UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática

Célia Barros Nunes

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos para obtenção do titulo de Doutora em Educação Matemática

Rio Claro (SP)

2010

Comissão Examinadora

____
Profa. Dra. Adair Mendes Nacarato

____
Profa. Dra. Kátia Cristina Stocco Smole

____
Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato

____
Profa. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

____
Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic
(Orientadora)

____
Célia Barros Nunes
(Aluna)

Rio Claro,________de _______________de 2010

Resultado:____

AGRADECIMENTOS

Dizem que os grandes homens são aqueles que sabem agradecer. Então, minha eterna gratidão...

A Deus. Por segurar em minhas mãos durante toda essa jornada. Sempre me iluminando e guiando os meus passos. É Dele toda vitória alcançada em minha vida.

A minha família. Meu esposo, Rubinei e meus filhos, Lucélia e Rubinho, que me apoiaram em todos os momentos. Cada um deles confiou e acreditou que eu era capaz de levar adiante esse sonho, mesmo sabendo que eu poderia estar ausente em alguns momentos de suas vidas. Amo vocês.

A minha mãe, meu pai, minhas irmãs, meus sobrinhos e sobrinhas, meus cunhados que sempre confiaram em mim e me incentivaram em tudo.

A D. Lourdes pelo amor, pelo carinho e pelas horas incansáveis de orientação e que me proporcionou, em meu crescimento profissional, momentos de aprendizagem na Resolução de Problemas, bem como na Formação de Professores. Que o Senhor continue dando-lhe forças para continuar esse maravilhoso trabalho que realiza em prol da pesquisa em Resolução de Problemas.

A Banca Examinadora: professora Adair Nacarato, professora Kátia Smole, professora Norma Allevato e professora Rosana Miskulin pelas valiosas contribuições prestadas a esse trabalho.

Aos professores do Programa os quais tive oportunidade de conhecer. Vocês foram bastante receptivos e acolhedores. Obrigada de coração.

A UNEB e a Capes pelo apoio financeiro.

A Coordenação e aos alunos da UNEB, Campus X, pela participação ativa nesse trabalho de pesquisa. Vocês foram fundamentais.

A UNESP pela oportunidade que me deu de poder adquirir conhecimento na área de Educação Matemática e me tornar uma pesquisadora.

Aos colegas do GTERP, os quais convivi durante esses quatro anos, pelo carinho, pela amizade, pelo companheirismo e que me possibilitou momentos de estudo e reflexão compartilhada. Obrigada a Ana, Eliane, Fernanda, Graci, D. Lourdes, Malu, Marcos, Norma, Paulo, Raquel Araium, Raquel Brumatti, Roger e Tatiane.

A Analúcia e Marcos, meus irmãozinhos de orientação. Obrigada pela força, pela amizade, pelo carinho.

A todos os colegas da Pós pela amizade cultivada durante esses quatro anos. Não citarei nomes para não correr o risco de esquecer alguém. Foram e são tantos ...

Um agradecimento especial aos colegas Leandro, Maurício, Sandra, Margarete (baiana), Carlos (paraibano), Roger Miarka, Fabiane, Luciane, Aninha, Evelaine, Edinei, Andriceli, Adriana. Vocês foram muito importantes na realização desse trabalho. Tenho um carinho especial por vocês.

Aos funcionários do Departamento de Matemática da UNESP pela cordialidade e disponibilidade sempre.

A Inajara. Sempre alegre e sorridente. Eis o segredo de um excelente trabalho.

RESUMO

Toda pesquisa começa com uma curiosidade do pesquisador e se apresenta como um ponto de partida para uma investigação. Assim, esta pesquisa tem como fenômeno de interesse trabalhar a Geometria Euclidiana, numa abordagem dinâmica, com alunos, futuros professores, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – UNEB, Campus X. Seu objetivo é o de investigar, compreender e evidenciar as potencialidades didático-matemáticas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas nos processos de ensinar e aprender Geometria. É uma pesquisa de natureza qualitativa que foi desenvolvida seguindo orientações metodológicas de Thomas A. Romberg. Usou-se como procedimentos metodológicos na coleta de dados: a observação, o material escrito pelos alunos, questionários, filmagens, gravações e diário de campo. Dois projetos de ensino foram criados e aplicados nas disciplinas Didática da Matemática e Laboratório de Ensino de Matemática II, respectivamente. Na junção desses dois projetos, depois de aplicados, concluiu-se que essa é mais uma pesquisa no contexto da Educação Matemática que une as disciplinas trabalhadas como uma dupla necessária para a formação de professores. Ademais, sugere um trabalho feito com professores em formação inicial visando a sua própria formação e propicia momentos de reflexão e análise sobre as potencialidades que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas oferece no sentido de incrementar a aprendizagem e melhorar os processos de ensino de Matemática, sobretudo o de Geometria.

Palavras-chave: Formação Inicial de Professores. Didática da Matemática. Resolução de Problemas. Geometria. Laboratório de Ensino de Matemática.

ABSTRACT

Every search begins with a curiosity of the researcher and it is presented as a starting point for an investigation. This research has the phenomenon of interest to work Euclidean geometry, a dynamic approach, with students, future teachers, the Degree in Mathematics at the University of Bahia - UNEB, Campus X. Its goal is to investigate, understand and highlight the potential of teaching math-Teaching Methodology-Evaluation of Learning Mathematics through Problem Solving in the processes of teaching and learning geometry. . It is a qualitative research that was developed following methodological guidelines of Thomas A. Romberg. It used as instruments to collect data: observation, material was written by students, quizzes, films, recordings and field diary. Two education projects were created and applied in the disciplines of Didactics of Mathematics and Laboratory of Mathematics II, respectively. At the junction of these two projects, once implemented, it was concluded that this is another research in the context of mathematics education that unites the disciplines worked as a dual need for teacher training. Moreover, it suggests a work that was done with teachers in training to become self-training and provides moments of reflection and analysis on the potential that the methodology of Teaching-Learning-Evaluation of Mathematics through Problem Solving offers to enhance their learning and improve the processes of teaching mathematics, especially in geometry.

Keywords: Iinitial teacher education. Didactics of Mathematics**.** Problem Solving **.**
Geometry. Laboratory of Mathematics.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

SUMÁRIO

Página

INTRODUÇÃO

Conquistemos a distância
Do mar, ou outra.
Mas que seja nossa.

(Fernando Pessoa)

O cerne desta pesquisa está em investigar a Geometria Euclidiana na formação inicial de futuros professores de Matemática, no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – UNEB, Campus X e tem por objetivo investigar, compreender e evidenciar as potencialidades didático-matemáticas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas nos processos de ensinar e aprender Geometria. A busca por essa investigação se justifica pela preocupação que sempre tive[1] com o ensino da Geometria, acreditando que trabalhá-la na formação inicial de professores é necessário e poderá ser resgatada por meio de uma nova metodologia de trabalho em sala de aula.

O quadro atual que vem se mostrando nos cursos de Licenciatura é que a maioria dos graduandos chega à universidade com pouco ou nenhum contato com a Geometria, pois raramente tem essa disciplina durante sua formação básica. Quando esta é abordada nos cursos de Licenciatura normalmente se apresenta com o caráter de revisão, o que é questionável, uma vez que muitos estudantes a estarão vendo pela primeira vez (PAVANELLO, 2007).

[1] Neste capítulo escrevo na primeira pessoa, pois falo da minha trajetória até o ingresso no doutorado.

Para desenvolver esta tese, inicialmente mostrarei todos os caminhos que percorri, desde minha trajetória estudantil até a chegada ao doutorado, na intenção de justificar minha aproximação com a Educação Matemática e a escolha por um Doutorado nessa área.

Desde minha trajetória estudantil bem como de minha trajetória docente e também nos cursos de pós-graduação (especialização e mestrado) sempre estive envolvida com a Matemática e, em particular com a Geometria. Entretanto, em minha atuação como professora, no Ensino Básico, sempre estive em busca de cursos que mostrassem diferentes metodologias de ensino, uma vez que me preocupava bastante com a aprendizagem dos alunos na área da Geometria. Muitas vezes, me sentia "impotente" quando, frente a uma aula de matemática, a ser ministrada por mim, não conseguia atingir os objetivos que me propunha. Percebia que os cursos que havia feito até então, não me davam subsídios para desempenhar melhor o meu papel de professor-educador.

i) Trajetória Estudantil

Sempre, desde o início de minha escolaridade, sentia um enorme fascínio pela Matemática, disciplina tão temida por muitos, mas que em mim causava um grande prazer e muita vontade de saber mais e mais sobre ela. Nas brincadeiras de criança brincava de "dar aula" de matemática. E como essa brincadeira preenchia o meu ego! Sempre eu era a professora.

Terminado o Curso Científico, correspondente ao Ensino do $2^{\underline{o}}$ grau, hoje Ensino Médio, em 1977, tive uma experiência na docência por um período de quatro anos. Isso foi possível porque a prefeitura da cidade admitia professores sem Licenciatura devido à falta de profissionais da área. A partir daí percebi que tinha certa inclinação para a docência e foi crescendo em mim a vontade de tornar-me efetivamente uma professora.

Em 1984 fui cursar Ciências com Habilitação em Matemática, na Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC, antiga Federação das Escolas Superiores de Ilhéus e Itabuna – FESPI, concluindo o curso em 1988. Na medida em que o curso avançava, cada vez mais me identificava com ele e o desejo de continuar lecionando foi se acentuando. Nesse período, dediquei-me exclusivamente aos estudos, sendo que, nas horas vagas, ministrava aulas particulares.

Durante minha trajetória acadêmica, enquanto aluna, pude perceber em muitos de meus professores, uma preocupação em cumprir o programa especificado para sua disciplina, isto é, somente em "passar o conteúdo" relativo a ela. Não havia, por parte deles, a preocupação com o processo de ensino-aprendizagem, nem com a formação do futuro professor. Deixavam essa tarefa quase que exclusivamente para as disciplinas pedagógicas como: Didática e Estágio Supervisionado, dentre outras.

ii) Trajetória como docente

Minha carreira profissional teve início em Posto da Mata, município de Nova Viçosa – BA, em fevereiro de 1979, quando fui admitida pela Prefeitura Municipal de Nova Viçosa, na condição de professora do Ensino Fundamental de 1ª a 4ª séries. Logo depois, no ano seguinte, surgiu a oportunidade de trabalhar como professora de Matemática de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental. Foi a partir dessas experiências como docente que surgiu em mim uma vontade muito grande de ingressar numa universidade e cursar Matemática.

Como já estava convicta de que continuaria minha carreira como docente, não hesitei e, logo após o curso de graduação, em 1989, fui admitida para ministrar aulas de Geometria, em uma classe de 3º ano do Ensino Médio, numa instituição particular, onde o objetivo primordial era o de preparar os alunos para o Vestibular, no contexto de aulas tradicionais. Nessa mesma escola também trabalhei Geometria no Ensino Fundamental, com o mesmo tipo de aula, embora, devido às minhas participações em encontros da SBEM-BA, pudesse levar sempre idéias novas para aplicar em sala de aula para essa disciplina.

Em 1990 fui para a Escola Pública do Ensino Médio, em Itabuna, BA, agora como professora concursada e onde permaneci até o ano de 2005. Nessa escola, fui professora de Matemática e raramente trabalhei Geometria, nada mais do que um pouco de Geometria Espacial – áreas e volumes de sólidos geométricos – e a Geometria Analítica – estudo do ponto e da reta. Nesse meio tempo, em 1994, fiz seleção para professor substituto na UESC – Universidade Estadual de Santa Cruz, BA, onde trabalhei até 1997.

Estando na UESC e, sempre em busca de novas formas de ensino, como também, à procura de novos cursos, em busca de aperfeiçoar e ampliar meus conhecimentos surgiu a oportunidade de cursar uma pós-graduação lato-sensu em Ciências Físicas e Matemáticas no período de janeiro de 1994 a fevereiro de 1996 e um Curso de Especialização em Análise e Geometria, que realizei no período de janeiro de 1997 a janeiro de 1998.

Assim, comecei minha carreira acadêmica como docente no Ensino Superior e, cada vez mais, almejava o concurso público no intuito de me tornar efetiva, até porque não mais me imaginava fora do Ensino Superior.

A experiência obtida na UESC como docente foi bastante significativa. Lá pude participar de várias atividades acadêmicas: Cursos de Extensão e Coordenação de Olimpíadas de Matemática do Sul e Sudoeste da Bahia. Fui membro da Comissão Organizadora do VII Encontro Baiano de Educação Matemática, dentre outras atividades.

Ao finalizar o contrato com a UESC, em 1998 surgiu um curso de nivelamento com o espírito de preparar professores para um mestrado em Matemática Pura. Já no segundo semestre de 1999, comecei a cursar o mestrado na UESC, em convênio com a Universidade Federal da Bahia – UFBA, finalizando-o em 2001.

Não demorou muito para que eu conseguisse subir mais um degrau de minha carreira profissional, que era o de ingressar definitivamente no Magistério Superior. No primeiro semestre de 2002 prestei concurso público para Professor na UESC e, também, na UNEB, com aprovação. Optei pela UNEB – Campus X[2], Teixeira de Freitas - BA, na qual estou atualmente, porém afastada para desenvolver meu Doutorado, na Universidade Júlio de Mesquita Filho – UNESP de Rio Claro.

Com toda essa vivência na docência, já estava convicta de que gostaria de fazer um Doutorado voltado para a formação de professores com enfoque na Geometria, devido à experiência que tive com essa disciplina. É o que relato na próxima seção.

iii) Minha relação com a Geometria

Em um bom período de minha prática educativa no Ensino Fundamental e Médio "ensinei" Geometria, o que foi para mim um desafio que exigiu muita leitura e muita reflexão sobre os tópicos que deveria ensinar, pois, ao terminar a graduação, não me sentia segura para lecionar essa disciplina, tanto no que diz respeito ao conhecimento científico – conhecimento da disciplina em termos de conteúdo – quanto aos procedimentos metodológicos para ensiná-la. Tive uma formação precária nesse ramo da Matemática em minha Licenciatura, que foi praticamente uma revisão da Geometria Plana, Espacial e Analítica vistas na Escola Básica. Tive a disciplina Desenho Geométrico na graduação, na qual fazíamos as construções geométricas no sentido de identificar propriedades. Entretanto, não havia, por parte do professor, preocupação em teorizar sobre tais figuras ou em nos fazer compreender suas propriedades geométricas e demonstrá-las.

A experiência de atuar como professora de Geometria foi extremamente significativa e fundamental em minha carreira na docência. Ela me abriu caminhos para que eu pudesse refletir acerca do seu ensino e aprendizagem, embora buscasse, cada vez mais, nos encontros

[2] UNEB – Universidade do Estado da Bahia. É uma universidade multicampi, por isso, a denominação Campus X.

dos quais participava, o porquê da negligência do ensino da Geometria nas escolas, principalmente as públicas.

Um fato que pude observar e que é seguro: o professor, em geral, tem consciência de que a Geometria está presente constantemente em nossa vida: na natureza, nos objetos que usamos, nas artes ... Entretanto, não se sente confiante para trabalhar esse ramo da Matemática. Falta-lhe uma eficiente clareza sobre "o quê" e "como" ensinar Geometria.

Agora, na condição de professora universitária, na convivência escolar com futuros professores de matemática, posso perceber também a dificuldade que sentem, como alunos, na aprendizagem da Geometria, apesar de a maioria deles ter consciência de sua importância para a formação do cidadão e acreditar que esse estudo possibilita ao aluno e, a todos, realizar investigações, resolver problemas, desenvolver o raciocínio e a criatividade. Infelizmente, o que comumente se vê é o "não ensino da Geometria" ou, quando ensinado, ser tratado de forma equivocada e superficial.

iv) Minha relação com a Educação Matemática

Como disse anteriormente, em boa parte de minha trajetória acadêmica estive envolvida com a Matemática Pura, mas sempre com certa tendência às questões inerentes à Educação Matemática. Então, a partir do momento em que ingressei na UNEB, no departamento de Educação, foi que me envolvi completamente com a educação e, em especial, a Educação Matemática.

Minha atuação como professora de *Estágio Supervisionado* e professora de *Instrumentação para o Ensino da Matemática* foi decisiva para que eu pudesse firmar laços permanentes com a educação. Essas disciplinas me deram a oportunidade de conhecer e estudar novos teóricos, como: Paulo Freire, Perrenoud, Terezinha Carraher e outros.

Nesse envolvimento com a educação, passei a me interessar mais pelos processos formativos dos professores e sua relação com a Educação Matemática. Tratava-se de uma preocupação em saber como se dá o processo de formação de professores e qual é sua implicação para o ensino da Geometria no Ensino Básico. Esta preocupação levou-me definitivamente a procurar um Doutorado em Educação Matemática. Via, nesse curso, apesar de não ter muitos fundamentos teóricos nessa área, a possibilidade de aprender mais como ocorria o processo de ensino e, também, o da aprendizagem da Geometria na formação de professores de matemática. E, assim, fui em busca desse ideal.

v) O Doutorado em Educação Matemática

Estando, como docente na UNEB, tive a oportunidade de conhecer alguns educadores matemáticos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Julio de Mesquita Filho – UNESP de Rio Claro, como o professor Sérgio Nobre, que esteve em nosso Campus para proferir uma palestra relacionada à História da Matemática no I Seminário de Pesquisa e Extensão do Extremo Sul da Bahia, em dezembro de 2002. Ao nos conhecermos, em uma conversa informal, convidou-me para prestar a seleção de doutorado na UNESP de Rio Claro. Como eu havia chegado recentemente na UNEB foi impossível aceitar o convite nessa ocasião.

Em julho de 2003, ao coordenar a I Semana de Matemática em nosso Campus tive o prazer de conhecer um outro educador matemático, o professor Luiz Roberto Dante que, em sua palestra, nos falou a respeito de Resolução de Problemas. Em conversa informal com o professor Dante, novamente ouvi falar do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro.

A partir daí já estava convencida de que gostaria de fazer o Doutorado em Educação Matemática na linha de pesquisa Formação do Professor de Matemática, enfocando o ensino da Geometria. Já decidida, ao participar, em julho de 2005, do XI Encontro Baiano de Educação Matemática, tive o prazer de conhecer os professores Rômulo Lins e a professora Laurizete Ferragut Passos, também educadores matemáticos da UNESP de Rio Claro, que me incentivaram a prestar seleção para o Doutorado.

Com todo esse incentivo atrelado à vontade que foi crescendo em mim de aprofundar nas questões relativas ao ensino e à aprendizagem da Matemática, em especial da Geometria, ingressei no programa de Educação Matemática na UNESP de Rio Claro como aluna regular em março de 2006, tendo como orientadora a professora Lourdes de la Rosa Onuchic.

Devido a essa aprovação fui liberada pela UNEB, em regime de tempo integral, com dedicação exclusiva às atividades do curso, durante todo o tempo previsto para sua duração. Estando na UNESP para a realização do curso, passei a ser um dos membros do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP – coordenado pela professora Lourdes de la Rosa Onuchic.

vi) Estrutura da Tese

Depois de retratar todo o histórico da minha trajetória para chegar ao Doutorado em Educação Matemática, cabe aqui, neste momento, situar o leitor do desenvolvimento de toda a pesquisa que desenvolvi durante esses quatro anos na UNESP.

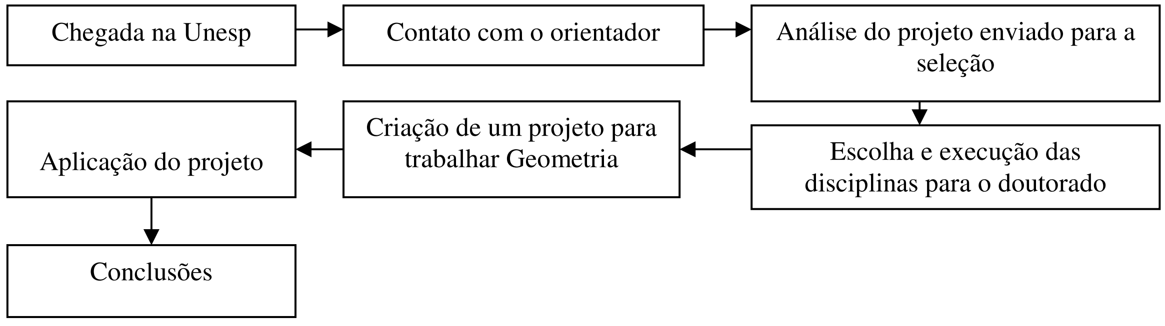
Para relatar o desenvolvimento desta pesquisa e seus resultados, organizamos a tese em cinco capítulos acrescidos de introdução, conclusões finais, referências e anexos. É uma pesquisa de natureza qualitativa e que esteve apoiada, em todo seu desenvolvimento, na Metodologia de Pesquisa de Romberg. Visto que fazer pesquisa é uma arte, esta arte se me apresentou como descrevo a seguir:

Na **Introdução**, relato minha trajetória desde a estudantil até chegar ao doutorado. Em conseqüência disso, em linhas gerais, justifico minha relação com a Geometria, meu objeto de estudo, e com a Educação Matemática. Na sequência, esclareço o conteúdo de cada capítulo, seguindo as dez atividades propostas por Romberg, em sua sequência, para o desenvolvimento de uma pesquisa.

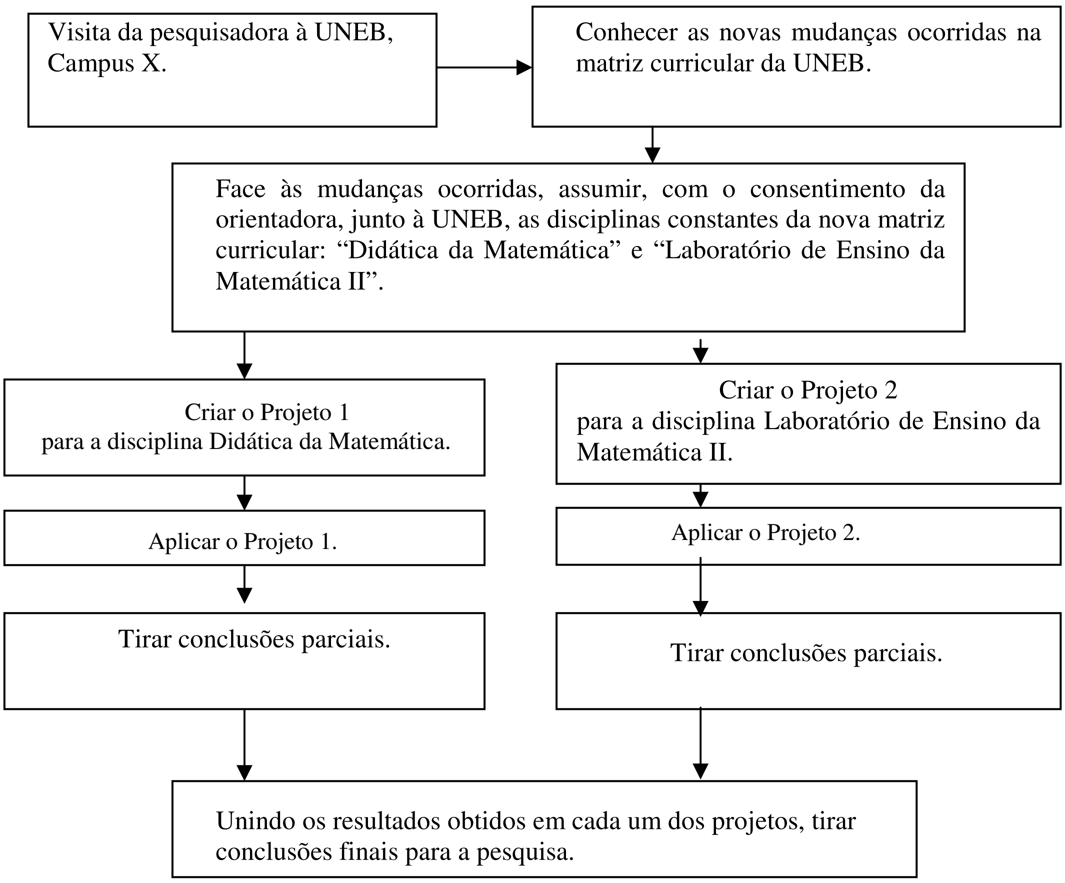
No **Capítulo 1**, intitulado Metodologia de Pesquisa, traço um panorama geral do que significa pesquisar em Educação Matemática até chegar à metodologia adotada por mim, para desenvolver esta pesquisa. Todo esse panorama foi necessário para minha formação nessa área, pois buscava compreender o que significava realizar pesquisa, principalmente em Educação Matemática, haja vista que, como já disse em minha trajetória, fiz um Mestrado em Matemática Pura no qual não havia uma preocupação presente com questões metodológicas para o desenvolvimento da pesquisa. Prosseguindo, apresento e discuto as ideias principais da Metodologia de Pesquisa de Romberg, a metodologia por mim adotada e, por último, situo o leitor de como foi planejada toda a pesquisa a partir das atividades propostas por Romberg.

Essa metodologia dispõe de dez atividades distribuídas em três blocos, assim denominados: 1º Bloco – A identificação do Problema de Pesquisa, correspondente às atividades de 1 a 4; 2º Bloco – Buscando uma resposta ao Problema da Pesquisa, correspondente às atividades 5 e 6; e 3º Bloco – Coletar evidências e tirar conclusões, correspondente às atividades de 7 a 10.

Como nosso Fenômeno de Interesse nessa pesquisa é trabalhar a Geometria Euclidiana na formação inicial de futuros professores de Matemática, busquei esboçar um Modelo Preliminar que pudesse me fornecer um particular caminho que indicasse os possíveis passos para desenvolver a pesquisa.



Devido a mudanças curriculares ocorridas na Uneb, o Modelo Preliminar sofreu alterações passando a um Modelo Modificado 1 e, frente a novas mudanças, formou-se o Modelo Modificado2, que sinteticamente se apresentou assim:



No **capítulo 2**, a partir do que outros pensam sobre o Fenômeno de Interesse e o Modelo Modificado 2, procurei chegar até as perguntas que, juntos, pudessem definir o Problema da pesquisa. Nessa busca, atendendo as variáveis do Modelo Modificado 2 construído, surgiram três eixos temáticos que passaram a apoiar o desenvolvimento desta pesquisa: A Didática da Matemática na Formação de Professores; 2) A Resolução de Problemas na Formação de Professores; e 3) A Geometria na História e seu Ensino-Aprendizagem. Depois de toda essa análise feita, após o relacionar com ideias de outros, o Problema desta pesquisa pôde ser identificado ao longo de três questionamentos:

1) Como a Geometria Euclidiana, através da resolução de problemas, pode contribuir para a formação matemático-pedagógica do professor?

2) Como a necessidade de um conhecimento didático aliado a um conhecimento matemático, fazendo-se uso de uma metodologia alternativa de trabalho em sala de aula, pode influenciar e contribuir com eficiência na formação inicial de professores?

3) Como compreender o processo ensino-aprendizagem da geometria através da resolução de problemas sob a perspectiva didático-matemática na formação inicial de professores?

Sem perder de vista o fenômeno de interesse e querendo responder aos questionamentos levantados no capítulo 2, foi idealizada uma Estratégia Geral e o seu correspondente Procedimento Geral. A Estratégia Geral ficou assim definida: "Utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, criar dois projetos: um para a Didática da Matemática (P_1) e um de ensino de Geometria Euclidiana, para o Laboratório de Ensino de Matemática II (P_2) , para aplicação em sala de aula.

Assim, o **capítulo 3** foi construído. A criação desses projetos, seguidos por um roteiro de atividades, fundamentado em textos esclarecedores sobre a importância da Didática na formação de futuros professores, em textos que se falava sobre currículo e sobre metodologias de trabalho em sala de aula e, dentre essas metodologias, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Também, textos sobre Laboratório de Ensino de Matemática, sobre a Geometria das Transformações e sua aplicação foram produzidos para a disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II. Além dos textos apresentados no roteiro de atividades, foram apresentados problemas, como ponto de partida, para que se pudesse construir novos conceitos e novos conteúdos matemáticos.

Depois da criação dos Projetos restava aplicá-los com o intuito de poder responder as questões levantadas no capítulo 2. Como recurso metodológico para aplicação desses projetos foi utilizada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Dessa aplicação pôde-se analisar e interpretar as informações coletadas que identificaram as evidências que permitiram responder às perguntas do Problema de Pesquisa.

O **capítulo 4** constitui-se do relato da aplicação do projeto da disciplina Didática da Matemática, formado por quinze encontros com alunos de uma turma do 4º período do curso de Licenciatura em Matemática da UNEB/Campus X, situado em Teixeira de Freitas – BA. O capítulo foi organizado pela descrição e análise de cada encontro. No final do capítulo foram apresentadas conclusões parciais dessa coleta de evidências.

O **capítulo 5** seguiu os mesmos moldes do capítulo anterior. Porém, o relato, agora, se dá com a aplicação do Projeto da disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II, com a mesma turma de alunos. Após todo esse relato, buscando analisar e interpretar cada encontro, foram apresentadas, também, as conclusões parciais do que ficou evidente.

Por fim, nas **Conclusões Finais**, procurando conjugar os dois projetos aplicados, houve uma retomada às questões levantadas, buscando respondê-las. São apontadas algumas contribuições que essa pesquisa trouxe para a formação inicial de futuros professores e, ainda, para a Educação Matemática. Finalizando, é feita uma breve reflexão sobre o trabalho produzido, as considerações a respeito dos projetos, suas aplicações e possíveis implicações.

Seguindo Romberg, o trabalho foi escrito, relatado e deixado, como antecipação, para o julgamento e possível utilização de outros educadores.

CAPÍTULO 1 – METODOLOGIA DE PESQUISA

Ao iniciar o Doutorado me[3] deparei com alguns termos usados na Educação Matemática que se tornaram objeto de estudo para mim. Precisava compreender como se produzia uma pesquisa em Educação Matemática, pois como disse anteriormente, fiz um mestrado em Matemática, e lá não senti uma preocupação com metodologias para se desenvolver uma pesquisa. Portanto, este capítulo tem por objetivo apresentar a metodologia de pesquisa, na qual, inicialmente, abordo como compreendo o significado de uma metodologia de pesquisa, sobretudo, na Educação Matemática; o que significa pesquisa em Educação Matemática; as diferentes metodologias de pesquisa; a escolha de uma metodologia de pesquisa e como me situei dentro da metodologia de pesquisa escolhida.

1.1. Compreendendo o significado de uma Metodologia de Pesquisa

Em uma de minhas primeiras leituras, para tentar compreender a maneira como se realiza uma pesquisa em Educação Matemática, encontrei respostas nas palavras de Fiorentini e Lorenzato (2006), ao fazerem a distinção entre o matemático e o educador matemático quanto à produção de conhecimentos:

> [...] os *matemáticos*, de um lado, estão preocupados em desenvolver pesquisas por meio de processos hipotético-dedutivos que possibilitam o desenvolvimento da Matemática pura e aplicada, enquanto que os *educadores matemáticos* desenvolvem pesquisas utilizando métodos interpretativos e analíticos das Ciências Sociais e Humanas tendo, como perspectiva, o desenvolvimento de práticas pedagógicas que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor (FIORENTINI e LORENZATO, 2006, p. 4).

[3] Em quase todo o capítulo foi usado a primeira pessoa por se tratar de ações realizadas pela autora da pesquisa.

Uma conseqüência dessa afirmação, feita pelos autores, tem reflexo no desempenho desses profissionais de ensino ao atuarem. O *matemático,* quando requerido para atuar na formação de professores de matemática, tende a promover uma educação priorizando seus conteúdos formais e uma prática voltada à formação de novos pesquisadores em matemática. Por outro lado, o *educador matemático* tende a conceber a matemática como um meio ou um instrumento importante à formação intelectual e social de crianças, jovens e adultos e, também, do professor de matemática do Ensino Fundamental e Médio. Por isso, tenta promover uma educação pela matemática.

Estando consciente de que estava dentro de uma comunidade de pesquisadores em Educação Matemática, senti necessidade de saber como se desenvolve pesquisa nessa área. Meu primeiro contato com metodologia de pesquisa, no campo da Educação Matemática, deu-se quando ingressei neste programa de Doutorado. Ao longo dos anos, em boa parte de minha vida acadêmica e profissional havia trabalhado na área de Ciências Exatas (Matemática). A pesquisa que desenvolvi no Mestrado tinha uma abordagem própria a essas ciências. Embora Matemática e Educação Matemática tivessem em comum a Matemática, não havia, na primeira, preocupação com a identificação da metodologia que pudesse conduzir o trabalho a ser investigado. Assim, minha primeira preocupação, em meu processo de Doutorado, foi a de reconhecer a importância da escolha de uma metodologia para orientar e desenvolver meu trabalho e compreender todo esse processo.

Ao ler a citação de Fiorentini e Lorenzato (2006) comecei a compreender essa distinção e tendo consciência dessa falha em minha formação procurei, a partir daí, buscar subsídios teóricos que me levassem a compreender melhor o que viria a ser a Metodologia de Pesquisa em Educação Matemática. Sendo assim, depois de algumas leituras sobre tal tema e na convivência com minha orientadora e com o grupo GTERP[4]- Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – como também na participação dos Seminários da Pós aos poucos fui percebendo essa diferença. A Matemática e a Educação Matemática possuem objetos distintos de estudo, cada qual com sua problemática específica, tendo suas próprias questões investigativas.

Meu passo seguinte foi o de buscar alguns fios condutores que me permitissem compreender o termo “metodologia de pesquisa”. O primeiro fio condutor, a meu ver, seria entender o significado da palavra “pesquisa”.

---

[4] Este grupo, coordenado pela professora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, se reúne semanalmente desde 1992 e um dos aspectos marcante de sua filosofia de trabalho é buscar incessantemente desenvolver estudos que efetivamente atinjam a sala de aula, ou seja, que estejam relacionados com questões de ensino-aprendizagem-avaliação tanto sob a perspectiva do aluno quanto do professor.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p.60), de uma forma mais abrangente, a definição para o termo "pesquisa" é:

> [...]um processo de estudo que consiste na busca disciplinada/metódica de saberes ou compreensões acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou diz a respeito.

Ampliando um pouco mais o significado de pesquisa, em se tratando de Educação Matemática, as pesquisas procuram enfocar os núcleos de preocupações com a compreensão matemática, com o fazer matemática, "com as interpretações elaboradas sobre os significados sociais, culturais e históricos da Matemática. Deve ser mencionado também que é preocupação da Educação Matemática a ação político-pedagógica" (BICUDO, 1993, p.19).

Para Romberg (1992, p. 51):

> O termo *pesquisa* refere-se a processos – a coisas que se faz, não a objetos que alguém pode tocar e ver. Além disso, fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que se seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada. As atividades envolvidas em fazer pesquisa incorporam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica. Como em todas as artes, há um consenso em um sentido amplo sobre que procedimentos devem ser seguidos e o que é considerado como um trabalho aceitável. Esses consensos surgem dos relacionamentos do dia-a-dia dos pesquisadores.

O segundo fio condutor, que pôde dar mais consistência ao ponto a que pretendo chegar, seria entender o que significa "pesquisa científica". Nesse sentido, apoiei-me em Goldenberg (1997) ao afirmar que toda pesquisa científica exige, do pesquisador, disciplina, criatividade, organização e modéstia, baseando-se no confronto permanente entre o possível e o impossível, entre o conhecimento e a ignorância. Além disso, fazer pesquisa exige de nós, pesquisadores, que aprendamos a pensar cientificamente, a sermos reflexivos, curiosos, indagadores.

Seguindo esse novo fio condutor busco agora compreender o que vem a ser Metodologia de Pesquisa, especificamente em Educação Matemática.

1.2. A metodologia de pesquisa na Educação Matemática

Em boa parte de minha trajetória, seja acadêmica ou profissional, sempre estive em contato com a Matemática Pura, mesmo tendo uma grande preocupação com os problemas do ensino-aprendizagem da Matemática. Esse fato talvez venha a justificar o porquê da minha insistência aqui neste capítulo em tentar esclarecer estes novos termos usados no âmbito da Educação Matemática.

Como diz Goldenberg (1997), falar de “metodologia de pesquisa” significa buscar um caminho a seguir, que seja possível para a pesquisa científica. Nesse caminhar, em busca de um modo de desenvolver minha pesquisa, um outro fio condutor, que me levaria efetivamente a compreender que rumos deveria seguir, foi o de compreender o termo “Educação Matemática”. Ao optar por um curso de Doutorado em Educação Matemática, precisava ter em mente, mesmo que fosse de maneira empírica, o que vinha a ser esse termo. A princípio pensava, de uma forma bastante generalizada, que a Educação Matemática era uma área da Educação preocupada com o ensino-aprendizagem da Matemática, envolvendo, nesse contexto, alunos e professores.

Sinteticamente, poderia dizer que sua origem está na Matemática e que seu desenvolvimento se deu devido às preocupações educacionais com a Matemática, com o intuito de melhorar a compreensão das idéias matemáticas e do modo de pensar matemático, de como a criança constrói conceitos matemáticos, de como o professor e os materiais didáticos disponíveis podem auxiliar nessa assimilação. (DANTE, 1991, p.46-47).

Além disso, Dante ainda configura a Educação Matemática de uma forma mais ampla

> Como um campo amplo e sem restrições bem definidas, mas cujo núcleo é a Matemática de onde partiram estudos sobre a importância de seu ensino (objetivos), o que é relevante ensinar nos vários níveis (conteúdos, currículos), como ensiná-la, como vê-la num contexto histórico-sócio-cultural, que materiais instrucionais são adequados no processo do seu ensino e aprendizagem, onde e como pode ela ser aplicada no dia-a-dia e nas outras áreas do conhecimento, como pode ou não contribuir com uma filosofia de educação transformadora, como é encarada e desenvolvida por grupos étnicos diferentes, qual é o impacto que sofreu com o desenvolvimento acelerado da tecnologia (computadores), como os aprendizes assimilam, constroem e desenvolvem conceitos matemáticos (teorias da aprendizagem), como os professores podem auxiliar os aprendizes a assimilar, construir e desenvolver conceitos matemáticos (formação e atualização de professores), como o relacionamento e a cooperação social influi na aprendizagem da Matemática, como avaliar o desempenho matemático das pessoas, como a história da Matemática e a história em geral podem auxiliar a compreender a evolução dos conceitos matemáticos.

A Educação Matemática como um campo relativamente novo, hoje é vista mundialmente como uma área de conhecimento das Ciências Sociais e Humanas que estuda o ensino e a aprendizagem da Matemática possuindo um leque de áreas do conhecimento relacionadas a ela como a Filosofia, a própria Matemática, a Psicologia, a Sociologia, a Lingüística, a Semiótica e a Antropologia, dentre outras.

Kilpatrick (1992) já reconhecia a Educação Matemática como um campo de estudo. Segundo ele, apesar desse campo ter se desenvolvido ao longo do século dezenove de forma lenta, as universidades – lugar onde se originou a investigação em Educação Matemática –

começaram a ampliar seus programas de formação de professores devido à necessidade de uma maior quantidade de professores melhor preparados.

De acordo com os fatos históricos de Kilpatrick (1992, p. 5):

> Com o tempo, e de maneira um tanto diferente nos diversos países, a Educação Matemática chegou a ser reconhecida como um tema de estudo a nível universitário. Esperava-se, então, que as pessoas comprometidas com a formação de professores de matemática dentro da universidade, não somente deviam ensinar, mas também fazer investigação. Isso gerou o começo da atividade investigativa em educação matemática.

Duas disciplinas tiveram uma influência fecunda na investigação em Educação Matemática. A primeira foi a própria Matemática, criando assim um grande interesse dos matemáticos em realizar pesquisas nessa área enquanto que os educadores matemáticos passaram a realizar estudos históricos e filosóficos, investigações e eventualmente outro tipo de investigação empírica.

A segunda influência, importante na investigação em Educação Matemática, foi a Psicologia. No começo do século XX os institutos de Psicologia na Alemanha e os departamentos de Psicologia nos Estados Unidos começaram a realizar estudos empíricos em educação. A Psicologia passou a ser uma "ciência central" da escola e, portanto, uma parte central do currículo da escola regular.

D'Ambrosio (2004, p.11), ao prefaciar o livro "Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática", nos remete à história da Educação Matemática e tomando por base esses estudos desde a Antiguidade, particularmente na República VII de Platão, afirma que já existia uma preocupação da sociedade com a educação dos jovens em se tratando do ensino da Matemática, mas somente a partir das três grandes revoluções da modernidade, a Revolução Industrial, a Revolução Americana e a Revolução Francesa, é que as preocupações com a Educação Matemática começaram a tomar um rumo próprio. Somente nos fins do século XIX e início do século XX é que a Educação Matemática emergiu como uma área prioritária na Educação devido aos esforços de grandes matemáticos, pesquisadores na área de educação e cientistas. Dentre eles, podemos destacar John Dewey que, em seu livro *Psicologia do número* (1895), numa reação contra o formalismo, propõe uma relação não tensa, mas cooperativa, entre aluno e professor e uma integração entre todas as disciplinas. Relata, também, que o alemão Felix Klein, em 1908, ao publicar seu livro *Matemática elementar de um ponto de vista avançado,* diz que o professor deve ser um diplomata, levando sempre em conta o processo psíquico do aluno, para poder adquirir seu interesse. Afirma que o professor só terá sucesso se apresentar as coisas numa forma intuitivamente compreensível. Felix Klein, nesse mesmo ano, também coordena o Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Roma, onde se dá, com a fundação da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI), a efetiva consolidação da Educação Matemática como uma subárea da Matemática e da Educação, de natureza interdisciplinar.

É oportuno adicionarmos a essa história da Educação Matemática a figura dos professores, considerados os primeiros educadores matemáticos no Brasil, Malba Tahan e Euclides Roxo. Para Leite Lopes (2000, p. 5), em entrevista à revista "*Educação Matemática em Revista"*, esses personagens são os pioneiros da Educação Matemática no Brasil. Malba Tahan como um dos precursores da metodologia de resolução de problemas e Euclides Roxo, pela sua obra didática e, principalmente, pelo seu livro *A Matemática na Escola Secundária* da Coleção Pedagogia Brasileira, Cia Editora Nacional, Rio de janeiro, 1937.

Corroborando com as palavras de Leite Lopes, Pitombeira (2003) diz que o livro *A Matemática na Escola Secundária* ressalta o conhecimento que Euclides Roxo tinha da literatura sobre Educação Matemática e sobre o ensino de Matemática utilizada na época, em que ele sistematizava e sintetizava suas ideias já anteriormente expostas em uma série de artigos em jornais, conferências e no prefácio do I volume da Coleção Curso de Matemática Elementar. Pitombeira, ainda afirma que, em vários trechos desse livro fica notória a influência marcante do pensamento de Félix Klein sobre Euclides Roxo, quando ele o cita frequentemente.

1.3. Conhecendo diferentes metodologias de pesquisa

Pensando na definição de pesquisa já vista anteriormente e nos estudos feitos sobre diferentes metodologias, em particular a metodologia de pesquisa em Educação Matemática, podemos distinguir uma variedade de enfoques a que se dão privilégios quer nos aspectos quantitativos quer nos aspectos qualitativos.

Seguindo D'Ambrosio (2004), passo a apresentar algumas considerações, em linhas gerais, sobre duas vertentes de pesquisa: a pesquisa quantitativa e a pesquisa qualitativa. A primeira delas também chamada *pesquisa estatística*, como o nome já diz, lida com um grande número de indivíduos. É necessária a ajuda da Estatística para a análise dos dados coletados. Já a pesquisa qualitativa, também chamada de *pesquisa naturalística*, busca entender e interpretar dados e discursos, mesmo envolvendo grupos de participantes.

> A pesquisa quantitativa é ideal quando estamos interessados no comportamento de uma massa muito grande de indivíduos na avaliação de programas de massa. Por exemplo, quantos indivíduos se matricularam e quantos evadiram. Mas, sobre como

> aumentar as matrículas e diminuir a evasão nenhuma pesquisa quantitativa pode ajudar. A pesquisa qualitativa lida e dá atenção às pessoas e as suas idéias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas (D'AMBROSIO, 2004, p.21).

Analisando as palavras de D'Ambrosio, percebemos que certas pesquisas ora se apresentam de natureza quantitativa, ora de natureza qualitativa, a depender do problema e de sua abrangência.

As pesquisas qualitativas começaram a se desenvolver na década de 70 quando um grande número de investigadores educacionais começou a perceber que as investigações quantitativas já não atingiam resultados esperados, elas haviam atingido o seu limite, dando, dessa forma, espaço para a investigação qualitativa. Este fato foi observado por Bogdan e Biklen (1991), no prefácio de seu livro, ao falarem da investigação qualitativa:

> Um campo que era dominado pelas questões de mensuração, definições operacionais, variáveis, testes de hipótese e estatística dá lugar a um campo de investigação que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais. Designamos esta abordagem por "Investigação Qualitativa". A influência dos métodos qualitativos no estudo de várias questões educacionais é cada vez maior. Muitos dos investigadores educacionais manifestam uma atitude positiva face às mudanças que se têm vindo a verificar nas estratégias de investigação, contemplando a abordagem qualitativa tanto em nível pedagógico como em nível da condução da investigação (BOGDAN; BIKLEN,1991, p.11).

Além do mais, essas pesquisas partem do pressuposto de que as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores e que seu comportamento tem sempre um sentido que não se dá para conhecer de modo imediato, mas precisa ser desvelado (ALVES-MAZZOTTI,1998).

Uma característica fundamental nas pesquisas qualitativas, segundo Alves Mazzotti (1998) refere-se ao contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e o fenômeno que está sendo investigado. O pesquisador precisa estar imerso neste ambiente, ele é um dos principais instrumentos de investigação. Daí decorre, também, outras características predominantes numa investigação qualitativa: descrição detalhada de situações, eventos, pessoas, interações e comportamentos observados, citações literais do que as pessoas falam sobre suas experiências, atitudes crenças e pensamentos.

São também características básicas que configuram uma pesquisa qualitativa, segundo Bogdan e Biklen (1991, p. 47-50)

> 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; 2. A investigação qualitativa é descritiva; 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Em suma, a investigação qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatizando mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes. Entre as várias formas que podem ser assumidas numa pesquisa qualitativa, destacam-se a pesquisa do tipo etnográfico, a pesquisa fenomenológica, o estudo de caso, a pesquisa-ação, dentre outras.

Compreendido o significado de uma pesquisa em Educação Matemática e conhecidos os vários métodos de pesquisa associados a uma pesquisa qualitativa nas Ciências Sociais, pude, confortavelmente, assumir a abordagem metodológica com a qual esta investigação se desenvolverá. Ela tem uma abordagem qualitativa que será delineada seguindo as orientações metodológicas apresentadas por Thomas A. Romberg (1992), em seu artigo intitulado: "*Perspectives on Scholarship and Research Methods*". Sendo assim, sucintamente apresento as idéias principais de seu artigo e, dando continuidade, pretendo situar o leitor, em todo o processo desta pesquisa, através do fluxograma por ele apresentado nas dez atividades sugeridas para sua realização.

1.4. A metodologia de pesquisa de Romberg

Romberg (1992), em seu artigo, pretende identificar, nas Ciências Sociais, as amplas tendências de pesquisa que estão relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem em ambientes escolares e determinar como essas tendências têm influenciado o estudo de matemática nas escolas. No intuito de compreender a base dessas tendências ele (1) descreve alguns aspectos da Educação Matemática como um campo de estudo, (2) esboça dez atividades para serem desenvolvidas pelos pesquisadores e (3) faz um breve resumo de uma variedade de métodos de pesquisa utilizados.

1.4.1. A Educação Matemática como um campo de estudo

Para Shulman (1988, citado por Romberg, 1992) educação não é por si só uma disciplina, mas um campo de estudo, ou seja, um local que contém fenômenos, eventos, instituições, problemas, pessoas e processos que constituem a matéria-prima para investigações de vários tipos.

Romberg, apropriando-se das palavras de Shulman, também considera a Educação Matemática como um campo de estudo. Sendo assim, ele apresenta um diagrama – o diagrama da matemática escolar de E.G. Begle (1961) – que ilustra a interrelação dos componentes no processo da educação escolar e a necessidade de perspectivas e procedimentos múltiplos.

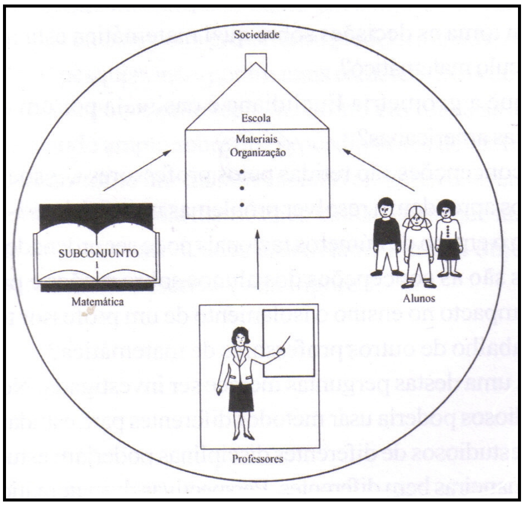


Figura 1 – Diagrama de Begle: a relação de sociedade, matemática, alunos, professores e escolarização

Nesse diagrama, o empreendimento de escolaridade está situado em um contexto social; o currículo das Ciências Sociais envolve um subconjunto da Matemática, e o ensino é conduzido por um professor com um grupo de alunos dentro de uma sala de aula durante algum tempo. Tudo isso, objetivando preparar o aluno para viver em sociedade.

O diagrama de Begle foi esboçado para apresentar um ponto de vista a respeito do ensino de matemática por meio do desenvolvimento de cinco pontos básicos:
As escolas foram *criadas por grupos sociais* para preparar os estudantes para serem membros de uma sociedade.
Um ensino de matemática *forte* é abordado desde uma preocupação sobre que idéias de matemática são ensinadas e que usos são indicados.
O ensino de matemática pode ser *eficiente* se o aprendiz for levado em consideração.
Um ensino de matemática *eficiente* pode ser realizado através da consideração de aspectos de escolaridade.
Os professores são os *gerentes* e os *guias* que fazem o processo educacional funcionar.

1.4.2. As atividades dos pesquisadores

Romberg (1992, p.51), preocupado com o ensino e aprendizagem de Matemática, descreve algumas orientações metodológicas para se realizar uma pesquisa. Para isso, ele apresenta um modelo, em forma de fluxograma, com dez atividades essenciais para o desenvolvimento de uma pesquisa, que tem por objetivo orientar o pesquisador a investigar, a planejar e a desenvolver o seu trabalho, ressaltando que, apesar dessas atividades serem apresentadas sequencialmente, não necessariamente precisam seguir essa ordem.

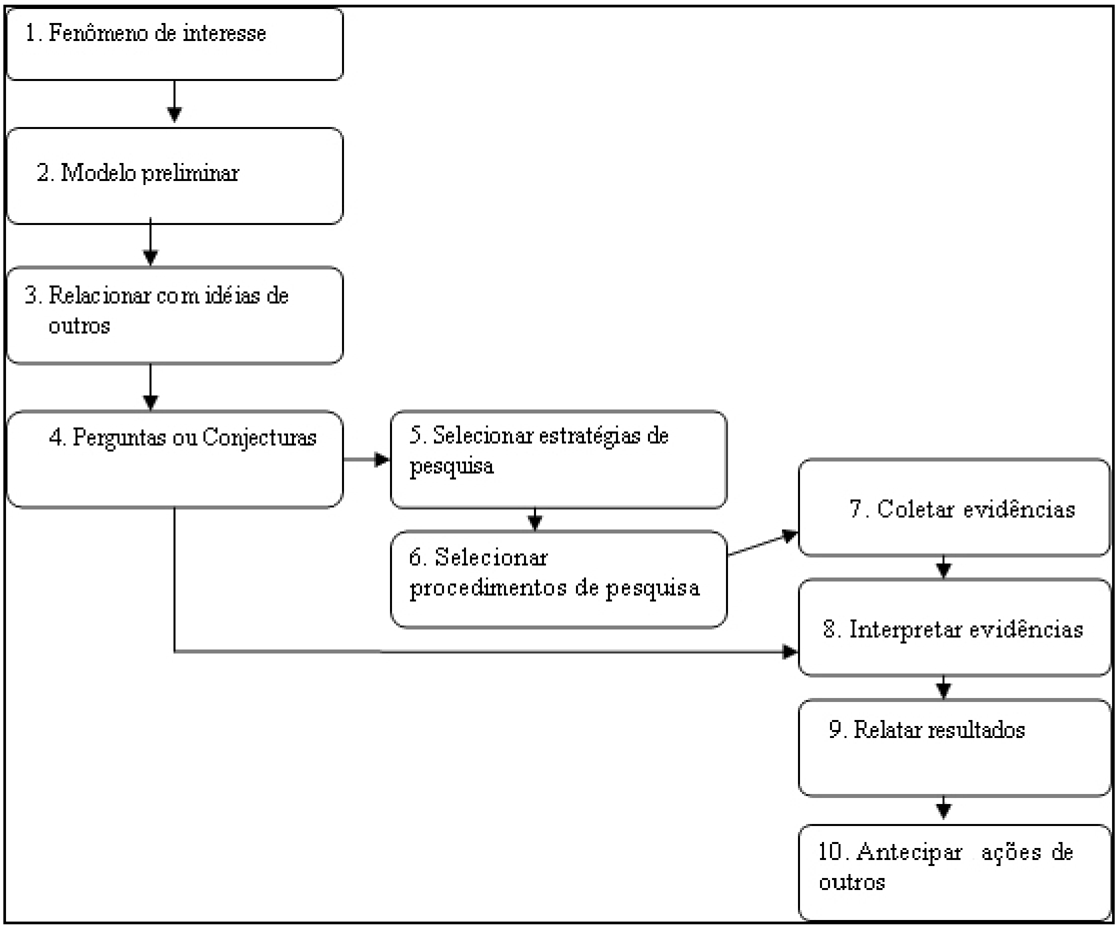


Figura 2 – As atividades dos pesquisadores

Como se pode perceber, nesse fluxograma, não há nada de exclusivo, pois quase todos os textos que se referem a métodos de pesquisa apresentam um conjunto de atividades semelhantes. Entretanto, Romberg chama a atenção para o fato de que essas atividades estão sendo colocadas para chamar a atenção para alguns dos problemas comuns que pessoas não familiarizadas com pesquisa enfrentam na compreensão de seu processo.

O fluxograma apresentado por Romberg constitui-se de três momentos na pesquisa: O primeiro bloco – atividades 1 a 4 – é considerado, por ele, o mais importante, pois essas atividades são envolvidas com situar as idéias de alguém sobre um particular problema no trabalho de outros estudiosos e decidir o que investigar. É o momento de identificação do problema de pesquisa. O segundo bloco – atividades 5 e 6 – é compreendido como a busca da solução do problema de pesquisa, ou seja, essas atividades envolvem a tomada de decisões sobre que tipo de evidência coletar e como deve ser feita essa coleta; e o terceiro bloco –

atividades 7 a 10 – refere-se a coletar dados para, então, dar sentido às informações coletadas, relatar os resultados e apresentá-los para outros pesquisadores.

1.4.3. Métodos usados por pesquisadores

Para Romberg, as decisões sobre que métodos de pesquisa utilizar são tomadas como uma consequência das atividades 1 a 4, do modelo proposto por ele. Dado esse aviso, há dois aspectos para o uso do termo *métodos de pesquisa* que precisam ser compreendidos. Primeiro, os métodos específicos discutidos na literatura de pesquisa podem incluir a maneira como a informação é coletada, o modo como ela é agregada e analisada, ou, às vezes, como ela é relatada. Segundo, os métodos atuais que um pesquisador usa para coletar evidências dependem de pelo menos cinco fatores: visão de mundo, a orientação do tempo das perguntas a serem feitas, se a situação existe atualmente ou não, a fonte de informação prevista e o julgamento do produto. A *visão de mundo* situa os métodos usados dentro das crenças de uma particular comunidade de estudo. *A orientação do tempo* refere-se às perguntas que estão sendo levantadas, se dirigidas ao passado, ao presente ou ao futuro. Saber se as S*ituações* existem ou precisam ser criadas. As *fontes de evidência* devem ser tanto artefatos (livros, falas e coisas semelhantes), respostas a perguntas ou observações de ações. *Julgamento* refere-se a avaliar estudos como uma categoria distinta de métodos de pesquisa.

Um grande número de métodos específicos de pesquisa existente na literatura está baseado nesses cinco fatores ou fazem uso deles. Dentre eles, Romberg categoriza alguns métodos de pesquisa: Métodos usados com uma evidência existente e Métodos usados quando uma situação existe e a evidência deve ser desenvolvida. Ele ressalta que, diante desses métodos, o pesquisador tem controle sobre a forma pela qual a informação é coletada e agregada.

Terminando seu artigo, Romberg (1992) pôde identificar cinco amplas tendências de pesquisa nas Ciências Sociais, assim descritas: 1) crescimento de pesquisa; 2) crescente diversidade em métodos de pesquisa; 3) uma mudança na epistemologia; 4) uma mudança na psicologia da aprendizagem; e 5) o crescimento da consciência política[5].

---

[5] Para conhecimento dessas tendências, consultar a tradução desse artigo de Romberg (1992), que se encontra no BOLEMA, nº 27, traduzido por Onuchic e Boero (2007).

1.5. Situando a pesquisa no Modelo de Romberg

Para Romberg (1992), o primeiro bloco, o da identificação do problema, atividades 1,2, 3 e 4, é o mais importante, pois ele define o que se quer investigar. No segundo bloco, as atividades 5 e 6 envolvem tomadas de decisão necessárias para responder à pergunta da pesquisa ou defender um conjectura levantada. No terceiro bloco, a atividade 7 cuida de coletar evidências e as três últimas têm a ver com o dar sentido às informações coletadas, a relatar os resultados obtidos e a apresentar seu trabalho para outros.

1.5.1. Fenômeno de Interesse

Toda pesquisa, como diz Romberg, começa com uma curiosidade do pesquisador que se apresenta como ponto de partida para uma investigação. Esta afirmação, nesse modelo, refere-se à primeira atividade, **o Fenômeno de Interesse** que, normalmente na Educação Matemática, envolve alunos e professores em discussões sobre como os alunos aprendem, como interagem com a Matemática e como os professores planejam seu ensino, entre outras questões.

Concordando com as palavras de Romberg no que se refere ao Fenômeno de Interesse, entendo que o termo "fenômeno" refere-se a um fato ou evento de interesse científico, que pode ser descrito e explicado cientificamente. Dessa forma, meu Fenômeno de Interesse surgiu a partir do momento em que eu, ao atuar como professora de Estágio Supervisionado da Universidade em que trabalho, comecei a perceber, nos vários encontros e diálogos travados com os alunos, certo desconforto dos alunos estagiários quando se falava de Geometria. Além disso, percebi, no desenvolvimento dos projetos de estágio, que temas relacionados à Geometria eram negligenciados.

A partir desses fatos minha inquietação em relação ao ensino da Geometria se acentuou e, ao enviar meu projeto para ingressar no curso de doutorado em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, emergiu o meu Fenômeno de Interesse:

A geometria euclidiana trabalhada com alunos egressos do curso de Licenciatura em Matemática da UNEB

1.5.2. O Modelo Preliminar

Para Romberg (1992), o Modelo Preliminar constitui-se de um fluxograma que mostra aspectos importantes, como as variáveis do Fenômeno de Interesse e como estes aspectos estão relacionados. Além disso, esse modelo é simplesmente um conjunto de descrições de variáveis-chave e as relações implícitas entre elas. Partindo do Fenômeno de Interesse, um

Modelo Preliminar, com o intuito de orientar o processo de desenvolvimento da pesquisa e de forma que pudesse me levar a trabalhar sobre ele, foi construído. Compreendendo que o Modelo Preliminar reflete a idéia inicial do pesquisador sobre o Fenômeno de Interesse que se pretende estudar, estabeleceu-se o seguinte modelo:

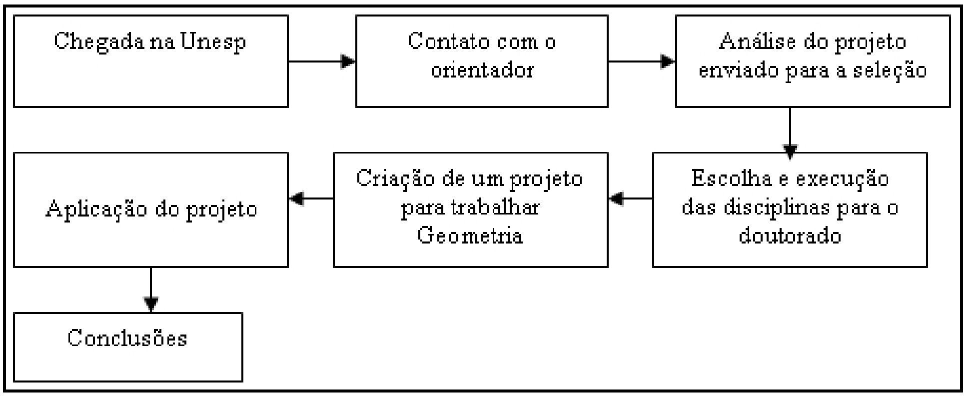


Figura 3 – Modelo Preliminar

Como se pode ver, é um modelo bastante simples e que pode ser relatado resumidamente. Depois de aprovada no Exame de Seleção e aceita no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, entrei em contato com minha orientadora e, a partir daí, comecei a cursar disciplinas do curso por um período de um ano e meio. Junto com minha orientadora voltamos a analisar o projeto, que havia sido enviado para a Seleção, para possíveis mudanças e, dessas mudanças, surgiu a ideia da criação de um projeto para trabalhar Geometria Euclidiana com professores egressos da UNEB e, posteriormente, aplicá-lo para, assim, tirar as devidas conclusões. Vale ressaltar que esses professores já haviam estudado Geometria dentro da disciplina Fundamentos de Matemática. O projeto pretendido seria criado de acordo com a matriz curricular do curso aqui apresentada:

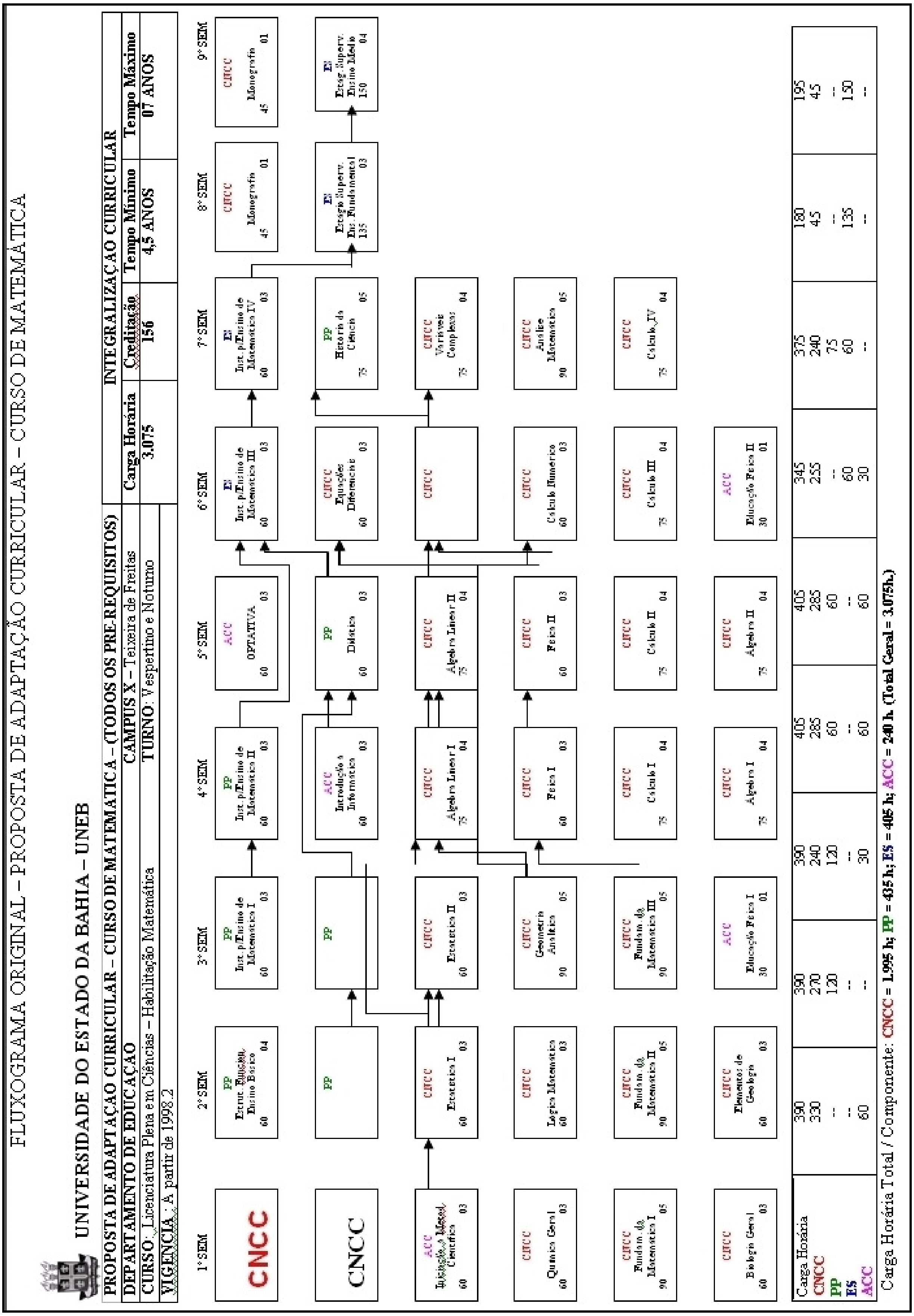


Figura 4 – Proposta de adaptação Curricular do Curso de Matemática

1.5.2.1. Uma mudança no Fenômeno de Interesse

Em uma primeira visita à UNEB, ao analisar essa matriz curricular e prevendo dificuldades em selecionar professores egressos para um trabalho junto a essa Instituição, decidimos, eu e minha orientadora, mudar nosso Fenômeno de Interesse, passando de um trabalho de Formação Continuada de professores para o de Formação Inicial, ou seja, nossos licenciandos. Logo, o novo Fenômeno de Interesse passou a ser visto como:

A geometria euclidiana trabalhada com alunos em formação inicial, no curso de Licenciatura em Matemática da UNEB

1.5.2.2. A necessidade de um Modelo Modificado

A partir dessa mudança, passamos a pensar em uma mudança no Modelo Preliminar, para desenvolver a pesquisa, gerando o **Modelo Modificado**, ora apresentado:

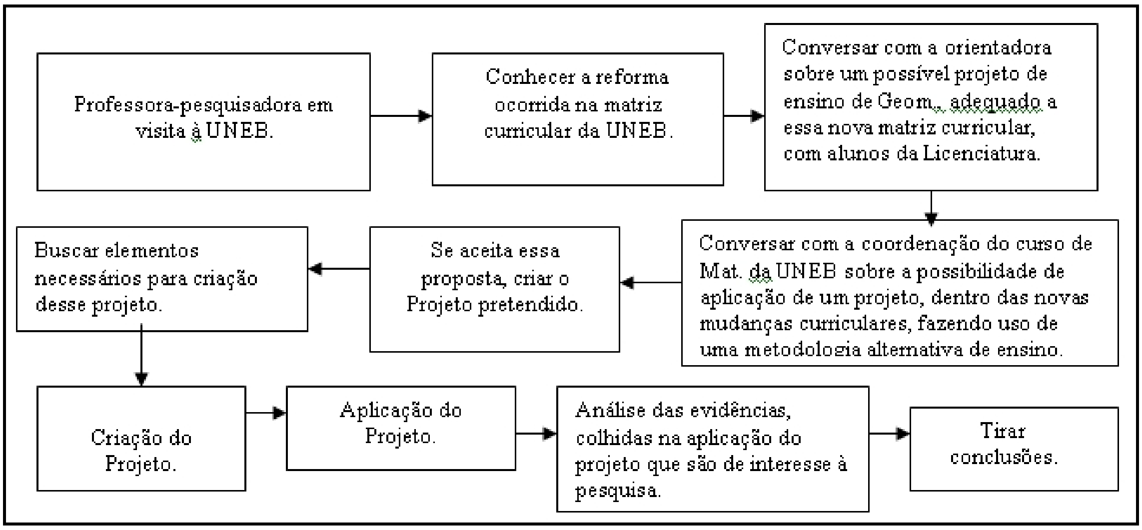


Figura 5 – Modelo Modificado 1

Numa nova visita à UNEB, encontramos novas mudanças na matriz curricular vista anteriormente. Assim apresentada:

Universidade do Estado da Bahia – UNEB

Campi II, VI, VII, VIII, IX e X

FLUXOGRAMA DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

1º SEMESTRE	2º SEMESTRE	3º SEMESTRE	4º SEMESTRE	5º SEMESTRE	6º SEMESTRE	7º SEMESTRE	8º SEMESTRE
ETM I	**ETM II**	**ETM III**	**ETM IV**	**ETM V**	**ETM VI**	**ETM VII**	**ETM**
75 Mat. I	60 Geo Plana	60 Geo Espacial	75 Cálculo I	75 Cálculo II	75 Cálculo III	75 Cálculo IV	75 Análise Real
60 Lógica	60 Geo Anal. I	60 Geo Anal. II	75 Estatística	60 Física I	60 Física II	60 Física III	
45 Des. Geom.	60 Geo Desc.	75 Mat. III	75 Alg. Linear I	75 Alg. Linear II	75 His. da Mat.	60 Estr. Alg. III	
	75 Mat. II			60 Estr. Alg. I	60 Estrut. Alg. II		
ICM	**ICM**	**ICM**	**ICM**	**ICM**	**ICM**	**ICM**	**ICM**
15 LeiPro Tex I	15 LeiPro Tex II	30 LeiPro Tex III	30 LeiPro Tex IV	30 LeiPro Tex V	30 T.C.C. I	30 T.C.C. II	30 T.C.C. III
15 Metodologia I	15 Metodologia II	15 Metodologia III	30 Informática II	45 Software Mat.			
30 Informática I							
FDEM	**FDEM**	**FDEM**	**FDEM**	**FDEM**	**FDEM**	**FDEM**	**FDEM**
30 Psicologia I	45 Psicologia II	45 Lab Ens Mat I	45 Lab Ens Mat II	75 Estágio I	90 Estágio II	120 Estágio III	120 Estágio IV
30 T.S.F.	45 A.R.P.E.	45 Didática	45 Didática Mat				
30 Políticas Edu I	30 Políticas Edu II						
ST	**ST**	**ST**	**ST**		T.C.C.-	Trabalho de Conclusão de curso	
15 Ling Repr Mat	15 Repr. Geom I	15 Repr. Geom II	15 Pes Educ Mat		T.S.F.-	Tópico Sócio-antropológico-filosófico	
					A.R.P.E.-	Análise e Reflexão do Processo Ensino	
360h	435h	345h	390h	420h	390h	345h	225h

COMPONENTES DE LIVRE ESCOLHA – 180h

ATIVIDADES COMPLEMENTARES – 200h

ETM – Estudo Teórico da Matemática, **ICM** – Instrumentação do Conhecimento Matemático, **FDEM** – Formação Docente para o Ensino da Matemática, **ST** – Seminário Temático. **Carga Horária Total do Curso: 3.290 h**
Os componentes livres tem carga horária computada no bloco das atividades complementares. Visa complementar a sua formação conforme as particularidades de cada nosso departamento, podendo ser substituídas por outras sugestões.

Figura 6 – Fluxograma do Curso de Licenciatura em Matemática

1.5.2.3. Modelo Modificado 2

Como toda pesquisa tem suas idas e vindas, a partir dessa nova matriz curricular passamos a ver a possibilidade da pesquisadora trabalhar com alunos da Licenciatura em duas disciplinas nela constante: Didática da Matemática e Laboratório de Ensino de Matemática II.

Desejando fazer um trabalho na formação inicial de professores, sentimos que seria interessante trabalhar com alunos do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática. Esses alunos já teriam cursado as disciplinas Didática Geral e Geometria Euclidiana nos 2º e 3º semestres. Consequentemente seria conveniente que se trabalhassem as disciplinas Didática da Matemática e Laboratório de Matemática II, disciplinas importantes para a formação de futuros professores de Matemática.

Em discussão com minha orientadora sobre a melhor maneira de construir um projeto que atendesse ao nosso Fenômeno de Interesse, e conhecendo as diferentes disciplinas oferecidas aos alunos na nova matriz, decidimos criar o modelo abaixo que chamamos de Modelo Modificado 2, onde o Modelo Modificado ficou conhecido como Modelo Modificado 1.

Visto que iria trabalhar com duas disciplinas, sem afastar da formação inicial do professor e do ensino de Geometria, percebemos a necessidade de criar dois projetos, um para cada disciplina e interligá-los com uma metodologia alternativa de trabalho em sala de aula para seus desenvolvimentos.

Assim, nosso Modelo Modificado 2 seria formado pelos projetos P_1 e P_2, respectivamente, para as disciplinas “Didática da Matemática” e “Laboratório de Ensino de Matemática II”.

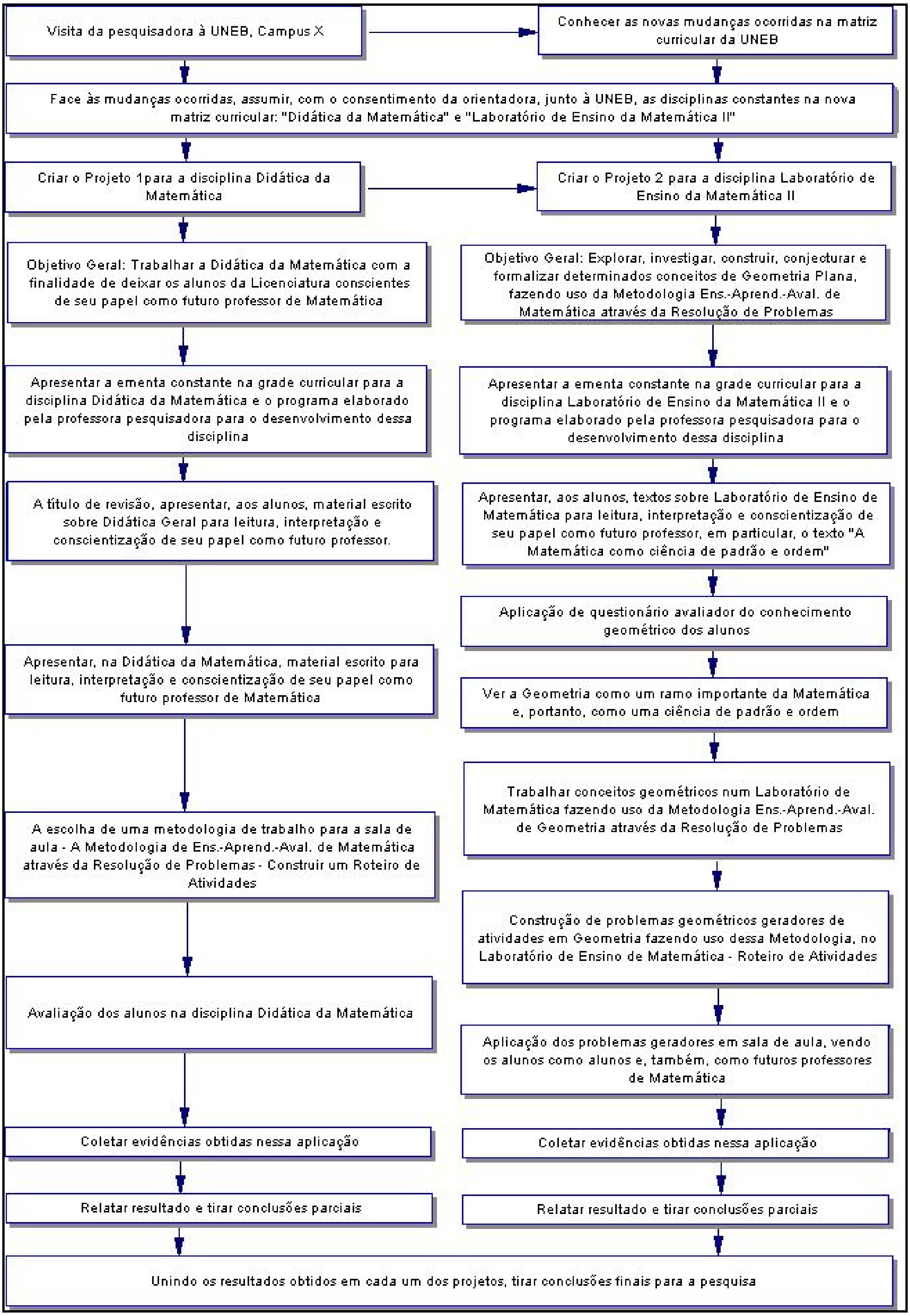


Figura 7 – Modelo Modificado 2.1

O Modelo Modificado 2 representa a conjugação das duas disciplinas oferecidas que, ao serem postos em ação os projetos P_1 e P_2, permitem coletar evidências e, a partir delas tirar conclusões para a pesquisa.

1.5.2.4. As demais atividades

Seguindo as atividades propostas no fluxograma de Romberg, conforme página 28, a próxima atividade refere-se a pesquisar o que outros já falaram a respeito do Fenômeno de Interesse e determinar se o que eles pensam – suas idéias – pode ser usado para esclarecer, ampliar ou modificar o Modelo Preliminar proposto, denominado **Relacionar com Idéias de Outros**. Entretanto, para fazer isso, o pesquisador deve reconhecer que cada investigador é um membro de um grupo particular de pesquisa que defende uma determinada "visão de mundo" como afirma Romberg, apud Onuchic e Boero (2007, p.100)

> Se alguém busca examinar a contribuição potencial das idéias de outros, deve relacionar aquelas idéias a uma particular visão do mundo. Por exemplo, um estudioso que vê a variedade de compreensões das crianças sobre o conceito de frações a partir de um ponto de vista construtivista, pode argumentar que as experiências típicas que as crianças têm com frações são pobres. Para construir este argumento, o pesquisador teria que ler e refletir sobre as escritas e os estudos de outros estudiosos construtivistas.

Com o propósito de aprofundar e conhecer o que já se tem pesquisado ou estudado sobre o tema, ou melhor, sobre nosso Fenômeno de Interesse, visando compreender a natureza ou a especificidade do problema a ser estudado, a presente pesquisa apóia-se em três eixos temáticos: 1) A Didática da Matemática na Formação de professores; 2) A Resolução de Problemas na Formação de Professores; e 3) A Geometria na História e seu Ensino-Aprendizagem.

Esses temas serão abordados no próximo capítulo.

Até aqui pudemos situar-nos na Metodologia de Romberg. A partir daí somente é possível apresentar o que Romberg (1992) fala a respeito das demais atividades, no intuito de esclarecer ao leitor as suas idéias sobre essas atividades e que, posteriormente, no decorrer da pesquisa, aparecerão explicitamente.

Sendo assim, a última atividade do primeiro bloco do modelo de Romberg, **Pergunta ou Conjectura**, é, para ele, um passo-chave no processo da pesquisa porque, conforme se examina um fenômeno particular, uma grande quantidade de perguntas potenciais inevitavelmente aparece e decidir qual(is) pergunta(s) examinar não é fácil. Nesta etapa, diz ele, "o pesquisador poderá saber a que se deve responder ou, se for uma afirmação, que conjectura quer-se defender. As perguntas ou as conjecturas estão baseadas em relações entre as variáveis que caracterizam o Fenômeno de Interesse e nas idéias que se têm sobre elas e suas relações com o que foi esboçado no modelo".

Considerando a pergunta diretriz como o problema de pesquisa, com a finalidade de respondê-la, passamos para o Segundo Bloco de Romberg. Neste segundo bloco há duas atividades: 1) Selecionar uma **Estratégia Geral** de pesquisa para coletar evidências e 2) S**elecionar um Procedimento Geral** específico, correspondente à estratégia geral selecionada. Isto significa descobrir "o quê fazer" e "como agir" para atender a essa pergunta diretriz. Para Romberg (1999) a decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se seleciona; da visão de mundo na qual as questões estão situadas; do Modelo Preliminar que foi construído a fim de explicar o Fenômeno de Interesse e da Conjectura ou Pergunta que se faz sobre a evidência necessária buscada. E, para responder às questões que foram levantadas, evidências devem ser coletadas. Ele faz uma advertência em relação aos procedimentos específicos dizendo que há uma variedade deles que se poderia seguir para diferentes tipos de questões e que se deve tomar cuidado ao selecionar tais procedimentos que irão esclarecer essas questões.

Por se tratar de uma pesquisa que focalizará o ensino e aprendizagem da Geometria em um contexto escolar com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática da UNEB, Campus X, essa pesquisa terá uma *abordagem qualitativa* apoiada em um modelo de pesquisa sugerido por Thomas A. Romberg (1992). Para a coleta de dados utilizar-se-á a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, tendo como procedimentos metodológicos: observação, material escrito pelos alunos, questionários, filmagens, gravações, diário de campo. Nesse contexto estará o pesquisador como observador e atuante no ambiente a ser pesquisado, a fim de compreendê-lo e, sobretudo, tentar modificá-lo em direções que permitam a melhoria da prática.

No Terceiro Bloco de Romberg, após o Procedimento Geral ser posto em ação, evidências serão coletadas, selecionadas entre elas as que se relacionam diretamente ao problema identificado, e, então, os resultados obtidos serão relatados. Após essas ações, dados os resultados de uma particular investigação, cada investigador estará interessado no que acontecerá depois e deverá antecipar ações posteriores. Como diz Romberg "coisas que vierem antes e coisas que vêm após qualquer estudo particular são importantes". Esse bloco também será tratado em outro capítulo.

CAPÍTULO 2 – DO “RELACIONAR COM IDEIAS DE OUTROS” À IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Como nosso interesse nesta pesquisa é trabalhar a geometria na formação inicial de futuros professores de matemática, objetivando contribuir para a sua formação profissional, ao propor a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, tendo os alunos como co-construtores desse novo conhecimento, buscamos, neste capítulo, a partir do que outros pensam sobre o nosso fenômeno de interesse, chegar até a pergunta que direcionará toda a pesquisa.

2.1. Relacionar com Idéias de Outros

Quando, de acordo com o Modelo Preliminar, iríamos buscar outros que pudessem ajudar a desenvolver a pesquisa, mudanças na instituição, lugar em que se deu a coleta de dados, ocorreram, provocando assim uma mudança no Fenômeno de Interesse, levando à criação do Modelo Modificado1. Nesse meio tempo, devido às recomendações das Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática – Bacharelado e Licenciatura, ocorreram alterações na matriz curricular do Curso de Licenciatura em Matemática da UNEB, e, devido a elas, o Modelo Modificado1 sofreu modificações passando para o Modelo Modificado 2. Nessa situação os nossos outros, atendendo as variáveis desse Modelo Modificado 2, surgiram, formando assim, os três eixos temáticos que ajudarão a desenvolver a pesquisa: 1) A Didática da Matemática na Formação de Professores; 2) A Resolução de Problemas na Formação de Professores; e 3) A Geometria na História e seu Ensino-Aprendizagem.

Passemos, então, a trabalhar nessa atividade de Romberg, buscando o que esses outros nos dizem a respeito dos eixos temáticos propostos acima, que possa contribuir para darmos continuidade à pesquisa.

2.1. 1. A Didática da Matemática na Formação de Professores

> *O conhecimento é a informação sem uso; o saber é a ação deliberada para fazer do conhecimento um objeto útil diante de uma situação problemática. Disso se deduz que a aprendizagem é uma manifestação da evolução do conhecimento em saber. A aprendizagem consiste, portanto, em dar resposta correta antes da situação concreta.*
>
> Ricardo Cantoral [cit. In D'Amore, 2007].

A formação de professores no âmbito educacional inclui a formação inicial, a formação continuada e a formação especializada. Nosso objetivo é o de abordar, em especial, a formação inicial de professores de matemática, haja vista que esta pesquisa tem como um dos seus eixos temáticos essa vertente.

2.1.1.1. A Formação Inicial de Professores de Matemática

Considerando a formação inicial, geralmente feita nos cursos de Licenciatura ou de Pedagogia, como aquela que visa formar o profissional para atuar na Educação Básica, entendemos que essa formação deve oferecer aos futuros professores ferramentas necessárias a sua atuação profissional. Que ferramentas seriam essas? A esse respeito nos falam alguns investigadores:

Segundo Perez (1999, p. 271)

> "a formação inicial deve proporcionar aos licenciandos um conhecimento que gere uma atitude que valorize a necessidade de uma atualização permanente em função das mudanças que se produzem, e fazê-los criadores de estratégias e métodos de intervenção, cooperação, análise, reflexão e a construir um estilo rigoroso e investigativo".

Por sua vez, Ponte (1999, p.1) afirma que

> "os professores não podem exercer seu papel com competência e qualidade sem uma formação adequada para lecionar as disciplinas ou os saberes de que estão incumbidos, sem um conjunto básico de conhecimentos e capacidade profissionais orientados para sua prática educativa".

Imbernón, apud Perez (1999, p.53-4), diz que é necessário

> "que a formação inicial do professor de Matemática seja flexível e que desenvolva uma atitude crítica no licenciando de maneira cooperadora e colegiada e uma constante receptividade para o novo, já que a formação inicial tem de preparar para uma profissão que demanda continuar estudando durante toda a vida profissional. [...]

> não se trata, pois, de aprender um ofício em que predominam estereótipos e técnicas predeterminadas sendo que se trata de aprender os fundamentos de uma cultura profissional, que significa saber por que se faz, o que se faz e quando e porque será necessário fazê-lo de um modo distinto".

Nesse sentido, podemos admitir que os cursos de Licenciatura em Matemática têm um papel crucial na formação do futuro professor. Eles têm como propósito central formar professores de Matemática para atuarem em diversos níveis de ensino, o que permite concluir que o aluno que enfrenta esse tipo de curso deve, também, aprender Matemática com a finalidade de "ensinar matemática".

As Diretrizes Curriculares para o Curso de Matemática, Bacharelado e Licenciatura

Por entendermos que é necessário aos licenciandos conhecerem o curso o qual irão se formar, achamos conveniente tratarmos aqui das orientações atuais das Diretrizes Curriculares para o Curso de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, relatadas em 2001.

No relatório do Ministério da Educação – Conselho Nacional de Educação – lê-se que "Os cursos de Bacharelado em Matemática existem para preparar profissionais para a carreira de ensino superior e pesquisa, enquanto os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação de professores para a Educação Básica". De acordo com o referido relatório, temos

a) Perfil dos Formandos

Para o Licenciado em Matemática desejam-se as seguintes características:

Visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos;

Visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania;

Visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.

Os currículos dos cursos de Bacharelado/Licenciatura em Matemática devem ser elaborados de maneira a desenvolver as seguintes competências e habilidades:

a) capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão;

b) capacidade de trabalhar em equipes multi-disciplinares;

c) capacidade de compreender, criticar e utilizar novas idéias e tecnologias para a resolução de problemas;

d) capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção de conhecimento;

e) habilidade de identificar, formular e resolver problemas na sua área de aplicação, utilizando rigor lógico-científico na análise da situação-problema;

f) estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento;

g) conhecimento de questões contemporâneas;

h) educação abrangente necessária ao entendimento do impacto das soluções encontradas num contexto global e social;

i) participar de programas de formação continuada;

j) realizar estudos de pós-graduação;

k) trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber.

b) Competências e Habilidades

No que se refere às competências e habilidades próprias do educador matemático, o Licenciado em Matemática deverá ter as capacidades de:

elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a Educação Básica;

analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;

analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a Educação Básica;

desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;

perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;

contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da Escola Básica.

c) Estrutura do Curso

Ao chegar à Universidade, a aluno já passou por um longo processo de aprendizagem escolar e construiu para si uma imagem dos conceitos matemáticos a que foi exposto, durante o ensino básico. Assim, a formação do matemático demanda o aprofundamento da compreensão dos significados dos conceitos matemáticos, a fim de que ele possa contextualizá-los adequadamente. O mesmo pode-se dizer em relação aos processos escolares em geral: o aluno chega ao ensino superior com uma vivência e um conjunto de representações construídas. É preciso que estes conhecimentos também sejam considerados ao longo de sua formação como professor.

Os conteúdos curriculares dos cursos de Matemática deverão ser estruturados de modo a contemplar, em sua composição, as seguintes orientações:

a) partir das representações que os alunos possuem dos conceitos matemáticos e dos processos escolares para organizar o desenvolvimento das abordagens durante o curso;
b) construir uma visão global dos conteúdos de maneira teoricamente significativa para o aluno.

Adicionalmente, as Diretrizes Curriculares devem servir também para a otimização da estruturação modular dos cursos, com vistas a permitir um melhor aproveitamento dos conteúdos ministrados.

Da mesma maneira almeja-se ampliar a diversidade da organização dos cursos, podendo a IES (Instituições de Ensino Superior) definir adequadamente a oferta de cursos seqüenciais, previsto no inciso I do artigo 44 da LDB (Lei de Diretrizes e Bases), que possibilitariam tanto o aproveitamento de estudos, como uma integração mais flexível entre os cursos de graduação.

d) Conteúdos Curriculares

Quanto aos currículos, estes devem assegurar o desenvolvimento de conteúdos dos diferentes âmbitos do conhecimento profissional de um matemático, de acordo com o perfil, competências e habilidades anteriormente descritos, levando-se em consideração as orientações apresentadas para a estruturação do curso.

A organização dos currículos das IES deve contemplar os conteúdos comuns a todos os cursos de Matemática, complementados com disciplinas organizadas conforme o perfil escolhido do aluno. Os conteúdos comuns a todos os cursos de Licenciatura em Matemática podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela IES:

- Cálculo Diferencial e Integral
- Álgebra Linear
- Fundamentos de Análise
- Fundamentos de Álgebra
- Fundamentos de Geometria

- Geometria Analítica

A parte comum deve ainda incluir:

a) conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise;
b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias;
c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.

Para a Licenciatura serão incluídos, no conjunto dos conteúdos profissionais, os conteúdos da Educação Básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio.

Desde o início do curso, o licenciando deve adquirir familiaridade com o uso do computador como instrumento de trabalho, incentivando-se sua utilização para o ensino de Matemática, em especial para a formulação e solução de problemas. É importante também a familiarização do Licenciando, ao longo do curso, com outras tecnologias que possam contribuir para o ensino de Matemática.

Assim, as IES poderão ainda organizar os seus currículos de modo a possibilitar ao Licenciado uma formação complementar propiciando uma adequação do núcleo de formação específica a outro campo de saber que o complemente.

e) Estágio e Atividades Complementares

No curso de Licenciatura, o educador matemático deve ser capaz de tomar decisões, refletir sobre sua prática e ser criativo na ação pedagógica, reconhecendo a realidade em que se insere. Mais do que isto, ele deve avançar para uma visão de que a ação prática é geradora de conhecimentos. Nessa linha de abordagem, o estágio é essencial nos cursos de formação de professores, possibilitando desenvolver:

a) uma seqüência de ações onde o aprendiz vai se tornando responsável por tarefas em ordem crescente de complexidade, tomando ciência dos processos formadores;
b) uma aprendizagem guiada por profissionais de competência reconhecida.

Nas recentes Diretrizes curriculares para a formação de professores da Educação Básica (CNE 2001) a separação entre teoria e prática, uma das principais dificuldades nos cursos de licenciatura, é destacada como algo a ser superado pelas instituições responsáveis por esses cursos. Entretanto, ainda se configura nos cursos de Licenciatura o modelo “3 + 1”, ou seja, “bacharelado + didática”. Esse modelo de formação, segundo Moreira e David, 2005, constituía-se de três anos de formação específica e mais um ano para a formação pedagógica[6].

Oliveira (2008, p.2), alerta para o fato de que a concepção da Licenciatura, como uma complementação ao Bacharelado pode ser considerada como uma das responsáveis pela pouca importância dada ao conhecimento didático nos cursos de formação de professores. A referida autora ainda faz uma ressalva afirmando que um curso de Formação Inicial de Professores de Matemática deve ser necessariamente diferente de um curso de Matemática que visa formar matemáticos destinados a se dedicarem à investigação matemática. Para ela, a aprendizagem da docência deve ser o foco central, encampando os conhecimentos específicos, os pedagógicos e o pedagógico do conteúdo[7]. Entretanto, essa ainda não é a realidade que se presencia nos cursos de Licenciatura em Matemática. Em geral, os futuros professores não saem devidamente preparados nas matérias que irão ensinar.

Infelizmente, na maioria das vezes, a realidade dos cursos de Licenciatura ainda está pautada no diagnóstico feito pelas pesquisadoras norte americanas Lampert e Ball apud Ponte (2002, p.3-4). Segundo elas, os problemas na formação inicial resultam em cinco tipos de atitudes desenvolvidas na Licenciatura:

1) não atender as crenças, concepções e conhecimentos que os professores trazem para o curso de formação inicial;
2) não mostrar a necessidade de um conhecimento profissional;
3) não dar a devida atenção ao conhecimento didático;
4) separar a teoria e a prática, tanto fisicamente como conceitualmente, sendo a teoria raramente examinada na prática e a prática pouco interrogada pela teoria;
5) dar reduzida importância à prática profissional.

[6] O que hoje é denominado formação pedagógica se reduzia à didática e esta, por sua vez, a um conjunto de técnicas úteis para a transmissão do saber adquirido nos três anos iniciais (MOREIRA; DAVID, 2005)

[7] Pesquisas realizadas por Shulman apud Oliveira (2008, p. 5) nos dizem que os professores novatos enquanto se preparam para ensinar o seu conteúdo, bem como durante a aula em si, desenvolvem um novo tipo de conhecimento do assunto que é enriquecido e envolvido por outros tipos de conhecimento – conhecimento do aprendiz, conhecimento do currículo, conhecimento do contexto, conhecimento de pedagogia. Esse novo tipo de conhecimento é o que Shulman chama de conhecimento pedagógico do conteúdo. Shulman diz: “dentro da categoria de conhecimento pedagógico do conteúdo eu incluo, para os tópicos mais regularmente ensinados na área de conteúdo de cada um, as mais úteis formas de representação dessas idéias, as mais poderosas analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações – em uma palavra a forma de representar e formular o assunto que torna compreensível para outros... Isso também inclui um entendimento do que faz o ensino de tópicos específicos fáceis ou difíceis: as concepções e preconcepções que estudantes de diferentes idades e repertórios trazem com eles para o aprendizado”.

Complementando, segundo Imbernón (2006, p. 61), os futuros professores poderiam

> estar preparados para entender as transformações que vão surgindo nos diferentes campos e para serem receptivos e abertos a concepções pluralistas, capazes de adequar suas atuações às necessidades dos alunos em cada época e contexto. Para isso é necessário aplicar uma nova metodologia e, ao mesmo tempo, realizar uma pesquisa constante (o professor é capaz de gerar conhecimento pedagógico em sua prática) que faça mais do que lhes proporcionar um amontoado de conhecimentos formais e formas culturais preestabelecidas, estáticas e fixas, incutindo-lhes uma atitude de investigação que considere tanto a perspectiva teórica como a prática, a observação, o debate, a reflexão, o contraste de pontos de vista, a analise da realidade social, a aprendizagem alternativa por estudos de caso, simulações e dramatizações.

Com isso, vemos que não basta, para a formação inicial, conhecer proposições e teorias. É preciso estudo, trabalho e pesquisa para quando atuarem junto a mudanças e, sobretudo, reflexão para não ensinar apenas “o quê” e “o como” lhe foi ensinado.

Ponte(2002, p.2-3) aponta algumas competências que julga importantes para um professor em formação inicial:

a formação pessoal, social e cultural dos futuros professores: esta formação muitas vezes é ignorada quando o estudante chega à universidade. Não se percebe que a formação nesses campos pode favorecer o desenvolvimento de capacidades de reflexão, autonomia, cooperação e participação.

A formação científica, tecnológica, técnica ou artística na respectiva especialidade: sem dominar, com um elevado grau de competência, os conteúdos que é suposto ensinar, o professor não pode exercer de modo adequado a sua função profissional.

A formação no domínio educacional: A herança da pedagogia, os contributos das ciências da educação, a reflexão sobre os problemas educacionais do mundo de hoje, as problemáticas e os contributos da investigação realizada pela didática e pelas outras áreas das ciências da educação, são, naturalmente, elementos essenciais na constituição da profissionalidade docente.

As competências de ordem prática: Não basta o professor conhecer teorias, perspectivas e resultados de investigação. Tem de ser capaz de construir soluções adequadas para os diversos aspectos da sua ação profissional, o que requer não só a capacidade de mobilização e articulação de conhecimentos teóricos, mas também a capacidade de lidar com situações concretas, competências que se têm de desenvolver progressivamente ao longo da sua formação – durante a etapa de formação inicial e ao longo da carreira profissional.

Capacidades e atitudes de análise crítica, de inovação e de investigação pedagógica: O professor não é um mero técnico nem um simples transmissor de conhecimento, mas um profissional que tem de ser capaz de identificar os problemas que surgem na sua atividade, procurando construir soluções adequadas.

2.1.1.2. Competência profissional

Ponte (2002, p.3) realça que "a Formação Inicial de Professores visa formar um profissional competente para exercer bem a profissão". Diante desse dito, o que significa ser um profissional competente? De que conhecimento necessita o professor para se tornar um profissional competente?

Em 1995, Perez falou

> "Competência, no que se refere ao campo educacional da Matemática, não significa ter um vasto conhecimento de conteúdo matemático. Ser um professor competente não se resume apenas àquele professor que prepara muito bem os conteúdos a serem ministrados aos seus alunos, àquele que cumpre o programa, àquele que parte sempre do mais simples para o mais complexo. É mais que isso, competência implica liberdade, no sentido de que o aluno possa aprender a ser independente, aprender a questionar, a raciocinar, a duvidar do que já é sabido"(PEREZ, 1995, p. 29).

Quando o professor dá liberdade ao aluno para tomar decisões, formular ideias e argumentos, enfrentar situações sem desistir rapidamente, ele está contribuindo para o desenvolvimento de competências no aluno. Até mesmo, a forma de o professor abordar determinados temas e/ou conteúdos permitirá o desenvolvimento de competências no aluno.

Ponte chamou a atenção sobre a questão do "ensinar". Para ele

> [...] não basta saber pensar bem, é preciso um vasto conjunto de saberes e competências, que podemos designar por conhecimento profissional [...] que inclui uma parte fundamental que intervêm diretamente na prática letiva. Trata-se de um conhecimento essencialmente orientado para a ação que se desdobra em quatro grandes domínios: (1) o conhecimento dos conteúdos de ensino; (2) o conhecimento do currículo; (3) o conhecimento do aluno; (4) o conhecimento do processo instrucional (PONTE, 1999, p.3).

Complementando, são também domínios de formação necessários ao conhecimento do professor: conhecer bem o seu contexto de trabalho, nomeadamente a escola e o sistema educativo e conhecer-se a si mesmo como profissional.

O desenvolvimento de competências, ao centrar-se na resolução de problemas, está muito ligado à criatividade e à tomada de decisões por parte do indivíduo. Além disso, segundo Diniz e Smole (2002), o pensar e o fazer matemático se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no processo de resolução de situações problema, sejam elas mais ou menos convencionais, abertas ou aplicadas.

> [...] O desenvolvimento da competência de resolução de problemas se faz no enfrentamento de problemas complexos e diversificados, na resolução dos quais o aluno tenha a oportunidade de pensar por si mesmo, construir possibilidades de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos, errar, e, enfim, perseverar na busca da solução (DINIZ e SMOLE, 2002, p. 41).

Como se pode perceber na citação acima, a forma de ensinar é decisiva, pois é a forma como se organizam as atividades, a sala de aula, a escolha de material didático e da metodologia de ensino que permitirão o trabalho simultâneo na direção do conteúdo e das competências.

A esse respeito pode-se inserir a fala de Nóvoa, na entrevista dada em 13 de setembro de 2001, ao valorizar as competências necessárias para a prática do professor:

> [...] eu tenderia a valorizar duas competências: a primeira é uma competência de organização. Isto é, o professor não é, hoje em dia, um mero transmissor de conhecimento, mas também não é apenas uma pessoa que trabalha no interior de uma sala de aula. O professor é um organizador de aprendizagens, de aprendizagens via os novos meios informáticos, por via dessas novas realidades virtuais. Organizador do ponto de vista da organização da escola, do ponto de vista de uma organização mais ampla, que é a organização da turma ou da sala de aula. Há aqui, portanto, uma dimensão da organização das aprendizagens, do que eu designo, a organização do trabalho escolar e esta organização do trabalho escolar é mais do que o simples trabalho pedagógico, é mais do que o simples trabalho do ensino, é qualquer coisa que vai além destas dimensões, e estas competências de organização são absolutamente essenciais para um professor. Há um segundo nível de competências que, a meu ver, são muito importantes também, que são as competências relacionadas com a compreensão do conhecimento. Há uma velha brincadeira, que é uma brincadeira que já tem quase um século, que parece que terá sido dita, inicialmente, por Bernard Shaw, mas há controvérsias sobre isso, que dizia: "quem sabe faz quem não sabe ensina". Hoje em dia esta brincadeira podia ser substituída por outra: "quem compreende o conhecimento". Não basta deter o conhecimento para o saber transmitir a alguém, é preciso compreender o conhecimento, ser capaz de o reorganizar, ser capaz de o reelaborar e de transpô-lo em situação didática em sala de aula (NÓVOA, 2001, p.2).

Várias são as formas que têm sido usadas para definir as competências no exercício da docência. Diniz e Smole (2002, p. 42) apontam algumas transformações que deveriam ser feitas nos programas de formação inicial para se obter professores competentes no exercício de sua prática docente. São elas: (1) os programas e as disciplinas deveriam se permitir rever os seus conteúdos e métodos de ensino e avaliação; (2) o conjunto de disciplinas deveria tentar analisar que relações existem entre elas e que contribuições práticas elas podem incluir em seu percurso para a formação do futuro professor; (3) um terceiro ponto está na não separação entre os conteúdos específicos e as questões de ensino e aprendizagem que são relegadas às disciplinas de educação e que, em geral, acontecem após um longo percurso de disciplinas matemáticas.

Assim, como já dizia Ponte, em 1998, a chave da competência profissional é a capacidade de equacionar e resolver – em tempo oportuno – problemas surgidos na prática profissional.

2.1.1.3. Concepções de professores de Matemática em formação inicial

Um dos pontos chave na produção de mudanças em didática da matemática e na aplicação de reformas educativas é o professorado. Diz Chacón (2003, p.64) "em grande parte, os avanços dependem essencialmente das mudanças produzidas no professor como indivíduo, em sua aproximação ao ensino e à aprendizagem da matemática, e em suas crenças". Assim, acreditamos que se as concepções que futuros professores, em um curso de Licenciatura, trazem consigo são ignoradas, a compreensão que eles desenvolvem pode ser muito diferente daquela que era pretendida pelo professor do curso.

Várias pesquisas sobre concepções de futuros professores de Matemática acerca da natureza da Matemática e do seu ensino-aprendizagem têm concluído que uma grande parte delas se origina a partir das experiências que tiveram como alunos e são, na maioria das vezes, estáveis e resistentes a mudanças, que, se ocorrem, são lentas e processuais.

Cury (1999) sugere que os cursos de formação de professores deveriam enfatizar também a possibilidade de desenvolver experiências de ensino em que as crenças de futuros professores viessem à tona e pudessem ser discutidas. Duas pesquisadoras, Brito e Alves (2006) seguindo essa mesma linha de pensamento, realizaram uma pesquisa com licenciandos em Matemática, durante o primeiro semestre de 2004, na disciplina Didática da Matemática, cujo objetivo era o de levar os alunos a refletirem a respeito de suas concepções relativas à Matemática, ao ensino e à aprendizagem, acreditando elas que esse objetivo proposto para a investigação poderia levar o licenciando a alterar suas concepções de modo a construir saberes docentes necessários à sua futura prática docente. Essas professoras-pesquisadoras, ao assumirem a experiência que já possuem na disciplina Didática da Matemática, consideram que tal disciplina é um momento privilegiado na formação inicial onde pode ocorrer uma reflexão coletiva sobre concepções de futuros professores, o que não tem sido tarefa fácil.

Ponte (1992) defende que, na formação inicial, o principal problema é a inexistência de uma prática que proporcione a possibilidade de formular objetivos de intervenção prática imediata e vivência direta de reflexão. Ou melhor, ele afirma que o futuro professor encontra obstáculos, no processo de mudanças, devido à falta de oportunidade de vivenciarem situações que lhes permitam refletir sobre processos educativos.

> É certo que mudanças de concepções e práticas constituem um processo difícil e penoso para as pessoas, principalmente quando há uma certa resistência por parte delas, não se mostrando abertas a tal mudança. [...] Por outro lado, espera-se que futuros professores sejam pessoas com hábitos de duvidar e de pensar as coisas de forma diferente (PONTE, 1992, p.27).

Concepções que alunos e professores possuem da Matemática são objetos que têm sido de interesse a vários pesquisadores, principalmente quando se fala em formação de professores (Cury, 1999; Ponte, 1992; Thompson, 1992). Dentre essas pesquisas, percebe-se que esse assunto tem sido bem debatido, com a atenção voltada às diferenças do seu conceito e os elementos associados a esse termo.

Ponte (1992), falando sobre concepção em relação à Matemática, cita que uma das mais prevalecente é a de que o cálculo (fazer contas) é a parte mais substancial da Matemática, a mais acessível e fundamental. Outra concepção bastante frequente, apontada por ele, é que a Matemática consiste essencialmente na demonstração de proposições a partir de sistemas de axiomas mais ou menos arbitrários, perspectiva em que se reconhece a influência direta do formalismo. Uma outra concepção, que usualmente surge associada à anterior, é a de que a Matemática seria o domínio do rigor absoluto, da perfeição total. Nela, não haveria lugar para erros, dúvidas, hesitações ou incertezas. Finalmente, uma outra concepção é de que nada de novo, nem de minimamente interessante ou criativo pode ser feito em Matemática, a não ser pelos "gênios".

Em relação à concepção dos professores sobre a Matemática, salve-se que eles têm uma visão absolutista e instrumental da mesma, considerando-a como uma acumulação de fatos, regras, procedimentos e teoremas. Por outro lado, alguns professores a veem como uma disciplina dinâmica, conduzida por problemas. Relacionada com estas questões está o conhecimento que os professores têm relativamente a temas específicos de Matemática

Quanto às concepções dos professores sobre o ensino-aprendizagem da Matemática, há vários aspectos que devem ser levados em consideração nesse estudo e que incluem o papel e o propósito da escola em geral, os objetivos desejáveis do ensino dessa disciplina, as abordagens pedagógicas, o papel do professor, o controle na sala de aula, a percepção do propósito dos planejamentos, a sua noção do que são os procedimentos matemáticos legítimos, a sua perspectiva do que é o conhecimento matemático dos alunos, de como estes aprendem Matemática e o que são os resultados aceitáveis do ensino e o modo de avaliar os alunos.

Em se tratando das concepções dos professores de Matemática sobre a Resolução de Problemas, Thompson (1989, p. 235) em uma pesquisa com 16 professores de Matemática da escola elementar, ao discutir sobre a natureza da resolução de problemas, disse que esses professores, na presença do enunciado de um problema sobre a aplicação de habilidades computacionais, menciona que cinco deles referiam-se à importância de identificar prontamente a operação ou os passos necessários para a resolução do problema, e o "método certo" para resolvê-lo. Implícito em suas respostas havia noções de que:

1. é a resposta que conta em matemática. Uma vez que se tenha a resposta, o problema está resolvido.
2. deve-se obter a resposta de uma maneira correta.
3. uma resposta a uma questão matemática é geralmente um número.
4. todo contexto (do problema com o enunciado) está associado com um único procedimento para se "obter" respostas.
5. a chave para se ter sucesso ao resolver problemas é saber e lembrar-se do que já foi feito.

Ao ser discutida, na Licenciatura, a natureza da resolução de problemas, sugere-se que professores em formação inicial fossem questionados sobre a posição acima, assumida por professores na ativa, de modo que essas concepções, muitas vezes errôneas, pudessem ser identificadas e, posteriormente, corrigidas.

Thompson (1989) constatou também, em sua pesquisa, que os outros onze professores tinham uma visão mais generalizada do que eles entendiam por problema matemático. Esses professores referiam-se à resolução de problemas como uma atividade que pedia a aplicação de "habilidades de raciocínio", "lógica", "métodos de tentativa e erro", e uma variedade de abordagens para a descoberta das soluções; como envolver os processos de busca e descoberta de novas idéias; como requerer a inventabilidade e criatividade para uma realização bem sucedida; como "não ser tão dependente das habilidades aprendidas quanto outras atividades matemáticas", e "qual seria a forma que a matemática ocupa na vida". Esses professores referiam-se à natureza da resolução de problemas como desafiante, divertida e frustante.

No livro *Mathematical Misconception: A Sourcebook*, Anna O. Graeber e Martin L. Johnson (1990) dizem que uma concepção errônea frequentemente resulta da aplicação de processos válidos em caminhos inapropriados[8]. Nesse livro são selecionados agrupamentos de concepções errôneas.

Agrupamentos selecionados de concepções errôneas

Há, na literatura, um grande número de diferentes classificações de concepções errôneas e de erros. Todas essas categorizações parecem estar associadas a um problema inevitável: os erros observáveis associados a muitas concepções errôneas podem ser explicadas por duas diferentes categorias ou por combinações de categorias. Um sistema de classificação definitivo parece ilusório. As concepções errôneas apresentadas na publicação de Graeber e Johnson (1990) foram classificadas segundo quatro categorias: supergeneralização (overgeneralization); superespecialização (overspecialization); tradução errônea (mistranslation); e concepções limitadas (limited conceptions).

