Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

O Teorema da Dominação de Pietsch Unificado

Thiago Ginez Velanga Moreira

2010

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

O Teorema da Dominação de Pietsch Unificado

por

Thiago Ginez Velanga Moreira

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

Fevereiro de 2010
João Pessoa-PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

O Teorema da Dominação de Pietsch Unificado

por

Thiago Ginez Velanga Moreira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

____

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino - UFPB (Orientador)

____

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

____

Prof. Dr. Jaime Alves Barbosa Sobrinho - UFCG

____

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (Suplente)

Aos meus pais, Dorosnil e Carmen,
e aos meus avós (in memorian),
Ginez Velanga e Anna Inês.

Agradecimentos

Aos meus pais *Dorosnil Alves Moreira* e *Carmen Tereza Velanga*, personagens principais de minha vida, aos quais devo tudo o que fui, sou e ainda poderei ser.

A minha namorada *Carolay M. L. Reynolds* pela dedicação, apoio, companheirismo, compreensão, paciência e presença. Demonstrações de carinho das quais tenho sido fartamente abastecido desde meu primeiro dia de trabalho em João Pessoa.

Ao amigo *Hugo Lobo Mejia* (pai de Carol) e sua maravilhosa família por terem sido uma verdadeira família para mim, representando grande importância durante toda a trajetória de construção deste trabalho.

Ao meu professor e orientador *Dr. Daniel Marinho Pellegrino,* minha principal referência de profissionalismo e dedicação à Matemática, por todas as contribuições de inestimável valor para meu crescimento pessoal e acadêmico. Agradeço-o por ter me permitido a honra de ser aceito como seu orientando, por sua total dedicação e disponibilidade em tirar minhas dúvidas sempre quando foi preciso, por ter cumprido de forma excelente e eficiente seu papel de orientador, e pelos conselhos, sempre bons e no momento certo.

Aos professores da pós-graduação, *Dr. Uberlandio Batista Severo*, *Dr. Roberto Callejas Bedregal* e *Dr. Pedro Antonio Hinojosa*, pelo aprendizado. Gostaria de registrar aqui meu especial agradecimento ao professor *Dr. Uberlandio Batista Severo*, um modelo de organização e didática, com completo domínio de conteúdo, que muito me inspirou e que sempre procurarei seguir. A ele sou profundamente grato por ter demonstrado ampla sensibilidade ao compreender minhas deficiências iniciais tendo, contudo, reconhecido e estimulado minha capacidade para que eu continuasse a progredir e chegasse até aqui.

A todos os meus professores do curso de Matemática da Universidade Federal de Rondônia.(UNIR). Em particular, aos professores, *Ronaldo Chaves Cavalcanti*, *Maria das Graças*, *Dilcélia Heckmann Barbalho*, *Marinaldo Felipe da Silva* e *Tomás Daniel Menendez*. Um agradecimento especial aos professores e amigos *Dr. Marinaldo Felipe da Silva* e *Dr. Sérgio Luiz de Medeiros Rivero* por terem imediatamente reconhecido meu talento e, na primeira oportunidade, terem me oferecido todo o apoio e incentivo sem os quais nem mesmo o ingresso neste curso de mestrado teria sido possível.

A Dona Nevinha (mãe de Marinaldo) e sua alegre família, por terem, com todo carinho, me recebido e me acolhido em seus lares nos difíceis momentos de recém-chegada em João Pessoa.

A todos os meus colegas da graduação e pós-graduação, em especial, aos amigos *Simeão Targino da Silva*, *Anselmo Baganha*, *Roberto Capistrano*, *Bruno Formiga*, *Luis Alberto* e *José Eduardo*, pela imensa colaboração e aprendizado, além das valiosas experiências que pudemos compartilhar, não somente durante as longas horas de estudos diários, mas também em todos os demais momentos nos quais tive imensa alegria em participar.

Ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* - CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, dissertamos sobre uma recente versão unificada do Teorema da Dominação de Pietsch, devida a Botelho, Pellegrino e Rueda ([8]), que unifica vários teoremas de dominação do tipo Pietsch para certas classes de funções que generalizam o ideal dos operadores lineares absolutamente p-somantes. Um resultado final mostra que tais teoremas de dominação são totalmente livres de condições algébricas, tais como linearidade, multilinearidade, etc.

Palavras-Chave:
Teorema da Dominação de Pietsch, operadores absolutamente somantes, teoremas de dominação do tipo Pietsch.

Abstract

In this work we study a recent unified version of Pietsch Domination Theorem, due to Botelho, Pellegrino and Rueda ([8]) that unifies a number of known Pietsch-type domination theorems for classes of mappings that generalize the ideal of absolutely p-summing linear operators. A final result shows that Pietsch-type domination theorems are totally free from algebraic conditions, such as linearity, multilinearity, etc.

Key-Words:

Pietsch's Domination Theorem, absolutely summing operators, Pietsch-type domination theorems.

Sumário

Introdução

As raízes da teoria dos operadores lineares absolutamente somantes repousam sob o fértil solo cultivado pelos trabalhos de Alexandre Grothendieck iniciados em 1950. Contudo, foi somente em 1967 que Albrecht Pietsch isolou de forma realmente clara esta classe de operadores e estabeleceu muitas de suas propriedades fundamentais. Dentro de um ano, graças a Lindenstrauss e Pelczyński [23], o trabalho de Pietsch ganhou verdadeiro reconhecimento e prestígio.

Na década de 80, Pietsch [35] esboçou uma generalização da teoria de operadores absolutamente somantes para aplicações multilineares. A partir de então, vários autores começaram a se interessar pelo assunto e atualmente já existe uma extensa literatura não-linear relacionada ao tema. É natural que imaginemos uma teoria não-linear construída indutivamente a partir da teoria linear clássica, porém numerosos problemas difíceis têm surgido, o que exigiu novas técnicas totalmente distintas dos argumentos utilizados na teoria linear. Uma boa amostra dos caminhos que a teoria não-linear está traçando pode ser encontrada, por exemplo em [6, 5, 13, 14, 15, 21, 33, 34]. Atualmente a teoria não-linear relacionada a operadores absolutamente somantes não se resume apenas ao caso de aplicações multilineares e polinômios, mas também a funções holomorfas e até a aplicações mais gerais (veja, por exemplo, [26, 27]).

Um dos resultados centrais da teoria de operadores absolutamente somantes é o famoso Teorema da Dominação de Pietsch (TDP), reconhecido também por estabelecer uma surpreendente conexão entre a teoria de operadores somantes e a teoria da medida. O próprio Pietsch [35] foi o responsável pela primeira versão não-linear do TDP. O presente trabalho apresenta algumas outras versões não-lineares do mesmo, devidas a Botelho, Pellegrino e Rueda ([8]), incluindo uma versão recente para funções completamente arbitrárias e livres de exigências mais fortes como, por exemplo, a linearidade e continuidade. Após apresentá-las, este trabalho prova uma versão abstrata do TDP que unifica as demais versões tornando-as consequências relativamente simples daquela. Para citar alguns dos resultados que são unificados pelo teorema principal (Teorema 2.2.1) mencionamos: o teorema de dominação de Farmer e Johnson para funções Lipschitz somantes entre espaços métricos [19, Theorem 1(2)], o teorema de dominação de Pietsch e Geiss para aplicações multilineares dominadas ([35, Theorem 14],[20, Satz 3.2.3]), o teorema de dominação de Dimant para aplicações multilineares fortemente somantes e polinômios homogêneos [17, Proposition 1.2(ii) and Proposition 3.2(ii)], o teorema de dominação para funções subhomogêneas [7, Theorem 2.4] e o teorema de dominação para operadores (D, p)-somantes [24, Theorem 3.11].

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O Capítulo 1 foi escrito para fornecer uma discreta introdução ao assunto que, por sua vez, está essencialmente contido nos demais. Recomendamos que sua leitura não seja omitida. A teoria linear dos operadores absolutamente somantes constitui a fonte de inspiração mais importante para a criação de outras teorias (incluindo as não-lineares) que a generalizam e a estendem. A referência clássica para sua construção e leitura é o livro de J. Diestel [16]. Neste capítulo faremos uma rápida revisão sobre a teoria linear, comentando seus resultados clássicos e definindo os operadores absolutamente somantes. Para nossos propósitos, o principal resultado deste capítulo será o Teorema da Dominação de Pietsch (TDP), que serviu como modelo para as generalizações estudadas no Capítulo 3, bem como para a construção e demonstração de sua versão unificadora estudada no Capítulo 2.

No Capítulo 2, construiremos um ambiente abstrato onde será definida a classe das funções abstratas somantes. Inspirado no famoso TDP, demonstraremos um teorema de dominação correspondente a esta classe. Este teorema constitui o resultado mais importante desta dissertação, recebendo o nome título de nosso trabalho: O Teorema da Dominação de Pietsch Unificado (TDPU).

O Capítulo 3 subdivide-se em cinco seções. Cada seção apresenta uma classe de funções absolutamente somantes. São elas: a classe dos operadores lineares absolutamente somantes, das aplicações muiltilineares semi-integrais, das funções subhomogêneas, das multilineares $\tau(p)$-somantes e, finalmente, dos polinômios dominados. A primeira delas é pertinente à teoria linear, as demais são pertinentes à teoria não-linear. Neste capítulo, será provado que cada uma dessas classes está contida na classe das funções abstratas somantes. Isto tornará possível invocar nosso TDPU para demonstrar os respectivos teoremas de dominação. Em verdade, o leitor poderá verificar que cada teorema de dominação seguirá como consequência quase imediata do TDPU. Dito de outro modo, todos aqueles poderão ser vistos como corolário deste, que os cobrem e os unificam, justificando sua denominação.

O Capítulo 4 pode muito bem ser encarado como uma sexta seção do capítulo anterior. Seguiremos o mesmo roteiro do terceiro capítulo, só que desta vez, abordaremos a classe das funções arbitrárias que são absolutamente somantes. Será provado que tais funções são precisamente as funções abstratas somantes e que, portanto, seu teorema de dominação é mais um corolário do TDPU. O motivo por termos colocado como capítulo é deixar claro ao leitor nosso segundo propósito, além do principal visto no Capítulo 3. Este capítulo esclarece que a essência de um teorema de dominação do tipo Pietsch, em geral, não depende de condições algébricas tais como, por exemplo, a linearidade e continuidade do operador. Mesmo para funções arbitrárias, ser absolutamente somante equivale a satisfazer a um teorema de dominação. A fonte dos resultados principais dos Capítulos 2, 3 e 4 da presente dissertação é o artigo ([8]).

No apêndice, escrevemos algumas palavras sobre as aplicações multilineares e polinomiais, definindo-as e estendendo o conceito de operadores absolutamente somantes para tais classes. O objetivo é auxiliar a leitura do capítulo 3, mais especificamente, das seções 3.2, 3.4 e 3.5. Encontram-se também no apêndice as demonstrações dos resultados que foram diretamente utilizados nos capítulos anteriores.

Notação e Terminologia

- Em todo o texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo dos reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Os espaços vetoriais serão sempre considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Usaremos o termo "operador"com o mesmo sentido de "função".

- $E, E_1, \ldots E_m$ e F representam espaços de Banach, exceto quando houver algo mencionado em contrário.

- Se E é um espaço vetorial normado, escreveremos $\|\cdot\|_E$ para denotar a norma definida em E. Quando não houver possibilidade de confusão, escreveremos simplesmente $\|\cdot\|$ no lugar de $\|\cdot\|_E$.

- Se E e F são espaços vetorias normados, o espaço vetorial formado pelos operadores lineares de E em F é denotado por $L(E;F)$. Vamos denotar $L(E;\mathbb{K})$ por E^* e chamá-lo de **dual algébrico** de E. Analogamente, denotamos o espaço vetorial formado pelos operadores lineares contínuos de E em F por $\mathcal{L}(E;F)$. O **dual topológico** de E é o conjunto $\mathcal{L}(E;\mathbb{K})$ que, por sua vez, será denotado por $E^{'}$.

- Quando X for um espaço vetorial normado, o símbolo B_X denotará a bola unitária fechada $\{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ de X.

- Para cada número real $1 \leq p < \infty$, denotamos por ℓ_p o espaço de Banach definido por
$$\ell_p := \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty}, \text{ com } x_n \in \mathbb{K}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\},$$
com a norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Capítulo 1

A Teoria Linear dos Operadores Absolutamente Somantes

1.1 Séries em espaços de Banach

1.1.1 Séries absolutamente e incondicionalmente convergentes em espaços de Banach

Seja X um espaço vetorial normado. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X chama-se *absolutamente somável* quando $\sum \|x_n\|$ é uma série convergente. Diremos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é *incondicionalmente somável* quando, para toda bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pondo-se $y_n = x_{\varphi(n)}$, a série $\sum y_n$ é convergente (veremos adiante que $\sum x_n = \sum y_n$). No primeiro caso, a série $\sum x_n$ recebe o nome de *absolutamente convergente* e, no segundo, chama-se *incondicionalmente convergente.*

Na reta, devido a Dirichlet, uma série é absolutamente convergente se, e somente se, é incondicionalmente convergente. Uma demonstração pode ser encontrada em [22, p. 151]. Isto, porém, não é verdadeiro para espaços mais gerais, como os de Banach de dimensão infinita. Em verdade, o importante Teorema de Dvoretzky-Rogers, provado na década de 50, garantiu a existência de uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável, para qualquer espaço de Banach de dimensão infinita.

No entanto, independente do fato desta propriedade ser perdida ou não, os espaços de Banach apresentam íntima relação com sequências absoluta e incondicionalmente somáveis. É o que diz a

Proposição 1.1.1 *Um espaço vetorial normado X é Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável.*

Demonstração: Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X absolutamente somável. Vamos mostrar que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável. Seja dada uma permutação σ arbitrária dos números naturais. Pondo-se $y_n = \|x_n\|$, obtemos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência numérica absolutamente somável e, portanto, incondicionalmente somável. Logo, $\sum \left\| x_{\sigma(n)} \right\|$ é convergente e, consequentemente, suas reduzidas formam uma sequência de Cauchy na reta. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$N > M > N_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{N} \left\| x_{\sigma(n)} \right\| - \sum_{n=1}^{M} \left\| x_{\sigma(n)} \right\| \right| = \sum_{n=M+1}^{N} \left\| x_{\sigma(n)} \right\| < \varepsilon.$$

Por outro lado,

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{M} x_{\sigma(n)} \right\| = \left\| \sum_{n=M+1}^{N} x_{\sigma(n)} \right\| \leq \sum_{n=M+1}^{N} \left\| x_{\sigma(n)} \right\| < \varepsilon$$

sempre que $N > M > N_0$. Isto mostra que a sequência das reduzidas da série $\sum x_{\sigma(n)}$ é de Cauchy em X e, como X é completo, a mesma converge. Logo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável.

Reciprocamente, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em X. Então, dados $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon = 2^{-k} > 0$, existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0^{(k)} \Rightarrow \|x_m - x_n\| < 2^{-k}.$$

Seja $n_1 = n_0^{(1)}$. Dado $k \geq 2$, a partir de $n_0^{(k)}$ podemos encontrar $n_k \in \mathbb{N}$ de tal forma que $n_k \geq n_0^{(k)}$ e $n_k > n_{k-1}$ Com isso, encontramos naturais $n_1 < n_2 < \cdots$ tais que

$$\left\| x_{n_k} - x_{n_{k+1}} \right\| < 2^{-k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| x_{n_k} - x_{n_{k+1}} \right\| < \sum_{k=1}^{N} 2^{-k}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, o que nos dá

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| x_{n_k} - x_{n_{k+1}} \right\| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

mostrando que a série $\sum \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right)$ é absolutamente convergente. Por hipótese, considerando a permutação $\sigma = id$, a série $\sum \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \right)$ é convergente. Note agora que

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} \left(x_{n_{j+1}} - x_{n_j} \right).$$

Logo, $\left(x_{n_{k+1}} \right)_{k=1}^{\infty}$ é convergente. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy e possui uma subsequência convergente, então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ também converge. Logo, X é completo. ∎

Proposição 1.1.2 *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência incondicionalmente somável em um espaço de Banach X, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

para qualquer permutação σ dos naturais.

Demonstração: Lembremos inicialmente que uma sequência de escalares $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ incondicionalmente somável é absolutamente somável e, além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\sigma(n)}$$

para toda permutação σ dos naturais (veja [22, p. 151]). Sejam dadas $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência incondicionalmente somável em X e $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma bijeção. Para toda $f \in X'$ temos:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}\right) &= f\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)}\right) = \lim_{N\to\infty} f\left(\sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} f\left(x_{\sigma(n)}\right)\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} f\left(x_n\right)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} f\left(\sum_{n=1}^{N} x_n\right) = f\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n\right) \\
&= f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right).
\end{aligned}$$

Sejam $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ e $y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, vamos mostrar que $x = y$. De fato, segue do resultado acima que

$$f\left(x - y\right) = 0, \forall f \in X'$$

e, portanto,

$$\sup_{\substack{f\in X' \\ \|f\|\leq 1}} \left|f\left(x-y\right)\right| = 0.$$

Por [10, Corollaire I.4.], resulta

$$\|x - y\| = 0,$$

donde vem que $x = y$. ■

1.2 Um pouco sobre a teoria linear dos operadores absolutamente somantes

Definição 1.2.1 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e X um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é dita **fortemente** p-**somável** se a sequência de escalares correspondente $(\|(x_n)\|)_{n=1}^{\infty}$ estiver em ℓ_p.*

Usa-se a notação $\ell_p(X)$ para designar o espaço vetorial de todas as sequências fortemente p-somáveis em X. Mais explicitamente, trata-se do espaço

$$\ell_p(X) := \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty}, \text{ com } x_n \in X; \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty \right\}.$$

A função $\|\cdot\|_p$, dada por $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, define uma norma em $\ell_p(X)$ e o torna completo com relação a essa norma.

O exemplo mais fácil de elementos de $\ell_p(X)$ são as sequências finitas $(x_1, \ldots, x_m)$ - identificadas com $(x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$. Tais sequências constituem um subspaço denso de $\ell_p(X)$.

Também é possível definirmos sequências fortemente p-somáveis quando $p = \infty$. Neste caso, teríamos o espaço de Banach $(\ell_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ definido por

$$\ell_\infty(X) := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty}, \text{ com } x_n \in X; \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty\right\},$$

com a norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$.

Definição 1.2.2 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e X um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é dita **fracamente** p-**somável** se a sequência de escalares $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ estiver em ℓ_p para todo $\varphi \in X'$.*

Denotamos por $\ell_p^w(X)$ o espaço de todas as sequências fracamente p-somáveis. Em símbolos:

$$\ell_p^w(X) := \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty}, \text{ com } x_n \in X; \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty, \forall \varphi \in X'\right\}.$$

Uma norma natural em $\ell_p^w(X)$ é dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w} := \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

e, com esta norma, o espaço torna-se completo.

Note que não é imediato perceber que o supremo em (1.1) seja finito, mas isto é verdade graças ao Teorema do Gráfico Fechado. Com efeito, para cada $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X)$, associamos a função

$$u : X' \to \ell_p$$

$$u(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}.$$

É evidente que u está bem definida e é linear. Admitindo que

$$\begin{cases} \varphi_k \to \varphi \in X' \\ u(\varphi_k) \to z_0 \in \ell_p \end{cases} \tag{1.2}$$

com $z_0 = (z_n)_{n=1}^{\infty}$, mostremos que $z_0 = u(\varphi)$. A segunda convergência em (1.2) garante que

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_n) = z_n, \tag{1.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, a primeira convergência em (1.2) garante que

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x_n) = \varphi(x_n), \tag{1.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela unicidade do limite, se conclui de (1.3) e (1.4) que $z_0 = u(\varphi)$ e o Teorema do Gráfico Fechado garante que u é limitado. Em outras palavras

$$\sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Se $1 \leq p < \infty$, muitas vezes é útil trabalhar com o espaço

$$\ell_p^u(X) := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p,w}(X) ; \lim_{n\to\infty} \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{p,w} = 0 \right\}.$$

Prova-se que $\ell_p^u(X)$ é um subespaço fechado de $\ell_p^w(X)$. Em particular, é um espaço de Banach (veja [36, p. 44]).

