Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Cotipo e Operadores Lineares Absolutamente Somantes

Simeão Targino da Silva

2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Cotipo e Operadores Lineares Absolutamente Somantes

por

Simeão Targino da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Fevereiro de 2010
João Pessoa-PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Cotipo e Operadores Lineares Absolutamente Somantes

por

Simeão Targino da Silva

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro - UFU

Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho - UFCG

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (Suplente)

A minha avó Paulina (in memorian).

Agradecimentos

A minha família, especialmente a minha mãe, Clarice Aquilino da Silva, pelo seu amor, apoio e compreensão.

Ao meu orientador, Daniel Marinho Pellegrino, sou eternamente grato pela sua confiança em minha capacidade, pela paciência e disponibilidade em esclarecer minhas dúvidas sempre que precisei e, principalmente, pela sua enorme contribuição sem a qual este trabalho não teria sido realizado.

Aos professores Vinícius Vieira Fávaro e Jaime Alves Barbosa Sobrinho por terem participado da banca examinadora.

A todos os professores do Departamento de Matemática que contribuiram de forma direta ou indireta para a minha formação matemática, em especial aos professores Antônio de Andrade e Silva, Nelson Nery de Oliveira Castro, Uberlandio Batista Severo, João Marcos Bezerra do Ó e a Everaldo Souto de Medeiros com quem aprendi muita matemática.

A todos os colegas da pós-graduação, em especial, Thiago Ginez Velanga Moreira, Roberto de Almeida Capistrano Filho, Adriano Alves de Medeiros e José Eduardo Jesus da Silva pelas palavras de conforto nos momentos difíceis.

A CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos, com detalhes, temas de pesquisa relacionados à teoria dos operadores lineares absolutamente somantes entre espaços de Banach. Mais precisamente, investigamos a relação entre o conceito de cotipo e resultados de coincidência na teoria de operadores absolutamente somantes.

Palavras-Chave: Cotipo, Operadores Lineares Absolutamente Somantes, Resultados de Coincidência.

Abstract

In this work we investigate, in detail, recent research works related to the theory of absolutely summing operators between Banach spaces. More precisely, we investigate the connection between the concept of cotype and coincidence results in the theory of absolutely summing operators.

Key-Words: Cotype, Absolutely Summing Linear Operators, Coincidence Results.

Sumário

Introdução

Em essência, a Análise Funcional é uma rica fusão de conceitos de Álgebra Linear, Topologia e Análise com ênfase nos espaços vetoriais de dimensão infinita e surgiu nas primeiras décadas do século 20 motivada por vários problemas físicos que requeriam o uso de espaços vetoriais (mais precisamente, espaços de funções) de dimensão infinita. O estudo sistemático desses espaços iniciou-se principalmente com os trabalhos de S. Banach, M. R. Fréchet, E. Helly, D. Hilbert, F. Riesz, E. Schmidt e outros. O ponto de partida da Análise Funcional Moderna foi a publicação, em 1932, do livro escrito pelo matemático polonês S. Banach, contendo um grande apanhado de resultados sobre espaços normados conhecidos até então, incluindo muitos de seus próprios teoremas. Várias notações desse livro foram adotadas pela comunidade matemática e, em sua homenagem, introduziu-se o termo "espaço de Banach".

Desde a publicação do livro de S. Banach, a Análise Funcional assumiu um papel fundamental na matemática moderna e tem-se desenvolvido de forma surpreendente. Na década de 50 surgiu, a partir de idéias de A. Grothendieck, a teoria de operadores absolutamente somantes mas, apenas no final da década de 60, as idéias de Grothendieck começaram a ser melhor compreendidas com os trabalhos de J. Lindenstrauss, A. Pelczyński e A. Pietsch entre outros.

Dados espaços de Banach X e Y, a questão de saber quando (ou não) cada operador linear contínuo de X em Y é absolutamente (q,p)-somante foi assunto de diversos trabalhos clássicos, tais como o de Bennett [3], Carl [8], Dubinsky, Pelczyński e Rosenthal [11], Garling [12],Kwapień [14], Lindenstrauss e Pelczyński [16] e muitos outros. Neste trabalho apresentamos, com detalhes, resultados publicados por G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda em [5, 6] que respondem esta pergunta para os espaços vetoriais Y que não têm cotipo finito (tais espaços são abundantes na teoria dos espaços de Banach). Para o caso em que o espaço domínio X é arbitrário, a pergunta é respondida para certos valores de p e q (Teorema 3.1.8), incluindo o caso $p = q$ (Corolário 3.1.6) e, para outros valores de p e q, o Teorema 3.1.9 resolve a questão quando o espaço X assume o ínfimo de seus cotipos (diversos espaços de Banach têm esta propriedade).

Estrutura dos Tópicos Apresentados

No Capítulo 1, apresentamos o conceito de cotipo e suas propriedades básicas.

No Capítulo 2, apresentamos a definição de operadores absolutamente somantes e demonstramos os nossos resultados básicos que são: a proposição que caracteriza operadores absolutamente somantes por desigualdade, a propriedade de ideal e o teorema da inclusão. Para finalizar, apresentamos os resultados clássicos da teoria.

No Capítulo 3, apresentamos os resultados principais, demonstramos resultados de coincidência quando o contradomínio não tem cotipo finito e finalmente tratamos do caso em que o contradomínio pode ter cotipo finito.

O apêndice traz dois resultados utilizados ao longo do texto.

Notação e Terminologia

Neste trabalho, faremos o uso da seguinte simbologia:

- $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ e os espaços vetoriais serão sempre considerados sobre $\mathbb{K}$.
- A menos que se mencione algo em contrário, os espaços de Banach serão denotados por X, Y, Z e W.
- Vamos denotar por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial formado por todos os operadores lineares e contínuos de X em Y.
- O dual topológico de um espaço de Banach X será denotado por X' e $B_{X'}$ representará a bola unitária fechada em X', isto é, $B_{X'} = \{\varphi \in X';\ \|\varphi\| \leq 1\}$.
- O símbolo $\|.\|$ representará a norma de um espaço vetorial e, quando for preciso especificar o espaço X sobre o qual esta norma está definida, escreveremos $\|.\|_X$.
- Denotamos por $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, onde o número um aparece na i-ésima entrada.
- O posto de um operador linear $u : X \to Y$ é a dimensão da imagem do operador u.
- Se K for um espaço topológico de Hausdorff compacto, então $C(K)$ denotará o espaço de Banach das funções contínuas, com a norma do sup, definidas sobre K.
- Se $1 \leq p < \infty$, então p' denota seu índice conjugado, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

  Quando $p' = 1$ convenciona-se que $p = +\infty$ e vice-versa.

- Quando $1 \leq p < \infty$, denotaremos por l_p o espaço vetorial

$$l_p := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\infty};\ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

  e, para $p = \infty$, temos

$$l_{\infty} := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\infty};\ \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty \right\}.$$

- Para cada $n \in \mathbb{N}$,denotaremos por l_p^n o subespaço de l_p dado por

$$l_p^n := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\infty};\ x_j = 0 \text{ para todo } j \geq n+1 \right\}.$$

- A *função sinal* de x é denotada e definida por $sgn(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Capítulo 1

Cotipo de um espaço de Banach

1.1 Origens do conceito de cotipo

O conceito de cotipo surgiu na década de 70, com os trabalhos de J. Hoffmann-Jörgensen, Stanislaw Kwapien, Bernard Maurey e Gilles Pisier, e tem um papel muito importante na relação entre geometria e probabilidade em espaços de Banach. A relação entre cotipo e operadores lineares absolutamente somantes é muito forte e, atualmente, o conceito de cotipo tem sido uma ferramenta valiosa nessa linha de pesquisa.

1.2 Definição e propriedades básicas

Definição 1.2.1 *Seja $2 \leq q \leq \infty$. Dizemos que um espaço de Banach X tem cotipo q se existir uma constante $C > 0$ tal que, para qualquer escolha finita de vetores x_1, x_2, ..., $x_n \in X$, tivermos*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1}$$

onde, para cada j natural, $r_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ denota a função de Rademacher definida por

$$r_j(t) := sgn(sen 2^j \pi t).$$

Quando $q = \infty$ substituimos o primeiro membro da desigualdade acima por $\max_{j \leq n} \|x_j\|$. O ínfimo das constantes C da definição acima é denotado por $C_q(X)$. É fácil ver que $C_q(X)$ ainda satisfaz (1.1).

As funções de Rademacher possuem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 r_i(t)\, r_j(t)\, dt = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Para mais detalhes veja [1] ou [10].

Proposição 1.2.2 *Todo espaço de Banach X tem cotipo infinito.*

Demonstração. Dados $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, escolha $i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq n$ tal que

$$\|x_i\| = \max_{j \leq n} \|x_j\|.$$

Tomando $\varphi \in X'$ com $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_i) = \|x_i\|$ (veja $[7, Cor.I.3]$), temos

$$\begin{aligned}
\max_{j \leq n} \|x_j\| &= \|x_i\| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j)\delta_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j) \int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt \\
&= \int_0^1 r_i(t) \sum_{j=1}^{n} r_j(t)\varphi(x_j) dt \\
&= \int_0^1 r_i(t)\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right) dt \\
&\leq \int_0^1 \left|\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right)\right| dt \\
&\leq \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right\| dt.
\end{aligned}$$

Como $L_2[0,1] \subseteq L_1[0,1]$ e $\|.\|_1 \leq \|.\|_2$ (para detalhes veja [2]), temos

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right\| dt \leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto

$$\max_{j \leq n} \|x_j\| \leq \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

para qualquer escolha finita de vetores $x_1, x_2, ..., x_n \in X$. ■

Sendo assim, se estamos na reta estendida, o conjunto $\{q; X \text{ tem cotipo } q\}$ é sempre não-vazio (pois ele contém o infinito).

Se X for um espaço de Banach, seguindo a notação introduzida no artigo clássico de Maurey e Pisier [17], escrevemos

$$r_X := \inf\{q; X \text{ tem cotipo } q\}.$$

Note que de (1.1) é claro que se X tem cotipo q, então X tem cotipo r para qualquer $r \geq q$ pois $\|.\|_{l_r} \leq \|.\|_{l_q}$. Sendo assim, pela propriedade de ínfimo, todo espaço de Banach X tem cotipo $r_X + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. É interessante mencionar que há espaços de Banach que tem cotipo $r_X + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, mas não tem cotipo r_X.

O próximo resultado, demonstrado em [10], será usado para mostrar a próxima proposição, que garante que somente o espaço $X = \{0\}$ tem cotipo menor do que 2 (justificando a condição $2 \leq q \leq \infty$ na definição de cotipo).

Teorema 1.2.3 (Desigualdade de Khinchin) *Para qualquer $p \in \mathbb{R}$, com $0 < p < \infty$, existem constantes positivas A_p, B_p tais que*

$$A_p \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) x_j \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_2$.

Proposição 1.2.4 *Um espaço de Banach $X \neq \{0\}$ nunca possui cotipo menor do que 2.*

Demonstração. De fato, tomando $v \in X$ com $\|v\| = 1$ e considerando o espaço gerado pelo vetor v, isto é, $X_0 = [v]$, a aplicação

$$\Psi : X_0 \longrightarrow \mathbb{K} \text{ dada por } \lambda v \mapsto \lambda$$

é claramente um isomorfismo isométrico. Sendo assim, todo espaço de Banach $X \neq \{0\}$ tem um subespaço de dimensão 1 isomorfo a $\mathbb{K}$ (aqui estamos considerando o espaço vetorial $\mathbb{K}$ sobre o próprio $\mathbb{K}$).

Então, se X tivesse cotipo $q < 2$, todo subespaço de X também teria cotipo q e, em particular, $\mathbb{K}$ teria cotipo q, isto é, existiria uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, pela Desigualdade de Khinchin, existe uma constante $B_2 > 0$ tal que

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq B_2 \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$.

