos em seis planos orbitais (originalmente planejados para serem três planos, com defasagem de  $120^\circ$ ) com inclinação de  $63^\circ$  em relação ao equador terrestre. A uma altitude aproximada de 20.200 km, com órbitas quase circulares, estes satélites tinham período orbital de aproximadamente 12 h e foram planejados para uma vida útil de aproximadamente cinco anos. No sistema russo GLONASS, há uma distribuição muito similar ao GPS original (três planos, com inclinação  $64,8^\circ$ ), porém com altitude inferior (19.100 km) e período orbital de 11:15 h.

Os GPS do Bloco I (todos desativados) foram substituídos pelos satélites do Bloco II e Bloco IIA (A de *Advanced*), a segunda geração de satélites de navegação (JPL/MSL). Estes estão à mesma altitude dos GPS do Bloco I (consequentemente mesmo período orbital), mas com inclinação de  $55^\circ$ , distribuídos em seis planos orbitais. Foram projetados com tempo de vida útil de 7,5 anos. Os satélites GPS são identificados por um código PRN (*Pseudo Range Number*) de 1 a 32 (24 dos Blocos II e IIA – em operação, oito do Bloco IIR – ativos, aguardando entrar em operação, substituindo objetos desativados). O PRN serve para que o receptor de GPS identifique de qual satélite está vindo o sinal que está captando (JPL/MSL). Além disso, como todo satélite, também possui um número que o identifica no catálogo do NORAD (*North American Aerospace Defense Command* – comando militar aeroespacial dos Estados Unidos), órgão responsável pelo controle (e imposição de restrições) e gerenciamento do sistema. De maneira similar, os membros do projeto Galileo (consórcio europeu, em fase de lançamento), estarão distribuídos em planos cujas inclinações serão de 55 e 56 graus e terão altitude aproximada de 3.000 km acima da constelação GPS. Dois satélites da constelação Galileo já estão em órbita, o GIOVE-A e o GIOVE-B, em fase de testes. As três constelações acima citadas têm altitudes não muito diferentes e todos enfrentam o problema de descarte de membros inativos. É fundamental que objetos indesejáveis de um sistema não comprometam nenhuma constelação, quer seja do mesmo sistema ou vizinho dele.

Para diminuir riscos que pudessem afetar o sistema GPS, uma recomendação do governo americano era que a região 500 km acima ou abaixo da constelação não devesse ser usada por órbitas de outros veículos espaciais (NASA, 1995), pois esta região seria reservada para descarte dos membros da constelação GPS. Por outro lado, o último estágio do veículo

lançador dos satélites GPS, devido ao seu projeto e à maneira como a missão é concebida, em geral não pode atender a tal recomendação (GICK e CHAO, 2001; JENKIN e GICK, 2001). Mostraremos que o fato de diminuir ou aumentar a altitude do satélite em 500 km é irrelevante para evitar colisões destes sistemas, em razão da existência de certas ressonâncias que trazem grandes variações de excentricidade quando a inclinação está próxima de 56,06 ou 63,4 graus em relação ao plano do equador. Ademais, mostraremos que tais ressonâncias não dependem do semi-eixo, logo mudá-lo não remove o objeto da ressonância.

Considerando o sistema satélite-achatamento-Sol (apresentado no capítulo 2) mostraremos que o problema médio (livre das anomalias médias do satélite e do Sol) revela a existência das ressonâncias que ocorrem para as inclinações 63,4° (próxima à inclinação do sistema GLONASS) e 56,06 (próxima às inclinações dos sistemas GPS e Galileo). O problema médio também mostra que o efeito destas ressonâncias é causar um grande aumento de excentricidade. No capítulo 2 mostraremos que para  $I = 56,06^\circ$ , ocorre a ressonância  $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$  e para  $I = 63,4^\circ$  ocorre a clássica inclinação crítica, e apresentaremos como surgem tais comensurabilidades. Ambas são responsáveis por grandes variações de excentricidade e, portanto, objetos em órbita quase circular podem ter seu apocentro muito aumentado e penetrar na região das constelações, causando riscos de colisão com satélites em plena vida útil.

O crescimento da excentricidade é sensível aos valores iniciais do argumento do pericentro e da longitude do nodo ascendente. Devido a este fato, surgem duas estratégias distintas para diminuir o risco de colisão. A primeira, chamada de estratégia de crescimento mínimo de excentricidade (JENKIN e GICK, 2005) consiste em escolher convenientes condições iniciais de pericentro e nodo, tais que o objeto descartável fique por um tempo finito (200 anos) com excentricidade abaixo de um valor mínimo pré-estipulado, evitando que sua órbita invada regiões proibidas (SANCHEZ et al, 2009). Isto é feito à custa de manobras que tem seu preço em combustível. A outra estratégia, que também exige manobras, é exatamente oposta à primeira: depositar o objeto em regiões tais que sua excentricidade cresça rapidamente de forma que seu apocentro tenha reentradas constantes na atmosfera, levando-o à queda (JENKIN e GICK, 2005).

A estratégia de crescimento mínimo de excentricidade tem como primeira desvantagem o próprio fato da excentricidade ser muito baixa. Com isso, o argumento do pericentro fica sensível a pequenos erros de manobras, tornando difícil atingir valores precisos de pericentro inicial. Outra desvantagem é o acúmulo de satélites na região de descarte, aumentando a densidade de objetos nesta região. Como consequência disto, o risco de colisão

entre os objetos da região de descarte aumentaria proporcionalmente ao tempo de utilização desta estratégia. Entretanto, como o tempo que os satélites ficam nesta região, mantendo a baixa excentricidade, é de cerca de 200 anos, teríamos tempo para estudar novas possibilidades de retirada e possível reaproveitamento dos satélites descartados.

A estratégia de crescimento de excentricidade oferece um risco considerável, pois até o decaimento final, o satélite pode eventualmente colidir com membros da constelação. Além disso, o tempo que levaria para a excentricidade crescer, a ponto de suas sucessivas passagens pela atmosfera resultarem na queda do satélite, poderia ser muito longo, favorecendo um leque de acontecimentos inesperados. Na Seção 3.1 analisaremos o comportamento das ressonâncias citadas anteriormente e seus efeitos.

Tendo em vista a primeira estratégia citada, nas Seções 3.2 e 3.3 nosso objetivo será a busca de convenientes condições iniciais tais que o objeto descartado fique por um tempo finito (250 anos) sem oferecer risco à constelação operacional. Obtivemos um grande conjunto de condições para o sistema Galileo (Seção 3.2) e GPS (Seção 3.3). No mecanismo de busca, para cada valor da longitude do nodo ascendente ( $\Omega$ ), pesquisamos o valor correspondente do pericentro ( $\omega$ ) tal que a máxima excentricidade, no intervalo de 250 anos, se mantenha menor que 0,01 ou 0,02. No plano ( $\omega, \Omega$ ) isto representa uma curva (ou região) e ela depende claramente da inclinação da Lua.

Selecionamos os termos dominantes do geopotencial e incluímos a Lua e o Sol como perturbadores, a fim de verificar sua influência sobre as condições iniciais ( $\omega, \Omega$ ).

Também fizemos, na Seção 3.5, um breve estudo comparativo sobre as manobras de mudança de plano e colocação nas condições ( $\omega, \Omega$ ). Na Seção 3.6 apresentamos condições iniciais que satisfazem a estratégia de crescimento de excentricidade,

Os satélites de sensoriamento remoto fazem parte do segundo grupo de satélites estudados. Estes satélites possuem o período de circulação da longitude do nodo ascendente igual ao período de revolução do Sol em torno da Terra (referencial fixo no equador da Terra). A comensurabilidade entre a frequência do nodo e o movimento médio do Sol é chamada de ressonância heliossíncrona. Por este motivo, estes satélites são comumente chamados de satélites heliossíncronos.

Dentre os pioneiros no sensoriamento remoto, se destaca o programa norte americano *Earth Resources Observation Satellites Program* (Programa de Satélites de Observação de Recursos Terrestres), iniciado em 1966, cujo nome mudou para Landsat em 1975. O satélite Landsat I, lançado em 23 de julho de 1972, terminou suas operações em 6 de janeiro de 1978.

Este é o programa de sensoriamento remoto mais duradouro, cujo lançamento mais recente (do satélite Landsat 7), efetuado em 15 de abril de 1999 e em funcionamento até hoje (LANDSAT 7- Science Data Users Handbook). O Landsat é responsável por grande parte das imagens do software *Google Earth*.

O Brasil se destaca nesta área com o programa CBERS (China-Brasil Earth Resources Satellite – Satélite Sino Brasileiro de Recursos Terrestre), um acordo de cooperação tecnológica entre Brasil e China, iniciado em seis de Julho de 1988.

O CBERS-1 foi lançado em 14 de outubro de 1999 em um foguete chinês, a partir do Centro de Lançamento de Taiyuan, na China. Sua altitude era de 778 km, com inclinação de 98,5°. Em agosto de 2003, uma falha grave em seu funcionamento fez com que o satélite deixasse de ser funcional, colocando fim à sua vida útil. A missão foi planejada para durar dois anos, mas acabou durando dois anos a mais, pois o satélite perdeu sua funcionalidade quatro anos depois do lançamento. Em 21 de outubro de 2003 foi lançado o CBERS-2, com características orbitais semelhantes ao CBERS-1, com inclinação de 98,504° e período orbital de 100,26 minutos. Este ainda está em funcionamento, integrando o Sistema de Coleta de Dados Ambientais brasileiro.

Os efeitos de longo período na ressonância heliosíncrona podem ser estudados a partir do problema médio, e isso é descrito e analisado no Capítulo 2. No Capítulo 4 estudamos os efeitos desta ressonância sobre a dinâmica do satélite.

Os satélites heliosíncronos possuem semi-eixo baixo (em torno de 7.170 km), fazendo com que o arrasto atmosférico seja um dos principais perturbadores. Este efeito perturbativo diminui o semi-eixo do satélite, de forma que torna-se necessária correção deste elemento (através de manobra orbital) periodicamente. Além disso, devido à finalidade deste tipo de satélite, a inclinação também é corrigida periodicamente. O custo em combustível das manobras de manutenção de órbita fazem com que a vida útil dos satélites heliosíncronos seja baixa, suas missões são planejadas para durar de dois a cinco anos.

A ressonância heliosíncrona possui dependência do semi-eixo maior e da inclinação do satélite. Assim um satélite com determinada inclinação pode cruzar o valor do semi-eixo no qual a ressonância é possível quando está em queda devido ao efeito do arrasto, ou quando está sendo repostado em seu semi-eixo original, depois de uma manobra.

Esta ressonância causa um impacto não desprezível sobre a inclinação dos satélites heliosíncronos. Propomos o aproveitamento dos efeitos desta ressonância na manutenção da órbita do satélite em missões futuras.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1. Perturbação do Achatamento da Terra

A função perturbadora para o geopotencial pode ser escrita na forma (ESCOBAL, 1965, MONTENBRUCK e GILL, 2005):

$$V = \frac{k^2 M_T}{r} + \frac{k^2 M_T}{r} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_P}{r} \right)^n J_{nm} \cos m(\lambda - \lambda_{mn}) P_{nm}(\sin(\phi)) \right\}, \quad (2.1)$$

onde  $M_T$  e  $R_P$  são a massa e o raio equatorial da Terra, respectivamente,  $J_{nm}$ ,  $\lambda_{nm}$  são coeficientes numéricos,  $P_{nm}$  são as funções associadas de Legendre (BUTKOV, 1988) e  $\phi$  é a latitude do satélite. Utilizamos a notação clássica:  $a$ ,  $e$ ,  $I$ ,  $f$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ , para semi-eixo maior, excentricidade, inclinação, anomalia verdadeira, argumento do pericentro e longitude do nodo ascendente. A mesma notação foi utilizada para representar os elementos do Sol e da Lua, com o acréscimo dos sub-índices  $\odot$  e  $L$ , respectivamente.

Para um corpo com simetria axial,  $m = 0$  (harmônicos zonais), então:

$$U = \frac{k^2 M_T}{r} + \frac{k^2 M_T}{r} \left\{ - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_P}{r} \right)^n J_n P_n(\sin(\phi)) \right\}. \quad (2.2)$$

O potencial do achatamento restrito apenas a  $n = 2$  é:

$$U_2 = -\frac{k^2 M_T R_P^2}{r^3} J_2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \sin^2(\phi) \right), \quad (2.3)$$

$J_2$  é o segundo coeficiente harmônico zonal.

Assim como fizemos com a função perturbadora solar, faremos uma média em termos da anomalia média do satélite a fim de eliminar os termos de curto período. Novamente, esta média pode ser desenvolvida analiticamente, sem expansões em excentricidade e inclinação e seu resultado é dado por:

$$R_{J_2} = \langle U_2 \rangle = \frac{1}{4} n^2 J_2 R_P^2 (3 \cos^2(I) - 1) (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.4)$$

Para satélites não muito altos, as frequências fundamentais do problema são predominantemente dadas pela parte devida a  $R_{J_2}$ :

$$\dot{\omega} \approx \frac{3nJ_2R_P^2}{4a^2(1-e^2)^2} (5\cos^2(I) - 1), \quad (2.5)$$

$$\dot{\Omega} \approx -\frac{3nJ_2R_P^2}{2a^2(1-e^2)^2} \cos(I). \quad (2.6)$$

## 2.2. Perturbação Solar

A fim de esclarecer alguns aspectos teóricos, é instrutivo escrever as principais forças perturbadoras em termos dos elementos orbitais.

Nesta seção iremos obter a função perturbadora solar média. Seguindo o procedimento clássico (BROUWER e CLEMENCE, 1961), utilizando um referencial fixo no equador da Terra, a função perturbadora do Sol é:

$$R_{\odot} = k^2 M_{\odot} \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_{\odot}}{|\vec{r}_{\odot}|^3} \right), \quad (2.7)$$

onde  $M_{\odot}$  é a massa do Sol,  $k^2$  é a constante gravitacional,  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}_{\odot}$  são os vetores posição do satélite e do Sol, respectivamente e  $\Delta = |\vec{r} - \vec{r}_{\odot}|$  é a distância satélite-Sol.



Expandindo (2.7) em termos de uma série de polinômios de Legendre, desprezando termos de ordem superior a 2 em  $\left(\frac{r}{r_\odot}\right)$ , temos:

$$R_\odot = k^2 M_\odot \frac{r^2}{r_\odot^3} \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2(S) \right). \quad (2.8)$$

$S$  é a distância angular entre o satélite e o Sol.

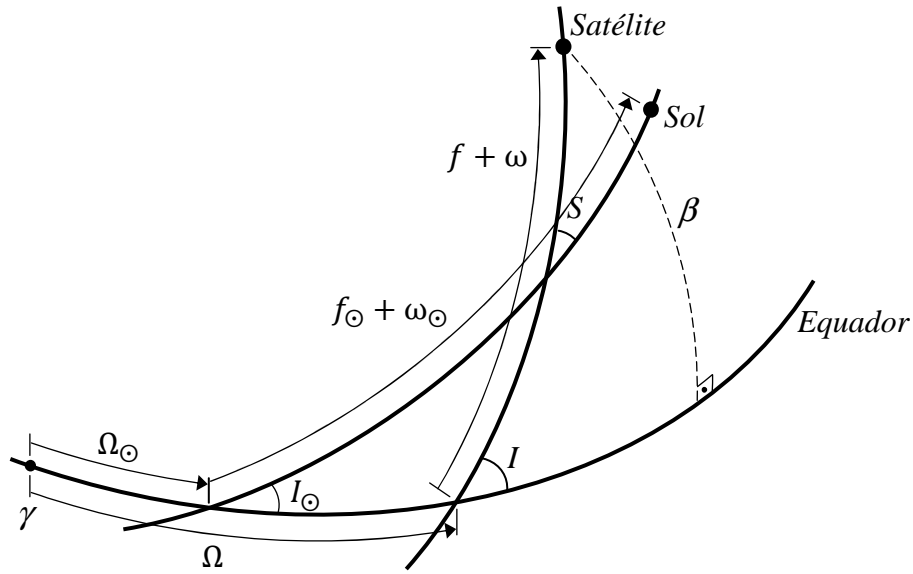


Figura 2.1. Geometria do problema (SANCHEZ et al., 2009), onde  $\gamma$  é um ponto fixo no equador.

Consideraremos, numa primeira aproximação, a órbita do Sol circular. A fim de escrever  $\cos(S)$  em termos dos elementos orbitais, considerando a geometria do problema (Figura 1), temos:

$$\cos(S) = \frac{x x_\odot}{r r_\odot} + \frac{y y_\odot}{r r_\odot} + \frac{z z_\odot}{r r_\odot} \quad (2.9)$$

Considerando as relações clássicas do problema de dois corpos, podemos escrever  $\cos(S)$  em termos de  $f, f_\odot, \Omega, \Omega_\odot, \omega, \omega_\odot, I, I_\odot$ :

$$\begin{aligned} \cos(S) &= \frac{1}{4} (1 + \cos(I))(1 - \cos(I_\odot)) \cos(f + \omega + f_\odot + \omega_\odot + \Omega - \Omega_\odot) \\ &\quad + \frac{1}{4} (1 - \cos(I))(1 + \cos(I_\odot)) \cos(f + \omega + f_\odot + \omega_\odot - \Omega + \Omega_\odot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4}(1 + \cos(I))(1 + \cos(I_{\odot})) \cos(f + \omega - f_{\odot} - \omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
& + \frac{1}{4}(1 - \cos(I))(1 - \cos(I_{\odot})) \cos(f + \omega - f_{\odot} - \omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\
& + \frac{1}{2} \sin(I) \sin(I_{\odot}) [\cos(f + \omega - f_{\odot} - \omega_{\odot}) - \cos(f + \omega + f_{\odot} + \omega_{\odot})], \quad (2.10)
\end{aligned}$$

ou, em uma forma mais compacta:

$$\cos(S) = Aa + Bb + Cc + Dd + Ee, \quad (2.11)$$

onde:  $A = \frac{1}{4}(1 + \cos(I))(1 - \cos(I_{\odot}))$ ,

$$a = \cos(f + \omega + f_{\odot} + \omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}),$$

$$B = \frac{1}{4}(1 - \cos(I))(1 + \cos(I_{\odot})),$$

$$b = \cos(f + \omega + f_{\odot} + \omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}),$$

$$C = \frac{1}{4}(1 + \cos(I))(1 + \cos(I_{\odot})),$$

$$c = \cos(f + \omega - f_{\odot} - \omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}),$$

$$D = \frac{1}{4}(1 - \cos(I))(1 - \cos(I_{\odot})),$$

$$d = \cos(f + \omega - f_{\odot} - \omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}),$$

$$E = \frac{1}{2} \sin(I) \sin(I_{\odot}),$$

$$e = \cos(f + \omega - f_{\odot} - \omega_{\odot}) - \cos(f + \omega + f_{\odot} + \omega_{\odot}).$$

Como estamos interessados nos termos de longa variação, faremos a média da função perturbadora solar sobre a anomalia média do satélite, eliminando os termos de curto período, mantendo assim os termos seculares e de longo período. Este procedimento também será efetuado sobre a função perturbadora do achatamento. Tal média é obtida a partir da operação (KINOSHITA e NAKAI, 1991; YOKOYAMA, 1999):

$$\langle R_{\odot} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{\odot} dl, \quad (2.12)$$

onde  $l$  é a anomalia média do satélite. A função perturbadora solar média fica na forma:

$$R_{\odot}^* = \langle R_{\odot} \rangle = \frac{3k^2 M_{\odot} a^2}{2r_{\odot}^3} \left[ \frac{1}{2} P \left( A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2E^2 - \frac{2}{3} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}A^2Z\cos(2\omega + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
& +\frac{1}{2}B^2Z\cos(2\omega + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\
& +\frac{1}{2}C^2Z\cos(2\omega - 2f_{\odot} - 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
& +\frac{1}{2}D^2Z\cos(2\omega - 2f_{\odot} - 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\
& +\frac{1}{2}Z(E^2 + 2CD)\cos(2\omega - 2f_{\odot} - 2\omega_{\odot}) \\
& +\frac{1}{2}Z(E^2 + 2AB)\cos(2\omega + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot}) \\
& +Z(-E^2 + AD + BC)\cos(2\omega) \\
& +P(-E^2 + AC + BD)\cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot}) \\
& +P(AB + CD)\cos(2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
& +ACZ\cos(2\omega + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
& +ADP\cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
& +EP(A - D)\cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
& +EP(-A - B + C + D)\cos(\Omega - \Omega_{\odot}) \\
& +EZ(A - C)\cos(2\omega + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
& -AEZ\cos(2\omega + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
& +BCP\cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\
& +BDZ\cos(2\omega - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\
& +EP(B - C)\cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\
& +EZ(B - D)\cos(2\omega - \Omega + \Omega_{\odot}) \\
& -BEZ\cos(2f_{\odot} + 2\omega + 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\
& +CEZ\cos(2\omega - 2f_{\odot} - 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
& +DEZ\cos(2\omega - 2f_{\odot} - 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot})], \tag{2.13}
\end{aligned}$$

onde  $P = 1 + \frac{3}{2}e^2$ ,  $Z = \frac{5}{2}e^2$ . Podemos observar em (2.13) os termos que serão os mais importantes para o estudo da dinâmica dos satélites das constelações GPS e Galileo ( $3EZ(A - C)\cos(2\omega + \Omega - \Omega_{\odot})$ ,  $3Z(-E^2 + AD + BC)\cos(2\omega)$ ) e dos satélites heliossíncronos ( $3BCP\cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot})$ ). Analisaremos estes e alguns outros cossenos ressonantes de (2.13) na Seção 2.3.

A fim de verificar a existência de possíveis ressonâncias relevantes para nosso estudo, tomaremos agora a excentricidade do Sol diferente de zero. Assim,  $r_{\odot}$  passa a ser dado pela relação (BROUWER e CLEMENCE, 1961):

$$r_{\odot} = \frac{a_{\odot}(1-e_{\odot}^2)}{(1+e_{\odot}\cos(f_{\odot}))} \quad (2.14)$$

onde  $f_{\odot} = l_{\odot} + 2e_{\odot}\sin(l_{\odot})$  (truncada em  $e_{\odot}^1$ ). Expandindo  $\frac{1}{r_{\odot}^3}$  em série de Taylor, em termos de  $e_{\odot}$  até ordem 1, obtemos:

$$\frac{1}{r_{\odot}^3} = \frac{1}{a_{\odot}^3} + \frac{3e_{\odot}\cos(l_{\odot})}{a_{\odot}^3}. \quad (2.15)$$

Levando em consideração (2.13) e (2.15), a função perturbadora solar média, com Sol elíptico, ficará da seguinte forma:

$$R_{\odot}^e = R_{\odot}^* + R_{\odot}^1. \quad (2.16)$$

onde  $R_{\odot}^1 = 3R_{\odot}^*e_{\odot}\cos(l_{\odot})$  fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_{\odot}^1 = & \frac{9k^2M_{\odot}^3a^3}{8a_{\odot}^3} e_{\odot} \left[ 2P \left( A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2E^2 - \frac{2}{3} \right) \cos l_{\odot} \right. \\ & + A^2 Z \cos(2\omega + l_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\ & + A^2 Z \cos(2\omega + 3l_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\ & + B^2 Z \cos(2\omega + l_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\ & + B^2 Z \cos(2\omega + 3l_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\ & + C^2 Z \cos(2\omega - 3l_{\odot} - 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\ & + C^2 Z \cos(2\omega - l_{\odot} - 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\ & + D^2 Z \cos(2\omega - 3l_{\odot} - 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\ & + D^2 Z \cos(2\omega - l_{\odot} - 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\ & + Z(E^2 + 2CD) \cos(2\omega - 3l_{\odot} - 2\omega_{\odot}) \\ & + Z(E^2 + 2CD) \cos(2\omega - l_{\odot} - 2\omega_{\odot}) \\ & \left. + Z(E^2 + 2AB) \cos(2\omega + l_{\odot} + 2\omega_{\odot}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+Z(E^2 + 2AB)\cos(2\omega + 3l_{\odot} + 2\omega_{\odot}) \\
&+2Z(-E^2 + AD + BC)\cos(l_{\odot} - 2\omega) \\
&+2Z(-E^2 + AD + BC)\cos(l_{\odot} + 2\omega) \\
&+2P(-E^2 + AC + BD)\cos(l_{\odot} + 2\omega_{\odot}) \\
&+2P(-E^2 + AC + BD)\cos(3l_{\odot} + 2\omega_{\odot}) \\
&+2P(AB + CD)\cos(l_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\
&+2P(AB + CD)\cos(l_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
&+2ACZ\cos(l_{\odot} - 2\omega - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\
&+2ACZ\cos(l_{\odot} + 2\omega + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
&+2ADP\cos(l_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
&+2ADP\cos(3l_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
&+2EP(A - D)\cos(l_{\odot} + 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
&+2EP(A - D)\cos(3l_{\odot} + 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
&+2EP(-A - B + C + D)\cos(l_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\
&+2EP(-A - B + C + D)\cos(l_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
&+2EZ(A - C)\cos(l_{\odot} - 2\omega - \Omega + \Omega_{\odot}) \\
&+2EZ(A - C)\cos(l_{\odot} + 2\omega + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
&-2AEZ\cos(2\omega + l_{\odot} + 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
&-2AEZ\cos(2\omega + 3l_{\odot} + 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
&+2BCP\cos(l_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\
&+2BCP\cos(3l_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\
&+2BDZ\cos(l_{\odot} - 2\omega + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
&+2BDZ\cos(l_{\odot} + 2\omega - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\
&+2EP(B - C)\cos(l_{\odot} + 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\
&+2EP(B - C)\cos(3l_{\odot} + 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\
&+2EZ(B - D)\cos(l_{\odot} - 2\omega + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
&+2EZ(B - D)\cos(l_{\odot} + 2\omega - \Omega + \Omega_{\odot}) \\
&-2BEZ\cos(l_{\odot} + 2\omega + 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\
&-2BEZ\cos(3l_{\odot} + 2\omega + 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot}) \\
&+2CEZ\cos(2\omega - 3l_{\odot} - 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
&+2CEZ\cos(2\omega - l_{\odot} - 2\omega_{\odot} + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
&+2DEZ\cos(2\omega - 3l_{\odot} - 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot})
\end{aligned}$$

$$+2DEZ\cos(2\omega - l_{\odot} - 2\omega_{\odot} - \Omega + \Omega_{\odot})]. \quad (2.17)$$

A partir de (2.5) e (2.6), calculamos os semi-eixos maiores das possíveis ressonâncias devidas a  $R_{\odot}^1$ . Estes semi-eixos foram calculados para as inclinações  $I = 56,06$  (GPS, Galileo) e  $I = 98,6^{\circ}$  (heliossíncronos). O resultado, apresentado na Tabela 2.1, é que nenhum dos semi-eixos encontrados é próximo ao semi-eixo dos satélites estudados. As ressonâncias que não apresentam valores de semi-eixo são aquelas cujo valor encontrado é menor do que o raio da Terra, ou não possui valor para estas inclinações.