Seja $u : X \to Y$ um operador linear e contínuo entre espaços de Banach. É fácil verificar que a correspondência

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (ux_n)_{n=1}^{\infty} \tag{1.5}$$

sempre induz um operador linear limitado $\hat{u}^s : \ell_p(X) \to \ell_p(X)$, como também um operador linear limitado $\hat{u}^w : \ell_p^w(X) \to \ell_p^w(X)$. Em ambos os casos, as normas de $\hat{u}^s$ e $\hat{u}^w$ são iguais a $\|u\|$. De fato, note primeiramente que, se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$ então

$$\begin{aligned} \|(ux_n)_{n=1}^{\infty}\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|u\|^p \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\| \, \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p < \infty \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|\hat{u}^s\| = \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \|(ux_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \leq \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1} \|u\| \, \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \|u\|. \tag{1.6}$$

Por outro lado,

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| = \sup_{\left\|(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x,0,0\ldots)\right\| \leq 1} \|\hat{u}^s((y_n)_{n=1}^{\infty})\|_p \leq \|\hat{u}^s\|. \tag{1.7}$$

De (1.6) e(1.7), segue que $\|\hat{u}^s\| = \|u\|$. Com raciocínio similar se mostra que $\|\hat{u}^w\| = \|u\|$.

Observação 1.2.3 *A inclusão* $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$ *sempre é verdadeira. De fato, se* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$, *então*

$$\sum_{n=1}^{N} |\varphi(x_n)|^p \leq \sum_{n=1}^{N} \|\varphi\|^p \|x_n\|^p,$$

para todos $N \in \mathbb{N}$ *e* $\varphi \in X'$. *Logo,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi\|^p \|x_n\|^p = \|\varphi\|^p \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty,$$

para todo $\varphi \in X'$. *Portanto* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X)$.

Em suma, a discussão contida no último parágrafo acima revela que o operador u sempre permite associar a uma sequência fracamente p-somável em X uma sequência fracamente p-somável correspondente em Y. Também é sempre possível a correspondência que associa a cada sequência fortemente p-somável em X uma sequência fortemente p-somável em Y. Em particular, graças à inclusão $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$, verifica-se que, sendo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência fortemente p-somável em X, então a sequência $(ux_n)_{n=1}^{\infty}$ será fracamente p-somável em Y. Entretanto, não é sempre verdade que se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(X)$, então $(ux_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$. Os operadores que satisfazem esta propriedade são de especial interesse neste ramo da Análise Funcional e recebem o nome de operadores *absolutamente p-somantes.*

Definição 1.2.4 *Sejam* $1 \leq p, q < \infty$ *e* $u : X \to Y$ *um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que u é* ***absolutamente*** $(p;q)$***-somante*** *(ou* $(p;q)$*-somante) se* $(u(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ *sempre que* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q^w(X)$.

Neste caso, é possível definir o operador induzido

$$\hat{u} : \ell_q^w(X) \to \ell_p(Y)$$

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (u(x_n))_{n=1}^{\infty}.$$

Denotamos por $\prod_{p,q}(X;Y)$ o conjunto formado por todos os operadores $(p;q)$-somantes de X em Y. Quando $p = q$, escrevemos $\prod_p(X;Y)$ no lugar de $\prod_{p,q}(X;Y)$.

O próximo resultado traz várias caracterizações para operadores absolutamente $(p;q)$-somantes.

Proposição 1.2.5 *Sejam* X, Y *espaços de Banach. As seguintes afirmações a respeito de um operador linear contínuo* $u : X \to Y$ *são equivalentes:*

(i) u *é* $(p;q)$*-somante;*

(ii) Existe uma constante $K > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.8}$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$ *e* $n \in \mathbb{N}$;

(iii) Existe uma constante $K > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \| u(x_k) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} | \varphi(x_k) |^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^w(X)$;

(iv) Existe uma constante $K > 0$ *tal que*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \| u(x_k) \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} | \varphi(x_k) |^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^u(X)$;

(v) $(u(x_k))_{k=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ *sempre que* $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^u(X)$.

Denotamos por $\pi_{p,q}(u)$ *o ínfimo do conjunto constituído pelas constantes* K *tais que a desigualdade* (1.8) *continua válida. Além disso, temos* $\pi_{p,q}(u) = \|\widehat{u}\|$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponha que u seja $(p;q)$-somante. Vamos mostrar que $\widehat{u}$ tem gráfico fechado em $\ell_q^w(X) \times \ell_p(Y)$. De fato, o gráfico de $\widehat{u}$ é o conjunto

$$G(\widehat{u}) = \left\{ (x,y) ; x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q^w(X) \text{ e } y = \widehat{u}(x) \right\}.$$

Seja $(x,y) \in \ell_q^w(X) \times \ell_p(Y)$ um ponto aderente ao gráfico de $\widehat{u}$. Isto é,

$$(x,y) = \lim_{k \to \infty} \left(x^{(k)}, \widehat{u}\left(x^{(k)}\right) \right), \tag{1.9}$$

onde $\left(x^{(k)}, \widehat{u}(x_k)\right) \in G(\widehat{u})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $(x,y) \in G(\widehat{u})$ e, para isso, basta mostrar que $y = \widehat{u}(x)$. Temos de (1.9) que

$$\begin{cases} x^{(k)} \to x \text{ em } \ell_q^w(X) \\ \hat{u}\left(x^{(k)}\right) \to y \text{ em } \ell_p(Y) \end{cases} \tag{1.10}$$

A primeira convergência em (1.10) nos garante que, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq N \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left\| \left(x^{(k)} - x\right) \right\|_{q,w} < \varepsilon.$$

Assim,

$$k \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right) \right|^q < \varepsilon^q \tag{1.11}$$

para todo $\varphi \in B_{X'}$. Como cada termo da série (1.11) é dominado por ε^q, segue do Teorema de Hanh-Banach que

$$k \geq N \Rightarrow \left\| x_n^{(k)} - x_n \right\| = \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left| \varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right) \right| \leq \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso mostra que, dado $n \in \mathbb{N}$, a sequência $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para x_n em X. Como u é contínuo, segue que

$$\lim_{k\to\infty} u\left(x_n^{(k)}\right) = u\left(x_n\right) \tag{1.12}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, a segunda convergência em (1.10) nos garante que, dado $\varepsilon > 0$ existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq N' \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\|u\left(x_n^{(k)}\right) - y_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\widehat{u}\left(x^{(k)}\right) - y\right\|_p < \varepsilon$$

e, consequentemente,

$$k \geq N' \Rightarrow \left\|u\left(x_n^{(k)}\right) - y_n\right\| < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\lim_{k\to\infty} u\left(x_n^{(k)}\right) = y_n \tag{1.13}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela unicidade do limite, segue de (1.12) e (1.13) que $u\left(x_n\right) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$y = \left(y_n\right)_{n=1}^{\infty} = \left(u\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty} = \hat{u}\left(x\right)$$

donde vem que $(x, y) \in G\left(\widehat{u}\right)$. Concluímos com isso que o operador linear $\widehat{u}$ é fechado e, portanto, pelo Teorema do Gráfico Fechado segue que $\widehat{u}$ é contínuo. Note que podemos identificar a sequência finita $\left(x_k\right)_{k=1}^{n}$ em X com a sequência $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ em X, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agindo dessa maneira, fica claro que $\left(x_k\right)_{k=1}^{n} \in \ell_{q,w}\left(X\right)$ assim como $\left(u\left(x_k\right)\right)_{k=1}^{n} \in \ell_p\left(Y\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, pela continuidade de $\widehat{u}$, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \left\|u\left(x_k\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left\|\left(u\left(x_k\right)\right)_{k=1}^{n}\right\|_p = \left\|\widehat{u}\left(\left(x_k\right)_{k=1}^{n}\right)\right\|_p \\ &\leq \left\|\widehat{u}\right\| \left\|\left(x_k\right)_{k=1}^{n}\right\|_{q,w} = \left\|\widehat{u}\right\| \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\varphi\left(x_k\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{1.14}$$

para qualquer sequência finita $\left(x_k\right)_{k=1}^{n}$ em X. Note ainda que de (1.14)

$$\pi_{p,q}\left(u\right) \leq \left\|\widehat{u}\right\|. \tag{1.15}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Suponha que para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left\|u\left(x_k\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\varphi\in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|\varphi\left(x_k\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.16}$$

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q^w(X)$. Primeiramente, note que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[K\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] = K\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] \tag{1.17}$$
$$= K\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= K\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{q,w} < \infty,$$

mostrando por (1.16) e (1.17) que as reduzidas $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ formam uma sequência monótona não-decrescente limitada. Portanto,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left[K\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$= K\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$
$$= K\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$ é óbvio, pois $\ell_q^u(X) \subset \ell_q^w(X)$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ também é óbvio.

$(v) \Rightarrow (ii)$. Assumindo (v), podemos definir o operador linear induzido

$$\tilde{u} : \ell_q^u(X) \to \ell_p(Y)$$

por

$$\tilde{u}\left((x_k)_{k=1}^{\infty}\right) = (u(x_k))_{k=1}^{\infty}$$

e, procedendo de maneira análoga à demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$, chegaremos que $\tilde{u}$ é contínuo. Note agora que, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$, temos

$$(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in \ell_q^u(X)$$

e, portanto,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(u(x_k))_{k=1}^{\infty}\right\|_p = \left\|\tilde{u}\left((x_k)_{k=1}^{\infty}\right)\right\|_p$$
$$\leq \|\tilde{u}\|\left\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{q,w} = \|\tilde{u}\|\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$. Se $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q^w(X)$, é claro que

$$\sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Portanto, segue de (iii) que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

donde se conclui (i). Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}\| &= \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{q,w} \leq 1} \left\|\widehat{u}\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right)\right\|_p = \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{q,w} \leq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\left\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_{q,w} \leq 1} K \left\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{q,w} = K.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\widehat{u}\| \leq \pi_{p,q}(u). \tag{1.18}$$

De (1.15) e (1.18) segue que $\pi_{p,q}(u) = \|\widehat{u}\|$. ∎

Observação 1.2.6 *Acabamos de provar que $\pi_{p,q}(u) = \|\widehat{u}\|$. Além disso, a continuidade de $\widehat{u}$, também contida na demonstração acima, nos garante que*

$$\left\|\widehat{u}\left((x_k)_{k=1}^{\infty}\right)\right\|_p \leq \|\widehat{u}\| \left\|(x_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_{q,w},$$

isto é,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}(u) \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(x_k)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

donde segue que o ínfimo $\pi_{p,q}(u)$ é assumido.

1.2.1 O Teorema da Dominação de Pietsch

No que segue, $C(K)$ denotará o espaço real de Banach com a norma

$$\|f\| = \sup_{\varphi \in K} |f(\varphi)|,$$

constituído de todas as funções contínuas $f : K \to \mathbb{R}$ no compacto K.

O lema a seguir será útil para a demonstração do Teorema da Dominação de Pietsch.

Lema 1.2.7 *O conjunto $\mathcal{P} = \{f \in C(K); f(\varphi) > 0, \forall \varphi \in K\}$ é convexo e aberto em $C(K)$.*

Demonstração: Vamos provar que $\mathcal{P}$ é convexo. Sejam dados $f, g \in \mathcal{P}$. Para qualquer $\lambda \in [0,1]$, temos:

$$\lambda f + (1-\lambda) g = h \in C(K)$$

e

$$h(\varphi) = \lambda f(\varphi) + (1-\lambda) g(\varphi) > 0, \text{ para todo } \varphi \in K.$$

Portanto, $\mathcal{P}$ é convexo.

Vamos mostrar que $\mathcal{P}$ é aberto em $C(K)$. Seja $f \in \mathcal{P}$. Como K é compacto, existe $\varphi_0 \in K$ tal que

$$\inf_{\varphi \in K} f(\varphi) = f(\varphi_0) > 0$$

Escolha $\varepsilon = \frac{f(\varphi_0)}{2}$. Se $\|g - f\| < \varepsilon$ segue que

$$|g(\varphi) - f(\varphi)| \leq \sup_{\varphi \in K} |(g-f)(\varphi)| = \|g - f\| < \varepsilon$$

para todo $\varphi \in K$. Como $f(\varphi) \geq f(\varphi_0)$ para todo φ, segue que

$$g(\varphi) > f(\varphi) - \varepsilon \geq f(\varphi_0) - \varepsilon = \varepsilon > 0$$

para todo $\varphi \in K$. Assim, $g \in \mathcal{P}$ e a bola aberta com centro em f e raio ε está contida em $\mathcal{P}$. Logo, $\mathcal{P}$ é aberto em $C(K)$. ■

Enunciaremos agora um importante teorema, pertinente à Teoria da Medida, que também será utilizado na demonstração do Teorema da Dominação de Pietsch. É interessante registrar que a particular relação que o TDP estabelece entre a Teoria da Medida e a teoria dos operadores absolutamente somantes é devida principalmente a este resultado. Sua demonstração pode ser encontrada em [2, Theorem 4.3.10].

Teorema 1.2.8 *Seja Ω um espaço topológico de Hausdorff compacto, e seja h um funcional linear positivo definido em $C(\Omega)$ com $h(1) = 1$. Então, existe uma única medida de probabilidade μ, definida na sigma-álgebra de Borel de Ω, tal que*

$$h(f) = \int_{\Omega} f d\mu,$$

para todo $f \in C(\Omega)$.

Teorema 1.2.9 (Teorema da Dominação de Pietsch) *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u : X \to Y$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Então u é absolutamente p-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ Pelo Teorema e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel de $B_{X'}$, com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|u(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.19}$$

para todo $x \in X$. Neste caso, $\pi_p(u)$ é a menor das constantes C tais que (1.19) ocorre.

Demonstração: Suponhamos que existam C e μ descritas na hipótese acima tais que a desigualdade (1.19) ocorra para todo $x \in X$. Então, também ocorre

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \|u(x_j)\|^p &\leq C^p \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{B_{X'}} |\varphi(x_j)|^p \, d\mu(\varphi) \right) \\
&= C^p \int_{B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right) d\mu(\varphi) \\
&\leq C^p \int_{B_{X'}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right) d\mu(\varphi) \\
&= C^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right) \int_{B_{X'}} d\mu(\varphi) \\
&= C^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right) \mu(B_{X'}) \\
&= C^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right)
\end{aligned}
$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $m \in \mathbb{N}$, uma vez que μ é uma medida de probabilidade. Portanto, pela Proposição 1.2.5, u é absolutamente p-somante e

$$\pi_p(u) \leq C \tag{1.20}$$

Reciprocamente, para cada conjunto finito $M \subset X$ defina:

$$
\begin{aligned}
g_M &: B_{X'} \to \mathbb{R} \\
g_M(\varphi) &:= \sum_{x \in M} \left(\|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p \right).
\end{aligned}
$$

Convém observar que, estando $B_{X'}$ munido com a topologia fraca estrela, a função

$$
\begin{aligned}
h_M &: B_{X'} \to \mathbb{R} \\
h_M(\varphi) &:= -\pi_p(u)^p \sum_{x \in M} |\varphi(x)|^p \\
&= -\pi_p(u)^p \sum_{x \in M} |Jx(\varphi)|^p
\end{aligned}
$$

é contínua, uma vez que será composta de funções contínuas, graças à continuidade do funcional $Jx : (X', \sigma(X', X)) \to \mathbb{K}$ definido por $Jx(\varphi) = \varphi(x)$. Isto justifica a continuidade de g_M, pois esta será igual à soma da função constante

$$
\begin{aligned}
cte &: B_{X'} \to \mathbb{R} \\
cte(\varphi) &:= \sum_{x \in M} \|u(x)\|^p
\end{aligned}
$$

com a função contínua h_M. Assim, denotando por $\mathcal{Q}$ o conjunto formado por todas as g_M, obtemos a inclusão $\mathcal{Q} \subset C(B_{X'})$.

Afirmamos que o conjunto $\mathcal{Q}$ é convexo. De fato, dados $g_{M_1}, g_{M_2} \in \mathcal{Q}$ e $0 < \lambda < 1$ temos:

$$\begin{aligned}
\lambda g_{M_1}(\varphi) + (1-\lambda) g_{M_2}(\varphi) &= \lambda \sum_{x \in M_1} \left(\|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p \right) \\
&\quad + (1-\lambda) \sum_{x \in M_2} \left(\|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p \right) \\
&= \sum_{x \in M_1} \left(\left\| u\left(\lambda^{\frac{1}{p}} x\right) \right\|^p - \pi_p(u)^p \left| \varphi\left(\lambda^{\frac{1}{p}} x\right) \right|^p \right) \\
&\quad + \sum_{x \in M_2} \left(\left\| u\left((1-\lambda)^{\frac{1}{p}} x\right) \right\|^p - \pi_p(u)^p \left| \varphi\left((1-\lambda)^{\frac{1}{p}} x\right) \right|^p \right) \\
&= \sum_{a \in \left\{ \lambda^{1/p} x; x \in M_1 \right\}} \left(\|u(a)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(a)|^p \right) \\
&\quad + \sum_{a \in \left\{ (1-\lambda)^{1/p} x; x \in M_2 \right\}} \left(\|u(a)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(a)|^p \right) \\
&= \sum_{a \in M} \left(\|u(a)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(a)|^p \right) \qquad (1.21) \\
&= g_M(\varphi),
\end{aligned}$$

com

$$M = \left\{ \lambda^{\frac{1}{p}} x; x \in M_1 \right\} \bigcup \left\{ (1-\lambda)^{\frac{1}{p}} x; x \in M_2 \right\} \qquad (1.22)$$

Para que a igualdade (1.21) seja possível, os conjuntos que integram a união em (1.22) devem ser lidos como sequências finitas ao invés de conjuntos finitos. Assim, a união em (1.22) tem o sentido de "colar"uma sequência finita na outra, respeitando repetições quando houver.

Defina

$$\mathcal{P} = \left\{ w \in C(B_{X'}) ; w(\varphi) > 0, \forall \varphi \in B_{X'} \right\}.$$

Pelo Lema 1.2.7, $\mathcal{P}$ é convexo e aberto em $C(B_{X'})$. Note ainda que $\mathcal{P}$ é não-vazio, pois cada função constante positiva em $C(B_{X'})$ pertence a $\mathcal{P}$.

Vamos mostrar que

$$\mathcal{Q} \cap \mathcal{P} = \varnothing,$$

isto é, dado $g_M \in \mathcal{Q}$ existe $\varphi_0 \in B_{X'}$ tal que $g_M(\varphi_0) \leq 0$. Com efeito, o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki garante a compacidade de $B_{X'}$ e, pela continuidade de g_M em $B_{X'}$, podemos encontrar $\varphi_0 \in B_{X'}$ tal que

$$g_M(\varphi_0) = \inf_{\varphi \in B_{X'}} g_M(\varphi) = \sum_{x \in M} \|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{x \in M} |\varphi(x)|^p \right).$$

Como u é p-somante e $\pi_p(u)$ é a menor das constantes que satisfazem (1.8), segue que

$$\sum_{x \in M} \|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{x \in M} |\varphi(x)|^p \right) \leq 0,$$

isto é,

$$g_M(\varphi_0) \leq 0.$$

Com isso, fica provado que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são dois conjuntos convexos, não-vazios e disjuntos no espaço de Banach real $C(B_{X'})$. Como $\mathcal{P}$ é aberto, segue de uma das formas geométricas do teorema de Hahn-Banach, que existem $h \in C(B_{X'})'$ e $c \geq 0$ tais que

$$h(g) \leq c < h(w) \tag{1.23}$$

para todos $w \in \mathcal{P}$ e $g \in \mathcal{Q}$.