Percebe-se, nos alunos da Licenciatura, futuros professores, por meio das concepções assumidas e carregadas por eles durante toda sua escolaridade, seu envolvimento com sérios obstáculos na construção de novos conceitos e de novos conteúdos. São citadas, no material desenvolvido por Graeber e Johnson (1990), algumas situações de concepções errôneas, dentro das categorias acima mencionadas, nas quais diagnósticos, razões da sua ocorrência e meios de corrigi-las devem ser conduzidos.

Sobre a supergeneralização: São definidos dois tipos de supergeneralização para esse propósito:

1.1. Se um estudante toma um conceito, um princípio ou um procedimento que é verdadeiro para uma classe e o estende a outra classe, então ele está supergeneralizando.

<u>Exemplos:</u>

(i) No conjunto conhecido dos números inteiros, o sinal negativo precedendo de um número natural designa uma quantidade menor do que zero, por exemplo: -7, -89, -2, -67 são números menores do que zero. Quando um sinal negativo é atribuído a um símbolo como

---

[8] Esse material foi desenvolvido na University of Maryland, College Park, sob nº TEI – 8751456 da National Science Foundation. Quaisquer opiniões, sugestões e conclusões expressas são dos autores e não necessariamente refletem as visões da National Science Foundation (GRAEBER, A.O.; JOHNSON, M.L., 1990).

“(-a)”, alguns estudantes continuam a ver o valor de **“(-a)”** como menor do que zero.

(ii) A expressão algébrica **(x – 3) (x + 5) = 0** implica que ou **(x -3) = 0** ou **(x + 5) = 0**. Alguns estudantes continuam a aplicar esse teorema do produto zero em um modo semelhante a expressões que não se igualam a zero, pensando que se **(x – 3) (x + 5) = 9** implica que
(x -3) = 9 ou **(x + 5) = 9**.

(iii) O processo do produto cruzado $\mathbf{7 \times 24 = 3 \times 56}$ é um procedimento aritmético completo para checar a igualdade $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{24}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{56}}$. Em uma abordagem para resolver equações algébricas como $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2-x}} + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2+x}} = \mathbf{9}$**,** no qual é preciso, primeiro encontrar a soma das frações do lado esquerdo, a fração foi encontrada por meio de um procedimento idêntico ao primeiro passo do produto cruzado. Isto é, aplicando erroneamente o procedimento do produto cruzado às frações da soma, sem perceberem que o que é pedido é uma adição de frações e não uma igualdade entre elas. E fizeram: **7(2 – x) + 3(2 + x).** Alguns estudantes, aparentemente, querendo terminar o produto cruzado e tendo atingido um ponto de fechamento também veem esse cálculo como “completo”, escrevendo **7(2 – x) + 3(2 + x) = 9.**

1.2. Se um estudante toma um procedimento e o usa como um conceito, então o estudante está supergeneralizando.

<u>Exemplo:</u>
(i) Quando estiver dividindo por um decimal, você deve primeiro mudar o divisor por um número natural antes de continuar com a divisão. Como resultado desse procedimento comum, alguns estudantes desenvolvem um conceito de divisão que inclui “você não pode dividir por um número decimal”.

<u>Exemplos de conceitos supergeneralizados</u>:
(ii) Em Aritmética, a conjugação de dígitos frequentemente indica adição. Por exemplo, a justaposição na notação do valor posicional (p. ex., 26 = 20 + 6) e nos números mistos (p. ex. 4 ¾ = 4 + ¾) significam adição. Como um resultado, muitos alunos dizem que “**3n”** significa 30 + **n** ou 3 + **n**. Dizendo que se n = 5, os estudantes interpretam **“3n”** como 35, como um número natural igual a 30 + 5 ou 3 + 5 como um número racional. Esses estudantes podem

estar supergeneralizando o significado dos símbolos conjugados a partir de um contexto aritmético mais familiar do que para um contexto algébrico.

(iii) Alguns estudantes concordarão que as figuras seguintes são triângulos.

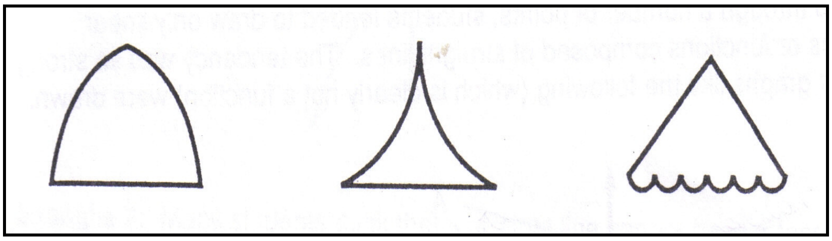


Figura 8 – Concepção errônea sobre o triângulo

Esses estudantes podem estar raciocinando a partir de uma definição de triângulo desenvolvida a partir de suas próprias experiências com polígonos. As características destacadas de um triângulo incluem três lados, três vértices e uma posição prototípica. A extensão dessa definição a curvas fechadas simples que não seja polígono pode levar a esse erro de incluir tais formas no conjunto dos triângulos.

1.3. Exemplos de princípios supergeneralizados:

(i) A propriedade distributiva da multiplicação é válida sobre um determinado número de operações. Por exemplo, **A(B + C) = AB + AC e A(B – C) = AB – AC**.

Estudantes que não estão conscientes das operações para os quais essa propriedade se aplica, podem supergeneralizar a propriedade para a divisão e escrever a expressão da forma **A(B ÷ C) = AB ÷ AC**.

(ii) Os estudantes também frequentemente supergeneralizam a propriedade distributiva para funções matemáticas. Isso leva a erros tais como seguem:

$\log 5 = \log 2 + \log 3$	$[\log (a + b) = \log a + \log b]$
$\sin(75^o) = \sin (30^o) + \sin (45^o)$	$[\sin(a + b) = \sin (a) + \sin (b)]$
$4^{2,5} = 4^2 + 4^{0,5} = 16 + 2 = 18$	$[a^{(b + c)} = a^b + a^c]$

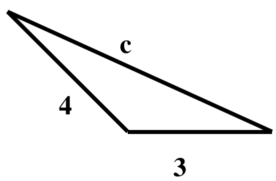
(iii) Estudantes aprendem as formas do inverso aditivo e do inverso multiplicativo. Isto é, eles aprendem que **a + (-a) = 0** e que **a x 1/a = 1**. Esses princípios são algumas vezes supergeneralizados assim: **n + (qualquer inverso de n) = 0** ou **n × (qualquer inverso de n)**

= **1**. Assim, alguns estudantes dizem que **n + 1/n = 0** ou **n × (-n) = 1**. Essa supergeneralização leva a erros tais como:

$$\frac{2}{3}\mathbf{y} = 7 \qquad \frac{2}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)\mathbf{y} = 7 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \qquad \mathbf{y} = -\frac{14}{3}$$

(quando $\frac{2}{3} \times -\left(-\frac{2}{3}\right)$ é tratado como **n × (-n) = 1**).

(iv) Para todo triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento **c** e lados de comprimentos **a** e **b**, $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$ (Teorema de Pitágoras). Crítico ao uso correto desse princípio é sua restrição aos triângulos retângulos. Quando essa restrição é ignorada, ou não bem compreendida, estudantes tentam usar essa relação a triângulos não retângulos, como visto abaixo.



Tentaram usar o Teorema de Pitágoras em um triângulo obtusângulo escrevendo:
$c^2 = 4^2 + 3^2$

1.4. Exemplos de procedimentos supergeneralizados:

(i) Os estudantes, às vezes, supergeneralizam a base dez reagrupando procedimento. Eles assumem que todo reagrupamento é base dez.

4 Gal. 1 Qt	reagrupam como:	$\overset{3}{\cancel{4}}$ Gal. $\overset{1}{1}$ Qt.	Sendo 1 Gal = 4 Qt.
- 1 Gal. 3 Qt.		- 1 Gal. 3 Qt.	

Comentários: Alguns erros comportamentais podem ser explicados ou como supergeneralizações ou como superespecializações, dependendo do raciocínio do estudante. Por exemplo, o estudante que reagrupa 3 Gal, 1Qt. como 2 Gal. 11Qt. poderia estar supergeneralizando da subtração com números naturais para reagrupar com base dez, ou superespecializando pensando que sempre se pode reagrupar somente por dez.

(ii) Alguns estudantes argumentam “Você não pode dividir por uma fração”. Nesse caso, eles estão usualmente supergeneralizando a partir de um procedimento algorítmico feito para a divisão. No procedimento usado para dividir frações, entretanto, você precisa inverter e multiplicar. Como resultado, os estudantes não veem esse processo como divisão.

(iii) 6,53	
× 2,3	Nesse exemplo, estudantes estão supergeneralizando
` 195,9	procedimentos usados na adição. Eles alinham a vírgula
1306,0	decimal no produto com a vírgula decimal no fator de cima.
1511,9	

2. Sobre a superespecialização: Se um estudante impõe a uma classe toda uma propriedade de alguma subclasse, então o estudante está superespecializando. Ou, se um estudante adiciona alguma restrição a um conceito, a um principio ou a um procedimento que não é uma característica da classe toda, então o estudante está superespecializando.

<u>Exemplos:</u>

(i) O conceito de aleatoriedade sugere que todo resultado seja igualmente provável. Alguns estudantes interpretam para sugerir que cada amostra produzida por um processo aleatório precisa ter uma aparência de aleatoriedade. Se o experimento é jogar uma moeda seis vezes, eles não acreditarão que resultados, incluindo uma longa carreira de padrões particulares tais como: CaCaCaCaCaCo ou CoCaCoCoCoCo ou ainda CaCoCaCoCaCo sejam muito prováveis, ou que eles sejam representativos de um processo aleatório.

(ii) Alguns estudantes aceitam a propriedade distributiva como **a(b + c) = ab + ac,** mas negam a distribuição de “**c**” do lado direito como **(a + b)c = ac + bc**.

(iii) Quando estão usando um transferidor para medir os ângulos de um triângulo, alguns estudantes argumentarão que os ângulos cujos lados não atinjem o transferidor não tem medida. Por exemplo, tais estudantes dirão que o ângulo 1 (figura abaixo) não tem medida. A dificuldade procedimental impõe uma serie de restrições no conceito de medidas nos estudantes.

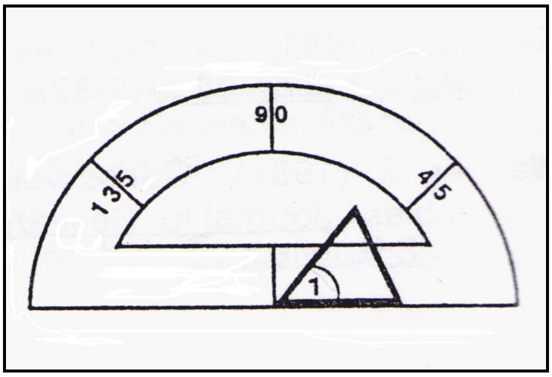


Figura 9 – Ilustração de um transferidor

2.1. <u>Exemplos de conceitos superespecializados</u>:

(i) Evidência apresentada por Hershkowitz e Vinner (1983) sugere que a maioria dos estudantes restringe sua noção de altura de um triângulo apenas para segmentos contidos no triângulo. Quando apresentados com um triângulo obtusângulo ou um triângulo retângulo com uma ou mais alturas fora do triângulo, o percentual de respostas corretas para identificar uma altura

cairá dramaticamente. Tais estudantes dão as seguintes alturas quando pedido para desenhar uma altura dada para uma base.

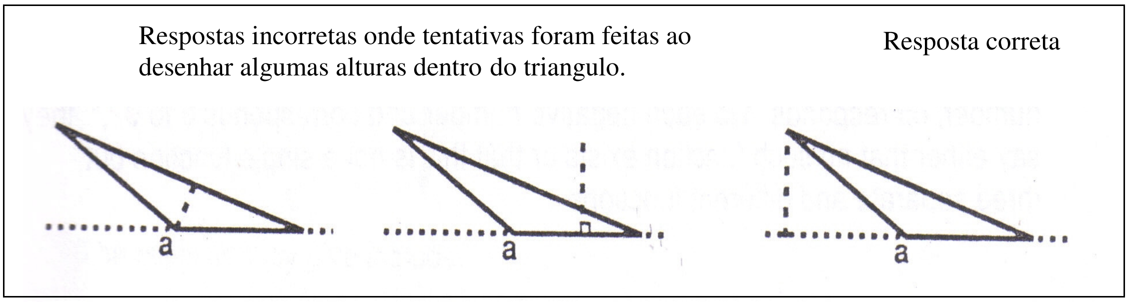


Figura 10 – Concepção errônea da altura de um triângulo

(ii) Alguns estudantes são conhecidos por possuírem as seguintes restrições:

a) números racionais são apenas numerais da forma a/b.

b) números decimais são apenas numerais da forma ab,cd.

c) números naturais são apenas numerais não-decimais e números não-fracionários.

Por exemplo, estudantes com tais severas restrições numéricas deveriam:

a) negar que 2 é um número racional porque ele não se expressa como fração.

b) negar que 5 é um número decimal porque ele não tem a parte decimal visível.

c) negar que 6/3 e 4,0 são números naturais porque eles não estão na forma de numeral natural.

2.2. <u>Exemplos de princípios superespecializados</u>:

(i) A propriedade comutativa da adição aplica-se a muitos conjuntos de números. Entretanto, alguns estudantes permitirão **a + b = b + a** quando **a** e **b** são números naturais, mas eles não permitem **a + b = b + a** quando **a** e **b** são números inteiros ou fracionários. Por exemplo, eles concordam que 3 + 2 = 2 + 3, mas não concordam que (-3) + 2 = 2 + (-3), ou que 7/8 + 2/3 = 2/3 + 7/8.

(ii) A operação raiz quadrada se distribui sobre a multiplicação, mas não sobre a adição, isto é $\sqrt{\mathbf{ab}} = \sqrt{\mathbf{a}} \times \sqrt{\mathbf{b}}$ mas $\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \neq \sqrt{\mathbf{a}} + \sqrt{\mathbf{b}}$. Alguns estudantes tendo aprendido que $\sqrt{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \neq \sqrt{\mathbf{a}} + \sqrt{\mathbf{b}}$ dizem que $\sqrt{\mathbf{ab}} \neq \sqrt{\mathbf{a}} \times \sqrt{\mathbf{b}}$ erroneamente, restringindo a propriedade distributiva para outras operações exceto para a operação raiz quadrada.

2.3. <u>Exemplo de procedimento superespecializado</u>:

(i) $\frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{6}$

Alguns estudantes acreditam que operações com frações estão restritas apenas àquelas com denominadores iguais. Assim, eles começam cada operação renomeando as frações correspondentemente.

3. Sobre traduções errôneas: Muitos erros acontecem enquanto os estudantes traduzem determinadas formas tais como palavras, símbolos ou fórmulas, tabelas e gráficos. Tais traduções são frequentemente encontradas, e cada tipo de tradução (por exemplo, palavras para símbolos) tem dificuldades associadas a ela. Muitos pesquisadores têm começado a investigar erros e concepções errôneas que ocorrem durante esses processos de traduções.

<u>Exemplo de erros em tradução:</u>

(i) Uma expressão verbal diária como “Ele dividiu as quatro tortas em metade” pode ser transferida em símbolos como ½ ÷ 4.

(ii) Relações expressas em forma de tabela frequentemente são traduzidas erradamente quando os estudantes tentam expressar a relação com uma fórmula. Por exemplo, 58% dos estudantes calouros do curso de cálculo em engenharia escreveram expressões erradas para o comprimento de uma mola versus seu peso mostrado abaixo. A resposta incorreta mais freqüente foi 3S = 100W, quando na realidade é 3W = 100S

Comprimento (S (em cm))	**Peso (W (em g))**
03	**100**
06	**200**
09	**300**
12	**400**

(iii) <u>O erro da variável reversa</u>: Ao traduzir uma sentença em inglês para uma sentença matemática, os estudantes com freqüência revertem o papel das variáveis na equação. A tarefa de tradução clássica usada para lembrar esse erro, é o problema professor-aluno, como segue:

Escreva uma equação para a seguinte afirmação: "Numa universidade há seis vezes tantos estudantes quanto professores. Usando **S** para o número de estudantes e **P** para o número de professores". Escreva uma equação para essa afirmação. Estudantes comentem o erro nessa tarefa frequentemente ao escreverem **6S = P**, ao invés de **6P = S**.

Quando é pedido aos estudantes para interpretar uma equação matemática relativa a duas variáveis um erro reverso semelhante é frequentemente cometido. A porcentagem de pessoas que cometem esse erro cresce dramaticamente quando a razão entre as duas quantidades não é trivial, isto é, $4 \div 5$ ao invés de $1 \div n$. Por exemplo:

Escreva uma equação usando as variáveis **C** e **S** para representar a seguinte afirmação: "No restaurante da Mindy, para cada quatro pessoas que pedem cheesecake (bolo de queijo), há cinco pessoas que pedem strudel (torta de maçã), onde **C** representa o número de cheesecakes e **S** representa o número de strudels". Uma resposta popular para esse exemplo é: **4C = 5S**.

4. Sobre concepções limitadas: Se a concepção errônea de um estudante é notada pela falta de um conceito, de um procedimento ou de um princípio ou, se o estudante tem apenas uma noção limitada daquele conceito, princípio ou procedimento, então o estudante está usando uma concepção limitada. Smith (1984) classificou essas concepções como "concepções fracas" (pontos de vista limitado) ou como "concepções perdidas" (estudantes são capazes apenas de recuperar pedaços e partes da concepção), ou Perkin's e Simmon's (1989) que falam em “conhecimento frágil” (conhecimento que cai quando a capacidade de processamento da pessoas é imposta).

Exemplos:

(i) Hiebert (1986) notou que muitas das dificuldades basicamente apoiadas ou causadas por uma falta de um conceito do significado de um número decimal. Outros pesquisadores têm feito argumentações semelhantes sobre o trabalho dos estudantes com frações ordinárias.

(ii) Desde que alguns estudantes não têm o conceito do significado de números decimais, eles podem estar supergeneralizando as observações feitas dentro do domínio dos números naturais. Por exemplo, quanto mais dígitos houver em um numeral maior será o valor do número. Assim, eles acreditam que 0,009 > 0,26.

(iii) Como muitos pesquisadores já apontaram, estudantes que não têm o conceito dos valores de frações tais como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{5}$ não têm um modo de reconhecer a inadequação da afirmação $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$

Comentários: O exemplo (ii) acima novamente ilustra o entrelaçamento dos tipos de concepções errôneas que são evidenciadas. Os estudantes se deparam com uma falta de conhecimento podendo supergeneralizar um conhecimento existente para uma dada tarefa.

Exemplo de conceito limitado:

(i) Lesh, Post e Behr (1987) relatam que apenas 24% de um grupo de alunos da 8ª série selecionaram a resposta correta para um item de conceito de fração mostrado abaixo. Quarenta e três porcento dos estudantes selecionaram o diagrama (a). Os autores dizem que os resultados indicam uma deficiência séria “sobre os modelos e as linguagens necessárias para representar (descrever e ilustrar) e manipular ideias”.

Que figura tem sombreada seu 1/3 ?

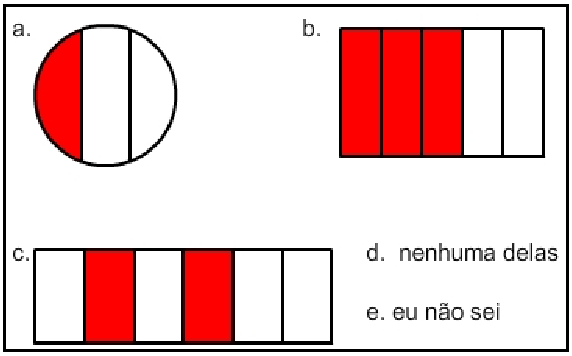


Figura 11 – Figuras sombreadas

As pessoas desenvolvem concepções sobre muitas coisas diferentes: sobre si mesmo, sobre outros e sobre a natureza do mundo ao seu redor. Então, não poderia ser diferente com os estudantes que desenvolvem também suas convicções sobre a escola, sobre as matérias que estudam e sobre suas próprias habilidades. O quê e como as pessoas aprendem é influenciado por suas concepções sobre si mesmas, sobre a sociedade em que vivem e sobre a matéria em questão. Algumas delas sobre a natureza da matemática, seu papel na sociedade e suas habilidades para obter sucesso em matemática parecem facilitar a aprendizagem e posterior sucesso, enquanto que outras parecem impedir essa aprendizagem e esse progresso.

Ao falar de como essas concepções errôneas ocorrem, Graeber e Johnson (1990), citando ainda outros pesquisadores que trabalharam no assunto, dizem que elas parecem ser derivadas do modo como aos estudantes é apresentada a matemática, das atitudes refletidas em uma ampla sociedade e da natureza das tarefas requeridas para os estudantes. Muitos professores e livros textos enfatizam a aprendizagem e a aplicação de fórmulas e regras sem uma ênfase maior sobre a compreensão das fórmulas e/ou regras. Além disso, como assinalam Graeber e Johnson (1990), os estudantes desenvolvem a concepção de que ser capaz de recordar uma regra ou obter uma resposta certa é equivalente à compreensão. Embora, seja importante para os estudantes serem capazes de usar tais regras eficientemente, estudantes que usam tais regras sem compreensão não são capazes de ver como aplicar essas regras em novas situações.

Finalizando, nesse livro, Graeber e Johnson (1990) orientam o professor a como trabalhar com essas concepções, apresentando tópicos tais como: (1) o que essa concepção errônea diz; (2) por que ela acontece; (3) como diagnosticá-la, como ajudar os alunos a superá-las; e (4) suas implicações.

2.1.1.4. Desenvolvimento Profissional

O desenvolvimento profissional possui uma diversidade de concepções que está associado à formação docente. Concordamos com a concepção assumida por Ferreira (2009) quando diz que o desenvolvimento profissional é um processo que se dá ao longo de toda experiência profissional com o ensino e a aprendizagem da Matemática, que não possui uma duração preestabelecida e nem acontece de forma linear. Acrescenta Ferreira (2009) que esse processo – influenciado por fatores pessoais, motivacionais, sociais, cognitivos e afetivos – envolve a formação inicial e continuada, bem como a história pessoal como aluno e professor.

Acredita-se que ensinar Matemática bem pede por um crescimento da compreensão da Matemática que se ensina, buscando uma maior percepção em saber como os alunos aprendem Matemática e a refinar as aulas para, assim, melhor promover a aprendizagem deles. Observar esses aspectos ajuda os professores a atingir esses objetivos, dando-lhes um desenvolvimento profissional por meio de cursos de formação continuada e de publicações.

Como já dito anteriormente, nas Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, o Curso de Bacharelado em Matemática prepara profissionais para a carreira de ensino superior e pesquisa, enquanto que os cursos de Licenciatura têm como objetivo principal a formação de professores para a Educação Básica.

Durante muito tempo, ao se falar em formação de professores, falava-se essencialmente de formação inicial do professor. Preparava-se o professor para exercer a devida profissão durante 30 a 40 anos. Entretanto, como diz Nóvoa (2001) "hoje em dia é impensável imaginar essa situação. A formação de professor é algo que se estabelece num *continuum*. Que começa nas escolas de formação inicial e que continua nos primeiros anos de exercício profissional". E acrescenta:

> Os primeiros anos do professor – que, a meu ver, são absolutamente decisivos para o futuro de cada um dos professores e para a sua integração harmoniosa na profissão – continuam ao longo de toda a vida profissional, através de práticas de formação continuada. Estas práticas de formação continuada devem ter como pólo de referencia as escolas. São as escolas e os professores organizados nas suas escolas que podem decidir quais são os melhore meios, os melhores métodos e as melhores formas de assegurar esta formação continuada (NÓVOA, 2001, p. 2).

Concordamos com a fala de Nóvoa, sobre as práticas de formação continuada terem como pólo as escolas, e com a de Mewborn (2003) que também acredita que as oportunidades de desenvolvimento profissional de professores precisam ocorrer num contexto em que os professores podem experimentar o que aprenderam em suas salas de aula. Diz ela, ainda, que "Os professores precisam de apoio universitário enquanto se engajam em mudar suas práticas.

Esse apoio inclui dar-lhes tempo para junto com seus colegas discutirem a implementação de novas idéias e refletirem individualmente sobre seu ensino" (MEWBORN, 2003, p. 50).

Considerando que os alunos de um curso de Licenciatura serão professores, acreditamos oportuno deixar-lhes, por escrito, experiências de professores, que buscam um bom desenvolvimento profissional, algo referente a esse desenvolvimento profissional, de modo que fiquem prevenidos diante de possíveis reformas no ensino que possam ser-lhes apresentadas.

> Exatamente como não se pode esperar que os estudantes aprendam alguma coisa simplesmente por lhes terem dito que isso é assim, não se pode esperar que os professores mudem sua prática de ensino simplesmente por lhes terem dito que era assim. Cohen (1990) apresentou o caso de um professor que foi ensinado sobre questões de reforma contemporânea numa maneira que era contrária à reforma em si mesma. Tinham dito a ele para fazer alguma coisa como aos estudantes é dito em muitas salas de aulas tradicionais. Em contraste, Shifter (1998) deu exemplo de professores que participaram em sessões de desenvolvimento profissional nos quais eles foram ativamente engajados em aprender novas idéias. Esses professores foram capazes de traduzir o que tinham aprendido na pratica de sala de aula. A pesquisa de Schifter sugere que os professores precisam ter oportunidade de aprender matemática nos modos em que se espera que eles ensinem assim aos estudantes. Ele precisam lidar com idéias matemáticas importantes, justificar seu pensar aos pares, investigar soluções alternativas propostas por outros e reconsiderar suas concepções do que significa fazer matemática (MEWBORN, 2003, p.49).

Em vista disso, foi oferecida, aos alunos da Licenciatura – participantes ativos de nossa pesquisa – uma metodologia, com aplicações dirigidas ao trabalho de sala de aula. Voltaremos a esse assunto no capítulo relacionado à aplicação dos projetos.

O que poderá ser feito com os alunos da Licenciatura, em termos do seu desenvolvimento profissional, visando à sua carreira profissional? Buscando resposta a essa indagação encontramos no livro "*Empowering the Beginning of Mathematics in High School*" – NCTM (2004), editado por de Chappell, Choppin e Salls, sugestões para professores em seus primeiros anos de ensino.

Para os autores, os primeiros anos de ensino são desafiadores e gratificantes e, também, de muita tensão. Espera-se do professor, como novo membro nessa profissão, assumir as mesmas responsabilidades de um veterano de 20 anos, incluindo tudo, desde operar com máquinas copiadoras até ensinar com um currículo baseado em reformas. Talvez seja necessário adaptar-se e desenvolver novas aulas, descobrir como usar novos materiais, determinar as habilidades mais eficientes para gerenciar uma sala de aula e ir ao encontro das necessidades dos alunos. Recomendam ainda, que o professor deve continuamente experimentar novos métodos e tentar aprender com seus sucessos e erros. Tentar seriamente fazer tudo isso! Acreditam ainda que o professor ao enfrentar as realidades do ensino poderá se surpreender como mudar pra continuar seu crescimento profissional.

Chappell, Choppin e Salls (2004, p. 3-4) também apresentam alguns recursos novos que podem ser sugeridos para o desenvolvimento profissional dos professores iniciantes e que podem acontecer ao longo de toda a sua carreira.

- Auto-avaliação: Refletir sobre seu próprio ensino é um passo vital no seu crescimento. Analisar suas aulas e pensar naquilo que foi bem e naquilo que pode precisar de mudança. Esta reflexão pode levar a uma melhora no planejamento da aula e das práticas de ensino. Manter um diário é um modo de registrar suas reflexões.
- Seus colegas: Colaborar com seus colegas é um outro modo de crescer profissionalmente. É importante encontrar colegas bem preparados e que estejam desejosos de compartilhar idéias que funcionam. De fato, nem todas as estratégias que são eficientes para um professor eficiente poderão funcionar para você. Seja seletivo. Busque novas idéias e novos recursos. Faça perguntas. Lembre-se de compartilhar com os outros aquilo que funciona para você.
- Grupos de apoio: Muitas escolas oferecem programas de indução formal e grupos de apoio para professores iniciantes. Frequentemente grupo de novos professores se encontram semanalmente ou mensalmente para compartilhar preocupações e sucessos comuns. Programas de aconselhamento estão também se tornando populares. Considere selecionar e trabalhar com um mentor. Deseje encontrar grupos de apoio mais formais. Você não tem que enfrentar todos os desafios sozinho.
- Revistas e organizações profissionais: Adapte-se a questões e a práticas atuais em educação, lendo revistas profissionais. Encontre tempo no mês para ler um ou dois artigos que lhes interessem. Organizações locais, estaduais e nacionais promovem encontros anuais, encontros acadêmicos e oficinas de trabalho para ajudá-lo profissionalmente. Saber mais sobre que conferências são oferecidas em sua área e atender uma conferência ou oficina de trabalho para saber quão valiosas essas coisas podem ser.
- Novos cursos: Você pode ter-se formado recentemente, mas outros cursos podem estar no seu futuro. Meses depois de formado você poderá quere expandir seu conhecimento de conteúdo matemático e pedagogia, assim como, a prática de sala de aula, por meio de alguma forma de educação do professor. Ter tempo para programas de investigação

e falar com outros no seu campo de atuação talvez sejam cursos apropriados para os tópicos no qual você está interessado.

Como vimos, na fala dos autores, Chappell, Choppin e Salls, o momento de reflexão do professor, seja na ação ou sobre a ação[9], e o momento de investigação são importantes e necessários aos professores iniciantes quando estão em busca de um crescimento profissional. Hoje em dia, não se pode pensar na formação do professor sem pensar no professor reflexivo. Aquele professor que reflete sobre sua prática, que pensa, que elabora em cima dessa prática. É necessário que se crie um ambiente de trabalho coletivo para que se possa identificar essas práticas e construir condições para que elas possam se desenvolver. Nóvoa argumenta a esse respeito dizendo:

> [...] A experiência é muito importante, mas a experiência de cada um só se transforma em conhecimento através desta análise sistemática das práticas. Uma análise que é análise individual, mas que é também coletiva, ou seja, feita com colegas, nas escolas e em situações de formação. [...] Mas, insisto nesse ponto, a experiência por si só não pode ser uma mera repetição, uma mera rotina, não é ela que é formadora. Formadora é a reflexão sobre essa experiência, ou a pesquisa sobre essa experiência. (NÓVOA, 2001, p. 3).

Quando Nóvoa fala em pesquisa sobre a experiência, ele quer dizer que professor pesquisador e professor reflexivo são palavras distintas, mas que correspondem à mesma coisa, a mesma realidade. Para ele, o professor pesquisador é aquele que pesquisa ou que reflete sobre sua prática.

Diante dessa breve incursão vimos que o desenvolvimento profissional não pode acabar simplesmente no programa de treinamento da Licenciatura. É um processo contínuo e que cabe ao formador de professores, neste caso, o formador dos alunos do curso de Licenciatura, conscientizar esses alunos de como se dá esse crescimento profissional, levando-os a refletir e pensar sobre essa questão, pois, segundo Gonçalves e Forentini (2005, p. 69)

> [...] o formador de professores do curso de licenciatura em matemática é também um intelectual e um estudioso que tem como objeto de reflexão e investigação sua própria prática como formador; ou seja, é, ou deveria ser, alguém capaz – tanto teórico-metodologicamente quanto institucionalmente – de transformar sua sala de aula e seu trabalho de formador em um laboratório de estudo no qual, ele, como formador, e seus alunos, como futuros professores, podem e devem desenvolver pesquisa e refletir sobre a prática docente em matemática, seja a de outros a própria.

Assim, podemos dizer que não apenas o futuro professor e o professor dos níveis Fundamental e Médio necessitam aprofundar seus saberes e aprimorar suas práticas, mas

---

[9] Termos usados por Schon (1992), onde o primeiro ocorre durante a prática e o segundo depois do acontecimento, quando este é revisto fora do seu cenário.

também o formador de formadores, o professor universitário, muitas vezes pesquisador, necessita rever suas práticas e saberes e tem muito a aprender com os demais (FERREIRA, 2009).

2.1.1.5. Didática Geral e Didática da Matemática

De acordo com Castro (1991), a Didática é a parte da Pedagogia que estuda os processos de ensino e aprendizagem, ou melhor, é uma ciência cujo objetivo fundamental é ocupar-se das estratégias de ensino, das questões práticas relativas à metodologia e das estratégias de aprendizagem. Sintetizando, poderíamos dizer que ela funciona como o elemento transformador da teoria na prática.

Entretanto, muitos a concebem apenas como uma orientação para a prática, como uma espécie de receituário para o ensino. Em oposição a essa concepção, Ponte (1999, p.4) enfatiza que

> [...] a Didática é mais do que um simples domínio da prática profissional. Ela constitui um campo científico, onde se realiza trabalho de investigação e de produção de novo conhecimento e, como todo campo científico, nela reconhecem-se duas características: um objeto bem definido e uma metodologia de trabalho própria.

Parece, então, que, tradicionalmente, o termo *didática* deva necessária e unicamente referir-se à atividade de ensino. Em uma edição recente do *Vocabolario della língua italiana* de N. Zingarelli [Bologna, Zanichelli, 1999], no verbete didática encontra-se: "Setor da Pedagogia que tem por objeto o estudo dos métodos de ensino"(D'AMORE, 2007, p.15).

Mas, afinal, o que compreende e do que trata a Didática? Não é fácil responder a essa pergunta tão simples, talvez justamente devido à sua simplicidade e clareza. D'Amore (2007), em seu livro *Elementos de Didática da Matemática,* na página 23, afirma que, de acordo com diferentes autores,

- A Didática é a parte das ciências da Educação que tem por objetivo o estudo dos processos de ensino e aprendizagem em sua globalidade, independentemente da disciplina em questão, considerando, porém, a relação institucional;
- Outros eliminariam a citação da relação institucional, mas dariam mais peso às disciplinas;
- Outros insistem na peculiaridade do fato de que a relação ocorra em instituições formais;
- Outros falam da didática de todas as formas, em qualquer situação de ensino-aprendizagem;

- Outros ainda dizem que a Didática seria de novo a Pedagogia, mas sem a Filosofia;
- . . .

Segundo Vergnaud (1977, apud D'Amore, 2007), a Didática não pode ser reduzida nem ao conhecimento da disciplina, nem à Psicologia, nem à Pedagogia, nem à Historia, nem à Epistemologia. Ela pressupõe tudo isso, mas não pode ser reduzida a nenhuma delas; ela possui uma identidade, seus problemas e seus métodos.

Falando um pouco mais sobre a pesquisa em Didática, Bruno D'Amore, 2007, diz que:

> A pesquisa em Didática possui objetivos requeridos por necessidades e por exigências concretas que podem ser expressas, por exemplo, por meio das seguintes perguntas: o que é preciso fazer e saber para tornar o ensino mais eficaz? Como aprendem os alunos? Quais são os instrumentos metodológicos para adaptar o ensino às capacidades individuais? Como avaliar a eficácia da escolha metodológica? Como e quais os instrumentos a avaliar? ... Entretanto, tudo isso é banal se não estiver ancorado em bases teóricas profundas e sólidas (p.30-31).

Tais bases devem ser construídas a partir de pesquisas onde haja a colaboração de estudiosos, a fim de entender a teoria subjacente e as exemplificações.

D'Amore acredita que seu livro, *Elementos de Didática da Matemática,* poderá contribuir para desmontar a idéia, ainda viva, de que para ensinar Matemática basta conhecer Matemática. Lembra-nos que o grande matemático Félix Klein [1849-1925], ao final do século XIX lamentava a ausência de uma preparação para a profissão de professor de Matemática na Universidade, quando dizia:

> O período dos estudos universitários constitui simplesmente um *parêntese universitário*. Primeiro, o futuro professor é um aluno de ensino médio; depois vive esse parêntese e finalmente volta, como professor, para a Escola Básica; não tendo tido nenhuma preparação para essa profissão, nada pode fazer além de adequar-se ao modelo pré-universitário que havia vivenciado (D'AMORE, 2007, p.33).

Com relação à Didática da Matemática, D'Amore (2007, p.34), nos diz que "o seu objeto de trabalho é essencialmente o *ensino* de Matemática e o objetivo, criar situações (na forma de aulas, atividades, objetos, ambientes, jogos, ...) para um *melhor* ensino de Matemática". O argumento mais ou menos explícito parecia ser o seguinte: se o ensino melhora, a aprendizagem também melhorará e a validade dessa suposição era tida como certa. O peso "artístico" da atividade de ensino, portanto, recai completamente sobre o professor. Entretanto, por detrás dessa escolha está a convicção de que a atração exercida sobre a atenção e sobre a motivação do estudante são as características essenciais para que esse último aprenda.

Mais que isso, Varizo (2006, p. 55), acredita que,

> A Didática da Matemática é, sem dúvida alguma, a pedra basilar da formação do professor dessa área, uma vez que oferece as condições básicas para que ele torne um determinado conhecimento matemático passível de ser apropriado pelo aluno. Assim, essa disciplina deve oferecer, ao futuro professor, os saberes teóricos e práticos próprios de um conhecimento interdisciplinar, compreendendo como interdisciplinaridade a articulação que se deve fazer entre o conhecimento matemático acadêmico e os conhecimentos socioculturais, filosóficos, psicológicos, pedagógicos, históricos, antropológicos e tecnológicos, voltados para o ensinar e o aprender Matemática.

<u>Ensinar a Ensinar</u>?

Segundo D'Amore (2007), muitos acreditam, desde há muito tempo, que a tarefa do pesquisador em Didática da Matemática seja a de "*ensinar* a ensinar" e que os destinatários desse "*ensinar*" devam ser os que desejam ser professores (em *formação inicial*, como normalmente se diz) ou aqueles que já são professores (quando estão na fase denominada *formação em serviço*). Por mais que essa crença esteja enraizada, por exemplo, entre os colegas matemáticos, as coisas não são assim. Entretanto, se tal crença se encontra tão difundida, alguma raiz, alguma justificação, alguma origem deve ter, possivelmente nas atividades que, com muitas evidências, têm caracterizado a Didática da Matemática nos anos da primeira grande revolução, que vai de 1950 a 1980, e à qual muitos ainda se referem, não tendo informações posteriores e mais atuais.

Naqueles anos, pretensos especialistas, do alto de suas cátedras, propunham técnicas e idéias, sugeriam argumentos e modalidades, inventavam truques e jogos, pareciam de fato querer "*ensinar* a ensinar"... Esses especialistas eram matemáticos (às vezes também psicólogos ou pedagogos) que haviam decidido dedicar seu próprio tempo (ou parte dele) à relação direta com os professores, ou eram professores muito experientes que, conscientes de sua militância no campo, consideravam poder propor idéias a seus colegas ou aos que aspiravam sê-lo.

Entretanto, por volta do final dos anos 70, ocorreu uma segunda revolução, muito mais radical:

- As relações entre ensino e aprendizagem ficaram melhor esclarecidas;
- Compreendeu-se, com maior profundidade, que aprender não depende apenas da disciplina e da metodologia de ensino, mas também de fenômenos ligados a problemas de comunicação, sociológicos, antropológicos,...

- Compreendeu-se que a idéia de Didática que prevalecera até então, qual seja: “se ensinai bem, os vossos alunos aprenderão”, não apenas era ingênua, mas falsa: uma pura ilusão (Moreno Armella, 1999, apud D’Amore, 2007).

Começou-se também a refletir, de maneira séria e construtiva, sobre os objetivos do ensino de Matemática. Hans Freudenthal [1905-1990], já em 1969, citado por D’Amore, em 2007, escrevia: “A Matemática é mais do que uma técnica. Aprender Matemática significa conquistar a atitude para um comportamento matemático”, dirigindo a atenção para a aprendizagem mais do que para o ensino.

D’Amore acrescenta que a partir do início dos anos 50 e, após o Movimento da Matemática Moderna, até o final dos anos 80, obviamente todos os congressos nacionais ou internacionais referiam-se ao ensino, dado que se dirigiam aos professores. A partir do início dos anos 80, porém, os congressos passaram a ser denominados com o par ensino-aprendizagem. Atualmente, muitos títulos de congressos perderam inclusive o primeiro substantivo. Há uma grande preocupação com o processo da aprendizagem.

Todavia, se a tarefa do estudioso em Didática da Matemática não é a de “*ensinar* a ensinar”[10], então qual é?

D’Amore disse:

> Esse é o ponto: como poderia eu ter a pretensão de ensinar professores da Escola Básica ou professores do Ensino Médio a maneira pela qual ensinar Matemática, logo eu que nunca ensinei em classe alguma desses níveis?. . . Penso que essa colocação explique como as coisas mudaram muito nos últimos 20 anos e que, portanto, a resposta à pergunta, que ainda está no ar (“Se a tarefa do pesquisador em Didática da Matemática *não* é a de *ensinar* a ensinar a Matemática, então qual é?”) necessita de uma reflexão muito mais profunda do que algo banal e simples (D’AMORE, 2007, p. 3).

A Didática no Curso de Formação de Professores:

Segundo Varizo (2006), a Didática, as Didáticas Específicas e as Práticas de Ensino, no Brasil, surgiram com a criação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, em 1934. Antes, a formação de docentes restringia-se aos cursos de disciplinas nos Institutos de Educação. A disciplina Metodologia do Ensino foi incluída no currículo da Escola Normal Superior, criada por Darcy Ribeiro, no Rio de Janeiro.

---

[10] Toda pesquisa nesse livro “Elementos de Didática da Matemática” (Bruno D’Amore, 2007) tem por objetivo chegar à resposta dessa pergunta.

Desde 1934, existe entre os formadores de professores a convicção da importância da Didática no curso de formação de professores, razão pela qual essa disciplina se faz presente nos currículos desses cursos a partir de então. Tal não acontece, porém, do ponto de vista legal. A partir de 1946, a Didática deixou de fazer parte das disciplinas obrigatórias, tornando a ser incluída no parecer 242, de 1962, do Conselho Federal de Educação. Essa legislação incorporou a Didática, as Didáticas Específicas e a Prática de Ensino nos cursos de Licenciatura, além de definir a carga horária mínima das disciplinas pedagógicas.

A partir daí, a Didática Geral e as Didáticas Específicas foram inseridas nos currículos de Licenciatura, com um caráter prescritivo. A idéia de modelo está fortemente presente, concretizada na instituição dos colégios de aplicação, sob a inspiração das idéias de John Dewey. Entretanto, só a partir de 1982, quando a produção de conhecimento científico na área educacional, da própria Didática e das Didáticas Específicas, vão aprofundar-se é que a importância desses conhecimentos para a formação do docente torna-se mais clara e melhor definida.

Considerando a Didática da Matemática uma disciplina fundamental em um curso de formação inicial de professores de matemática, Varizo, 2006, julga ser necessário, a um professor de Didática da Matemática, mobilizar saberes, de modo a contribuir para que o futuro professor estabeleça uma articulação simultânea entre estes e o saber da sua prática, permitindo a construção de um conhecimento holístico, criativo e pessoal, ancorado na ação. Com isso, a Didática da Matemática ganha uma nova dimensão no curso de formação de professores.

Ela, Varizo, ainda chama a atenção para que a Didática da Matemática se firme como um conhecimento cientifico e significativo na formação do professor; e que é preciso vencer crenças extremamente impregnadas numa parcela significativa da sociedade, particularmente a auto-compreensão da ciência matemática, por matemáticos, "no seu puro caráter autotélico"(OTTE, apud VARIZO, 2006, p.56). Ainda hoje, existem aqueles que acreditam que ensinar é fruto de características inatas que não podem ser aprendidas nem transmitidas ou acreditam que a condição necessária e suficiente para ensinar Matemática é a de ter o domínio do conteúdo desta, quando ensinada na universidade. Alegam que se aprende a ensinar ensinando, que se aprende a ensinar Matemática imitando outros professores – os seus próprios professores, ou decorando conteúdo do livro didático ou praticando muito. Isto equivale a dizer que, para ensinar Matemática, bastaria resolver muitos e muitos exercícios, lembrar sua experiência como aluno e desprezar as experiências alheias. Trata-se, portanto, de uma prática vazia, uma prática pela prática. Como diz Armela, apud Varizo (2006, p.56): "O ensino como simples processo de instrução, acrescido de hipóteses sobre a capacidade de o estudante absorver aquilo que se diz “bem” para ele, não é uma concepção: é uma ilusão”.

Concordamos com Varizo quando ela diz que determinadas crenças têm impedido que um número maior de pessoas compreenda que existe um saber matemático pedagógico que permite que a Matemática seja compreendida e apropriada por todos – pelo médico, pelo engenheiro, pelo marceneiro, pelo odontólogo, pelo nutricionista, pelo biólogo, pelo físico, pelo matemático, ou seja, por qualquer profissional. E aqui incluímos principalmente os alunos da Licenciatura, futuros professores. Esse saber deve levar à inclusão e não à exclusão de uma boa parte de nossos concidadãos.

2.1.2. Resolução de Problemas na Formação de Professores

> *Resolução de problemas é uma forma de atividade mental que é caracteristicamente criativa exigindo inventividade na concepção ou reflexão. Os objetivos da resolução de problemas na matemática escolar são os fins mais importantes do currículo da matemática e os meios para os objetivos do desenvolvimento do conceito assim como do desenvolvimento da habilidade.*
> (C. Edwin McClintock, 1982)

Como levar os professores de Matemática a incluir numerosas experiências com Resolução de Problemas, em suas salas de aula, de modo que seus alunos possam aprender Matemática com compreensão e de forma significativa? Resolução de problemas se apresenta como um bom caminho para se ensinar Matemática?

Apesar de problemas terem feito parte do ensino da Matemática desde antes da existência da escola formal, isso não ocorreu com a resolução de problemas. Como observou Brasil (1964), na história das ciências, "o problema antecede invariavelmente as descobertas, é o provocador dos estudos e o orientador das construções teóricas". Porém, muitos de nós vimos problemas, em nossa escolaridade de forma inversa, ou seja, o problema pensado como uma atividade para treinar ou exercitar os conteúdos trabalhados anteriormente em sala de aula.

A crença que predominou e que, possivelmente, ainda exista é a de que só se aprende a resolver problemas por imitação, ou seja, vendo resolver problemas e imitando as atividades e procedimentos de quem os resolve. O professor José Carlos de Mello e Souza[11], citado por Fainguelernt e Bordinhão (1990, p. 49), nos alerta nesse sentido:

> "Aprender Matemática é como aprender a nadar. Os movimentos necessários parecem simples a um observador. No entanto, para consegui-lo é preciso começar batendo os pés, depois os braços, treinar a respiração e o fôlego, também, às vezes 'engolir água', enfim exercitar-se progressivamente até poder flutuar e nadar com tranquilidade. Aquele que apenas observa e depois se atira na água, tentando imitar, certamente se atrapalha, se afoga ou fica com terror à água".

Não podemos negar que esse caminho, predominante como crença, pode servir para algumas pessoas no que se refere à aprendizagem, entretanto precisamos pensar que a escola

---

[11] Professor José Carlos de Mello e Souza, irmão de Júlio César de Melo e Souza, conhecido sob o pseudônimo de Malba Tahan, como chefe do Departamento de Matemática da Universidade de Santa Úrsula, além de Vice-presidente e posteriormente Presidente do GEPEM – Grupo de Pesquisas em Educação Matemática – foi parte ativa e decisiva na criação do curso de Pós-graduação em Educação Matemática, resultante de convênios entre essas duas instituições.

não foi feita para que alguns aprendam e, sim, para que todos aprendam, como salienta Van de Walle (2001)[12]:

> Cada idéia introduzida na sala de aula de Matemática pode e deveria ser completamente compreendida por cada criança. Não há exceções! Não há absolutamente desculpa para as crianças aprenderem qualquer aspecto da matemática sem tê-la compreendido. Todas as crianças são capazes de aprender tudo de matemática que queremos que elas aprendam, e elas podem aprendê-la de uma maneira significativa, de uma forma que faça sentido para elas (VAN DE WALLE, 2001, p.17).

Diante do exposto, não podemos pensar em problema como uma atividade puramente técnica e, sim, como uma ferramenta para pensar matematicamente, que envolva a todos.

Reforçando essa idéia dizem Villa e Callejo (2006, p. 29) que "isso exige um clima educativo que favoreça a confiança de cada aluno em suas próprias capacidades de aprendizagem; um ambiente em que se tenha o prazer com os desafios e com a própria atividade intelectual".

Considerando a Resolução de Problemas[13] uma parte importante do ensino de Matemática, faz-se necessário que levantemos, inicialmente, algumas concepções sobre o que é um problema matemático. Prosseguindo, faremos uma breve retrospectiva histórica da Resolução de Problemas e, por fim, apresentaremos uma metodologia alternativa de trabalho para a sala de aula como um caminho para ensinar e aprender Matemática.

2.1.2.1. O que é um Problema?

Na literatura, várias são as concepções que se tem do termo "problema":

> "Um problema significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para alcançar um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível" (POLYA, 1962, p. 117).
>
> "Qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta" (VAN de WALLE, 2001, p. 42).

---

[12] Tradução de "*Every* idea introduced in the mathematics classroom can and should be completely understood by *every* child. *There are no exceptions*! There is absolutely no excuse for children learning any aspect of mathematics without completely understanding it. All children are capable of learning all of the mathematics we want them to learn, and they can learn it in a meaningful manner, a way that makes sense to them" (p. 17).

[13] O termo "Resolução de Problemas" será usado quando nos referirmos à teoria da Resolução de Problemas e o termos "resolução de problemas"será usado quando nos referirmos ao procedimento.

> "Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma seqüência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la" (PCN, 2001, p. 44).
>
> "É toda situação em que se tem um planejamento inicial e uma exigência que obriga a transformá-lo. O caminho, para passar da situação ou planejamento inicial à nova situação exigida, tem que ser desconhecida e a pessoa deve querer fazer a transformação" (PÉREZ e CABRERA, 2000, p. 118).
>
> "É qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la" (DANTE, 1995, p. 10).
>
> "Um problema é uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova" (VILLA e CALLEJO, 2006, p. 29).
>
> "Problema é toda situação em que os alunos necessitam pôr em jogo tudo o que sabem, mas que contém, também, algo novo, para o qual ainda não têm resposta e que exige a busca de soluções" (MARINCEK e CAVALCANTI, 2000, p. 151).
>
> "É tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer" (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Todas essas concepções têm algumas características comuns. O problema deve ser acessível ao resolvedor e, para tal, é necessário: que ele tenha um conhecimento prévio de conteúdos matemáticos necessários para chegar à sua solução; que se sinta motivado para resolvê-lo; e que facilite o desenvolvimento de sua intuição e criatividade, levando-o a exercitar o seu pensar matemático. Acreditamos que, nessas condições, podemos predizer um favorecimento na aquisição da aprendizagem. De todas essas concepções apresentadas, adotamos a de Onuchic.

2.1.2.2. O que é Resolução de Problemas?

A importância dada à resolução de problemas é recente e somente nas últimas décadas do século passado é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção.

Fazendo uma breve retrospectiva da história da resolução de problemas, podemos dizer que, segundo Stanic e Kilpatrick (1989, p. 1), desde a Antiguidade problemas têm ocupado espaço no currículo escolar da Matemática, mas somente há bem pouco tempo a resolução de problemas tem merecido atenção dos educadores. Só recentemente é que os educadores matemáticos têm aceitado a idéia de que o desenvolvimento de habilidades em resolver problemas merece atenção especial, mas este foco sobre resolução de problemas tem trazido muita confusão. O termo resolução de problemas tornou-se um *slogan* assumindo diferentes visões sobre o que é a educação, a escolaridade, a matemática e discutindo acerca da razão porque temos que ensinar matemática em geral e resolução de problemas em particular.

Problemas no currículo escolar podem ser encontrados nas antigas civilizações, como a babilônica, a egípcia, a chinesa e a grega. Por exemplo, segundo Chase apud Stanic e Kilpatrick (1989), o Papiro de Ahmes, copiado em 1650 de um documento bem mais antigo, é um manuscrito matemático egípcio formado por uma coleção de problemas. Em um desses problemas esperava-se que ao resolvedor fosse pedido para achar a soma de uma progressão geométrica de cinco termos onde o primeiro termo e o multiplicador fossem ambos iguais a sete.

Stanic e Kilpatrick[14] (1989, p. 8) nos dizem que, desde Platão, tem-se a idéia de que, estudando Matemática, melhora-se a capacidade de pensar, de raciocinar e de resolver problemas com que nos confrontamos no mundo real. Para os autores, os problemas foram um elemento do currículo de matemática que contribuíram, assim como outros elementos, para o desenvolvimento do poder de raciocínio.

Retomando a história da resolução de problemas a partir do século XX e tomando como referência o texto de Onuchic (1999) intitulado: "*Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas",* e ao falar das reformas ocorridas durante esse século, enfatiza-se que o ensino de Matemática, no início do referido século, foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização de fatos básicos era considerado importante. Anos depois, dentro de outra orientação, os alunos deveriam aprender com compreensão, ou seja, os alunos deveriam entender o que faziam. Mas, o professor falava, o aluno escutava e repetia. Entretanto, não participava da construção de seu conhecimento. Essas duas reformas não obtiveram sucesso quanto a uma melhora na aprendizagem dos alunos. É bem verdade que alguns alunos aprendiam, mas a maioria não. Nessa mesma época já se falava em resolução de problemas como um meio de se aprender Matemática.

Um fato fundamental no ensino da resolução de problemas foi marcado, no ano de 1945, pela publicação da obra **How to solve it?** de George Polya onde, nessa obra, pela primeira vez, é ilustrado um caminho didático para o ensino da resolução de problemas. Nos Estados Unidos, em 1948, surgiu o trabalho de Herbert F. Spitzer, em Aritmética Básica, que

[14] Stanic e Kilpatrick, em seu artigo: *Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum* (1989), apontam vários exemplos e métodos particulares de resolução de problemas mostrando que os problemas tiveram uma longa história nos currículos de matemática desde a Antiguidade.

se apoiava numa aprendizagem com compreensão, sempre a partir de situações-problema. No Brasil, em 1964, temos o trabalho do professor Luis Alberto S. Brasil que defendia um ensino de matemática a partir de um problema gerador de novos conceitos e novos conteúdos.

Algumas das estratégias básicas propostas por Polya adquiriram grande popularidade nas investigações em Educação Matemática e em alguns textos de matemática escolar. Vale ressaltar aqui que Polya, já naquela época, acreditava que o "ensinar a pensar" devia ser o objetivo prioritário do ensino, pois, para ele:

> "Ensinar a pensar significa que o professor de Matemática não deveria simplesmente comunicar informação, mas deveria também tentar desenvolver a habilidade dos estudantes em usarem a informação transmitida: ele deveria enfatizar o saber-fazer, as atitudes úteis e os hábitos da mente desejáveis (POLYA, 1964, p. 100).

Polya, em seu livro Mathematical Discovery (1964), no capítulo XIV, *"On Learning, Teaching and Learning Teaching"* dizia que esse objetivo precisava certamente de maiores explicações, mas, nesse caso, será suficiente enfatizar apenas dois aspectos: primeiro, esse ensinar a pensar, ou seja, o pensamento com o qual Polya estava preocupado, significava, na visão dele, um "pensar para um propósito", ou um "pensar voluntário" (William James) ou, ainda, um "pensar produtivo" (Max Wertheimer). E essas formas de "pensar" podem ser identificadas, pelo menos numa primeira abordagem, com resolução de problemas. Segundo, o pensar matemático não é puramente "formal", não está apenas relacionado com axiomas, definições e demonstrações rígidas, mas também com muitas outras coisas pertencentes a ele: generalização a partir de casos observados, argumentos indutivos, argumentos de analogia, reconhecimento de um conceito matemáticos ou extraindo-o de uma situação concreta. O professor de matemática tem uma excelente oportunidade para instruir seus alunos com estes importantíssimos processos de pensamento "informais". Ou seja, o professor deveria utilizar esta oportunidade melhor, e muito melhor, do que ele faz hoje. Finalizando, diz Polya: "*Estabelecido incompletamente, mas concisamente, deixem os professores ensinar demonstrando por todos os meios, mas deixem-nos também ensinar conjecturando*".

Polya preconizava um ensino ativo para a Matemática, na crença de que um aprendizado eficiente dar-se-ia se o estudante imergisse no mundo da descoberta.

Segundo Andrade apud Onuchic (1999), as investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares tiveram início na década de 70, do século XX, e, ganharam espaço no mundo inteiro já no final da referida década. Começando, então, o movimento a favor de um ensino baseado em resolução de problemas.

Discussões no campo da Educação Matemática no Brasil e no mundo mostraram a necessidade de se adequar o trabalho escolar a novas tendências que pudessem aprimorar melhores formas de ensinar, de aprender e de avaliar o progresso dos alunos e o trabalho dos professores.

Nos Estados Unidos, em 1980, o NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática) já manifestava sua preocupação com essas questões e, então, publicou o documento *An Agenda for Action: Recomendations for School Mathematics of the 1980's* (*Uma Agenda para Ação: Recomendações para a matemática escolar nos anos 80*), que chamava todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos, num esforço cooperativo massivo, buscarem uma melhor compreensão matemática para todos. A primeira dessas recomendações dizia: "*resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar para os anos 80*". Os educadores matemáticos daquela época tinham um grande interesse em fazer da resolução de problemas um foco do currículo de Matemática.

Segundo Onuchic (1999), muitos dos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho em sala de aula, na forma de coleção de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas e, muito desse material passou a ajudar os professores a fazerem da resolução de problemas o ponto central de seu trabalho.

A autora, ainda chama a atenção ao fato de que os estudos da década de 80 deram grande atenção ao processo de resolução de problemas, não se limitando à busca da solução, mas, mesmo assim, o processo continuou preso à busca dessa solução.

Já no fim da década de 80, pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos. Começaram a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas e a noção de que a resolução de problemas devesse desempenhar um papel importante no currículo de forma que tivesse aceitação bastante definida.

Para Andrade apud Onuchic (1999, p. 207)

> Resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação de conceitos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal.

Sendo assim, a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino passa a ser o lema das pesquisas e estudos para os anos 90 e, a partir desta década, começam a surgir propostas curriculares como, por exemplo, no Brasil, a Proposta Curricular de Matemática para os Centros Específicos para a Formação de Alunos do Magistério – CEFAM – São Paulo, tendo como objetivo principal caracterizar melhor a Matemática que deve estar presente na formação dos professores das séries iniciais. A abordagem sugerida é a do aluno participando na construção de seu conhecimento. Assim, os problemas matemáticos devem exigir os conteúdos e não ao contrário como tradicionalmente é feito. Para isso, a proposta enfatiza dois recursos metodológicos: “Resolução de Problemas” e “História da Matemática”. Nessa proposta, a metodologia de resolução de problemas

> trata de problemas que não têm evidente, em seu enunciado, que algoritmo deve ser combinado de maneira nova para enfrentá-lo. [...] A aplicação desta técnica pedagógica requer do professor uma alteração de postura, exigindo uma atitude de maior questionamento frente a um problema. A resposta correta tem seu valor diminuído e a ênfase deve ser dada no processo de resolução, permitindo o aparecimento de soluções diferentes, comparando-as entre si e pedindo que alguns resolvedores verbalizem como chegaram à solução (SÃO PAULO, 1990, p. 15).

Os PCNs (2001) também adotam a Resolução de Problemas como um caminho para fazer matemática em sala de aula. Enfatizam que o problema é o ponto de partida de uma atividade matemática e não a definição de conceitos. No processo de ensino-aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas.

Os *Principles and Standards for School Mathematics* – NCTM (Princípios e Padrões para as Matemática Escolar, (2000, USA)[15] – também conhecido como Standards 2000, compreende que o padrão de procedimento “Resolução de Problemas” significa o engajamento numa tarefa para o qual o método de resolução não é de início conhecido. Para chegar à solução, o aluno precisa buscar em seu conhecimento prévio e, através desse processo, conseguir desenvolver novas compreensões matemáticas. Resolver problemas não é somente um objetivo da aprendizagem matemática mas, também, um meio importante de se fazer matemática. Dizem ainda os Standards 2000 que:

[15] A partir do fim da década de 80, o NCTM, em busca de uma nova reforma para a Educação Matemática publicou: (1)*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), que foi projetado para falar àqueles muito próximos de poder tomar decisões sobre o currículo de Matemática: professores, supervisores e promotores de materiais instrucionais e currículo e descreve toda a Matemática que os alunos devem saber e serem capazes de fazer; (2) *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991), que ilustra caminhos pelos quais os professores podem estruturar as atividades em sala de aula, de modo que os alunos possam aprender a matemática descrita nos *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*; (3) Assessment Standards for School Mathematics (1995), que contém os princípios em que professores e educadores se apóiem para construir práticas de avaliação que ajudem no desenvolvimento de uma Matemática para todos. Finalmente, os *Principles and Standards for School Mathematics* (2000), também conhecido como Standards 2000, um documento que fornece as orientações para o ensino da Matemática para os níveis K – 12.

> Resolver problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, assim, ela não deveria ser uma parte isolada do programa de Matemática. [...] Os contextos dos problemas podem variar desde experiências familiares envolvendo as vidas dos estudantes ou seu dia-a-dia na escola, até aplicações envolvendo as ciências ou o mundo do trabalho. [...] Bons problemas dão aos estudantes a oportunidade de solidificar e estender sua compreensão e estimular nova aprendizagem. [...] Muitos conceitos matemáticos podem ser introduzidos através de problemas baseados nas experiências familiares vividas pelos estudantes ou de contextos matemáticos (STANDARDS, 2000, p. 52)

2.1.2.3. Diferentes abordagens de Resolução de Problemas

Relata Onuchic, em 1999, que devido a uma falta de concordância sobre a recomendação deixada pelos documento "*Uma Agenda para a Ação*" ocorrida, possivelmente, pelas diferenças existentes entre as concepções que pessoas e grupos, envolvidos com a Educação Matemática, tinham sobre o significado de "Resolução de Problemas ser o foco da matemática escolar", o trabalho da década de 80 não chegou a um bom termo. Para ajudar a refletir sobre essas diferenças, Schroeder e Lester (1989) citaram duas maneiras distintas de abordar resolução de problemas: (1) ensinar *sobre* Resolução de Problemas; (2) ensinar *para* resolver problemas, que foram as adotadas nessa década. Livros escritos sobre esses dois caminhos, isto é, livros da década de 80, sempre se referiam ou aos quatro passos de Polya[16] ou a variação deles, ou ao uso de estratégias indicadas para a resolução de problemas[17].

2.1.2.3.1. Ensinar *sobre* Resolução de Problemas

Ensinar *sobre* Resolução de Problemas significa trabalhar esse assunto como um novo conteúdo, adicionando a esse trabalho muitas heurísticas ou estratégias. Enfim, teorizando sobre o assunto. O professor que ensina *sobre* resolução de problemas realça o modelo de Resolução de Problemas de Polya ou alguma variação dele. Esse modelo descreve um conjunto de quatro fases interdependentes no processo de resolução de problemas matemáticos: compreender o problema; devisar um plano; levar o plano adiante; e olhar de volta ao problema original, no intuito de analisar a validade da solução encontrada. Aos estudantes, dentro dessa idéia, são ensinadas claramente as fases que, de acordo com Polya,

[16] Ver Math – monograph nº 7, proof of Alberta – Problem Solving in the Mathematical Classroom (MCATA), 1982.

[17] Ver Strategies for Problem Solving – Lesson plans for developing mathematical thinking – Kaye Stacey na Susie Groves, 1985.

um esperto resolvedor de problemas as utiliza quando está resolvendo problemas matemáticos, e ele é encorajado a tomar conhecimento de seu próprio progresso, através dessas fases, enquanto resolve o problema.

2.1.2.3.2. Ensinar *para* resolver problemas

Para Schroeder e Lester (1989), no ensinar *para* resolver problemas, o professor se concentra sobre os modos em que a Matemática está sendo ensinada e que possam ser aplicadas na resolução tanto de problemas rotineiros como de problemas não rotineiros[18]. Embora a aquisição do conhecimento matemático seja de fundamental importância, o propósito essencial para aprender matemática é o de ser capaz de usá-la. Consequentemente, aos estudantes devem ser dados muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas que eles estão estudando, e muitas oportunidades em aplicar essa matemática na resolução de problema. Além disso, o professor que ensina *para* resolver problemas está muito preocupado sobre a habilidade dos estudantes em transferir aquilo que eles já aprenderam no contexto de um problema para outros. Uma forte justificativa dessa abordagem é a de que a única razão para aprender Matemática é a de ser capaz de usar o conhecimento adquirido em sala de aula para resolver problemas.

2.1.2.3.3. Ensinar *via* resolução de problemas

Acabando a década de 80**,** em 1989, Schroeder e Lester alertaram sobre a falta de consenso na interpretação da primeira recomendação deixada pelo documento "*Uma Agenda para Ação"*, que pedia que a resolução de problemas fosse o foco da matemática escolar nos anos 80. Com isso, pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos e começaram a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas, e, como já foi dito antes, por Andrade (1989, p. 12), a resolução de problemas passou a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática.

Nesse ano de 1989 estudiosos passam a trabalhar o ensino de Matemática "via" resolução de problemas, entendendo "via" como um meio de se aprender Matemática. Como afirmam Schroeder e Lester (1989, p. 33)

[18] Os problemas são considerados rotineiros quando, no processo de resolução, podem-se encontrar os caminhos de solução, de uma maneira direta, do próprio conteúdo da matéria que se aborda na escola e, neles, se empregam procedimentos que não chegam a ser propriamente algoritmos, nem tampouco chegam a ser procedimentos heurísticos.

> No ensino *via* resolução de problemas, os problemas são trabalhados não apenas com o propósito de se aprender Matemática, mas também como o principal meio de se fazer isso. Nessa abordagem, o ensino de um tópico de Matemática começa com uma situação problema que incorpora aspectos chave do tópico, e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis a problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender Matemática é o de transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. A aprendizagem matemática, nessa forma, pode ser vista como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como um exemplo de conceito matemático ou de técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com estes símbolos).

Schroeder e Lester (1989, p. 34), diferentemente das outras duas primeiras abordagens, diziam que ensinar via resolução de problemas é uma concepção que não tem sido adotada, nem implicitamente, nem explicitamente por muitos professores, autores de livros-texto e desenvolvedores de currículo, mas ela é uma abordagem para se ensinar matemática e que merece ser considerada, desenvolvida, experimentada e avaliada. Não há dúvida de que ensinar matemática *via* resolução de problemas é a abordagem mais consistente com as recomendações da Comissão de Padrões do NCTM, que dizem:

Habilidades e conceitos matemáticos devem ser aprendidos no contexto da resolução de problemas;

O desenvolvimento de processos de pensamento de nível superior deve ser estimulado através de experiências em resolução de problemas;

O ensino de Matemática deve acontecer numa atmosfera de resolução de problemas, orientada para a pesquisa.

2.1.2.3.4. Ensinar *através* da resolução de problemas

Foi, a partir de 1990, que a abordagem "ensinar via resolução de problemas"(*Teaching via Problem Solving*) passou a ser "ensinar através de resolução de problemas"(*Teaching through Problem Solving*) que, como se pode perceber, é uma metodologia bastante nova na história da pesquisa em resolução de problemas no currículo de Matemática. Sua abordagem se encontra ainda no seu estado da arte. Nela o que se pretende é ensinar, aprender e avaliar a matemática construída pelos alunos com a guia e direção do professor *através* da resolução de problemas.

O que diferencia essa abordagem da anterior é que a expressão "através de" significa do começo ao fim, inteiramente, ao longo da resolução do problema e não simplesmente um recurso para se resolver o problema dado como pedia a expressão "via" que significa "por meio de". Portanto, a expressão "através de" é uma forma de ensinar e, consequentemente, aprender e, durante o processo, fazer matemática, pois o aluno diante do problema deve se mostrar como um co-construtor do seu próprio conhecimento. Nessa abordagem o objetivo primeiro é apresentar para os alunos problemas que gerarão novos conceitos ou conteúdos. Conforme disse Jinfa Cai (1998, p. 242 e 253)

> Ensinar através da resolução de problemas inicia-se com um problema. Os estudantes aprendem e compreendem aspectos importantes de conceitos ou idéias matemáticas ao explorarem a situação problema. [...] A aprendizagem acontece durante o processo da resolução do problema. Enquanto os estudantes resolvem o problema eles podem fazer uso de qualquer abordagem que tenham pensado, isto é, fazer uso de qualquer parte do conhecimento que já possuem e justificar suas idéias no modo que eles acreditam ser convincente. O ambiente de aprendizagem de uma sala de aula baseada em problemas dá um cenário natural para os alunos apresentarem variadas soluções ao seu grupo ou à classe e aprenderem matemática através de interações sociais, negociações significativas e de compreensão compartilhada.

Outro pesquisador que propõe um trabalho de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas é Van de Walle (2001). Em seu livro *Elementary and Middle School Mathematics – Teaching Developmentaslly*, ele considera a resolução de problemas como o foco do currículo de Matemática e diz que o ensino de Matemática através da resolução de problemas deve ser visto como a principal estratégia de ensino. Além disso, ele chama a atenção para que o trabalho de ensinar comece sempre onde estão os alunos, ao contrário da forma tradicional em que o ensino começa onde estão os professores, ignorando-se, muitas vezes, o que os alunos trazem consigo para a sala de aula.

> A maioria, se não todos, os conceitos e procedimentos matemáticos importantes podem ser melhor ensinados através da resolução de problemas. Isto é, tarefas ou problemas podem e devem ser colocados de forma a engajar os estudantes em pensar e desenvolver a matemática importante que precisam aprender[19] (VAN DE WALLE, 2001, p. 40).

Segundo Van de Walle (2001) não há dúvida de que ensinar matemática através da resolução de problemas não é tarefa fácil. Diz, ainda, que o professor deve estar bem preparado para trabalhar, usando esse caminho, no sentido de que as tarefas devem ser selecionadas e planejadas a cada dia, levando em consideração o conhecimento prévio dos estudantes e as necessidades de atender ao currículo. Van de Walle apresenta algumas razões que justificam trabalhar seguindo esse caminho:

---

[19] Tradução de : *Most, if not all, important mathematics concepts and procedures can best be taught through problem solving. That is, tasks or problems can and should be posed that engage students in thinking about and developing the important mathematic the need to learn.*

- A resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre “idéias” e sobre o “dar sentido a elas”;
- A resolução de problemas desenvolve um “*mathematical power*”. Recorrendo à publicação *Mathematics Framework for Califórnia Public Schools* (1992), na página 2, podemos entender o significado dessa expressão quando diz: “estudantes matematicamente fortes pensam e se comunicam, elaborando sobre idéias e usando ferramentas e técnicas matemáticas”.

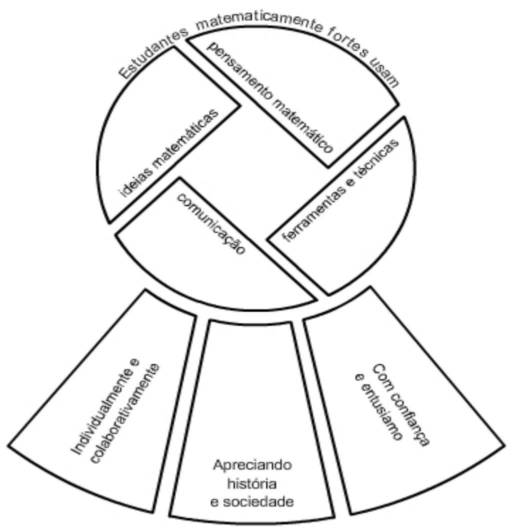
Qual o significado dessas palavras nesse contexto?

(1) Pensamento – refere-se a uma atividade intelectual e inclui analisar, classificar, planejar, comparar, investigar, projetar; inferir e deduzir; levantar hipóteses e fazer modelos matemáticos, e testar e verificá-los.

(2) Comunicação – refere-se à expressão coerente de processos e resultados matemáticos de alguém.

(3) Idéias – referem-se a conteúdos: conceitos matemáticos como adição, relações proporcionais, geometria, contagem e limite.

(4) Técnicas e Ferramentas – estendem-se desde ferramentas, literalmente falando, como calculadoras e compassos e seu uso eficiente, até o uso de ferramentas figurativas como algoritmos computacionais e a visuais de dados.



“Mathematical Power”, que envolve a habilidade em discernir relações matemáticas, raciocinar logicamente, e usar técnicas matemáticas com eficiência, deve ser a preocupação central da Educação Matemática e precisa estar no contexto em que as habilidades são desenvolvidas (Mathematics Framework, 1985, p.1).

Figura 12 – O poder da Matemática

Estudantes matematicamente fortes usam essas quatro componentes, as dimensões do poder da matemática, para dar significado às coisas. Isto é, o trabalho de uma matemática forte é intencional e determinado. Este propósito não precisa ser utilitário; ao contrário, os estudantes podem ser motivados por curiosidade ou capricho – desde que eles tenham um sentido para esse propósito. Três expectativas adicionais a essas quatro componentes para os estudantes são: que eles trabalhem com sucesso tanto individualmente como com outros; venham a apreciar a matemática na história e na sociedade em que vivem; e exibam atitudes positivas para com a matemática, trabalhando com confiança, persistência e entusiasmo.

- A resolução de problemas desenvolve nos estudantes a crença de que eles são capazes de fazer matemática e de que ela faz sentido;
- A resolução de problemas proporciona uma avaliação contínua de dados que podem ser usados para tomar decisões instrucionais, ajudar os estudantes a terem sucessos na aprendizagem e dar informação aos pais;
- Trabalhar com resolução de problemas é prazeroso. Os professores que experimentam trabalhar nessa maneira nunca voltam ao modo do ensinar-falando.

Como deveria ser o ambiente em uma sala de aula que ensina matemática *através* da resolução de problemas?

Van de Walle (2001) declara que, ao ensinar *através* da resolução de problemas, não se pode esperar sentado que uma mágica aconteça. O professor é responsável por criar uma atmosfera para o bom funcionamento da aula. Para isso, pode-se pensar numa aula constituída por três partes principais: o *Antes*, o *Durante* e o *Depois*. Cada uma dessas partes carrega uma programação específica e requer ações específicas do professor, que são necessárias para tornar a aula eficiente.

- *Antes – Dando a partida:* Neste momento, como parte da aula, o professor deve preparar os estudantes mentalmente para trabalhar sobre o problema e pensar sobre os tipos de idéias que mais os ajudarão. O professor deve estar seguro que os alunos compreenderão a tarefa a ser proposta. Deverá estar seguro que eles compreenderão suas responsabilidades. No fim deste planejamento não deverá haver dúvidas sobre a tarefa ou sobre o que deve ser feito. Os estudantes deverão sempre começar a pensar sobre as idéias relevantes e estarem prontos para trabalhar.

- *Durante – Vamos para frente*: Nesta fase deve-se dar oportunidade aos alunos para trabalhar sem a direção do professor. O professor deve dar a eles a chance de usar as suas próprias idéias e não simplesmente seguir diretrizes. Deve acreditar na habilidade deles. Um segundo ponto é saber ouvir. Descubra como diferentes alunos ou grupos estão pensando, que idéias estão usando e como eles estão abordando o problema.

- *Depois – Discussão em classe:* Nesta parte da aula o professor deve engajar a classe numa fala produtiva e ajudar os estudantes a começar a trabalhar como uma comunidade de aprendizes. Não avalie os estudantes. Eles precisam aprender tanto a contribuir para quanto a participar dessas discussões. Eles precisam saber ouvir os outros e ajudar a decidir que abordagens e soluções dão mais sentido ao trabalho e por quê? O pensar não precisa parar quando o problema está resolvido, pois é essa a hora de encorajar a reflexão sobre as resoluções, os métodos e as extensões.

2.1.2.4. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Como já foi dito "Ensinar Matemática através da resolução de problemas é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM e dos PCN, pois conceitos e habilidades matemáticos são aprendidos no contexto da resolução de problemas". (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 222).

O GTERP, Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas, coordenado por Onuchic desde 1992, na UNESP de Rio Claro, tem por objetivo central desenvolver pesquisas que efetivamente atinjam a sala de aula e tem sido o núcleo gerador de atividades de aperfeiçoamento, de investigação e de produção científica na linha de Resolução de Problemas em Educação Matemática e adota a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Nesta metodologia, que ora apresentaremos, suas raízes se fixaram a partir do momento em que a professora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic desenvolveu um Projeto, intitulado *Ensinando Matemática através da Resolução de Problemas,* numa parceria da Universidade Federal de São Carlos – UFSCar; Universidade de São Paulo – USP de São Carlos; e Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – UNESP de Rio Claro, em um Programa de Educação Continuada – PEC, junto à Secretaria de Educação do Estado de São

Paulo, durante os anos de 1997 e 1998, com professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio. Nela, o ensino e a aprendizagem deviam ocorrer simultaneamente, durante e através da resolução de problemas, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores do conhecimento. A avaliação contínua devia estar integrada ao ensino-aprendizagem, no intuito de acompanhar o crescimento dos alunos e reorientar as práticas da sala de aula dos professores quando necessárias.

Em um dos relatórios apresentado à Secretaria do Estado de Educação de São Paulo, Onuchic (1998) dizia que para desenvolver esse Projeto seria preciso trabalhar sobre o conhecimento matemático dos professores participantes e sobre as crenças que traziam de Matemática e de Ensino-Aprendizagem de Matemática. Além disso, ela ressaltava que não foi um trabalho fácil fazer com que os professores aceitassem mudar sua forma de trabalho e suas crenças em relação à Matemática e a seu ensino em sala de aula.

Durante o desenvolvimento desse Projeto, Onuchic (1999), concordando com os PCN, defendia que o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição de conceitos, mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem. Essa atividade matemática escolar não se resume apenas em olhar para as coisas prontas e definitivas para a construção e apropriação, pelo aluno, de um conhecimento que serviria para compreender e transformar a realidade. Dessa forma, a resolução de problemas é vista como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção de conhecimento novo.

Visando a um ensino-aprendizagem com compreensão e significado, Onuchic, juntamente com os professores participantes desse Projeto, apoiados em literatura consultada e aproveitando suas experiências, criaram uma proposta para se trabalhar em sala de aula, com alunos, na qual qualquer objeto matemático pudesse ser trabalhado através da resolução de problemas. A proposta, que surgiu em 1998, criado durante o Projeto de Educação Continuada – PEC, acatando as solicitações dos professores participantes de visualizarem um caminho para suas aulas, teve necessidade de se expressar como uma dinâmica para a sala de aula seguindo o seguinte roteiro de atividades:

- ✓ **Formar grupos – entregar uma atividade (um problema)**

  É mais fácil trabalhar 10 grupos do que 40 indivíduos separadamente. Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado. Progredir em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. Os estudantes precisam experimentar esse processo cooperativo e deve-se dar, a eles, oportunidade de aprender uns com os outros. Assim, devemos organizar os alunos em pequenos grupos e muito da aprendizagem, em sala de aula, será feita no contexto desses grupos.

- ✓ **O papel do professor**

  Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de "comunicador de conhecimento" para o de "observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem". O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a "pensar", espera que eles "pensem", dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários (coisas que não sabem porque nunca viram ou que já se esqueceram).

- ✓ **Resultados na lousa**

  Com o trabalho dos alunos terminado, o professor anotaria na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Agrupa resultados certos, errados, feitos por diferentes caminhos,...

- ✓ **Plenária**

  Chama os alunos todos, de todos os grupos, para uma assembléia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados. Participam.

- ✓ **Análise dos resultados**

  Nesta fase, os nós, isto é, os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos, são novamente trabalhados. Nesse trabalho, surgem, outra vez, problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir o "levar o trabalho a frente". O aspecto exploração é bastante considerado nesta análise.

- ✓ **Consenso**

  A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.

- ✓ **Formalização**

  Agora, num trabalho conjunto, professor e alunos, com o professor na lousa, faz-se uma síntese do que se objetivava "aprender" a partir do problema ou situação problema dado e, formalmente, são colocadas, pelo professor, as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações.

Como recursos auxiliares, nesse trabalho, podem ser utilizados materiais didáticos, calculadoras, jogos, papel, tampinhas, etc.

Resumidamente, segundo Zuffi e Onuchic (2007), com essa metodologia, pedia-se, aos alunos, a compreensão dos dados de um problema, que soubessem tomar decisões, estabelecer relações, saber comunicar seus resultados e serem capazes de usar técnicas conhecidas. Esses aspectos deviam ser estimulados em um processo de aprendizagem desenvolvido através da resolução de problemas. Somente no final do processo, ou seja, somente depois da resolução do problema ser processada é que a formalização acontece, onde o simbolismo, as definições e as técnicas precisas seriam introduzidas, dando-se, dessa forma, liberdade aos alunos, evitando-se direcioná-los para o que "pensar" ou o que "fazer", conduzindo-os em casos de maiores dificuldades (problemas secundários), ou seja, quando eles não soubessem como agir.

Ao repensar sobre essa forma de trabalhar em sala de aula, algumas modificações a esse roteiro de atividades foram se fazendo necessárias. Os alunos apresentando dificuldades em leitura e interpretação de textos, com mais dificuldades na matemática escolar, e com menos domínio nas técnicas operatórias, não tinham condições de receber uma atividade a ser lida e trabalhada no grupo, sem uma ajuda direta do professor. Então, tentando permitir a aplicação desse roteiro de atividades, foi feita uma sua reapresentação, organizando as atividades dadas nas seguintes etapas:

- ✓ **Formar grupos e entregar a atividade (o problema)**

  O professor apresenta o problema aos alunos que, distribuídos em pequenos grupos, leem e tentam interpretar e compreender o problema. Ressalte-se que o conteúdo necessário, ou mais indicado, para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula. O problema proposto aos alunos, que chamamos **problema gerador**, é que conduzirá ao conteúdo que o professor planejou construir naquela aula.

- ✓ **Observar e Incentivar**

  O professor não mais tem o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos tentam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. O professor faz a intermediação no sentido de levar os alunos a pensar, dando-lhes tempo para tal, e incentivando a troca de idéias entre os alunos.

- ✓ **Auxiliar nos problemas secundários**

  O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios ou técnicas já conhecidas para resolver o problema; estimula-os a escolher diferentes métodos a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como um interventor e questionador, acompanhando suas explorações e ajudando-os, quando necessário, a resolver problemas secundários. Tratam-se de dúvidas apresentadas pelos alunos no contexto do vocabulário presente no enunciado; no contexto da leitura e interpretação; além daqueles que podem surgir por ocasião da resolução do problema: notação, passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, conceitos relacionados, técnicas operatórias, a fim de possibilitar a continuidade do trabalho.

- ✓ **Registrar as resoluções na lousa**

  Representantes dos grupos são convidados a registrar as resoluções na lousa. Resoluções certas ou erradas assim como aquelas feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

- ✓ **Realizar uma plenária**

  O professor convida todos os alunos para discutirem suas resoluções e soluções com seus colegas, a defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador nas discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos, pois este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

- ✓ **Buscar um consenso**

  Após sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

- ✓ **Formalizar o conteúdo**

  Este trabalho é exclusivo do professor. Neste momento, denominado "**formalização**", o professor faz uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos, destacando as diferentes técnicas operatórias e as propriedades qualificadas para o assunto.

Allevato e Onuchic (2008)[20] reiteram que, nessa metodologia, os problemas são propostos aos estudantes antes mesmo de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor, como necessário ou mais apropriado para a resolução do problema proposto.

---

[20] Esse trabalho foi apresentado no grupo de trabalho e discussão sobre Resolução de Problemas (Topic Study Group 19) no ICME, 2008.

Assim, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca por respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente durante a resolução do problema.

No nome da nossa metodologia de trabalho, adotada para a sala de aula, usamos a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, que foi criada intencionalmente, para expressar a idéia de que ensino e aprendizagem devem acontecer simultaneamente durante a construção do conhecimento. Huaman Huanca (2006) em sua dissertação de mestrado apresentou, na página 44, um quadro que tenta fazer a distinção entre essas três palavras, sejam elas consideradas isoladamente ou em composição. Uma nova versão desse quadro, modificando algumas dessas idéias, é apresentado aqui por nós.

<table>
<tr><td></td><td>Ensino</td><td>Aprendizagem</td><td>Avaliação</td></tr>
<tr><td>Três processos distintos, individuais, na primeira metade do século XX</td><td>A responsabilidade do ensino é do professor que visa à aprendizagem do aluno.</td><td>Se o professor tivesse o domínio do conhecimento, então, o aluno aprenderia. Os alunos deveriam aprender a partir do que o professor ensinava, mas a responsabilidade da aprendizagem seria do aluno. Como? Sabendo relacionar suas idéias com o que o professor ensinava e isso nem sempre ocorria.</td><td>A avaliação era feita através de provas. Mudanças ao longo do tempo promoviam discussões sobre diferentes formas de como se poderia avaliar.</td></tr>
<tr><td>Um processo duplo ligando ensino à aprendizagem ocorrido entre as décadas de 60 a 80 do século XX.</td><td colspan="3">Ensino-Aprendizagem
Este é um ser maior. É maior do que o ensino. É maior do que a aprendizagem. Deve acontecer simultaneamente durante a construção do conhecimento. Os professores são guias e os alunos aprendem sabendo relacionar suas idéias com o conhecimento que ambos querem construir. A avaliação ainda se dava por meio de provas, mudando-se, às vezes, os enfoques assumidos.</td></tr>
<tr><td>Um processo único de ensinar, aprender e avaliar, a partir da década de 90 do século XX.</td><td colspan="3">Ensino-Aprendizagem-Avaliação
Este é um ser ainda maior. É maior do que o ensino, do que a aprendizagem e do que a avaliação. A avaliação constitui-se, então, como parte integrante do processo ensino-aprendizagem, que passa a ser vista como um processo bem mais amplo chamado ensino-aprendizagem-avaliação. Nesse processo nem só o aluno é avaliado, mas também, o professor.</td></tr>
</table>

Quadro 1 - Ensino-Aprendizagem-Avaliação

Reforçando ainda mais a importância da avaliação nessa metodologia de trabalho para a sala de aula, Pironel (2002, p.39) em sua dissertação de mestrado diz que

> As reformas pretendidas na primeira metade do século XX referiam-se ao processo de ensino. Nas três ou quatro últimas décadas, passou-se a falar em ensino-

> aprendizagem da Educação Matemática e da Educação como um todo. Hoje, com certeza, a avaliação já está sendo agregada ao processo de ensino-aprendizagem como uma forte aliada para uma melhor construção do conhecimento matemático de nossos alunos. A avaliação na sala de aula de matemática constitui-se então parte integrante do próprio processo ensino-aprendizagem, e o processo passa a ser visto como um processo ainda mais amplo chamado ensino-aprendizagem-avaliação.

Com isso, entendemos que o papel da avaliação muda. Ela deve ser expandida para além do conceito tradicional da realização de provas.

Trabalhar a avaliação continuamente poderá ajudar a tornar o pensamento dos estudantes visíveis para eles mesmos, para seus colegas e para os professores. De acordo com Bransford, Brown e Cocking (2007, p. 44) "As avaliações contínuas permitem que o professor compreenda as idéias preconcebidas dos estudantes, perceba em que ponto estão no caminho que leva do raciocínio informal para o formal e planeje a instrução de acordo com isso". Esse tipo de avaliação ajuda tanto o professor como o aluno na monitoração do progresso.

Adotada essa metodologia para se trabalhar em sala de aula, é importante que, diante dela, o professor, ao escolher as situações-problema para suas aulas, se questione a respeito de sua prática. A esse respeito, diz Marincek (2001, p.16) "para garantir que os alunos construam um conhecimento adequado de matemática, contextualizado, que faça sentido, é necessário que o professor reflita, investigue e venha a formular ou escolher cuidadosamente os problemas que irá propor".

E, para isso, Onuchic, em 1998, elaborou algumas questões que poderão ajudar o professor a refletir sobre elas e a bem escolher os problemas com os quais irá trabalhar:

- ✓ Isso é um problema? Por quê?
- ✓ Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema?
- ✓ Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- ✓ Para que séries acredita ser este problema adequado?
- ✓ Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
- ✓ Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
- ✓ Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema?
- ✓ Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
- ✓ Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

Todo esse conjunto de ações nos mostra o quanto o professor refletiu sobre a prática que pretendia desenvolver nessa aula.

Não há duvida de que o interesse ou envolvimento dos alunos numa tarefa (problema) é importante, sendo assim, a escolha do problema deve ser bem pensada e planejada. O problema deve ser desafiador o suficiente para manter o aluno envolvido, mas não tão difícil a ponto de desencorajá-lo, pois, conforme já foi dito antes, o problema, nessa metodologia, deve ser gerador de novos conceitos e conteúdos matemáticos.

Diante dessas questões que permitem muitas reflexões sobre a prática pedagógica do professor, queremos aqui ressaltar o que Nóvoa, em 2001 disse sobre o professor reflexivo. Segundo ele, “um professor reflexivo é um professor pesquisador”, que se configura para nós como um professor que pesquisa quando busca problemas que podem ser utilizados, em sala de aula, para trabalhar determinados tópicos matemáticos pertinentes ao programa planejado; pesquisa quando identifica os focos matemáticos importantes e as grandes ideias subjacentes; pesquisa quando estabelece as melhores estratégias disponíveis para resolver os problemas; pesquisa quando prepara as questões com as quais conduzirá os alunos, durante a plenária, ouvindo-os em suas respostas; pesquisa quando planeja a formulação rigorosa da nova matemática construída durante essa aula, tendo os alunos como co-construtores desses novos conceitos e conteúdos.

2.1.3. A Geometria na História e seu Ensino-Aprendizagem

> *Nenhum assunto presta-se mais à explicitação da impregnação entre a Matemática e a Língua Materna bem como a uma estruturação compatível da ação docente do que a Geometria. [...]Trata-se de um tema singularmente fecundo, com um significado epistemológico reconhecido pelas mais variadas concepções filosóficas, como em Platão, Descarte, Kant...*
>
> *(Nilson José Machado, 2001)*

> *Quantas formas atraentes para manipular, ver, ouvir, entender, numa concha, num ritmo musical, num remoinho de fumo, numa corrente de água, num monte de areia, numa flor, numa lenga-lenga, na espuma, no saltitar de uma bola, ou no vôo de um pássaro!*
>
> *(Paulo Almeida, 2007)*

Em nossas leituras, fazendo parte de uma pesquisa bibliográfica e aceitando como pesquisa bibliográfica a citação abaixo:

> Entende-se que a pesquisa bibliográfica merece tratamento destacado. Primeiro, porque estará presente em qualquer processo de pesquisa. [...] Segundo, porque a pesquisa bibliográfica é mais simples e confortável, pois dispensa todo o trabalho de montagem/escolha/testagem/relato de dados. Os dados já estão prontos, organizados, publicados. Percebe-se, porém, em certos meios acadêmicos, uma tendência a tratar o dado bibliográfico como secundário, como informação de segunda categoria. É um equívoco. É verdade que a pesquisa bibliográfica não costuma oferecer dados inéditos, como a pesquisa de campo ou de laboratório. Ressalte-se, porém, que em nada compromete a possibilidade de originalidade dos raciocínios que, a partir deles, possam ser desenvolvidos. A bem da verdade, dados já publicados podem, mesmo, possibilitar raciocínios inéditos, já que o conceito de *inédito* não se restringe a "realidade nova". Pode também significar "pensamento novo" a respeito de "realidade velha"(SANTOS, 2007, p. 104-5).

Para trabalhar nosso terceiro eixo decidimos selecionar alguns autores para ajudar a compor a base de nosso trabalho. Nossos outros serão a princípio Machado (2001); Pais e Freitas (1999); Lintz (2007); Boyer (1974); Pavanello (1993); PCN (2001); Standards (2000); entre outros.

Acompanhar a evolução histórica da Geometria pode ser um componente motivador para promover oportunidades de investigação em sala de aula, através da resolução de problemas, observando todos os aspectos desenvolvidos durante sua evolução. Isso é o que pretendemos fazer aqui: revisitar um pouco dessa história. No entanto, para que isso seja feito, uma pergunta nos foi crucial: Por onde começar? Pelas observações do homem nas formas geométricas? Pela prática utilizada pelos egípcios para medir terras nas bordas do rio Nilo?

2.1.3.1. Um pouco da história da Geometria Euclidiana

Sabe-se que a Geometria tem uma estrutura própria e representa um sistema matemático baseado sobre conjunto de pontos. É ela um dos ramos mais antigos da Matemática e data de cerca de 4000 anos com os primeiros babilônios e egípcios.

Os babilônios foram os primeiros a usar o produto do campo pela largura para achar a área de pedaços retangulares de terra. Os antigos egípcios usavam a Geometria para achar as áreas e os limites de seus campos. A construção das pirâmides egípcias não teria sido possível sem o conhecimento da Geometria. Assim, a Geometria dos babilônios e dos egípcios se preocupava principalmente com medida. Era essencialmente de natureza empírica, isto é, era baseada em observações, experiência, medição e intuição. Não tinha organização nem estrutura.

Foram os gregos, cerca de 2000 anos depois, aqueles que primeiro começaram a desenvolver a Geometria num sistema matemático lógico e dedutivo. Euclides foi o primeiro dos matemáticos a organizar a Geometria e estabelecer sua estrutura. Por volta de 300 antes de Cristo, ele escreveu "Os Elementos", um tratado em Geometria formado por 13 livros. Ele começou com algumas definições básicas e um conjunto de hipóteses que chamava axiomas ou postulados.

No tempo de Euclides, *axioma* referia-se a qualquer hipótese da Matemática geral enquanto que postulado referia-se especificamente a uma hipótese de Geometria. Hoje, praticamente ambos os termos são considerados sinônimos.

Por raciocínio dedutivo, Euclides foi capaz de provar muitas proposições (teoremas) que ainda hoje fazem parte dos textos modernos de Geometria.

Na história da humanidade, a Geometria parece ter surgido das simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer objetos do mundo físico ao comparar formas e tamanhos. Como bem coloca Machado (2001) ao dizer que os primeiros conhecimentos de natureza geométrica derivaram de resultados empíricos relacionados com medições de terras, construções arquitetônicas, determinações de áreas e volumes, como no antigo Egito, ou ainda a cálculos astronômicos envolvidos na fixação do calendário, como entre os babilônios. E continua dizendo que "é apenas na Grécia, por volta do século III a. C., com os trabalhos de Euclides que a Geometria logrou uma notável sistematização, tornando-se modelo de organização do conhecimento em qualquer área".

Os variados registros da atividade do homem no campo da geometria dos **babilônios** se encontram em tábuas de argila cozida. A partir dessas tábuas vemos que a geometria babilônia antiga estava relacionada com a mensuração prática. De fato, esses povos foram considerados excelentes calculistas devido à prioridade que davam à Aritmética, estruturando-a através do sistema posicional sexagesimal. Eles também mostravam uma forte preferência pela álgebra e pela teoria dos números. A Geometria aparece como "pano de fundo" para solucionar problemas essencialmente algébricos, ou seja, sempre que um problema geométrico era formulado ele era feito com a finalidade explícita de calcular algumas quantidades numéricas, seja comprimento, área ou volume.

A cultura **egípcia** possuía um conhecimento geométrico idêntico ao dos babilônios, com a omissão do teorema de Pitágoras. Embora não haja provas documentais de que os antigos egípcios conheciam o teorema de Pitágoras, agrimensores egípcios primitivos percebiam que um triângulo cujos lados têm como medida 3, 4 e 5 unidades é um triangulo retângulo.

A Geometria já se fazia presente na **cultura grega** através das artes plásticas e da arquitetura desde o século X a.C. Nas artes plásticas com a cerâmica grega por meio da confecção de vasos, potes, estatuetas originadas da antiga civilização Minóica da ilha de Creta e, posteriormente, de Micenas, ao sul, e Tessália, ao norte, com motivos geométricos. A decoração na cerâmica de Micenas era bastante variada: ora com figuras geométricas abstratas ora com motivos de animais ou plantas estilizadas. Entretanto, as figuras geométricas consistiam de linhas e motivos que se repetiam com certa regularidade, mas não eram construídas com qualquer precisão geométrica; os círculos eram traçados a mão livre e o mesmo ocorria com as demais figuras. Este estilo de geometrização dos motivos micênicos foi chamado *protogeométrico*.

Historicamente, segundo Lintz (2007), já depois do século VII a.C., a Geometria se afasta da cerâmica e infiltra-se na arquitetura quando surge a escola de Mileto que é a primeira manifestação de matemática como organismo independente. Em meados do século VI a.C. firmam-se as leis básicas de dimensionamento e simetria das colunas, átrios e demais partes dos edifícios, constituindo um verdadeiro tratado de geometria escrito em pedra e mostra como a matemática, como organismo, existia latente em formas muito variadas antes de adquirir vida e expressões próprias.

Entretanto, no que se refere ao estudo de uma matemática, sem a necessidade prático-utilitária, já era uma preocupação dos gregos que procuravam por uma matemática científica, deixando de lado perguntas na forma de "como" para indagações na forma de "por que". A busca por uma matemática dedutiva, demonstrativa, passa a primeiro plano, pois os processos empíricos, usados anteriormente, não eram mais suficientes para dar respostas às suas indagações.

A história da geometria grega parece ter começado essencialmente com o trabalho de Tales de Mileto na primeira metade do século VI a.C. Homem de notável sabedoria viveu aproximadamente de 630 a.C. a 550 a.C. Considerado um dos sete "sábios da Antiguidade", foi um digno fundador da Geometria Demonstrativa. Portanto, na época de Tales, a Matemática já ensaiava os primeiros passos para uma tentativa de organização.

O seguinte geômetra grego importante é Pitágoras, membro da escola Pitagórica, considerado um discípulo de Tales, que, provavelmente, tenha estudado com ele e aquele que deu continuidade à sistematização da Geometria. O lema da escola pitagórica era "Tudo é número". O número como origem de tudo, o princípio primordial. Entretanto, para decepção dos pitagóricos, surge o fato de que nem toda quantidade pode ser expressa como número racional. Esse fato aconteceu quando os próprios pitagóricos em suas investigações matemáticas descobrem que nem toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional. Isso gerou uma grande infelicidade para os filósofos gregos primitivos, que concebiam os números racionais como a mais perfeita criação.

O terceiro geômetra grego notável foi Euclides. Também chamado de Euclides de Alexandria. Segundo a história, relatada por Boyer (1974), em 306 a.C. no governo de Ptolomeu I, ele foi convidado para lecionar na escola de Alexandria devido à sua fama como autor de seu best seller – *Os Elementos*[21], escrito por volta dos anos 300 a.C. que, na verdade, superou todas as obras vindas anteriormente[22]. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão lida, estudada, traduzida e publicada quanto *Os Elementos*, nem tampouco exerceu tanta influência no pensamento científico. Por mais de 2000 anos esse trabalho dominou o ensino de Geometria.

Devido a Euclides, a Geometria foi construída e estruturada na forma lógico-dedutiva tornando-se universal e clássica, recebendo a denominação de *Geometria Euclidiana.*

Machado (2001) esclarece o surgimento de tais termos usados na Geometria Euclidiana:

> [...] A interpretação do trabalho euclidiano na perspectiva do momento presente sugere que Euclides teria compreendido plenamente o fato de que a estruturação do conhecimento geométrico deveria começar por uma assepsia na linguagem, com o esclarecimento das noções utilizadas de modo intuitivo. Uma vez que tais noções decorrem umas das outras, articulando-se em uma grande cadeia, não seria possível definir tudo sem evitar circularidade. Assim, algumas poucas idéias básicas,

[21] Há uma recente obra traduzida em português dos Eementos, 2009, por Irineu Bicudo.

[22] De acordo com o *Sumario Eudemiano* outras obras precederam aos Elementos. O primeiro trabalho foi de Hipócrates de Quio que fez uma apresentação lógica da geometria sob forma de uma única cadeia de proposições baseada em algumas definições e suposições iniciais. Tentativas melhores foram feitas por Leon, que segundo informações o seu trabalho continha uma seleção maior e mais cuidadosa de proposições do que a de Hipócrates. Dando continuidade a essas obras produzidas antes dos Elementos veio a obra de Teudius e outros geômetras.

> supostas suficientemente claras, para serem intuídas de maneira direta foram aceitas como *noções primitivas*, e a partir delas foram elaboradas *definições* para todas as demais noções geométricas, dirimindo-se quaisquer dúvidas a respeito do significado dos termos utilizados. [...] Também aqui, para evitar a circularidade, algumas poucas proposições foram inicialmente admitidas – são os *postulados geométricos* – e, a partir deles, tendo apenas a lógica como cimento, foram construídos argumentos para justificar ou refutar todas as demais proposições, que constituem os *teoremas* (MACHADO, 2001, p.138).

Assim, a estruturação da Geometria operada por Euclides pode ser representada esquematicamente através do seguinte diagrama:

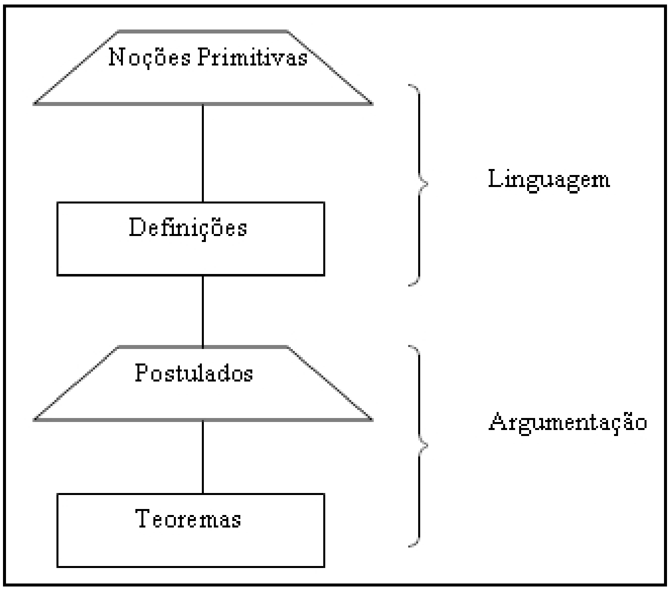


Figura 13 – Estruturação da Geometria

2.1.3.2. O ensino-aprendizagem da Geometria Euclidiana na sala de aula a partir do século XX, no Brasil.

Considerada como uma ciência do Espaço que trabalha com formas e medições, sua presença nos currículos escolares é de fundamental importância, pois é ela, como enfatiza os *Standards 2000*, que possibilita aos estudantes perceber e aprender sobre as formas e as estruturas geométricas e analisar suas características e relações. A visualização espacial é, também, um aspecto importante do raciocínio geométrico. Além disso, idéias geométricas são úteis na representação e na resolução de problemas em outras áreas da Matemática e em situações do mundo real devendo, portanto, ser integrada a outras áreas de estudo.

A Geometria tem sido amplamente considerada, no currículo da matemática escolar, como um lugar onde os alunos aprendem a raciocinar e a ver a estrutura axiomática da

Matemática. O padrão Geometria, apresentado pelos *Standards 2000*, inclui forte foco no desenvolvimento do raciocínio e prova, usando definições e estabelecendo fatos.

Os PCNs (2001), por sua vez, enfatizam a importância do ensino de Geometria, nos currículos escolares, quando justificam sua relevância no que se refere ao trabalho onde noções geométricas contribuem para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa.

Votando nossa atenção para o ensino da Geometria durante o século XX, podemos começar fazendo alusão às reformas sociais ocorridas no Brasil que provocaram mudanças no ensino de Matemática e, consequentemente, no ensino da Geometria. Considerando o século XX, podemos notar que, dentro de uma Sociedade Agrária e Pecuária, pouca gente precisava saber Matemática. A maioria da população era analfabeta e sem acesso à educação, nem mesmo a elementar. Ao passar-se dessa sociedade para uma Sociedade Industrial, pela necessidade de técnicos, mais gente precisou saber Matemática. Rapidamente, a sociedade sob nova transformação social, passou a ser uma Sociedade de Informação, na qual muito mais gente necessitaria saber Matemática. Hoje, entretanto, no século XXI, numa Sociedade do Conhecimento, praticamente todos deveriam saber Matemática.

Para acompanhar essas mudanças que ocorreram no século XX, no Brasil, em relação ao ensino da Matemática, particularmente o da Geometria, compilamos integralmente vários trechos do artigo de Pavanello (1993), intitulado: *O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências.*

Segundo Pavanello (1993), no início do século XX, o ensino de Matemática na escola primária era essencialmente utilitário. Buscava-se o domínio das técnicas operatórias necessárias à vida prática e às atividades comerciais. Com a mesma orientação trabalhavam-se algumas noções de Geometria. Por sua vez, o Ensino Secundário era, em geral, pago e destinava-se às elites e à preparação para os cursos superiores. Os conteúdos de Aritmética, Álgebra e Geometria eram ensinados separadamente e por professores diferentes, que davam um tratamento a essas disciplinas puramente abstrato, sem qualquer preocupação com as aplicações práticas. Os livros didáticos desenvolviam cada assunto progressiva e sistematicamente como um todo, sem procurar estabelecer qualquer relação entre os diferentes ramos da Matemática.

É no início da década de 60 que se generaliza, também no Brasil, a influência do Movimento da Matemática Moderna, cuja idéia central era adaptar o ensino de Matemática às novas concepções surgidas com a evolução deste ramo do conhecimento. Foram lançados os primeiros livros didáticos de Matemática escritos de acordo com a nova orientação. Neles, como nos demais que seriam publicados a partir daí, estava presente a preocupação com as estruturas algébricas e com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos.

Quanto à Geometria, optou-se, num primeiro momento, a acentuar nesses livros as noções de figuras geométricas e de interseção de figuras como conjuntos de pontos do plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos. Procurava-se trabalhá-la segundo uma abordagem intuitiva que se concretizou, nos livros didáticos, pela utilização dos teoremas como postulados, mediante os quais podia-se resolver alguns problemas. Não existia qualquer preocupação com a construção de uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaboradas.

Pavanello também comenta que o movimento exigia a proposição de um trabalho com a Geometria sob o enfoque das Transformações e que, na verdade, não tiveram muito lugar na prática devido à questão de os professores não dominarem bem esse assunto fazendo com que muitos deles deixassem de ensinar a Geometria sob qualquer enfoque, enfatizando a Álgebra. E, com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação, a 5692/71, que dava liberdade ao professor de montar seu próprio programa de acordo com as necessidades dos alunos, a maioria dos professores das quatro séries iniciais de 1º grau deixaram de ensinar Geometria, limitando-se a trabalhar somente Aritmética e as noções de conjuntos, ficando esse estudo apenas para o 2º grau, quando não eliminado, com o agravante de que os alunos apresentavam uma dificuldade ainda maior em lidar com as figuras geométricas e sua representação, porque o Desenho Geométrico foi substituído, nos dois graus de ensino, pela Educação Artística.

Para Pavanello (1993), do ponto de vista da Educação Matemática, é necessário acrescentar que o ensino da Geometria continua ocorrendo nas escolas particulares, como também nas academias militares. Trabalhada sob orientações diversas, integrada ou não aos demais ramos da Matemática, a Geometria continua presente nos programas dessas escolas, e os professores de matemática não podem deixar de abordá-la, mesmo se sua formação for de tal modo deficiente que os impeça de efetuar um trabalho de melhor qualidade.

> Existem fortes motivos para a inquietação dos professores com o abandono da Geometria e sua insistência em melhorar seus conhecimentos com relação a ela. A ausência do ensino da Geometria e a ênfase no da Álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos, por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral dos processos de pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos. [...] Consequentemente, o trabalho com a Álgebra pode acostumar o indivíduo a operar sem questionamento sobre as regras pré-estabelecidas, a fazer isto ou aquilo, sem questionar o que faz. O efetuado com a Geometria, por sua vez, pode proporcionar o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo (PAVANELLO, 1993, p. 16).

A inquietação com o abandono do ensino de Geometria, acredita Pavanello, parece estar ligada a questões de ordem educacional.

2.1.3.3. A Geometria nos programas escolares

Como se pode perceber, na fala de Pavanello (1993), os programas escolares sofreram várias mudanças desde o início do século XX sempre em função das reformas ocorridas nesse período. Consequentemente, o mesmo ocorreu no que se refere à Geometria e o seu ensino.

O Movimento da Matemática Moderna praticamente excluiu o ensino da Geometria, priorizando o simbolismo e uma terminologia excessiva. Várias décadas se passaram e cada vez mais o ensino da geometria era negligenciado, mesmo estando presente nos programas curriculares.

Segundo Kallef (1993), a Geometria, nesse período, nos cursos de Licenciatura foi perdendo gradativamente seu lugar para assuntos de Geometria Linear fundamentados na Álgebra Vetorial.

No artigo *"Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?* Miorim, Miguel e Fiorentini (1992) ao trabalharem sobre a ênfase dada ora como predominância algébrica, ora com predominância geométrica, disseram que seu interesse era o de diagnosticar as raízes dessa atitude oscilatória, através de um estudo histórico das formas de se encarar o ensino da Álgebra e o ensino de Geometria nos momentos mais significativos da educação matemática brasileira.

Tomando como base o período da Matemática Moderna, esses autores investigaram três momentos: o anterior, o concomitante e o posterior a esse período. O primeiro desses momentos é o mais longo, indo de 1799, momento em que a Álgebra passou oficialmente a fazer parte do currículo da escola secundária, até o início de 1960 quando se iniciam as discussões e as primeiras experiências relativas à introdução da Matemática Moderna. Neste período parecia haver um certo equilíbrio enciclopédico entre os quatro ramos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria), mas apesar desse equilíbrio parecia não haver uma consciência clara da importância de cada um desses ramos. Enquanto a Geometria era considerada uma "matéria mais nobre", dotada de uma abordagem preponderantemente rigorosa e quase sempre axiomático-dedutiva, a Álgebra era considerada uma "matéria mais instrumental", útil para a resolução de equações e problemas, recebendo uma abordagem quase sempre mecânica e automatizada.