Consequentemente

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq CB_2 \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e, em particular, escolhendo, para cada j natural, $x_j = \frac{1}{j^{\frac{1}{q}}}$, teríamos

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{q}} \leq CB_2 \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{\frac{2}{q}}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo tendo em vista que $q < 2$.

Portanto o cotipo de qualquer espaço de Banach $X \neq \{0\}$ não pode ser menor do que 2. ■

Agora vamos apresentar outra demonstração (sugerida pelo prof. Vinícius), bem mais simples, da proposição acima, usando apenas a definição de cotipo e a propriedade de ortogonalidade das funções de Rademacher.

.

Demonstração. Tome $x_1 = ... = x_n = x \in X$, com $\|x\| = 1$. Supondo que X tem cotipo q, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
n^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \left(\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\right|^2 \|x\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \left(\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= Cn^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

onde, na última igualdade acima, usamos a propriedade de ortogonalidade.

Logo $n^{\frac{1}{q}} \leq Cn^{\frac{1}{2}}$, ou seja, $n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica $\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \leq 0$. Portanto $q \geq 2$. ■

Capítulo 2

Operadores Absolutamente Somantes

2.1 Definição e resultados básicos da teoria

Definição 2.1.1 *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X é fortemente p-somável se a sequência de escalares $(\|x_j\|)_{j=1}^{\infty}$ estiver em l_p.*

Denotamos por $l_p(X)$ o espaço vetorial de todas as sequências em X que são fortemente p-somáveis.

Em $l_p(X)$, com $1 \leq p < \infty$, definimos a norma

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

e, em $l_\infty(X)$, definimos a norma

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|.$$

O espaço vetorial

$$l_p(X) = \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \quad (\|x_j\|)_{j=1}^{\infty} \in l_p\right\}$$

com a norma $\|.\|_p$, definida acima, é um espaço de Banach.

Definição 2.1.2 *Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em X é fracamente p-somável se a sequência de escalares $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}$ estiver em l_p para todo $\varphi \in X'$.*

Denotamos por $l_p^w(X)$ o espaço vetorial de todas as sequências em X que são fracamente p-somáveis.

Em $l_p^w(X)$, com $1 \leq p < \infty$, definimos a norma

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w} := \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e, em $l_\infty^w(X)$, definimos a norma

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty,w} := \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left[\sup_{j \in \mathbb{N}} |\varphi(x_j)| \right].$$

O espaço vetorial

$$l_p^w(X) = \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}}; \quad (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_p, \text{ para todo } \varphi \in X' \right\}$$

com a norma $\|.\|_{p,w}$, definida acima, é um espaço de Banach.

O próximo resultado mostra que a função $\|.\|_{p,w}$ está bem definida, ou seja, que o supremo que a define é finito.

Proposição 2.1.3 *A função* $\|.\|_{p,w} : l_p^w(X) \to [0, \infty)$ *dada por*

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w} = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

está bem definida.

Demonstração. De fato, para cada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$, defina a função

$$\begin{gathered} T : X' \to l_p \\ T(\varphi) = (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \end{gathered}$$

Claramente T está bem definida e é linear. Vamos mostrar que T tem o gráfico fechado. Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X' tal que

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \in X' \quad \text{e} \quad T(\varphi_n) \longrightarrow y \in l_p.$$

Então temos

$$(\varphi_n(x_j))_{j=1}^{\infty} = T(\varphi_n) \longrightarrow y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty,$$

e, consequentemente

$$\varphi_n(x_j) \longrightarrow y_j \quad \text{quando } \ n \longrightarrow \infty, \tag{2.1}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, de $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, obtemos

$$\varphi_n(x_j) \longrightarrow \varphi(x_j) \quad \text{quando } \quad n \longrightarrow \infty, \tag{2.2}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Logo, de (2.1), (2.2) e da unicidade de limite, concluímos que $\varphi(x_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, mostrando que $T(\varphi) = y$. Portanto o operador T tem o gráfico fechado e, pelo Teorema do Gráfico Fechado, segue que T é limitado, isto é,

$$\sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \|T(\varphi)\|_p < \infty.$$

■

Observação 2.1.4 *Para* $1 \leq p < \infty$, *temos* $l_p(X) \subseteq l_p^w(X)$ *pois*

$$\begin{aligned}
\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p,w} &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \|\varphi\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p .
\end{aligned}$$

Quando $p = \infty$, *temos* $l_\infty(X) = l_\infty^w(X)$ *pois*

$$\begin{aligned}
\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty} &= \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\| \\
&= \sup_{j \in \mathbb{N}} \left[\sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(x_j)| \right] \\
&= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left[\sup_{j \in \mathbb{N}} |\varphi(x_j)| \right] \\
&= \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty,w} .
\end{aligned}$$

Definição 2.1.5 *Sejam* X, Y *espaços de Banach,* $1 \leq p, q < \infty$ *e* $u : X \to Y$ *um operador linear contínuo. Dizemos que* u *é absolutamente* (q,p)*-somante (ou simplesmente* (q,p)*-somante) se*

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X) \Longrightarrow (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_q(Y),$$

ou, em outras palavras, se o operador linear

$$\hat{u} : l_p^w(X) \longrightarrow l_q(Y) \quad \textit{dado por} \quad (x_j)_{j=1}^{\infty} \to (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \tag{2.3}$$

estiver bem definido.

Denotamos por $\Pi_{q,p}(X,Y)$ o espaço vetorial formado por todos os operadores lineares contínuos de X em Y que são (q,p)-somantes. Quando $p=q$, dizemos que o operador u é absolutamente p-somante (ou simplesmente p-somante) e denotamos por $\Pi_p(X,Y)$ o espaço vetorial formado por estes operadores.

Observação 2.1.6 *O caso $q<p$, na definição acima, não é interessante pois, nesse caso, o único operador linear contínuo $u: X \to Y$ tal que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_q(Y)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$, é o operador identicamente nulo (veja Proposição 2.1.8 abaixo)*

Proposição 2.1.7 *Sejam X, Y dois espaços de Banach, $1 \leq p \leq q < \infty$ e $u : X \to Y$ um operador linear contínuo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) u é absolutamente (q,p)-somante;

(ii) Existe $C>0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ e $n \in \mathbb{N}$;

(iii) Existe $C>0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.4}$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$.

Neste caso, $\hat{u}$ é contínua e $\|\hat{u}\|$ coincide com o ínfimo das constantes que satisfazem as desigualdades acima.

Demonstração. (i)⇒(ii) Basta provar que a aplicação $\hat{u}$, definida em (2.3) é contínua. Vamos mostrar que $\hat{u}$ tem gráfico fechado. De fato, seja $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $l_p^w(X)$, onde $x^{(n)} = \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}$, tal que

$$x^{(n)} \longrightarrow x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \text{ em } l_p^w(X)$$

e que

$$\hat{u}(x^{(n)}) \longrightarrow y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \text{ em } l_q(Y)$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow \left\|x_j^{(n)} - x_j\right\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}}\left|\varphi(x_j^{(n)} - x_j)\right|$$

$$\leq \sup_{\varphi \in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi(x_j^{(n)} - x_j)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|x^{(n)} - x\right\|_{p,w} < \varepsilon$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Logo, para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$x_j^{(n)} \longrightarrow x_j \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty,$$

e, como u é contínua, segue que

$$u(x_j^{(n)}) \longrightarrow u(x_j) \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty, \tag{2.5}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, como $\hat{u}(x^{(n)}) \longrightarrow y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$ em $l_q(Y)$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n \geq N_1 \Longrightarrow \left\| u(x_j^{(n)}) - y_j \right\| &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\| u(x_k^{(n)}) - y_k \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ = \left\| \left(u(x_j^{(n)}) \right)_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_q &= \left\| \hat{u}(x^{(n)}) - y \right\|_q < \varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que

$$u(x_j^{(n)}) \longrightarrow y_j \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty, \tag{2.6}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

De (2.5) e (2.6) temos que $u(x_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Consequentemente

$$\hat{u}(x) = (u(x_j))_{j=1}^{\infty} = (y_j)_{j=1}^{\infty} = y,$$

o que prova que $\hat{u}$ tem o gráfico fechado e, pelo Teorema do Gráfico Fechado, segue que $\hat{u}$ é contínua.

Sendo assim, para toda sequência finita $(x_j)_{j=1}^{n}$ em X, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} \| u(x_j) \|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \left\| (u(x_j))_{j=1}^{n} \right\|_q \\ &= \left\| \hat{u}\left((x_j)_{j=1}^{n} \right) \right\|_q \\ &\leq \| \hat{u} \| \left\| (x_j)_{j=1}^{n} \right\|_{p,w} \\ &= \| \hat{u} \| \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

o que prova (ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii) Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$. Então, usando a Proposição 4.0.18, temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=1}^{n}\|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\ &= C\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\ &= C\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

o que prova (iii).

A implicação (iii)$\Rightarrow$(i) é óbvia.

Note que se denotarmos por $\pi_{q,p}(u)$ o ínfimo das constantes que satisfazem (2.4) então, por (2.7), é imediato que $\pi_{q,p}(u) \leq \|\hat{u}\|$. Por outro lado, se $C > 0$ é uma constante que satisfaz (2.4), então

$$\begin{aligned}\|\hat{u}\| &= \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p,w}\leq 1}\left\|\hat{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_q \\ &= \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p,w}\leq 1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p,w}\leq 1} C\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C\sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p,w}\leq 1}\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p,w} \\ &= C\end{aligned}$$

mostrando que $\|\hat{u}\| \leq \pi_{q,p}(u)$. Portanto, $\|\hat{u}\| = \pi_{q,p}(u)$ é o ínfimo das constantes que satisfazem (2.4). Note que, pela desigualdade (2.7), o ínfimo $\|\hat{u}\|$ é atingido. ■

O espaço vetorial $\Pi_{q,p}(X,Y)$ torna-se um espaço de Banach quando consideramos a norma $\pi_{q,p} : \Pi_{q,p}(X,Y) \to [0,\infty)$ dada por

$$\pi_{q,p}(u) = \|\hat{u}\| := \sup\left\{\left\|(u(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_q ; (x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{l_p^w(X)}\right\}.$$

A seguinte proposição justifica a Observação 2.1.6 feita acima.

Proposição 2.1.8 *Sejam X, Y espaços de Banach e $q < p$. Se o operador linear contínuo $u : X \to Y$ for (q,p)-somante, então u é o operador identicamente nulo.*

Demonstração. Suponhamos que exista um operador linear contínuo u não identicamente nulo que seja (q,p)-somante. Claramente podemos supor que $X \neq \{0\}$. Sendo $q < p$, existe $r \in \mathbb{R}$ com $q < r < p$, isto é, $\frac{1}{p} < \frac{1}{r} < \frac{1}{q}$. Então a sequência de escalares $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$, com $\lambda_j = \frac{1}{j^{\frac{1}{r}}}$, é tal que $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p \diagdown l_q$ pois

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{p}{r}}} < \infty,$$

já que $\frac{p}{r} > \frac{p}{p} = 1$, e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^q = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{q}{r}}} = \infty,$$

já que $\frac{q}{r} < \frac{q}{q} = 1$.

Para todo $x \in X$, temos $(\lambda_j x)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$. De fato, como $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p$, segue que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\lambda_j x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\|\varphi\| |\lambda_j| \|x\|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\varphi\| \|x\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in X'$.

Então, pela proposição anterior, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|u(\lambda_j x)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(\lambda_j x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\|u(x)\| \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(x)| \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C \|x\| \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \sup_{\|x\|\leq 1} C\|x\| \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$\|u\| \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, fazendo $n \longrightarrow \infty$, chegamos à contradição $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q$. ■

Observação 2.1.9 *Tendo em vista a Proposição 2.1.8, o estudo do espaço $\Pi_{q,p}(X,Y)$ será feito apenas para o caso em que $p \leq q$.*

Observação 2.1.10 *Para cada $u \in \Pi_{q,p}(X,Y)$, temos $\|u\| \leq \pi_{q,p}(u)$. De fato, pela Proposição 2.1.7, para cada $x \in X$ temos*

$$\|u(x)\| \leq \pi_{q,p}(u) \sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(x)| = \pi_{q,p}(u)\|x\|,$$

e o resultado segue.