Vamos mostrar que $h(w) \geq 0$ sempre que $w \geq 0$. De fato, observe que $0 = g_{\{0\}} \in \mathcal{Q}$ e, de (1.23) segue que

$$h(w) > c \geq h(0) = 0 \tag{1.24}$$

para todo $w \in \mathcal{P}$, isto é, $h(w) > 0$ para todo $w \in \mathcal{P}$. Seja $w \in C(B_{X'})$ tal que $w \geq 0$. Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, a função $w_k \in C(B_{X'})$ dada por

$$w_k(\varphi) = w(\varphi) + \frac{1}{k}.$$

Então, $w_k > 0$ e

$$\begin{cases} h(w_k) > 0 \\ \|w_k - w\|_{C(B_{X'})} = \frac{1}{k} \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, obtemos uma sequência $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $C(B_{X'})$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} w_k = w \in C(B_{X'})$$

e, como h é contínua em $C(B_{X'})$, segue que

$$h(w) = \lim_{k\to\infty} h(w_k) \geq 0$$

sempre que $w \geq 0$.

Afirmamos ainda que $c = 0$. De fato, para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $g_k \in C(B_{X'})$ como sendo a função constante $\frac{1}{k}$. É claro que $g_k \in \mathcal{P}$, uma vez que $\frac{1}{k} > 0$. Note ainda que $g_k \overset{k\to\infty}{\to} 0$ no espaço $C(B_{X'})$. Logo,

$$h(g_k) \overset{k\to\infty}{\to} h(0) = 0.$$

Como $h(g_k) > c$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$c \leq 0. \tag{1.25}$$

De (1.24) e (1.25), concluímos que $c = 0$.

Defina agora a função $h_1 : C(B_{X'}) \to \mathbb{R}$ por

$$h_1(w) = \frac{1}{h(1)} h(w).$$

Note que h_1 está bem definida, pois $h(1) > 0$ e, além disso, temos que $h_1 \in C(B_{X'})'$. Lembremos ainda que, ao considerarmos X' munido com a topologia fraca estrela, a bola $B_{X'}$, munida com a topologia fraca estrela induzida, pode muito bem ser vista como um espaço topológico de Hausdorff compacto. Assim, como $h_1(1) = 1$ e $h_1(w) \geq 0$ sempre que $w \geq 0$, obtemos do Teorema 1.2.8 que existe uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel de $B_{X'}$, $\mathcal{B}(B_{X'})$, tal que

$$h_1(w) = \int_{B_{X'}} w(\varphi)\, d\mu(\varphi)$$

para todo $w \in C(B_{X'})$. Em particular,

$$\int_{B_{X'}} g(\varphi)\, d\mu(\varphi) = h_1(g) \tag{1.26}$$

para cada $g \in \mathcal{Q}$. Por outro lado, dado $g \in \mathcal{Q}$ obtemos

$$h_1(g) = \frac{h(g)}{h(1)} \leq \frac{c}{h(1)} = 0,$$

e concluímos de (1.26) que

$$\int_{B_{X'}} g(\varphi)\, d\mu(\varphi) \leq 0$$

para todo $g \in \mathcal{Q}$.

Agora, seja dado $x \in X$. Como $g_{\{x\}} \in \mathcal{Q}$, então

$$\int_{B_{X'}} g_{\{x\}}(\varphi)\, d\mu(\varphi) \leq 0,$$

isto é,

$$\int_{B_{X'}} \left(\|u(x)\|^p - \pi_p(u)^p |\varphi(x)|^p\right) d\mu(\varphi) \leq 0,$$

ou seja,

$$\|u(x)\|^p \int_{B_{X'}} d\mu(\varphi) - \pi_p(u)^p \int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p\, d\mu(\varphi) \leq 0.$$

Daí, usando que μ é medida de probabilidade, resulta

$$\|u(x)\|^p \leq \pi_p(u)^p \int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p\, d\mu(\varphi).$$

Finalmente, elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$, obtemos que

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \left(\int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.27}$$

para todo $x \in X$. De (1.20) e (1.27) segue que $\pi_p(u)$ é a menor das constantes que satisfaz (1.19). ■

Capítulo 2

O Ambiente Abstrato e o Teorema da Dominação de Pietsch Unificado (TDPU)

Existem várias generalizações do conceito de operadores lineares absolutamente somantes sendo que, muitas delas, compreendem operadores que não são necessariamente lineares. Tais generalizações constituem o que se chama de *teoria não-linear* de operadores absolutamente somantes. As funções α-subhomogêneas [7], as aplicações multilineares p-semi-integrais [11, 31] e $\tau(p)$-somantes [30], os polinômios p-dominados [25], os operadores (D,p)-somantes [24], as aplicações holomorfas absolutamente somantes [25] e as funções Lipschitz somantes [19] são alguns exemplos. Cada uma dessas classes de funções somantes acompanha um teorema de dominação do tipo Pietsch correspondente. As quatro primeiras, com seus respectivos teoremas de dominação, serão vistas com mais detalhes nos próximos capítulos. Antes disso, estaremos interessados em construir uma classe de funções somantes que possa ser a mais geral possível, no sentido de incluir cada uma das outras como casos particulares. Trata-se da classe das *funções abstratas somantes.* Em seguida, demonstraremos um teorema de dominação do tipo Pietsch correspondente a esta nova classe. É o que veremos neste capítulo.

2.1 O ambiente abstrato

Sejam X, Y e E conjuntos não-vazios arbitrários, $\mathcal{H}$ uma família de funções de X em Y, G um espaço de Banach e K um espaço de Hausdorff compacto. Sejam

$$R : K \times E \times G \to [0,\infty) \text{ e } S : \mathcal{H} \times E \times G \to [0,\infty)$$

funções tais que

(i) Para cada $f \in \mathcal{H}$, existe $x_0 \in E$ tal que

$$R(\varphi, x_0, b) = S(f, x_0, b) = 0$$

para quaisquer $\varphi \in K$ e $b \in G$;

(ii) A função

$$R_{x,b} : K \to [0, \infty)$$

definida por

$$R_{x,b}(\varphi) = R(\varphi, x, b)$$

é contínua para cada $x \in E$ e $b \in G$;

(iii) As seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} R(\varphi, x, \eta b) &\leq \eta R(\varphi, x, b) \text{ e} \\ \eta S(f, x, b) &\leq S(f, x, \eta b), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $\varphi \in K$, $x \in E$, $0 \leq \eta \leq 1$, $b \in G$ e $f \in \mathcal{H}$.

Definição 2.1.1 *Sejam R e S funções definidas como acima e $0 < p < \infty$. Uma função $f \in \mathcal{H}$ é dita R-S-abstrata p-somante se existe uma constante $C_1 \geq 0$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{m} S(f, x_j, b_j)^p \leq C_1 \sup_{\varphi \in K} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, b_j)^p \right) \tag{2.1}$$

para quaisquer $x_1, ..., x_m \in E$, $b_1, ..., b_m \in G$ e $m \in \mathbb{N}$. Neste caso, o conjunto

$$\mathcal{C} = \{C_1 \geq 0; C_1 \text{ satisfaz (2.1) para todo } m \in \mathbb{N}\} \tag{2.2}$$

é não-vazio e limitado inferiormente, logo, possui um ínfimo. Denotaremos este ínfimo por $\pi_{RS,p}(f)$.

Fixado $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, b_j)^p = \sum_{j=1}^{m} R_{x_j,b_j}(\varphi)^p.$$

Mas, cada R_{x_j,b_j} é uma função real contínua definida no compacto K; então, sempre que $0 < p < \infty$, a composição $P_p \circ R_{x_j,b_j} : K \to \mathbb{R}$, com $P_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $P_p(x) = x^p$, é contínua. Concluímos que

$$\sum_{j=1}^{m} P_p \circ R_{x_j,b_j} : K \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\left(\sum_{j=1}^{m} P_p \circ R_{x_j,b_j} \right)(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} R_{x_j,b_j}(\varphi)^p$$

é contínua sobre K. Logo, o supremo em (2.1) é atingido.

A seguir, veremos que $\pi_{RS,p}(f)$ (o ínfimo de $\mathcal{C}$ em (2.2)) também satisfaz a desigualdade (2.1). De fato, esse resultado é consequência de um argumento bem mais geral, o qual está contido no próximo lema.

Lema 2.1.2 *Seja X um conjunto não-vazio e sejam $G_1 : X \to [0,\infty)$ e $G_2 : X \to [0,\infty)$ funções tais que existe $C > 0$ satisfazendo*

$$\sum_{j=1}^{m} G_1(x_j) \leq C \sum_{j=1}^{m} G_2(x_j) \tag{2.3}$$

para todo m natural. Então o ínfimo dos C que satisfazem (2.3) ainda satisfaz (2.3).

Demonstração: Seja $\pi = \inf \mathcal{C}$, onde $\mathcal{C} = \{C > 0; C \text{ satisfaz (2.3) para todo } m \in \mathbb{N}\}$. Vamos mostrar que $\pi \in \mathcal{C}$. Suponha o contrário. Então, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m_1} G_1(x_j) > \pi \sum_{j=1}^{m_1} G_2(x_j). \tag{2.4}$$

Note que

$$\sum_{j=1}^{m_1} G_2(x_j) \neq 0,$$

pois se fosse zero, pela hipótese em (2.3) seguiria que

$$\sum_{j=1}^{m_1} G_1(x_j) = 0$$

e (2.4) não aconteceria. Tomando $\varepsilon > 0$ de modo que

$$\varepsilon < \frac{\sum_{j=1}^{m_1} G_1(x_j) - \pi \sum_{j=1}^{m_1} G_2(x_j)}{\sum_{j=1}^{m_1} G_2(x_j)},$$

concluímos que, para essas escolhas de ε, os números $\pi + \varepsilon$ não estão em $\mathcal{C}$. Ora, como $\pi = \inf \mathcal{C}$, existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C < \pi + \varepsilon$. Daí, como toda constante maior que $C \in \mathcal{C}$ satisfaz (2.3)(isto é, está em $\mathcal{C}$), segue que $(\pi + \varepsilon) \in \mathcal{C}$, o que é um absurdo. Portanto $\pi \in \mathcal{C}$. ∎

2.2 O Teorema da Dominação de Pietsch unificado (TDPU)

Teorema 2.2.1 *Sejam R e S funções definidas como acima, $0 < p < \infty$ e $f \in \mathcal{H}$. Então f é R-S-abstrata p-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ sobre K tal que*

$$S(f, x, b) \leq C \left(\int_K R(\varphi, x, b)^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.5}$$

para todo $x \in E$ e $b \in G$. Além disso, o ínfimo das constantes C é igual a $\pi_{RS,p}(f)^{\frac{1}{p}}$.

Demonstração: Suponhamos que existam uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade de Borel μ sobre K tal que (2.5) ocorra. Vamos mostrar que f é R-S-abstrata p-somante. Dados $m \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_m \in E$ e $b_1, ..., b_m \in G$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} S(f, x_j, b_j)^p &\leq C^p \left(\sum_{j=1}^{m} \int_K R(\varphi, x_j, b_j)^p \, d\mu(\varphi) \right) \\
&= C^p \int_K \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, b_j)^p \right) d\mu(\varphi) \\
&\leq C^p \int_K \left(\sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, b_j)^p \right) d\mu(\varphi) \\
&= C^p \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, b_j)^p \int_K d\mu(\varphi) \\
&= C^p \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, b_j)^p \, \mu(K) \\
&= C^p \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, b_j)^p
\end{aligned}$$

para quaisquer $x_1, ..., x_m \in E$, $b_1, ..., b_m \in G$ e $m \in \mathbb{N}$. Portanto, f é R-S-abstrata p-somante e

$$\pi_{RS,p}(f) \leq C^p \tag{2.6}$$

Reciprocamente, suponha que $f : X \to Y$ seja R-S-abstrata p-somante. Considere $C(K)$ o espaço de Banach constituído por todas as funções reais contínuas definidas em K. Para cada conjunto finito $M = \{(x_1, b_1), ..., (x_k, b_k)\} \subset E \times G$, definimos

$$\Psi_M : K \to \mathbb{R}$$

por

$$\Psi_M(\varphi) = \sum_{(x,b) \in M} \left(S(f, x, b)^p - \pi_{RS,p}(f) \, R(\varphi, x, b)^p \right)$$

É necessário considerar M como uma sequência finita de elementos de $E \times G$ ao invés de um subconjunto finito (isto é, repetições são permitidas).

Distribuindo adequadamente o somatório na definição de Ψ_M, podemos notar que esta função é uma soma de uma função constante

$$C(\varphi) = \sum_{(x,b) \in M} S(f, x, b)^p$$

com uma função contínua

$$h(\varphi) = -\pi_{RS,p}(f) \sum_{(x,b) \in M} R(\varphi, x, b)^p,$$

justificando que $\Psi_M \in C(K)$.

Sejam agora $\mathcal{G}$ o conjunto formado por todas as Ψ_M e $\mathcal{F}$ a sua envoltória convexa, isto é

$$\mathcal{F}=\left\{\Psi=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\Psi_{M_j};\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1,\text{ com }\lambda_j\in[0,1],\ \Psi_{M_j}\in\mathcal{G},\ j=1,...,k\in\mathbb{N}\right\}$$

É claro que $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}\subset C(K)$.

Vamos mostrar que para cada $\Psi\in\mathcal{F}$ existe $\varphi_\Psi\in K$ tal que $\Psi(\varphi_\Psi)\leq 0$. De fato, dado $\Psi\in\mathcal{F}$ existem $k\in\mathbb{N}$, $\lambda_1,...,\lambda_k\in[0,1]$ com $\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j=1$ e $\Psi_{M_1},...,\Psi_{M_k}\in\mathcal{G}$ tais que $\Psi=\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j\Psi_{M_j}$.

Defina

$$M_\Psi=\bigcup_{j=1}^{k}\left\{\left(x,\lambda_j^{\frac{1}{p}}b\right);(x,b)\in M_j\right\}$$

e escolha $\varphi_\Psi\in K$ tal que

$$\sum_{(x,b)\in M_\Psi}R(\varphi_\Psi,x,b)^p=\sup_{\varphi\in K}\sum_{(x,b)\in M_\Psi}R(\varphi,x,b)^p$$

Conforme já comentamos, como cada $R_{x,b}$ é uma função real contínua no compacto K, a existência de φ_Ψ está garantida.

Então,

$$\begin{aligned}
\Psi(\varphi_\Psi)&=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\Psi_{M_j}(\varphi_\Psi)\\
&=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\sum_{(x,b)\in M_j}\left(S(f,x,b)^p-\pi_{RS,p}(f)\,R(\varphi_\Psi,x,b)^p\right)\\
&=\sum_{j=1}^{k}\sum_{(x,b)\in M_j}\lambda_j\left(S(f,x,b)^p-\pi_{RS,p}(f)\,R(\varphi_\Psi,x,b)^p\right)\\
&=\sum_{j=1}^{k}\sum_{(x,b)\in M_j}\left(\lambda_jS(f,x,b)^p-\pi_{RS,p}(f)\,\lambda_jR(\varphi_\Psi,x,b)^p\right)\\
&\leq\sum_{j=1}^{k}\sum_{(x,b)\in M_j}\left(S\left(f,x,\lambda_j^{\frac{1}{p}}b\right)^p-\pi_{RS,p}(f)\,R\left(\varphi_\Psi,x,\lambda_j^{\frac{1}{p}}b\right)^p\right)\\
&\overset{(1)}{=}\sum_{(x,w)\in M_\Psi}\left(S(f,x,w)^p-\pi_{RS,p}(f)\,R(\varphi_\Psi,x,w)^p\right)\\
&=\Psi_{M_\Psi}(\varphi_\Psi).
\end{aligned}$$

Para que a igualdade (1) seja verdadeira, é necessário considerar cada M_j como uma sequência finita de elementos de $E\times G$ ao invés de um subconjunto finito do mesmo. Assim, a união definida em M_Ψ tem o sentido de "colar"a sequência finita correspondente (em M_Ψ) a M_j na sua correspondente à subsequente M_{j+1}, ao invés de considerarmos a união no seu sentido usual.

Pela desigualdade (2.1), obtemos que $\Psi_{M_\Psi}(\varphi_\Psi) \leq 0$ e, portanto

$$\Psi(\varphi_\Psi) \leq 0. \tag{2.7}$$

Seja

$$\mathcal{P} = \{f \in C(K)\,; f(\varphi) > 0 \text{ para todo } \varphi \in K\}$$

É claro que $\mathcal{P}$ é não-vazio, pois cada função constante positiva definida em K pertence a $\mathcal{P}$. Pela definição de $\mathcal{P}$ e de (2.7) temos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{F} = \varnothing$. Além disso, o Lema 1.2.7 garante que $\mathcal{P}$ é convexo e aberto em $C(K)$. Então, pelo Teorema de Hanh-Banach (forma geométrica), existem $L \in \mathbb{R}$ e $h \in C(K)'$ tais que

$$h(\Psi) \leq L < h(f) \tag{2.8}$$

para toda $\Psi \in \mathcal{F}$ e toda $f \in \mathcal{P}$.

Se $x_0 \in E$ é tal que $R(\varphi, x_0, b) = S(f, x_0, b) = 0$ para cada $\varphi \in K$ e $b \in G$, então

$$0 = S(f, x_0, b)^p - \pi_{RS,p}(f)\, R(\varphi, x_0, b)^p = \Psi_{\{(x_0,b)\}}(\varphi)$$

para cada $\varphi \in K$. Temos daí que $0 \equiv \Psi_{\{(x_0,b)\}} \in \mathcal{F}$. Portanto, $0 = h(0) \leq L$. Como a função constante $\frac{1}{k}$, definida em K, pertence a $\mathcal{P}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, segue de (2.8) que $0 \leq L < h\left(\frac{1}{k}\right)$. Fazendo $k \to +\infty$, como h é contínua, $h\left(\frac{1}{k}\right) \to h(0) = 0$ e obtemos que $L = 0$. Daí, reescrevemos (2.8) como

$$h(\Psi) \leq 0 < h(f) \tag{2.9}$$

para toda $\Psi \in \mathcal{F}$ e toda $f \in \mathcal{P}$.

Vamos mostrar que se $f \geq 0$ então $h(f) \geq 0$, para toda $f \in C(K)$. De fato, seja $f \in C(K)$ tal que $f \geq 0$. Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, a função $g_k : K \to \mathbb{R}$ como

$$g_k(\varphi) = f(\varphi) + \frac{1}{k}.$$

Então $g_k \in \mathcal{P}$ e, de (2.9), segue que

$$\begin{cases} h(g_k) > 0 \\ \|g_k - f\|_{C(K)} = \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$g_k \to f$$

e, como h é contínua, segue que

$$h(f) = \lim_{k\to\infty} h(g_k) \geq 0$$

sempre que $f \geq 0$.

Seja $h_1 \in C(K)'$ dado por

$$h_1(w) = \frac{h(w)}{h(1)}.$$

De (2.9), $h(1) > 0$, de modo que h_1 está bem definido. Sua linearidade e continuidade decorrem da linearidade e continuidade de h. Note ainda que $h_1(1) = 1$ e que $h_1(w) \geq 0$ sempre que $w \geq 0$. Do Teorema 1.2.8, existe uma única medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel de K, $\mathcal{B}(K)$, tal que

$$h_1(w) = \int_K w(\varphi)\, d\mu(\varphi)$$

para todo $w \in C(K)$. Então, de (2.9) obtemos que

$$\int_K g(\varphi)\, d\mu(\varphi) = h_1(g) \leq 0$$

para cada $g \in \mathcal{F}$. Pois,

$$h_1(g) = \frac{h(g)}{h(1)} \leq \frac{L}{h(1)} = 0$$

para cada $g \in \mathcal{F}$. Em particular, para cada $(x, b) \in E \times G$ temos que $\Psi_{\{(x,b)\}} \in \mathcal{F}$, e

$$\int_K \Psi_{\{(x,b)\}}(\varphi)\, d\mu(\varphi) \leq 0$$

Então

$$\begin{gathered}
\int_K \left(S(f,x,b)^p - \pi_{RS,p}(f)\, R(\varphi,x,b)^p\right) d\mu(\varphi) \leq 0 \\
\Rightarrow \int_K S(f,x,b)^p\, d\mu(\varphi) - \pi_{RS,p}(f) \int_K R(\varphi,x,b)^p\, d\mu(\varphi) \leq 0 \\
\Rightarrow S(f,x,b)^p \int_K d\mu(\varphi) \leq \pi_{RS,p}(f) \int_K R(\varphi,x,b)^p\, d\mu(\varphi) \\
\Rightarrow S(f,x,b)^p\, \mu(K) \leq \pi_{RS,p}(f) \int_K R(\varphi,x,b)^p\, d\mu(\varphi) \\
\Rightarrow S(f,x,b)^p \leq \pi_{RS,p}(f) \int_K R(\varphi,x,b)^p\, d\mu(\varphi)
\end{gathered}$$

Elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$, obtemos

$$S(f,x,b) \leq \pi_{RS,p}(f)^{\frac{1}{p}} \left(\int_K R(\varphi,x,b)^p\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.10}$$

De (2.10) e de (2.6), segue que $\pi_{RS,p}(f)^{\frac{1}{p}}$ é a menor das constantes que satisfaz (2.5), e a prova está completa. ■

Capítulo 3

Unificando os Conhecidos Teoremas de Dominação

Como já mencionamos, para várias classes de funções *absolutamente somantes* encontradas na literatura, existe um *teorema de dominação* correspondente. Neste capítulo, mostraremos que, para convenientes escolhas de X, Y, E , K, G, $\mathcal{H}$, R e S, uma função somante pertencente a uma classe dada se torna precisamente uma função *R-S-abstrata p-somante*, definida no Capítulo 2. Consequentemente, veremos que o teorema de dominação correspondente à sua classe poderá ser demonstrado a partir de uma aplicação direta de nosso TDPU. Feito isto, teremos concluído que tais conhecidos teoremas podem todos serem substituídos por um único, o TDPU.