Tabela 2.1. Semi-eixos ressonantes de  $R_{\odot}^1$  para as inclinações  $I = 56,06^{\circ}$  e  $I = 98,6^{\circ}$ .

Ressonância	Semi-eixo Ressonante (km) para $I = 56,06^{\circ}$	Semi-eixo Ressonante (km) para $I = 98,6^{\circ}$
$2\dot{\omega} + n_{\odot} \approx 0$	-	10.619,5182
$2\dot{\omega} + 3n_{\odot} \approx 0$	-	7.758,6196
$2\dot{\omega} - 2\dot{\Omega} + n_{\odot} \approx 0$	-	12.973,5635
$2\dot{\omega} - 2\dot{\Omega} + 3n_{\odot} \approx 0$	-	9.478,4850
$2\dot{\omega} - 3n_{\odot} \approx 0$	-	-
$2\dot{\omega} - n_{\odot} \approx 0$	-	-
$2\dot{\omega} - 2\dot{\Omega} - 3n_{\odot} \approx 0$	10.458,3790	-
$2\dot{\omega} - 2\dot{\Omega} - n_{\odot} \approx 0$	14.314,7818	-
$2\dot{\omega} - 3n_{\odot} \approx 0$	7.641,6898	-
$2\dot{\omega} - n_{\odot} \approx 0$	10.459,4720	-
$2\dot{\omega} + n_{\odot} \approx 0$	-	11.941,2008
$2\dot{\omega} + 3n_{\odot} \approx 0$	-	8.724,2408
$n_{\odot} - 2\dot{\Omega} \approx 0$	-	8.749,4526
$n_{\odot} + 2\dot{\Omega} \approx 0$	12.748,2405	-
$3n_{\odot} + 2\dot{\Omega} \approx 0$	9.313,8640	-
$3n_{\odot} + \dot{\Omega} \approx 0$	7.640,4919	-
$n_{\odot} - \dot{\Omega} \approx 0$	-	7.177,4853
$n_{\odot} + \dot{\Omega} \approx 0$	10.457,8324	-
$n_{\odot} - 2\dot{\omega} - \dot{\Omega} \approx 0$	-	-

$n_{\odot} + 2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$	-	11.328,5054
$2\dot{\omega} + 3n_{\odot} + \dot{\Omega} \approx 0$	-	8.276,6055
$3n_{\odot} - 2\dot{\Omega} \approx 0$	-	-
$n_{\odot} + 2\dot{\omega} - \dot{\Omega} \approx 0$	-	12.484,0491
$3n_{\odot} - \dot{\Omega} \approx 0$	-	-
$n_{\odot} - 2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$	12.749,2399	-
$3n_{\odot} + 2\dot{\omega} - \dot{\Omega} \approx 0$	-	9.120,8457
$2\dot{\omega} + \dot{\Omega} - 3n_{\odot} \approx 0$	-	-
$2\dot{\omega} + \dot{\Omega} - n_{\odot} \approx 0$	-	-
$2\dot{\omega} - \dot{\Omega} - 3n_{\odot} \approx 0$	9.314,5941	-
$2\dot{\omega} - \dot{\Omega} - n_{\odot} \approx 0$	12.749,2399	-

Uma segunda média, similar a (2.12), no entanto agora em termos da anomalia média do Sol, aplicada em (2.13), nos fornece:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\odot} = & \frac{k^2 M_{\odot} a^2}{4r_{\odot}^3} \left[ \frac{P}{4} \left( 1 - 3\cos^2(I) - 3\cos^2(I_{\odot}) + 9\cos^2(I)\cos^2(I_{\odot}) \right) \right. \\
& + \frac{3}{2} Z \sin^2(I) \left( -1 + 3\cos^2(I_{\odot}) \right) \cos(2\omega) \\
& + \frac{3}{2} P \sin^2(I) \sin^2(I_{\odot}) \cos(2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
& + \frac{3}{8} Z (1 + \cos(I))^2 \sin^2(I_{\odot}) \cos(2\omega + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
& - \frac{3}{2} Z \sin(I) \sin(I_{\odot}) (1 + \cos(I)) \cos(I_{\odot}) \cos(2\omega + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
& + 3P \sin(I) \cos(I) \sin(I_{\odot}) \cos(I_{\odot}) \cos(\Omega - \Omega_{\odot}) \\
& + \frac{3}{8} Z (1 + \cos^2(I))^2 \sin^2(I_{\odot}) \cos(2\omega - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\
& \left. + \frac{3}{2} Z \sin(I) (1 - \cos(I)) \sin(I_{\odot}) \cos(I_{\odot}) \cos(2\omega - \Omega + \Omega_{\odot}) \right]. \quad (2.18)
\end{aligned}$$

A função perturbadora solar duplamente mediada (2.18) (YOKOYAMA, 1999) foi utilizada por Gick e Chao (2001) para examinar a evolução temporal da excentricidade dos satélites do sistema Galileo quando  $I \approx 55^\circ$ . Faremos uso da expressão clássica da equação variacional de Lagrange para excentricidade para reproduzir o raciocínio destes autores e

também para mostrar a contribuição individual das perturbações solares e lunares. Seja então (BROUWER e CLEMENCE, 1961):

$$\frac{de}{dt} = \left( \frac{1-e^2}{na^2e} \right) \frac{\partial \hat{R}_\odot}{\partial l} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}_\odot}{\partial \omega}. \quad (2.19)$$

O primeiro termo da equação obviamente é nulo, pois (2.18) resulta de uma média em termos de  $l$ . Assim, levando-se em consideração que  $r_\odot = a_\odot$  (neste caso o Sol é considerado circular) e  $\frac{k^2 M_\odot}{a_\odot^3} = \frac{M_\odot}{M_\odot + M_T} \frac{n_\odot^2}{n}$ , (2.19) fica:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} = \frac{15}{8} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \frac{M_\odot}{M_\odot + M_T} \frac{n_\odot^2}{n} \left\{ \frac{1}{2} e \sin^2(I) (-1 + 3 \cos^2(I_\odot)) \sin(2\omega) \right. \\ + \frac{1}{4} e (1 + \cos(I))^2 \sin^2(I_\odot) \sin(2\omega + 2\Omega - 2\Omega_\odot) \\ - \frac{1}{2} e \sin(I) (1 + \cos(I)) \sin(2I_\odot) \sin(2\omega + \Omega - \Omega_\odot) \\ + \frac{1}{4} e (1 - \cos(I))^2 \sin^2(I_\odot) \sin(2\omega - 2\Omega + 2\Omega_\odot) \\ \left. + \frac{1}{2} e \sin(I) (1 - \cos(I)) \sin(2I_\odot) \sin(2\omega - \Omega + \Omega_\odot) \right\}. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Por outro lado, se a Lua fosse o perturbador em questão, seguindo o mesmo procedimento que usamos com o Sol, a variação da excentricidade em relação ao tempo devida à Lua seria:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} = \frac{15}{8} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \frac{M_L}{M_L + M_T} \frac{n_L^2}{n} \left\{ \frac{1}{2} e \sin^2(I) (-1 + 3 \cos^2(I_L)) \sin(2\omega) \right. \\ + \frac{1}{4} e (1 + \cos(I))^2 \sin^2(I_L) \sin(2\omega + 2\Omega - 2\Omega_L) \\ - \frac{1}{2} e \sin(I) (1 + \cos(I)) \sin(2I_L) \sin(2\omega + \Omega - \Omega_L) \\ + \frac{1}{4} e (1 - \cos(I))^2 \sin^2(I_L) \sin(2\omega - 2\Omega + 2\Omega_L) \\ \left. + \frac{1}{2} e \sin(I) (1 - \cos(I)) \sin(2I_L) \sin(2\omega - \Omega + \Omega_L) \right\}. \quad (2.21) \end{aligned}$$

onde  $M_L$ ,  $n_L$ ,  $I_L$  e  $\Omega_L$  são a massa, o movimento médio, a inclinação e a longitude do nodo ascendente da Lua, respectivamente. Uma análise superficial mostra que (2.20) e (2.21) se diferenciam basicamente nos coeficientes  $\gamma_L = \frac{M_L}{M_L + M_T} \frac{n_L^2}{n}$  e  $\gamma_\odot = \frac{M_\odot}{M_\odot + M_T} \frac{n_\odot^2}{n}$ . Assim, a razão



$$\frac{\gamma_L}{\gamma_\odot} = \frac{M_L(M_\odot + M_T)}{M_\odot(M_L + M_T)} \frac{n_L^2}{n_\odot^2} = 2,177 \quad (2.22)$$

poderia levar à conclusão que o efeito perturbativo da Lua seria  $\sim 2$  vezes maior que o do Sol. Esta análise é precipitada em especial pelo fato que em presença de ressonâncias (no caso  $2\omega + \Omega$ ) há de se tomar um cuidado extra: quando temos ressonâncias, os períodos envolvidos na dinâmica passam a ter importância significativa e não se deve privilegiar apenas a magnitude numérica de alguns termos. Por exemplo, enquanto em (2.20) a variação de  $\Omega_\odot$  é praticamente desprezível numa escala de 1.000 anos, o mesmo não se pode dizer de  $\Omega_L$ , cujo período é de aproximadamente 19,4 anos, no caso em que o plano de referência é o equador terrestre. Assim, em (2.21), embora os quatro últimos cossenos apresentem a combinação  $2\omega + \Omega$ , estes tem período da ordem de 19,4 anos, enquanto o argumento do cosseno  $\cos(2\omega + \Omega - \Omega_\odot)$  tem período superior a 328,7 anos (para satélite GPS, 500 km acima da altura nominal).

Portanto, apesar da magnitude numérica do coeficiente  $\gamma_L$  em (2.21), o único termo mais significativo seria o primeiro ( $\sin(2\omega)$ ), no entanto este, por sua vez, também possui uma variação relativamente rápida, ou seja,  $\omega$  para este problema tem período de aproximadamente 49,3 anos.

Como se nota, os métodos de média propiciam uma análise da importância dos diversos termos da função perturbadora. Assim, podemos ver que o efeito maior da ressonância vem da perturbação solar e a Lua contribui com uma oscilação de amplitude significativa, porém de período muito mais rápido que o do Sol.

As perturbações do Sol e da Lua, escritas juntas, ficam na forma:

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} = & \frac{15(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{8n} \left\{ \gamma_\odot \left[ \frac{1}{2} e \sin^2(I) (-1 + 3 \cos^2(I_\odot)) \right] A_\odot \right. \\ & + \gamma_L \left[ \frac{1}{2} e \sin^2(I) (-1 + 3 \cos^2(I_L)) \right] A_L \\ & + \gamma_\odot \left[ \frac{1}{4} e (1 + \cos(I))^2 \sin^2(I_\odot) \right] B_\odot \\ & + \gamma_L \left[ \frac{1}{4} e (1 + \cos(I))^2 \sin^2(I_L) \right] B_L \\ & - \gamma_\odot \left[ \frac{1}{2} e \sin(I) (1 + \cos(I)) \sin(2I_\odot) \right] C_\odot \\ & \left. - \gamma_L \left[ \frac{1}{2} e \sin(I) (1 + \cos(I)) \sin(2I_L) \right] C_L \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma_{\odot} \left[ \frac{1}{4} e (1 - \cos(I))^2 \sin^2(I_{\odot}) \right] D_{\odot} \\
& +\gamma_L \left[ \frac{1}{4} e (1 - \cos(I))^2 \sin^2(I_L) \right] D_L \\
& +\gamma_{\odot} \left[ \frac{1}{2} e \sin(I) (1 - \cos(I)) \sin(2I_{\odot}) \right] E_{\odot} \\
& +\gamma_L \left[ \frac{1}{2} e \sin(I) (1 - \cos(I)) \sin(2I_L) \right] E_L \}, \tag{2.23}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
A_P &= \sin(2\omega) \\
B_P &= \sin(2\omega + 2\Omega - 2\Omega_P) \\
C_P &= \sin(2\omega + \Omega - \Omega_P) \\
D_P &= \sin(2\omega - 2\Omega + 2\Omega_P) \\
E_P &= \sin(2\omega - \Omega + \Omega_P), \tag{2.24}
\end{aligned}$$

com  $P = \odot$  para o Sol e  $P = L$  para a Lua.

Levando em consideração somente a perturbação do Sol (GICK e CHAO, 2001), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \frac{15}{8} \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{n} \{ 0,5110 e \sin(2\omega) \\
& + 0,0984 e \sin(2\omega + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \\
& - 0,4714 e \sin(2\omega + \Omega - \Omega_{\odot}) \\
& + 0,0072 e \sin(2\omega - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \\
& + 0,1277 e \sin(2\omega - \Omega + \Omega_{\odot}) \}. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Basicamente, esta é a equação que Gick e Chao (2001) tomaram para explicar o crescimento da excentricidade dos satélites descartáveis do sistema GPS quando  $I \approx 56^\circ$ . Voltaremos a esta questão nas Seções seguintes.

### 2.3. Análise de algumas ressonâncias

Consideraremos o efeito do Sol e do achatamento, conforme dado por (2.13) e (2.4), respectivamente. Como se nota,  $R_{J_2}$  é a parte dominante, cerca de 1.000 vezes superior a  $R_{\odot}$  (dependendo da altitude do satélite). Por outro lado,  $R_{J_2}$  só depende dos elementos métricos. Assim, as frequências principais do problema são dadas por  $R_{J_2}$ . Vamos então examinar possíveis ressonâncias que poderiam ocorrer neste problema, quando nos restringimos a apenas a  $R_{\odot}$  e  $R_{J_2}$ . Esta análise é bastante interessante, pois rapidamente identificamos como e que efeitos determinadas ressonâncias podem gerar nos satélites.

A título de ilustração, façamos primeiramente a análise para um cosseno de  $R_{\odot}$ , pois cada cosseno pode gerar uma ressonância, dependendo da inclinação e altitude do satélite (YOKOYAMA, 1999).

#### 2.3.1. $\dot{\omega} + \dot{\Omega} + n_{\odot} \approx 0$

Seja então o primeiro cosseno de (2.13), e tomemos a função perturbadora restrita apenas a:

$$F = R_{J_2} + T_0 \left\{ \frac{3}{2} P \left( A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2E^2 - \frac{2}{3} \right) + \frac{3}{2} A^2 Z \cos(2\omega + 2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}) \right\}. \quad (2.26)$$

onde  $T_0 = \frac{k^2 M_{\odot} a^2}{2r_{\odot}^3}$ . Esta função perturbadora, quando escrita em termos das Variáveis de Delaunay (BROUWER e CLEMENCE, 1961), nada mais é que a Hamiltoniana do problema.

Estamos supondo Sol circular em órbita Kepleriana. Então teremos  $f_{\odot} = l_{\odot} = n_{\odot} t + \theta_0$ . Assim:

$$F = F_S + \frac{3}{2} T_0 A^2 Z \cos(2\omega + 2l_{\odot} + 2\omega_{\odot} + 2\Omega - 2\Omega_{\odot}), \quad (2.27)$$

onde

$$F_S = R_{J_2} + T_0 \left[ \frac{3}{2} P \left( A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + 2E^2 - \frac{2}{3} \right) \right]. \quad (2.28)$$

Seja  $\lambda_{\odot} = l_{\odot} + \omega_{\odot} + \Omega_{\odot}$ , e tomando  $\Omega_{\odot} = 0$ , temos:

$$F = F_S + \frac{3}{2}T_0A^2Z\cos(2\omega + 2\Omega + 2\lambda_{\odot}). \quad (2.29)$$

Do fato de  $\lambda_{\odot}$  depender explicitamente do tempo, fazemos a extensão do espaço de fase, resultando na Hamiltoniana:

$$F = F_S + \frac{3}{2}T_0A^2Z\cos(2\omega + 2\Omega + 2\lambda_{\odot}) - n_{\odot}P_{\odot}, \quad (2.30)$$

onde  $P_{\odot}$  é o momento conjugado de  $\lambda_{\odot}$  (coordenada angular).

Esta Hamiltoniana pode ser trivialmente reduzida a um problema de um grau de liberdade com uma transformação canônica de Mathieu (LANCZOS, 1970). Definimos novas variáveis da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \omega + \Omega + \lambda_{\odot}, \\ \theta_2 &= \omega, \\ \theta_3 &= \lambda_{\odot}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Da condição de Jacobi-Poincaré, temos:

$$P_1d\theta_1 + P_2d\theta_2 + P_3d\theta_3 = Gd\omega + Hd\Omega + P_{\odot}d\lambda_{\odot} \quad (2.32)$$

$$P_1d(\omega + \Omega + \lambda_{\odot}) + P_2d(\omega) + P_3d(\lambda_{\odot}) = Gd\omega + Hd\Omega + P_{\odot}d\lambda_{\odot} \quad (2.33)$$

Resultam então as relações que definem os novos momentos  $P_i$ :

$$\begin{aligned} G &= P_1 + P_2, \\ H &= P_1, \\ P_{\odot} &= P_1 + P_3. \end{aligned} \quad (2.34)$$

A nova Hamiltoniana, escrita agora em termos de  $(\theta_i, P_i)$ , é tal que  $\theta_2$  e  $\theta_3$  são cinostênicas, portanto  $P_2$  e  $P_3$  são constantes, ou seja:

$$\tilde{F}_1 = F_S + \frac{3}{2}T_0A^2Z\cos(\theta_1) - n_\odot P_1, \quad (2.35)$$

onde  $n_\odot P_3$  foi desprezado, pois trata-se apenas de uma constante aditiva. Deve-se lembrar então que os elementos orbitais métricos excentricidade, inclinação que aparecem em  $F_S$ ,  $A$ ,  $Z$ , devem ser escritos em função de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , ou seja:

$$e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2} = 1 - \frac{(P_1+P_2)^2}{L^2}, \quad (2.36)$$

$$\cos(I) = \frac{H}{G} = \frac{P_1}{P_1+P_2}. \quad (2.37)$$

Assim,  $\tilde{F}_1$  sendo de um grau de liberdade, pode-se traçar as curvas de nível que representam as trajetórias do sistema.

Vamos agora examinar o domínio de existência desta ressonância.

A ressonância ocorre para  $\dot{\omega} + \dot{\Omega} + n_\odot$ , onde  $n_\odot$  é o movimento médio do Sol. Um simples cálculo usando (2.5) e (2.6) leva a:

$$a^{\frac{7}{2}} = -\frac{0,75 J_2 \sqrt{\mu} (5 \cos^2(I) - 2 \cos(I) - 1)}{(1-e^2)^2 n_\odot}, \quad (2.38)$$

onde  $\mu = G(M_T + m)$ . Facilmente se observa que esta equação só tem sentido se  $5 \cos^2(I) - 2 \cos(I) - 1 < 0$ , ou seja:  $46,37 \leq I \leq 106,85$ , assim, fixando  $I = 55^\circ$  (GPS),  $e = 0.01$ , resulta  $a = 16.070,437$  km, valor, portanto bem abaixo dos elementos da constelação GPS.

### 2.3.2. $2\dot{\omega} - 2n_\odot \approx 0$ (Evecção)

Para esta ressonância, temos:

$$F_2 = F_S + \frac{3}{2}T_0C^2Z\cos(2\omega - 2f_\odot - 2\omega_\odot + 2\Omega - 2\Omega_\odot) \quad (2.39)$$

Tal como antes, faremos a extensão do espaço de fase obtendo a Hamiltoniana estendida:

$$\tilde{F}_2 = F_S + \frac{3}{2}T_0C^2Z\cos(2\varpi - 2\lambda_\odot) - n_\odot P_\odot, \quad (2.40)$$

com  $P_\odot$  momento conjugado de  $\lambda_\odot$ . Como sabemos (BROUWER e CLEMENCE, 1961), consideramos as variáveis canônicas lentas de Delaunay:

$$\begin{aligned} \varpi &\rightarrow G - L \\ h &\rightarrow H - G \end{aligned}$$

além do par  $\lambda_\odot \rightarrow P_\odot$ .

Vamos definir novas coordenadas:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda_\odot, \\ \theta_2 &= h, \\ \theta_3 &= \varpi - \lambda_\odot. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Seja a condição de Jacobi-Poincaré:

$$(G - L)d\varpi + (H - G)dh + P_\odot d\lambda_\odot = P_1 d\theta_1 + P_2 d\theta_2 + P_3 d\theta_3 \quad (2.42)$$

$$= P_1 d\lambda_\odot + P_2 dh + P_3 d(\varpi - \lambda_\odot). \quad (2.43)$$

Então:

$$\begin{aligned} G - L &= P_3 \\ H - G &= P_2, \\ P_\odot &= P_1 - P_3. \end{aligned} \quad (2.44)$$

A nova Hamiltoniana fica:

$$\tilde{F}_2 = F_S + \frac{3}{2}T_0C^2Z\cos(2\theta_3) + n_\odot P_3 \quad (2.45)$$

e como  $P_2$  e  $P_1$  são constantes, o termo aditivo  $-n_{\odot}P_1$  foi desprezado. Podemos notar então que:

$$e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2} = 1 - \frac{(P_3+L)^2}{L^2}, \quad (2.46)$$

$$\cos(I) = \frac{H}{G} = \frac{P_2+L+P_3}{L+P_3}. \quad (2.47)$$

Um cálculo similar ao efetuado anteriormente mostra que a ressonância da eveção só pode ocorrer para  $I < 46,38^\circ$  ou  $I > 106,85^\circ$ , pois

$$\dot{\omega} - n_{\odot} = 0 \Rightarrow a^{\frac{7}{2}} = \frac{0,75 J_2 \sqrt{\mu} (5 \cos^2(I) - 2 \cos(I) - 1)}{(1-e^2)^2 n_{\odot}}. \quad (2.48)$$

Então, apenas a título de ilustração, consideramos na equação acima o caso  $I = 1^\circ$ ,  $e = 0.005$ ,  $a = 12.350,6720$  km. A Figura 2.2, obtida com estes valores, mostra que o efeito desta ressonância é muito importante para satélites com baixa inclinação, pois afeta sensivelmente a excentricidade.

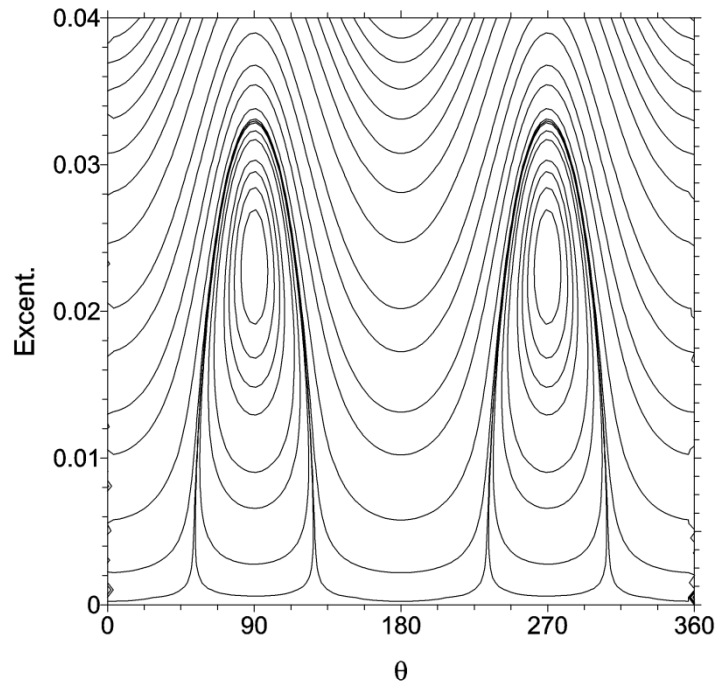


Figura 2.2. Curvas de nível da Hamiltoniana (2.45) mostrando a variação da excentricidade em função do ângulo ressonante  $\theta = \varpi - \lambda_{\odot}$ .

### 2.3.3. $\dot{\omega} \approx 0$ (Inclinação Crítica)

A partir de (2.5), temos:

$$\dot{\omega} \approx \frac{3nJ_2R_p^2}{4a^2(1-e^2)^2} (5\cos^2(I) - 1) \approx 0 \quad (2.49)$$

se  $I = 63,4^\circ$  ou  $I = 116,57^\circ$ , independente do valor do semi-eixo maior. Esta ressonância é importante para o sistema GLONASS, que possui inclinação  $I = 64,8^\circ$ , próxima à inclinação crítica. Mostraremos seu efeito na Seção 3.1.

A Hamiltoniana gerada a partir do termo dominante desta ressonância em (2.13), mais termos seculares é dada por:

$$F_3 = F_S + 3T_0Z(-E^2 + AD + BC)\cos(2\omega). \quad (2.50)$$

Podemos notar que (2.49) não possui tempo explícito e já possui um único grau de liberdade ( $\lambda_\odot$  não está presente), pois:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial F_3}{\partial l} = 0 \rightarrow L \text{ constante}, \quad (2.51)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial F_3}{\partial \Omega} = 0 \rightarrow H \text{ constante}. \quad (2.52)$$

onde, em  $F_3$ , a excentricidade é escrita nas variáveis clássicas de Delaunay, isto é,  $e^2 = \frac{L^2 - G^2}{L^2}$  e  $\cos(I) = \frac{H}{L\sqrt{1-e^2}}$ . A Figura 2.3 mostra as curvas de nível da Hamiltoniana  $F_3$  para  $I = 63,4^\circ$  e  $a = 25.478,14$  km (semi-eixo nominal do sistema GLONASS).



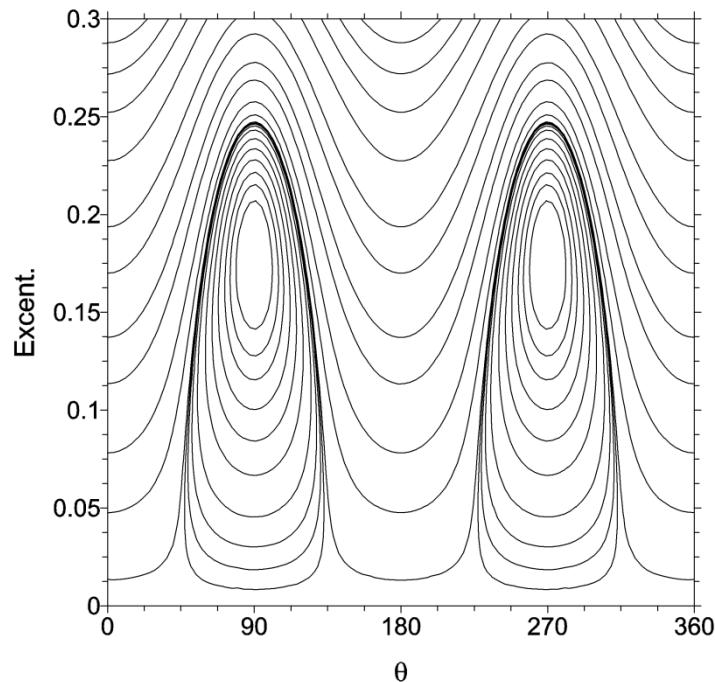


Figura 2.3. Curvas de nível da Hamiltoniana (2.50) mostrando a variação da excentricidade em função do ângulo ressonante  $\theta = \omega$ .