Observação 2.1.11 *Não é difícil provar que $(\mathbb{k}^n)' \approx (\mathbb{k}')^n$, onde cada $\varphi \in (\mathbb{k}^n)'$ é da forma $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, com $\varphi_i \in \mathbb{k}'$, e $\varphi(x_1, ..., x_n) = \varphi_1(x_1) + ... + \varphi_n(x_n)$ para todo $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{k}^n$ (o símbolo $\approx$ denota isomorfismo).*

A próxima proposição mostra que $l_q^w(\mathbb{k}^n) \approx \left[l_q^w(\mathbb{k})\right]^n$ e que $l_q(\mathbb{k}^n) \approx \left[l_q(\mathbb{k})\right]^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.1.12 *As aplicações*

$$\Phi_1 : \left[l_q^w(\mathbb{k})\right]^n \to l_q^w(\mathbb{k}^n)$$

dada por

$$\Phi_1\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}$$

e

$$\Phi_2 : \left[l_q(\mathbb{k})\right]^n \to l_q(\mathbb{k}^n)$$

dada por

$$\Phi_2\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}$$

são isomorfismos.

Demonstração. A função Φ_1 está bem definida. De fato, seja

$$\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\in\left[l_q^w\left(\mathbb{k}\right)\right]^n.$$

Dado $\varphi\in\left(\mathbb{k}^n\right)'$, temos $\varphi=(\varphi_1,...,\varphi_n)$ com $\varphi_i\in\mathbb{k}'$ (veja Observação 2.1.11 logo acima). Assim

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_1\left(x_j^{(1)}\right)+...+\varphi_n\left(x_j^{(n)}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_1\left(x_j^{(1)}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+...+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_n\left(x_j^{(n)}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

mostrando que

$$\Phi_1\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)=\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_q^w\left(\mathbb{k}^n\right).$$

É óbvio que Φ_1 é linear. Agora só falta mostrarmos que Φ_1 é bijetiva.

Temos

$$\begin{aligned}\Phi_1\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) &= \Phi_1\left(\left(y_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(y_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)\\ &\Rightarrow \left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}=\left(y_j^{(1)},...,y_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\\ &\Rightarrow \left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right)=\left(\left(y_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty},...,\left(y_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right),\end{aligned}$$

e segue a injetividade de Φ_1.

Para mostrar a sobrejetividade, seja

$$\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\in l_q^w\left(\mathbb{k}^n\right) \tag{2.8}$$

e considere, para cada $i=1,...,n$, um funcional $\varphi_i\in\mathbb{k}'$. Sendo assim, temos

$$\varphi=(0,...,0,\varphi_i,0,...,0)\in\left(\mathbb{k}^n\right)' \tag{2.9}$$

e de (2.8) e (2.9) é imediato que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi_i\left(x_j^i\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi\left(x_j^{(1)},...,x_j^{(n)}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Como os funcionais $\varphi_i \in \mathbb{k}'$ foram escolhidos arbitrariamente, concluimos que

$$\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) \in \left[l_q^w\left(\mathbb{k}\right)\right]^n$$

e, além disso, temos

$$\Phi_1\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, ..., \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty},$$

mostrando que Φ_1 é sobrejetiva.

Logo Φ_1 é uma bijeção linear e, portanto, um isomorfismo.

O caso da função Φ_2 é mais simples. De fato, como

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left\|x_j^{(1)}\right\| + ... + \left\|x_j^{(n)}\right\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|x_j^{(1)}\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} + ... + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|x_j^{(n)}\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

segue facilmente que Φ_2 está bem definida e como

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|x_j^{(i)}\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\left\|x_j^{(1)}\right\| + ... + \left\|x_j^{(n)}\right\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\left(x_j^{(1)}, ..., x_j^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

para todo $i = 1, ..., n$, a função Φ_2 também é sobrejetiva. A injetividade e a linearidade de Φ_2 são óbvias. ■

Proposição 2.1.13 *Seja* $1 \leq q < \infty$. *Se* X *for um espaço de Banach com* $\dim X < \infty$, *então*

$$l_q^w(X) = l_q(X).$$

Demonstração. Tendo em vista a Observação 2.1.4 basta mostrarmos a inclusão $l_q^w(X) \subset l_q(X)$.

Primeiramente, mostraremos que

$$l_q^w(\mathbb{k}) \subset l_q(\mathbb{k}). \tag{2.10}$$

De fato, dado $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(\mathbb{k})$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi(x_j)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

para toda $\varphi \in \mathbb{k}'$. Em particular, tomando $\varphi(x) = x$ na desigualdade acima, obtemos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q(\mathbb{k})$, provando (2.10).

Sendo $\dim X < \infty$, temos $X \approx \mathbb{k}^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, pela Proposição 2.1.12, obtemos

$$l_q^w(X) \approx l_q^w(\mathbb{k}^n) \approx \left[l_q^w(\mathbb{k})\right]^n \overset{(2.10)}{\subset} \left[l_q(\mathbb{k})\right]^n \approx l_q(\mathbb{k}^n) \approx l_q(X).$$

■

O seguinte resultado será útil na demonstração do Teorema 3.1.5.

Proposição 2.1.14 *Sejam X e Y espaços de Banach e $1 \leq p \leq q < \infty$. Se* $\dim X < \infty$ *ou* $\dim Y < \infty$, *então*

$$\Pi_{q,p}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y).$$

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que $\mathcal{L}(X,Y) = \Pi_{q,q}(X,Y)$ e, para isso, suponhamos que $u \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Se $\dim X < \infty$, então $l_q^w(X) = l_q(X)$. Logo, se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$, temos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q(X)$ e, como u é contínuo, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|u\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

mostrando que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_q(Y)$.

Suponha agora que $\dim Y < \infty$. Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$, temos, para toda $\varphi \in X'$,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

e, consequentemente, para cada $\varphi \in Y'$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(u(x_j))|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(\varphi \circ u)(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

já que $\varphi \circ u \in X'$. Então, mostramos que

$$(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(Y) = l_q(Y).$$

Logo u leva sequências fracamente q-somáveis em sequências fortemente q-somáveis, isto é, $u \in \Pi_{q,q}(X,Y)$.

Portanto

$$\mathcal{L}(X,Y) = \Pi_{q,q}(X,Y). \tag{2.11}$$

Por outro lado, suponhamos que $u \in \Pi_{q,q}(X,Y)$. Como $p \leq q$, temos $l_p^w(X) \subseteq l_q^w(X)$. Sendo assim, dado $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X)$, temos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^w(X)$ e, como u é absolutamente (q,q)-somante, segue que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_q(Y)$. Então $u \in \Pi_{q,p}(X,Y)$.

Logo

$$\Pi_{q,q}(X,Y) \subseteq \Pi_{q,p}(X,Y) \tag{2.12}$$

e, de (2.11) e (2.12), obtemos o resultado. ■

Proposição 2.1.15 (Propriedade de Ideal) *Sejam X, Y, W e Z espaços de Banach e $1 \leq p \leq q < \infty$. Se $u : X \to Y$ é absolutamente (q,p)-somante, $v \in \mathcal{L}(W,X)$ e $w \in \mathcal{L}(Y,Z)$, então $w \circ u \circ v : W \to Z$ é absolutamente (q,p)-somante e*

$$\pi_{q,p}(w \circ u \circ v) \leq \|w\| \, \pi_{q,p}(u) \, \|v\| \, .$$

Demonstração. Basta observar as desigualdades

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{m} \|w \circ u \circ v(x_j)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \|w\| \left(\sum_{j=1}^{m} \|u\left(v(x_j)\right)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|w\| \, \pi_{q,p}(u) \left\| (v(x_j))_{j=1}^m \right\|_{p,w} \\
&\leq \|w\| \, \pi_{q,p}(u) \, \|v\| \left\| (x_j)_{j=1}^m \right\|_{p,w}
\end{aligned}$$

e a demonstração está concluída. ■

2.2 O Teorema de Inclusão

O próximo resultado mostra que os espaços vetoriais $\Pi_{q,p}(X,Y)$ tem tamanhos variados, de acordo com os parâmetros p e q.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Inclusão) *Sejam X, Y espaços de Banach e $1 \leq p_j \leq q_j < \infty$ $(j = 1, 2)$ tais que $p_1 \leq p_2$, $q_1 \leq q_2$ e*

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}.$$

Então

$$\Pi_{q_1,p_1}(X,Y) \subseteq \Pi_{q_2,p_2}(X,Y)$$

e, para cada $u \in \Pi_{q_1,p_1}(X,Y)$, temos

$$\pi_{q_2,p_2}(u) \leq \pi_{q_1,p_1}(u) \, .$$

Demonstração. Se $p_1 = p_2 = p$ e $u \in \Pi_{q_1,p}(X,Y)$, então

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(X) \Longrightarrow (u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in l_{q_1}(Y) \subseteq l_{q_2}(Y)$$

mostrando que $u \in \Pi_{q_2,p}(X,Y)$, e o caso $p_1 = p_2$ fica resolvido.

Se $p_1 < p_2$, então

$$0 < \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \leq \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}$$

e consequentemente $q_1 < q_2$.

Se definirmos

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2},$$

obtemos $1 < q \leq p < \infty$.

Sejam $u \in \Pi_{q_1,p_1}(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, ..., x_n \in X$.

Escrevendo $\lambda_j := \|u(x_j)\|^{\frac{q_2}{q}}$, com $1 \leq j \leq n$, obtemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
\|u(\lambda_j x_j)\|^{q_1} &= \left\| u\left(\|u(x_j)\|^{\frac{q_2}{q}} x_j \right) \right\|^{q_1} \\
&= \|u(x_j)\|^{\frac{q_2 q_1}{q}} \|u(x_j)\|^{q_1} \\
&= \|u(x_j)\|^{\frac{q_2 q_1}{q} + q_1} \\
&= \|u(x_j)\|^{q_2}.
\end{aligned}$$

Como u é (q_1, p_1)-somante, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^{q_2} \right)^{\frac{1}{q_1}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \|u(\lambda_j x_j)\|^{q_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
&\leq \pi_{q_1,p_1}(u) \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(\lambda_j x_j)|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \pi_{q_1,p_1}(u) \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{p_1} |\varphi(x_j)|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}}.
\end{aligned}$$

Como $p > p_1$ e $p_2 > p_1$ com

$$\frac{1}{\frac{p}{p_1}} + \frac{1}{\frac{p_2}{p_1}} = 1,$$

usando a Desigualdade de Hölder e o fato de que $\|.\|_p \leq \|.\|_q$ (pois $q \leq p$), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n}\|u(x_j)\|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_1}} &\leq \pi_{q_1,p_1}(u) \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{p_1}|\varphi(x_j)|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \\
&\leq \pi_{q_1,p_1}(u) \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left[\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{p}\right)^{\frac{p_1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right]^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \pi_{q_1,p_1}(u) \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&\leq \pi_{q_1,p_1}(u) \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&= \pi_{q_1,p_1}(u) \left(\sum_{j=1}^{n}\|u(x_j)\|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|u(x_j)\|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q}} \leq \pi_{q_1,p_1}(u) \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

ou seja,

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|u(x_j)\|^{q_2}\right)^{\frac{1}{q_2}} \leq \pi_{q_1,p_1}(u) \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

mostrando que $u \in \Pi_{q_2,p_2}(X,Y)$ e que $\pi_{q_2,p_2}(u) \leq \pi_{q_1,p_1}(u)$. ■

Corolário 2.2.2 *Se* $1 \leq p \leq q < \infty$, *então*

$$\Pi_p(X,Y) \subseteq \Pi_q(X,Y)$$

para quaisquer espaços de Banach X *e* Y.