3.1 O Teorema da Dominação de Pietsch para operadores lineares absolutamente p-somantes

A Proposição 1.2.5 nos permite redefinir o conceito de operadores absolutamente p-somantes.

Definição 3.1.1 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $u : X \to Y$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que u é absolutamente p-somante (ou simplesmente p-somante) se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

para quaisquer $x_1, ..., x_m \in X$ e $m \in \mathbb{N}$. A menor das constantes C tais que a desigualdade (3.1) continua válida é denotada por $\pi_p(u)$.

Seja E um espaço de Banach. Sabemos que a topologia fraca estrela $\sigma(E', E)$ em E' é Hausdorff. O Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki afirma que no espaço dual E', munido com a topologia fraca estrela, a bola unitária fechada $B_{E'} = \{\varphi \in E'; \|\varphi\| \leq 1\}$ é compacta. Como todo subespaço de um espaço topológico de Hausdorff é Hausdorff, segue que $B_{E'}$, com a topologia fraca estrela induzida, é um espaço topológico de Hausdorff compacto.

Sendo assim, podemos escolher $X = E$ e Y espaços de Banach, $K = B_{E'}$, $G = \mathbb{K}$ e $\mathcal{H} = \mathcal{L}(X;Y)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y, e definir as funções R e S da seguinte forma:

$$R : B_{E'} \times X \times \mathbb{K} \to [0,\infty) \ ,$$

$$R(\varphi, x, \lambda) = |\lambda| \, |\varphi(x)|$$

e

$$S : \mathcal{L}(X;Y) \times X \times \mathbb{K} \to [0,\infty),$$
$$S(T, x, \lambda) = |\lambda| \, \|T(x)\| \, .$$

Observação 3.1.2 *Ao longo desta seção, R e S denotarão as funções definidas sob as condições acima.*

Verifiquemos que R e S satisfazem as três condições impostas pelo ambiente abstrato criado no capítulo 2.

De fato, escolhendo $x_0 = 0$ a condição (i) fica claramente satisfeita.

Para verificarmos a condição (ii), fixados $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, definimos a função

$$R_{x,\lambda} : B_{E'} \to [0,\infty)$$

por

$$R_{x,\lambda}(\varphi) = R(\varphi, x, \lambda) = |\lambda| \, |\varphi(x)| \, ,$$

que também pode ser escrita como

$$R_{x,\lambda}(\varphi) = |\lambda| \, |Jx(\varphi)| \, ,$$

para todo $\varphi \in B_{E'}$, onde J é a injeção canônica de E em E''. Assim, a continuidade de $R_{x,\lambda}$ segue da continuidade do funcional $Jx : (E', \sigma(E', E)) \to \mathbb{K}$, uma vez que $R_{x,\lambda}$ será uma composta de funções contínuas.

Finalmente, tome $\varphi \in B_{E'}$, $x \in X$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ arbitrários. Temos:

$$\begin{aligned} R(\varphi, x, \eta\lambda) &= |\eta\lambda| \, |\varphi(x)| \\ &= \eta\left(|\lambda| \, |\varphi(x)|\right) \\ &= \eta R(\varphi, x, \lambda) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\eta S(T,x,\lambda) &= \eta\left(|\lambda|\,\|T(x)\|\right)\\ &= |\eta\lambda|\,\|T(x)\|\\ &= S(T,x,\eta\lambda)\end{aligned}$$

para quaisquer $\varphi \in B_{E'}$, $x \in X$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{L}(X;Y)$, e a condição (iii) fica também satisfeita.

Mostraremos agora que, para estas escolhas de X, Y, E, K, G, $\mathcal{H}$, R e S, todo operador $T : X \to Y$ *absolutamente* p*-somante* é, precisamente, uma função *R-S abstrata* p*-somante.* É o que diz a

Proposição 3.1.3 *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $T : X \to Y$ *um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Então,* T *é absolutamente* p*-somante se, e somente se, é R-S abstrato* p*-somante. Além disso,* $\pi_{RS,p}(T)^{\frac{1}{p}} = \pi_p(T)$

Demonstração: Suponha que T seja *absolutamente* p*-somante.* Sejam dados $x_1, ..., x_m \in X$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} S(T,x_j,\lambda_j)^p &= \sum_{j=1}^{m}\left(|\lambda_j|\,\|T(x_j)\|\right)^p \\ &= \sum_{j=1}^{m}\left(\|T(\lambda_j x_j)\|\right)^p\end{aligned} \tag{3.2}$$

e, pela hipótese, existe $C \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\left(\|T(\lambda_j x_j)\|\right)^p &\leq C^p \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi(\lambda_j x_j)|^p\right)\\ &= C^p \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(|\lambda_j|\,|\varphi(x_j)|\right)^p\right)\\ &= C^p \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{m}R(\varphi,x_{j,}\lambda_j)^p\right).\end{aligned} \tag{3.3}$$

De (3.2) e (3.3) segue que

$$\sum_{j=1}^{m} S(T,x_j,\lambda_j)^p \leq C^p \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{m}R(\varphi,x_{j,}\lambda_j)^p\right) \tag{3.4}$$

para quaisquer $x_1, ..., x_m \in X$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Portanto, T é *R-S abstrato* p*-somante.* Note que $C = \pi_p(T)$ também satisfaz (3.3) e, portanto, segue de (3.4) que

$$\pi_{RS,p}(T)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T). \tag{3.5}$$

Reciprocamente, se $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ é *R-S abstrato p-somante* então, para quaisquer $x_1, ..., x_m \in X$ e $m \in \mathbb{N}$, temos:

$$\sum_{j=1}^{m} \|T(x_j)\|^p = \sum_{j=1}^{m} S(T, x_j, 1)^p \tag{3.6}$$

e, por hipótese, existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} S(T, x_j, 1)^p &\leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, 1)^p \right) \\ &= C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

De (3.6) e (3.7) elevando os membros extremos a $\frac{1}{p}$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.8}$$

donde concluímos que T é *absolutamente p-somante.* Como $\pi_{RS,p}(T)$ também satisfaz (3.7), segue de (3.8) que

$$\pi_{RS,p}(T)^{\frac{1}{p}} \geq \pi_p(T). \tag{3.9}$$

De (3.5) e (3.9) concluímos que $\pi_{RS,p}(T)^{\frac{1}{p}} = \pi_p(T)$. ■

Veremos agora como o Teorema da Dominação de Pietsch segue como consequência do Teorema 2.2.1. O famoso Teorema da Dominação de Pietsch, estudado na teoria linear clássica dos operadores absolutamente somantes, encontra-se enunciado e provado no primeiro capítulo desta dissertação. Iremos enunciá-lo novamente e substituir aquela demonstração por outra, agora bem mais simples. Após isto, o leitor deverá estar convencido de que tal teorema também pode ser visto como um caso particular do TDPU.

Teorema 3.1.4 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $T: X \to Y$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Então T é absolutamente p-somante se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel de $B_{X'}$, com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.10}$$

para todo $x \in X$. Neste caso, $\pi_p(T)$ é a menor das constantes C tais que (3.10) ocorre.

Demonstração: Suponhamos que existam C e μ descritas na hipótese tais que a desigualdade (3.10) ocorra para todo $x \in X$. Então, também ocorre

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \|T(x_j)\|^p &\leq C^p \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right) \\
&= C^p \int_{B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x)|^p \right) d\mu(\varphi) \\
&\leq C^p \int_{B_{X'}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x)|^p \right) d\mu(\varphi) \\
&= C^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x)|^p \right) \int_{B_{X'}} d\mu(\varphi) \\
&= C^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x)|^p \right) \mu(B_{X'}) \\
&= C^p \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x)|^p \right)
\end{aligned}$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $m \in \mathbb{N}$, uma vez que μ é medida de probabilidade. Portanto, pela Proposição 1.2.5, T é absolutamente p-somante e

$$\pi_p(T) \leq C \tag{3.11}$$

Assumindo que $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ seja *absolutamente p-somante* então, pela Proposição 3.1.3, T é *R-S abstrato p-somante.* Como R e S satisfazem as condições exigidas pelo ambiente abstrato, o Teorema 2.2.1 nos garente as existências de uma constante $C \geq 0$ e de uma medida de probabilidade de Borel μ sobre $\mathcal{B}(B_{E'})$ tais que

$$S(T, x, \lambda) \leq C \left(\int_{B_{E'}} R(\varphi, x, \lambda)^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.12}$$

para quaisquer $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então,

$$|\lambda| \, \|T(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E'}} |\lambda|^p \, |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}},$$

isto é,

$$|\lambda| \, \|T(x)\| \leq |\lambda| \, C \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

e portanto

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.13}$$

para todo $x \in X$. Lembre que $\pi_{RS,p}(T)^{\frac{1}{p}} = \pi_p(T)$ também satisfaz (3.12) e, por recorrência, satisfaz (3.13). Este fato e (3.11) garantem que $\pi_p(T)$ é a menor das constantes C tais que (3.10) ocorre. ■

3.2 O teorema de dominação para aplicações multilineares p-semi-integrais

A classe das aplicações p-semi-integrais foi introduzida em [11, 31] e são casos particulares de funções R-S abstratas p-somantes, como veremos em seguida.

Definição 3.2.1 *Sejam $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, $E_1, ..., E_n$ e F espaços de Banach. Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é p-semi-integral quando existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|T(x_{1,j}, ..., x_{n,j})\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\substack{\varphi_l \in B_{E_l'} \\ l=1,...,n}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi_1(x_{1,j}) ... \varphi_n(x_{n,j})|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para quaisquer $m \in \mathbb{N}$, $x_{l,j} \in E_l$ com $l = 1, ..., n$ e $j = 1, ...m$. O ínfimo das constantes C tais que a desigualdade acima continua válida é denotado por $\|T\|_{si,p}$.

Como, para cada $l = 1, ..., n$, a bola $B_{E_l'}$, com a topologia fraca estrela induzida, é um espaço topológico de Hausdorff compacto, então, pelo Teorema de Tychonoff, o produto

$$B_{E_1'} \times \cdots \times B_{E_n'},$$

munido com a topologia produto $\prod_{l=1}^{n} \sigma(E_l', E_l)$, também o é.

Considere $n \in \mathbb{N}$, $X_1, ..., X_n$ e Y espaços de Banach e escolha $E = X = X_1 \times \cdots \times X_n$, $K = B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_n'}$, $G = \mathbb{K}$ e $\mathcal{H} = \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$. Defina as funções R e S da seguinte forma:

$$R : \left(B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_n'}\right) \times (X_1 \times \cdots \times X_n) \times \mathbb{K} \to [0, \infty),$$

$$R((\varphi_1, ..., \varphi_n), (x_1, ..., x_n), \lambda) = |\lambda| |\varphi_1(x_1) ... \varphi_n(x_n)|$$

e

$$S : \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y) \times (X_1 \times \cdots \times X_n) \times \mathbb{K} \to [0, \infty),$$

$$S(T, (x_1, ..., x_n), \lambda) = |\lambda| \|T(x_1, ..., x_n)\|.$$

É fácil ver que R e S estão bem definidas.

As funções R e S assim definidas satisfazem as condições impostas pelo ambiente abstrato. De fato, tome $x_0 = (0, ..., 0)$ e a condição (i) fica claramente satisfeita.

Para cada $x = (x_1, ..., x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ previamente fixados, defina

$$R_{x,\lambda} : B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_n'} \to [0, \infty)$$

por

$$R_{x,\lambda}(\varphi_1, ..., \varphi_n) = |\lambda| |\varphi_1(x_1) ... \varphi_n(x_n)|.$$

Vamos mostrar que $R_{x,\lambda}$ é contínua em $B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_n'}$. Sejam $(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_n'}$ e $\left(\varphi_1^{(\gamma)}, ..., \varphi_n^{(\gamma)}\right)_{\gamma \in \Gamma}$ uma rede em $B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_n'}$ tais que

$$\left(\varphi_1^{(\gamma)}, ..., \varphi_n^{(\gamma)}\right) \to (\varphi_1, ..., \varphi_n).$$

Então, como $B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_n'}$ está com a topologia produto, segue que

$$\begin{aligned} &\varphi_1^{(\gamma)} \to \varphi_1 \text{ na topologia fraca estrela de } B_{X_1'} \\ &\vdots \\ &\varphi_n^{(\gamma)} \to \varphi_n \text{ na topologia fraca estrela de } B_{X_n'} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Assim, como $Jx_1, ..., Jx_n$ são contínuas, é claro que

$$\begin{aligned} Jx_1(\varphi_1^{(\gamma)}) &\to Jx_1(\varphi_1) \text{ em } \mathbb{K} \\ &\vdots \\ Jx_n(\varphi_n^{(\gamma)}) &\to Jx_n(\varphi_n) \text{ em } \mathbb{K}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(\gamma)}(x_1) &\to \varphi_1(x_1) \text{ em } \mathbb{K} \\ &\vdots \\ \varphi_n^{(\gamma)}(x_n) &\to \varphi_n(x_n) \text{ em } \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Logo, por propriedades elementares da topologia usual de $\mathbb{K}$, segue que

$$|\lambda| \, \varphi_1^{(\gamma)}(x_1) ... \varphi_n^{(\gamma)}(x_n) \to |\lambda| \, \varphi_1(x_1) ... \varphi_n(x_n),$$

e obtemos a continuidade de $R_{x,\lambda}$, para todos $x = (x_1, ..., x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, obtendo (ii).

Para verificarmos a condição (iii), tome $(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_n'}$, $(x_1, ..., x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$, $0 < \eta < 1$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$ arbitrários. Temos:

$$\begin{aligned} R\left((\varphi_1, ..., \varphi_n), (x_1, ..., x_n), \eta\lambda\right) &= |\eta\lambda| \, |\varphi_1(x_1) ... \varphi_n(x_n)| \\ &= \eta \left(|\lambda| \, |\varphi_1(x_1) ... \varphi_n(x_n)|\right) \\ &= \eta R\left((\varphi_1, ..., \varphi_n), (x_1, ..., x_n), \lambda\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta S\left(T, (x_1, ..., x_n), \lambda\right) &= \eta \left(|\lambda| \, \|T(x_1, ..., x_n)\|\right) \\ &= |\eta\lambda| \, \|T(x_1, ..., x_n)\| \\ &= S\left(T, (x_1, ..., x_n), \eta\lambda\right) \end{aligned}$$

para todos $(\varphi_1, ..., \varphi_n) \in B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_n'}$, $(x_1, ..., x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$, $0 < \eta < 1$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$, e obtemos (iii).

Proposição 3.2.2 *Sejam R e S funções definidas como acima e $1 \leq p < \infty$. Uma aplicação n-linear contínua $T : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ é p-semi-integral se, e somente se, é R-S abstrata p-somante.*

Demonstração: Suponha que T seja p-semi-integral e sejam dados $x^{(1)} = (x_{1,1}, ..., x_{n,1}), ..., x^{(m)} = (x_{1,m}, ..., x_{n,m}) \in X_1 \times \cdots \times X_n$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} S\left(T, (x_{1,j}, ..., x_{n,j}), \lambda_j\right)^p &= \sum_{j=1}^{m} \left(|\lambda_j| \left\|T\left(x_{1,j}, ..., x_{n,j}\right)\right\|\right)^p \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\left\|T\left(\lambda_j x_{1,j}, ..., x_{n,j}\right)\right\|\right)^p . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Como T é p-semi-integral, existe $C \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} \left(\left\|T\left(\lambda_j x_{1,j}, ..., x_{n,j}\right)\right\|\right)^p \\ &\leq C^p \sup_{\substack{\varphi_l \in B_{X_l'} \\ l=1,...,n}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_1\left(\lambda_j x_{1,j}\right) ... \varphi_n\left(x_{n,j}\right)\right|^p\right) \\ &= C^p \sup_{\substack{\varphi_l \in B_{X_l'} \\ l=1,...,n}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(|\lambda_j| \left|\varphi_1\left(x_{1,j}\right) ... \varphi_n\left(x_{n,j}\right)\right|\right)^p\right) \\ &= C^p \sup_{(\varphi_1,...,\varphi_n) \in B_{X_1'} \times \cdots \times B_{X_n'}} \left(\sum_{j=1}^{m} R\left(\left(\varphi_1, ..., \varphi_n\right), \left(x_{1,j}, ..., x_{n,j}\right), \lambda_j\right)^p\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

para todos $x^{(1)} = (x_{1,j}, ..., x_{n,j}), ..., x^{(m)} = (x_{1,m}, ..., x_{n,m}) \in X_1 \times \cdots \times X_n$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Portanto, de (3.15) e (3.16) segue que T é R-S abstrato p-somante.

Reciprocamente, suponha que T é R-S abstrato p-somante. Então, para quaisquer $m \in \mathbb{N}$, $x_{l,j} \in X_l$ com $l = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left\|T\left(x_{1,j}, ..., x_{n,j}\right)\right\|^p\right) = \sum_{j=1}^{m} S\left(T, (x_{1,j}, ..., x_{n,j}), 1\right)^p \tag{3.17}$$

e como T é R-S abstrato p-somante, existe $C \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} S\left(T,\left(x_{1,j},...,x_{n,j}\right),1\right)^{p} \qquad (3.18)\\
&\leq C \sup_{\left(\varphi_{1},...,\varphi_{n}\right)\in B_{X_{1}'}\times\cdots\times B_{X_{n}'}}\left(\sum_{j=1}^{m} R\left(\left(\varphi_{1},...,\varphi_{n}\right),\left(x_{1,j},...,x_{n,j}\right),1\right)^{p}\right)\\
&= C \sup_{\substack{\varphi_{l}\in B_{X_{l}'}\\ l=1,...,n}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_{1}\left(x_{1,j}\right)...\varphi_{n}\left(x_{n,j}\right)\right|^{p}\right)
\end{aligned}$$

Usando (3.17) e (3.18) e elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$ obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|T\left(x_{1,j},...,x_{n,j}\right)\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq C^{\frac{1}{p}} \sup_{\substack{\varphi_{l}\in B_{X_{l}'}\\ l=1,...,n}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_{1}\left(x_{1,j}\right)...\varphi_{n}\left(x_{n,j}\right)\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

e T é p-semi-integral. ■

O seguinte teorema de dominação aparece em [11]. Vamos demonstrá-lo utilizando o Teorema Abstrato.