Durante o período da Matemática Moderna, a Álgebra passou a ocupar um lugar de destaque e com isso o ensino da Geometria sofreu um processo de descaracterização, levando-o ao seu quase abandono na sala de aula.

A partir da segunda metade da década de 70 e início da década de 80, educadores matemáticos buscavam esforço no sentido de recuperar o ensino da Geometria, não significando, de forma alguma, um retorno à sua abordagem euclidiana clássica. A partir daí começaram a surgir novas propostas curriculares no intuito de recuperar o ensino da Geometria.

Na Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 1º grau – 1988, podemos ler que alguns problemas relativos ao ensino da Matemática já vinham sendo, há muito tempo, diagnosticados por professores preocupados com esse tipo de ensino:

a preocupação excessiva com o treino de habilidades, com a mecanização de algoritmos, com a memorização de regras e esquemas de resolução de problemas, com a repetição e a imitação e não com uma aprendizagem que se dê, inicialmente, pela compreensão de conceitos e de propriedades, pela exploração de situações-problema nas quais o aluno é levado a exercitar sua criatividade, sua intuição;

a priorização de temas algébricos e a redução ou, muitas vezes, eliminação de um trabalho envolvendo tópicos de Geometria;

a tentativa de se exigir do aluno uma formalização precoce e um nível de abstração em desacordo com o seu amadurecimento.

A partir da reflexão sobre o papel da Matemática no currículo do 1º grau, sobre os problemas detectados no ensino dessa disciplina e sobre a análise crítica aos Guias Curriculares, iniciou-se um processo de elaboração de propostas, num trabalho que envolveu, juntamente com a Equipe de Matemática da CENP[23], professores da rede estadual, monitores de Matemática e professores da USP, UNICAMP, UNESP e PUCSP. A 1ª versão da Proposta citada anteriormente, elaborada 1986 pela equipe técnica de Matemática da CENP, foi discutida com o objetivo de sistematizar sugestões indicadas no processo de discussão em cada Delegacia de Ensino. A 2ª versão, discutida em julho de 1987, pelos professores que trabalham com Matemática nas escolas estaduais do 1º grau. Os relatórios dessas discussões realizadas nas Delegacias de Ensino, as análises críticas forneceram elementos para a reelaboração da proposta, tendo em vista a publicação da 3ª versão em 1988.

[23] CENP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas.

Na estruturação desta Proposta os assuntos que a compõem foram distribuídos em três grandes temas: Números, Geometria e Medidas, cuja intenção era atingir as grandes metas para o ensino de Matemática na escola básica que correspondem às aplicações práticas e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

No tema Geometria procurava-se, paulatinamente, caracterizar as formas através de propriedades e classificá-las de acordo com estas propriedades. A iniciação à Geometria parte da exploração sensorial dos objetos, da percepção das formas mais frequentes. A composição e decomposição das figuras são consideradas uma preparação necessária à noção de medida. Na quarta e quinta edição dessa mesma Proposta, nos anos de 1991 e 1997, respectivamente, a Geometria é vista a partir da manipulação, exploração de objetos do mundo físico, reconhecimento de formas mais freqüentes de sua caracterização, através de propriedades, do encadeamento e do relacionamento entre elas, caminhando para uma axiomatização no final do 1º grau.

A Proposta Curricular de Matemática para o Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério – CEFAM e Habilitação Específica para o Magistério – HEM da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (1990), que teve por objetivo principal caracterizar melhor a Matemática que deve estar presente na formação dos professores das séries iniciais, assinala a importância do ensino de Geometria na formação de professores que atuarão nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Segundo a Proposta, a Geometria na HEM se faz necessária para que:

> O futuro professor possa desenvolver em si mesmo e, futuramente em seus alunos as habilidades de observação, percepção espacial, argumentação, representação gráfica, habilidades lógicas... e interrelacionar o estudo de Geometria com outros campos do conhecimento, instigando idéias, propondo aplicações práticas para que seus alunos possam enfrentar problemas reais que são, em geral, de natureza interdisciplinar. Além disso, mesmo no ensino de números, são empregados modelos geométricos que devem ser dominados, e por outro lado, esquemas geométricos podem auxiliar a visualização de certos problemas e propriedades (SÃO PAULO, 1990, p. 117).

A proposta dizia também que os conceitos geométricos deveriam ser desenvolvidos inicialmente através da experiência intensiva com objetos físicos e da observação dos elementos presentes no cotidiano do aluno. Quanto às generalizações, no inicio, poderiam ser feitas mediante raciocínio indutivo, ajudadas pelo uso de moldes, cortes, representações, medidas, construções e outros recursos e, gradativamente, deveria-se ir fazendo uso de postulados, definições e teoremas. Além disso, ressaltava também, o desenvolvimento histórico da disciplina como outro recurso metodológico a ser utilizado no ensino da Geometria.

Em 2008, a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo lança uma nova Proposta Curricular para o Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio – com a finalidade de apoiar o trabalho realizado nas escolas estaduais e contribuir para a melhoria da qualidade das aprendizagens de seus alunos. No item *“O que ensinar: conteúdos fundamentais*”, na página 45, diz que em Geometria, o Ensino Fundamental deve ocupar-se inicialmente do reconhecimento e da representação e classificação das formas planas e espaciais, preferencialmente trabalhando em contextos concreto com as crianças de 5ª a 6ª série, e com ênfase na articulação do raciocínio lógico dedutivo nas 7ª e 8ª séries. Ressalta a necessidade de incorporar o trabalho com a Geometria em todos os sete anos da grade escolar, cabendo ao professor a escolha da distribuição mais conveniente dos conteúdos nos bimestres, assim como o viés que será dado ao tratamento dos temas da Geometria.

Os autores dessa Proposta entendem que a Geometria deve ser tratada ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, o que significa dizer que os grandes temas podem ser abordados tanto nas séries do Ensino Fundamental quanto do Ensino Médio, sendo que a diferença será a escala de tratamento dada ao tema.

Por serem os conceitos geométricos uma parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, pois por meio deles o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento – o pensamento geométrico – que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo em que vive é que os Parâmetros Curriculares Nacionais (2001) advoga em defesa de um ensino de Geometria voltado para as atividades experimentais, bem como em trabalhos que explorem a visualização, a representação e o raciocínio espacial:

> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam a se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (PCN, 2001, p. 55).

Os *Principles and Standards for School Mathematics* – Standards 2000 – dizem que a Geometria tem sido amplamente considerada no currículo da matemática escolar como um lugar onde os alunos aprendem a raciocinar e a ver a estrutura axiomática da Matemática. Seu padrão Geometria inclui forte foco no desenvolvimento do raciocínio e da prova, usando definições e estabelecendo fatos. A tecnologia também tem um papel importante no ensino e na aprendizagem de Geometria. Ferramentas, tais como os softwares de Geometria Dinâmica capacitam o estudante a modelar e a ter uma experiência interativa com uma grande variedade de formas de duas e três dimensões.

Resumidamente, o padrão Geometria nos Standards 2000 estabelece que os programas de ensino do Pré-primário ao Ensino Médio deveriam capacitar todo estudante a:

Analisar características e propriedades de formas geométricas de duas e três dimensões e desenvolver argumentos matemáticos sobre as relações;
Especificar localizações e descrever relações espaciais usando coordenadas geométricas e outros sistemas de representação;
Aplicar transformações e usar simetria para analisar situações matemáticas ;
Usar visualização, raciocínio espacial e modelagem geométrica para resolver problemas.

Os Standards 2000 apresentam algumas justificativas em prol de um ensino eficiente de Geometria: (1) ao se estudar Geometria, os alunos têm a oportunidade de aprender as formas e estruturas geométricas e o modo de analisar as suas características e relações; (2) a visualização espacial constitui um aspecto essencial do raciocínio geométrico; (3) a Geometria constitui um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos, culminando no trabalho de demonstração no ensino secundário; (4) as ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e resolução de problemas em outras áreas da matemática e em situações do dia-a-dia, pelo que a Geometria deverá ser integrada, sempre que possível, com outras áreas.

As propostas e os programas curriculares aqui apresentados advogam em defesa de um ensino de Geometria pautado na observação; experimentação; em trabalhos que explorem a representação, a visualização, o pensamento geométrico e o raciocínio espacial; o uso de materiais manipulativos. Que significado têm esses termos usados na Geometria segundo alguns teóricos?

2.1.3.4. Conceitos Geométricos e Pensamento Geométrico

“Nem todas as pessoas pensam sobre idéias geométricas da mesma maneira. Certamente não somos todos iguais, mas somos todos capazes de crescer e desenvolver nossa habilidade para pensar e raciocinar em contextos geométricos”(VAN de WALLE, 2006, p. 181).

Analisando as palavras de Van de Walle, passamos a nos questionar: Como se dá o desenvolvimento do pensamento geométrico? E o raciocínio espacial? Há uma base teórica bem pesquisada nesse sentido e, dentre elas, podemos destacar Pais (2000), Van de Walle (2001), Van de Walle (2006).

O conceito e a imagem mental são elementos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Como afirma Van de Walle (2001, p. 31) "O conhecimento conceitual em Matemática consiste em relações lógicas construídas internamente e existentes na mente como parte integrante de uma rede de ideias. É o tipo de conhecimento que Piaget chamou lógico-matemático". E, como uma primeira forma de representação de conceitos geométricos, estão os modelos, aqueles que para um determinado conceito matemático se configuram como qualquer objeto, figura ou desenho que represente o conceito.

Segundo Van de Walle (2006) é importante que pensemos sobre os objetivos da Geometria em termos de duas estruturas bastante diferentes, ainda que relacionadas: raciocínio espacial ou sentido espacial, e o conteúdo específico. A primeira dessas estruturas tem a ver com o modo como os estudantes pensam e raciocinam sobre as formas, sejam elas bi ou tri dimensionais. A segunda estrutura é o conteúdo no sentido mais tradicional – conhecer sobre simetria, triângulos, retas paralelas, e assim por diante. É preciso compreender esses dois aspectos da geometria – o pensamento e o conceito – para que se possa melhor ajudar os estudantes a crescerem.

Para Van de Walle (2006, p. 180), o sentido espacial

> Pode ser definido como uma intuição sobre as formas e as relações entre elas. Indivíduos com bom sentido espacial têm uma melhor percepção para com os aspectos geométricos que o circundam e as formas formadas por objetos em seu ambiente. O sentido espacial inclui a habilidade em visualizar objetos mentalmente e fazer relações espaciais – ao movimentar as coisas em sua mente. Inclui uma posição confortável com descrições geométricas de objetos e posições. Pessoas com bom sentido espacial apreciam formas geométricas na Arte, na Natureza e na Arquitetura. Elas são capazes de usar suas idéias geométricas para descrever e analisar seu mundo.

Muitas pessoas acreditam que não são boas ao usarem as formas ou que elas têm um sentido espacial pobre. Mas isto nem sempre é verdade. Experiências ricas com formas e relações espaciais, quando fornecidas consistentemente ao longo do tempo, podem e fazem desenvolver o raciocínio espacial.

Quanto ao conteúdo geométrico diz ele:

> Por muito tempo, o currículo de geometria, no mundo, se apresentava de alguma forma, como uma mistura eclética de atividades com a "impressão de palavras ousadas". Também muita ênfase foi colocada sobre a terminologia de aprendizagem. Ao mesmo tempo, a ênfase crescente colocada sobre a Geometria

> gerou uma variedade enorme de tarefas maravilhosas para os estudantes, sendo que os quatro objetivos para a Geometria podem ser, aproximadamente, resumidos pelos títulos: *Formas e Propriedades, Transformação, Localização e Visualização (*VAN de WALLE, 2006, p.180).

Assim, no ensino de Geometria que se quer atualmente, recorre-se às suas principais ideias, que, para Van de Walle (2006, p. 179), são aquelas que, em lugar de prestigiar repetições ou formas de memorização, são responsáveis pelo pensar e pela compreensão da Geometria trabalhada. São elas:

Formas e Propriedades: O que torna as formas iguais ou diferentes pode ser determinado por um conjunto de propriedades geométricas, por exemplo, as formas têm lados que são paralelos, perpendiculares ou nenhuma das duas; elas têm simetria linear, simetria rotacional, ou nenhuma delas; elas são semelhantes, congruentes ou nenhuma delas.

Transformações: As formas podem ser movidas num plano ou num espaço. Essas mudanças podem ser descritas em termo de translações, reflexões e rotações.

Localização: As formas podem ser descritas em termo de sua localização no plano ou no espaço. Sistemas coordenados podem ser usados para descrever essas localizações precisamente. Por sua vez, a visão coordenada da forma oferece um outro modo de compreender certas propriedades da forma, mudança de posição, transformações e como elas aparecem ou mudam de tamanho.

Visualização: As formas podem ser vistas sob diferentes perspectivas. A habilidade em perceber as formas de diferentes pontos de vista ajuda-nos a compreender as relações entre figuras bi e tridimensionais e mentalmente mudam a posição e o tamanho das formas.

Pais (1996, p.66) considera o objeto, o desenho, o conceito e a imagem mental como recursos didáticos auxiliares e representativos do processo de construção dos conceitos geométricos planos e espaciais e que intervêm fortemente no processo ensino-aprendizagem da geometria euclidiana. Diz ainda que:

> O trabalho com esses elementos experimentais constitui, principalmente para o aluno do 1º grau, um recurso necessário à transposição de um nível pré-categorial para o mundo das idéias abstratas. Esta análise evidencia a possibilidade de uso dos recursos didáticos na aprendizagem geométrica, ao mesmo tempo que salienta os riscos de uma possível limitação do ensino a um nível puramente experimental, o que negaria a essência do conhecimento geométrico. Esses quatro elementos estão correlacionados aos aspectos intuitivo, experimental e teórico do conhecimento geométrico que formam a estrutura básica de uma teoria epistemológica da geometria, tal como desenvolvida por GONSETH em 1945 (PAIS, 1996, p. 66).

A análise epistemológica da geometria do espaço desenvolvida por GONSETH em 1945, citado por Pais (1996), distingue três aspectos fundamentais do conhecimento geométrico: o intuitivo, o experimental e o teórico. A esse respeito nos fala Pais (1996, p. 73)

> A intuição tem algo em comum com as imagens mentais, pois ambas apresentam não só uma certa disponibilidade de utilização como também a propriedade de serem essencialmente subjetivas. Por outro lado, não constituem recursos aceitos para o processo de validação do conhecimento. O objeto e o desenho são simplesmente recursos materiais auxiliares à construção de um conhecimento de natureza experimental e, por si mesmos, não caracterizam as noções geométricas. Mas na construção do conhecimento teórico da geometria, que é essencialmente constituído pelos conceitos, faz-se necessário o recurso simultâneo tanto das bases intuitivas como da atividade experimental.

A correlação entre os elementos fundamentais ao ensino da geometria e os três aspectos do conhecimento geométrico podem ser resumidos pelo seguinte esquema:

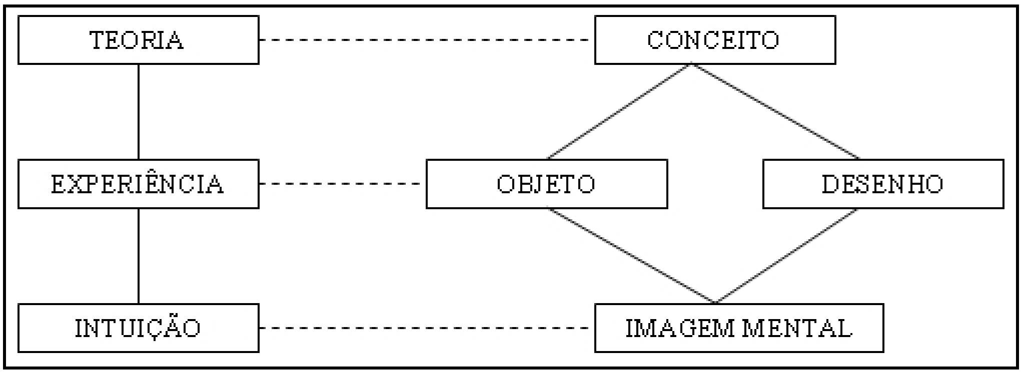


Figura 14 – A correlação entre os elementos fundamentais de geometria e os aspectos do conhecimento geométrico

Pais (1996) ainda acrescenta que essa correlação aponta para a necessidade de uma utilização racional dos materiais didáticos em determinados níveis de aprendizagem como recursos auxiliares, mas não como substitutivos à construção de conceitos.

2.1.3.5. A Geometria na formação do professor

Ao falarmos do ensino da Geometria nos programas curriculares não podemos deixar de mencionar a figura do professor em todo esse contexto. Como concebem o ensino e a aprendizagem da Geometria? Que conhecimentos possuem de conteúdos de Geometria quando chegam à Universidade como alunos ou até mesmo quando vão ensinar? Mediante a essas indagações começamos a refletir sobre a importância que o ensino-aprendizagem da Geometria tem na formação do professor de Matemática, sobretudo aquele que deverá ensinar Geometria.

Como vimos, na historia da Geometria, até antes dos anos 70, a Geometria era tida como uma disciplina importante no currículo. No entanto, com o Movimento da Matemática Moderna, ela passou a ser uma matéria escolar de segundo plano, ocupando nos livros didáticos, os últimos capítulos, os quais, na maioria das vezes, o professor deixava de lado alegando não ter dado tempo de ensiná-la. Com isso, muitos alunos chegavam à universidade com um conhecimento quase que nulo de Geometria e até mesmo de como se dava o seu ensino-aprendizagem, além de desconhecerem aspectos fundamentais de sua natureza. Passados alguns anos, já na década de 90, devido às mudanças ocorridas com o surgimento de novas propostas curriculares, de esforços de pesquisadores em apresentar novos métodos, recursos ou materiais didáticos sobre o ensino-aprendizagem da Geometria, esperava-se que esse quadro pudesse se reverter.

Apesar da relevância do conhecimento de Geometria, várias pesquisas, como as de (Almouloud et al, 2004;Barrantes e Blanco, 2006; Guimarães, Vasconcellos e Teixeira, 2006; Nacaratto e Passos, 2003; Pavanello e Andrade, 2002), visando investigar como se encontra o ensino e a aprendizagem de Geometria nas escolas de Ensino Básico, revelam que esse ramo da Matemática é pouco trabalhado devido à má formação que professores dessas escolas tiveram em relação ao conhecimento dos conteúdos dessa disciplina. Almouloud et al (2004) justificam essa formação precária dos professores, dizendo que os cursos de formação inicial não têm contribuído para que esses futuros professores possam refletir mais profundamente a esse respeito. Guimarães, Vasconcellos e Teixeira (2006, p. 97) complementam afirmando que "nesse modelo de formação de professores há também uma precariedade na formação tanto específica quanto didática para o ensino de Geometria nas séries iniciais".

Concordamos com as palavras de Nacaratto e Passos (2003) quando dizem que o futuro professor deveria ter a oportunidade de vivenciar situações da prática pedagógica que pudessem contribuir para a formação do seu próprio pensamento geométrico. Ressaltam as autoras, ainda, que muitos dos professores, em seus depoimentos, admitem não terem vivenciado um ensino de Geometria capaz de lhes permitir pensar geometricamente e que suas experiências com o ensino de Geometria reduzem-se à geometria métrica e ao reconhecimento de figuras geométricas sem, no entanto, chegar a distinguir nem mesmo os aspectos figurais dos conceitos.

É fato que professores, quando questionados a respeito do ensino de Geometria, solicitem cursos de extensão que priorizem reflexões de suas práticas pedagógicas, pois não se sentem preparados para trabalhar segundo as recomendações e orientações didáticas e pedagógicas dos PCNs. Falta-lhes clareza sobre como ensinar Geometria e/ou acerca de habilidades que possam ser desenvolvidas nesse nível de ensino.

Um diagnóstico dessa situação, conforme constatou Almouloud et al (2004, p. 94), vem sendo discutido em meios acadêmicos e em instâncias governamentais, como a Secretaria de Ensino Fundamental do Ministério da Educação (MEC), por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais, e aponta para a necessidade de revisão dos modelos de cursos de formação de professores para a efetiva implantação de novas alternativas que complementam tais diagnósticos e provocam discussões a respeito do quê, como e quando ensinar determinado conteúdo. Além da formação insuficiente que futuros professores de Matemática recebem em Geometria, percebe-se também que os cursos de formação continuada não estão atendendo aos objetivos em relação à Geometria.

Diante desse breve estudo pudemos constatar que as dificuldades encontradas nos professores em relação ao ensino e à aprendizagem da Geometria revelam-se não apenas na má formação que tiveram durante sua formação acadêmica, mas também durante toda sua escolaridade, seja no Ensino Fundamental ou Médio. Cabe aqui um alerta para que os cursos de formação repensem no seu modelo curricular, pois "o modelo de formação do professor é um passo indispensável para a melhoria da qualidade do ensino de forma geral e para o ensino da Geometria em particular" (GUIMARÃES, VASCONCELOS e TEIXEIRA, 2006, p.104).

2.1.3.6. A busca de uma revitalização para o ensino de Geometria no século XXI

Já no final da década de 70, os pesquisadores começaram a se mobilizar com vistas a se pensar no resgate do ensino da Geometria. Novas propostas curriculares, principalmente a do Estado de São Paulo, na década de 90, explicitaram essa preocupação e buscavam soluções para um ensino mais eficiente da Geometria. Entretanto, somente do fim do século XX para o início do século XXI, é que o ensino da Geometria ganhou um novo impulso. Diversos são os estudos e pesquisas que vêm sendo feitas no sentido de revitalizá-la, ou seja, dar uma nova vida ao ensino da Geometria, emergindo, então, novas tendências didático-pedagógicas como a Geometria Experimental – tida como a geometria baseada na experimentação e na ação humana – e a Geometria Dinâmica, entendida como o estudo da geometria através do movimento de figuras geométricas, como por exemplo, a Geometria das Transformações e a Geometria em ambientes computacionais. Essas duas tendências, que tratadas agora no ensino da Geometria revelam uma característica comum a ambas, como ressaltam Andrade e Nacarato (2008, p.15)

> [...] o ensino de Geometria vem se pautando em uma abordagem mais exploratória em que o aspecto experimental e teórico do pensamento geométrico são abordados, quer na utilização de diferentes mídias, quer em contextos de aulas mais dialogadas com produção, negociação de significados, quer na utilização de softwares de geometria dinâmica. Mas esses contextos não prescindem da importância dos processos de validação, visto ser significativo o número de trabalhos que vêm discutindo o papel das provas e argumentações no ensino de Geometria, além de uma preocupação mais recente com discussões de aspectos epistemológicos como a visualização e a representação em geometria.

Andrade (2004), em sua pesquisa de mestrado, ao realizar o retrato do estado da arte sobre a produção brasileira em Geometria tomando como objeto de estudo os anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEMs), no período de 1987 a 2001, constatou que os trabalhos com a utilização de Geometria Dinâmica também revelam uma tendência didático-pedagógica convergente com os trabalhos da Geometria Experimental como: a confrontação de resultados na construção de determinados conceitos incluindo processos de validação e argumentação geométrica. Esses processos, pautados em características exploratórias, envolvem diferentes mídias, sendo uma delas o computador e observaram que nesses trabalhos que a característica exploratória desses ambientes está sempre apoiada em referenciais teóricos que procuram discutir o desenvolvimento do pensamento geométrico e suas formas de representação.

Ponte (2006, p. 83) aponta, também, a importância de se estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da geometria a situações da vida real e de utilizar diagramas e modelos concretos na construção conceitual em Geometria. Como um caminho para isso ele propõe a utilização de programas de Geometria Dinâmica.

As professoras e pesquisadoras Lílian Nasser e Lúcia Tinoco (2004), em busca de uma revitalização da Geometria nas escolas, têm realizado um trabalho de Geometria numa abordagem intuitiva e dinâmica, no sentido de incentivar os alunos a manipular e construir figuras e sólidos geométricos. Por outro lado, reconhecem que o enfoque dado por Euclides à Geometria ainda pode ser ensinado nos dias de hoje, bastando que a abordagem deixe de ser estática e passe a ser dinâmica e experimental, em que os alunos são motivados a verificar a veracidade de uma afirmativa, e que essa verificação esteja ao seu alcance, através de atividades desenvolvidas com material apropriado. Defendem um trabalho em Geometria Dinâmica com o uso de softwares específicos para a Geometria, alertando, contudo, que essa questão não é a mais importante e afirmam, na apresentação do livro,

> O importante é que, com ou sem computador, você pode e deve desenvolver a Geometria em sua sala de aula seguindo o enfoque dinâmico. [...] As experiências de manipulação devem ser mantidas, pois as atividades no computador não podem substituí-las, mas apenas complementá-las (NASSER e TINOCO, 2006).

De fato, um trabalho em geometria escolar pautado em atividades experimentais, exploratórias, com materiais manipulativos é válido. Entretanto, deve-se ter o cuidado de não priorizar demasiadamente a experimentação. É fundamental, no ensino de Geometria que se caracterize também o conhecimento matemático, especificamente o de geometria trabalhando com conceitos, propriedades geométricas e demonstrações. Uma abordagem tanto dedutiva quanto experimental é importante no ensino de Geometria sem a prioridade de uma sobre a outra.

Mediante ao que foi dito até aqui e as reflexões que se fizeram necessárias, mais convictas estamos de que é imprescindível o ensino de Geometria na formação geral dos estudantes. Cumpre ressaltar aqui que se faz necessária a implementação efetiva de propostas de ensino que estimulem o aluno a progredir em sua capacidade de estabelecer pontos de referência em seu entorno no primeiro ciclo do Ensino Fundamental (NACARATO e PASSOS, 2003, p.31).

2.1.4. Minha pesquisa relacionada às ideias de outros

Nosso primeiro eixo de relacionamento com "outros" foi chamado *Didática da Matemática na Formação de Professores*. De fato, nossa preocupação era a de trabalhar com professores em formação, isto é, no seu curso de Licenciatura. Meu questionamento era o de conhecer o que esses futuros professores conheciam a respeito da Didática Geral e, em particular, de Didática da Matemática. Tratava-se de uma preocupação com sua formação e com suas atitudes quando fosse professor em sua própria sala de aula.

Então procuramos "ouvir" e "entender" o que "outros" especializados no assunto tinham a nos dizer. Para Polya, a Didática da Matemática era entendida como "ensinar a ensinar", uma forma de fazer com que os futuros professores conhecessem diferentes métodos de trabalho em sala de aula, de maneira que se pudesse buscar o entendimento dos alunos quando eles procurassem, em sua própria construção, novos conceitos e novos conteúdos que fizessem parte do currículo escolar. Mas os estudos da Didática, tanto como Didática Geral e, em particular, como a Didática da Matemática, evoluíram até poder-se imaginar a Didática como uma disciplina científica "cujo campo de pesquisa tem por finalidade identificar, caracterizar e compreender os fenômenos e processos que condicionam o ensino e a aprendizagem da Matemática" (D'AMORE, 2007, p. 97).

Biehler, Scholz e Strasser (1994), no prefácio do livro *Didatics of Mathematics as a Scientific Discipline*[24], esclarecem muito bem como se deu a evolução da Didática da Matemática como uma disciplina científica. Dizem eles:

> Nos últimos anos da década de 1960, um debate social sobre valores e organizações de um grande número de paises industrializados, como a Alemanha, França e Estados Unidos da América, estimularam uma nova preocupação com a Educação e com as ciências educacionais relacionadas. Nos anos 1970s e 1980s, esses desenvolvimentos levaram a certa quebra nas pesquisas em Educação Matemática. O reavivamento de organizações internacionais como os ICMI[25] e conferencias globais regulares conhecidas como ICMEs[26] (desde 1969) têm levado à formação de uma comunidade internacional de educadores matemáticos. Chamamos de disciplina cientifica, relacionada a essa pesquisa e ao trabalho de desenvolvimento baseado nessa pesquisa, de Didática da Matemática – um conceito que é comum pelo menos na Alemanha e paises de língua francesa e que tem se tornado crescentemente popular no mundo de língua inglesa. A Didática da Matemática certamente existe como uma disciplina, pelo menos num sentido social, como pode ser vista em revistas, pesquisas e programas de doutorado, organizações científicas e conferências (BIEHLER, SCHOLZ e STRASSER, 1994, p.1).

A Didática da Matemática é bastante jovem se comparada com outras ciências como a Matemática ou a Psicologia. E, por isso, seu sistema de objetos, metodologias e critérios, para um conhecimento válido, exibe mais variabilidade e menos consenso. Seu papel entre outras ciências na Universidade é ainda disputado.

Acompanhando o que falou Heinz Steinbring da Universidade de Bielefeld, Alemanha, em seu artigo *Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education*[27], publicado no livro *Didatics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 1994, a respeito das novas perspectivas sobre a relação entre teoria e prática, fazendo um paralelo entre a Educação Matemática e a Didática da Matemática diz que:

> Tradicionalmente, a tarefa central da Educação Matemática é a de contribuir de uma maneira mais ou menos direta no aperfeiçoamento da prática de ensino da matemática e a resolver problemas de ensino. De acordo com isso, a Didática da Matemática é concebida principalmente como uma disciplina auxiliar, que deve transformar o conhecimento matemático científico numa forma conveniente de conhecimento para professores e estudantes e que deve prover procedimentos metodológicos bem testados para ensinar esse conhecimento eficientemente. A Educação Matemática frequentemente é tomada como uma metodologia para facilitar, simplificar e adaptar uma matéria científica às habilidades dos estudantes (STEINBRING, 1994, p. 89).

Apesar da evidência da Didática da Matemática como teoria em si mesma ela ainda pode ser reconduzida a ciências mais consolidadas e gerais como a Pedagogia, a Psicologia ou as Ciências Sociais, compreendidas como um apoio a mais para a tarefa central da Didática,

---

[24] Didática da Matemática como uma disciplina científica
[25] ICMI: International Comissiono n Mathematical Instrucion
[26] ICME : Congresso Internacional de Educação Matemática
[27] Diálogo entre Teoria e Prática na Educação Matemática

que é a de melhorar a prática diária de ensino. Estas ciências deveriam ajudar a resolver os problemas educacionais, psicológicos e sociais que vão além do campo real do ensino da matemática.

Em consonância com as idéias de Steinbring, D'Amore (2007) acrescenta que a Educação Matemática é um sistema social complexo e heterogêneo, que inclui teoria, desenvolvimento e prática, relativo ao ensino e a aprendizagem da matemática e, nesse sistema, inclui-se a Didática da Matemática como um subsistema.

Considerando que essa pesquisa poderá contribuir para a formação inicial de futuros professores de matemática e, estudando o livro do Bruno D'Amore (2007), concordo com ele quando diz que:

> [...] a Matemática, a Didática da Matemática e a Didática Geral são necessárias para a formação de um professor de Matemática, mas nenhuma das três é suficiente, juntas concorrem para tal. Ainda que a primeira tenha, por assim dizer, um papel primário: não é possível pensar que se possa ensinar Matemática sem uma sólida preparação prévia em Matemática; não é possível pensar em desenvolver questões críticas de caráter epistemológico e didático sobre a matemática se não se está bem preparado em matemática. De fato, não se pode entender o sentido de uma didática disciplinar se não se possui em profundidade a disciplina (D'AMORE, 2007, p. 387).

Com relação ao eixo que tratou da *Resolução de Problemas*, procurei deixar clara a minha atenção dentro da área de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, como uma metodologia de ensino-aprendizagem. Num trabalho a ser feito em sala de aula parte-se sempre de um problema tendo como objetivo um foco particular de matemática, usando estratégias convenientes e com a participação dos alunos, em grupos, busca-se a solução desse problema, com eles como co-construtores do novo conhecimento pretendido para essa aula.

No processo de ensino e aprendizagem através da exploração de um problema, entender as hipóteses do problema, tomar decisões para resolvê-lo, estabelecer relações entre suas variáveis, saber comunicar resultados e ser capaz de avaliar criticamente técnicas e concepções utilizadas na resolução do mesmo são aspectos que devem estar presentes ou serem estimulados (ONUCHIC e ALLEVATO, 2008, p. 2).

O papel do professor durante todo esse processo deve ser o de orientar mais do que guiar por um caminho; perguntar, incitar e questionar para fazer refletir mais do que proporcionar respostas; duvidar, refletir, explorar, experimentar e conjecturar mais do que informar (VILA e CALLEJO, 2006, p. 150).

De todo esse estudo feito a respeito da resolução de problemas, percebemos que poucas são as pesquisas que descrevem o que ocorre em sala de aula ao se trabalhar com resolução de problemas. Muitas apresentam a resolução de problemas como um processo puramente descritível e não prescritível.

Os outros que escolhemos para falar sobre *Geometria e seu ensino*, muito nos disseram sobre sua história, sobre a disputa no ensino da Geometria com a Álgebra e sobre a resolução de problemas geométricos. Devemos reconhecer, em sala de aula, com os alunos, a importância do pensamento geométrico ao trabalhar as diferentes áreas da Matemática levando-os à construção de novos conceitos e conteúdos geométricos. Ao trabalhar partindo de problemas geométricos os alunos deveriam perceber uma nova forma de trabalhar a Geometria Euclidiana, agora numa visão dinâmica, seja com ou sem o uso de ferramentas tecnológicas.

Assim, concordamos com Almeida (2007) quando diz que o mais importante em Geometria é o pensamento geométrico, e é, sobretudo, no exercício progressivo dessa forma de pensar que consiste a sua aprendizagem. No entanto, o pensamento geométrico não se reduz apenas à utilização de imagens e diagramas mentais. É, provadamente, também um instrumento de descoberta, compreensão e até de demonstração.

Tomando como fundamento toda a discussão feita nesse eixo, defendemos um ensino de Geometria não apenas pautado na intuição, experimentação e uso de materiais manipulativos, mas que implique realmente em atividade intelectual que leve o aluno a raciocinar geometricamente e a levantar conjecturas. A criação e a análise de conjecturas constituem meios eficientes de desenvolver o raciocínio lógico. Refletindo sobre as palavras de Almeida (2007, p. 11)

> Em Matemática, dedução e intuição são inseparáveis e não levar em conta este aspecto é caminhar para o fracasso. [...] É a dedução que, pelo seu rigor, põe cobro aos desvarios a que pode conduzir a intuição. A intuição é a voz do atrevimento e da invenção e a dedução a da prudência e do controle. [...] Ao aluno que estuda tem que ser dada a ocasião para a intuição sem que ela constitua um talismã e tem que ser dada a ocasião para tirar partido da dedução sem que ela constitua para ele um freio.

Assim, pode-se dizer que quando se pensa em ensino, ambas as coisas, a intuição e a dedução, são necessárias. É fundamental que o professor ao trabalhar com Geometria desafie os alunos inicialmente com experiências intuitivas por meio de construções e experimentações para então depois, fazendo uso do raciocínio dedutivo, provar/demonstrar o que se tinha descoberto com a experimentação ou construção. Não esquecendo, porém, que a resolução de problemas é apontada como a contribuição fundamental para desenvolver nos alunos a capacidade de pensar matematicamente e de que eles são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido (VAN DE WALLE, 2009, p. 59).

2.2. Identificando a Pergunta ou Conjectura

Para Romberg (1992), chegar à pergunta ou à conjectura é um passo decisivo durante o processo de pesquisa, no entanto, identificar qual é o problema de pesquisa não é fácil. De fato, depois de toda essa análise feita após o nosso relacionar com ideias de outros a pergunta da pesquisa pôde ser identificada ao longo de três questionamentos:

1) Como a Geometria Euclidiana, através da resolução de problemas, pode contribuir para a formação matemático-pedagógica do professor?

2) Como a necessidade de um conhecimento didático aliado a um conhecimento matemático, fazendo-se uso de uma metodologia alternativa de trabalho em sala de aula, pode influenciar e contribuir com eficiência na formação inicial de professores?

3) Como compreender o processo ensino-aprendizagem da geometria através da resolução de problemas sob a perspectiva didático-matemática na formação inicial de professores?

Parece-nos difícil juntar essas três perguntas em uma só. Por isso, vamos mantê-las e procurar responder a cada uma delas isoladamente e, por fim, em conjunto, nas conclusões finais.

CAPÍTULO 3 – ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS

O Segundo Bloco de Romberg se configura para nós como momentos de idealização da resolução do problema proposta para pesquisa

De acordo com o fluxograma de Romberg (1992), o segundo bloco é constituído pela construção de uma Estratégia Geral e de um Procedimento Geral. Para chegar à Estratégia Geral nos apoiamos nas variáveis do Modelo Modificado 2, e criamos estratégias auxiliares E_1, E_2, E_3, E_4 e E_5, de modo que, a partir delas, fossem criados seus correspondentes procedimentos auxiliares, P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5. Esses procedimentos auxiliares, colocados em ação, levariam ao Procedimento Geral.

Como diz Romberg (1992), as estratégias e os procedimentos auxiliares levam à construção da Estratégia e do Procedimento Geral, e se apoiam diretamente no modelo que foi construído a fim de explicar o fenômeno de interesse, e da conjectura ou pergunta que se fez sobre a evidência necessária buscada. Nesse sentido, voltemos às perguntas diretrizes:

1. Como a Geometria Euclidiana, através da resolução de problemas, pode contribuir para a formação matemático-pedagógica do professor?

2. Como a necessidade de um conhecimento didático aliado a um conhecimento matemático, fazendo-se uso de uma metodologia alternativa de trabalho em sala de aula, pode influenciar e contribuir com eficiência na formação inicial de professores?

3. Como compreender o processo ensino-aprendizagem da geometria através da resolução de problemas sob a perspectiva didático-matemática na formação inicial de professores?

Ao retomar o Modelo Modificado 2 e aqui reapresentá-lo, podemos dar continuidade à pesquisa.

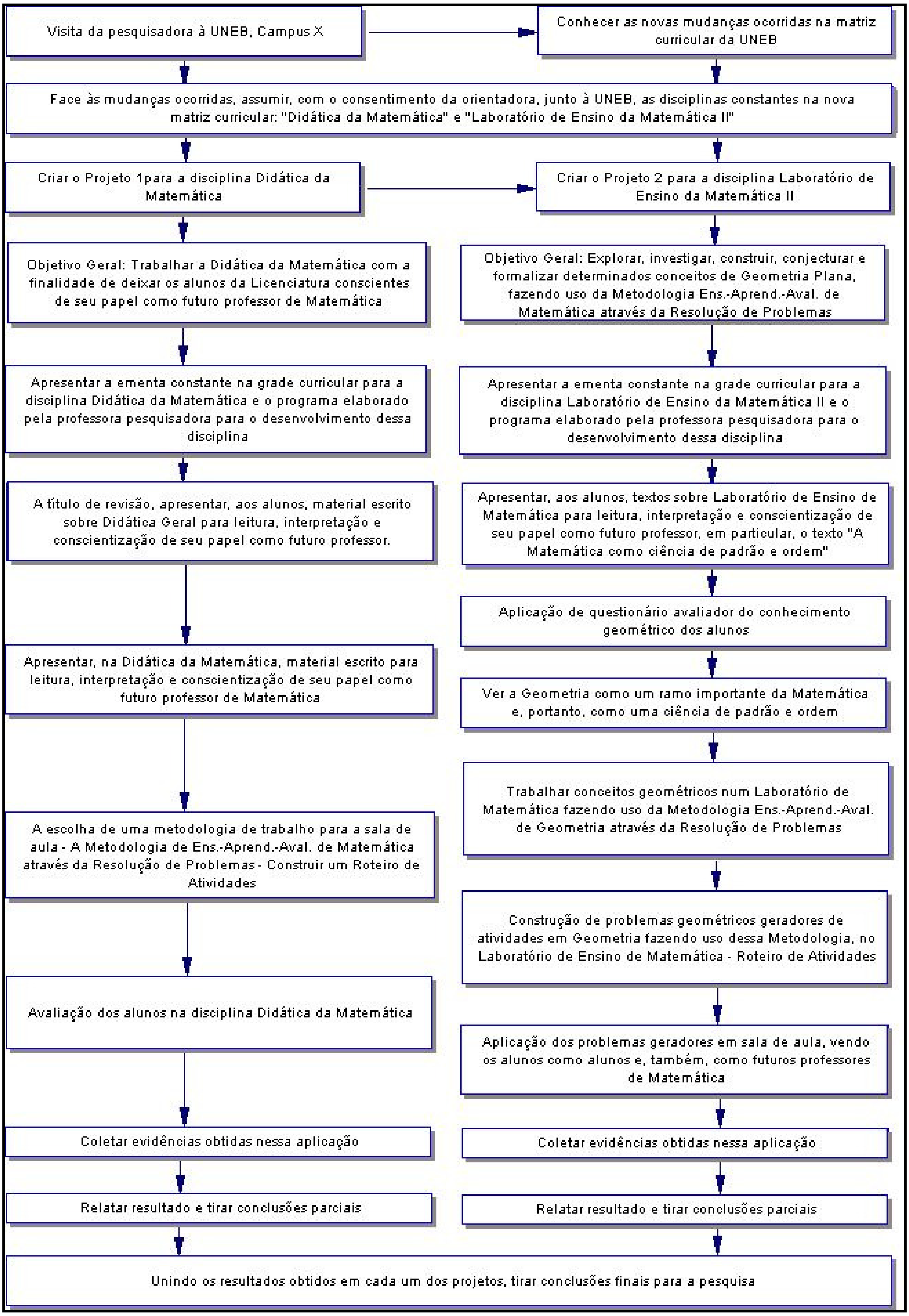


Figura 15 – Modelo Modificado 2.2

3.1. A Estratégia Geral e o Procedimento Geral

Sem perder de vista o fenômeno de interesse: Trabalhar com alunos na perspectiva de formar professores de Matemática, atravessando as mudanças dos modelos criados e chegando ao Modelo Modificado 2, atendendo às mudanças ocorridas, em 2004, na Matriz Curricular da UNEB, idealizamos uma Estratégia Geral e o seu correspondente Procedimento Geral a fim de responder às questões da pesquisa

A Estratégia Geral ficou assim definida:

E_G: (O quê?) Utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, criar dois projetos[28] de ensino: um para a Didática da Matemática (P_1) e um de ensino de Geometria Euclidiana, para o Laboratório de Ensino de Matemática II (P_2) , para aplicação em sala de aula, visando responder às questões que norteiam essa pesquisa, na conjugação desses dois projetos, constantes no modelo assumido.

Correspondente a essa Estratégia Geral foi selecionado o seguinte Procedimento Geral

P_G: (Como?) A criação desses dois projetos.

Agora faremos uma breve apresentação das estratégias auxiliares e dos procedimentos auxiliares correspondentes as variáveis-chave do Modelo Modificado 2 e, em um outro capítulo, cada projeto, em sua aplicação, na respectiva disciplina, será posto em ação.

3.2. Estratégias Auxiliares e Procedimentos Auxiliares

E_1: Ir à Universidade do Estado da Bahia – UNEB, agora como professora-pesquisadora, para sentir o ambiente como local apropriado para a aplicação de minha pesquisa.

P_1: Fazer uma visita à UNEB, Campus X, em Teixeira de Freitas, Bahia, com a finalidade de poder fazer essa aplicação.

E_2: Na visita à UNEB, Campus X, solicitar para a análise a nova Matriz Curricular da Licenciatura em Matemática.

P_2: Tendo acesso a essa nova Matriz Curricular, analisá-la com a finalidade de elaborar projetos de trabalho para a sala de aula.

[28] A palavra “Projeto” aqui está sendo usada no sentido de ‘planejamento de trabalho a ser realizado’.

E_3: Face às mudanças ocorridas na Matriz Curricular da UNEB assumir, junto à UNEB, com o consentimento de minha orientadora, as disciplinas constantes da nova matriz curricular: “Didática da Matemática” e “Laboratório de Ensino da Matemática II”.

P_3: Visitar a UNEB, mais uma vez, para uma conversa com a coordenadora solicitando a permissão de atuar como professora nas disciplinas constantes da nova Matriz Curricular, “Didática da Matemática” e “Laboratório de Ensino da Matemática II” para a aplicação de meu projeto de pesquisa.

E_4: A escolha de uma dinâmica para trabalhar em sala de aula.

P_4: A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

E_5: Criar projetos para as disciplinas: Didática da Matemática” e “Laboratório de Ensino da Matemática II”.

P_5: A criação desses dois projetos buscando, na literatura, assuntos relacionados a Didática da Matemática e a Laboratório de Ensino de Matemática.

3.3. Procedimentos Auxiliares em Ação

Querendo chegar ao Procedimento Geral e à criação dos dois Projetos, foram colocados em ação os procedimentos auxiliares P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5.

3.3.1. P_1 em Ação – Visita à UNEB, Campus X

Escolhida a instituição para a realização da pesquisa, a pesquisadora, em visita à UNEB apresentou-se à direção e à coordenadora do colegiado do curso de Licenciatura em Matemática, para uma conversa informal, falando do seu desejo de realizar a pesquisa nessa instituição, especificamente, no curso de Matemática. Sua acessibilidade à universidade foi fácil devido à sua admissão como professora nesse campus desde 2002. Ao falar com a coordenadora do curso de Matemática sobre sua vontade de realizar a pesquisa em uma turma desse curso, ela e a diretora concordaram, mas solicitaram um documento por escrito, para oficializar a sua inserção na instituição por um determinado período para a realização da pesquisa (documento em anexo). Depois dessa conversa, com a autorização da coordenadora do curso, a pesquisadora pede para ter conhecimento do regimento geral da UNEB, do Projeto Pedagógico do Curso de Matemática e das Matrizes Curriculares antiga e nova do respectivo curso.

É importante relatar, brevemente, o que é a UNEB, como funciona o Departamento de Educação, no Campus X e, em especial, seu curso de Licenciatura em Matemática.

A Universidade do Estado da Bahia – UNEB – é uma das quatro universidades estaduais da Bahia, criada desde 1982. É uma Instituição autárquica de regime especial, de ensino, pesquisa e extensão, de natureza *multicampi*, vinculada à Secretaria de Educação do Estado da Bahia, com sede em Salvador e jurisdição em todo o estado da Bahia. A UNEB possui 29 Departamentos sediados na capital e em 24 centros regionais de médio e grande porte. Além disso, a Rede UNEB 2000, um programa especial em convênio com prefeituras municipais, faz-se presente em aproximadamente 137 municípios, para graduar professores em exercício na rede pública.

A UNEB desenvolve também pesquisa em todas as regiões em que atua, possuindo Programas de Iniciação Científica e bolsa de monitoria para os seus estudantes, em pleno funcionamento. Desenvolve ainda, projetos de Extensão Universitária, através de convênios e parcerias com órgãos governamentais e da iniciativa privada. A Extensão, à comunidade com a participação estudantil, aproxima a universidade da vida comunitária, proporcionando troca de conhecimento.

Dos 24 campi, o Campus X – Departamento de Educação (DEDC) – em Teixeira de Freitas, Bahia – foi o escolhido para o desenvolvimento da pesquisa, no curso de Licenciatura em Matemática, devido a presença desta pesquisadora, nessa área, como professora desde 2002. Esse campus possui os cursos: Letras (Língua Portuguesa e Literaturas); Pedagogia (Docência e Gestão de Processos Educativos); Matemática; Ciências Biológicas e História. O departamento é dirigido por uma diretor e cada curso possui um colegiado que é coordenado por um professor desse departamento.

O curso de Licenciatura em Matemática do Campus X, departamento de Educação, foi implantado em 1998 e reconhecido pelo decreto nº 10.007 de 24/05/2006. É um curso que funciona nos turnos vespertino e noturno, admitindo 35 alunos por turno. Esse curso tem por finalidade preparar o profissional com uma formação sólida que o capacite para uma ação pedagógica em sala de aula, possibilitando ao aluno compreender a linguagem matemática, desenvolver o pensamento lógico e dedutivo e utilizar-se do raciocínio matemático em situação do cotidiano e em outros campos do conhecimento.

3.3.2. P_2 em Ação - Conhecimento da nova matriz curricular

Ao olhar e analisar o Regimento Geral da UNEB aproveitamos o momento para também analisar a Matriz Curricular do curso de Licenciatura em Matemática. Fizemos uma análise da Matriz Curricular anterior e da vigente que entrou em vigor a partir de 2004, conforme consta na Proposta de Adaptação Curricular para o Curso de Licenciatura Plena em Ciências – Habilitação em Matemática. Nessa nova Proposta de Adaptação há uma mudança na carga horária do curso passando de 3075 horas para 3290 horas. Uma outra mudança nessa proposta está na distribuição das disciplinas, as quais foram, de acordo com a matriz curricular antiga, foram reaproveitadas e ou adaptadas para compor a atual componente curricular.

Ainda, em análise a essas duas Matrizes Curriculares, observamos que houve algumas mudanças: na nova matriz não há mais pré requisitos de uma disciplina para outra, ou seja, o aluno poderá cursar, por exemplo, Cálculo II, mesmo sendo reprovado em Cálculo I e as disciplinas pedagógicas parecem entremeadas na nova Matriz Curricular.

3.3.3. P_3 em ação – O consentimento para atuar como professora-pesquisadora

Depois de tomar conhecimento e analisar as matrizes curriculares do curso de Licenciatura em Matemática (antiga e atual), voltei à UNEB, Campus X, para uma conversa com a coordenadora solicitando-lhe a permissão para atuar como professora nas disciplinas "Didática da Matemática" e "Laboratório de Ensino de Matemática II", constantes na nova Matriz Curricular. De uma maneira formal levei uma carta da minha orientadora apresentando-me à coordenação do curso e, ao mesmo tempo, pedindo permissão para que eu pudesse realizar a coleta de dados no referido campus, no curso de Licenciatura em Matemática. (anexo A). Lida a carta pela coordenadora, a mesma, consentiu com o pedido, disse que passaria à pesquisadora todas as informações que julgasse necessárias para a implementação das duas disciplinas. Alertou-a de que o semestre letivo começaria em novembro de 2008[29] e pedindo que se comprometesse a conversar com a turma em que seriam aplicadas essas disciplinas.

Uma outra carta foi apresentada aos alunos, participantes da pesquisa, informando-lhes de todo o processo de investigação, bem como, solicitando-lhes autorização para a participação na coleta de dados (anexo A).

3.3.4. P_4 em ação – A Metodologia de trabalho para a sala da aula

Apoiada nas idéias de educadores que trabalham a sala de aula a partir de problemas, a

[29] Devido à greve pela qual passaram as universidades estaduais da Bahia, houve uma defasagem no calendário acadêmico.

metodologia de trabalho para a sala de aula a ser adotada é a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa pesquisa, essa metodologia se desenvolverá nas duas disciplinas, com maior ênfase na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II ao se trabalhar com conceitos geométricos e os conceitos centrais da Geometria Euclidiana, Congruência e Semelhança de Triângulos, dando-se ênfase à Geometria Dinâmica, ou seja, a Geometria das Transformações, através da manipulação e construção de figuras geométricas.

3.3.5. P_5 em ação – Criação dos Projetos

Para elaboração dos projetos, buscou-se em literatura, nacional e/ou internacional, suporte para apoiar a idéia de um trabalho, com futuros professores, visando ao ensino-aprendizagem da Geometria. Dessa forma, foram procuradas leituras relacionadas à Didática, em especial à Didática da Matemática; à Formação Inicial de Professores de Matemática: suas crenças e concepções sobre Matemática, sobre Resolução de Problemas, e sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Também, buscamos na literatura textos relacionados a Laboratório de Ensino de Matemática, a Geometria e seu ensino.

Depois de analisada a nova Matriz Curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UNEB, em conversa com minha orientadora e com o consentimento da coordenação do curso, começamos a pensar na criação dos projetos para serem trabalhados com futuros professores de Matemática. Esses projetos seriam desenvolvidos na UNEB, Campus X, no curso de Licenciatura em Matemática a partir do 2º semestre letivo de 2008, mês de novembro, se estendendo até fevereiro de 2009, tendo como sujeitos da pesquisa alunos da turma de 4º período, com aulas a serem ministradas pela professora-pesquisadora.

Vale ressaltar que cada disciplina teve uma carga horária de 45h/aula, ficando, então, sob a responsabilidade da professora-pesquisadora, uma carga horária de 90h/aula. Como a professora-pesquisadora ministrou as duas disciplinas, já mencionadas anteriormente, decidiu-se, em acordo com a coordenação do curso, ministrar primeiramente a disciplina Didática da Matemática, no período de novembro a dezembro e depois, no período de março a abril, a disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II. Dessa forma, cada disciplina foi ministrada em três vezes por semana, num total de 9h/aula semanal.

Observa-se que essas disciplinas não se configuram como uma exigência para as mesmas disciplinas, com outras turmas posteriores, mas, sim, deixando liberdade a outros professores, em outros períodos, trabalharem essas disciplinas fazendo uso de outras possíveis metodologias de ensino, se assim o quiserem.

Assim, de acordo com o Procedimento Geral, é dado o início para a criação dos projetos P_1 e P_2.

3.3.5.1. A Criação do projeto P_1 – A Didática da Matemática

Para iniciarmos este projeto nos ativemos primeiramente em olhar para a Didática, de um modo geral e, depois, especificamente, a Didática da Matemática, pois ter o conhecimento dessas disciplinas é fundamental à formação inicial do professor de Matemática.

Castro (1991) diz que "A Didática é a parte da Pedagogia que estuda os processos de ensino e aprendizagem, ou melhor, é uma ciência cujo objetivo fundamental é ocupar-se das estratégias de ensino, das questões práticas relativas à metodologia e das estratégias de aprendizagem. Sintetizando, poderíamos dizer que ela funciona como o elemento transformador da teoria na prática".

Varizo (2006, p. 55) diz que

> A Didática da Matemática é, sem dúvida alguma, a pedra basilar da formação do professor dessa área, uma vez que oferece as condições básicas para que ele torne um determinado conhecimento matemático passível de ser apropriado pelo aluno. Assim, essa disciplina deve oferecer ao futuro professor os saberes teóricos e práticos próprios de um conhecimento interdisciplinar, compreendendo como interdisciplinaridade a articulação que se deve fazer entre o conhecimento matemático acadêmico e os conhecimentos socioculturais, filosóficos, psicológicos, pedagógicos, históricos, antropológicos e tecnológicos, voltados para o ensinar e o aprender Matemática.

Entretanto, outros a concebem apenas como uma orientação para a prática, como uma espécie de "receituário para o ensino". Mas de acordo com outros pesquisadores, Ponte (1994, p.4), em oposição a essa concepção, enfatiza que

> [...] a Didática é mais do que um simples domínio da prática profissional. Ela constitui um campo científico, onde se realiza trabalho de investigação e de produção de novo conhecimento e, como todo campo científico, nela reconhecem-se duas características: um objeto bem definido e uma metodologia de trabalho própria.

Levando-se em consideração que a Didática tem uma importância fundamental no processo educacional e que nenhuma outra disciplina poderá cumprir esse papel é que surgiu a idéia de ministrar essa disciplina com o intuito de oferecer, aos licenciandos, os fundamentos teóricos e práticos para o desenvolvimento da ação pedagógica, enquanto professor na sala de aula.

Por outro lado, para que a Didática da Matemática se firme como um conhecimento científico e significativo na formação do professor é preciso vencer crenças extremamente impregnadas numa parcela significativa da sociedade. Crenças essas, que segundo Varizo (2006, p. 56)

> Ainda, hoje, existem aqueles que acreditam que ensinar é fruto de características inatas que não podem ser aprendidas ou transmitidas, ou acreditam que a condição necessária e suficiente para ensinar Matemática é ter o domínio do conteúdo desta quando ensinada na Universidade. Alegam que se aprende a ensinar ensinando, que se aprende Matemática imitando outros professores, ou decorando o conteúdo do livro didático ou praticando muito. Isto equivale a dizer que, para ensinar Matemática, basta resolver muitos e muitos exercícios.

Mas será que o ensino se restringe a essas crenças? D'Amore (2007, p. 1), em seu livro intitulado *Elementos de Didática da Matemática,* se posiciona a esse respeito:

> Muitos acreditam que a tarefa do pesquisador em Didática da Matemática seja a de "*ensinar* a ensinar" e que os destinatários desse "*ensinar*" devam ser os que desejam ser professores (em *formação inicial*, como normalmente se diz) ou aqueles que já são professores (quando estão na fase denominada *formação em serviço*). Por mais que essa crença esteja enraizada, por exemplo, entre os colegas matemáticos, as coisas *não* são assim; entretanto, se tal crença se encontra tão difundida, alguma raiz, alguma justificação, alguma origem deve ter...

E, assim, ele nos remete a uma reflexão muito mais profunda: *"Se a tarefa do estudioso em Didática da Matemática não é a de ensinar a ensinar a Matemática, então qual é?"*

Nosso objetivo primordial, nessa disciplina, é trabalhar a Didática da Matemática com a finalidade de deixar os alunos d Licenciatura conscientes de seu papel como futuro professor de Matemática. Além disso, conscientizá-los de que um professor eficiente de Matemática deve considerar não só a importância do conhecimento de Matemática como, também, o conhecimento de sua didática, ou seja, a forma de trabalhar com o aluno para que eles possam chegar à aprendizagem.

Partindo desse objetivo, para elaborar o referido projeto fomos à busca da Ementa do curso de Licenciatura em Matemática da UNEB e, a partir dela, criamos o Programa de Disciplina, ambos, a seguir, apresentados.

EMENTÁRIO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNEB

Código	**Componente Curricular**	**Carga-Horária**
ED0065	Didática da Matemática	45h

Ementa

Identifica educação, escola, sociedade, teoria de ensino e a formação do educador. Analisa a organização do trabalho docente (aspectos teóricos e metodológicos), os processos de construção do conhecimento e avaliação da aprendizagem matemática.

Referências

ABREU, M. C. T. A. de. *O professor Universitário em Aula*. São Paulo, Cortez. 1980.

BAHIA (Estado). *Diretrizes Curriculares para o Ensino Fundamental*. Salvador/BA: DEE, 1995.

BRASIL (País). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, MEC/SEF, 1997.

D' AMBROSIO, U. *Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação e Matemática*. São Paulo, Summus Editorial, 1986.

DANTE, L. R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo, Ática, 1991.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA – SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Publicação Semestral. São Paulo/SP.

MACHADO, N. J. *Matemática e Realidade*. São Paulo, Cortez. 1987.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. São Paulo, Interciências, 1978.

REVISTA PRO-POSIÇÕES. Publicação Quadrimestral. Faculdade de Educação. Campinas, UNICAMP, 1993.

Quadro 2 - Ementa da disciplina Didática da Matemática

OBS.: Dentro desta ementa o professor tem liberdade de planejar os tópicos referentes à disciplina, sendo, portanto, admissível também, alterações nas referências bibliográficas. Sendo assim, o Programa da disciplina Didática da Matemática se constituiu por:

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
CAMPUS X - DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO
CURSO: Licenciatura em Matemática - SEMESTRE: 2008.2
PROFESSORA: Célia Barros Nunes - CADASTRO: 74382977-5

PROGRAMA DE DISCIPLINA

TURMA: 2007.1

Código	Componente Curricular
ED0065	➢ ***Didática da Matemática***

Forma de Execução	Carga Horária
➢ Aulas teóricas e práticas	45h/a

EMENTA
Identificar educação, escola, sociedade, teoria de ensino e a formação do professor. Analisar a organização do trabalho docente (aspectos teóricos e metodológicos), os processos de construção do conhecimento e da avaliação da aprendizagem matemática.

OBJETIVOS
Rever Didática Geral e trabalhar Didática da Matemática com a finalidade de propiciar aos alunos da Licenciatura em Matemática uma conscientização de seu papel como futuro professor.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO
1. Material escrito sobre Didática Geral e Didática da Matemática para leitura, interpretação e conscientização do papel do professor na sala de aula. 2. Discussão e reflexão sobre conteúdos, currículo e metodologias de trabalho para a sala de aula de matemática. 3. Apresentação de várias metodologias de ensino da Matemática para o trabalho em sala de aula. 4. Apresentação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. 5. Aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas a partir de variados problemas matemáticos.

METODOLOGIA
- Leitura dos textos; - Debates abertos e/ou dirigidos sobre Didática Geral e Didática da Matemática; - Grupos de discussão e reflexão; - Conceitualização de noções referentes à Didática da Matemática; - O uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.
AVALIAÇÃO
Seguindo as orientações de um Termo de Compromisso, a avaliação dar-se-á de forma continuada, considerando a participação efetiva dos alunos, levando-se em conta a assiduidade, a participação nos debates, além de uma avaliação escrita no final da disciplina. Tarefas extraclasse serão, também, consideradas como uma forma de avaliação.
REFERÊNCIAS
BAHIA (Estado). **Diretrizes Curriculares para o Ensino Fundamental**. Salvador/BA: DEE, 1995. BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** 3º e 4º ciclos: Matemática. Brasília, 1998. BOERO, M.L. **A introdução da disciplina 'ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas' no curso de licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie: uma proposta de mudança".** Dissertação de Mestrado – Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 1999. CASTRO, A. D., **Didática Geral**. Série Idéias, nº 11. São Paulo, FDE. 1991. Disponível em: http://www.centrorefeducacional.com.br/trajddt.htm Acesso em: 17/06/2008. CAVALCANTI, Z. e MARINCEK, V. **Aprender Matemática resolvendo Problemas**. Porto Alegre, Artmed Editora, 2001. D' AMBROSIO, U. **Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação, Matemática**. São Paulo, Summus Editorial, 1986. D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática.** Tradução de Maria Cristina Bonami. São Paulo, Editora e Livraria da Física, 2007. DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo,

Ática, 1991.

HOLDAN, G. Tornando as tarefas de casa de Álgebra mais eficazes. In: SHULTE, Albert P. e COXFORD, Arthur F. (orgs). Tradução: DOMINGUES, Hygino H. **As idéias da Álgebra**. São Paulo, Editora Atual, 1995.

MARINCEK, V. e CAVALCANTI, Z **Aprender Matemática resolvendo Problemas**. Porto Alegre, Artmed Editora, 2001.

MEWBORN, D. S.; CROSS, D. I. Mathematics Teachers'Beliefs about Mathematics and Links to Students'Learning. In: MARTIN, W.G., STRUTCHENS, M.E. e ELLIOT, P.C**, Teachers' Learning of Mathematics**, sixty-ninth yearbook, NCTM, 2007**,** p. 259-269.

NCTM. **Principles and Standards for Mathematics Education.** Reston: NCTM, 2000.

ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – Aritmética, Álgebra e Geometria. In: **Anais da Primeira Escola de Inverno de Educação Matemática de Santa Maria - UFSM**, 2008, p. 1-7.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino – Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo, SP: Editora UNESP, 1999.
__________, Lourdes de la Rosa. Novas Reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A e BORBA, M. (orgs) **Educação Matemática – pesquisa em movimento**, São Paulo, Editora Cortez, 2004.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. São Paulo, Interciências, 1978.

PONTE, J. P. Didática Específica e Construção do Conhecimento Profissional. In: J. Tavares, A. Pereira, A.P. Pedro & H. A. Sá (Eds), **Investigar e formar em educação**: Actas do IV Congresso da SPCE, p. 59-72. Porto: SPCE, 1999.

__________. Da formação ao desenvolvimento profissional**.** Conferência plenária apresentada no Encontro Nacional de professores de Matemática ProfMat 98, realizado em Guimarães. Publicado In **Actas do ProfMat**, 98 (p. 27-44), Lisboa: APM.

VARIZO, Zaíra da Cunha Melo. Os caminhos da Didática e sua relação com a formação de professores de Matemática. In: NACARATO, Adair Mendes e PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (orgs.). **A Formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas**. Belo Horizonte, Editora Autêntica, 2006.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: 4ª edição, Logman, 2001.

Periódicos:

Educação Matemática em Revista. Publicação Semestral. SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo/SP. **Revista do Professor de Matemática**. Publicação Quadrimestral. SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, USP – São Paulo. **Revista Nova Escola**. Fundação Victor Civita. Editora Abril.
Data 10/11/2008 ***Docente : Célia Barros Nunes***
Aprovado pela Coordenação do Colegiado ***Data ____/____/____*** ***Coordenador(a)***

Quadro 3 - Programa da disciplina Didática da Matemática

Diante desse programa de disciplina criamos um roteiro de atividades[30], para a implementação das aulas de Didática da Matemática, composto por atividades para a sala de aula e por tarefas extraclasse. Em todos os encontros propusemos tarefas extraclasse por acreditarmos que elas também constituem o momento do aluno refletir, rever, consolidar conteúdos trabalhados ou, até mesmo, explorar tópicos futuros. Tínhamos por intenção, no inicio de cada encontro, rever e discutir a tarefa extraclasse.

Nesse roteiro de atividades foram propostas leituras de alguns textos criados por nós, outros extraídos de livros adaptados à situação de estudo que pretendíamos naquele encontro. Os referidos textos se encontram no anexo B.

Para essa disciplina havia 15 alunos matriculados, porém apenas 14 alunos concluíram a disciplina.

[30] Atividade é um conjunto de problemas. Todas as vezes que os livros consultados, por nós, usam as palavras atividades, exercícios, situação problema ou problemas de fixação, se o aluno não souber fazer, mas está interessado em resolvê-lo, isso se configura para nós como um *problema*. Assim, as atividades se constituíram de textos e de problemas.

3.3.5.1.1. Roteiro de Atividades

1º Encontro – Socialização e Integração

Objetivo Geral:

Minha experiência como professora, já há alguns anos, seja na Educação Básica ou até mesmo no Ensino Superior, fez com que observasse e constatasse que a maioria dos alunos não tem o hábito da leitura, dificultando, dessa forma, fazer análises, reflexões e interpretações do material de estudo.

Pensando nessa problemática, optamos por realizar esta disciplina pautada em textos que fizessem com que os alunos, futuros professores, adquirissem o hábito pela leitura, interpretando os textos lidos e tornando, assim, os encontros mais reflexivos, através de debates, discussões dos temas propostos com o intuito de pensar em seu desenvolvimento profissional e de conscientizá-los de seu papel como futuro professor em sala de aula.

Neste primeiro encontro, entre professor/pesquisador e alunos, o objetivo foi o de tornar esse primeiro encontro um momento de socialização e integração dos temas constantes, cada um expresso por meio de seu objetivo específico.

Objetivos Específicos:

Realizar a apresentação entre professor e alunos.

Apresentar e analisar a ementa do componente curricular "Didática da Matemática" e o programa de disciplina.

Apresentar e comentar o Termo de Compromisso (Anexo B, p. 353).

Distribuir, para cada aluno, o texto: "*Tornando as tarefas de casa mais eficazes*" (anexo B, p. 355), uma adaptação do texto de Gregory Holdan, extraído do livro 'As idéias da Álgebra", e fazer uma leitura conjunta (professor e alunos).

Tarefa extraclasse:

Distribuir para os alunos o texto: "*Didática Geral*" de Amélia Domingues de Castro para leitura e reflexão (Anexo B, p.357). Esse texto será discutido em sala de aula, no início do encontro seguinte.

2º Encontro: Sobre a Didática Geral

Objetivo Geral:

Ter o conhecimento matemático é necessário, mas não é suficiente. É de consenso que o professor precisa conhecer e dominar a matemática que vai trabalhar com seus alunos. Entretanto, isso não basta, é necessário que haja uma didática, uma forma de trabalhar em sala de aula, que capacite o professor a conduzir os alunos na busca de sua aprendizagem.

Este encontro tem por objetivo geral rever conceitos da Didática Geral de uma forma sucinta, haja vista que a mesma já foi trabalhada com os alunos em um semestre anterior, de acordo com a Matriz Curricular da UNEB. Pretende-se, neste encontro, discutir alguns termos trabalhados na Didática Geral: Educação, Escola e Sociedade a fim de que o aluno perceba que esses termos estão interrelacionados no ensino da Matemática.

Objetivos Específicos:

<u>Atividade (i)</u>

Ler, refletir e discutir o texto deixado como tarefa extraclasse.

<u>Atividade (ii)</u>

Rever os conceitos de escola, educação, sociedade, teorias de ensino e formação de professor, temas já trabalhados na disciplina Didática Geral, cujo objetivo específico é fazer com que o aluno compreenda que esses termos também estão interrelacionados com a Matemática.

<u>Atividade (iii)</u>

Distribuir para os alunos o texto: "A necessidade da Escola" (Anexo B, p. 361) visando analisar uma experiência de sala de aula vivida por Maria Lúcia Boero, na Universidade Presbiteriana Mackenzie.

Tarefa extraclasse:

Distribuir para os alunos o texto: "*Ensinar a ensinar*" (Anexo B, p. 363), do livro "Elementos de Didática da Matemática", de Bruno D'Amore (2007) e pedir-lhes que leiam e reflitam sobre o referido texto para uma discussão no próximo encontro.

3º Encontro – Sobre a Didática Geral[31]

Objetivo Geral:

Este encontro tem por objetivo geral mostrar aos alunos que a Didática não se limita apenas a ensinar a ensinar, como bem afirma D'Amore (2007, p. 30-31)

> A pesquisa em Didática possui, portanto, objetivos requeridos por necessidades, por exigências concretas que podem ser expressas, por exemplo, por meio das seguintes perguntas: o que é preciso fazer e saber para tornar o ensino mais eficaz? Como aprendem os alunos? Quais são os instrumentos metodológicos para adaptar o ensino às capacidades individuais? Como avaliar a eficácia da escolha metodológica? Como e quais instrumentos a avaliar? ... Entretanto, tudo isso é banal se não estiver ancorado em bases teóricas profundas e sólidas.

Objetivos Específicos:

Atividade (i)

Apresentar uma citação constante no livro de Bruno D'Amore (2007), de Lewis Carrol : "*As aventuras de Alice no País das Maravilhas*", com o objetivo específico de se levantar comentários a respeito.

> Estou totalmente de acordo contigo, – disse a duquesa – e a moral disto é: "Tens que ser aquilo que queres parecer" ou, mais simplesmente, "Não penses jamais de não ser diferente do que poderias parecer aos outros, que o que eras, ou terias podido ser, não era diferente daquilo que terias sido se tivesses aparecido diferente a eles". Parece-me que eu entenderia melhor esse preceito, disse Alice gentilmente, se o pudesse ter escrito; não há dúvida, porém, que seguirei igualmente o vosso conselho.

Atividade (ii)

Ler e discutir o texto deixado como tarefa extraclasse, com o objetivo específico de sentir a nova concepção de Didática.

Atividade (iii)

Falar da Didática da Matemática como um subconjunto da Didática Geral, a fim de que os alunos possam perceber o caráter específico da didática da matemática.

---

[31] A ementa da disciplina Didática Geral se apresenta no anexo B. Apesar de não ser nossa pretensão trabalhá-la minuciosamente, por ter sido uma disciplina já vista pelos alunos em estudo, mas a apresentamos para que o leitor possa analisá-la e, até mesmo, compará-la com a ementa da disciplina Didática da Matemática.

Atividade (iv)

Situação problema[32]**:**

Se uma fábrica de doces disponibilizar 7428 balas para serem distribuídas igualmente a 5 instituições, entre suas crianças, quantas balas caberiam a cada instituição?

Responda:

1) Como resolver esse problema em uma turma de ensino fundamental de 1ª a 4ª série?

2) Que matemática "nova" quer-se construir através da resolução desse problema?

3) Para que série vocês acreditam que esse problema é adequado? Se, para várias séries, como ele poderia ser trabalhado nas diferentes séries?

O objetivo específico para esse problema é o de explorar o conceito de divisão e seu algoritmo.

Atividade (v):

Distribuir para os alunos o texto: "*Tipos de Conhecimento: conhecimento conceitual e conhecimento procedimental*" (Anexo B, p. 366) traduzido do livro de Van de Walle e estabelecer a distinção entre esses conhecimentos apresentando situações onde eles se colocam.

Tarefa extraclasse:

Deixar o texto: **"***A Didática da Matemática como arte"* (Bruno D'Amore, 2007 – Anexo B, p. 368) para leitura e reflexão.

4º Encontro: Sobre a Didática da Matemática

Objetivo Geral:

No passado, vários autores sustentavam que ensinar era uma arte, fruto de características pessoais que não podem ser aprendidas nem transmitidas, com a radical conclusão de que a pesquisa didática é inútil.

[32] Problema criado por nós.

Mas, será que até os dias de hoje ainda existe essa crença? Será que o ensinar se resume meramente a ARTE? É o que pretendemos refletir e discutir neste encontro.

Objetivos Específicos:

Atividade (i)

Apresentar uma citação contida no livro de Bruno D'Amore (2007, p. 34), de Dario Antiseri, constante na Introdução à educação italiana de Ludwig Wittgenstein, *Dizionario per le scuole elementari* cujo objetivo específico é refletir sobre seus dizeres visando à conceituação de Didática.

> Do que sabemos a partir dos documentos disponíveis, podemos dizer que Wittgenstein se dedicou ao ensino com uma intensidade desconhecida e com um senso de dever absoluto. Não perdoou sequer a si mesmo; e foi severo com seus estudantes. (...) Viveu pobre com os pobres; respeitou-os; fez de tal maneira que seus jovens chegassem a pensar por si mesmos; deu-lhe o que tinha: seu saber, sua abnegação, e sua cesta de laranjas.

Atividade (ii)

Analisar o texto deixado no encontro anterior como tarefa extraclasse, cujo objetivo específico é ler refletir e discutir sobre o texto.

Atividade (iii)

Situação-problema[33]:

Numa divisão, qual é o número que é o quíntuplo de 32 e o resto é o maior possível?

1) Como vocês trabalhariam esse problema com uma criança, com um jovem, com um colega, de modo a levá-lo a resolver?

2) Que conhecimento prévio deve-se ter para poder resolvê-lo?

O objetivo específico para esse problema é o de apresentar um problema matemático para estabelecer a relação do conhecimento matemático com o conhecimento didático.

Tarefa extraclasse:

Questões para refletir:

[33] Problema criado por nós.

1) Como você vê a Didática da Matemática como disciplina em um curso de Formação de Professores?

2) Para você, o que significa um professor bem preparado?

3) Em relação ao problema visto hoje, em sala de aula, se o professor o resolvesse simplesmente escrevendo na lousa a “sua” forma de resolvê-lo e, se os alunos, apenas copiassem essa escrita do professor, em seus cadernos, vocês acreditam que todos os alunos da classe teriam aprendido toda aquela matemática que a resolução do problema pode levar a construir através de sua resolução? Justifique.

5º Encontro: Sobre a Didática da Matemática – novas idéias

Objetivo Geral:

Van de Walle (2001, p. 31) afirma que “todo conhecimento matemático, ou de outro tipo, consiste de representações, interna ou mental, isto é, de idéias que a mente tem construído. Atualmente, educadores matemáticos têm descoberto uma utilidade em distinguir esses dois tipos de conhecimento: o conhecimento conceitual e o conhecimento procedimental”.

Mediante as palavras de Van de Walle pretendemos, neste encontro, tornar os alunos conscientes de que no processo ensino-aprendizagem é fundamental que se compreenda antes de tudo o conhecimento conceitual, que corresponde ao conhecimento que é entendido para, depois, ter-se o conhecimento procedimental, ou seja, o conhecimento de regras, procedimentos e simbolismos que se usa na Matemática.

Nessa mesma linha de pensamento, apresentar, nesse encontro, sucintamente, a teoria Vygotskyana que afirma que a aprendizagem acontece no intervalo entre o conhecimento real e o conhecimento potencial, isto é, na zona de desenvolvimento proximal – ZDP.

Objetivos Específicos:

Atividade (i)

Discutir as questões deixadas como tarefa extraclasse, visando analisar a leitura e as reflexões dos alunos acerca das questões propostas.

Atividade (ii)

Situação problema[34]:
Em 47 quantos 7 há?

Objetivo específico para esse problema:

Apresentar um problema que possa ser trabalhado por vários caminhos, objetivando a construção de novos conceitos e novos conteúdos, através de sua resolução.

Atividade (iii)

Apresentar o texto: "*Um ensino-aprendizagem eficiente de Matemática*" (Van de Walle, 2001, p.370), tendo como objetivos específico falar sobre as quatro componentes básicas para um ensino eficiente de Matemática segundo Van de Walle: fazer matemática – a natureza do saber e de fazer matemática; aprendizagem – visões construtivistas de como os alunos aprendem; ensinar através da resolução de problemas - Ensinar num ambiente de resolução de problemas; avaliação – integrar a avaliação com o ensino para melhorar ambos.

Atividade (iv)

Recorrência às idéias de Vygotsky, tendo como objetivo falar sobre a necessidade e a importância de se ter um conhecimento prévio do aluno necessário para a construção de novo conhecimento pretendido.

Tarefa extraclasse:

Deixar o texto: "*A Didática da matemática no curso de formação de professores* " (Anexo B, p. 371) de Zaíra da Cunha Melo Varizo (2006) para leitura, interpretação, reflexão e discussão.

6º Encontro: A Didática da Matemática na formação de professores

Objetivo Geral:

[34] Problema criado por nós.

O propósito deste encontro é o de voltar os olhos para a Didática da Matemática na formação de futuros professores de matemática.

Objetivos Específicos:

Atividade (i)

Leitura do texto deixado como tarefa extraclasse, tendo como objetivo a reflexão e a discussão do texto.

Atividade (ii)

> **Situação problema[35]:**
>
> Em $\frac{5}{6}$ quantos $\frac{2}{3}$ há?

Esta atividade tem por objetivo apresentar um problema, no mesmo espírito do problema do encontro anterior, porém trabalhando com números racionais, isto é, aquele que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$.

Tarefa extraclasse:

> **Situação problema:**
>
> Uma família de 27 pessoas resolveu fazer um passeio a um Parque Nacional. Telefonaram para lá a fim de reservar acomodação para todos. Souberam que alugavam chalés que comportavam 4 pessoas. Quantos chalés precisam alugar?

7º Encontro: Sobre Currículo, conteúdo e metodologia

Objetivo Geral:

O objetivo geral deste encontro é o de apresentar e discutir documentos curriculares que apresentam suas propostas curriculares objetivando um ensino eficiente de matemática.

[35] Problema criado por nós.

Por exemplo, os PCNs e os Standards 2000 e as Diretrizes Curriculares para o Curso de Licenciatura, bem como diferentes metodologias para trabalhar matemática na sala de aula.

Um currículo é entendido, por muitas pessoas, apenas como uma lista de conteúdos constantes de uma disciplina ou de um curso – o programa de ensino, os conteúdos ou a grade curricular. No entanto, ele é mais do que isso. Segundo Sacristan (1998, citado por Saviani, 2003, p.3), "o currículo deve ser entendido como o processo que envolve uma multiplicidade de relações, abertas ou tácitas, em diversos ambientes que vão da prescrição à ação, das decisões administrativas às práticas pedagógicas, na escola como instituição e nas unidades escolares especificamente".

Ponte, Matos e Abrantes apud Canavarro e Ponte (2005, p.64) fazem uma distinção entre currículo e programa curricular. Segundo eles

> [...] o currículo, num sentido mais amplo, pode ser identificado com tudo o que os alunos aprendem, seja como resultado de um ensino formal por parte dos professores ou através de processos informais e não previstos. Por outro lado, o programa refere-se, sobretudo, à sequência de tópicos de uma disciplina (conteúdos) que devem ser dados no respectivo ano ou ciclo.

. Os Standards (2000, p.14) dizem: "Um currículo é muito mais que uma coleção de atividades. Ele deve ser coerente, focado sobre a matemática importante, e bem articulado através das séries". Assim, o currículo deve estar bem articulado e suas ideias matemáticas devem estar interligadas. Ele deve apresentar caminhos de como ensinar e como avaliar

Objetivos Específicos:

<u>Atividade (i)</u>

Discutir o problema deixado como tarefa extraclasse, tendo como objetivo específico o de trabalhar o conceito de divisão em Q e fazer a análise dimensional.

<u>Atividade (ii)</u>

Distribuir para os alunos o texto: "*Sobre currículo, conteúdo e metodologia*" (Anexo B, p. 374), composto por nós, tendo como objetivo específico gerar discussão e reflexão sobre o que os alunos, futuros professores, entendem sobre currículo, conteúdo e metodologia.

<u>Atividade (iii)</u>

Apresentar uma dinâmica sobre crenças dos futuros professores em relação à matemática.

Uma dinâmica de trabalho para refletir sobre a crença de futuros professores sobre Matemática, como uma disciplina escolar, e suas conexões com a aprendizagem dos alunos[36]

Para começar, pediremos aos alunos que, mentalmente, visualizem um professor de Matemática no trabalho. Questione-os: Onde está o professor? O que ele está fazendo? Que tipos de ferramentas ou materiais ele está usando?

Depois de poucos minutos que se lhes deu para pensar, os alunos deverão desenhar a imagem que veio em suas mentes.

É importante que se faça uma discussão após a atividade do desenho. Questões do tipo: Quem desenhou uma professora de Matemática? Por quê? Uma pessoa de cor? Por quê? Um professor de Matemática interagindo com outras pessoas? Por quê? Um professor de Matemática fora da sala de aula? Por quê?

Dessa dinâmica aplicada, tirar as seguintes conclusões: Será que vocês que desenharam um professor de meia idade, trabalhando com equações em uma sala solitária, vêem a Matemática como uma disciplina difícil, chata e feita por pessoas muito espertas?

Será que essa dinâmica se apresenta como um excelente caminho para que possamos pensar sobre como o papel do professor ao ensinar Matemática, se mostra responsável pela retenção, nos alunos, das crenças que adquiriram na escola, durante sua formação?

<u>Objetivo específico dessa dinâmica:</u>

Pedir aos alunos que desenhem um professor de matemática em seu trabalho para diagnosticar crenças que eles, futuros professores, trazem de seu professor de matemática e da própria matemática.

Tarefa extraclasse:

Deixar para os alunos o texto: "*A Resolução de Problemas como um meio de construção de conhecimentos matemáticos*" (Uma adaptação do livro de Vânia Marincek, 2001 e posto no anexo B, p. 376) para leitura e reflexão.

---

[36] Essa dinâmica é uma adaptação de um artigo intitulado: **Teachers' Learning of Mathematics** de autoria de MARTIN, W.G., STRUTCHENS, M.E. e ELLIOT, P.C**,** extraída do livro: The Learning of Mathematics, sixty-ninth yearbook, NCTM, 2007**,** p. 259-269.

8º Encontro: Sobre Resolução de Problemas

Objetivo Geral:

Resolver problemas é a essência da atividade matemática. Por isso, nosso objetivo neste encontro é o de mostrar a importância de se trabalhar com Resolução de Problemas nas aulas de matemática.

Objetivos Específicos:

Atividade (i):

Ler, refletir e discutir sobre o texto deixado como tarefa extraclasse, com o objetivo específico de levar aos alunos uma metodologia de ensino de matemática através da resolução de problemas.

Atividade (ii):

> **Situação problema: Os cavalinhos e os cavaleiros**[37]
>
> Nesses três pedaços de papel que vocês estão recebendo há dois cavalos e dois cavaleiros. Sem dobrar, nem rasgar nenhum deles pede-se que sejam colocados, simultaneamente, os dois cavaleiros sobre os dois cavalos.

A partir desse problema, levantar os seguintes questionamentos:

1. Isso é um problema? Por quê?
2. Como enfrentá-lo?
3. Há solução? O que fazer para chegar a ela?

O objetivo específico para essa atividade é o de fazer uma introdução do que se entende por problema, ou seja, "o que é um problema" para você?

Atividade (iii)

Apresentar o texto: "*Diferenciação entre um trabalho com resolução de problemas em uma metodologia tradicional e em uma metodologia alternativa*" (texto de nossa autoria –

[37] Problema extraído da dissertação intitulada: "A introdução da disciplina 'ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas' no curso de licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie: uma proposta de mudança" de Maria Lúcia Boero (São Paulo, 1999).

Anexo B, p. 378), objetivando comparar resultados de um trabalho com resolução de problemas dentro de uma metodologia tradicional e uma metodologia alternativa que trabalha matemática através da resolução de problemas.

Tarefa extraclasse:

Situação problema[38]:
Thiago tinha 20 moedas em seu bolso. Algumas eram de R$ 0,25 e o restante eram de R$ 0,10. No total ele tinha R$ 3,05. Quantas moedas de cada tipo ele tinha no bolso?

9º Encontro: Sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Objetivo geral:

Mostrar uma metodologia alternativa de trabalho em sala de aula fazendo uso da Resolução de Problemas – a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Objetivos Específicos:

<u>Atividade (i)</u>

Discutir o problema deixado como tarefa extraclasse, tendo como objetivo específico usar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, visando a construção de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos.

<u>Atividade (ii)</u>

Apresentar o texto "*Ensinando através da Resolução de Problemas*" (Anexo B, p. 379) para leitura e reflexão a fim de que os alunos, futuros professores de matemática, percebam a resolução de problemas como uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática.

[38] Problema criado por nós.

Atividade (iii)

Apresentar o texto: "*O papel do professor na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas*" (Anexo B, p. 381) com o propósito de fazer com que esses futuros professores sintam a necessidade de se estar bem preparado para ensinar matemática através da resolução de problemas, isto é, durante todo o tempo em que se dá a resolução do problema.

Tarefa extraclasse

Dado o texto: "*O papel do professor na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas*". Reflita sobre as seguintes questões:

Você já teve a oportunidade de "dar" uma aula utilizando resolução de problemas? Se sim, como foi essa experiência? Se não, como você agiria?

E o seu aluno, como você vê qual o seu papel diante de uma aula com resolução de problemas?

10º Encontro: Aplicações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Objetivo Geral:

Pretendemos, nesse encontro, trabalhar com essa metodologia, uma vez que, com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas trabalha-se um problema onde ele é o ponto de partida e de orientação para a aprendizagem. Assim, a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professores e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem se realiza de modo colaborativo em sala de aula.

Objetivos Específicos:

Atividade (i):

Discutir a tarefa extraclasse, cujo objetivo específico é o de ouvir as opiniões dos alunos frente ao uso dessa nova metodologia.

Atividade (ii):

Depois de se ter falado e ouvido sobre uma nova metodologia, entregar aos alunos o texto: "*A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas*" (Anexo B, p.383), tendo como objetivo específico, apresentar uma seqüência de atividades que possa levar o professor a desenvolver seu trabalho através da resolução de problemas, em sala de aula, como um caminho para se ensinar e aprender matemática, onde o professor como guia faz com que os alunos aprendam como co-construtores de seu próprio conhecimento.

Atividade (iii):

Falar sobre os principais ramos da Matemática: Aritmética, Álgebra e Geometria com o objetivo específico de preparar os alunos para enfrentar problemas desses três ramos da Matemática, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Atividade (iv):

Situação problema – As abdominais[39]

Como parte de seu programa de ginástica, Beto decidiu fazer abdominais toda manhã. No dia 1º de abril ele fez apenas uma; no dia 2 de abril fez três abdominais; no dia 3 de abril fez cinco e no dia 4 de abril fez sete. Suponha que Beto tenha continuado a aumentar o número de abdominais a cada dia, seguindo esse mesmo padrão durante todo o mês de abril. Quantas abdominais ele fez no dia 15 de abril? Quantas abdominais ele fez até o dia 15 de abril?

O objetivo específico para esse problema é o de apresentar um problema aritmético que seja trabalhado fazendo uso da metodologia adotada para o trabalho em sala de aula.

Tarefa extraclasse:

Para avaliar a compreensão de todos os alunos, isoladamente, apresenta-se o seguinte problema, dado como fixação de conceito.

[39] Este problema foi retirado do livro Problem-Driven Math-Aplying the Mathematics Beyond Solutions de Stephen Krulik e Jesse A. Rudnick (2005).

Suponha que Beto continuasse fazendo abdominais seguindo esse mesmo padrão. a) Quantas abdominais ele teria feito no dia 20 de abril? b) Quantas abdominais ele teria feito ao todo, até esse dia?

Querendo estender esse problema e visando introduzir um outro conceito matemático, apresenta-se um novo problema:

Um dia Beto fez 57 abdominais. a) Em que dia Beto fez este número de abdominais? b) Qual era o total de abdominais feitas até aquele dia? Suponha que Beto tivesse parado de se exercitar quando atingiu o total de 1225 abdominais. Durante quantos dias ele se exercitou?

11º Encontro: Aplicações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Objetivo Geral:

Aplicar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, visando à resolução de problemas dados.

Objetivos Específicos:

<u>Atividade (i):</u>

Correção da tarefa extraclasse, visando a análise de resoluções apresentadas.

<u>Atividade (ii)</u>

Dar continuidade ao problema “As abdominais”, devido à quantidade de solicitações feitas nesse problema.

O objetivo específico é estender o problema em outras direções, fazendo uso da metodologia de trabalho em sala de aula adotada.

Tarefa extraclasse:

> **Situação problema[40]:**
>
> Considere a terna {x, y, z} de números inteiros consecutivos cujo produto é igual à sua soma. Quantas destas ternas existem? Quais são elas?

12º Encontro: Aplicações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Objetivo Geral:

Aplicar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da Resolução de Problemas, em diferentes situações.

Objetivos Específicos:

Atividade (i):

Trabalhar sobre o problema deixado como tarefa extraclasse no encontro anterior, enfocando as várias concepções da Álgebra, como aritmética generalizada; como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas – equações; como estudo de relação entre grandezas – fórmulas, como funções trabalhadas por equações, tabelas e gráficos e; como estudo das estruturas algébricas.

Atividade (ii):

> **Situação problema[41]:**
>
> Quantos metros de madeira, vendida em tábuas, devem ser comprados para construir um portão quadrado com 2 metros de lado, sabendo que a largura de cada tábua é de 12 cm e que o portão deve ter uma diagonal de sustentação?

O objetivo específico desse problema é o de fazer uso da metodologia de trabalho adotada para a sala de aula trabalhando um problema de Geometria.

[40] Problema discutido em uma das reuniões do GTERP (2009).
[41] Problema extraído da Proposta Curricular de Matemática para o CEFAM e Habilitação Específica para o Magistério, 1993, p. 23.

Tarefa extraclasse:

Se a tábua fosse vendida apenas em pedaços de 3m de comprimento e 20 cm de largura, não querendo emendas nas tábuas verticais do portão, qual será a quantidade necessária de madeira a comprar para construir o mesmo portão? Haveria muita perda de madeira? Se quisesse aproveitar essa madeira cortada, haveria a possibilidade de construir esse portão de outra forma?

13º Encontro: Aplicações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Objetivo Geral:

Aplicar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Objetivos Específicos:

Atividade (i):

Como objetivo específico dessa questão, discutir a tarefa extraclasse deixada no encontro anterior, visando a participação ativa dos alunos na apresentação de seus trabalhos.

Atividade (ii):

Para esta situação, quatro diferentes problemas foram propostos, embora, por seus dados numéricos, eles possam parecer do mesmo tipo.

Situação problema[42]:

1) Andei $\frac{1}{2}$ km hoje e ontem tinha andado $\frac{1}{4}$ km. Quanto andei ao todo nos dois dias?
2) Se um jogador de basquete encesta uma em duas tentativas num jogo, e se em outro jogo encesta uma em quatro tentativas, qual o "número racional" que representa o desempenho do jogador nos dois jogos?
3) $\frac{1}{2}$ do cereal "Sweety"é açúcar, $\frac{1}{4}$ do cereal "Healthy" é açúcar. Se

[42] Esse problema foi extraído da dissertação intitulada: "A introdução da disciplina 'ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas' no curso de licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie: uma proposta de mudança" de Maria Lúcia Boero (São Paulo, 1999).

misturarmos porções iguais de ambos os cereais, que "número racional" desta mistura é açúcar? 4) Numa sala de aula, metade dos alunos são rapazes e noutra sala, um quarto dos alunos são rapazes. Se pusermos os dois grupos juntos, que "número racional" de rapazes obtemos? Justifiquem suas respostas.

Assim, o objetivo específico para essa situação problema é o de explorar as diferentes personalidades assumidas pelos números racionais, objetivando trabalhar os conceitos de todo, relação parte-todo, fração e razão[43].

14º Encontro: Sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Objetivo Geral

Fazer uma avaliação escrita sobre a disciplina Didática da Matemática, com os alunos, no valor de 5 pontos. Ver anexo B, p. 385.

15º Encontro: Sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Objetivo Geral:

Finalizar a disciplina com entrega parcial de resultados e entrega de um questionário, aos alunos, para avaliação final da disciplina Didática da Matemática. No anexo B estão os resultados obtidos pelos alunos.

[43]Para isso utilizamos os artigos: (1) *Uma nova visão sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais* de Lourdes de la Rosa Onuchic e Luciene Souto Botta, 1997 e; (2) *As diferentes personalidades do número racional trabalhados através da resolução de problemas* de Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato, 2008).

3.3.5.2. A Criação do Projeto 2 – Laboratório de Ensino de Matemática II

Para a criação deste projeto foi necessário primeiramente pesquisar sobre o que significa um Laboratório e, em especial, um Laboratório de Matemática. Qual sua importância na formação de professores? Qual o papel do professor perante a implementação e o uso do Laboratório? Como construí-lo? Porque se faz necessário ter um Laboratório de Ensino, especificamente de Matemática, na escola?

Assim como a disciplina Didática da Matemática tem um papel fundamental na formação do professor, por oferecer fundamentos teóricos e práticos para o desenvolvimento profissional da ação pedagógica do professor numa sala de aula, vemos, também, que o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), para os cursos de formação de professores é simplesmente mais que necessário para as instituições de ensino que oferecem tais cursos. De fato, segundo Lorenzato (2006, p. 10)

> [...] É inconcebível que, em suas aulas, os professores desses cursos realcem a necessidade da autoconstrução do saber, a importância dos métodos ativos de aprendizagem, o significado dos sentidos para a aprendizagem, o respeito às diferenças individuais, mas que, na prática de ensino e no estágio supervisionado, seus alunos não disponham de instrumentos para a realização da prática pedagógica. Se lembramos que mais importante do que ter acesso aos materiais e saber utilizá-los corretamente, então não há argumento que justifique a ausência do LEM nas instituições responsáveis pela formação de professores, pois é nela que os professores devem aprender a utilizar os materiais de ensino; é inconcebível um bom curso de formação de professores de matemáticas sem um LEM. Afinal, o material deve estar sempre, que necessário, presente no estudo didático-metodológico de cada assunto do programa, de metodologia ou didática do ensino de Matemática, pois conteúdos e seu ensino devem ser planejados e ensinados de modo simultâneo e integrado.

Mas, o que é mesmo um Laboratório? Um Laboratório é um local destinado ao estudo experimental de qualquer ramo da ciência. Assim, é um local para realizar pesquisas. Em se tratando da Matemática, entendemos que o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) se destina a realizar experiências matemáticas, um centro da vida matemática na escola. O LEM é o lugar da escola onde os professores, a partir de casos mais simples, ficam empenhados em tornar a Matemática mais compreensível aos alunos.

Lorenzato (2006, p. 6) nos apresenta algumas concepções sobre Laboratório de Ensino de Matemática, dizendo que:

- Inicialmente, o LEM poderia ser um local destinado a guardar materiais essenciais, tornando-os acessíveis para as aulas;
- É um local da escola reservado não somente para aulas regulares de matemática, mas também para tirar dúvidas de alunos; para os professores planejarem suas atividades e discutirem seus projetos, tendências e inovações;

- É um local para criação e desenvolvimento de atividades experimentais, inclusive de produção de materiais instrucionais que possam facilitar o aprimoramento da prática pedagógica;
- É uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionando, conjecturando, procurando, experimentando, analisando e concluindo, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender.

Fala-nos D'Amore (2007, p. 43) que essas salas ambiente, denominadas Laboratórios de Matemática, equipadas de maneira especial, que pudessem melhorar o ensino de Matemática, foram muito difundidas nos anos de 1970 e 1980. Tratavam-se de verdadeiros laboratórios didáticos nos quais os alunos construíam (no verdadeiro sentido concreto da palavra) objetos que têm a ver com a Matemática: máquinas elétricas para fazer cálculos, instrumentos para estudar as transformações geométricas, máquinas lógicas para estudar os conectivos, etc.

D'Amore admite que houve muitos anos de trabalhos intensos ao redor dessa ideia, que possui frutos, sem dúvida positivos no plano didático-cognitivo, dado que se estabelecem mecanismos relacionais (professor-aluno) muito especiais e relações cognitivas (aluno-matemática) de interesse teórico muito elevado. Acrescenta ainda o autor

> [...] é óbvio que essa atividade em laboratório configura-se no interior da assim chamada "pedagogia ativa": o jovem constrói e no caso não apenas metaforicamente, mas de maneira concreta, com suas próprias mãos, objetos que solicitam conhecimento. Os conceitos são o resultado da elaboração de projetos que devem ser examinados meticulosamente pela experiência. O produto deve ser pensado a *priori* por que tem um objetivo declarado e esperado, mas, depois, sua eficácia deve ser verificada (D'AMORE, 2007, p. 43).

Diante dessa breve incursão sobre Laboratório de Ensino de Matemática, passamos para a criação do projeto P_2. Buscamos, junto à UNEB, a ementa da disciplina para então, elaborar o respectivo programa disciplinar. Feito isso e com as ações constantes no modelo modificado 2, o projeto foi criado.

Ementa da disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II

Código	Componente Curricular	Carga-Horária
MA0021	Laboratório do Ensino da Matemática II	45h
Ementa		
Apresenta e discute situações-problema do processo de ensino-aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, diagnosticadas a partir de práticas da sala de aula, tendo como suporte teórico os pressupostos teóricos da Educação Matemática. Analisa, discute e elabora propostas de planejamento, avaliação, recursos didáticos e outros instrumentos de intervenção no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, neste segmento de ensino.		
Referências		
ABREU, M. C. T. A. de. *O professor Universitário em Aula*. São Paulo, Cortez. 1980. BAHIA (Estado). *Diretrizes Curriculares para o Ensino Fundamental*. Salvador/BA: DEE, 1995. BRASIL (País). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, MEC/SEF, 1997. D' AMBROSIO, U. *Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação, Matemática*. São Paulo, Summus Editorial, 1986. DANTE, L. R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo, Ática, 1991. *Educação Matemática em Revista*. Publicação Semestral. SBEM. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo/SP. MACHADO, N. J. *Matemática e Realidade*. São Paulo, Cortez. 1987. POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. São Paulo, Interciências, 1978. REVISTA PRO-POSIÇÕES. Publicação Quadrimestral. Faculdade de Educação. Campinas, UNICAMP, 1993.		

Quadro 4 - Ementa da disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA – UNEB
CAMPUS X - DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO
CURSO: Licenciatura em Matemática - SEMESTRE: 2008.2
PROFESSORA: Célia Barros Nunes - CADASTRO: 74382977-5

PROGRAMA DE DISCIPLINA

TURMA: 2007.1

Código	Componente Curricular
MA0021	➢ ***Laboratório de Ensino de Matemática II***

Forma de Execução	Carga Horária
Aulas teóricas e práticas	45h/a

EMENTA

Apresenta e discute situações-problemas do processo de ensino-aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, diagnosticadas a partir de práticas da sala de aula, tendo como suporte teórico os pressupostos teóricos da Educação Matemática. Analisa, discute e elabora propostas de planejamento, avaliação, recursos didáticos e outros instrumentos de intervenção no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, neste segmento de ensino.

OBJETIVOS

Explorar, investigar, construir, conjecturar e formalizar determinados conceitos de Geometria Euclidiana Plana fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

1. Material escrito sobre Laboratório de Ensino de Matemática para leitura, interpretação e conscientização do papel do professor em sala de aula.

2. A Geometria nos currículos: PCN, Standard 2000

3. O uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da resolução de problemas visando o ensino de Geometria Euclidiana.

4. Estudo de alguns tópicos de Geometria Plana: Triângulos (propriedades angulares, congruência, semelhança), Quadriláteros.

METODOLOGIA

- Debates abertos e/ou dirigidos;
- Grupos de discussão e reflexão;
- O uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

AVALIAÇÃO

Seguindo as orientações de um Termo de Compromisso, a avaliação dar-se-á de forma continuada, considerando a participação efetiva dos alunos, levando-se em conta a assiduidade, a participação nos debates, além de uma avaliação escrita no final da disciplina. Tarefas extraclasse serão, também, consideradas como uma forma de avaliação.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais* (Matemática). 3ª ed. Brasília: A Secretaria, 2001.

DANTAS, M. M.S. ET AL. As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria, vol. 1 e 2. Salvador: EDUFBA, 1996.

DOLCE, O. e POMPEO, J.N. **Fundamentos de Matemática Elementar:** geometria plana. Vol.9, 7ª edição. Editora Atual, São Paulo, 1993.

EDITORA MODERNA – **Matemática:** Ensino Fundamental de nove anos. Vol 7. Projeto Araribá, 2007.

EXPERIÊNCIAS MATEMÁTICAS. 7ª série – Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, CENP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógica, 1994.

KRULICK, S.; RUDNICK, J.A. **Roads to Reasoning – Developing Thinking Skills Through Problem Solving**. Creative publications McGraw-Hill, vol 5-8, 2001.

LORENZATO, Sergio (Org.) **O Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**, Campinas: Autores Associados, 2006, v.1.

NASSER, Lilian e TINOCO, Lucia. Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático, Modulo1: Formação de Conceitos Geométricos, 3ª edição, Rio deJaneiro: UFRJ/IM, Projeto Fundão, 2004.

______________. Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático, Modulo 2: Visão Dinâmica da Congruência de Figuras, 3ª edição, Rio deJaneiro: UFRJ/IM, Projeto Fundão, 2004.

_____________. Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático, Modulo 3: Visão Dinâmica da Semelhança de Figuras, 3ª edição, Rio deJaneiro: UFRJ/IM, Projeto Fundão, 2004.

NCTM. **Principles and Standards for Mathematics Education.** Reston: NCTM, 2000.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino – **Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectiva**. São Paulo, SP: Editora UNESP, 1999.

__________, Lourdes de la Rosa. **Novas Reflexões sobre o ensino – aprendizagem de matemática através da resolução de Problemas**. In: BICUDO, M. A e BORBA, M. (orgs) **Educação Matemática – pesquisa em movimento**, São Paulo, Editora Cortez, 2004.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. São Paulo, Interciências, 1978.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Logman, 2001.

Periódicos:

Educação Matemática em Revista. Publicação Semestral. SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo/SP.

Revista do Professor de Matemática. Publicação Quadrimestral. SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, USP – São Paulo.

Revista Nova Escola. Fundação Victor Civita. Editora Abril.

Data 10/11/2008

Docente : Célia Barros Nunes

Aprovado pela Coordenação do Colegiado

Data ____/____/____

Coordenador(a)

____

Quadro 5 – Programa da disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II

O LEM, como diz Lorenzato (2006, p. 7), pode ser um espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras e para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento, mas imprevisto na prática, devido aos questionamentos dos alunos durante as aulas.

Para muitos professores, todas as salas de aula, e todas as suas aulas, continua dizendo Lorenzato, devem ser um laboratório onde se dão as aprendizagens da matemática. O LEM, mesmo em condições desfavoráveis, pode tornar o trabalho altamente gratificante para o professor e a aprendizagem compreensiva e agradável para o aluno, se o professor possuir conhecimento, crença e engenhosidade.

Dentro da disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II é nossa intenção desenvolver a Formação de Conceitos Geométricos, dar uma Visão Dinâmica da Congruência de Figuras Geométricas e, também, uma Visão Dinâmica da Semelhança de Figuras Geométricas.

Escolhemos essas três linhas da Geometria para serem desenvolvidas com futuros professores de Matemática, de modo que eles possam ter contato direto com o material concreto (alguns até construídos por eles mesmos) como base para uma exploração mais abstrata de como esses conceitos são trabalhados.

Essa linha de trabalho será sustentada, do concreto para o abstrato, uma vez que tendo uma visão conceitual sobre as relações das figuras geométricas, sejam trabalhados os importantes conceitos de Congruência e Semelhança de figuras, especificamente do triângulo.

Esperamos que o trabalho que pretendemos realizar ajude a esses futuros professores a consolidar e organizar seus conhecimentos básicos de Geometria e sanar suas dificuldades.

Porém, antes de descrevermos nosso roteiro de atividades, nos fundamentando em Nasser e Tinoco (2004) e, como motivação para esse roteiro, subscrevemos aqui o que elas pensam sobre o Edifício Geométrico e sobre a Geometria Dinâmica.

O Edifico Geométrico

Segundo Nasser e Tinoco (2004), podemos interpretar o conteúdo de Geometria a ser ensinado como um “Edifício Geométrico”, cujos alicerces devem ser solidamente construídos desde os primeiros anos de escolaridade. Desde o pré-escolar as crianças podem criar a base para o seu edifício geométrico, vivenciando atividades que permitam observar imagens da natureza, como as folhas, que em alguns casos possuem uma simetria perfeita. Devem também explorar o espaço, comparando objetos com as formas geométricas. A prática de jogos corporais pode ajudar a desenvolver a habilidade espacial, enquanto a criação e a compreensão de regras de jogos é uma preparação para o domínio, no futuro, do processo axiomático. Ao invés de receber o material concreto pronto, os alunos devem ser incentivados a confeccionar jogos e quebra-cabeças.

Assim, o aluno estará preparado para alcançar os andares mais altos do edifício, quando será capaz de observar definições e propriedades de figuras e as relações entre elas. Paralelamente, será capaz de operar com medidas, calcular áreas, perímetros e volumes e, principalmente, argumentar. Essas atividades devem estar sempre ligadas à realidade, procurando representar matematicamente situações reais. Não podemos esquecer que, ao longo de todo esse processo, o aluno deve ser levado a pensar, raciocinando logicamente, e justificando suas afirmativas. É importante desenvolver a habilidade de argumentação.

A Geometria Dinâmica

Nasser e Tinoco (2004) escreveram que um aspecto importante no ensino da Geometria é o incentivo a uma postura dinâmica. Em geral o termo *Geometria Dinâmica* tem sido usado como referência ao enfoque que utiliza o computador como ferramenta. As experiências com esses recursos têm mostrado resultados positivos. Mas, o importante é que com ou sem o computador, você pode e deve desenvolver a geometria em sua sala de aula seguindo um enfoque dinâmico. Experiências de manipulação devem ser mantidas, pois as atividades no computador não podem substituí-las, mas apenas complementá-las.

Muitos experimentos mostram que esta postura dinâmica ajuda a sanar dificuldades na aprendizagem da Geometria. Na era da imagem e do movimento, a Geometria não pode continuar a ser ensinada de forma estática, seguindo o estilo introduzido por Euclides. Em geral, os alunos não manipulam os objetos geométricos, estando habituados apenas a ver as figuras nos livros. Nesse caso, os conceitos geométricos são apresentados apenas através de figuras bem regulares e simétricas, com lados paralelos às bordas das páginas do livro. Como conseqüência, as crianças podem formar uma imagem incompleta de determinado conceito.

A disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II, em nosso entender, deveria ser desenvolvida numa sala ambiente aonde as atividades seriam realizadas. Mas, entendendo também que uma sala de aula poderia constituir-se num LEM, onde se dão todas as aprendizagens da matemática, desde que essa matemática fosse trabalhada pelo professor com conhecimento, engenhosidade e criatividade.

Todos os nossos encontros para essa disciplina aconteceram numa sala de aula, com os mesmos alunos que cursaram a disciplina Didática da Matemática, alunos do 4º período do curso de Licenciatura em Matemática da UNEB, Campus X.

Passemos agora a descrever as atividades que planejamos para a disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II. Como a disciplina também deveria ser desenvolvida em 45h/aula, com 3h/aula semanais, estruturamos os encontros da seguinte forma: 3 encontros para apresentação, prova e avaliação final da disciplina; 4 encontros para falar de formação de conceitos geométricos, 5 encontros para abordarmos Congruência de Figuras, particularmente o triângulo e 3 encontros para falarmos de Semelhança de Figuras, em especial, o triângulo.

Vale ressaltar que para criar esse roteiro tomamos como referência os três volumes dos livros das autoras Nasser e Tinoco[44], os livros de Van de Walle e os livros didáticos: Matemática para o Ensino Fundamental – Projeto Araribá, da editora Moderna; Experiências Matemáticas– Secretaria do Estado de São Paulo (SEESP), Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, volumes 7 e 8, 1994. Todos constantes nas referências bibliográficas do programa de disciplina já mencionado acima.

Semelhantemente à disciplina Didática da Matemática, criamos aqui, também, um roteiro de atividades para a implementação das aulas de Laboratório de Ensino de Matemática II, constituído de 15 encontros de 3h/a cada, mediante ao programa de disciplina já apresentado anteriormente. Os textos criados para o desenvolvimento dessa disciplina encontram-se no anexo C.

3.3.5.2.1. Roteiro de Atividades

1º Encontro: Sobre o Laboratório de Ensino de Matemática

Objetivo Geral:

Neste encontro, temos por finalidade fazer com que os alunos, futuros professores, compreendam a importância de um Laboratório de Ensino de Matemática na formação de um professor de Matemática. Para que esse objetivo seja atingido é importante que se leve os alunos a:

- Entender o que é um Laboratório;
- Entender o que é um Laboratório de Ensino;
- Saber construir e saber manipular materiais instrucionais, inclusive os livros didáticos, com a finalidade de, com sua ajuda, dar mais compreensão e significado ao ensino e à aprendizagem;
- Trabalhar, inicialmente com situações concretas, de experiências em Laboratório, visando atingir a uma matemática forte e, depois, levá-los à construção de uma matemática abstrata, pois como disse Gilberto Garbi (2009), em seu artigo "*Decorar é preciso, demonstrar também o é*", na Revista do Professor de Matemática, nº 68, p. 4:

[44] Esses três livros seriam recomendados aos alunos para que eles pudessem, como professores, usá-los como recurso em suas futuras aulas envolvendo Geometria. Outro livro utilizado por nós foi o de Van de Walle, visando dele extrair textos que falem sobre Pensamento Geométrico, sobre Conceito Geométrico, destacando às grande idéias que devem ser enfocadas em Geometria na sala de aula.