2.3 Resultados clássicos da teoria

A seguir, listamos alguns resultados centrais da teoria de operadores absolutamente somantes: o Teorema da Dominação de Pietsch, a Desigualdade e o Teorema de Grothendieck e uma versão do Teorema de Dvoretzky-Rogers (para mais detalhes veja [1] ou [10]).

Teorema 2.3.1 (Teorema da Dominação de Pietsch) *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u : X \to Y$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Então u é absolutamente p-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel de $B_{X'}$, com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x \in X$.

Teorema 2.3.2 (Desigualdade de Grothendieck) *Existe uma constante $K_G > 0$ tal que, para todo espaço de Hilbert H, todo $n \in \mathbb{N}$, toda matriz $(a_{i,j})_{nxn}$ e quaisquer $x_1, ..., x_j$, $y_1, ..., y_n$ em B_H, vale*

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq K_G \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} s_i t_j \right| : |s_i| \leq 1, |t_j| \leq 1 \right\}.$$

Teorema 2.3.3 (Teorema de Grothendieck) *Todo operador linear contínuo $u : l_1 \to l_2$ é absolutamente 1-somante.*

Resultados similares ao Teorema de Grothendieck (do tipo todo operador linear de um certo espaço de Banach X num certo espaço de Banach Y é absolutamente (q,p)-somante, para certos p e q) são chamados de resultados de coincidência. O próximo resultado, devido a Dvoretzky e Rogers, mostra situações em que não ocorrem resultados de coincidência:

Teorema 2.3.4 (Teorema de Dvoretzky-Rogers) *Sejam $1 \leq p \leq q < \infty$. Se*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{2},$$

então todo espaço de Banach X de dimensão infinita contém uma sequência fracamente p-somável que não é fortemente q-somável, em outras palavras, id_X não é (q,p)-somante.

Não é difícil mostrar que se X tem cotipo $q < \infty$, então o operador identidade de X é $(q,1)$-somante. Esse resultado será provado adiante. O seguinte importante (e profundo) teorema, devido a Michel Talagrand, mostra que se $q > 2$, a recíproca é válida.

Teorema 2.3.5 (Talagrand) *Seja X um espaço de Banach. Se $q > 2$ e id_X é $(q,1)$-somante então X tem cotipo q.*

Os próximos resultados mostram como o cotipo se relaciona bem com resultados de coincidência:

Teorema 2.3.6 (Dubinsky - Pełczyński - Rosenthal - Maurey) *Seja Y um espaço de Banach com cotipo q, onde $2 \leq q < \infty$, e K um espaço de Hausdorff compacto.*

(a) Se $q = 2$, então

$$\mathcal{L}(C(K), Y) = \Pi_2(C(K), Y)$$

(b) Se $2 < q < \infty$, então

$$\mathcal{L}(C(K), Y) = \Pi_{q,p}(C(K), Y) = \Pi_r(C(K), Y)$$

para todo $p < q$ e $q < r < \infty$.

Teorema 2.3.7 (Maurey) *Sejam X e Y espaços de Banach.*

(a) Se X tem cotipo 2, então

$$\Pi_2(X, Y) = \Pi_1(X, Y).$$

(b) Se X tem cotipo $2 < q < \infty$, então

$$\Pi_r(X, Y) = \Pi_1(X, Y)$$

para todo $1 < r < q'$.

(c) Se X e Y têm cotipo 2, então

$$\Pi_r(X, Y) = \Pi_1(X, Y)$$

para todo $1 < r < \infty$.

Capítulo 3

Cotipo e operadores absolutamente somantes: resultados recentes

Neste capítulo veremos resultados recentes envolvendo cotipo e operadores lineares absolutamente somantes. Nos próximos teoremas veremos a grande importância do conceito de cotipo na teoria dos operadores absolutamente somantes, pois são esses os resultados que nos dirão quando ou não, sob certas condições, os espaços $\Pi_{q,p}(X,Y)$ e $\mathcal{L}(X,Y)$ coincidem. Lembramos que resultados deste tipo (como por exemplo o Teorema de Grothendieck) e investigações sobre para quais valores de p, q e condições sobre os espaços X, Y ocorrem igualdades do tipo $\Pi_p(X;Y) = \Pi_q(X;Y)$ são chamados de Resultados de Coincidência.

3.1 Caso em que o contradomínio não tem cotipo finito

Os resultados principais desta seção são devidos a Botelho e Pellegrino, e aparecem em [5].

Definição 3.1.1 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. Dizemos que X é finitamente representável em Y se dados qualquer subespaço de dimensão finita $E \subseteq X$ e $\varepsilon > 0$, existirem um subespaço $F \subseteq Y$ com $\dim F = \dim E$ e um isomorfismo $T : E \to F$ tal que*

$$\|T\| . \left\|T^{-1}\right\| < 1 + \varepsilon.$$

Exemplo 3.1.2 *l_2 é finitamente representável em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita (Teorema de Dvoretzky [1, pág 284]).*

Exemplo 3.1.3 *l_∞ é finitamente representável em qualquer espaço de Banach sem cotipo finito [1, Theorem 11.1.14 (ii)].*

Lema 3.1.4 *Sejam X, Y e Z espaços de Banach com $Z \subseteq X$. Se $u \in \Pi_{q,p}(Z,Y)$, $v \in \Pi_{q,p}(X,Y)$ e v estende u, então*

$$\pi_{q,p}(u) \leq \pi_{q,p}(v).$$

Demonstração. Para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(Z)$, temos

$$\begin{aligned}
\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{l_p^w(Z)} &= \sup_{\varphi \in B_{Z'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\tilde{\varphi} \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{\varphi}(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\psi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\psi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{l_p^w(X)}
\end{aligned}$$

(onde $\tilde{\varphi}$ denota uma extensão de φ ao espaço X) e

$$\begin{aligned}
\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{l_p^w(X)} &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi|_Z \in B_{Z'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi|_Z(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\psi \in B_{Z'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\psi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{l_p^w(Z)}
\end{aligned}$$

(onde $\varphi|_Z$ denota a restrição de φ ao espaço Z).

Então, mostramos que

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{l_p^w(Z)} = \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{l_p^w(X)} \text{ para todo } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(Z). \tag{3.1}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\pi_{q,p}(u) &= \|\hat{u}\| \\
&= \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{l_p^w(Z)}\leq 1} \left\|\hat{u}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_{l_q(Y)} \\
&= \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{l_p^w(Z)}\leq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{l_p^w(Z)}\leq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|v(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\overset{(3.1)}{\leq} \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{l_p^w(X)}\leq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|v(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|\hat{v}\| \\
&= \pi_{q,p}(v).
\end{aligned}
$$

■

No que segue p, q e r são números reais com $1 \leq p \leq q < +\infty$ e $1 \leq r \leq +\infty$.

Teorema 3.1.5 (Botelho - Pellegrino) *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita com Y sem cotipo finito e suponha que l_r é finitamente representável em X. Então, se $1 \leq q < r$ ou $p \geq r'$, existe um operador linear contínuo de X em Y que não é (q,p)-somante.*

Demonstração. Vamos assumir inicialmente que $r < \infty$.

Primeiro caso. Suponha $1 \leq q < r$.

Como, para cada n, $(l_r^n)'$ é isometricamente isomorfo a $l_{r'}^n$, com $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, então para cada $\varphi \in (l_r^n)'$, existe $(\varphi_j)_{j=1}^n \in l_{r'}^n$ tal que

$$
\varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j y_j
$$

para todo $y = (y_j)_{j=1}^n \in l_r^n$.

Assim,

$$\left\| \left(\frac{e_j}{j^{\frac{1}{q}}} \right)_{j=1}^{n} \right\|_{l_1^w(l_r^n)} = \sup_{\varphi \in B_{(l_r^n)'}} \sum_{j=1}^{n} \left| \varphi \left(\frac{e_j}{j^{\frac{1}{q}}} \right) \right| \tag{3.2}$$
$$= \sup_{\varphi \in B_{(l_r^n)'}} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{\frac{1}{q}}} \left| \varphi(e_j) \right|$$
$$= \sup_{\varphi \in B_{l_{r'}^n}} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{\frac{1}{q}}} \left| \varphi_j \right|$$
$$\leq \sup_{\varphi \in B_{l_{r'}^n}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j^{\frac{1}{q}}} \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \varphi_j \right|^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^{\frac{r}{q}}} \right)^{\frac{1}{r}},$$

e segue que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \left(\frac{e_j}{j^{\frac{1}{q}}} \right)_{j=1}^{n} \right\|_{l_1^w(l_r^n)} < \infty,$$

pois $q < r$.

Como $p \geq 1$, temos $l_1^w \left(l_r^n \right) \subseteq l_p^w \left(l_r^n \right)$ e $\|.\|_{l_p^w(l_r^n)} \leq \|.\|_{l_1^w(l_r^n)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consequentemente

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \left(\frac{e_j}{j^{\frac{1}{q}}} \right)_{j=1}^{n} \right\|_{l_p^w(l_r^n)} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \left(\frac{e_j}{j^{\frac{1}{q}}} \right)_{j=1}^{n} \right\|_{l_1^w(l_r^n)} < \infty. \tag{3.3}$$

Para todo inteiro positivo n, seja

$$u_n : l_r^n \to l_\infty^n$$

o operador inclusão.

Pela Proposição 2.1.14 é imediato que $u_n \in \Pi_{q,p} \left(l_r^n, l_\infty^n \right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, de (3.2), como veremos, segue que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \pi_{q,p} \left(u_n \right) = \infty. \tag{3.4}$$

Com efeito, pela caracterização de operadores absolutamente somantes por desigualdades (Proposição 2.1.7) , temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{e_j}{j^{\frac{1}{q}}}\right\|_{l_\infty^n}^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\left\|u_n\left(\frac{e_j}{j^{\frac{1}{q}}}\right)\right\|_{l_\infty^n}^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \pi_{q,p}\left(u_n\right)\left\|\left(\frac{e_j}{j^{\frac{1}{q}}}\right)_{j=1}^{n}\right\|_{l_p^w\left(l_r^n\right)}
\end{aligned}$$

e, tomando o supremo em n, obtemos

$$\infty \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\pi_{q,p}\ \left(u_n\right).\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|\left(\frac{e_j}{j^{\frac{1}{q}}}\right)_{j=1}^{n}\right\|_{l_p^w\left(l_r^n\right)}. \tag{3.5}$$

Assim, (3.4) segue de (3.3) e (3.5).

A seguir mostraremos que estimativas similares podem ser obtidas no caso $p \geq r'$. A demonstração do teorema, para os dois casos simultaneamente, será retomada logo depois.

Segundo caso. Suponha agora que $p \geq r'$.

Para todo inteiro positivo n, continuamos denotando a inclusão de l_r^n em l_∞^n por

$$u_n : l_r^n \to l_\infty^n.$$

Como $p \geq r'$, temos $l_{r'}^w\left(l_r^n\right) \subseteq l_p^w\left(l_r^n\right)$ e $\|.\|_{l_p^w\left(l_r^n\right)} \leq \|.\|_{l_{r'}^w\left(l_r^n\right)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, lembrando que $\left(l_r^n\right)'$ é isometricamente isomorfo a $l_{r'}^n$, temos

$$\begin{aligned}
\left\|\left(e_j\right)_{j=1}^{n}\right\|_{l_p^w\left(l_r^n\right)} \leq \left\|\left(e_j\right)_{j=1}^{n}\right\|_{l_{r'}^w\left(l_r^n\right)} &= \sup_{\varphi\in B_{\left(l_r^n\right)'}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi\left(e_j\right)\right|^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&= \sup_{\varphi\in B_{l_{r'}^n}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi_j\right|^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Logo, como veremos, segue que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\pi_{q,p}\ \left(u_n\right) = \infty.$$

Com efeito, pela caracterização de operadores absolutamente somantes por desigualdades, temos

$$
\begin{aligned}
n^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} 1\right)^{\frac{1}{q}} && (3.7)\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|_{l_\infty^n}^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \|u_n(e_j)\|_{l_\infty^n}^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq \pi_{q,p}\left(u_n\right) \left\|(e_j)_{j=1}^n\right\|_{l_p^w(l_r^n)} && (3.8)
\end{aligned}
$$

e, tomando o supremo em n, de (3.6) e (3.7), obtemos

$$\infty \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}\left(u_n\right).\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|(e_j)_{j=1}^n\right\|_{l_p^w(l_r^n)} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}\left(u_n\right).$$

Além disso, é claro que, para todo n natural, temos

$$\|u_n\| = 1.$$

Assim, dos dois casos considerados, acabamos de mostrar que se $1 \leq q < r$ ou $p \geq r'$, então

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}\left(u_n\right) = \infty \ \text{ e } \ \|u_n\| = 1.$$

Agora retomemos a demonstração do teorema, considerando os dois casos simultaneamente.