#### 2.3.4. $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$

Considerando (2.5) e (2.6), a razão entre  $\dot{\Omega}$  e  $\dot{\omega}$  é dada por:

$$\frac{\dot{\Omega}}{\dot{\omega}} \approx \frac{2\cos(I)}{1-5\cos^2(I)} = k. \quad (2.53)$$

Para  $k$  inteiro, temos ressonâncias especiais que não dependem do semi-eixo maior do satélite. Estas ressonâncias geralmente afetam a excentricidade. Para  $k = -2$ , temos  $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$  para  $I = 56,06^\circ$  e  $I = 110,99^\circ$ . Para  $I = 63,4^\circ$ , como já vimos, temos  $\dot{\omega} \approx 0$ .

No caso  $I = 56,06^\circ$ , vamos obter uma visão mais geral da ressonância  $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$ , que afeta as constelações GPS e Galileo. Para esta inclinação o termo dominante de (2.13) é  $\cos(2\omega + \Omega - \Omega_\odot)$ . Como anteriormente, podemos escrever a Hamiltoniana do sistema (considerando  $\Omega_\odot = 0$ ) da seguinte forma:

$$F_4 = F_5 + 3T_0EZ(A - C)\cos(2\omega + \Omega - \Omega_\odot) \quad (2.54)$$

Fazemos então uma transformação canônica de Mathieu, obtendo as novas variáveis:

$$\theta_1 = 2\omega + \Omega, \quad P_1 = \frac{G}{2}, \quad \theta_2 = \Omega, \quad P_2 = H - \frac{G}{2}, \quad (2.55)$$

com  $\Omega_{\odot} = 0$ . Assim,  $e^2 = \frac{L^2 - 4P_1^2}{L^2}$  e  $\cos(I) = \frac{P_1 + P_2}{2P_1}$ . Com isso, a Hamiltoniana fica:

$$F_4 = F_S + 3T_0EZ(A - C)\cos(\theta_1) \quad (2.56)$$

Escrevendo (2.56) de forma expandida:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\odot} = & \frac{k^2 M_{\odot} a^2}{4r_{\odot}^3} \left[ \frac{P}{4} \left( 1 - 3 \frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1^2} - 3\cos^2(I_{\odot}) \right) \right. \\ & \left. + 9 \frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1^2} \cos^2(I_{\odot}) + \frac{3}{4} P \sin^2(I) \left( -1 + 3\cos^2(I_{\odot}) \right) \right) \\ & \left. - \frac{3}{8} Z \left( 1 - \frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1^2} \right)^2 \sin(I_{\odot}) \left( 1 + 3 \frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1^2} \right) \cos(I_{\odot}) \cos(\theta_1) \right], \quad (2.57) \end{aligned}$$

$$\tilde{R}_{J_2} = n^2 J_2 R_P^2 \left( 3 \frac{(P_1 + P_2)^2}{4P_1^2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{L^2 - 4P_1^2}{L^2} \right)^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.58)$$

Nestas variáveis,  $\tilde{R} = \tilde{R}_{\odot} + \tilde{R}_{J_2}$  é uma Hamiltoniana de um grau de liberdade (pois  $\theta_2$  é cinostênica e  $P_2 = H - \frac{G}{2}$  é uma constante).

Na Figura 2.4 consideramos uma excentricidade inicial  $e_0 = 0.005$  e semi-eixo maior  $a = 30.647$  km (sistema Galileo, 500 km acima do semi-eixo nominal). Notemos que na parte inferior da figura há uma grande região onde o satélite pode permanecer com excentricidade muito baixa por um tempo finito, que corresponde à região onde a condição  $2\omega + \Omega \approx 0$  é satisfeita. Esta região é de grande interesse, pois permite a criação de uma das estratégias propostas para descarte de satélites das constelações de navegação. Buscaremos condições iniciais contidas nesta região. Por outro lado, a parte superior da figura apresenta a situação oposta: alta excentricidade, que também ocorre para  $2\omega + \Omega \approx 0$ . É muito importante notar que trajetórias que começam com baixa excentricidade podem atingir altos valores, uma vez que o centro de libração se encontra próximo a  $e \approx 0,5$ . Este é o fenômeno da ressonância que afeta este problema.

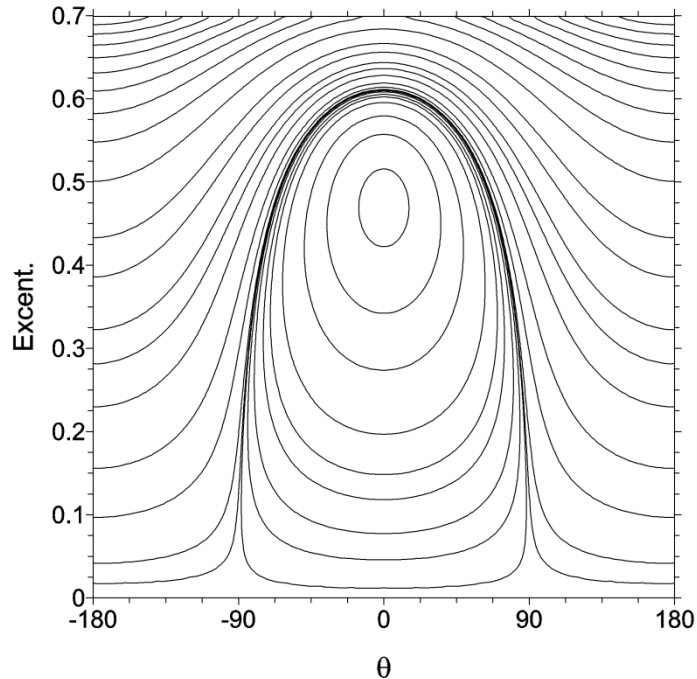


Figura 2.4. Curvas de nível da Hamiltoniana, mostrando a variação da excentricidade em função do ângulo crítico  $\theta = 2\omega + \Omega$ .

Conforme dito na Seção 2.2, Gick e Chao (2001) mostraram que a excentricidade cresce muito no problema dos satélites das constelações GPS e Galileo usando a Equação (2.25). Mostraram basicamente que os termos mais importantes são o primeiro e o terceiro. Este último se deve basicamente à ressonância  $2\omega + \Omega$ , causando assim uma variação extremamente lenta (cerca de 0,003 graus por dia). A integração das equações de Lagrange comprovou grandes variações de excentricidade em cerca de 200 anos.

Podemos, de forma alternativa, refazer tal raciocínio de maneira elementar, usando as simples técnicas de teoria de perturbações.

Sabemos que as frequências  $\dot{\omega}$  e  $\dot{\Omega}$  são basicamente dadas pela perturbação do achatamento (cuja importância em geral é muito maior que a do Sol para os satélites aqui tratados). Então, para uma primeira avaliação qualitativa, é possível usar uma integração do tipo Picard (aproximações sucessivas) e constatar:

$$\omega \cong \omega_0 + f_\omega t, \quad (2.59)$$

$$\Omega \cong \Omega_0 + f_\Omega t, \quad (2.60)$$

onde  $f_\omega$  e  $f_\Omega$  são as frequências de  $\omega$  e  $\Omega$  dadas em (2.5) e (2.6).

Assim, a integração de (2.25) é:

$$(2.61)$$

Como é classicamente conhecido, se temos  $2f_\omega + f_\Omega \approx 0$ , então ocorre o problema dos pequenos divisores (ressonância) e portanto a excentricidade pode sofrer grandes variações de longo período.

### 2.3.5. $n_\odot - \dot{\Omega} \approx 0$

Nesta ressonância, o movimento da longitude do nodo ascendente é síncrono com o movimento médio do Sol. Isto permite definir uma órbita heliossíncrona, ou seja, aquela cujo plano orbital do satélite rotaciona acompanhando o movimento anual do Sol. Uma consequência do sincronismo é que o satélite permanece sempre iluminado pelo Sol, como podemos observar na Figura 2.5. Também devido ao sincronismo, o satélite “sobrevoa” uma determinada região do planeta (determinada latitude) sempre com as mesmas condições de iluminação, podendo (com alguns ajustes no semi-eixo) retornar na mesma data e horário, pelo local observado no ano anterior. Por este motivo este satélite é de grande valia no sensoriamento por imageamento (fotografias sucessivas de uma determinada região anualmente). Vale ressaltar que, devido ao arrasto atmosférico, apenas o sincronismo não garante que o satélite passe por uma mesma latitude numa certa data e horário local, ou seja, quando o semi-eixo diminui, há a perda da sincronia, portanto isto leva à necessidade de manobras de reposição orbital.

É importante ressaltar que neste estudo vamos ignorar a obliquidade da eclíptica. Portanto, o plano da órbita do Sol será o próprio equador.

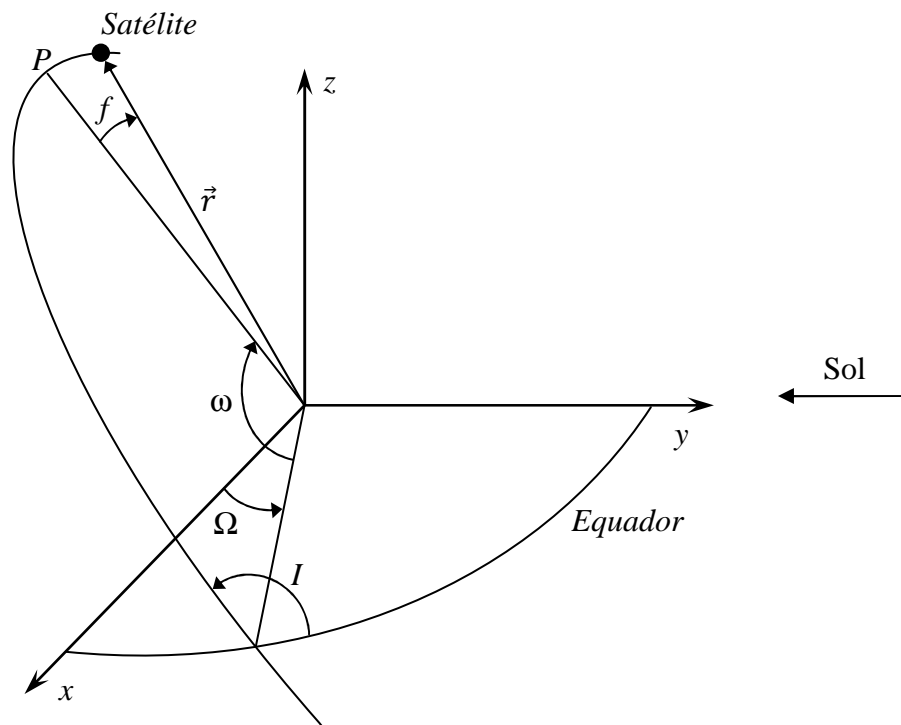


Figura 2.5. Representação da órbita heliossíncrona em relação ao equador.

A dinâmica de um satélite heliossíncrono será analisada no Capítulo 4. Por hora, vamos nos ater ao comportamento da ressonância em si, pois a órbita heliossíncrona é um dos melhores exemplos da utilização de perturbações orbitais para viabilizar um determinado tipo de missão. A necessidade de manter as mesmas condições de iluminação nas diferentes passagens do satélite por um ponto de observação pode ser traduzida pelo requisito de manter o plano orbital do satélite se deslocando na mesma velocidade angular com que o Sol se desloca.

Observando a relação entre as frequências envolvidas, temos:

$$n_{\odot} \approx \dot{\Omega} \rightarrow n_{\odot} \approx \frac{-3nJ_2R_T^2}{2a^2(1-e^2)^2} \cos(I). \quad (2.62)$$

Como o movimento médio do Sol sempre avança, ou seja,  $\lambda_{\odot}$  é crescente no tempo, uma simples inspeção da expressão (2.60) mostra que, para que a condição ressonante seja satisfeita, o satélite deve ter inclinação maior que  $90^\circ$ , ou seja, retrógrado.

Também podemos observar, a partir de (2.60), que existe uma dependência entre semi-eixo e inclinação, ou seja, para cada inclinação, temos um semi-eixo ressonante diferente, e vice-versa. Isolando o semi-eixo do satélite em (2.60), podemos obter uma expressão que fornece o semi-eixo do satélite para uma dada inclinação:

$$a^{\frac{7}{2}} = \frac{3\sqrt{\mu}}{2n_{\odot}} \frac{J_2 R_T^2}{(1-e^2)^2} \cos(I) \quad (2.63)$$

A partir de (2.63), geramos a Figura 2.6, que apresenta os possíveis semi-eixos em função da inclinação do satélite. Podemos notar nesta figura que existe um semi-eixo limite próximo a 12.115 km. A grande maioria dos satélites heliossíncronos tem inclinação em torno de 98°.

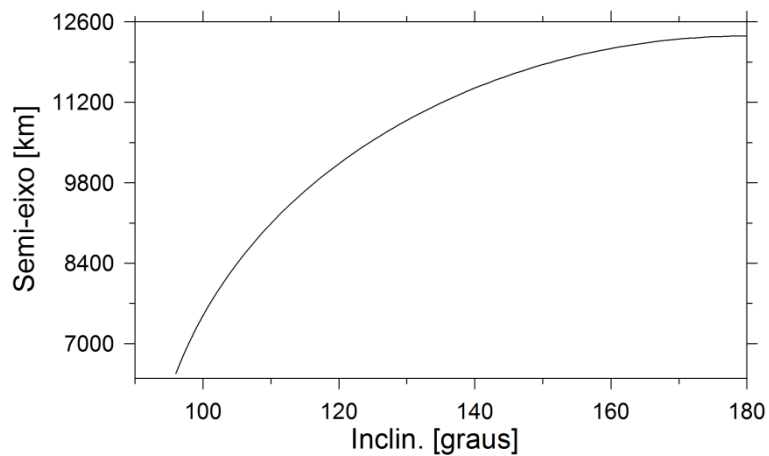


Figura 2.6. Semi-eixo maior do satélite em função da inclinação.

A Hamiltoniana neste caso é dada por:

$$F_5 = F_S + 3T_0 BCP \cos(2f_{\odot} + 2\omega_{\odot} - 2\Omega + 2\Omega_{\odot}) \quad (2.64)$$

Consideraremos  $\omega_{\odot}$  e  $\Omega_{\odot}$  iguais a zero. Além disso, como em (2.13) tomamos a excentricidade do Sol igual a zero,  $f_{\odot} = l_{\odot}$ . Vamos seguir o procedimento já usado várias vezes. Assim, temos que:

$$\tilde{F}_5 = F_S + 3T_0 BCP \cos(2\lambda_{\odot} - 2\Omega) - \frac{d\lambda_{\odot}}{dt} P_{\odot}. \quad (2.65)$$

onde  $P_{\odot}$  momento conjugado de  $\lambda_{\odot}$ . Assim:

$$\tilde{F}_5 = F_S + 3T_0 BCP \cos(2\lambda_{\odot} - 2\Omega) - n_{\odot} P_{\odot}. \quad (2.66)$$

Sejam novas variáveis iniciais de partida:

$$\begin{aligned}\omega &\rightarrow G, \\ \Omega &\rightarrow H, \\ \lambda_{\odot} &\rightarrow P_{\odot},\end{aligned}\tag{2.67}$$

vamos definir novas variáveis:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \lambda_{\odot} - \Omega, \\ \theta_2 &= \omega, \\ \theta_3 &= \lambda_{\odot}.\end{aligned}\tag{2.68}$$

De Jacobi-Poincaré, temos:

$$Gd\omega + Hd\Omega + P_{\odot}d\lambda_{\odot} = P_1d(\lambda_{\odot} - \Omega) + P_2d\omega + P_3d\lambda_{\odot}.\tag{2.69}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}G &= P_2 \\ H &= -P_1, \\ P_{\odot} &= P_1 + P_3.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Temos então:

$$\tilde{F}_5 = F_S + 3T_0BCP\cos(2\theta_1) - n_{\odot}P_1,\tag{2.71}$$

onde  $e^2 = 1 - \frac{G^2}{L^2} = 1 - \frac{P_2^2}{L^2}$ ,  $\cos(I) = \frac{H}{G} = -\frac{P_1}{P_2}$ , ou seja:

$$\tilde{F}_5 = F_S + 3T_0BCP\cos(2\theta_1) + n_{\odot}H,\tag{2.72}$$

A Figura 2.7 mostra as curvas de nível para excentricidade  $e = 0.01$ , e semi-eixo maior  $a = 7.195,180$  km (semi-eixo ressonante para inclinação  $98,7^\circ$ ). Podemos observar nesta figura que o domínio da ressonância é muito pequeno, dificultando alguma eventual captura.

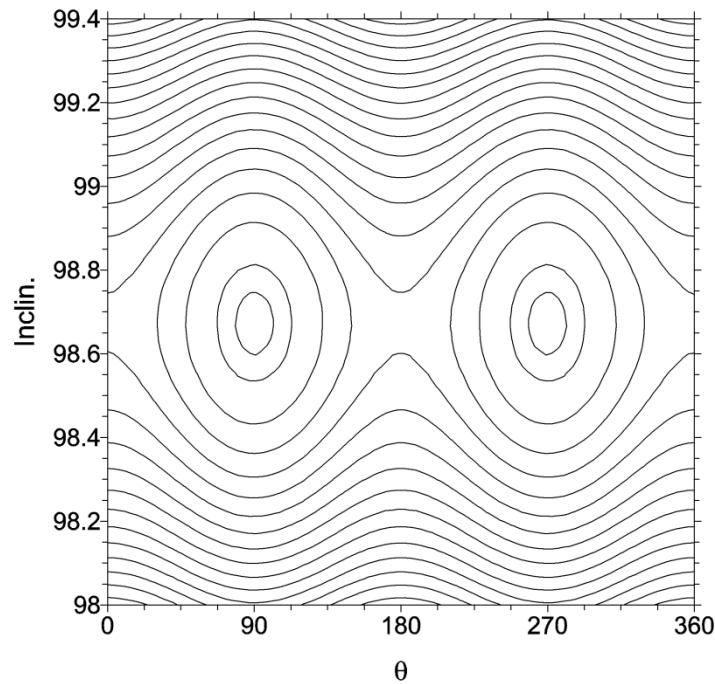


Figura 2.5. Curvas de nível da Hamiltoniana (2.72), mostrando a variação da excentricidade em função do ângulo crítico  $\theta = \lambda_{\odot} - \Omega$ .

## 2.4. Equações exatas (cartesianas) de movimento

Até agora, apresentamos a modelagem média das equações. Nesta Seção vamos apresentar as equações cartesianas exatas dos satélites.

As equações para o sistema exato, incluindo a Lua, são:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k^2(M_T+m)}{r^3}\vec{r} - k^2M_{\odot}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_{\odot}}{|\vec{r}-\vec{r}_{\odot}|^3} - \frac{\vec{r}_{\odot}}{|\vec{r}_{\odot}|^3}\right) - k^2M_L\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_L}{|\vec{r}-\vec{r}_L|^3} - \frac{\vec{r}_L}{|\vec{r}_L|^3}\right) + \vec{P}_{J_2}, \quad (2.73)$$

$$P_{J_x} = -k^2M_TJ_2R_T^2\left[\frac{3x}{2r^5} - \frac{15}{2}\frac{z^2x}{r^7}\right], \quad (2.74)$$

$$P_{J_y} = -k^2M_TJ_2R_T^2\left[\frac{3y}{2r^5} - \frac{15}{2}\frac{z^2y}{r^7}\right], \quad (2.75)$$

$$P_{J_z} = -k^2M_TJ_2R_T^2\left[\frac{9z}{2r^5} - \frac{15}{2}\frac{z^3}{r^7}\right], \quad (2.76)$$



onde de  $\vec{P}_{J_2}$  é a aceleração devida ao achatamento, cujas componentes cartesianas são dadas por:  $P_{J_x}, P_{J_y}, P_{J_z}$  (YOKOYAMA, 2002).  $M_T, m$  e  $M_L$  são as massas do planeta, satélite e Lua, respectivamente.  $\vec{r}, \vec{r}_\odot$  e  $\vec{r}_L$  são os vetores posição do satélite, do Sol e da Lua, nesta ordem.

Para os satélites heliossíncronos, devido ao seu baixo semi-eixo, ainda incluímos o efeito do harmônico  $J_4$ , cujas componentes cartesianas da aceleração devida a este harmônico ( $\vec{P}_{J_4}$ ) são:

$$P_{J_4x} = -k^2 M_T J_4 R_T^4 \left[ -\frac{315}{8} \frac{z^4 x}{r^{11}} + \frac{105}{4} \frac{z^2 x}{r^9} - \frac{15}{8} \frac{x}{r^7} \right] \quad (2.77)$$

$$P_{J_4y} = -k^2 M_T J_4 R_T^4 \left[ -\frac{315}{8} \frac{z^4 y}{r^{11}} + \frac{105}{4} \frac{z^2 y}{r^9} - \frac{15}{8} \frac{y}{r^7} \right] \quad (2.78)$$

$$P_{J_4z} = -k^2 M_T J_4 R_T^4 \left[ -\frac{315}{8} \frac{z^5}{r^{11}} + \frac{175}{4} \frac{z^3}{r^9} - \frac{75}{8} \frac{z}{r^7} \right]. \quad (2.79)$$

Assim, (2.73) fica:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k^2(M_T+m)}{r^3} \vec{r} - k^2 M_\odot \left( \frac{\vec{r}-\vec{r}_\odot}{|\vec{r}-\vec{r}_\odot|^3} - \frac{\vec{r}_\odot}{|\vec{r}_\odot|^3} \right) - k^2 M_L \left( \frac{\vec{r}-\vec{r}_L}{|\vec{r}-\vec{r}_L|^3} - \frac{\vec{r}_L}{|\vec{r}_L|^3} \right) + \vec{P}_{J_2} + \vec{P}_{J_4} \quad (2.80)$$

### 3. CONSTELAÇÕES GPS, GALILEO E GLONASS

Até agora, estivemos apresentando as características básicas de um satélite terrestre do tipo GPS e Galileo, além do heliosíncrono. Mostramos através das funções perturbadoras médias, as principais ressonâncias que afetam tais satélites. Apresentamos também as equações cartesianas  $(x, y, z)$  exatas destes satélites.

O objetivo principal agora (para satélites de navegação) é buscar condições iniciais propícias para o descarte destes satélites.

Antes, porém, vamos mostrar a variação temporal das excentricidades destes satélites via equações médias, com o objetivo de justificar futuros resultados numéricos.

#### 3.1. Efeitos das ressonâncias $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$ e $\dot{\omega} \approx 0$

Começaremos a investigação destas ressonâncias através de um modelo simplificado, que leva em consideração a função perturbadora solar mediada em termos da anomalia média do satélite e o achatamento terrestre. Utilizando este modelo, integramos numericamente as equações de Lagrange (BROUWER e CLEMENCE, 1961), onde a função perturbadora é dada por  $R = R_{J_2} + R_{\odot}^*$ .

A Figura 3.1 apresenta a variação temporal da excentricidade e do ângulo crítico  $2\omega + \Omega$  para um satélite da constelação Galileo com um semi-eixo  $a = 30.647$  km, 500 km acima de seu semi-eixo nominal (região de descarte desta constelação). Embora este sistema seja muito simplificado, podemos observar uma grande variação da excentricidade, ou seja, órbitas inicialmente circulares (como é o caso das constelações de navegação) podem atingir

grandes valores de excentricidade. Isto causa um grande aumento no apocentro do satélite (ou objeto descartável), possibilitando a entrada deste na constelação operacional.

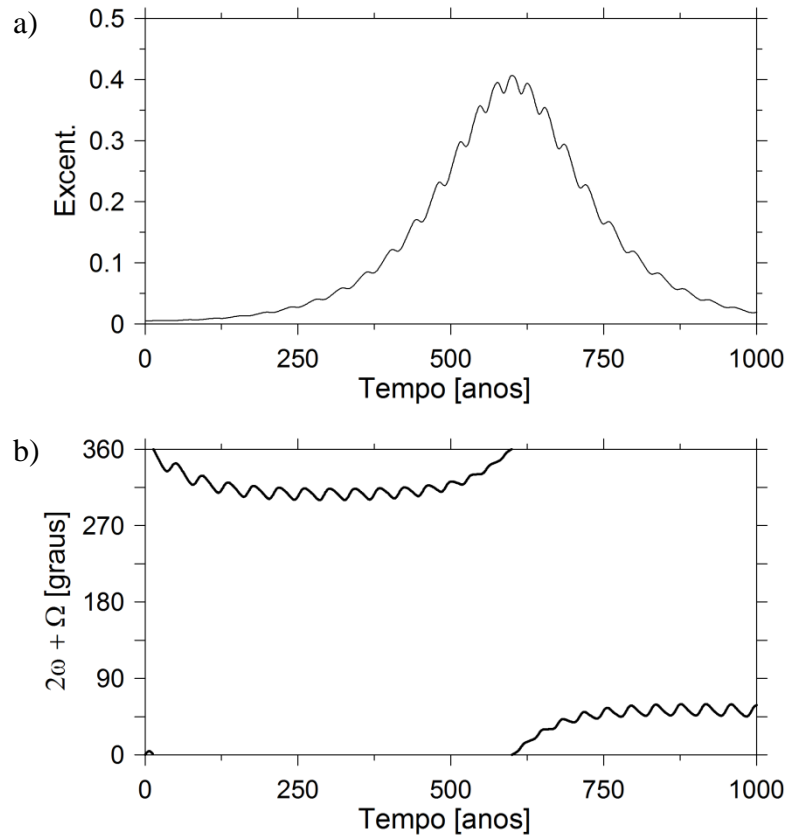


Figura 3.1. Variação da excentricidade (a) e do ângulo crítico (b) em função do tempo. Condições iniciais:  $a = 30.647$  km,  $e = 0,005$ ,  $I = 56,06^\circ$  e demais elementos iguais a zero.

A Fig. 3.2 apresenta gráficos semelhantes aos da Fig. 3.1, desta vez para o caso da ressonância  $\dot{\omega} \approx 0$  (inclinação crítica clássica  $63,40^\circ$ ). Neste caso a excentricidade também sofre um significativo aumento. Com seus  $64,8^\circ$  de inclinação, o sistema GLONASS sofre grande influência desta ressonância. No entanto, como este sistema serve para a navegação no território russo e países adjacentes, o pericentro congelado é de fundamental importância.