> "A matemática, embora tenha incontáveis aplicações práticas, é uma ciência abstrata, ou seja, seus objetos de estudo lógico-dedutivos são imateriais".

Objetivos específicos:

Atividade (i):

Entregar o Termo de Compromisso com o objetivo de reforçar seu conteúdo: assiduidade, forma de avaliação, tarefas extraclasse e participação em todas as atividades.

Falar da Metodologia de trabalho em sala de aula lembrando aos alunos que a metodologia adotada para o trabalho em sala de aula é a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, já trabalhada na disciplina Didática da Matemática.

Apresentar a Ementa da disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II e, a seguir, entregar o Programa dessa disciplina e fazer comentários e discussões.

Atividade (ii):

Fazer a Leitura e discussão, pelos alunos sob a direção da professora-pesquisadora, do texto: "*Laboratório de Ensino de Matemática e Materiais Manipuláveis*"(anexo C, p.387) de autoria de Sergio Lorenzato (2004), tendo por objetivo específico levar os alunos a compreenderem o que é um LEM, qual a sua importância, bem como de materiais manipuláveis na formação de professores.

Tarefa extraclasse

A entrega de um questionário para ser respondido pelos alunos no encontro seguinte, visando a análise de um conhecimento básico dos alunos em Geometria. (anexo C, p.389).

2º Encontro: Formação de Conceitos Geométricos

Objetivo Geral:

Neste encontro temos, como meta, fazer com que os alunos valorizem os objetos e os conceitos geométricos independentemente de fórmulas. Assim, evita-se a tendência de algebrizar a Geometria, valorizando o aspecto mais bonito que ela tem, aquele da exploração do plano e do espaço.

Objetivos específicos:

Atividade (i):

Analisar e discutir o Questionário, deixado como tarefa no Encontro 1, a fim de descobrir as crenças que os alunos trazem da geometria e das diferentes formas de seu ensino.

Atividade (ii):

Apresentar, entregar e comentar o texto:"*A Matemática é uma ciência de padrão e ordem*" de autoria de Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato (anexo C, p.390), tendo como objetivo específico fazer com que os alunos, futuros professores, percebam a matemática como uma ciência de padrão e ordem.

Atividade (iii):

Entregar o texto: "*Orientações gerais para o trabalho com Geometria*" de autoria de Lilian Nasser e Lúcia Tinoco (anexo C, p.392) , para ser comentado durante a leitura feita por todos, professora-pesquisadora e alunos, desenvolvendo as atividades nele contidas e, cujo objetivo específico é o de que os alunos reflitam sobre algumas orientações para se trabalhar com Geometria em sala de aula.

Tarefa extraclasse

Foi deixado como tarefa extraclasse o texto: "*Formação de Conceitos Geométricos*", de autoria de Lilian Nasser e Lucia Tinoco (anexo C, p.394), a fim de mostrar ao aluno a importância de um conceito matemático, em especial, um conceito geométrico que possa levar a uma aprendizagem significativa.

3º Encontro: Formação de Conceitos Geométricos

Objetivo Geral:

Fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas visando à construção de conceitos geométricos.

Objetivos específicos:

Atividade (i):

Analisar e discutir o texto "*Formação de Conceitos Geométricos*", deixado como tarefa extraclasse no 2º encontro, tendo como objetivo específico a valorização do conhecimento de conceitos geométricos.

Atividade (ii):

O objetivo específico para esta atividade, com a entrega do texto Confecção do TANGRAM, é o de mostrar aos alunos a organização de um texto matemático escrito, possibilitando-lhe desempenhar bem a atividade.

Entregar uma folha de papel A4 e pedir aos grupos que construam, por meio de dobraduras, o TANGRAM, seguindo as orientações sugeridas, por escrito, pela professora-pesquisadora (texto no anexo C, p.396). Em seguida, a professora pesquisadora apresentará na lousa, por meio de uma transparência, a figura do TANGRAM que, possivelmente, poderá tirar algumas possíveis dúvidas.

De posse do TANGRAM, os alunos, em grupos, resolverão determinados problemas:

1) Recortar as peças do TANGRAM construído e descrever suas peças respondendo:

a) que tipos de polígonos eles são?

b) existem peças congruentes?

c) quais são as peças da mesma forma? De que tipo elas são?

2) Com o quadrado e os dois triângulos pequenos do TANGRAM formar:

a) um triângulo

b) um trapézio

c) um retângulo

d) um paralelogramo

3) Montar, usando todas as peças do TANGRAM, duas figuras de sua livre escolha

OBS.: De acordo com as regras básicas do TANGRAM, para formar qualquer figura, as seguintes condições devem ser obedecidas: não haver superposição das peças; nenhuma peça deve ficar solta, sem tocar em outra em pelo menos um ponto; todas as sete peças devem ser utilizadas.

Tarefa extraclasse

Leitura e interpretação do texto: "*Pensamento Geométrico e Conceito Geométrico*" de autoria de Van de Walle, 2006. (Anexo C, p.398).

4º Encontro: Formação de Conceitos Geométricos

Objetivo Geral:

Fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, reconhecer e caracterizar diferentes sólidos geométricos, a partir de suas planificações. Para este encontro serão apenas trabalhadas as pranchas 1 e 2.

Objetivos específicos:

<u>Atividade (i):</u>

Ler e comentar o texto deixado como tarefa extraclasse no 3º encontro, visando à compreensão do pensamento geométrico espacial, destacando as grandes idéias matemáticas responsáveis pelo ensino da Geometria.

<u>Atividade (ii) - Reconhecimento e caracterização dos sólidos geométricos</u>

Mostrar o material planificado, destinado a construção de sólidos geométricos, apresentados em cinco pranchas. Sorteá-las entre os cinco grupos formados com os alunos.

Montar a sala de aula adequadamente, de modo que, numa mesa central, seja colocada a primeira prancha, que será trabalhada pelo primeiro grupo sorteado. Todos os demais membros, professora e alunos dos outros grupos se colocarão ao redor da mesa. As demais pranchas, 2, 3, 4 e 5, serão trabalhadas, do mesmo modo, com seus correspondentes grupos.

Cada grupo, observado por todos, deverá montar seus sólidos, cuja planificação se apresenta em sua respectiva prancha, identificando:

- número de vértices
- número de arestas
- número de faces
- bases e, se possível, suas áreas: área lateral e total do sólido
- volume

O objetivo específico para esta atividade é a de buscar relações geométricas entre os elementos dos sólidos construídos, com as planificações das pranchas 1 e 2.

Tarefa extraclasse:

1) Deixar para os alunos o texto "*Os níveis de Van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria*" de autoria de Lilian Nasser e Lucia Tinoco, 2004 (Anexo C, p.401).

2) Deixar para leitura e interpretação o texto "*A Hierarquia do Raciocínio*" de autoria de Stephen Krulik & Jesse A. Rudnick (Anexo C, p.402).

5º Encontro: Formação de Conceitos Geométricos

Objetivo Geral:

Fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, reconhecer e caracterizar sólidos geométricos.

Objetivos específicos:

Atividade (i):

Discutir os textos deixados como tarefa extraclasse. O primeiro texto foi apresentado para leitura pelos alunos, visando ao conhecimento da Teoria de Van Hiele, que se propôs a estabelecer cinco níveis do desenvolvimento do raciocínio geométrico. Não será objetivo nosso aplicar essa teoria na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II.

Para o segundo texto, ao concordar com Krulik e Rudnick, sua leitura foi proposta visando ao desenvolvimento do raciocínio, que é um objetivo primeiro da matemática.

Atividade (ii): Reconhecimento e caracterização dos sólidos geométricos

Trabalhar com as pranchas 3, 4 e 5, pelos grupos correspondentes a elas, de forma análoga ao trabalho feito na atividade 2 do encontro 4.

Ao final desse trabalho, a professora-pesquisadora apresentará e entregará aos alunos o texto: "*Reconhecimento e caracterização das formas espaciais e das formas planas*", onde a formalização dos conceitos elaborados se organizarão num todo (Anexo C, p.403).

O objetivo específico deste encontro é análogo ao da atividade (ii) do 4º encontro.

Tarefa extraclasse

Leitura dos textos: "*A Geometria nos Princípios e Padrões para a Matemática Escolar* "*Uma introdução à Geometria*", composto por nós. (Anexo C, p.407 e 410), respectivamente).

6º Encontro: Visão Dinâmica da Congruência de Triângulos

Objetivo Geral deste encontro:

Levar os alunos a perceber que os objetos geométricos podem ocupar diversas posições sem alterar suas características. Uma maneira de fazer isso é trabalhar com as transformações no plano, pois elas podem ser uma ferramenta útil na exploração de conceitos fundamentais como a congruência de figuras geométricas e, em especial, dos triângulos.

Objetivos específicos:

Para atingir o objetivo geral deste encontro, pretende-se, de início, trabalhar o movimento das figuras a fim de explorar o conceito de isometria e sua característica principal que será identificada nas atividades (i), (ii) e (iii).

Com os alunos trabalhando colaborativamente, desenvolver as seguintes atividades[45]:

Atividade (i):

Desenhe uma figura bem simples num papel transparente e trace nele uma reta que não corte a figura.

Dobre o papel sobre essa reta de modo que a figura e a reta fiquem do lado externo. Use a transparência do papel para copiar a figura que você vê. Abra a folha. Você acabou de obter duas figuras, uma de cada lado da reta, como se a reta fosse um espelho.

Agora responda:

1) O que você observa, comparando a figura original com a que você desenhou por ultimo?
2) Qualquer que seja a figura de partida, vai acontecer o mesmo?
3) Considerando a mesma figura, o que acontece se você mudar a posição da reta?

[45] Essas atividades foram extraídas do livro Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático, Módulo II, de autoria de Lilian Nasser e Lúcia Tinoco, 2004.

Atividade (ii)**:**

Desenhe uma figura. Trace uma reta passando por um ponto A do seu contorno e marque um outro ponto B sobre a reta e fora da figura. Essa reta pode cortar a figura em dois ou mais pontos, ou tocá-la em apenas um ponto.

Usando papel transparente, copie a figura e arraste-a paralelamente à reta traçada, de modo que o ponto A se mantenha sobre a reta, até que atinja a posição do ponto B. Observe que se o ponto B não estiver suficientemente afastado do ponto A, as figuras poderão se interceptar. Escolha um ponto B conveniente, de modo que isso não aconteça.

Compare as duas figuras e responda:

O que você observa, comparando a figura original com a que você desenhou por último?

Qualquer que seja a figura de partida, vai acontecer o mesmo?

Considerando a mesma figura, o que acontece se você mudar a posição da reta? E do ponto B?

Atividade (iii):

Desenhe uma figura qualquer. Copie a figura numa folha de papel transparente, e mantenha esta folha sobre o papel original, presa a um ponto P qualquer por um alfinete. Observe que o ponto P pode pertencer ao contorno da figura, estar fora dela, ou no seu interior. É aconselhável tentar inicialmente com o ponto P fora da figura.

Gire a folha de papel transparente, mantendo fixo o ponto preso pelo alfinete e risque, com força, para obter uma nova figura marcada no papel original.

Compare as duas figuras e responda:

O que você observa, comparando a figura original com a que você desenhou por último?

Qualquer que seja a figura de partida, vai acontecer o mesmo?

Considerando a mesma figura, o que acontece se você mudar o sentido do giro, ou o tamanho do giro?

Refaça o exercício escolhendo posições distintas para o ponto P, no contorno da figura e no seu interior.

A posição do ponto P altera a figura obtida pelo giro?

OBS.: Depois de realizadas essas atividades, entregar aos alunos o texto: "*Transformações no Plano – Isometrias*" uma adaptação dos textos de autoria de Lilian Nasser e Lúcia Tinoco, 2004, adequado à formalização desses conceitos (Anexo C, p. 412).

Tarefa extraclasse:

Como tarefa extraclasse[46], vamos pedir que os alunos descubram e justifiquem essas transformações analisando uma das obras do artista holandês Maurits Cornelis Escher. Para a composição dessa gravura, o plano foi dividido em triângulos e os triângulos foram pintados de duas formas diferentes. Que formas de transformação, vocês podem perceber na composição dessa gravura, envolvendo esses dois triângulos diferentes? Apresentem um exemplo de cada tipo de transformação observada e justifique.

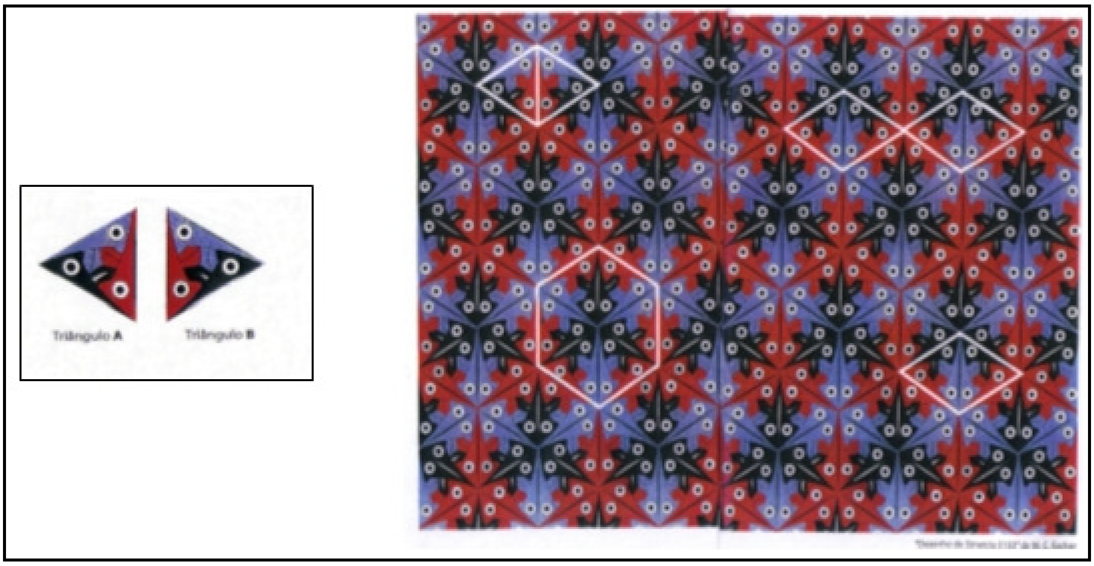


Figura 16 – Obra artística de Maurits Cornelis Escher

7º Encontro: Visão Dinâmica da Congruência de Triângulos – Eixo de Simetria

Objetivo Geral deste encontro:

Reconhecer a importância de identificar os eixos de simetria quer simetria axial quer simetria central, constatando que as isometrias estudadas: reflexão, translação e rotação, bem como as combinações possíveis dessas três transformações, levam qualquer figura a outra **congruente** a ela.

Objetivos específicos:

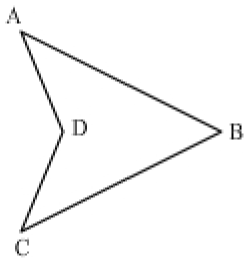
<u>Atividade (i):</u>

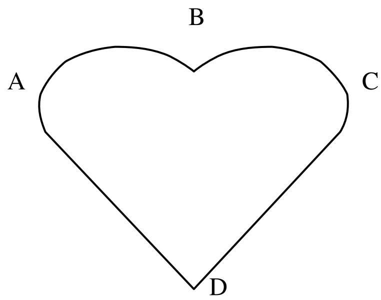
[46] Essa tarefa extraclasse foi retirada do livro Matemática – Ensino Fundamental de nove anos do Projeto Araribá, vol.8, Editora Moderna, 2007.

Analisar e discutir a tarefa extraclasse, cujo objetivo específico é o de descobrir, na figura do artista holandês Maurits Cornelis Escher, as isometrias existentes.

Atividade (ii)[47]:

Entregar aos alunos uma folha com os desenhos abaixo:





Pedir aos alunos que recortem essas figuras, mantendo os pontos marcados. A seguir, pedir-lhes que as dobrem de várias maneiras. A professora-pesquisadora pergunta-lhes:

1) Dentre as variadas dobras que fizeram há alguma ou algumas que lhes chamam a atenção?

2) O que vocês podem perceber quando colocam juntos os pontos A e C? Apresentem o desenho resultante.

3) O que vocês podem perceber quando se colocam juntos os pontos B e D? Apresentem o desenho resultante.

Pedir aos alunos que desdobrem as figuras e que, com uma régua, tracem as linhas das dobras. A professora pesquisadora pergunta-lhes:

1) Que nome vocês dariam a essa linha da dobra, quando A coincide com C? As duas partes coincidem por superposição? Justifiquem suas respostas.

2) E no caso de B coincidir com D, que nome vocês dariam a essa linha da dobra? As duas partes coincidem por superposição? Justifiquem suas respostas.

Essa atividade tem como objetivo específico chegar à definição de eixo de simetria.

<u>Atividade (iii):</u>

Desenhe um triângulo eqüilátero, um isósceles e um escaleno traçando os seus eixos de simetria, se existirem.

---

[47] Essas atividades foram extraídas do livro: "Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático", Módulo II, de autoria de Lilian Nasser e Lúcia Tinoco, 2004.

O objetivo específico para essa atividade é identificar os eixos de simetria no triângulo, seja ele eqüilátero, isósceles ou escaleno.

<u>Atividade (iv):</u>

O objetivo específico para esta atividade é o de identificar, se houver, os eixos de simetria do quadrado, do retângulo, do losango e do paralelogramo.

Desenhe cada figura em papel transparente, e tente dobrá-la de todas as formas possíveis, de modo que as duas partes da figura coincidam.

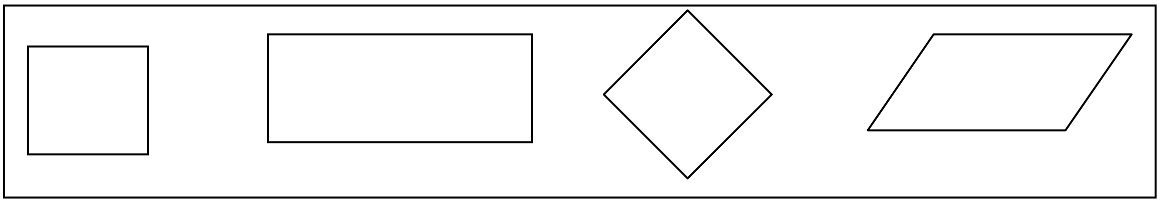


Figura 17 – Formas geométricas

<u>Atividade (v)</u>**:**

O objetivo específico para esta atividade é a de identificar os eixos de simetria nas diferentes figuras geométricas.

Copiar, em papel transparente, as figuras abaixo e tentar identificar, se houver, seus eixos de simetria.

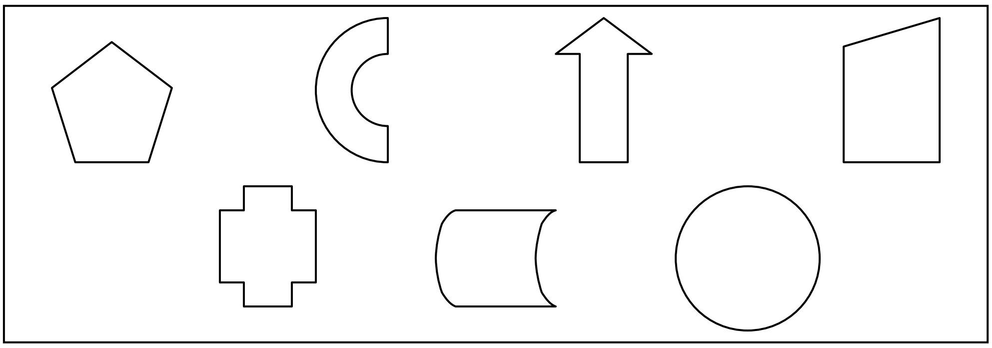


Figura 18 – Descobrindo eixos de simetria

Tarefa extraclasse:

Esta tarefa tem por objetivo construir o conceito de congruência e, em particular, construir triângulos congruentes[48].

a) Refletindo um triângulo numa reta

1) Construir um triângulo cujos lados medem 5,5 cm; 4,5 cm e 2 cm. Chame os vértices desses triângulos de A, B e C.

2) Construir uma reta qualquer, que não corte o triângulo (mesmo quando prolongada). Chame essa reta de reta **r**.

3) Fazer a reflexão do triângulo ABC, obtendo o triângulo A'B'C'.

4) Estabelecer comparações entre as duas figuras: triângulo ABC e triângulo A'B'C'.

b) Uma nova situação envolvendo reflexão

1) Construir um triângulo ABC e uma reta **r**, obtendo como imagem, o triângulo A'B'C'.

2) Repetir essa operação partindo do triângulo A'B'C' e buscar sua imagem em relação à reta **s,** paralela à reta **r**, obtendo o triângulo A''B''C''.

3) O que acontece entre esses três triângulos?

c) Observe a figura abaixo:

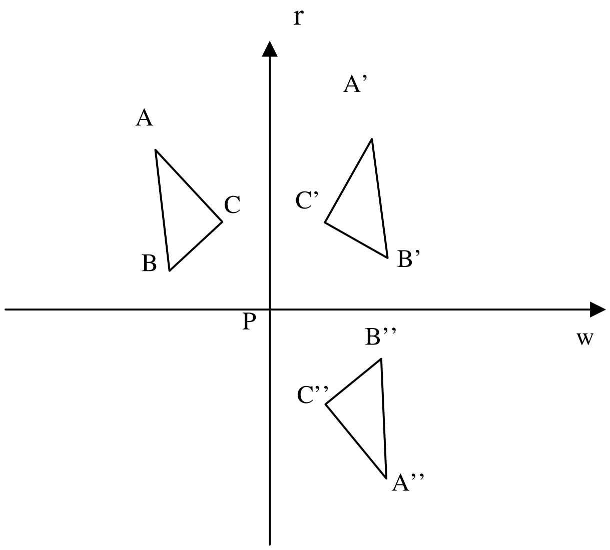


Figura 19 – Reflexão de triângulos

[48] Essa tarefa foi retirada do livro: "Experiências Matemáticas, 7ª série – Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, CENP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógica, 1994.

Comparando o triângulo ABC com o triângulo A''B''C'', onde A'', B'' e C'' são vértices correspondentes de A, B, e C, é possível construir a imagem A''B''C'' do primeiro triângulo sem fazer antes a reflexão deste na reta **r**, obtendo o triângulo A'B'C' e, depois a reflexão de A'B'C', em relação à reta **w**, obtendo o triângulo A''B''C''? Justifique sua resposta.

8º Encontro: Visão Dinâmica da Congruência de Triângulos

Objetivo Geral deste Encontro

Este encontro tem por objetivo estudar a congruência de figuras planas e, em especial, de triângulos, e estabelecer condições matemáticas para que as duas figuras sejam congruentes. Isso significa que se quer identificar a correspondência entre os elementos das figuras congruentes e, em particular, os casos de congruência de triângulos.

Para dar início às atividades deste encontro vamos registrar as simbologias que serão aqui adotadas: Para igual, o símbolo (=) e para congruente, o símbolo ($\cong$)

Objetivos específicos:

<u>Atividade (i):</u>

Considerando que as atividades (a), (b) e (c) foram deixadas como tarefa extraclasse, após análise e discussão das mesmas, será entregue, aos alunos, o texto "*Composição de isometrias*" (Anexo C, p. 414) uma adaptação do texto de autoria de Lilian Nasser e Lúcia Tinoco, 2004, como formalização dos conceitos trabalhados nessa tarefa.

<u>Atividade (ii):</u>

São congruentes ou não[49]?

1) Entregar uma folha com figuras planas nela desenhadas e, a partir dela, pedir aos alunos que meçam os ângulos internos e os lados de cada figura, registrando essas medidas na tabela abaixo dessas figuras.

[49] Atividade extraída do livro: Experiências Matemáticas, 7ª série, 1994. SEESP – Secretaria do Estado de São Paulo.

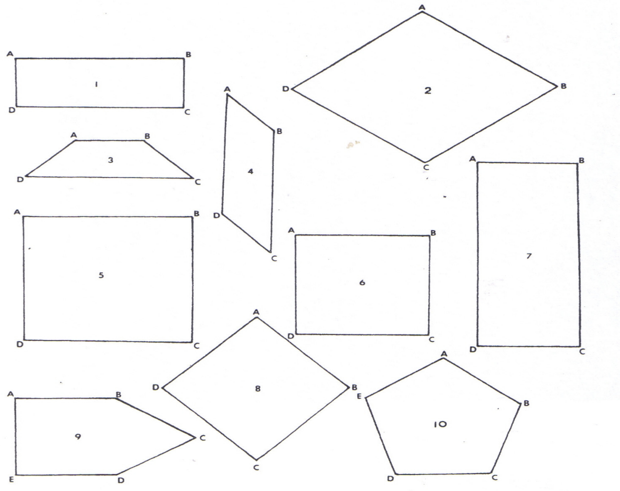


fig.	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{D}$	$\hat{E}$	AB	BC	CD	DA ou DE	EA
1					–					–
2					–					–
3					–					–
4					–					–
5					–					–
6					–					–
7					–					–
8					–					–
9										
10										

Figura 20 – Congruência de figuras planas

2) Dentre as afirmações abaixo, pedir aos alunos que escolham aquela(s) com a(s) qual(is) concordam, justificando sua escolha.

a) Dois polígonos são congruentes, se os ângulos correspondentes têm a mesma medida.

b) Dois polígonos são congruentes, se os lados correspondentes têm a mesma medida.

c) Dois polígonos são congruentes, se os ângulos correspondentes têm a mesma medida e se os lados correspondentes também têm a mesma medida.

O objetivo específico para esta atividade é o de reconhecer as condições que levam à congruência de figuras planas.

Atividade (iii):

Reduzindo o número de comparações

Com os alunos em grupo, propor os problemas para serem discutidos, com o objetivo específico de reduzir o número de condições necessárias para justificar a congruência das figuras.

Problema 1:

Temos dois quadrados, para verificar se são ou não congruentes. Qual o número mínimo de comparações que precisamos fazer, para decidirmos se são ou não congruentes?

Problema 2:

E o que acontece se estivermos comparando dois retângulos, não quadrados?

Problema 3:

E se forem dois paralelogramos, não retângulos, qual o número mínimo de elementos a serem comparados e quais devem ser eles?

Espera-se que, com essa atividade, que os alunos percebam, aos poucos, que embora duas figuras para serem congruentes tenham que ter todos os lados correspondentes e todos os ângulos correspondentes com mesma medida, em alguns casos não é necessário comparar todos os elementos um a um.

Atividade (iv):

Fazendo construções e descobertas

Em grupo, os alunos deverão fazer as construções de acordo com os dados abaixo:

a) Construir um triângulo, cujos lados meçam 2 cm, 3 cm e 4 cm.
b) Construir um triângulo, cujos ângulos meçam 30^o, 90^o e 60^o.
c) Construir um triângulo, cujos lados medem 3 cm e 5 cm, de modo que o ângulo formado por esses dois lados seja 45^o.
d) Construir um triângulo, que tenha um lado de 6 cm e dois ângulos, um de 60^o e outro de 40^o, sendo que o lado de 6 cm é comum a esses dois ângulos.

Esta atividade tem como objetivo específico que os alunos percebam os casos de congruência de triângulos, por meio de construções geométricas.

Tarefa extraclasse

Construir um triângulo, que tenha lados medindo 6 cm e 4 cm e um ângulo de 30^o que seja oposto ao lado de 4 cm e tirar conclusões.

Construir um triângulo, que tenha um lado medindo 8 cm, um ângulo adjacente a ele que meça 60^o e um ângulo oposto a ele, que meça 45^o e tirar conclusões.

9º Encontro: Visão Dinâmica da Congruência de Triângulos

Objetivo Geral deste encontro

Até aqui fizemos muitas experimentações, muitas observações e tantas outras verificações. Mas, será que tudo isso feito pode nos garantir que as conjecturas levantadas são verdadeiras? Nosso objetivo então, neste encontro, é o de buscar provas matemáticas, em geral, abstratas, fazendo uso do raciocínio lógico-dedutivo, que garantam que algumas das observações que puderam ser feitas, valem sempre.

Objetivos específicos:

Atividade (i):

Correção e discussão da tarefa extraclasse, cujo objetivo é o de permitir que os alunos identifiquem, ao comparar os triângulos construídos por eles, que esses eram ou não congruentes e que se congruentes, essa congruência poderia ser conseguida a partir de um número menor de dados correspondentes iguais, três, diferentemente da definição que pede seis.

Atividade (ii):

Se dois triângulos têm ordenadamente dois lados e o ângulo compreendido entre eles congruentes, então, esses triângulos são congruentes. Demonstrar esse teorema: a) analiticamente, segundo a geometria euclidiana; b) com geometria dinâmica, ou seja, a geometria das transformações, que, neste caso, trata das isometrias (translação, rotação e reflexão).

O objetivo específico desta atividade é o de levar os alunos a demonstrar, isto é, fazer uma análise matemática que leve, a partir de dados da hipótese, a uma conclusão que reconheça a validade da tese.

Tarefa extraclasse

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos adjacentes a ele congruentes, então, esses triângulos são congruentes. Prove este teorema sob as duas visões: a analítica, segundo a geometria euclidiana, e a geometria dinâmica, ou seja, a geometria das transformações, que, nesse caso, trata-se de isometrias.

$10^{\underline{o}}$ Encontro: Visão Dinâmica da Congruência de Triângulos

Objetivo Geral deste encontro

Temos por objetivo geral, neste encontro, demonstrar os outros Critérios de Congruência de Triângulos sob as duas visões: a geometria euclidiana e a geometria dinâmica.

Atividade (i):

Discussão e consenso sobre a tarefa extraclasse deixada no encontro anterior, com o objetivo específico de os alunos perceberem a demonstração dos teoremas propostos de uma maneira estática, usando recursos de geometria euclidiana, e com uma maneira dinâmica levando em conta o movimento provocado pelas transformações.

Objetivos específicos:

Atividade (ii):

Demonstrar que se dois triângulos têm ordenadamente os três lados correspondentes congruentes, então, esses triângulos são congruentes, cujo objetivo específico é o mesmo da atividade (i).

Atividade (iii):

Demonstrar que se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então, esses triângulos são congruentes, cujo objetivo específico é o mesmo da atividade (i).

Tarefa extraclasse

1) Entregar o texto: "*O Conceito de Razão e Proporção*", (Anexo C, p. 421) composto por nós, para leitura e reflexão (anexo C).

2) Sabendo que o triângulo MNP é isósceles e que $\hat{a} = \hat{b}$, mostrar que o triângulo MEF é isósceles, usando geometria euclidiana

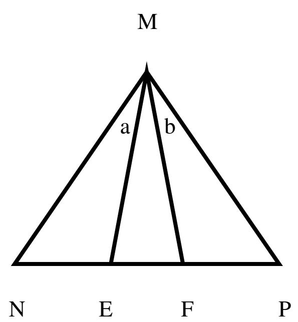


Figura 21– Triângulo MNP isósceles

3) Nos triângulos ABC e RST da figura abaixo, os ângulos B e S são congruentes. Transporte o triângulo RST de modo que o ângulo S coincida com o ângulo B.

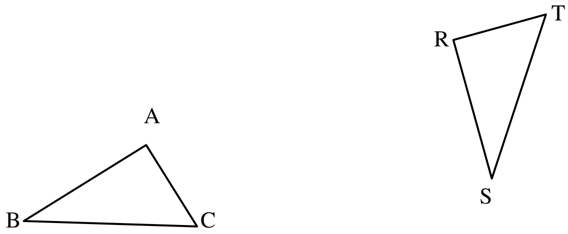


Figura 22– Transporte de triângulos

11º Encontro: Visão Dinâmica da Semelhança de Triângulos

Objetivo Geral deste encontro

Estudar as transformações no plano que, quando aplicadas a uma figura, mantenham a medida dos ângulos, mas não preservem as medidas dos comprimentos dos lados correspondentes. A partir dessa transformação, a Homotetia, será construído o conceito de semelhança de triângulos onde os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Objetivos específicos:

Atividade (i):

Leitura e discussão do texto deixado como tarefa extraclasse no 10º encontro, cujo objetivo específico é o de fixar o conceito de razão e proporção.

Atividade (ii)[50]

As três fotografias a seguir, da mesma imagem, são de tamanhos distintos:

[50] As atividades e tarefa extraclasse deste encontro foram retiradas do livro: “Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático”, Módulo III, de autoria de Lilian Nasser e Lúcia Tinoco, 2004.

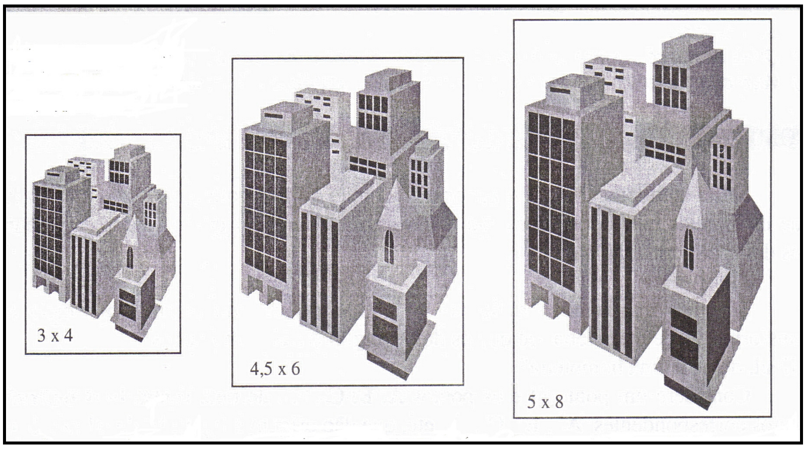


Figura 23 – Homotetia

1) Determine as razões entre as duas dimensões da cada foto. Qual a relação entre essas razões?
2) Que dimensões pode ter uma outra ampliação da foto 3x4?
3) Considere agora as duas fotos menores e compare as suas larguras: 3 e 4,5 e as respectivas alturas: 4 e 6. Observe, usando a propriedade fundamental das proporções, que $\frac{3}{4,5} = \frac{4}{6}$.
4) Verifique se o mesmo acontece se você comparar a foto 4,5 x 6 com uma foto 9 x 12.
5) O mesmo acontece se você comparar a razão entre as larguras com a razão entre as alturas das fotos 3 x 4 e 5 x 8?

Esta atividade tem por objetivo específico fixar o conceito de razão e proporção.

Atividade (iii):

Desenhe um polígono sobre um papel quadriculado. A partir de um ponto O, tomado fora do polígono, trace semi-retas partindo de O e passando pelos vértices do polígono. Em cada semi-reta marque outro ponto cuja distância ao ponto O seja o dobro da distância do vértice do polígono que está nesta semi-reta ao ponto O. Ligue esses “novos pontos”, obtendo um polígono.

1) Quais as relações entre os lados do polígono obtido e os lados do polígono original?
2) Você pode garantir que o polígono obtido é uma ampliação do polígono original? Por quê?

O objetivo específico desta atividade é o de fazer com que os alunos cheguem ao conceito de homotetia e consequentemente o conceito de semelhança de figuras.

Atividade (iv):

Usando o quadriculado abaixo, encontre o polígono A’B’C’D’, a partir do quadrado ABCD, através de uma homotetia de centro O e razão 3.

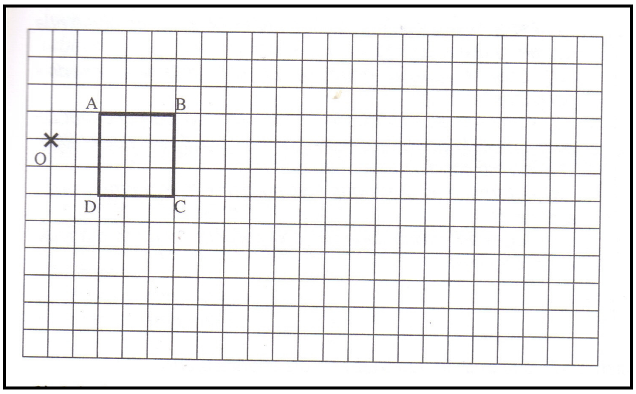


Figura 24– Homotetia de centro externo à figura

Calcule a razão entre as medidas dos segmentos:

$\frac{OA'}{OA} = —$ $\frac{OB'}{OB} = —$ $\frac{OC'}{OC} = —$ $\frac{OD'}{OD} = —$

2) Você pode concluir que o polígono A’B’C’D’ é uma ampliação do quadrado ABCD? Se for, qual é a razão dessa ampliação?

Que tipo de polígono é A’B’C’D’? O que você pode concluir sobre as medidas dos lados de A’B’C’D’?

Compare os perímetros dos dois polígonos. Qual é a razão entre eles?

Compare as áreas dos dois polígonos. Qual é a razão entre elas?

O objetivo específico para esta atividade é o de, comparando os polígonos, determinar a razão entre perímetros e áreas.

Atividade (v):

Considere o polígono ABCDE desenhado no quadriculado abaixo, e o ponto O no seu interior. Desenhe a imagem do polígono ABCDE por uma homotetia de centro O e razão ½.

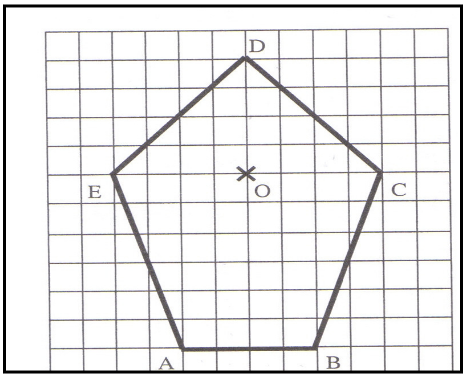


Figura 25– Homotetia de centro interno à figura

1) Qual a relação entre os ângulos internos dos dois polígonos?
2) Compare as medidas de cada lado do polígono ABCDE com as medidas dos lados correspondentes no polígono homotético. O que você conclui?
3) Determine as áreas dos dois polígonos e encontre a razão entre elas. (Sugestão: divida cada um dos polígonos em um triângulo e um trapézio). A unidade de área considerada é a área do quadradinho do quadriculado.

Esta atividade tem por objetivo específico encontrar a imagem de um polígono dado através de uma homotetia de razão fracionária.

Atividade (vi):

Considere o retângulo ABCD ao lado.

1) Determine sua imagem A'B'C'D' por uma homotetia de centro A e razão 1,5.

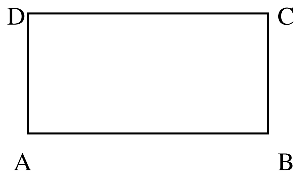


Figura 26– Quadrado ABCD

Trace a diagonal AC do retângulo dado e a diagonal A'C' do retângulo homotético. Qual a posição relativa entre as duas diagonais?

O objetivo específico desta atividade é o de trabalhar homotetia com centro num dos vértices da figura e, comparar a posição relativa das diagonais das duas figuras construídas, isto é, identificar a reta suporte que as contém.

Tarefa extraclasse

1) Considere um triângulo retângulo ABC de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm. Ao triângulo ABC é aplicada uma homotetia de razão k = $\frac{3}{4}$, obtendo-se o triângulo A'B'C'.

a) É possível determinar a área do triangulo A'B'C'sem calcular as medidas dos seus lados?

b) Qual a relação entre a razão de homotetia e a razão das áreas dos dois triângulos?

3) Observe os retângulos ABCD e EFGH abaixo:

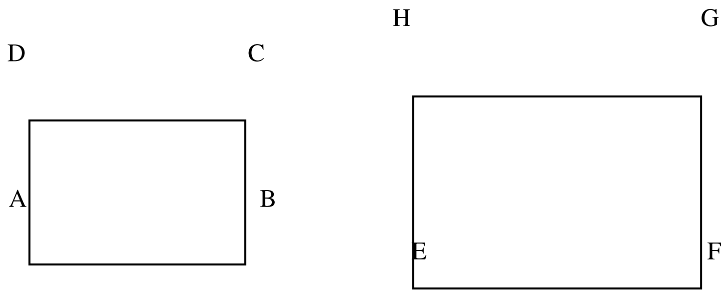


Figura 27– Figuras homotéticas

a) Verifique se é possível obter uma homotetia que leve o retângulo ABCD ao retângulo EFGH.
b) Desenhe um retângulo A'B'C'D' congruente ao retângulo ABCD de modo que o vértice A' coincida com o vértice E, o lado A'B' fique sobre o lado EF e o lado A'D' fique sobre o lado EH. Trace as diagonais do retângulo EFGH e A'B'C'D'. Elas têm a mesma inclinação em relação ao lado EF? Por quê?

12º Encontro: Visão Dinâmica da Semelhança de Triângulos

Objetivo Geral deste encontro:

Neste encontro trabalharemos com semelhança de dois polígonos, em particular, de dois triângulos, através da observação e da experimentação, para então, concluir que condições garantem a semelhança desses polígonos. Como consequência, iremos conhecer os casos de semelhança de triângulos.

Objetivos específicos:

Atividade (i):

Retomar e discutir a tarefa extraclasse, cujo objetivo específico foi o de, com a participação efetiva dos alunos, rever as resoluções das atividades da tarefa extraclasse e retomar, para fixação, os conceitos envolvendo homotetia.

Atividade (ii)[51]:

Copie e recorte as figuras abaixo e, por meio de superposição, compare-as para responder:

1) Quais das figuras A, B e C têm a mesma forma da figura X, ou seja, quais delas representam um redução da figura X?
2) Estabeleça a relação entre os lados de cada uma das figuras A, B e C com os lados da figura X, completando a segunda coluna da tabela.
3) Estabeleça a relação entre os ângulos de cada uma das figuras A, B e C com os ângulos da figura X, completando a terceira coluna da tabela.
4) Analisando as respostas aos 3 itens acima na tabela, você:

    - confirma o que respondeu em 1?

    - é capaz de estabelecer as condições necessárias e suficientes para que dois quadriláteros sejam semelhantes?

Polígono	Relação com os lados de X	Relação com os ângulos de X	O polígono é semelhante a X?
A			
B			
C			

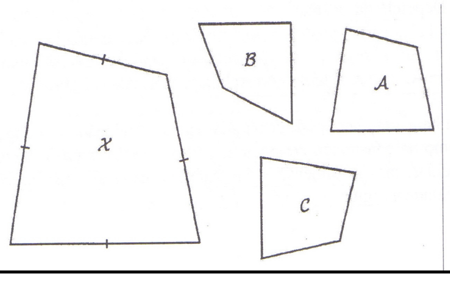


Figura 28– Quadriláteros semelhantes

[51] As atividades e tarefa extraclasse deste encontro foram retiradas do livro: “Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático”, Módulo III, de autoria de Lilian Nasser e Lúcia Tinoco, 2004.

Atividade (iii):

Considere o pentágono ABCDE da figura abaixo. Construa um pentágono com os ângulos respectivamente congruentes aos de ABCDE, mas que não seja semelhante a ele.

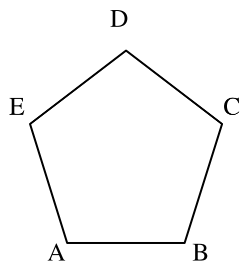


Figura 29– Pentágono ABCDE

Atividade (iv):

Construa um polígono cujos lados sejam respectivamente proporcionais aos do quadrado ao lado, mas de modo que os dois polígonos não sejam semelhantes.

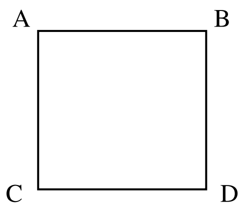


Figura 30– Quadrado

Atividade (v):

Copie e recorte os triângulos da figura que segue a tabela e, por meio de superposição, compare-as para responder:

1) Quais dos triângulos A, B e C têm a mesma forma do triângulo X, ou seja, quais delas representam uma redução da figura X?
2) Estabeleça a relação entre os lados de cada um dos triângulos A, B e C com os lados do triângulo X, completando a segunda coluna da tabela.
3) Estabeleça a relação entre os ângulos de cada uma dos triângulos A, B e C com os ângulos do triângulo X, completando a terceira coluna da tabela.
4) Analisando as respostas aos 3 itens acima na tabela, você:

   - confirma o que respondeu em 1?

   - é capaz de estabelecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes?

Triângulo	Relação com os lados de X	Relação com os ângulos de X	O triângulo é semelhante a X?
A			
B			
C			

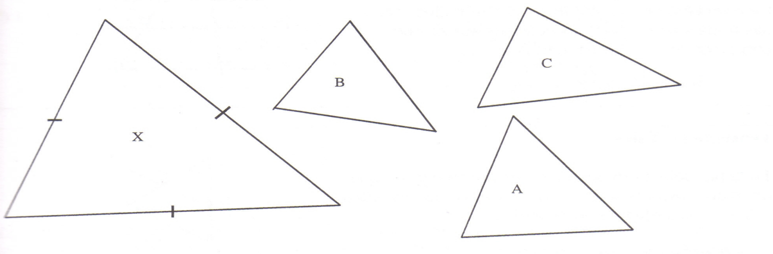


Figura 31– Triângulos semelhantes

O objetivo específico para as atividades (ii), (iii), (iv) e (v) é o de chegar e confirmar o conceito de polígonos semelhantes.

Tarefa extraclasse

Esta tarefa tem por objetivo reconhecer os Critérios de Semelhança de Triângulos.

Desenhe um triângulo ABC e faça o que se pede:

1) Trace uma paralela B'C' ao lado de BC e verifique se os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.
2) Construa, usando régua e compasso, um triângulo PQR cujos lados medem respectivamente o dobro dos lados do triângulo ABC, e verifique se eles são semelhantes.
3) Que conclusões você pode tirar dos resultados dessas duas atividades acima?

13º Encontro: Uma Visão Dinâmica da Semelhança de Triângulos

Objetivo Geral deste encontro

Demonstrar, por meio da Geometria Euclidiana e por meio da Geometria das Transformações, resultados gerais sobre Semelhança de Triângulos, como um caso particular da Semelhança de polígonos. Para isso é preciso saber fazer uso dos conhecidos Teorema de Tales e do Teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

<u>Atividade (i):</u>

Retomar e discutir, com os alunos, a tarefa extraclasse.

Atividade (ii):

Demonstrar que "se dois ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes a dois ângulos de outro, então os dois triângulos são semelhantes".

a) dinamicamente, ou seja, por meio da geometria das transformações
b) analiticamente, ou seja, por meio da geometria euclidiana.

Atividade (iii):

Demonstrar que "se dois triângulos possuem os três pares de lados respectivamente proporcionais, então os dois triângulos são semelhantes".

a) dinamicamente
b) analiticamente

Atividade (iv):

Demonstrar que "se dois lados de um triângulo são respectivamente proporcionais a dois lados de um outro triângulo, então os dois triângulos são semelhantes".

a) dinamicamente
b) analiticamente

O objetivo específico para as atividades (ii), (iii) e (iv) é o de, por meio de demonstrações, justificar os critérios de semelhança de dois triângulos.

Tarefa extraclasse

1) Considere dois triângulos semelhantes *ABC* e *MNP*, como na figura abaixo.

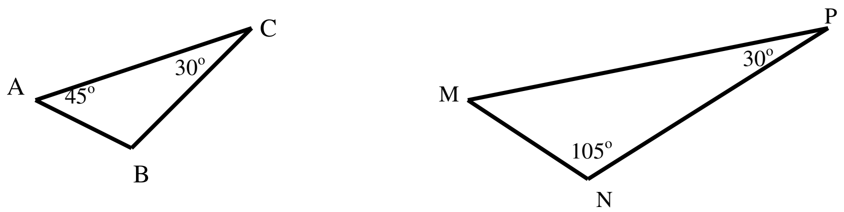


Figura 32– Triângulos semelhantes ABC e MNP

Na 2ª linha da tabela abaixo estão os elementos do triângulo ABC. Escreva na 3ª linha os elementos correspondentes no triângulo MNP.

	Ângulos iguais			Lados correspondentes		
ΔABC	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$
ΔMNP						

Quadro 6 – Número de diagonais partindo de um dos vértices de um polígono

2) Considere os triângulos semelhantes *ABC*, *ABH* e *AHC*, dados pela figura abaixo.

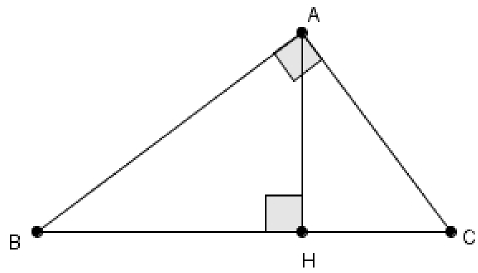


Figura 33– Semelhança entre triângulos

Na 2ª linha da tabela abaixo estão os elementos do triângulo *ABC*; escreva, na 3ª linha, os elementos correspondentes do triângulo *ABH* e, na 4ª linha, os elementos correspondentes do triângulo *AHC*.

	Ângulos iguais			Lados correspondentes		
ΔABC	$\hat{B}$	$B\hat{A}C$	$\hat{C}$	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$
ΔABH						
ΔAHC						

Quadro 7 – Número de diagonais partindo de um dos vértices de um polígono

O objetivo específico das atividades (i) e (ii) é o de reconhecer e saber usar os critérios de semelhança de triângulos.

3) Na figura ao lado, $\overline{AB} // \overline{CD}$. Mostre que o $\Delta AOB \sim \Delta COD$

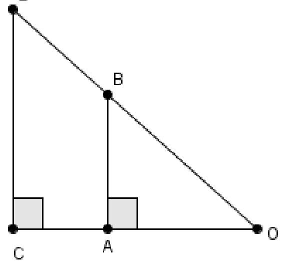


Figura 34– Semelhança entre os triângulos AOB e COD

O objetivo específico desta é o de utilizar critérios de semelhança de triângulos para solucionar o problema proposto, a partir do conhecimento do Teorema de Tales.

14º Encontro: Revisão de conteúdos teóricos e práticos

Objetivo Geral

Este encontro tem por objetivo revisar conteúdos, teóricos e práticos trabalhados na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II.

<u>Atividade (i):</u>

- Correção e discussão da tarefa extraclasse, cujo objetivo especifico é o de fixar os critérios de semelhança de dois triângulos.

15º Encontro: Sobre a Formação de Conceitos Geométricos, Visão Dinâmica da Congruência de Figuras e Visão Dinâmica da Semelhança de Figuras

Objetivo Geral

Realizar uma avaliação escrita sobre os tópicos trabalhados durante a disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II, no valor de 5 pontos (Anexo C, p.430).

CAPÍTULO 4 – APLICAÇÃO DO PROJETO P_1

Querendo responder às perguntas da pesquisa que foram por nós levantadas e que nos levaram a desenvolvê-las, foi necessário realizar uma coleta de dados para a qual, conforme Romberg (1999), o pesquisador tem inteira liberdade na escolha da forma em que se dará sua coleta. Sendo assim, optamos, para essa coleta, fazer uma ampla análise da aplicação dos projetos criados para as disciplinas "Didática da Matemática" e "Laboratório de Ensino de Matemática II"[52].

É claro que, dentre os 30 encontros realizados com os sujeitos dessa pesquisa, muitas informações foram coletadas. Cabe agora ao pesquisador, como diz Romberg (1999), tentar encontrar, dentre todas essas informações, aquelas mais importantes que possam vir a responder às indagações. É preciso que o pesquisador coloque toda sua engenhosidade, toda sua arte, nesse momento, pois parte dessas informações são relevantes, partes são irrelevantes ou até mesmo não compreensíveis.

Sendo assim, relataremos como se deu a aplicação dos projetos P_1 e P_2, analisando e interpretando o que ficou evidente a fim de poder responder às nossas indagações:

1. Como a Geometria Euclidiana, através da resolução de problemas, pode contribuir para a formação matemático-pedagógica do professor?

[52] Essas disciplinas são trabalhadas concomitantemente em um mesmo período. Neste caso, no 4º semestre do curso. A professora-pesquisadora com o consentimento da coordenação do curso pôde trabalhá-las em dois momentos: de novembro a dezembro de 2008 trabalhou com a primeira disciplina e, depois, no período de março a abril de 2009, a segunda disciplina.

2. Como a necessidade de um conhecimento didático aliado a um conhecimento matemático, fazendo-se uso de uma metodologia alternativa de trabalho em sala de aula, pode influenciar e contribuir com eficiência na formação inicial de professores?

3. Como compreender o processo ensino-aprendizagem da geometria através da resolução de problemas sob a perspectiva didático-matemática na formação inicial de professores?

Durante a coleta de dados a pesquisadora assumiu o papel de observadora participante, atuando como professora-pesquisadora. Sendo assim, para que a observação seja confiável é preciso que haja planejamento sobre o que se quer buscar e a forma como se deve fazer suas observações. O pesquisador deve fazer suas anotações de uma forma organizada, permitindo sua análise a *posteriori*.

Na aplicação dos dois projetos criados, os procedimentos metodológicos utilizados tiveram como recursos: filmagens das aulas, algumas gravações, observações, questionários aplicados aos alunos, registros dos alunos (material escrito por eles, seja na lousa ou no papel) e diário de campo. Portanto, as evidências coletadas a serem analisadas se constituirão de falas de alunos e professora ocorridas em sala de aula, a partir de problemas resolvidos pelos alunos e que poderão ser descritos ou, até mesmo, usando a imagem do registro do aluno, quando necessário. Também serão apresentadas algumas reflexões dos alunos contidas nos questionários por eles respondidos.

Neste capítulo será relatado o projeto P_1 – A Didática da Matemática – e sua respectiva interpretação e análise. O projeto P_2 – O Laboratório de Ensino de Matemática II – será relatado num outro capítulo.

4.1. Coletar evidências e interpretá-las

Como já dito anteriormente, fizeram parte da aplicação desse projeto, os alunos de uma turma do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UNEB/Campus X, situado em Teixeira de Freitas – BA, composta por 14 alunos do turno vespertino. Era uma turma heterogênea, das mais variadas idades, numa faixa etária de 20 a 55 anos. A turma, em sua maioria, era constituída de homens (oito). Em nível de conhecimento, podemos dizer que era uma turma de nível médio. Apesar de suas dificuldades e limitações no que se refere ao conhecimento matemático, sobretudo em Geometria, trazido desde a Escola Básica, a turma se mostrou bastante participativa durante os encontros e se interagiam muito bem. Apenas dois desses alunos disseram ter tido experiência como professor.

Os 15 encontros ocorreram numa sala de aula nas dependências da universidade, no período de 10 de novembro a 16 de dezembro de 2008[53], no turno vespertino, três vezes por semana, com 3h/aula cada encontro.

Relembrando, na criação desse projeto, deixou-se claro que a disciplina tinha por objetivo conscientizar os licenciandos de que, para ser um professor eficiente de Matemática, não bastava ter o conhecimento matemático, mas também, o conhecimento didático, ou seja, ter conhecimento de formas, de métodos de como trabalhar com o aluno a fim de que o mesmo obtivesse a aprendizagem. Na tentativa de alcançar esse objetivo, descreveremos cada encontro realizado durante a disciplina mencionada, destacando o que ficou evidente para nós, no que se refere à sua formação inicial.

1º Encontro – Socialização e Integração

Esse foi o primeiro dia de aula, tanto para a professora-pesquisadora[54] quanto para os alunos, pois era o início de mais um semestre letivo.

Inicialmente foram feitas as apresentações pessoais pela professora que, brevemente, se apresentou, justificando sua condição, naquele momento, de professora-pesquisadora, falando sumariamente de seu projeto de doutorado, informando e pedindo a colaboração dos alunos para a realização desse trabalho de pesquisa. Além disso, chamou-lhes a atenção para que vissem, nessa disciplina, uma disciplina importante para a formação de professores de matemática. Informou também aos alunos que trabalharia com eles em duas disciplinas: "Didática da Matemática" e "Laboratório de Ensino de Matemática II" e que primeiramente trabalharia a disciplina Didática da Matemática no período de novembro a dezembro e que retornaria em março de 2009 para ministrar a disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II.

Após a apresentação da professora-pesquisadora seguiu-se a apresentação de cada aluno e, nessa apresentação, pôde-se observar, entre os 13 alunos presentes, que nenhum deles ainda era professor em serviço. Alguns trabalhavam em outra área e estudavam, e outros, apenas estudavam.

[53] Esse período de realização da disciplina se justifica pelo fato de que a Universidade, por motivo de greve, se encontrava com o semestre atrasado.

[54] Entendendo que professora, pesquisadora e professora-pesquisadora como mesma pessoa.

Prosseguindo, a professora-pesquisadora distribuiu, a cada aluno, uma carta (anexo A), cujo contexto pedia permissão ao Colegiado do Curso de Matemática para realizar a coleta de dados de sua pesquisa, que se daria em forma de aulas, como também informava a todos, nesse caso, aos alunos, sobre todo o processo de investigação e lhes solicitava autorização para sua participação e colaboração, conscientizando-os de que sua colaboração nesse trabalho objetivava, sobretudo, a melhoria dos processos de ensinar e de aprender Matemática. Lida a carta, por professora e alunos, sem comentários, a mesma foi assinada por todos os presentes e devolvida à professora.

Dando continuidade, a professora apresentou a ementa do curso e o programa de disciplina aos alunos, alertando-os que mediante a ementa apresentada ao professor pelo Colegiado do Curso, ele, o professor, tem liberdade de planejar os tópicos referentes à disciplina, sendo, portanto admissível, alterações nas referências bibliográficas. Após a leitura do programa de disciplina, a professora perguntou aos alunos se havia alguma consideração a fazer em relação ao programa. Não havendo nenhuma consideração deu-se prosseguimento à aula.

Essa atitude da professora em deixar os alunos cientes de que existe no curso uma ementa de cada disciplina em que, através dela, o professor elabora o seu programa, é uma atitude correta e que vai de encontro às concepções que temos a esse respeito. Julgamos que é tarefa do professor, num curso de Licenciatura, como em qualquer outro curso, informar, logo em seu primeiro dia de aula, como se dará o curso, bem como lhes participar o que se espera deles num curso de Licenciatura. As Diretrizes Curriculares para os Cursos de Licenciatura em Matemática fazem alusão a esse respeito informando que, para o Bacharelado espera-se que o aluno aprenda matemática para fazer mais pesquisa em matemática e, para a Licenciatura, espera-se que o aluno tenha aprendido matemática e didática para ensinar matemática na Escola Básica.

Não havendo mais nenhum comentário em relação ao programa da disciplina, a professora distribuiu, para cada aluno, um texto falando sobre as responsabilidades e o papel do professor e dos alunos no decorrer da disciplina, que foi chamado de “Termo de Compromisso”(anexo B, p. 353). Antes da leitura desse Termo de Compromisso, a professora enfatizou a sua importância, alertando-os que esse termo é apenas uma forma de direcionar e conduzir os trabalhos. É uma proposta de trabalho com obrigações tanto para o professor quanto para os alunos, visando um melhor aproveitamento do trabalho que será proposto. Terminada a leitura a professora dirigiu-se aos alunos perguntando-lhes se havia algo a acrescentar ou tirar e se estavam de acordo com todas as cláusulas ali colocadas. Contestaram, no item avaliação, em relação à prova a que eles se submeteriam no final da disciplina. Alguns achavam que a mesma não deveria ser aplicada, outros admitiram sua aplicação, mas achavam que a quantidade de pontos sugerida no Termo de Compromisso, devesse ser no máximo três pontos. A professora-pesquisadora tentou justificar a necessidade da prova ter o valor que aparece no Termo de Compromisso e "aparentemente" conseguiu convencer aos alunos. Terminada a leitura desse Termo e sem mais nenhum comentário, professora e alunos o assinaram e os alunos o devolveram. Entretanto, a professora ressaltou que seria bom que todos tivessem em mãos uma cópia dele. Nesse instante, alguns alunos se retiraram para tirar cópia do Termo de Compromisso e deu-se uma pequena pausa.

É comum, em toda situação de ensino, o professor explicitar a maneira como irá trabalhar sua disciplina, dizer "o quê" avaliar e "como" o aluno será avaliado. No entanto, acredita-se que essa atitude do professor ficaria mais clara se, nessa relação aluno-professor, numa atitude social consciente, se firmasse, entre ambos, um Contrato Didático[55] que, para nós, se configura como o Termo de Compromisso, pois assim, tanto professor quanto aluno passariam a conhecer e respeitar quais são suas devidas funções nesse processo de ensino-aprendizagem.

Após o retorno dos alunos, a professora distribuiu para cada aluno o texto: "Tornando as tarefas extraclasse mais eficazes" de autoria de Gregory Holdan, 1988 (Anexo B, p.336), do qual foi feita uma leitura dirigida entre alunos e professor, havendo, portanto, uma reflexão e discussão em cada parágrafo.

Esse texto foi publicado na década de 80, período em que a reforma no ensino-aprendizagem em Matemática defendia um trabalho centrado no professor e com os alunos trabalhando dentro de uma orientação dirigida pelo professor e com uma atitude mais passiva dos alunos.

Na leitura do texto o autor, Gregory Holdan, apresenta cinco princípios, indicados pelas pesquisas, que o professor deverá levar em conta ao planejar sua tarefa para casa. Ao ler o primeiro princípio: "*Distribuir a prática ao longo do tempo é preferível a concentrá-la*", a

---

[55] A noção de contrato didático foi descrita por Brousseau e refere-se ao estudo das regras e das condições que condicionam o funcionamento da educação escolar, quer seja em sala de aula, no espaço intermediário da instituição escolar quer seja na dimensão mais ampla do sistema educativo. No contexto da sala de aula o contrato didático diz respeito às obrigações mais imediatas e recíprocas que se estabelecem entre professor e aluno (PAIS, 2001, p. 77).

professora pediu que os alunos opinassem sobre ele. Um aluno se colocou dizendo que o professor não deve deixar acumular conteúdos, isto é "jogar" muito assunto para o aluno, não entendendo bem o que esse princípio queria dizer. A professora reforça, de acordo com esse primeiro princípio, que o exercício de fixação ajuda a reter os conceitos e as habilidades já aprendidas. Falou do tipo de memória que temos: a memória curta, aquela em que o conhecimento entra e sai rapidamente, não havendo tempo para reflexão; e a memória longa, aquela em que há a reflexão, o conhecimento entra e fica, e isso é possível a partir da prática de tarefas.

Quanto ao segundo princípio: "*Tarefas que incluem oportunidades de exploração de tópicos futuros são preferíveis àquelas que não as incluem*", a professora interveio explicando: - É bom que o professor coloque tarefas de tópicos que ainda não foram trabalhados, onde o aluno pode ou não resolvê-las, mas ouvindo sobre o tema estarão mais preparados quando a nova situação surgir. Cita como exemplo, a metodologia de sala de aula que será adotada nessa disciplina, onde pode ser dado um problema em que o aluno, ainda não conhecendo determinado conceito matemático, poderá ou não resolvê-lo. O ideal seria que o aluno pudesse perceber que lhe falta alguma coisa nova para poder trabalhar essa nova situação. Entretanto, não se está preocupado com o fato de ele ter ou não chegado à solução do problema, nem tampouco se o aluno acertou ou errou. Na verdade o que se quer, usando esse princípio com essa metodologia, é que o aluno, a partir de um problema possa vir a construir novos conceitos matemáticos necessários à resolução de um novo problema.

Um aluno interferiu dizendo que percebe que às vezes, em outras disciplinas, o aluno até faz a tarefa, mas quando se trata da disciplina "Matemática", o aluno não se sente motivado para resolvê-la. A professora disse, então: - Por que será que isso acontece? Há um certo silêncio até que uma aluna se manifesta dizendo: - É claro que se o aluno não entende determinado assunto, ele não vai tentar resolver a tarefa.

Outro aluno mencionou o fato de que o professor pode ser muito bom, mas se o aluno não estiver motivado não tem quem o faça se interessar pela matéria, nesse caso, a Matemática. Já outro aluno levou em consideração a família. Na visão dele, a família não tem dado a atenção necessária ao filho na escola. Não há um acompanhamento do aluno por parte da família. Ele acredita que a motivação e o interesse do aluno têm que partir da família. No entanto, a família deixou essa tarefa para a escola. A professora interferiu dizendo que concorda que a motivação e o interesse do aluno devem partir da família, mas que, se isso não acontece não se pode deixar de lado o aluno. Esse é um desafio para o professor.

Não houve comentários em relação ao terceiro principio: "*A prática no mesmo contexto facilita a aprendizagem inicial; a prática de conteúdos múltiplos facilita a transferência"...* e nem ao quarto principio: "*Uma combinação de prática distribuída e exploratória é preferível à prática concentrada"*.

Partiu-se para o último princípio: "*Quanto à qualidade da transferência de idéias, métodos diferentes de ensino podem levar a resultados estruturalmente diferentes no aprendizado"*.

Admitindo-se que a transferência de idéias seja uma consequência desejada do ensino da matemática, a tarefa de casa que combine exercícios bem distribuídos com exercícios exploratórios parece ser um caminho a seguir.

A professora-pesquisadora acredita que as tarefas extraclasse são imprescindíveis, pois elas dão oportunidade aos alunos de se envolverem de forma independente com a habilidade ou o conceito em estudo. Além disso, elas constituem uma parte essencial do processo de ensino, pois propiciam um momento para que o aluno possa refletir, rever e consolidar conteúdos já estudados ou até mesmo explorar tópicos futuros.

Terminada a leitura do texto e finalizando a aula, a professora distribuiu para cada aluno a tarefa extraclasse, o texto intitulado: "Didática Geral", de autoria de Amélia Domingues de Castro, 1991, que deverá ser lido e refletido para uma discussão no início da próxima aula.

Reitere-se que a tarefa extraclasse foi de suma importância durante os encontros pois é o momento em que o aluno pode refletir, rever e consolidar conteúdos já estudados ou até mesmo explorar determinados tópicos matemáticos.

2º Encontro – Sobre a Didática Geral

Este encontro foi programado para rever e discutir alguns conceitos já trabalhados, na Didática Geral, como, por exemplo, escola, educação, sociedade, teorias de ensino e formação de professor pois, de acordo com a grade curricular, esses alunos já haviam estudado essa disciplina no semestre anterior.

Concordamos com Smole e Diniz (2001) quando dizem que muitos professores acreditam que as dificuldades que os alunos apresentam em ler e interpretar um problema ou exercício de Matemática estão associadas à pouca habilidade que eles têm para a leitura. Assim, com a leitura dos textos que serão apresentados nesta disciplina, Didática da Matemática, a professora-pesquisadora pretendia que os alunos, ao se depararem com esses textos, soubessem lê-los, interpretá-los, refletir sobre eles e que, quando necessário, fizessem uso de Dicionário para entender as palavras ali colocadas. Além disso, que eles pudessem relacionar o que tivessem lido com as atividades a serem desenvolvidas nesta nova disciplina. Dessa forma, dando início às atividades desse encontro, o texto “Didática Geral”, deixado como tarefa extraclasse, foi lido mais uma vez por todos e bastante discutido.

Nesse texto, a autora define o termo “didática”, sob o ponto de vista de diferentes autores, faz um resumo histórico de seu surgimento e, por último, assegura que o foco da Didática é o ensino mas que ela, a Didática, revela uma intenção, a de produzir aprendizagem.

Retratando com detalhes a leitura desse texto, pude constatar que a maioria dos alunos o havia lido e, durante a releitura em sala de aula, puderam levantar opiniões e apresentar modos de pensar sobre o poder da didática. A maioria a via como “ensinar a ensinar”. Foram levantadas algumas posições:

- Vejo hoje a Didática como uma disciplina fundamental, essencial para que haja realmente a evolução da educação. Ela vem contribuindo de uma forma muito dinâmica com relação à questão da melhoria da qualidade. Vejo assim como um ponto positivo.

- Como vimos, no início do texto, a didática se ocupa das estratégias de ensino. Então, nesse caso, se você vai ensinar, apesar de você ter um método de ensinar, você também tem que analisar o sujeito, do que ele é capaz de absorver.

- A experiência é importante. Acho importante o que o autor frisa aqui nesse parágrafo: “Que a didática não é uma espécie de receituário do bom ensino”. No caso das experiências vividas em sala de aula, cada experiência é diferente. O professor pode passar vinte anos numa sala de aula, mas ele, a partir de uma nova experiência, pode ensinar diferente. Então, vale essa prática diária? Vejo que a didática se preocupa com a reflexão do professor para melhorar a sua prática.

No entanto, a professora tenta mostrar a eles que a tarefa da didática não é apenas isso, foi quando ela disse:

- A Didática é uma disciplina ainda jovem. Ela surgiu nos cursos de formação de professores no início do século XX, entendida, segundo o texto, como uma espécie de receituário para o bom ensino. Mas, mais recentemente, ela já pode ser percebida como um campo científico, que tem por finalidade identificar, caracterizar e compreender os fenômenos e processos que condicionam o ensino e a aprendizagem da matemática.

Pretendendo reconstruir conceitos já trabalhados na disciplina Didática Geral, uma discussão pôde ocorrer envolvendo tanto a pesquisadora quanto os alunos. Durante essa discussão, a maioria dos alunos se posicionou. Houve colocação de natureza escolar, familiar, política e de relacionamento professor-aluno. Quando a professora-pesquisadora perguntou, à classe, o que entendiam por educação, escola, sociedade, qual o papel da escola, etc, uma das alunas colocou:

- O papel da escola é educar junto com a família. O professor não vai estar ali só para passar os conteúdos que são programados, mas oferecer uma educação para a vida também. Uma formação para a vida e uma formação técnica, né? Não sei bem se é essa palavra.

Houve várias posições de colegas concordando com isso, dentre elas:

- A educação vem de casa. A escola tem o papel de educar o aluno, junto com a família. ... Muitas famílias se preocupam em mandar as crianças para a escola e deixam a responsabilidade com os alunos. Eu acho que a escola é um ambiente de aprendizagem, mas em termos de educação, eu acho que essa vem de berço, porque, na realidade, não é só na escola que você adquire educação.

-Talvez o maior educador, seja a escola. Mas, é lógico que o primeiro educador tem que ser a família. A nossa educação se reflete na sociedade onde a gente vive, se reflete na família em que a gente foi criada, na escola em que a gente estuda, na comunidade. A nossa educação é reflexo de tudo isso, do meio em que a gente tá vivendo, então, a família é o primeiro educador e eu acho que a escola é o segundo educador...

-Então, o que os pais têm que fazer? Ensinar a seu filho que a escola é o local de estudo. O local onde ele vai aprender. Não um local em que ele vai brigar, pois na escola acontece muita briga, desunião. Então o pai tem que colocar na cabeça do filho de que a escola é um lugar de aprendizagem. Sabendo isso, o filho já vai consciente de que a escola não é um lugar de baderna.

Falando sobre o preparo necessário do professor para produzir uma aprendizagem eficiente, outra aluna colocou:

- Um professor despreparado é pior do que qualquer outra coisa. Se ele não tiver uma estrutura legal, adequada, não dá pra levar! Mas, com um professor bom, ele pode levar uma aula com outros recursos. O que eu vejo, assim, é que muitos professores não estão preparados, entendeu. Como minha mãe diz: O aluno vem sem estrutura de casa, o pai não tem estrutura também, a família não tem estrutura nenhuma, quem é o profissional? O

professor. Quem é que tem que lidar com toda a situação? O professor. E às vezes o professor também não tem estrutura nenhuma. Ele está despreparado para aquela situação. Isso aí é o pior. O colégio que não tem estrutura é uma coisa muito ruim, mas um professor ser despreparado é muito pior do que a falta de estrutura. Acho que um ponto negativo, muito negativo na educação é o despreparo do professor, bem pior do que a falta de estrutura das escolas.

Em contraposição a ela, um aluno se expressou assim: - Eu não diria totalmente despreparado, hoje têm professores buscando uma formação superior, a maioria deles. O que precisa hoje é a questão da reciclagem permanente, constante. Tem que se ver também o ambiente de trabalho deles. Será que há material disponível em sua escola para que ele possa melhorar a sua aula?

É de bom senso o que esses alunos falam em relação ao professor estar preparado para ensinar. De fato, o professor precisa estar preparado, ou melhor, bem preparado, para fazer um uso constante da Matemática existente num programa a ser desenvolvido para cada série, nos conteúdos a serem trabalhados, em sala de aula, com seus alunos. E o que significa esse "estar bem preparado"? Para nós, um professor bem preparado é aquele que, além de ter o conhecimento do conteúdo, deve ter também o conhecimento didático. Acreditamos, pois, que um professor para ensinar bem Matemática não basta apenas conhecê-la bem. Ele deve, também, estar preparado sobre o modo e o método de como trabalhar esse conteúdo.

Nesse momento, a professora-pesquisadora lhes apresentou o Diagrama de Begle, mostrando um modo de relacionar, na sociedade, os três componentes necessários: a matemática, o professor e os alunos, na escola, para um possível preparo do cidadão que deve se manifestar na sociedade.

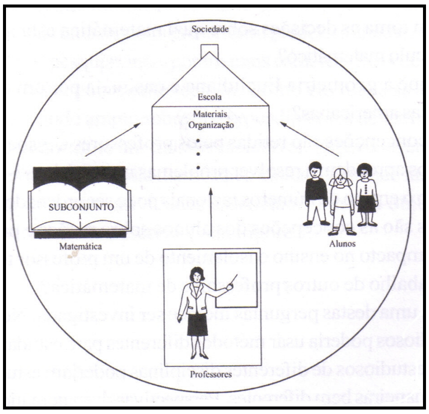


Figura 35– Diagrama de Begle: a relação de sociedade, matemática, alunos, professores e escolarização (2)

E, a partir dessa análise, vários alunos se posicionaram: uns a favor, outros acrescentando mais detalhes e outros apenas escutando

- Vejo professores, alunos, matemática, escola, sociedade...são uma população, onde um depende do outro, um conjunto que engloba tudo isso formando uma comunidade...

- Eu entendi diferente. Um conjunto universo e, dentro dele, há vários subconjuntos: a sociedade e, dentro dessa sociedade, a escola, e a escola é educação. Aí tem os materiais que é o livro. Vejo os alunos e a professora dentro da escola.

A professora-pesquisadora considerou essas falas e disse:

- É mais ou menos isso que vocês disseram. Vejamos novamente o diagrama: temos aí a escola, que faz parte de um contexto social onde, nela, temos a presença do professor, atuando com o objetivo de ensinar; os alunos também pertencentes a essa escola, sendo preparados por ele e, a matemática como um subconjunto de um currículo escolar. Tudo isso tem um objetivo: preparar o cidadão, o indivíduo, para viver em sociedade. O modelo pretende dizer que é importante formar um cidadão crítico, reflexivo, autônomo e que saiba tomar decisões. E, é isso que queremos, nesta disciplina, mostrar para vocês. Esperamos que vocês sejam professores críticos, reflexivos, que tenham uma visão de mundo diferente, que saibam matemática e que, através de suas reflexões, de suas tomada de decisão, possam influenciar seus alunos de modo que ocorra a aprendizagem necessária para todo cidadão.

Após todo esse debate, a professora-pesquisadora lhes apresentou o texto: "A necessidade da escola", de autoria de Maria Lúcia Boero, 1999, que foi lido individualmente e depois em conjunto, dando uma posterior oportunidade de reflexão sobre ele.

Como contribuição dos alunos, a partir de sua leitura e reflexão, a professora-pesquisadora resumiu as principais idéias e lhes deixou a seguinte mensagem:

-Como se pode perceber, esse texto conta uma experiência vivida por uma professora-pesquisadora em sala de aula, pedindo aos alunos que refletissem sobre o papel da escola e da sociedade. Nessa discussão, novos termos surgiram como: literacia, numeracia, materacia e tecnocracia, termos utilizados para indicar um indivíduo alfabetizado, não só literalmente, como também matematicamente. Um indivíduo assim preparado, sairá da escola para a sociedade, como um cidadão útil, consciente e crítico, preparado para enfrentar os novos tipos de emprego que estão aparecendo.

Terminando esse encontro foi deixado, como tarefa extraclasse, o texto intitulado: "Ensinar a ensinar", que os alunos deverão ler e refletir para ser comentado no encontro seguinte.

Acreditamos que nossos objetivos para esse encontro foram alcançados: houve uma participação efetiva dos alunos nas discussões sobre os textos trabalhados e mostrando suas posições em relação aos temas abordados. Este encontro foi o começo de tantos outros encontros que virão, e para os quais temos, por objetivo, conscientizar esses alunos de seu papel como futuro professor de matemática.

3º Encontro: Sobre a Didática Geral

O professor precisa estar preparado, ou melhor, bem preparado, para fazer uso da Matemática constante, num programa existente, para cada série, nos conteúdos a serem trabalhados, em sala de aula, com seus alunos. E o que significa "estar bem preparado"? Para nós, um professor bem preparado é aquele que, além de ter o conhecimento do conteúdo, deve ter também o conhecimento didático.

Este encontro tinha por objetivo mostrar aos alunos que a Didática e, em especial, a da Matemática, não se limita apenas a ensinar a ensinar. Como disse D'Amore (2007), "por mais que essa crença esteja enraizada, principalmente entre os colegas matemáticos, as coisas não são bem assim".

Para iniciar essa aula, de acordo com a criação do nosso projeto, achamos conveniente apresentar, primeiramente para os alunos uma citação de Lewis Carrol, no livro: "*As aventuras de Alice no País das Maravilhas*", a fim de que eles pudessem começar a refletir sobre a questão de se ter sua própria identidade profissional, assumindo, assim, seus pontos de vista como professor.

> Estou totalmente de acordo contigo, – disse a duquesa – e a moral disto é: "Tens que ser aquilo que queres parecer" ou, mais simplesmente, "Não penses jamais de não ser diferente do que poderias parecer aos outros, que o que eras, ou terias podido ser, não era diferente daquilo que terias sido se tivesses aparecido diferente a eles". Parece-me que eu entenderia melhor esse preceito, disse Alice gentilmente, se o pudesse ter escrito; não há dúvida, porém, que seguirei igualmente o vosso conselho.

De fato, um professor precisa ter sua identidade profissional. Ser ele mesmo. Ser capaz de tomar decisões próprias, ter autoconfiança e capacidade de improvisação perante situações novas.

Seguem alguns posicionamentos feitos pelos alunos, a respeito dessa citação:

- *Devemos ser nós mesmos, não podemos copiar ninguém, temos que ter a nossa própria identidade.*

- *Se você quer ser um professor, você tem que fazer por onde. Não adianta eu ser professor e não ter fundamento nenhum na área ... ter somente aparência de professor.*

- *Todos nós devemos espelhar em alguém, em alguma coisa. A gente se espelha em alguém para sermos nós mesmos, para nos aperfeiçoarmos.*

Para dar inicio à discussão do texto deixado como tarefa extraclasse no encontro anterior, a professora-pesquisadora iniciou fazendo a apresentação do livro de Bruno D'Amore: *Elementos da Didática da Matemática (2007),* haja vista que esse livro serviria como referência para esses encontros. Um livro bastante atual, de leitura bastante agradável e com muitas citações que transmitem ensinamentos relacionados ao ato de ensinar.

Uma pergunta se apresenta no início do livro: *"Se a tarefa do estudioso em Didática da Matemática não é a de ensinar a ensinar a Matemática, então qual é?"*. E com essa pergunta ele nos remete, em todo o seu livro, a uma reflexão mais profunda sobre essa questão, objetivando chegar a essa resposta até o final do livro.

Voltando à tarefa extraclasse, da leitura do texto pudemos tirar algumas reflexões feitas pelos alunos:

- *Vejo que a forma como o autor está colocando o "ensinar a ensinar" não é vista pela maioria dos professores de Matemática. É um modo diferente de ver esse ensinar a ensinar.*

Outros acrescentaram:

- *A idéia da didática antes, acho que não era tanto a questão de como os professores atuavam em sala de aula, de como eles passavam o conteúdo para os alunos, ou de preocupar-se em como eles estão aprendendo. Hoje, a didática se preocupa com a questão do que eu estou "passando". Se eu ensino bem a meus alunos, com certeza eles vão aprender.*

- *Compreender não depende apenas da disciplina e das metodologias, mas também de problemas de comunicação, sociológicos, antropológicos. ... Antigamente o professor não se comunicava bem com os alunos em sala de aula, vinha somente dar os conteúdos e hoje não, os professores conversam com os alunos, passam a saber como o aluno está, então, acho que mudou muito.*

- Sim, hoje vejo que o professor acompanha o desenvolvimento do aluno no todo. Acompanha o desenvolvimento como o ser humano e não apenas o desenvolvimento do conteúdo trabalhado em sala de aula.

O professor pode e deve encontrar no aluno um ser humano, mas seus problemas pessoais podem e devem ser trabalhados fora da sala de aula e, caso existam, amparados pelos assistentes sociais das escolas.

Após essas colocações, numa reflexão própria, a professora-pesquisadora pôde perceber certa "mistura" no papel do professor, como professor e como guia do aluno na construção de seu conhecimento, quer matematicamente, quer didaticamente. A sala de aula é um local onde o conhecimento deve ser construído e, portanto, o local onde a aprendizagem se faz.

Como disse Cantoral, citado por D'Amore (2007, p. 315)

> *O conhecimento é a informação sem uso; o saber é a ação deliberada para fazer do conhecimento um objeto útil diante de uma situação problemática. Disso se deduz que a aprendizagem é uma manifestação da evolução do conhecimento em saber. A aprendizagem consiste, portanto, em dar resposta correta antes da situação concreta.*

Na essência, Cantoral quis expressar que um aluno, diante de um problema, busca em sua mente o conhecimento prévio que já possui e, através da resolução desse problema, ao elaborar sobre esse conhecimento, o transforma em saber, mesmo antes de ter solucionado o problema.

A professora, querendo uma maior participação da classe, pede a opinião de outros alunos. Outra aluna disse:

- Percebi que o autor do texto fez uma analogia da prática pedagógica com a prática do ensino, como Paulo Freire, quando diz que quem ensina também aprende a ensinar e quem aprende também ensina a aprender. Então, deve existir uma relação entre o discente e docente.

Nos discursos desses alunos nota-se que eles já possuem algum conhecimento de questões pedagógicas que haviam aprendido durante o curso. No entanto, na fala de um aluno, percebe-se, de sua parte, certa preocupação em relação ao conhecimento pedagógico e ao conhecimento matemático, quando disse:

-Professora, tem os dois lados dessa questão do conhecimento matemático e do conhecimento pedagógico. Tem o lado que melhora e tem o outro que deixa frágil o conhecimento de matemática. Vejo aqui, em nossa universidade, onde os alunos da grade curricular anterior saíam com uma formação matemática bem melhor do que os de agora com essa nova grade curricular.

Essa preocupação apontada pelo aluno, de fato tem fundamento, pois segundo D'Amore (2007), a Didática Geral, a Didática da Matemática e a própria Matemática são disciplinas necessárias num curso de formação de professores, no entanto, nenhuma das três é suficiente, juntas concorrem para isso. É claro que não se pode entender o sentido de uma didática disciplinar se não se possui em profundidade a disciplina.

Tanto a Didática Geral quanto a Didática da Matemática são disciplinas necessárias para a formação de um professor de matemática. São disciplinas que têm o papel de preparar os futuros professores para atuarem em suas salas de aula, bem como, oferecer-lhes estratégias de ensino como, por exemplo, metodologias alternativas de trabalho em sala de aula.

Depois dessa breve explanação, a professora levantou alguns questionamentos, em relação à disciplina Didática da Matemática, a fim de que os alunos percebessem o que pretendia realmente com essa disciplina:

Será que se quer, nessa disciplina, ensinar vocês, futuros professores, a ensinar Matemática a seus alunos?

Será que se pretende ensinar a vocês aquela matemática que vocês irão ensinar a seus alunos em sala de aula?

Ou, como disse D'Amore, há mais coisas a falar e a pesquisar?

Com essas reflexões encerrou-se a aula.

A professora entregou, a cada aluno, a tarefa extraclasse que foi o texto: "A Didática da Matemática como arte", texto de Bruno D'Amore (2007), juntamente com o enunciado da atividade (iv), criada no projeto elaborado para essa disciplina.

Observa-se que, devido às discussões feitas em sala de aula sobre as atividades (i), (ii) e (iii), não foi possível realizar as demais atividades pretendidas para esse encontro, ficando elas, então, para o encontro seguinte.

4º Encontro: Sobre a Didática da Matemática

A partir deste encontro começou-se a trabalhar, efetivamente, a disciplina Didática da Matemática.

Ao refletir sobre os objetivos destinados a este encontro e, devido ao fato de algumas atividades do encontro anterior passarem para este, a professora-pesquisadora ressaltou que no passado, vários autores sustentavam que ensinar era uma arte, fruto de características pessoais que não podiam ser aprendidas nem transmitidas com a radical conclusão de que a pesquisa didática era inútil.

Mas, assim, ela levantou as seguintes questões: Será que até os dias de hoje ainda existe essa crença? Será que o ensinar se resume meramente à arte? E disse à classe que é sobre esse assunto que se irá refletir e discutir neste encontro.

No intuito de atingir a este objetivo e de fazer com que os alunos viessem a refletir e se conscientizar de seu papel como futuro professor de matemática, apresentou-lhes uma citação, de Dario Antisseri, retirada do livro de Bruno D'Amore (2007), que ao fazer uma introdução à edição italiana de Ludwig Wittgenstein, Dizionario per le Scuole elementari, que dizia

> Do que sabemos a partir dos documentos disponíveis, podemos dizer que Wittgenstein (1889, 1951) se dedicou ao ensino com uma intensidade desconhecida e com um senso de dever absoluto. Não perdoou sequer a si mesmo; e foi severo com seus estudantes. (...) Viveu pobre com os pobres; respeitou-os; fez de tal maneira que seus jovens chegassem a pensar por si mesmos; deu-lhes o que tinha: seu saber, sua abnegação, e sua cesta de laranjas.

Dando-lhes um tempo, para que pudessem interpretar o que o autor pretendia dizer com essa citação, alguns alunos se manifestaram colocando seus pontos de vista:

- Apesar das dificuldades, não faltou a esse professor passar para os alunos o seu conhecimento, o ensino para aqueles jovens.

- Tem que ver também com a questão da dedicação. Vejo também nessa citação, que não se deve "passar" um ensino decorativo, que o jovem possa pensar por si próprio, raciocinar por si mesmo, que possam achar soluções para problemas. Que o conhecimento dado para o jovem não seja feito de forma mecânica, para que ele possa estar pensando, buscando soluções para o problema.

- Professora! Sobre esse trecho: "fez de tal maneira que seus jovens chegassem a pensar por si mesmos"... entendi que o professor, além de ensinar, deve fazer com que o cidadão tenha um auto-domínio, que saiba tomar decisões, pois creio que o ensino vai além

de só ensinar a matéria, mas formar um cidadão que tenha o poder de tomar decisões próprias ... e cabe, ao professo,r fazer com que o aluno saiba tomar suas próprias decisões.

Complementando a fala desses alunos, a professora-pesquisadora não deixou de lhes chamar a atenção sobre o poder da matemática que faz com que se possa agir, com mais segurança, quando se lhes permite saber pensar matematicamente. E isso se adquire quando, ao fazer matemática, faz-se isso com compreensão e significado.

Após essa discussão, a professora, tomando como base o texto deixado como tarefa extraclasse – "A Didática da Matemática como arte"- questionou-os sobre o que eles haviam entendido do texto. Durante essa discussão, muito se falou em relação aos métodos utilizados para se ensinar matemática, sobretudo os jogos, como podemos perceber na fala de alguns alunos:

- Entendi o seguinte: o objetivo é encontrar vários métodos para ensinar. Dependendo do método que se vai ensinar, a criança vai aprender mais ou menos, por isso a gente deve sempre estar melhorando o método de ensinar. Assim, as crianças vão aprender mais, cada vez mais.

- Quando o autor fala sobre os objetivos da didática da matemática, em relação aos jogos, trago a ludicidade para dentro da sala de aula, os jogos para melhorar o ensino de hoje ... então, se faço da minha aula uma aula lúdica, uma aula mais clara, objetiva, a gente tem que transformar essa abstração no concreto, através dessas aulas lúdicas, como jogos, recursos didáticos, ou seja, para prender a atenção da criança. Não tornar uma aula tradicional, uma aula chata, em que a criança não presta atenção, mas tornar uma aula motivadora vai facilitar, fazendo com que a criança tenha interesse pela aula. E, quanto aos recursos didáticos ... pode estar fazendo com os próprios alunos. Por exemplo, ao se dar uma aula de polígonos, sólidos, eu posso confeccioná-los, junto com os alunos, criando um ambiente para se trabalhar em grupos.

A professora aproveitou para perguntar a essa aluna: - C*omo fica a questão do conhecimento matemático quando se trabalha com a ludicidade, com os jogos?*

A aluna respondeu: - *Posso estar trabalhando as propriedades desses sólidos. Não só falando ou escrevendo no quadro, mas a criança estará vivendo aquilo através do concreto. Tem que se trazer o concreto para a sala de aula mesmo.*

Um outro aluno interferiu, dizendo: - *Acho muito importante a questão dos jogos, nas aulas de matemática, para a aprendizagem, pois eles promovem a interação, o trabalho em* *grupo, o interesse cresce em relação à disciplina, a participação aumenta, e tem também a questão dos desafios matemáticos.*

Outro aluno, atento a essa discussão, alertou: - *É, mas o professor deve ter cuidado ao trabalhar com jogos em sala de aula, pois senão a criança vai querer só jogar e não aprender aquilo que o professor quer ensinar.*

O depoimento desse aluno mostra claramente que o jogo é um recurso didático, mas que ele, por si mesmo, não garante a aprendizagem matemática do aluno. Ao se trabalhar com esse recurso é necessário que o professor saiba que matemática nova se pretende construir a partir do jogo e que deixe o aluno ciente disso.

Nota-se na fala de alguns alunos que eles, ainda, trazem consigo a crença de que a disciplina Didática, e até mesmo a Didática da Matemática, é uma disciplina que lhes ensinará a "ensinar" e como consequência disso, obviamente a aprendizagem se dará. Vejam isso na fala de um aluno:

- *Quando é que o peso artístico recai sobre o professor? Talvez seja, por exemplo, quando ele não leva o material adequado para dar uma aula e, então a responsabilidade recai sobre ele. ... O professor deve estar mostrando a maneira correta de se estar trabalhando com aquele material didático. A experiência, as técnicas, as formas que o professor utiliza para ensinar ajudam muito na questão da aprendizagem do aluno.*

A professora-pesquisadora, aproveitando-se das posições colocadas pelos alunos, disse-lhes que essas posições tomadas por eles parecem demonstrar que eles entenderam a palavra "arte" apenas como uma atividade artística e não chegaram a perceber a "arte" como fruto de variadas e sucessivas observações que pudessem levá-los a levantar possíveis conjecturas sobre determinadas propriedades matemáticas que, muitas vezes, eram aceitas como verdades, sem demonstração.

Um trecho do texto estudado que parece não ter chamado a atenção dos alunos foi:

> É possível ver a Didática da Matemática de um duplo modo:
> **A:** como divulgação das idéias, fixando a atenção na fase do ensino (como **arte**);
> **B:** como pesquisa empírica, fixando a atenção na fase da aprendizagem (epistemologia da aprendizagem da Matemática).

Vendo a Didática da Matemática como arte, ou seja, aquela que aposta tudo no ensino, podemos dizer que isso não é suficiente para garantir a aprendizagem plena. Há tempos atrás, muitos professores defendiam que ensinar é uma arte, fruto de características pessoais que não podiam ser transmitidas. É obvio, não podemos negar que não existam docentes com esse dom natural de ensinar, como também na arte de comunicar e na capacidade de atrair a atenção dos alunos. O que se quer dizer, conforme D'Amore, é que (1) a eficácia da aprendizagem não é exclusiva desses artistas da didática (o professor), embora, partindo de uma situação de atenção e interesse, é provável que cresça, no aluno, a *motivação* e, portanto, a *volição*; (2) nada garante que um professor perfeito, apenas por esse motivo, obtenha o resultado desejado no plano de qualidade da aprendizagem por parte de seus alunos.

Quanto à Didática da Matemática como epistemologia da aprendizagem, como uma disciplina científica, segundo D'Amore, podemos dizer que é o campo da pesquisa que tem como objetivo identificar, caracterizar e compreender os fenômenos e processos que condicionam o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Como já havia sido dito, no encontro anterior não foi possível trabalhar com a atividade (iv), então, passou-se a trabalhá-la neste. Tratava-se do seguinte problema

Situação-problema:

Se uma fábrica de doces disponibilizar 7428 balas para serem distribuídas igualmente a 5 instituições, entre suas crianças, quantas balas caberiam a cada instituição?

Responda:

1) Como resolver esse problema em uma turma de ensino fundamental de 1ª a 4ª série?

2) Que matemática "nova" quer-se construir através da resolução desse problema?

3) Para que série vocês acreditam que esse problema é adequado? Se, para várias séries, como ele poderia ser trabalhado nas diferentes séries?

A professora-pesquisadora pediu à classe que se dividisse em grupos e deixou que os alunos trabalhassem sobre o problema. Foram formados três grupos **A, B** e **C**.

Na fase de observação, a professora-pesquisadora, andando pela sala, vendo os grupos concentrados e pensando no caminho que iriam seguir para resolver o problema e responder às três questões propostas, pôde perceber na fala dos componentes, de cada grupo, o que diziam entre si. Em um dos grupos, **grupo A**, um dos participantes dizia que só havia uma maneira de resolver o problema. Outro, contestando, disse que, na verdade, o problema estaria procurando saber como o professor trabalharia com as crianças e que matemática nova ele poderia construir com os alunos. Para ele, apresentaria aos alunos as etapas que Polya sugere quando se vai resolver um problema.

No **grupo B**, os participantes usaram de imediato, a divisão. Mas, a professora-pesquisadora observou que, eles sem se preocuparem com o contexto do problema, chegavam a um quociente dado por um número decimal fracionário. Ainda, esse mesmo grupo falava em divisão em partes proporcionais.

No **grupo C** pôde se notar o desinteresse dos participantes, ao verem ser-lhes dado um problema de divisão, a ponto de duas alunas se retirarem, por alguns instantes, da sala de aula.

Depois de ter dado tempo suficiente aos grupos, a professora-pesquisadora chamou um dos representantes de cada grupo e lhes pediu que colocasse na lousa a resolução de seu grupo. Após, sugeriu que os grupos se desfizessem e formassem um só grupo, reunidos numa Plenária.

Após cada grupo ter registrado, na lousa, a divisão efetuada que o problema pedia, o que se viu foi o seguinte:

O **grupo B** apresentou sua solução em forma decimal – 1485,6. Os outros dois grupos, discordando da resolução do grupo B, responderam o problema dizendo que cada instituição receberia 1485 balas e sobrariam três. Entre os três grupos, surgiu a condição do contexto do problema, pois como é que iria mandar 0,6 de bala para cada instituição? Entretanto, não havia nenhuma dúvida quanto à operação que o problema pedia.

Em seqüência, a professora pediu que cada grupo desse sua opinião a respeito das questões levantadas para o problema. Percebeu-se que todos haviam compreendido que o problema exigia a operação divisão, porém como não sabiam conceituá-la, apenas efetuaram o algoritmo da divisão.

Analisando as situações descritas acima, pode-se deduzir que o **Grupo B** demonstrou a não compreensão do conceito de divisão em partes iguais e que poderia haver sobra, acarretando, assim, em um erro. Uma concepção errônea caracterizada, segundo Graeber e Johnson (1990), como *concepção limitada*, ou seja, se o aluno tem apenas uma noção limitada de um determinado conceito, princípio ou procedimento, então o estudante está usando uma concepção limitada que, muitas vezes, é derivada do modo como a Matemática lhes é apresentada, bem como, das atitudes refletidas em uma ampla sociedade e da natureza das tarefas requeridas ao aluno.

Muitas vezes, o professor e livros texto enfatizam a aplicação de fórmulas e/ou regras, conduzindo os alunos a conceberem que ser capaz de recordar uma regra ou obter uma resposta certa é equivalente à compreensão. Embora, seja importante para os estudantes serem capazes de usar tais regras eficientemente, mas, se não há uma compreensão em tais regras, consequentemente os estudantes não serão capazes de ver como aplicar essas regras em novas situações.

Quando foi pedido para dizer qual a relação matemática entre os termos da divisão: Dividendo, divisor, quociente e resto, e sua representação, não souberam responder, sendo que o **grupo B** não respondeu a essa questão, julgando que a divisão devesse ser feita proporcionalmente ao número de crianças de cada instituição. Quanto a série em que se pode aplicar esse tipo de problema, esse mesmo grupo disse, que esse problema, deveria ser aplicado a partir da 6ª série. Por sua vez, em outro grupo, uma das alunas acreditava que esse tipo de problema poderia ser aplicado a alunos de 2ª série, enquanto outra dizia que problemas envolvendo divisão somente poderia ser trabalhados a partir da 3ª série.

Nesse sentido, a professora perguntou: - *Será que uma criança de 6 a 7 anos não teria condições de entender o que significa dividir, repartir*? Alguns alunos responderam que sim. Quando se fala em repartir não se está considerando que esse ato seja feito em partes iguais. Mas, matematicamente, quando se fala em divisão, necessariamente se está falando em dividir em partes iguais. Assim, quando um dos grupos apresentou o desenho ele estava se referindo a cortar o todo em cinco partes, mas o fez diferentemente e, assim, não se configurou uma divisão matemática.

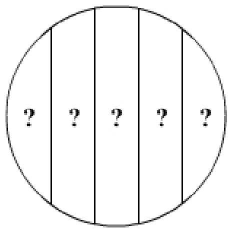


Figura 36– Divisão errônea

Justificando a escolha desse problema, a professora disse aos alunos que um dos objetivos de se ter trabalhado esse problema foi o de apresentar uma metodologia alternativa de trabalho em sala de aula. Ou seja, uma outra metodologia para se “ensinar” matemática através da resolução de um problema.

A professora-pesquisadora explicou também que, nessa metodologia, o professor não está preocupado unicamente em ver se o grupo fez a resolução correta ou erradamente. O importante, para o professor, é que cada grupo apresente sua solução e que somente na plenária é que o consenso será alcançado. No final, é que o professor formaliza todo o novo conceito e todo o novo conteúdo que foi construído ao longo da resolução do problema.

Sendo assim, a professora-pesquisadora fez uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos trabalhados nesse problema. Nesse caso, foi explorado o conceito de divisão utilizando o conhecimento conceitual e o conhecimento procedimental, como segue abaixo:

1) *Análise dimensional:*

$$\begin{array}{l|l} \text{7428 balas} & \text{5 instituições} \\ \cline{2-2} \underline{\text{? balas}} & \text{? balas/instituição} \\ \text{resto em balas} & \end{array}$$

2) *Conhecimento conceitual:*

$D = q \times d + r$ (divisão com resto)

$D = q \times d$ (se exata, $r = 0$)

3) *Conhecimento procedimental ou processual:*

$$\begin{array}{c|l} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

4) *Técnica operatória:*

$$\begin{array}{r|l} \text{7428 balas} & \text{5 instituições} \\ \cline{2-2} \underline{-\ 5000} & \text{1485 balas/instituição} \\ 2428 & \\ \underline{-\ 2000} & \\ 428 & \\ \underline{-\ 400} & \\ 28 & \\ \underline{-\ 25} & \\ \text{3 balas} & \end{array}$$

Depois dessa formalização, a professora-pesquisadora entregou aos alunos o texto: “Tipos de Conhecimento Matemático: Conhecimento Conceitual e Conhecimento Procedimental (Processual), um texto extraído do livro de Van de Walle (2001). Foi feita uma leitura pela professora destacando as idéias principais e aproveitando os conceitos dados pelo autor sobre o conhecimento conceitual e procedimental, a professora estabeleceu a relação desses conceitos com o problema discutido em sala. Quis deixar os alunos conscientes de que, no processo ensino-aprendizagem, é fundamental que se compreenda antes de tudo o conhecimento conceitual, que corresponde ao conhecimento que é entendido para, depois, ter-se o conhecimento procedimental, ou seja, o conhecimento de regras, procedimentos e simbolismos que se usa na Matemática para executar tarefas rotineiras.

É comum, no ensino da Matemática, ensinar regras procedimentais sem uma base conceitual, levando os alunos, consequentemente, a erros e até mesmo a uma antipatia pela Matemática. Destaca Van de Walle (2009) que todos os procedimentos matemáticos podem e devem estar conectado a ideias conceituais que expliquem porque eles funcionam. O conhecimento procedimental em Matemática tem um papel importante tanto na aprendizagem quanto no fazer Matemática, mas não podemos esquecer que nem mesmo o uso mais hábil de um procedimento nos ajudará a desenvolver conhecimento conceitual relacionado àquele procedimento (HIEBERT apud VAN DE WALLE, 2009, p. 48).

Como não foi possível desenvolver a atividade (iii) planejada para esse encontro, a professora deixou-a como tarefa extraclasse. E, por fim, entregou a própria tarefa extraclasse pretendida para o encontro seguinte.

5º Encontro: Sobre a Didática da Matemática – novas idéias

Pretendíamos ainda, neste encontro, tornar os alunos conscientes de que no processo ensino-aprendizagem é fundamental que se tenha, antes de tudo, o conhecimento conceitual do objeto construído, que corresponde ao conhecimento que foi entendido para, depois, ter-se o conhecimento procedimental, ou seja, o conhecimento de regras, procedimentos e simbolismos que se usam na Matemática. E, para desenvolver a compreensão do que significa ter esses tipos de conhecimento, surgem os modelos matemáticos, que se referem a qualquer objeto, figura ou desenho que represente o conceito ou sobre o qual a relação para aquele conceito possa ser imposta (VAN de WALLE, 2009).

Como de costume, para dar inicio à aula foram discutidas as atividade deixadas como tarefa extraclasse. A primeira atividade tratava de questões relacionadas à Didática da Matemática e à Formação do professor. Assim:

Questões para refletir:
1. Como você vê a Didática da Matemática como disciplina em um curso de Formação de Professores?
1. Para você, o que significa um professor bem preparado?
2. Em relação ao problema visto hoje, em sala de aula, se o professor o resolvesse simplesmente escrevendo na lousa a "sua" forma de resolvê-lo e, se os alunos, apenas copiassem essa escrita do professor, em seus cadernos, vocês acreditam que todos os alunos da classe teriam aprendido toda aquela matemática que a resolução do problema pode levar a construir através de sua resolução? Justifique.

Quanto às respostas dadas, observou-se, na primeira questão, que a maioria percebe a Didática da Matemática como uma disciplina que ensina métodos didáticos de como ensinar. Mas que, por outro lado, segundo o texto, leva o aluno a conscientizar-se do seu papel como futuro professor, que mostra a importância de se refletir sobre o ensino-aprendizagem da matemática e que faz com que os alunos procurem desmistificar o que pensam sobre a matemática.

Quanto à segunda: a maioria acredita que um professor bem preparado é aquele que deve ter o conhecimento da Matemática, o conhecimento didático, que saiba planejar suas aulas, que busque novos "conhecimentos" (de uma forma geral), que saiba desenvolver, no aluno, sua capacidade crítica, que saiba desenvolver a autonomia do aluno e que saiba motivar os alunos.

Quanto à terceira, todos foram unânimes em dizer que acreditam não ser correto o professor apenas colocar a resolução na lousa, porque, segundo eles, só copiar não significa que houve aprendizagem, como também tiraria a oportunidade do aluno refletir. Outra resposta é que os alunos aprenderiam "mecanicamente", sem direito a verificar e discutir suas opiniões e os processos que o levaram ao resultado.

A segunda atividade deixada como tarefa extraclasse foi a seguinte situação-problema:

Situação-problema:
Numa divisão, qual é o número que é o quíntuplo de 32 e o resto é o maior possível?
1) Como vocês trabalhariam esse problema com uma criança, com um jovem, com um colega, de modo a levá-lo a resolver?
2) Que conhecimento prévio deve-se ter para poder resolvê-lo?

Algumas soluções apresentadas pelos alunos:

i) $160 + c$, $\{c \in IR,\ 0 < c < 5\}$ *Ou* $160 + 4$, *onde 4 é um inteiro menor que 5.*

Este aluno não se deu conta de que ser múltiplo de natural leva a natural, não percebendo que se está trabalhando apenas com números naturais.

ii)

$$5x = 32$$

$$x = \frac{32}{5} \qquad \Rightarrow x = 6, \quad \text{com resto} \ \ r = 2$$

Não interpretou o problema corretamente.

iii)

$$\begin{array}{l|l} 32 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \\ \downarrow & \\ \text{Resto} & \end{array}$$

Inverteu a ordem da operação.

iv)

$$D = d \times q + r$$

$$D = 32 \times 5 + r$$

$$D = 160 + r\ ;\ r \rightarrow 32$$

Trabalhou bem o conceito de divisão mas, ao pensar no resto, pensou no universo numérico dos números reais.

Ao escrever $r \rightarrow 32$, a professora-pesquisadora interfere perguntando o que significava essa representação. Disse o aluno que o resto estava tendendo para 32. A professora voltou a perguntar o que significava isso para uma criança nas séries iniciais, quando se trabalha apenas com o conjunto dos números naturais. E o aluno responde dizendo que, nesse caso, o maior resto é o número 31.

As resoluções apresentadas em (ii) e (iii) têm a mesma solução, o que diferencia uma resolução da outra é o conhecimento utilizado, o conhecimento conceitual e o procedimental, respectivamente.

Na segunda questão, o que ficou evidente, nas respostas apresentadas pelos alunos é que, para se trabalhar o problema dado, seria necessário que o aluno tivesse bem definido em sua mente o conceito de adição, multiplicação e divisão e o conceito de quíntuplo, sendo que, ao trabalhar divisão, os conceitos mais importantes são o da multiplicação e o da subtração, pois a divisão é a operação inversa da multiplicação e a subtração é a tiragem de certas quantidades do total.

A professora aproveitou este momento para relembrar o significado de conhecimento conceitual e de conhecimento procedimental, estabelecendo a relação que há entre os modelos matemáticos que representam um objeto e esses tipos de conhecimento. Reforçou dizendo que o conhecimento conceitual é aquele que é compreendido, que consiste em ricas relações ou redes de idéias. Idéias como: sete, retângulo, unidade, dezena centena, valor posicional, soma, produto, equivalência, razão e número negativo, são todos exemplos de relações ou conceitos matemáticos. O conhecimento procedimental (processual) é o conhecimento das regras e dos procedimentos utilizados para executar tarefas matemáticas e também do simbolismo usado para representar as ideias matemáticas.

Tudo o que se vê com seus próprios olhos são os objetos físicos; apenas a nossa mente pode impor a relação matemática sobre os objetos, como disse Thompson apud Van de Walle (2009, p.51). Podemos dizer que o modelo matemático, também chamado *padrão*, é a idéia que se tem para representar um objeto do mundo físico. Ou melhor, um modelo para um conceito matemático se refere a qualquer objeto, figura ou desenho que represente o conceito sobre o qual a relação para aquele conceito pode ser imposta (VAN DE WALLE, 2009, p. 51). O modelo manipulativo ou materiais concretos para modelar conceitos matemáticos são ferramentas importantes para ajudar os alunos a fazer e aprender Matemática e, para isso, é preciso que o professor tenha uma boa perspectiva sobre como os materiais concretos podem ajudar, ou não, os alunos a construírem novas ideias.

Um aluno, mostrando ter compreendido a explanação da professora-pesquisadora, interferiu dizendo:

- Uma pessoa pode falar português sem saber as regras da gramática, agora para ela saber falar o português fluentemente ela tem que saber os conceitos que a gramática aplica (sujeito, predicado). A mesma coisa é com a matemática. Se uma pessoa conhece o conceito de divisão, multiplicação, os conceitos mais avançados, maior igual, menor igual, ela pode

praticar a matemática. Mas, para fazer cálculos mais avançados, pra ir mais além, há uma necessidade dos conhecimentos procedimentais.

Aproveitando a fala do aluno, acrescentamos que deve haver uma interação entre o conhecimento conceitual e o procedimental. Do ponto de vista da aprendizagem matemática, a pergunta de como os procedimentos e as ideias conceituais podem estar interligados é muito mais importante do que a utilidade do próprio procedimento (HIEBERT, apud VAN DE WALLE, 2009).

Depois de toda essa discussão sobre os tipos de conhecimento, a professora brevemente apresentou a teoria sócio-cultural de aprendizagem de Vygotsky, na qual ele abordou a interação social como um componente essencial no desenvolvimento do conhecimento.

A professora-pesquisadora voltou a chamar a atenção de que para uma aula de Matemática é preciso que o professor tenha feito seu planejamento antes, precisa estabelecer objetivos para a aula que, neste caso aqui, é o conceito de divisão. E se o professor percebe que o conceito ficou bem definido então ele já pode trabalhar com o conhecimento "procedimental", por exemplo, falar dos termos da divisão, dando-lhes nomes, usar o algoritmo da divisão e falar do padrão matemático que envolve esses termos, enfim, que o professor, no final de todo o processo de resolução do problema, faça a formalização dos conceitos relacionados a ele.

Nesta aula houve muita a participação da professora, pois a mesma julgou necessário analisar as dificuldades que os alunos sentiam ao resolver problemas devido à falta do conhecimento conceitual das operações, uma vez que a maioria dos alunos chegou às operações matemáticas apenas trabalhando seu algoritmo.

Foram deixados, como tarefa extraclasse, os textos: "*Um ensino-aprendizagem eficiente de Matemática*" (Van de Walle, 2001, p.1) e "*A Didática da matemática no curso de formação de professores*" de Zaíra da Cunha Melo Varizo (2006) para leitura, interpretação, reflexão e discussão no próximo encontro.