Como Y não tem cotipo finito, pelo Teorema de Maurey-Pisier [1, Theorem 11.1.14 (ii)], l_∞ é finitamente representável em Y. Além disso, temos, por hipótese, que l_r é finitamente representável em X. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem um subespaço, de dimensão n, Y_n de Y, um subespaço, de dimensão n, X_n de X e isomorfismos T e R, com

$$l_\infty^n \xrightarrow{T} Y_n \xrightarrow{T^{-1}} l_\infty^n$$

e

$$l_r^n \xrightarrow{R} X_n \xrightarrow{R^{-1}} l_r^n$$

tais que

$$\|T\| = \|R\| = 1,$$

$$\left\|T^{-1}\right\| < 2 \text{ e } \left\|R^{-1}\right\| < 2.$$

Agora considere a composição

$$l_r^n \xrightarrow{R} X_n \xrightarrow{R^{-1}} l_r^n \xrightarrow{u_n} l_\infty^n \xrightarrow{T} Y_n \xrightarrow{T^{-1}} l_\infty^n.$$

Usando a Propriedade de Ideal (Proposição 2.1.15), obtemos

$$\begin{aligned}\pi_{q,p}(u_n) &= \pi_{q,p}\left(u_n \circ R^{-1} \circ R\right) \\ &\leq \pi_{q,p}\left(u_n \circ R^{-1}\right)\|R\| \\ &= \pi_{q,p}\left(u_n \circ R^{-1}\right)\end{aligned}$$

e segue que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}\left(u_n \circ R^{-1}\right) = \infty.$$

Além disso,

$$\left\|u_n \circ R^{-1}\right\| \leq \|u_n\| \,.\, \left\|R^{-1}\right\| < 2.$$

Assim, o operador

$$u_n \circ R^{-1} : X_n \to l_\infty^n$$

é tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}\left(u_n \circ R^{-1}\right) = \infty \tag{3.9}$$

e

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|u_n \circ R^{-1}\right\| < \infty. \tag{3.10}$$

Usando, em essência, o Teorema de Philips (veja Apêndice), garantimos que o operador linear contínuo $u_n \circ R^{-1} : X_n \to l_\infty^n$ possui uma extensão contínua $v_n : X \to l_\infty^n$ tal que

$$\|v_n\| = \left\|u_n \circ R^{-1}\right\|.$$

Note que, pela Proposição 2.1.14, temos $v_n \in \Pi_{q,p}(X, l_\infty^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, pelo Lema 3.1.4, obtemos

$$\pi_{q,p}\left(u_n \circ R^{-1}\right) \leq \pi_{q,p}(v_n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sendo assim, usando (3.9), é imediato que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}(v_n) = \infty$$

e, por outro lado, de (3.10), temos

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\| < \infty.$$

Considerando agora o novo operador $T \circ v_n : X \to Y_n$ e usando a Propriedade de Ideal (Proposição 2.1.15), obtemos

$$\begin{aligned}\pi_{q,p}(v_n) &= \pi_{q,p}\left(T^{-1} \circ T \circ v_n\right) \\ &\leq \left\|T^{-1}\right\| \pi_{q,p}(T \circ v_n) \\ &\leq 2\pi_{q,p}(T \circ v_n).\end{aligned}$$

Logo
$$\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}\ (v_n) \leq 2 \sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}\ (T \circ v_n)\,,$$
mostrando que
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}\ (T\circ v_n) = \infty.$$
Sendo assim, concluímos que o operador $T \circ v_n : X \to Y_n$ é tal que
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}\ (T\circ v_n) = \infty$$
e
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T\circ v_n\| < \infty.$$
Fazendo a composição de $T\circ v_n$ com o operador inclusão $i : Y_n \to Y$ obtemos o operador
$$i \circ T \circ v_n : X \to Y,$$
que desempenhará um papel central para a conclusão da demonstração do teorema. Note que, pela Proposição 2.1.14, o operador $i \circ T \circ v_n$ também é absolutamente (q, p)-somante já que sua imagem é o espaço de dimensão finita Y_n.

Como
$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|i\circ T\circ v_n(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T\circ v_n(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$
segue facilmente, da proposição que caracteriza operadores absolutamente somantes por desigualdades, que (veja raciocínio similar em [10, Theorem 2.5])
$$\pi_{q,p}\ (T\circ v_n) = \pi_{q,p}\ (i\circ T\circ v_n)\,.$$
Consequentemente
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{q,p}\ (i\circ T\circ v_n) = \infty \tag{3.11}$$
e, além disso,temos
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|i\circ T\circ v_n\| < \infty. \tag{3.12}$$
O operador identidade
$$id : \Pi_{q,p}\,(X, Y) \to \mathcal{L}(X;Y)$$
é contínuo pois $\|u\| \leq \pi_{q,p}\ (u)$ para todo $u \in \Pi_{q,p}\,(X, Y)$ (veja a Observação 2.1.10).

Logo, se fosse
$$\Pi_{q,p}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y),$$
então o operador identidade id seria bijetivo e, pelo Teorema da Aplicação Aberta (para o caso em que $r < \infty$), id^{-1} seria contínuo, isto é, existiria uma constante $C > 0$ tal que
$$\pi_{q,p}\ (u) \leq C\,\|u\|\,,$$

para todo $u \in \Pi_{q,p}(X,Y)$ e, como $i \circ T \circ v_n \in \Pi_{q,p}(X,Y)$, teríamos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_{q,p}(i \circ T \circ v_n) \leq C \|i \circ T \circ v_n\|,$$

contradizendo (3.11) e (3.12). Logo, concluímos que

$$\Pi_{q,p}(X,Y) \neq \mathcal{L}(X,Y).$$

O caso em que $r = \infty$ é simples. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o operador inclusão

$$u_n : l_\infty^n \to l_\infty^n.$$

Note que

$$\begin{aligned}\sup_n \left\|(e_j)_{j=1}^n\right\|_{l_p^w(l_\infty^n)} &\leq \sup_n \left\|(e_j)_{j=1}^n\right\|_{l_1^w(l_\infty^n)} \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{(l_\infty^n)'}=1} \sum_{j=1}^n |\varphi(e_j)| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{(c_0)'}=1} \sum_{j=1}^\infty |\varphi(e_j)| = 1\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\sup_n \left\|(e_j)_{j=1}^n\right\|_{l_q(l_\infty^n)} = \infty.$$

Logo

$$\begin{aligned}&\sup_n \pi_{q,p}(u_n) = \infty \text{ e} \\ &\|u_n\| = 1 \text{ para todo } n.\end{aligned}$$

Assim, procedendo como nos casos anteriores, chegamos à conclusão desejada. ■

Corolário 3.1.6 *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita com Y sem cotipo finito e $p \geq 1$. Então existe um operador linear contínuo de X em Y que não é p-somante.*

Demonstração. Pelo Teorema de Maurey e Pisier [1, Theorem 11.3.14], temos que l_{r_X} é finitamente representável em X. Como $r_X \geq 2$, temos

$$1 \leq p < r_X \quad \text{ou} \quad p \geq r_X'.$$

De fato, se $p \geq r_X \geq 2$, então

$$\frac{1}{r_X} \leq \frac{1}{2}$$

e, usando a equação

$$\frac{1}{r_X} + \frac{1}{r_X'} = 1$$

obtemos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{r_X'} \geq 1$$

donde segue que $r_X' \leq 2 \leq r_X \leq p$, mostrando que $p \geq r_X'$. Sendo assim, o teorema anterior nos garante a existência de um operador linear contínuo de X em Y que não é p-somante. ■

O próximo lema será importante para a demonstração do Teorema 3.1.8.

Lema 3.1.7 *Sejam X e Y espaços de Banach. Então*

(i) Para qualquer n natural e qualquer escolha finita de vetores $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, a seguinte desigualdade é válida:

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right\| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| .$$

(ii) Se X tem cotipo q, então o operador identidade de X é $(q,1)$-somante;

(iii) Se o operador identidade de X for $(q,1)$-somante, então

$$\Pi_{q,1}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y) .$$

Demonstração. (i) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, ..., x_n \in X$. Por $[7, Cor I.4]$ (Hahn-Banach), temos

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right\| &= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \varphi \left(\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right) \right| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) \varphi(x_j) \right| \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n} |r_j(t)| \, |\varphi(x_j)| \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j \right\| \leq \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)| .$$

(ii) Por hipótese, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

para qualquer escolha finita de vetores $x_1, x_2, ..., x_n \in X$.
Então

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int_0^1 \sup_{0\leq t\leq 1} \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \left(\sup_{0\leq t\leq 1} \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C \sup_{0\leq t\leq 1} \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\right\| \\
&\overset{(i)}{\leq} C \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|,
\end{aligned}$$

mostrando que o operador identidade de X é $(q, 1)$-somante.
(iii) Seja $u \in \mathcal{L}(X, Y)$. Por hipótese, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|,$$

para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ e $n \in \mathbb{N}$.
Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|u\|^q \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|u\| \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|u\| C \sup_{\varphi\in B_{X'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|,
\end{aligned}$$

mostrando que $u \in \Pi_{q,1}(X,Y)$, conforme Proposição 2.1.7. Logo $\mathcal{L}(X,Y) \subseteq \Pi_{q,1}(X,Y)$, e o resultado segue. Esse resultado nada mais é do que uma consequência direta da propriedade de ideal (Proposição 2.1.15). ■

Os próximos teoremas resolvem a seguinte questão quase completamente:

Para quais valores de p e q temos a coincidência

$$\Pi_{q,p}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$$

quando Y for um espaço sem cotipo finito?

Teorema 3.1.8 (Botelho - Pellegrino) *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita com Y sem cotipo finito. Então:*

(a) $\Pi_{q,p}(X,Y) \neq \mathcal{L}(X,Y)$ *sempre que*

$$\left[1 \leq q < r_X \quad ou \quad p \geq r_X'\right]$$

ou

$$\left[1 < p < r_X' \quad e \quad q < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X'}\right)^{-1}\right]$$

(b) $\Pi_{q,p}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$ *sempre que*

$$\left[p = 1 \quad e \quad q > r_X\right]$$

ou

$$\left[1 < p < r_X' \quad e \quad q > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X'}\right)^{-1}\right].$$

Demonstração. (a) Como l_{r_X} é finitamente representável em X, o caso em que $1 \leq q < r_X$ ou $p \geq r_X'$ segue direto do Teorema 3.1.5.

Agora, vamos analisar o caso em que $1 < p < r_X'$ e $q < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X'}\right)^{-1}$.

Do caso precedente sabemos que

$$\Pi_{s,r_X'}(X,Y) \neq \mathcal{L}(X,Y),$$

para todo $s \geq r_X'$.

Sendo assim, basta provarmos que

$$\Pi_{q,p}(X,Y) \subseteq \Pi_{s,r_X'}(X,Y), \tag{3.13}$$

para s suficientemente grande.