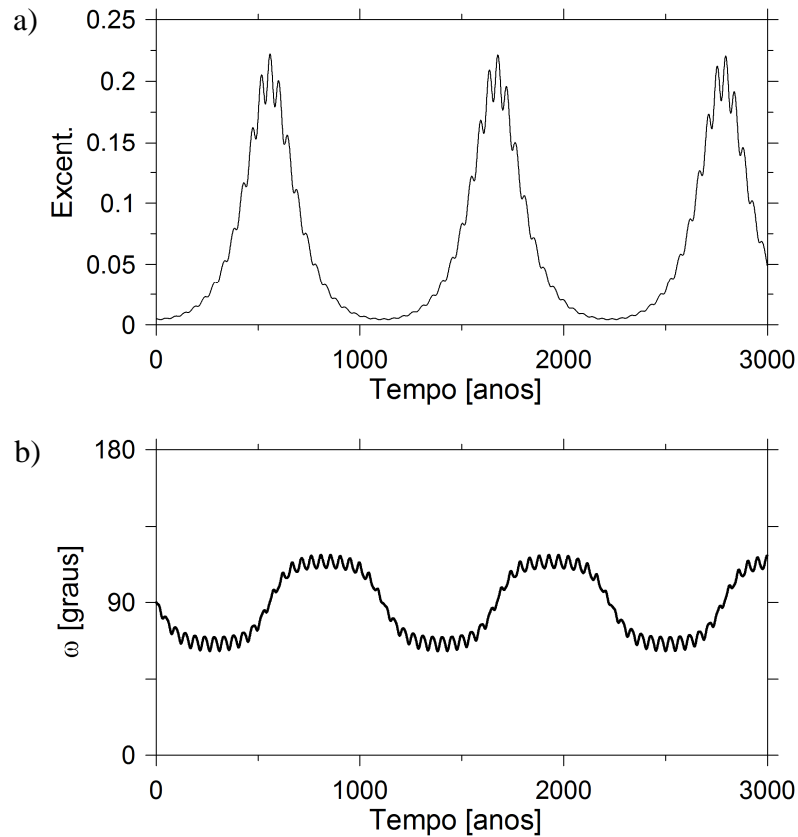


Figura 3.2. Variação da excentricidade (a) e do ângulo crítico (b) em função do tempo. Condições iniciais:  $a = 29.977$  km,  $e = 0,005$ ,  $I = 63,40^\circ$ ,  $\omega = 90^\circ$  e demais elementos iguais a zero.

Para confirmar o comportamento mostrado pelas equações médias, integramos numericamente o problema completo no sistema cartesiano de coordenadas, utilizando a Equação (2.73). Como a perturbação da Lua não foi contemplada nas equações médias, escolhemos um valor conveniente para o semi-eixo maior do satélite a fim de minimizar sua influência. A Figura 3.4 mostra que a excentricidade mínima ocorre quando  $2\omega + \Omega \approx 0$  (marcado pela reta azul) é cruzado no sentido descendente (do valor positivo para o negativo), enquanto a máxima se dá para o sentido ascendente (do valor negativo para o positivo). Ressaltamos este comportamento na figura utilizando traços verticais: verde (máximo) e violeta (mínimo).

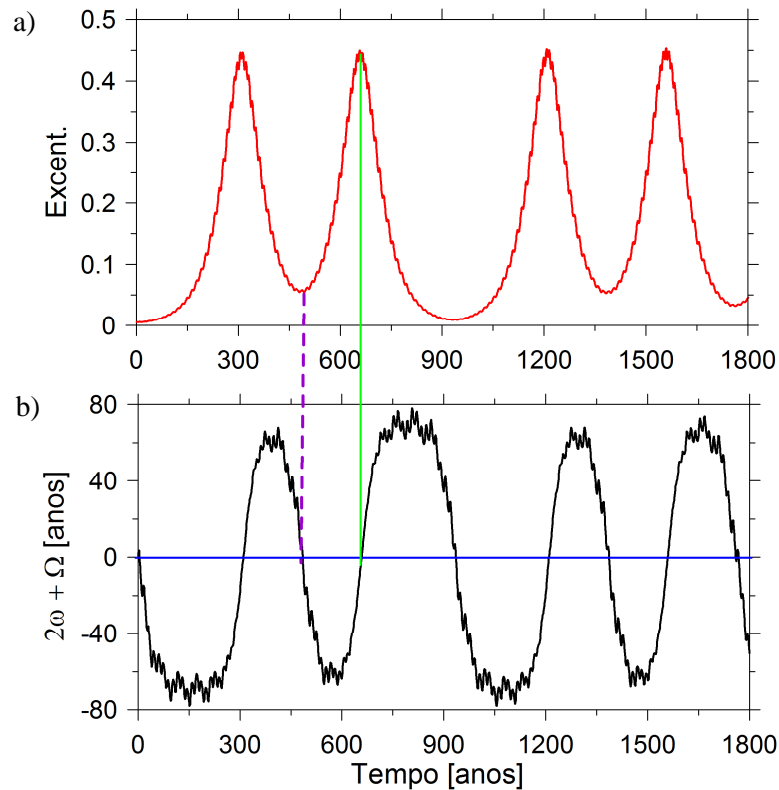


Figura 3.3. Evolução da excentricidade (a) e do ângulo crítico (b) em função do tempo de um satélite GPS descartável, cujas condições iniciais são:  $a = 22.323$  km,  $e = 0,005$ ,  $I = 56,06^\circ$  e demais elementos iguais a zero.

Entretanto, quando aumentamos o semi-eixo do satélite, a influência da Lua torna-se significativa e o centro estável pode ser destruído. Além disso, o problema deixa de ter apenas um grau de liberdade. Nesta situação, a busca por condições iniciais que mantenham a excentricidade pequena por um período limitado (até 250 anos) deve ser feita integrando-se as equações de movimento completas, dadas pela Equação (2.73).

### 3.2. Condições iniciais ( $\omega$ , $\Omega$ ) para o caso Galileo

Tendo em vista a estratégia de crescimento mínimo de excentricidade, faremos nesta Seção uma busca, através da integração numérica direta das equações de movimento dos objetos descartáveis do sistema Galileo, por condições iniciais no plano ( $\omega$ ,  $\Omega$ ) tais que um objeto descartável desta constelação permaneça estável com  $e \leq 0,01$  (0,02) por pelo menos 250 anos.

O semi-eixo inicial foi fixado em 30.647 km, ou seja, 500 km acima do semi-eixo nominal dos elementos da constelação. A excentricidade, inclinação e anomalia média iniciais foram fixadas em  $e = 0.005$ ,  $I = 0^\circ$  e  $I = 56,06^\circ$ , respectivamente.

Para o semi-eixo utilizado, a perturbação da Lua é extremamente relevante, por isso tomamos os valores extremos de sua inclinação (em relação ao plano equatorial terrestre):  $I_L = 18,28^\circ$  e  $I_L = 28,58^\circ$  (JPL, 2005). A Figura 3.4 apresenta esta variação da inclinação da Lua em função do tempo. As demais condições iniciais correspondem à época em que a Lua apresenta as inclinações utilizadas (4 de maio de 1997 para  $I_L = 18,28^\circ$  e 26 de outubro de 2005 para  $I_L = 28,58^\circ$  – HORIZONS, acessado em 28 de agosto de 2008). Mostramos a importância desta inclinação nas Figuras 3.5 e 3.6. Estas figuras apresentam o par  $(\omega, \Omega)$  tal que o objeto descartado permaneça por até 250 anos com excentricidade menor que 0,02. Separamos tais condições iniciais em duas regiões: preta, onde a excentricidade máxima atingida é 0,01 e verde, com excentricidade máxima atingida 0,02. Em ambos os casos o objeto não ofereceria risco de colisão com satélites operacionais durante o período mencionado. As duas retas azuis representam a condição exata  $2\omega + \Omega = k\pi$  (em particular, apresentamos apenas o caso  $k = 0$ ). Notemos ainda que os pontos pretos localizam-se claramente próximas da região prevista pelo modelo teórico apresentado anteriormente. Nas demais figuras, os pontos estáveis estão levemente deslocados para cima em relação à reta  $2\omega + \Omega = 0$ . Acreditamos que este efeito seja causado pela forte perturbação da Lua.

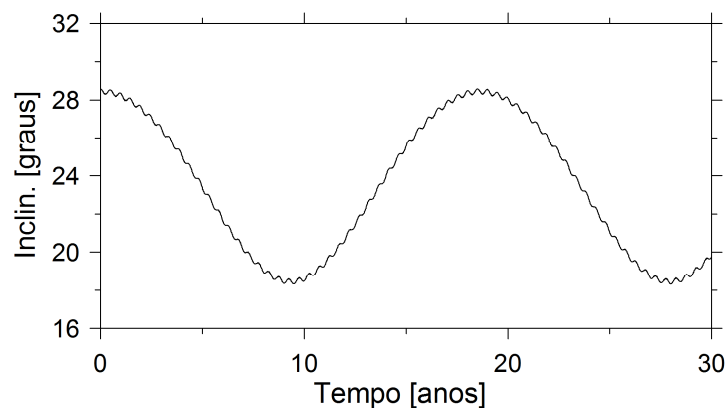


Figura 3.4. Inclinação da Lua em função do tempo, gerada a partir da integração das equações de movimento da Lua, levando em consideração a perturbação do Sol e do achatamento da Terra ( $J_2$ ). As condições iniciais são da época 26 de outubro de 2005.

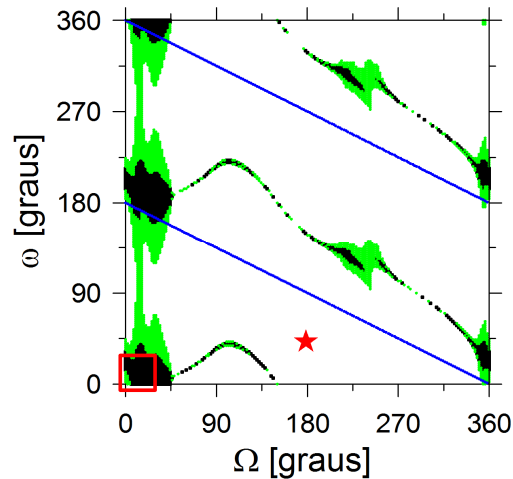


Figura 3.5. Os pontos pretos representam os valores do par  $(\omega, \Omega)$  para os quais um satélite com  $a = 30.647$  km permaneça com excentricidade abaixo de 0,01 por até 250 anos. Pontos verdes: satélites cuja excentricidade máxima não excedeu 0,02. As retas azuis são formadas por pontos que satisfazem a condição  $2\omega + \Omega = 0$ . Nesta figura utilizamos  $I_L = 18,58^\circ$ . Notemos ainda que a região contemplada com os pontos “mais estáveis” (pontos pretos) é aquela cujo par  $(\omega, \Omega)$  satisfaz a condição  $2\omega + \Omega = 0, 2\pi$  com  $\Omega = 0$  e  $\omega = \pi$ , conforme previsto anteriormente no modelo teórico.

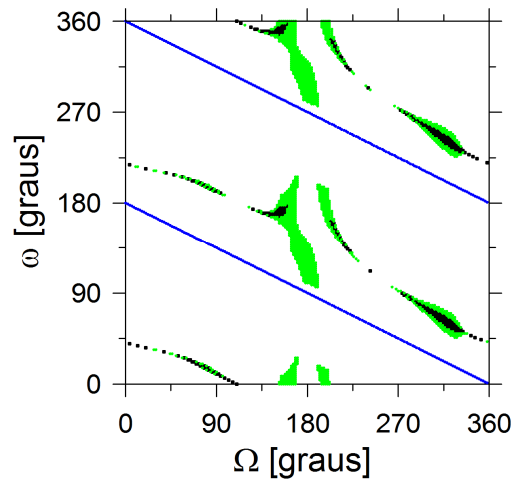


Figura 3.6. Mesma configuração da Figura 3.5. Entretanto, utilizamos desta vez  $I_L = 28,58^\circ$ .

Na Figura 3.7 observamos a evolução temporal da excentricidade e do ângulo crítico de três objetos descartados cujas condições iniciais foram retiradas da Figura 3.5 (região dentro do quadrado vermelho). Como esperado, a excentricidade permanece pequena pelo período de 250 anos. No entanto, se tomarmos condições iniciais fora da região de estabilidade, ou seja, na área branca da figura, a excentricidade deve ter grande incremento, como observamos na Figura 3.8. As condições iniciais desta figura estão marcadas por uma estrela vermelha na Figura 3.5.

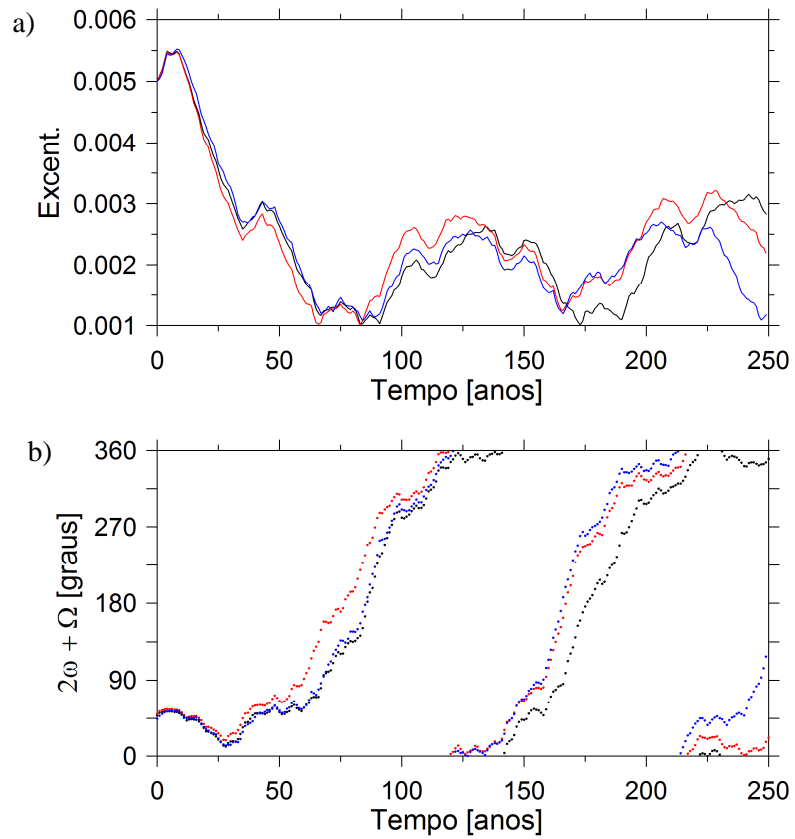


Figura 3.7. Evolução temporal da excentricidade (a) e do ângulo crítico (b). Condições iniciais fixas:  $a = 30,647$  km,  $e = 0,005$  e  $I = 56,06^\circ$ . Par  $(\omega, \Omega)$  inicial:  $(24^\circ, 0^\circ)$  – preto,  $(23^\circ, 2^\circ)$  – vermelho,  $(18^\circ, 8^\circ)$  – azul. Estas condições iniciais foram retiradas da região interna do quadrado vermelho mostrado na Figura 3.5.  $I_L = 18,28^\circ$ .



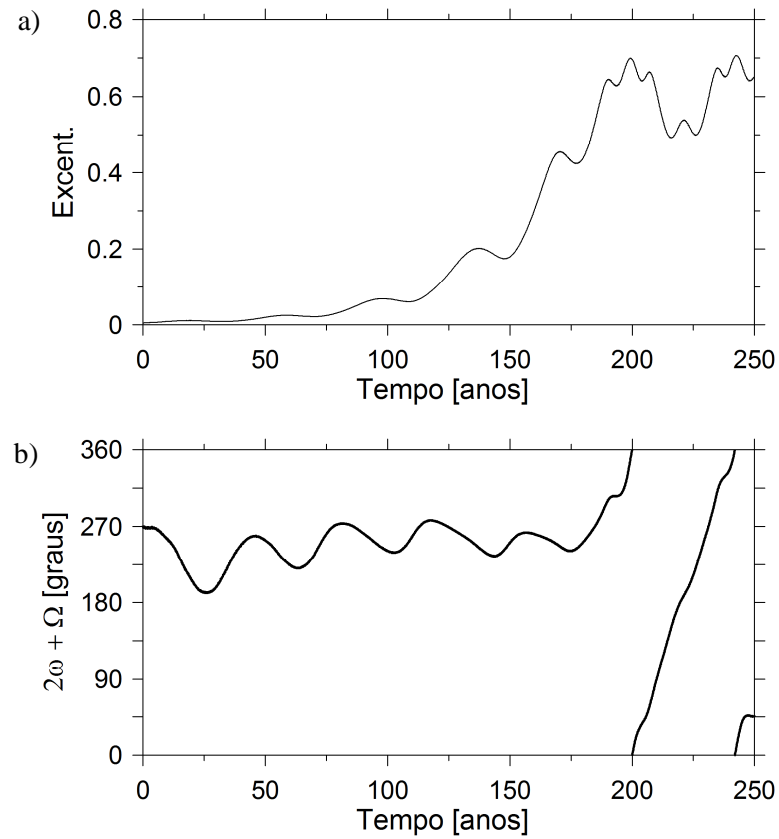


Figura 3.8. Evolução temporal da excentricidade (a) e do ângulo crítico (b). Condições iniciais:  $a = 30.647$  km,  $e = 0,005$ ,  $I = 56,06^\circ$ ,  $\omega = 45^\circ$ ,  $\Omega = 180^\circ$ . Estas condições iniciais estão marcadas pela estrela vermelha na Figura 3.5.

### 3.3. Condições iniciais do par $(\omega, \Omega)$ para o caso GPS

Consideremos agora o sistema GPS. A procura de condições iniciais do par  $(\omega, \Omega)$  se dará da mesma maneira que na seção anterior, no entanto tomaremos um semi-eixo de descarte 500 km abaixo do semi-eixo nominal. Novamente consideraremos  $I_L = 18,28$  e  $I_L = 28,58$  e a influência da Lua será evidente.

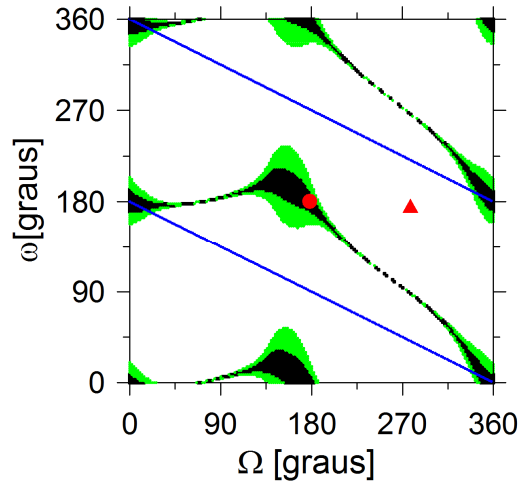


Figura 3.9. Mesma configuração da Figura 3.5, no entanto agora temos  $a = 26.060$  km. Círculo vermelho: par  $(\omega, \Omega)$  utilizado como condição inicial da Figura 3.11; triângulo vermelho: condição  $(\omega, \Omega)$  para a Figura 3.12.

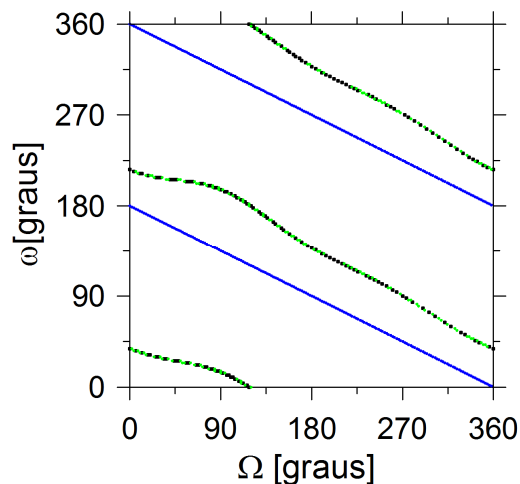


Figura 3.10. Semelhante à Figura 3.9, mas agora  $I_L = 28,58^\circ$ .

Seguindo o raciocínio da seção anterior, apresentamos as Figuras 3.11 e 3.12, que exibem a evolução temporal da excentricidade e do ângulo crítico. Na Figura 3.11, a excentricidade se mantém abaixo de 0.006 por 250 anos (como esperado). Suas condições iniciais foram retiradas da região marcada com o círculo vermelho na Figura 3.9. Já a Figura 3.12 exhibe o comportamento inverso: grande incremento de excentricidade no período de tempo adotado. Tanto nesta figura, quanto na Figura 3.8 da seção anterior, enquanto a excentricidade está crescendo, o ângulo ressonante se mantém em torno de  $270^\circ$ . Se lembrarmos das curvas de nível da Figura 2.4, observamos que, na vizinhança de  $2\omega + \Omega = 270^\circ$ , existem trajetórias que se aproximam desse ponto com baixa excentricidade, mas podem crescer acentuadamente atingindo seu máximo ( $e \approx 0,6$ ) quando  $2\omega + \Omega = 270^\circ$ .

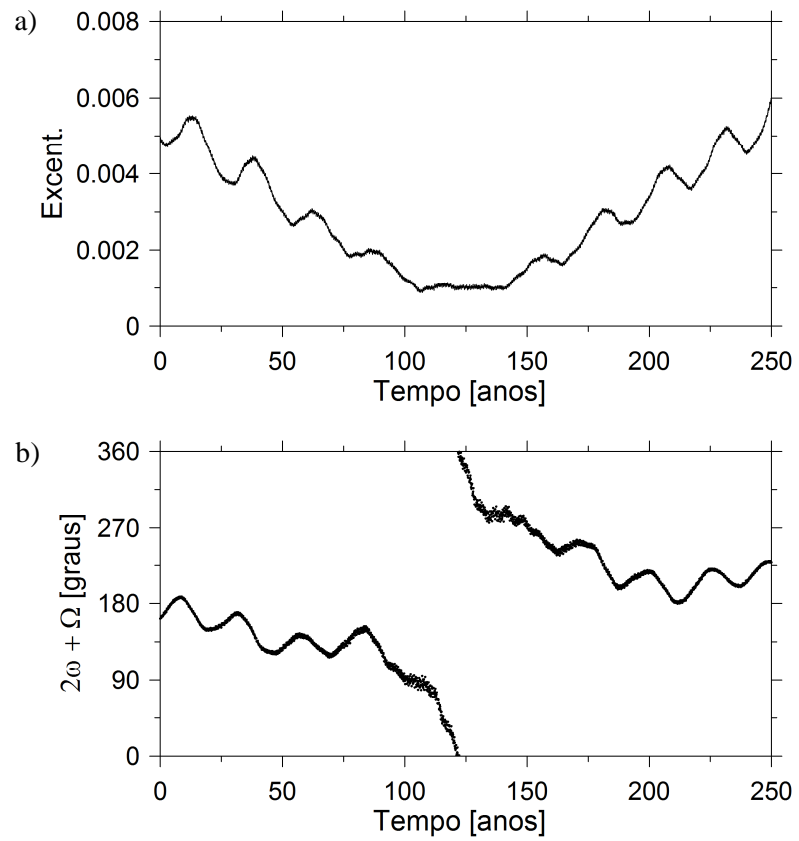


Figura 3.11. Evolução temporal da excentricidade (a) e do ângulo crítico (b). Condições iniciais:  $a = 25.060$  km,  $e = 0,005$ ,  $I = 56,06^\circ$ ,  $\omega = 170^\circ$ ,  $\Omega = 182^\circ$ . Estas condições iniciais estão marcadas pelo círculo vermelho na Figura 3.9.

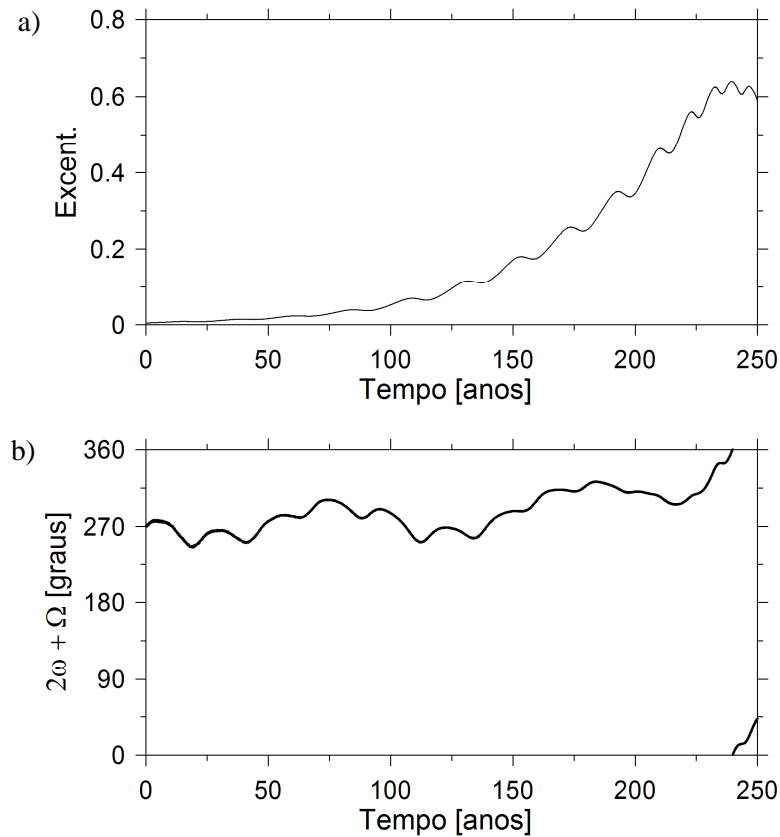


Figura 3.12. Semelhante à figura anterior, mas com  $\omega = 180^\circ$ ,  $\Omega = 270^\circ$ , assinalados por um triângulo vermelho na Figura 3.9.

### 3.4. Inclusão dos harmônicos tesserais e setoriais

Até agora não havíamos considerado os harmônicos tesserais e setoriais. Como os satélites do sistema GPS possuem um período próximo a 12 h, as Figuras 3.9 e 3.11 serão refeitas a fim de examinar o impacto da inclusão destes termos.

Há muitos modelos de geopotencial, que incluem sofisticadas fórmulas recursivas para gerar termos de altas ordens (JGM-3 – TAPLEY et al., EGM96 – LEMOINE et al., 1998, etc). No entanto, para este estudo não precisamos de modelos de altas ordens, de forma que consideraremos somente alguns termos. A função perturbadora para o geopotencial geral pode ser escrita, como no capítulo 2, na forma (ESCOBAL, 1965, MONTENBRUCK e GILL, 2005):

$$V = \frac{k^2 M_T}{r} + \frac{k^2 M_T}{r} \left\{ - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_P}{r} \right)^n J_n P_{n0}(\sin(\phi)) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{R_P}{r} \right)^n J_{nm} \cos m(\lambda - \lambda_{mn}) P_{nm}(\sin(\phi)) \right\} \quad (3.1)$$

onde  $J_{nm}$ ,  $\lambda_{nm}$  são coeficientes numéricos e  $P_{nm}$  são as funções associadas de Legendre (BUTKOV, 1988).