6º Encontro: A Didática da Matemática na formação de professores

Era nossa intenção, no decorrer da disciplina, fazer os alunos conscientes da importância da didática num curso de Licenciatura, capacitando-os a conduzir os seus futuros alunos na busca de sua aprendizagem. Entretanto, não se pode esquecer de deixar bem claro que, para esses futuros professores, a importância de se ter o conhecimento matemático seja o de ordem primeira.

Varizo (2006) diz em seu texto: “A Didática da Matemática no curso de formação de professores” *que a Didática da Matemática é a pedra basilar da formação do professor dessa área, uma vez que ela oferece condições básicas para tornar um determinado conhecimento matemático passível de ser apropriado pelo aluno.*

Sabe-se que há muitas divergências quanto a essa posição. Pergunta-se: - Quem é mais importante: o conhecimento matemático ou o conhecimento didático? A nós nos parece que eles se complementam e essa posição, acreditamos, é também assumida por D’Amore e outros mais.

Esse encontro iniciou-se com a reflexão e discussão do texto da autora Varizo (2006), onde ela faz um breve estudo do surgimento da Didática, reconstruindo a trajetória da Didática Geral e da Didática da Matemática e discute a importância dessa disciplina para o futuro professor de matemática.

Dessa discussão houve o consenso de que, sem dúvida, a Didática da Matemática é uma disciplina fundamental para a formação do professor. No entanto, a professora-pesquisadora ressaltou que o conhecimento matemático torna-se imprescindível na formação do professor e, assim, o conhecimento didático e o conhecimento matemático subsidiarão o professor para que ele faça com que o aluno compreenda a matemática e perceba a sua importância.

Ressalte-se aqui a opinião de um aluno que disse acreditar que as disciplinas de Didática, Geral e da Matemática, deveriam ser trabalhadas por professores de matemática, sendo que normalmente são trabalhadas por pedagogos.

De fato, essa posição do aluno nos leva a crer que, se a Didática da Matemática, em um curso de Licenciatura, for trabalhada por um profissional ligado à Educação Matemática, por possuir, além do conhecimento matemático, conhecimentos didático-pedagógicos, os alunos, poderão ser conduzidos a refletir e a pesquisar sobre questões teóricas e metodológicas sobre a prática docente em matemática, contribuindo, dessa forma, para o desenvolvimento profissional desse futuro professor.

Passou-se à análise do segundo texto: "Um ensino-aprendizagem eficiente de matemática" de autoria de Van de Walle (2001). O texto mostra os quatro componentes básicos que, segundo o autor, são necessários para que professores de matemática sejam verdadeiramente eficientes em seu trabalho de ensinar: apreciar a disciplina matemática por si mesma, ou seja, saber fazer matemática; ter uma compreensão de como os alunos aprendem matemática; ter habilidade em selecionar tarefas, de modo que os alunos aprendam matemática num ambiente de resolução de problemas e integrar a avaliação ao processo de ensino para aumentar a aprendizagem e melhorar o ensino.

Nessa conversa um aluno perguntou à professora: - *O que significa "fazer matemática?"* A professora lhe disse que fazer matemática é o que o aluno faz quando, diante de uma situação problema, consegue refletir, explorar, argumentar, conjecturar, verificar e desenvolver a matemática. Por exemplo, quando se está diante de uma equação do segundo grau e já se conhece o procedimento usado para resolver essa equação, não significa que se está fazendo matemática e, sim, empregando apenas procedimentos já conhecidos e recomendados para sua prática.

Num segundo momento desse encontro foi trabalhada a seguinte situação problema:

Situação problema:
Em 47 quantos 7 há?

que tinha por objetivo reconstruir novos conceitos e novos conteúdos.

Ao receberem esse problema os alunos começaram a interpretá-lo se posicionando da seguinte forma: *- Acho que é pegar 7 mais 7 mais 7 até chegar em 47; há um 7; quantas vezes o 7 cabe no 47...*

Ao observar os grupos trabalhando de forma cooperativa e colaborativa, a professora presenciou discussões como:

- Se pensarmos em quantos 7 há de 0 a 47, há 5 setes.
- Que 47 é esse? Essa pergunta do problema é tendenciosa, dá a entender que o problema tem vários resultados, foram surgindo.

De fato, há varias interpretações para esse problema. No entanto, o que se pretendia com ele era reconstruir o conceito de divisão utilizando o processo de subtração sucessiva, como também, a multiplicação.

Algumas resoluções apresentadas pelos grupos na lousa:

Grupo A:

$$\begin{array}{r|l} 47 & 7 \\ \cline{2-2} 5 & 6 \end{array}$$

Resp: Em 47 cabem seis grupos de 7.

Como esses alunos mais recentemente trabalharam com números reais, parece que acreditavam que, na universidade, não se lhes poderia pedir a resolução de problemas envolvendo apenas números naturais.

O **Grupo B** levantou as seguintes considerações:

- Como se trata de números totalmente abstratos, não temos uma resposta. Gerou dúvida e várias respostas. 1) pensando na representação do número real 47, há apenas um 7; 2) pensando no processo de contagem do zero ao 47, temos 0,7; 0,07; 0,77; 1,7;...há infinitos 7; 3) na possibilidade de usar a operação de divisão, há seis 7.

E, no grupo C, foi dito

- Analisando através da pergunta, achamos que o número 47 é uma representação numérica, então concluímos que no número 47 há um 7.

Na Plenária, houve uma discussão intensa sobre esse problema e uma participação efetiva de toda a classe. As diferentes posições foram discutidas e alguns alunos foram defendendo suas respostas.

Possivelmente, a leitura e interpretação errônea que os alunos deram a esse problema estejam associadas à ausência de um trabalho específico com o texto do problema. A falta de compreensão de um conceito envolvido no problema, o uso de termos específicos da matemática que, portanto, não fazem parte do cotidiano do aluno e até mesmo palavras que têm significados diferentes na matemática e fora dela podem constituir-se em obstáculos para que ocorra a compreensão (SMOLE e DINIZ, 2001).

Depois de toda exploração desse problema na Plenária, buscou-se chegar a um consenso com a professora na lousa e chamou a atenção dos alunos para as diferentes apresentações.

Assim, pensando na divisão e subtração sucessiva, escreveu-se

47	40	33	26	19	12
-7	-7	-7	-7	-7	-7
40	33	26	19	12	5

então, pôde se constatar que o 7 coube em 47, seis vezes.

Nesse momento, um aluno interveio mostrando sua resolução na lousa, examinando a divisão a partir da tabuada dos sete que, explicando disse que 47 está entre 42 e 49, e portanto, há seis 7.

1 x 7 = 7	5 x 7 = 35
2 x 7 = 14	6 x 7 = 42
3 x 7 = 21	7 x 7 = 49
4 x 7 = 28	

Finalizando essa discussão, depois de chegarem a um consenso quanto à solução do problema, a professora-pesquisadora instigou os alunos a pensarem nos conteúdos que poderiam ser trabalhados a partir desse problema e em que série poderia ele ser aplicado. Viram que seria a divisão e que poderia também ser vista por meio de subtrações sucessivas.

Foi feita a entrega da tarefa extraclasse, que incluía dois novos problemas.

7º Encontro: Sobre currículo, conteúdo e metodologia

O objetivo deste encontro foi o de apresentar e discutir documentos curriculares, dentre eles, os PCN, os Standards 2000 e as Diretrizes Curriculares para o curso de Licenciatura, como também apresentar diferentes metodologias para se trabalhar matemática em sala de aula.

Começando pela tarefa extraclasse discutiram-se os seguintes problemas:

Situação problema:

Em $\frac{5}{6}$ quantos $\frac{2}{3}$ há? Considerando-se $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{3}$ como frações.

Uma família de 27 pessoas resolveu fazer um passeio a um Parque

Nacional. Telefonaram para lá a fim de reservar acomodação para todos. Souberam que alugavam chalés que comportavam 4 pessoas. Quantos chalés precisam alugar?

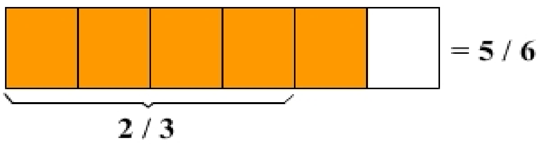
Algumas resoluções apresentadas pelos alunos quanto ao primeiro problema:

$5/6 \div 2/3 = 5/6 \times 3/2 = 15/12 = 5/4 = 1\ 1/4$

$5/6 - 2/3 = 1/6$

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

4)



$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \text{ pois } \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}.$$

Então, 2/3 coube uma vez e sobrou 1/6.

Foi percebido pelos alunos que, neste problema, a idéia era a mesma do problema anterior. O que mudava era apenas a técnica operatória, já que agora se tratava de trabalhar com números racionais. Com essa idéia, pensaram que se podia fazer, também, a subtração sucessiva, como visto na resposta 2.

Nesse momento, a professora-pesquisadora entregou duas folhas de papel sulfite, de mesmo tamanho, e pediu a cada aluno que dividissem uma delas em seis partes iguais e a outra em três partes iguais. Pediu que as reduzisse respectivamente a 5/6 e 2/3. Por último, deveriam comparar os 5/6 com os 2/3. Ao colocarem 2/3 sobre 5/6 viram que sobrava 1/6 da folha uma vez e alguns alunos disseram que 2/3 cabiam em 5/6 uma vez e 1/6 . Mas, o que foi pedido era “quantas vezes” e a sobra de 1/6 da folha correspondia exatamente a ¼ da vez.

Então, a resposta é: Cabe 1 vez mais ¼ da vez, isto é, 5/4 da vez. Representando graficamente essa resolução se mostraria assim:

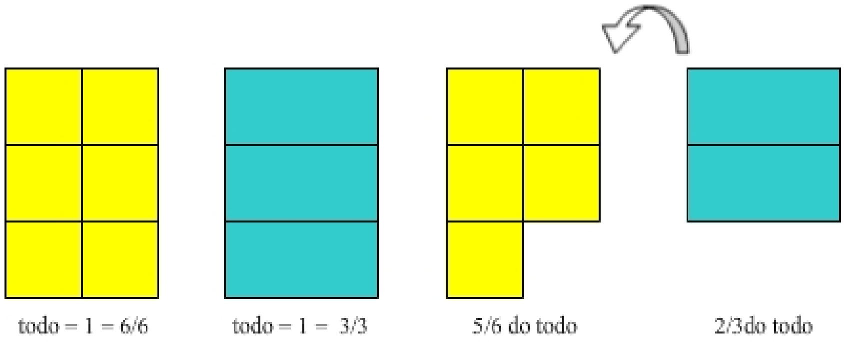


Figura 37– Divisão em partes iguais

Pondo os 2/3 sobre os 5/6, pode-se ver que os 2/3 couberam em 5/6 uma vez inteira, mas sobrou 1/6 do todo para ser coberto. Como 1/6 do todo = ¼ da parte, então 2/3 couberam em 5/6, 1 vez mais ¼ da vez = $1\frac{1}{4}$.

Outra análise feita sobre esse problema exigiu que se chamasse a atenção de que, nos números racionais, a divisão é sempre possível. Assim, em $\mathbb{Q}$ o resto da divisão é sempre zero. Logo, como já vimos, essa divisão pôde se apresentar na forma

$$\begin{array}{r|l} 5/6 & 2/3 \\ \cline{2-2} 0 & \quad q \end{array}$$

Portanto, $q \times 2/3 = 5/6$

Como o que se quer achar é somente o quociente, multiplicando-se 2/3 por seu inverso multiplicativo chega-se a 1. Mas, para manter a igualdade é necessário multiplicar-se também o segundo membro por esse mesmo número. Assim:

$$q \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{5 \times \cancel{3}}{{}_{2}\cancel{6} \times 2} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} \text{ (da vez).}$$

Depois de discutir essas diferentes formas de resolução na lousa, a professora-pesquisadora chamou a atenção dos alunos para aquela forma que, usualmente, é ensinada na maioria das salas de aula (*resolução 1*): ao dividir uma fração por outra, multiplica-se a primeira pelo inverso da segunda, sem que isso faça nenhum sentido para o aluno. Essa forma que faz uso do diagrama da divisão mostra isso rigorosamente.

Passando ao segundo problema, a primeira ideia dos alunos foi fazer a divisão de 27 por 4. Assim

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \hline 3 & 6 \end{array}$$

No momento em que se olha essa operação e se põe: *27* o quê? *4* o quê? *6* o quê? *3* o quê? Não se sabe, colocando todas as correspondentes unidades, responder corretamente a pergunta do problema: Quantos chalés deverão ser alugados?

Assim, colocando as devidas unidades nos termos da divisão

$$\begin{array}{r|l} 27 \text{ pessoas} & \underline{4 \text{ pessoas/chalé}} \\ -\ \underline{24 \text{ pessoas}} & 6 \text{ chalés} \\ 3 \text{ pessoas} & \end{array}$$

pois, $\dfrac{pessoas}{pessoas/chalés} = chalés$ e, também, $6\ ch. \times \dfrac{4p}{ch} = 24p.$

Concluindo, *27* pessoas distribuídas na forma *4* pessoas/chalé, significa, matematicamente $27 \div 4 = 6$ chalés completos e mais um chalé para abrigar as três pessoas restantes.

Como se pode perceber, o problema não precisa ser complexo para se "fazer matemática". Nesses simples problemas foram trabalhados conceitos de divisão: a relação fundamental da divisão, a análise dimensional ao considerar todas as unidades correspondentes na divisão; e até a proposição de novos problemas a partir do original. Por exemplo, se se perguntasse: quantos chalés ficariam com espaço disponível para mais alguém? Nesse caso, apenas descobrir o "resto" seria necessário.

Em outro momento da aula, foi entregue aos alunos o texto: "Sobre currículo, conteúdo e metodologia", de nossa autoria, para ser lido e discutido, a fim de que os alunos se posicionassem a respeito desses componentes curriculares.

A maioria dos alunos entendia um currículo como uma lista de conteúdos constantes da ementa de uma disciplina ou de um curso, isto é, o programa de ensino, os conteúdos ou a grade curricular. Mas, currículo é mais do que isso. Ponte, Matos e Abrantes (citado por

Canavarro e Ponte, 2005, p.64) fazem uma distinção entre currículo e programa curricular. Segundo eles

> [...] o currículo, num sentido mais amplo, pode ser identificado com tudo o que os alunos aprendem, seja como resultado de um ensino formal por parte dos professores ou através de processos informais e não previstos. Por outro lado, o programa refere-se, sobretudo, à sequência de tópicos de uma disciplina (conteúdos) que devem ser dados no respectivo ano ou ciclo.

E chamando a atenção dos alunos foi dito que, nos Standards 2000 "Um currículo é muito mais que uma coleção de atividades. Ele deve ser coerente, focado sobre a matemática importante, e bem articulado através das séries".

Ao falar dos programas curriculares existentes, sobretudo o dos PCN, a professora-pesquisadora percebeu que os alunos já sabiam da existência desses documentos, no entanto alguns deles teceram alguns comentários quanto a eles, dizendo: - *os PCN existem nas escolas, o que ele contém é muito bonito, perfeito, mas na prática, nem tudo que está escrito nesse documento é praticado nas escolas. Os professores não estão preparados para colocar em prática as recomendações nele contidas. Em geral, eles estão apenas nas prateleiras das escolas.*

Como última atividade deste encontro, foi dada, aos alunos, uma folha em branco para que eles desenhassem um professor de Matemática em seu trabalho, a fim de diagnosticar crenças que eles, futuros professores, trazem de seu professor (ou professora) de matemática e da própria matemática. Desses desenhos feitos pôde-se extrair que a maioria dos alunos tem, ainda, a concepção de que um professor de Matemática é aquele que está ali, diante da lousa, transmitindo o conteúdo e, os alunos recebendo, passivamente, esse saber. E, com muita matemática escrita na lousa. Além disso, pelos desenhos produzidos por esses alunos percebe-se que eles têm uma visão absolutista e instrumental da matemática, considerando-a como um acúmulo de regras, procedimentos, fórmulas e teoremas.

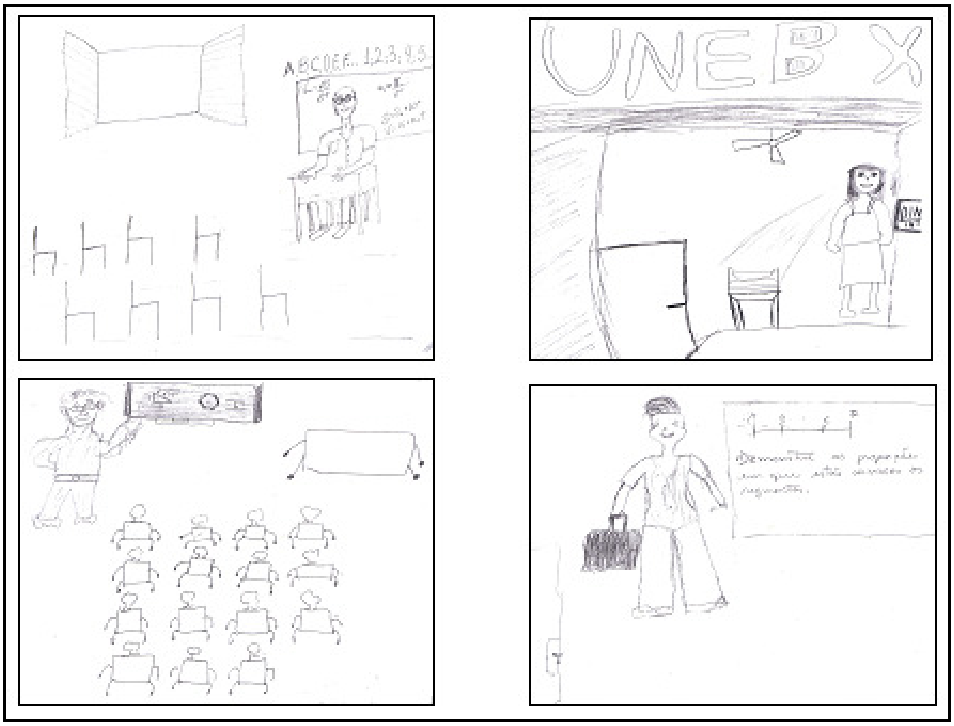


Figura 38– Desenho produzido pelos alunos sobre suas crenças em relação ao professor de Matemática

As crenças que esses futuros professores trazem consigo poderão influenciar em suas práticas docentes quando vierem a ensinar. Reconhecemos que mudar crenças no indivíduo não é tarefa fácil. Elas são lentas e processuais. Cabe ao formador de professores explorar atividades que possam ajudar a trazer crenças matemáticas dos professores de uma forma mais explícita, como sugerem Mewborn e Cross (2007)[56]. E por que não começar com essas atividades no curso de Licenciatura em Matemática, pois, através delas, o futuro professor tem a oportunidade de reconhecer suas crenças sobre a natureza e sobre a aprendizagem da matemática, levando-o, possivelmente a mudar suas concepções de modo a construir saberes docentes necessários à sua prática docente.

Sem mais comentários, foi entregue a tarefa extraclasse e finalizou-se este encontro.

[56] Para conhecimento dessas atividades ver o artigo: Mathematics Teachers' Beliefs about Mathematics and Links to Students'Learning (MEWBORNE e CROSS, p. 259-269). In: MARTIN, W.G.; STRUTCHENS, M.E.; ELILIOT, P.C. The Learning of Mathematics, sixty-ninth yearbook, NCTM, 2007.

8º Encontro: Sobre Resolução de Problemas

No texto deixado como tarefa extraclasse: “Resolução de problemas como um meio de construção de conhecimentos matemáticos” de Vânia Marincek, 2001, a autora enfatiza que a resolução de problemas é a essência da atividade matemática e que, problema, para ela, é toda situação em que os alunos precisam pôr em jogo tudo o que sabem, mas que ele contém também algo de novo, para o qual ainda não há resposta e que exige a busca de soluções. Os problemas são os disparadores da aprendizagem e o professor é o responsável por organizar as situações de maneira a garantir que o aluno avance na construção do saber.

Os programas curriculares atuais, a saber, os PCN também veem a resolução de problemas como um recurso matemático fundamental para o ensino da matemática. Resolver problemas não é uma atividade a ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Alguns alunos, ao opinarem sobre o texto, disseram:

- Os problemas, quando bem selecionados, são “peças fundamentais” para se adquirir a aprendizagem...

- Diante de um problema, além de se está usando conhecimentos prévios, você constrói outros.

- O professor tem que julgar se o problema que ele escolheu é adequado ou não para o conteúdo que ele quer ensinar...

E a professora-pesquisadora interferiu perguntando: - *O que também é importante, para o professor, além da escolha adequada de um problema?*

Disse um aluno: - *A maneira como o professor trabalha aquele problema, quando ele vai buscar onde está a deficiência do aluno. Onde o aluno está errando...*

Outra aluna disse: - *Tem professor que não espera o aluno questionar. Não deixa aluno pensar...*

Depois dessas reflexões e discussões, desejando ir um pouco além, a professora-pesquisadora perguntou aos alunos: - Então, o que é um problema para vocês? Surgiram as seguintes respostas:

- *Resultado de um cálculo onde a gente cria e não consegue sair; obstáculo, mas que na matemática a gente busca resolvê-lo; uma dificuldade que precisa encontrar um caminho; um meio que leva a pessoa a pensar; situação que permite à pessoa procurar raciocinar e* *escolher um modo de resolver; uma situação em que o aluno vai em busca e coloca na prática tudo aquilo que ele aprendeu.*

Refletindo sobre essas colocações, tudo o que outros pesquisadores nos disseram a respeito de problemas e de resolução de problemas serviu para que, ao trabalhar com os alunos, a resolução de alguns problemas nos levasse a refletir, com eles, o que era um problema e responder as seguintes questões: Qual a diferença entre um problema da vida e um problema matemático? Como descobrir estratégias que abrissem caminhos para poder resolvê-los? Qual a diferença entre resolução de problemas e solução de um problema?

Essas e outras questões foram discutidas a fim de que os alunos percebessem a matemática que se pode construir enquanto se resolve um problema e como o "pensar matemático" e o "fazer matemática" podem ajudar o cidadão a saber tomar decisões na vida.

O fato de levar o aluno a pensar, a buscar caminhos e saber se expressar todas as vezes que questões se colocaram, permitiu que o aluno visse o problema e sua resolução com outros olhos, tirando para si mesmo suas próprias conclusões no que se refere a saber, a tomar decisões e de se estar preparado convenientemente para exercer um dia sua importante função de professor.

Aproveitando esse momento de discussão e análise das posições emitidas pelos alunos sobre o que significa um problema, a professora distribuiu aos alunos a seguinte atividade:

Situação problema: Os cavalinhos e os cavaleiros

Em três pedaços de papel há dois cavalos e dois cavaleiros. Sem dobrar, nem rasgar nenhum deles, pede-se que sejam colocados, simultaneamente, os dois cavaleiros sobre os dois cavalos.

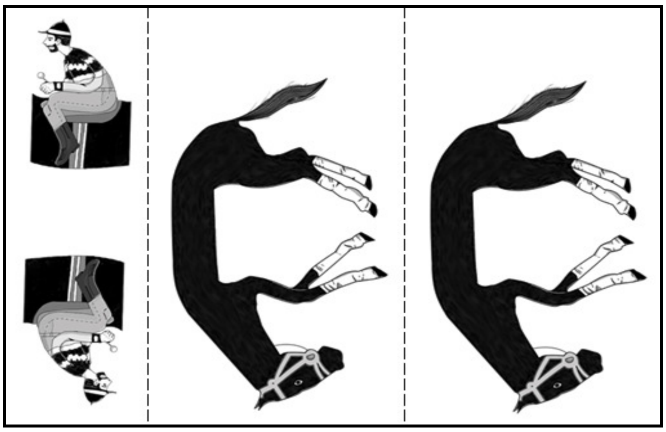


Figura 39– Os cavalinhos e os cavaleiros

Esperava-se, com esse problema, que os alunos soubessem relacionar o que eles entendiam por problema e o que de fato é um problema. E a pergunta natural da pesquisadora seria: Isso é um problema para você? Por quê? Outras surgiriam: Como enfrentá-lo? Há solução? O que fazer para chegar a ela?

Um aluno disse: - *Sim, pois eu ainda não sei como resolvê-lo. Preciso pensar...*

E os alunos puseram-se a pensar no problema por algum tempo, quando um dos alunos, depois de várias tentativas, em sua “esperteza”, conseguiu chegar à solução, passando-a para outros colegas, não lhes dando oportunidade de refletirem sobre o problema. E, como é natural, assim que um deles disse que havia resolvido o problema, imediatamente, buscaram saber dele como havia chegado à sua solução. Com essa atitude do aluno “resolvedor” e dos demais “seguidores” houve uma interrupção no trabalho daqueles que ainda não o haviam resolvido.

Com esse acontecimento, o objetivo que a professora-pesquisadora tinha para essa atividade foi perdido, pois um problema, como já foi dito na página... “é tudo aquilo que não sei fazer mas que estou ‘interessado’ em resolver”. Conhecendo a solução, desapareceu o interesse em resolvê-lo. Portanto a atividade “Cavalinhos e cavaleiros”deixou de ser um problema para eles.

Dando continuidade à aula, foi distribuído para os alunos o texto: “Diferenciação entre um trabalho com resolução de problemas em uma metodologia tradicional e em uma metodologia alternativa” (texto de nossa autoria). Deu-se-lhes um tempo para refletir sobre o que estavam lendo. Partindo para a discussão do texto alguns alunos se manifestaram dizendo:

- Acho difícil um professor “mais velho”, com mais tempo na profissão, mudar a sua metodologia de ensino....

- O texto deixa transparecer que a metodologia tradicional é errada ... Sou a favor da metodologia tradicional, pois se aluno não trabalha a matemática de forma mecânica ele não aprende...

Nota-se, nas colocações desses alunos, que houve uma compreensão duvidosa do que o texto quis dizer. Percebe-se que ainda estão muito convencidos de que por meio da metodologia tradicional, pode-se chegar à aprendizagem.

A professora-pesquisadora, diante desse fato, pôde dizer que com a mecanização dos procedimentos trabalhados, na maioria das vezes o aluno “sabe” fazer a atividade mas não consegue justificar porque trabalhou daquela forma.

Dentro de uma metodologia alternativa, onde há o propósito de o aluno saber pensar sobre a estratégia a ser utilizada na resolução de uma atividade, faz-se uso também, e é importante, da memória, mas depois que o entendimento tenha se dado. Advogamos problemas de fixação num número suficiente e com algumas variações do problema original. Além disso, estender o problema a casos mais complexos é também defendido por nós.

Finalizando o encontro, a professora entregou a tarefa extraclasse.

9º Encontro: Sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

No oitavo encontro foi trabalhada a resolução de problemas como uma atividade essencial para a construção do conhecimento matemático. Agora, neste novo encontro, pretendemos mostrar uma metodologia alternativa de trabalho para a sala de aula, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Essa metodologia que tem como meta melhorar os processos de ensino e consequentemente da aprendizagem, assim como promover o aprimoramento das práticas dos professores no contexto da sala de aula de Matemática.

Para atingir esse objetivo, nosso encontro começou com a discussão da situação problema deixada como tarefa extraclasse, que se apresentou assim:

> **Situação problema:**
> Thiago tinha 20 moedas em seu bolso. Algumas eram de R$ 0,25 e o restante eram de R$ 0,10. No total ele tinha R$ 3,05. Quantas moedas de cada tipo ele tinha no bolso?

Alguns alunos foram à lousa e expuseram as suas resoluções em diferentes apresentações:

1) *Por meio de subtrações sucessivas:*

3,05	2,30	1,55
- 0,25	- 0,25	- 0,25
2,80	2,05	1,30
- 0,25	- 0,25	
2,55	1,80	
- 0,25	- 0,25	
2,30	1,55	

Como existem moedas de R$ 0,10, então R$ 1,30 corresponde a 13 moedas de R$ 0,10. Logo, teremos 7 moedas de R$ 0,25 e 13 moedas de R$0,10.

Por sistema de duas equações a duas incógnitas (a maioria resolveu dessa forma, usando a álgebra como ferramenta)

$$\begin{cases} x + y = 20 & (\times 100) \\ 0{,}25x + 0{,}10y = 3{,}05 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 & \times(\text{-}10) \\ 25x + 10y = 305 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10x - 10y = -200 \\ 25x + 10y = 305 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcl} 15y = 105 & & x = 20 - y \\ y = 7 & \Rightarrow & x = 20 - 7 \quad \Rightarrow \quad x = 13 \end{array}$$

2) *Construindo relação de possibilidades*

Levando em consideração que R$ 3,05 ÷ R$0,25 corresponde a 12 moedas de 25 centavos mais uma moeda de 5 centavos. Então, o máximo de moedas de 25 centavos seria 11. Por essa mesma lei teríamos no mínimo 9 moedas de 10 centavos. Então:

$11 \times 0{,}25 + 9 \times 0{,}10 = 1{,}25 + 0{,}90 = 2{,}15 \neq 3{,}05$. (houve um erro de cálculo)

Assim, é necessário aumentarmos o número de moedas de 10 centavos e diminuirmos o número de moedas de 25 centavos. E construiu uma tabela

Moedas de R$0,25	Moedas de R$ 0,10	Soma
10	10	2,50 + 1,00 = 3,50
9	11	2,25 + 1,10 = 3,35
8	12	2,00 + 1,20 = 3,20
7	13	1,75 + 1,30 = 3,05

Quadro 8 – Total de moedas de R$ 0,10 e R$ 0,20

4) *Fazendo uma previsão de moedas e considerando as desigualdades construiu a tabela*

Se $1 \leq$ R\$ 0,25 ≤ 11 e $1 \leq$ R\$ 0,10 ≤ 28,

R\$ 0,25	R\$ 0,10	Total de moedas	Valor
1	28	29	0,25 + 2,80 = 3,05
3	23	26	0,75 + 2,30 = 3,05
5	18	23	1,25 + 1,80 = 3,05
7	13	20	1,75 + 1,30 = 3,05
9	8	17	2,25 + 0,80 = 3,05
11	3	14	2,75 + 0,30 = 3,05

Quadro 9 – Total de moedas de R\$ 0,25 e R\$ 0,10

A cada duas moedas de R\$ 0,25 centavos, a diferença é de 5 moedas de R\$ 0,10.

Analisando a resolução do aluno, nota-se que na desigualdade que essa comparação, devia para ele, expressar a própria moeda com os possíveis números inteiros com que eles poderiam ser utilizados. Na primeira coluna considerou a possibilidade de haver um número ímpar de moedas de R\$ 0,25, uma vez que com moedas de R\$ 0,10 sempre haveria múltiplos de R\$ 0,10, onde apesar de todas as situações respeitarem a condição de o total ser R\$ 3,05, o número total de moedas variaria e apenas uma, $7 \times 0{,}25 + 13 \times 0{,}10$, iria atender as duas condições.

A professora-pesquisadora notou que grande parte dos alunos não teve dúvida quando, ao resolverem esse problema, usaram sistema de duas equações com duas incógnitas. É natural, pois já se encontram num curso superior e vêem essa estratégia a mais confortável. Por outro lado, como ela estava sempre querendo levá-los a refletir sobre a forma com que eles poderiam trabalhar determinados problemas com alunos até das séries iniciais e que, portanto, não conhecessem ainda a álgebra, foi possível perceber que nas resoluções (3) e (4), nesse modo, alunos das séries iniciais poderiam ser atendidos. Essas resoluções são bastante interessantes, pois elas mostram o "pensar matemático" do aluno que possibilita compreensão muito mais do que quando apenas se usa conhecimentos teorizados que dizem como se deve fazer.

Na verdade, é esse "pensar matemático" que queremos. Ao trabalhar através da resolução de problemas, pretendemos que nossos alunos coloquem todo o seu "pensar" e que, a partir de um trabalho cooperativo e colaborativo, se engajem, discutam e analisem todo o processo de resolução e que, também, sejam co-construtores de seu próprio conhecimento, a fim de que possam desenvolver suas habilidades metacognitivas.

Após toda essa discussão sobre o problema e tendo chegado a um consenso, a professora-pesquisadora disse aos alunos que se pode fazer muita matemática a partir da resolução desse problema, isso depende da série em que se pretende trabalhar com ele. Esse problema envolve números decimais e suas operações, equações e sistema de duas equações a duas incógnitas, construção de tabelas e muita tentativa e erro. É, ainda, um problema em que se pode reconhecer padrões matemáticos.

No segundo momento da aula, a professora-pesquisadora distribuiu para cada aluno os textos: "Ensinando através da Resolução de Problemas" e "*O papel do professor na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas*". Textos de nossa autoria, fundamentados em Van de Walle, 2001.

Foi feita a leitura do primeiro texto por professora e alunos. Esse texto tinha a intenção de fazer com que esses futuros professores vissem a resolução de problemas como uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática. A compreensão em matemática pode se dar através da resolução de problemas, levando os alunos a perceber que a matemática construída por eles tem sentido. Pôde-se notar que as ideias colocadas no texto foram significativas para os alunos quando eles disseram:

- O professor tem que apresentar um problema de uma maneira mais acessível ao aluno, que o envolva e que o aluno veja sentido naquilo, que ele goste do que está fazendo, assim, ele acaba se envolvendo naquela tarefa. Por exemplo, aquele quebra cabeça de ontem, todos ficaram envolvidos, apesar de uns colarem de outros ... Mas, de uma certa forma ficaram envolvidos.

- Muitos alunos, às vezes, quando o professor é bom e explica bem, chama a atenção do aluno, se espelham no professor, de certa forma, para dar sua aula. Ele diz: gostei dessa metodologia do professor, vou usar ela. Mas, isso acontece com aquele professor que envolve o aluno.

- A matemática feita através da resolução de problemas fará com que o aluno veja que ela tem significado em sua vida, no seu dia a dia.

- Vejo a educação em um momento crítico. Essa nova visão que se está tendo da matemática ser ensinada através de resolução de problemas não é de efeito imediato, de curto prazo. Então, seriam necessárias algumas ações imediatas para mudar o quadro atual em que se encontra a educação. Percebo que a resolução de problemas é um caminho ... Será que os professores que estão atuando agem assim? Não é que eles não tenham essa visão,

mas será que eles estão preparados para verem a resolução de problemas como um instrumento eficaz que eles possam aplicar em seu trabalho?

A maioria dos alunos se manifestou dizendo ser favorável a esse tipo de trabalho, alertando que o trabalho em grupo deve ser conduzido de maneira bastante dinâmica, levando os alunos a se interessarem pelo que estão produzindo, para que não aconteça de um colega se apoiar em outro, não participando ativamente desse trabalho cooperativo.

De fato, em um trabalho de grupo todos devem estar engajados. Trata-se de um trabalho em equipe, com um objetivo em comum: resolver problemas. Cabe ao professor estar predisposto para criar condições que possam levar os alunos a trabalhar em conjunto, saber ouvir o aluno e intervir corretamente. Nesse tipo de trabalho o professor passa a ser um mediador, além disso, ele precisa não só saber muita matemática como ter, bem claros, os objetivos que ele deseja atingir.

O segundo texto: "*O papel do professor na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas*" objetiva mostrar as três fases apresentadas por Van de Walle (2001): *Antes*, *Durante* e *Depois*. A *Antes* é a de preparação da aula pelo professor, a *Durante* é aquela em que a atividade é entregue aos alunos, individualmente. Em seguida, em grupo, o problema deve ser lido, interpretado e resolvido. Na terceira fase, *Depois*, quando se faz a Plenária, a exploração do problema por professor e alunos, como um único bloco, passa então, o professor a formalizar todo o novo conteúdo construído e toda a matemática que estiver relacionada a ele.

Alguns questionamentos, por parte dos alunos surgiram quanto a essas fases e, então, a professora teve que, numa atitude de orientador e interventor, dar um melhor esclarecimento aos dizeres do texto.

Terminada a discussão do texto, a professora entregou a tarefa extraclasse e durante essa entrega, um aluno se dirigiu à professora e disse que estava gostando das aulas, pois elas têm feito refletir mais sobre conceitos e conteúdos que já haviam sido trabalhados.

E aqui finaliza-se mais um encontro...

10º Encontro: Aplicações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Depois de se ter apresentado aos alunos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pretendíamos, neste encontro, trabalhar com ela, onde o problema é o ponto de partida e de orientação para a aprendizagem e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professores e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho e a aprendizagem deve se realizar de modo cooperativo e colaborativo em sala de aula.

Este encontro começou com a discussão da tarefa extraclasse, onde os alunos, ao retomarem o texto: "*O papel do professor na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas*", puderam refletir sobre as seguintes questões:

1. Você já teve a oportunidade de "dar" uma aula utilizando resolução de problemas? Se sim, como foi essa experiência? Se não, como você agiria?

2. E o seu aluno, como você vê qual é o seu papel diante de uma aula com resolução de problemas?

Como a maioria dos alunos ainda não havia tido experiências em sala de aula, era de se esperar que a resposta à primeira questão seria "não". De fato, apenas duas alunas disseram ter tido essa experiência, uma ao ministrar "aulas particulares" e outra quando ministrou algumas aulas numa escola.

Quanto à sua atitude ao "dar" esse tipo de aula, alguns alunos disseram que trabalhariam primeiramente o conteúdo matemático, focando bem o conceito básico daquele conteúdo para, logo depois, com os alunos já familiarizados com o assunto, apresentar o problema, deixando que os alunos o resolvessem e auxiliando quando necessário. A professora-pesquisadora entendeu que esses alunos estavam mostrando que trabalhariam com seus alunos da forma como eles foram trabalhados, isto é, na linha tradicional.

Um dos alunos ainda acrescentou: - *Não aceitaria qualquer resposta, mesmo que estivesse correta. O caminho a ser seguido pelo aluno deverá ter coerência e ser genérico.* Essa colocação, um tanto vaga, exigiu uma reflexão da professora-pesquisadora, que, querendo torná-la mais compreensível disse que não bastaria apresentar as respostas somente mas que essas deveriam ser dadas de uma forma coerente ao apresentar o processo de resolução.

Outros procuraram agir segundo o roteiro, encontrado no texto lido, para trabalhar com resolução de problemas. A opinião de um desses alunos seria então:

- Preparar a aula destacando qual é o foco pretendido para essa aula; quais as estratégias que poderão ser adotadas para resolver o problema; levar o enunciado do problema; formar grupos e entregar a atividade para cada aluno, e dar tempo para a leitura individual; pedir aos alunos que resolvam o problema; dar atenção às perguntas feitas e intervir se for necessário. Definir o tempo, depois pedir a um aluno que resolva, no quadro, o problema; discussão em plenária e buscar um consenso a respeito da atividade dada.

Percebe-se, na fala desse aluno, que ele mistura um pouco a ordem dessas construções, lidas no texto, e não consegue chegar à formulação teórica própria da nova matemática construída.

Reportando-se à 2ª questão, a maioria disse que, uma vez que se trabalhe com a metodologia alternativa que se lhes está apresentando, os alunos devem ter uma participação ativa, que saibam expor suas idéias e que sejam construtores de seu próprio conhecimento, sendo que um aluno disse que cada membro do grupo tem o papel de ajudar o grupo. Segundo ele, todos os componentes do grupo devem participar, mesmo que copie do colega, ou pelo menos entender o que o colega fez. Já outro aluno, discordando do trabalho em grupo disse o seguinte: *- Vivemos num país democrático. Nós, professores, não fomos, não somos e nunca seremos "diagramadores", apesar de robotizados, não somos "robôs".* Sem comentários, essa colocação não atraiu os colegas.

Desde o início dos anos 90 uma versão de um roteiro de atividades para se trabalhar matemática através da resolução de problemas foi criado por Onuchic e somente por ela publicado em 1999 no livro "Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas". Querendo apresentar aos alunos esse roteiro, agora em uma nova versão, em prosseguimento à aula, a professora-pesquisadora entregou a cada aluno o texto: "A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas" de autoria de Onuchic e Allevato (2008). Nesse texto as autoras apresentam essa nova versão destinada a dinamizar uma aula trabalhada através da resolução de problemas.

O texto foi lido pelos alunos e a professora-pesquisadora, junto com os alunos, conduziu essa leitura explicando cuidadosamente a sequência de atividades a fim de que os alunos, futuros professores, pudessem conhecer e até desenvolver seu trabalho, em futuras salas de aula, como um caminho para se ensinar e aprender matemática, onde o professor como guia faz com que os alunos aprendam participando da co-construção de seu próprio conhecimento.

A partir deste encontro essa metodologia foi aplicada em problemas aritméticos, algébricos e geométricos. Para isso, dando continuidade à aula, a professora-pesquisadora falou sobre os principais ramos da matemática: Aritmética, Álgebra e Geometria. Depois de toda essa explanação distribuiu a cada aluno o seguinte problema:

Situação problema – As abdominais

Como parte de seu programa de ginástica, Beto decidiu fazer abdominais toda manhã. No dia 1º de abril ele fez apenas uma; no dia 2 de abril fez três abdominais; no dia 3 de abril fez cinco e no dia 4 de abril fez sete. Suponha que Beto tenha continuado a aumentar o número de abdominais a cada dia, seguindo esse mesmo padrão durante todo o mês de abril. Quantas abdominais ele fez no dia 15 de abril? Quantas abdominais ele fez até o dia 15 de abril?

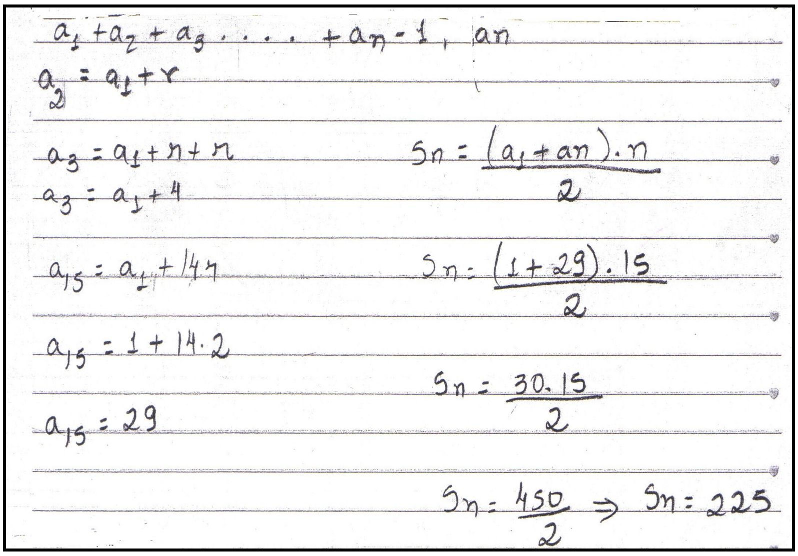
Os alunos, em grupos, colocaram-se a resolver o problema. A professora-pesquisadora passou a observar o trabalho realizado por cada grupo e percebeu que, de início, cada aluno começou a resolver o problema sozinho. Só depois é que houve a interação, quando surgiram as dúvidas. Os grupos perceberam que o problema poderia ser resolvido usando a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética, P.A., para a primeira pergunta e a Soma dos Termos de uma P.A. para a segunda pergunta. Foi, a partir daí, que surgiram os problemas secundários, pois não se lembravam das fórmulas. A professora, depois de uma série de questionamentos a respeito da fórmula ao termo geral de uma P.A., interveio explicando como eles poderiam chegar a essa fórmula e deixou que eles a construíssem chegando a

$$a_n = a_1 + (n - 1)\times r$$

Da mesma forma foi trabalhada a fórmula da soma dos termos de uma P.A, chegando eles a

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\times r}{2}$$

Dado um tempo para a resolução do problema, a professora passou para a outra etapa que foi a do registro das resoluções, feitas nos grupos, na lousa. Todos os grupos usaram a fórmula do Termo Geral de uma P.A.e a fórmula da Soma dos Termos de uma P.A., chegando assim, à solução do problema.



$a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_{n-1}, a_n$

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_1 + r + r$

$a_3 = a_1 + 4$

$a_{15} = a_1 + 14r$

$a_{15} = 1 + 14.2$

$a_{15} = 29$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$

$S_n = \frac{(1 + 29).15}{2}$

$S_n = \frac{30.15}{2}$

$S_n = \frac{450}{2} \Rightarrow S_n = 225$

Figura 40– O Problema das Abdominais usando P.A.

Após essa forma de resolução, a professora ressaltou que esse problema havia sido aplicado a alunos de 5^a série, que não possuem o conhecimento de P.A. E perguntou: - *Então, como vocês acham que eles poderiam resolveriam esse problema?*

Um aluno disse: - *O aluno perceberia que o número de abdominais está crescendo de dois em dois a cada dia e que esse crescimento foi dado a partir de números impares.*

A professora, consertando a fala desse aluno, disse: - *você quer dizer a partir de uma seqüência de números ímpares, não é?*

Disse também: - *Vocês encontraram o total de abdominais até o décimo quinto dia utilizando a fórmula da soma dos termos de uma P.A. e como um aluno de 5^a série o resolveria, se ele não possui esse conhecimento?*

Outro aluno arriscou uma resposta dizendo: - *Pegando sempre os extremos e somando:* 1 + 29 = 3 + 27 = 5 + 25 = 7 + 23 = 9 + 21 = 11 + 19 = 13 + 17. Tudo isso igual a sete vezes 30 mais 15, que dará 225.

Como nenhum grupo apresentou uma resolução com busca por padrões de regularidade e como a “matemática é uma ciência de padrão e ordem” então, a professora-pesquisadora, indo à lousa e com a participação dos alunos, foi construindo a seguinte tabela

Dia (n)	Número de abdominais (N)	Soma do número de abdominais (S)	Total (T)
1	1	1	1
2	3	1+3	4
3	5	1+3+5	9
4	7	1+3+5+7	16
5	9	1+3+5+7+9	25
⋮	⋮	⋮	⋮
15	29	1+3+5+7+... +27+29	225
⋮	⋮	⋮	⋮

Quadro 10– Total de abdominais em função do dia

Até o quarto dia, os alunos souberam responder ao número de abdominais e ao total de abdominais, pois esses dados estavam no enunciado do problema. A professora-pesquisadora, dando continuidade à construção da tabela, perguntou: - E no 5º dia? E os alunos responderam que era só somar 2 ao 7, para o número de abdominais e 25 para o total. Assim, trabalhando sobre cada dia chegaram que, no dia 15, o número de abdominais seria 29 e o total de abdominais até esse dia seria de 225.

Analisando essa tabela, puderam professora e alunos, exibirem as seguintes expressões matemáticas como padrões: $N = 2n - 1$ e $T = n^2$, respectivamente, para o número de abdominais e o total de abdominais (como função do dia n, onde n é um número natural diferente de zero, menor ou igual a 30).

Para chegar ao padrão $N = 2n - 1$ mostrou-se que ele poderia ser entendido de duas maneiras diferentes.

1) Seja $n \in IN$. Então, $2n$ é par e, portanto, um número será ímpar se lhe puder ser acrescentado ou tirado.

$$\begin{cases} 2n+1 \\ 2n-1 \end{cases}$$

No nosso caso, como $n \neq 0$, pois não existe dia zero, a expressão que generaliza um número ímpar é $(2n - 1)$.

2) Na tabela pode se ver, pelo enunciado do problema que

Dia (n)	Nº de abdominais (N)
1	1
2	3
3	5
4	7

Quadro 11 –Abdominais em função do dia

E no dia 5? Como o problema diz que o número de abdominais continuou aumentando de 2 unidades a cada dia e, buscando por um padrão de regularidade pode-se perceber que os números ímpares em sua seqüência começam com 1 e a cada dia aumenta 2.

n	N
1	2.1 – 1 = 1
2	2.2 – 1 = 3
3	2.3 – 1 = 5
4	2.4 – 1 = 7
5	2.5 – 1 = 9
⋮	⋮
15	2.15 – 1 = 29
⋮	⋮
n	2n - 1

Quadro 12– Buscando por um padrão de regularidade

Então, generalizando, para o dia n, conjecturou-se que $N = 2n – 1$, onde $n \in$ IN, $0 < n \leq 30$, pois abril tem 30 dias.

A observação importante feita após essa conclusão é que o “número de abdominais é função do número de dia”, dada pela expressão $N = 2n – 1$. Analogamente se teria uma outra função, a do total de abdominais relativamente ao número do dia, $T = n^2$, onde a cada dia corresponderia um total de abdominais igual ao quadrado do número do dia.

A professora voltou a dizer que, com esse problema, foi possível trabalhar: números ímpares, números quadrados, sequências, P.A., potenciação, padrões, variáveis dependentes e independentes, o conceito de função, gráficos, etc.

Ao falar em função, a professora pediu aos alunos que fizessem os gráficos das funções que representavam a situação-problema. Deu-lhes tempo para isso. As funções frente aos dados do problema foram definidas por: $N = 2n – 1$, $\forall n \in IN$, onde $0< n \leq 30$ e $T = n^2$, $\forall n \in IN$, onde $0< n \leq 30$.

Todos os grupos cometeram um mesmo erro, por não observar o domínio da função, também chamado de campo de definição da função, isto é, o conjunto de pontos em que a função é definida, e, ao traçarem os gráficos, desenharam uma reta e uma parábola contínuas e fora dos limites do domínio.

Depois de desenhados os gráficos e entregues à professora, ela chamou a atenção para o domínio das funções, Quanto à construção dos gráficos, formados por pontos isolados, os alunos ficaram assustados com o que lhes foi dito e tentaram se justificar dizendo que, nunca, nenhum professor havia lhes alertado sobre isso. Outros diziam que o professor ao tratar de funções sempre trabalhava no conjunto dos números reais.

Sem nenhum comentário a mais, a professora lhes entregou a tarefa extraclasse e encerrou esse encontro.

11º Encontro: Aplicações da Metodologia de Eensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

No encontro anterior, ao aplicar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, foi trabalhado e discutido o problema das abdominais. No intuito de avaliar a compreensão de todos os alunos, ou seja, de perceber se eles haviam ou não compreendido os conceitos importantes envolvidos no problema das abdominais e visando a fixar os conceitos trabalhados e a introduzir outro conceito matemático, o de função inversa, foi proposta a seguinte tarefa extraclasse:

1) Suponha que Beto continuasse fazendo abdominais seguindo esse mesmo padrão.

a) Quantas abdominais ele teria feito no dia 20 de abril?

b) Quantas abdominais ele teria feito ao todo, até esse dia?

2) Um dia Beto fez 57 abdominais.

a) Em que dia Beto fez este número de abdominais?

b) Qual era o total de abdominais feitas até aquele dia?

c) Suponha que Beto tivesse parado de se exercitar quando atingiu o total de 1225 abdominais. Durante quantos dias ele se exercitou?

Os alunos não tiveram dificuldade em resolver os dois problemas, já que tinham as fórmulas disponíveis usadas no problema das abdominais. Nesse caso, o objetivo a que a professora-pesquisadora se propunha para o problema 1 foi alcançado. Rapidamente chegaram a 39 e 400.

Resolveram também o segundo problema aplicando as fórmulas já conhecidas. No entanto, ao sugerir esse problema, a professora-pesquisadora pretendia estender o problema original de modo a ir ao encontro de outro conceito: o conceito de função inversa, o que não foi percebido pelos alunos.

Então, a professora na lousa precisou explicar à classe: - *Vocês já obtiveram o número de abdominais N em função do número de dia n.* Com isso,

$N = 2n - 1$, $\forall\ n \in$ IN, onde $0 < n \leq 30$. Segue que

$N + 1 = 2n$, então,

$n = \dfrac{N+1}{2}$ (função inversa da função original)

Da mesma maneira, se $T = n^2$, onde $n \in IN$, $0 < n \leq 30$, $T > 0$

Segue que

$n = \sqrt{T}$ *(*função inversa da função original)

E assim, os alunos conseguiram perceber que se poderia usar diretamente essas fórmulas para se chegar ao resultado pretendido.

Ainda em discussão, quanto às expressões matemáticas encontradas no problema original, a professora-pesquisadora chamou a atenção da classe dizendo que o problema das abdominais ao ser aplicado a alunos de 5ª série se encerraria nessas expressões matemáticas, sem falar em funções. Continuando, perguntou ela*: - se esse problema fosse aplicado a séries mais avançadas, como por exemplo, num curso superior de matemática, como provar que essas expressões são verdadeiras? O que fizemos nesse problema foi apenas levantar conjecturas que* $N = 2n - 1$ *e que* $T = n^2$.

Como não obteve de imediato uma resposta, a professora antecipou dizendo que essas expressões poderiam ser provadas usando o Principio da Indução Finita. E voltou a perguntar: - *o que diz o Princípio da Indução Finita?*

Um aluno, não muito seguro do que dizia, arriscou comentando as condições válidas para o princípio. Esse mesmo aluno foi à lousa e conduzido pela professora foi desenvolvendo a prova, ou seja, a validade da expressão $N = 2n - 1$, utilizando o Princípio da Indução Finita.

1) Para $n = 1$, tem-se

$N = 2.1\text{-}1 = 1$ $\quad\therefore$ foi verificado que vale para $n = 1$.

2) Suponha que a expressão é válida para um n igual a *n-1,* essa é a hipótese de indução.

$N = 2(n\text{-}1) - 1$

$N = 2n - 2 - 1$

$N = 2n - 3$

Como tese, deve-se provar que a expressão $N = 2n \text{ -}1$ vale para todo *n.*

Usando a hipótese de indução tem-se

$N = 2n - 3$, mas como se conhece, pelo enunciado do problema, que a cada dia o número de abdominais aumenta duas unidades, então, passando do dia $(n\text{-}1)$ para o dia n, o número de abdominais aumenta duas unidades.

$N = 2n - 3 + 2$

Portanto, $\quad N = 2n - 1$

Para provar válida a expressão $T = n^2$, outro aluno se manifestou, veio à lousa e, também, conduzido pela professora, foi desenvolvendo a prova dessa expressão, usando o Princípio de Indução Finita.

1) Para $n = 1$, tem-se

$T = 1^2$

$T = 1$ $\quad\therefore$ vale para $n = 1$.

2) Suponha a expressão válida para um n igual a $n\text{-}1$

$T = (n\text{-}1)^2$

$T = n^2 - 2n + 1$ (hipótese de indução)

Para provar a tese, isto é, de que $T = n^2$ vale $\forall n \in IN^*$, foi preciso a interferência da professora, pedindo ao aluno que usasse a hipótese de indução e a ela adicionasse a expressão *2n-1*, que corresponde a regularidade do número de abdominais. O que não foi tão simples para os alunos perceberem esse fato. Assim:

$n = 1 \;\rightarrow\; T = 1$

+3

$n = 2 \;\rightarrow\; T = 4$ $\quad$ Há uma diferença de 2n+1

+5

$n = 3 \;\rightarrow\; T = 9$

+7

$n = 4 \;\rightarrow\; T = 16$

$n = n\text{-}1 \rightarrow \mathrm{T} = (n\text{-}1)^2$

$n = n \rightarrow \mathrm{T} = n^2$

$2(n\text{-}1) + 1 = 2n\text{-}2\text{+}1 = 2n\text{-}1$

3) Como tese, provar que a expressão $T = n^2$ vale para todo n

$\mathrm{T} = \mathrm{n}^2 - 2\mathrm{n} + 1 + (2\mathrm{n}\ -1)$

$T = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1$

$T = n^2$

Depois de bem explorado o problema, sem mais questionamentos, um aluno perguntou à professora: - *Você acha que os professores de hoje, os já formados, tem essa visão para trabalhar com um problema que apresenta n conteúdos diferentes?*

A professora respondeu dizendo que um bom professor de matemática tem que estar bem preparado matematicamente e didaticamente. Esse "bem preparado" significa que ele deve ter o conhecimento matemático superior, que ele está trabalhando em determinada série, ao aluno.

Não foi entregue tarefa extraclasse nesse encontro. A professora-pesquisadora decidiu deixar essa tarefa para iniciar o encontro seguinte.

12º Encontro: Aplicações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas favorece um ambiente de aprendizagem, onde o aluno deve se envolver ativamente, permitindo-lhe um avanço na construção de seu conhecimento. Cabe ao professor criar uma atmosfera de resolução de problemas matemáticos para que a aula aconteça de forma motivadora e estimulante. Professor e alunos, juntos em sala de aula, desenvolvem esse tipo de trabalho, e consequentemente, a aprendizagem se dará de modo cooperativo e colaborativo.

Ao trabalhar com essa metodologia em sala de aula, o professor deve propor um problema, o *problema gerador*, que levará ao conteúdo matemático planejado por ele para ser construído naquela aula. Nesse sentido, para este encontro foram planejadas situações-problema em que se pudesse fazer uso dessa metodologia de trabalho. De início trabalhou-se com a seguinte situação problema:

> **Situação problema:**
>
> Considere a terna {x, y, z} de números inteiros consecutivos cujo produto é igual à sua soma. Quantas destas ternas existem? Quais são elas?

Formaram-se três grupos **A, B** e **C** e, frente ao problema, começaram a refletir sobre ele. Passado algum tempo uma aluna de um dos grupos disse: - *Hum, -1,0 e 1, dá!*

E com essa dica da colega os outros grupos, acabaram descobrindo mais uma terna {1,2,3}. A professora-pesquisadora interveio perguntando se havia mais ternas. Com essa indagação os alunos pensaram em um sistema de equações com três variáveis e montaram o sistema conforme o enunciado do problema.

No momento do registro na lousa, dois grupos, **B** e **C**, usaram o mesmo raciocínio. Assim:

Sejam $x = y-1$ e $z = y+1$ e a terna se apresentaria assim $y-1, y, y+1$. Obedecendo as condições do problema,

$x.y.z = x + y + z$

$(y-1).y.(y+1) = y-1+y+y+1$

$(y^2-y)(y+1) = 3y$

$y^3+y^2-y^2-y = 3y$

$y^3-y-3y = 0$

$y^3-4y = 0$

$y(y^2-4) = 0$

$y = 0 \qquad y^2-4 = 0; \quad y = \pm 2$

Para $y = 0; x = -1$ e $z = 1$

Para $y = -2; x = -3$ e $z = -1$

Para $y = 2; x = 1$ e $z = 3$

Portanto as ternas procuradas são: {-1,0,1}; {-3,-2,-1} e {1,2,3}

Um dos componentes do **grupo A** apresentou a seguinte resolução:

$x+y+z = x.y.z \qquad y = x + 1$ e $z = x+1+1$ ou $z = y + 1$

$x+y+z = x(x+1)(x+1+1)$

$x+y+z = (x^2+x)(x+2)$

$x+y+z = x^3+2x^2+x^2+2x$

$x+y+z = x(x^2+3x+2) \qquad (*)$

$x(x^2+3x+2) = 0 \Rightarrow x' = 0$ (**)

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x'' = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = -1$ S = {0, -1, -2}

$x''' = -2$

E continuaram:

Usando "0" (***)

y = 0- 2x -2-x	2) x = y-1	3) z = x+2	
y = -3x-2	*x = -2-1*	*z = -3+2*	S = {-1,-2,-3}
y = -2	*x = -3*	*z = -1*	

Usando "-2" (****)

x+1+x+z = -2	2) z = y+1	3) x = y-1	
z = -2x-3	*y = z-1*	*x = 0-1*	S = {-1,0,1}
z = -2(-2) -3	*y =0*	*x = -1*	
z = 1			

De maneira análoga S = {1,2,3}

A professora pediu ao grupo que explicasse porque haviam igualado o segundo membro da equação a zero. E eles disseram: - *Porque, pelas ternas que descobrimos uma soma é zero.*

E a professora disse: -*E assim, vocês encontraram uma terna {0,-1,-2} que não satisfaz as condições do problema.*

E tentaram justificar dizendo: - *Não professora, esse "x" não é o mesmo "x" do problema?*

A professora se dirigindo a lousa disse: - *Será que vocês quiseram usar essa propriedade: Se x + y + z = 0, então x(x+1)(x +2) = 0. Mas vejam, vocês a usaram de forma incorreta, chegando a uma terna que não é solução para o problema.*

Depois de muita discussão nesse erro, chegaram a um consenso que a resolução deles estava incorreta.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é uma ferramenta bastante eficaz para realizar também esse tipo de trabalho. Como se pôde perceber neste encontro, sua aplicação proporcionou identificar erros dos alunos que o praticam por não terem consigo o domínio dos conceitos e propriedades matemáticos bem compreendidos. Concordando com as palavras de Onuchic e Allevato, pode-se dizer que

> A identificação do erro ou da concepção errônea, o diagnóstico dessa concepção no trabalho dos alunos, o processo de ajudar os alunos a superá-las e a observação e análise das implicações decorrentes desse trabalho devem ser realizadas a partir de problemas (ONUCHIC e ALLEVATO, 2009b, p. 8).

O tipo de erro do **grupo A**, detectado pela professora-pesquisadora, é um erro que, segundo Graeber e Johnson (1990) se inclui na categoria supergeneralização, ou seja, é quando o aluno diante de um problema toma um conceito, um princípio ou um procedimento que é verdadeiro para sua classe e o estende a outra classe. Com relação ao erro cometido pelo grupo observa-se que supergeneralizaram na passagem (*) para (**), como também em (***) e (****).

Essas concepções errôneas parecem ser derivadas do modo como aos estudantes é apresentada a matemática. Aquela matemática em que se enfatiza mais a aplicação de fórmulas e regras sem uma ênfase maior sobre a compreensão das fórmulas e/ou regras.

Devido ao tempo que se levou para trabalhar essa atividade, não foi possível realizar a atividade (ii) que era proposta para esse encontro, ficando ela, então, como tarefa extraclasse.

Encerrou-se aqui este encontro.

13º Encontro: Aplicações da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Iniciou-se este encontro com a correção e discussão da tarefa extraclasse que tinha como objetivo aplicar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, visando a participação ativa dos alunos na apresentação de seus trabalhos.

Com o problema geométrico deixado como tarefa, pretendia-se focar o Teorema de Pitágoras para calcular a diagonal de sustentação, a conversão de unidades de medida, o sistema monetário, conceito de divisão, etc. Poderia também ser focado propriedades geométricas do triângulo e do quadrado.

Situação problema: 1) Quantos metros de madeira, vendida em tábuas, devem ser comprados para construir um portão quadrado com 2 metros de lado, sabendo que a largura de cada tábua é de 12 cm e que o portão deve ter uma diagonal de sustentação? 2) Se a tábua fosse vendida apenas em pedaços de 3m de comprimento e 20 cm de largura, não querendo emendas nas tábuas verticais do portão, qual será a quantidade necessária de madeira a comprar para construir o mesmo portão? Haveria muita perda de madeira? Se quisesse aproveitar essa madeira cortada, haveria a possibilidade de construir esse portão de outra forma?

A maioria dos alunos disse não ter feito a tarefa porque não havia entendido o problema. Antes da correção e da discussão do problema, a professora-pesquisadora perguntou à classe porque era necessária a diagonal. Respostas como: *- para sustentar o portão, para não "empenar" o portão,* foram surgindo. Então, ao perguntar – *Qual, entre as figuras geométricas conhecidas, é considerada rígida e por quê?*

Um aluno disse: - *O triângulo, pois ele não se deforma facilmente, enquanto o quadrado, sim.* E a professora voltou a perguntar: - *Mas, porque não se deforma?*

Alguns disseram: - *Porque só são três lados, porque forma um plano.*

Refletindo sobre as posições desses alunos, a professora-pesquisadora acrescentou que entre os polígonos, somente o triangulo não aceita deformação. Qualquer movimento em seus lados ou em seus ângulos afetaria suas medidas.

Depois dessa breve discussão, dois alunos, A e B, vêm à lousa para exporem suas resoluções. Como não havia o desenho para ilustrar a situação-problema, o aluno A criou a seguinte representação geométrica para seu portão e calculou,

Aluno A:

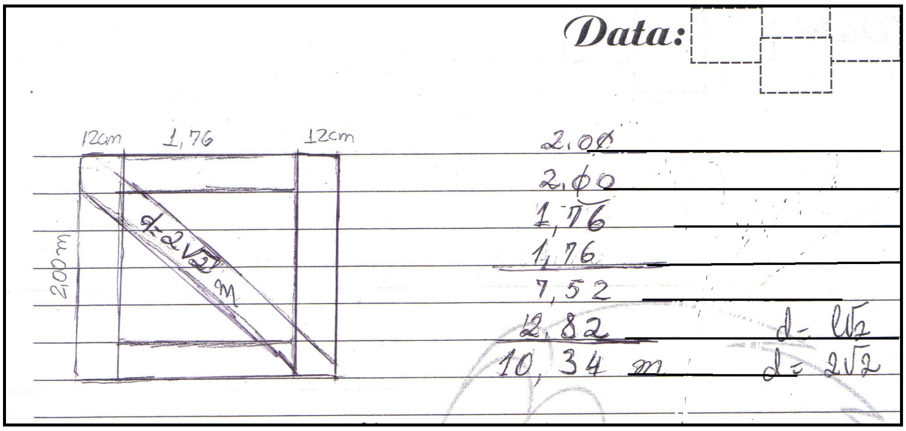


Figura 41 – O problema do portão feito pelo aluno A

.

Os colegas ao verem o desenho do portão desse aluno, em tom de brincadeira disseram: -*Parece uma cancela... Esse seu portão está muito aberto...É porque ele estava financeiramente sem grana...*

De fato, analisando a resposta do aluno **A**, nota-se que sua resolução tem sentido, mas não é um portão adequado para se construir para ser usado em residências, a não ser que ele possa ser usado em fazendas, sítios, como uma porteira. A representação geométrica feita por esse aluno facilitou sua compreensão na resolução do problema, apesar de não se ter o portão adequado à situação proposta.

Para a construção desse portão haveria uma perda de madeira nas tábuas horizontais e levaria uma emenda na diagonal de sustentação.

Aluno B:

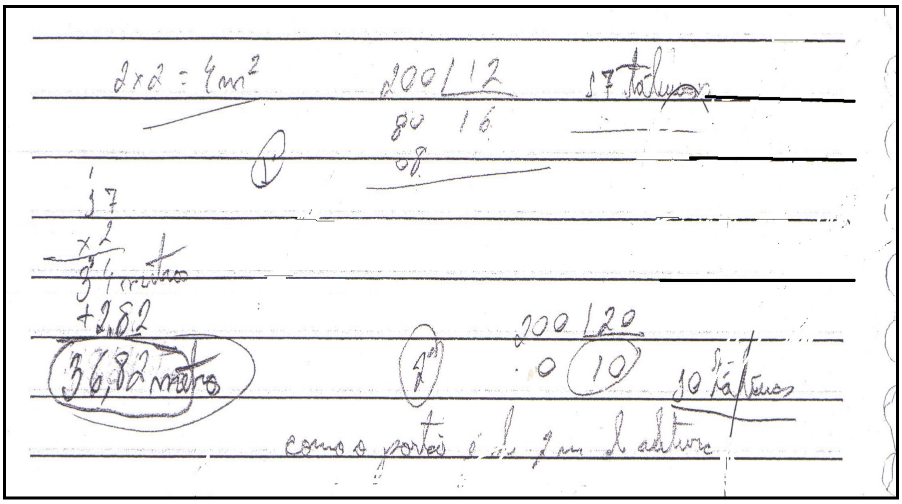


Figura 42– O problema do portão feito pelo aluno B

Além desta resolução apresentada por escrito, esse aluno, na lousa, pensando em um portão com as tábuas bem juntinhas, diferentemente do portão idealizado pelo aluno A, com a diagonal de sustentação e com mais duas tábuas na horizontal (uma em cima e outra em baixo), formando um Z com a tábua da diagonal, apresentou uma outra resolução. Ele acrescentou aos 36,82m mais 4m que correspondia às tábuas na horizontal, totalizando, dessa forma, 40,82m.

A professora aproveitou para chamar a atenção, dizendo:

- Essas tábuas são de 2m de comprimento, entretanto, a tabua de sustentação é maior. Isso significa que essa tábua levará uma emenda.

Uma aluna lembrou:

- Professora, aí tem uma pergunta mais específica: Se a tábua fosse vendida apenas em pedaços de 3m de comprimento e 20 cm de largura, não querendo emendas nas tábuas verticais do portão, qual será a quantidade necessária de madeira a comprar para construir o mesmo portão? Na minha resposta são 10 tábuas. Haveria muita perda de madeira? Sim. $2m^2$ *de madeira perdida. Depois vem: se quisesse aproveitar essa madeira cortada, haveria a possibilidade de construir esse portão de outra forma? Sim, mas aí ia ficar horrível...*

A reflexão dessa aluna trata da segunda situação-problema. Ela se dirigiu à lousa para explicar aos colegas o seu raciocínio. Fez o desenho ilustrativo do portão, com as tábuas de madeira juntinhas e o cálculo de quantas tábuas de 3m de comprimento por 20 cm de largura para um mesmo portão (2m por 2m). E assim ela pensou:

- Se o portão tem 2m de comprimento para uma tábua de 20 cm de largura, 2m é o mesmo que 200 cm. Distribuindo 20 cm em 200 cm temos 10 tábuas de 3m de comprimento.

Enquanto isso, os colegas acompanham o raciocínio da colega emitindo suas opiniões, lembrando-lhe que faltava a tábua de sustentação.

A aluna disse: *- Ah, é o mesmo portão, então, serão 11 tábuas de 3m de comprimento, sem desperdício... Agora dá para fazer outro portão de outra forma para economizar? Dá.*

Mas, gera uma nova discussão com essa sobra e os alunos não conseguem chegar a um consenso quando a professora vai à lousa pedindo aos alunos que raciocinem juntos com ela.

Como a madeira só poderia ser vendida em pedaços de 3m de comprimento por 20 cm de largura, nesse caso teríamos de comprar:

$\frac{2\ m}{20\ cm} = \frac{200\ cm}{20\ cm}$ = 10 tábuas. Acrescentando a essa quantidade, teria que ser comprada mais uma tábua para a diagonal de sustentação. Nesse caso, totalizaria 11 tábuas de 3m de comprimento, ou seja, 33m de madeira deverão ser compradas.

Para fazer o mesmo portão, teríamos: 10 tábuas de 2m de comprimento, mais 1 tábua de 2,82 m de comprimento, totalizando 22,82m. Haveria, então, uma perda de 10,18 m de madeira.

Já convencidos, um aluno brincou dizendo: *"Ainda bem que estou fazendo matemática e não engenharia".*

Percebe-se no registro feito por esses alunos que já tinham o conhecimento do Teorema de Pitágoras, usando de imediato, a fórmula da diagonal do quadrado. Houve uma boa discussão em relação à venda de madeira, pois entre os alunos havia uma colega que já tinha trabalhado em uma madeireira e ela se propôs a falar como se dava a venda de madeira destinada à construção.

Essa prática interativa não apenas possibilitou a construção do conceito que se pretendia com o problema dado, como também ofereceu condições para que os alunos fossem além dos objetivos que se pretendia com esse problema.

Dando continuidade à aula a professora-pesquisadora distribuiu para os alunos mais uma situação-problema. Com esse problema pretendia-se explorar as diferentes personalidades assumidas pelos números racionais, objetivando trabalhar os conceitos de todo; relação parte-todo, fração; comparação multiplicativa entre duas grandezas e razão.

Situação problema:

Andei $\frac{1}{2}$ km hoje e ontem tinha andado $\frac{1}{4}$ km. Quanto andei ao todo nos dois dias?

5) Se um jogador de basquete encesta uma em duas tentativas num jogo, e se em outro jogo encesta uma em quatro tentativas, qual o "número racional" que representa o desempenho do jogador nos dois jogos?

$\frac{1}{2}$ do cereal "Sweety"é açúcar, $\frac{1}{4}$ do cereal "Healthy" é açúcar. Se misturarmos porções iguais de ambos os cereais, que "número racional" desta mistura é açúcar?

6) Numa sala de aula, metade dos alunos são rapazes e noutra sala, um quarto dos alunos são rapazes. Se pusermos os dois grupos juntos, que

"número racional" de rapazes obtemos?

Justifiquem suas respostas.

Seguindo o roteiro, para se trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, os alunos se reuniram colaborativamente e começaram a trabalhar sobre o problema e a professora numa atitude de observadora, interventora e mediadora, quando necessário.

Ao registrarem as resoluções na lousa, os grupos não tiveram dúvida na primeira questão. Fizeram uma soma de frações, pois os números racionais apresentados representam uma relação parte-todo. O todo representa 1 km e as partes desse quilômetro correspondem a ½ e ¼. É um caso claro de adição de frações.

Quanto ao segundo problema uma componente de um dos grupos explicou a resolução, dizendo: - *Se em um dia, de duas jogadas ele acertou uma e se no outro dia de quatro jogadas ele acertou uma, então de seis jogadas ele acertou duas. Duas jogadas em seis tentativas. Dois sextos.*

Nota-se na explicação dada pelo grupo que estavam interpretando a razão como uma fração. Na verdade são comparadas duas grandezas: o número de acertos: 2, e o número de jogadas: 6. Então, esse número racional $\frac{2}{6}$ é entendido como 2 está para 6, ou seja, 2:6.

Outro componente de um outro grupo, que fez uma representação geométrica da situação problema, disse: - D*esenhamos bolinhas para representar as bolas de basquete. No primeiro dia de duas jogadas ele acertou uma bola e no segundo dia de quatro jogadas ele acertou uma. Então, ao todo, são seis tentativas e acertou duas bolas, obtendo 2/6 que é equivalente a 1/3.*

Observa-se que mais uma vez, há um equivoco quanto ao conceito de razão e de fração. Continuam igualando a razão a uma fração.

O terceiro grupo adicionou ½ e ¼ como se fossem frações e, com a explicação dos outros dois grupos, perceberam que erraram.

A professora-pesquisadora perguntou à classe qual a diferença entre a resposta do primeiro e do segundo problema.

Um aluno disse: - *No primeiro problema ½ e ¼ representam uma fração de 1 km e a segunda questão representa uma razão ... de dois ele acertou uma, de quatro ele acertou uma ... aí, já é uma razão. A razão de acerto dele, por isso que chegamos ao resultado 2/6.*

E o que significa uma fração? E uma razão? Perguntou a professora. Não obtendo uma resposta, se dirigiu à lousa explicando: O primeiro problema é um caso claro de adição de frações, uma relação parte-todo, ½ significa que o todo foi dividido em duas partes iguais e tomada uma delas, da mesma forma, ¼ foi dividido em quatro partes iguais e tomada um delas: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Já para o segundo problema, há um conceito diferente, embora haja a idéia de juntar, ele não pode ser resolvido como no primeiro caso. O conceito aqui envolvido refere-se a razão, ou seja, a razão é uma comparação multiplicativa entre duas grandezas, denotada por $\frac{a}{b}$ = *a:b* (*a* está para *b*), em que *a* é denominado **antecedente** e *b* é denominado **consequente**.

Nesse caso, ½ significa se jogar duas bolas, acerta uma e, nesse mesmo raciocínio, ¼ significa se jogar quatro bolas, acerta uma. Nas razões os eventos são distintos.

Ao escrever “$\frac{1}{2}$” + $\frac{1}{4}$ = “$\frac{2}{6}$”, os alunos se assustaram. Não conseguiam entender. Diziam nunca ter visto esse tipo de soma. Então, a professora continuou a explicar:

Ohlson, em 1991, associa o conceito de razão a um vetor binário onde a barra fracionária $\frac{a}{b}$ funciona como um delimitador para o par ordenado (a,b). Com esse significado teríamos:

“$\frac{1}{2}$” + “$\frac{1}{4}$” = (1,2) + (1,4) = (2,6). Onde (2,6) é a razão ou vetor que, em sua representação geométrica, usando a regra do paralelogramo, teríamos:

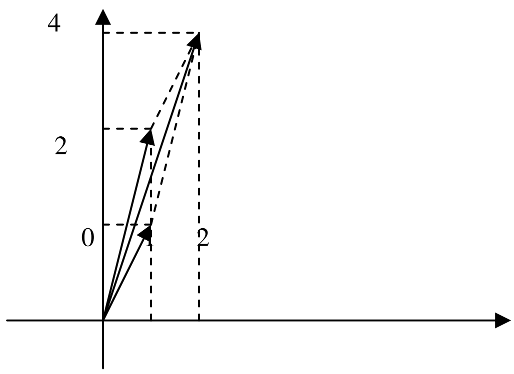


Figura 43– Representação geométrica da regra do paralelogramo

Há de se observar que esta adição não é feita como a adição de frações, onde o uso de mínimo múltiplo comum seria necessário. Nem poderia ser, uma vez que este número $\frac{2}{6}$, uma razão, foi obtido através da adição de razões.

O terceiro problema, que também envolve ½ e ¼, há a idéia de juntar, levando, dessa forma, dois grupos a cometerem esse erro. Um membro de um dos grupos fez uma representação geométrica para cada cereal dividida em partes iguais, quatro, quatro. Então tomaram 2/4 da primeira representação geométrica que corresponde a ½ do cereal Sweet e depois tomaram ¼ do cereal Healthy. Somando, obtiveram 3/8.

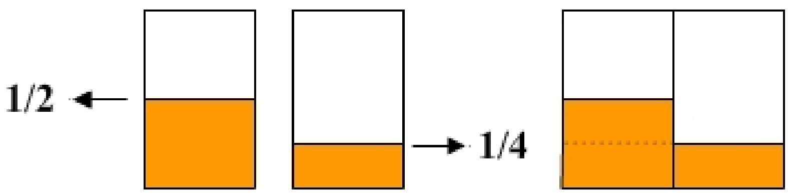
Assim:

oo/oo   o/ooo = ooo/ooooo = $\frac{3}{8}$

Outra aluna desse mesmo grupo disse como interpretou o problema.

- *Se eu somar 300g mais 300g vai dar 600g. Metade de 300g é igual a 150g e ¼ de 300g é igual a 75g, somando obtemos 225g. Então 225/600 = 3/8.*

Como a maioria não entendia o terceiro problema, a professora voltou-se a lousa para explicar que o problema poderia ser resolvido, também assim:



$$\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2+1}{8}=\frac{3}{8}$$

Quanto ao quarto problema, todos os grupos erraram. Encontraram como resposta 3/8 e ¾. Não perceberam que não havia dados suficientes para a resolução desse problema. Não se tem o número de rapazes em nenhuma das duas salas.

Aqui se encerra mais um encontro. Não houve tarefa extraclasse.

14º Encontro: Sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Em nosso Termo de Compromisso diz-se que: "Cada aluno será avaliado individualmente, de acordo com o artigo 24, inciso V-a da L.D.B. da Educação Nacional, lei nº 9394 de 20/12/1996". Sendo assim, este encontro foi previsto para a realização de uma prova escrita, no valor de 5 pontos, clausula esta, que consta nesse Termo de Compromisso.

15º Encontro: Sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Planejou-se para este encontro fazer uma avaliação do curso. Para isso, a professora dialogou com a turma, na tentativa de conscientizar os alunos da importância dessa disciplina no curso de Licenciatura. Na disciplina Didática da Matemática foi possível trabalhar com uma metodologia de ensino de matemática, sob uma nova perspectiva, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A professora-pesquisadora, neste encontro, reforçou dizendo que durante a disciplina foram trabalhados problemas matemáticos a fim de trabalhar novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, ou até mesmo rever conceitos e conteúdos matemáticos.

Reportando-se ao questionário de avaliação da disciplina, a professora entregou-o aos alunos e deu-lhes um tempo para pensarem e assim poder respondê-lo.

1) O que você achou da disciplina? Ela veio a atender as suas expectativas?

2) O que ficou evidente para você durante o curso?

3) Foi dito no inicio da disciplina que "se a tarefa do professor em Didática da Matemática **não** é a de **ensinar** a ensinar, então qual é?" (D'AMORE, 2007, p. 5). E essa pergunta ficou "no ar" durante o curso. Agora, como você a responderia?

Em relação à primeira questão todos os alunos acreditaram que a disciplina veio a contribuir na sua formação e viram nela uma maneira nova de se ensinar matemática, ou seja, uma maneira de se trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para se ensinar matemática. Seguem alguns excertos que justificam essa posição dos alunos:

- a disciplina mostrou uma forma diferente de se introduzir novos conceitos e conteúdos de matemática trabalhando através da resolução de problemas.

- foi uma disciplina que me possibilitou enxergar que para que o aluno consiga um bom desempenho é necessário que o professor estimule-o dando ao mesmo a oportunidade de construir seu conhecimento e ainda mais, o aluno precisa entender que para resolver um problema existem várias formas e que ele é capaz de descobrir esses caminhos.

- penso que ela superou minhas expectativas, pois foi nos apresentado um novo modo de ensinar matemática na sala de aula, pois trabalhar a partir da resolução de problemas, acredito que nenhum de nós pensava em inserir essa metodologia em nossos planos de aula

- esta disciplina foi bastante interessante, pois achei que seria uma aula chata, tipo do professor que fala ... fala e o aluno ouve ... ouve. Mas esse não foi o nosso caso. Com o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação da matemática através de situações problema, a professora fez a sala trabalhar em grupos e se interagir, durante sua resolução, sendo assim, uma aula mais descontraída e até divertida.

Com relação à segunda questão para eles o que ficou evidente foi a apresentação dessa nova metodologia de trabalho em sala. Perceberam que ela favorece a introdução de novos conceitos e conteúdos matemáticos e, até mesmo, compreendê-los na sua essência; torna a aula mais dinâmica; possibilita o trabalho em equipe, a discussão das idéias; faz com que se valorize o raciocínio e o conhecimento prévio dos alunos, possibilita ao aluno construir seu próprio conhecimento; permite sair do método tradicional de ensino.

Na terceira questão houve uma diversidade de interpretações, mas que levavam a uma mesma visão: a tarefa do professor é a de ensinar a ensinar. Mas como? Resposta como: mostrar novos caminhos, ou melhor, metodologias, de como pode ser trabalhada a matemática; para que a aprendizagem aconteça é necessária uma co-relação entre professor, aluno, instituição, família e sociedade; ensinar a ensinar de uma maneira diferente, menos agressiva, quando o professor apresenta artifícios para uma melhor aprendizagem; que o professor seja um mediador entre o aluno e a aprendizagem; que o professor de matemática precisa saber sua “gramática específica” para assim ter autoridade e confiança ao tratar determinado conteúdo; o professor não deve apenas ensinar a ensinar e sim, ensinar a aprender.

Depois que todos responderam e entregaram o questionário à professora-pesquisadora, ela agradeceu a colaboração e participação de todos e encerrou mais esse encontro, como também, a disciplina.

4.2. Conclusões Parciais

Ao aplicar o projeto na disciplina Didática da Matemática pretendíamos deixar os alunos conscientes de seu papel como futuros professores de matemática. Para alcançar esse objetivo fomos à busca de textos esclarecedores sobre o papel importante da Didática e, em particular, a Didática da Matemática.

Os textos selecionados para essa disciplina referiam-se a textos em que se falava de formação de professores, da importância da Didática na formação de professores, de currículo, de metodologias de trabalho para sala de aula, especificamente a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Esses textos foram fundamentais, pois propiciaram momentos de reflexão, debates e discussões, dando oportunidade aos alunos de expressarem suas ideias, tanto em questões de natureza social e política quanto em questões de natureza matemática.

Inicialmente os alunos mostraram uma certa timidez em expressar suas ideias relacionadas aos textos selecionados pela pesquisadora, mas, aos poucos, foram se sentindo confiantes, entusiasmados e motivados para tal. Esse tipo de comportamento é natural, pois esses alunos estavam acostumados a ouvirem passivamente o professor, fato percebido quando, em um dos encontros, foi lhes pedido que pensassem e depois desenhassem um professor de matemática em seu trabalho. Nos desenhos produzidos por eles, a imagem que se tinha era de um professor diante de uma lousa, com as carteiras enfileiradas e os alunos sentados assistindo passivamente as aulas. Uma concepção que trazem consigo sobre a Matemática e seu ensino em decorrência das práticas de ensino que tiveram enquanto alunos da Escola Básica. Em consonância com Nacarato, Mengali e Passos (2009), acreditamos que o curso de Licenciatura é o momento propício para se criar estratégias de formação que possam desconstruir os saberes que foram apropriados durante a trajetória estudantil na Escola Básica.

Notou-se, também, a concepção que esses futuros professores aceitam da didática como uma disciplina que ensina métodos de ensino, como uma espécie de receituário do ensino, como na fala de um aluno:

> *"Entendi o seguinte: o objetivo é encontrar vários métodos para ensinar. Dependendo do método que se vai ensinar, a criança vai aprender mais ou menos, por isso a gente deve sempre estar melhorando o método de ensinar. Assim, as crianças vão aprender mais, cada vez mais."*

Entretanto, no decorrer do curso, depois das várias leituras feitas, das questões apresentadas pela professora no intuito de levá-los a refletir sobre a Didática como uma disciplina científica, cujo campo de pesquisa tem por finalidade identificar, caracterizar e compreender os fenômenos e processos que condicionam o ensino e a aprendizagem da Matemática, essa concepção nos parece que foi se dissipando.

Em síntese, podemos aferir que tanto a Didática Geral quanto a didática específica tem um papel fundamental na formação do futuro professor. Ela é mais que um domínio da prática profissional. Nela se reconhece duas características: um objeto bem definido e uma metodologia de trabalho própria. Com relação à Didática da Matemática, o seu objeto é constituído naturalmente pelos problemas do ensino e da aprendizagem desta disciplina com o objetivo de contribuir para a melhoria do processo de ensino de Matemática.

Quisemos mostrar a esses futuros professores que a Didática tem contribuições essenciais a dar a sua atividade profissional quando vierem a ensinar ao sugerir conceitos centrais para fazer uma leitura das situações de ensino e aprendizagem e fornece também pistas para a atuação dos professores (PONTE, 1999).

Procuramos evidenciar durante os encontros que, para ser um professor eficiente em matemática, é necessário que se tenha o conhecimento matemático e também o conhecimento didático, pois, ambos subsidiarão o professor para que ele faça com que seus futuros alunos compreendam a matemática e percebam sua importância. Ele, o professor, deve estar preparado sobre o modo e sobre o método de trabalhar com determinados conteúdos matemáticos.

Dessa forma, referindo-se a métodos de como se trabalhar determinado conteúdo matemático, foi lhes apresentada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como um caminho para se ensinar, aprender e avaliar matemática. Para conhecimento e aplicação dessa metodologia, selecionamos problemas que seriam geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos que envolvessem os principais ramos da Matemática: Aritmética, Álgebra e Geometria. Foram problemas de natureza simples, mas que levaram esses futuros professores a repensarem e reverem determinados conceitos matemáticos que não eram bem compreendidos por eles, como, o conceito de divisão. Muitos deles tinham apenas o conhecimento procedimental da divisão.

Houve uma participação ativa desses alunos durante os encontros. Diante dos problemas apresentados mostravam-se interessados e motivados para resolvê-los, mesmo com suas dificuldades. E isso só foi possível devido à aplicação da metodologia de ensino adotada por nós.

Essa metodologia mostrou-se como algo "novo" para esses futuros professores, como se pode ler em alguns depoimentos:

"... essa metodologia mostrou uma forma diferente de se introduzir novos conceitos e conteúdos de matemática trabalhando através da resolução de problemas."

"... foi nos apresentado um novo modo de ensinar matemática na sala de aula, pois trabalhar a partir da resolução de problemas, acredito que nenhum de nós pensava em inserir essa metodologia em nossos planos de aula".

Trabalhar com essa metodologia favoreceu um ambiente de aprendizagem, promovendo, dessa forma, debates, interações entre os grupos, reflexões sobre como trabalhar através da resolução de problemas.

"esta disciplina foi bastante interessante, pois achei que seria uma aula chata, tipo do professor que fala ... fala e o aluno ouve ... ouve. Mas esse não foi o nosso caso. Com o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática através de situações problema, a professora fez a sala trabalhar em grupos e se interagir, durante sua resolução, sendo assim, uma aula mais descontraída e até divertida."

Trabalhar com essa metodologia possibilitou uma maior reflexão a esses futuros professores que, repensando sobre os prévios conceitos e conteúdos matemáticos possuídos, pudessem criar ou até mesmo ressignificar novos conceitos e novos conteúdos matemáticos. Mais que isso, sua aplicação permitiu identificar os erros que os alunos cometem por não terem consigo o domínio dos conceitos e das propriedades matemáticas bem compreendidos.

Enfim, queríamos mostrar a esses futuros professores que com essa nova metodologia pode-se fazer muita matemática e dar sentido a ela.

Essa foi nossa proposta didática. Uma proposta que se apresenta de uma forma prescritível, como vista no capítulo 2, com ações tanto por parte do professor quanto do aluno. O ponto de partida é sempre um problema que gerará novos conceitos e novos conteúdos matemáticos. O ambiente de sala de aula se torna dinâmico com a participação ativa dos alunos nos processos de ensino-aprendizagem. Onuchic e Allevato (2009b) argumentam que essa proposta didática ajuda os alunos a obterem percepções mais profundas acerca da matemática; a estabelecer conexões entre temas matemáticos e não matemáticos, a identificar padrões e a desenvolver a capacidade de resolver problemas.

CAPÍTULO 5 - APLICAÇÃO DO PROJETO DE LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA II

Para aprender Matemática é preciso "fazer Matemática". Não podemos ficar restritos à mera aplicação de fórmulas e de resultados estabelecidos, pois assim "afogaremos" nossos alunos (FAINGUELERNT e BORDINHÃO, 1990). Ao fazer matemática, o aluno tem a oportunidade de explorar, justificar, levantar hipóteses, argumentar, generalizar, etc... e, a Geometria é um meio eficaz para esse fazer matemático.

No ensino da Geometria é importante que se inicie o seu estudo por meio da intuição, da exploração a fim de que se desenvolva o raciocínio lógico para, só depois, chegar-se ao processo de abstração e generalização. Provavelmente, um ambiente adequado em que se possa desenvolver esse ensino de geometria seja o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), pois ele pode tornar a matemática mais compreensível para os alunos, uma vez que, das suas várias concepções, ele pode se constituir de uma sala-ambiente em que se estruture, organize e faça acontecer o pensar matemático.

Nessa perspectiva, não se deve perder de vista que o processo de construção do conhecimento exige situações ou ambientes educacionais que o favoreçam. Assim, a disciplina Laboratório de ensino de Matemática II foi desenvolvida com o intuito de fazer com que os alunos reconhecessem, em sala de aula, a importância do pensamento geométrico ao trabalhar com a Geometria, como também nas diferentes áreas da matemática, levando-os à construção de novos conceitos e novos conteúdos. Ao trabalhar, partindo de problemas, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, os alunos deverão perceber uma nova forma de trabalhar a Geometria Euclidiana, agora numa visão dinâmica, a Geometria das Transformações.

5.1. Coletar evidências e interpretá-las:

Relembrando, essa disciplina foi trabalhada com a mesma turma em que se deu a disciplina Didática da Matemática, constituída de 45h/aula, distribuídas em 15 encontros desenvolvidos em 5 semanas onde cada encontro era de 3h/aula. Cabe, aqui, agora relatar e analisar como se deu esses encontros.

1º Encontro: Sobre o Laboratório de Ensino de Matemática

A aula teve início com a professora-pesquisadora recordando e reforçando o Termo de Compromisso, relendo-o e chamando a atenção para alguns itens presentes nele, como, por exemplo, o papel do professor e dos alunos durante a disciplina, as formas de avaliação, a assiduidade de professor e alunos, a execução das tarefas, etc... Relembrou ela que a metodologia a ser trabalhada em sala de aula era a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, já vista e aplicada na disciplina anterior. Agora, sua aplicação feita sobre problemas geométricos.

Depois disso, apresentou a ementa do curso e logo após, entregou a cada aluno o programa de disciplina, lendo-o e explicando cada item. Chamou-lhes a atenção dizendo que trabalharia alguns tópicos da Geometria Euclidiana sob uma nova abordagem: a Geometria das Transformações e que como guia, para esse estudo utilizou os livros: Curso Básico de Geometria – Enfoque didático, volumes 1, 2 e 3 de autoria de Lilian Nasser e Lucia Tinoco; As transformações Geométricas, vol 1 e 2, de autoria de Martha Dantas et al.

Nesse ínterim, aproveitou a professora-pesquisadora para perguntar aos alunos o que eles entendiam por Geometria Dinâmica. Houve um breve silêncio. A professora-pesquisadora insistiu: - O *que significa a palavra dinâmica*? Um aluno arriscou dizendo: - *movimento.* A professora disse: - *Isso mesmo! Movimento! Então, geometria dinâmica é a geometria que trabalha com o movimento. Nesse caso, se dá o que chamamos de Geometria das Transformações. Vocês já ouviram falar, ou já estudaram essa geometria?* Silêncio ... os alunos não sabiam do que se tratava. Ela lhes disse: - *Quando falamos em Transformações Geométricas estamos nos referindo às isometrias, que é uma transformação de figuras onde a forma se mantém com as mesmas medidas e dentre as isometrias temos as translações, as reflexões e as rotações ...* Houve novamente um silêncio entre os alunos que não conseguiam dar um rápido significado ao que ouviam. Por fim, disseram nunca ter ouvido falar nessa geometria. Que só conheciam a Geometria Plana, Espacial, ou seja a Geometria Euclidiana e a Geometria Analítica e Projetiva.

Este é um fato sobre o qual é merecido tecer comentários. Mesmo as atuais propostas curriculares, bem como os PCN, realçando a importância desse tipo de estudo na Educação Básica, deixam a perceber que esse trabalho ainda não é feito. Não se estabelece a relação entre as isometrias e o estudo de congruência de figuras, em especial dos triângulos.

Disse a professora-pesquisadora que além das isometrias há outro tipo de transformação, a homotetia, onde é preservada a forma mas não as medidas. Nesse caso, esse tipo de transformação promove a semelhança de figuras. Atenção especial é dada aos triângulos. É importante que o professor conheça bem essas transformações para poder trabalhar com seus alunos a fim de orientá-los em suas ideias geométricas. Mas, será que o professor tem consciência desse fato?

Terminada a apresentação do programa, não havendo comentários, por parte dos alunos, a professora-pesquisadora deu continuidade à aula entregando-lhes o texto: "Laboratório de Ensino de Matemática e Materiais Manipuláveis" de autoria de Sergio Lorenzato (2004).

Como este encontro tinha por finalidade fazer com que os alunos, futuros professores, compreendessem a importância de um Laboratório de Ensino de Matemática para sua formação, ela começou a argumentar perguntando-lhes o que entendiam por Laboratório e, em especial, por Laboratório de Ensino. Resposta como: *espaço para fazer experiências, e obter resultados ... lugar para construir ... solucionar problemas ...* vieram a tona.

Um aluno, neste momento, lembrou: - *Interessante, aqui nós não temos um laboratório de matemática! Poderia ter um, nem que fosse simples...*

Em meio a todas essas indagações, a professora-pesquisadora pediu a um aluno que se dirigisse à biblioteca em busca de um dicionário, para que juntos pudessem ver o que significava a palavra "laboratório".

De posse desse dicionário, a professora pediu a uma aluna que lesse o significado da palavra laboratório: "lugar destinado ao estudo experimental de qualquer ramo da ciência, ou aplicação do conhecimento cientifico com um objetivo prático"...

A professora interrompeu essa fala e disse: - *esse primeiro significado cabe bem aqui para nós. Nesse caso, a ciência é a Matemática.* Tomou como exemplo a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo e indagou à turma como seria, em um Laboratório de Ensino de Matemática, experimentalmente, verificar essa propriedade?

Não obtendo uma resposta satisfatória a professora-pesquisadora reforçou argumentando que se pode verificar experimentalmente essa propriedade para um triângulo, dois, três,..., mil triângulos. Porém, se não provarmos que a propriedade relativa a esse experimento vale sempre para qualquer triângulo, não se pode assumir como verdade absoluta essa propriedade. E reforçou dizendo: - *Não basta apenas a verificação, a experimentação, é preciso a demonstração.*

Nesta disciplina iremos realizar experiências, investigações, observações, manipulação de objetos, levantamento de conjecturas e depois prová-las, ou seja, demonstrá-las. A demonstração permite validar uma propriedade em qualquer caso e, portanto, permite a abstração do conhecimento visto experimentalmente em casos particulares.

E o Laboratório nos permite tudo isso. Nele podemos sair do experimental para o abstrato.

De fato, no LEM é possível partir do concreto para então depois chegar à abstração. O material concreto é importante porque ele facilita a observação e a análise; desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico e auxilia o aluno na construção do conhecimento (TURRIONI e PEREZ, 2006, p. 61).

Depois dessa explanação passou-se a leitura do texto: Laboratório de Ensino de Matemática e Materiais Manipuláveis, de autoria de Sergio Lorenzato (2006). Um texto que fala da importância de um Laboratório de Ensino de Matemática na formação do professor, onde o autor apresenta uma justificativa plausível para se ter ou criar, em cada instituição de ensino, um laboratório.

Ao discutirem sobre o texto, um aluno se manifestou dizendo que o que se percebe nas escolas, em substituição ao laboratório, são apenas apresentações de oficinas, gincanas e pronto! Pára por aí! Pensou na decadência do ensino da geometria nas escolas, justificando que essa decadência, possivelmente, se dê por falta de instrumentos necessários ... materiais manipulativos que venham a favorecer a aprendizagem da geometria.

A professora reforçou essa posição dizendo que, em qualquer instituição de ensino, deveria existir um laboratório de matemática, não só de matemática, mas também de química, de física, de informática, etc...

Outra aluna disse: - *mas não é tão simples assim ter um laboratório...muitas escolas não têm recurso para isso...aqui mesmo na UNEB, onde a gente mais precisa, não há esse laboratório, com isso, não estou dizendo que não seja necessário o laboratório. Acho que é difícil ...* Essa mesma aluna sugeriu a implantação de um laboratório grande que viesse atender a toda a comunidade estudantil.

É claro que não é tão simples construir um Laboratório de Ensino de Matemática e, mais ainda, mantê-lo. É preciso que haja um esforço por parte do professor, dos alunos e dos administradores da instituição de ensino. Lorenzato (2006) reforça que a construção do LEM é necessária em qualquer instituição de ensino e que, para isso, é preciso que exista professores que acreditem no LEM, que se empenhem na construção dele e que considerem as possibilidades da escola.

O LEM pode ser destinado a todos os segmentos pertencentes ao contexto escolar: desde a Educação Iinfantil até o Ensino Superior, principalmente aqueles cursos responsáveis pela formação do professor. Lorenzato (2006, p. 10) nos alerta nesse sentido:

> [...] É inconcebível que, em suas aulas, os professores dos cursos de formação realcem a necessidade da autoconstrução do saber, a importância dos métodos ativos da aprendizagem, o significado dos sentidos para a aprendizagem, o respeito às diferenças individuais, mas, na prática de ensino e no estágio supervisionado, os seus alunos não disponham de instrumentos para a realização da prática pedagógica. [...] Afinal, o material deve estar, sempre que necessário, presente no estudo didático-metodológico de cada assunto do programa de metodologia ou didática do ensino de matemática, pois contudo e seu ensino devem ser planejados e ensinados de modo simultâneo e integrado.

Dando continuidade à leitura do texto, passando para o segundo parágrafo, houve uma ligeira reflexão quando, no texto, o autor fala: "foi, e ainda é possível ensinar assuntos abstratos para alunos sentados em carteiras enfileiradas e com o professor dispondo apenas do quadro negro..." Uma aluna comentou: - *Mas todo mundo aprendeu desse jeito, não é verdade? Então esse método não é tão falho assim...*

E a professora retrucou: - *sim, o autor até diz que muitos de nós aprendemos ou ensinamos ainda nesse método, mas quantos não aprenderam ou até aprenderam a odiar essa matéria? E o texto acrescentou que o laboratório, na visão de educadores matemáticos é uma boa alternativa metodológica para trabalhar bem um maior número de alunos.*

Após a leitura do terceiro e demais parágrafos, a professora-pesquisadora comentou que, nesses últimos parágrafos, o autor quis mostrar as variadas concepções que se tem de laboratório e como se constitui um laboratório de ensino de matemática.

Uma aluna retrucou dizendo: *Pra que inovar professora, se a gente tem computador, internet...prá que um laboratório?... Com a internet você entra numa comunidade só de matemáticos...aí você troca idéias com todo mundo ... troca planos de aula, vê as atividades, vê jogos .... você vê tudo ...* Outro colega discordou dizendo: *Essa questão de informática é muito superficial...você não pode pegar, palpar, construir...*

Nota-se na posição assumida pela aluna que ela não percebe que ter uma sala ambiente informatizada já se constitui um laboratório, um local em que se pode criar e desenvolver atividades experimentais. O computador é também uma ferramenta que tem possibilitado aos professores e pesquisadores, de modo geral, novos contextos para o ensino da Geometria. Concordando com Nacarato e Passos (2003), não há como ignorar o computador já presente em muitas escolas e a existência de softwares educativos que contribuem para a formação do pensamento geométrico. É uma ferramenta pedagógica que deve ser incluída nas propostas pedagógicas, buscando melhor formar o professor, quer inicial quer continuada.

Não podemos negar as potencialidades que os softwares computacionais disponíveis trazem para o ensino e a aprendizagem da Matemática, em especial da Geometria. São ferramentas que possibilitam ao aluno desenvolver o raciocínio geométrico, facilitando a criação, a descoberta e a construção de ideias e conceitos geométricos. Entretanto, o objetivo de nossa disciplina é o de "fazer Geometria" com a Geometria teórica e experimental. É o de construir conceitos geométricos, levantar propriedades e demonstrá-las, utilizando, como recursos didáticos, materiais manipulativos e construções geométricas, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas.

Depois da leitura do texto a professora aproveitou para apresentar aos alunos alguns materiais manipulativos e distribuiu para que eles, em pequenos grupos, viessem a explorá-los, a construir figuras, mosaicos, etc ... e, até mesmo que pudessem perceber algumas propriedades geométricas presentes nessa exploração.

Os alunos se envolveram bastante com esse material, fizeram várias construções, mas sem explorar a matemática subjacente a esses materiais. Depois de algum tempo de trabalho feito com esse material lhes foi entregue a tarefa extraclasse, um questionário. Foram os alunos alertados para que o mesmo fosse respondido e entregue no encontro seguinte.

E assim finalizou-se este encontro.

Figura 44– O uso do material manipulativo

2º Encontro: Formação de Conceitos Geométricos

Iniciou-se a aula com a correção da tarefa extraclasse. Foi feita uma análise e discussão do questionário que se encontra no anexo C, na página 389. A professora pediu a alguns alunos que lessem suas respostas dadas ao questionário. Ao serem perguntados sobre a forma como se deu sua formação em geometria, durante sua escolaridade, desde o Ensino Fundamental até a Graduação, a maioria disse não ter estudado geometria e outros que, quando a viram, foi de forma bastante resumida. Um dos alunos disse ter tido uma formação precária em geometria devido à falta de conhecimento de seus professores, nessa área. Alguns disseram ter sido reprovado nessa disciplina, na Graduação, por não terem um conhecimento prévio da mesma. Por outro lado, a maioria, talvez por terem ouvido a respeito, reconhecem sua importância, quando disseram: - *A geometria é tópico importante, pois ajuda no desenvolvimento do raciocínio visual, espacial e na construção de conceitos matemáticos; é de extrema importância, pois ela é muito usada desde a construção de uma simples cadeira até a construção de um edifício; ela é importante, pois é o fundamento da matemática* (sic). Foi perguntado que recursos, você como professor, utilizaria para trabalhar Geometria Euclidiana? Muitos disseram que utilizariam materiais manipulativos; softwares. Outros disseram: material de desenho geométrico; o meio em que o aluno está inserido; a manipulação de figuras geométricas e suas propriedades e demonstrações.

Não havendo mais comentários sobre a tarefa extraclasse, a professora-pesquisadora entregou à classe o texto: “A Matemática é uma ciência de padrão e ordem”, para leitura e comentários. Antes de iniciar a leitura a professora-pesquisadora perguntou à classe o que entendiam por essa frase: *a matemática é uma ciência de padrão e ordem*. Um aluno se manifestou dizendo: - *a matemática é uma ciência padronizada, tem a ver com o sistema internacional de medidas*. Outro aluno complementou e disse: - *o padrão da matemática é universal*...Consultado o dicionário, leram que padrão é um *modelo oficial de pesos e medidas, aquilo que serve de base...*

Foi feita a leitura do texto e, por fim, a professora-pesquisadora reforçou essa ideia explicando que o padrão representa um modelo. Assim, a Matemática é uma ciência de coisas que têm um padrão de regularidade e uma ordem lógica. Descobrir e explorar essa regularidade ou essa ordem e, então, dar sentido a ela é o que significa fazer matemática. Na Matemática há muitos padrões, em especial, na Geometria.

O mundo está cheio de padrões e ordem na natureza, na arte, na construção de prédios e até na música. Padrão e ordem são encontrados no comércio, na ciência, na medicina, na produção de coisas e na sociologia. A Matemática descobre essa ordem, dá sentido a ela, e a usa numa grande quantidade de modos fascinantes, melhorando nossas vidas e expandindo nosso conhecimento. A escola precisa começar a ajudar os estudantes neste processo de descoberta.

Dando continuidade à aula passou-se para o segundo texto: “Orientações gerais para o trabalho com a Geometria”, de Lilian Nasser e Lucia Tinoco. O texto apresenta algumas orientações para um trabalho eficaz em geometria, salientando sete aspectos que devem ser valorizados ao trabalhar com ela, ilustrando-os com algumas atividades. As orientações foram lidas e, logo após, a professora pediu à classe que se reunisse em grupo para a execução das atividades apresentadas no texto.

Em uma das orientações, pedia-se que o professor incentivasse os alunos a fazerem conjecturas até chegar a uma fórmula ou a um resultado correto que parecia valer sempre, pois a criação e a análise de conjecturas constituem-se em meios eficientes para desenvolver o raciocínio lógico. Sendo assim, como atividade, segundo as orientações do texto, a professora pediu à classe que, após examinarem o número de diagonais de alguns polígonos, criassem uma conjectura para compor uma fórmula que representasse o número de diagonais de um polígono de n lados. Da mesma forma, pediu também que levantassem uma conjectura para compor a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono de n lados, e outra, para a fórmula da soma dos ângulos externos de um polígono de n lados.

Os alunos tiveram bastante dificuldade nessa atividade. Foi preciso a intervenção direta da professora, orientando-os sobre os problemas secundários que surgiram, de modo que eles deduzissem uma fórmula para o número de diagonais de um polígono. A professora, primeiro, lhes perguntou sobre o conceito que tinham para as diagonais de um polígono. Percebeu-se, na fala dos alunos, o que eles tinham em mente era apenas a imagem visual do que fosse a diagonal. O conceito de diagonal para eles não estava bem formado. A professora-pesquisadora, então, formalizou o conceito de diagonal de um polígono, detalhando todos os dados que formam esse conceito. Deixou que os alunos, em grupo, prosseguissem na atividade. Mesmo assim, alguns grupos não conseguiam e a professora precisou voltar-se à lousa explicando como chegar à conjectura do número de diagonais de um polígono de *n* lados, levantando os seguintes questionamentos: por que a expressão *n-3* partindo de um dos vértices do polígono? Porque multiplica por *n* e porque divide por *2?* A partir dos polígonos desenhados abaixo, fez uma tabela e, observando o padrão de regularidade entre o número de lados do polígono e o número de diagonais partindo de um dos vértices, foi se construindo a fórmula do número de diagonais. Assim,

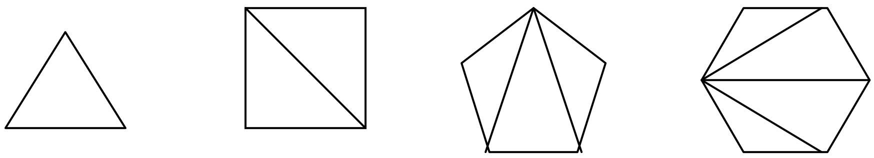


Figura 45– Diagonais de um polígono

Nº de vértices	Nome do polígono	Nº de lados do polígono	Nº de diagonais partindo de um dos vértices	Total de diagonais
3	triângulo	3	0	0
4	quadrilátero	4	1	2
5	pentágono	6	2	5
6	hexágono	6	3	9
⋮	⋮	⋮	⋮	
N	Polígono de n lados	*n*	*n-3*	$\frac{n(n-3)}{2}$

Quadro 13– Número de diagonais partindo de um dos vértices de um polígono

Pela tabela percebeu-se que o padrão de regularidade entre o número de lados do polígono e o número de diagonais partindo de um dos vértices do polígono é *n-3* diagonais. De fato, para o triângulo temos 3 lados e nenhuma diagonal por vértice, para o quadrado, temos 4 lados e uma diagonal por vértice, para o pentágono temos 5 lados e 2 diagonais por vértice, para o hexágono, temos 6 lados e três diagonais por vértice, levando assim, a uma diferença de 3. Ou seja, o número de lados *n*, menos o número de diagonais *d* por vértice é igual a uma constante 3. Reescrevendo

$$n - d = 3 \quad \text{ou} \quad d = n - 3$$

Caso o polígono tenha n vértices, o processo repete-se n vezes, obtendo-se um número total de diagonais igual a $n.(n\text{-}3)$. Por esse processo de contagem, tem-se o dobro do número de diagonais, pois cada uma foi contada duas vezes. Logo, o número de diagonais será:

$$D = \frac{n.(n-3)}{2}$$

Depois de se ter levantado essa conjectura, como os alunos não conseguiam provar que essa conjectura era verdadeira para todo $n \geq 3$, com $n \in$ IN, a professora provou, pela indução finita, que o número de diagonais de um polígono é verdadeira para todo polígono de n lados.

Assim,

Verifico para $n = 3$, tem-se

$$d_3 = \frac{3.(3-3)}{2} = \frac{3.0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Hipótese de indução: a conjectura é válida para um n igual a n-1

$$d_{n-1} = \frac{(n-1)(n-1-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-4)}{2}$$

Devo provar que para um n qualquer a conjectura vale sempre

Tomando a hipótese de indução e adicionando a ela a expressão (n-2), temos

$$d_n = \frac{(n-1)(n-4)}{2} + (n-2) = \frac{n^2 - n - 4n + 4 + 2n - 4}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Já utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, foi necessária a intervenção da professora, auxiliando os alunos nos problemas secundários do tipo: o que é diagonal de um polígono, como chegar à conjectura do numero de diagonais de um polígono de n lados, dentre outras.