Como $q < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X'}\right)^{-1}$, temos que

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X'}\right) = \frac{1}{r_X'},$$

e, tomando s suficientemente grande, de forma que $s > q$ e $s > r'_X$ e ainda

$$\frac{1}{s} < \frac{1}{r'_X} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right),$$

obtemos

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r'_X} - \frac{1}{s}$$

Consequentemente o Teorema da Inclusão nos garante (3.13), o que prova o item (a).

(b) Se $p = 1$ e $q > r_X$, sabemos que X tem cotipo q. Sendo assim, o Lema 3.1.7 item (ii) nos garante que o operador identidade de X é $(q, 1)$-somante e, pelo item (iii) do mesmo lema, temos $\Pi_{q,1}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

Portanto

$$\Pi_{q,1}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y) \quad \text{sempre que} \quad q > r_X. \tag{3.14}$$

Por outro lado, se $1 < p < r'_X$ e $q > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r'_X}\right)^{-1}$, então

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \frac{1}{r'_X} < 1 - \frac{1}{r'_X} = \frac{1}{r_X},$$

mostrando que $r_X < q$. Agora, escolha $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno de forma que $r_X + \varepsilon_1 \leq q$.

Como

$$1 - \frac{1}{r_X} = \frac{1}{r'_X} < \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

podemos escolher um $\varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno tal que $r_X + \varepsilon_2 \leq q$ e

$$1 - \frac{1}{r_X + \varepsilon_2} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Se tomarmos $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, então

$$r_X + \varepsilon_0 \leq q \quad \text{e} \quad \frac{1}{1} - \frac{1}{r_X + \varepsilon_0} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Consequentemente, o Teorema da Inclusão nos garante que

$$\Pi_{r_X + \varepsilon_0, 1}(X, Y) \subseteq \Pi_{q,p}(X, Y).$$

Por outro lado, de (3.14), temos

$$\Pi_{r_X + \varepsilon_0, 1}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y).$$

Portanto

$$\Pi_{q,p}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y).$$

■

Observe que os únicos casos deixados abertos foram:

i) $p = 1$ e $q = r_X$;

ii) $1 < p < r'_X$ e $q = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r'_X}\right)^{-1}$.

Quando o espaço X assume o cotipo r_X os casos (i) e (ii) acima são resolvidos pelo

Teorema 3.1.9 (Botelho - Pellegrino) *Sejam X um espaço de Banach de dimensão infinita com cotipo r_X e Y um espaço de Banach de dimensão infinita sem cotipo finito. Então*

$$\Pi_{q,p}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y) \tag{3.15}$$

se, e somente se,

$$[p = 1 \quad e \quad q \geq r_X] \tag{3.16}$$

ou

$$\left[1 < p < r_X^{'} \quad e \quad q \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{'}}\right)^{-1}\right]. \tag{3.17}$$

Demonstração. Como X assume o cotipo r_X, os itens (ii) e (iii) do Lema 3.1.7 garantem que

$$\Pi_{r_X,1}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y).$$

Além disso, quando $q > r_X$, do item (b) do Teorema 3.1.8 temos que

$$\Pi_{q,1}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y).$$

Logo (3.15) vale sempre que tivermos (3.16).

Agora vamos provar que (3.15) é válida sempre que (3.17) ocorrer.

Assuma que $1 < p < r_X^{'}$. De $1 < p$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{'}} &= \frac{1}{p} - \left(1 - \frac{1}{r_X}\right)\\ &< 1 - \left(1 - \frac{1}{r_X}\right)\\ &= \frac{1}{r_X},\end{aligned}$$

mostrando que

$$r_X < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{'}}\right)^{-1}.$$

Além disso, temos

$$1 - \frac{1}{r_X} = \frac{1}{r_X^{'}} = \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{'}}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{'}}\right)^{-1}}$$

e, por maior razão,

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{r_X} \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{'}}\right)^{-1}}.$$

Como $p < r_X^{'}$, isto é, $\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{'}} > 0$ e

$$p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{'}}\right) = 1 - \frac{p}{r_X^{'}} < 1,$$

obtemos

$$p < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{'}}\right)^{-1}.$$

Consequentemente, pelo Teorema da Inclusão,

$$\Pi_{r_X,1}(X,Y) \subseteq \Pi_{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r_X^{'}}\right)^{-1},p}(X,Y)$$

e, pelos itens (ii) e (iii) do Lema 3.1.7, temos também

$$\Pi_{r_X,1}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y).$$

Logo

$$\Pi_{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r_X^{'}}\right)^{-1},p}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y).$$

Além disso, quando $q > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{'}}\right)^{-1}$, o Teorema da Inclusão nos garante que

$$\mathcal{L}(X,Y) = \Pi_{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r_X^{'}}\right)^{-1},p}(X,Y) \subseteq \Pi_{q,p}(X,Y).$$

Portanto (3.17) implica em (3.15).

A recíproca segue do Teorema 3.1.8 (a). De fato, supondo que $\Pi_{q,p}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$ e usando a contrapositiva do item (a) deste teorema, obtemos

$$\left(q \geq r_X \text{ e } 1 \leq p < r_X^{'}\right)$$

e

$$\left[(p = 1 \text{ ou } p \geq r_X^{\prime}) \text{ ou } q \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{\prime}}\right)^{-1}\right]$$

ou, equivalentemente

$$\left[\left(q \geq r_X \text{ e } 1 \leq p < r_X^{'}\right) \text{ e } (p = 1 \text{ ou } p \geq r_X^{\prime})\right]$$

ou

$$\left[\left(q \geq r_X \text{ e } 1 \leq p < r_X^{'}\right) \text{ e } q \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_X^{\prime}}\right)^{-1}\right].$$

Como $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r'_X}\right)^{-1} \geq r_X$, as expressões acima equivalem a

$$p = 1 \text{ e } q \geq r_X$$

ou

$$1 \leq p < r_X^{'} \text{ e } q \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r'_X}\right)^{-1}$$

e, como $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r'_X}\right)^{-1} = r_X$ para $p = 1$, obtemos finalmente

$$p = 1 \text{ e } q \geq r_X$$

ou

$$1 < p < r_X^{'} \text{ e } q \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r'_X}\right)^{-1}$$

■

Corolário 3.1.10 (Botelho - Pellegrino) *Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Então*

$$r_X = \inf\{q \; ; \Pi_{q,1}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)\}$$

para todo espaço de Banach de dimensão infinita Y sem cotipo finito.

Demonstração. Usando a contrapositiva do item (a) do Teorema 3.1.8, temos

$$\inf\{q \; ; \Pi_{q,1}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)\} \geq r_X$$

e, pelo Teorema 3.1.8 (b), temos

$$\inf\{q \; ; \Pi_{q,1}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)\} \leq r_X.$$

■

3.2 Caso em que o contradomínio pode ter cotipo finito

Os resultados principais desta seção são devidos a Botelho, Pellegrino e Rueda, e aparecem em [6]

Definição 3.2.1 *Seja* $2 \leq q < \infty$. *Dizemos que o espaço de Banach* X *fatora finitamente a inclusão* $l_q \hookrightarrow l_\infty$ *se existem constantes* $C_1, C_2 > 0$ *tais que, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existem* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *tais que*

$$C_1 \left\| (a_j)_{j=1}^n \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \leq C_2 \left\| (a_j)_{j=1}^n \right\|_q$$

para todos $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$.

Se X for um espaço de Banach, definimos $s_X, t_X \in [2, +\infty]$ por

$$s_X := \sup\{2 \leq q \leq \infty \ ; \ X \text{ fatora finitamente } l_q \hookrightarrow l_\infty\}$$

$$t_X := \inf\{2 \leq q \leq \infty \ ; \ id_X \in \Pi_{q,1}(X, X)\}.$$

O seguinte teorema clássico, devido a B. Maurey e G. Pisier, provado em [10, Theorem 14.5] , relaciona r_X, s_X e t_X quando o espaço de Banach X tem dimensão infinita.

Teorema 3.2.2 (Maurey-Pisier) *Para todo espaço de Banach de dimensão infinita* X *, temos*

$$r_X = s_X = t_X.$$

Observação 3.2.3 *É importante saber que qualquer espaço de Banach de dimensão infinita* X *fatora finitamente a inclusão* $l_{r_X} \hookrightarrow l_\infty$*, ou seja, o supremo da definição de* s_X *é atingido (veja página 226 de [10]).*

No que segue vamos denotar por $\mathcal{A}(X, Y)$ o subespaço de $\mathcal{L}(X, Y)$ formado pelo fecho, em relação à topologia proveniente da norma usual de $\mathcal{L}(X, Y)$, do espaço dos operadores de posto finito que são contínuos.

Teorema 3.2.4 (Botelho - Pellegrino - Rueda) *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach de dimensão infinita,* $2 \leq p < \infty$ *e* $q, r > 0$ *tais que* $r_Y \geq p > q \geq r$. *Se*

$$\mathcal{A}(X, Y) \subseteq \Pi_{q,r}(X, Y),$$

então id_X *é* $\left(\frac{pq}{p-q}, r\right)$*-somante.*

Demonstração. Sendo Y de dimensão infinita, o Teorema 3.2.2 nos garante que

$$r_Y = \sup\{2 \leq q \leq \infty \ ; \ Y \text{ fatora finitamente } l_q \hookrightarrow l_\infty\}$$

e este supremo é atingido.

Como Y fatora finitamente a inclusão $l_{r_Y} \hookrightarrow l_\infty$ existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $y_1, y_2, ..., y_n \in Y$ com

$$C_1 \left\|(a_j)_{j=1}^n\right\|_\infty \leq \left\|\sum_{j=1}^n a_j y_j\right\| \leq C_2 \left\|(a_j)_{j=1}^n\right\|_{r_Y} \leq C_2 \left\|(a_j)_{j=1}^n\right\|_p \tag{3.18}$$

para todos $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$, onde a última desigualdade de (3.18) resulta de $\|.\|_{r_Y} \leq \|.\|_p$, pois $r_Y \geq p$.

Como $\|.\| \leq \pi_{q,r}(.)$, $\mathcal{A}(X,Y) \subseteq \Pi_{q,r}(X,Y)$ e $\mathcal{A}(X,Y)$ é fechado com relação à norma $\|.\|$, segue facilmente que $\mathcal{A}(X,Y)$ também é fechado com relação a norma $\pi_{q,r}(.)$. Sendo assim, $(\mathcal{A}(X,Y), \pi_{q,r}(.))$ e $(\mathcal{A}(X,Y), \|.\|)$ são espaços de Banach e a identidade

$$id_{\mathcal{A}} : (\mathcal{A}(X,Y), \pi_{q,r}(.)) \to (\mathcal{A}(X,Y), \|.\|)$$

é contínua. Consequentemente, o Teorema da Aplicação Aberta nos garante que a inversa $id_{\mathcal{A}}^{-1}$ é contínua, isto é, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\pi_{q,r}(u) \leq K \|u\| \text{ , para todo } u \in \mathcal{A}(X,Y). \tag{3.19}$$

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, ..., x_n \in X$. Por [7, Cor I.3] (Hahn-Banach), existem $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \in X'$ tais que

$$\|\varphi_j\| = 1 \text{ e } \varphi_j(x_j) = \|x_j\| \text{ , } j = 1, 2, ..., n.$$

Escolhendo arbitrariamente $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ de forma que

$$\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^s = 1, \text{ com } s = \frac{p}{q}, \tag{3.20}$$

e definindo $u : X \to Y$ por

$$u(x) = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x) y_j \text{ , para todo } x \in X,$$

temos claramente que u tem posto finito e $u \in \mathcal{A}(X,Y)$.