Teorema 3.2.3 *Sejam $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, $E_1,...,E_n$ e F espaços de Banach e $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ uma aplicação n-linear contínua. Então T é p-semi-integral se, e somente se, existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}\left(B_{E_1'} \times \cdots \times B_{E_n'}\right)$ de $B_{E_1'} \times \cdots \times B_{E_n'}$ munido com o produto das topologias fracas-estrelas $\sigma\left(E_l', E_l\right)$, $l = 1,...,n$, tais que*

$$\left\|T\left(x_{1},...,x_{n}\right)\right\| \leq C\left(\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}}\left|\varphi_{1}\left(x_{1}\right)...\varphi_{n}\left(x_{n}\right)\right|^{p} d\mu\left(\varphi_{1},...,\varphi_{n}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $x_j \in E_j$ e $j = 1,...n$.

Demonstração: Suponha que T é p-semi-integral. Então, pela Proposição 3.2.2, T é R-S abstrato p-somante com R e S acima definidas. Como R e S satisfazem as condições do ambiente abstrato, segue do Teorema Abstrato que existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}\left(B_{E_1'} \times \cdots \times B_{E_n'}\right)$ de $B_{E_1'} \times \cdots \times B_{E_n'}$ tais que

$$\begin{aligned}
&S\left(T,\left(x_{1},...,x_{n}\right),\lambda\right)\\
&\leq C\left(\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}} R\left(\left(\varphi_{1},...,\varphi_{n}\right),\left(x_{1},...,x_{n}\right),\lambda\right)^{p} d\mu\left(\varphi_{1},...,\varphi_{n}\right)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

para todos $(x_1, ...x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Daí,

$$
\begin{aligned}
|\lambda| \|T(x_1, ...x_n)\| &\leq C \left(\int_{B_{E_1'} \times \cdots \times B_{E_n'}} |\lambda|^p |\varphi_1(x_1) ... \varphi_n(x_n)|^p \, d\mu(\varphi_1, ..., \varphi_n) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| C \left(\int_{B_{E_1'} \times \cdots \times B_{E_n'}} |\varphi_1(x_1) ... \varphi_n(x_n)|^p \, d\mu(\varphi_1, ..., \varphi_n) \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
\|T(x_1, ...x_n)\| \leq C \left(\int_{B_{E_1'} \times \cdots \times B_{E_n'}} |\varphi_1(x_1) ... \varphi_n(x_n)|^p \, d\mu(\varphi_1, ..., \varphi_n) \right)^{\frac{1}{p}}
$$

para todos $x_j \in E_j$ e $j = 1, ...n$.

A recíproca se prova de modo análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema Abstrato. ■

3.3 O teorema de dominação para funções subhomogêneas

A classe das funções subhomogêneas aqui definida foi introduzida em [7]. Veremos que uma função absolutamente-somante desta classe é precisamente uma função R-S abstrata p-somante (Proposição 3.3.3), e que seu correspondente teorema de dominação é mais uma consequência do Teorema Abstrato.

Definição 3.3.1 *Sejam $\alpha > 0$ e $f : E \to F$ uma função entre espaços de Banach. Dizemos que f é α-subhomogênea quando*

$$
\|f(\lambda x)\| \geq \lambda^\alpha \|f(x)\|
$$

para todo $x \in E$ e $0 < \lambda < 1$.

A seguinte definição aparece em [7] como teorema que caracteriza funções α-subhomogêneas absolutamente-somantes [7, Theorem 2.3]. Por questões de objetividade preferimos usá-lo como definição.

Definição 3.3.2 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\alpha > 0$. Uma função α-subhomogênea $f : E \to F$ é dita absolutamente $\left(\frac{p}{\alpha}; p\right)$-somante quando existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$
\left(\sum_{j=1}^m \|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^m |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{\alpha}{p}}
$$

para todos $x_1, ..., x_m \in E$ e $m \in \mathbb{N}$.

Agora construiremos o ambiente adequado para que seja provado o TDP para funções α-subhomogêneas. Escolha $E = X$ e Y espaços de Banach,

$$\mathcal{H} = \{f : X \to Y; f \text{ é } \alpha\text{-subhomogênea e } f(0) = 0\},$$

$K = B_{X'}$, $G = \mathbb{K}$, e defina R e S como

$$R : B_{X'} \times X \times \mathbb{K} \to [0, \infty),$$

$$R(\varphi, x, \lambda) = |\lambda| \, |\varphi(x)|$$

e

$$S : \mathcal{H} \times X \times \mathbb{K} \to [0, \infty),$$

$$S(f, x, \lambda) = |\lambda| \, \|f(x)\|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Note que as funções R e S assim definidas satisfazem as condições do ambiente abstrato. De fato, escolhendo $x_0 = 0 \in E$, obtemos

$$R(\varphi, x_0, \lambda) = S(f, x_0, \lambda) = 0$$

para todos $\varphi \in \mathbb{K}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Dados quaisquer $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, a continuidade da função

$$R_{x,\lambda} : B_{X'} \to [0, \infty)$$

dada por

$$R_{x,\lambda}(\varphi) = |\lambda| \, |\varphi(x)|$$

se justifica de modo idêntico ao feito na Seção 3.1. Resta provar a condição (iii). Sejam então $\varphi \in B_{X'}$, $x \in X$, $0 \leq \eta \leq 1$ e $f \in \mathcal{H}$. Temos

$$\begin{aligned} R(\varphi, x, \eta\lambda) &= |\eta\lambda| \, |\varphi(x)| \\ &= \eta \left(|\lambda| \, |\varphi(x)|\right) \\ &= \eta R(\varphi, x, \lambda) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta S(f, x, \lambda) &= \eta \left(|\lambda| \, \|f(x)\|^{\frac{1}{\alpha}}\right) \\ &= |\eta\lambda| \, \|f(x)\|^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= S(f, x, \eta\lambda) \end{aligned}$$

para todos $\varphi \in B_{X'}$, $x \in X$, $0 \leq \eta \leq 1$ e $f \in \mathcal{H}$.

Proposição 3.3.3 *Sejam R e S funções definidas como acima, $1 \leq p < \infty$ e $\alpha > 0$. Uma função $f \in \mathcal{H}$ é absolutamente $\left(\frac{p}{\alpha}; p\right)$-somante se, e somente se, é R-S abstrata p-somante.*

Demonstração: Suponha que f seja absolutamente $\left(\frac{p}{\alpha};p\right)$-somante e tome $x_1,...,x_m \in X$, $\lambda_1,...,\lambda_m \in \mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$ arbitrários. Temos

$$\sum_{j=1}^{m} S\left(f,x_j,\lambda_j\right)^p = \sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j\right|^p \left\|f\left(x_j\right)\right\|^{\frac{p}{\alpha}}. \tag{3.19}$$

Considere

$$\lambda_0 = \max\left\{\left|\lambda_1\right|,...,\left|\lambda_m\right|\right\}.$$

No caso em que $\lambda_0 = 0$ não há o que fazer, pois teríamos $\lambda_j = 0$ para todo j, e o resultado segue. Se $\lambda_0 > 0$, então

$$0 \leq \frac{\left|\lambda_j\right|}{\lambda_0} \leq 1$$

para todo $j = 1,...,m$. Como f é α-subhomogênea,

$$\left(\frac{\left|\lambda_j\right|}{\lambda_0}\right)^{\alpha} \left\|f\left(x_j\right)\right\| \leq \left\|f\left(\frac{\left|\lambda_j\right|}{\lambda_0}x_j\right)\right\|$$

para todo $j = 1,...,m$. Elevando ambos os membros a $\frac{p}{\alpha}$ e somando, obtemos

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\left|\lambda_j\right|}{\lambda_0}\right)^{p} \left\|f\left(x_j\right)\right\|^{\frac{p}{\alpha}} \leq \sum_{j=1}^{m} \left\|f\left(\frac{\left|\lambda_j\right|}{\lambda_0}x_j\right)\right\|^{\frac{p}{\alpha}}. \tag{3.20}$$

Como f é absolutamente $\left(\frac{p}{\alpha};p\right)$-somante, podemos encontrar uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m} \left\|f\left(\frac{\left|\lambda_j\right|}{\lambda_0}x_j\right)\right\|^{\frac{p}{\alpha}} \leq C^{\frac{p}{\alpha}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi\left(\frac{\left|\lambda_j\right|}{\lambda_0}x_j\right)\right|^{p}\right). \tag{3.21}$$

Usando a linearidade de $\varphi \in B_{X'}$ e uma propriedade elementar do supremo, obtemos de (3.20) e (3.21) que

$$\frac{1}{\lambda_0^p}\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j\right|^p \left\|f\left(x_j\right)\right\|^{\frac{p}{\alpha}} \leq \frac{1}{\lambda_0^p} C^{\frac{p}{\alpha}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j\right|^p \left|\varphi\left(x_j\right)\right|^p\right),$$

e portanto

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j\right|^p \left\|f\left(x_j\right)\right\|^{\frac{p}{\alpha}} &\leq C^{\frac{p}{\alpha}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_j\right|^p \left|\varphi\left(x_j\right)\right|^p\right) \\ &= C^{\frac{p}{\alpha}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=1}^{m} R\left(\varphi,x_j,\lambda_j\right)^p\end{aligned} \tag{3.22}$$

para todos $x_1,...,x_m \in X$, $\lambda_1,...,\lambda_m \in \mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Finalmente, de (3.19) e (3.22) concluímos que

$$\sum_{j=1}^{m} S\left(f,x_j,\lambda_j\right)^p \leq C^{\frac{p}{\alpha}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=1}^{m} R\left(\varphi,x_j,\lambda_j\right)^p$$

para todos $x_1, ..., x_m \in X$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Logo, f é R-S abstrata p-somante.

Reciprocamente, suponha que $f \in \mathcal{H}$ seja R-S abstrata p-somante. Sejam dados $x_1, ..., x_m \in X$ e $m \in \mathbb{N}$, então

$$\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}} = \sum_{j=1}^{m} S(f, x_j, 1)^p \tag{3.23}$$

e, por hipótese, existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} S(f, x_j, 1)^p &\leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, 1)^p \\ &= C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p . \end{aligned} \tag{3.24}$$

Usando (3.23) e (3.24) e elevando ambos os membros a $\frac{\alpha}{p}$ obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{p}} \leq C^{\frac{\alpha}{p}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{\alpha}{p}}$$

para todos $x_1, ..., x_m \in X$ e $m \in \mathbb{N}$. Logo, f é absolutamente $\left(\frac{p}{\alpha}; p\right)$-somante. ■

Apresentaremos agora o teorema de dominação para a classe das funções subhomogêneas. Este resultado encontra-se provado em [7, Theorem 2.4]. Observe como este mesmo teorema pode ser visto como um corolário do Teorema Abstrato.

Teorema 3.3.4 *Sejam $1 \leq p < \infty$, $\alpha > 0$ e $f : E \to F$ uma função α-subhomogênea. Então f é absolutamente $\left(\frac{p}{\alpha}, p\right)$-somante se, e somente se, existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}(B_{E'})$ de $B_{E'}$ com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|f(x)\| \leq C \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{\alpha}{p}} \tag{3.25}$$

para todo $x \in E$.

Demonstração: Se f é absolutamente $\left(\frac{p}{\alpha}, p\right)$-somante então, pela Definição 3.3.2, existe uma constante $C_b \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{p}} \leq C_b \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{\alpha}{p}}$$

para todos $x_1, ..., x_m \in X$ e $m \in \mathbb{N}$. Em particular, fazendo $m = 1$ e $x = 0$ obtemos

$$\|f(x)\| \leq C_b \sup_{\varphi \in B_{X'}} |\varphi(x)|^{\alpha},$$

donde vem que $\|f(0)\| = 0$ e, portanto, $f(0) = 0$. Assim, $f \in \mathcal{H}$ e, pela Proposição 3.3.3, f é R-S-abstrata p-somante. Pelo TDPU, existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}(K)$ de $K = B_{E'}$ com a topologia fraca estrela, tais que

$$S(f, x, \lambda) \leq C \left(\int_{B_{E'}} R(\varphi, x, \lambda)^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todos $x \in X = E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Pelas definições de R e S, segue que

$$|\lambda| \, \|f(x)\|^{\frac{1}{\alpha}} \leq C \left(\int_{B_{E'}} |\lambda|^p \, |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}},$$

isto é,

$$\|f(x)\|^{\frac{1}{\alpha}} \leq C \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x \in E$. Elevam-se ambos os membros desta desigualdade a α e o resultado segue.

Reciprocamente, seja $f : E \to F$ uma função α-subhomogênea. Suponha que existam uma constante $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ nos borelianos de $B_{E'}$, com a topologia fraca estrela, tais que a desigualdade (3.25) ocorra. Então, se $x_1, ..., x_m \in E$ e $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}} \leq C^{\frac{p}{\alpha}} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^p \, d\mu(\varphi)$$

para todo $x_j \in E$, com $j = 1, ..., m$. Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}} &\leq C^{\frac{p}{\alpha}} \sum_{j=1}^{m} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^p \, d\mu(\varphi) \\
&= C^{\frac{p}{\alpha}} \int_{B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right) d\mu(\varphi) \\
&\leq C^{\frac{p}{\alpha}} \int_{B_{E'}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right) d\mu(\varphi) \\
&= C^{\frac{p}{\alpha}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right) \int_{B_{E'}} d\mu(\varphi) \\
&= C^{\frac{p}{\alpha}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right),
\end{aligned}$$

uma vez que μ é uma medida de probabilidade em $\mathcal{B}(B_{E'})$. Consequentemente,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|f(x_j)\|^{\frac{p}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{\alpha}{p}}$$

para todos $x_1, ..., x_m \in E$ e $m \in \mathbb{N}$. Portanto, f é absolutamente $\left(\frac{p}{\alpha}; p\right)$-somante. ■

3.4 O teorema de dominação para aplicações multilineares $\tau(p)$-somantes

A classe das aplicações multilineares $\tau(p)$-somantes foi introduzida por X. Mujica em [30] e também é um caso particular de função R-S abstrata p-somante, como veremos adiante.

Definição 3.4.1 *Sejam $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, $E_1, ..., E_n$ e F espaços de Banach. Uma aplicação $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é dita $\tau(p)$-somante quando existe uma constante $C \geq 0$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_{ij} \in E_i$, $b_j \in F'$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$,*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |b_j(T(x_{1j}, ..., x_{nj}))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_1(x_{1j})...a_n(x_{nj})\, b_j(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

onde $a_i \in E_i'$ e $y \in F$. O ínfimo das constantes C tais que a desigualdade acima continua válida é denotado por $\|T\|_{\tau(p)}$.

A classe das funções multilineares $\tau(p)$-somantes $T \in \mathcal{L}(E_1, ..., E_n; F)$ é denotada por $\mathcal{L}_{\tau(p)}(E_1, ..., E_n; F)$.

Considere $n \in \mathbb{N}$, $X_1, ..., X_n$, e Y espaços de Banach. Escolha $E = X = X_1 \times ... \times X_n$, $\mathcal{H} = \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y)$, $K = B_{X_1'} \times ... \times B_{X_n'} \times B_{Y''}$ onde cada fator está munido com a topologia fraca estrela, $G = Y'$ e defina R e S como segue:

$$R : \left(B_{X_1'} \times ... \times B_{X_n'} \times B_{Y''}\right) \times (X_1 \times ... \times X_n) \times Y' \to [0, \infty),$$

$$R((\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi), (x_1, ..., x_n), b) = |\varphi_1(x_1)...\varphi_n(x_n)|\,|\varphi(b)|$$

e

$$S : \mathcal{L}(X_1, ..., X_n; Y) \times (X_1 \times ... \times X_n) \times Y' \to [0, \infty),$$
$$S(T, (x_1, ..., x_n), b) = |b(T(x_1, ..., x_n))|$$

É fácil ver que R e S estão bem definidas.

As funções R e S assim definidas cumprem as condições do ambiente abstrato. De fato, tomando $x_0 = (0, ..., 0) \in X$, as linearidades de T e dos funcionais garantem que a condição (i) fique claramente satisfeita. Para justificarmos (ii), fixamos $x = (x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$ e $b \in Y'$, definimos

$$R_{x,b} : \left(B_{X_1'} \times ... \times B_{X_n'} \times B_{Y''}\right) \to [0, \infty)$$

por

$$\begin{aligned} R_{x,b}(\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi) &= |\varphi_1(x_1)...\varphi_n(x_n)|\,|\varphi(b)| \\ &= |\varphi_1(x_1)...\varphi_n(x_n)\,\varphi(b)|, \end{aligned}$$

e sua continuidade fica demonstrada de modo análogo ao feito na Seção 3.2, considerando $\left(\varphi_1^{(\gamma)}, ..., \varphi_n^{(\gamma)}, \varphi^{(\gamma)}\right)_{\gamma\in\Gamma}$ uma rede convergindo a um dado $(\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi)$ em K e usando a continuidade dos funcionais $Jx_1, ..., Jx_n$ e $J'b$, onde $J'b$ é o funcional $J'b : (Y'', \sigma(Y'', Y')) \to \mathbb{K}$ definido por $J'b(\varphi) = \varphi(b)$. Finalmente,

$$\begin{aligned} R((\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi), (x_1, ..., x_n), \eta b) &= |\varphi_1(x_1) ... \varphi_n(x_n)| \, |\varphi(\eta b)| \\ &= \eta \, |\varphi_1(x_1) ... \varphi_n(x_n)| \, |\varphi(b)| \\ &= \eta R((\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi), (x_1, ..., x_n), b) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta S(T, (x_1, ..., x_n), b) &= \eta \, |b(T(x_1, ..., x_n))| \\ &= |\eta b(T(x_1, ..., x_n))| \\ &= |(\eta b)(T(x_1, ..., x_n))| \\ &= S(T, (x_1, ..., x_n), \eta b) \end{aligned}$$

para todos $(\varphi_1, ..., \varphi_n, \varphi) \in K$, $(x_1, ..., x_n) \in X$, $0 \leq \eta \leq 1$, $b \in Y'$ e $T \in \mathcal{H}$, e a condição (iii) fica satisfeita.

A próxima observação é útil para a demonstração do Lema 3.4.3.

Observação 3.4.2 *Lembre que se $1 \leq p < \infty$ e q é seu conjugado, o dual de ℓ_p é isometricamente isomorfo a ℓ_q, onde*

$$T : \ell_q \to (\ell_p)'$$

definida por

$$T(y) = \varphi : \ell_p \to \mathbb{K}$$

dada por

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

é o isomorfismo isométrico.