Mediante a essa dificuldade apresentada pelos alunos pode-se perceber que o nível da turma, com relação ao conhecimento geométrico, era precário.

Tendo falado em conjectura, em raciocínio indutivo e em raciocínio dedutivo, formalizando, a professora-pesquisadora apresentou a seguinte afirmação, conforme Larson, Boswell e Stiff (2004):

Usando raciocínio indutivo: muito do raciocínio em Geometria consiste de três estágios:

Busca por um padrão – busque vários exemplos. Use diagramas e tabelas para ajudar a descobrir um padrão.

Faça uma conjectura – use os exemplos para levantar uma conjectura geral.

Uma conjectura é uma afirmação não provada que se baseia em observações.

Discuta a conjectura com outros. Modifique a conjectura, se necessário.

Verificar a conjectura – use raciocínio lógico para verificar que a conjectura é verdadeira em todos os casos.

Buscar por padrões e levantar conjecturas é parte de um processo chamado **raciocínio indutivo**.

Na sequência da atividade, pedia-se aos alunos, em grupos, que encontrassem a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer. Para essa atividade criou-se uma tabela comparando o número de lados de cada polígono com o número de triângulos formados pela decomposição da área do polígono em uma soma de áreas de triângulos.

Com os polígonos desenhados abaixo, fez uma tabela e, observando o padrão de regularidade entre o número de lados do polígono e o número de diagonais partindo de um dos vértices, foi se construindo a fórmula do número de diagonais. Assim,

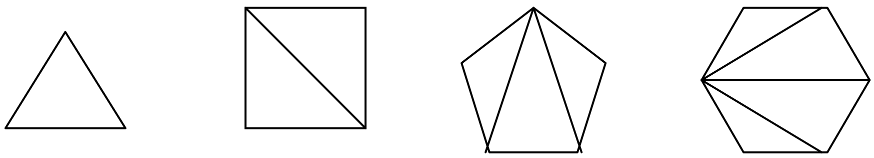


Figura 46– Padrão de regularidade entre os polígonos e o número de diagonais

Nome do Polígono	Número de lados do polígono	Número de triângulos formados
triângulo	3	1
quadrilátero	4	2
pentágono	5	3
hexágono	6	4
⋮	⋮	⋮
n-ágono	n	n-2

Quadro 14– Soma dos ângulos internos de um polígono

Observa-se, pela tabela, que se tem tantos triângulos quantos forem o número de lados menos *2*. De um modo geral, se o polígono tiver *n* lados, tem-se (*n-2*) triângulos. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triangulo é 180^o, então a soma dos ângulos internos de um polígono de *n* lados é de:

$$S_n = (n-2).\ 180^o$$

Essa aula se encerrou com a entrega da tarefa extraclasse e, complementando essa tarefa, a professora-pesquisadora pediu aos alunos que buscassem chegar às fórmulas: 1) a soma dos ângulos externos de um polígono; 2) a medida do ângulo interno e do ângulo externo de um polígono regular.

3º Encontro: Formação de Conceitos Geométricos

A aquisição de conceitos geométricos possui características próprias e, por isso, merece atenção especial. Como, neste encontro, pretendia-se valorizar os objetos e os conceitos geométricos, foi deixado no encontro anterior, como tarefa extraclasse o texto: "Formação de conceitos geométricos" de Lilian Nasser e Lúcia Tinoco para uma reflexão e discussão.

Um aluno, se antecipando, pediu à professora que lhe explicasse a diferença entre "conceito" e "imagem conceitual", pois, segundo ele, essas expressões se mostravam novas.

A professora-pesquisadora explicou dizendo: - *"conceituar é dizer o que é determinada coisa e, "imagem conceitual" está relacionada com o conceito que temos em nossa mente, é uma representação desse conceito. Por exemplo, qual é a imagem conceitual que temos de um triângulo? Um polígono de três lados é o que vem de imediato em nossa mente.*

Passando para o segundo momento da aula, a professora solicitou a um aluno que fosse à lousa para desenvolver a fórmula que dá a soma dos ângulos externos de um polígono. Houve uma certa resistência por parte desse aluno. Então, a professora insistindo disse que trabalhariam juntos, professora e aluno. Nesse momento, um outro aluno se manifestou e, indo à lousa desenhou um polígono de cinco lados, marcou os ângulos internos e, depois alongando cada lado do polígono, marcou os ângulos externos correspondentes com os colegas o acompanhando.

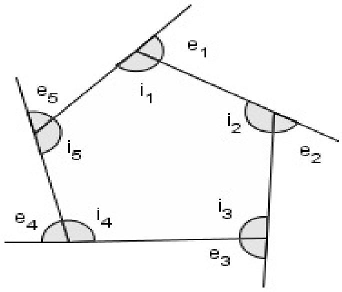


Figura 47– Soma dos ângulos internos e externos de um polígono

E foi escrevendo:

$$i_1 + e_1 = 180^o$$
$$i_2 + e_2 = 180^o$$
$$i_3 + e_3 = 180^o$$
$$i_4 + e_4 = 180^o$$
$$i_5 + e_5 = 180^o$$

Nesse momento, a professora perguntou: - *e se fosse um polígono de n lados*? Alguns disseram: - teríamos $i_n + e_n = 180^o$.
Isso mesmo, disse a professora.

Com a participação da professora e dos alunos o aluno foi escrevendo na lousa:

$$i_1 + e_1 + i_2 + e_2 + i_3 + e_3 + i_4 + e_4 + i_5 + e_5 + ... + i_n + e_n = n.\ 180^o$$
$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + ...\ i_n + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + ... + e_n = n.\ 180^o$$
$$S_i + S_e = n.\ 180^o$$

Como $S_i = (n\text{-}2).\ 180^o$, então

$(n\text{-}2).\ 180^o + S_e = 180^o\ n$

$180^o n – 360^o + S_e = 180^o\ n$

$S_e = 180^o n – 180^o\ n + 360^o$

$S_e = 360^o$

A atividade seguinte, prevista para esse encontro foi a confecção do Tangram. Foi entregue a cada aluno um texto com orientações para sua confecção. Após uma leitura individual, os alunos deveriam se reunir em grupos, uma vez que a professora-pesquisadora os havia alertado para realizarem um trabalho colaborativo, como pedia a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Deu-se um tempo para que a classe formasse os grupos. Apesar da recomendação feita, cada aluno começou a confeccionar o seu próprio Tangram. Houve dificuldade de início e foi preciso a intervenção da professora para solucionar alguns problemas secundários, acreditando ela que uma das dificuldades estava na interpretação do texto e até mesmo no manuseio da folha para confecção do Tangram, necessitando da intervenção da professora. Uma delas se deu no momento de obter um quadrado a partir de uma folha retangular. Alguns alunos disseram já conhecer o Tangram, mas que, porém nunca o haviam confeccionado.

Como nesse encontro pretendia-se desenvolver determinados conceitos geométricos, então, enquanto os alunos confeccionavam o Tangram, a professora ia revisando as variadas ideias geométricas que apareciam na construção: o conceito de diagonal, o de eixo de simetria, reconhecer as propriedades relacionadas aos triângulos e quadriláteros, pontos médios, figuras congruentes, etc., com a participação dos alunos que, por alguns momentos, mostravam-se não ter o domínio de determinados conceitos.

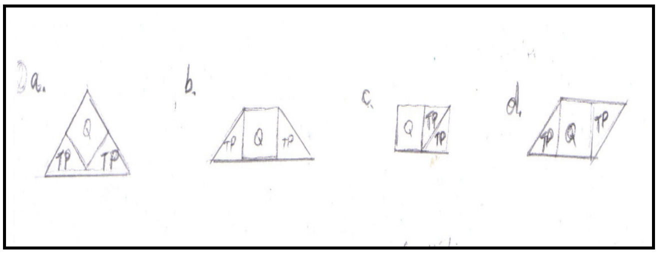
Com o Tangram já confeccionado, a professora pediu à classe que o recortasse, nas linhas marcadas, obtendo assim as sete peças componentes desse jogo. A etapa seguinte dessa atividade tratava de resolver algumas outras atividades em que podiam ser explorados o conceito e as propriedades das figuras formadas pelo Tangram.

Durante a atividade, a professora-pesquisadora pôde perceber que os alunos estavam muito mais envolvidos com a construção do Tangram do que com os conceitos geométricos intrínsecos a essa figura. Eles não percebiam nem tampouco compreendiam o que a professora pretendia com aquela atividade.

Aproveitando esse momento, a professora-pesquisadora alertou os alunos, futuros professores, de que se pode aprender e ensinar Geometria a partir de atividades experimentais, desde que sejam elas bem planejadas, sem mostrar preocupação em chegar rapidamente às fórmulas, sem nenhum significado para o aluno.

Dois grupos trabalharam bastante bem com a atividade Tangram. Apresentamos aqui o trabalho desses dois grupos.

Grupo A



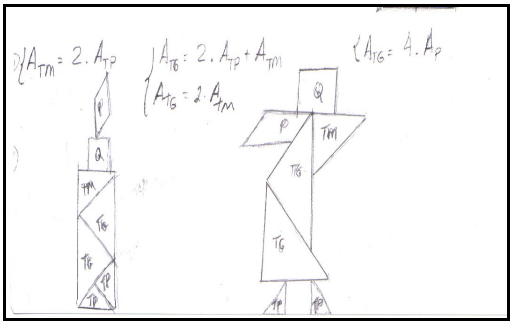
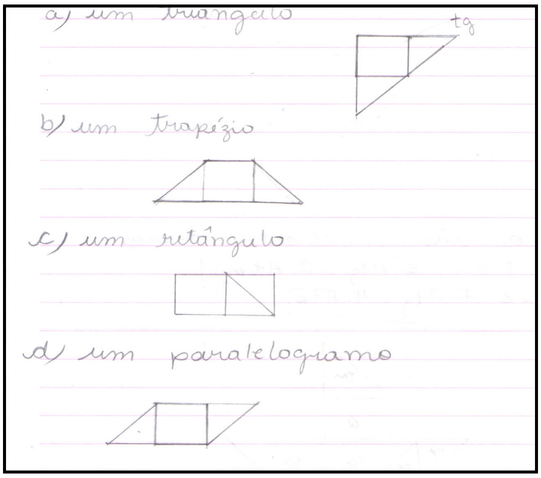


Figura 48– Atividades com o Tangram pelo grupo A

Grupo B



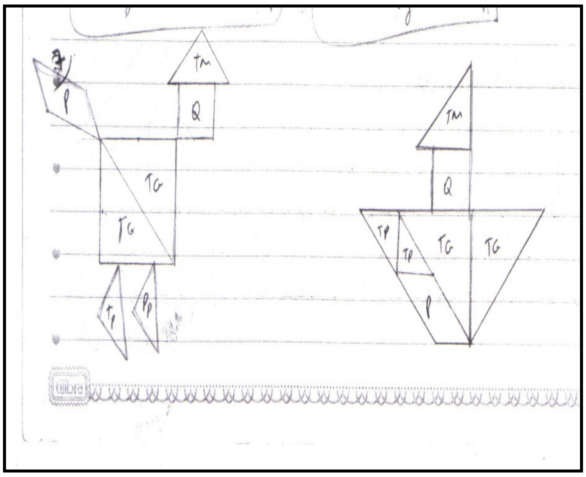


Figura 49 – Atividades com o Tangram pelo grupo B

Por outro lado, houve grupos que não se saíram tão bem quanto esses dois. Tiveram dificuldades, como por exemplo, em formar um trapézio e um retângulo utilizando um quadrado e dois triângulos. Atrapalhavam-se no manuseio dessas peças para compor a figura pedida.

É importante salientar aqui que todo o trabalho feito nessa disciplina visa à formação de futuros professores de matemática, especificamente em Geometria. Nesse sentido, trabalhar com o Tangram, desde sua confecção até as atividades mais simples, possibilitou mostrar a esses futuros professores que se podem construir muitos conceitos geométricos, bem como desenvolver o pensamento geométrico desde as séries iniciais sem se preocupar com a construção de fórmulas, dando significado geométrico ao que se faz.

Ao finalizar esse encontro, a professora pesquisadora entregou, a cada aluno, a tarefa extraclasse, que se tratava de um texto para leitura e estaria aberto para discussão no início do encontro seguinte.

4º Encontro: Formação de Conceitos Geométricos

Uma outra forma de trabalhar com a Formação de Conceitos Geométricos, para este encontro, foi a de reconhecer e caracterizar diferentes sólidos geométricos, a partir de suas planificações. Partindo desses sólidos geométricos, pretendia-se reconhecer e nomear algumas partes deles, tais como: figuras planas, segmentos de reta e pontos.

Nossa intenção não era a de desenvolver Geometria Espacial e sim, fazer com que os alunos reconhecessem as figuras planas, partes de objetos concretos, fazendo um estudo sistematizado dessas figuras planas.

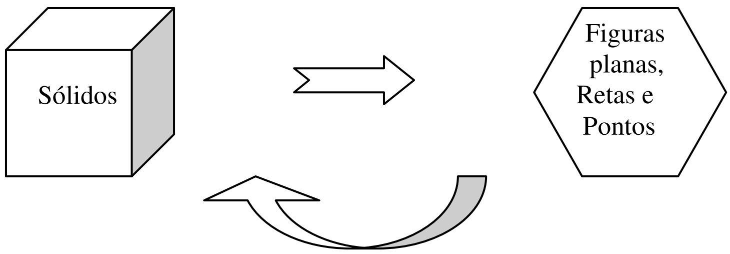


Figura 50– Sólidos e figuras planas

Seguindo esse esquema apresentado por Nasser e Tinoco (2004), entendemos com ele que, a partir dos sólidos geométricos, pode-se explorar, reconhecer e caracterizar as várias figuras planas, as várias retas e os vários pontos neles existentes.

Ao iniciarem a discussão sobre o texto: “O pensamento geométrico e os conceitos geométricos” de autoria de Van de Walle, a professora-pesquisadora chamou a atenção da classe sobre a importância da leitura e da reflexão dos textos apresentados na disciplina, pois o que se pretendia com eles era desmistificar a crença de que a matemática é só calculo.

Algumas discussões em relação ao texto foram feitas e, dentre elas, discutiu-se a necessidade de compreender que resolver muitos e muitos exercícios não significa ter o domínio de conteúdos matemáticos; que se deve pensar sobre os objetos geométricos por meio de duas estruturas bastante diferentes que são o raciocínio espacial e o conteúdo específico. Enfatizou-se, também, as grandes ideias que devem ser trabalhadas ao se ensinar geometria.

Um aluno interrompeu a fala da professora comentando: - *Professora, a gente percebe mesmo que, ao se trabalhar a geometria na forma tradicional, há uma grande dificuldade do professor em ensiná-la. Agora com essas novas mudanças tem que se fazer uma nova formação com esses professores?*

A professora explicou dizendo: - P*recisa-se de pessoas que estejam capacitadas para orientar esses professores nesse sentido....*

E o aluno insistiu: - A*lém de orientar com essas novas ideias, tem que orientar o professor também em relação ao conteúdo*. A professora concordou e voltou a mencionar os livros didáticos atuais que têm trazido uma geometria mais experimental, mais de observação e de manipulação. Mas que, por outro lado, tem deixado de abordar o processo dedutivo da Geometria, o que é uma pena.

Concordamos com Freitas e Pais (1999, p. 69) quando ressaltam que o ensino de Geometria deve contemplar a valorização do raciocínio lógico-dedutivo que é fundamental para que haja a continuidade da construção do conhecimento científico.

Desejando trabalhar com os sólidos geométricos, a fim de caracterizá-los e reconhecê-los, a sala foi dividida em cinco grupos e a cada grupo foi entregue uma prancha constituída de sólidos geométricos planificados.

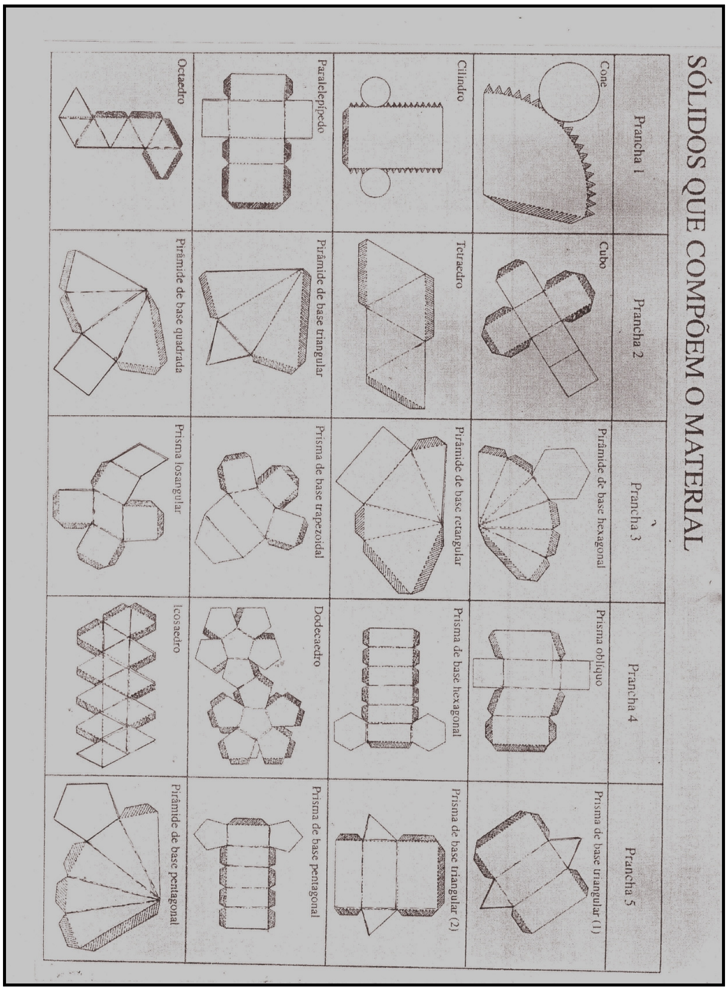


Figura 51– Sólidos que compõem as pranchas

No intuito de motivar a classe para essa atividade, a professora-pesquisadora voltou-se para os alunos e perguntou: - *Será que é interessante começar o estudo da geometria a partir dos sólidos?*

Uma aluna disse: - *Sim, porque se está partindo de onde o aluno está ... no espaço.*

Outro aluno disse: - *Porque podemos manipular, manusear com os sólidos...*

E a professora complementou dizendo: - *Concordo, ainda mais que e as formas estão aí na natureza ... e, por causa do nosso espaço ser tridimensional. Por que não começar o estudo da Geometria a partir dos sólidos geométricos e deles tirar as figuras planas, retas e pontos? É com brinquedos tridimensionais que as crianças brincam: as bolas, os dados, os jogos, etc.*

Eram cinco pranchas e, nesse encontro foram trabalhadas as de número 1 e 2. A dinâmica de trabalho consistia em observar os sólidos planificados formados por figuras planas. A seguir, destacar cada sólido, fazer dobraduras e uma colagem adequada. Depois de cada sólido montado, os alunos deveriam reconhecer e caracterizar todos os seus elementos: vértices, arestas, faces, base de apoio, áreas das faces e volume do sólido, buscando, dessa forma, as relações geométricas existentes entre seus elementos.

O grupo 1 dirigiu-se à mesa central e apresentou a prancha 1 para a classe, reconhecendo nela os sólidos: um cilindro, um cone, um octaedro e um paralelepípedo. Depois disso, passaram a montar esses sólidos. Como o grupo levou certo tempo para montá-los, a professora aproveitou o momento e chamou o grupo que ficou com a prancha 2 e que procedeu da mesma forma que o grupo da prancha 1.

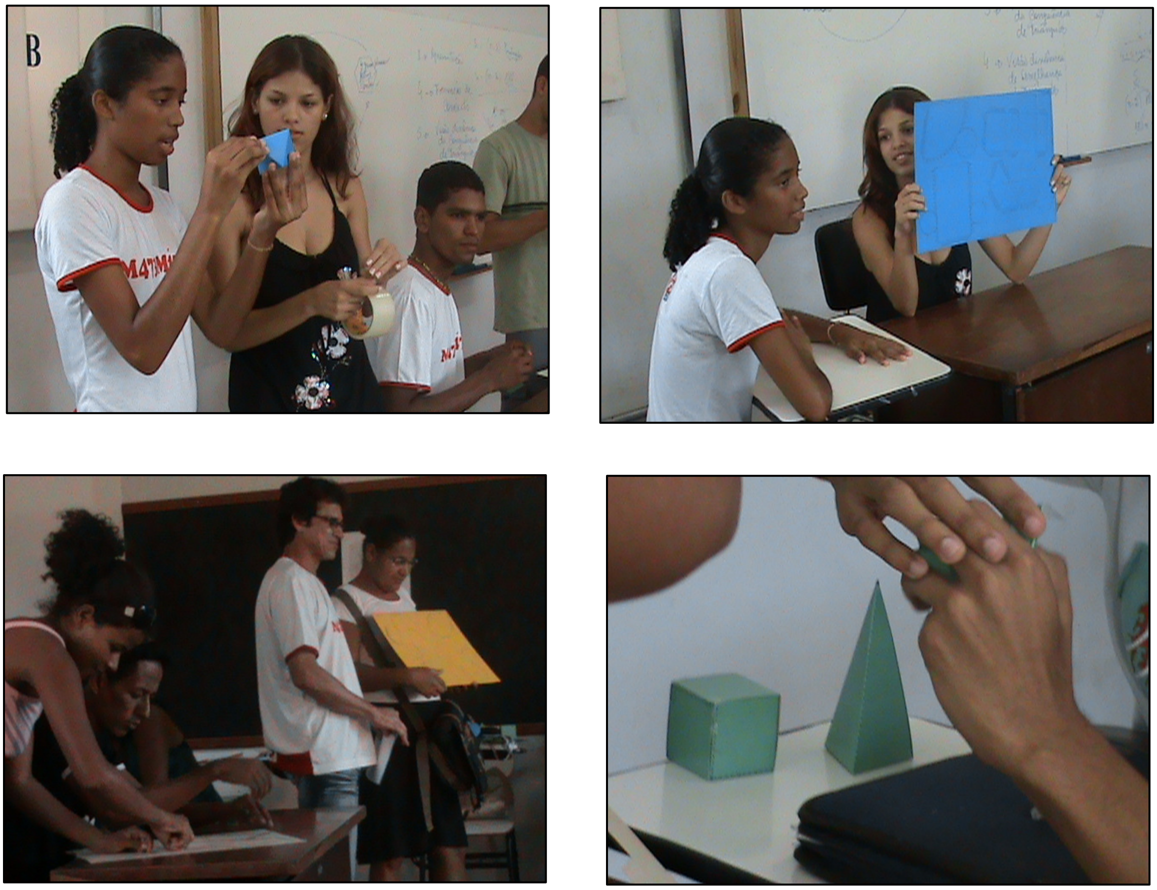


Figura 52– Atividade com as Pranchas 1, 2 e 3

Depois de confeccionados os sólidos a professora voltou-se ao grupo 1, pedindo-lhes que identificassem faces, arestas e vértices, bem como nomeassem esses sólidos.

Da mesma forma procedeu-se com o grupo que ficou com a prancha 2, reconhecendo os sólidos nela contida: duas pirâmides: uma de base quadrangular e a outra de base triangular, um cubo e o tetraedro. Dando continuidade a professora se dirigiu aos grupos e pediu-lhes que identificassem as áreas de base, área lateral e área total, bem como, o volume de cada um dos sólidos.

No reconhecimento das faces, arestas, vértices e base desses sólidos, como também em nomeá-los, notou-se que não houve dificuldade por parte dos grupos. Entretanto, ao se perguntar: o que é vértice? O que é aresta? O que é face? Houve um breve silêncio. E a professora-pesquisadora disse: - *Um vértice é o encontro de três arestas convergentes, uma aresta é o encontro de duas faces convergentes. A face é uma região do plano limitada por arestas, ou melhor, pelo perímetro dessa região.*

Notou-se, também, que ao se pedir que reconhecessem as áreas e volume desses sólidos, dúvidas foram surgindo, principalmente em relação ao cilindro e ao cone, corpos redondo que tem as bases relacionadas ao comprimento da circunferência.

Ao se pedir para identificarem o número de arestas, vértices e faces dos sólidos, enquanto se tratava de sólidos com um número reduzido de faces, foi fácil identificar, mas quando se aumentava a quantidade de faces, os alunos não conseguiam estabelecer a relação que existe entre esses componentes. Assim, a professora-pesquisadora precisou intervir lembrando da relação de Euler que diz: O número de faces (F), vértices (V) e arestas (A) de um poliedro estão relacionados pela fórmula: $F + V = A + 2$.

Como na prancha 1 havia alguns sólidos de revolução, o cilindro e o cone, a professora aproveitou para perguntar à classe qual a diferença desses sólidos para os outros? Como não houvesse resposta imediata, a professora disse que os sólidos de revolução são sólidos que, em contato com uma superfície plana rolam facilmente, por terem uma superfície ou parte dela arredondada.

Como esses alunos já haviam trabalhado em semestres anteriores Geometria Plana e Espacial, uma boa parte deles conseguiu identificar vértices, faces e arestas dos sólidos planificados contidos nas pranchas. Quando pedido para identificarem as áreas e volume de cada sólido, mostraram ter pouco conhecimento. Conheciam algumas fórmulas sem, portanto, perceberem o significado delas.

Finalizando, disse a professora que depois de se trabalhar com todas as pranchas, seguindo a metodologia de trabalho adotada para a sala de aula, uma formalização de todo esse estudo seria apresentado, resumindo conceitos e conteúdos trabalhados. Entregou a tarefa extraclasse, lembrando-os que, no próximo encontro, continuaria a trabalhar com as demais pranchas.

Nota-se, nessa dinâmica proporcionada pela professora, que os grupos se envolveram plenamente com a atividade, num trabalho cooperativo e colaborativo, mesmo com suas limitações na construção dos conceitos geométricos envolvidos nos sólidos apresentados.

5º Encontro: Formação de Conceitos Geométricos

Pais (1996) considera o objeto, o desenho, o conceito e a imagem mental como recursos didáticos auxiliares e representativos do processo de construção dos conceitos geométricos planos e espaciais, suscetíveis de intervir fortemente na aprendizagem de Geometria, cada um deles exercendo uma influência considerável nessa representação. Neste caso, considerando os sólidos geométricos como um objeto suscetível de aprendizagem geométrica, este encontro, assim como o anterior, teve por finalidade reconhecer e caracterizar os sólidos geométricos, utilizando como recurso metodológico a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e assim, obter a formação de alguns conceitos geométricos inerentes a esses sólidos.

Os textos deixados como tarefa extraclasse tiveram por objetivo levar os alunos a refletir sobre a importância do desenvolvimento do raciocínio geométrico. O primeiro texto falava da pesquisa desenvolvida pelo casal Van Hiele em que eles abordam cinco níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico. Cada um desses cinco níveis descreve o processo de pensamento usado nos contextos geométricos. O segundo texto falava da hierarquia do raciocínio distribuído em quatro áreas de desenvolvimento do pensamento: lembrança, básico, crítico e criativo, sendo que a área que requer a maior atenção é a do desenvolvimento de habilidades de pensamento de ordem superior, especificamente, o pensamento crítico e o pensamento criativo.

Após a leitura e comentário dos textos, passou-se para a atividade seguinte que foi a continuação do reconhecimento e caracterização dos sólidos geométricos contidos nas pranchas 3, 4 e 5.

A dinâmica foi a mesma do encontro anterior. Com os sólidos planificados, os grupos inicialmente identificavam as figuras planas que compunham cada sólido e, depois, os montavam.

Na prancha 3 havia quatro sólidos, a saber: 1 pirâmide de base hexagonal regular, 1 pirâmide de base retangular, 1 prisma de base trapezoidal e 1 prisma com as bases formadas por losangos. Houve uma certa dificuldade do grupo em nomear os dois últimos sólidos, bem como a identificação da quantidade de arestas e vértices. Então, com a orientação da professora e utilizando a relação de Euler, foi possível chegar a essas quantidades.

A prancha 4 era formada pelos seguintes sólidos: dodecaedro regular, prisma de base hexagonal regular, prisma de base quadrada oblíqua e o icosaedro regular. Foi usada a relação de Euler para a identificação, principalmente do número de arestas em sólidos de muitas faces. A professora aproveitou os registros na lousa da relação entre o número de arestas, vértices e faces dos sólidos contidos na prancha e pediu aos alunos que observassem que, de fato, o número de arestas acrescida de 2 unidades era sempre igual a soma do número de vértices com o número de faces.

Várias discussões surgiram na exploração dessas pranchas, como: Quando um prisma ou pirâmide é regular? E quando é reto? E quando é oblíquo? Quais são os poliedros regulares? O que é tronco de pirâmide? Como encontrar as áreas e volume desses sólidos? Nessa discussão pouca foi a participação dos alunos, foi preciso a intervenção direta da professora, procurando sanar essas dificuldades.

Apesar de os alunos não conseguirem relacionar determinadas ideias intrínsecas dos sólidos contidos nas pranchas trabalhadas, o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas favoreceu momentos de investigação e de reflexão tanto da professora quanto dos alunos.

Neste encontro não foi possível trabalhar com a prancha 5, ficando então para o encontro seguinte. Assim, a professora distribuiu para cada aluno a tarefa extraclasse, os textos: *Introdução à Geometria* e *A geometria nos Princípios e Padrões para a Matemática Escolar.*

E assim, finalizou-se este encontro.

6º Encontro: Visão dinâmica da congruência de triângulos

Dois textos foram deixados como tarefa extraclasse. Na discussão do primeiro: “A Geometria nos Princípios e Padrões para Matemática Escolar”, o que ficou evidente foram as normas apresentadas pelos Standards 2000, do NCTM: *analisar características e propriedades de formas geométricas de duas e três dimensões e desenvolver argumentos matemáticos sobre as relações geométricas*; *especificar localizações e descrever relações espaciais usando coordenadas geométricas e outros sistemas de representação*; *aplicar transformações e usar simetria para analisar situações matemáticas* e *usar visualização,* *raciocínio espacial e modelação geométrica para resolver problemas*, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

No nosso PCN de 5ª a 8ª série (1998, p. 68), referindo-se ao terceiro ciclo do Ensino Fundamental, pode-se ler que:

> [...] é importante enfatizar as noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo, as classificações das figuras geométricas, as relações entre as figuras espaciais e suas representações planas, a exploração das figuras geométricas planas, pela sua decomposição e composição, transformação (reflexão, translação e rotação), ampliação e redução.

Ainda nesse ciclo,

> as atividades geométricas centram-se em procedimentos de observação, representações e construções de figuras, bem como o manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras. Desse modo, o estudo do espaço e das formas privilegiará a observação e a compreensão das relações e a utilização das noções geométricas para resolver problemas em detrimento da simples memorização de fatos e de um vocabulário específico. Porém, isso não significa que não se deva ter a preocupação em levar os alunos a fazer uso de um vocabulário mais específico (p.68).

Outro aspecto que merece atenção, nesse ciclo, é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro e transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes.

O segundo texto: "Uma introdução à Geometria" refere-se à teorização do estudo da Geometria, a partir de seus conceitos primitivos e definidos, dos seus postulados e dos seus teoremas, constituindo, assim, a axiomatização da Geometria.

A professora-pesquisadora, dando início às atividades com as pranchas, chamou o grupo responsável pela prancha 5. Os componentes desse grupo, formado por dois alunos, se dirigiram à mesa central, fizeram a exposição da prancha e iniciaram a montagem dos sólidos nela contida. Terminada a montagem desses sólidos passou-se para o reconhecimento e caracterização deles. Esse grupo se atrapalhou, mostrando não ter domínio do assunto. Foi preciso a intervenção da professora-pesquisadora e dos outros alunos para que essa dupla pudesse reconhecer e caracterizar o número de vértices, arestas, faces, as áreas e o volume dos sólidos que se apresentavam nessa prancha. Ela representava a planificação dos seguintes sólidos: dois prismas, um de base triangular regular e o outro tendo por base um triângulo escaleno; um prisma de base pentagonal regular e uma pirâmide de base pentagonal regular.

Figura 53 – Atividade com a Prancha 5

Essa dupla não desempenhou bem a sua tarefa, mesmo já tendo visto o estudo exploratório das outras pranchas. O que permite deduzir que essa dupla não se preparou bem para essa tarefa, ou até mesmo, por apresentarem dificuldades na identificação dos diferentes elementos que compõem esses sólidos, devido ao processo de aprendizagem que tiveram, ou não, da geometria.

Terminada a apresentação dessa dupla, a professora expôs todos os sólidos formados por todas as planificações das cinco pranchas e, em seguida, entregou, por escrito, a cada aluno, um texto formalizando todo o estudo exploratório que foi feito com esses sólidos. Foram feitos a leitura e os comentários do texto pela professora e os alunos acompanharam atentamente, sem intervirem. Esse texto se encontra no anexo C, na página 384.

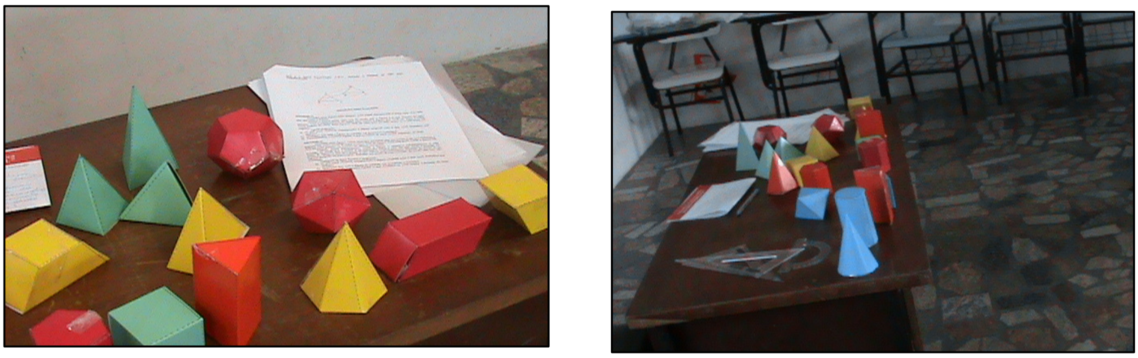


Figura 54– Os sólidos geométricos confeccionados

Com a finalidade de manter vivo esse Laboratório de Ensino de Matemática II, o material trabalhado com as pranchas e os textos recomendados para leitura e discussão passaram a pertencer a ele. Com referência aos livros adotados foi feito um pedido à biblioteca da Instituição e a compra de seus exemplares.

Dando continuidade a esse encontro, passou-se para o que seria de início proposto para ele: trabalhar a visão dinâmica da congruência dos triângulos que seria feita através das transformações geométricas: translação, reflexão e rotação, por serem estas ferramentas úteis para explorar o conceito de congruência de figuras, em especial, dos triângulos. Essa também é uma recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (1998, MEC) para o 3º e o 4º Ciclos do Ensino Fundamental.

Por Geometria Dinâmica entende-se o estudo da Geometria através do movimento de figuras geométricas. Sendo assim, estando num Laboratório de Ensino de Matemática, especificamente de Geometria, interessante é sentir que a Geometria deve ser abordada de forma intuitiva e dinâmica. Isso, no sentido de incentivar os alunos a manipular e construir as figuras e os sólidos geométricos, levando-os a descobrir que os objetos geométricos podem ocupar diversas posições sem que sejam alteradas suas características.

Antes de iniciar as atividades previstas para esse encontro, a professora-pesquisadora revisou alguns conceitos:

1) É bom lembrar que "duas figuras geométricas planas podem ser comparadas segundo sua forma, sua medida e o lugar que ocupam no espaço. Assim

Duas figuras são	Forma	Medida	Lugar que ocupam no espaço
Iguais	mesma	mesma	Mesmo
Congruentes	mesma	mesma	Diferente
Semelhantes	mesma	diferente	Diferente
Equivalentes	diferente	mesma	Diferente

Quadro 15 – Forma, medida e lugar que figuras ocupam o espaço

2) Para se saber qual será a figura transformada de uma figura original é necessário que se saiba, com precisão, qual será a transformação aplicada.

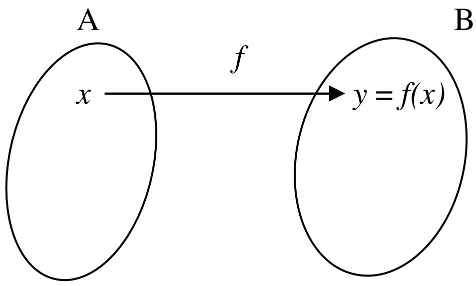
Lembrando que "*toda ação provoca uma transformação*", precisa-se saber, com segurança, que ação será aplicada em cada caso. Isso, matematicamente, envolve o conceito de função.

Dados dois conjuntos A e B, uma função é uma correspondência que associa a cada $x \in$ A um e um único $y \in$ B que é a imagem de x pela f, isto é $y = f(x)$.

Assim,

$$x \in \mathrm{A} \xrightarrow{f} y = f(x) \in B$$

Ou



onde A é o domínio da função, B é o contra domínio e a imagem Im $\subseteq$ B.

3) Em uma transformação geométrica, cada ponto da figura inicial é levado em um ponto da figura em que ela se transforma. Por exemplo:

Considere o triângulo ABC. A cada um dos vértices do triângulo original ABC será associado um vértice do triângulo A'B'C', e o mesmo acontece com cada um dos outros pontos. Compreendida exatamente essa correspondência, somos capazes de saber qual é a figura transformada A'B'C', chamada a imagem de ABC pela transformação.

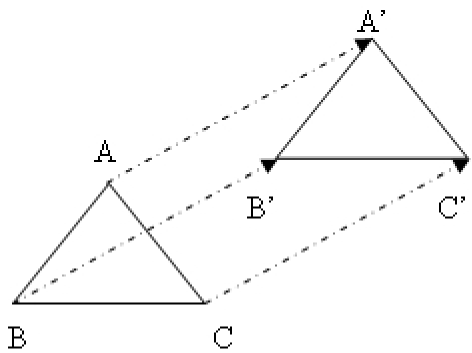


Figura 55– Figura transformada

Depois dessa revisão, a professora-pesquisadora pediu à classe para formar grupos e entregou a cada aluno um folha contendo as atividades programadas para esse encontro, que foram lidas por ela. Feito isso, os grupos começaram a desenvolvê-las. Ao observar o trabalho que estava sendo desenvolvido pelos grupos, a professora-pesquisadora notou uma dificuldade acentuada nos grupos e, assim, tornou-se uma mediadora no trabalho de cada grupo.

Como resultado desse trabalho, as construções obtidas pelos grupos se apresentam aqui:

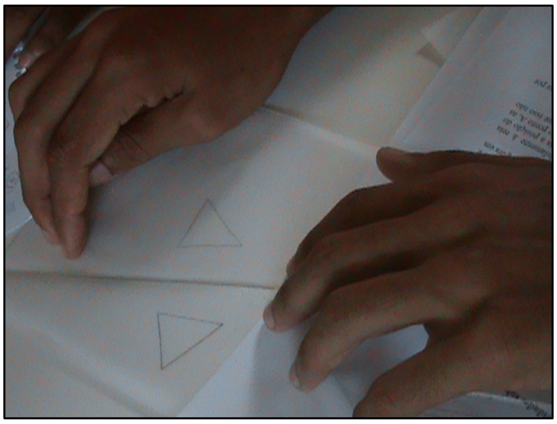


Figura 56- Atividade envolvendo isometria

Em cada atividade, depois de se terem construído as figuras alguns questionamentos foram levantados. Novamente foi preciso a intervenção da professora que, mesmo os conduzindo a refletir sobre as questões propostas, no fim, precisou fazer um resumo de tudo o que se pretendia com essas atividades:

Na atividade (i), a figura obtida da original é o seu reflexo e o movimento que permitiu a transformação foi a reflexão, enquanto que, na atividade (ii), a figura obtida da original deu-se por meio de uma translação, ou seja, a figura original foi arrastada segundo uma reta, num mesmo sentido e numa mesma direção. Na atividade (iii), a figura obtida da original deu-se por uma rotação segundo um ângulo. Todas as figuras obtidas, a partir da figura original, mostraram-se congruentes, pois, independente do movimento dado a elas, seja por reflexão, por translação ou por rotação, elas preservaram as medidas dos seus lados e dos seus ângulos. A essa transformação geométrica sofrida por cada figura chamamos *isometrias*.

Interessante também foi o fato de se usar para essas atividades o papel transparente, pois esse tipo de material possibilitou construir figuras transformadas de outras pelas isometrias, acessível a todos os alunos, e que proporcionou a compreensão de alguns aspectos importantes, como por exemplo, a preservação da orientação. Vimos também que a dobragem em folha de papel funcionou na reflexão como um espelho.

Para formalizar todo o estudo feito com essas atividades a professora-pesquisadora entregou a cada aluno o texto: *"Transformações no plano – Isometrias"*, encontrado no anexo

C, na página 412, que foi lido por ela e outros comentários foram acrescentados: uma figura pode ser refletida, transladada ou rotacionada, produzindo, dessa forma, uma nova figura que é a *imagem* da figura original pela transformação feita.

Sem mais comentários, finalizou-se este encontro com a entrega da tarefa extraclasse.

7º Encontro: Visão dinâmica da congruência de triângulos

A professora iniciou a aula relembrando o conceito de isometria, pois o que se pretendia neste encontro era explorar o conceito de simetria. Realçou a importância de se fazer esse estudo, dizendo que as atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais dinâmico para esse estudo.

Também foi interessante propor aos alunos situações que comparassem duas figuras em que a segunda é resultante da reflexão da primeira, ou da translação, ou da rotação, para que descobrissem o que permaneceu invariante e o que mudou, como as atividades propostas no encontro anterior.

À primeira vista, as transformações podem parecer um assunto não muito relacionado às coisas do dia-a-dia, mas, refletindo e observando um pouco, nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. Em inúmeros objetos físicos ocorrem aproximações de planos de simetria, de reflexão. Em representações planas desses objetos, tais planos de simetria reduzem-se a eixos de simetria. No corpo humano, pode-se observar, aproximadamente, um plano de simetria. Assim, também a imagem de um objeto no espelho é simétrica a ele. Há eixos de simetria em diversas criações do homem, como desenhos de aeronaves, edifícios e móveis.

As simetrias centrais e de rotação também surgem em diversas situações: desenhos de flores, logotipos de empresas, desenhos de peças mecânicas que giram, copos, pratos, bordados, etc. Os exemplos de translação também são fáceis de encontrar: grades de janelas, cercas de jardim, frisos decorativos em paredes, azulejos decorados, etc".

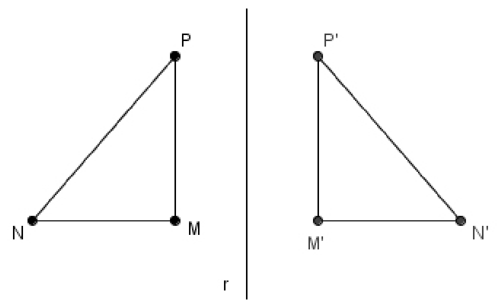
A tarefa extraclasse foi discutida brevemente. Tratava-se de encontrar, na figura de uma das obras do artista holandês Maurits Cornelis Escher, transformações geométricas, ou seja, as isometrias. Para essa atividade, os alunos não tiveram dificuldades (cap. 3, p. 167)

Todas as atividades propostas para este encontro referiam-se ao conceito de simetria. Os alunos, dispostos em grupos, começaram a realizar suas atividades e solicitavam sempre a a presença da professora em alguns momentos para sanar suas dificuldades, principalmente na atividades (iii), ao desenharem os triângulos eqüilátero, isósceles e escaleno. Identificar os eixos de simetria nesses triângulos também não foi tão simples para os alunos.

Na atividade, os grupos perceberam que havia uma superposição dos pontos A e C ao dobrarem a figura. Essa linha de dobra que faz com que os pontos se sobreponham é chamado *eixo de simetria*, ou seja, o eixo de simetria é uma reta que divide a figura em duas partes que podem coincidir exatamente. Ele age como um espelho que, ao ser colocado perpendicularmente ao plano que contém a figura, age como se tivesse sido colocado sobre a reta, refletindo exatamente a figura do outro lado.

Complementando essas ideias, a professora-pesquisadora explicou que os pontos da figura original quando refletidos pelo eixo de simetria são chamados *pontos simétricos* e, a figura formada por esses pontos simétricos é chamada *figura simétrica* da figura original.

E fez um desenho ilustrativo para expressar melhor essas idéias.



Os pontos M’, N’ e P’ são simétricos dos pontos M, N e P. A distância de M’ à reta *r* é a mesma que de M à reta *r*. O mesmo se diz em relação aos outros pontos das figuras e, a reta *r* é chamada *eixo de simetria*.

Foram deixadas como tarefa extraclasse algumas atividades para mostrar que uma figura pode ser refletida duplamente sobre um plano.

É necessário que os professores, sejam eles em formação inicial ou continuada, disponham de ferramentas que possam contribuir para uma melhoria em sua prática docente, a fim de proporcionar a seus alunos condições para o desenvolvimento das suas competências e habilidades em Matemática.

Nesse sentido, ao trabalharmos as transformações geométricas com esses futuros professores, pretendíamos que eles percebessem a importância desse conhecimento para sua formação, pois elas constituem um recurso útil para se compreender a congruência de figura e, em particular, dos triângulos; para se fazer demonstrações e para se usar o raciocínio espacial. Normalmente, limitamo-nos a falar de figuras congruentes e utilizar, em exercícios e problemas, o fato de elas terem lados e ângulos congruentes, não permitindo, assim, o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma dinâmica e significativa para o aluno.

As atividades, ou melhor, os problemas até aqui propostos sobre as transformações geométricas, em particular as isometrias, visavam a que nossos alunos, futuros professores, experimentassem uma forma diferenciada de se trabalhar com a Geometria, que levasse à sua aprendizagem de uma forma significativa e dinâmica, tendo o cuidado de que essas experiências não se limitassem apenas a "brincadeiras", mas que implicassem numa atividade intelectual, que exigissem o fazer matemático.

8º Encontro: Visão dinâmica da congruência de triângulos

O conceito de Congruência é fundamental na Geometria e, por isso é importante o seu estudo, uma vez que figuras planas congruentes possuem as mesmas propriedades, embora ocupem lugar diferente no plano. Estudaremos figuras planas e, em especial, o triângulo, pois, seja na Matemática, na Física, na Engenharia, etc, ele é a única figura plana fechada que é rígida.

Por definição, duas figuras planas são **congruentes** quando podem coincidir por superposição. Isso exige que, seguindo a ordem dos vértices, os lados correspondentes sejam congruentes e os ângulos correspondentes sejam, também, congruentes.

A tarefa extraclasse, deste encontro, tinha por objetivo explorar a composição de isometrias. Poucos foram os alunos que a realizaram, alegando não terem compreendido esses conceitos. Diante dessa constatação, a professora-pesquisadora pediu aos alunos que se reunissem em grupo para discutirem a tarefa, sob a direção da professora-pesquisadora.

a) <u>Refletindo um triângulo a partir de uma reta diretriz</u> 1) Construir um triângulo cujos lados medem 5,5 cm; 4,5 cm e 2 cm. Chamar os vértices desse triângulo de A, B e C. Construir uma reta qualquer, que não corte o triângulo (mesmo quando prolongada).

Chamar essa reta de reta **r**.

Fazer a reflexão do triângulo ABC, segundo a reta **r,** obtendo o triângulo A'B'C'.

2) Estabelecer comparações entre as duas figuras: triângulo ABC e triângulo A'B'C'.

Ao observar o trabalho dos grupos, na construção do triângulo e da reta (atividades 1 e 2), a professora-pesquisadora percebeu que alguns deles dobravam a folha sobre a reta para obter a imagem do triângulo construído. Vendo essa atitude dos alunos, ela lhes perguntou: - *E se vocês não pudessem dobrar a folha no eixo de simetria, como fariam?*

Apesar de a professora já ter falado em simetria e eixo de simetria, alguns alunos ficaram sem resposta a essa pergunta. Então, ela se voltou à lousa, fazendo um desenho ilustrativo para relembrar o significado de pontos simétricos, de figura simétrica, etc...

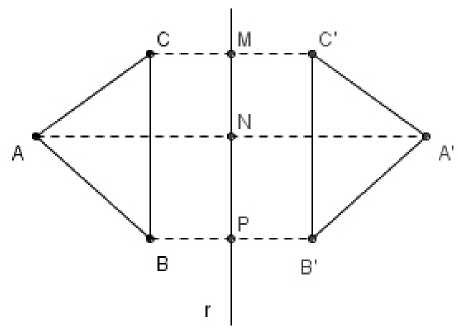


Figura 57– Figuras simétricas

Olhando para o desenho feito, puderam perceber, com a ajuda da professora, que as retas paralelas *BB'*, *AA'* e *CC'* interceptam a reta **r** nos pontos *P*, *N* e *M*, fornecendo $\overline{BP} \cong \overline{PB'}$, $\overline{AN} \cong \overline{NA'}$ e $\overline{CM} \cong \overline{MC'}$, levando a figura *A'B'C'* à imagem invertida de *ABC*.

Na segunda atividade,

b) <u>Uma nova situação envolvendo reflexão</u>

Construir um triângulo ABC e uma reta **r**, obtendo como imagem, o triângulo A'B'C'.

Repetir essa operação partindo do triângulo A'B'C' e buscar sua imagem em relação à reta **s,** paralela à reta **r**, obtendo o triângulo A''B''C''.

1) O que acontece entre esses três triângulos?

os grupos voltaram a fazer uso de desenhos buscando, então, obter a imagem *A'B'C'* de *ABC*. Traçando depois uma reta **s**, paralela a **r**, obtendo um triângulo *A''B''C''* como imagem de

A'B'C', que era o próprio triângulo *ABC*. Restava, então, chegarem a uma conclusão. O que aconteceu entre esses triângulos? Novamente precisaram da orientação da professora, que foi, de grupo em grupo, lendo e refletindo com os alunos sobre a atividade feita, até que chegassem a um consenso. O triângulo *A''B''C''* é exatamente o triângulo *ABC*, transformação que seria equivalente à figura obtida por uma translação. Daí, deduziu-se que a reflexão da reflexão, onde os eixos de simetria são paralelos, produziu um resultado equivalente ao de uma translação da figura original.

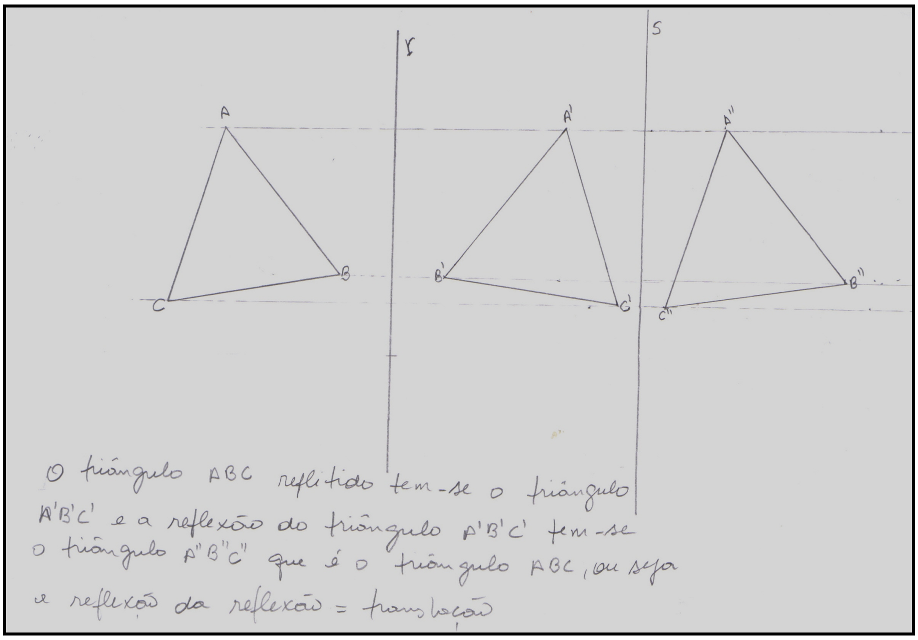
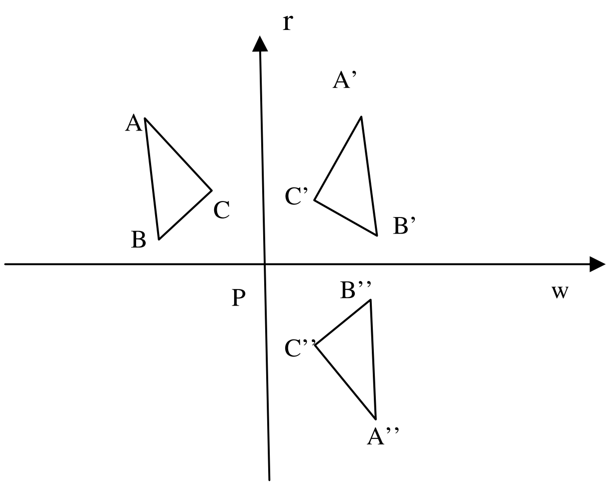


Figura 58– Atividade envolvendo reflexões com retas paralelas

Partiu-se para a atividade seguinte da tarefa extraclasse,

c) Observe a figura abaixo:



> Comparando o triângulo ABC com o triângulo A''B''C'', onde A'', B'' e C'' são vértices correspondentes de A, B, e C, é possível construir a imagem A''B''C'' do primeiro triângulo sem fazer antes a reflexão deste na reta **r**, obtendo o triângulo A'B'C' e, depois a reflexão de A'B'C', em relação à reta **w**, obtendo o triângulo A''B''C''? Justifique sua resposta.

os alunos perceberam, também com a orientação da professora, que é possível fazer a reflexão da reflexão, por meio de retas perpendiculares, **r** ⊥ **w**, produzindo um resultado equivalente a uma rotação da figura original. Ou melhor, duas reflexões onde os eixos de simetria são perpendiculares produzem uma rotação, de forma que, os elementos da figura original e de sua imagem final mostram-se como tendo sofrido uma rotação.

Para finalizar essas atividades a professora-pesquisadora entregou a cada aluno o texto: "Composição de isometrias" (anexo C, na página 414), que formalizava esse conceito e o leu para a classe que acompanhava atentamente, sem interferências.

Como neste encontro queríamos especificamente trabalhar a congruência de triângulos, passaremos a relatar e a analisar o que ocorreu em sala de aula, durante a atividade (iv) desenvolvida pelos grupos.

> <u>Fazendo construções e descobertas para fixação de conceitos construídos</u>
>
> Em grupo, os alunos deverão fazer as construções de acordo com os dados abaixo:
>
> a) Construir um triângulo, cujos lados meçam 2 cm, 3 cm e 4 cm.
>
> b) Construir um triângulo, cujos ângulos meçam 30^o, 90^o e 60^o.
>
> c) Construir um triângulo, cujos lados medem 3 cm e 5 cm, de modo que o ângulo formado por esses dois lados seja 45^o.
>
> d) Construir um triângulo, que tenha um lado de 6 cm e dois ângulos, um de 60^o e outro de 40^o, sendo que o lado de 6 cm é comum a esses dois ângulos.

Uma grande parte dos alunos demorou na construção desses triângulos. Foi preciso a orientação da professora no manuseio do material de desenho: régua, compasso, transferidor e esquadro, bem como na construção dos triângulos. Depois de todas as construções feitas pelos grupos, realizou-se uma plenária, a fim de que os grupos interagissem quando a professora-pesquisadora lhes pediu que comparassem suas construções e tirassem conclusões.

No intuito de motivar essa interação, a professora-pesquisadora começou a lhes indagar: - *Será que posso garantir que os triângulos desenhados por cada grupo são* *congruentes?* Sem muito pensarem, os alunos responderam que sim. - *Que conceito vimos da palavra congruente?* perguntou a professora. Alguns alunos disseram que figuras congruentes têm mesma forma, mesma medida e ocupam lugar diferente no espaço.

Ao constatarem suas medições, verificaram que somente o item “b” não caracterizava triângulos congruentes, mesmo que os triângulos tivessem todos os ângulos congruentes, as medidas dos lados dos triângulos apresentados pelos grupos se diferenciavam. Isso se deve ao fato de que , para todo triangulo retângulo vale o Teorema de Pitágoras.

Depois de chegarem a um consenso, a professora-pesquisadora fez uma apresentação informal dos critérios de congruência de triângulos (ALA, LAL, LLL, onde L = lado e A = ângulo) que, na realidade, são apenas diferentes condições suficientes para garantir a congruência.

O que se pretendia com essa atividade era que os alunos chegassem à conclusão de que quando se quer verificar se dois ou mais triângulos são congruentes não é necessário verificar todas as seis condições impostas para essa verificação, bastando apenas verificar três delas.

Mesmo não alcançando os objetivos propostos para esse encontro, não se pode negar que a professora-pesquisadora buscava sempre, por meio da metodologia de trabalho em sala de aula adotada, conduzir os alunos a atitudes de investigação e de reflexão. E isso é muito importante em Matemática como em qualquer área do conhecimento.

E a aula se encerrou.

9º Encontro: Visão dinâmica da congruência de triângulos

Como já vimos, a Matemática é uma ciência de padrão e ordem. Um exemplo ilustrativo desta afirmação é a Geometria. Muito de seu estudo é desenvolvido a partir do reconhecimento e da descoberta de um padrão e, a partir dele, levantar-se conjecturas.

As várias atividades aplicadas e trabalhadas até o momento tinham por objetivo a experimentação e a observação. Isto é muito importante, mas, em Matemática, não é o suficiente. Como afirmam Nasser e Tinoco (2004): “*O saber matemático, depois de ‘descoberto’ e explorado, de certa forma intuitivamente, deve ser organizado logicamente, por meio de deduções*”.

Quando medimos, por exemplo, os lados de um triângulo retângulo e verificamos que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, estamos na **Geometria Experimental**. Assim, fazendo uso de medidas, obtemos resultados aproximados e podemos tirar conclusões provavelmente verdadeiras. No entanto, nada nos garante que tais conclusões sejam sempre válidas.

É aí que entra a Geometria Dedutiva. Assim, quando provamos que, para qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos, sem fazer medições, estamos na **Geometria Dedutiva**, dentro de um raciocínio lógico-dedutivo, que nos garante a veracidade da proposição levantada.

No encontro anterior foram vistos, experimentalmente, três critérios de congruência de triângulos, LAL, LLL e ALA. Restava observar o critério $LAA_{o,}$ que foi deixado como tarefa extraclasse para que se verificasse experimentalmente, por meio de construção geométrica.

1) Construir um triângulo, que tenha lados medindo 6 cm e 4 cm e um ângulo de 30º que seja oposto ao lado de 4 cm e tirar conclusões.
2) Construir um triângulo, que tenha um lado medindo 8 cm, um ângulo adjacente a ele que meça 60º e um ângulo oposto a ele, que meça 45º e tirar conclusões.

Ao analisar as resoluções dos poucos alunos que cumpriram com a tarefa, a professora-pesquisadora tomou como exemplo as construções de dois alunos:

Com esses exemplos, a pesquisadora foi conduzindo a classe para que os alunos refletissem sobre as construções, levantando alguns questionamentos: - *Vejam, nessas duas questões, os triângulos construídos são congruentes*? Alguns alunos responderam: - *Aparentemente na segunda questão, sim*. E a professora insiste: - *Mas, por quê*? Silêncio absoluto, uma dúvida paira no ar...

Então, a professora disse: - *Observem, na primeira construção os dois triângulos não são congruentes, pois não possuem os três lados com a mesma medida, significando, com isso que terem dois lados com a mesma medida, um ângulo oposto a um dos lados de mesma medida não garante a congruência.*

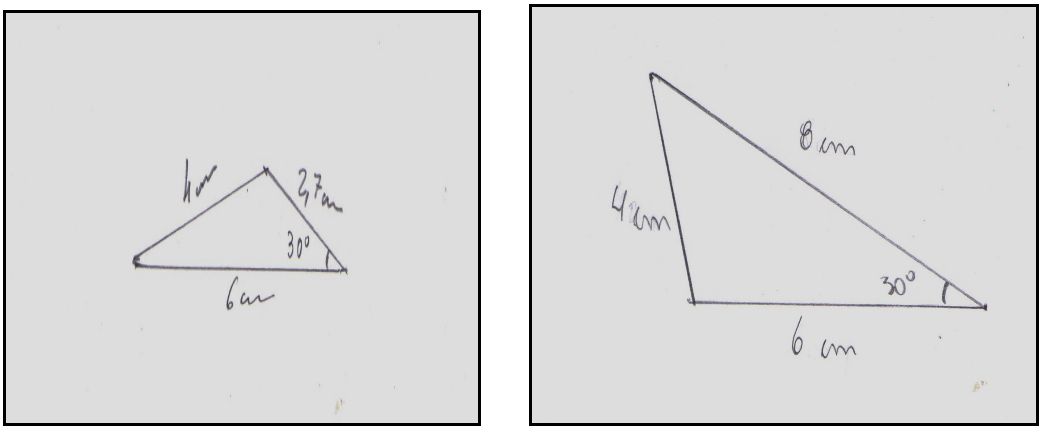


Figura 59 – Atividade 1 do caso de congruência LAAo

Enquanto que, na segunda questão, os dois triângulos são congruentes, pois possuem as medidas dos lados e dos ângulos congruentes, uma vez que com dois ângulos iguais, 60^o e 45^o, promovendo aberturas iguais, os terceiros ângulos são iguais: 75^o e, assim com um lado medindo 8 cm, os outros dois lados foram identificados como se fosse usado o procedimento de sobreposição, essa "visão aparente" seria facilmente percebida.

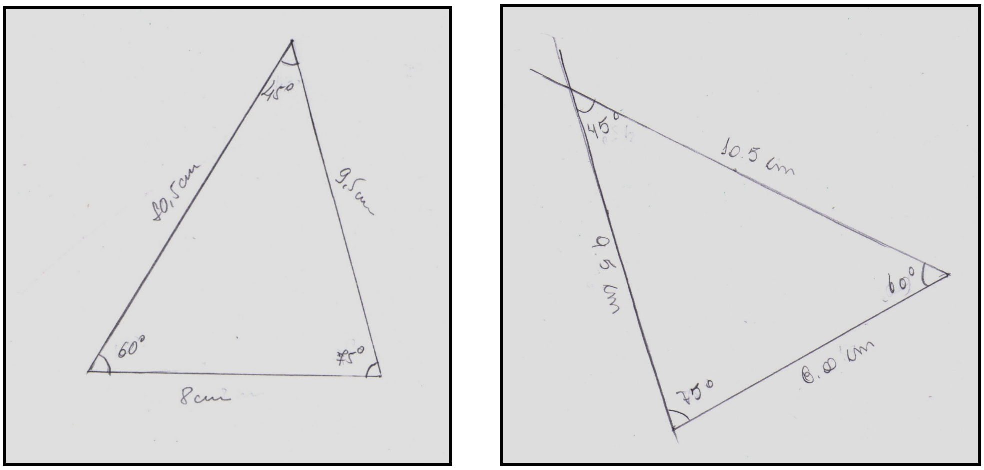


Figura 60– Atividade 2 do caso de congruência LAAo

Assim, terem a medida de um lado, de um ângulo adjacente a esse lado e de um ângulo oposto a esse lado com medidas iguais, pode garantir que esses triângulos são congruentes.

No encontro anterior, nas atividades propostas sobre congruência de triângulos, cada grupo apresentou casos particulares, isto é, desenhos diferentes de pares de triângulos que mostravam, por meio de medições, a congruência desses triângulos. Agora, a partir deste encontro, nas atividades seguintes, buscava-se entender o que de Matemática previamente conhecida deveria ser usada para *provar* que dois triângulos quaisquer são ou não congruentes.

Sendo assim, neste encontro, essas atividades consistirão da apresentação, conduzida pela professora-pesquisadora, de demonstrações matemáticas, do uso dos critérios de congruência de triângulos: LAL, ALA, LLL. Essas demonstrações, que normalmente, não são feitas nos livros didáticos atuais, são encontradas, com frequência, nos livros antigos, mas trabalhados com o espírito de uma geometria estática, analiticamente correta, mas, muitas vezes, de difícil compreensão para os alunos.

Nesta disciplina, estamos trabalhando com uma Geometria Dinâmica, fazendo uso do movimento, das transformações geométricas. Foi visto que ao se construir uma figura por meio de uma translação, de uma reflexão ou de uma rotação, estamos fazendo um transporte da figura original, obtendo, assim, figuras congruentes à original. Podemos também construir figuras congruentes utilizando mais de uma transformação geométrica, fazendo a composição de várias dessas transformações. Nesse caso, podemos dizer que foi feito um transporte da figura dada.

Assim, como um objetivo para este encontro, vamos observar, nas demonstrações, como atuar dentro dessas duas visões geométricas: a analítica e a dinâmica, fazendo um raciocínio lógico-dedutivo, usando como apoio os critérios de congruência de triângulos.

A atividade cujo propósito foi o de levar os alunos a demonstrar, isto é, fazer uma análise matemática que leve, a partir de dados da hipótese, a uma conclusão que reconheça a validade da tese, foi:

> Se dois triângulos têm ordenadamente dois lados e o ângulo compreendido entre eles congruentes, então, esses triângulos são congruentes. Demonstrar esse teorema: a) analiticamente, segundo a geometria euclidiana; b) com geometria dinâmica, ou seja, a geometria das transformações, que, neste caso, trata das isometrias (translação, rotação e reflexão).

A professora-pesquisadora deu um tempo para que os alunos, em grupos, pensassem sobre a forma de chegar à demonstração pedida. Durante suas reflexões, no intuito de motivá-los e instigá-los a resolver o problema, alguns questionamentos foram levantados por ela: - *Vocês já viram ou chegaram a fazer demonstrações durante sua escolaridade?* Algumas respostas foram dadas, dentre elas: *Já vi, mas não me lembro; já vimos aqui em nosso curso, mas por meio da geometria dinâmica, não; demonstrações durante o curso foram vistas, agora é preciso ver se o aluno compreendeu ... ver é uma coisa, compreender é outra história ...*

Depois dessa breve discussão, a professora deu um tempo para que os grupos viessem a construir a demonstração pedida no item "a". Foi observando cada grupo e orientando-lhes, alertando-lhes de que escrever uma demonstração matemática exige saber como argumentar, como escrever matematicamente aquilo que pensavam. Levantou alguns questionamentos: O que é hipótese? O que é tese?

Dirigindo-se à lousa, a professora-pesquisadora desenhou dois triângulos ABC e A'B'C', escrevendo a hipótese: $\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \end{cases}$ e a tese: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

E perguntou: O que é hipótese? O que é tese? Uma aluna respondeu: - Hipóteses *são os dados do problema.* A professora se dirigindo a outro aluno, pediu-lhe que identificasse as hipóteses do problema. Esse aluno acabou lendo todo o problema, sem consegui distingui o que era hipótese e o que era tese, sendo, então, corrigido pela professora. A professora disse ainda que hipótese nunca pode ser negada ou modificada.

Como provar que essa tese é verdadeira, perguntou a professora. Outra aluna disse: - *Nós temos dois lados e um ângulo, certo? Então, nesse caso, não seria provar que os três lados e os três ângulos são congruentes?* A professora confirmou: - *É isso mesmo, temos que partir da definição de triângulos congruentes ... Vocês estão vendo como é importante termos conhecimentos prévios, os conceitos compreendidos, pois eles nos ajudam a resolver problemas.*

A professora deu um bom tempo para que os grupos pensassem mais sobre a forma de demonstração e continuou sempre os orientando. Um dos grupos pensou em demonstrar esse caso usando casos de congruência ainda não provados. Outro grupo media os lados e os ângulos dos triângulos. Um componente de um dos grupos dirigiu-se à professora perguntando se deveria usar a hipótese e a tese, e a professora o corrigiu dizendo: *Não! temos que partir da hipótese para então chegar à tese.*

Isso mostra a dificuldade dos alunos em entender o que significa provar e demonstrar um teorema, mesmo já tendo estudado a Geometria Euclidiana em um semestre anterior.

Por fim, depois de todos os debates frente a esse problema, com a mediação da professora e com os grupos rascunhando uma demonstração, foi necessário a professora ir à lousa e, com os alunos acompanhando atentamente, desenvolver a demonstração que se apresentou assim:

Consideremos os triângulos ABC e A'B'C'

Figura 61 – Triângulos ABC e A'B'C'

Hipótese: $\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \end{cases}$ Tese: ΔABC ≅ ΔA'B'C'

Para mostrar que essa tese é verdadeira deve-se mostrar, a partir da definição de congruência que, também, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\hat{C} \cong \hat{C}'$

No momento que se marcou $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, os pontos *A* e *B* e *A'* e *B'* ficaram definidos. Os ângulos $A\hat{B}C$ e $A'\hat{B}'C'$, por hipótese, são congruentes. Logo as direções que saem de $\hat{B}$ e $\hat{B}'$ ficaram definidas como, também, os pontos *A* e *A',* *C* e *C'*, pois, por hipótese, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.

Sabe-se que por dois pontos passa uma e uma só reta. Então, por *A* e *C* passa uma reta formando o segmento *AC*. Por *A'* e *C'* e *A'C'* passa-se uma reta formando o segmento *A'C'*.

Com vértices em *A* e *A',* os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e $\overline{A'C'}$ e $\overline{A'B'}$ determinam os ângulos congruentes *A* e *A'*.

Analogamente, com vértices *C* e *C'*, os segmentos *AC* e *BC* e *A'C'* e *B'C'* determinando os ângulos congruentes *C* e *C'*.

Esses resultados, de acordo com a definição de triângulos congruentes, garantem que os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são congruentes.

Todo esse trabalho precisou ser repetido várias vezes e analisado por diferentes caminhos. Vários alunos não conseguiam compreender o sentido de usar a hipótese para se chegar a tese. Uma aluna chegou a dizer que na disciplina feita sobre Geometria, no semestre anterior, esses resultados eram dados como postulados, isto é, verdades aceitas sem demonstração. Diante dessa constatação, pudemos deduzir que esses alunos ainda não haviam tido experiências com demonstrações.

Como se gastou muito tempo nessa atividade, a demonstração da parte "b" ficou para ser desenvolvida no encontro seguinte. Foi entregue a tarefa extraclasse, encerrando-se, assim este encontro.

10º Encontro: Visão Dinâmica da Congruência de Triângulos

Há uma citação em Oliveira (2008, p.3) que diz:

> A expressão "raciocínio matemático" designa um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtém novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio). É freqüente considerar-se que a obtenção dessas novas proposições se faz através do raciocínio dedutivo, esquematizável na forma "Se A então B" (simbolicamente $A \Rightarrow B$). A uma sequência de dedução do tipo $A \Rightarrow B \Rightarrow ... \Rightarrow Z$ chama-se demonstração. A demonstração é, por isso, central ao raciocínio tipicamente matemático.

Mediante a essa citação, pode-se dizer que o raciocínio matemático requer pensamento analítico, criativo e prático, o que não acontece de forma rápida. São necessárias a intuição, a experiência e a observação. Salienta Oliveira (2008) que a formulação das ideias matemáticas é um processo gradual e algo lento que surge plenamente quando se considera que essas ideias estão suficientemente maduras.

Partindo deste pressuposto, dando continuidade ao relato e à análise deste encontro, iniciou-se, como de costume, com a correção e discussão da tarefa extraclasse. Foi deixada como tarefa que os alunos viessem a provar, por meio da geometria euclidiana, o critério de congruência ALA. Durante a discussão, os alunos, que a fizeram, disseram ter copiado do livro, não tendo compreendido algumas passagens dessa demonstração e, então, a professora convocou um aluno para ir à lousa e juntos, professora e alunos, a discutiram. A professora ressaltou que também se poderia provar a congruência dos dois triângulos usando a própria definição de congruência, mas como já havia sido provado o caso LAL, possivelmente, ele poderia ser usado nessa demonstração. Ela voltou a chamar a atenção para a escrita do desenvolvimento da demonstração do teorema, dizendo que isso é fundamental para a compreensão de quem o vai ler. Alguns questionamentos, por parte dos alunos, foram surgindo no decorrer da demonstração e foram respondidos pela professora, até que todos chegassem a um consenso.

Essa demonstração, feita por um aluno, foi assim desenvolvida.

Demonstração do caso ALA, conhecendo o caso LAL

Consideremos os triângulos ABC e A'B'C'

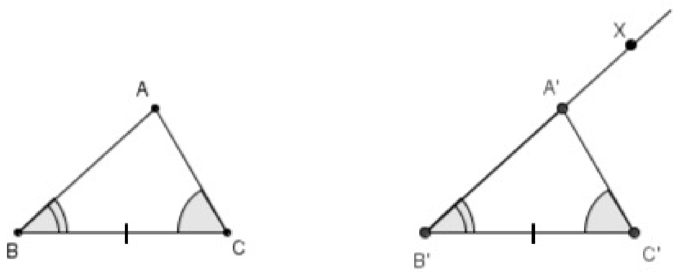


Figura 62– Congruência de triângulos pelo caso ALA

Hipótese: $\begin{cases} \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases}$ Tese: Δ ABC ≅ Δ A'B'C'

Provemos primeiro que $\overline{BA} \cong \overline{B'A'}$. Pelo transporte de segmentos, obtemos na semi-reta $\overrightarrow{B'A'}$ um ponto X tal que $\overrightarrow{B'X} \cong \overrightarrow{BA}$ **(1)**

Como, por hipótese, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ e $\hat{B} \cong \hat{B}'$, então, de (**1**), pelo caso LAL, podemos concluir que $\Delta\, ABC \cong \Delta\, XB'C'$ e, desse resultado, temos que $B\hat{C}A \cong B'\hat{C}'X$ **(2)**

Da hipótese, $B\hat{C}A \cong B'\hat{C}'A$ e, de acordo com o transporte de ângulos, decorre que $\overleftrightarrow{B'A'}$ e $\overleftrightarrow{C'X} = \overleftrightarrow{C'A}$ interceptam-se num único ponto X = A'. Desse resultado com (**1**), decorre que $\overline{B'A'} \cong \overline{BA}$.

Então,

$\overline{BA} \cong \overline{B'A'}$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, pelo caso LAL, concluímos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Houve, por parte dos alunos, muita contestação a respeito dessa passagem ocorrida na demonstração acima. Assim, a professora-pesquisadora mostrou outra maneira de provar esse critério, escrevendo na lousa:

Hipótese: $\begin{cases} \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases}$ Tese: Δ ABC $\cong$ Δ A'B'C'

Desenhou os triângulos *ABC* e *A'B'C*', seguindo as condições dadas pela hipótese e foi dizendo:

Figura 63– Triângulos ABC e A'B'C'

Inicialmente, marca-se o lado *BC* congruente ao lado *B'C'*. Em seguida marca-se o ângulo *B'* e traça-se a reta que parte de *B'* paralela à reta que contem *AB*. Depois, marca-se o ângulo *C'* côngruo a *C* e determina-se a sua direção. As retas que dão a direção dos ângulos *B'* e *C'* se encontram num único ponto que necessariamente será o correspondente de *A* no triangulo *A'B'C'*. Logo $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Assim, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\hat{B} \cong \hat{B}'$. Portanto, fazendo uso do caso LAL, os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são congruentes e a tese está demonstrada.

Na próxima atividade pretendia-se trabalhar com a demonstração do caso LAL, fazendo uso da **geometria das transformações**, haja vista que já havia sido trabalhada intuitivamente e experimentalmente. Depois de se ter dado um tempo para que os alunos, em grupos, pensassem numa forma de demonstrar esse caso de congruência, utilizando a geometria dinâmica, a professora-pesquisadora entregou, por escrito, a cada grupo, uma folha contendo essa forma de demonstração. Deixou que cada grupo lesse e interpretasse o teor dessa demonstração, isto é, o que significava movimentar o triângulo ABC de forma que ele fosse levado ao triângulo A'B'C' por uma composição de isometrias, mais especificamente pela reflexão, fazendo uso da simetria axial.

Sempre se dirigindo a cada grupo e interferindo quando necessário, a professora-pesquisadora os orientava para que fizessem desenhos visando a uma melhor compreensão do que liam. Depois disso, ela se dirigiu à lousa formalizando a demonstração, aproveitando-se de idéias expostas pelos alunos, que acompanhavam atentamente.

Considere os triângulos *ABC* e *A'B'C'* com $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$; $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ e $\hat{A} \cong \hat{A}'$[57].

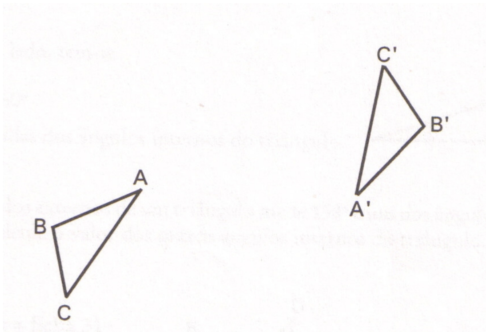


Figura 64– Triângulos congruentes pelo caso LAL usando a geometria das transformações

Para mostrar que esses triângulos são congruentes, basta mostrar que o triângulo *ABC* pode ser levado ao triângulo *A'B'C'* por um transporte, de modo que o lado *AB* coincida com o lado *A'B',* o lado *AC* coincida com o lado *A'C'* e o ângulo *A* coincida com o ângulo *A'.* Neste caso, o transporte pode ser feito por meio de duas simetrias axiais.

Devido à reflexão, os vértices A, B e C são levados a outros vértices refletidos A'B''C'', guardando a mesma distância de cada vértice relativamente ao eixo de simetria PM. Assim, se P, Q e M são pontos do eixo de simetria, então $\overline{AP} \cong \overline{PA'}$, $\overline{BQ} \cong \overline{QB''}$ e $\overline{CM} \cong \overline{MC''}$. A figura seguinte reflete essa situação e ΔABC ≅ ΔA'B''C'' **(1)**

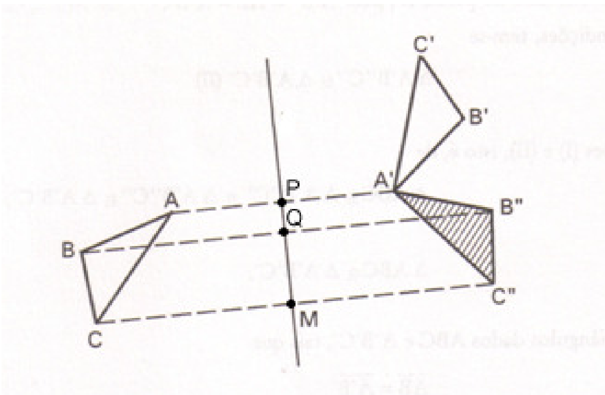


Figura 65– triângulo ABC levado ao triangulo A'B''C''

[57] Essa demonstração foi adaptada do livro *As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria,* vol 1, de autoria de Martha Maria de Souza Dantas e outros, 1998

Considerando, agora, a simetria cujo eixo é a reta A'N que contém a bissetriz do ângulo B'A'B'', tem-se a figura seguinte:

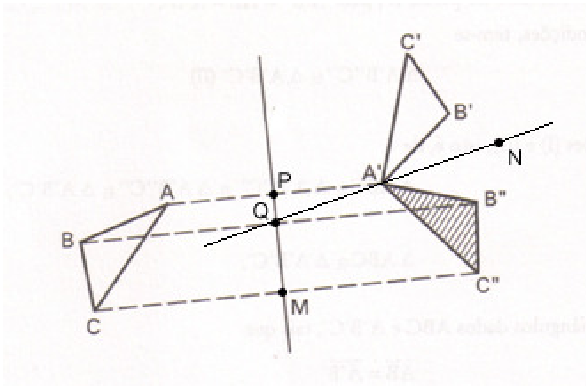


Figura 66– triângulos A'B''C'' levado ao triângulo A'B'C'

Observar que, na figura acima, a bissetriz A'N do ângulo B'A'B'' é também a bissetriz do ângulo C''A'C' pois

$$C''\hat{A}'B'' = \hat{A} = \hat{A}' \quad \text{e} \quad B''\hat{A}'N = N\hat{A}'B'$$

Pela simetria de eixo A'N, tem-se que:

- a semi-reta A'C''é levada à semi-reta A'C';

- a semi-reta A'B'' é levada à semi-reta A'B';

Portanto, o ângulo B''A'C'' é levado ao ângulo B'A'C'.

Além disso, tem-se que:

- o ponto C'' é levado ao ponto C', pois $\overline{A'C''} = \overline{AC} = \overline{A'C'}$;

- o ponto B''é levado no ponto B', pois $\overline{A'B''} = \overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Nessas condições, tem-se

ΔA'B''C'' ≅ ΔA'B'C' **(2)**

Das relações **(1)** e **(2)** resulta que o Δ ABC ≅ Δ A'B'C'.

A visualização e o uso compreendido das isometrias trabalhadas permitiram aos alunos entender melhor o que acontecia quando cada uma delas opera. O que já é um avanço, pois tais habilidades são essenciais para desenvolver os processos necessários para resolver problemas de natureza geométrica, como no problema acima.

Na tentativa de fazer com que os alunos compreendessem essa demonstração, mostrou-se necessária, por várias vezes a explicação direta da professora. Nesse momento, fazendo referência ao que foi trabalhado, numa forma dinâmica, usando resultados já provados, bastaria, aos alunos, terem percebido que, na primeira reflexão se chegaria a um triangulo congruente, embora na forma invertida. Na segunda reflexão, o triângulo refletido teria voltado congruente, mas sofrendo uma rotação.

Pode-se observar que lembrando-se das propriedades de composição de isometrias, a demonstrações se tornam muito mais rápidas e claras para os alunos.

Este encontro se encerrou com esta atividade e, por último, a professora-pesquisadora entregou a atividade (iii) deste encontro e a tarefa extraclasse.

11º Encontro: Uma Visão Dinâmica da Semelhança de Triângulos

Nos próximos três encontros veremos que outro tipo de transformação no plano, a **Homotetia**, pode ser utilizada na introdução e na exploração do conceito de **Semelhança** de figuras e, em especial, de triângulos.

Os PCN (1998), ao incluírem os conceitos e procedimentos para a área de Espaço e Forma, para o 4º ciclo do Ensino Fundamental, recomendam

"O desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas, a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (dos ângulos) e as que se modificam (dos lados, das áreas de superfície e do perímetro)".

No senso comum, duas figuras são **semelhantes** quando têm a mesma forma, mas mantendo a proporcionalidade entre os comprimentos de seus elementos. Chamando a atenção, pode-se dizer que não é suficiente que as duas figuras comparadas tenham a mesma "aparência" para serem, matematicamente, consideradas semelhantes, ou seja, não basta serem "parecidas". O que é necessário é que sejam mantidas as medidas dos ângulos e as proporções entre os comprimentos dos lados correspondentes.

Resumindo, pode-se dizer que duas figuras são **semelhantes** quando uma pode ser obtida como uma ampliação ou uma redução da outra.

Antes de se trabalhar com o conceito de homotetia, a professora iniciou a aula com a tarefa extraclasse. Voltou a chamar a atenção da classe dizendo que os alunos não estavam cumprindo com a execução da tarefa. Alguns alunos alegaram não está compreendendo a demonstração feita por meio da geometria das transformações. Complementaram dizendo nunca ter visto esse tipo de demonstração.

Será que eles saberiam fazer a demonstração dessas propriedades, seguindo a forma tradicional de Euclides??? Não lhes "caía a ficha" de que lhes estávamos mostrando uma outra e nova maneira de fazer geometria.

Prosseguindo, dois alunos vieram à lousa expor sua demonstração por meio da geometria das transformações, dos casos ALA e LLL, nessa ordem.

Aluno A

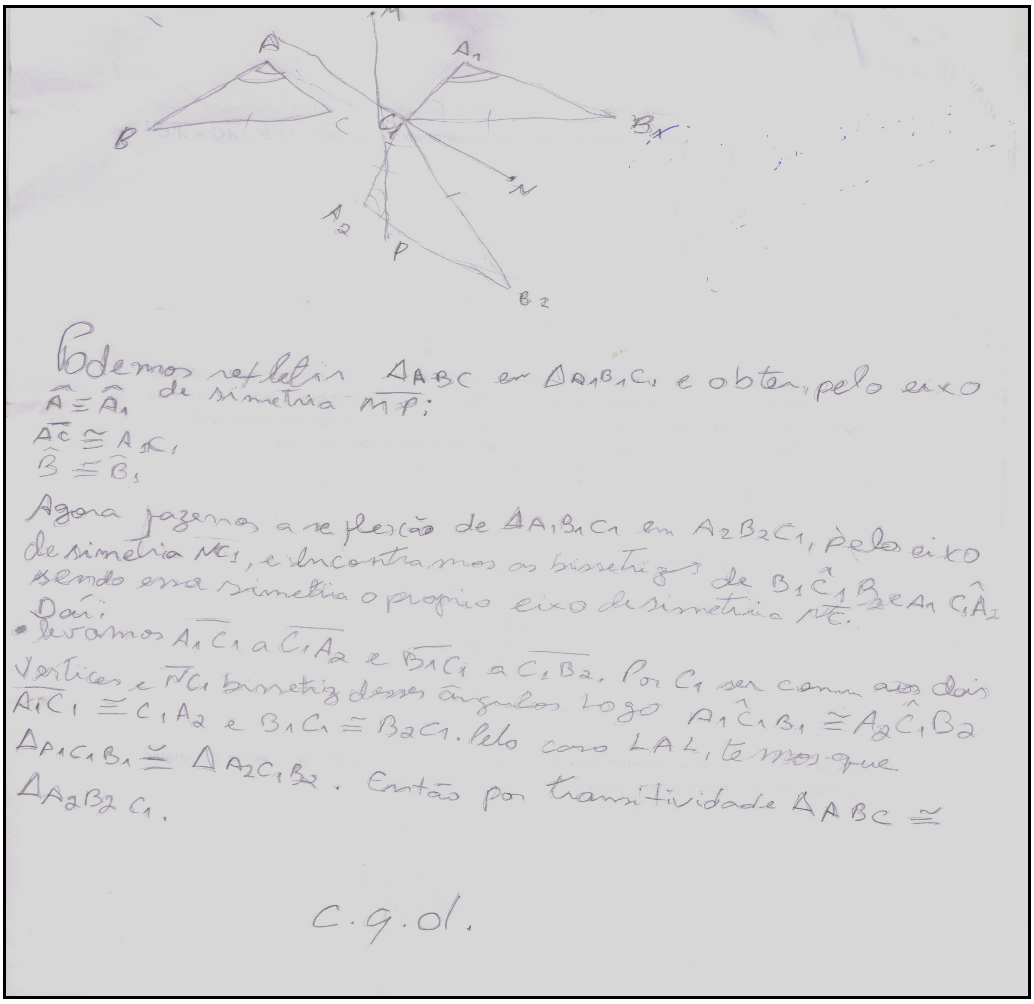


Figura 67 – Demonstração dinâmica do caso ALA pelo aluno A

Em sua figura, o aluno queria mostrar o caso de congruência ALA usando a geometria das transformações. Para isso, tinha que deduzir que os triângulos ABC e $A_2B_2C_1$ são congruentes.

A professora-pesquisadora, na necessidade de explicar o que esse aluno fizera, em sua tarefa, resolveu formalizar todos os passos dessa demonstração, construindo na lousa o seguinte:

Temos, por hipótese que $\hat{A} \cong \hat{A}_2$, $\overline{AB} \cong \overline{A_2B_2}$ e $\hat{B} \cong \hat{B}_2$ e queremos provar que o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo $A_2B_2C_1$. Para isso, devemos, primeiro, levar o triângulo *ABC* no triângulo $A_1B_1C_1$ pelo eixo de simetria *MP*, fruto de uma reflexão.

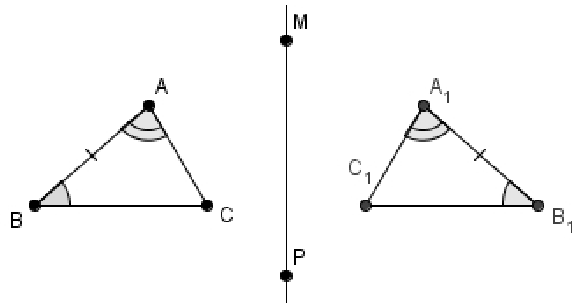


Figura 68– Triângulos refletidos por um eixo de simetria

Com isso, verificou que: $\hat{A} \cong \hat{A}_1$, $\overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}$ e $\hat{B} \cong \hat{B}_1$.

Fazendo a reflexão em $A_1B_1C_1$ e $A_2B_2C_1$, pelo eixo de simetria NC_1 e traçando as bissetrizes $B_1\hat{C}_1B_2$ e $A_1\hat{C}_1A_2$

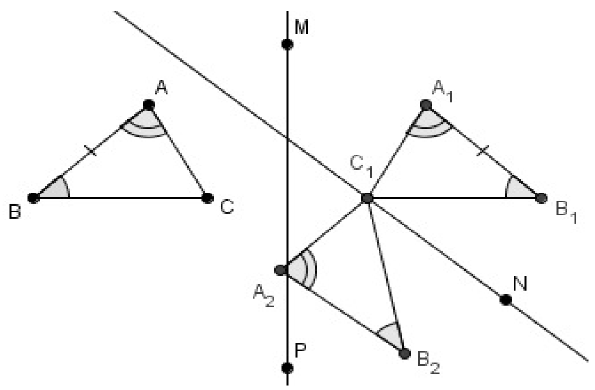


Figura 69– Triângulos refletidos pelo eixo de simetria CN

Daí, tem-se $\overline{A_1C_1} \cong \overline{C_1A_2}$ e $\overline{B_1C_1} \cong \overline{C_1B_2}$. Por C_1 ser comum aos dois vértices e NC_1 bissetriz desses ângulos, então: $A_1\hat{C}_1B_1 \cong A_2\hat{C}_1B_2$, $\overline{A_1C_1} \cong \overline{C_1A_2}$ e $\overline{B_1C_1} \cong \overline{C_1B_2}$. Pelo caso LAL, temos que o triângulo $A_1C_1B_1$ é congruente ao triangulo $A_2C_1B_2$.

Então, por transitividade, o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A_2B_2C_1$.

Aluno B:

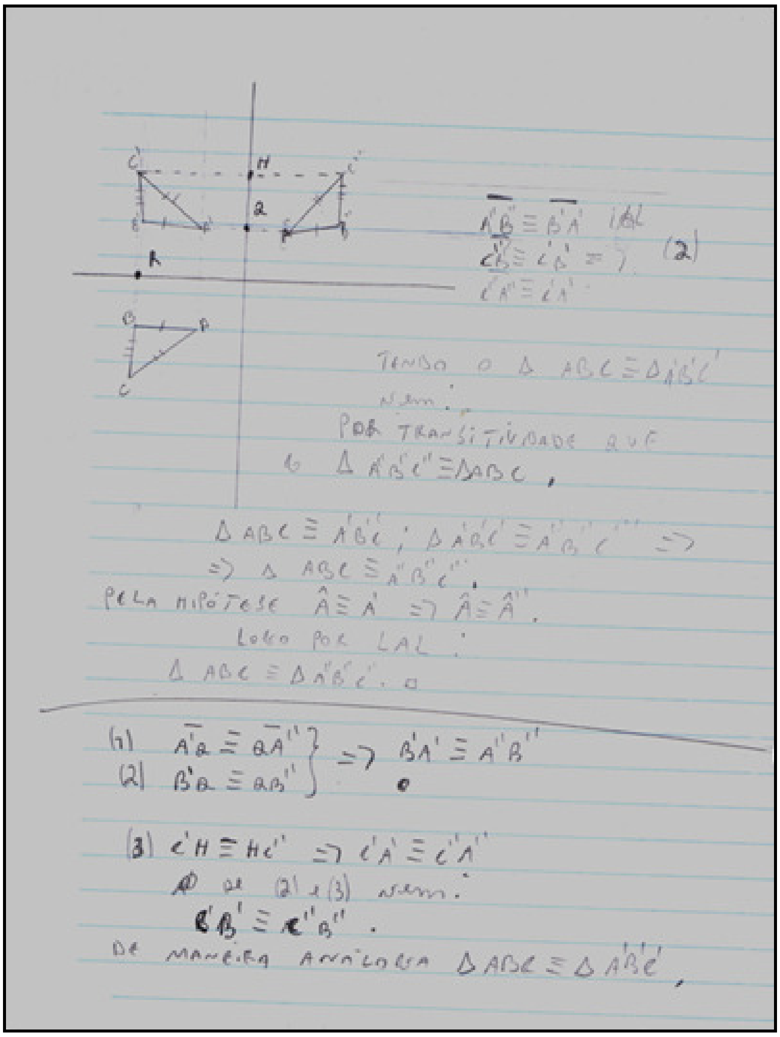


Figura 70– Demonstração dinâmica do caso LLL pelo aluno B

Este aluno pensou em demonstrar o caso LLL usando a mesma idéia de levar um triângulo em outro, por meio da geometria das transformações. No entanto, os seus argumentos não explicitam bem o que foi feito. Na verdade, ele aplicou duas simetrias axiais por meio de retas perpendiculares. Ele verificou que o triângulo ABC é congruente ao triângulo A'B'C' pelo eixo de simetria *r*. Seguindo, verificou que o triângulo A'B'C' é congruente ao triângulo A"B"C" pelo eixo de simetria HQ e, daí, deduziu que os triângulos ABC e A"B"C" são congruentes.

Nota-se nas duas demonstrações apresentadas pelos alunos **A** e **B** que eles já haviam adquiridos dois elementos essenciais para a formação do pensamento geométrico: a visualização e representação geométrica, facilitando, dessa forma, uma melhor compreensão na resolução do problema proposto. O que faltou a esses alunos foi o poder de argumentação geométrica para comunicar suas ideias. Possivelmente, essa dificuldade não seja atribuída a um desenvolvimento cognitivo lento, mas sim, devido a uma falta de compreensão no significado, no objetivo e na utilidade de uma demonstração matemática.

As demonstrações por meio da geometria das transformações, dos casos ALA, LLL foram entregues, por escrito e debatidas com a participação dos alunos. Encontram-se no anexo C, nas páginas 415 a 420.

Vale ressaltar que as demonstrações por meio da geometria euclidiana dos casos ALA, LLL e LAA_o não foram discutidas em sala de aula, uma vez que, as mesmas poderão ser encontradas em livros didáticos. Mas, foram pedidas, pela professora, que se pesquisasse essas demonstrações.

As questões (2) e (3) da tarefa extraclasse foram deixadas para serem comentadas e corrigidas em um outro encontro, o encontro 14, devido ao atraso na sequência das atividades previstas para este encontro.

Prosseguindo, foi lido e comentado pela professora-pesquisadora o texto: "O conceito de razão e proporção", de nossa autoria, para uma introdução ao que se pretendia estudar como, por exemplo, a ampliação e redução de figuras. O texto se encontra no anexo C, na página 421.

As atividades que foram propostas para este encontro, em que se pretendia trabalhar o conceito de Homotetia, se apresentaram numa abordagem bem intuitiva, experimental e com construções, uma vez que estávamos trabalhando em um Laboratório de Ensino de Matemática e fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Sendo assim, partíamos sempre de problemas para, então, chegar aos conceitos geométricos pretendidos.

Os alunos, em grupos, começaram a trabalhar sobre as atividades. Houve uma certa dificuldade em alguns grupos, ora na interpretação do enunciado do problema, ora na construção, sendo, portanto, necessária a intervenção da professora, sobretudo ainda, no manuseio do material de desenho.

Na atividade (ii), os grupos responderam bem, pois já haviam relembrado o conceito de razão durante a leitura do texto "O conceito de razão e proporção". Bastava que observassem as dimensões das fotografias e estabelecessem suas razões, chegando à conclusão de que a foto 5 x 8 não é uma ampliação exata das outras fotos. Constatou-se também que a razão entre as duas dimensões da foto 5 x 8 não é igual à razão entre as dimensões correspondentes das outras duas fotos: $\frac{3}{4} = \frac{4,5}{6} \neq \frac{5}{8}$. Além disso, verificou-se a proporcionalidade entre as dimensões das duas primeiras fotografias, o que não ocorreu com a terceira.

A atividade (iii) tinha por objetivo chegar ao conceito de homotetia e, consequentemente, ao conceito de figuras semelhantes.

Alguns grupos sentiram dificuldade em executá-la. Um membro de uma dupla de alunos ficou muito confuso na construção da figura pedida. Sua companheira lia passo a passo da atividade explicando-lhe como proceder. A professora-pesquisadora também interveio ajudando-o nessa construção, quase que pegando em sua mão para que a construção se realizasse. Como ele havia pego um canto da folha quadriculada, não percebendo que deveria obter outra figura a partir da original, a lhe professora perguntou: -*E agora, o que fazer*? Ele disse: -*Como a folha está dobrada, posso abrí-la e assim continuar a construção*. E continuou, porém com a ajuda da colega e da professora.

Seguem algumas construções:

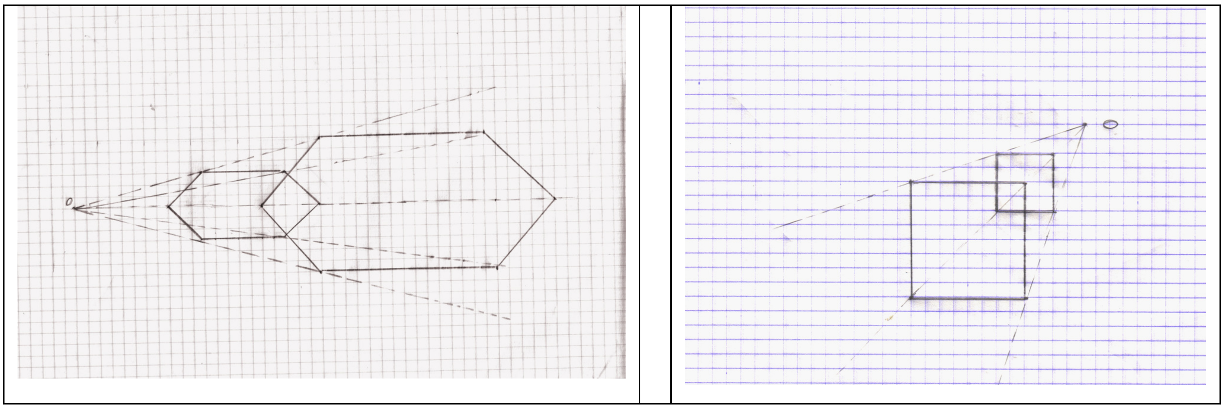


Figura 71– Atividade de Homotetia realizada por alunos

Trabalhar a Geometria dessa nova forma – a Geometria Dinâmica – se apresentava aos alunos como um assunto novo. E, com o desenvolvimento das ações através das transformações, os alunos recebiam essas ideias com mais naturalidade, uma vez que esta abordagem não apelava para as dificuldades encontradas numa teoria já trabalhada, mas pouco compreendida.

Feita a construção, algumas questões foram levantadas. Na discussão dessa atividade, para se chegar ao conceito de homotetia, observou-se que os polígonos construídos tinham a mesma forma, os ângulos correspondentes eram congruentes e que os lados correspondentes nos dois polígonos eram paralelos e proporcionais. E, assim, pode-se dizer que o polígono originado do inicial foi obtido por meio de uma transformação de homotetia, ou que os dois polígonos são homotéticos.

As atividades (iv) e (v), tinham como propósito mostrar que uma homotetia fica bem definida quando se conhece seu centro e sua razão. Em outras palavras, quando se fixa o centro e a razão *k* de uma homotetia H, é possível determinar a imagem de qualquer ponto ou figura pela homotetia H.

Nesse momento, a professora-pesquisadora sentiu necessidade de fixar, entre os alunos, alguns dos resultados obtidos nessa aplicação. Assim, de acordo com as figuras acima, algumas conclusões puderam ser tiradas:

- Na primeira figura, o centro de homotetia está fora da figura e pode-se observar que a razão de homotetia *k* é um número maior que zero, gerando, portanto, uma ampliação da figura original.

- Na segunda figura, o centro de homotetia está no interior da figura e pode-se observar que a razão de homotetia k é um número entre zero e um, ou seja, $0 < k < 1$, gerando, portanto, uma redução da figura original.
- Chamou-se atenção o caso em que $k = 1$. Neste caso, a figura obtida da original coincide com ela e, então, trata-se de uma congruência, sendo considerado um caso particular de homotetia.
- Comparando a razão entre os perímetros, da figura original para a sua imagem, observou-se que a razão entre eles é a mesma que a razão de homotetia dada, seja na ampliação ou na redução. Enquanto que, comparando a razão entre as áreas, da figura original para a sua imagem, observou-se que a razão entre eles é o quadrado da razão de homotetia, seja na ampliação ou na redução da figura.

Depois da discussão dessas atividades a professora-pesquisadora entregou-lhes o texto: “Visão dinâmica da Semelhança de triângulos”, que se encontra no anexo C, na página 405, como tarefa extraclasse e a atividade (vi) também ficou como tarefa, encerrando-se, assim, mais um encontro.

12º Encontro: Uma Visão Dinâmica da Semelhança de Triângulos

A semelhança de figuras constitui um tópico muito importante na aprendizagem da Matemática, devido às suas muitas aplicações. Ela é fundamental na representação de objetos e na confecção de plantas e mapas, para que se obtenha uma redução fiel, guardando as mesmas proporções, isto é, de modo que a razão entre as dimensões da figura original e de sua representação seja constante.

Usualmente, numa linguagem informal, diz-se que duas figuras são semelhantes quando são p*arecidas*. Em Matemática, **semelhança** significa ter exatamente a mesma forma, podendo ter tamanhos diferentes. Em se tratando dos polígonos, para que eles sejam semelhantes não basta que tenham o mesmo número de lados, ou que os lados tenham as mesmas medidas. É necessário que esses polígonos tenham a mesma forma, mantendo a proporcionalidade dos lados. Disso resulta, como definição, que dois polígonos são **semelhantes** quando têm os ângulos respectivamente congruentes e as medidas dos lados correspondentes proporcionais.

No encontro anterior foi trabalhado o estudo de homotetia, ou seja, o estudo das transformações que envolvem ampliação e redução de figuras, que se caracteriza como um bom ponto de apoio à construção do conceito de semelhança. Há uma boa razão para se fazer esse estudo, pois há uma forte conexão desse conceito com outros conteúdos da matemática, como razões e proporções, propriedades das figuras, ângulos, medidas (áreas e volumes), bem como, conteúdos de outras áreas: artes, educação física, ciências, geografia, física, etc.

Partindo desse pressuposto, neste encontro, trataremos da semelhança de polígonos e, em destaque, os triângulos, pois como já vimos no estudo de congruência, eles aqui também ocupam um lugar especial, tanto do ponto de vista matemático, como em relação às questões práticas. Como ressaltam Nasser e Tinoco (2004):

> "Do ponto de vista matemático, devido a sua rigidez, pode-se garantir a semelhança de dois triângulos a partir de apenas uma das condições estabelecidas na definição de polígonos semelhantes. Na prática, a semelhança de triângulos é usada para calcular distâncias inacessíveis, como fez Tales de Milleto (624 a. C.) para calcular a altura da pirâmide de Quéops, no Egito".

Iniciou-se a aula com a leitura do texto: "Visão dinâmica da semelhança de triângulos", na qual se pretendia formalizar conceitos vistos no encontro anterior, por meio de experiências e observações.

Durante a leitura houve algumas interferências por parte de alguns alunos, procurando entender o significado de coeficiente de proporcionalidade, também chamado de razão. Outra dúvida de interpretação no texto foi o de pontos alinhados. A professora-pesquisadora reforçou dizendo da relação que há entre a razão e o perímetro das figuras homotéticas, bem como, a do cálculo de suas áreas. Acrescentou, ainda, que esse estudo também pode ser feito com figuras tridimensionais.

Dando continuidade a este encontro, a professora-pesquisadora disse que trabalhariam agora a semelhança de triângulos e pediu aos alunos que se dispusessem em grupos para a execução das tarefas a seguir e, na sequência das atividades propostas, pediu aos grupos que trabalhassem nas atividades (ii) e (v).

Para desenvolver essas atividades, precisariam recortar as figuras A, B e C, sobrepô-las à figura X e compará-las, fazendo medições entre os lados e os ângulos, preenchendo a tabela que as acompanhava. Ficando, então, assim:

Polígono	Relação com os lados de X	Relação com os ângulos de X	O polígono é semelhante a X?
A	Não são proporcionais	Ângulos correspondentes congruentes	Não
B	Cada lado é metade do lado correspondente de X	Não são congruentes	Não
C	Cada lado é metade do lado correspondente de X	Ângulos correspondentes congruentes	Sim

Quadro 16– Semelhança de Polígonos

Triângulo	Relação com os lados de X	Relação com os ângulos de X	O triângulo é semelhante a X?
A	Os lados correspondentes não são proporcionais	Não são congruentes	Não
B	Cada lado é metade do lado correspondente de X	Ângulos correspondentes congruentes	Sim
C	Os lados correspondentes não são proporcionais	Não são congruentes	Não

Quadro 17 – Semelhança de triângulos

Durante a execução das atividades pelos grupos, houve a necessidade da mediação da professora-pesquisadora quando se tratava de medir ângulos, principalmente. Alguns alunos ainda tiveram dificuldades em manusear com o transferidor.

Depois que fizeram todas as medições, não compreendiam como preencher a tabela e a professora interferiu dizendo que deveriam verificar se os ângulos correspondentes eram ou não congruentes e se havia ou não proporcionalidade entre os lados.

Com essa atividade pôde-se chegar às seguintes conclusões:

Em relação à Tabela 1:

- Apenas a figura C é uma redução da figura X.
- Dois polígonos são semelhantes quando possuem os lados correspondentes proporcionais e os ângulos correspondentes congruentes.

Em relação à Tabela 2:

- A figura B é a única que representa uma redução de X.
- Dois triângulos são semelhantes quando seus lados são respectivamente proporcionais, ou quando seus ângulos correspondentes são congruentes. São os casos LLL e AA.

Finalizando este encontro foi entregue a tarefa extraclasse.

13º Encontro: Uma Visão Dinâmica da Semelhança de Triângulos

No encontro anterior, a Atividade 5 e a tarefa extraclasse deixada, quando aplicadas a triângulos, mostraram que não é possível ter lados proporcionais e ângulos correspondentes congruentes diferentes. Não é possível, também, ter ângulos correspondentes congruentes sem ter os lados proporcionais. Logo, valem as condições:

"Dois triângulos são semelhantes quando têm: os ângulos correspondentes congruentes ou as medidas dos lados correspondentes proporcionais".

Assim, como critérios de semelhança valem os casos AA e LLL. Há ainda um terceiro caso: LAL, que é mais difícil de ser verificado experimentalmente.

Dessa forma, de início, a professora-pesquisadora convocou os alunos para uma discussão da tarefa extraclasse.

Desenhe um triângulo ABC e faça o que se pede: 1) Trace uma paralela B'C' ao lado de BC e verifique se os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes. 2) Construa, usando régua e compasso, um triângulo PQR cujos lados medem respectivamente o dobro dos lados do triângulo ABC, e verifique se eles são semelhantes. 3) Que conclusões você pode tirar dos resultados dessas duas atividades acima?

Dialogando com a classe, a professora-pesquisadora foi perguntando: - *Como vocês verificaram que os triângulos construídos nos itens (1) e (2) são semelhantes?* Algumas respostas foram dadas, como: *-Usei a definição de semelhança de polígonos; os triângulos têm ângulos congruentes; no item (2) verifiquei que os lados dos triângulos ABC e PQR são proporcionais e estão na razão 1 para 2.*

De fato, complementando as respostas dadas e analisando os variados triângulos construídos, constataram que valem as condições mencionadas acima para que dois triângulos sejam semelhantes. E, tomou como referência o trabalho de um aluno que se apresentou assim:

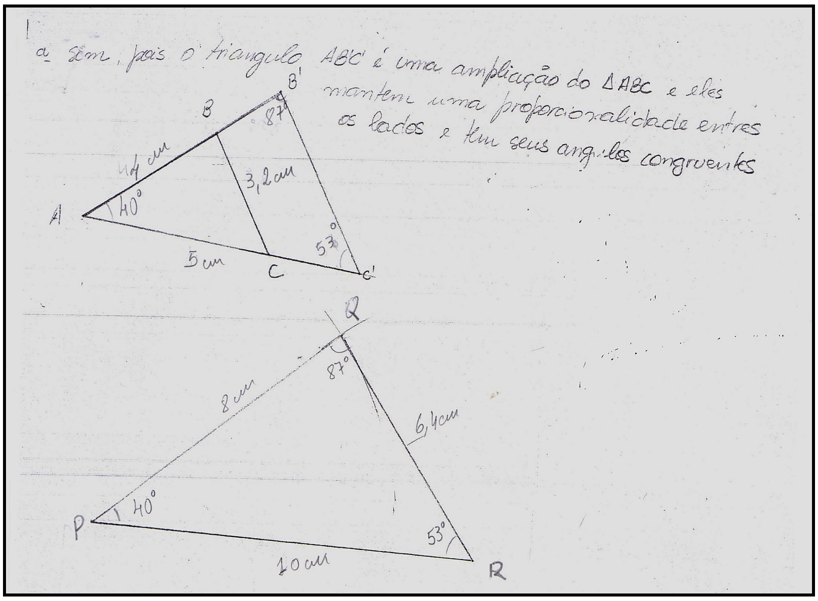


Figura 72– Construção do Teorema Fundamental de Semelhança entre dois triângulos

Com isso, chegou-se aos Critérios de Semelhança de dois triângulos: AA, LLL e LAL.

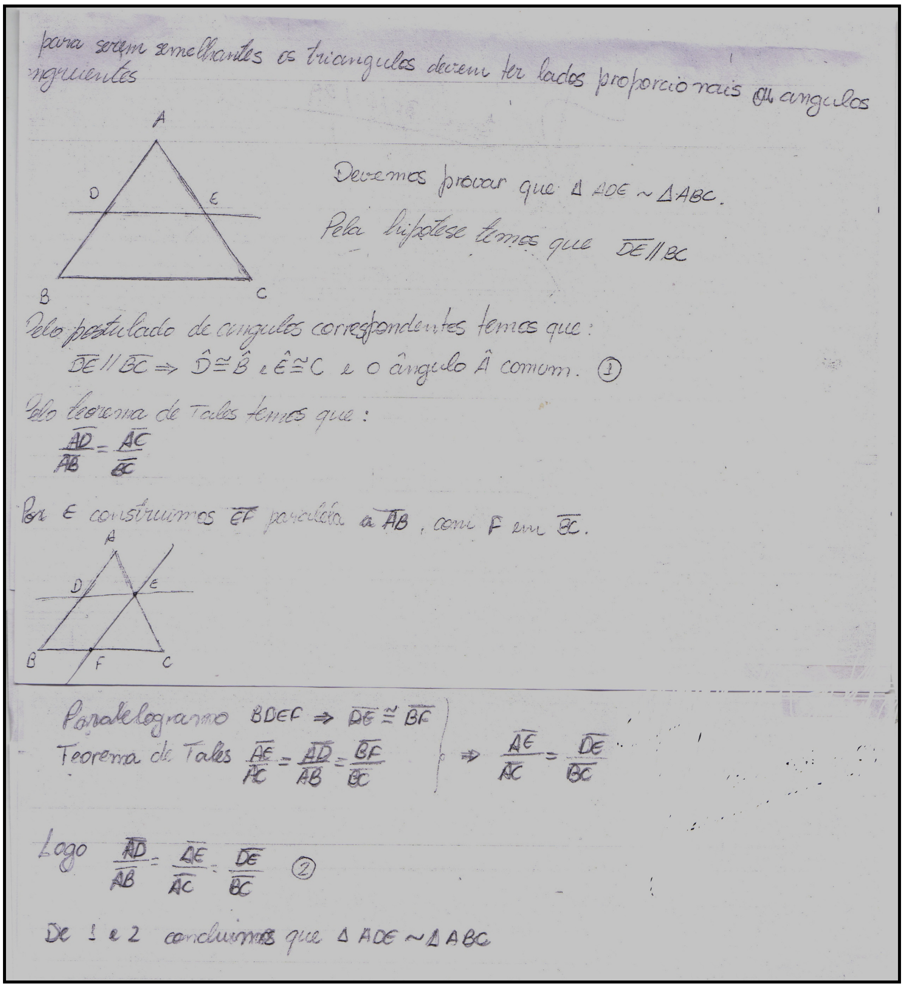
- **AA**: Se dois ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes a dois ângulos de outro, então os triângulos são semelhantes.
- **LLL**: Se dois triângulos possuem os três pares de lados respectivamente proporcionais, então os triângulos são semelhantes.
- **LAL**: Se dois lados de um triângulo são respectivamente proporcionais a dois lados de outro triângulo, e se os ângulos formados por esses lados forem congruentes, então os triângulos são semelhantes.

No encontro anterior, a professora-pesquisadora pediu aos alunos, também como tarefa extraclasse, que consultassem o Teorema de Tales e o Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos, pois era intenção para este encontro, trabalhar algumas propriedades relacionadas a semelhança de triângulos e, entre elas, os seus critérios. Assim, a professora-pesquisadora se dirigiu à lousa escrevendo esses teoremas e lendo-os em seguida.

Teorema de Tales: Toda paralela a um dos lados de um triangulo, que intercepta os outros dois lados, determina um outro triângulo semelhante ao primeiro.

Teorema Fundamental da Semelhança: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ele determina é semelhante ao primeiro.

Um aluno se prontificou a escrever, na lousa, a demonstração do Teorema Fundamental da Semelhança. Enquanto isso, a professora-pesquisadora e os demais colegas acompanham a escrita da demonstração.


para serem semelhantes os triangulos devem ter lados proporcionais ou angulos seguintes

Devemos provar que $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Pela hipótese temos que $\overline{DE} // \overline{BC}$

Pelo postulado de angulos correspondentes temos que:

$\overline{DE} // \overline{BC} \Rightarrow \hat{D} \cong \hat{B}$ e $\hat{E} \cong \hat{C}$ e o ângulo $\hat{A}$ comum. ①

Pelo teorema de Tales temos que:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

Por E construimos $\overline{EF}$ paralela a $\overline{AB}$, com F em $\overline{BC}$.

Paralelogramo BDEF $\Rightarrow \overline{DE} \cong \overline{BF}$

Teorema de Tales $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$ $\Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

Logo $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ ②

De 1 e 2 concluimos que $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

Figura 73 – Demonstração, por um aluno, do Teorema Fundamental da Semelhança

Depois desse registro, a professora-pesquisadora pediu ao aluno que explicasse à classe, passo a passo o que fora feito, interrogando-o da seguinte forma: - *Porque foi usado o Teorema de Tales? O primeiro passo da demonstração foi mostrar o quê?Qual é a hipótese? Qual é a tese?*

E o aluno disse: - *O primeiro passo foi mostrar que o ângulo B é congruente ao ângulo D, o ângulo C é congruente ao angulo E e, que o ângulo A é comum aos dois triângulos, usando o postulado de ângulos correspondentes.*

A professora-pesquisadora corrigindo disse: - *Primeiro, não é postulado e sim, um teorema que diz: "se duas retas paralelas interceptam uma transversal, então os ângulos* *correspondentes são congruentes"... e foi isso que você fez ao usar este teorema. Na verdade, esse teorema, a que nos referimos expressa muitas outras relações.*

Dando continuidade ao que o aluno fez, o passo seguinte, foi usar o teorema de Tales para mostrar que os lados correspondentes são proporcionais. Para mostrar esse fato, olhando-se o desenho feito, traçou-se uma paralela a AB, passando por E, obtendo o paralelogramo BDEF, com DE paralelo a BF. E, então, com esses dados foi usado o Teorema de Tales.

Finalizando a professora, olhando o desenho, perguntou: - *Porque de (1) e (2) concluímos que os triângulos são semelhantes?* Silêncio .... Até que ela se antecipou e disse: - *Foi usada a definição de polígonos semelhantes.*

Aproveitando o registro na lousa, a professora foi chamando a atenção da classe em alguns pontos da demonstração: dos ângulos formados por retas paralelas, de ângulos correspondentes congruentes e do Teorema de Tales. Alertou-os também em relação à escrita na lacuna de algumas informações necessárias como, por exemplo, deixar claro qual é hipótese e qual é tese.

Essa demonstração se encontra na íntegra no anexo C, na página 426.

Na sequência das atividades, a seguinte era a de demonstrar dinamicamente e analiticamente o critério de semelhança de triângulos AA. Deu-se um tempo para que os alunos pensassem em como resolver esse problema e um dos alunos, depois que a professora solicitou sua ida à lousa, registrou, como entendeu, a demonstração analítica da seguinte forma: desenhou dois triângulos ABC e A'B'C', usou a hipótese de que dois ângulos eram congruentes; e, desse fato, deduziu que como a soma dos ângulos internos de um triangulo tem por medida 180^o, em qualquer triângulo, então o ângulo C é igual ao ângulo C' e, parou por aí...

A professora o corrigiu dizendo que o que se quer provar é que quando se tem dois ângulos ordenadamente congruentes em dois triângulos, então eles são semelhantes. Assim, não é suficiente o que foi feito.

Como não houvesse nenhuma argumentação por parte dos alunos para a prova desse teorema, a professora foi à lousa e registrou-a, explicando passo a passo. Assim:

Consideremos dois triângulos ABC e A'B'C' tal que $\hat{A} \cong \hat{A}'$ *e* $\hat{B} \cong \hat{B}'$. *Queremos provar que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.*

Suponhamos que os triângulos não sejam congruentes e que $AB > \overline{A'B'}$. Seja D um ponto de AB tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, com $\hat{D} \cong \hat{B}'$. Desde que $\overline{AC}$ seja maior $\overline{A'C'}$, do mesmo modo, tomemos E em $\overline{AC}$ e formamos o triângulo ADE com $\hat{E} \cong \hat{C}'$.

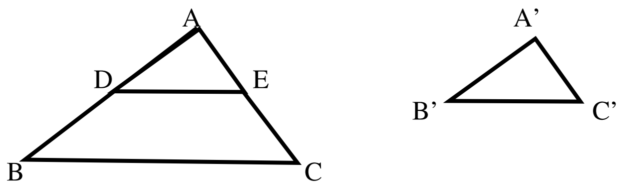


Figura 74– Semelhança de triângulos

Pode-se provar que o triângulo *ADE* é congruente ao triângulo *A'B'C'*. De fato, $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{D} \cong \hat{B}'$ e $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Portanto pelo caso ALA os triângulos *ADE* e *A'B'C'* são congruentes. Também, por hipótese, $\hat{B} \cong \hat{B}'$ e que $\hat{D} \cong \hat{B}'$, por construção. Disso, resulta que $\hat{B} \cong \hat{D}$ e isto implica que $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$. Pelo Teorema Fundamental de Semelhança, o triângulo ADE é semelhante ao triângulo ABC e, como o triângulo *ADE* é congruente ao triângulo *A'B'C',* segue que os triângulos *ABC e A'B'C'* são semelhantes.

Neste encontro, o número de aulas foi aumentado de 4h/aula devido a falta de um professor. Com isso, a professora-pesquisadora aproveitou e, dando continuidade às atividades, inverteu a ordem em que se apresentavam e, como o décimo quarto encontro seria para revisão de tópicos estudados, as demonstrações ficaram para esse encontro.

Assim, como próxima atividade, a professora-pesquisadora tomou os exercícios 1 e 3 da tarefa extraclasse e, pediu aos alunos que, em grupos, trabalhassem sobre eles, haja vista, que se tratava de reconhecer e saber usar os critérios de semelhança de triângulos.

A dificuldade maior se deu no exercício 3, que se tratava de demonstração. Mais uma vez foi preciso a ajuda da professora para que eles pudessem avançar.

Depois que todos os grupos resolveram os exercícios propostos é chegado o momento da plenária. Desempenharam bem o exercício 1. Quanto ao terceiro exercício vieram à lousa um componente de cada grupo para expor a sua resolução.

Cada grupo usou um argumento para provar o que o exercício pedia. O primeiro grupo fez a demonstração utilizando a mesma idéia feita na demonstração do Teorema Fundamental de Semelhança de Triângulos. O segundo grupo usou diretamente o Teorema Fundamental de Semelhança e, o terceiro grupo usou o critério de semelhança de triângulos AA.

A plenária foi bastante rica e produtiva. Houve uma boa discussão e participação dos alunos. Depois a professora se dirigiu à lousa fazendo as correções necessárias.

Finalizou a aula lembrando aos alunos que o próximo encontro será aula de revisão e como tarefa extraclasse pediu à classe tentasse demonstrar dinamicamente o caso AA de semelhança de triângulos.

14º Encontro: Revisão de conteúdos teóricos e práticos

Como nenhum aluno realizou a tarefa extraclasse deixada no encontro anterior, a professora iniciou a aula registrando-a na lousa explicando o caso de semelhança de triângulos AA, dinamicamente.

Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes - AA

Demonstração dinâmica:

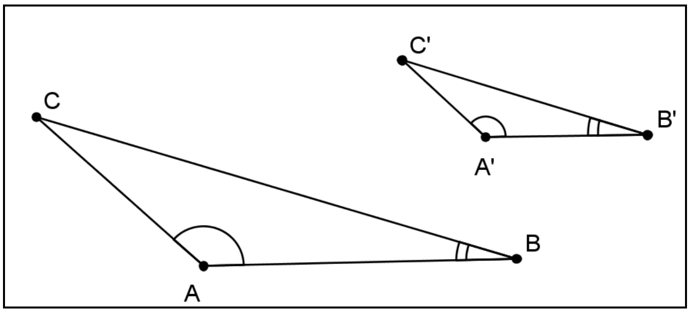


Figura 75 – Triângulos ABC e A'B'C'semelhantes

Temos por hipótese que $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$. Vamos transportar o ângulo *A'* sobre *A*. Dessa forma o ponto *B*' vai em um ponto *B*" do lado *AB* tal que $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$ e o ponto *C*' vai em um ponto *C*" do lado *AC* tal que $\overline{AC''} \cong \overline{A'C'}$. Nessas condições, pelo caso LAL, $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$.

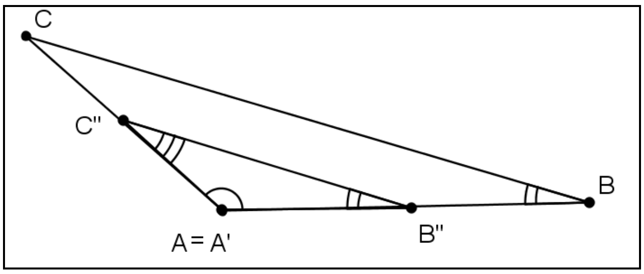


Figura 76 – Triângulos A'B''C'' e ABC semelhantes

Então $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B}'' \cong \hat{B}'$ e $C'' \cong C'$. Assim, os triângulos AB”C” e ABC são homotéticos e, dessa forma, B”C”//BC.

Portanto, $\hat{B}'' \cong \hat{B}$, $\hat{C}'' \cong \hat{C}$ e como $\Delta A'B''C'' \cong \Delta A'B'C'$, segue que $\hat{B}'' = \hat{B}'$, $\hat{C}'' = \hat{C}'$
Assim, têm-se $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$

O que mostra que os triângulos ABC e A’B’C’ são semelhantes.

Depois dessa demonstração foi feita uma revisão geral do que se estudou durante os treze encontros. Foram feitos alguns exercícios sobre congruência e semelhança de triângulos com a participação de alunos e professora.

15º Encontro: Sobre a Formação de Conceitos Geométricos, Visão Dinâmica da Congruência de Figuras e Visão Dinâmica da Semelhança de Figuras

Neste encontro realizou-se uma prova no valor de 5 pontos a fim de avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos durante a implementação da disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II.

Dentre as questões presentes nessa avaliação foi perguntado aos alunos com que esta disciplina, Laboratório de Ensino de Matemática II, contribuiu para a visão de um professor, em formação inicial, valorizar o trabalho de geometria, em sala de aula?

Na maioria das respostas dadas, os alunos perceberam que ela veio a contribuir em sua formação. A metodologia usada para trabalhar a geometria euclidiana, por meio das transformações geométricas, significou para eles, uma nova forma de ver e abordar a geometria. Uma forma mais dinâmica, com a participação cooperativa e colaborativa de todos, professor e alunos, levando, assim, o aluno a construir o seu próprio conhecimento.

Pode-se perceber essa evidência no registro de alguns deles:

“*A disciplina Laboratório de Matemática II, nos fez refletir sobre questões relacionadas ao ensino de Geometria de uma maneira ‘mais lúdica’ e dinâmica e sempre reforçando os conceitos e as propriedades ... com as demonstrações conseguimos compreender melhor os conceitos e as propriedades geométricas”.*

- “A disciplina contribuiu para uma maior reflexão sobre o ensino de geometria, para ampliar nossa visão em relação ao papel do aluno e ver o quanto é importante a atuação do aluno ao fazer suas próprias descobertas e construir seu conhecimento.”

- Essa disciplina mostrou a importância de desenvolver novos métodos de ensino valorizando o trabalho coletivo dos alunos e o raciocínio lógico, mostrando que a geometria pode se transformar em um tópico agradável e dinâmico, sem fugir da verdadeira essência da Matemática".

- "Essa disciplina contribuiu para mostrar que vale mais saber o que se está fazendo. Ele nos passou a idéia de como o professor deve agir mediante ao ensino da matemática, nos mostrando com trabalhar com demonstrações de forma dinâmica e como usar outros materiais de ensino de geometria".

- "Trabalhar manipulando os objetos sólidos, deu-nos a possibilidade de perceber muitos resultados que na maioria das vezes não conseguimos enxergar na teoria. Ao mesmo tempo, notoriamente, foi percebido um melhor rendimento e compreensão de cada aluno dessa turma. Assim, concluímos que ela contribuiu com uma melhor aprendizagem sobre como trabalhar e porque trabalhar com a geometria em sala de aula".

Analisando esses registros pode-se inferir que ao se trabalhar a geometria, usando como recurso a metodologia de trabalho em sala de aula adotada por nós, possibilitou uma maior reflexão desses futuros professores em relação à geometria e a seu ensino.

Perceberam que a geometria, dessa forma trabalhada, levou-os a pensar matematicamente, a raciocinar e dar sentido ao que estavam fazendo, ajudando-os, dessa forma, a sanar a dificuldade apresentada na aprendizagem da geometria.

E assim, deu-se por encerrados os encontros.

5.2. Conclusões Parciais

Foi desenvolvido, com os alunos, futuros professores de Matemática, um projeto para se trabalhar na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II. Esse projeto tinha por objetivo explorar, investigar, construir, experimentar, conjecturar, generalizar e formalizar determinados conceitos de Geometria Plana, numa abordagem dinâmica, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, por meio da Geometria das Transformações, exigindo uma participação mais ativa dos alunos, desde o momento dos experimentos e observações até a generalização de novos conceitos geométricos. Nesse projeto, não foi nossa intenção trabalhar toda a Geometria Euclidiana, mas sim, apenas alguns importantes conceitos. Procuramos trabalhar as grandes ideias, como as de Formação de Conceitos geométricos, Visão Dinâmica da Congruência de Triângulos e da Visão Dinâmica da Semelhança de Triângulos.

Trabalhar essas grandes ideias, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, num Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), permitiu dar aos alunos um grande significado e compreensão sobre elas, como também, foi possível uma maior reflexão por parte desses futuros professores, abrindo-lhes os olhos para esse novo tipo de trabalho quando vierem a ensinar.

Nessa disciplina, pretendíamos tornar a Geometria mais compreensível aos alunos em um ambiente que fosse suscetível a questionamentos, a experimentos, a análise, a levantamento de conjecturas, enfim, um lugar onde se pudesse aprender Matemática, em especial, a Geometria de forma compreensível. Esse espaço foi a própria sala de aula, que se configurou para nós o Laboratório de Ensino de Matemática, pois nessa instituição não tínhamos essa sala ambiente específica que pudesse ser denominada LEM.

Estando os alunos num Laboratório de Ensino de Matemática, permitiu a eles, um contato direto com o material concreto e de construção, feito por eles, a fim de lhes dar uma base para a exploração mais abstrata de como determinados conceitos geométricos podem ser trabalhados. Mais que isso, o LEM favoreceu o trabalho em equipe e a troca de ideias com seus pares. Os alunos tiveram uma participação ativa, como co-construtores do novo conhecimento adquirido.

Assim, deixamos claro aos alunos, futuros professores, a importância de se ter um Laboratório de Ensino de Matemática nas instituições responsáveis pela formação de professores, pois nele não só se deve aprender a usar corretamente o material didático, como também se deve construir e aprender, através de experimentos, a fazer acontecer o pensar matemático.

Segundo Turrioni e Perez (2006), um laboratório na área de Educação Matemática pretende preparar professores com uma formação mais próxima das pesquisas recentes e imbuídas de um sentimento de indagação e procura. Ademais, o LEM é de fundamental importância no curso de Licenciatura em Matemática, pois visa desenvolver no licenciando a atitude de indagação; a busca pelo conhecimento, como também, aprender a aprender; aprender a cooperar, desenvolver a consciência crítica.

Como incentivo à construção de um LEM, nessa instituição, deixamos todo o material didático utilizado e também os textos trabalhados.

Numa visão holística, podemos dizer que a condução desse projeto foi bem satisfatória. Embora, os alunos tivessem se envolvido ativamente com as atividades propostas, foi notória a dificuldade que eles trazem relativa à Geometria. Várias pesquisas dizem que essa dificuldade advém das lacunas na construção desse conhecimento em sua formação escolar desde o início de Ensino Básico e, a aplicação desse projeto veio constatar essa realidade. Mesmo tendo eles estudado, em semestres anteriores, as disciplinas de Geometria Plana, Geometria Espacial e Desenho Geométrico, sua competência em relação a esse conhecimento não se revelou satisfatória.

Esse fato foi constatado no momento das construções e do manuseio do material didático, principalmente o material de desenho geométrico, gastando-se muito tempo, nesse tipo de atividade, prejudicando, assim, a execução das outras atividades.

Sentimos, muitas vezes, durante os encontros, as dificuldades que esses futuros professores encontram ao se deparar com problemas geométricos que, para sua resolução, pedem mais conhecimento e mais rigor matemático. Essa deficiência se destacou no momento que eles precisaram usar de argumentação para a justificação ao demonstrar propriedades geométricas que haviam levantado por meio de conjecturas que se apresentaram através da observação e da experimentação. Por vezes, os alunos conseguiam expressar oralmente suas ideias geométricas, mas quando eram requeridos a fazer registros do que pensavam, seja por escrito, ou seja, por meio de construções geométricas, estampava-se em suas faces uma dificuldade acentuada. Foi preciso muitas e muitas vezes a intervenção e a orientação da professora, dando-lhes dicas e sugestões para que pudessem avançar.

Diante de todas essas dificuldades, a essência da aplicabilidade da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática através da Resolução de Problemas foi se perdendo. Os alunos quase que, totalmente, deixaram de ser os “protagonistas” neste cenário de aprendizagem, cabendo essa função à professora que, diante das dificuldades apresentadas pelos alunos, em seus conhecimentos geométricos prévios teve que intervir e guiá-los por várias vezes. Os problemas que seriam secundários passaram a ser, praticamente, problemas primários.

Pensava a professora-pesquisadora que, os alunos já tendo um conhecimento prévio da Geometria, seria fácil propor e aplicar a metodologia adotada para se trabalhar em sala de aula numa visão dinâmica. Pura ilusão! Esse fato veio a lhe causar um sentimento de frustração, pois esperava ela que esses alunos, futuros professores, já em um curso de Licenciatura, apresentassem conhecimento geométrico capaz de poder desenvolver bem os conteúdos por ela planejados para essa disciplina.

Além de possuírem várias lacunas no conhecimento da Geometria Euclidiana, os alunos revelaram não ter conhecimento sobre Geometria das Transformações que, segundo eles, era um novo conteúdo.

Olhando por outro prisma, não podemos deixar de admitir que a aplicabilidade da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação da Matemática através da Resolução de Problemas, em um Laboratório de Ensino de Matemática, concedeu a esses futuros professores, momentos de criatividade, de interesse, de motivação e de participação ativa não apenas em seu grupo, mas também, na interação com os demais grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo e, durante as atividades propostas, diferentemente do que ocorre em uma aula tradicional. Esse trabalho também lhes deu oportunidade de discussões criativas na plenária.

Embora os alunos não conseguissem uma produção geométrica desejada, a professora-pesquisadora, numa atitude de guia, mediadora e orientadora, foi incisiva ao deixar que os alunos explorassem as atividades para só então, depois, chegarem à abstração e generalização de determinadas propriedades geométricas trabalhadas, cabendo-lhe a formalização dos novos conceitos e conteúdos geométricos que se pretendia construir naquele encontro. Eles passaram por situações de experimentação que não estavam acostumados, saindo da rotina de aulas tradicionais.

Não foi possível trabalhar com todos os problemas elaborados para o projeto devido ao tempo usado pela professora em problemas secundários e na busca de sanar dificuldades manifestadas pelos alunos, desde a interpretação dos enunciados dos problemas até a falta de conhecimento prévio geométrico necessário para avançar na resolução do problema. No entanto, acreditamos que, com boa parte do trabalho realizado, muitos de nossos objetivos foram alcançados.

Mesmo diante de todas essas dificuldades manifestadas por eles, houve um ganho significativo para a aprendizagem a ponto de, no depoimento de alguns alunos ficarem registrado o quão importante foi esse trabalho para sua formação, conforme depoimentos, por escrito no último encontro.

- *"Esta disciplina contribuiu para mostrar que vale mais saber o que se está fazendo. Ele nos passou a idéia de como o professor deve agir mediante ao ensino da Matemática, nos mostrando com trabalhar com demonstrações de forma dinâmica e como usar outros materiais de ensino de geometria".*

- "*A disciplina Laboratório de Matemática II, nos fez refletir sobre questões relacionadas ao ensino de Geometria de uma maneira 'mais lúdica' e dinâmica e sempre reforçando os conceitos e as propriedades ... com as demonstrações conseguimos compreender melhor os conceitos e as propriedades geométricas".*

- *"A disciplina contribuiu para uma maior reflexão sobre o ensino de geometria, para ampliar nossa visão em relação ao papel do aluno e ver o quanto é importante a atuação do aluno ao fazer suas próprias descobertas e construir seu conhecimento."*

- *Essa disciplina mostrou a importância de desenvolver novos métodos de ensino valorizando o trabalho coletivo dos alunos e o raciocínio lógico, mostrando que a geometria pode se transformar em um tópico agradável e dinâmico, sem fugir da verdadeira essência da Matemática".*

Pretendíamos também formar um professor pesquisador e reflexivo e, assim, vemos que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é um caminho conveniente para essa ação, exigindo do professor uma nova forma de ver e compreender os processos de ensino-aprendizagem-avaliação da matemática.

CONCLUSÕES FINAIS

"Ser membro de uma comunidade de pesquisa implica
numa responsabilidade de informar aos outros membros
sobre a investigação terminada e buscar seus
comentários e críticas"
(ROMBERG, 1992)

Em consonância com as palavras de Romberg, citadas na epígrafe, e buscando responder às questões:

1) Como a Geometria Euclidiana, através da resolução de problemas, pode contribuir para a formação matemático-pedagógica do professor?

2) Como a necessidade de um conhecimento didático aliado a um conhecimento matemático, fazendo-se uso de uma metodologia alternativa de trabalho em sala de aula, pode influenciar e contribuir com eficiência na formação inicial de professores?

3) Como compreender o processo ensino-aprendizagem da geometria através da resolução de problemas sob a perspectiva didático-matemática na formação inicial de professores?

que desencadearam esta pesquisa, procuraremos fazer uma reflexão, em linhas gerais, da conjugação dos dois projetos aplicados, uma vez que, algumas conclusões parciais, fruto de nossas reflexões, já foram expostas nos capítulos 4 e 5 respectivamente, buscando, dessa forma, não tornar o texto demasiadamente repetitivo.

Fazendo uma retrospectiva, nos apoiamos em outros pesquisadores, que falaram sobre a Didática e a Resolução de Problemas na formação de professores e sobre a Geometria e seu ensino, pois muitas de suas ideias fortaleceram a interpretação que fizemos do que foi coletado.

Procurando responder às nossas indagações, foram criados dois projetos, um para trabalhar a Didática e o outro para trabalhar a Geometria. Esses projetos foram aplicados na Universidade do Estado da Bahia – UNEB, Campus X, com uma turma do 4º semestre do Curso de Licenciatura em Matemática, no turno vespertino. Uma turma composta de 14 alunos, dentre os quais, apenas dois tinham tido experiência como professor.

Em cada projeto planejaram-se 15 encontros que foram desenvolvidos pela professora-pesquisadora. Sua intenção foi a de se envolver no ambiente a ser pesquisado, não apenas como observadora, mas como atuante, a fim de compreendê-lo e, sobretudo, tentar modificá-lo em direções que pudessem permitir a melhoria da prática, bem como conscientizar os sujeitos da pesquisa do seu papel como futuros professores.

Tínhamos também, como objetivos, mostrar a esses futuros professores a importância de se ter o conhecimento didático e o conhecimento matemático em sua formação, sendo que este último deveria ser de ordem primeira. Procuramos reforçar essa nossa posição frente a esses futuros professores, nos reportando a D'Amore (2007) quando diz que a Matemática, a Didática da Matemática e a Didática Geral são necessárias à formação de um professor de Matemática, mas que nenhuma das três é suficiente, juntas concorrem para tal fim, isto é, não é possível ensinar Matemática se não se tem uma sólida preparação prévia em Matemática, não é possível desenvolver questões de caráter epistemológico e didático sobre a Matemática se não se está bem preparado em Matemática.

O Curso de Licenciatura em Matemática é o momento propício para a construção e o repensar das concepções dos futuros professores, de modo que possam conduzir a uma aprendizagem matemática realmente significativa (PAVÃO, 2006, p.166). Futuros professores de Matemática precisam entender "o que" aprendem, "porquê" aprendem e "como" aprendem, para que, então, com segurança, possam guiar seus alunos, futuros professores, na construção de novos conhecimentos. Há de se convir que a aprendizagem não começa com os alunos sentados numa carteira para copiar problemas matemáticos resolvidos pelo professor. Em vez disso, eles devem ser estimulados a explorar o seu próprio conhecimento, a criar estratégias para a resolução dos problemas e saber discutir com seus colegas por que suas estratégias funcionam ou não (BRANSFORD, BROW e COCKING, 2007).

É papel do professor se responsabilizar pela aprendizagem dos seus alunos. Para isso, ele, o professor, deverá planejar situações que possam lhes fornecer meios para a aquisição dos conhecimentos que pretende ensinar. Já dizia Freundenthal (apud D'Amore,2007, p. 3) que: "Aprender Matemática significa conquistar a atitude para um comportamento matemático, dirigindo a atenção para a aprendizagem mais do que para o ensino".

Por entendermos que é necessário aos licenciandos conhecerem bem o curso que escolheram para se formarem como profissionais achamos conveniente deixar explícito aos sujeitos da pesquisa, o que significa ser um licenciando em Matemática e qual será sua função depois de formado. Para isso, tomamos como referência as Diretrizes Curriculares (CNE, 2001), documento que retrata muito bem a diferença do curso de Licenciatura para o de Bacharelado. Segundo o relatório do Ministério da Educação – Conselho Nacional de Educação, o curso de Licenciatura em Matemática tem como objetivo principal a formação de professores para atuarem na Educação Básica, enquanto que o curso de Bacharelado em Matemática existe para preparar profissionais para a carreira de Ensino Superior e da pesquisa. Além disso, dizem as Diretrizes, "o educador matemático deve ser capaz de tomar decisões, refletir sobre sua prática e ser criativo na ação pedagógica, reconhecendo a realidade em que se insere. Mais do que isto, ele deve avançar para uma visão de que a ação prática é geradora de conhecimentos".

As Diretrizes Curriculares para a formação de professores da Educação Básica, no item *Competências e Habilidades*, dizem que o licenciado em Matemática deverá ter a capacidade de desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos.

Ao falar das Diretrizes Curriculares e na apresentação da ementa e do programa de disciplina, nos dois projetos, deixamos os alunos cientes de que é possível, sem modificar a ementa, o professor mudar um curso e oferecer disciplinas de qualidade.

Diante dessas recomendações das Diretrizes Curriculares, procuramos deixá-las claras a nossos sujeitos da pesquisa ao trabalhar com a disciplina Didática da Matemática, que é por muitos, concebida como uma espécie de receituário do ensino. Essa concepção errônea também estava presente em nossos alunos. Procuramos desmistificá-la ao dizer-lhes que há muito tempo, desde Polya, via-se a Didática como "ensinar a ensinar", como uma arte e, nesse caso, todo o seu peso artístico recaía sobre o professor. Ela foi evoluindo e, hoje, é vista e entendida por muitos pesquisadores como uma disciplina científica onde se realiza trabalho de investigação e de produção de novo conhecimento, com objetivo de contribui para a melhoria do processo educativo. Como um campo científico emergente possui um objeto bem definido

– conjunto dos fenômenos do ensino-aprendizagem das várias disciplinas e dos vários níveis de ensino – e uma metodologia de trabalho própria.

Em se tratando da Didática da Matemática, como área de investigação, ressalta Ponte (199?, p.330) que o seu papel é o de formular e analisar os problemas com que se defronta o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, proporcionando conceitos, estratégias e instrumentos que podem ser de algum modo úteis para os que atuam no terreno profissional.

Na aplicação dos dois projetos de ensino, especificamente no projeto da disciplina Didática da Matemática, procuramos deixar clara nossa atenção dentro da área de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. Nela, num trabalho a ser feito em sala de aula, parte-se sempre de um problema, tendo como objetivo um tópico particular da Matemática, usando estratégias convenientes e com a participação efetiva dos alunos, em grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo.

Os problemas selecionados para serem trabalhados nas duas disciplinas foram escolhidos de forma a atender a matriz curricular, o número de aulas estipuladas, sempre com o espírito de construir conceitos e conteúdos novos a partir de conhecimentos prévios. Nosso objetivo, na escolha desses problemas, foi o de desafiar a intuição, a experimentação, a busca por padrões e o levantamento de conjecturas, mas sem perder de vista a ideia presente do raciocínio lógico, isto é, de raciocinar e dar sentido.

Essa intenção, desde o início das disciplinas, foi deixada bem clara aos nossos futuros professores. Parece que eles entenderam e sempre procuravam participar, mesmo que errando, mas dando oportunidade de fazer do seu erro uma aprendizagem. As dificuldades foram várias, apresentando-se desde o manuseio do material de desenho, do manipulativo e até nas demonstrações. Uma dificuldade bastante acentuada foi a de poder expressar e comunicar sua ideias, principalmente no momento de registrá-las, na interpretação dos textos e na resolução dos problemas.

Apesar dessas deficiências, o que vimos de positivo neste trabalho é que a metodologia adotada para a sala de aula levou esses alunos a assumirem uma postura de investigadores, de professores reflexivos, coisas a que não estavam habituados, pois pensar e comunicar suas ideias são muito diferente de resolver uma lista enorme de exercícios repetitivos, sem que para eles haja sentido. Com frequência, a professora desafiava os alunos a pensar e a justificar o que estavam fazendo em Matemática, envolvendo-se muito com eles durante todo o processo de construção de conhecimento novo.

Vale ressaltar que todas as atividades dadas dos livros consultados por nós foram consideradas como problemas que, tomados como ponto de partida, levavam professora e alunos a um processo dinâmico de trabalho através da resolução de problemas. Por outro lado, admitimos que na aplicação dos projetos isto nem sempre apareceu, mas a maioria dos diálogos, dos debates e dos questionamentos apresentava essa linha de trabalho. Nas plenárias sempre houve reflexões e discussões, tanto dos alunos quanto da professora-pesquisadora. A bem da verdade, muitas vezes foi preciso a professora lançar mão de processos do ensino tradicional.

Conhecer um pouco da história da Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino foi, de fato, importante para a formação desses futuros professores. Nessa história, destacamos que a Resolução de Problemas até os fins dos anos 80, do século XX seguia o modelo de Polya ou variantes dele, enfocando as heurísticas, as estratégias. Foi, no fim da década de 80 que a abordagem "ensinar *via* resolução de problemas"(*Teaching via Problem Solving*) se manifestou e, a partir dos anos 90, passou a ser vista como "ensinar matemática *através* de resolução de problemas"(*Teaching through Problem Solving*) que, como se pode perceber, é uma metodologia bastante nova na história da pesquisa em resolução de problemas no currículo de Matemática. Esse modo "*através de*" significa que a construção da matemática nova que se quer construir acontece no decorrer de todo o processo de resolução do problema, ao longo dele. E isso se dá com os alunos com guia e orientação do professor, colaborando para essa construção. Nessa abordagem, o objetivo primeiro é o de apresentar, para os alunos, problemas que gerarão os novos conceitos e os novos conteúdos pretendidos pelo professor nessa aula.

Depois de toda essa fundamentação teórica sobre a Resolução de Problemas, vista como um caminho para se ensinar e aprender Matemática surge uma pergunta: como fazer isso? Um caminho é possivelmente fazer uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Na disciplina Didática da Matemática, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foi apresentada teoricamente, como uma metodologia, por meio de um roteiro prescritível criado por Onuchic em 1998. Entretanto, na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II, essa metodologia foi utilizada como um recurso prático para se ensinar e aprender Geometria. Nessa forma, foram utilizadas as transformações geométricas, a fim de trabalhar a Geometria Euclidiana não estaticamente, mas de uma maneira dinâmica. Para esse tipo de trabalho nos apoiamos nos livros de Lilian Nasser e Lucia Tinoco (2004) e nos livros da Martha de Souza Dantas e outros (1996).

Para os alunos essa metodologia se apresentou como algo “novo”, fato esse já mencionado no depoimento de alguns alunos no capítulo 4. Aceitaram bem a metodologia. Participavam ativamente das atividades propostas acarretando com isso, momentos de reflexão sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática tanto conceitual quanto procedimental.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas permite trabalhar as grandes ideias conceituais contidas em cada tópico matemático, fazer aplicações e atender, sempre que possível, as técnicas requeridas.

Nesse sentido, ao usar essa metodologia, decidimos trabalhar com esses futuros professores nas duas disciplinas, onde procuramos apresentá-la mais fortemente na disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática II. Além do caráter experimental dessa disciplina, os problemas propostos puderam mostrar aos alunos que a Matemática não se apresenta como um campo de conhecimentos prontos e acabados, mas sim, em constante evolução, havendo sempre lugar para novas descobertas.

Na disciplina Didática da Matemática quando a eles se pedia que opinassem sobre o que haviam lido nos textos trabalhados, de início se revelaram bastante tímidos. Mas, aos poucos, com mais confiança e credibilidade no que a professora queria lhes dizer, foi possível uma participação mais ativa, sobretudo, em questões sociais e políticas. Entretanto, o mesmo não aconteceu com relação às discussões que envolviam conhecimentos matemáticos, tanto na disciplina Didática da Matemática quanto na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II, se mostrando, assim, mais reservados.

Para desenvolver a disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II, foram oferecidos material didático manipulativo e livros para consultas diretas sobre bibliografia recomendada. O material de desenho foi trabalhado pela professora-pesquisadora com a finalidade de que os alunos aprendessem a bem usá-los para, um dia, levá-los para suas próprias salas de aula, bem como perceber, por meio de suas construções, a diferença entre verificar um caso particular e demonstrar esse caso.

Revisitando o histórico do ensino da Geometria na sala de aula a partir do século XX, vimos que, na década de 70, no auge da Matemática Moderna, a Geometria foi relegada a um segundo plano, ocupando os últimos capítulos dos livros didáticos, para os quais, na maioria das vezes, o professor não dava muita importância. Como consequência desse fato, muitos dos professores formados naquele período acabaram por ter um conhecimento quase nulo de Geometria.

Esse quadro já deveria ter mudado, devido às várias reformas no ensino e as várias propostas apresentadas para mudanças nesse período. Entretanto, o que se vê, ainda hoje, apesar dos esforços dos pesquisadores nessa área, que apresentam novos métodos, novos recursos e novos materiais didáticos sobre o ensino de Geometria, muitos estudantes ainda chegam à universidade com deficiência no conhecimento desse ramo da matemática e com concepções errôneas sobre geometria e o seu ensino.

Na tentativa de reverter esse quadro, passamos a oferecer um conhecimento geométrico mais compreensível e com significado, aos futuros professores, sujeitos de nossa pesquisa. Procuramos trabalhar na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II, a Geometria Euclidiana de uma forma inicial intuitiva, experimental, de observação, de levantamento de padrões e de conjecturas até chegar ao ponto de generalizar por meio de demonstrações e provas. Todas as demonstrações foram feitas por meio da Geometria Euclidiana e da Geometria das Transformações. Os alunos revelaram não ter conhecimento da Geometria das Transformações. Confessaram que este era um "assunto novo" para eles.

Acreditamos que trabalhar Geometria buscando demonstrar suas proposições ativa o raciocínio e leva o aluno a pensar matematicamente. Além disso, O raciocínio dedutivo é ponto fundamental para o avanço do conhecimento matemático dos estudantes em todos os níveis de escolaridade.

Tomando como pressuposto as ideias acima, alertamos nossos alunos de que faríamos um trabalho em Geometria pautado em atividades experimentais exploratórias, próprias de um laboratório de ensino, com materiais manipulativos e com recurso ao desenho geométrico, reconhecendo que essas atitudes são essenciais para a construção do conhecimento geométrico, como ressalta Pais (1996). Porém, seria bom tomarmos o cuidado de não priorizar demasiadamente a experimentação. É fundamental, no ensino da Geometria que seja caracterizado o conhecimento matemático a partir da construção de conceitos, do levantamento de propriedades geométricas e demonstrações.

Uma abordagem, tanto dedutiva quanto experimental, é importante no ensino-aprendizagem de Geometria. Já dizia Imenes (apud Nasser e Tinoco, 2006): "Não se trata de partir de uma Geometria Experimental para chegar a outra (Geometria Dedutiva), nem tampouco se deve pensar que uma abordagem é superior a outra". A possibilidade de os estudantes se manifestarem durante o processo da resolução de problemas, permite que sejam feitas discussões entre grupos e essas discussões dão, a cada aluno, a possibilidade de desenvolverem argumentos matemáticos e o poder de avançar na construção de novas ideias matemáticas que serão partilhadas por todos.

Além do caráter experimental dessa disciplina, os problemas propostos puderam mostrar aos alunos que a Matemática não se apresenta como um campo de conhecimentos prontos e acabados, mas sim, em constante evolução, havendo sempre lugar para novas descobertas.

Os momentos de observação e intervenção da professora foram importantes para que se pudesse ajudar os alunos em seus instantes de dúvidas, observando-os, acompanhando suas explorações e ajudando-os, quando necessário, a resolver problemas secundários.

No registro por escrito de alguns alunos, ao trabalharem com essa metodologia, na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II, essa postura ficou evidente

- *"A disciplina Laboratório de Matemática II, nos fez refletir sobre questões relacionadas ao ensino de Geometria de uma maneira 'mais lúdica' e dinâmica e sempre reforçando os conceitos e as propriedades ... com as demonstrações conseguimos compreender melhor os conceitos e as propriedades geométricas".*

- *"A disciplina contribuiu para uma maior reflexão sobre o ensino de geometria, para ampliar nossa visão em relação ao papel do aluno e ver o quanto é importante a atuação do aluno ao fazer suas próprias descobertas e construir seu conhecimento."*

- *Essa disciplina mostrou a importância de desenvolver novos métodos de ensino valorizando o trabalho coletivo dos alunos e o raciocínio lógico, mostrando que a Geometria pode se transformar em um tópico agradável e dinâmico, sem fugir da verdadeira essência da Matemática".*

A metodologia por nós desenvolvida favorece o ambiente, na qual os alunos trabalhando em grupos colocam suas ideias matemáticas, neste caso, não só estarão desenvolvendo uma compreensão mais profunda delas, como, também, podem construir novas compreensões que podem ser compartilhadas com os demais colegas.

Em contra partida, foi notória, na aplicação dos dois projetos criados, o grau de dificuldade dos alunos ao serem solicitados para argumentar, principalmente, a favor de seus raciocínios matemáticos, em justificar, em conjecturar e em generalizar. Possivelmente, esse fato tenha se revelado porque eles mostraram insegurança no domínio de conceitos e conteúdos matemáticos específicos. Muitos, ao resolverem o problema proposto, se limitavam a reproduzir apenas procedimentos conhecidos e técnicas operatórias. O que é de se esperar, pois muitos ainda tendem a reproduzir os modelos de seus professores do Ensino Básico e até mesmo do Ensino Superior.

Na disciplina Didática da Matemática quando a eles se pedia que opinassem sobre o que haviam lido nos textos trabalhados, de início se revelaram bastante tímidos. Mas, aos poucos, com mais confiança e credibilidade no que a professora queria lhes dizer, foi possível uma participação mais ativa, sobretudo, em questões sociais e políticas. Entretanto, o mesmo não aconteceu com relação às discussões que envolviam conhecimentos matemáticos, tanto na disciplina Didática da Matemática quanto na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II, se mostrando, assim, mais reservados.

Os encontros se mostraram bastantes dinâmicos ao trabalhar com essa metodologia. Sua aplicação proporcionou uma maior interação entre os alunos, que se sentiam desafiados e motivados a resolver os problemas propostos, partindo de seus conhecimentos prévios, favorecendo, assim, um ambiente de aprendizagem. Assim, podemos dizer que essa metodologia é mais que uma metodologia de ensino. Ela é uma teoria, uma Filosofia da Educação que aborda uma epistemologia da constituição do conceito matemático e/ou ressignificação do conceito matemático em um contexto prático da pesquisa, criando possibilidades de um novo pensar matemático.

Como se pode perceber, trabalhar com essa metodologia não é tarefa fácil para o professor. Ela requer tempo, maturidade, muita reflexão e pesquisa por parte do professor.

Ademais, para que ela seja incorporada à prática profissional dos licenciandos em Matemática, é preciso que seja efetivamente vivenciada durante a formação desses futuros professores em seu curso de Licenciatura nas disciplinas pedagógicas. Corroborando essa posição Onuchic e Allevato (2009a) acrescentam que a resolução de problemas deveria ser também utilizada pelos docentes que ministram disciplinas nesses cursos, não só para promover a construção de conhecimento matemático específico, mas para oferecer a esses licenciandos a oportunidade de vivenciar e, assim, incorporar à sua prática, essa forma alternativa e mais atual de trabalho nas aulas de Matemática, sempre que possível como caminho para a aprendizagem. Atrelado a tudo isso, mesmo com uma grade curricular não muito rica ou exigente em Matemática, é aconselhável que educadores matemáticos, nas

Instituições em que trabalham, ministrem disciplinas como Didática da Matemática e Laboratório de Ensino de Matemática.

Adotada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, é importante que o professor, diante dela, reflita, investigue e venha a formular ou escolher cuidadosamente os problemas que irá propor, a fim de garantir que os alunos construam um conhecimento adequado de Matemática e que faça sentido. Essa escolha deve ser bem pensada e bem planejada, assumindo ele, assim, uma postura de professor reflexivo.

Essa postura se configura, para nós, como a de um professor que pesquisa quando busca problemas que podem ser utilizados, em sua sala de aula, para trabalhar determinados tópicos matemáticos pertinentes a um programa determinado por lei; pesquisa quando identifica os focos matemáticos importantes, isto é, as grandes ideias subjacentes à matemática trabalhada; pesquisa quando estabelece as melhores estratégias disponíveis para a resolução dos problemas; pesquisa quando prepara as questões com as quais conduzirá os alunos, durante a plenária, ouvindo-os em suas colocações e planeja a formulação rigorosa da nova matemática construída durante essa aula, tendo os alunos como co-construtores desses novos conceitos e conteúdos.

Nossa pesquisa em Resolução de Problemas chegou a querer ser uma coisa prescritível. Mas isso também não é tão simples. Mudar a forma de trabalho em sala de aula exige do professor coragem, identificação com a mudança e acreditar no que faz. Levar o aluno a ser capaz de pensar, raciocinar e entender o que se está fazendo, necessita uma mudança muito grande que não se consegue de um dia para o outro.

Contribuições desta pesquisa para a Educação Matemática

Não se pode ignorar que repensar o modelo de formação de professores é um passo indispensável para a melhoria da qualidade de ensino de uma maneira geral, e para o ensino de Matemática, em particular. Diz Borralho (1997, p. 131) que “não há ensino de qualidade, nem reforma educativa e inovação pedagógica sem uma formação adequada para o professor”.

Nesse sentido, é necessário que se faça mudanças urgentes na prática de ensino de muitos professores e acreditamos que essas mudanças devem acontecer no curso de

Licenciatura, pois é nele, que esse futuro professor deve aprender Matemática com a finalidade de "ensinar Matemática" na Escola Básica.

A Educação Matemática como um campo relativamente novo, hoje é vista mundialmente como uma área de conhecimento das Ciências Sociais e Humanas que estuda o ensino e a aprendizagem da Matemática possuindo um leque de áreas do conhecimento relacionadas a ela como a Filosofia, a própria Matemática, a Psicologia, a Sociologia, a Lingüística, a Semiótica e a Antropologia, dentre outras.

Segundo Godino e Batanero (apud D'Amore, 2007, p. 96) a Educação Matemática é um sistema social heterogêneo e complexo, no qual se distinguem três âmbitos: (1) a ação prática reflexiva sobre os processos de ensino e aprendizagem da Matemática; (2) a tecnologia didática, que se propõe a preparar materiais para melhorar a eficácia da instrução matemática, usando os conhecimentos científicos disponíveis e; (3) a pesquisa científica, que se ocupa de compreender o funcionamento do ensino de matemática, em todos os seus aspectos, assim como aquele dos sistemas didáticos especiais (professor, estudante e conhecimento). Acrescentam ainda os autores que os dois primeiros componentes podem ser considerados juntos como "pesquisa para ação", enquanto que o terceiro seria equivalente à "pesquisa para o conhecimento".

É claro que tais especificidades estão presentes e, em certo sentido são necessárias, porque cada uma oferece contribuições únicas.

A contribuição desta pesquisa para a Educação Matemática está, de fato, relacionada a esses três componentes. Quanto ao primeiro, podemos dizer que esta pesquisa quis focar o professor em sua formação inicial e mostrar-lhe um caminho para melhorar a eficácia didática do ensino. O segundo mostrou-se como recurso – a resolução de problemas – para melhorar a eficácia do ensino da Matemática e, em especial da Geometria. O terceiro refere-se à pesquisa propriamente dita que, por sua vez, é de suma importância para a comunidade de pesquisadores e tem o espírito de promover mudanças, pois é coisa nova.

Esta é mais uma pesquisa no contexto da Educação Matemática cujo objetivo central é refletir sobre e analisar as potencialidades que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas oferece no sentido de incrementar a aprendizagem e melhorar os processos de ensino, assim como o de promover o aprimoramento das práticas dos professores no contexto de sala de aula de Matemática.

Reportando às palavras de Romberg citadas na epígrafe, vimos que essa pesquisa oferece contribuições preciosas para a Educação Matemática. Dentre elas, podemos destacar:

- Primeiro, ela une as disciplinas Didática da Matemática e Laboratório de Ensino de Matemática II como uma dupla necessária para a formação de professores;
- Apresenta a Resolução de Problemas na forma de uma Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Uma forma, pós Polya, de tratar a resolução de problemas, enfocando o ensino-aprendizagem de Geometria ;
- A sugestão de um trabalho feito com professores em formação inicial visando a sua própria formação. Um trabalho que ilustra a importância de ajudar os futuros professores a repensar seu conhecimento matemático assim como mostrar-lhes estratégias de ensino e aprendizagem. Advogamos que ensino e aprendizagem devem acontecer simultaneamente;
- A busca de um ensino de qualidade e excelência com a participação direta dos alunos, num trabalho cooperativo e colaborativo, estimulando os alunos a ativamente investigar.

Retomando ao problema de nossa pesquisa, evidenciamos que a segunda pergunta não é de resposta imediata. Passar de um estado de arte para uma situação científica depende de muitas e variadas circunstâncias. É isso que esperamos com a colocação dessa pergunta: acompanhar esse trabalho e descobrir que caminho percorrer de modo a desenvolver essa nossa área de pesquisa.

Nossa expectativa é de que as ideias e reflexões aqui apresentadas e discutidas possam, de fato, contribuir para a formação de professores seja inicial, continuada ou especializada, bem como de pesquisadores na área.

Encerro essa seção com as palavras de Rомber (1992) “Coisas que vierem antes e coisas que vêm após qualquer particular estudo são importantes.

Reflexões Finais da autora

Penso que essa tese traz contribuições para o desenvolvimento profissional de professores iniciantes. Compartilho com Ponte (1998) quando diz que o desenvolvimento profissional ao longo de toda a carreira é, hoje em dia, um aspecto marcante da profissão docente. É um processo que envolve múltiplas etapas e está sempre incompleto. Sua finalidade é tornar os professores mais aptos a conduzir um ensino de Matemática adaptado às necessidades e aos interesses de cada aluno e a contribuir para a melhoria das instituições educativas, realizando-se pessoal e profissionalmente.

Partindo das palavras de Ponte, este estudo, ao longo de quatro anos, com a convivência com minha orientadora e com o grupo GTERP, cuja filosofia é buscar incessantemente desenvolver estudos e pesquisas que atinjam a sala de aula, ou seja, que estejam relacionados com questões de ensino-aprendizagem-avaliação tanto sob a perspectiva do aluno quanto do professor, e em todos os níveis de ensino, fez-me repensar a minha prática enquanto professora, fez-me refletir o que ser um educador matemático e, também, fez-me refletir sobre o que ser um pesquisador. Pude aprender novas teorias, novos conhecimentos e, conscientemente, vejo que não acabam por aqui. É um recomeço, um novo percurso a seguir, agora como formadora de formadores, como pesquisadora e como educadora matemática.

Na condição agora de pesquisadora e formadora de formadores vejo que cabe a mim ajudar os professores, em todos os segmentos do seu desenvolvimento profissional, a partilhar sua compreensão , tomando-a como ponto de partida, buscando corrigir suas concepções errôneas profundamente enraizadas que, muitas vezes, interferem na aprendizagem.

Toda nova aprendizagem envolve transferência. Cabe a mim, agora, ser uma seguidora e multiplicadora de todo conhecimento apreendido. Uma coisa é tida como certa e aprendi com minha orientadora: “Se não conseguimos ser criativos que sejamos bons seguidores”.

Uma semente foi plantada quando estive, na UNEB, aplicando os projetos criados para desenvolver esta pesquisa. Cabe a mim, então, regar e cultivar essa semente para que ela possa produzir muitos e muitos frutos.

Encerro essa reflexão com uma oração encontrada entre os papeis do professor Mello e Souza, segundo Averbuch e Gottlieb (Boletim GEPEM, nº 27, ano XV, 2º semestre, 1990).

Oração do Professor

(adaptação de “La oracion de la maestra”, de Gabriela Mistral)

Senhor, Tu que ensinaste, perdoa que eu ensine, que use o nome de
Mestre, nome que trouxeste sobre a Terra.
Dá-me o amor exclusivo dos meus cursos: que nem a sedução da beleza
seja capaz de roubar-lhe minha dedicação de todos os instantes.

MESTRE! Faze-me perdurável o fervor e passageiro o desencanto.
Arranca de mim esse impuro desejo de justiça, que ainda me pertuba,
o protesto que irrompe de mim quando me ferem. Não doa a
incompreensão nem me entristeça o olvido dos que ensinei

Que eu consiga fazer de um dos meus alunos um poema perfeito e
Nele deixar minha mais perfeita melodia, para quando meus lábios
emudecerem. Mostra-me possível Teu evangelho em meu tempo,
para que não renuncie à luta de cada instante por ele. Faze-me forte,
mesmo na minha fraqueza, faze-me desprezador de todo poder
que não seja puro, de toda pressão que não seja a da tua vontade
ardente sobre a minha vida.

Amigo, acompanha-me! Sustenta-me!
Muitas vezes não terei senão a Ti, a meu lado.
Quando minha doutrina for mais severa e mais ardente
minha verdade, ficarei sem os mundanos
Tu, porém me apertarás sobre Teu coração
cheio de solidão e desamparo.

Só em teu olhar irei buscar aprovações.
Dá-me simplicidade e dá-me profundeza.
Livra-me de ser complicada ou banal minha lição cotidiana.

Dá-me afastar os olhos do meu peito ferido ao
entrar em minha sala de aula. Que não leve à mesa de trabalho
minhas preocupações materiais, minhas dores mesquinhas.
Aligeira-me a mão na censura e suaviza-me ainda mais no gesto de
carícia. Que eu repreenda com dor para saber
que corrigi sem deixar de amar!

E por fim, ao evocar a palidez da tela de Velásquez
lembra-me que ensinar é amar intensamente sobre a terra,
é chegar ao último dia com o lançaço de Longinos
rasgado de lado a lado do flanco.

Amém

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N.S.G.; ONUCHIC, L.R. Teaching mathematics in the classroom through problem solving. In: **Researh and Development in Problem Solving in Mathematics Education**, ICME, México, 2008, p. 59-70.

ALMEIDA, P. Aprendizagem e ensino da Geometria. **Educação e Matemática**, nº 95, nov/dez., 2007, p. 2-11.

ALMOULOUD, S. Ag. et al. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**, 2004, p. 94-108. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a06.pdf> Acesso em: 18/07/2009.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O Método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais**. São Paulo: Pioneira, 1998. p.109-188.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 1998.

ANDRADE, J. A. A. e NACARATO, A. **Tendências didático-pedagógicas para o ensino de Geometria.** GT. Educação Matemática, n. 19. Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/27/gt19/t197> Acesso em: 17/06/2008.

BARRANTES, M. e BLANCO, L.J. Caracterização das concepções dos professores em formação sobre ensino-aprendizagem da matemática. **Zetetiké**, n. 25, v. 14, 2006, p. 65-92.

BIEHLER, R; SCHOLZ, R.W.; STRABER, R. **Didatics of Mathematics as a Scientific Discipline**, vol 13. Kluwer Academic Publishers. London, 1994.

BICUDO, M.A.V. Pesquisa em Educação Matemática. **Proposições**, Campinas: UNICAMP, v.4 1(10), 1993, p. 18-23.

BOERO, M.L. **A introdução da disciplina 'ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas' no curso de licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie: uma proposta de mudança".** 234f. Dissertação de Mestrado – Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 1999.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994. 336p.

BOYER, C.B., **História da Matemática**. São Paulo. Ed. Edgard Blucher Ltda, 1974.

BORRALHO, A. O ensino da resolução de problemas de Matemática por parte de futuros professores: Relações com a sua formação inicial. In: FERNANDES, D.; LESTER Jr., F.; BORALHO, A.; VALE, I. (Coords.) **Resolução de Problemas na formação inicial de**

professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas. Grupo de invrestigaçao em Resolução de Problemas, Aveiro, 1997, p. 129-157.

BRANSFORD, J.D.; BROWN, A.L.; COCKING, R.R.(orgs.) **Como as pessoas aprendem: cérebro, mente, experiência e escola**. Tradução de Carlos David Szlak. São Paulo: Editora Senac São Paulo, 2007.

BRASIL, L.A. S. **Estudo Dirigido de Matemática no Ginásio**. São Paulo. Editora Fundo de Cultura S. A. 1964.

BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** 3º e 4º ciclos: Matemática. Brasília, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Matemática). 3ª ed. Brasília: A Secretaria, 2001.

BRITO, A.J.; ALVES, F.T.O. Profissionalização e saberes docentes: análise de uma experiência em formação inicial de professores de matemática. In: NACARATO,A.M.;PAIVA, M.A.V.(Org.) **A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas.**Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 27-42.

CAI, J. What Research Tells Us about Teaching Mathematics through Problem Solving. In: LESTER JR, F. K. (Ed.). **Teaching Mathematics through Problem Solving. Prekindergarten-Grade 6**. Reston/VA: NCTM, 2003. p.141-253.

CANAVARRO, A. P.; PONTE, J. P. O papel do professor no currículo de matemática. In; GTI(Eds) **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: APM, 2005. p.63-89.

CASTRO, A. D., **Didática**. Série Idéias, nº 11. São Paulo, FDE. 1991. Disponível em: <http://www.centrorefeducacional.com.br/trajddt.htm> Acesso em: 17/06/2008.

CHACÓN, I.M.G. **Matemática Emocional**. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003.

CHAPPELL, M.F.; CHOPPIN, J.; SALLS, J. **Empowering the beginning teacher of Mathematics in High School** – NCTM, 2ª edição, 2004. p. 3-4.

CONSELHO NACIONAL DE EDUCAÇÃO. **Diretrizes Curriculares para formação de professores da educação básica,** em nível superior, Brasília, 2001. Disponível em: <htpp://.portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CE513022.pdf.> Acesso em: 05/05/2008

CURY, H. N. Concepções e Crenças dos professores de Matemática: Pesquisas Realizadas e Significados dos Termos Utilizados**. Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Ano 12, nº 13, 1999, p. 29-43.

D'AMBROSIO, U. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. In: BORBA, M.C.; ARAÚJO, J.L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática** - Coleção Tendências em Educação Matemática, Editora Autêntica, Belo Horizonte, 2004, p. 11-23.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática.** Tradução de Maria Cristina Bonami. São Paulo, Editora e Livraria da Física, 2007.

DANTE, L.R. Algumas reflexões sobre educação matemática. **Temas & Debates**, nº3, ano IV. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1991, p. 43-49.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 6ª Ed. São Paulo: Editora Ática, 1995.

DINIZ, M.I.S.V.; SMOLE, K.S. Um professor competente para o ensino médio proposto pelos PCNEM. **Educação Matemática em Revista**: Edição especial: Formação de Professores, 2002, p.39-43.

FAINGUELERNT, E.K. A importância da prática de ensino em cursos de formação de professores de matemática. **Temas & Debates**, nº3, ano IV. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1991, p. 43-49.

FAINGUELERNT, E.K.; BORDINHÃO, N.C. Translações e Simetrias no Plano. **Boletim GEPEM**, nº 27, ano XV, 2º semestre, 1990, , p. 49-61.

FERREIRA, A.C. Desenvolvimento Profissional e trabalho coletivo: experiências envolvendo pesquisadores, professores de matemática e futuros professores de Ouro Preto. In LOPES, C.E e NACARATO, A.M. (orgs.) **Educação, Matemática, Leitura e Escrita: armadilhas, utopias e realidade**. Campinas, São Paulo. Mercado de Letras Edições e Livraria Ltda, 1ª edição, 2009, p. 259-276.

FIORENTINI, D. e LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas, SP. Autores Associados, 2006.

GARBI, G. Decorar é preciso. Demonstrar também é. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, 1º quadrimestre, nº68, 2009, p. 1-6.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 2a edição. Rio de Janeiro: Editora Record. 1998.

GONÇALVES, T.O.; FIORENTINI, D. Formação e desenvolvimento profissional de docentes que formam matematicamente futuros professores. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A.M.(orgs). **Cultura, Formação e Desenvolvimento Profissional de professores que ensinam Matemática: investigando e teorizando a partir da prática.** São Paulo, Musa Editora, Campinas, S.P., 2005, p. 68-88.

GRAEBER, A. O.; JOHNSON, M.L. Mathematical Misconception: A Sourcebook. Parte integrante do Projeto **Methods and Materials for Preservice Teacher Education in Diagnostic and Prescritive Teaching of Secondary Mathematics**. NSF, 1990 (Draft).

GUIMARAES, S.D., VASCONCELLOS, M. e TEIXEIRA, L.R.M. O ensino de geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental: concepções dos acadêmicos do Normal Superior. **Zetetiké**, v.14, nº 25, 2006, p. 93-105.

HUANCA, R.R.H. **A Resolução de Problemas no processo ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula**. 247f. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio claro, 2006.

IMBERNÓN, F. A formação inicial para a profissão docente. In: IMBERNÓM, F. **Formação docente e Profissional: formar-se para a mudança e a incerteza.** São Paulo, Editora Cortez, 6ª edição, 2006, pp.57-66.

KALEFF, A. M. R. A importância do ensino da geometria na formação do educador matemático. **Boletim GEPEM**, ano XVII, n. 31, 1993, p. 35-40.

KILPATRICK, J.A History of Research in Mathematics Education In: In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. cap.15, p.3-38.

KRULICK, S.; RUDNICK, J.A. **Roads to Reasoning – Developing Thinking Skills Through Problem Solving**. Creative publications McGraw-Hill, vol 5-8, 2001.

LINTZ, R.G., **História da Matemática**, vol.1, 2ª ed., Coleção CLE, UNICAMP, 2007.

LOPES LEITE, M.L.M. (entrevista à Revista) **Educação Matemática em Revista**, SBEM, nº 8, ano 7, junho de 2000. p. 5 – 9.

LORENZATO, S. (Org.) **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Coleção Formação de Professores – Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MACHADO, N.J. **Matemática e Língua Materna (Análise de uma impregnação mútua).** 5ª edição. São Paulo: Cortez, 2001.

MARINCEK, V.; CAVALCANTI, Z. **Aprender Matemática resolvendo Problemas**. Porto Alegre, Artmed Editora, 2001.

MEWBORN, D. S.; CROSS, D. I. Mathematics Teachers'Beliefs about Mathematics and Links to Students'Learning. In: MARTIN, W.G., STRUTCHENS, M.E. e ELLIOT, P.C**,** **Teachers' Learning of Mathematics**, sixty-ninth yearbook, NCTM, 2007**,** p. 259-269.

MEWBORN, D. S. Teaching, Teachers'Knowledge, and Their Professional Development In: KILPATRICK, J.; MARTIN, W.G.; SCHIFTER, D. **Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics**, NCTM, 2003 p. 45-52.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Proposições**, vol. 3, nº 17, março de 1992, p. 39-52.

MOREIRA, P.C.; DAVID, M.M.M.S. **A Formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Coleção Tendências em Educação Matemática, Editora Autêntica, Belo Horizonte, 2004.

NACARATO, A.M.; PASSOS, C.L.B. **A Geometria nas Séries Iniciais: Uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores**. São Carlos: EDUFScar, 2003.

NASSER, L.; TINOCO, L. **Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático, Modulo1: Formação de Conceitos Geométricos**, 3ª edição, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, Projeto Fundão, 2004.

__________. **Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático, Modulo 2: Visão Dinâmica da Congruência de Figuras**, 3ª edição, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, Projeto Fundão, 2004.

__________. **Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático, Modulo 3: Visão Dinâmica da Semelhança de Figuras**, 3ª edição, Rio de Janeiro: UFRJ/IM, Projeto Fundão, 2004.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: Library of Congress Cataloguing, 2000.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's**. Reston: NCTM, 1980.

NÓVOA, A. **O professor pesquisador e reflexivo**. Entrevista concedida em 13 de setembro de 2001. Disponível em: <http://www.tvebrasil.com.br/salto/entrevistas/antonio_novoa.htm> Acesso em: 20/05/2009.

OLIVEIRA, M.C.A. de, **Possibilidades de construção do conhecimento pedagógico do conteúdo na formação inicial de professores de matemática.** Disponível em: <http: // www.anped.org.br/reuniões/28/textos/gt08/gt08356 int.rtf> Acesso em: 05/05/2008.

OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. **Educação e Matemática – Revista da Associação de Professores de Matemática**, nº 100, Nov/dez de 2008, p. 3-9.

ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G. Formação de professores – mudanças urgentes na Licenciatura em Matemática In. REZENDE, M.C.; NASSER, L. **Educação Matemática no Ensino superior: Pesquisas e Debates.** Biblioteca do Educador. Coleção SBEM, vol. 5, 2009a, p. 169-187.

ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G. Um trabalho com concepções errôneas na Licenciatura em Matemática através da resolução de problemas. In. **Anais** do **II congresso das Licenciaturas em Matemática. Mackenzie**, 2009b.

ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G. As Diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. Revista **BOLEMA**, ano 21, nº 31, 2008, p. 79-102.

ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – Aritmética, Álgebra e Geometria. In: **Anais da Primeira Escola de Inverno de Educação Matemática de Santa Maria - UFSM**, 2008, p. 1-7.

ONUCHIC, L. R.; BOERO, M. L. Perspectivas sobre Conhecimento e Métodos de Pesquisa. **Bolema**, Rio Claro, n. 27, p. 93-139. 2007. Traduzido do original: ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. **Handbook of**

Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. cap. 3, p. 49-64.

ONUCHIC, L. R., ALLEVATO, N. S. G. Novas Reflexões sobre o ensino – aprendizagem de matemática através da resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A e BORBA, M. (orgs) **Educação Matemática – pesquisa em movimento**, São Paulo, Editora Cortez, 2004, p. 213-231.

ONUCHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectiva**. São Paulo, SP: Editora UNESP, 1999, p. 199-220.

PAIS, L.C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria. **23ª reunião da ANPED,** 2000. Disponível em www.anped.org.br/23/textos/1919t.pdf . Acesso em maio de 2009.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. Coleção Tendências em Educação Matemática, 2ª edição, Belo Horizonte:Editora Autêntica, 2002.

PAIS, L.C. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. **Zetetiké**. Campinas: CEMPEM/FE/UNICAMP, v.4, n.6, julho/dezembro, 1996, p. 65-74.

PAVÃO, Z.M. Formação do professor-educador matemático em cursos de Licenciatura. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, vol.6, nº 18, maio/ago. 2006, p. 161-168.

PAVANELLO, R.M. O ensino da geometria no Brasil nas últimas décadas: algumas preocupações a partir de pesquisas. **Anais do I Seminário de Ensino de Geometria** - UFOP, 2007, p. 25-41.

PAVANELLO, R.M. e ANDRADE, R.N.G.de. Formar professores para ensinar Geometria: Um desafio para as Licenciaturas em matemática. **Revista Educação Matemática em Revista**, SBEM – Licenciatura em Matemática um curso em discussão, edição especial, 2002, ano 9, n. 11ª, edição especial, p.78-87.

PAVANELLO, R.M. O abandono do Ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Revista Zetetiké**, Campinas – UNICAMP, ano 1, nº 1, 1993, p.7-17.

PEREZ, G. Formação de professores de matemática sob a perspectiva do desenvolvimento profissional. In: BICUDO, M.A.V. (org). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo, Editora UNESP, Rio Claro, 1999, p. 263-282.

PEREZ, G., Competência e compromisso político na formação do professor de matemática. In: Sociedade Brasileira de Educação Matemática –**TEMAS & DEBATES**, n. 7, São Paulo, 1995.

PÉREZ, L.C.; CABRERA, C.R. **Curso especial Geometria y resolucion de problemas**. In: XIV RELME, Panamá, 2000. p.117-124.

PIRONEL, M. **A avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática**. 193f. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio claro, 2006.

PITOMBEIRA, J.B. de C. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In: VALENTE,W.R. (org.), **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil.** São Paulo, 1ª Ed. Biblioteca do Educador Matemático. Coleção SBEM, vol.1, 2003. pp. 86-158.

POLYA, G. On Learning, Teaching and Learning Teaching. Trad. de Mosquito et al. In POLYA, G. **Mathematical Discovery**, cap XIV, 1962. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/polya/index.htm> Acesso em: 15 de agosto de 2008.

POLYA, G. **Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.** USA: Library of Congress Catalog , vol.2, 1965.

POLYA, G. **Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.** USA: Library of Congress Catalog , vol.1, 1962.

PONTE, J.P. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. In:PONTE, J.P. **Educação Matemática: Temas de Investigação**. Lisboa: IIE. 1992, p. 185-239. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/9. Acesso em 05/05/08.

PONTE, J.P. **Perspectivas de desenvolvimento profissional**. 1995. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs_pt/95_Ponte (Profmat).rtf> Acesso em 05/05/08.

PONTE, J.P. Da formação ao desenvolvimento profissional. In **Actas do PROFMAT** (98). Lisboa APM, 1998, p. 27-44.

PONTE, J.P. A investigação em didática da matemática pode ser (mais) relevante? 199? Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs_pt/95_Ponte (Profmat).rtf> Acesso em 05/05/08. p. 327-338

PONTE, J.P. Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional. In: TAVARES, J.; PEREIRA, A.; PEDRO, A.P. & SÁ, H.A.(Eds.). **Investigar e Formar em Educação: Actas do IV Congresso da SPCE**. Porto: SPCE, 1999, p. 1-17.

PONTE, J.P. A vertente profissional da formação inicial de professores de matemática. **Educação Matemática em Revista** - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 11ª, 2002, p. 3-8.

PONTE, J.P. et.al, **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte, Autêntica, 1ª edição, 2ª reimpressão, coleção Tendências em Educação Matemática, 2006.
ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan Publishing and Company, 1992. cap.3, p.49-64.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. **Proposta Curricular Matemática – Ensino Fundamental – Ciclo II e Ensino Médio**, 2008.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de Matemática – 1º grau**, 5ª edição, São Paulo, 1997.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de Matemática – 1º grau**, 4ª edição, São Paulo: SE/CENP, 1991.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de Matemática para o CEFAM e Habilitação Específica para o Magistério.** São Paulo: SE/CENP, 1990.

SÃO PAULO, Secretaria de Educação. Coordenadoria de Estudos Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de Matemática – 1º grau**, 3ª edição, São Paulo, 1988.

SAVIANI, N. Currículo – Um grande desafio para o professor. **Revista de Educação**, nº16. São Paulo, 2003, p. 35-38.

SCHON, D. A. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, A. (org.) **Os professores e a sua formação**. Temas de educação. Publicações Dom Quixote, Lisboa,1992.

SCHROEDER, T.L., LESTER Jr., F.K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving, TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) **New Directions for Elementary School Mathematics**. National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).

SMOLE, K. C.S.; DINIZ, M.I. Ler e Aprender Matemática. In: SMOLE, K. C.S.; DINIZ, M.I (orgs.) **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmede Editora, 2001. p. 69-86.

STANICK, G.M.A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R.I; SILVER, E.A. (Eds.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**: Research Agenda for Mathematics Education, vol.3, Lawrense Erlbaum Associates. National Council of Teachers of Mathematics,1989, p. 1-22.

STEINBRING, H. Dialogue between Theory and Pratice in Mathematics Education. In: **Didatics of Mathematics as a Scientific Discipline**, vol 13. Kluwer Academic Publishers. London, 1994, p. 88-102.

THOMPSON, A. Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers'Conceptions and Belief. In: CHARLES, R.I.; SILVER, E.A. **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Lawrence Erlbaum Associates, NCTM, 1989, p. 232-243.

THOMPSON, A. Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In: GROUWS, D.A.(Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York, New York: Macmillan, 1992, p. 127-146.

TURRIONI, A.M.S.; PEREZ, G. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, S. (org.) **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Coleção Formação de Professores – Campinas, SP: Autores Associados, vol. 1, 2006. p. 57-76.

VARIZO, Z.C.M. Os caminhos da Didática e sua relação com a formação de professores de Matemática. In: NACARATO, A.M.; PAIVA, M.A.V. (orgs.). **A Formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas**. Belo Horizonte, Editora Autêntica, 2006.p. 43-59.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e Aplicação em Sala de Aula.** 6ª edição. Tradução de Paulo Henrique Colonese**.** Editora Artmed, 2009.

VAN DE WALLE, J. A.; LOVIN, L.A. **Teaching Student-Centered Mathematics – Grades 5-8.** New York: Pearson, 2006.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York:, 4ª edição, Logman, 2001.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. Modificação de crenças: proposta de intervenção educativa. In: VILA, A.; CALLEJO **Matemática para aprender a pensar: O papel das crenças na resolução de problemas**. Tradução Ernani Rosa. ARTMED Editora S.A., S. P., 2006. p.127-182.

ZUFFI, E.M.; ONUCHIC, L.R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. **Revista Iberoamericana de Educacion Matemática**, n. 11, setembro de 2007, p. 79-97. Disponível em: <http://www. fisem.org/paginas/union/info.php?id=232>. Acesso em 05/04/2008. (2007).

REFERÊNCIAS CONSULTADAS

DANTAS, M. M.S. et al. As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria, vol. 1 e 2. Salvador: EDUFBA, 1996.

DOLCE, O. e POMPEO, J.N. **Fundamentos de Matemática Elementar:** geometria plana. Vol.9, 7ª edição. Editora Atual, São Paulo, 1993.

EDITORA MODERNA – **Matemática:** Ensino Fundamental de nove anos. Vol 7. Projeto Araribá, 2007.

EXPERIÊNCIAS MATEMÁTICAS. **Matemática – 7ª série**. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, CENP – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógica, 1994.

HOLDAN, G. Tornando as tarefas de casa de Álgebra mais eficazes. In: SHULTE, Albert P. e COXFORD, Arthur F. (orgs). Tradução: DOMINGUES, Hygino H. **As idéias da Álgebra**. São Paulo, Editora Atual, 1995, p. 278-284.

KRULICK, S.; RUDNICK, J.A. **Roads to Reasoning – Developing Thinking Skills Through Problem Solving**. Creative publications McGraw-Hill, vol 5-8, 2001.

KRULICK, S.; RUDNICK, J.A. **Problem-Driven Math**: Applying the Mathematics Beyond Solutions. Estados Unidos: Wright Group/McGraw-Hill, 2005.

LARSON. R.; BOSWELL, L.; STIFF, L. **Geometry**: Reasoning, Applying and Measuring. Boston: McDougal Littell- A Houghton Miffin Company, 2007.

OHLSSON, S. Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts. In: HIEBERT, J & BEHR, M. (Eds.). **Numbers Concepts and Operations in the Middle Grades**. 3 ed. Reston: NCTM, p. 53-92, 1991.

ONUCHIC, L.R.; BOTTA, L.S. REconceitualizando as quatro operações fundamentais. **Revista de Educação Matemática – SBEM-SP**, São Jose do Rio Preto/SP, ano 6, n. 4, 1998, p.19-26.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. São Paulo, Interciências, 1978.

LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A. **Aprendendo e Pensando Geometria**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

ANEXOS

ANEXO A – Cartas

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JULIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
E CIÊNCIAS EXATAS

Rio Claro, Julho de 2008

Prezada Coordenadora

Na condição de professora orientadora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro – SP venho, por meio desta, apresentar a minha orientanda de doutorado **Célia Barros Nunes** a esta instituição a fim de desenvolver a sua pesquisa de doutorado intitulada: **O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática** que tem por objetivo contribuir significativamente com a formação inicial de futuros professores de Matemática que deverão ensinar Geometria.

Na certeza de contar com seu apoio gostaríamos de sua permissão para que a mesma venha a realizar a coleta de dados, a partir de novembro, com os alunos do 4º período do curso de Matemática, ministrando as disciplinas: "Didática da Matemática" e "Laboratório de Ensino de Matemática II".

Coloco-me à disposição para esclarecimentos que se fizerem necessários.

Atenciosamente,

____

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic
Orientadora da pesquisa

unesp **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÂMPUS DE RIO CLARO
Pós-graduação em Educação Matemática

Rio Claro, novembro de 2008

PREZADOS ALUNOS

Somos pesquisadores do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro/SP. Temos desenvolvido pesquisas sobre temas que envolvem o ensino e a aprendizagem de Matemática nos diferentes níveis de escolaridade. Atualmente, estamos envolvidos num projeto cujo objetivo é contribuir com a formação inicial do professor de Matemática que deverá ensinar Geometria propondo uma metodologia de trabalho em sala de aula. Para isso, estabelecemos contato, na **Universidade do Estado da Bahia – UNEB/Campus X**, com a Coordenadora do Colegiado de Matemática, professora Célia Rosângela Dórea, pedindo-lhe permissão para realizar a coleta de dados que se dará em forma de aulas, tendo a pesquisadora como professora nas disciplinas *Didática da Matemática* e *Laboratório de Ensino da Matemática II*.

Para essa pesquisa, uma seqüência de aulas dessas duas disciplinas será filmada. **Todas as prerrogativas éticas serão rigorosamente cumpridas** e a Coordenadora do curso estará informada de todos os momentos desse processo. Além disso, reiteramos que **seguiremos à risca todas as obrigações éticas** indicadas pela UNESP sendo que nenhum material relativo a essa filmagem será divulgado sem o conhecimento e a autorização explícita dos participantes.

Esta carta, portanto, tem a intenção de **informar a todos sobre esse processo de investigação e solicitar-lhes autorização** para sua participação. Para tanto, pedimos a gentileza de que esta carta, assinada abaixo, nos seja devolvida.

Os resultados desta pesquisa estarão disponibilizados nesse Campus, em cópia impressa e digital, tão logo todo o trâmite tenha se completado. Além disso, ficamos à disposição de todos para o que for julgado necessário, no Departamento de Matemática/UNESP/RC – SP, Campus da Bela Vista (telefone 3534-0123).

Contamos com sua colaboração num trabalho que visa à melhoria do processo de ensinar e aprender Matemática.

Atenciosamente

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic
Orientadora

Profa. Célia Barros Nunes
Doutoranda

Nome do Aluno:

ANEXO B – Textos relacionados à Disciplina Didática da Matemática

Termo de Compromisso[58]

Este Termo de Compromisso que aqui se apresenta tem por objetivo estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização de um trabalho diferenciado em Matemática, apontando as responsabilidades e os direitos dos alunos e da professora. O trabalho será realizado com uma turma do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia – UNEB, Campus X, no município de Teixeira de Freitas, BA. As disciplinas que serão ministradas pela professora são: *Didática da Matemática* e *Laboratório de Ensino da Matemática II.*

Essas disciplinas estão programadas para serem ministradas em 45h/a, cada uma, com 3h/a semanais. A metodologia de trabalho em sala de aula que adotaremos será a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

A professora será responsável pelo desenvolvimento de um ensino-aprendizagem sério e eficiente, tendo o aluno como co-construtor de seu próprio conhecimento. Ela, também, será o veículo que conduzirá à construção desse novo conhecimento (Vygotsky – Zona de Desenvolvimento Proximal). Cabe também à professora a exploração final e a formalização de novos conceitos e conteúdos construídos.

O trabalho com os alunos desenvolver-se-á de forma colaborativa, ou seja, os estudantes trabalharão em pequenos grupos, com o objetivo de explorar e resolver as atividades programadas.

Em se tratando das responsabilidades do aluno, podemos apontar as seguintes:

Os grupos serão formados por no máximo quatro alunos.

Os membros do grupo devem perceber que eles são parte de uma equipe e que todos eles têm um objetivo em comum: a aprendizagem através da resolução de problemas.

Todo aluno do grupo deverá engajar-se na exploração dos problemas apresentados.

O trabalho individual de cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso do grupo.

A exploração final e a formalização de conceitos e conteúdos construídos serão de responsabilidade da professora.

Cada aluno será avaliado individualmente, de acordo com o artigo 24, inciso V-a da L.D.B. da Educação Nacional, lei nº 9394 de 20/12/1996. A avaliação desses alunos será feita continuamente e, para cada tópico selecionado, haverá uma pontuação:

---

[58] Texto de nossa autoria.

Freqüência: **1 ponto** – Todos deverão estar presentes no local e horário estipulados para as atividades.

Participação: **1 ponto** – Participação nas discussões e no desenvolvimento das atividades propostas.

Trabalho no grupo: **2 pontos** – Os trabalhos de grupo serão observados e avaliados pelo professor durante todas as atividades.

Tarefa: **1 ponto** – As tarefas extraclasse serão validadas e discutidas no início da aula subsequente.

Prova: **5 pontos** – A avaliação escrita será constituída por uma prova individual requerida por Lei e pela Instituição.

Observa-se que questões e problemas surgidos durante o desenvolvimento do trabalho serão discutidos por todos, professora e alunos, a fim de chegar-se a um comum acordo, ficando estabelecido que essas normas deverão ser cumpridas por ambas as partes, professora e alunos.

Teixeira de Freitas,__________de ___________________de 2008

_________________________ _________________________

Professor(a) Aluno(a)

Tornando as tarefas extra-classe (para casa) mais eficazes[59]:

> Sabe-se que é preciso muito exercício para dominar uma habilidade. Assim, também a prática deve fazer parte do planejamento dos cursos de Matemática. Em certos momentos do curso deve-se dar oportunidade ao aluno de se envolver independentemente com a habilidade ou o conceito em estudo. Nas aulas de Matemática, isso geralmente significa passar "tarefa para casa" (Gregory Holdan, 1988 – Traduzido por Hygino H. Domingues,1995, p. 278).

Holdan, em seu artigo "Tornando as tarefas de casa de álgebra mais eficazes" apresenta cinco princípios, indicados pelas pesquisas, e que o professor deverá levar em conta ao planejar a tarefa de casa. Reconhecemos que esses princípios são válidos para o trabalho com qualquer tópico de Matemática.

Distribuir a prática ao longo do tempo é preferível a concentrá-la (Butcher, 1975).

Os exercícios, como problemas de fixação, ajudam os alunos a reter conceitos e habilidades já aprendidos.

> A tradicional concentração de exercícios faz com que se treinem apenas os conceitos e as habilidades relacionados a um único tópico . . . A prática distribuída pressupõe a inclusão de exercícios envolvendo conceitos e habilidades ensinados previamente. . . Assim, as tarefas de casa proporcionarão ao aluno um reforço ao longo do tempo, diminuindo o efeito do esquecimento resultante da interferência da matéria nova e fazendo com que seja mais fácil lembrar uma dada informação, quando necessário (p. 279).

Tarefas que incluem oportunidades de exploração de tópicos futuros são preferíveis àqueles que não as incluem (Klinger, 1973).

> A prática exploratória, envolvendo tópicos futuros, deveria ser cuidadosamente planejada, ao levarmos em conta a falta de conhecimento e habilidades específicas a respeito desses tópicos. Os exercícios exploratórios devem servir para ativar informações relevantes e significativas que o aluno já possui. A bagagem de informações adquiridas previamente pelo aluno pode ter muita influência em sua capacidade para adquirir novos conceitos e novas habilidades.

A prática no mesmo contexto facilita a aprendizagem inicial; a prática de conteúdos múltiplos facilita a transferência (Nitsch, citado em Bransford, 1979; Di Vesta e Peverly, 1984).

> Se os exercícios de casa, de cada tópico, forem distribuídos em diferentes tarefas, cada uma planejada deverá incluir uma variedade de exercícios. Sendo assim, as idéias e as habilidades se conectarão por referências cruzadas na estrutura cognitiva

[59] Uma adaptação do texto de Gregory Holdan, intitulado: "Tornando as tarefas de casa de Álgebra mais eficientes" no *livro As idéias da Álgebra* (1988, p. 278-284).

> do aluno, em vez de permanecerem armazenadas em relativo isolamento. Por outro lado, os conceitos aprendidos vão se aprimorando, desde que sofram mudanças ao longo do tempo (p. 281).

Uma combinação de prática distribuída e exploratória é preferível à prática concentrada (Holdan, 1986).

> Cada tarefa proporciona a oportunidade de rever, reforçar e explorar tópicos futuros e, ao mesmo tempo, como é óbvio, de praticar através de exercícios relativos ao novo assunto. As tarefas de casa que englobam exercícios variados incentivam o aprendizado como um corpo de princípios integrados, e não como um aprendizado rotineiro de problemas algébricos aparentemente sem relação entre si (p. 281)

Métodos diferentes de ensino podem levar a resultados estruturalmente diferentes no aprendizado quanto à qualidade da transferência de idéias (Mayer e Greeno, 1972, 1975; Di Vesta e Peverly, 1984).

> Por um lado, o ensino que enfatiza conceitos gerais aumenta o raio de ação da transferência, ou promove a generalização ampla, daquilo que se aprendeu para problemas bastante diferentes dos que foram exercitados. . . Por outro lado, quando se baseia o ensino meramente numa fórmula que conduz à solução, o raio de ação da transferência e o alcance da generalização limitam-se a problemas muito parecidos com aqueles que foram exercitados. . . Dando ênfase a conceitos gerais e a atividades práticas orientadas, em vez de se limitar a simples aplicações de regras aparentemente arbitrárias, o professor pode ajudar seus alunos em seus esforços para a resolução de problemas (p. 282).

O artigo, escrito em 1988, diz que

> Esses princípios devem servir de roteiro para se tomar uma decisão segura em relação às tarefas de casa. De qualquer modo, tarefas de casa somente deverão ser propostas depois que o aluno estiver preparado para isso (p.283).

Convém chamar a atenção a esse parágrafo, escrito numa época em que se falava em ensinar Matemática **para** resolver problemas. A partir dos anos 90, passou-se a pensar em ensinar Matemática **através** da Resolução de Problemas.

Usando nossa metodologia de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas insistimos na postura de que o aluno deva estar potencialmente preparado para resolver o problema dado (Vygotsky), isto é, que tenha conhecimentos prévios capazes de levá-lo a construir conhecimentos novos necessários à resolução do problema dado.

Didática Geral

Amélia Domingues de Castro

Como adjetivo - didático, didática - o termo é conhecido desde a Grécia antiga, com significação muito semelhante à atual, ou seja, indicando que o objeto ou a ação qualificada dizia respeito a ensino: poesia didática, por exemplo. No lar e na escola, procedimentos assim qualificados -didáticos - tiveram lugar e são relatados na história da Educação. Como objeto de reflexão de filósofos e pensadores, participam da história das idéias pedagógicas. A situação didática, pois, foi vivida e pensada antes de ser objeto de sistematização e de constituir referencial do discurso ordenado de uma das disciplinas do campo pedagógico, a Didática.

Grosso modo, podemos dizer que a Didática é uma ciência cujo objetivo fundamental é ocupar-se das estratégias de ensino, das questões práticas relativas à metodologia e das estratégias de aprendizagem. Sua busca de cientificidade se apóia em posturas filosóficas como o funcionalismo, o positivismo, assim como no formalismo e o idealismo. Sintetizando, poderíamos dizer que ela funciona como o elemento transformador da teoria na prática.

Século XVII: surgimento da Didática

A inauguração de um campo de estudos com esse nome tem uma característica que vai ser reencontrada na vida histórica da Didática: surge de uma crise e constitui um marco revolucionário e doutrinário no campo da Educação. Da nova disciplina espera-se reformas da Humanidade, já que deveria orientar educadores e destes, por sua vez, dependeria a formação das novas gerações. Justifica-se, assim, as muitas esperanças nela depositadas, acompanhadas, infelizmente, de outras tantas frustrações.Constata-se que a delimitação da Didática constituiu a primeira tentativa que se conhece de agrupar os conhecimentos pedagógicos, atribuindo-lhes uma situação superior à da mera prática costumeira, do uso ou do mito. A Didática surge graças á ação de dois educadores, RATÍQUIO e COMÊNIO, ambos provenientes da Europa Central, que atuaram em países nos quais se havia instalado a Reforma Protestante.

Essa etapa da gênese da Didática a faz servir, com ardor, á causa da Reforma Protestante, e esse fato marca seu caráter revolucionário, de luta contra o tipo de ensino da Igreja Católica Medieval. Doutrinariamente, seu vínculo é com o preparo para a vida eterna e, em nome dela, com a natureza como "nosso estado primitivo e fundamental ao qual devemos regressar como princípio”(Comênio).

Conheçam Seus Alunos - diz Rousseau

As instituições dos didatas parecem ter-se estiolado no decurso do tempo e a História da Educação consigna apenas iniciativas esparsas até o final do século XVIII. ROUSSEAU é o autor da segunda grande revolução didática. Não é um sistematizador da Educação, mas sua obra dá origem, de modo marcante, a um novo conceito de infância.

A prática das idéias de ROUSSEAU foi empreendida, entre outros, por PESTALOZZI, que em seus escritos e atuação dá dimensões sociais ã problemática educacional. O aspecto metodológico da Didática encontra-se, sobretudo, em princípios, e não em regras, transportando-se o foco de atenção às condições para o desenvolvimento harmônico do aluno. A valorização da infância está carregada de conseqüências para a pesquisa e a ação pedagógicas, mas estas vão ainda aguardar mais de um século para concretizar-se.

Na primeira metade do século XIX, João Frederico HERBART (1776-1841) deseja ser o criador de uma Pedagogia Científica, fortemente influenciada por seus conhecimentos de Filosofia e da Psicologia da época. Situa-se no plano didático ao defender a idéia da “Educação pela Instrução”, bem como pela relevância do aspecto metodológico em sua obra. “O método dos passos formais” celebrizou o autor, que o considerava próprio a toda e qualquer situação de ensino.

HERBART tem o mérito de tornar a Pedagogia o “ponto central de um círculo de investigação próprio”. Observe-se que os fundamentos de suas propostas, e estas mesmas, vieram a merecer críticas dos precursores da Escola Nova cujas idéias começam a propagar-se ao final do século XIX.

Um Intervalo na Trajetória Histórica: comentário sobre o duplo aspecto da Didática

Da original proposta didática do século XVII, duas linhas se destacam e estarão daí em diante em conflito. De um lado fica a linha **metodológica,** que, fundamentada no que se conhecia sobre a natureza no século XVII ou sobre a Psicologia no começo do século XIX, acentua o aspecto externo e objetivo do processo de ensinar, embora o faça em nome do sujeito (criança, aluno, aprendiz) que se pretende ensinar de modo eficiente. A linha oposta parte do sujeito, de seus anseios e necessidades, acentuando o perene interno do educando.

A Didática do século XIX oscila entre esses dois modos de interpretar a relação didática: ênfase no **sujeito** - que seria induzido, talvez "seduzido" a aprender pelo caminho com curiosidade e motivação - ou ênfase no **método,** como caminho que conduz do não-saber ao saber, caminho formal descoberto pela razão humana.

Chegou o momento de procurar responder às questões iniciais, que giram em torno do objeto de estudos e da delimitação do campo da Didática, de sua autonomia e relacionamento com outras áreas de conhecimento e reflexão.

Conseguindo-se apontar o núcleo dos estudos didáticos, ou seja, o Ensino, como intenção de produzir aprendizagem e sem delimitação da natureza do resultado possível (conhecimento físico, social, artístico, atitudes morais ou intelectuais, por exemplo), e de desenvolver a capacidade de aprender e compreender, é fácil entender que suas fronteiras devem sei fluidas. E que essa fluidez é qualidade e não defeito, pois permite sua aproximação com conhecimentos psicológicos, sociológicos, políticos, antropológicos, filosóficos ou outros.

Mas, afinal, será mesmo a Didática apenas uma orientação para a prática, uma espécie de receituário do bom ensino? Esse é um dos mais discutidos problemas da disciplina. Se assim fosse não valeria a atenção de tantos, embora possa até chegar lá, como qualquer disciplina que comporta aplicações práticas. Mas a teorização em Didática é quase uma fatalidade: em todas as discussões há, explícita ou implicitamente, uma tomada de posição teórica. Disse um eminente pensador, há muitos anos, que o pedagogo quase nunca foi o filósofo de sua pedagogia. Assim é a Didática, que, como vimos, se aproxima de outras teorias, em sua necessidade de explicar as relações entre os eventos que estuda, pois a função da teoria é a explicação.

A Didática deve conviver com essa dupla feição, teórica e prática, como a Medicina. É uma prática muito especial, pela responsabilidade social que a envolve, já que tem uma grande impregnação social. Mas são diferentes a elaboração de um rol de prescrições e o traçado de conjecturas, de proposições com diferentes graus de probabilidade, de hipóteses conduzidas pela teoria. Pois os caminhos didáticos, ao contrário do que julgam alguns tecnodidatas, são amplos e diferenciados e não estritos e exclusivos.

Um esclarecimento final, sobre o conceito **foco da Didática:** o **Ensino.** Revela uma intenção: a de produzir aprendizagem; é palavra-ação, palavra-ordem, palavra-prospectiva, palavra que revela um resultado desejado. Mas, depois de PIAGET, não se pode mais entender o ensino como a simples apropriação de um conteúdo: uma **informação,** um conhecimento ou uma atitude, por exemplo. O ato assimilador, essência da aprendizagem legítima, correspondente ao ensino que merece esse nome, terá como subproduto (sub ou super?) alguma mobilização da inteligência redundando em progresso cognitivo, em capacidade ampliada para conhecer (ou aprender).

É desse fenômeno que trata a Didática: do ensino que implica desenvolvimento, melhoria. E mais: não se limita o bom ensino ao avanço cognitivo intelectual, mas envolverá igualmente progressos na afetividade, moralidade ou sociabilidade, por condições que são do desenvolvimento humano integral.

Quero, ainda, deixar claro que, do meu ponto de vista, a Didática, como disciplina e campo de estudos, parece acelerar o progresso no sentido de uma autoconsciência de sua identidade - encontrada em seu núcleo central - e de sua necessária interdisciplinaridade.Conseguir plenamente a autonomia, sem prejudicar suas fecundas relações com disciplinas afins, é um projeto que, a meu ver, depende tanto de um esforço teórico e reflexivo, quanto de um avanço no campo experimental. Creio que é tarefa para o século XXI.

Publicação: Série Idéias n. 11. São Paulo: FDE, 1991 ***Páginas:*** 15-25.

A necessidade da Escola[60]

Maria Lúcia Boero

Fazer com que os alunos, mesmo quando professores em exercício, se manifestem e coloquem suas próprias crenças e concepções sobre educação em geral e educação matemática em particular, não é fácil.

Sempre com papel e lápis na mão, esperam que o mestre coloque alguma coisa na lousa para anotarem. Buscamos envolvê-los perguntando:

- A instituição escola é necessária? Qual seu papel mais importante? Sempre existiu escola? A escola é para todos?

Deixamos que pensassem que conversassem entre si e esperamos por suas próprias reflexões.

Nesse meio tempo lembramos que o homem, utilizando seus sentidos, pôde e pode se comunicar, entender as coisas de seu mundo, apresentar suas idéias e viver em sociedade, isto é, recebe, durante sua vida, um aprendizado social que lhe permite sobreviver. Entretanto, a escola lhe dá mais oportunidades. Através dela ele pode aprimorar seus conhecimentos de forma a poder viver plenamente em sociedade.

Perguntamos à classe:

- Para vocês, o que significa ser alfabetizado?

Pensaram, conversaram e tentaram chegar a uma conclusão. Disseram que, até hoje, para muitos, o simples fato de saber ler e escrever (não importa quão bem) já os qualifica como alfabetizados. Falamos que esse tipo de alfabetização onde há apenas uma comunicação através de palavras é chamado *literacia*.

Fizemos uma pergunta:

- É possível, hoje, alguém ler bem um jornal se for somente alfabetizado em letras?

Novas conversas entre eles e, então, disseram: - Não! Nos jornais há muitos gráficos, muitos dados estatísticos, muita porcentagem... Então, dissemos: - Há uma grande necessidade de comunicação envolvendo quantidades e medidas. Essa é uma forma de alfabetização que envolve números. É chamada *numeracia*.

Continuando as observações dos alunos, vimos que a função da escola é fazer com que o indivíduo fale, leia e escreva bem, que saiba interpretar corretamente o que lê e que saiba se

[60] Texto extraido da dissertação de mestrado: "A introdução da disciplina 'ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas' no curso de licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie: uma proposta de mudança" de Maria Lúcia Boero (São Paulo, 1999).

comunicar adequadamente. Ainda, para que ele não seja somente capaz de fazer cálculos elementares, usar dinheiro, comprar, vender, reconhecer e moldar figuras e formas é preciso que a escola faça com que ele domine a matemática necessária para poder viver bem no mundo. Esse trabalho formal é chamado *materacia*, alfabetização em matemática.

Nestas últimas décadas há muitos que consideram alfabetizados apenas aqueles que dominam a literacia e a materacia.

Sabemos que vivendo em sociedade o homem já é capaz de reconhecer e de identificar parte da tecnologia existente. Quem deve preparar esse homem para fazer uso correto dessa tecnologia é a escola. Com esse trabalho da escola o homem ficará alfabetizado em tecnologia e, para o mundo atual, será considerado alfabetizado aquele que o for em literacia, materacia e tecnocracia. Um indivíduo assim preparado sairá, da escola para a sociedade, como um cidadão útil, consciente e crítico, preparado para enfrentar os novos tipos de emprego que estão aparecendo.

Nós, aqui, poderíamos acrescentar que esse cidadão estaria preparado para saber tomar decisões em seu trabalho e em suas necessidades na vida.

Ensinar a Ensinar[61]

Muitos acreditam, desde há muito tempo, que a tarefa do pesquisador em Didática da Matemática seja a de "*ensinar* a ensinar" e que os destinatários desse "*ensinar*" devam ser os que desejam ser professores (em *formação inicial*, como normalmente se diz) ou aqueles que já são professores (quando estão na fase denominada *formação em serviço*).

Por mais que essa crença esteja enraizada, por exemplo, entre os colegas matemáticos, as coisas não são assim; entretanto, se tal crença se encontra tão difundida, alguma raiz, alguma justificação, alguma origem deve ter... Acredito ser possível encontrá-la nas atividades que, com muitas evidências, têm caracterizado a Didática da Matemática nos anos da primeira grande revolução, que vai de 1950 a 1980, e à qual muitos ainda se referem, não tendo informações posteriores e mais atuais.

Naqueles anos, pretensos especialistas, do alto de suas cátedras, propunham técnicas e idéias, sugeriam argumentos e modalidades, inventavam truques e jogos, pareciam de fato querer "*ensinar* a ensinar"... Esses especialistas eram matemáticos (às vezes também psicólogos ou pedagogos) que haviam decidido dedicar seu próprio tempo (ou parte dele) à relação direta com os professores, ou eram professores muito experientes que, conscientes de sua militância no campo, consideravam poder propor ideias a seus colegas ou aos que aspiravam sê-lo.

Entretanto, por volta do final dos anos 70, ocorreu uma segunda revolução, muito mais radical:
As relações entre ensino e aprendizagem ficaram melhor esclarecidas;

Compreendeu-se com maior profundidade que aprender não depende apenas da disciplina e da metodologia de ensino, mas também de fenômenos ligados a problemas de comunicação, sociológicos, antropológicos,...;

Compreendeu-se que a ideia didática que prevalecera até então, qual seja: "se ensinai bem, os vossos alunos aprenderão", não apenas era ingênua, mas falsa: uma pura ilusão (Moreno Armella, 1999)

[61] Este texto extraído e adaptado do livro "Elementos de Didática da Matemática" (Bruno D'Amore, 2007).

Começou-se também a refletir de maneira séria e construtiva sobre os objetivos do ensino de matemática. Hans Freudenthal [1905-1990], já em 1969, escrevia: “A Matemática é mais do que uma técnica. Aprender Matemática significa conquistar a atitude para um comportamento matemático”, dirigindo a atenção para a aprendizagem mais do que para o ensino.

As problemáticas da aprendizagem e as pesquisas

Nesse sentido, a meu ver, um fato é emblemático: a partir do início dos anos 50 e, depois, até o final dos anos 80, obviamente todos os congressos nacionais ou internacionais se referiam ao ensino, dado que se dirigiam aos professores. A partir do inicio dos anos 80, porém, os congressos passaram a ser denominados com o par ensino-aprendizagem. Atualmente, muitos títulos de congressos perderam inclusive o primeiro substantivo...

Todavia, se a tarefa do estudioso em Didática da Matemática não é a de “*ensinar* a ensinar”[62], então qual é?

D’Amore disse:

> Esse é o ponto: como poderia eu ter a pretensão de ensinar professores da escola básica ou professores do Ensino Médio a maneira pela qual ensinar Matemática, logo eu que nunca ensinei em classe alguma desses níveis?. . . Penso que essa colocação explique como as coisas mudaram muito nos últimos 20 anos e que, portanto, a resposta à pergunta, que ainda está no ar (“Se a tarefa do pesquisador em Didática da Matemática *não* é a de *ensinar* a ensinar a Matemática, então qual é?”) necessita de uma reflexão muito mais profunda do que algo banal e simples (2007, p.3).

Parece que, tradicionalmente, o termo *didática* deva necessária e unicamente referir-se à atividade de ensino. Em uma recente edição do *Vocabolário della língua italiana* de N. Zingarelli (1999), no verbete *didática* encontra-se: “Setor da pedagogia que tem por objeto o estudo dos métodos de ensino”.

O que compreende, do que trata a Didática? Não é fácil responder essa pergunta, tão simples, talvez justamente devido à sua simplicidade e clareza.

De acordo com diferentes autores:

A Didática é a parte das ciências da Educação que tem por objetivo o estudo dos processos de ensino e aprendizagem em sua globalidade, independentemente da disciplina em questão, considerando, porém, a relação institucional;

Outros eliminariam a citação da relação institucional, mas dariam mais peso às disciplinas;

[62] Toda pesquisa nesse livro “Elementos de Didática da Matemática” (Bruno D’Amore, 2007) tem por objetivo chegar à resposta dessa pergunta.

Outros insistem na peculiaridade do fato de que a relação ocorra em instituições formais;
Outros falam da didática de todas as formas, em qualquer situação de ensino-aprendizagem;
Outros ainda dizem que a Didática seria de novo a Pedagogia, mas sem a Filosofia.

Segundo Vergnaud (1977), citado por D'Amore (2007), a Didática não pode ser reduzida nem ao conhecimento da disciplina, nem à Psicologia, nem à Pedagogia, nem à Historia, nem à Epistemologia. Ela pressupõe tudo isso, mas não pode ser reduzida; ela possui uma identidade, seus problemas, seus métodos.

Ao falar sobre a Didática da Matemática ligando-a diretamente à Didática Geral, Bruno D'Amore (2007, p.30) diz que:

> A pesquisa em Didática possui, portanto, objetivos requeridos por necessidades, por exigências concretas que podem ser expressas, por exemplo, por meio das seguintes perguntas: o que é preciso fazer e saber para tornar o ensino mais eficaz? Como aprendem os alunos? Quais são os instrumentos metodológicos para adaptar o ensino às capacidades individuais? Como avaliar a eficácia da escolha metodológica? Como e quais os instrumentos a avaliar? ... Entretanto, tudo isso é banal se não estiver ancorado em bases teóricas profundas e sólidas.

Tais bases devem ser construídas a partir das pesquisas nas quais colaborem estudiosos de Didática Geral e Didática disciplinar, a fim de entender a teoria e as exemplificações, úteis a ambos.

E, portanto, D'Amore, acredita que seu livro intitulado: *Elementos de Didática da Matemática* poderá contribuir para desmistificar a idéia, ainda viva, de que para ensinar Matemática basta conhecer Matemática. Lembra-nos que o grande matemático Félix Klein [1849-1925], ao final do século XIX lamentava a ausência de uma preparação para a profissão de professor de Matemática na Universidade, quando ele dizia:

> O período dos estudos universitários constitui simplesmente um *parêntese universitário*. Primeiro, o futuro professor é um aluno de ensino médio; depois vive esse parêntese e finalmente volta, como professor, para a escola básica; não tendo tido nenhuma preparação para essa profissão, nada pode fazer além de adequar-se ao modelo pré-universitário que havia vivenciado (p.33).

Tipos de Conhecimento Matemático: Conhecimento Conceitual e Conhecimento Procedimental[63]

Todo conhecimento matemático ou de outro modo, consiste de representações interna ou mental de ideias que a mente tem construído. Atualmente, educadores matemáticos têm descoberto sua utilidade para distinguir dois tipos de conhecimento: o conhecimento conceitual e o conhecimento procedimental.

O *conhecimento conceitual de Matemática* consiste de relações lógicas construídas internamente e existentes na mente como uma parte de uma rede de ideias. É o tipo de conhecimento que Piaget se referia como um conhecimento lógico matemático. Por sua verdadeira natureza, conhecimento conceitual é o conhecimento que é entendido.

O *conhecimento procedimental de Matemática* é o conhecimento das regras e dos procedimentos que se usa em levar avante tarefas matemáticas rotineiras e, também, o simbolismo que é usado para representar a matemática. O conhecimento procedimental de Matemática desempenha um papel verdadeiramente importante tanto na aprendizagem quanto no fazer matemática. Os procedimentos algorítmicos nos ajudam a fazer facilmente tarefas rotineiras e, assim, libertam nossas mentes para se concentrar sobre tarefas mais importantes. O simbolismo é um mecanismo poderoso para levar as ideias matemáticas para outros e para você ficar “rabiscando” enquanto se faz matemática.

Modelos para conceitos matemáticos

Um modelo para um conceito matemático refere-se a qualquer objeto, gravura ou desenho que represente o conceito ou sobre o qual a relação para aquele conceito pode ser imposta. Nesse sentido, qualquer grupo de cem objetos pode ser um modelo do conceito “cem” porque nós impusemos a relação de cem-para-um no grupo e um elemento único do grupo.

---

[63] Texto extraido do livro: **Elementary and Middle School Mathematics** (Van de Walle). New York: Logman, 2001 (Uma tradução nossa).

É incorreto dizer que um modelo "ilustra" um conceito. Ilustrar implica mostrar. O que significa que quando você olha para um modelo você viria um exemplo do conceito. Tecnicamente, tudo que realmente você vê com seus olhos é objeto físico; somente sua mente pode impor a relação matemática sobre o objeto. Para uma pessoa que ainda não tem relação, o modelo não ilustra o conceito *para essa pessoa*.

Nos Standards 2000 (NCTM) são propostos padrões de ensino e aprendizagem, escritos sob a forma de padrões de conteúdo – Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medidas e Análise de dados e Probabilidade – que descrevem o conteúdo que os estudantes devem aprender. Seguindo, os Standards 2000 também listam cinco padrões de procedimento – Resolução de Problemas; Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexão e Representação – que destacam os caminhos de aquisição e uso do conhecimento de conteúdos.

A Didática da Matemática como Arte

Bruno D'Amore[64]

D'Amore (2007, p. 34), em seu livro, diz que A Didática da Matemática como arte produziu, como veremos, resultados interessantes. O seu objeto de trabalho é essencialmente o seguinte: o *ensino* de Matemática; o objetivo: criar situações (na forma de aulas, atividades, objetos, ambientes, jogos,...) para um *melhor* ensino de Matemática. O argumento mais ou menos explícito parecia ser o seguinte: se o ensino melhora, a aprendizagem também melhorará e a validade dessa suposição era tida como certa. O peso "artístico" da atividade de ensino, portanto, recai completamente sobre o professor. Entretanto, por detrás dessa escolha está a convicção de que a atração exercida sobre a atenção e sobre a motivação do estudante são as características essenciais para que esse último aprenda. Isso corresponde à verdade ou trata-se de uma ilusão, um pouco ingênua? A esse propósito, escreve Moreno Armella (1999):

> "O ensino como simples processo de instrução, acrescido de hipóteses sobre a capacidade de o estudante absorver aquilo que se diz 'bem' para ele, não é uma concepção: é uma ilusão"(p. 34).

Observe-se a ênfase em 'bem': colocar toda a responsabilidade no ensino, mesmo que entendido como o resultado de uma reflexão artística, não fornece garantia alguma no plano das aprendizagens. Nos dias de hoje, essa é a opinião compartilhada pelos estudiosos de Didática. No passado, entretanto, vários autores sustentavam que ensinar é uma arte, fruto de características pessoais que não podem ser aprendidas nem transmitidas com a radical conclusão de que a pesquisa didática é inútil. Trata-se de uma concepção deletéria que, com certeza, não abre caminho para reflexões interessantes e que, ao contrário, extingue qualquer esperança em melhorar as aprendizagens por meio de estudos específicos, constituindo uma involução inevitável. Felizmente, os indiscutíveis sucessos obtidos na pesquisa atual mostram que se trata de uma posição amplamente superada, em relação à qual não vale a pena perder mais tempo.

Como sempre, é necessário fazer algumas distinções para não cair em equívocos: aquilo que foi afirmado acima não significa que não existam docentes que demonstram possuir indiscutíveis dons naturais na comunicação e na capacidade de atrair a atenção dos estudantes. O que se quer dizer é que:

[64] Texto extraído e adaptado do livro "Elementos de Didática da Matemática" (Bruno D'Amore, 2007).

A eficácia das aprendizagens não é exclusiva apenas desses “artistas da Didática” embora, obviamente, partindo de uma situação de atenção e interesse, é provável que cresça a *motivação* e, portanto, a *volição*;
Nada garante que um professor perfeito, apenas por esse motivo, obtenha o resultado desejado no plano da qualidade da aprendizagem por parte de seus alunos.

É possível ver a Didática da Matemática de um duplo modo:

A: como divulgação das idéias, fixando a atenção na fase do ensino;

B: como pesquisa empírica, fixando a atenção na fase da aprendizagem (epistemologia da aprendizagem da Matemática).

O professor ao trabalhar na tipologia **A** é sensível ao aluno, colocando-o no centro de sua atenção; entretanto, a sua ação didática não é sobre o aluno, mas sobre o assunto que está em jogo. Essa tipologia pode contribuir para colocação e às vezes para a resolução de problemas de grande importância como: melhorar a imagem da Matemática, melhorar a imagem de si próprio ao fazer Matemática, melhorar a atenção, ativar o interesse e a motivação.

Uma imagem ruim da Matemática é nociva para o próprio professor. Aulas não concluídas, repetitivas, enfadonhas, cansativas têm conseqüências negativas nos alunos e, portanto, sobre todos os outros componentes do mundo da escola, contribuindo em dar, ao próprio professor, uma imagem negativa da Matemática, bem como uma imagem negativa de si mesmo, enquanto professor, tornando, portanto, negativo o trabalho didático.

Um ensino-aprendizagem eficiente de Matemática

Van de Walle[65]

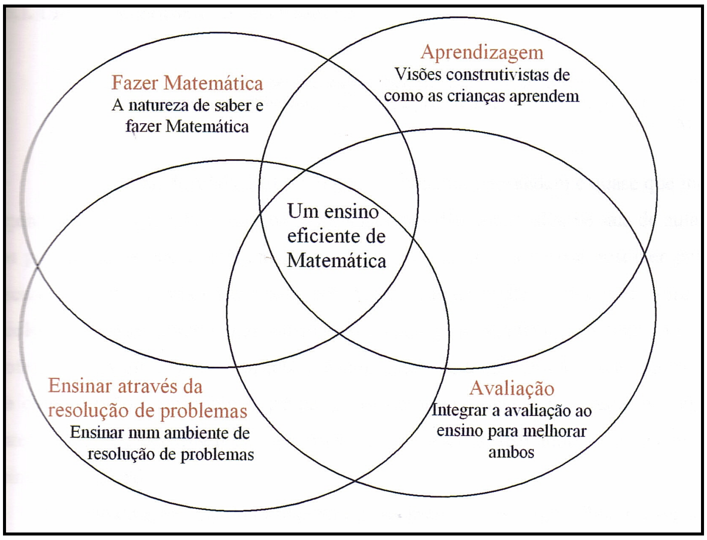
Para que professores de Matemática sejam verdadeiramente eficientes em seu trabalho de ensinar, o diagrama abaixo, apresentado por Van de Walle (2001) implica produzir juntos quatro componentes básicos:

uma apreciação da disciplina de Matemática por si mesma – o que significa "fazer matemática";

uma compreensão de como os estudantes aprendem e constroem ideias;

uma habilidade em projetar e selecionar tarefas, de modo que os estudantes aprendam Matemática num ambiente de resolução de problemas;

a habilidade de integrar a avaliação com o processo de ensino para aumentar a aprendizagem e melhorar diariamente o ensino.



Estas quatro ideias são melhores compreendidas no contexto do movimento de reformas na Educação Matemática, uma revolução na matemática escolar que começou em 1989, quando o NCTM publicou o seu primeiro documento *Standards*. Ele continua indo para o século XXI, com a publicação dos *Princípios e Padrões para a Matemática Escolar – Principles and Standards for School Mathematics*, a atualização dos Standards originais.

[65]Texto retirado do livro: **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Logman, 2001, p. 1 (tradução nossa).

A Didática da Matemática no curso de formação de professores[66]

Zaíra da Cunha Melo Varizo

O propósito neste item é voltar o olhar sobre a Didática da Matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, a partir do momento de sua instituição e, depois de deter nos anos 60 do século passado, chegar até os dias atuais.

A Didática e as Didáticas e Práticas de Ensino, no Brasil, surgiram com a criação da Faculdade de Filosofia, Ciência e Letras da Universidade de São Paulo, em 1934. Antes, a formação de docentes restringia-se aos cursos de disciplinas nos Institutos de Educação. A disciplina Metodologia do Ensino foi incluída no currículo da Escola Normal Superior, criada por Darcy Ribeiro, no Rio de Janeiro.

Desde 1934, existe entre os formadores de professores a convicção da importância da Didática no curso de formação de professores, razão pela qual essa disciplina se faz presente nos currículos desses cursos a partir de então. Tal não acontece, porém, do ponto de vista legal. A partir de 1946, a Didática deixou de fazer parte das disciplinas obrigatórias, tornando a ser incluída no parecer 242, de 1962, do Conselho Federal de Educação. Essa legislação incorporou a Didática, as Didáticas Específicas e a Pratica de Ensino nos cursos de licenciatura, além de definir a carga horária mínima das disciplinas pedagógicas.

A partir daí a Didática Geral e as didáticas específicas (incluindo-se aí a da Matemática) foram inseridas nos currículos de licenciatura, com um caráter prescritivo. A idéia de modelo está fortemente presente, concretizada na instituição dos colégios de aplicação, sob a inspiração das ideias de John Dewey.

A partir de então, a Didática Geral, as Específicas e a Prática de Ensino consolidam-se nos cursos de licenciatura. Entretanto, só a partir de 1982, quando a produção de conhecimento científico na área educacional, da própria Didática e da Didática da Matemática, vão aprofundar-se é que a importância destes conhecimentos para a formação do docente torna-se mais clara e melhor definida.

A Didática da Matemática é, sem dúvida alguma, a pedra basilar da formação do professor dessa área, uma vez que oferece condições básicas para que ele torne um determinado conhecimento matemático passível de ser apropriado pelo aluno. Assim, essa disciplina deve oferecer ao futuro professor os saberes teóricos e práticos próprios de um conhecimento interdisciplinar, compreendendo como interdisciplinaridade a articulação que

[66] Este texto é uma adaptação do texto de Zaíra da Cunha Melo Varizo intitulado: Os caminhos da didática e sua relação com a formação de professores de Matemática (2006, p. 143-159).

se deve fazer entre o conhecimento matemático acadêmico e os conhecimentos socioculturais, filosóficos, psicológicos, pedagógicos, históricos, antropológicos e tecnológicos, voltados para o ensinar e aprender Matemática. Cabe, portanto, ao professor de Didática da Matemática ser um mobilizador desses saberes, de modo a contribuir para que o futuro professor estabeleça uma articulação simultânea entre estes e o seu saber da prática, permitindo a construção de um conhecimento holístico, criativo e pessoal, ancorado na ação. Com isso, a Didática da Matemática ganha uma nova dimensão no curso de formação de professores.

Convém ressaltar que a nova concepção do fazer Matemática deve incluir sua historicidade e imersão na cultura e sociedade, sua relação com as demais ciências, seu papel no exercício da democracia e na globalização da sociedade, sua influencia na tecnologia da comunicação e da informação. Essa concepção está fortemente impregnada na compreensão atual do que seja a Didática da Matemática, cuja abrangência dependerá do tipo de profissional que queremos formar (o professor pesquisador, o professor reflexivo, por exemplo), ou da definição do perfil do profissional da Educação Matemática. A Didática da Matemática não pode, portanto, ser mais uma disciplina isolada, ministrada apenas no final do curso de formação de professores.

Para que a Didática da Matemática se firme como um conhecimento cientifico e significativo na formação do professor, é preciso vencer crenças extremamente impregnadas numa parcela significativa da sociedade, particularmente a auto-compreensão da ciência, matemática, por matemáticos, "no seu puro caráter autotélico"(OTTE, 1993, p.108). Ainda hoje, existem aqueles que acreditam que ensinar é fruto de características inatas que não podem ser aprendidas nem transmitidas ou acreditam que a condição necessária e suficiente para ensinar matemática é ter o domínio do conteúdo desta quando ensinada na universidade. Alegam que se aprende a ensinar ensinando, que se aprende ensinar matemática imitando outros professores – os seus próprios professores –, ou decorando conteúdo do livro didático ou praticando muito. Isto equivale a dizer que, para ensinar matemática, basta resolver muitos e muitos exercícios, lembrar sua experiência como aluno e desprezar as experiências alheias. Trata-se, portanto, de uma prática vazia, uma prática pela prática. Como afirma Moreno Armella (1999):

> O ensino como simples processo de instrução, acrescido de hipóteses sobre a capacidade de o estudante absorver aquilo que se diz "bem" para ele, não é uma concepção: é uma ilusão" (apud D'Amore, 2005, p.35).

Essas crenças têm impedido que um número maior de pessoas compreenda que existe um saber matemático pedagógico que permite que a Matemática seja compreendida e apropriada por todos – pelo médico, pelo engenheiro, pelo marceneiro, pelo odontólogo, pelo nutricionista, pelo biólogo, pelo físico, pelo matemático. Ou seja, por qualquer profissional. Esse saber deve levar a inclusão e não à exclusão de uma boa parte de nossos concidadãos.

Sobre currículo, conteúdo e metodologia[67]

Segundo o dicionário Aurélio o currículo pode ser entendido como as matérias constantes de um curso. Ou seja, o programa de ensino, os conteúdos ou a grade curricular.

E todo currículo escolar, segundo o documento *Principles and Standards for School Mathematics* (2000) – NCTM – USA, também conhecido como *Standards 2000*, deve ser coerente, focar sobre a matemática essencial e estar bem articulado entre as séries escolares. [...] Em um currículo coerente, as idéias matemáticas devem estar conectadas e construídas umas sobre as outras de forma que a compreensão e o conhecimento dos estudantes se aprofunde e suas habilidades em aplicar matemática se expanda. Um currículo de matemática eficiente foca sobre a matemática essencial – a matemática que preparará os estudantes a continuar a estudar e a resolver problemas em uma variedade de cenários, seja na escola, em casa ou no trabalho. Um currículo bem articulado desafia os estudantes a aprenderem, cada vez mais, ideias matemáticas sofisticadas, à medida em que eles continuam seus estudos.

Sendo assim, entendemos que o currículo é mais do que uma simples sequência de matérias ou conteúdos, ele também nos apresenta caminhos de como ensinar e de como avaliar. Os *Standard 2000* nos orientam, nesse sentido, apresentando cinco padrões de conteúdos que descrevem claramente os conteúdos que devem ser trabalhado e "o quê" os alunos devem aprender em cada série. São eles: **Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida e Análise de Dados e Probabilidade**.

Os Standards 2000 também pensaram em "como" os alunos deveriam aprender esses cinco conteúdos acima citados e, então, criaram cinco padrões de procedimento: **Resolução de problemas, Raciocínio e Prova, Comunicação, Conexão e Representação** que realçam os caminhos de se adquirir e usar o conhecimento do conteúdo trabalhado. Os padrões curriculares do NCTM deveriam receber ênfases diferentes ao longo das diferentes séries.

Os PCN, Ensino Fundamental (1998), também adotam os conteúdos – **Números e Operações, Álgebra, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Tratamento da Informação** – e procedimentos – **A Resolução de Problemas, O recurso à História da Matemática, O Recurso as Tecnologias da Comunicação e O Recurso aos Jogos** – para um currículo de Matemática; porém, enfatizam que nessa seleção de conteúdos pode-se dar uma perspectiva mais ampla, ao procurar identificar não só os conceitos, mas também os procedimentos e as

[67] Texto de nossa autoria fundamentado nos PCN e nos Standards 2000.

atitudes[68] a serem trabalhados em sala de aula, o que trará certamente um enriquecimento ao processo de ensino-aprendizagem.

Portanto, mediante a essas duas propostas curriculares, percebemos que os conteúdos matemáticos possuem um valor importante na construção do conhecimento e que as metodologias também são fundamentais para um ensino significativo, onde os alunos devem construir seu próprio conhecimento e perceberem que a matemática faz sentido para eles.

[68] As atitudes envolvem o componente afetivo – predisposição, interesse, motivação – que é fundamental no processo de ensino-aprendizagem. Elas, também, têm a mesma importância que os conceitos e procedimentos, pois, de certa forma, funcionam como condições para que eles se desenvolvam.

A resolução de problemas como um meio de construção de conhecimentos matemáticos[69]

Vânia Marincek

Resolver problemas é um meio destinado à construção de conhecimentos matemáticos. É a essência da atividade matemática.

A atividade de resolução de problemas está diretamente associada à atividade matemática. É buscando respostas para problemas ainda não solucionados que os matemáticos avançam em direção a novas descobertas.

Não se trata de propor que os alunos solucionem os mesmos problemas que os matemáticos, mas sim de propor situações em que, para solucioná-las, os alunos necessitem antecipar e formular resultados inúmeras vezes, formular justificativas, argumentar e, ao reproduzir, dessa forma, o processo de descoberta do matemático, acabem por construir um conhecimento contextualizado.

E o que seriam esses problemas?

Problema é toda situação em que os alunos necessitam pôr em jogo tudo o que sabem, mas que contém também algo de novo, para o qual ainda não têm resposta e que exige a busca de soluções. É nesse movimento de busca de soluções que se estabelecem novas relações e que se constroem conhecimentos que modificam os anteriores.

Essa definição não se assemelha em nada aos problemas que muitos de nós conhecemos em nossa escolaridade. Naquele modelo, os problemas eram pensados como atividades para treinar ou exercitar os conteúdos explicados previamente em classe e, como estavam a serviço apenas da mecanização, seus textos visavam a garantir que todos os alunos seguissem a mesma seqüência das operações a efetuar. Estavam, portanto, no final da seqüência de ensino. Um ensino pautado na aprendizagem de técnicas, em que primeiro ensinava-se, de forma expositiva, os passos de resolução em questão e, em seguida, solicitava-se que os alunos resolvessem os problemas para exercitar os algoritmos aprendidos.

Para a Didática da Matemática, os problemas são disparadores da aprendizagem, estão inseridos em um contexto maior e são escolhidos pelo professor de forma judiciosa. O professor sabe o que quer que seus alunos aprendam e escolhe um problema que os auxilie a avançar em direção à compreensão do que quer lhes ensinar. No Ensino Fundamental, por

---

[69] Texto extraído do livro: Aprender Matemática resolvendo problemas – Zélia Cavalcanti e Vânia Marincek (2001, p. 14-17).

exemplo, o que se pretende que os alunos aprendam é muito mais do que simples algoritmos. São propostos problemas específicos para a aprendizagem das propriedades, regularidades e ideias das operações, de forma que os alunos possam ampliar a compreensão não só de cada uma das operações como, também, do próprio sistema da numeração.

O papel do professor: responsabilizar-se pelos resultados

O professor é o responsável por organizar as situações de maneira a garantir que cada aluno avance na construção do saber e que possa acessar esse saber nos diversos momentos em que necessite utilizá-lo.

Para garantir que os alunos construam um conhecimento contextualizado, provido de sentido, é necessário que o professor formule ou escolha cuidadosamente os problemas que irá propor, para que o aluno os considere como problemas de fato e sinta-se impelido a agir, a falar e a refletir para solucioná-los.

No jogo de relações entre professor-aluno-saber que se estabelece, o aluno, mesmo sabendo que o problema foi escolhido para levá-lo a adquirir um conhecimento novo, reconhece no próprio problema uma lógica interna, que é o que garante que se sinta desafiado a buscar soluções. O problema em si constitui-se em desafio, por possibilitar inúmeras e diferentes formas de resolução.

A atuação do professor não se limita à escolha do problema adequado. Não é a simples resolução do problema que assegura a aprendizagem, mas sim as relações que se estabelecem a partir de sua resolução. Se o professor propõe bons problemas, mas, em seguida, fornece ao aluno respostas "oficiais" do conhecimento matemático priva-o da possibilidade de agir. É necessário dar o tempo, deixar questões sem respostas imediatas, utilizar as respostas encontradas pelos alunos, considerando-as com seriedade e atribuindo-lhe um lugar.

Nesse contexto, a partir do problema inicial, o professor organiza situações em que os alunos necessitam antecipar e verificar os resultados inúmeras vezes, formular justificativas, argumentar, convencer e serem convencidos. Todo esse conjunto de situações é que irá garantir que, mais do que aprender a reproduzir um conteúdo, o aluno construa um conhecimento contextualizado, generalizável, passível de ser utilizado, com propriedade, como ferramenta em novas situações, para empreender novas aprendizagens.

O professor responsabiliza-se pela aprendizagem de seus alunos e, para tal, planeja as situações de forma a fornecer-lhes meios para a aquisição dos conhecimentos que pretende lhes ensinar.

Diferenciação de um trabalho com resolução de problemas dentro de uma metodologia tradicional e uma metodologia alternativa[70]:

Resolução de problemas numa metodologia tradicional	Resolução de problemas numa metodologia alternativa
A voz é do professor.	O aluno tem voz.
O professor coloca o problema na lousa e dá outros parecidos como exercícios de fixação.	Parte do problema a fim de explorar e construir conceitos e conteúdos novos.
O professor diz como se faz a operação pedida pelo problema, sem dar chance ao aluno de pensar o porquê daquela operação, ou de o aluno perguntar: "que conta faço?" Ou ainda: o aluno, busca nos números do problema dado, entre as quatro operações, qual se mostra mais conveniente.	O aluno, com essa metodologia, trabalha colaborativamente: depois que cada aluno ler o problema, formam-se grupos, onde, em conjunto, buscam uma estratégia a ser usada na resolução do problema, que possa levá-los, como grupo, a chegar à solução. O professor deixa de ser um transmissor do conhecimento, para ser um mediador, um observador, um guia, questionando os grupos e, sem responder às suas perguntas, dá-lhes oportunidade de pensar sobre os caminhos que os levem à solução.

[70] Texto de nossa autoria.

Ensinando através da Resolução de Problemas[71]

Disse Van de Walle (2001) no prefácio de seu livro Elementary and Middle School Mathematics – Teaching Developmentally:

> *"Toda criança deveria vir a acreditar que a Matemática faz sentido e, mais importante ainda, que ela ou ele é capaz de dar sentido à Matemática".*

O século XX apresentou, como fruto das reformas sociais, várias reformas no ensino de Matemática. Quase todas programadas em gabinetes, sem a participação do professor. Estamos num período crítico para a Educação Matemática de nossos estudantes. Como diz Van de Walle, se por um lado há ótimos professores e programas de ensino que estão provando que os alunos podem fazer boa matemática, desenvolver habilidades importantes com compreensão, e gostar, com confiança, de sua habilidade em fazer Matemática; por outro lado, há aqueles que ainda estão na era do treinamento e da prática, com ênfase na memorização, em troca da compreensão, uma abordagem que tem por décadas sido provada falha. É preciso mudar este quadro. Devemos ajudar os alunos a desenvolver confiança e compreensão enquanto fazem Matemática.

Uma citação de Trafton e Claus (1994) apresentada no livro de Van de Walle diz o seguinte:

> As crianças se tornarão confiantes "fazedores de matemática" somente se a Matemática fizer sentido para eles e se eles acreditarem em sua habilidade em dar sentido para ela.

Van de Walle, no capítulo 3 de seu livro – *Desenvolvendo a compreensão em Matemática* – diz que usamos as ideias que temos para construir uma nova idéia, desenvolvendo no processo uma rede de conexões entre as idéias. Quanto mais idéias forem usadas e quanto mais conexões sejam feitas melhor se dará a compreensão.

Querendo fazer aplicações da Didática ao ensino da Matemática em diferentes ramos "acreditamos que se quisermos que os estudantes compreendam a Matemática, é mais útil pensar na compreensão como alguma coisa que resulta da resolução de problemas, antes do que alguma coisa que se ensina diretamente" (Hibert et al, 1997).

Também Lappan e Briars (1995) disseram que "não há outra decisão que os professores possam tomar, que tenha um maior impacto na oportunidade dos alunos

[71] Texto de nossa autoria fundamentado em Van de Walle e nos Standards 2000.

aprenderem e em suas percepções sobre o que é Matemática do que a seleção ou criação de tarefas com as quais o professor engaja os estudantes no estudo da Matemática".

Nos *Standards 2000* está escrito que "Resolver problemas não é somente um objetivo para aprender matemática, mas também um meio importante de fazer isso... Resolver problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, assim, ela não poderia ser uma parte isolada do programa de Matemática... Bons problemas integrarão múltiplos tópicos e envolverão uma matemática significativa".

Não há dúvida de que ensinar a partir de problemas é difícil. As tarefas precisam ser planejadas ou selecionadas quase que diariamente, levando-se em conta a compreensão atual dos estudantes e as necessidades atuais do currículo. Mas há boas razões para se fazer este esforço:

Resolver problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre idéias e dar sentido às coisas.

Resolução de problemas desenvolve o "poder da matemática". Os estudantes resolvendo problemas na sala de aula se engajam com muitas idéias matemáticas já conhecidas ou por construir.

A resolução de problemas desenvolve a crença, nos estudantes, de que eles são capazes de fazer matemática e que a matemática construída por eles faz sentido.

O papel do professor na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas[72]

O professor precisa estar preparado para trabalhar esta metodologia. Ensinar através da resolução de problemas não significa simplesmente dar um problema ou tarefa, sentar e esperar que uma mágica aconteça. É responsabilidade do professor criar uma atmosfera para que a aula funcione.

Nesse propósito, pensamos em uma aula consistindo de três partes: *antes, durante e depois*. Cada uma dessas fases requer algumas ações do professor para que a aula seja bem sucedida.

Antes: dentro de um programa estipulado por lei, atendendo às solicitações das propostas de cada estado e dentro do planejamento apresentado pelo professor é considerado um tópico matemático a ser trabalhado nessa aula. No entanto, para isso, o professor deve praticar algumas ações: preparar a aula destacando qual é o foco pretendido para essa aula; escolher as estratégias que poderão ser adotadas para resolver o problema dado; resolver completamente o problema usando as estratégias adotadas; preparar as questões que poderão ser feitas na Plenária; levar o enunciado do problema, por escrito, para cada aluno e levar a formalização do material matemático novo construído a partir desse problema.

Durante: Esse é o momento do aluno e cabe ao professor agora, em sala de aula, formar grupos, entregar a atividade para cada aluno e dá um tempo para a leitura individual, pede aos alunos que resolvam o problema. Se desconhecerem palavras do enunciado o professor deve intervir e se, ainda não conseguirem fazer a leitura correta e completa, o professor pode intervir enquanto os alunos trabalham em grupos (problemas secundários). Num primeiro momento ele observa o comportamento e a participação dos alunos enquanto resolvem o problema. Este poderá ser um momento para a avaliação. Em outro momento, ainda com os alunos trabalhando em seus grupos, o professor poderá dar atenção às perguntas feitas. É possível que os alunos não consigam avançar na resolução do problema por desconhecerem, como conhecimento prévio admitido pelo professor, uma forma de atacar o problema ou fazer uso de uma determinada técnica operatória. Às vezes é necessário o

[72] Texto de nossa autoria fundamentado em Van de Walle (2001).

professor intervir, pois, possivelmente, sem essa intervenção o grupo fique impedido de buscar a solução. Dado um tempo que o professor considera suficiente para a atividade, os trabalhos devem ser considerados como terminados. O professor pede que alguma das resoluções sejam colocadas na lousa, por um representante do grupo e passa-se a outra fase.

Depois: Nesse momento, todos os alunos serão convocados para uma reunião Plenária. Não mais haverá grupos, mas sim, um "grupão", onde cada aluno tem a oportunidade de participar, levantando questões, buscando tirar duvidas ou argumentando diante de colocações de outros. As colocações postas na lousa serão analisadas, refletidas em busca de um consenso a respeito da atividade dada. Durante essa analise, o professor deverá usar notações e terminologias adequadas à formalização dos novos conceitos e conteúdos pretendidos como foco da matemática que se queria construir. Essa construção é dirigida pelo professor e os alunos, através de seus trabalhos e participação na plenária, seriam co-construtores do novo conhecimento. A formalização é o momento de atuação exclusiva do professor. É ele quem colocará na lousa, de uma forma disciplinada e ordenada, toda teoria relevante ao esse tópico trabalhado, usando notação e terminologia adequada para ele. Definições, exemplos e as grandes idéias, as importantes para esse tópico matemático serão registradas pelo professor e registrados nos cadernos pelos alunos.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – Um novo roteiro[73]

Onuchic e Allevato

> [...] Ensinar matemática através da resolução de problemas é uma abordagem consistente com as recomendações do NCTM e dos PCN, pois conceitos e habilidades matemáticos são aprendidos no contexto da resolução de problemas. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p.222).

Allevato e Onuchic (2008), ao refletirem sobre o roteiro de atividades criado em 1998, reviram-no e sua nova versão apresentou-se assim:

- ✓ **Formar grupos e entregar a atividade (o problema)**

O professor apresenta o problema aos estudantes, que divididos em pequenos grupos, lêem-no e tentam interpretá-lo e compreendê-lo. É importante saber que o conteúdo matemático necessário ou mais indicado para resolver o problema não tenha sido ainda explorado em classe. O problema que se propõe à sala, chamado de **problema gerador**, é o que levará ao conteúdo que o professor planejou para ser construído naquela aula.

- ✓ **Observar e Incentivar**

Neste momento o professor muda seu papel de transmissor de conhecimento para o de observador. Enquanto os estudantes tentam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos estudantes e estimula o trabalho colaborativo. O professor faz a intermediação no sentido de levar os estudantes a pensar, dando-lhes tempo para isso e incentivando-os a troca de idéias entre eles.

- ✓ **Auxiliar nos problemas secundários**

O professor incentiva os estudantes a usarem seus conhecimentos prévios ou técnicas que eles já conhecem, para resolver o problema, estimula-os a escolher diferentes métodos, baseados em recursos que eles têm disponíveis. Entretanto, é necessário ajudar os estudantes em suas dificuldades, intervindo, discutindo, e seguindo suas explorações e ajudando-os a resolver problemas secundários, quando necessários. Tais problemas secundários seriam as dúvidas que eles apresentam quanto ao vocabulário apresentado no enunciado do problema, no contexto da leitura e na interpretação, bem como aquelas que podem surgir durante a

---

[73] Esse trabalho foi apresentado no grupo de discussões sobre Resolução de Problemas no ICME, 2008.

resolução do problema, por exemplo, a notação, a passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, nos conceitos relacionados e nas técnicas operatórias, de forma a possibilitar a continuidade do trabalho.

- ✓ **Registrar as resoluções na lousa**

Representantes dos grupos são convidados a registrar as resoluções na lousa. Resoluções corretas ou incorretas, bem como as feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos as analisem e discutam.

- ✓ **Realizar uma sessão plenária**

O professor convida todos os estudantes a discutirem as resoluções apresentadas por seus colegas, a defenderem seus pontos de vista e a esclarecerem dúvidas. O professor age como um guia e mediador nas discussões, encorajando a participação ativa e efetiva de todos os estudantes. Sendo, então, esse o momento mais rico para a aprendizagem.

- ✓ **Buscar um consenso**

Depois de sanar as dúvidas e analisar as resoluções e as soluções obtidas para o problema, o professor, juntamente com a classe, tenta chegar a um consenso sobre o resultado correto.

- ✓ **Formalizar o conteúdo**

Nesse momento, chamado de **formalização**, o professor faz uma apresentação formal dos novos conceitos e conteúdos construídos, enfatizando as diferentes técnicas operatórias e as propriedades qualificadas para o assunto em questão.

Allevato e Onuchic (2008) reiteram que, nessa metodologia, os problemas são propostos aos estudantes antes mesmo de ter sido formalmente apresentado o que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida é necessário ou mais apropriados para a resolução do problema. Assim, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca por respostas razoáveis ao problema dado.

UNEB – UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO – CAMPUS X
CURSO: Matemática DISCIPLINA: Didática da Matemática
PROFESSORA: Célia Barros Nunes
ALUNO(A):____DATA:____

Prova Escrita – valor: 5 pontos

1A) Dado o problema:

Joana está fazendo uma caixa de madeira que ela usará para guardar suas jóias. Ela fez a caixa com 20 cm de comprimento e decidiu que o comprimento seria exatamente duas vezes a largura, que a altura seria exatamente a metade da largura. Qual será o volume da caixa de jóias de Joana?

1B) Agora, responda às seguintes questões:

Isso é um problema para você? Você teve dificuldade em resolvê-lo?
O que foi pedido nesse problema reflete uma ação da Didática da Matemática?
Você poderia relacionar esse problema a uma ação social? Essa ação poderia colaborar com a formação de um cidadão útil à sociedade? Justifique suas respostas.

1C) D'Amore (2007) em seu livro "Elementos de Didática da Matemática" ao falar em formação de professores diz: *"A preparação específica é absolutamente necessária, mas, de maneira alguma, suficiente.*

Como você interpreta essas palavras de D'Amore?

ANEXO C – Textos relacionados à Disciplina Laboratório de Ensino de Matemática II

O Laboratório de Ensino de Matemática e Materiais Didáticos Manipuláveis[74]

Sérgio Lorenzato

O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM)

Nossa sociedade pressupõe e, até mesmo, exige que muitos profissionais tenham seus locais apropriados para desempenharem seu trabalho. É assim para o dentista, cozinheiro, médico-cirurgião, veterinário, cabeleireiro, porteiro, ator, entre muitos outros. E por que local apropriado para trabalhar? Porque o bom desempenho de todo profissional depende também dos ambientes e dos instrumentos neles disponíveis. Em muitas profissões, a prática difere pouco do planejamento. Esse não é o caso do Magistério, pois, devido à criatividade dos alunos, o LEM simplesmente deveria ser indispensável às escolas. Assim como nossas casas se compõem de partes essenciais, cada uma com uma função específica, nossas escolas também deveriam ter seus componentes e um deles deveria ser o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM).

No entanto, alguém poderia lembrar-se de que foi, e ainda é possível, ensinar assuntos abstratos para alunos sentados em carteiras enfileiradas e com o professor dispondo apenas do quadro-negro. Afinal, muitos de nós aprendemos (e ensinamos?) a fazer contas desse modo. Porém, para aqueles que possuem uma visão atualizada da educação matemática, o laboratório de ensino é uma grata alternativa metodológica porque, mais do que nunca, o ensino da matemática se apresenta com necessidades especiais e o LEM pode e deve prover a escola para atender essas necessidades.

Mas o que é um LEM? Existem diferentes concepções de LEM. Inicialmente ele poderia ser um local para guardar materiais essenciais, tornando-os acessíveis para as aulas. Nesse caso, é um depósito/arquivo de instrumentos, tais como: livros, materiais manipuláveis, transparências, filmes, entre outros, inclusive matérias-primas e instrumentos para confeccionar materiais didáticos. Ampliando essa concepção de LEM, ele é um local da escola reservado preferencialmente não só para as aulas regulares de matemática mas, também, para tirar dúvidas de alunos; para os professores de matemática planejarem suas atividades, sejam elas aulas, exposições, olimpíadas, avaliações, entre outras, discutirem seus projetos, tendências e inovações; um local para a criação e desenvolvimento de atividades experimentais, inclusive de produção de materiais instrucionais que possam facilitar o aprimoramento da prática pedagógica.

[74] Uma adaptação do texto: O Laboratório de Ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis de Sérgio Lorenzato, 2006.

O LEM ainda pode ser um espaço especialmente dedicado à criação de situações pedagógicas desafiadoras e para auxiliar no equacionamento de situações previstas pelo professor em seu planejamento, mas imprevista na prática, devido aos questionamentos dos alunos durante as aulas. Nesse caso, o professor pode precisar de diferentes materiais com fácil acesso. Enfim, o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e principalmente aprender a aprender.

O LEM, mesmo em condições desfavoráveis, pode tornar o trabalho altamente gratificante para o professor e a aprendizagem compreensiva e agradável para o aluno, se o professor possuir conhecimento, crença e engenhosidade. Conhecimento porque, tendo em vista que ninguém ensina o que não sabe, é preciso conhecer Matemática, mas também metodologia de ensino e psicologia. Enfim, possuir uma boa formação matemática e pedagógica. Crença porque, como tudo na vida, é preciso acreditar naquilo que se deseja fazer, transformar ou construir. Engenhosidade porque, muito freqüentemente, é exigida do professor uma boa dose de criatividade, não só para conceber, planejar, montar e implementar o seu LEM, como também para orientar seus alunos e transformá-los em estudantes e, de preferência, em aprendizes também.

Material Didático (MD)

Material didático (MD) é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Portanto, MD pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros.

Os MDs podem desempenhar várias funções, conforme o objetivo a que se prestam e, por isso, o professor deve perguntar-se para que ele deseja utilizar o MD: para apresentar um assunto, para motivar os alunos, para auxiliar a memorização de resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos? São as respostas a essas perguntas que facilitarão a escolha do material didático mais conveniente à aula pretendida.

Por melhor que seja, o MD nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino, de alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno e, como tal, o MD não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor.

QUESTIONÁRIO

Durante sua escolaridade, como você se relacionou com a Matemática? Como recebeu as aulas de Matemática? E como você recebeu seu professor de Matemática?

Como se deu sua formação em Geometria Euclidiana no Ensino Fundamental e Médio? E durante a Graduação?

3) Você se recorda do que estudou de Geometria durante sua escolaridade? Conte-nos um pouco sobre isso.

4) Você considera Geometria um tópico importante da Matemática? Para você, qual é sua utilidade?

5) Você, como futuro professor, sabe que essa Geometria Euclidiana já é trabalhada há mais de 2000 anos? Comente.

6) De que recursos você, como professor, lançaria mão para trabalhar Geometria Euclidiana Plana com seus alunos?

NOME

A Matemática é uma ciência de padrão e ordem

Lourdes de La Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato[75]

No documento *Everybody Counts* (1989), lê-se que:

> A Matemática revela padrões ocultos que nos ajudam a compreender o mundo ao nosso redor. Muito mais do que Aritmética e Geometria, a Matemática hoje é uma disciplina diferente, que trabalha com dados, medidas e observações da ciência; com inferência, dedução e prova; e com modelos matemáticos de fenômenos naturais, de comportamento humano e de sistemas sociais.
>
> O ciclo de dados para dedução e, dela, para a aplicação ocorre em toda parte que a Matemática é usada, desde tarefas caseiras como planejar uma viagem até gerenciar problemas maiores como esquematizar o tráfego aéreo ou o investimento em ações.
>
> O processo de "fazer matemática" está bastante longe do que apenas fazer contas ou deduções; ele envolve observação de padrões, testagem de conjecturas e estimativas de resultados.
>
> Como uma matéria prática, a Matemática é uma ciência de padrão e ordem. Seu domínio não são as moléculas ou células, mas números, chance, forma, algoritmos e mudança. Como uma ciência de objetos abstratos, a Matemática conta mais com a lógica do que com a observação como seu padrão de verdade, embora ainda empregue observação, simulação e mesmo experimentação, como meios para descobrir a verdade.
>
> O papel especial da Matemática na Educação é uma conseqüência de sua aplicabilidade universal. Os resultados da Matemática – teoremas e teorias – são tanto significativos quanto úteis; os melhores resultados são elegantes e profundos. Através de seus teoremas, a Matemática oferece à ciência tanto uma fundamentação da verdade quanto um padrão de certeza.

Também Van de Walle (2001, p.16) trata deste tema afirmando que a Matemática é uma ciência de coisas que tem um padrão de regularidade e uma ordem lógica. Descobrir e explorar essa regularidade ou essa ordem e, então, dar sentido a ela é o que significa fazer matemática.

Ainda nesse texto, Van de Walle diz que pode-se aprender a fazer o gráfico de equação de uma parábola simplesmente seguindo regras e plotando pontos. Agora temos as calculadoras disponíveis para fazer isso tão bem, com uma velocidade e precisão que nunca poderíamos pensar em atingir. Mas, entender porque certas formas de equações sempre produzem gráficos parabólicos envolve uma busca por padrões no modo como os números se comportam. Descobrir que tipos de relações do mundo real são representados por gráficos parabólicos é mesmo mais interessante e cientifico, até infinitamente mais valioso do que a habilidade em plotar a curva quando alguém lhe dá a equação.

Padrões não se encontram apenas em números e equações, mas, também, em tudo que nos rodeia. O mundo está cheio de padrões e ordem na natureza, na arte, na construção de prédios e até na música. Padrão e ordem são encontrados no comércio, na ciência, na

[75] Texto extraído do artigo Formação de Professores – Mudanças urgentes na Licenciatura em Matemática.

medicina, na produção de coisas e na sociologia. A Matemática descobre essa ordem, dá sentido a ela, e a usa numa grande quantidade de modos fascinantes, melhorando nossas vidas e expandindo nosso conhecimento. A escola precisa começar a ajudar os estudantes neste processo de descoberta.

Orientações Gerais para o Trabalho com Geometria

Lilian Nasser e Lucia Tinoco[76]

Por falta de orientação e de experiências, muitas vezes, professores trabalham muito pouco a Geometria e, quando o fazem, exploram quase que somente a aplicação de fórmulas, sem ligação com outros ramos da Matemática. Um exemplo disso é o estudo de funções visto na 8ª série. Várias fórmulas (padrões) estudadas em Geometria representam funções: a do número de diagonais de um polígono, a soma dos ângulos internos de um polígono, ou a área de um triângulo eqüilátero em função do lado, mas esta relação do conceito de função e a fórmula geométrica não é feita. O trabalho inadequado com estas fórmulas restringe-se à manipulação de expressões e números, o que, em geral, prejudica a compreensão do seu significado geométrico.

Por outro lado, é muito frequente encontrar livros tradicionais, em que o ensino de geometria no terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental é sistemático e abstrato, com poucas figuras e baseado em definições e teoremas. Nesse caso, o aluno é engajado num esquema para o qual não está preparado, sem ter a fundamentação básica necessária.

Isto agrava o fato de a Matemática ser considerada a disciplina mais difícil do currículo escolar, em todos os níveis, e nas mais diversas sociedades.

Segundo Nasser e Tinoco (2004), é possível reverter essa crença e construir uma matemática fácil de compreender, agradável e útil. Para isso, elas apresentam algumas orientações para um trabalho eficaz em Geometria salientando sete aspectos que devem ser valorizados, ilustrando-os com algumas atividades.

1. **Desenvolvimento no aluno ao hábito de justificar suas conclusões e argumentar informalmente, para promover a construção do raciocínio lógico.**

   Atividade: *O retângulo é definido como o quadrilátero que possui os quatro ângulos retos. Explique por que o quadrado também é um retângulo.*

2. **Incentivo aos alunos para que façam conjecturas até chegar a uma fórmula ou resultado correto.**

   A criação e a análise de conjecturas constituem meios eficientes para desenvolver o raciocínio lógico. Por exemplo, a fórmula do número de diagonais de um polígono pode ser

[76] Texto extraído do livro: Curso Básico de Geometria – Enfoque didático. Módulo I – Formação de Conceitos Geométricos de Lilian Nasser e Lucia Tinoco (2004).

explorada pelos alunos trabalhando em grupos. Após examinar alguns exemplos, os alunos devem criar uma conjectura para a fórmula do número de diagonais de um polígono de *n* lados. A cada conjectura, eles devem ser levados a procurar um contra-exemplo para refutá-la. Caso encontrem um contra-exemplo, a conjectura deve ser reformulada, e o processo recomeça, até que eles cheguem a uma fórmula correta.

3. **Integração da Geometria com outras áreas da Matemática e relação com a vida real.**

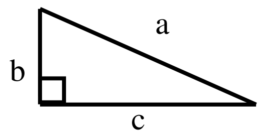
   Exemplo: Explorar a construção de maquetes, mantendo as proporções das peças reais.

4. **Relação dos conceitos com a sua evolução histórica.**

   Exemplo: A corda com nós, usada pelos egípcios para reconhecer ângulos retos, é um dos indícios de que o Teorema de Pitágoras já era conhecido, antes da Escola Pitagórica.

5. **Ênfase maior ao aspecto geométrico das fórmulas do que ao algébrico.**

   Ainda no Teorema de Pitágoras deve ser explorado o significado geométrico do da igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, onde a, b e c representam, respectivamente, hipotenusa, cateto e cateto de um triangulo retângulo. Assim,



6. **O uso das transformações geométricas.**

   Na aprendizagem de congruência e de semelhança, e mesmo para explorar as propriedades das figuras geométricas, é muito importante o uso de transformações geométricas como: reflexão, translação, rotação e homotetia.

7. **Exploração e verificação experimental de propriedades ou teoremas.**

   Por exemplo, bem antes da 8ª série, o Teorema de Pitágoras pode ser apresentado aos alunos, que podem verificar sua validade experimentalmente, comparando áreas e montando um quebra-cabeça.

Formação de Conceitos Geométricos

Lilian Nasser e Lucia Tinoco[77]

A aprendizagem de conceitos geométricos ocorre por níveis de compreensão. Os alunos atribuem significado a um conceito básico de forma gradual, observando regularidades e produzindo generalizações. Por exemplo, ao construir o conceito de quadrado, a criança inicialmente percebe a forma do quadrado, sem se deter nos detalhes, como comprimento dos lados e medida dos ângulos. Mais tarde percebe que os ângulos são retos, e que os lados têm a mesma medida. Só depois ficam cientes de propriedades como: lados opostos paralelos, diagonais iguais, diagonais perpendiculares.

Aprender um conceito pela definição, como se fosse um fato impossibilita o aluno de passar pelas diversas etapas da aquisição desse conceito, impedindo uma aprendizagem significativa. Voltando ao exemplo acima, ao aluno seria apresentado a definição de quadrado, sem ter a oportunidade de construir esse conceito. Nesse sentido, há uma distinção entre:

O conceito – o conceito como decorre de sua definição matemática e

A imagem conceitual – o conceito como é captado pela mente de cada indivíduo nas diversas etapas dos processos mentais de formação do conceito.

Pesquisas têm sido desenvolvidas com o objetivo de acompanhar o desenvolvimento das imagens conceituais em indivíduos isoladamente, ou em uma determinada amostra da população (Hershkovitch, 1994). Para compreender melhor como os alunos constroem as imagens conceituais em geometria e os fatores que influenciam esse desenvolvimento é necessário que se faça uma análise dos conceitos e de sua estrutura matemática. Boa parte da estrutura dos conceitos geométricos básicos pode ser considerada como uma conjunção de atributos.

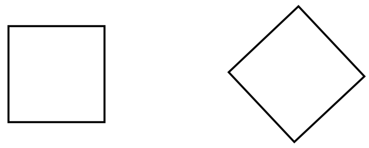
Por exemplo, um quadrado pode ser visto como uma conjunção dos seguintes atributos: é um polígono, é um quadrilátero, tem os lados iguais, os quatro ângulos são retos.

Em geral, no processo de aquisição de um conceito, a criança deve observar aspectos relevantes e irrelevantes do mesmo, assim como exemplos e contra-exemplos desse conceito. Muitas vezes, ao conceituar uma figura geométrica, os alunos incluem características que não

[77] Texto extraído do livro: Curso Básico de Geometria – Enfoque didático. Módulo I – Formação de Conceitos Geométricos de Lilian Nasser e Lucia Tinoco (2004).

fazem parte do conceito, ou não são essenciais. Isso ocorre em função das condições em que ocorreu a aprendizagem.

Assim, atribuem, por exemplo, ao quadrado a característica de ter os lados paralelos às bordas do papel. Neste caso, se a figura não tem essas características, eles tendem a identificar o quadrado girado como um losango genérico.



Nos diversos estágios da construção de um conceito geométrico são criados exemplos protótipos, formados pelas imagens conceituais de cada indivíduo sobre esse conceito.

Exemplos de protótipo:

O quadrado com os lados paralelos às bordas da folha de um caderno é o exemplo protótipo de um quadrilátero qualquer, no inicio da formação desse conceito;

Um triângulo retângulo com os catetos respectivamente nas posições vertical e horizontal é um protótipo para o conceito de um triangulo retângulo;

O conceito de altura de um triângulo é muitas vezes confundido com a altura do próprio aluno, e, portanto, só uma das alturas serve de protótipo: uma que seja vertical, e contida no triângulo.

A tendência natural é a criança ir abandonando os protótipos de um conceito, à medida em que a imagem conceitual é refinada na direção da sua aquisição completa. Esse progresso pode ser incentivado de diversas maneiras, usando atividades variadas em que possibilitem observar o conceito da forma diversificada e completa, inclusive através de manipulação de material concreto, trabalho com vídeos ou com computador.

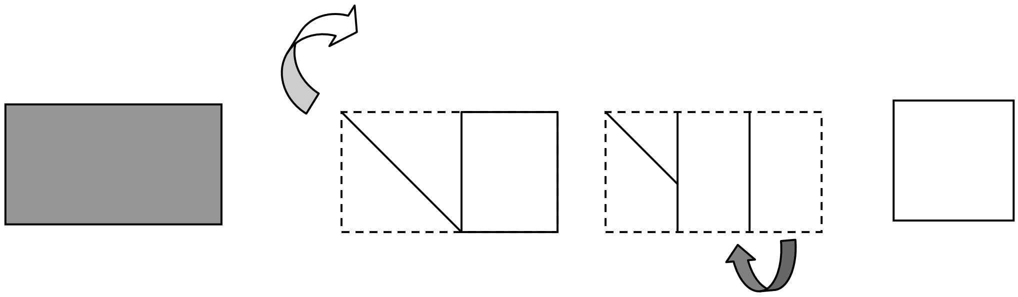
Para que um conceito seja construído completamente é necessário que a criança conheça não apenas exemplos, mas deve ser também confrontada com contra-exemplos.

Por exemplo, sabe-se que as diagonais de um losango são perpendiculares. No entanto, deve-se observar que há quadriláteros com diagonais perpendiculares que não tem os quatro lados iguais e, portanto, não são losangos.

Desse modo, através da observação de um contra-exemplo, o aluno percebe que ter diagonais perpendiculares é uma condição necessária, mas não é suficiente para que um quadrilátero seja um losango.

Confecção do TANGRAM

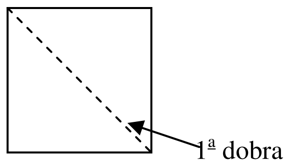
Vamos construir um TANGRAM a partir de uma folha de papel retangular. Recorte um quadrado dobrando a folha como indicado na figura.



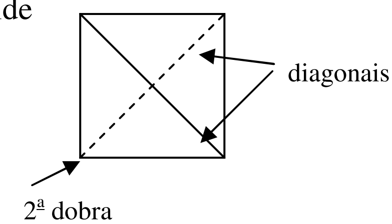
Por que a figura obtida é um quadrado?

A partir desse quadrado, o TANGRAM será construído através de dobraduras, como mostra o esquema a seguir.

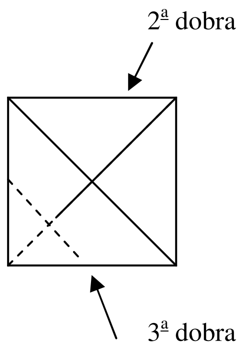
1) Observe que a 1ª dobra que você fez para construir o quadrado, dividiu este quadrado em dois triângulos retângulos que podem coincidir por superposição. Por isso podemos dizer que esses triângulos são congruentes. Certifique-se disso.



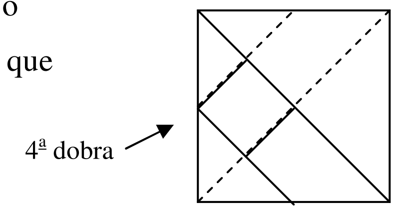
2) Desdobre o quadrado, e risque a linha da dobra, que coincide em uma diagonal do quadrado. A 2ª dobra é feita unindo os dois outros vértices do quadrado, e coincide com a segunda diagonal. Não risque agora essa segunda diagonal. Observe que a linha dessas duas dobras (diagonais) são perpendiculares e se cortam ao meio.



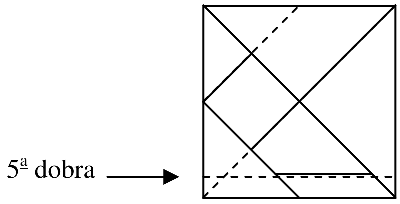
3) A dobra é feita unindo-se um dos vértices ao centro do quadrado, que é o ponto de encontro das duas diagonais. Risque a linha dessa dobra. Observe que a linha dessa dobra é paralela a uma das diagonais. Risque a parte da 2ª dobra que está indicada na figura.



4) A seguir, repita o que você fez em (3), com o vértice vizinho como mostra a figura. Observe que 4ª dobra dá origem a uma linha paralela à outra diagonal do quadrado. Risque apenas a metade indicada desta dobra.

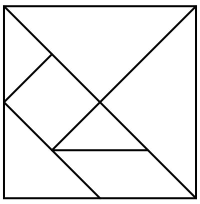


A 5ª e última dobra é paralela a um lado do quadrado (na figura, o lado inferior). Basta fazer este lado encostar no centro do quadrado e dobrar paralelamente ao lado. Risque só o segmento central indicado desta dobra.



Pronto! Seu TANGRAM está construído.

As partes tracejadas das dobras devem ser desprezadas.



Pensamento Geométrico e Conceitos Geométricos

Van de Walle[78]

Segundo Van de Walle (2006), a Geometria no Ensino Fundamental está finalmente sendo levada a sério. Nesses últimos anos, ela foi posta de lado ou até deixada de ser trabalhada. Muitos professores não se sentiam confortáveis com a Geometria, associando-a com a Geometria do Ensino Médio e suas demonstrações.

Ela, a Geometria, não parecia ser importante porque estava sendo minimamente testada nos testes aplicados. Agora, ela volta a ser vista como uma linha curricular. Esta mudança é devida, em grande parte, a sua influência significativa dada pela atenção a uma perspectiva teórica que tem nos ajudado a compreender como os estudantes raciocinam sobre conceitos geométricos, principalmente espaciais.

É útil pensar sobre seus objetivos geométricos em termos de duas estruturas bastante diferentes ainda que relacionadas: o raciocínio espacial ou sentido espacial e o conteúdo específico tais como aqueles provavelmente encontrados nos currículos. A primeira dessas estruturas tem a ver com o modo como os estudantes pensam e raciocinam sobre formas e espaço. Há uma base teórica bem pesquisada para organizar o desenvolvimento do pensamento geométrico que orienta essa estrutura. A segunda estrutura é o conteúdo no sentido mais tradicional – conhecer sobre simetria, triângulos, retas paralelas, e assim por diante. Precisamos compreender ambos esses dois aspectos da geometria – o pensamento e o conteúdo para que possamos melhor ajudar os nossos estudantes a crescer.

Sentido Espacial

O sentido espacial pode ser definido como uma intuição sobre as formas e as relações entre elas. Indivíduos com bom sentido espacial têm uma melhor percepção para com os aspectos geométricos que o circundam e as formas formadas por objetos em seu ambiente.

O sentido espacial inclui a habilidade em visualizar objetos mentalmente e fazer relações espaciais – ao movimentar as coisas em sua mente. Inclui uma posição confortável com descrições geométricas de objetos e posições. Pessoas com bom sentido espacial apreciam formas geométricas na Arte, na Natureza e na Arquitetura. Elas são capazes de usar suas idéias geométricas para descrever e analisar seu mundo.

[78] Um adaptação do livro: Teaching Student-Centered Mathematics – grades 3-5 por Van de Walle, 2006 (Tradução nossa).

Conteúdo Geométrico

Por muito tempo, o currículo de geometria no mundo se apresentava, de alguma forma, como uma mistura eclética de atividades com a "impressão de palavras ousadas". Também muita ênfase foi colocada sobre a terminologia de aprendizagem. Ao mesmo tempo, a ênfase crescente colocada sobre a Geometria gerou uma variedade enorme de tarefas maravilhosas para os estudantes, sendo que os quatro objetivos para a Geometria podem ser, aproximadamente, resumido pelos títulos: Formas e Propriedades, Transformação, Localização e Visualização. Assim, no ensino de Geometria que se quer atualmente, recorre-se às suas principais idéias.

As grandes ideias para se ensinar Geometria

Para Van de Walle (2004), as grandes ideias são aquelas que, em lugar de prestigiar repetições ou formas de memorização, são responsáveis pelo pensar e pela compreensão da Geometria trabalhada. São elas:

O que torna as formas iguais ou diferentes pode ser determinado por um conjunto de propriedades geométricas, por exemplo, as formas têm lados que são paralelos, perpendiculares ou não; elas têm simetria linear, simetria rotacional, ou nenhuma delas; elas são semelhantes, congruentes ou nenhuma delas.

As formas podem ser movidas num plano ou num espaço. Essas mudanças podem ser descritas em termo de translações (deslizante), reflexões (o outro lado, a imagem) e rotações (giros, voltas).

As formas podem ser descritas em termo de sua localização no plano ou no espaço. Sistemas coordenados podem ser usados para descrever essas localizações precisamente. Por sua vez, a visão coordenada da forma oferece um outro modo de compreender certas propriedades da forma, mudança de posição, transformações e como elas aprecem ou mudam de tamanho.

As formas podem ser vistas sob diferentes perspectivas. A habilidade em perceber as formas de diferentes pontos de vista ajudam-nos a compreender as relações entre figuras bi e tri dimensionais e mentalmente mudam a posição e o tamanho das formas.

Pensamento Geométrico

Nem todas as pessoas pensam sobre idéias geométricas da mesma maneira. Certamente, não somos todos iguais, mas somos todos capazes de crescer e desenvolver em nossa habilidade para pensar e raciocinar em contextos geométricos. A pesquisa de dois educadores holandeses, Pierre van Hiele e Dina van Hiele, tem fornecido insight sobre as diferenças no pensamento geométrico e como essas diferenças podem vir a ser.

O trabalho dos van Hiele começou em 1959 e imediatamente atraiu uma grande atenção na União Soviética, mas por quase duas décadas recebeu pouca atenção nesse país. Mas, hoje, a teoria de van Hiele tem se tornado o fator mais influente no currículo americano de geometria.

A característica mais proeminente do modelo é uma hierarquia de cinco níveis da maneiras de compreender as idéias espaciais. Cada um desses cinco níveis descreve o processo de pensamento usado nos contextos geométricos. Os níveis descrevem como nós pensamos e que tipos de idéias geométricas nós pensamos sobre ao invés de quanto conhecimento nós temos. Uma diferença significativa de um nível para o outro são o objetos de pensamento – o que nos somos capazes de pensar geometricamente sobre.

Os Níveis de van Hiele para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria

Lilian Nasser e Lucia Tinoco[79]

Originalmente, van Hiele estabeleceu cinco níveis de desenvolvimento, que ele aumentou de zero a quatro. Os pesquisadores americanos argumentaram que o primeiro nível merecia mais importância, já que muitos alunos não dominam esse nível ao iniciar o curso de geometria, e os numeraram de um a cinco. Também, por sugestão dos pesquisadores americanos, os níveis passaram a ser descritos por nomes.

5º Nível Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais. Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.
4º Nível Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações. Reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
3º nível Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra. Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
2º Nível Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
1º Nível Reconhecimento	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
Nível de van Hiele	**Características**	**Exemplo**

[79] Textro extraído do livro: Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático. Módulo I – Formação de Conceitos Geométricos de Lilian Nasser e Lucia Tinoco (2004).

A Hierarquia do Raciocínio

Krulik e Rudinick[80]

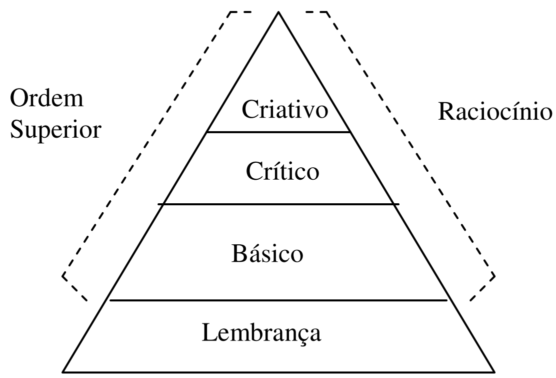
A maioria dos educadores matemáticos concorda que o desenvolvimento de um raciocínio forte é um objetivo primeiro da matemática elementar. De fato, resolver problemas, que é a base para o desenvolvimento de um raciocínio forte, tem estado na linha de frente dos currículos de Matemática por muitos anos. O National Council of Teachers of Mathematics'- Principle and Standards, lançado em 2000, continua a enfatizar essas duas áreas. Dentro do domínio do pensamento e do raciocínio, a área que requer a maior atenção é a do desenvolvimento de habilidades de pensamento de ordem superior, especificamente, o pensamento crítico e o pensamento criativo.

Pensamento Crítico: é a habilidade de analisar uma situação e tirar conclusões apropriadas e corretas dos dados fornecidos. Ele inclui, também, determinar se os dados são inconsistentes ou se os dados podem estar ocultos ou são irrelevantes.

Pensamento Criativo: é a habilidade de originar solução para uma situação-problema. Em adição, é a habilidade de gerar, sintetizar e aplicar ideias originais para produzir um produto complexo.

Ler com cuidado um problema com enunciado é frequentemente tão importante quanto ter habilidades matemáticas para resolver com sucesso um problema. É crucial que os estudantes:

1) leiam o problema cuidadosamente;
2) descubram o que se está pedindo para fazer;
3) resolva o problema, e
4) determinar se ou não a resposta faz sentido.



Hierarquia do Raciocínio

[80] Texto extraido do livro: *Roads to Reasoning – Developing Thinking Skills through Problem Solving* (2001). Publicado pelo Creative Publication (Tradução nossa).

Reconhecimento e caracterização das formas espaciais e das formas planas[81]

Para Nasser e Tinoco (2004, p. 13), um dos objetivos do ensino de Geometria é fazer com que o aluno se situe melhor no ambiente em que vive, possa compreendê-lo e analisá-lo melhor. Para atingir esse objetivo, hoje, os educadores matemáticos recomendam introduzir a Geometria a partir do estudo dos sólidos. Esse objetivo é justificável, pelo fato de que o mundo em que vivemos, com o qual interagimos todo dia, é em três dimensões . Assim, é muito natural iniciar o estudo da Geometria pelo reconhecimento e exploração das formas geométricas espaciais (sólidos geométricos), relacionando os objetos mais comuns do nosso cotidiano com elas.

Depois de manipularmos e analisarmos os sólidos geométricos construídos a partir das pranchas utilizadas no 4º e 5º encontros, pudemos tirar muitos conceitos, com os alunos como co-construtores desses conceitos e com a professora formalizando-os.

Em relação aos Poliedros:

As superfícies dos objetos, que não rolam, são formadas somente por partes planas. Esses objetos, que são chamados sólidos geométricos, recebem o nome de POLIEDRO.

Cada parte plana da superfície de um desses sólidos chama-se FACE.

Cada "dobra" ligando duas faces, é chamada de ARESTA.

Cada "ponta" ligando três ou mais arestas, é chamada de VÉRTICE.

Os poliedros limitados por retângulos são chamados *paralelepípedos retângulos* ou *blocos retangulares*. (Quando todas as suas faces são congruentes e todas as arestas têm o mesmo tamanho dizemos que esse paralelepípedo retangular é um *cubo*.)

Prisma é um poliedro em que: duas faces são paralelas e congruentes (chamam-se *bases* do prisma); as arestas que ligam estas duas faces são paralelas (chamam-se *arestas laterais* do prisma).

Considere dois planos paralelos α e β, e uma reta *r* que corta esses dois planos. Considere um polígono R, todo contido no plano α.

> O PRISMA de BASE R é o sólido formado por todos os segmentos paralelos à reta *r*, ligando os planos α e β, e com uma extremidade em R. As extremidades

[81] Um texto adaptado do livro: Básico de Geometria – Enfoque Didático. Módulo I – Formação de Conceitos Geométricos de Lilian Nasser e Lucia Tinoco (2004).

desses segmentos, que estão sobre o plano β, formam nesse plano um polígono congruente a R, que é a outra base do prisma.

7.1. Um prisma que tem as arestas laterais perpendiculares à base recebe o nome de *prisma reto.*

7.2. Caso as arestas laterais sejam paralelas a uma reta inclinada, que corta os planos das bases, ele é chamado *prisma oblíquo*.

Uma pirâmide se caracteriza por um polígono (R), que é chamado de base, e um vértice (V), que é um ponto fora do plano da base, que se liga a todos os vértices da base.

Considere um polígono R e um ponto V fora do plano de R. A PIRÂMIDE de base R e vértice V é o sólido limitado por R e por todos os triângulos que têm como um de seus lados um lado de R e um vértice em V.

Uma face de uma pirâmide, que não é a sua base, chama-se FACE LATERAL da pirâmide.

As arestas que não pertencem à base da pirâmide (que se encontram no seu vértice) são chamadas ARESTAS LATERAIS.

Um poliedro cujas faces são polígonos regulares congruentes e no qual, em cada vértice, se encontram um mesmo número de arestas, chama-se POLIEDRO REGULAR.

São 5 os poliedros regulares: Tetraedro Regular, Hexaedro Regular, Octaedro Regular, Dodecaedro Regular e Icosaedro Regular.

Em relação aos corpos redondos:

Os sólidos que rolam, como os cilindros, os cones e as esferas por terem sua superfície ou parte dela arredondada, não tem face nem aresta.

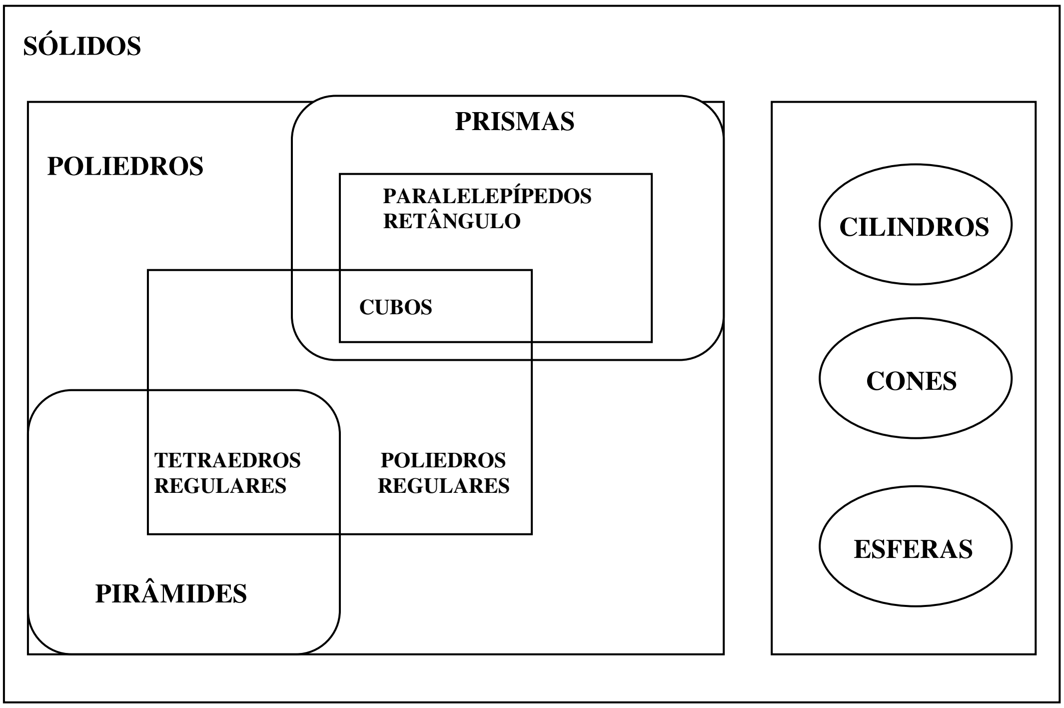
Os cilindros e cones possuem uma espécie de "dobra", de forma curva, *que não liga duas faces planas*, mas sim uma parte plana e uma parte curva da superfície. *Esta "dobra" não será considerada aresta do sólido.*

A superfície do cilindro é formada de duas partes planas e de uma parte arredondada (não plana). As partes circulares são as BASES do cilindro e a parte correspondente ao retângulo é a SUPERFÍCIE LATERAL.

O cone tem uma ponta que também se chama *vértice*. Este, embora tenha o mesmo nome que os vértices de um poliedro, tem uma natureza diferente, pois não é o encontro entre três ou mais arestas.

A superfície do cone é formada de uma parte plana e uma parte arredondada (não plana). A parte circular é a BASE do cone e a parte correspondente ao **setor circular** é a SUPERFÍCIE LATERAL.

O seguinte esquema resume o que foi dito:



Em relação aos polígonos:

Polígono é uma figura plana composta de uma seqüência de segmentos de reta $A_1 A_2$, A_2A_3, . . ., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 tais que :

- A_1, A_2, ..., A_n são pontos distintos;
- Três desses pontos consecutivos não pertencem a uma mesma reta;
- Cada par destes segmentos ou não se interceptam ou têm apenas uma das extremidades em comum.

Da definição decorre que:

- o número *n* de lados de um polígono é sempre igual ao número de vértices desses polígonos.
- o polígono é a linha. A região é chamada *região poligonal*.
- todo polígono, como toda linha fechada, divide o plano em três regiões: o *interior*, o *exterior* e a própria linha (*fronteira*).

- nos polígonos é importante reconhecer os seus lados, seus vértices e seus ângulos internos e ângulos externos.

Polígono regular é aquele que tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.

A Geometria nos Princípios e Padrões para a Matemáticas Escolar[82]

Segundo os Standards 2000 é através do estudo da Geometria que os estudantes aprenderão sobre as formas e estruturas geométricas e como analisar suas características e ralações. A visualização espacial – construção e manipulação de objetos de duas e três dimensões e a percepção de um objeto sob diferentes perspectivas – é um aspecto importante do raciocínio geométrico.

Vários são os elementos apresentados nos Standards 2000 que justificam o ensino da Geometria nas escolas: A Geometria ajuda a desenvolver o raciocínio dos estudantes culminando em trabalhos com demonstrações no Ensino Médio. A modelagem geométrica e o raciocínio espacial oferecem maneiras de interpretar e descrever ambientes físicos e pode ser uma ferramenta importante na resolução de problemas. Além disso, idéias geométricas são úteis na representação e resolução de problemas em outras áreas da Matemática e em situações do mundo real devendo, portanto, ser integrada a outras áreas. Também podemos incluir aqui as representações geométricas que podem ajudar os estudantes a encontrar o sentido de áreas e frações, histogramas, e coordenadas gráficas podem servir para conectar a Geometria com a Álgebra.

A Geometria tem sido amplamente considerada no currículo da matemática escolar como um lugar onde os alunos aprendem a raciocinar e a ver a estrutura axiomática da matemática. O padrão Geometria inclui forte foco no desenvolvimento do raciocínio e prova, usando definições e estabelecendo fatos. A tecnologia também tem um papel importante no ensino e aprendizagem de Geometria. Ferramentas, tais como software de geometria dinâmica capacita o estudante a modelar e ter uma experiência interativa com uma grande variedade de formas de duas e três dimensões.

Resumidamente, o padrão Geometria nos Standards 2000 estabelece que os programas de ensino do Pré-primário ao Ensino Médio deveriam capacitar todo estudante a:
Analisar características e propriedades de formas geométricas de duas e três dimensões e desenvolver argumentos matemáticos sobre as relações geométricas – identificar formas é importante, mas o foco sobre as propriedades e suas relações deveria ser mais forte. Por exemplo, a criança no pré até o grau dois[83] pode aprender sobre as formas geométricas usando objetos que pode ver, pegar e manipular. Só mais tarde, em um grau mais elevado, de 3 a 5, a

---

[82] Texto extraído dos Principles and Standard for School Mathematics
[83] Nos Estados Unidos a escolaridade é assim distribuída: Escola Elementar do Pré até o grau cinco (crianças com faixa etária de 5 a 10 anos de idade). Graus Médios vai do grau 6 a 8 (crianças com faixa etária de 11 a 13 anos). Escola Secundária vai dos graus 9 a 12 (crianças com faixa etária de 14 a 17 anos).

criança pode aprender a focar e discutir alguns componentes das formas geométricas tais como lados e ângulos e propriedades das formas. Um bom recurso para isso seria o uso de software de geometria dinâmica. A partir dos graus médios até a Escola Secundária o estudante deveria aprender a usar o raciocínio dedutivo e técnicas de provas mais formais para resolver problemas e provar conjecturas. Tópicos de congruência e semelhança ajudam muito nesse aspecto. Concluindo, em todos os níveis os estudantes deveriam aprender a formular explicações convincentes para suas conjecturas e soluções. Eventualmente, eles deveriam ser capaz de descrever, representar e investigar relações dentro de um sistema geométrico e expressar e justificá-los numa seqüência lógica. Além disso, eles deveriam ser capazes de compreender o papel das definições, axiomas e teoremas e ser capaz de construir suas próprias provas.

Especificar localizações e descrever relações espaciais usando coordenadas geométricas e outros sistemas de representação – Em um primeiro contato com a Geometria, as crianças aprendem conceitos relativos a posições, tais como "acima de", "atrás de", "próximo a" e "entre". Mais tarde, elas podem fazer e usar grades retangulares para situarem objetos e medir a distância entre pontos situados ao longo de uma linha horizontal ou vertical. A experiência com o plano de coordenada retangular seria útil para elas resolverem uma grande quantidade de problemas em Geometria e Álgebra. Estudantes deveriam ganhar experiência em usar uma variedade de representações visual e coordenada para analisar problemas e estudar matemática.

Aplicar transformações e usar simetria para analisar situações matemáticas – As crianças chegam à escola com intuições sobre como as formas podem ser movidas. Elas podem explorar a noções de escorregar, mover, girar ao usar espelhos, papel de dobraduras, só mais tarde esse conhecimento poderá se tornar mais formal e sistemático. Por exemplo, nos graus de 3 – 5 os alunos podem investigar os efeitos de transformações e começar a descrevê-los em termos matemáticos. Nos graus médios eles deveriam aprender a compreender o que significa a uma transformação preservar distância, como translações, rotações, e reflexões fazem. Na High School os estudantes deveriam aprender múltiplos caminhos de expressar transformações incluindo o uso de matrizes para mostrar como as figuras são transformadas sobre o plano de coordenada, bem como a notação de função. Concluindo, em todos os níveis consideração apropriada de simetria dá um realce em Matemática e também na Arte e Estética.

Usar visualização, raciocínio espacial e modelagem geométrica para resolver problemas – Ao começar o ano na escola, os estudantes deveriam desenvolver habilidades de visualização através do manuseio com uma variedade de objetos e também através do uso da tecnologia que os permite girar, diminuir e deformar objetos de duas e três dimensões. Mais tarde, eles poderiam confortavelmente analisar e desenhar paisagens sob perspectivas, calculando as partes componentes e descrevendo qualidades que não podem ser vistas, mas podem ser deduzidas. Estudantes precisam aprender fisicamente e mentalmente a mudar a posição, orientação e tamanho dos objetos de forma sistemática enquanto eles desenvolvem sua compreensão sobre congruência, semelhança e transformação.

Uma introdução à Geometria[84]

Para se tratar sobre conceitos geométricos é importante saber como se pode introduzir essas idéias.

Entendendo por conceito uma forma de dizer o que é uma determinada idéia, buscamos no dicionário e encontramos que um conceito é uma ação de formular uma idéia por meio de palavras. Dessa forma, numa teoria, podemos classificar os conceitos em conceitos primitivos e definições.

<u>Conceitos primitivos</u>: não são definidos. São conhecidos como ponto de partida de uma teoria. Na Geometria, os conceitos primitivos são: ponto, reta, plano, todos como objetos do espaço tridimensional em que vivemos. O espaço tridimensional é a totalidade dos pontos e cada ponto tem um lugar bem definido nesse espaço. De fato, o ponto não se movimenta nem para direita nem para esquerda, nem para cima nem para baixo, nem para frente nem para trás. Assim, a dimensão do ponto é zero. Simbolicamente, o ponto é representado por letras latinas maiúsculas. Assim,

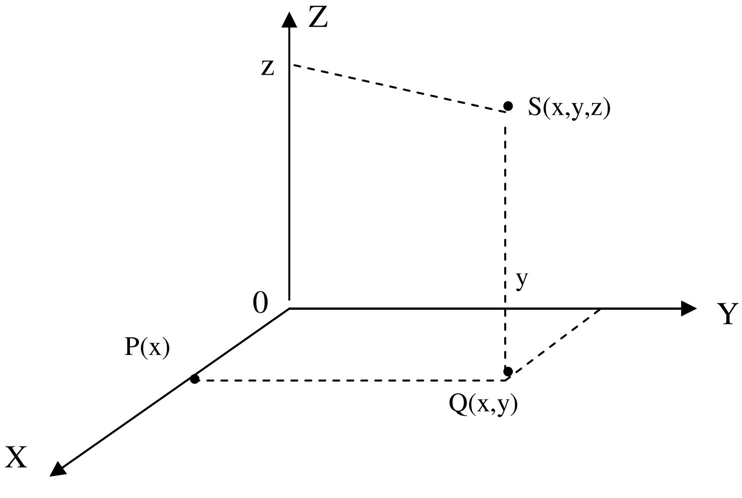
Se P é um ponto, então a dimensão dim(P) = 0

A reta, também, é um conceito primitivo. O ponto ao deslocar-se numa direção determina uma reta. A reta é simbolicamente representada por letras latinas minúsculas. Ela se desloca numa direção (comprimento). Sendo *r* uma reta, sua dimensão é 1 (comprimento).

Outro conceito primitivo é o plano, obtido quando uma reta se desloca numa região. Ele é representado, em geral, por letras gregas. Sendo α um plano, sua dimensão, dim(α) = 2 (comprimento e largura).

O espaço E é tridimensional, isto é, dim(E) = 3 (comprimento, largura e altura).

Colocando esses elementos num referencial cartesiano temos a seguinte representação:



$P_{reta} \quad x \in X \subset IR$

$Q_{plano} \quad \begin{cases} y \in Y \subset IR \\ (x, y) \in IR^2 \end{cases}$

$S_{espaço} \quad \begin{cases} z \in Z \subset IR \\ (x, y, z) \in IR^3 \end{cases}$

[84] Texto de nossa autoria.

Conceitos definidos ou definições: definir – enunciar os atributos essenciais e específicos (de uma coisa) de modo que a torne inconfundível com outra. Assim, numa definição, parte-se de algo já definido para definir outro.

Afirmações sobre conceitos: Postulados – verdades aceitas sem demonstração.
Teoremas – verdades que são demonstradas. Constituem teoremas: lemas, teoremas propriamente dito, corolários.

Uma vez feita a lista de conceitos primitivos e enunciados os axiomas de uma teoria matemática, todas as noções devem ser definidas e as afirmações que se prosseguem devem ser demonstradas. Nisto consiste o chamado **método axiomático**.

Transformações no Plano – Isometrias[85]

Quando se aplica uma transformação a uma figura, de modo que ela apenas possa ocupar outro lugar no plano, sem alterar sua forma e tamanho originais, dizemos que a transformação aplicada é uma Isometria. Ela tem como característica principal manter invariantes as <u>medidas</u> e, portanto, a <u>forma</u> da figura. Isto quer dizer que se uma figura geométrica sofrer uma transformação do tipo isometria, as medidas dos comprimentos e dos ângulos que aparecem na figura serão mantidas. São isometrias: reflexão, translação e rotação.

Das atividades feitas em sala de aula sobre as isometrias pudemos tirar alguns conceitos:

Reflexão:

Seja ***r*** uma reta. Uma figura é obtida de outra por uma reflexão de eixo ***r*** se:

cada ponto P' da figura refletida está na mesma perpendicular a ***r*** que o ponto P correspondente da figura original.

P e P' distam igualmente de ***r***, e situam-se em semi-planos distintos em relação a ***r.***

Para definir uma reflexão basta, portanto, fixar o eixo de reflexão ***r.***

Note que a imagem de uma figura por reflexão mantém a forma e as dimensões da figura, mas tem sua posição espelhada em relação ao eixo de simetria, mostrando a imagem invertida da figura original.

Algumas observações em relação à reflexão:

- Para realizar uma reflexão é necessário fixar uma reta em torno da qual as figuras são refletidas. Essa reta se chama **eixo de simetria**, que divide a figura em duas partes que podem coincidir exatamente.
- Uma figura pode possuir um eixo de simetria, mais de um eixo de simetria ou não possuir eixo de simetria.
- Os pontos que coincidem quando a figura é dobrada sobre o seu eixo de simetria são chamados de correspondentes ou simétricos em relação ao eixo.
- A linha que une cada par de pontos simétricos é perpendicular ao eixo de simetria.

Translação:

[85] Texto retirado do livro: *Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático. Módulo II – Visão Dinâmica da Congruência de Figuras*, de autoria de Lilian Nasser e Lucia Tinoco (2004).

Seja ***r*** uma reta. Uma figura é obtida de outra por uma translação de direção ***r*** se todos os pontos da figura original se deslocam paralelamente a ***r***, no mesmo sentido, percorrendo a mesma distância. Para definir uma translação devem ser fixados, portanto, a direção, o sentido e o comprimento (amplitude) do deslocamento.

Note que a imagem de uma figura por translação mantém sua forma e tamanho.

Esta transformação preserva os ângulos e os comprimentos das figuras geométricas, preservando, portanto, outras grandezas derivadas destas, como a área.

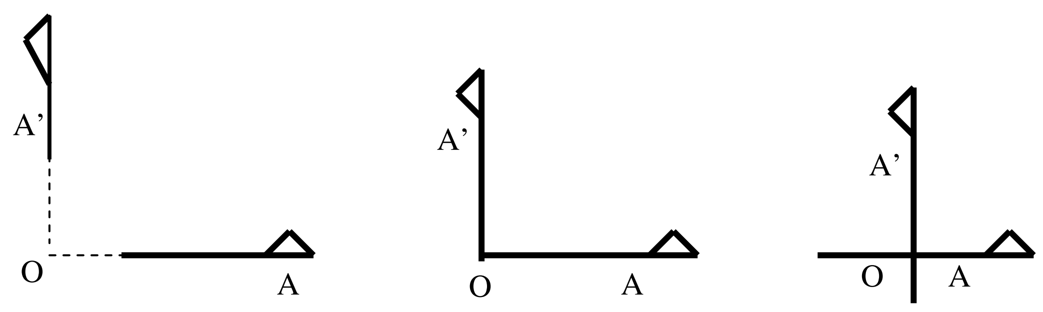
Rotação:

Uma rotação de centro O e ângulo α é uma transformação cuja imagem de uma figura é obtida girando-se cada um de seus pontos segundo o arco de circunferência de centro O, correspondente ao ângulo α no sentido fixado, que pode ser horário ou anti-horário.

Algumas observações:

- Note que a imagem de uma figura por rotação mantém sua forma e suas dimensões. A rotação mantém invariantes os ângulos e os comprimentos das figuras geométricas, preservando, portanto, outras grandezas derivadas destas, como a área.

- O ponto O pode estar localizado fora da figura a ser girada, sobre o seu contorno, ou no interior da figura, como nos exemplos a seguir, em que a bandeirinha A’ é a imagem da bandeirinha A por uma rotação de centro O e ângulo de 90°, no sentido anti-horário.



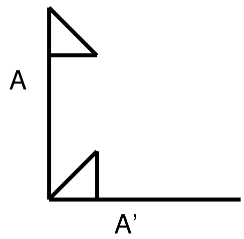
- Note que a posição da imagem de uma mesma figura pode ser diferente, dependendo da posição do ponto O. O mesmo acontece se mudarmos o ângulo ou o sentido de rotação.

Composição de Isometrias[86]

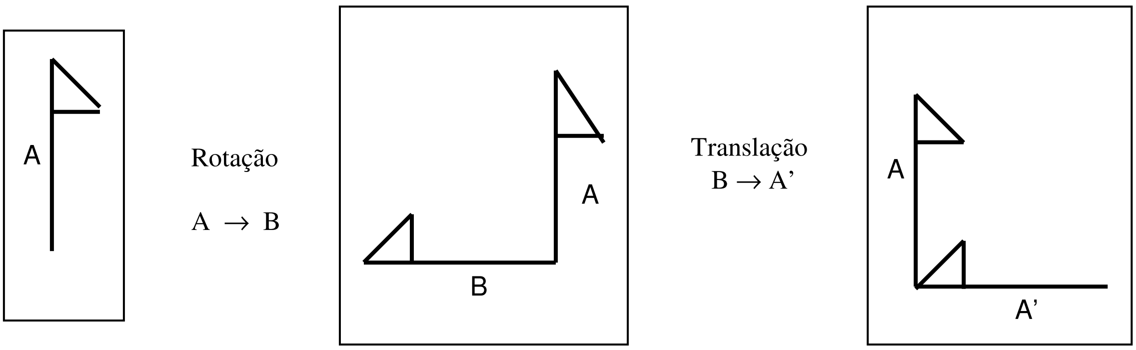
Considere duas figuras A e A' congruentes. Nem sempre a figura A' é imagem da figura A por uma isometria facilmente identificável. Muitas vezes, no entanto, é possível identificar duas ou mais isometrias que, aplicadas sucessivamente à figura A, levam-na à figura A'.

Nesse caso, diz-se que A' é a imagem de A pela composição dessas isometrias.

Vejamos, no exemplo a seguir, a bandeirinha A, que foi transformada na bandeirinha A'.



Neste caso, A' não pode ser imagem de A por uma simples rotação. No entanto, ela pode ser obtida de A pela composição de uma rotação de 90^o no sentido anti-horário com uma translação.



A imagem de A pela rotação de 90^o no sentido anti-horário e centro no seu pé é a bandeirinha B. Por sua vez, a imagem de B pela translação horizontal de amplitude igual ao comprimento da bandeirinha A, para a direita, é A'. Logo, A' é a imagem de A por uma composição de isometrias: uma rotação com uma translação.

Sendo R a rotação aplicada à bandeirinha A e sendo T a translação aplicada à bandeirinha B, dizemos que:

$$\left.\begin{array}{l} B = R(A) \\ A' = T(B) \end{array}\right\} \Rightarrow A' = T(R(A)) = (T \circ R)(A) \qquad \text{(Uma função composta).}$$

[86] Texto extraído do livro: *Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático. Módulo II – Visão Dinâmica da Congruência de Figuras*, de Lilian Nasser e Lucia Tinoco (2004).

Critérios de Congruência de Triângulos

Definição: Dois triângulos são congruentes se as medidas dos três lados correspondentes são congruentes e se as medidas dos três ângulos correspondentes são congruentes.

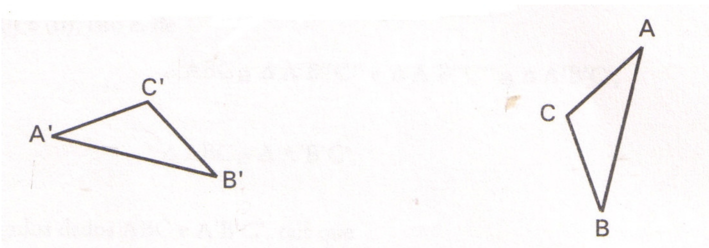
Identificamos quatro casos que garantem a congruência de dois triângulos, conhecendo a congruência de apenas três das seis congruências exigidas pela definição. A esses casos chamamos de **Critérios de Congruência** que, na realidade, são apenas diferentes condições suficientes para garantir a congruência.

Como estamos trabalhando com uma Geometria Dinâmica, pretendemos, neste texto, demonstrar os Critérios de Congruência de dois triângulos de duas maneiras: analiticamente, segundo a geometria euclidiana e dinamicamente[87], ou seja, por meio das transformações geométricas.

1) *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes – ALA*

Por meio da Geometria Dinâmica:

Consideremos os triângulos *ABC* e *A'B'C'* abaixo, com $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\hat{B} \cong \hat{B}$.

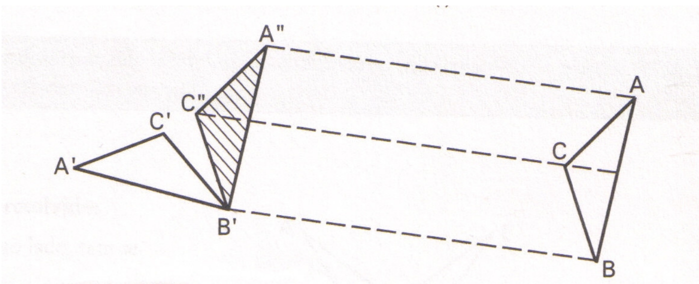


Para concluir que os triângulos dados são congruentes, basta mostrar que o triângulo ABC pode ser levado no triângulo *A'B'C'* por um transporte, de modo que o lado AB coincida com o lado *A'B'*, o ângulo *A* coincida com o ângulo *A'* e o ângulo *B* coincida com o ângulo *B*'. Neste caso, o transporte pode ser feito utilizando-se uma translação seguida de uma simetria axial.

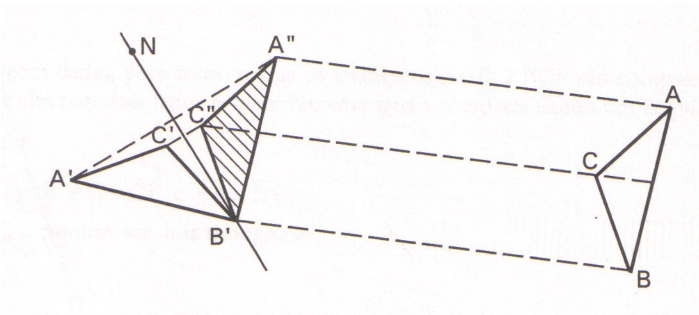
[87] As demonstrações escritas nesse texto por meio da Geometria Dinâmica foram extraídas do livro: *As Transformações Geométricas e o Ensino da Geometria,* de autoria de Martha Maria de Souza Dantas.

Considerando a translação do vetor *BB*', tem-se a figura seguinte onde

$$\Delta\, ABC \cong \Delta\, A''B'C'' \qquad \textbf{(1)}$$



Considerando, agora, a simetria cujo eixo é a reta *B'N* que contém a bissetriz do ângulo *C'B'C''*, tem-se a figura seguinte:



Observe, na figura acima, que a bissetriz *B'N* do ângulo *C'B'C"* é, também, a bissetriz do ângulo A'B'A'', pois

$$C''\hat{B}'A'' = \hat{B} = \hat{B}' \quad \text{e} \qquad C'\hat{B}'N = N\hat{B}'C''$$

Pela simetria de eixo *B'N* tem-se que:

- a semi-reta *B'A''* é levada à semi-reta *B'A'*;

- a semi-reta *B'C''* é levada à semi-reta *B'C'*;

Portanto, o ângulo *A''B'C''* é levado ao ângulo *A'B'C'*.

Observe, ainda, que o ponto A'' é levado ao ponto A', pois $\overline{A''B'} = \overline{AB} = \overline{A'B'}$. Além disso, a semi-reta *A''C''* é levada à semi-reta A'C' pois $\hat{A}'' = \hat{A} = \hat{A}'$.

Como o ponto *C''* é levado ao ponto da semi-reta *B'C'* e, também ao ponto da semi-reta *A'C'*, então, *C''* é levado ao ponto *C'* que é a interseção das semi-retas *A'C'* e *B'C'*.

Nessas condições, tem-se

$\Delta\, A''B'C'' \cong \Delta\, A'B'C'$ **(2)**

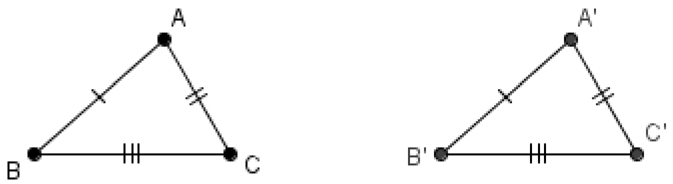
Das relações (1) e (2) resulta que

$\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$

2) *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.*

Analiticamente:

Consideremos os triângulos *ABC* e *A'B'C'*



Hipótese: $\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'} \end{cases}$ Tese: $\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$

Pelo postulado de transporte de ângulos e pelo postulado do transporte de segmentos obtemos um ponto *X* tal que:

$X\hat{A}'B' \cong C\hat{A}B$ **(1)**

$\overline{A'X} \cong \overline{AC}$ **(2)**

estando *X* no semiplano oposto ao de *C'* em relação à reta *A'B'*.

Da hipótese, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ e de (2) vem

$\overline{A'X} \cong \overline{A'C'}$ **(3)**

Seja *D* o ponto de interseção de $\overline{C'X}$ com a reta $A'B'$. Da hipótese, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, de **(1)** e de **(2)**, usando o caso LAL, $\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'X'$ **(4)**

Disto resulta que $\overline{XB'} \cong \overline{CB} \cong \overline{C'B'} \Rightarrow$ XB' $\cong$ C'B' **(5).**

O triângulo *A'C'X* é isósceles de base $\overline{C'X}$. Isto implica em $A'\hat{C}'X \cong A'\hat{X}C'$ **(6)** Temos, também, que o triângulo *B'C'X* é isósceles de base $\overline{C'X}$. Isto implica em $B'\hat{C}'X \cong B'\hat{X}C'$ **(7)**

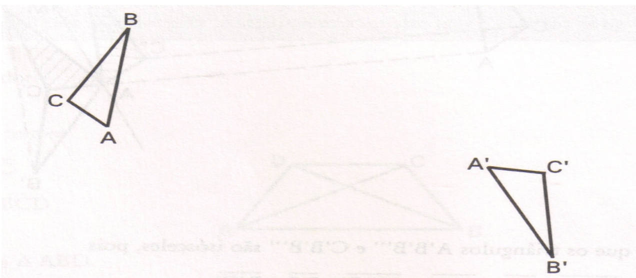
Por soma ou diferença de **(5)** e **(6),** conforme *D* seja interno ou não ao segmento $\overline{A'B'}$, obtemos:

$$A'\hat{C}'B' \cong A'\hat{X}B' \qquad \textbf{(8)}$$

Por fim, de **(3), (8)** e **(5)** resulta que $\Delta\, A'B'C' \cong \Delta\, A'B'X$. E, por **(4),** concluímos que $\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$

Por meio da Geometria Dinâmica:

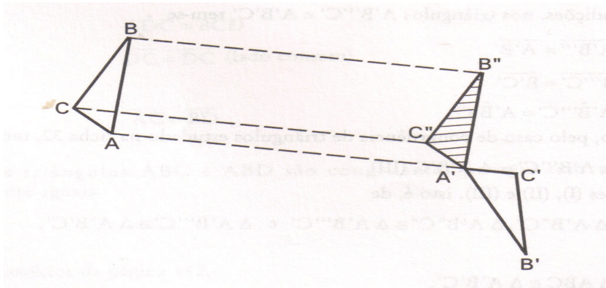
Considere os triângulos *ABC* e *A'B'C'*, na figura abaixo, com $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.



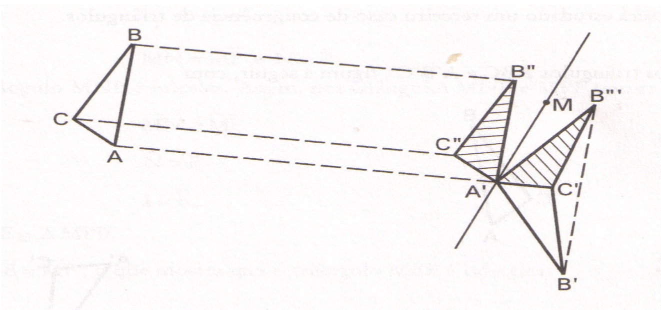
Para concluir que os triângulos dados são congruentes, basta mostrar que o triângulo *ABC* pode ser levado ao triângulo *A'B'C'* por um transporte, de modo que o lado *AB* coincida com o lado *A'B'*, o lado *AC* coincida com o lado *A'C'* e o lado *BC* coincida com o lado *B'C'*.

Considerando a translação do vetor *AA'*, tem-se a figura seguinte onde

$$\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B''C' \qquad (1)$$



Considerando, agora, a simetria cujo eixo é a reta *A'M*, que contém a bissetriz do ângulo C''A'C', tem-se a figura abaixo onde $\Delta A'B''C'' \cong \Delta A'B'''C'$ (2)



Observe que os triângulos *A'B'B'''* e *C'B'B'''* são isósceles, pois

$\overline{A'B'''} \cong \overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{B'''C'} \cong \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

Assim,

$A'\hat{B}'C' \cong A'\hat{B}'''C'$ e $C'\hat{B}'B \cong C'\hat{B}'''B'$

e, portanto,

$A'\hat{B}'C' \cong A'\hat{B}'''C'$

Nestas condições, nos triângulos *A'B'''C'* e *A'B'C'* tem-se

$\overline{A'B'''} \cong \overline{A'B'}$

$\overline{B'''C'} \cong \overline{B'C'}$

$A'\hat{B}'C' \cong A'\hat{B}'''C'$

e, portanto, pelo caso de congruência de triângulos LAL tem-se

$\Delta A'B'''C' \cong \Delta A'B'C'$ (3)

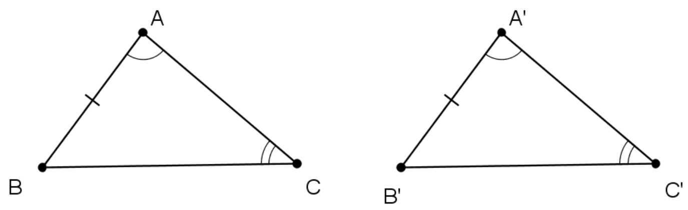
Das relações (1), (2) e (3) resulta que

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

3) *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.*

Analiticamente:

Consideremos os triângulos ABC e A'B'C'



Hipótese: $\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases}$ Tese: $\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$

Vejam que

no triângulo ABC, $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^{o}$ **(1)**

no triângulo $A'B'C'$ $\hat{a}' + \hat{b}' + \hat{c}' = 180^{o}$ **(2)**

$\Rightarrow \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \hat{a}' + \hat{b}' + \hat{c}'$ **(3)**

Por hipótese tem-se que $\hat{a} = \hat{a}'$, $\hat{c} = \hat{c}'$, então, de **(3)**

$$\hat{a}' + \hat{b} + \hat{c}' = \hat{a}' + \hat{b}' + \hat{c}' \quad \Rightarrow \hat{b} = \hat{b}'$$

Assim, relacionando as congruências equivalentes, tem-se

$\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$ e, pelo caso de congruência de triângulos ALA

$\Delta\, ABC \cong \Delta\, A'B'C'$

O Conceito de Razão e Proporção[88]

Como afirmam Onuchic e Allevato (2008, p. 97),

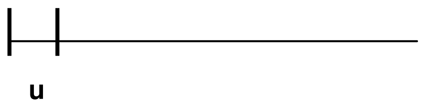
> "O conceito de razão é relevante porque fundamenta o conceito de proporcionalidade, que é uma idéia unificadora na Matemática, pois é um conceito que 'liga' diversos ramos da matemática escolar, como medida, estatística, aritmética, funções, álgebra e geometria. Da proporcionalidade derivam outros importantes conceitos e conteúdos: regra de três, divisão em partes proporcionais, porcentagem, taxas, juros, descontos, escalas, razões trigonométricas, semelhança de triângulos, etc...O conceito de proporcionalidade está presente não apenas na Matemática, mas também em outras áreas do conhecimento: na Física, no estudo da densidade, da ótica, da velocidade; na Química, no estudo de equivalências químicas; em Artes, na ampliação e redução de figuras; em Geografia, na interpretação de escalas de mapas..."

Se esses conceitos são tão importantes, o que significam? O que é uma razão? O que é uma proporção? Qual é a propriedade fundamental das proporções?

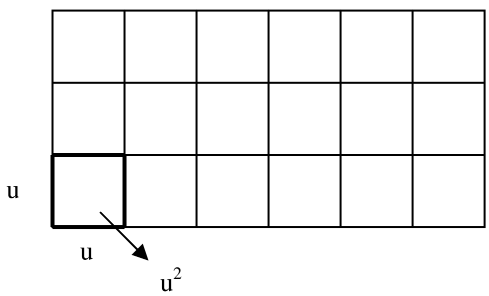
Para responder a essas perguntas, iniciemos procurando entender o que significa grandeza. Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido.

Recordando:

Seja **u** uma unidade de **comprimento**, por exemplo, 1 cm. Podemos representar por:



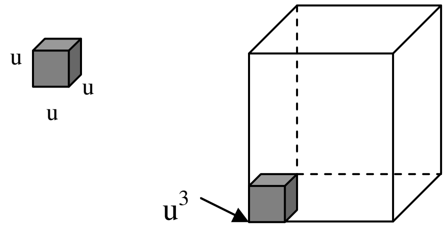
Se, agora, quisermos uma unidade de **área** que tem **u** como medida de cada dimensão: comprimento e largura, por exemplo. Podemos representá-la assim:



Se formos medir uma unidade de **volume**, de um sólido com que estamos tratando, teremos três dimensões: comprimento, largura e altura. Assim representado

---

[88] Texto de nossa autoria.



Muitas outras grandezas existem e, portanto, muitas outras unidades de medidas...

Razão é uma comparação multiplicativa entre duas grandezas. Ou seja,

> Uma razão é um número racional, dado pela expressão barra fracionária: $\frac{a}{b}$, mas que é diferente de um quociente e diferente de uma fração.

Uma razão, denotado por $\frac{a}{b}$ ou *a:b* (*a está para b*), onde ***a*** é denominado antecedente e ***b*** conseqüente. Suas propriedades são fundamentalmente diferentes das de frações.

$\frac{3}{5}$, como fração, leio três quintos

$\frac{3}{5}$, como razão, leio três está para cinco; e posso escrever 3 : 5

Fração é uma relação da parte com o todo. A fração $\frac{3}{5}$ significa que dividi um todo em 5 partes iguais e tomei 3 delas.

A razão $\frac{3}{5}$ significa que eu tenho 8 partes destinadas a cobrir 3 da primeira e 5 da segunda parte. Nessa mesma razão, se eu tiver 40 partes, daria à primeira 15 e à segunda 25. Posso escrever: $\frac{3}{5} = \frac{15}{25}$

Uma igualdade entre duas razões forma uma **proporção**.

$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ é uma proporção e, posso escrever 3 : 5 : : 12 : 20, onde 5 e 12 são os **meios** e 3 e 20 são os **extremos**.

A propriedade fundamental das proporções é:

"O produto dos meios é igual ao produto dos extremos".

De fato, em

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20} \Leftrightarrow 3 : 5 : : 12 : 20 \Leftrightarrow 5 \,.\, 12 = 3 \,.\, 20$$

$$60 = 60$$

Visão Dinâmica da Semelhança de Triângulos – Homotetia[89]

Na palavra homotetia, *homo* significa mesma e *tetia* está relacionada a posicionamento, isto é, duas figuras são homotéticas quando é uma ampliação ou redução da outra e que estejam na mesma posição.

Matematicamente, o que é uma homotetia?

Considere um ponto O e os pontos A, B, C, . . . de uma figura F. Construímos os pontos correspondentes A', B', C', . . . etc, que dão origem à figura F' de tal modo que:

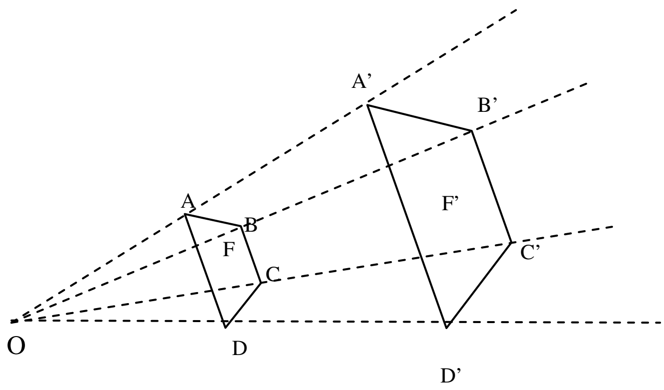
- os pontos O, A e A' estejam alinhados,

O, B e B' estejam alinhados,

O, C e C' estejam alinhados, . . . etc.

- as razões entre as distâncias sejam iguais: $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \ldots\ldots = k$ (razão ou coeficiente de proporcionalidade)

Consideremos as figuras F e F'. As duas características acima citadas devem ser satisfeitas por todos os pontos dessas figuras.



A correspondência que associa os pontos $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$,. . . etc, e que leva a figura F na figura F' chama-se **HOMOTETIA de centro O e razão k.**

[89] Texto extraído do livro: *Curso Básico de Geometria – Enfoque Didático. Módulo III – Visão Dinâmica da Semelhança de Figuras,* de Lilian Nasser e Lucia Tinoco (2004).

As atividades propostas, levou-nos aos seguintes resultados:

Se $0 < k < 1$ obtém-se uma redução, e se $k > 1$, obtém-se uma ampliação. Deve-se dar atenção especial ao caso $k = 1$. Nesse caso, a figura F' coincide com a figura F, isto é, são congruentes. Embora não haja ampliação nem redução, isto também é considerado um caso de homotetia.

Duas figuras são consideradas **homotéticas** quando é possível definir uma homotetia que leva uma figura na outra.

Ao aplicar uma homotetia de razão k a um polígono, obtemos um polígono com a mesma forma, cujas medidas dos lados ficam multiplicados por k. Além disso, os lados do polígono obtido pela homotetia são respectivamente paralelos aos lados do polígono original. Por outro lado sua área fica multiplicada por k^2.

Uma homotetia fica bem definida quando se conhece seu centro e sua razão. Isso significa que, fixados o centro e a razão k de uma homotetia H, é possível determinar a imagem de qualquer ponto ou figura por H.

O centro da homotetia pode estar fora da figura, no interior da figura ou no contorno da figura.

Semelhança de Triângulos

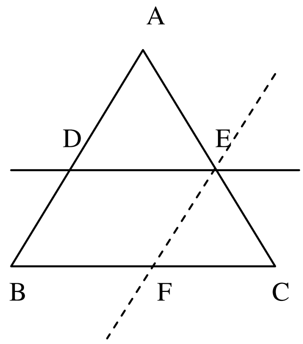
Teorema Fundamental de Semelhança de Triângulos

Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ele determina é semelhante ao primeiro.

Demonstração[90]:

Considere o triângulo *ABC* e a reta *DE* paralela à reta *BC*. Queremos provar que o triângulo *ADE* é semelhante ao triângulo *ABC*.

Para provarmos a semelhança entre esses triângulos, devemos provar que eles têm ângulos correspondentes congruentes e lados homólogos proporcionais.



Sendo a reta *DE* paralela à reta *BC*, os ângulos correspondentes *D* e *B*, *E* e *C* são congruentes. Assim, $\hat{D} \cong \hat{B}$, $\hat{E} \cong \hat{C}$ e o ângulo *A* é comum aos dois triângulos. **(I)**

Resta provar que os lados homólogos são proporcionais. A princípio, pelo Teorema de Tales, temos que $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$.

Pelo ponto *E*, tracemos uma reta *EF* paralela à reta *AB*, e marcamos o ponto *F* em *BC*. Com isso, obtemos o paralelogramo *BDEF* e, portanto, $\overline{DE} = \overline{BF}$ **(II)**

Usando novamente o teorema de Tales, $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$ **(III)**

De **(II)** e **(III)** resulta que $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$.

Logo, $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$. **(IV)**

Assim, concluímos de (I) e (IV) que os triângulos ADE e ABC são semelhantes.

---

[90] Esta demonstração é uma adaptação retirado do livro Fundamentos de Matemática Elementar – geometria plana, vol 9. de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo (1993).

Critérios de Semelhança de Triângulos[91]

Primeiro caso de semelhança de triângulo

Se dois triângulos têm um ângulo igual formado por lados proporcionais, então eles são semelhantes.

Demonstração dinâmica do caso LAL

Considere o triângulo ABC e A'B'C', dados a seguir com $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$

Como $\hat{A} = \hat{A}'$, transportando-se o ângulo *A'* sobre o ângulo *A*, o ponto *C'* vai num ponto *C''* do lado *AC*, tal que $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$ e o ponto *B'* vai num ponto *B''* do lado *AB* tal que $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$. Nestas condições, $\Delta A'B'C' \cong \Delta A'B''C''$.

Como $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$, $\overline{A'B'} = \overline{A'B''}$ e $\overline{A'C'} = \overline{AC''}$, pode-se escrever $\dfrac{\overline{AB''}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC''}}{\overline{AC}}$

Nestas condições, os triângulos AB''C''e ABC são homotéticos. Logo,

$$\overline{B''C''} \,//\, \overline{BC}$$

Por paralelismo entre ângulos, os ângulos *B''* e *C''* são congruentes aos ângulos *B* e *C*.

Como $\Delta A'B'C' \cong \Delta A'B''C''$, resulta que $\hat{B}'' = \hat{B}'$ e $\hat{C}'' = \hat{C}$

Assim, tem-se $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$

O que mostra que os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes.

Segundo caso de semelhança de triângulos

Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.

Demonstração dinâmica:

Pela definição de triângulos semelhantes tem-se $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$

Nestas condições pode-se mostrar que os lados correspondentes são proporcionais, isto é, que

[91] As demonstrações aqui feitas,foram adaptadas dos livros : "Fundamentos de Matemática Elementar" – geometria plana, vol 9. de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo, 2001 e "As transformações geométricas e o ensino de Geometria", vol 2. de Martha Maria de Souza Dantas et al, 1998.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Para isso, transponha primeiro o ângulo A sobre o ângulo A'. Por esse transporte o ponto B vai num ponto B" tal que $\overline{A'B''} = \overline{AB}$ (I)

Traçando-se por B" a paralela ao lado B'C', tem-se a figura seguinte:

Observe que $\overline{B''C''} // \overline{B'C'}$, o triângulo AB"C" é homotético ao triângulo A'B'C'. Pode-se, portanto, escrever

$$\frac{\overline{A'C''}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{B'C'}} \qquad \text{(II)}$$

Por paralelismo entre ângulos, os ângulos *B*" é congruente ao ângulo *B'*.

Por outro lado, o ângulo B'é congruente ao ângulo B e, dessa forma, pela transitividade, $\hat{B}'' \cong \hat{B}$ (III)

De (I), (II) e (III) resulta que ΔA'B"C" ≅ ΔABC, pelo caso ALA. Logo

$$\overline{A'C''} = \overline{AC},\ \overline{A'B''} = \overline{AB} \text{ e } \overline{B'C''} = \overline{BC} \qquad \text{(IV)}$$

Assim, de (II) e (IV) resulta que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Terceiro caso de semelhança de triângulos:

Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.

Demonstração dinâmica:

Temos por hipótese que $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$. Vamos transportar o ângulo *A'* sobre *A*. Dessa forma o ponto *B*' vai em um ponto *B*" do lado *AB* tal que $\overline{AB''} \cong \overline{A'B'}$ e o ponto *C*' vai em um ponto *C*" do lado *AC* tal que $\overline{AC''} \cong \overline{A'C'}$. Nessas condições, pelo caso LAL, $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$.

Então $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B}'' \cong \hat{B}'$ e $C'' \cong C'$. Assim, os triângulos AB"C" e ABC são homotéticos e, dessa forma, B"C"//BC.

Portanto, $\hat{B}'' \cong \hat{B}$, $\hat{C}'' \cong \hat{C}$ e como $\Delta A'B''C'' \cong \Delta A'B'C'$, segue que $\hat{B}'' = \hat{B}'$, $\hat{C}'' = \hat{C}'$

Assim, têm-se $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$

O que mostra que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes.

UNEB – UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO – CAMPUS X
CURSO: Matemática DISCIPLINA: Laboratório de Ensino de Mat.II
PROFESSORA: Célia Barros Nunes
ALUNO(A):____DATA:____

Prova Escrita – valor: 5 pontos

1) Com o que esta disciplina, Laboratório de Ensino de Matemática II, contribuiu para a visão de um professor, em formação, valorizar o trabalho de Geometria, em sala de aula?

2) Explicitar a diferença entre verificar a validade de uma condição matemática, num caso particular e demonstrar essa mesma condição para qualquer caso, generalizando-o.

3) O fato de conhecer os critérios estudados para determinar a congruência e a semelhança de triângulos, em sua opinião, facilitou a ação de resolver problemas geométricos mais complexos? Justifique.

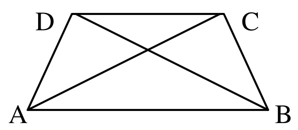
4) As atitudes constantes nas três colocações anteriores, para você, se manifesta como um pensar matematicamente? Justifique sua resposta.

5) Construir um triângulo *MNP* e uma reta *s* que não intercepte esse triângulo, obtendo como imagem, o triângulo *RST*. Repita essa operação partindo do triângulo *RST* e obtenha sua imagem em relação a uma reta *r*, paralela a *s*, obtendo o triângulo *M'N'P'*. Tire conclusões em relação ao triângulo *MNP* e ao triângulo *M'N'P'*.

6) Encontre o polígono A'B'C'D' a partir do quadrado ABCD de lado 2 cm através de uma homotetia de centro O, fora do polígono ABCD, e razão 3/2. A seguir:

a) Compare o perímetro dos dois polígonos e qual a razão entre eles.
b) Compare as áreas entre os dois polígonos e qual a razão entre elas.

7) Na figura ao lado tem-se $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ e $A\hat{D}C \cong B\hat{C}D$
Mostre que $\Delta ABC \cong \Delta ABD$



Na figura ao lado, $\overline{AB} // \overline{CD}$.

Mostre que o ΔAOB ~ ΔCOD