Além disso, para todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}
\|u(x)\| &= \left\|\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x) y_j\right\| \\
&\overset{(3.18)}{\leq} C_2 \left\|\left(|\lambda_j|^{\frac{1}{q}} \varphi_j(x)\right)_{j=1}^{n}\right\|_p \\
&= C_2 \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^{\frac{p}{q}} |\varphi_j(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_2 \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^{\frac{p}{q}} \|x\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_2 \|x\| \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C_2 \|x\|,
\end{aligned}$$

mostrando que

$$\|u\| \leq C_2 \tag{3.21}$$

e, de (3.19) e (3.21) segue que

$$\pi_{q,r}(u) \leq KC_2 \tag{3.22}$$

Usando a primeira desigualdade de (3.18), obtemos, para cada $j = 1, 2, ..., n$,

$$\begin{aligned}
\|u(x_j)\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{\frac{1}{q}} \varphi_i(x_j) y_i\right\| \qquad (3.23) \\
&\geq C_1 \left\|\left(|\lambda_i|^{\frac{1}{q}} \varphi_i(x_j)\right)_{i=1}^{n}\right\|_\infty \\
&= C_1 \sup\left\{|\lambda_i|^{\frac{1}{q}} |\varphi_i(x_j)| \ ;\ i = 1, ..., n\right\} \\
&\geq C_1 |\lambda_j|^{\frac{1}{q}} |\varphi_j(x_j)| \\
&= C_1 |\lambda_j|^{\frac{1}{q}} \|x_j\|.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|\,\|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j=1}^{n}\left(|\lambda_j|^{\frac{1}{q}}\,\|x_j\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.24)\\
&\overset{(3.23)}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n}\left(C_1^{-1}\,\|u\,(x_j)\|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= C_1^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\|u\,(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq C_1^{-1}\pi_{q,r}(u)\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\overset{(3.22)}{\leq} C_1^{-1}C_2K\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Note que a desigualdade (3.24) acima é válida para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^s = 1 \ \text{ com } s = \frac{p}{q}.$$

Como

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{\frac{s}{s-1}} = 1,$$

então $l^n_{\frac{s}{s-1}}$ é isometricamente isomorfo a $(l^n_s)'$ e o isomorfismo é dado por

$$z = (z_j)_{j=1}^n \mapsto \varphi_z : l^n_s \to \mathbb{K}$$

onde

$$\varphi_z\,(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j z_j \ \text{ para todo } w = (w_j)_{j=1}^n \in l^n_s$$

e

$$\left\|(z_j)_{j=1}^n\right\|_{\frac{s}{s-1}} = \|\varphi_z\| = \sup_{\|w\|_s=1}\left|\sum_{j=1}^{n} w_j z_j\right|.$$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^{\frac{s}{s-1}q}\right)^{\frac{1}{\frac{s}{s-1}}} &= \left\|\left(\|x_j\|^q\right)_{j=1}^{n}\right\|_{\frac{s}{s-1}} \\
&= \sup_{\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^s=1}\left|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\|x_j\|^q\right| \\
&\leq \sup_{\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^s=1}\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|\,\|x_j\|^q \\
&\overset{(3.24)}{\leq} \left[C_1^{-1}C_2K\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]^q
\end{aligned}$$

e segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^{\frac{s}{s-1}q}\right)^{\frac{1}{\frac{s}{s-1}q}} \leq C_1^{-1}C_2K\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Como

$$\frac{s}{s-1}q=\frac{pq}{p-q}$$

e a escolha de n natural e $x_1,x_2,...,x_n\in X$ é arbitrária, concluímos que id_X é $\left(\frac{pq}{p-q},r\right)$-somante. ■

Corolário 3.2.5 (Botelho - Pellegrino - Rueda) *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita, $2\leq p<\infty$ e $q>1$ tais que $r_Y\geq p>q$. Se*

$$\frac{pq}{p-q}>2 \quad e \quad \mathcal{A}(X,Y)\subseteq\Pi_{q,1}(X,Y),$$

então X tem cotipo $\frac{pq}{p-q}$.

Demonstração. Segue diretamente do teorema anterior, com $r=1$, que id_X é $\left(\frac{pq}{p-q},1\right)$-somante. Como $\frac{pq}{p-q}>2$, usando o teorema clássico de Talagrand (Teorema 2.3.5) segue o resultado. ■

O resultado acima é uma melhora interessante do caso linear de [19, Corollary 2] porque lá há a exigência adicional de que X possua uma base de Schauder; mais ainda, deve existir uma base de Schauder incondicional para X. O corolário seguinte é uma melhora significativa do caso linear de [19, Theorem 7] e [5, Corollary 2.5].

Corolário 3.2.6 (Botelho - Pellegrino - Rueda) *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. Se Y não tem cotipo finito e*

$$\mathcal{A}(X,Y)\subseteq\Pi_{q,1}(X,Y),$$

então $r_X\leq q$.

Demonstração. Como $r_Y = \infty$, o Teorema 3.2.4 nos assegura que id_X é $\left(\frac{pq}{p-q}, 1\right)$-somante para todo $p > q$, com p arbitrariamente grande.

Como

$$\lim_{p\to\infty} \frac{pq}{p-q} = q,$$

para todo $\varepsilon > 0$ sempre podemos encontrar $p \geq 2$ tal que

$$\frac{pq}{p-q} < q + \varepsilon$$

e, pelo Teorema da Inclusão, temos

$$\Pi_{\frac{pq}{p-q},1}(X, Y) \subseteq \Pi_{q+\varepsilon,1}(X, Y).$$

Consequentemente, id_X é $(q + \varepsilon, 1)$-somante para todo $\varepsilon > 0$.

Vamos mostrar que $q \geq 2$.

De fato, se fosse $q < 2$ existiria um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $q + \varepsilon_0 < 2$; logo

$$1 - \frac{1}{q + \varepsilon_0} < \frac{1}{2}$$

e, pelo Teorema 2.3.4, id_X não seria $(q + \varepsilon_0, 1)$-somante.

Como X tem dimensão infinita, o Teorema 3.2.2 nos garante que

$$r_X = \inf\{2 \leq s \leq \infty\ ;\ id_X \text{ é } (s, 1)\text{-somante}\}$$

e, como $q + \varepsilon$ pertence ao conjunto $\{2 \leq s \leq \infty\ ;\ id_X$ é $(s, 1)$-somante$\}$, temos que $r_X \leq q + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Logo $r_X \leq q$. ■

Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita com uma base de Schauder incondicional normalizada (x_n), o seguinte parâmetro pode ser definido:

$$\mu_{(x_n)} = \inf\{t\ ;\ (a_j)_{j=1}^{\infty} \in l_t \text{ sempre que } \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in X\}.$$

Em [19, Theorem 7] está demonstrado que se Y não tem cotipo finito e $\Pi_{q,1}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$, então $\mu_{(x_n)} \leq q$. O Corolário 3.2.6 melhora este resultado nos seguintes sentidos:

- Uma base de Schauder não é necessária no Corolário 3.2.6;

- Na situação atual, basta termos $\mathcal{A}(X, Y) \subseteq \Pi_{q,1}(X, Y)$ ao invés de $\Pi_{q,1}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.

Observação 3.2.7 *Se X tem uma base de Schauder incondicional normalizada, a conclusão $r_X \leq q$ do Corolário 3.2.6 é mais forte do que conclusão $\mu_{(x_n)} \leq q$ de [19, Theorem 7].*

De fato, se $r_X \leq q$, sabemos que a id_X é $(q+\varepsilon, 1)$-somante, para todo $\varepsilon > 0$. Seja (x_n) uma base de Schauder normalizada de X. Lembre-se que um operador $(q+\varepsilon, 1)$-somante leva sequências incondicionalmente somáveis em sequências fortemente $(q+\varepsilon)$ somáveis (veja [20]). Então, se

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in X,$$

essa convergência é incondicional, isto é, a sequência $(a_j x_j)$ é incondicionalmente somável. Logo

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^{q+\varepsilon} = \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j x_j\|^{q+\varepsilon} = \sum_{j=1}^{\infty} \|id_X(a_j x_j)\|^{q+\varepsilon} < \infty,$$

e daí segue que

$$\mu_{(x_n)} \leq q.$$

Agora vamos provar os resultados principais.

Teorema 3.2.8 (Botelho - Pellegrino - Rueda) *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. Se*

$$r_Y \geq p > q \geq r > \frac{2pq}{pq + 2p - 2q},$$

então

$$\mathcal{A}(X,Y) \nsubseteq \Pi_{q,r}(X,Y).$$

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{A}(X,Y) \subseteq \Pi_{q,r}(X,Y)$. Como $p > q$, temos que $pq + 2p - 2q > 0$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} q &> \frac{2pq}{pq + 2p - 2q} \\ &\Leftrightarrow pq^2 + 2pq - 2q^2 > 2pq \\ &\Leftrightarrow pq^2 - 2q^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow p > 2. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 3.2.4, segue que id_X é $\left(\frac{pq}{p-q}, r\right)$-somante e, tendo em vista que $id_X \neq 0$, temos $r \leq \frac{pq}{p-q}$. Sendo assim, usando a contrapositiva do Teorema 2.3.4, obtemos

$$\frac{1}{r} - \frac{p-q}{pq} \geq \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$r \leq \frac{2pq}{pq + 2p - 2q},$$

contradizendo a hipótese. ■

Definição 3.2.9 *Um espaço de Banach X é dito super reflexivo se nenhum espaço não reflexivo é finitamente representável em X.*

Um resultado clássico devido a Davis e Johnson [9] afirma que se X for um espaço de Banach de dimensão infinita super reflexivo, então existe um operador linear compacto não q-somante de X em Y, para todo espaço de Banach Y de dimensão infinita. Vejamos que para operadores com imagem em um espaço de Banach Y com $r_Y > \max\{2, q\}$ não é preciso impor qualquer condição sobre o domínio X.

Corolário 3.2.10 (Botelho - Pellegrino - Rueda) *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita com $r_Y > \max\{2, q\}$. Então*

$$\mathcal{A}(X, Y) \nsubseteq \Pi_q (X, Y).$$

Demonstração. É consequência imediata do teorema anterior. Basta fazer $r = q$, $p = r_Y$ e notar que

$$r_Y \geq p > q > \frac{2pq}{pq + 2p - 2q}.$$

■

Um teorema do famoso artigo [16, Proposição 8.1 (2)] de Lindenstrauss e Pelczyński assegura que se X e Y são de dimensão infinita e $\Pi_1 (X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$, então $r_X = 2$. A parte (c) da próxima proposição melhora este resultado no sentido de que uma conclusão mais forte é obtida de uma hipótese mais fraca.

Proposição 3.2.11 (Botelho - Pellegrino - Rueda) *a) Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Se existir um espaço de Banach de dimensão infinita Y com cotipo finito tal que*

$$\mathcal{A}(X, Y) \subseteq \Pi_{\frac{2r_Y}{2+r_Y},1} (X, Y),$$

então X tem a "propriedade de Orlicz", isto é, id_X é $(2,1)$-somante.

b) Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita e

$$\mathcal{A}(X, Y) \subseteq \Pi_r (X, Y),$$

para algum espaço de Banach de dimensão infinita Y e algum $1 \leq r < 2$, então $r_Y = 2$.

c) Se X e Y são espaços de Banach de dimensão infinita e

$$\mathcal{A}(X, Y) \subseteq \Pi_1 (X, Y),$$

então $r_X = r_Y = 2$.

Demonstração. a) Fazendo

$$p = r_Y, \; q = \frac{2p}{2+p} \;\; \text{e} \;\; r = 1,$$

obtemos $r_Y = p > q \geq r = 1$ e o resultado segue do Teorema 3.2.4 visto que $\frac{pq}{p-q} = 2$.

b) Já sabemos que $r_Y \geq 2$. Suponhamos que $r_Y > 2$. Fazendo $p = r_Y$ e $q = r$, obtemos

$$r_Y = p > q = r > \frac{2pq}{pq + 2p - 2q}$$

e, pelo Teorema 3.2.8, resulta

$$\mathcal{A}(X,Y) \nsubseteq \Pi_r\left(X,Y\right),$$

contradizendo a hipótese.

c) Pondo $r = 1$ no item (b) concluímos que $r_Y = 2$ e, pelo item (a), segue que id_X é $(2,1)$-somante. Sendo assim, usando o Teorema 3.2.2, obtemos

$$r_X = \inf\{2 \leq q \leq \infty \; ; \; id_X \in \Pi_{q,1}\left(X,X\right)\} \leq 2,$$

e segue que $r_X = 2$. ■

A seguinte proposição está provada no artigo de G. Bennett [3, Proposição 5.2].