Lema 3.4.3 *Sejam E um espaço de Banach, $p \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $a_j \in E'$ e $j = 1, ...m$. Então,*

$$\sup_{\beta \in B_{E''}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\beta(a_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t \in B_E} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_j(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Demonstração: Considere a sequência $(a_j)_{j=1}^{\infty} = (a_1, a_2, ..., a_m, 0, 0, ...)$, com $a_j \in E'$. É claro que $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E')$ bem como $(a_j(t))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, para todo $t \in E$. Então,

$$\begin{aligned}
\sup_{\beta \in B_{E''}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\beta(a_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\beta \in B_{E''}} \left\| (\beta(a_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_p \overset{\mathtt{HB}}{=} \sup_{\beta \in B_{E''}} \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p)'}} \left| \varphi\left((\beta(a_j))_{j=1}^{\infty} \right) \right| \\
&= \sup_{\beta \in B_{E''}} \sup_{(y_j) \in B_{\ell_q}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} y_j \beta(a_j) \right| = \sup_{\beta \in B_{E''}} \sup_{(y_j) \in B_{\ell_q}} \left| \sum_{j=1}^{m} y_j \beta(a_j) \right| \quad (3.26) \\
&= \sup_{(y_j) \in B_{\ell_q}} \sup_{\beta \in B_{E''}} \left| \beta\left(\sum_{j=1}^{m} y_j a_j \right) \right| \overset{\mathtt{HB}}{=} \sup_{(y_j) \in B_{\ell_q}} \left\| \sum_{j=1}^{m} y_j a_j \right\| \\
&= \sup_{(y_j) \in B_{\ell_q}} \sup_{t \in B_E} \left| \left(\sum_{j=1}^{m} y_j a_j \right)(t) \right| = \sup_{t \in B_E} \sup_{(y_j) \in B_{\ell_q}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} y_j a_j(t) \right| \\
&= \sup_{t \in B_E} \sup_{\varphi \in B_{(\ell_p)'}} \left| \varphi\left((a_j(t))_{j=1}^{\infty} \right) \right| \overset{\mathtt{HB}}{=} \sup_{t \in B_E} \left\| (a_j(t))_{j=1}^{\infty} \right\|_p \quad (3.27) \\
&= \sup_{t \in B_E} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_j(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Nas passagens marcadas com (HB) utilizamos um dos corolários do Teorema de Hahn-Banach (veja [10, Corollaire I.4]), e em (3.26) e (3.27) usamos a caracterização do dual de ℓ_p (Observação 3.4.2). ■

Proposição 3.4.4 *Sejam R e S funções definidas como acima e $1 \leq p < \infty$. Uma aplicação n-linear contínua $T : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ é $\tau(p)$-somante se, e somente se, é R-S abstrata p-somante.*

Demonstração: Suponha que $T \in \mathcal{H}$ seja $\tau(p)$-somante e sejam dados $m \in \mathbb{N}$, $x_j = (x_{1j}, ..., x_{nj}) \in X$, $b_j \in Y'$ e $j = 1, ..., m$. Pela definição de S obtemos

$$\sum_{j=1}^{m} S(T, (x_{1j}, ..., x_{nj}), b_j)^p = \sum_{j=1}^{m} |b_j(T(x_{1j}, ..., x_{nj}))|^p, \tag{3.28}$$

e, como T é $\tau(p)$-somante, existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m} |b_j (T (x_{1j}, ..., x_{nj}))|^p \tag{3.29}$$

$$\leq C^p \sup_{\substack{a_i \in B_{X_i'} \\ y \in B_Y}} \left(\sum_{j=1}^{m} (|a_1 (x_{1j}) ... a_n (x_{nj})| \, |b_j (y)|)^p \right)$$

$$= C^p \sup_{\substack{a_i \in B_{X_i'} \\ Jy \in J(B_Y) \subset B_{Y''}}} \left(\sum_{j=1}^{m} (|a_1 (x_{1j}) ... a_n (x_{nj})| \, |Jy (b_j)|)^p \right)$$

$$= C^p \sup_{(a_1,...,a_n,Jy) \in B_{X_1'} \times ... \times B_{X_n'} \times B_{Y''}} \left(\sum_{j=1}^{m} R ((a_1, ..., a_n, Jy), (x_1, ..., x_n), b_j)^p \right)$$

$$\leq C^p \sup_{(a_1,...,a_n,y'') \in B_{X_1'} \times ... \times B_{X_n'} \times B_{Y''}} \left(\sum_{j=1}^{m} R ((a_1, ..., a_n, y''), (x_1, ..., x_n), b_j)^p \right). \tag{3.30}$$

De (3.28) e (3.29) concluímos que T é R-S abstrata p-somante.

Reciprocamente, suponha que $T \in \mathcal{H}$ seja R-S abstrata p-somante. Dados $m \in \mathbb{N}$, $x_{ij} \in X_i$, $b_j \in Y'$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$, temos pela definição de S que

$$\sum_{j=1}^{m} |b_j (T (x_{1j}, ..., x_{nj}))|^p = \sum_{j=1}^{m} S (T, (x_{1j}, ..., x_{nj}), b_j)^p, \tag{3.31}$$

e como T é R-S abstrata p-somante, existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m} S (T, (x_{1j}, ..., x_{nj}), b_j)^p \tag{3.32}$$

$$\leq C \sup_{(a_1,...,a_n,\beta) \in B_{X_1'} \times ... \times B_{X_n'} \times B_{Y''}} \left(\sum_{j=1}^{m} R ((a_1, ..., a_n, \beta), (x_{1j}, ..., x_{nj}), b_j)^p \right)$$

$$= C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|\beta\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{m} (|a_1 (x_{1j}) ... a_n (x_{nj})| \, |\beta (b_j)|)^p \right)$$

$$= C \sup_{\substack{\|a_i\| \leq 1 \\ \|\beta\| \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_1 (x_{1j}) ... a_n (x_{nj}) \beta (b_j)|^p \right).$$

Usando (3.31) e (3.32) e elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{m}\left|b_j\left(T\left(x_{1j},...,x_{nj}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C^{\frac{1}{p}}\sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1\\ \|\beta\|\leq 1}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)\beta\left(b_j\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C^{\frac{1}{p}}\sup_{\|a_i\|\leq 1}\left[\sup_{\|\beta\|\leq 1}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\beta\left(a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)b_j\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\
(\text{Lema } 3.4.3) &= C^{\frac{1}{p}}\sup_{\|a_i\|\leq 1}\sup_{\|y\|\leq 1}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)b_j\left(y\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C^{\frac{1}{p}}\sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)b_j\left(y\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

e T é $\tau(p)$-somante. ■

O seguinte resultado é o teorema de dominação para a classe das aplicações $\tau(p)$-somantes e encontra-se provado em [30, Theorem 3.5]. Vamos demonstrá-lo através de uma aplicação relativamente simples do TDPU.

Teorema 3.4.5 *Sejam $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, $E_1, ..., E_n$ e F espaços de Banach e $T\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ uma aplicação n-linear contínua. Então T é $\tau(p)$-somante se, e somente se, existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}\left(B_{E_1'} \times \cdots \times B_{E_n'} \times B_{F''}\right)$ de $B_{E_1'} \times \cdots \times B_{E_n'} \times B_{F''}$, munido com o produto das topologias fraca-estrela de cada bola, tais que*

$$\begin{aligned}
&\left|b\left(T\left(x_1,...,x_n\right)\right)\right|\\
&\leq C\left(\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}\times B_{F''}}\left|a_1\left(x_1\right)...a_n\left(x_n\right)\beta\left(b\right)\right|^p d\mu\left(a_1,..,a_n,\beta\right)\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

para todos $x_i \in E_i$ e $b \in F'$. Neste caso, o ínfimo das constantes C tais que a desigualdade (3.33) continua válida é denotado por $\|T\|_{\tau(p)}$.

Demonstração: Se T é $\tau(p)$-somante então, pela Proposição 3.4.4, é R-S abstrata p-somante considerando $X_i = E_i$ e $Y = F$, com $i = 1, ..., n$. Como R e S satisfazem as condições impostas pelo ambiente abstrato, o Teorema 2.2.1 garante as existências de uma constante $C \geq 0$ e de uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel $\mathcal{B}(K)$ de K, tais que

$$S\left(T,\left(x_1,...,x_n\right),b\right) \leq C\left(\int_K R\left(\left(a_1,...,a_n,\beta\right),\left(x_1,...,x_n\right),b\right)^p d\mu\left(a_1,..,a_n,\beta\right)\right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.34)$$

para todos $x_i \in E_i$ e $b \in G$. Pelas definições de R e S e substituindo as escolhas feitas para K e G, obtemos de (3.34)

$$\begin{aligned}
&\left|b\left(T\left(x_1,...,x_n\right)\right)\right| \\
&\leq C\left(\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}\times B_{F''}}\left(\left|a_1\left(x_1\right)...a_n\left(x_n\right)\right|\left|\beta\left(b\right)\right|\right)^p d\mu\left(a_1,..,a_n,\beta\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C\left(\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}\times B_{F''}}\left|a_1\left(x_1\right)...a_n\left(x_n\right)\beta\left(b\right)\right|^p d\mu\left(a_1,..,a_n,\beta\right)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

para todos $x_i \in E_i$ e $b \in F'$.

Reciprocamente, se a desigualdade (3.33) ocorre, então, para quaisquer $m \in \mathbb{N}$, $x_{ij} \in E_i$, $b_j \in F'$, $i = 1,...,n$ e $j = 1,...,m$, também ocorre

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}\left|b_j\left(T\left(x_{1j},...,x_{nj}\right)\right)\right|^p \\
&\leq C^p\sum_{j=1}^{m}\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}\times B_{F''}}\left|a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)\beta\left(b_j\right)\right|^p d\mu\left(a_1,..,a_n,\beta\right).
\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{m}\left|b_j\left(T\left(x_{1j},...,x_{nj}\right)\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}\times B_{F''}}\left|a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)\beta\left(b_j\right)\right|^p d\mu\left(a_1,..,a_n,\beta\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C\left[\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}\times B_{F''}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)\beta\left(b_j\right)\right|^p\right)d\mu\left(a_1,..,a_n,\beta\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C\left[\int_{B_{E_1'}\times\cdots\times B_{E_n'}\times B_{F''}}\sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1\\ \|\beta\|\leq 1}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)\beta\left(b_j\right)\right|^p\right)d\mu\left(a_1,..,a_n,\beta\right)\right]^{\frac{1}{p}}\\
&= C\sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1\\ \|\beta\|\leq 1}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)\beta\left(b_j\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C\sup_{\|a_i\|\leq 1}\left[\sup_{\|\beta\|\leq 1}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\beta\left(a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)b_j\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\\
&= C\sup_{\|a_i\|\leq 1}\sup_{\|y\|\leq 1}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)b_j\left(y\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad\text{(pelo Lema 3.4.3)}\\
&= C\sup_{\substack{\|a_i\|\leq 1\\ \|y\|\leq 1}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|a_1\left(x_{1j}\right)...a_n\left(x_{nj}\right)b_j\left(y\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}
$$

e T é $\tau\left(p\right)$-somante. ∎

3.5 O teorema de dominação para polinômios dominados

O conceito de polinômio dominado foi introduzido por Pietsch e em seguida explorado por Geiss [20], Matos [25, Definition 3.2] e diversos outros autores (veja, por exemplo [4, 9, 12, 28, 32]). A definição que introduzimos logo a seguir é possível graças à Proposição 5.1.13. Tal proposição aparece também em [25, Proposition 2.4] caracterizando os polinômios absolutamente somantes (em particular, os dominados) por meio de desigualdades. Não seria exagero enfatizarmos sua importância em nossos propósitos pois, devido a este resultado, podemos caracterizar os polinômios dominados como funções R-S abstratas p-somantes e, consequentemente, demonstrar seu teorema de dominação correspondente fazendo uso apenas de nosso TDPU.

Definição 3.5.1 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $P : X \to Y$ um polinômio n-homogêneo contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que P é p-dominado quando existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \left\| P\left(x_j\right) \right\|^{\frac{p}{n}} \right)^{\frac{n}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{k} \left| \varphi\left(x_j\right) \right|^{p} \right)^{\frac{n}{p}}, \tag{3.35}$$

para todos $x_1, \ldots, x_k \in X$ e $k \in \mathbb{N}$. A menor das constantes C tais que (3.35) ocorre é denotada por $\|P\|_{d,p}$.

Nosso próximo passo é caracterizar os polinômios p-dominados como funções R-S abstratas p-somantes. Para isso, nos remetemos ao ambiente abstrato e fazemos as seguintes escolhas:

- $E = X$ e Y espaços de Banach;
- $x_0 = 0$;
- $\mathcal{H} = \mathcal{P}\left({}^{n}X; Y\right)$;
- $K = B_{X'}$ munido com a topologia fraca estrela;
- $G = \mathbb{K}$.

Feito isso, definimos R e S como

$$R : B_{X'} \times X \times \mathbb{K} \to [0, \infty)$$

$$R\left(\varphi, x, \lambda\right) = |\lambda| \left|\varphi\left(x\right)\right|$$

e

$$S : \mathcal{H} \times X \times \mathbb{K} \to [0, \infty)$$

$$S\left(Q, x, \lambda\right) = |\lambda| \left\|Q\left(x\right)\right\|^{\frac{1}{n}}.$$

Observação 3.5.2 *No que segue, ao longo desta seção, R e S denotarão as funções definidas acima.*

É fácil verificar que R e S são funções bem definidas que cumprem as três condições exigidas pelo ambiente abstrato. Isto nos leva a

Proposição 3.5.3 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $P : X \to Y$ um polinômio n-homogêneo contínuo entre espaços de Banach. Então P é p-dominado se, e somente se, é R-S abstrato p-somante. Além disso, $\pi_{RS,p}\left(P\right)^{\frac{n}{p}} = \|P\|_{d,p}$.*

Demonstração: Suponha que $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ seja p-dominado. Então,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} S(P,x_j,\lambda_j)^p\right)^{\frac{n}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^p \|P(x_j)\|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}} \tag{3.36}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \left\|\lambda_j^n P(x_j)\right\|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \|P(\lambda_j x_j)\|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}},$$

pois P é um polinômio n-homogêneo. Como P é p-dominado, existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|P(\lambda_j x_j)\|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(\lambda_j x_j)|^p\right)^{\frac{n}{p}} \tag{3.37}$$
$$= C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|^p |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{n}{p}}$$
$$= C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi,x_j,\lambda_j)^p\right)^{\frac{n}{p}}.$$

Elevando os membros extremos a $\frac{p}{n}$, obtemos de (3.36) e (3.37) que

$$\sum_{j=1}^{m} S(P,x_j,\lambda_j)^p \leq C^{\frac{p}{n}} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi,x_j,\lambda_j)^p\right) \tag{3.38}$$

para todos $x_1,\ldots,x_m \in X$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Portanto, P é R-S abstrato p-somante. Observe que, de (3.37) e (3.38), temos

$$\pi_{RS,p}(P)^{\frac{n}{p}} \leq \|P\|_{d,p}. \tag{3.39}$$

Reciprocamente, suponha que $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ seja R-S abstrato p-somante. Temos inicialmente que

$$\sum_{j=1}^{m} \|P(x_j)\|^{\frac{p}{n}} = \sum_{j=1}^{m} S(P,x_j,1)^p, \tag{3.40}$$

e como P é R-S abstrato p-somante, podemos encontrar uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m} S(P,x_j,1)^p \leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi,x_j,1)^p\right) \tag{3.41}$$
$$= C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right).$$

Elevando os membros extremos a $\frac{n}{p}$ segue imediatamente de (3.40) e (3.41) que

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\|P(x_j)\|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}} \leq C^{\frac{n}{p}} \sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{n}{p}} \tag{3.42}$$

para todos $x_1, \ldots, x_m \in X$ e $m \in \mathbb{N}$. Logo, P é p-dominado. Além disso, (3.41) e (3.42) nos garantem que

$$\pi_{RS,p}(P)^{\frac{n}{p}} \geq \|P\|_{d,p}$$

donde concluímos de (3.39) que $\pi_{RS,p}(P)^{\frac{n}{p}} = \|P\|_{d,p}$. ■

O próximo resultado que enunciamos é o teorema de dominação para polinômios dominados. Sua demonstração, como veremos, é uma aplicação direta do TDPU.

Teorema 3.5.4 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $P : X \to Y$ um polinômio n-homogêneo contínuo entre espaços de Banach. Então P é p-dominado se, e somente se, existem uma constante $C \geq 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel de $B_{X'}$, munida com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|P(x)\| \leq C\left(\int_{B_{X'}}|\varphi(x)|^p\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{n}{p}} \tag{3.43}$$

para todo $x \in X$. Neste caso, $\|P\|_{d,p}$ é a menor das constantes C tais que (3.43) *ocorre.*

Demonstração: Admita as existências de C e μ tais que (3.43) ocorra para todo $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\|P(x_j)\|^{\frac{p}{n}} &\leq C^{\frac{p}{n}}\sum_{j=1}^{m}\int_{B_{X'}}|\varphi(x_j)|^p\, d\mu(\varphi)\\ &= C^{\frac{p}{n}}\int_{B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\right) d\mu(\varphi)\\ &\leq C^{\frac{p}{n}}\int_{B_{X'}}\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\right) d\mu(\varphi)\\ &= C^{\frac{p}{n}}\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\right)\mu(B_{X'})\\ &= C^{\frac{p}{n}}\sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\right),\end{aligned}$$

uma vez que μ é uma medida de probabilidade. Elevendo os membros extremos a $\frac{n}{p}$ obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\|P(x_j)\|^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}} \leq C \sup_{\varphi\in B_{X'}}\left(\sum_{j=1}^{m}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{n}{p}}$$

para todos $x_1, \ldots, x_m \in X$ e $m \in \mathbb{N}$. Logo, P é p-dominado e

$$\|P\|_{d,p} \leq C. \tag{3.44}$$

Reciprocamente, se P é p-dominado, pela Proposição 3.5.3, P é R-S abstrato p-somante. Então, pelo Teorema 2.2.1, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel de K tais que

$$S(P, x, \lambda) \leq C \left(\int_K R(\varphi, x, \lambda)^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.45}$$

isto é,

$$\begin{aligned} |\lambda| \, \|P(x)\|^{\frac{1}{n}} &\leq C \left(\int_{B_{X'}} |\lambda|^p \, |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda| \, C \left(\int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\|P(x)\| \leq C^n \left(\int_{B_{X'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{n}{p}} \tag{3.46}$$

para todo $x \in X$. Lembre que $\pi_{RS,p}(P)^{\frac{1}{p}}$ também satisfaz (3.45) e, portanto, $\pi_{RS,p}(P)^{\frac{n}{p}} = \|P\|_{d,p}$ satisfaz (3.46). Com isso e (3.44) concluímos que $\|P\|_{d,p}$ é a menor das constantes C tais que (3.43) ocorre. ■

Capítulo 4

Funções Arbitrárias Absolutamente Somantes

De acordo com a definição usual de operadores lineares absolutamente somantes dada por meio de desigualdades [16, p. 31], a seguinte definição parece natural:

Definição 4.0.5 *Sejam E e F espaços de Banach. Uma função arbitrária $f : E \to F$ é absolutamente p-somante em $a \in E$ quando existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{m} \|f(a + x_j) - f(a)\|^p \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right)$$

para todos $x_1, ..., x_m \in E$ e $m \in \mathbb{N}$.

Essa definição está essencialmente contida em [26], mas na forma acima aparece em [8].

Se E e F são espaços de Banach, fazemos

$$\mathcal{H} = \{f : E \to F\},$$

e definimos R e S da seguinte forma:

$$R : B_{E'} \times E \times \mathbb{K} \to [0, \infty)$$

$$R(\varphi, x, \lambda) = |\lambda| |\varphi(x)|$$

e

$$S : \mathcal{H} \times E \times \mathbb{K} \to [0, \infty)$$

$$S(f, x, \lambda) = |\lambda| \|f(a + x) - f(a)\|$$

Note que R e S são funções bem definidas e satisfazem as condições do ambiente abstrato. De fato, pondo $x_0 = 0$ obtemos claramente a condição (i). Dados $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, a função

$$R_{x,\lambda} : B_{E'} \to [0, \infty)$$

definida por

$$R_{x,\lambda}(\varphi) = |\lambda| \, |\varphi(x)|$$

é sempre contínua, pois trata-se de uma composta de funções contínuas, conforme visto na Seção 3.1. Finalmente,

$$\begin{aligned} R(\varphi, x, \eta\lambda) &= |\eta\lambda| \, |\varphi(x)| \\ &= \eta\left(|\lambda| \, |\varphi(x)|\right) \\ &= \eta R(\varphi, x, \lambda) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta S(f, x, \lambda) &= \eta\left(|\lambda| \, \|f(a+x) - f(a)\|\right) \\ &= |\eta\lambda| \, \|f(a+x) - f(a)\| \\ &= S(f, x, \eta\lambda) \end{aligned}$$

para todos $\varphi \in B_{E'}$, $x \in E$, $0 \leq \eta \leq 1$ e $b \in \mathbb{K}$, o que conclui (iii).

Demonstraremos agora um lema técnico que será utilizado na demonstração da caracterização de funções arbitrárias absolutamente p-somantes logo a seguir. Sua demonstração usa o argumento de [19, p. 2] (também creditado a M. Mendel e G. Schechtman), aplicado por Farmer e Johnson no contexto de operadores Lipschitz somantes.

Lema 4.0.6 *Uma função arbitrária $f : E \to F$ é absolutamente p-somante em $a \in E$ se, e somente se, existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{m} |b_j| \, \|f(a+x_j) - f(a)\|^p \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |b_j| \, |\varphi(x_j)|^p \right) \tag{4.1}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_m \in E$ e $b_1, ..., b_m \in \mathbb{K}$.