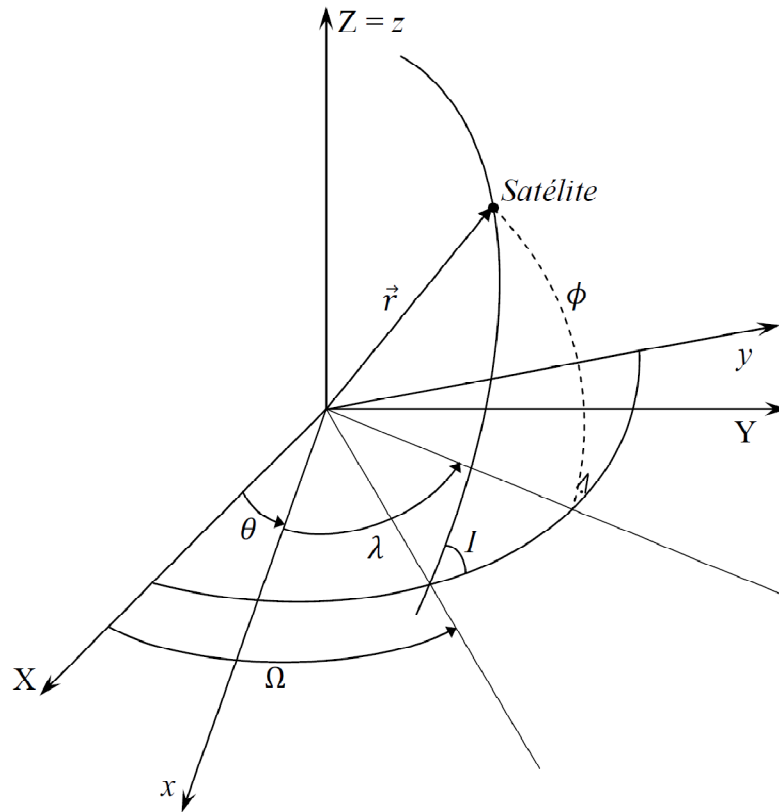


Figura 3.13. Geometria do problema.

A Figura 3.13 descreve os eixos de referência fundamentais: o potencial (3.1) é referido ao sistema equatorial  $(x, y, z)$ , que é fixo na Terra, e que, portanto, rotaciona com respeito à  $(X, Y, Z)$ , inercial.

De acordo com a Figura 3.13, podemos escrever algumas relações geométricas simples:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\phi) \cos(\lambda), \\ y &= r \cos(\phi) \sin(\lambda), \\ z &= r \sin(\phi), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\cos(2\lambda) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \sin(2\lambda) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \tag{3.3}$$

$$\cos^2(\lambda) = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad \sin^2(\lambda) = \frac{y^2}{x^2+y^2}, \quad (3.4)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2(\phi). \quad (3.5)$$

Vamos definir  $\varphi_{nm} = \frac{k^2 M_P}{r} \left(\frac{R_P}{r}\right)^n J_{nm} \cos m(\lambda - \lambda_{nm}) P_{nm}(\sin(\phi))$ . Conseqüentemente:

$$\varphi_{22} = \frac{3k^2 M_P R_P^2}{r^5} J_{22} [(x^2 - y^2) \cos(2\lambda_{22}) + 2xy \sin(2\lambda_{22})]. \quad (3.6)$$

Procedendo de maneira similar, obtemos:

$$\varphi_{32} = \frac{15k^2 M_P R_P^3}{r^7} J_{32} [(x^2 - y^2)z \cos(2\lambda_{32}) + 2xyz \sin(2\lambda_{32})], \quad (3.7)$$

$$\varphi_{33} = \frac{15k^2 M_P R_P^3}{r^7} J_{33} [x(x^2 - 3y^2) \cos(3\lambda_{33}) + y(3x^2 - y^2) \sin(3\lambda_{33})]. \quad (3.8)$$

Pode-se notar que os termos zonais ( $m = 0$ ) já foram considerados na Seção 2.1. Os termos do geopotencial encontrados estão associados ao referencial girante ( $x, y, z$ ) e precisam ser referidos ao sistema ( $X, Y, Z$ ), inercial. Para tanto, devemos considerar uma simples rotação:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

onde  $\theta = \gamma t + \theta_0$ ,  $\gamma = 2\pi/\text{dia}$ .

Conseqüentemente, considerando somente estes  $\varphi_{nm}$ , a força a ser adicionada na Equação (2.73) será:

$$P_\varphi = \text{grad}_{XYZ}(\varphi_{22} + \varphi_{32} + \varphi_{33}). \quad (3.10)$$

Os efeitos destes termos adicionais são mostrados na Figura 3.14. Pode-se notar que no início as curvas coincidem e as diferenças começam a aparecer depois de cerca de 300 anos. Depois de 370 anos, as interações parecem causar importantes diferenças.

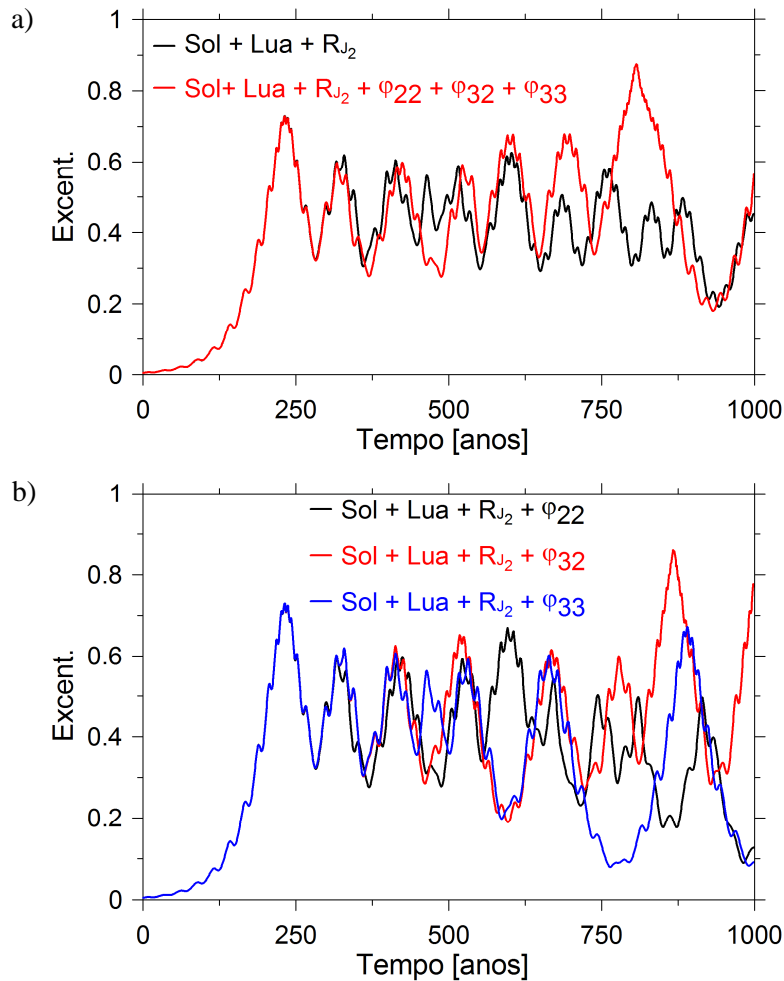


Figura 3.14. Variação da excentricidade em função do tempo para um satélite da constelação GPS descartado. Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,005$ ,  $\omega = 58^\circ$  e  $\Omega = 154^\circ$ . As condições iniciais da Lua correspondem à época 1 de agosto de 2001. A contribuição de todos os  $\varphi_{nm}$  juntos (a) a as contribuições individuais (b) são mostradas através de cores diferentes. As diferenças aparecem somente após 370 anos.

As Figuras 3.15 e 3.16 são similares às Figuras 3.9 e 3.10 e possuem as mesmas condições iniciais. Entretanto, as novas figuras levam em consideração o efeito dos  $\varphi_{nm}$  encontrados nesta Seção. Ao compararmos as figuras com e sem harmônicos, podemos perceber que a influência dos novos termos é quase desprezível, pois o período de tempo considerado foi de 250 anos e, a partir do que observamos na Fig. 3.14, as diferenças mais sensíveis só aparecem depois de 300 anos. Entretanto, no caso de investigarmos a estratégia de crescimento de excentricidade, a grade ( $\omega$ ,  $\Omega$ ) pode ser bem sensível, dependendo do número de harmônicos e do tempo de integração. Escolhemos os harmônicos  $\varphi_{22}$ ,  $\varphi_{32}$  e  $\varphi_{33}$ , pois estes apresentam o termo ressonante correspondente à ressonância 2:1 entre o período

orbital do satélite e o período de rotação da Terra. Os satélites da constelação GPS possuem período orbital de 12h suscetíveis, portanto à esta ressonância.

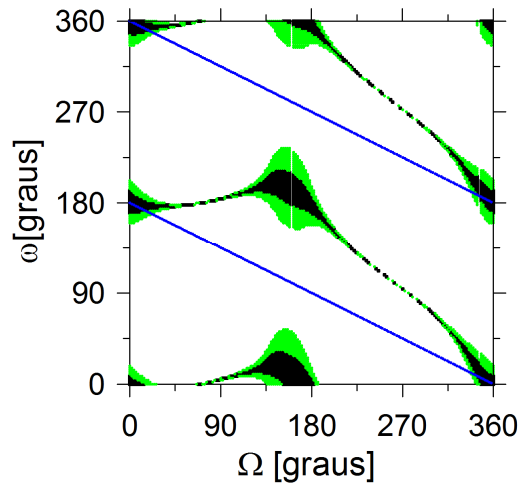


Figura 3.15. Similar à Figura 3.9, no entanto esta inclui os termos  $\varphi_{22}$ ,  $\varphi_{32}$  e  $\varphi_{33}$ .

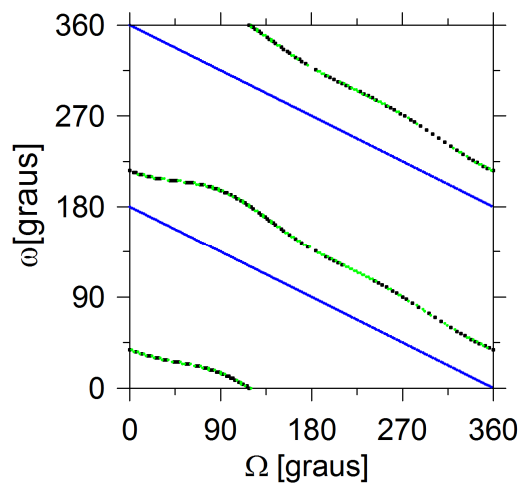


Figura 3.16. Semelhante à Figura 3.15, mas com  $I_L = 28,58$ .

### 3.5. Manobras orbitais para o posicionamento em $(\omega, \Omega)$

Modificar a inclinação do satélite antes ou depois de ser descartado é uma das ações que possibilitam eliminar a influência da ressonância  $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$  (ROSSI, 2008). Para saber qual seria a variação de inclinação mínima para que isto ocorresse, integramos novamente o problema completo, utilizando (2.73) para evoluir a órbita de todos os satélites GPS operacionais e Galileo (os que já estão em funcionamento) por um período de 250 anos, para várias inclinações iniciais. Utilizamos as condições iniciais dos satélites reais,



correspondentes à época 12 de agosto de 2008 (retiradas do sistema CelesTrak em 12 de agosto de 2008).

Na Figura 3.17, tomamos como exemplo o caso do satélite GPS do Bloco II-A 27, PRN 30 (número 24320 no catálogo NORAD). A figura apresenta a excentricidade máxima atingida por este satélite durante o período de 250 anos em função da inclinação inicial. Devido à ressonância  $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$ , a excentricidade do satélite atinge valores altos tanto para sua inclinação nominal, quanto para sua vizinhança. Tecnicamente, o satélite está relativamente afastado da ressonância, pois não está na inclinação de  $56,06^\circ$ . Entretanto está na vizinhança desta situação. A presença da Lua distorce o centro de libração da ressonância, entretanto, ainda persistem trajetórias onde a excentricidade tem grande aumento, sob o efeito da comensurabilidade. Através da Figura 3.17, constatamos numericamente que, para retirar o satélite PRN 30 da faixa de inclinações onde a ressonância ocorre, seria necessário um incremento de aproximadamente  $3^\circ$  em sua inclinação.

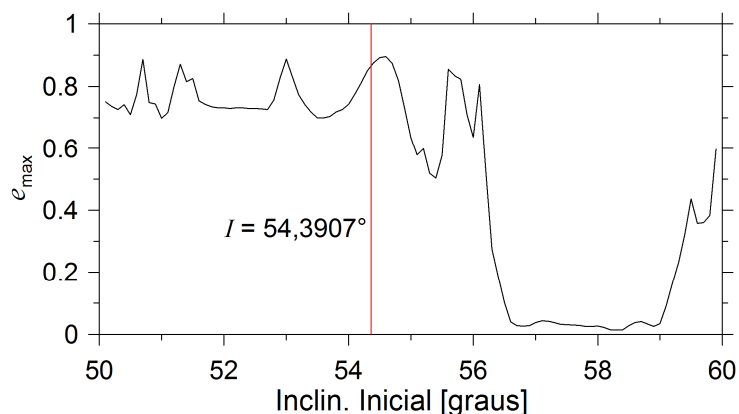


Figura 3.17. Excentricidade máxima atingida pelo satélite GPS Bloco IIA-27 (PRN 30) para uma grade de inclinações iniciais. A inclinação nominal do satélite está marcada pela linha vertical vermelha. Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0.0106654$ ,  $I = 54.3907$ ,  $\Omega = 108.2529^\circ$ ,  $\omega = 79.3795^\circ$  (CelesTrak, 12/08/08);  $I_L = 18.28^\circ$ .

Na Figura 3.18 apresentamos a mesma situação para o satélite GPS Bloco IIR-11 (PRN 19, NORAD: 28190), que mostra o comportamento oposto: está dentro de uma combinação de condições iniciais tais que sua excentricidade permanece abaixo de 0.05 por até 250 anos, portanto não precisaria de manobras adicionais para seu descarte seguro. No entanto satélites nesta situação são raros. A grande maioria precisa de manobras adicionais (o restante das figuras do tipo das figuras 3.17 e 3.18 para o Bloco IIA se encontram no Apêndice A).

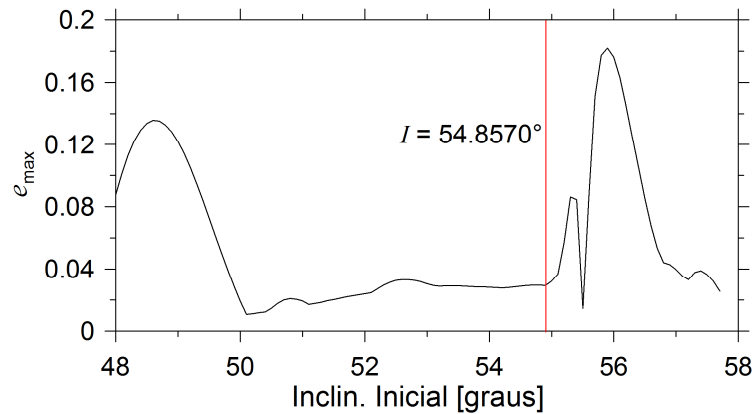


Figura 3.18. Figura semelhante à Figura 3.17, mas com o satélite GPS Bloco IIR-11 (PRN 19). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0.0049644$ ,  $I = 54.857$ ,  $\Omega = 174,5909^\circ$ ,  $\omega = 326.1947^\circ$  (CelesTrak, 12/08/08);  $I_L = 18.28^\circ$ .

Assim, alguns satélites da constelação GPS que ainda estão em funcionamento precisariam ter sua inclinação aumentada (em alguns casos, diminuída) em até  $3^\circ$  ao serem descartados, para que pudessem “escapar” dos efeitos da ressonância  $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$ , pois esta independe do semi-eixo.

Nesta seção vamos comparar o gasto de combustível em termos de  $\Delta V$  (variação de velocidade total, ou seja, soma de todos os incrementos de velocidade aplicados durante toda a manobra) para executar a mudança na inclinação, com o gasto para executar as manobras necessárias para colocar o satélite nas condições iniciais ( $\omega$ ,  $\Omega$ ) tais que este permaneça estável (com excentricidade menor que 0.01) por até 250 anos. Estas condições foram encontradas nas Seções 3.2 (para o sistema Galileo) e 3.3 (para o sistema GPS).

A mudança de plano (manobra em inclinação) deve ser executada quando o satélite estiver cruzando o plano equatorial na linha nodal ascendente, para que os demais elementos sejam preservados. O  $\Delta V$  necessário para tal manobra é dado pela seguinte equação (PRADO, 2001; VALLADO, 2007):

$$\Delta V = 2V \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.11)$$

onde  $\theta$  é a variação em inclinação desejada ( $\Delta I$ ).

O conjunto de manobras para alterar o par ( $\omega$ ,  $\Omega$ ) é feito após o satélite ter sido colocado na órbita de descarte comum (500 km acima ou abaixo da órbita nominal). Vamos tomar como exemplo o satélite utilizado na Figura 3.17, que possui  $\omega = 79.3795^\circ$  e  $\Omega = 108.2529^\circ$ . Observando uma figura correspondente à Figura 3.9 para este semi-eixo,

deveríamos procurar por um valor de  $(\omega, \Omega)$  dentro de uma região estável o mais próximo possível das condições atuais do satélite (a fim de minimizar o gasto de combustível). Vamos supor que tal ponto seja  $(10^\circ, 34^\circ)$ , assim teríamos de efetuar manobras que resultassem em  $\Delta\omega \approx 70^\circ$ ,  $\Delta\Omega \approx 74^\circ$ .

O primeiro passo é aguardar que a longitude do nodo ascendente atinja o valor desejado, quando o satélite está no ponto A (apocentro) da Figura 3.19, e esta etapa ocorre sem gasto de combustível. Como  $d\Omega/dt = -14.7^\circ/\text{ano}$ , deveríamos esperar aproximadamente cinco anos para realizar o próximo passo. O tempo de espera não se caracteriza como um problema, pois este já é um satélite descartado. Além disso, a missão poderia ser planejada cinco anos antes do término da vida útil do satélite.

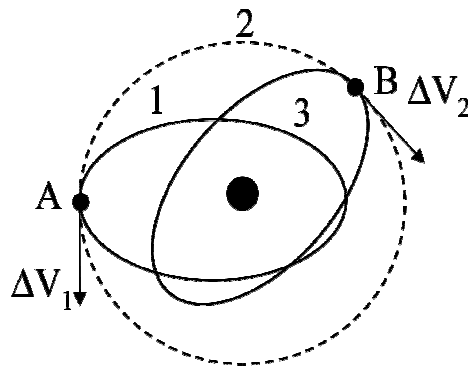


Figura 3.19. Geometria da manobra.

O próximo passo é aplicar um  $\Delta V_1$  no apocentro da órbita original, a fim de obter uma órbita circular. A velocidade do apocentro da órbita original é dada por (PRADO, 2001; VALLADO, 2007):

$$V_{a1} = \left[ \frac{\mu}{a} \left( \frac{2}{1+e} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.12)$$

E a velocidade da órbita circular:

$$V_C = \left[ \frac{\mu}{a} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

Assim,

$$\Delta V_1 = V_f - V_i = V_c - V_{a1}. \quad (3.14)$$

Conseqüentemente, o raio da órbita circular é igual ao apocentro da órbita original.

Quando o satélite atinge um ponto na órbita circular onde desejamos que fosse o pericentro da órbita final (ponto B, Figura 3.19), aplicamos um  $\Delta V_2 = -\Delta V_1$ , mas no sentido contrário, obtendo assim uma órbita similar à original (mesmos semi-eixo, excentricidade e inclinação), porém com os novos  $\omega$  e  $\Omega$ . O  $\Delta V$  total é dado por:

$$\Delta V = |\Delta V_1| + |\Delta V_2| \quad (3.15)$$

A tabela 3.1 apresenta os resultados de algumas manobras. Nossos experimentos numéricos mostraram que a manobra  $\Delta\omega$ ,  $\Delta\Omega$  supera a manobra em inclinação em termos de economia de combustível, pois exige um  $\Delta V$  menor. Vale ressaltar que isto se verifica para satélites com baixa excentricidade, pois se a excentricidade da órbita original for maior que 0.06, este método exige maior  $\Delta V$ , do que uma mudança de inclinação de até  $4^\circ$  (Figura 3.20).

Tabela 3.1. Comparação entre manobra de mudança de plano e  $\Delta\omega$ ,  $\Delta\Omega$

<b>Manobra</b>	<b>Excentricidade</b>	<b>Semi-eixo maior (km)</b>	<b><math>\Delta V</math> (m/s)</b>
$\Delta I = 3^\circ$	0,01	26.560	200,7985
$\Delta\omega \approx 70^\circ$ , $\Delta\Omega \approx 74^\circ$	0,01	26.560	38,6442
$\Delta I = 3^\circ$	0,01	30.647	186,9308
$\Delta\omega \approx 70^\circ$ , $\Delta\Omega \approx 74^\circ$ .	0,01	30.647	35,9753

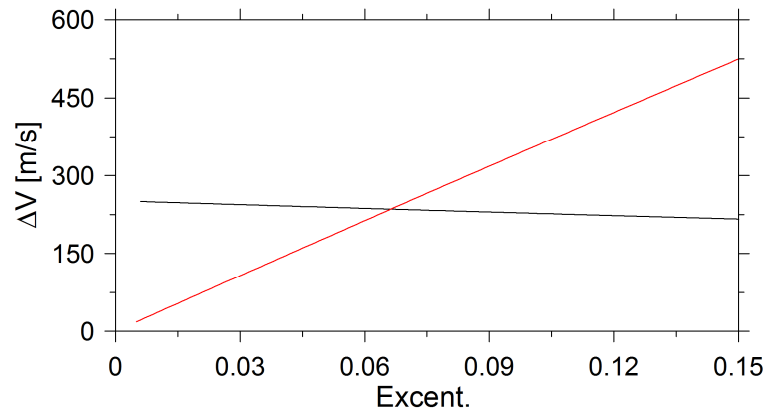


Figura 3.20. Comparação entre o  $\Delta V$  necessário para executar a manobra de mudança de plano de quatro graus (reta preta) e  $\Delta\omega \approx 70^\circ$ ,  $\Delta\Omega \approx 74^\circ$  (reta vermelha), para um mesmo semi-eixo (30.647 km), em função da excentricidade da órbita inicial.

### 3.6. Estratégia de incremento de excentricidade

Como vimos no Capítulo 1, outra estratégia para o descarte dos satélites das constelações GPS e Galileo é encontrar condições iniciais no plano ( $\omega$ ,  $\Omega$ ) tais que haja grande aumento de excentricidade. Assim, sucessivas passagens do apocentro do satélite pela atmosfera da Terra poderiam fazer com que este caísse.

Seguindo este caminho, utilizaremos o método realizado nas Seções 3.2 e 3.3. Entretanto guardaremos somente as condições iniciais de ( $\omega$ ,  $\Omega$ ) para as quais o satélite teve grande aumento em sua excentricidade. As Figuras 3.21 e 3.22 apresentam as grades de condições iniciais para  $I_L = 18,28^\circ$  e  $I_L = 28,58^\circ$ , respectivamente.

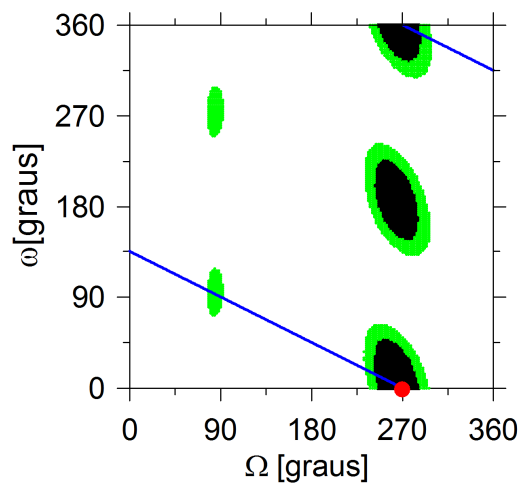


Figura 3.21. Condições iniciais ( $\omega$ ,  $\Omega$ ) tais que um satélite com condições iniciais  $a = 26.559,74$  km,  $e = 0.005$  e  $I = 56,06^\circ$ , atinja excentricidade  $e \geq 0,6$  (pontos pretos) e  $0,6 > e \geq 0,5$  (pontos pretos) num período de até 250 anos. Os pontos azuis (reta) satisfazem a relação

$2\omega + \Omega = 270^\circ$ . Inclinação inicial da Lua  $I_L = 18,28^\circ$ . O círculo vermelho marca as condições iniciais da Figura 3.23.

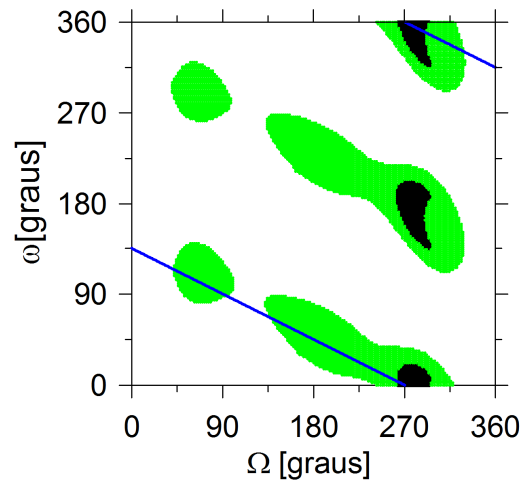


Figura 3.22. Mesma configuração da Figura 3.21, no entanto agora utilizamos como inclinação inicial da Lua  $I_L = 28,58^\circ$ .

Na Figura 3.23 podemos observar uma órbita com condições iniciais favoráveis ao aumento da excentricidade (os valores de  $(\omega, \Omega)$  estão marcados pelo círculo vermelho da Figura 3.21). Há realmente um grande aumento na excentricidade, que possibilitaria sua reentrada atmosférica. Entretanto o tempo para que a excentricidade atinja o valor 0.6 é de aproximadamente 200 anos, um tempo muito longo, no qual poderia ocorrer a perturbação de outras ressonâncias em semi-eixos menores, ou até mesmo a colisão do satélite com lixo espacial.