Proposição 3.2.12 (Bennett) *Sejam* $1 \leq p, r \leq \infty$. *Então*

$$\Pi_{q,r}\left(l_1, l_p\right) = \mathcal{L}(l_1, l_p)$$

para todo q *nas seguintes condições:*

i) $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| \leq \frac{1}{r} - \frac{1}{q}$, *sempre que* $r \leq 2$;
ii) $q \geq p'\frac{r}{2}$, *sempre que* $p \leq 2 \leq r$;
iii) $q = r$, *sempre que* $2 \leq p < r$;
iv) $q \geq p$, *sempre que* $2 \leq r < p$;
v) $q > r$, *sempre que* $2 < p = r < \infty$;
vi) $q = \infty$, *sempre que* $p = r = \infty$.

Estes resultados são os melhores possíveis no sentido de que, se q *não satisfaz a desigualdade apropriada acima então* $\Pi_{q,r}\left(l_1, l_p\right) \subsetneq \mathcal{L}(l_1, l_p)$.

Em particular, o resultado de Bennett implica no seguinte corolário:

Corolário 3.2.13 (Bennett) *Valem os seguintes resultados:*

a) $\Pi_{q,1}(l_1, l_p) \subsetneq \mathcal{L}(l_1, l_p)$ *sempre que* $2 \leq p < \infty$ *e* $q < \frac{2p}{2+p}$;
b) $\Pi_{q,2}(l_1, l_p) \subsetneq \mathcal{L}(l_1, l_p)$ *sempre que* $2 \leq p < \infty$ *e* $q < p$;
c) $\Pi_{q,1}(l_1, l_\infty) \subsetneq \mathcal{L}(l_1, l_\infty)$ *sempre que* $1 \leq q < 2$.

Demonstração. Note que, pelo item (i) da proposição anterior, temos

$$\Pi_{q,r}\left(l_1, l_p\right) \subsetneq \mathcal{L}(l_1, l_p)$$

sempre que

$$r \leq 2 \Rightarrow \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| > \frac{1}{r} - \frac{1}{q}.$$

a) Segue do resultado acima, com $r = 1$, pois de $2 \leq p < \infty$ temos $\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \geq 0$ e, consequentemente

$$q < \frac{2p}{2+p} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| > 1 - \frac{1}{q}.$$

b) Como $\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \geq 0$, temos

$$q < p \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| > \frac{1}{2} - \frac{1}{q},$$

e o resultado segue.

c) Sendo $1 \leq q < 2$, temos que $\frac{1}{2} > 1 - \frac{1}{q}$, e o resultado segue do item (i) da proposição acima com $r = 1$ e $p = \infty$. ■

A seguinte proposição melhora o corolário acima no sentido de que l_1 pode ser substituido por qualquer espaço de Banach de dimensão infinita X, l_p pode ser substituido por qualquer espaço de Banach de dimensão infinita Y com $r_Y = p$ e a existência de um operador linear não absolutamente (q, r)-somante $(r = 1, 2)$ pode ser substituida pela condição

$$\mathcal{A}(X, Y) \nsubseteq \Pi_{q,r}\left(X, Y\right).$$

Observação 3.2.14 *Note que* $\mathcal{A}(X, Y) \nsubseteq \Pi_{q,r}\left(X, Y\right)$ *implica* $\Pi_{q,r}(X, Y) \subsetneq \mathcal{L}(X, Y)$.

Proposição 3.2.15 (Botelho - Pellegrino - Rueda) *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita.*

a) Se $r_Y < \infty$, então

$$\mathcal{A}(X, Y) \nsubseteq \Pi_{q,1}\left(X, Y\right)$$

para todo $1 \leq q < \frac{2r_Y}{2+r_Y}$.

b) Se $r_Y < \infty$, então

$$\mathcal{A}(X, Y) \nsubseteq \Pi_{q,2}\left(X, Y\right)$$

para todo $2 \leq q < r_Y$.

c) Se $r_Y = \infty$, então

$$\mathcal{A}(X, Y) \nsubseteq \Pi_{q,1}\left(X, Y\right)$$

para todo $1 \leq q < 2$.

Demonstração. a) Como

$$q < \frac{2p}{2+p} \Leftrightarrow 1 > \frac{2pq}{pq+2p-2q},$$

fazendo $p = r_Y$ e $r = 1$, obtemos

$$r_Y = p > q \geq 1 > \frac{2pq}{pq+2p-2q},$$

e o resultado segue do Teorema 3.2.8.

b) É consequência imediata do Teorema 3.2.8 com $p = r_Y$ e $r = 2$ pois, neste caso, temos

$$r_Y = p > q \geq 2 > \frac{2pq}{pq+2p-2q}.$$

c) Suponhamos que $1 \leq q < 2$ e que

$$\mathcal{A}(X,Y) \subseteq \Pi_{q,1}(X,Y).$$

Sendo assim, pelo Corolário 3.2.6, obtemos o absurdo $r_X \leq q < 2$, pois o nosso espaço X não é o trivial. ■

O próximo resultado ilustra a importância do conceito de cotipo na teoria dos operadores absolutamente somantes.

Proposição 3.2.16 (Botelho - Pellegrino - Rueda) *Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. Seja $2 \leq r < r_Y$ e $q \geq r$ tais que*

$$\Pi_{q,r}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y).$$

Então

$$\Pi_{q,r}(l_1, l_{r_Y}) = \mathcal{L}(l_1, l_{r_Y}).$$

Demonstração. Suponhamos que $\Pi_{q,r}(l_1, l_{r_Y}) \subsetneq \mathcal{L}(l_1, l_{r_Y})$. Sendo $2 \leq r < r_Y$ e $q \geq r$, o item (iv) da Proposição 3.2.12 (com $p = r_Y$) nos garante que $q < r_Y$. Sendo assim, temos $r_Y = p > q \geq r$. Além disso, temos também

$$r > \frac{2pq}{pq+2p-2q},$$

pois $r \geq 2$ e

$$2 > \frac{2pq}{pq+2p-2q} \Leftrightarrow (p-q) > 0.$$

Então, pelo Teorema 3.2.8, obtemos

$$\mathcal{A}(X,Y) \nsubseteq \Pi_{q,r}(X,Y),$$

contradizendo a hipótese (veja Observação 3.2.14 acima). ■

Capítulo 4

Apêndice

Teorema 4.0.17 (Teorema de Phillips) *Seja V um subespaço de um espaço vetorial normado E, e seja $T \in \mathcal{L}(V; l_\infty)$. Então existe $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E; l_\infty)$, com norma igual à de T e que estende T.*

Demonstração. Note que existem $\varphi_n \in V'$ tais que

$$T(x) = (\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}$$

para todo $x \in V$, com

$$\sup_n \|\varphi_n\| = \|T\|\,.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada φ_n obtemos uma extensão $\widetilde{\varphi_n}$ com $\|\varphi_n\| = \|\widetilde{\varphi_n}\|$. A extensão procurada será

$$\widetilde{T}(x) = (\widetilde{\varphi_n}(x))_{n=1}^{\infty}.$$

■

Proposição 4.0.18 *Seja $(a_{mn})_{m,n}$ uma família de números reais não-negativos. Então:*

a) Se $\sup\limits_m \left[\sup\limits_n a_{mn}\right] = \infty$, então $\sup\limits_n \left[\sup\limits_m a_{mn}\right] = \infty$.

b) Se $\sup\limits_m \left[\sup\limits_n a_{mn}\right] = L < \infty$, então $\sup\limits_n \left[\sup\limits_m a_{mn}\right] = L$.

Demonstração. a) Suponhamos que $\sup\limits_m \left[\sup\limits_n a_{mn}\right] = \infty$. Dado $K > 0$, existe m_0 tal que $\sup\limits_n a_{m_0 n} > K$. Consequentemente, existe n_0 tal que $a_{m_0 n_0} > K$ e segue que $\sup\limits_m a_{m n_0} > K$. Logo $\sup\limits_n \left[\sup\limits_m a_{mn}\right] > k$. Portanto $\sup\limits_n \left[\sup\limits_m a_{mn}\right] = \infty$.

b) Suponhamos que $\sup\limits_{m}\left[\sup\limits_{n} a_{mn}\right] = L < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe m_0 tal que $\sup\limits_{n} a_{m_0 n} > L - \varepsilon$. Consequentemente, existe n_0 tal que $a_{m_0 n_0} > L - \varepsilon$. Logo

$$\sup_{n}\left[\sup_{m} a_{mn}\right] \geq \sup_{m} a_{mn_0} \geq a_{m_0 n_0} > L - \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, segue que

$$\sup_{n}\left[\sup_{m} a_{mn}\right] \geq L. \tag{4.1}$$

Note que, pelo item (a), é imediato que

$$\sup_{n}\left[\sup_{m} a_{mn}\right] < \infty.$$

Por outro lado, segue diretamente da hipótese que $\sup\limits_{n} a_{mn} \leq L$, para todo m. Consequentemente, $a_{mn} \leq L$, para todo m e todo n. Então $\sup\limits_{m} a_{mn} \leq L$, para todo n. Logo

$$\sup_{n}\left[\sup_{m} a_{mn}\right] \leq L. \tag{4.2}$$

Portanto, de (4.1) e (4.2), segue que

$$\sup_{n}\left[\sup_{m} a_{mn}\right] = L.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] F. Albiac and N. Kalton, *Topics in Banach Spaces Theory,* Springer Verlag, 2006.

[2] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley & Sons, Inc. (1995).

[3] G. Bennett, *Schur multipliers,* Duke Math. Journal **44** (1977), 603-639.

[4] G. Botelho, *Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Proc. Roy. Irish Acad Sect. A **97** (1997), 145-153.

[5] G. Botelho and D. Pellegrino, *Absolutely summing linear operators into spaces with no finite cotype*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **16** (2009), 373-378.

[6] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda, *Cotype and absolutely summing linear operators*, a aparecer em Math Z.

[7] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle, théorie et applications*, Dunod, Paris, 2005.

[8] B. Carl, *Absolut* $(p,1)$*-summierende identische Operatoren von* ℓ_u *nach* ℓ_v, Math. Nachr. **63** (1974), 353-360.

[9] W. J. Davis and W. B. Johnson, *Compact non-nuclear operators*, Studia Math. **51** (1974), 81-85.

[10] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1995.

[11] E. Dubinsky, A. Pelczyński and H. P. Rosenthal, *On Banach spaces* X *for which* $\Pi_2(L_\infty, X) = B(L_\infty, X)$, Studia Math. **44** (1972), 617-648.

[12] D. J. H. Garling, *Diagonal mappings between sequence spaces*, Studia Math. **51** (1974), 129-138.

[13] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1978.

[14] S. Kwapień, *On a theorem of L. Schwarz and its applications to absolutely summing operators*, Studia Math. **38** (1970), 193-201.

[15] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, 2002.

[16] J. Lindenstrauss and A. Pelczyński, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275-326.

[17] B. Maurey and G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. **58** (1976), 45-90.

[18] M. A. G. Monteiro, *Estimativas para aplicações multilineares entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2009.

[19] D. Pellegrino, *Cotype and absolutely summing homogeneous polynomials in $\mathcal{L}_p$ spaces*, Studia Math. **157** (2003), 121-131.

[20] J. Santos, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[21] M. Talagrand, *Cotype and $(q, 1)$-summing norms in Banach spaces*, Invent. Math. **110** (1992), 545-556.