Demonstração: Suponha que f seja absolutamente p-somante em $a \in E$. Vamos dividir a demonstração em três casos.

Caso 1: Os escalares são inteiros.

Sejam dados $m \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_m \in E$ e $b_1, ..., b_m \in \mathbb{Z}$. Considere os seguintes $(|b_1| + ... + |b_m|)$ vetores de E:

$$\underbrace{x_1, ..., x_1}_{|b_1| \text{ vezes}}, \ldots, \underbrace{x_m, ..., x_m}_{|b_m| \text{ vezes}}$$

Por hipótese,

$$\underbrace{\|f(a+x_1) - f(a)\|^p + ... + \|f(a+x_1) - f(a)\|^p}_{|b_1| \text{ vezes}} +$$

$$\cdots$$

$$\underbrace{+\left\|f\left(a+x_m\right)-f\left(a\right)\right\|^p+...+\left\|f\left(a+x_m\right)-f\left(a\right)\right\|^p}_{|b_m| \text{ vezes}}$$

$$\leq \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\underbrace{\left|\varphi\left(x_1\right)\right|^p+...+\left|\varphi\left(x_1\right)\right|^p}_{|b_1| \text{ vezes}}+...+\underbrace{\left|\varphi\left(x_m\right)\right|^p+...+\left|\varphi\left(x_m\right)\right|^p}_{|b_m| \text{ vezes}}\right)$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\left|b_1\right|\left\|f\left(a+x_1\right)-f\left(a\right)\right\|^p+...+\left|b_m\right|\left\|f\left(a+x_m\right)-f\left(a\right)\right\|^p\\&\leq \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\left|b_1\right|\left|\varphi\left(x_1\right)\right|^p+...+\left|b_m\right|\left|\varphi\left(x_m\right)\right|^p\right)\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{j=1}^m\left|b_j\right|\left\|f\left(a+x_j\right)-f\left(a\right)\right\|^p\leq C\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^m\left|b_j\right|\left|\varphi\left(x_j\right)\right|^p\right)$$

para todos $m\in\mathbb{N}$, $x_1,...,x_m\in E$ e $b_1,...,b_m\in\mathbb{Z}$.

Caso 2: Os escalares são racionais.

Sejam dados $m\in\mathbb{N}$, $x_1,...,x_m\in E$ e $c_1,...,c_m\in\mathbb{Q}$. Então,

$$c_j=\frac{a_j}{b_j}$$

com $a_j,b_j\in\mathbb{Z}$ e $j=1,...,m$, com todos os b_j não nulos. Temos que

$$\sum_{j=1}^m\left|c_j\right|\left\|f\left(a+x_j\right)-f\left(a\right)\right\|^p=\frac{\left|b_1\dots b_m\right|}{\left|b_1\dots b_m\right|}\sum_{j=1}^m\left|\frac{a_j}{b_j}\right|\left\|f\left(a+x_j\right)-f\left(a\right)\right\|^p \tag{4.2}$$

$$=\frac{\left|b_1\dots b_m\right|}{\left|b_1\dots b_m\right|}\left(\left|\frac{a_1}{b_1}\right|\left\|f\left(a+x_1\right)-f\left(a\right)\right\|^p+\cdots+\left|\frac{a_m}{b_m}\right|\left\|f\left(a+x_m\right)-f\left(a\right)\right\|^p\right)$$

$$=\frac{\left|b_2\dots b_m\right|}{\left|b_1\dots b_m\right|}\left(\left|a_1\right|\left\|f\left(a+x_1\right)-f\left(a\right)\right\|^p\right)+\cdots+\frac{\left|b_1\dots b_{m-1}\right|}{\left|b_1\dots b_m\right|}\left(\left|a_m\right|\left\|f\left(a+x_1\right)-f\left(a\right)\right\|^p\right)$$

$$=\frac{1}{\left|b_1\dots b_m\right|}\left(\begin{array}{c}\left|a_1\right|\left|b_2\dots b_m\right|\left\|f\left(a+x_1\right)-f\left(a\right)\right\|^p+\cdots\\ \cdots+\left|a_m\right|\left|b_1\dots b_{m-1}\right|\left\|f\left(a+x_1\right)-f\left(a\right)\right\|^p\end{array}\right). \tag{4.3}$$

Recorremos então ao caso anterior e concluímos de, (4.2) e (4.3), que

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^m\left|c_j\right|\left\|f\left(a+x_j\right)-f\left(a\right)\right\|^p\\&\leq\frac{1}{\left|b_1\dots b_m\right|}\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\left|a_1\right|\left|b_2\dots b_m\right|\left|\varphi\left(x_1\right)\right|^p+\cdots+\left|a_m\right|\left|b_1\dots b_{m-1}\right|\left|\varphi\left(x_m\right)\right|^p\right)\\&=\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\left|\frac{a_1}{b_1}\right|\left|\varphi\left(x_1\right)\right|^p+\cdots+\left|\frac{a_m}{b_m}\right|\left|\varphi\left(x_m\right)\right|^p\right)\\&=\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^m\left|c_j\right|\left|\varphi\left(x_j\right)\right|^p\right),\end{aligned}$$

e o Caso 2 fica demonstrado.

Caso 3: Os escalares são reais.

Suponhamos, por absurdo, que o resultado não seja válido quando os escalares são reais. Isto é, dado $C > 0$ existem $m_C \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_{m_C} \in E$ e $r_1, ..., r_{m_C} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{m_C} |r_j| \|f(a + x_j) - f(a)\|^p > C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m_C} |r_j| |\varphi(x_j)|^p \right). \tag{4.4}$$

Considere

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{m_C} |r_j| \|f(a + x_j) - f(a)\|^p - C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m_C} |r_j| |\varphi(x_j)|^p \right) \tag{4.5}$$

e escolha $q_1, ..., q_{m_C} \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$\sum_{j=1}^{m_C} |r_j| \|f(a + x_j) - f(a)\|^p - \sum_{j=1}^{m_C} |q_j| \|f(a + x_j) - f(a)\|^p < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.6}$$

e

$$C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m_C} |q_j| |\varphi(x_j)|^p \right) - C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m_C} |r_j| |\varphi(x_j)|^p \right) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.7}$$

Para maiores detalhes, veja o resultado (5.2) no Apêndice. Logo, por (4.6) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m_C} |q_j| \|f(a + x_j) - f(a)\|^p &> \sum_{j=1}^{m_C} |r_j| \|f(a + x_j) - f(a)\|^p - \frac{\varepsilon}{4} \\
(\text{Por } (4.5)\,) &= \left[\varepsilon + C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m_C} |r_j| |\varphi(x_j)|^p \right) \right] - \frac{\varepsilon}{4} \\
&= C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m_C} |r_j| |\varphi(x_j)|^p \right) + \frac{3\varepsilon}{4} \\
(\text{Por } (4.7)\,) &> \left[C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m_C} |q_j| |\varphi(x_j)|^p \right) - \frac{\varepsilon}{4} \right] + \frac{3\varepsilon}{4} \\
&= C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m_C} |q_j| |\varphi(x_j)|^p \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&> C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m_C} |q_j| |\varphi(x_j)|^p \right)
\end{aligned}$$

o que é um absurdo pelo Caso 2, concluindo a demonstração.

Reciprocamente, se existe uma constante $C \geq 0$ tal que a desigualdade (4.1) seja válida para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_m \in E$ e $b_1, ..., b_m \in \mathbb{K}$, basta tomar

$$b_1 = \cdots = b_m = 1,$$

e obtemos que f é absolutamente p-somante em $a \in E$. ∎

Proposição 4.0.7 *Sejam E e F espaços de Banach, e $0 < p < \infty$. Uma função arbitrária $f : E \to F$ é absolutamente p-somante em $a \in E$ se, e somente se, é R-S abstrata p-somante.*

Demonstração: Escolha $X = E$, $Y = F$,

$$\mathcal{H} = \{f : E \to F\},$$

$K = B_{E'}$ e $G = \mathbb{K}$. Provamos acima que, para estas escolhas, as funções R e S satisfazem as condições do ambiente abstrato. Suponha agora que f seja absolutamente p-somante em $a \in E$. Então, usando o Lema 4.0.6 com escalares $k_j = b_j^p$ para todo $j = 1, ..., m$, podemos encontrar uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m} |b_j|^p \|f(a + x_j) - f(a)\|^p \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^p |\varphi(x_j)|^p \right) \tag{4.8}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_m \in E$ e $b_1, ..., b_m \in \mathbb{K}$. Pelas definições de R e S, reescrevemos (4.8) como

$$\sum_{j=1}^{m} S(f, x_j, b_j)^p \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, b_j)^p \right)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_m \in E$ e $b_1, ..., b_m \in \mathbb{K}$, donde se conclui que f é R-S abstrata p-somante.

Reciprocamente, suponha que f seja R-S abstrata p-somante. Então, existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{m} S(f, x_j, 1)^p \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} R(\varphi, x_j, 1)^p \right)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, ..., x_m \in E$. Pelas definições de R e S

$$\sum_{j=1}^{m} \|f(a + x_j) - f(a)\|^p \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p \right)$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, ..., x_m \in E$. Logo, f é absolutamente p-somante em a. ■

Aplicamos mais uma vez o TDPU para mostrar que, mesmo livre de condições algébricas, funções absolutamente p-somantes são exatamente aquelas que gozam de algum teorema de dominação:

Teorema 4.0.8 *Sejam E e F espaços de Banach e $0 \leq p < \infty$. Uma função arbitrária $f : E \to F$ é absolutamente p-somante em $a \in E$ se, e somente se, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel de $B_{E'}$, munida com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|f(a + x) - f(a)\| \leq C \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.9}$$

para todo $x \in E$.

Demonstração: Se f é absoutamente p-somante em $a \in E$, pela Proposição 4.0.7, é R-S abstrata p-somante. Daí, pelo Teorema 2.2.1, existem uma constante $C > 0$ e uma medida de probabilidade μ sobre a sigma-álgebra de Borel de $K = B_{E'}$ tais que

$$S(f,x,b) \leq C \left(\int_K R(\varphi,x,b)^p \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}$$

isto é,

$$\begin{aligned} |b| \, \|f(a+x) - f(a)\| &\leq C \left(\int_{B_{E'}} |b|^p \, |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |b| \, C \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\|f(a+x) - f(a)\| \leq C \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x \in E$.

Reciprocamente, se a desigualdade (4.9) ocorre para todo $x \in E$, então, também ocorre

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \|f(a+x_j) - f(a)\|^p &\leq C^p \sum_{j=1}^{m} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^p \, d\mu(\varphi) \\ &= C^p \int_{B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right) d\mu(\varphi) \\ &\leq C^p \int_{B_{E'}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right) d\mu(\varphi) \\ &= C^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right) \mu(B_{E'}) \end{aligned} \tag{4.10}$$

e, como μ é uma medida de probabilidade em $\mathcal{B}(B_{E'})$, segue de (4.10) que

$$\sum_{j=1}^{m} \|f(a+x_j) - f(a)\|^p \leq C^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^p\right)$$

para todo $x \in E$. Portanto, f é absolutamente p-somante em $a \in E$. ■

Capítulo 5

Apêndice

5.1 Aplicações multilineares e polinômios homogêneos

Reservamos este espaço na dissertação para dizermos algumas palavras sobre as aplicações multilineares e polinomiais. Aqui, nosso principal objetivo é estenter o conceito de operadores absolutamente somantes para tais aplicações. O trabalho realizado por Alencar-Matos em [1] constitui um dos primeiros passos nessa direção, no qual algumas classes de funções multilineares entre espaços de Banach foram investigadas. A literatura no assunto é vasta e não temos intenção alguma em esgotá-lo, apenas nos limitamos em fornecer um possível complemento às Seções 3.2, 3.4 e 3.5. No entanto, ao leitor que sentir necessidade de maiores detalhes, recomendamos [3, 18, 29].

5.1.1 Aplicações multilineares

Definição 5.1.1 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $E_1, E_2, \ldots, E_m$ e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma função $A : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ é chamada de* ***aplicação multilinear*** *(ou* ***aplicação m-linear****) se A for linear em cada variável, isto é, se para cada i, $1 \leq i \leq m$, e para todos $x_i, x_i' \in E_i$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos que*

$$A\left(x_1, \cdots, \lambda x_i + x_i', \cdots, x_m\right) =$$

$$= \lambda A\left(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_m\right) + A\left(x_1, \cdots, x_i', \cdots, x_m\right)$$

Exemplo 5.1.2 *Sejam $E_1, E_2, \cdots, E_m$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e funcionais $\phi_i \in E_i^*$, para cada $1 \leq i \leq m$. Considere a função $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_m \to \mathbb{K}$ definida por $\varphi\left(x_1, \cdots, x_m\right) = \phi\left(x_1\right) \cdots \phi\left(x_m\right)$. Não é difícil ver que φ é uma aplicação multilinear.*

Para cada $m \in \mathbb{N}$, o conjunto formado por todas as aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F é denotado por $L\left(E_1, \cdots, E_m; F\right)$. Para o caso $F = \mathbb{K}$ escrevemos simplesmente $L\left(E_1, \cdots, E_m\right)$ ao invés de $L\left(E_1, \cdots, E_m; \mathbb{K}\right)$ e, quando

$E_1 = E_2 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $L\left({}^m E; F\right)$. É fácil ver que o conjunto $L\left(E_1, \cdots, E_m; F\right)$, munido com as operações usuais de espaços de funções, é um espaço vetorial.

Se $E_1, \cdots, E_m$ são espaços vetorias normados, então $E_1 \times \cdots \times E_m$ torna-se um espaço vetorial normado ao considerarmos qualquer uma das normas

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \|x_i\|_{E_i}$$
$$\|x\|_p = \left(\|x_1\|^p + \cdots + \|x_m\|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $1 \leq p < \infty$. Quando não dissermos explicitamente qual a norma que estamos considerando em $E_1 \times \cdots \times E_m$, fica subentendido que se trata da norma $\|\cdot\|_\infty$ a qual, por comodidade, será escrita apenas como $\|\cdot\|$.

Uma aplicação m-linear $A : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ é dita *limitada* quando

$$\sup_{\substack{\|x_i\| \leq 1 \\ i=1,\ldots,n}} \|A\left(x_1, \cdots, x_m\right)\| < \infty.$$

Finalmente, dizemos que $A : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ é *contínua* quando for contínua no sentido de continuidade entre espaços métricos.

O próximo teorema apresenta algumas importantes e úteis equivalências sobre a continuidade de uma aplicação multilinear.

Proposição 5.1.3 *Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_m$ e F espaços vetoriais normados. As seguintes afirmações a respeito de uma aplicação multilinear $A : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ são equivalentes:*

(i) A é contínua;

(ii) A é contínua na origem;

(iii) Existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|A\left(x_1, \cdots, x_m\right)\| \leq M \|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

para todo $(x_1, \cdots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$;

(iv) A é lipschitziana em cada parte limitada de $E_1 \times \cdots \times E_m$.

Demonstração: É evidente que $(i) \Rightarrow (ii)$. Para provar que $(ii) \Rightarrow (iii)$, seja A contínua na origem. Como $A(0) = 0$, tomando $\varepsilon = 1$ obtemos $\delta > 0$ tal que

$$\|(x_1, \cdots, x_m)\| \leq \delta \Rightarrow \|A\left(x_1, \cdots, x_m\right)\| \leq 1.$$

Seja agora $(x_1, \cdots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$. A relação

$$\|A\left(x_1, \cdots, x_m\right)\| \leq M \|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

é evidente se $x_i = 0$ para algum $i = 1, \ldots, m$. Se, porém, $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$, então

$$\left(\frac{\delta x_1}{\|x_1\|}, \cdots, \frac{\delta x_m}{\|x_m\|} \right)$$

tem norma igual a δ. Logo

$$\left\| A \left(\frac{\delta x_1}{\|x_1\|}, \cdots, \frac{\delta x_m}{\|x_m\|} \right) \right\| \leq 1.$$

Como A é multilinear, isto nos dá

$$\frac{\delta^m}{\|x_1\| \cdots \|x_m\|} \|A(x_1, \cdots, x_m)\| \leq 1,$$

ou seja,

$$\|A(x_1, \cdots, x_m)\| \leq \frac{1}{\delta^m} \|x_1\| \cdots \|x_m\|.$$

E o resultado segue com $M = \frac{1}{\delta^m}$. Mostraremos agora que $(iii) \Rightarrow (iv)$. Admitindo (iii) como hipótese, provaremos que A é lipschitziana em cada bola $B[0; r]$. Com efeito, como A é multilinear, podemos escrever

$$\begin{gathered} A(x) - A(y) = A(x_1, x_2, \ldots, x_m) - A(y_1, x_2, \ldots, y_m) + A(y_1, x_2, \ldots, x_m) - \\ -A(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_m) + A(y_1, y_2, x_3, \ldots, x_m) - \cdots \\ \cdots + A(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, x_m) - A(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m) = \\ = A(x_1 - y_1, x_2, \ldots, x_m) + A(y_1, x_2 - y_2, x_3, \ldots, x_m) + \cdots + A(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, x_m - y_m). \end{gathered}$$

Logo, se $x = (x_1, \cdots, x_m)$ e $y = (y_1, \cdots, y_m)$ pertencem a $B[0; r]$ então $\|x_i\|, \|y_i\| \leq r$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Segue-se daí que

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(y)\| &\leq \|A(x_1 - y_1, x_2, \ldots, x_m)\| + \cdots + \|A(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, x_m - y_m)\| \\ &\leq M \|x_1 - y_1\| \|x_2\| \cdots \|x_m\| + \cdots + M \|y_1\| \cdots \|y_{m-1}\| \|x_m - y_m\| \\ &\leq M r^{m-1} (\|x_1 - y_1\| + \cdots + \|x_m - y_m\|) \leq m M r^{m-1} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Provemos finalmente que $(iv) \Rightarrow (i)$. Admitindo (iv), mostraremos que A é contínua em cada ponto a. De fato, dado $B \subset E_1 \times \cdots \times E_m$ limitado, a hipótese nos garente a existência de uma constante de Lipschitz $c_B > 0$ tal que

$$\|A(x) - A(y)\| \leq c_B \|x - y\|$$

para todos $x, y \in B$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{c_B}$ e obtemos que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|A(x) - A(a)\| \leq c_B \|x - a\| < c_B \delta = \varepsilon,$$

onde $B = B[a; \delta]$. ■

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos o conjunto das aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F por $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$. Quando $E_1 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $\mathcal{L}(^m E; F)$ e, se $F = \mathbb{K}$, usamos $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m)$ e $\mathcal{L}(^m E)$ no lugar de $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; \mathbb{K})$ e $\mathcal{L}(^m E; \mathbb{K})$, respectivamente.

Quando F é completo, prova-se que $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$ é um espaço de Banach com relação à norma

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\|,$$

para quaisquer espaços vetorias normados $E_1, \cdots, E_m$.

Aplicações multilineares absolutamente somantes

Definição 5.1.4 *Sejam $0 < p, q_1, \ldots, q_m$ com $\frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} \geq \frac{1}{p}$. Uma aplicação $A \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_m; F)$ é dita **absolutamente** $(p; q_1, \ldots, q_m)$-**somante** quando*

$$\left(A\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(m)}\right)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$$

sempre que

$$\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}^w(E_k)$$

para todo $k = 1, \ldots, m$.

O espaço das aplicações $(p; q_1, \ldots, q_m)$-somantes de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F é denotado por $\mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_m)}(E_1, \cdots, E_m; F)$

Assim como no caso dos operadores lineares absolutamente somantes, as aplicações multilineares absolutamente somantes apresentam uma caracterização por desigualdades:

Proposição 5.1.5 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \cdots, E_n$ e F espaços de Banach. As seguintes afirmações a respeito de uma aplicação n-linear contínua $T : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ são equivalentes:*

(a) $T \in \mathcal{L}_{as(p;q_1,\ldots,q_m)}(E_1, \cdots, E_n; F)$;

(b) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left\|T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_1} \cdots \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{m}\right\|_{w,q_n} \tag{5.1}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ e $x_j^{(k)} \in E_k$, $k = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$;

(c) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|T\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\|\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_1} \cdots \left\|\left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q_n}$$

sempre que $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{q_k}^w(E_k)$, com $k = 1, \ldots, n$.