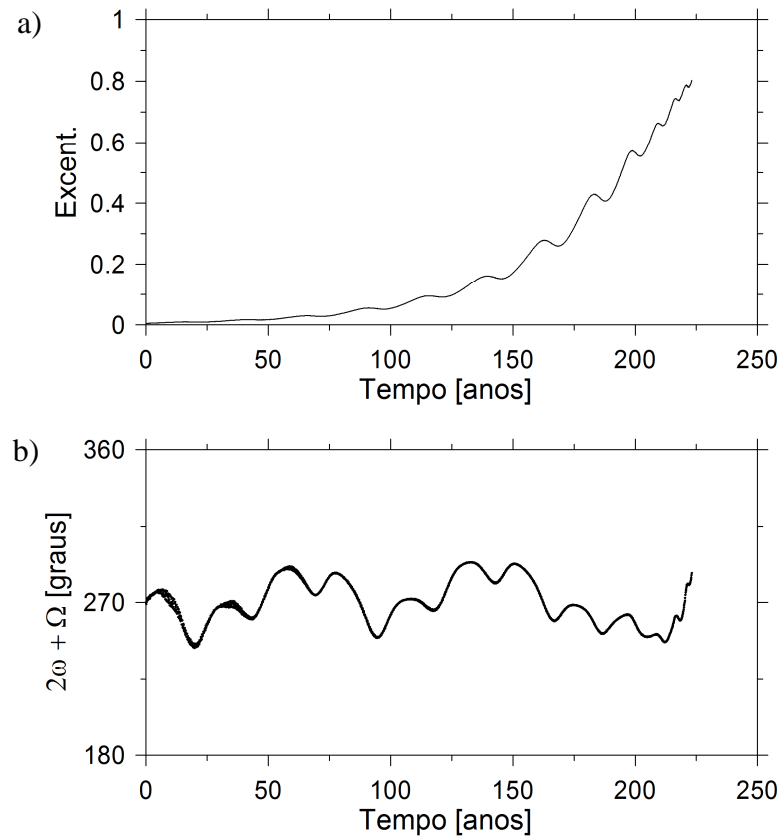


Figura 3.23. Evolução temporal da excentricidade (a) e do ângulo crítico (b) de um satélite com condições iniciais  $a = 26.559,74$  km,  $e = 0.005$  e  $I = 56,06^\circ$  (satélite GPS ativo),  $\omega = 0^\circ$  e  $\Omega = 270^\circ$  (condições marcadas com círculo vermelho na Figura 3.21). A excentricidade atinge o valor 0,6 depois de 200 anos.

#### 4. DINÂMICA DOS SATÉLITES HELIOSSÍNCRONOS E EFEITOS DA RESSONÂNCIA $n_{\odot} - \dot{\Omega} \approx 0$

Os satélites heliossíncronos tem sua órbita perturbada principalmente devido ao arrasto atmosférico, pois o semi-eixo nominal deste satélite é baixo, como mostrado na Seção 2.3.5. Contudo, antes de examinar a dinâmica completa destes satélites, vamos observar o comportamento da ressonância heliossíncrona em um satélite fictício, não perturbado pelo efeito dissipativo da atmosfera.

A Figura 4.1 apresenta a evolução temporal da inclinação e semi-eixo crítico de um satélite colocado em órbita heliossíncrona, feita a partir da integração numérica direta da Equação 2.73. A escolha do semi-eixo depende da inclinação desejada para o satélite. Tomamos uma inclinação inicial de  $98,67^{\circ}$ , o que nos leva, a partir da Equação 2.63, a um semi-eixo de 7.193,9954 km. Podemos observar que a inclinação varia muito pouco (entre  $98,6$  e  $98,68$  graus), enquanto o ângulo crítico libra em torno de um dos pontos de equilíbrio ( $90^{\circ}$ ). Se não houvesse perda de energia durante a interação entre a atmosfera e o satélite, este permaneceria com pouca variação de inclinação e em órbita heliossíncrona indefinidamente. A Figura 4.2 possui as mesmas características da Figura 4.1, com a diferença que nesta o ângulo ressonante está librando em torno do outro ponto de equilíbrio ( $270^{\circ}$ ).



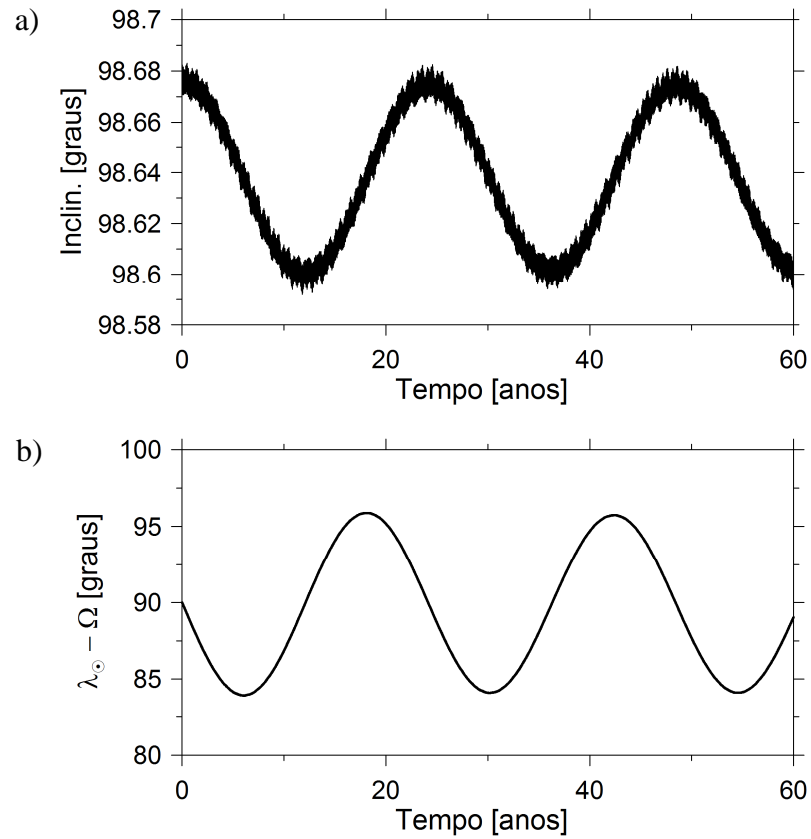


Figura 4.1. Evolução temporal da inclinação (a) e do ângulo ressonante (b) para um satélite heliosíncrono com condições iniciais  $a = 7.193,9954$  km (semi-eixo ressonante para a inclinação inicial utilizada),  $e = 0,00125$ ,  $I = 98,67$ ,  $\omega = 0^\circ$ . Como começamos com  $l_{\odot} = 0^\circ$  e  $\Omega = 270^\circ$ , o valor inicial do ângulo crítico é  $\lambda_{\odot} - \Omega = 90^\circ$ .

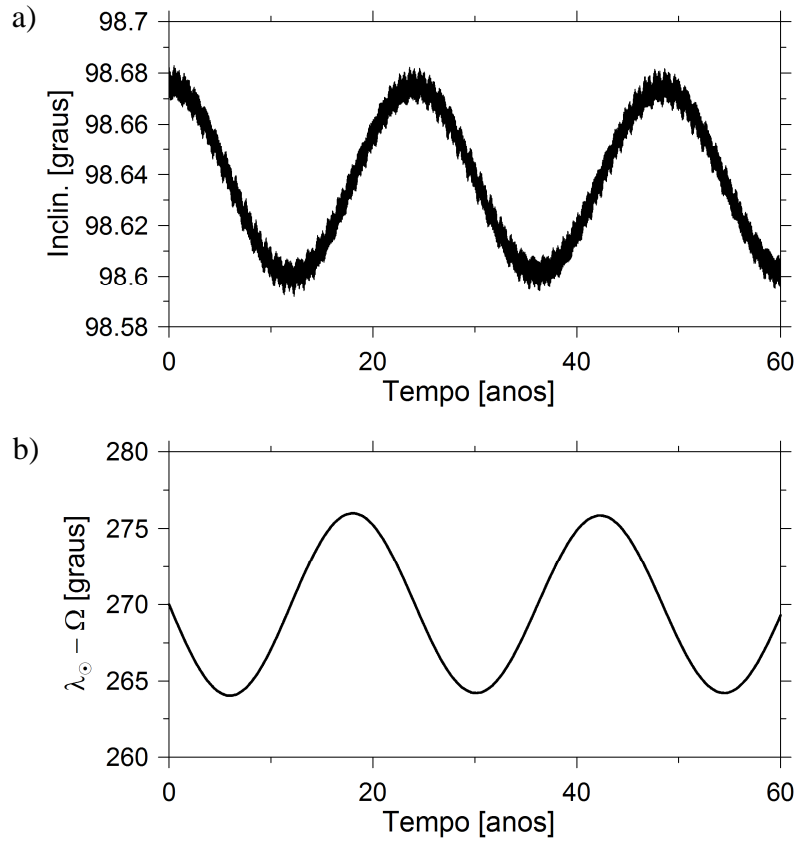


Figura 4.2. Mesma configuração da Figura 4.1, mas com nodo inicial  $\Omega = 90^\circ$ , que resulta  $\lambda_\odot - \Omega = 270^\circ$ .

Um satélite real, ao interagir com a atmosfera, experimenta uma força no sentido contrário ao sentido de seu movimento, denominada força de arrasto (COOK et al., 1960). No caso de uma órbita elíptica, o perigeu é o ponto de maior interação entre satélite e atmosfera. Com a desaceleração causada pelo arrasto neste ponto, há uma gradativa diminuição do apogeu do satélite (pois este não tem energia suficiente para atingir o valor do apogeu que possuía antes da interação com a atmosfera), enquanto o perigeu permanece quase constante; há então uma tendência de circularização da órbita. No caso de uma órbita quase circular, a perda de energia diminui o semi-eixo do satélite, fazendo com que este espirale em direção à Terra.

A aceleração induzida pela força de arrasto é dada por (COOK et al., 1960; ZIEGLER e BLANKE, 2002; VALLADO, 2007):

$$\ddot{\vec{r}}_{atm} = -\frac{1}{2}\rho C_d \frac{S}{m} v_R \vec{v}_R, \quad (4.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade da atmosfera da Terra,  $C_d$  é o coeficiente de arrasto e  $v_R$  é a velocidade do satélite em relação à atmosfera.  $S$  e  $m$  são a área efetiva e a massa do satélite.

A velocidade  $\vec{v}_R$  é uma função da velocidade absoluta do satélite ( $\vec{v}$ ), da velocidade angular da atmosfera ( $\vec{\omega}_{atm}$ ) e do vetor posição do satélite ( $\vec{r}$ ) (VALLADO, 2007):

$$\vec{v}_R = \vec{v} - \vec{\omega}_{atm} \times \vec{r}. \quad (4.2)$$

Assumindo que a velocidade angular da atmosfera seja igual à velocidade de rotação da Terra ( $\vec{\omega}_{\oplus}$ ), a velocidade do satélite em relação à atmosfera fica na forma:

$$\vec{v}_R = \begin{bmatrix} v_x + \omega_{\oplus} y \\ v_y - \omega_{\oplus} x \\ v_z \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

onde  $\omega_{\oplus} = |\vec{\omega}_{\oplus}| = 7,2921157 \times 10^{-5}$  rad/s. Há ainda um fator relacionado à existência de ventos nas altas atmosferas que poderia ser incluído na expressão da velocidade relativa do satélite (ESCOBAL, 1965; VALLADO, 2007), que não será levada em consideração.

Como nosso objetivo é o estudo da dinâmica do satélite durante a passagem pelo semi-eixo ressonante (e isto ocorre durante um tempo relativamente curto), não precisamos de um modelo complexo de atmosfera. Assim como Cook et al. (1960), faremos as seguintes suposições:

- a) A atmosfera possui simetria esférica, o que implica que a densidade do ar, para um determinado semi-eixo, independe da longitude do satélite.
- b) A densidade do ar para um determinado semi-eixo não varia com o tempo, ou seja, desconsideraremos o ciclo de atividade solar (que possui máximos a cada 11 anos) e as mudanças na magnetosfera do planeta.
- c) A densidade atmosférica varia exponencialmente com uma distância  $\vec{r}_a$  a partir do centro da Terra:

$$\rho = \bar{\rho} \exp\left(\frac{\vec{r}_a - r}{H}\right), \quad (4.4)$$

sendo  $r$  o módulo da posição do satélite,  $\bar{\rho}$  e  $\vec{r}_a$  são a densidade de referência e a distância na qual a atmosfera apresenta tal densidade, e  $H$  um fator de escala constante, dado por:

$$H = \frac{kT}{Mg} \quad (4.5)$$

onde  $k = 1,386503$  J/K é a constante de Boltzmann,  $T$  e  $M$  são a temperatura (em Kelvin) e a massa molar da atmosfera (em gramas por mol) para a distância  $\bar{r}_a$ , e  $g$  é a aceleração gravitacional na superfície do planeta ( $g = 9,7856$  m/s<sup>2</sup> em Rio Claro, SP).

- d) O coeficiente de arrasto ( $C_d$ ) é considerado constante. Este coeficiente depende das características físicas da superfície do satélite, do ângulo de incidência do fluxo atmosférico, da temperatura e da superfície das moléculas. O valor de  $C_d$  pode ser medido experimentalmente ou avaliado por modelos matemáticos e normalmente é compreendido entre 1,2 e 3,8.
- e) Fixamos em todas as nossas integrações  $\frac{S}{m} = 0,006$  kg/m<sup>3</sup> (Landsat 7).

A Figura 4.3 mostra o efeito do arrasto atmosférico sobre um satélite heliosíncrono. Além do arrasto, o satélite tem como perturbadores o Sol, a Lua e o achatamento da Terra ( $J_2$ ) Tomamos como referência a altitude de 700 km, para a qual temos (JACCCHIA, 1977):  $T = 2.392,8$  K,  $\bar{\rho} = 3,04 \times 10^{-12}$  kg/m<sup>3</sup> e  $M = 16,74$  g/mol. Podemos observar que no início da integração a queda do satélite é lenta, aumentando conforme o satélite se aproxima da Terra. Este comportamento é esperado: observando (4.4), constatamos que, quando  $r > \bar{r}_a$ , o valor de  $\rho$  é muito pequeno, quando  $r = \bar{r}_a$ ,  $\rho$  tem valor igual ao valor de referência e quando  $r < \bar{r}_a$ ,  $\rho$  cresce rapidamente, acentuando a velocidade de queda.

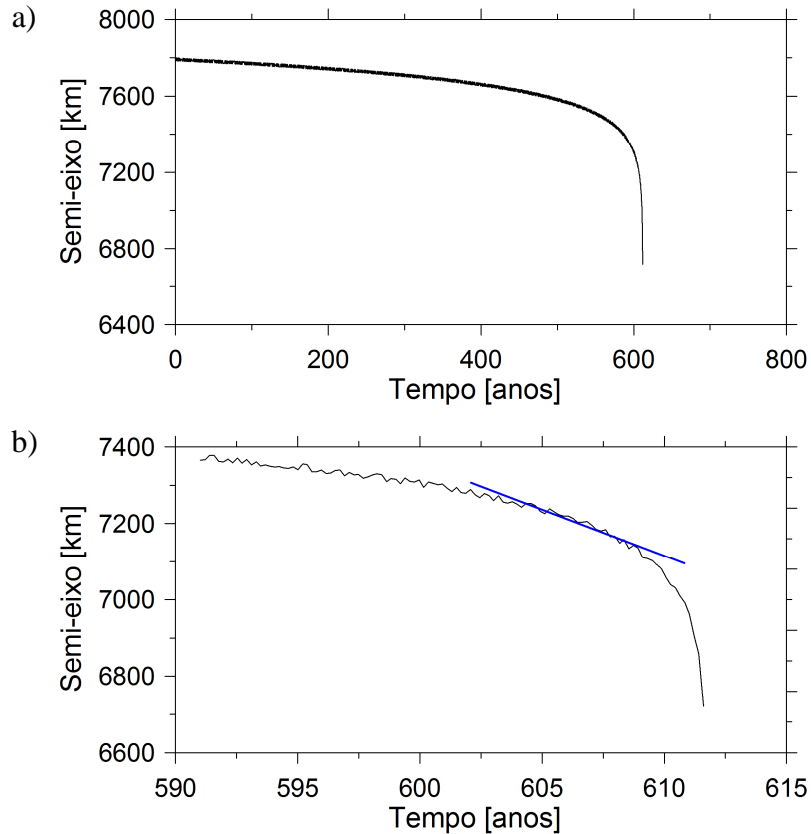


Figura 4.3. Variação do semi-eixo maior do satélite sob o efeito da força de arrasto (a). Condições iniciais:  $C_d = 2,2$ ,  $a_0 = 7.800$  km,  $e = 0,00125$  (Landsat 7),  $I = 98,8^\circ$  (para esta inclinação o semi-eixo ressonante é  $a = 7.224,413$  km),  $\omega = 180^\circ$  e  $\Omega = 90^\circ$ . b) Ampliação dos últimos 25 anos de queda do satélite. A reta azul passa pelo semi-eixo ressonante. Sistema exato (2.73).

Durante diversos trechos de queda do satélite, a variação do semi-eixo pode ser considerada linear. Em especial, podemos dizer que a queda é linear entre 605 e 607,5 anos (Figura 4.3-b). É neste período que o satélite cruza o semi-eixo ressonante, cujo valor neste caso é  $a = 7.224,413$  km. Para simplificar ainda mais o modelo, fixamos o valor da densidade atmosférica no que esta teria durante a passagem pelo semi-eixo ressonante, segundo o modelo não simplificado. Assim, temos a certeza de que, quando o satélite estiver na vizinhança do semi-eixo ressonante, a velocidade de queda será a mesma que a do modelo não simplificado. Com este procedimento economizamos tempo de processamento em computador, pois nos 400 primeiros anos de queda, a velocidade no modelo não simplificado é lenta, devido ao baixo valor da densidade atmosférica neste período, e no modelo simplificado, a velocidade de queda é a mesma durante toda a integração.

A Figura 4.4 apresenta a variação do semi-eixo considerando a densidade atmosférica constante ( $\rho = 2,0 \times 10^{-12}$  kg/m<sup>3</sup>). A velocidade de queda do satélite é, como esperado, constante. Como estamos considerando a Equação (2.73) em nossas integrações, temos como

perturbadores, além do arrasto, o Sol, a Lua e o achatamento da Terra. Para o semi-eixo, a perturbação do arrasto é predominante.

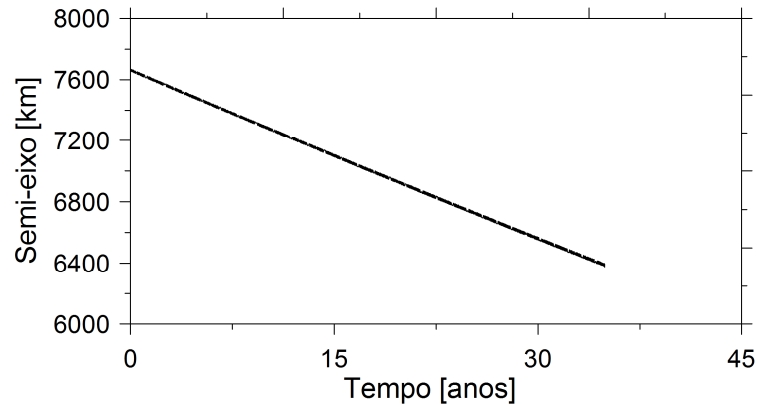


Figura 4.4. Variação do semi-eixo maior do satélite sob o efeito da força de arrasto com densidade atmosférica constante. Condições iniciais:  $C_d = 1,2$ ,  $a_0 = 7.653,7632$  km,  $e = 0,00125$  (Landsat 7),  $I = 98,67^\circ$  (para esta inclinação  $a = 7.193,968$  km é o semi-eixo ressonante),  $\omega = 90^\circ$  e  $\Omega = 40^\circ$ .

A Figura 4.5 mostra o comportamento da inclinação e do ângulo crítico durante a passagem pelo semi-eixo ressonante do satélite da Figura 4.4. O satélite foi posicionado acima do semi-eixo ressonante e o cruzou devida à perda de altitude com o efeito do arrasto. Podemos observar que a inclinação sofre uma diminuição abrupta, enquanto o ângulo crítico não mostra a ocorrência de captura pela ressonância, apenas há uma inversão no sentido de circulação. Como o domínio da ressonância  $n_{\odot} - \dot{\Omega} \approx 0$  é pequeno, a captura durante o cruzamento é pouco provável. Mesmo não sendo capturado pela ressonância, o satélite sofre sua influência durante o tempo em que a frequência da longitude do nodo e o movimento médio do Sol são comensuráveis, afetando a variação da inclinação. Embora a amplitude dessa variação seja aparentemente pequena, seu efeito é muito significativo para este tipo de órbita, como veremos a seguir.

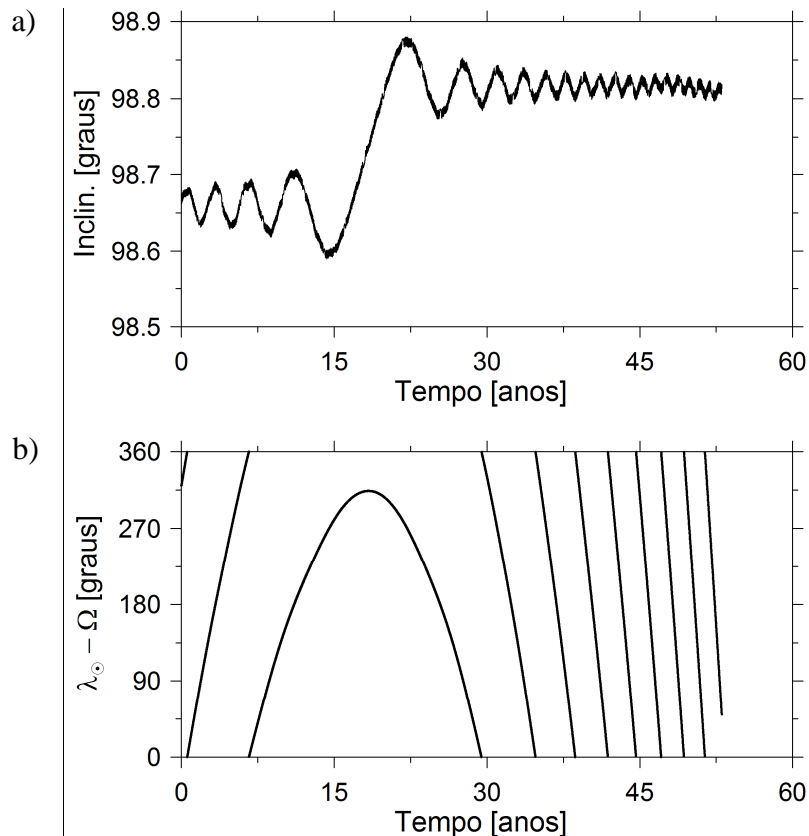


Figura 4.5. Aumento abrupto da inclinação (a) devido à passagem do satélite pelo semi-eixo ressonante. A variação do ângulo crítico em função do tempo (b) mostra que, embora tenha havido uma variação brusca na inclinação, não houve captura e o sentido de circulação foi alterado. Condições iniciais:  $C_d = 1,2$ ,  $a_0 = 7.653,768$  km,  $e = 0,00125$ ,  $I = 98.67^\circ$ ,  $\Omega = 40^\circ$  e  $\omega = 90^\circ$ .

Uma consequência da variação da inclinação é a perda do sincronismo, pois a frequência  $\dot{\Omega}$  depende explicitamente da inclinação. A projeção do satélite sobre a superfície terrestre durante uma revolução forma uma faixa (campo de visada), na qual o satélite executa o imageamento (Figura 4.6). A largura do campo de visada depende da resolução dos equipamentos de medida do satélite. O CBERS-2, por exemplo, possui um campo de visada de 113 km com suas câmeras CCD (o satélite possui vários tipos de câmeras e sensores, desde ópticos a infravermelho). Com esse campo de visada, o CBERS-2 cobre a Terra em 26 dias. Com período orbital de 100,26 minutos, o CBERS-2 utiliza um conjunto de cerca de 370 órbitas para cobrir a Terra nos 26 dias. A perda do sincronismo faz com que entre uma passagem e outra haja uma região sem imageamento, tornando inútil o conjunto de imagens. Como o satélite está sempre sujeito ao arrasto atmosférico, o semi-eixo precisa estar em constante manutenção, o que implica que o satélite passa pelo semi-eixo ressonante diversas vezes. Este fato, por sua vez implica na correção da inclinação com certa periodicidade.

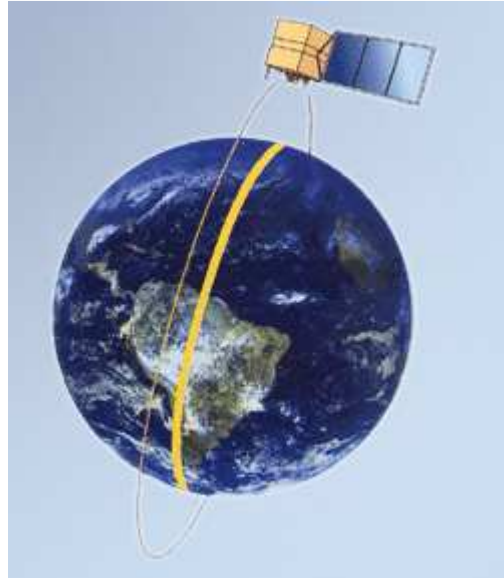


Figura 4.6. Representação da órbita e imageamento do satélite CBERS, que está a uma altitude de 778 km ( $a = 7.156,14$  km), e possui inclinação  $I = 98,504^\circ$  (Fonte: CBERS/INPE – divulgação).

A variação da inclinação pode ser tanto no sentido de aumento ou diminuição. A Figura 4.7 mostra o caso de um satélite que teve sua inclinação aumentada ao passar pelo semi-eixo ressonante.



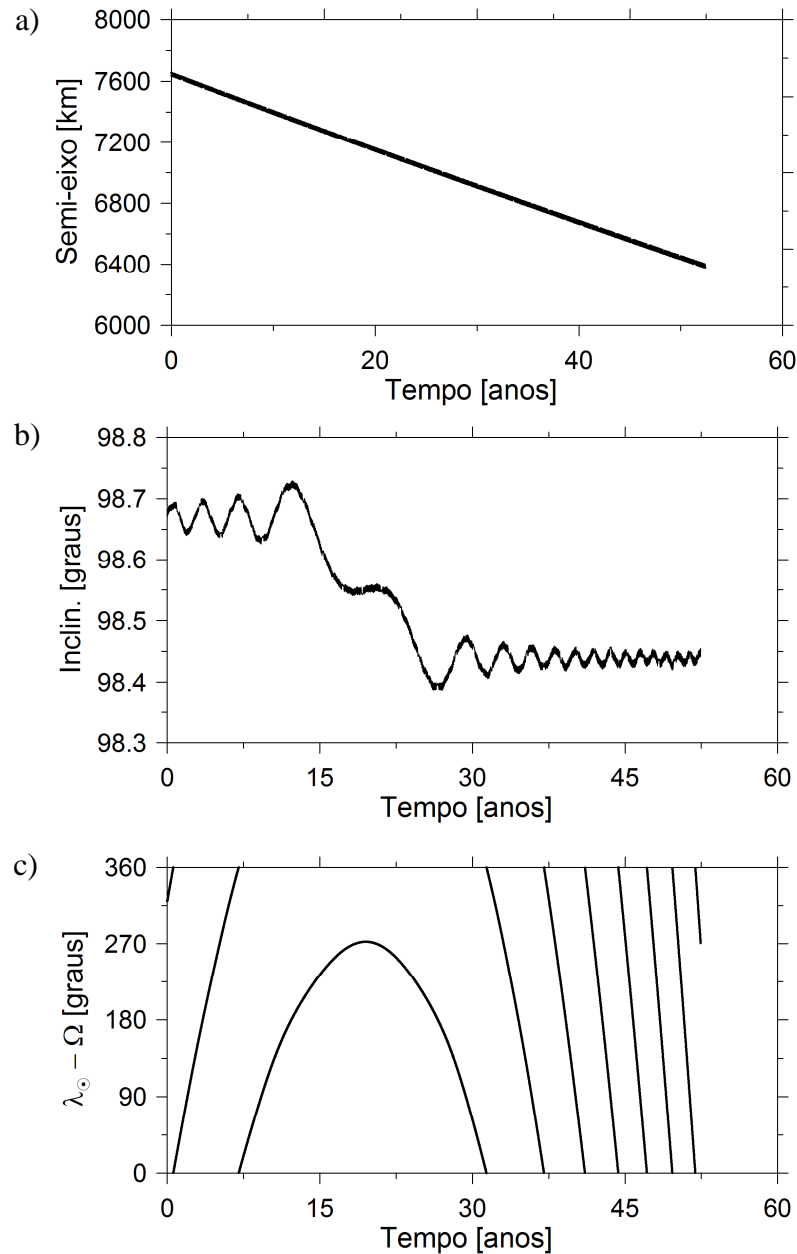


Figura 4.7. Evolução do semi-eixo do satélite em função do tempo (a). Diminuição abrupta da inclinação (b) devido à passagem do satélite pelo semi-eixo ressonante. Observemos neste que também neste caso não houve captura (c). Condições iniciais:  $C_d = 1,2$ ,  $a_0 = 7.653,768$  km,  $e = 0,00125$ ,  $I = 98.67^\circ$ ,  $\Omega = 40^\circ$  e  $\omega = 180^\circ$ . Semi-eixo ressonante para esta inclinação:  $a = 7.193,968$  km. Estas condições iniciais estão marcadas pela reta verde na Figura 4.9.

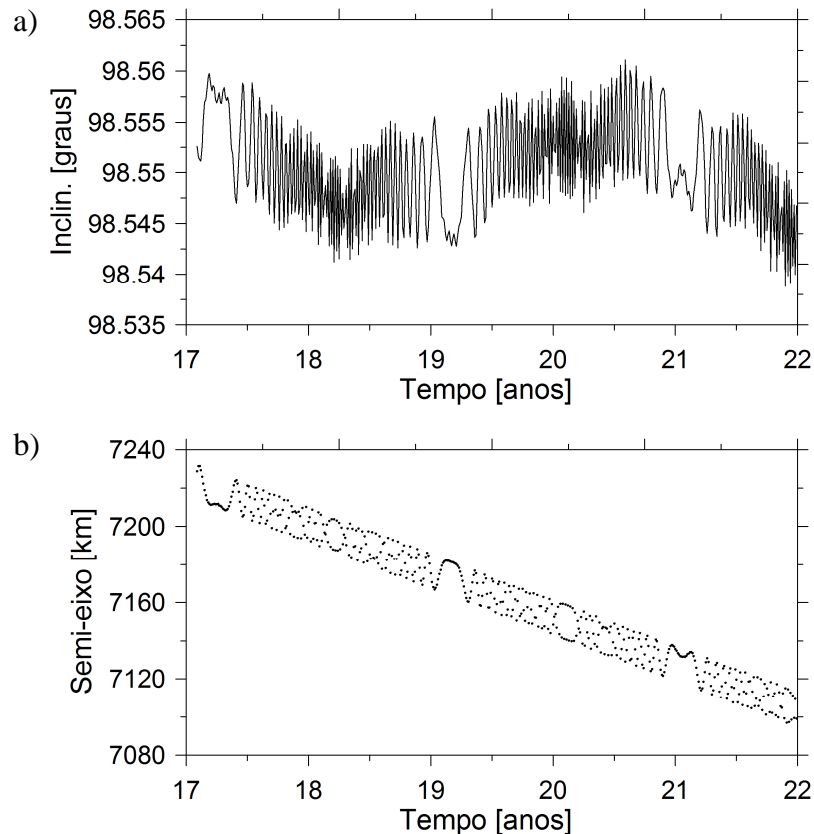


Figura 4.8. Ampliação do “patamar” de inclinação da Figura 4.7 (a) e correspondente variação do semi-eixo no tempo (b). Observe que este patamar surge quando o satélite entra na vizinhança do semi-eixo ressonante ( $a = 7.193,968$  km).

A variação da inclinação (para mais ou para menos) pode ser simulada previamente pela integração das equações de movimento. Para tanto, utilizamos as equações exatas para evoluir órbitas idênticas à órbita da Figura 4.5, fixando um determinado valor inicial de  $\Omega$  e variando os valores iniciais de  $\omega$ , obtendo várias órbitas. Para cada integração, guardamos a inclinação mínima e máxima atingida pelo satélite. Consideramos o tempo de integração igual ao tempo de queda do satélite do semi-eixo inicial até a reentrada na atmosfera. A Figura 4.9 apresenta estas inclinações mínimas e máximas em função do pericentro inicial do satélite (que variou de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  com um incremento de  $2^\circ$ ), para  $\Omega = 40^\circ$ . A curva vermelha desta figura exibe as inclinações máximas e a preta as inclinações mínimas atingidas pelo satélite, sendo a curva azul a inclinação inicial do satélite. Os pontos de máximo da curva vermelha, bem como os pontos de mínimo da curva preta, certamente correspondem ao momento em que o sistema cruza a ressonância (verificados nas Figuras 4.5 e 4.7, respectivamente).

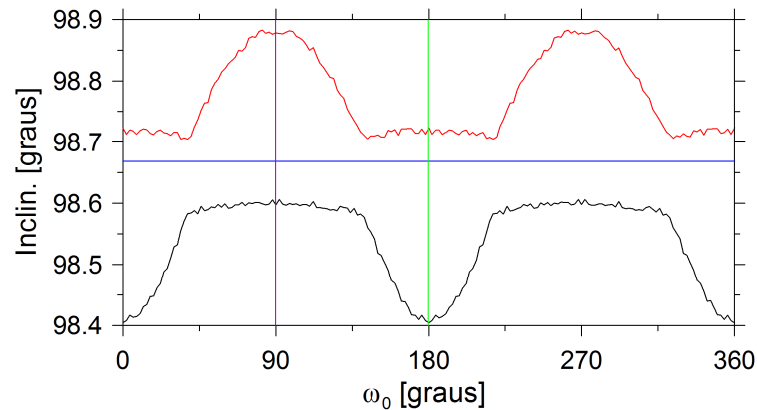


Figura 4.9.  $\Omega = 40^\circ$ . Valor máximo (curva vermelha) e mínimo (curva preta) da inclinação atingidos pelo satélite durante a integração numérica, em função do valor inicial do argumento do pericentro ( $\omega_0$ ). As condições iniciais das Figuras 4.5 e 4.7 são indicadas pelas retas violeta e verde, respectivamente. A reta azul é a inclinação inicial do satélite ( $I_0 = 98,67^\circ$ ). Condições iniciais fixas:  $a_0 = 7653,7632$  km,  $e = 0,00125$ .

O satélite pode cruzar o semi-eixo tanto durante a queda, quanto durante sua reposição no semi-eixo nominal através de manobras de manutenção de semi-eixo. Isto implica que o satélite cruza o semi-eixo ressonante diversas vezes durante sua vida útil.

Até agora, mostramos que ao cruzar o ponto de ressonância, a inclinação do satélite sofre variações bruscas, tanto para cima, quanto para baixo. Vamos, a título de esclarecimento, mostrar que o problema está no efeito da variação excessivamente rápida do decaimento do semi-eixo.

Atenuamos o efeito do arrasto atmosférico em 5 ordens de grandeza, de forma que o satélite caísse bem lentamente e fosse verificada a captura pela ressonância. A Figura 4.10 mostra a variação do semi-eixo, excentricidade, inclinação e ângulo ressonante neste caso.

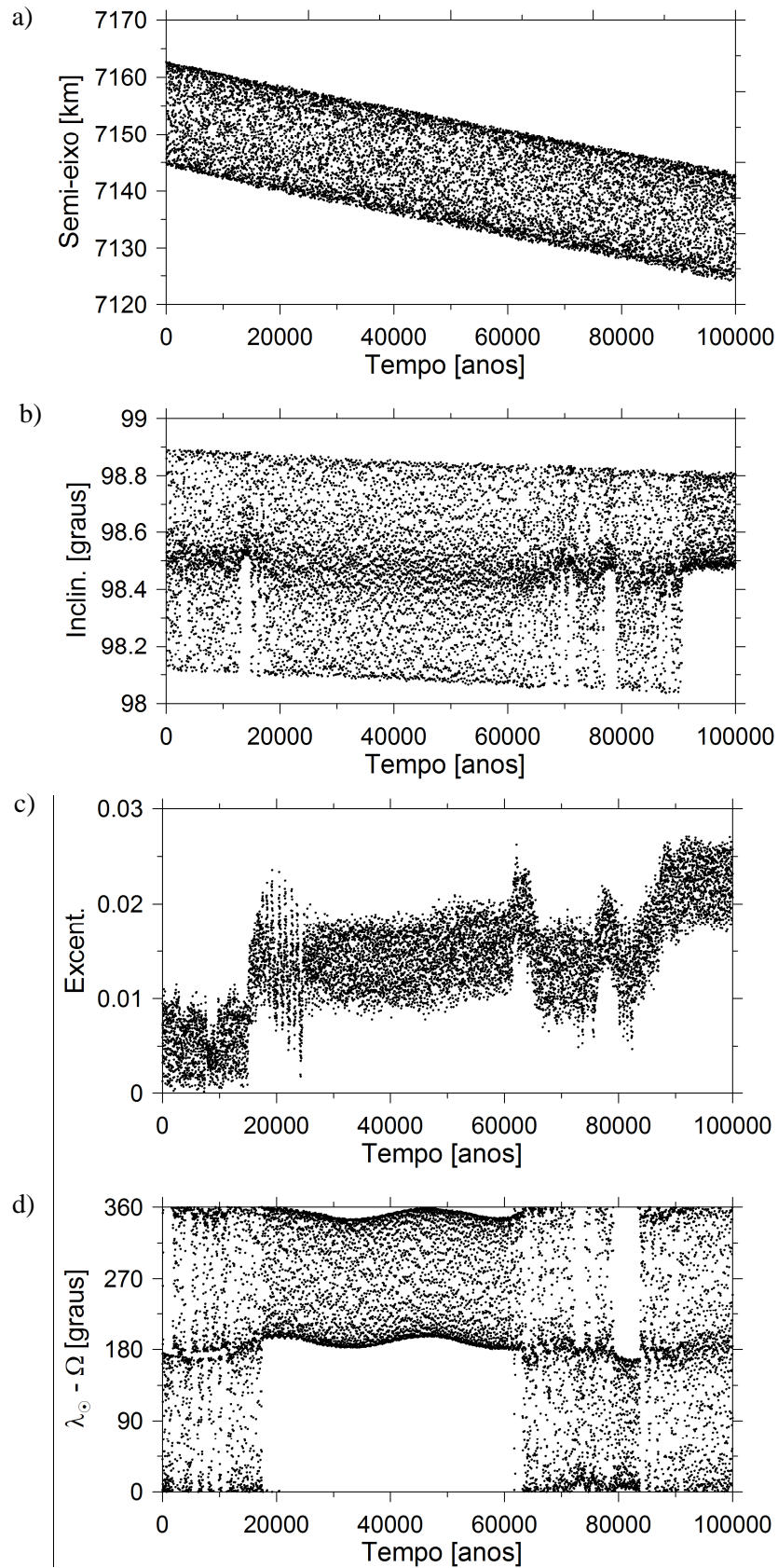


Figura 4.10. Variação do semi-eixo (a), inclinação (b), excentricidade (c) e ângulo crítico (d). As condições iniciais desta figura são as mesmas que as da Fig. 4.5, no entanto, nesta diminuímos a intensidade do arrasto atmosférico em 5 ordens de grandeza. Note que neste caso houve captura.

Notemos que mesmo assim a captura é temporária, 60.000 anos houve escape. De fato, neste caso o problema não é o restrito de três corpos, pois aqui entram as perturbações do achatamento, Lua e Sol, o que faz com que a dinâmica seja bem mais complexa.

Como os satélites heliossíncronos necessitam de um controle rígido de sua inclinação, uma estratégia interessante seria aproveitar as propriedades da ressonância  $n_{\odot} - \dot{\Omega} \approx 0$  no controle da inclinação, a fim de reduzir gasto de propelente em manobras de manutenção orbital, aumentando a vida útil do satélite. Se observarmos com cuidado a Figura 4.7, podemos notar que a inclinação se mantém praticamente estacionária em torno de  $98,55^{\circ}$  durante aproximadamente quatro anos. Chamaremos esta estabilidade momentânea da inclinação de “patamar de estabilidade em inclinação” e este tem início quando o sistema começa a cruzar a ressonância.

O patamar em inclinação ocorre quando o satélite passa pelo ponto de ressonância com valores de inclinação, pericentro, nodo e perturbações ideais para captura. Porém, como mostramos antes, o arrasto decresce o semi-eixo de forma por demais rápida, inviabilizando a captura. Mesmo assim, as simulações mostram a existência deste patamar em alguns casos. Em outras situações isto não ocorre. Por exemplo, na Figura 4.7, utilizamos um valor de coeficiente de arrasto pequeno ( $C_d = 1,2$ ). Na Figura 4.10 alteramos o valor do coeficiente para o valor médio de satélites esféricos sujeitos a fluxo de moléculas livres,  $C_d = 2,2$ , e o que podemos observar é a destruição do patamar.



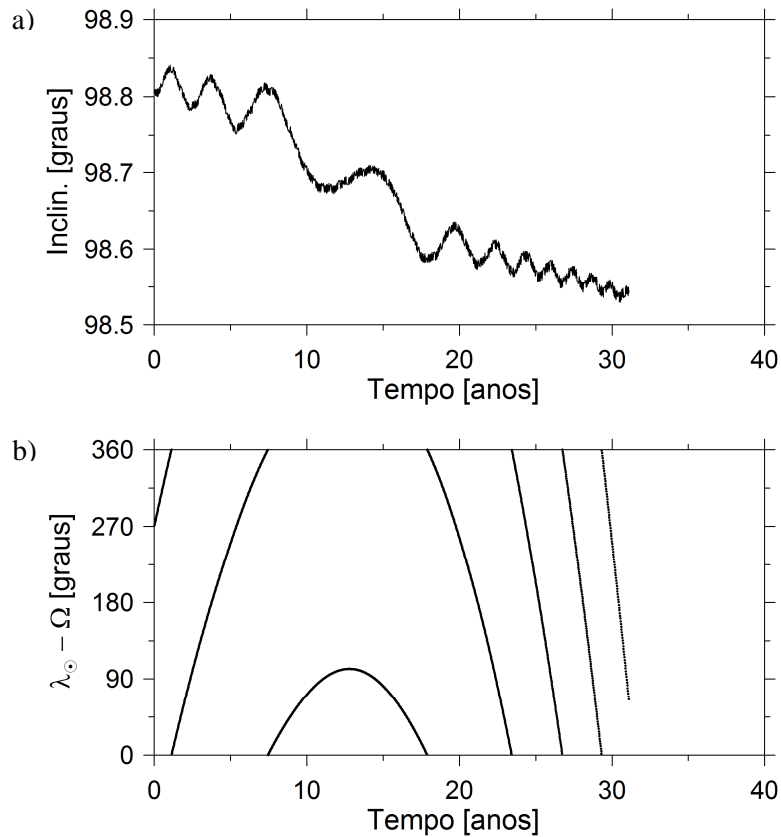


Figura 4.12. Diminuição abrupta da inclinação (a) devido à passagem do satélite pelo semi-eixo ressonante. O ângulo crítico (b) sofre inversão no sentido de circulação em  $\lambda_{\odot} - \Omega = 90^{\circ}$  (centro de libração). Condições iniciais:  $C_d = 2,2$ ,  $a_0 = 7.800$  km,  $e = 0,00125$ ,  $I = 98,8^{\circ}$ ,  $\Omega = 90^{\circ}$  e  $\omega = 180^{\circ}$ . Semi-eixo ressonante para esta inclinação:  $a = 7.224,4130$  km. Observa-se patamar em  $I = 98,68^{\circ}$ .

A idéia é planejar futuras missões de forma a aproveitar estes patamares de estabilidade em inclinação. No entanto, antes disso, precisamos verificar se o patamar de estabilidade em inclinação permanece existindo, mesmo após a adição de outras perturbações.

A Figura 4.13 apresenta a evolução temporal da inclinação e do ângulo ressonante de um satélite de mesmas condições iniciais da Figura 4.12. A curva preta tem como perturbadores o Sol, a Lua (com inclinação  $18,28^{\circ}$ ), o achatamento da Terra ( $J_2$ ) e o arrasto atmosférico com densidade constante ( $\rho = 2 \times 10^{-12}$  kg/m<sup>3</sup>), exatamente como na Figura 4.12. Já a curva vermelha difere da preta por ter inclinação inicial da Lua  $28,58^{\circ}$ . A curva azul, além dos perturbadores já citados, a inclusão do harmônico  $J_4$  do potencial do achatamento. Como podemos verificar estas modificações não alteram as características do patamar, que continua existindo.

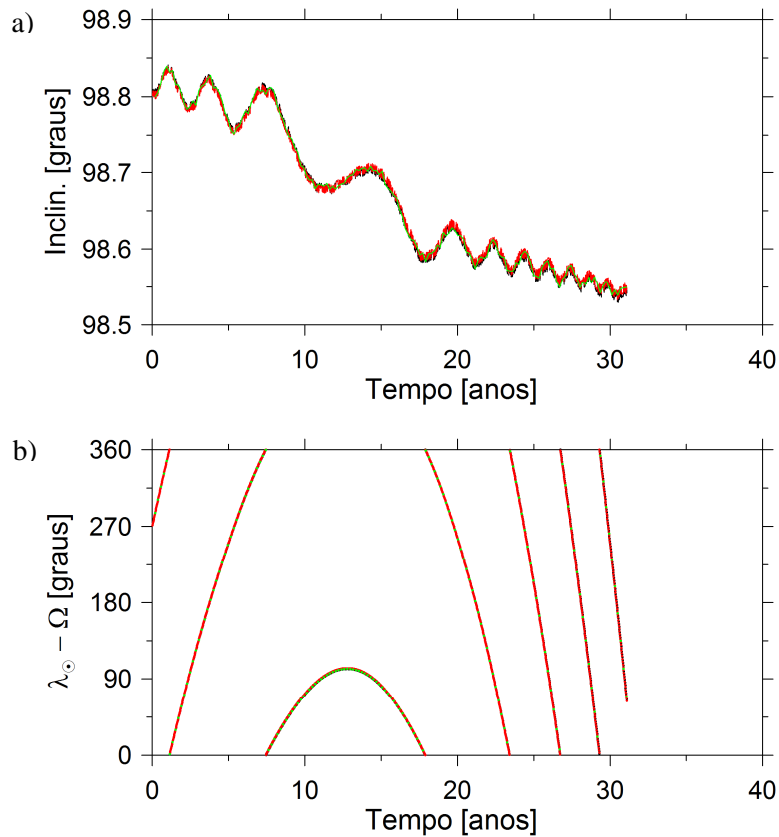


Figura 4.13. Evolução temporal da inclinação (a) e ângulo ressonante (b) de um satélite com as mesmas condições iniciais da Figura 4.12. A curva preta, graficada apenas para referência, possui como perturbadores o Sol, a Lua ( $I = 18,28^\circ$ ) e achatamento ( $J_2$ ). Na curva vermelha, alteramos a inclinação da Lua para  $28,58^\circ$ . A curva verde possui Sol, a Lua ( $I = 18,28^\circ$ )  $J_2$  e  $J_4$ .

Existem duas estratégias para o aproveitamento do patamar de estabilidade em inclinação em missões futuras. Na primeira delas, colocaríamos este satélite em uma órbita de ajuste (órbita inicial do satélite, assim que se livra do lançador, para depois ser colocado através de manobras em sua órbita final), tal que, passado um certo tempo, naturalmente o satélite atinja o patamar de estabilidade em inclinação. Uma vez no patamar, seria necessário fazer apenas manobras de manutenção de semi-eixo, já que a inclinação estaria controlada pela ressonância, durante um determinado período de tempo. Na segunda estratégia, o satélite seria colocado diretamente no semi-eixo no qual começa o patamar de estabilidade em inclinação, com inclinação e ângulo crítico ideais. Como na primeira estratégia o satélite demoraria em geral um tempo imprevisível para atingir a combinação necessária para a existência do patamar, vamos testar somente a segunda estratégia.

Para testar a segunda estratégia, voltemos a um modelo de atmosfera mais realista com densidade dada por (4.4), tal como na Figura 4.3.



Na Figura 4.14, a inclinação inicial do satélite é a própria inclinação do patamar ( $98,68^\circ$ ). O satélite possui semi-eixo inicial igual ao semi-eixo no qual existe o patamar de estabilidade em inclinação da Figura 4.12 (curva preta), enquanto a curva vermelha apresenta um satélite com semi-eixo 100 km acima do semi-eixo de patamar. O satélite que começou no semi-eixo de patamar manteve sua inclinação em torno de  $98,68^\circ$  durante quase quatro anos, enquanto o satélite representado pela curva vermelha atingiu inclinação de  $98,85^\circ$  no mesmo período de tempo. Fica claro então que, se fizermos manobras de manutenção de semi-eixo no satélite representado pela curva preta, este manteria sua inclinação em torno de  $98,68^\circ$  sem necessidade de manobras de manutenção em inclinação, o que representaria uma grande economia de combustível, refletida no aumento da vida útil do satélite.

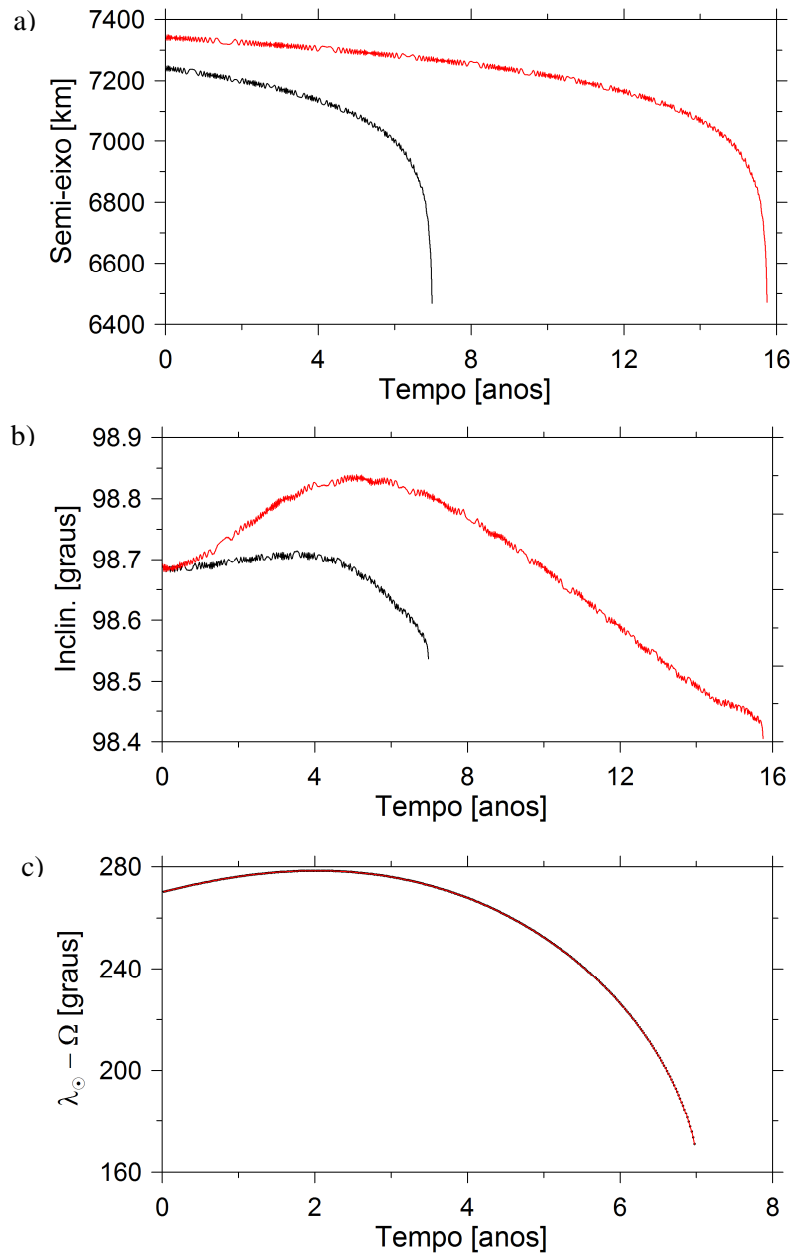


Figura 4.14. Evolução temporal do semi-eixo (a), inclinação (b) e ângulo ressonante (c) de um satélite com semi-eixo maior inicial  $a_0 = 7.300$  km (vermelho) e outro com  $a_0 = 7.250$  km (preto). Condições iniciais comuns aos dois:  $C_d = 2,2$ ,  $e = 0,00125$ ,  $I = 98.8^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $\omega = 180^\circ$ .

Para verificar a proposta apresentada no parágrafo anterior, vamos executar uma manobra de manutenção de semi-eixo enquanto o satélite estiver no patamar de estabilidade em inclinação. A manobra de transferência Hohmann (VALLADO, 2007) é a mais simples das manobras de reposição, e também a mais barata em termos de combustível (considerando as características de nossa missão).

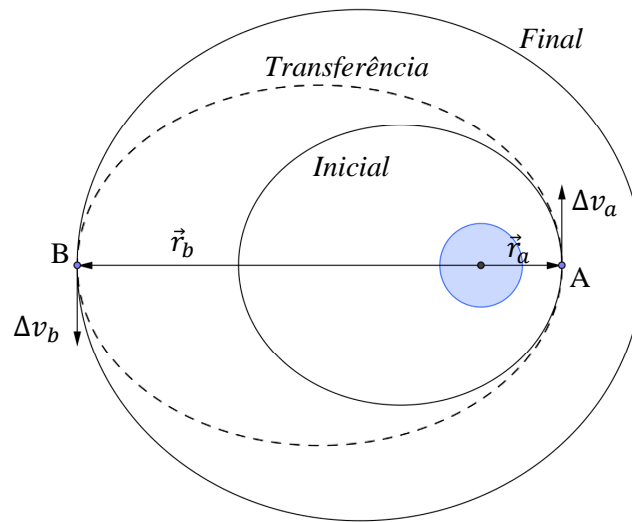


Figura 4.15. Geometria da transferência Hohmann, onde  $|\vec{r}_a| = r_{inicial}$  e  $|\vec{r}_b| = r_{final}$ .

Uma manobra coplanar, a transferência Hohmann consiste na aplicação de dois incrementos de velocidade. Um  $\Delta v_a$  no pericentro órbita inicial (ponto A, Figura 4.15), tal que o satélite seja transferido para uma órbita elíptica intermediária, com pericentro igual ao pericentro da órbita inicial. O segundo incremento de velocidade ( $\Delta v_b$ ) é aplicado no apogeu da órbita intermediária (ponto B, Figura 4.15), de forma que o satélite seja transferido para a órbita final, com apogeu igual ao da órbita intermediária e semi-eixo superior ao da órbita inicial.

Como os raios do apogeu e perigeu são conhecidos (a partir do semi-eixo e excentricidade da órbita final e inicial, respectivamente), o período de transferência é a metade do período orbital da órbita de transferência (VALLADO, 2007):

$$a_{trans} = \frac{r_{inicial} + r_{final}}{2}, \quad (4.6)$$

$$\tau_{trans} = \frac{P_{trans}}{2} = \pi \sqrt{\frac{a_{trans}^3}{\mu}}, \quad (4.7)$$

onde  $\tau_{trans}$  é o tempo de transferência (tempo que o satélite demora para ir do ponto A ao ponto B),  $P_{trans}$  e  $a_{trans}$  são o período e o semi-eixo da órbita de transferência, e  $\mu = GM_T$ .

A excentricidade dos satélite heliossíncronos é pequena, entretanto temos de levá-la em consideração. Assim, a velocidade inicial pode ser determinada da seguinte forma:

$$v_{inicial} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{inicial}} - \frac{\mu}{a_{inicial}}}. \quad (4.8)$$

A velocidade de transferência no ponto A é dada por:

$$v_{trans_a} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{inicial}} - \frac{\mu}{a_{trans}}}. \quad (4.9)$$

Assim:

$$\Delta v_a = v_{trans_a} - v_{inicial}. \quad (4.10)$$

De maneira similar, obtemos:

$$v_{final} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{final}} - \frac{\mu}{a_{final}}}, \quad (4.11)$$

$$v_{trans_b} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{final}} - \frac{\mu}{a_{trans}}}, \quad (4.12)$$

$$\Delta v_b = v_{final} - v_{trans_b}. \quad (4.13)$$

O incremento de velocidade total é dado por:

$$\Delta v = |\Delta v_a| + |\Delta v_b|. \quad (4.14)$$

A Figura 4.16 apresenta um exemplo onde foram executadas sucessivas manobras de transferência Hohmann a fim de manter o semi-eixo do satélite dentro de um intervalo  $\Delta a = 50$  km.

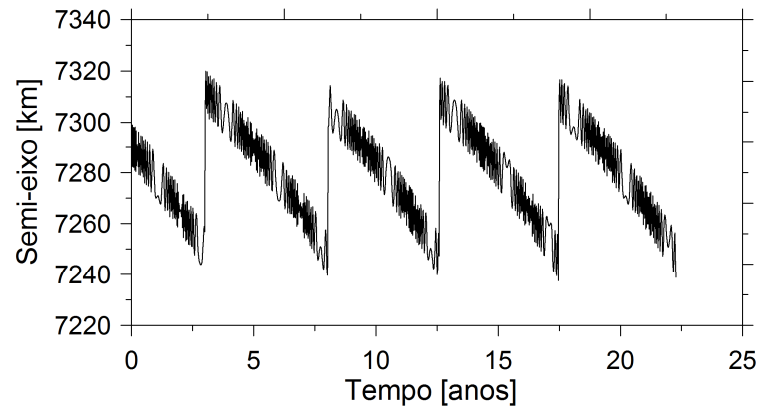


Figura 4.16. Exemplo de transferências de Hohmann sucessivas executadas para a manutenção de semi-eixo ( $\Delta a = 50$  km). Condições iniciais:  $C_d = 2,2$ ,  $a_0 = 7.300$  km,  $e = 0,00125$ ,  $I = 98.8^\circ$ ,  $\Omega = 90^\circ$  e  $\omega = 180^\circ$ .

## 5. CONCLUSÕES

Através das equações médias nós mostramos claramente a dinâmica da ressonância  $2\dot{\omega} + \dot{\Omega} \approx 0$ . A causa do aumento de excentricidade é devida essencialmente a esta ressonância, que independe do valor do semi-eixo maior. Consequentemente, qualquer mudança do semi-eixo maior (aumento de pericentro) do objeto descartável não irá retirá-lo da ressonância. Depois, mostrando a existência de algumas condições iniciais no domínio  $(\omega, \Omega)$  onde a excentricidade pode permanecer com pequenos valores, baseados no sistema médio simplificado, usamos o conjunto completo de equações para procurar este par no plano  $(\omega, \Omega)$ . A importância da inclinação da Lua é bem clara nas Figuras 3.5, 3.6, 3.9 e 3.10. Obtivemos estas condições iniciais para os sistemas GPS e Galileo. O termo de primeira ordem em excentricidade da função perturbadora solar traz consigo muitas ressonâncias adicionais, no entanto tais ressonâncias não causam efeitos relevantes nos satélites de navegação. A procura do par  $(\omega, \Omega)$  para o máximo incremento de excentricidade pode ser feita de maneira fácil seguindo o mesmo procedimento usado para mínima excentricidade. Incluímos os termos  $J_{22}$ ,  $J_{32}$  e  $J_{33}$  vindos da função perturbadora do geopotencial. Entretanto a influência destes termos se torna significativa somente depois de algumas centenas de anos, tempo acima do período utilizado na procura de condições iniciais. Por este motivo a contribuição destes termos nas Figuras 3.15 e 3.16 é quase desprezível. De posse das condições iniciais  $(\omega, \Omega)$  para os satélites GPS, mostramos o gasto de combustível, em termos de  $\Delta V$ , necessário para colocar o satélite descartado nestas condições e o comparamos com o

gasto de uma manobra de mudança de plano. De fácil execução, a manobra  $(\Delta\omega, \Delta\Omega)$  se mostrou muito mais eficiente, pois a excentricidade dos satélites é abaixo de 0.01, limite acima do qual esta manobra deixa de ser eficiente.

Os satélites heliossíncronos, ao cruzarem a ressonância  $n_{\odot} - \dot{\Omega} \approx 0$ , sofrem uma brusca variação de inclinação (acrécimo ou decréscimo). Através da integração direta do sistema exato, com gráficos do tipo da Figura 4.9, podemos simular previamente o acréscimo ou decréscimo da inclinação, dependendo dos ângulos osciladores  $\omega$  e  $\Omega$ . Durante estas variações o satélite passa por patamares de estabilidade em inclinação, permanecendo um determinado período de tempo sem variação de inclinação. Propomos uma maneira de aproveitar estes patamares em missões futuras.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROUWER, D.; CLEMENCE, G. **Methods of Celestial Mechanics**. New York: Academic Press, 1961.

BUTKOV, E. **Física Matemática**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1988.

CARRARA, V. Orbit Maintenance Strategy for the Brazilian Remote Sensing Satellite. Martins, R. V; Lazzaro, D.; Sessin, W. (eds). **Orbital Dynamics of Natural and Artificial Objects**, Rio de Janeiro: Observatório Nacional, 1989.

CBERS/INPE – Divulgação, 2007. Disponível em <<http://www.cbears.inpe.br/?content=orbital1e2e2b>>, Último acesso em 10 de dezembro de 2009.

CELESTRAK, **On Line Satellite Catalog (SATCAT)**. CSSI, 2009. Disponível em <<http://celestrak.com/>>. Último acesso em 10 de dezembro de 2009.

COOK, G. E.; KING-HELE, D. G.; WALKER, D. M. C. The Contraction of Satellites Orbits Under the Influence of Air Drag: I- With Spherically Symmetrical Atmosphere. **Proceeding of the Royal Society A**, v. 257, p. 224-249, 1960.

ESA – European Commission. **GALILEO: Mission High Level Definition**. Paris: ESA, 23 de Setembro de 2002.

ESCOBAL, P. R. **Methods of Orbit Determination**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1965.

FERREIRA, L. D. D.; MORAES, R. V. **GPS Satellites Orbits: Resonance. Mathematical Problems in Engineering**, 2009



GICK, R.A.; CHAO, C.C. GPS Disposal Orbit Stability and Sensitivity Study. **Advances in the Astronomical Sciences**, v.108, p. 2005-2018, 2001.

HORIZONS System, **Solar System Dynamics**. Caltech/JPL, 2009. Disponível em <<http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons#doc>>. Último acesso em 10 de dezembro de 2009.

JACCHIA, L. G. Thermospheric Temperature, Density and Composition: New Model. Smithsonian Astrophysical Observatory, **SAO Special Report #375**, 1977.

JENKIN, A.B.; GICK, R.A. Collision Risk Associated with Instability of MEO Disposal Orbits. In: European Conference on Space Debris, 3., 2001, Darmstadt, Alemanha. **Proceedings...** Paris: ESA SP-573, 2001.

\_\_\_\_\_. Dilution of Disposal Orbit Collision for the Medium Earth Orbit Constellations. In: European Conference on Space Debris, 4., 2005, Darmstadt, Alemanha. **Proceedings...** Paris: ESA SP-587, 2005.

\_\_\_\_\_. Collision Risk Posed to the Global Positioning System by Disposed Upper Stages. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 43, n. 6, p. 1412-1418, 2006.

JPL. **Lunar Constants and Models Document**. Pasadena: Caltech/JPL, 23 de setembro de 1995. (JPL D32296).

JPL/MSL – GPS. In: **JPL Mission and Spacecraft Library**. Pasadena: Caltech/JPL, 1999. Disponível em <<http://msl.jpl.nasa.gov/home.html>>. Acesso em 10 de novembro de 2009.

KINOSHITA, H.; NAKAI, H. Secular Perturbations of Fictitious Satellites of Uranus. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**. v. 52, p. 293-303, 1991.

LANCZOS, C. **The Variational Principles of Mechanics**. Toronto: Univ. Toronto Press, 1970.

Landsat 7 Spacecraft. In: **Landsat 7 Science Data User Handbook**. Washington, DC: NASA, 2009. Disponível em <[http://landsathandbook.gsfc.nasa.gov/handbook/handbook\\_htmls/chapter2/chapter2.html](http://landsathandbook.gsfc.nasa.gov/handbook/handbook_htmls/chapter2/chapter2.html)>. Acessado em 10 de novembro de 2009.

LEMOINE, F. G. et al. **The Development of the Joint NASA GSFC and NIMA Geopotential Model EGM96**. Washington, DC: NASA/GSFC, 1998. (NASA/TP-1998-206891).

MONTENBRUCK, O.; Gill, E. **Satellite Orbits: Models, Methods and Applications**. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2005.

NASA Safety Standard. **Guidelines and Assessment Procedures for Limiting Orbital Debris**, Washington, DC: Office of Safety and Mission Assurance, 1995. (NSS 1740.14).

PRADO, A. F. B. A. **Trajatórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade**. José dos Campos: INPE, 2001.

PRADO, A. F. B. A.; KUGA, H. K. **Fundamentos de Tecnologia Espacial**. São José dos Campos: INPE, 2001.

ROSSI, A. Resonant dynamics of Medium Earth Orbits: space debris issues. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 100, n. 4, p. 267-286, 2008.

SANCHEZ, D. M.; YOKOYAMA, T.; BRASIL, P. I. O.; CORDEIRO, R. R. Some Initial Conditions for Disposed Satellites of the Systems GPS and Galileo Constellations. **Mathematical Problems in Engineering**, 2009.

TAPLEY, B. D. The Joint Gravity Model 3. **Journal of Geophysical Research**, v. 101, p. 28029-28049, 1996.

VALLADO, D. A. **Fundamentals of Astrodynamics and Applications**. Hawthorn: Space Technology Library, 2007.

YOKOYAMA, T. Dynamics of some fictitious satellite of Venus and Mars. **Planetary and Space Science**, v. 47, n. 1, p. 619-627, 1999.

YOKOYAMA, T. Possible effects of secular resonances in Phobos and Triton. **Planetary and Space Science**, v. 50, n.1, p. 63-77, 2002.

ZIEGLER, B.; BLANKE, M. Drag-Free Motion Control of Satellite for High-Precision Gravity Field Mapping. In: IEEE International Conference on Control Applications, 2002, Glasgow. **Proceedings**, 2002.

## 7. APÊNDICE

### 7.1. Apêndice A – Evolução dos satélites GPS Bloco II-A, para uma grade de inclinações iniciais

Para completar o cenário da situação dos satélites GPS em relação à ressonância  $2\omega + \Omega$ , apresentamos aqui a evolução da órbita dos objetos da constelação GPS Bloco-IIA (em processo de descarte), utilizando como condições iniciais os elementos orbitais que os satélites apresentavam na época 12 de agosto de 2008 (Celestrak), à exceção da inclinação. Utilizamos para tanto a Equação (2.73). As Figuras, tal como as Figuras 3.17 e 3.18 apresentam a excentricidade máxima atingida durante o tempo de integração (250 anos) em função da inclinação inicial. Tomamos uma faixa de inclinações iniciais na vizinhança da inclinação do satélite na data citada. As condições iniciais de todas as figuras foram tomadas na mesma época. Inclinação da Lua vale  $I_L = 18.28^\circ$  para todas as figuras.

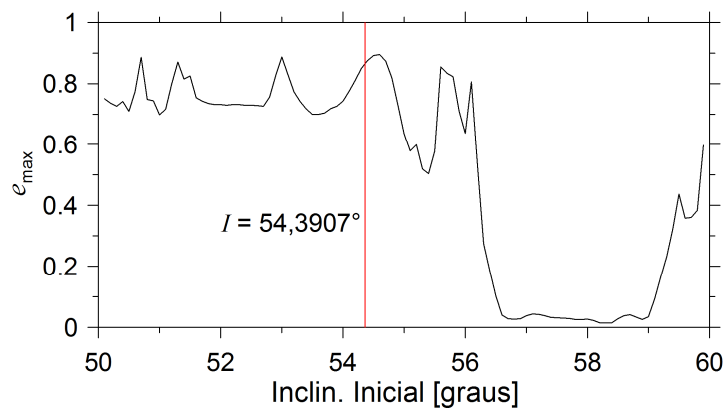


Figura 7.1. GPS Bloco IIA-10 (PRN 32). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0141577$ ,  $I = 55,4704^\circ$ ,  $\Omega = 295,4267^\circ$ ,  $\omega = 285,2469^\circ$ .

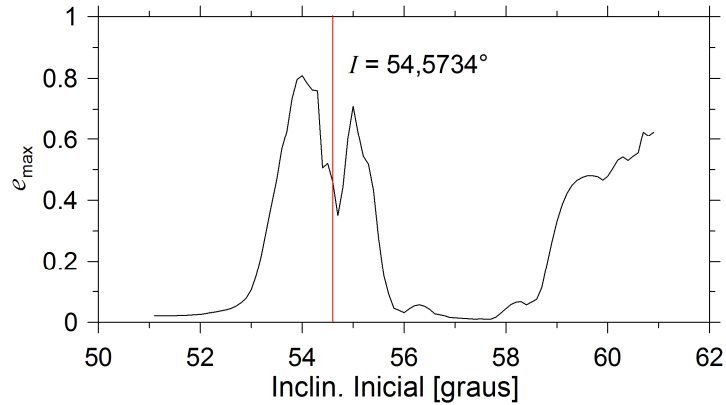


Figura 7.2. GPS Bloco IIA-11 (PRN 24). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0077676$ ,  $I = 54,5734^\circ$ ,  $\Omega = 233,5216^\circ$ ,  $\omega = 317,5531^\circ$ .

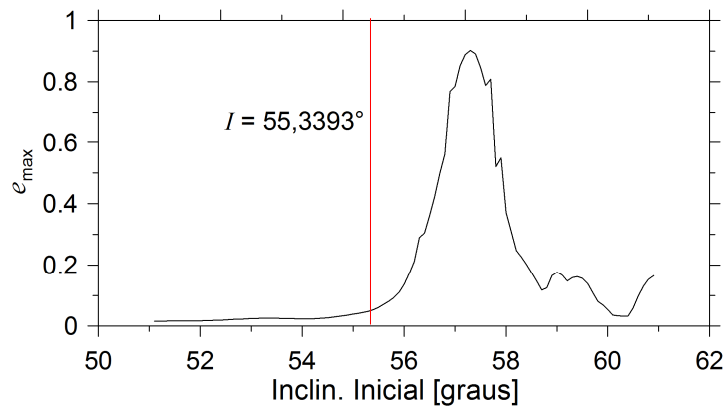


Figura 7.3. GPS Bloco IIA-12 (PRN 25). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0077676$ ,  $I = 55,3393^\circ$ ,  $\Omega = 45,1394^\circ$ ,  $\omega = 288,2011^\circ$ .

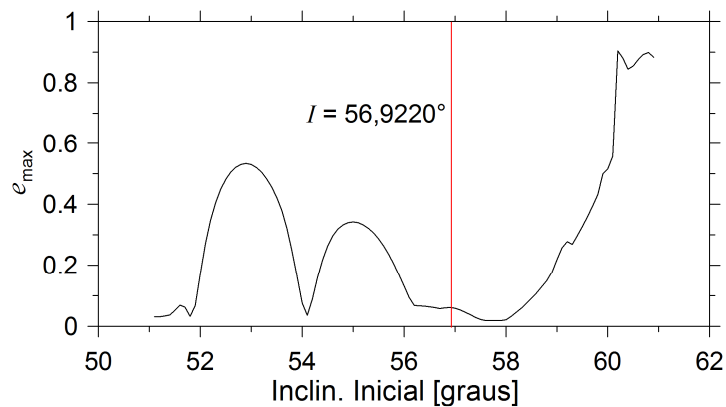


Figura 7.4. GPS Bloco IIA-14 (PRN 26). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0189872$ ,  $I = 56,9220^\circ$ ,  $\Omega = 353,2625^\circ$ ,  $\omega = 54,0809^\circ$ .

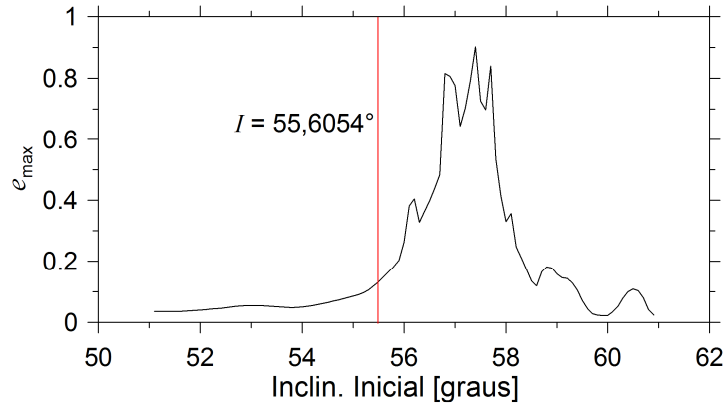


Figura 7.5. GPS Bloco IIA-15 (PRN 27). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0214233$ ,  $I = 55,6054^\circ$ ,  $\Omega = 47,1235^\circ$ ,  $\omega = 263,1470^\circ$ .

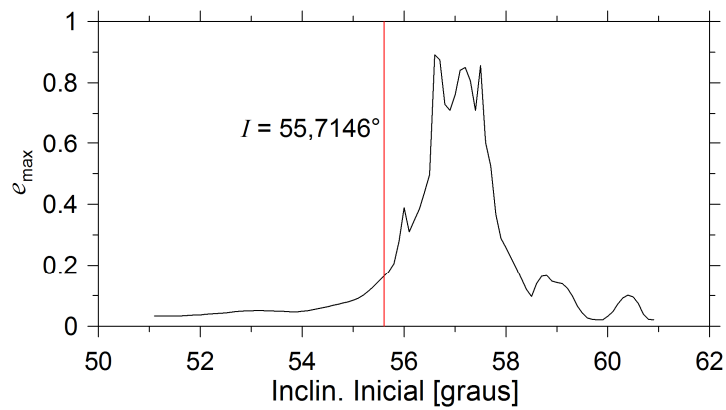


Figura 7.6. GPS Bloco IIA-21 (PRN 09). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0199018$ ,  $I = 55,7146^\circ$ ,  $\Omega = 48,5061^\circ$ ,  $\omega = 818383^\circ$ .

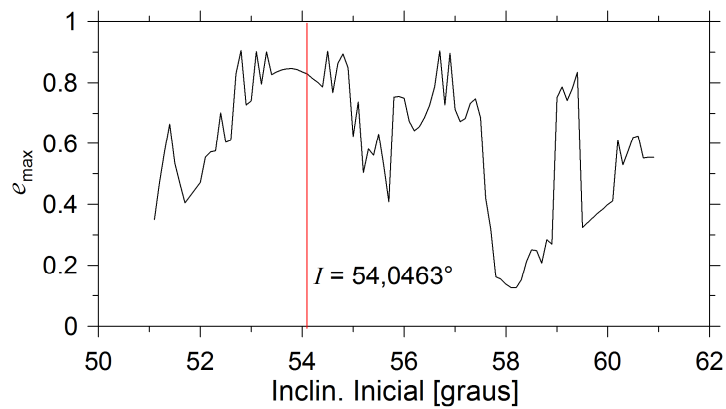


Figura 7.7. GPS Bloco IIA-22 (PRN 05). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0089246$ ,  $I = 54,0463^\circ$ ,  $\Omega = 105,2710^\circ$ ,  $\omega = 71,4565^\circ$ .

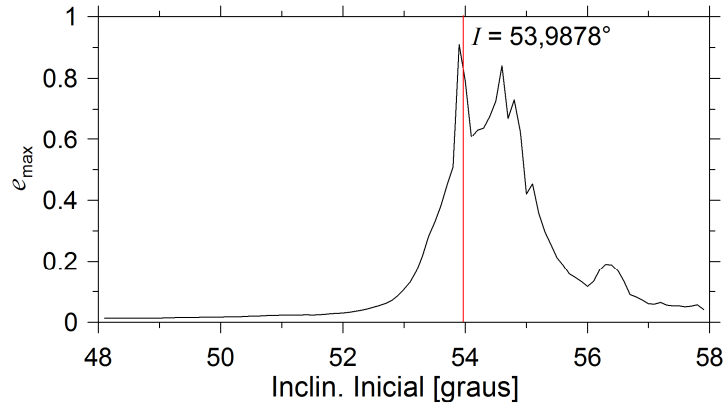


Figura 7.8. GPS Bloco IIA-23 (PRN 04). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0081006$ ,  $I = 53,9878^\circ$ ,  $\Omega = 231,0619^\circ$ ,  $\omega = 20,7944^\circ$ .

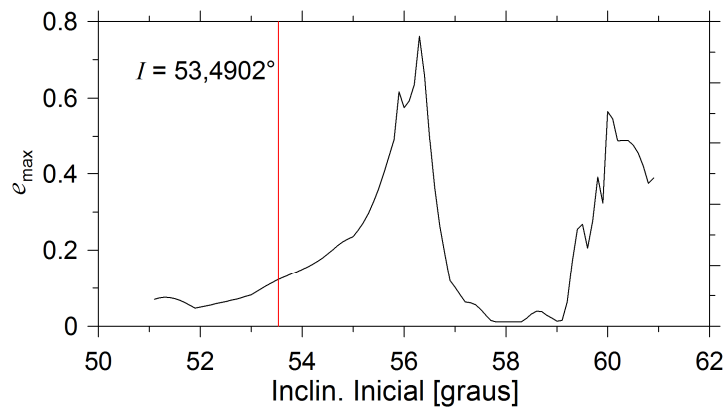


Figura 7.9. GPS Bloco IIA-24 (PRN 06). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0061057$ ,  $I = 53,4902^\circ$ ,  $\Omega = 168,1686^\circ$ ,  $\omega = 267,4498^\circ$ .

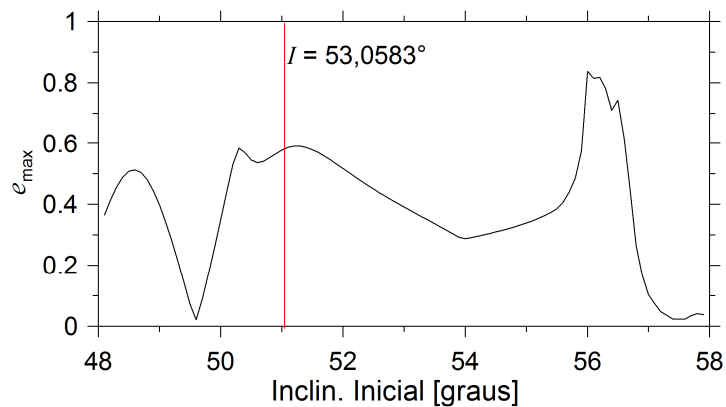


Figura 7.10. GPS Bloco IIA-25 (PRN 03). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0107105$ ,  $I = 53,0583^\circ$ ,  $\Omega = 164,4296^\circ$ ,  $\omega = 47,0183^\circ$ .

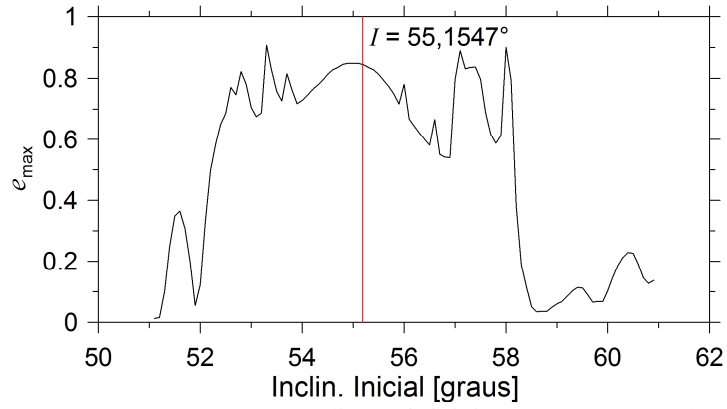


Figura 7.11. GPS Bloco IIA-26 (PRN 10). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0078202$ ,  $I = 55,1547^\circ$ ,  $\Omega = 292,0277^\circ$ ,  $\omega = 30,8981^\circ$ .

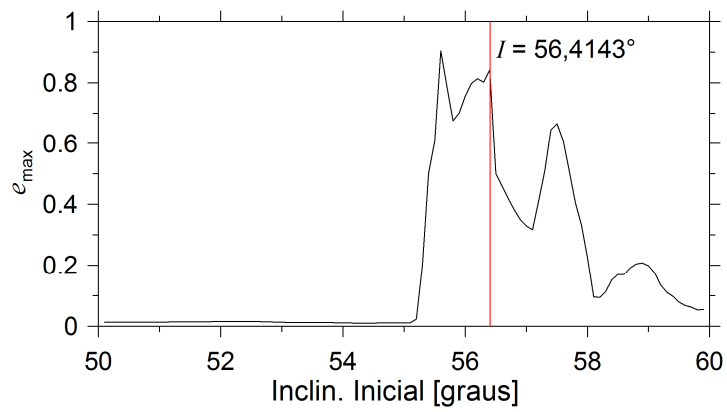


Figura 7.12. GPS Bloco IIA-28 (PRN 08). Condições iniciais:  $a = 27.059,74$  km,  $e = 0,0102992$ ,  $I = 56,4143^\circ$ ,  $\Omega = 53,6556^\circ$ ,  $\omega = 167,3385^\circ$ .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)



[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)