A menor das constantes C tais que (5.1) vale é denotada por $\|T\|_{as(p;q_1,\ldots,q_n)}$.

Observação 5.1.6 *A rigor, não é claro que o ínfimo das constantes C seja atingido, mas isso de fato ocorre e podemos falar em menor das constantes que satisfazem* (5.1).

É interessante notar que, apesar de não serem pertinentes à teoria linear de operadores somantes, as aplicações n-lineares $\left(\frac{p}{n}; p, \ldots, p\right)$-somantes têm propriedades muito parecidas com as propriedades daquela teoria. Por exemplo, para tais aplicações existe um Teorema de Dominação de Pietsch (que também pode ser obtido a partir do TDPU, embora este caso seja um pouco mais delicado e não seja abordado nesse trabalho). Por essa razão, tais aplicações são também conhecidas como *aplicações p-dominadas*. A seguir, enunciamos tal teorema de dominação correspondente a esta classe de aplicações. Sua demonstração encontra-se em [35] (veja também [20, 25]).

Teorema 5.1.7 *Seja $1 \leq p < \infty$. Uma aplicação $A \in \mathcal{L}(E_1, \cdots, E_n; F)$ é p-dominada se, e somente se, existem uma constante $C \geq 0$ e medidas de probabilidades μ_k nos borelianos das bolas $B_{E'_k}$, $k = 1, \ldots, n$, munidas com a topologia fraca estrela, tais que*

$$\|A(x_1, \ldots, x_n)\| \leq C \prod_{k=1}^{n} \left(\int_{B_{E'_k}} |\varphi_k(x_k)|^p \, d\mu(\varphi_k) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

5.1.2 Polinômios homogêneos

Comecemos pelo conceito de aplicação multilinear simétrica, que será útil no decorrer desta seção.

Definição 5.1.8 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e X,Y espaços vetorias sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação n-linear $A : X \times \cdots \times X \to Y$ é dita **simétrica** se, para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$, tivermos*

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right),$$

para toda bijeção $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Definição 5.1.9 *Sejam X e Y espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $P : X \to Y$ é chamada de **polinômio** n-**homogêneo** se existe $A \in L(^n X; Y)$ tal que*

$$A(x, \ldots, x) = P(x),$$

para todo $x \in X$. Nesse caso, dizemos que P é o polinômio n-homogêneo associado a A.

Denotaremos por $\mathcal{P}(^n X; Y)$ o espaço de Banach formado por todos os polinômios n-homogêneos contínuos de X em Y com a norma

$$\|P\| = \sup_{x \in B_E} \|P(x)\|.$$

Observação 5.1.10 *Se $P : X \to Y$ é um polinômio n-homogêneo, é possível provar a* ***existência*** *e* ***unicidade*** *de uma aplicação n-linear simétrica $P_s : X \times \cdots \times X \to Y$ tal que $P_s(x, \ldots, x) = P(x)$ (veja [3, Proposição 1.3.4]). Denotaremos por $\check{P}$ a aplicação multilinear simétrica associada a P.*

O resultado seguinte (para sua demonstração, veja [3, Proposição 1.3.4]) fornece algumas caracterizações dos polinômios n-homogêneos contínuos envolvendo sua aplicação multilinear simétrica associada.

Proposição 5.1.11 *Sejam X e Y espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e $P : X \to Y$ um polinômio n-homogêneo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\check{P} \in \mathcal{L}(^n X; Y)$;

(b) $P \in \mathcal{P}(^n X; Y)$;

(c) P é contínuo na origem;

(d) Existe uma constante $M > 0$, tal que

$$\|P(x)\| \leq M \|x\|^n$$

para qualquer $x \in X$.

Polinômios absolutamente somantes

Definição 5.1.12 *Sejam $0 < p, q < \infty$ e $P : X \to Y$ um polinômio n-homogêneo contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que P é absolutamente $(p; q)$-somante (ou $(p; q)$-somante) quando $(P(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(Y)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(X)$.*

Denotamos por $\mathcal{P}_{as,(p;q)}(^n X; Y)$ o espaço formado por todos os polinômios $(p; q)$-somantes de X em Y. É interessante notar que quando $n = 1$ temos o conceito original de operadores absolutamente somantes e nesse caso usamos a notação da teoria linear.

O seguinte resultado encontra-se em [25, Proposition 2.4] e caracteriza os polinômios absolutamente somantes por desigualdades.

Proposição 5.1.13 *Sejam X e Y espaços de Banach. As seguintes afirmações a respeito de um polinômio n-homogêneo contínuo $P : X \to Y$ são equivalentes:*

(a) P é absolutamente $(p; q)$-somante;

(b) Existe uma constante $C > 0$ tal que ,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{n}{q}}, \tag{5.2}$$

para todos $x_1, \ldots x_m \in X$ e $m \in \mathbb{N}$;

(c) Existe uma constante $C > 0$ tal que ,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{n}{q}},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$.

Denotamos por $\|P\|_{as,(p;q)}$ o ínfimo das constantes C tais que (5.2) ocorre.

Demonstração: (Esboço) As relações $(c) \Rightarrow (a)$ e $(c) \Rightarrow (b)$ são evidentes.

$(a) \Rightarrow (c)$: Assumindo (a) como hipótese, observamos que a aplicação

$$\mathbf{P} : \ell_q^u(E) \to \ell_p(F)$$

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto \mathbf{P}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = (P(x_j))_{j=1}^{\infty}$$

está bem definida. Afirmamos que $\mathbf{P}$ é um polinômio n-homogêneo contínuo. Com efeito, pode-se ver que (veja a Observação 5.1.14) a aplicação

$$\check{\mathbf{P}} : \left(\ell_q^u(E)\right)^n \to \ell_p(F),$$

dada por

$$\check{\mathbf{P}}\left(\left(x_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(\check{P}\left(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)}\right)\right)_{j=1}^{\infty},$$

está bem definida, é n-linear e satisfaz

$$\check{\mathbf{P}}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \mathbf{P}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right).$$

Isso mostra que $\mathbf{P}$ é um polinômio n-homogêneo. Agora, procedendo de forma análoga à demonstração de $(i) \Rightarrow (ii)$ da Proposição 1.2.5, chegaremos que $\mathbf{P}$ é contínuo. Assim,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left\|\mathbf{P}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_p \leq \|\mathbf{P}\| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q,w}^n \\ &= \|\mathbf{P}\| \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{n}{q}}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Note que de (5.3) obtemos

$$\|P\|_{as,(p;q)} \leq \|\mathbf{P}\| \tag{5.4}$$

$(b) \Rightarrow (c)$: Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, então

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^{m} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \left[C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{n}{q}}\right] \\ &= C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left[\sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{n}{q}}\right] \\ &= C \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{n}{q}}.\end{aligned}$$

o que prova (c). Note ainda que a relação $(c) \Rightarrow (a)$ contém a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}\| &= \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q,w} \leq 1} \left\|\mathbf{P}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_p = \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q,w} \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q,w} \leq 1} C \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q,w}^n = C.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathbf{P}\| \leq \|P\|_{as,(p;q)} . \tag{5.5}$$

De (5.4) e (5.5) segue que $\|P\|_{as,(p;q)} = \|\mathbf{P}\|$. ■

Observação 5.1.14 *Prova-se que um polinômio n-homogêneo contínuo $P : X \to Y$ é absolutamente $(p;q)$-somante se, e somente se, sua aplicação multilinear simétrica $\check{P} : X \times \cdots \times X \to Y$ associada é absolutamente $(p;q,\ldots q)$-somante. Note que isso garante que a aplicação $\check{\mathbf{P}}$ acima esteja realmente bem definida.*

Observação 5.1.15 *Uma vez provada a igualdade $\|P\|_{as,(p;q)} = \|\mathbf{P}\|$, segue da continuidade de $\mathbf{P}$ que*

$$\left\|\mathbf{P}\left((x_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\|_p \leq \|\mathbf{P}\| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q,w}^n ,$$

isto é,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|P\|_{as,(p;q)} \sup_{\varphi \in B_{X'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q\right)^{\frac{n}{q}} .$$

Portanto, o ínfimo $\|P\|_{as,(p;q)}$ é assumido.

Observação 5.1.16 *Se $p < 1$, $\|\cdot\|_{as,(p;q)}$ é uma p-norma e, se $p \geq 1$, $\|\cdot\|_{as,(p;q)}$ é uma norma em $\mathcal{P}_{as,(p;q)}({}^nX;Y)$. Em qualquer um dos casos, temos espaços topológicos metrizáveis e completos (veja [25]).*

Polinômios dominados

A teoria dos polinômios absolutamente $(p;q)$-somantes apresenta, em geral, pouca relação com a teoria linear. Entretanto, o caso particular de polinômios n-homogêneos absolutamente $\left(\frac{p}{n};p\right)$-somantes (chamados de p-dominados) resgata muitas das propriedades da teoria linear como, por exemplo, o Teorema da Dominação de Pietsch (visto na seção 3.5) e o Teorema de Inclusão. Por essa razão, este caso particular tem sido estudado separadamente.

Definição 5.1.17 *Seja $p \geq 1$. Os elementos de $\mathcal{P}_{as,\left(\frac{p}{n};p\right)}({}^nX;Y)$ são chamados de **polinômios p-dominados**. Nesse caso, escrevemos $\mathcal{P}_{d,p}({}^nX;Y)$ em vez de $\mathcal{P}_{as,\left(\frac{p}{n};p\right)}({}^nX;Y)$ e $\|\cdot\|_{d,p}$ em vez de $\|\cdot\|_{as,\left(\frac{p}{n};p\right)}$.*

5.2 Resultados auxiliares

A1. *Seja* $\{a_{\lambda\mu}\}_{(\lambda,\mu)\in L\times M}$ *uma família de escalares positivos, então:*

a) *Se* $\sup\limits_{\lambda\in L}\left(\sup\limits_{\mu\in M} a_{\lambda\mu}\right)=\infty$*, então* $\sup\limits_{\mu\in M}\left(\sup\limits_{\lambda\in L} a_{\lambda\mu}\right)=\infty$*;*

b) Se $\sup\limits_{\lambda\in L}\left(\sup\limits_{\mu\in M} a_{\lambda\mu}\right)=A<\infty$*, então* $\sup\limits_{\mu\in M}\left(\sup\limits_{\lambda\in L} a_{\lambda\mu}\right)=A.$

Demonstração: [**Prova de (a)**]. Considere $b_\lambda=\sup\limits_{\mu\in M} a_{\lambda\mu}$. Então, dado $K>0$, existe $\lambda_0\in L$ tal que

$$\sup_{\mu\in M} a_{\lambda_0\mu}=b_{\lambda_0}>K.$$

Logo, existe $\mu_0\in M$ tal que

$$a_{\lambda_0\mu_0}>K.$$

Como

$$b_{\mu_0}=\sup_{\lambda\in L} a_{\lambda\mu_0}\geq a_{\lambda_0\mu_0}>K,$$

seque que

$$\sup_{\mu\in M}\left(\sup_{\lambda\in L} a_{\lambda\mu}\right)=\infty$$

o que prova (a).

[**Prova de (b)**]. Por hipótese, para todo $\varepsilon>0$ existe $\lambda_0\in L$ tal que

$$\sup_{\mu\in M} a_{\lambda_0\mu}=b_{\lambda_0}>A-\varepsilon.$$

Logo, existe $\mu_0\in M$ tal que

$$a_{\lambda_0\mu_0}>A-\varepsilon.$$

Como, para todo $\mu\in M$,

$$\sup_{\lambda\in L} a_{\lambda\mu}\geq a_{\lambda_0\mu}$$

segue que

$$B=\sup_{\mu\in M}\left(\sup_{\lambda\in L} a_{\lambda\mu}\right)\geq\sup_{\lambda\in L} a_{\lambda\mu}\geq\sup_{\mu\in M} a_{\lambda_0\mu}\geq a_{\lambda_0\mu_0}>A-\varepsilon$$

mostrando que $B>A-\varepsilon$ para todo $\varepsilon>0$, o que implica $B\geq A$. Note que $B<\infty$ pois, caso contrário, o item (a) nos daria $A=\infty$ (absurdo). Agora, sabendo que

$$\sup_{\mu\in M}\left(\sup_{\lambda\in L} a_{\lambda\mu}\right)=B<\infty$$

e usando o mesmo argumento utilizado para mostrar que $B\geq A$, podemos concluir que $A\geq B$ e o resultado segue. ■

A2. *Sejam dados $m \in N$, $x_1, \ldots, x_m \in E$ e $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existem $q_1, \ldots, q_m \in Q$ tais que*

$$\left| \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |q_j| \, |\varphi(x_j)|^p \right) - \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} |r_j| \, |\varphi(x_j)|^p \right) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Demonstração: Pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, é possível encontrar racionais $q_k^{(j)}$ tais que

$$r_j = \lim_{k \to \infty} q_k^{(j)}$$

para todo $j = 1, \ldots, m$. Mais ainda, podemos supor que $\left(q_k^{(j)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente em $\mathbb{Q}$. Comecemos por afirmar que

$$\lim_{k \to \infty} \left[\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| q_k^{(j)} \right| |\varphi(x_j)|^p \right) \right] = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left[\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| q_k^{(j)} \right| |\varphi(x_j)|^p \right) \right]. \tag{5.6}$$

Para isso, é suficiente mostrar que a sequência, cujo termo geral é

$$y_k = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| q_k^{(j)} \right| |\varphi(x_j)|^p \right),$$

é crescente e limitada. De fato, note primeiramente que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \left| q_k^{(j)} \right| |\varphi(x_j)|^p &\leq \sum_{j=1}^{m} \left| q_k^{(j)} \right| \|\varphi\|^p \|x_j\|^p \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \left| q_k^{(j)} \right| 1 \, \|x_j\|^p \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} |r_j| \, \|x_j\|^p = cte \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in B_{E'}$. Logo,

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{m} \left| q_k^{(j)} \right| |\varphi(x_j)|^p \right) \leq cte.$$

Note ainda que a constante acima não depende do índice k. Assim, lembrando que

$$q_k^{(j)} < q_{k+1}^{(j)}$$

para todos $k \in \mathbb{N}$ e $j = 1, \ldots, m$, obtemos a monotonicidade e limitação desejadas para a sequência (y_k). Consequentemente, a igualdade (5.6) é verdadeira. Usando o anexo

(A1), segue dessa mesma equação que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left[\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|q_k^{(j)}\right|\left|\varphi\left(x_j\right)\right|^p\right)\right] &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left[\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|q_k^{(j)}\right|\left|\varphi\left(x_j\right)\right|^p\right)\right]\\ &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left[\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|q_k^{(j)}\right|\left|\varphi\left(x_j\right)\right|^p\right)\right]\\ &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left[\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\lim_{k\to\infty}q_k^{(j)}\right|\left|\varphi\left(x_j\right)\right|^p\right)\right]\\ &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|r_j\right|\left|\varphi\left(x_j\right)\right|^p\right).\end{aligned}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \left|\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|q_k^{(j)}\right|\left|\varphi\left(x_j\right)\right|^p\right) - \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|r_j\right|\left|\varphi\left(x_j\right)\right|^p\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Em particular, obtemos os racionais procurados ao definirmos $q_j = q_{k_0}^{(j)}$, com $j = 1, \ldots, m$. ■

Referências Bibliográficas

[1] R. Alencar and M. C. Matos, *Some classes of multilinear mappings between Banach spaces*, Publicaciones Departamento de Análisis Matematico, Universidad Complutense de Madrid, Sect. 1, no. 12, 1989.

[2] R. Ash, *Measure, Integration, and Functional Analysis*, Academic Press, Inc., 1972.

[3] A. T. L. Bernardino, *Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[4] G. Botelho, *Cotype and absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Proceedings of the Royal Irish Academy Section A **97** (1997), 145-153.

[5] G. Botelho, H.-A. Braunss, H. Junek e D. Pellegrino, *Inclusions and coincidences for multiple summing multilinear mappings*, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (2009), 991-1000.

[6] G. Botelho, C. Michels e D. Pellegrino, *Complex interpolation and summability properties of multilinear operators*, Revista Matematica Complutense **139** (2010), 139-161.

[7] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *A nonlinear Pietsch Domination Theorem*, Monatshefte für Mathematik **158** (2009), 247–257.

[8] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *A unified Pietsch Domination Theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **365** (2010), 269-276.

[9] G. Botelho, D. Pellegrino e P. Rueda, *Dominated polynomials on infinite dimensional spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **138** (2010), 209-216.

[10] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications*, Dunod, Paris, 1999.

[11] E. Çaliskan e D. M. Pellegrino, *On the multilinear generalization of the concept of absolutely summing operators*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **37** (2007), 1137-1154.

[12] R. Cilia and J. Gutiérrez, *Dominated, diagonal polynomials on ℓ_p spaces*, Archiv der Mathematik **84** (2005), 421-431.

[13] A. Defant, D. García, M. Maestre e D. Pérez-García, *Bohr's strip for vector valued Dirichlet series*, Mathematische Annalen **342** (2008), 533-555.

[14] A. Defant e D. Pérez-García, *A tensor norm preserving unconditionality for L_p-spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **360** (2008), 3287-3306.

[15] A. Defant e P. Sevilla-Peris, *A new multilinear insight on Littlewood's* 4/3-*inequality*, Journal of Functional Analysis **256** (2009), 1642-1664.

[16] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tongue, *Absolutely summing operatores*, Cambridge University Press 1995.

[17] V. Dimant, *Strongly p-summing multilinear mappings*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **278** (2003) 182-193.

[18] S. Dineen, *Complex Analysis on infinite dimensional spaces*, Springer Verlag, London, 2001.

[19] J. Farmer, W. B. Johnson, *Lipschitz p-summing operators*, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (2009), 2989–2995.

[20] S. Geiss, *Ideale multilinearer Abbildungen*, Diplomarbeit, 1985.

[21] H. Junek, M. C. Matos e D. Pellegrino, *Inclusions theorems for absolutely summing holomorphic mappings*, Procedings of the American Society **136** (2008), 3983-3991.

[22] E. Lages, *Curso de Análise*, Vol. 1. 11. ed., Coleção Projeto Euclides, 2006.

[23] J. Lindenstrauss e A. Pelczyński, *Abslolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Mathematica **29** (1968), 276-326.

[24] F. Martínez-Giménez, E. A. Sánchez-Pérez, *Vector measure range duality and factorizations of (D, p)-summing operators from Banach function spaces*, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (N.S.) **35** (2004) 51-69.

[25] M. C. Matos, *Absolutely summing holomorphic mappings*, Anais da Academia Brasileira de Ciências **68** (1996) 1–13.

[26] M. C. Matos, *Nonlinear absolutely summing mappings*, Mathematische Nachrichten **258** (2003), 71-89.

[27] M. C. Matos e D. Pellegrino, *Fully summing mappings between Banach spaces*, Studia Mathematica **178** (2007), 47-61.

[28] Y. Meléndez and A. Tonge, *Polynomials and the Pietsch Domination Theorem*, Proceedings of the Royal Irish Academy Section A **99** (1999), 195-212.

[29] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Mathematical Studies **120**, North Holland, Amsterdam, 1986.

[30] X. Mujica, *$\tau(p;q)$-summing mappings and the domination theorem*, Portugaliae Mathematica **65** (2008), 221-226.

[31] D. Pellegrino, *Aplicações entre espaços de Banach relacionadas à convergência de séries*, Thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2002.

[32] D. Pellegrino, *Cotype and nonlinear absolutely summing mappings*, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy **105A** (2005), 75-91.

[33] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Tese de Doutorado, Universidade Complutense de Madrid, 2003.

[34] D. Pérez-García, M. M. Wolf, C. Palazuelos, I. Villanueva and M. Junge, *Unbounded violation of tripartite Bell inequalities*, Communications on Mathematical Physics **279** (2008), 455-486.

[35] A. Pietsch. *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.

[36] J. S. Santos, *Resultados de coincidência para aplicações absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo