

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

VALDOMIRO ROCHA

Centros Persistentes

Goiânia
2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

VALDOMIRO ROCHA

Centros Persistentes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado

Goiânia
2010

VALDOMIRO ROCHA

Centros Persistentes

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 05 de março de 2010, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado
Instituto de Matemática e Estatística – UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima
Centro de Matemática, Computação e Cognição – UFABC

Profa. Dra. Marina Tuyako Mizukoshi
Instituto de Matemática e Estatística – UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Valdomiro Rocha

Graduou-se em matemática na Universidade Estadual de Montes Claros - Unimontes. Durante sua graduação foi monitor dos alunos bolsistas da OBEMEP, desenvolveu trabalho de iniciação científica na área de geometria diferencial, apresentando trabalhos na I e II Semana da Matemática Física e Estatística, evento promovido pelo Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Unimontes, exerceu o cargo de professor de ensino superior na Unimontes em 2007 ministrando as disciplinas: Cálculo Diferencial e Integral I; Fundamentos de Matemática II; Física I e III; Álgebra Linear e Matemática, nos cursos de Matemática, Sistemas de Informação e Zootecnia. Atualmente é bolsista da Capes no programa de mestrado da UFG, Universidade Federal de Goiás, sendo que no segundo semestre de 2009, durante o mestrado, fez um intercâmbio na Unicamp, onde foi bolsista do PROCAD, e cursou a disciplina Análise I do programa de mestrado da Unicamp.

Aos meus pais,
Altino Rocha e Gercina Maria de Jesus,
pela compreensão e carinho dedicados.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por minha existência.

À minha família, em especial aos meus Pais pelo grande apoio, compreensão, por acreditarem por mim e mais do que tudo, pelo enorme amor.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado pelos ensinamentos e orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores, Prof. Ms. Narciso da Hora Lisboa; Prof. Dr. José Higinio Dias Filho; Prof. Ms. Sebastião Luiz Pereira da Universidade Estadual de Montes Claros, Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia, da Universidade Federal de Goiás e Prof. Guiarone Barbosa da Escola Estadual Santos Dumont, onde cursei o ensino médio, pelos ensinamentos e apoio.

À todos os amigos de graduação e mestrado pelo carinho e companherismo.

À Capes pela bolsa de estudo concedida.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Resumo

Rocha, Valdomiro. **Centros Persistentes**. Goiânia, 2010. 68p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O problema de decidir se um ponto singular monodrômico com autovalores imaginários para uma família analítica de um campo de vetores planares é um centro ou um foco foi resolvido por Lyapunov. Este é o famoso problema *centro-foco*, que foi resolvido calculando as chamadas *constantes de Lyapunov* e verificar se elas são ou não nulas. Existem métodos diferentes de calculá-las dependendo da aproximação a ser utilizada: cálculo da função de Lyapunov; uso de formas normais; cálculo da potência na expansão da solução em coordenadas polares; uso da estrutura algébrica das constantes de Lyapunov; método de Lyapunov-Schmit e funções de Melnikov. Apesar de todos os métodos acima o problema centro-foco para uma família simples, como a cúbica, tem resistido a todas as tentativas de solução, por isto classificamos os centros em três níveis para tornar o problema mais viável.

Palavras-chave

Equações diferenciais, ponto singular, problema centro-foco, constantes de Lyapunov.

Abstract

Rocha, Valdomiro. **Persistent Center**. Goiânia, 2010. 68p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The problem of distinguishing whether a monodromic critical point with imaginary eigenvalues of a family of a planar analytical vector field is a center or a focus was already solved by Lyapunov. This is the famous *center-focus* problem which was solved by calculating the so-called *Lyapunov constants* and see whether or not they are zero. We present a few ways to calculate them according the approaches that they use: computation of a Lyapunov function; use of normal forms; computation of the power of expansion of a solution in polar coordinates; use of the algebraic structure of Lyapunov constants; method of Lyapunov-Schmit and Melnikov functions. Despite all of the above the center-focus problem for a simple family as the cube is resisting all attempts at solution. For this reason the centers, we propose to grade the in three levels in order to make the problem more feasible.

Keywords

Differential Equations, singular point, center-focus problem, Lyapunov constants.

Sumário

Lista de Figuras	9
Lista de Tabelas	10
1 Preliminares	15
1.1 Fluxos e campos de vetores	15
1.2 Estrutura local de pontos singulares	17
1.2.1 Índice de pontos singulares	17
1.3 Aplicação de primeiro retorno de Poincaré	18
2 Centros persistentes	23
2.1 Constantes de Lyapunov	26
3 Centros conhecidos	34
3.1 Funções de Melnikov	40
4 Provas dos resultados principais	48
4.1 Prova do Teorema A	48
4.2 Prova do Teorema B	49
4.3 Prova do Teorema C	52
5 Centros fracamente persistentes	55
6 Conclusões	65
Referências Bibliográficas	66

Lista de Figuras

1.1 [Aplicação de Poincaré.](#)

19

Lista de Tabelas

5.1 Termos que multiplicam os coeficientes A_{kl}

63

Introdução

Seja Δ um aberto do espaço \mathbb{R}^2 , considere a família analítica de um campo de vetores planar

$$\dot{x} = X(x),$$

o ponto $x \in \Delta$ tal que $X(x) = 0$ é chamado de ponto *singular*.

Suponha que a família acima possui um ponto singular do tipo centro, ou seja, os autovalores associados a ele são imaginários puros. O problema de decidir se este ponto singular é um centro ou um foco foi resolvido por Lyapunov, este é o famoso problema *centro-foco*, que foi resolvido calculando as chamadas *constantes de Lyapunov* e verificar se elas são ou não nulas. Citamos algumas formas de calculá-las dependendo da forma que são utilizadas.

No Capítulo 1, apresentamos resultados importantes no desenvolvimento do trabalho, como o Teorema de existência e unicidade de soluções, propriedades de fluxo e dependência contínua, citamos a estrutura local e índice dos pontos singulares, definimos aplicação de primeiro retorno de Poincaré, integral primeira, e por fim, o divergente de um campo de vetores e as equações de Cauchy-Riemann.

No Capítulo 2, damos a definição de centro persistente.

Definição. Dada a equação diferencial $\dot{z} = iz + F(z, \bar{z})$, dizemos que:

(a) A origem é um centro persistente se ela é um centro para

$$\dot{z} = iz + \lambda F(z, \bar{z}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

(b) A origem é um centro fracamente persistente se é um centro para

$$\dot{z} = iz + uF(z, \bar{z}), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Demonstramos um Lema técnico, Lema 2.2, que advém do fato da família possuir um centro persistente na origem, que será de fundamental importância para demonstração do Teorema B abaixo, e por fim enunciamos os Teoremas principais, A, B e C.

Teorema A. Sejam f uma função analítica complexa, A , B e C números complexos e ψ uma função analítica tal que $z^k \bar{z}^l \psi(z, \bar{z})$ começa com termos de no mínimo ordem dois. Temos que as equações diferenciais

Quadrática: $\dot{z} = iz + Az^2 + C\bar{z}^2$,

Holomorfa: $\dot{z} = iz + f(z)$ com $f(0) = f'(0) = 0$,

Hamiltoniana: $\dot{z} = iz + f(\bar{z})$ com $f(0) = f'(0) = 0$,

Separada: $\dot{z} = iz + z\bar{z}f(\bar{z})$,

Reversível: $\dot{z} = iz + Bz^k \bar{z}^l \psi(z, \bar{z})$ com $k \neq l + 1$,

possuem um centro persistente na origem.

Teorema B. Considere a equação diferencial complexa cúbica.

$$\dot{z} = iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2 + Dz^3 + Ez^2\bar{z} + Fz\bar{z}^2 + G\bar{z}^3.$$

A origem é um centro persistente se e somente se for escrito nos seguintes formas:

Quadrática: $\dot{z} = iz + Az^2 + C\bar{z}^2$,

Holomorfa: $\dot{z} = iz + Az^2 + Dz^3$.

Hamiltoniana: $\dot{z} = iz + C\bar{z}^2 + G\bar{z}^3$,

Separada: $\dot{z} = iz + Bz\bar{z} + Fz\bar{z}^2$

Teorema C. O sistema rígido

$$\dot{z} = iz + zH(z, \bar{z}) \quad , \quad \text{onde} \quad \overline{H(z, \bar{z})} = H(z, \bar{z}),$$

possui um centro persistente na origem, se e somente se, é o trivial, ou seja, $H(z, \bar{z}) \equiv 0$.

Estes são os resultados principais que encontramos para sistemas de equações diferenciais que possuem a propriedade de ter um centro persistente na origem, cuja demonstração será apresentada no Capítulo 4. Utilizamos do algoritmo do cálculo da primeira constantes de Lyapunov não nula para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + P(x, y) & = -y + \sum_{k=2}^n P_k(x, y) \\ \dot{y} = x + Q(x, y) & = x + \sum_{k=2}^n Q_k(x, y) \end{cases}$$

onde, P_k e Q_k são polinômios homogêneos de grau k .

Fazemos uso do cálculo da potência na expansão da solução em coordenadas polares e uso da estrutura algébrica das constantes de Lyapunov.

No Capítulo 3, citamos algumas famílias conhecidas de centros, introduzimos as funções de Melnikov, calculamos a primeira e segunda ordem obtendo um resultado que coincidirá com o Lema 2.2 do Capítulo 2, falamos sobre os sistemas rígidos, uma classe particular de campos que possuem centros persistentes somente no caso linear, isto será de fundamental importância para demonstração dos Teoremas principais.

No Capítulo 4, demonstramos os Teoremas principais.

No Capítulo 5, como aplicação para *centro fracamente persistente*, de acordo com a Definição 2.1, apresentamos o Teorema 5.3.

Teorema 5.3. Considere a equação diferencial

$$\dot{z} = iz + F_n(z, \bar{z}) = iz + \sum_{k+l=n} A_{kl} z^k \bar{z}^l, \text{ onde } A_{kl} \in \mathbb{C}. \text{ E seja}$$

$$S_n(\theta) = e^{-i\theta} F_n \left(e^{i\theta}, e^{-i\theta} \right) = e^{-i\theta} \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-ik\theta} e^{-il\theta} = \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-i(k-l-1)\theta}.$$

Temos que, as equações diferenciais polinomiais planares a seguir possuem a propriedade de ter um centro fracamente persistente na origem.

(a) para **n par**, temos m casos

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad & \dot{z} = iz + A_{k0} z^k + A_{1,k-1} z \bar{z}^{k-1}, \\ 2^\circ) \quad & \dot{z} = iz + A_{k-1,1} z^{k-1} \bar{z} + A_{2,k-2} z^2 \bar{z}^{k-2}, \\ 3^\circ) \quad & \dot{z} = iz + A_{k-2,2} z^{k-2} \bar{z}^2 + A_{3,k-3} z^3 \bar{z}^{k-3}, \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$(m-1)^\circ) \quad \dot{z} = iz + A_{\frac{k}{2}+2, \frac{k}{2}-2} z^{\frac{k}{2}+2} \bar{z}^{\frac{k}{2}-2} + A_{\frac{k}{2}-1, \frac{k}{2}+1} z^{\frac{k}{2}-1} \bar{z}^{\frac{k}{2}+1},$$

$$m^\circ) \quad \dot{z} = iz + A_{\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}-1} z^{\frac{k}{2}+1} \bar{z}^{\frac{k}{2}-1} + A_{\frac{k}{2}, \frac{k}{2}} z^{\frac{k}{2}} \bar{z}^{\frac{k}{2}}.$$

(b) para **n ímpar**, temos m casos

$$\begin{aligned} 1^\circ) \quad & \dot{z} = iz + A_{k0} z^k + A_{1,k-1} z \bar{z}^{k-1}, \\ 2^\circ) \quad & \dot{z} = iz + A_{k-1,1} z^{k-1} \bar{z} + A_{2,k-2} z^2 \bar{z}^{k-2}, \\ 3^\circ) \quad & \dot{z} = iz + A_{k-2,2} z^{k-2} \bar{z}^2 + A_{3,k-3} z^3 \bar{z}^{k-3}, \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$(m-1)^\circ) \quad \dot{z} = iz + A_{\frac{(k+1)}{2}+2, \frac{(k-1)}{2}-2} z^{\frac{(k+1)}{2}+2} \bar{z}^{\frac{(k-1)}{2}-2} + A_{\frac{(k-1)}{2}-1, \frac{(k+1)}{2}+1} z^{\frac{(k-1)}{2}-1} \bar{z}^{\frac{(k+1)}{2}+1},$$

$$m^\circ) \quad \dot{z} = iz + A_{\frac{(k+1)}{2}+1, \frac{(k-1)}{2}-1} z^{\frac{(k+1)}{2}+1} \bar{z}^{\frac{(k-1)}{2}-1} + A_{\frac{(k-1)}{2}, \frac{(k+1)}{2}} z^{\frac{(k-1)}{2}} \bar{z}^{\frac{(k+1)}{2}}.$$

Onde,

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é o número de casos.

Note que, este Teorema não tem o propósito de classificar todas as equações diferenciais polinomiais planares que possuem centro fracamente persistente na origem, mas sim, exemplificar o segundo item da Definição [2.1](#).

Preliminares

1.1 Fluxos e campos de vetores

Seja Δ um aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 . Definiremos um campo de vetor de classe C^r em Δ como sendo a aplicação

$$X : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

onde $X(x)$ representa o vetor no ponto $x \in \Delta$.

Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = X(x), \tag{1-1}$$

onde \dot{x} denota $\frac{dx}{dt}$.

As soluções da equação diferencial acima são as curvas $x(t)$, com t pertencendo a algum intervalo de \mathbb{R} .

As variáveis x e t são chamadas de *variável dependente* e *variável independente* da equação diferencial respectivamente. Usualmente t também é chamado de *tempo*.

Quando $X = X(x)$ não depende de t , dizemos que a equação diferencial acima é *autônoma*.

Recordamos que a solução da Equação (1-1) é uma aplicação

$$\varphi : I \longrightarrow \Delta,$$

onde I é o intervalo em que a solução esta definida, tal que

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)),$$

para todo $t \in I$.

Uma das formas de representar o campo de vetor X é por meio do operador

diferencial. Para (1-1), temos

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

operando em funções que são no mínimo de classe C^1 .

Um ponto $x \in \Delta$ tal que $X(x) = 0$ é chamado de *ponto singular*, caso contrário será chamado de *ponto regular* de X .

Seja $x_0 \in \Delta$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x_{t_0} = x_0, \end{cases}$$

temos que

$$\varphi : I \longrightarrow \Delta,$$

é a solução do problema de valor inicial, satisfazendo $\varphi(0) = x_0$.

A solução $\varphi : I \longrightarrow \Delta$ é chamada *maximal* se para toda solução

$$\psi : J \longrightarrow \Delta \text{ tal que } I \subset J \text{ e } \varphi = \psi|_I,$$

então $J = I$ e, conseqüentemente $\varphi = \psi$. Neste caso escrevemos $I = I_{x_0}$ e o chamamos de *intervalo máximo*.

Seja $\varphi : I_{x_0} \longrightarrow \Delta$ a solução máxima, regular ou constante. A imagem

$$\lambda_\varphi = \{\varphi(t) : t \in I_{x_0}\} \subset \Delta,$$

com orientação induzida por φ , neste caso φ é regular e é chamada de a *trajetória*, *órbita* ou *curva integral máxima* associada a solução máxima φ .

A seguir apresentaremos sem demonstração resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho, as provas podem ser encontradas em [29].

Teorema 1.1. [Existência e unicidade] *Seja X um campo de vetor de classe C^r com $1 \leq r \leq +\infty$ ou $r = \omega$, isto é, f analítica, segue que:*

(i) *Existência e unicidade de soluções máximas*

Para cada $x \in \Delta$ existe um intervalo aberto I_x em que uma única solução máxima φ_x da equação diferencial $\dot{x} = X(x)$ é definida satisfazendo a condição $\varphi_x(0) = x$.

(ii) Propriedades de fluxo

Se $y = \varphi_x(t)$ e $t \in I_x$, então

$$I_y = I_x - t = \{r - t : r \in I_x\} \text{ e}$$

$$\varphi_x(t) = \varphi_x(t + s)$$

para todo $s \in I_y$.

(iii) Dependência contínua

Seja $\Omega = \{(t, x) : x \in \Delta, t \in I_x\}$. Então Ω é um conjunto aberto do \mathbb{R}^3 e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é uma aplicação de classe C^r , além disso, φ satisfaz

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) D_2 \varphi(t, x)$$

para cada $(t, x) \in \Omega$, onde D_1 denota a derivada com respeito ao tempo e D_2 denota a derivada com respeito a x , e DX denota a parte linear do campo de vetor.

1.2 Estrutura local de pontos singulares

Seja Δ um aberto do espaço \mathbb{R}^2 , considere a equação diferencial (1-1), os pontos $p \in \Delta$ tais que $X(p) = 0$ são os pontos singulares, definiremos,

- Um ponto singular p é *não degenerado* se não possui autovalor nulo.
- Um ponto singular p é *hiperbólico* se os autovalores de $DX(p)$ possuem parte real não nula.
- Um ponto singular p é *semi hiperbólico* se apenas um dos autovalores de $DX(p)$ é nulo. Singularidades *hiperbólicas* e *semi hiperbólicas* são chamadas de *singularidades elementares*.
- Um ponto singular p é *centro* se a parte real dos autovalores é nula.
- Num sistema de equações não lineares, um ponto singular p é um *foco fraco* se os autovalores são imaginários puros.

1.2.1 Índice de pontos singulares

Considere um campo de vetores em um aberto do plano orientado euclidiano. Suponhamos que é dada uma curva fechada orientada no plano, que não possua nenhum

ponto singular do campo, e suponhamos que um ponto faz um circuito ao redor da curva no sentido positivo. Então, o vetor campo no ponto em questão irá rodar continuamente sobre a curva. Quando o ponto está na sua posição original, tendo ido ao redor da curva, o vetor também retorna à sua posição original, mas ao fazê-lo, pode fazer várias revoluções em um sentido ou no outro. O número de rotações realizadas pelo vetor campo ao percorrer a curva de uma vez é chamado de *índice* da curva. Aqui, o número de rotações é tomada com o sinal positivo se o vetor gira na direção especificada pela orientação do plano, e negativa caso contrário. Seja X um campo de vetor C^1 em \mathbb{R}^2 , e p_1, \dots, p_m pontos singulares desse campo, definiremos o índice de um ponto singular em uma superfície bidimensional S . Entende-se por uma superfície bidimensional, vamos dizer um compacto, uma variedade diferenciável de classe C^2 , o índice da superfície S em relação ao campo vetorial X , que denotemos por $I_X(S)$, é definido como a soma dos índices de cada um dos pontos singulares p_1, \dots, p_m em S .

Um fato interessante, é que, o índice da superfície S não depende do campo de vetor X , depende somente da topologia da superfície, a definição a seguir encontra-se em [29].

Definição 1.2. *Seja C uma curva de Jordan. O índice $I_X(C)$ relativo a um campo de vetor $X \in C^1(\mathbb{R}^2)$, onde X não possui ponto singular em C é definido como sendo o inteiro*

$$I_X(C) = \frac{\Delta\Theta}{2\pi},$$

onde $\Delta\Theta$ é a variação total do ângulo Θ que o vetor $X = (P, Q)^T$ faz com respeito ao eixo x , ou seja, $\Delta\Theta$ é obtido usando

$$\Theta(x, y) = \tan^{-1} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

pois o ponto (x, y) intercepta C somente uma vez na direção positiva.

O índice $I_X(C)$ também pode ser calculada através da fórmula

$$I_X(C) = \frac{1}{2\pi} \oint_C d \tan^{-1} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\pi} \oint_C d \tan^{-1} \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}.$$

Para um exemplo, veja [29].

1.3 Aplicação de primeiro retorno de Poincaré

Provavelmente o instrumento mais básico para o estudo e bifurcações de órbitas periódicas é a aplicação de primeiro retorno de Poincaré, definido por Henri Poincaré em 1881. A idéia da aplicação de Poincaré é bastante simples.

Se Γ é uma órbita periódica do sistema

$$\dot{x} = X(x)$$

através do ponto x_0 , e Σ um hiperplano transversal a Γ em x_0 , então para qualquer ponto $x \in \Sigma$ suficientemente perto de x_0 , a solução $\varphi_t(x)$ de $\dot{x} = X(x)$ que passa por x em $t = 0$ intercepta novamente Σ no ponto $\pi(x)$. A aplicação

$$\pi : \Sigma \longrightarrow \Sigma,$$

é chamada de a aplicação de primeiro retorno de Poincaré.

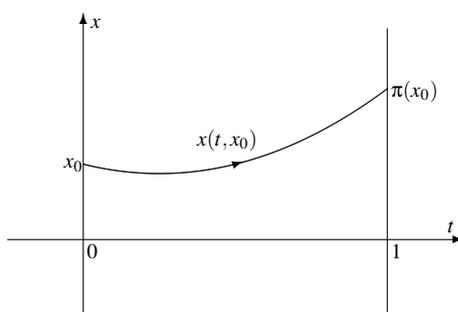


Figura 1.1: Aplicação de Poincaré.

Por fim, daremos algumas definições que serão relevantes no prosseguimento do trabalho.

Seja Δ um aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^2 , e seja

$$f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma função diferenciável.

Definição 1.3. A função f é dita *integral primeira da equação diferencial*

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \Delta,$$

se, a derivada na direção do campo de vetor X é nula, isto é,

$$X(f) = 0,$$

ou equivalentemente, se

$$\varphi : I \longrightarrow \Delta, \quad I \in \mathbb{R} \text{ um intervalo},$$

é solução da equação acima, então

$$f \circ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ é constante,}$$

isto é, f é constante ao longo de cada solução.

O problema de sabermos se uma função complexa f é derivável em um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ é simplificada pelo fato de sabermos se as partes real e imaginária de f são parcialmente deriváveis em (x_0, y_0) .

Seja $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$, sendo Δ um aberto do plano complexo.

Teorema 1.4. *Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é uma função analítica em um ponto $z_0 = (a, b)$, onde u e v são funções reais, então, valem as Equações de Cauchy-Riemann, isto é:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Prova. Como f é analítica em z_0 , então

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

este limite existe independente do modo como h tende a zero. Tomando $h \rightarrow 0$ por valores reais $h = k$, teremos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f'(a, b) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(a+k, b) - u(a, b) + i[v(a+k, b) - v(a, b)]}{k} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(a+k, b) - u(a, b)}{k} + i \frac{v(a+k, b) - v(a, b)}{k}. \end{aligned}$$

Logo

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Tomando agora $h \rightarrow 0$ por valores imaginários $h = it$, teremos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= f'(a, b) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(a, b+t) - u(a, b) + i[v(a, b+t) - v(a, b)]}{it} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(a, b+t) - u(a, b)}{t} - i \frac{v(a, b+t) - v(a, b)}{t}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Das expressões acima, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Igualando as partes reais e as partes imaginárias, obtemos as Equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 1.5. *As equações de Cauchy-Riemann não são suficientes para a analiticidade, isto é, existem funções $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em um dado ponto z_0 , mas que não possuem derivada neste ponto.*

Exemplo 1. *Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, onde x e y são variáveis reais, definamos*

$$u(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} \text{ e } v(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \text{ para } x, y \text{ não nulos, e}$$

$$u(0, 0) = v(0, 0) = 0.$$

Temos que a função f assim definida, satisfaz as equações de Cauchy-Riemann, mas não é analítica na origem.

Prova. Temos que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $(0, 0)$, pois

$$u_x(0, 0) = 1 = v_y(0, 0) \text{ e } u_y(0, 0) = -v_x(0, 0).$$

Porém $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ não tem derivada em $(0, 0)$. De fato

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x^2 + xy + y^2}{(x + y)(x + iy)} + i \frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2)(x + iy)},$$

tomando $z \rightarrow 0$ através da reta real $x = 0$, obtemos

$$f'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y + iy}{iy} = 1 - i.$$

Agora, para $z \rightarrow 0$ através da reta $y = 0$, temos

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + ix}{ix} = 1 + i.$$

Portanto, f não possui derivada em $z = 0 + i0 = (0, 0)$.

Definição 1.6. *Seja X um campo de vetor no espaço euclidiano \mathbb{R}^n , com coordenadas retangulares x_i , a função*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i},$$

é chamada de o divergente do campo de vetor X . No caso em que o campo é linear, o divergente é simplesmente o traço do operador X .

Centros persistentes

Neste capítulo apresentamos resultados preliminares que serão utilizados na demonstração dos Teoremas **A**, **B**, e **C**.

Um foco fraco para uma equação diferencial analítica autônoma planar pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + P(x, y) & = -y + \sum_{k=2}^n P_k(x, y) \\ \dot{y} = x + Q(x, y) & = x + \sum_{k=2}^n Q_k(x, y) \end{cases} \quad (2-1)$$

onde P_k e Q_k são polinômios homogêneos de grau k .

Expressando o Sistema (2-1) em variáveis complexas, ou seja, fazendo a mudança de variáveis

$$z = x + iy,$$

temos que o Sistema (2-1) é dado por

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x} + i\dot{y} \\ &= -y + ix + P(x, y) + iQ(x, y) \\ &= iz + F(z, \bar{z}), \end{aligned}$$

onde a última igualdade se deve ao fato de,

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

ou ainda, temos a seguinte equação diferencial

$$\dot{z} = iz + F(z, \bar{z}), \quad (2-2)$$

onde $F(z, \bar{z})$ é um polinômio complexo.

Usaremos a notação

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{k=2}^n F_k(z, \bar{z}) = \sum_{k=2}^n f_{kl} z^k \bar{z}^l,$$

onde f_{kl} são números complexos, coeficientes de $F_k(z, \bar{z})$.

Logo a Equação (2-2) pode ser escrita como

$$\dot{z} = iz + F(z, \bar{z}) = iz + \sum_{k=2}^n f_{kl} z^k \bar{z}^l,$$

onde F é um polinômio que começam com termos de segunda ordem no mínimo. O fato de usar a mudança de variáveis complexas é devido a simplificação que se tem na notação.

Exemplo 2. Para exemplificar a mudança de variáveis, seja

$$P(x, y) = x^2 + xy + y^2 \quad e \quad Q(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$$

polinômios homogêneos de grau 2. Encontraremos A , B e C do polinômio complexo, homogêneo de grau 2, $F_2(z, \bar{z}) = Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2$, de maneira que o Sistema (2-1) seja transformado na expressão dada em (2-2).

Para este exemplo, o Sistema (2-1) fica

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 + xy + y^2 \\ \dot{y} = x + 2x^2 - xy + 2y^2 \end{cases}$$

fazendo a mudança de variáveis $z = x + iy$, obtemos

$$\dot{z} = iz - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) z^2 + (1 + 2i)z\bar{z} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) \bar{z}^2,$$

portanto,

$$F_2(z, \bar{z}) = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) z^2 + (1 + 2i)z\bar{z} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right) \bar{z}^2$$

onde $A = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)$, $B = (1 + 2i)$ e $C = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)$.

Definição 2.1. Dada a equação diferencial $\dot{z} = iz + F(z, \bar{z})$, dizemos que:

(a) A origem é um centro persistente se ela é um centro para

$$\dot{z} = iz + \lambda F(z, \bar{z}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

(b) A origem é um centro fracamente persistente se é um centro para

$$\dot{z} = iz + uF(z, \bar{z}), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Observe que

$$\{\text{centros persistentes}\} \subset \{\text{centros fracamente persistentes}\} \subset \{\text{centros}\}.$$

Os centros persistentes serão ditos a menor categoria. Um conceito similar também poderia ser desenvolvido considerando os centros degenerados. No Capítulo 5, apresentamos equações diferenciais polinomiais que tem a origem como centro fracamente persistente, mas esta classe de centros é bem mais ampla que os persistentes, por exemplo no caso não linear, eles coincidem com todos os centros, sendo assim, o enfoque aqui é dado aos centros persistentes.

A seguir apresentamos os três resultados mais importantes, o primeiro resultado cataloga todos os centros persistentes que encontramos.

Teorema A Seja f uma função analítica complexa, A , B e C números complexos e ψ uma função analítica tal que $z^k \bar{z}^l \psi(z, \bar{z})$ começa com termos de no mínimo ordem dois. Temos que as equações diferenciais

Quadrática: $\dot{z} = iz + Az^2 + C\bar{z}^2,$

Holomorfa: $\dot{z} = iz + f(z)$ com $f(0) = f'(0) = 0,$

Hamiltoniana: $\dot{z} = iz + f(\bar{z})$ com $f(0) = f'(0) = 0,$

Separada: $\dot{z} = iz + z\bar{z}f(\bar{z}),$

Reversível: $\dot{z} = iz + Bz^k \bar{z}^l \psi(z, \bar{z})$ com $k \neq l + 1,$

possuem um centro persistente na origem.

Teorema B Considere a equação diferencial complexa cúbica.

$$\dot{z} = iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2 + Dz^3 + Ez^2\bar{z} + Fz\bar{z}^2 + G\bar{z}^3.$$

A origem é um centro persistente se e somente se for escrito nos seguintes formas:

Quadrática: $\dot{z} = iz + Az^2 + C\bar{z}^2,$

Holomorfa: $\dot{z} = iz + Az^2 + Dz^3.$

Hamiltoniana: $\dot{z} = iz + C\bar{z}^2 + G\bar{z}^3,$

Separada: $\dot{z} = iz + Bz\bar{z} + Fz\bar{z}^2$

Teorema C O sistema rígido

$$\dot{z} = iz + zH(z, \bar{z}), \quad \text{onde} \quad \overline{H(z, \bar{z})} = H(z, \bar{z}),$$

possui um centro persistente na origem, se e somente se, é o trivial, ou seja, $H(z, \bar{z}) \equiv 0$.

Lembremos que o problema geral de obter todos os centros de uma equação cúbica está longe de ser resolvido.

Nas provas usaremos

- O cálculo da primeira constante de Lyapunov não nula para o Sistema (2-1);
- O cálculo da primeira e segunda ordem das funções de Melnikov, usando o enfoque descrito em [9], [14], [18], [19], [24], [25].

2.1 Constantes de Lyapunov

Considere o número complexo z na forma polar

$$z = re^{i\theta}, \tag{2-3}$$

derivando a Equação (2-3), e usando o Sistema (2-1) obtemos

$$\dot{r}e^{i\theta} + rie^{i\theta}\dot{\theta} = ire^{i\theta} + \sum_{k=2}^n F_k(z, \bar{z}).$$

Multiplicando ambas as partes da igualdade acima por $e^{-i\theta}$ temos

$$\dot{r} + ri\dot{\theta} = ir + e^{-i\theta} \sum_{k=2}^n F_k(z, \bar{z}),$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dot{r} = \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \sum_{k=2}^n F_k(z, \bar{z}) \right) \\ \dot{\theta} = 1 + \operatorname{Im} \left(e^{-i\theta} \sum_{k=2}^n F_k(z, \bar{z}) \right) r^{-1}. \end{cases}$$

Observe que utilizando a Equação (2-3) a expressão acima é reescrita da seguinte

forma

$$\begin{cases} \dot{r} = \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \sum_{k=2}^n F_k(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \right) r^k \\ \dot{\theta} = 1 + \operatorname{Im} \left(e^{-i\theta} \sum_{k=2}^n F_k(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \right) r^{k-1}. \end{cases} \quad (2-4)$$

Da Equação (2-4) escrevemos

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \sum_{k=2}^n F_k(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \right) r^k}{1 + \operatorname{Im} \left(e^{-i\theta} \sum_{k=2}^n F_k(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \right) r^{k-1}},$$

ou ainda, fazendo $S_k(\theta) = e^{-i\theta} F_k(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$, temos

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sum_{k=2}^n \operatorname{Re}(S_k(\theta)) r^k}{1 + \sum_{k=2}^n \operatorname{Im}(S_k(\theta)) r^{k-1}} = \sum_{k=2}^n T_k(\theta) r^k, \quad (2-5)$$

para algum $T_k(\theta)$.

Considere que a solução do Sistema (2-5) assuma o valor $\rho > 0$ quando $\theta = 0$ e chame de $r(\rho, \theta)$ a solução, assim

$$r(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^n u_k(\theta) \rho^k \text{ com } u_1(0) = 1 \text{ e } u_k(0) = 0 \text{ para todo } k \geq 2.$$

equivalentemente

$$\begin{cases} r(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^n u_k(\theta) \rho^k \\ r(\rho, 0) = \rho. \end{cases}$$

Por definição $r(\rho, \theta) = 0$ é um centro se e somente se $u_k(2\pi) = 0$ para todo $k \geq 2$, ou seja

$$\begin{cases} r(2\pi, \rho) = u_1(2\pi)\rho + u_2(2\pi)\rho^2 + \dots + u_k(2\pi)\rho^k + \dots = u_1(2\pi)\rho \\ r(2\pi, \rho) = \rho, \text{ pois } u_1(2\pi) = u_1(0) = 1. \end{cases} \quad (2-6)$$

Temos $\pi : (\rho, 0) \longrightarrow (\rho, 0)$ a aplicação de primeiro retorno de Poincaré, onde

$$(\rho, 0) = \Sigma, \text{ é a secção transversal } \theta = 0,$$

definida como sendo $\pi(\rho) = r(2\pi, \rho)$, os valores $u_k(2\pi)$ para todo $k \geq 2$ controla o comportamento das soluções (órbitas) do Sistema (2-5) perto da origem, ou seja, o propósito é obter as funções $u_k(\theta)$ e avaliá-las em $\theta = 2\pi$.

No caso em que a origem não é um centro é bem conhecido que o primeiro valor de k tal que $u_k(2\pi) \neq 0$ acontece quando k é um número ímpar, ou seja, $k = 2m + 1 \geq 3$. Veja [2]. Chamaremos:

$$V_{2m+1} := u_{2m+1}(2\pi),$$

a m -ésima constante de Lyapunov do Sistema (2-5).

Usaremos as expressões gerais de V_3 e V_5 , já que a expressão de V_7 é muito extensa e não será repetida aqui, assim,

$$V_3 = u_3(2\pi) \text{ e } V_5 = u_5(2\pi).$$

Quando precisarmos ir mais além no cálculo das constantes de Lyapunov usaremos o algoritmo desenvolvido em [13]. Observe que as vezes as constantes de Lyapunov são calculadas de formas diferentes (métodos diferentes) podendo diferir por uma constante multiplicativa, trataremos este fato, dizendo que $V_{2k+1} \propto W$ significando que $V_{2k+1} = cW$ onde $c > 0$ é uma constante.

Para simplificar as expressões de V_3 e V_5 usaremos f_{kl} para os coeficientes de $z^k \bar{z}^l$ em F e usaremos a notação expressa no Capítulo 1. A seguir listamos as expressões de V_3 e V_5 , de acordo com [11], temos

$$\begin{aligned} V_3 &= 2\pi [\operatorname{Re}(E) - \operatorname{Im}(AB)], \\ V_5 &= \frac{\pi}{3} \left[6\operatorname{Re}(O) + \operatorname{Im}(3E^2 - 6DF + 6A\bar{I} - 12BI - 6B\bar{J} - 8CH - 2C\bar{K}) + \right. \\ &\quad + \operatorname{Re}(-8C\bar{C}E + 4AC\bar{F} + 6B\bar{C}G - 12B^2D - 4ACD - 6A\bar{B}\bar{D} + 10B\bar{C}\bar{D} + \\ &\quad \left. + 4A\bar{C}G + 2BC\bar{G}) + \operatorname{Im}(6A\bar{B}^2C + 3A^2B^2 - 4A^2\bar{B}C + 4\bar{B}^3C) \right]. \end{aligned}$$

Estas expressões serão utilizadas na demonstração do Lema 2.2 a seguir.

Lema 2.2. *Se a origem do Sistema (2-1) for um centro persistente então*

$$\begin{aligned} E &= 0, & 3DF + 6BI + 4CH &= 0, \\ AB &= 0, & \operatorname{Im}(3A\bar{I} - 3B\bar{J} - C\bar{K}) &= 0, \\ BC &= 0, & A(C\bar{F} + \bar{C}G) &= 0, \\ O &= 0, & D(3B^2 + AC) &= 0. \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned}
 A &= f_{20}, & F &= f_{12}, & K &= f_{13}, \\
 B &= f_{11}, & G &= f_{03}, & L &= f_{04}, \\
 C &= f_{02}, & H &= f_{40}, & M &= f_{50}, \\
 D &= f_{30}, & I &= f_{31}, & N &= f_{41}, \\
 E &= f_{21}, & J &= f_{22}, & O &= f_{32}.
 \end{aligned}$$

Prova. A origem é um centro persistente para o Sistema (2-1), então é um centro para

$$\begin{aligned}
 \dot{z} &= iz + \lambda F(z, \bar{z}) \\
 &= iz + \lambda [F_2(z, \bar{z}) + F_3(z, \bar{z}) + \dots] \\
 &= iz + \lambda [f_{20}z^2 + f_{11}z\bar{z} + f_{02}\bar{z}^2 + \dots] \\
 &= iz + \lambda \sum_{k+l \geq 2} f_{kl}z^k\bar{z}^l \\
 &= iz + \sum_{k+l \geq 2} \lambda f_{kl}z^k\bar{z}^l, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.
 \end{aligned}$$

Usando a mudança de coordenadas (2-3) obtemos a Equação diferencial (2-5), cuja solução é expressa no Sistema (2-6). Como a origem é um centro temos por definição que

$$r(\rho, \theta) = 0,$$

assim

$$u_k(2\pi) = 0 \quad \text{para todo } k \geq 2.$$

A aplicação de primeiro retorno de Poincaré controlará o comportamento das soluções próximo da origem devido a dependência contínua das condições iniciais, assim

$$r(2\pi, \rho) = u_1(2\pi)\rho = \rho,$$

com isso, a m-ésima constante de Lyapunov é nula,

$$V_{2m+1} := u_{2m+1}(2\pi) = 0.$$

Escrevemos $V_{2m+1}(f_{kl})$ como a m-ésima constante de Lyapunov para explicitar a dependência dos coeficientes de z e \bar{z} , assim

$$V_{2m+1}(f_{kl}) = V_{2m+1}(\lambda f_{kl}) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Para $\lambda = u \in \mathbb{R}$, obtemos que todos os termos homogêneos da expressão V_{2m+1} tem que ser zero, assim

$$V_3(\lambda f_{kl}) = u_3(u f_{kl}) = 2\pi [\operatorname{Re}(E)u - \operatorname{Im}(AB)u^2] = 0, \quad \text{para todo } u \in \mathbb{R},$$

é um polinômio nulo na variável u , logo

$$\operatorname{Re}(E) = \operatorname{Im}(AB) = 0.$$

Por outro lado, para $\lambda = iu$, com $u \in \mathbb{R}$, obtemos

$$V_3(\lambda f_{kl}) = u_3(iu f_{kl}) = 2\pi [\operatorname{Re}(iE)u + \operatorname{Im}(AB)u^2] = 0,$$

como

$$\operatorname{Re}(iE) = \operatorname{Im}(E) = 0, \quad \text{temos que } E = 0.$$

Para $\lambda = u\sqrt{i}$ com $u \in \mathbb{R}$, vem

$$V_3(\lambda f_{kl}) = u_3(u\sqrt{i} f_{kl}) = 2\pi [\operatorname{Re}(\sqrt{i}E)u - \operatorname{Im}(iAB)u^2] = 0,$$

como

$$\operatorname{Im}(iAB) = \operatorname{Re}(AB) = 0, \quad \text{conclui-se que } AB = 0.$$

Esta argumentação pode ser estendida para V_5 , considerando $E = AB = 0$.

Para $\lambda = u$, com $u \in \mathbb{R}$, temos que, $V_5(\lambda f_{kl}) = V_5$ é dado por

$$\begin{aligned} V_5 = & \frac{\pi}{3} \left[6\operatorname{Re}(O)u + \operatorname{Im}(-6DF + 6A\bar{I} - 12BI - 6B\bar{J} - 8CH - 2C\bar{K})u^2 + \right. \\ & + \operatorname{Re}(4AC\bar{F} + 6B\bar{C}G - 12B^2D - 4ACD - 6A\bar{B}\bar{D} + 10B\bar{C}\bar{D} + 4A\bar{C}G + 2BC\bar{G})u^3 + \\ & \left. + \operatorname{Im}(6A\bar{B}^2C + 3A^2B^2 - 4A^2\bar{B}C + 4\bar{B}^3C)u^4 \right] = 0. \end{aligned}$$

Novamente temos um polinômio na variável u , como este polinômio é nulo, temos que seus coeficientes são nulos, ou seja,

$$\operatorname{Re}(O) = 0.$$

Com $\lambda = iu$, $u \in \mathbb{R}$, temos

$$\operatorname{Re}(iO) = \operatorname{Im}(O) = 0, \quad \text{logo } O = 0.$$

Observe que todas as partes homogêneas de V_5 são identicamente nulas, fixemos inicialmente os de grau 2, e definimos

$$W(f_{kl}) := \operatorname{Im}(-6DF + 6A\bar{I} - 12BI - 6B\bar{J} - 8CH - 2C\bar{K}) = 0.$$

substituindo os coeficientes f_{kl} de $z^k \bar{z}^l$ pelos coeficientes λf_{kl} , consideremos

$$-6DF - 12BI - 8CH := Pe^{ip} \text{ e}$$

$$6A\bar{I} - 6B\bar{J} - 2C\bar{K} := Qe^{iq},$$

onde P, Q, p, q são o módulo e o argumento dos números $-\lambda(6DF + 12BI + 8CH)$ e $\lambda(6A\bar{I} - 6B\bar{J} - 2C\bar{K})$ respectivamente.

Agora, seja $\lambda = e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha)$, com isso

$$\lambda^2 = e^{2i\alpha} = \cos(2\alpha) + i\text{sen}(2\alpha) \text{ e}$$

$$\bar{\lambda} = e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i\text{sen}(\alpha),$$

assim

$$\lambda\bar{\lambda} = e^{i\alpha}e^{-i\alpha} = e^0 = 1.$$

Como $W(f_{kl}) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, otemos

$$\lambda^2 Pe^{ip} = Pe^{i(p+2\alpha)} \text{ e}$$

$$\lambda\bar{\lambda} Qe^{iq} = Qe^{iq},$$

daí, temos que

$$P[\cos(p+2\alpha) + i\text{sen}(p+2\alpha)] + Q[\cos(q) + i\text{sen}(q)],$$

e

$$W(f_{kl}) = \text{Im}(P[\cos(p+2\alpha) + i\text{sen}(p+2\alpha)] + Q[\cos(q) + i\text{sen}(q)]) = 0,$$

Assim, temos

$$P\text{sen}(p+2\alpha) + Q\text{sen}(q) = 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

escolhendo $P = 0$ e $\text{sen}(q) = 0$, obtemos:

- $P = 0$,

$$-6DF - 12BI - 8CH := Pe^{ip} = 0 \Rightarrow (3DF + 6BI + 4CH) = 0.$$

- $\text{sen}(q) = 0$,

$$6A\bar{I} - 6B\bar{J} - 2C\bar{K} = Qe^{iq} = Q(\cos(q) + i\text{sen}(q)),$$

ou ainda

$$\text{Im}(Qe^{iq}) = 0,$$

portanto,

$$\operatorname{Im}(6A\bar{I} - 6B\bar{J} - 2C\bar{K}) = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{Im}(3A\bar{I} - 3B\bar{J} - C\bar{K}) = 0,$$

Observemos que o número complexo $3A\bar{I} - 3B\bar{J} - C\bar{K}$ tem o mesmo argumento q , mas com a metade do módulo do número complexo $6A\bar{I} - 6B\bar{J} - 2C\bar{K}$.

Para mostrarmos que $BC = 0$, usaremos o fato de que $AB = 0$ implica em $\bar{A}B = \bar{B}A = 0$.

Seja $\lambda = u\sqrt[4]{i}$ da expressão

$$\operatorname{Im}(6A\bar{B}^2C + 3A^2B^2 - 4A^2\bar{B}C + 4\bar{B}^3C),$$

segue que $\bar{B}^3C = 0$, ou seja, $BC = 0$.

Fixemos agora os termos de grau 3 de V_5 , definindo

$$Y(f_{kl}) := \operatorname{Re}(4AC\bar{F} - 12B^2D - 4ACD + 4A\bar{C}G) = 0.$$

Substituindo os coeficientes f_{kl} de $z^k\bar{z}^l$ pelos coeficientes λf_{kl} , consideremos

$$4AC\bar{F} + 4A\bar{C}G := Ue^{iu} \quad \text{e}$$

$$-12B^2D - 4ACD := Ve^v$$

onde U, V, u, v são o módulo e o argumento dos números $\lambda(4AC\bar{F} + 4A\bar{C}G)$ e $-\lambda(12B^2D + 4ACD)$ respectivamente.

Agora, seja $\lambda = e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha)$, com isso

$$\lambda^3 = e^{3i\alpha} = \cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha) \quad \text{e}$$

$$\bar{\lambda} = e^{-i\alpha} = \cos(\alpha) - i\operatorname{sen}(\alpha),$$

logo

$$\lambda^2\bar{\lambda} = e^{2i\alpha}e^{-i\alpha} = e^{i\alpha}.$$

Como $Y(f_{kl}) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, otemos

$$\lambda^3 U e^{iu} = U e^{i(u+3\alpha)} \quad \text{e}$$

$$\lambda^2\bar{\lambda} V e^{iv} = V e^{i(v+\alpha)}.$$

Logo

$$U [\cos(u + 3\alpha) + i\operatorname{sen}(u + 3\alpha)] + V [\cos(v + \alpha) + i\operatorname{sen}(v + \alpha)],$$

que nos fornece

$$Y(f_{kl}) = \operatorname{Re}(U[\cos(u + 3\alpha) + i\operatorname{sen}(u + 3\alpha)] + V[\cos(v + \alpha) + i\operatorname{sen}(v + \alpha)]) = 0.$$

Assim, temos

$$U \cos(u + 3\alpha) + V \cos(v + \alpha) = 0 \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

escolhendo $U = 0$ e $V = 0$, obtemos:

- $U = 0$,

$$4AC\bar{F} + 4A\bar{C}G := Ue^{iu} = 0 \quad \Rightarrow \quad A(C\bar{F} + \bar{C}G) = 0.$$

- $V = 0$,

$$-12B^2D - 4ACD := Ve^v = 0.$$

Assim

$$D(B^2 + AC) = 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 2.3. Usando a mesma argumentação do Lema (2.2), fica mais fácil pesquisar a condição de ter centros persistentes. Como temos visto, $V_3 = V_5 = 0$ nos fornece somente duas condições reais e por outro lado estas igualdades eleva as possibilidades à $2 \times 7 + 1 = 15$ condições reais para centros persistentes. Este novo aspecto das condições é a razão principal para que a pesquisa de centros persistentes torne mais viável o problema geral “centro-foco”. Similarmente a pesquisa por centros fracamente persistentes, para as condições $V_3 = V_5 = 0$ obtemos 6 condições reais, uma para cada parte homogênea das constantes de Lyapunov.

Centros conhecidos

Neste capítulo, continuamos a apresentar resultados, que serão utilizados nas demonstrações dos Teoremas principais.

Considere o Sistema (2-1)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + P(x,y) & = -y + \sum_{k=2}^n P_k(x,y) \\ \dot{y} = x + Q(x,y) & = x + \sum_{k=2}^n Q_k(x,y) \end{cases}$$

onde P_k e Q_k são polinômios homogêneos de grau k .

Definição 3.1.

- (i) *Se as componentes do sistema acima satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, dizemos que o sistema é holomorfo.*
- (ii) *Se o divergente do campo de vetores associado ao sistema for nulo, dizemos que ele é hamiltoniano.*
- (iii) *O sistema é reversível se é invariante sobre a mudança de variáveis*

$$\begin{cases} w = e^{i\alpha\bar{z}} \\ \tau = -t \end{cases}$$

No próximo resultado, listamos algumas famílias conhecidas de centros.

Teorema 3.2. *Considere a Equação $\dot{z} = iz + F(z, \bar{z})$, com F analítica e começando com termos de no mínimo ordem 2. Então as seguintes famílias possuem um centro na origem*

Holomorfa: $F(z, \bar{z}) = f(z)$,

Hamiltoniana: $\operatorname{Re} \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) \right) \equiv 0$,

Separada: $iz + F(z, \bar{z}) = f(z)g(\bar{z})$, onde f e g são funções Holomorfas com $f(0) = 0$, $f'(0) = i$ e $g(0) = 1$,

Reversível: F é tal que $f_{kl} = -\overline{f_{lk}}e^{i(1+l-k)\alpha}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall k, l$.

Prova.

Holomorfa: Pelo item (i) da Definição 3.1, o sistema deve satisfazer as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas complexas, isto é,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z, \bar{z}) = 0 \quad \text{o que implica} \quad F(z, \bar{z}) = f(z).$$

Para mostrar que a origem é um centro, escrevemos para $z \neq 0$,

$$\frac{i}{iz + f(z)} = \frac{1}{z} + \frac{-f(z)}{z(iz + f(z))},$$

denotemos $\eta(z) = \frac{-f(z)}{z(iz + f(z))}$, observe que $\eta(z)$ é uma função holomorfa na vizinhança da origem. Agora considere a função

$$H(z) = \ln(z) + \operatorname{Re}(S(z)) \quad \text{com} \quad S'(z) = \eta(z),$$

seja $z(t)$ a solução de $\dot{z} = iz + f(z)$, então

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(z(t)) &= \frac{z'(t)}{z(t)} + \operatorname{Re}[S'(z(t))z'(t)] \\ &= \operatorname{Re}\left[z'(t)\left[\frac{1}{z(t)} + \eta(z(t))\right]\right] \\ &= \operatorname{Re}\left\{[iz(t) + f(z(t))]\left[\frac{1}{z(t)} + \eta(z(t))\right]\right\} \\ &= \operatorname{Re}(i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo a solução de $\dot{z} = iz + f(z)$ está contida na curva

$$\ln|z(t)| + \operatorname{Re}(S(z)) = \zeta,$$

como o sistema é analítico, temos que a origem é um centro ou um foco. Veja [29].

Suponha que a origem é um foco, então existe um caminho $z(t)$ que tende a $z = 0$, seja o caminho

$$z(t) = \ln |z(t)| = \zeta - \operatorname{Re}(S(z(t))),$$

como $S(z(t))$ é uma função contínua perto da origem, temos um absurdo, logo a origem é um centro.

Hamiltoniana: Usaremos o item (ii) da Definição 3.1. Temos que o divergente do campo de vetor associado ao Sistema (2-1) é dado por

$$2\operatorname{Re} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = 0,$$

e sabemos também que para um sistema planar hamiltoniano, o único ponto singular com índice positivo são os centros, veja [29], logo a origem é um centro.

Separada: Numa vizinhança da origem escrevemos

$$\dot{z} = f(z)g(\bar{z}) = f(z)g(\bar{z}) \frac{\overline{g(\bar{z})}}{g(\bar{z})} = f(z) \frac{\|g(\bar{z})\|^2}{\bar{g}(z)} = \frac{f(z)}{\bar{g}(z)} \|g(\bar{z})\|^2,$$

onde $\bar{g}(w) = \overline{g(\bar{w})}$. Assim, perto da origem a equação diferencial é uma reparametrização de um centro holomorfo, e o resultado segue pela primeira parte do teorema.

Reversível: Usaremos o item (iii) da Definição 3.1. Sabemos que o sistema

$$\dot{z} = iz + F(z, \bar{z}) = iz + \sum_{k+l \geq 2} A_{kl} z^k \bar{z}^l$$

é invariante, assim,

$$\frac{dw}{d\tau} = -e^{i\alpha} \frac{d\bar{z}}{dt} = -e^{i\alpha} \left(-i\bar{z} + \overline{F(z, \bar{z})} \right) = iw - \sum_{k+l \geq 2} \overline{A_{kl}} e^{i(1+l-k)\alpha} w^l \bar{w}^k.$$

Portanto

$$A_{kl} = -\overline{A_{kl}} e^{i(1+l-k)\alpha}.$$

Para mostrar que a origem é um centro, considerem $x(t)$ e $y(t)$ soluções do Sistema (2-1), tal que para $t = 0$ o ponto $(x(0), y(0))$ está sobre a reta

$$z = re^{\frac{\alpha}{2}i}, \quad (3-1)$$

então para r suficientemente pequeno, existe t_0 tal que $(x(t_0), y(t_0))$ também esteja sobre a reta dada pela Equação (3-1), temos que a curva $(x(t), y(t))$ é simétrica com

respeito a Reta (3-1), e é solução do Sistema (2-1), logo a origem é um centro, como queríamos demonstrar. ■

Uma família interessante para se estudar o problema *centro – foco* porém mais simples, são os denominados *sistemas rígidos* ou *uniformemente isócronos*. Esta família é dada por um sistema planar do tipo (2-1), que é expresso em coordenadas polares como na equação $z = re^{i\theta}$, satisfazendo $\dot{\theta} = 1$. Eles podem ser escrito na forma

$$\dot{z} = iz + zH(z, \bar{z}), \quad \text{onde } \overline{H(z, \bar{z})} = H(z, \bar{z}). \quad (3-2)$$

Em [7] há um estudo sobre os sistemas do tipo (3-2). Observe que, quando alguma Equação do tipo (3-2) tem um centro, ele é sempre *isócrono*. Provaremos no Capítulo 4, que os únicos centros persistentes num sistema rígido ocorre no caso linear. Está seção termina estudando a classe de centros dado em [15], como veremos alguns deles são persistentes.

Proposição 3.3. *Considere a equação diferencial*

$$\dot{z} = iz + F_n(z, \bar{z}), \quad (3-3)$$

onde F_n é um polinômio homogêneo de grau n , e defina $S_n(\theta) = e^{-i\theta}F_n(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$, Se existir $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{Re}(sS'_n(\theta)i + S_n(\theta)) \equiv 0,$$

então a origem é um centro, além disso, a equação tem integral primeira do tipo Darboux, ou seja, integral primeira algébrica.

Prova. Utilizando o mesmo processo do Capítulo 2, ou seja, fazendo a mudança de variáveis dada em (2-4), temos que a Equação (3-3) em coordenadas polares é dada por

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \operatorname{Re}(S_n(\theta))r^n = s\operatorname{Im}(S'_n(\theta))r^n.$$

A terceira igualdade da expressão acima se deve ao fato de

$$\operatorname{Re}(sS'_n(\theta)i + S_n(\theta)) = 0.$$

Para $\dot{\theta}$, por (2-4) temos

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 1 + \operatorname{Im}(S_n(\theta))r^{n-1}.$$

Para uma melhor notação, usaremos $S(\theta) = \text{Im}(S_n(\theta))$. Assim

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{dr}{dt} = sS'(\theta)r^n \\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 1 + S(\theta)r^{n-1}, \end{cases} \quad (3-4)$$

vamos supor que para algum $a, b \in \mathbb{R}$, a função da forma

$$H = H(r, \theta) = r^b + aS(\theta)r^{b+n-1},$$

é uma integral primeira do Sistema (3-3), assim

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= H_r \dot{r} + H_\theta \dot{\theta} \\ &= \left[br^{b-1} + a(b+n-1)S(\theta)r^{b+n-2} \right] sS'(\theta)r^n + \left[aS'(\theta)r^{b+n-1} \right] [1 + S(\theta)r^{n-1}] \\ &= \left[(sb+a)r^b + [(b+n-1)s+1]aS(\theta)r^{b-n-1} \right] S'(\theta)r^{n-1}, \end{aligned}$$

tome $a + sb = s(b+n-1) + 1 = 0$, obtemos a função

$$H(r, \theta) = r^{-(1+sb-s)/s} [1 + (1 - ns - s)S(\theta)r^{n-1}],$$

que é uma integral primeira do tipo Darboux para a equação diferencial (3-3). Se o expoente de r for negativo, tomamos $\frac{1}{H}$ que também é contínua na origem, assim, temos que a origem é um centro, como queríamos demonstrar. ■

Corolário 3.4. *A origem da equação diferencial*

$$\dot{z} = iz + f_{kl}z^k\bar{z}^l, \quad f_{kl} \in \mathbb{C}, \quad (3-5)$$

é um centro persistente, se e somente se, $k \neq l + 1$. Além disso, é reversível e Darboux integrável.

Prova. Tome $\psi(z, \bar{z}) \equiv 1$ no caso Reversível do Tereoma A, assim, temos que a origem é um centro persistente do tipo reversível.

Provemos que existe integral primeira do tipo Darboux. Seja

$$S(\theta) = f_{kl}e^{i(k-l-1)\theta} \quad \text{com } k-l-1 \neq 0,$$

assim

$$sS'_n(\theta)i + S_n(\theta) = [1 - s(k-l-1)]f_{kl}e^{i\theta},$$

tomando $s = \frac{1}{k-l-1}$, obtemos que a expressão acima é identicamente nula, Assim o resultado segue da Proposição 3.3. ■

Observação 3.5.

- (i) Quando $k = l + 1$, a origem é um centro, se e somente se, $\text{Re}(f_{kl}) = 0$, e neste caso é um centro fracamente persistente também reversível e com integral primeira do tipo Darboux.

Prova. (\implies) De fato, seja

$$\dot{z} = iz + f_{kl}z^k\bar{z}^l, \quad f_{kl} \in \mathbb{C}, \quad e$$

$$S_n(\theta) = f_{kl}e^{i(k-l-1)\theta}$$

como na Proposição 3.3, derivando

$$S'_n(\theta) = i(k-l-1)f_{kl}e^{i(k-l-1)\theta} \implies sS'_n(\theta)i = -(k-l-1)f_{kl}e^{i(k-l-1)\theta},$$

assim,

$$sS'_n(\theta)i + S'_n(\theta) = \left[1 - \underbrace{s(k-l-1)}_0 \right] f_{kl}e^{i(k-l-1)\theta},$$

portanto,

$$\text{Re}(sS'_n(\theta)i + S'_n(\theta)) = \text{Re}(f_{kl}e^{i(k-l-1)\theta}) \equiv 0,$$

logo, $\text{Re}(f_{kl}) = 0$.

(\impliedby) Agora temos $k = l + 1$ e $\text{Re}(f_{kl}) = 0$, refazendo os cálculos feitos acima, obtemos $S_n(\theta) = f_{kl}$ e $S'_n(\theta) = 0$, assim, para qualquer que seja $s \in \mathbb{R}$, temos $\text{Re}(sS'_n(\theta)i + S_n(\theta)) = 0$, como queríamos. ■

- (ii) Nem todos os centros da Proposição 3.3 são reversíveis.

Exemplo 3. Seja a equação diferencial

$$\dot{z} = iz + Ez^2\bar{z}, \tag{3-6}$$

onde, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $E = ai$ é um número complexo imaginário puro, isto é, tem parte real nula. Temos que a origem da Equação (3-6) é um centro não reversível.

Prova. Refazendo o que foi feito na Proposição 3.3, obtemos que, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{Re} (sS'_3(\theta)i + S_3(\theta)) \equiv 0,$$

pois, $S'_3(\theta) = 0$. Assim, a origem da equação diferencial $\dot{z} = iz + Ez^2\bar{z}$ é um centro, Mas este centro não é reversível.

De fato, para ser reversível teria que existir $\alpha \in \mathbb{R}$ de tal forma que

$$f_{kl} = -\overline{f_{kl}}e^{i(1+l-k)\alpha},$$

mas como veremos na demonstração do Teorema A, $k \neq l + 1$ é condição necessária para existência de $\alpha \in \mathbb{R}$, como no nosso caso, $k = l + 1$, temos que este centro não é reversível.

■

3.1 Funções de Melnikov

As *funções de Melnikov* são usadas para aproximar os valores dos parâmetros para os quais uma perturbação de um sistema Hamiltoniano tem um laço homoclínico, ou seja, se p é um ponto singular do sistema, então, $\alpha(p) = \omega(p)$. Veja [29]. Isto é mais geral ainda, uma vez que para cada laço fechado do sistema Hamiltoniano somos informados sobre os valores de parâmetros para os quais este laço fechado é preservado na perturbação do sistema.

Consideremos o sistema da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon f(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon g(x, y) \end{cases} \quad (3-7)$$

onde, $H : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 , U um aberto de \mathbb{R}^2 , f, g funções reais, $\varepsilon > 0$ pequeno, tal que o Sistema (3-7) possa ter ou não um laço homoclínico (heteroclínico).

Consideremos ainda em (3-7), para ε pequeno, a aplicação de Poincaré P_ε sobre uma seção Σ transversal as curvas de níveis $H = h$ ou órbitas γ_h , inclusive quando tivermos laço homoclínico ou heteroclínico.

Observemos que quando ocorre uma bifurcação tipo laço homoclínico, dependendo da posição das separatrizes, pode acontecer que a aplicação de Poincaré no sentido positivo do fluxo não esteja definida, e neste caso devemos considerar a aplicação inversa.

Assim sendo, pode-se verificar que

$$P_\varepsilon(h) - h = \varepsilon \int_{\gamma_h} gdx - fdy + o(\varepsilon), \quad (3-8)$$

fazendo

$$M(h) = \int_{\gamma_h} gdx - fdy,$$

temos que existe uma relação entre a aplicação de Poincaré e a função de Melnikov, dada por

$$P_\varepsilon(h) - h = \varepsilon M(h) + o(\varepsilon). \quad (3-9)$$

Estudar os pontos fixos da aplicação de Poincaré P_ε equivale a estudar as raízes de $M(h)$, pois

$$\begin{aligned} 0 &= P_\varepsilon - h \\ &= \varepsilon M(h) + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

dividindo por $\varepsilon > 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{P_\varepsilon - h}{\varepsilon} \\ &= M(h) + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

ou seja, $M(h) = 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Suponhamos que γ_h seja órbita periódica de (3-7). Dizemos que ocorre uma *bifurcação tipo k-ciclo limite*, para $k \geq 2$ se

$$M(h) = \dots = M^{k-1}(h) = 0.$$

A equação do conjunto de bifurcação do tipo k-ciclo limite é dada por

$$M(h) = \dots = M^{k-1}(h) = 0, \quad M^k(h) \neq 0, \quad \text{para algum } k \geq 2.$$

Para mais detalhe, veja [29].

Do Sistema (2-1) sabemos que

$$\dot{z} = iz + F(z, \bar{z}) \quad \text{e} \quad \dot{\bar{z}} = -i\bar{z} + \overline{F(z, \bar{z})},$$

donde vem

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{-i\bar{z} + \overline{F(z, \bar{z})}}{z + F(z, \bar{z})},$$

logo

$$[iz + F(z, \bar{z})] d\bar{z} + [i\bar{z} - \overline{F(z, \bar{z})}] dz = 0,$$

o que nos fornece

$$\operatorname{Im} [(iz + F(z, \bar{z}))d\bar{z}] = 0.$$

Considere o Hamiltoniano $H = \frac{z\bar{z}}{2}$, logo

$$dH = \frac{1}{2} [dz\bar{z} + z d\bar{z}] = \operatorname{Re}(z d\bar{z}) = \operatorname{Im}(iz d\bar{z}),$$

tome $w = \operatorname{Im}(F(z, \bar{z})d\bar{z})$, assim, obtemos a 1-forma associada ao Sistema (2-1)

$$dH + w = 0, \quad (3-10)$$

considere agora a família de 1-forma do Sistema (2-1)

$$dH + \varepsilon w = 0, \quad \text{onde } \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon \text{ pequeno.} \quad (3-11)$$

Seja

$$L : (\rho, \varepsilon) \longrightarrow L(\rho, \varepsilon) = \rho + \varepsilon L_1(\rho) + \cdots + \varepsilon^k L_k(\rho) + O(\varepsilon^{k+1}),$$

a aplicação de primeiro retorno de Poincaré perto da origem associada ao fluxo de (3-10), definido na secção transversal Σ parametrizada por $H = \rho$. É claro que, se a origem é um centro persistente para o Sistema (2-1), então $L_k(\rho) = 0 \quad \forall k \geq 1$.

Usando o algoritmo dado em [9], e desenvolvido posteriormente em [13], [14], [18], [19], [24], [25], obtemos uma expressão simples para o primeiro $L_k(\rho)$ tal que $L_k(\rho) \neq 0$.

Teorema 3.6. *Considere a equação diferencial (3-10), onde $H(z, \bar{z}) = \frac{z\bar{z}}{2}$ e w é uma 1-forma começando com termos de no mínimo segunda ordem. Então*

$$L_1(\rho) = - \int_{H=\rho} w,$$

quando $L_1(\rho) \equiv 0$, temos

$$L_2(\rho) = - \int_{H=\rho} hw,$$

onde h é uma função que satisfaz $d(hdH) = -dw$.

Prova. A demonstração para este Teorema encontra-se em [13]. Usaremos o resultado

$$-2\operatorname{Im}(\alpha)\operatorname{Im}(\beta) = \operatorname{Re}[\beta(\alpha - \bar{\alpha})],$$

na demonstração do Corolário 3.7 a seguir.

Corolário 3.7. *Considere a equação diferencial (3-10), onde*

$$H(z, \bar{z}) = \frac{z\bar{z}}{2}, \quad w = \text{Im}(F(z, \bar{z})d\bar{z}) \quad \text{e} \quad F(z, \bar{z}) = \sum_{k+l \geq 2} f_{kl} z^k \bar{z}^l,$$

então

$$L_1(\rho) = 2\pi \sum_{l=1}^{\infty} \text{Re}(f_{(l+1)l}) R^{2l+2} = 0,$$

onde $\rho = \frac{R^2}{2}$. Quando $L_1(\rho) \equiv 0$, isto é, $\text{Re}(f_{(l+1)l}) = 0$ para todo $l \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} L_2(\rho) = & -2\pi \sum_{p=4} \text{Im} \left[\sum_{(k,l,m,n) \in D_p \cap (k+m=l+n+2)} \frac{k}{k-l-1} f_{kl} f_{mn} + \right. \\ & \left. + \sum_{(k,l,m,n) \in D_p \cap (k+n=l+m)} \frac{k}{k-l-1} f_{kl} \overline{f_{mn}} \right] R^p, \end{aligned}$$

onde, $D_p := \{(k, l, m, n) : k+l+m+n = p\} \cap \{k \neq l+1\}$.

Prova. Pelo Teorema 3.6,

$$L_1(\rho) = - \int_{H=\rho} \text{Im}(F d\bar{z}) = - \text{Im} \left[\int_{H=\rho} F d\bar{z} \right].$$

Se parametrizarmos $\{H = \rho\}$ por $z = Re^{i\theta}$, com $\rho = \frac{R^2}{2}$, obtemos que

$$\bar{z} = Re^{-i\theta}, \quad \text{com isto, } d\bar{z} = -iRe^{-i\theta}d\theta,$$

assim, a integral acima pode ser escrita como

$$\begin{aligned} L_1(\rho) &= - \text{Im} \left[\int_{H=\rho} F d\bar{z} \right] \\ &= \text{Im} \left[i \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k+l=2}^{\infty} f_{kl} z^k \bar{z}^l \right) [Re^{-i\theta}] d\theta \right] \\ &= \text{Re} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k+l=2}^{\infty} f_{kl} R^k e^{ik\theta} R^l e^{-il\theta} Re^{-i\theta} \right] d\theta \\ &= \text{Re} \int_0^{2\pi} \sum_{k+l=2}^{\infty} f_{kl} R^{k+l+1} e^{i(k-l-1)\theta} d\theta, \end{aligned}$$

dividiremos em dois casos, para $k = l + 1$, temos

$$\begin{aligned}
 L_1(\rho) &= -\text{Im} \left[\int_{H=\rho} F d\bar{z} \right] \\
 &= \text{Re} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} f_{(l+1)l} R^{2l+2} e^{i(0)\theta} d\theta \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} \text{Re}(f_{(l+1)l}) R^{2l+2} \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\
 &= 2\pi \sum_{l=1}^{\infty} \text{Re}(f_{(l+1)l}) R^{2l+2}.
 \end{aligned}$$

Para $L_1(\rho) = 0$, tome $\sum_{k+l=2}^{\infty} \text{Re} f_{kl} R^{k+l+1} = \alpha$, e seja $k \neq l + 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
 L_1(\rho) &= -\text{Im} \left[\int_{H=\rho} F d\bar{z} \right] = \int_0^{2\pi} \alpha e^{i(k-l-1)\theta} d\theta \\
 &= \alpha \int_0^{2\pi} e^{i(k-l-1)\theta} d\theta \\
 &= \alpha \int_0^{2\pi} \left[\cos(k-l-1) + i \text{sen}(k-l-1) \right] d\theta \\
 &= \alpha(0 + i0) = 0,
 \end{aligned}$$

como queríamos.

Observe que $L_1(\rho) \equiv 0$, se e somente se, $\text{Re}(f_{(l+1)l}) = 0$, para todo $l \geq 2$. Neste caso, para calcular $L_2(\rho)$ necessitamos de uma função h tal que $d(hdH) = -dw$. Seja

$$h = -\text{Im}(G(z, \bar{z})), \text{ com } G(z, \bar{z}) = \widehat{\sum}_{k+l \geq 2} \frac{2k}{k-l-1} f_{kl} z^{k-1} \bar{z}^l$$

observe que h satisfaz a propriedade acima, aqui $\widehat{\sum}_{k+l \geq 2}$ significa que no somatório descartamos os índices satisfazendo $k = l + 1$, isto pode ser feito porque, quando $\text{Re}(f_{(l+1)l}) = 0$, temos $d(\text{Im}(f_{(l+1)l} z^{l+1} \bar{z}^l d\bar{z})) = 0$. Veja também [9], [13]. Inicialmente, calculamos hw ,

$$hw = -\text{Im}(F d\bar{z}) \text{Im}(G) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[G(F d\bar{z} - \bar{F} dz) \right].$$

Pelo Teorema 3.6, temos $L_2(\rho) = -\int_{H=\rho} hw$, desenvolvendo temos

$$\begin{aligned} L_2(\rho) &= -\operatorname{Re} \left[\int_{H=\rho} \widehat{\sum}_{k+l \geq 2} \frac{k}{k-l-1} f_{kl} z^{k-1} \bar{z}^l * \left(\sum_{m+n \geq 2} f_{mn} z^m \bar{z}^n d\bar{z} - \overline{f_{mn} z^m \bar{z}^n} dz \right) \right] \\ &= -\operatorname{Im} \left[\int_0^{2\pi} \left(\widehat{\sum}_{k+l \geq 2} \sum_{m+n \geq 2} \frac{k}{k-l-1} f_{kl} f_{mn} R^{k+l+m+n} e^{i(k-l+m-n-2)\theta} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \widehat{\sum}_{k+l \geq 2} \sum_{m+n \geq 2} \frac{k}{k-l-1} f_{kl} \overline{f_{mn}} R^{k+l+m+n} e^{i(k-l-m+n)\theta} \right) d\theta \right], \end{aligned}$$

com o mesmo argumento usado para obter $L_1(\rho)$, $L_2(\rho)$ segue da expressão acima. \blacksquare

Corolário 3.8. *Se a equação diferencial (2-2) tem um centro persistente na origem, então*

(a)

$$f_{(p+1)p} = 0, \quad \text{para todo } p \geq 1,$$

(b)

$$\sum_{(k,l,m,n) \in D_p \cap (k+m=l+n+2)} \frac{k}{k-l-1} f_{kl} f_{mn} = 0, \quad \text{para todo } p \geq 4,$$

(c)

$$\operatorname{Im} \left[\sum_{(k,l,m,n) \in D_p \cap (k+n=l+m)} \frac{k}{k-l-1} f_{kl} \overline{f_{mn}} \right] = 0, \quad \text{para todo } p \geq 4.$$

$$\text{onde } F(z, \bar{z}) = \sum_{k+l \geq 2} f_{kl} z^k \bar{z}^l \text{ e } D_p := \{(k, l, m, n) : k+l+m+n = p\} \cap \{k \neq l+1\}.$$

Prova. Podemos aplicar o Corolário 3.7 para cada umas das formas associadas à equação $\dot{z} = iz + \varepsilon \lambda F(z, \bar{z})$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$ é pequeno o suficiente. Como a origem é um centro persistente, temos

$$L_1(\rho) = L_2(\rho) = \dots = L_k(\rho) = \dots = 0.$$

Para obtermos o item (a), usaremos o fato de $L_1(\rho) = 0$, substituindo os coeficientes f_{kl} por λf_{kl} temos

$$L_1(\rho) = -\int_{H=\rho} \operatorname{Im}(\lambda F d\bar{z}) = -\operatorname{Im} \int_{H=\rho} \lambda F d\bar{z}.$$

Novamente parametrizando $\{H = \rho\}$ por $z = Re^{i\theta}$ com $\rho = \frac{R^2}{2}$, obtemos

$$\int_{H=\rho} \lambda F d\bar{z} = -i \int_0^{2\pi} \sum_{k+l=2}^{\infty} \lambda f_{kl} R^{k+l+1} e^{i(k-l-1)\theta},$$

assim

$$L_1(\rho) = 2\pi \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{Re}(\lambda f_{(l+1)l}) R^{2l+2} = 0,$$

para $\lambda = i$, o resultado segue.

Os itens (b) e (c) seguem de $L_2(\rho) = 0$ e do fato das somas que aparecem na expressão de $L_2(\rho)$ serem disjuntas. ■

Daremos alguns detalhes do cálculo de $L_2(\rho)$ como aplicação do Corolário 3.8. Usando o Corolário 3.7, escrevemos $L_2(\rho) = -\operatorname{Im}(W(\rho))$, onde

$$\begin{aligned} W(\rho) = & f_{11}f_{20}R^4 + \left(-\frac{1}{3}f_{13}\overline{f_{02}} + f_{30}f_{12} - f_{11}\overline{f_{22}} + 2f_{11}f_{31} - 2f_{22}\overline{f_{11}} + 2f_{20}\overline{f_{31}} + \right. \\ & \left. + 3f_{31}\overline{f_{20}} + \frac{3}{4}f_{40}f_{02} \right) R^6 + \left(\frac{5}{3}f_{51}f_{02} + \frac{5}{4}f_{50}f_{03} - \frac{1}{4}f_{14}\overline{f_{03}} - \frac{2}{3}f_{24}\overline{f_{02}} + f_{13}f_{40} - \right. \\ & - \frac{1}{2}f_{12}\overline{f_{23}} + \frac{3}{2}f_{12}f_{41} - f_{23}\overline{f_{12}} + \frac{1}{2}f_{23}f_{30} - f_{11}\overline{f_{33}} + 3f_{11}f_{42} + f_{22}f_{31} - \\ & \left. - 3f_{33}\overline{f_{11}} - f_{33}f_{20} + \frac{3}{2}f_{30}\overline{f_{41}} + 2f_{41}\overline{f_{30}} + 2f_{20}\overline{f_{42}} + 4f_{42}\overline{f_{20}} \right) R^8 + O\left(R^{10}\right). \end{aligned}$$

Então pelo Corolário 3.8 parte (a) e também itens (b) e (c), para $p = 4$ e $p = 6$, obtemos as seguintes condições necessárias para que o Sistema (2-1) tenha um centro persistente,

$$f_{(p+1)p} = 0, \quad \text{para todo } p \geq 4, \quad f_{11}f_{20} = 0,$$

$$f_{30}f_{12} + 2f_{11}f_{31} + \frac{4}{3}f_{40}f_{02} = 0,$$

$$\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{3}f_{13}\overline{f_{02}} - f_{11}\overline{f_{22}} - 2f_{22}\overline{f_{11}} + 2f_{20}\overline{f_{31}} + 3f_{31}\overline{f_{20}}\right) = 0.$$

Note que usando a notação do Capítulo 2, após alguns cálculos, a lista de condições acima fornece

$$E = 0, \quad AB = 0, \quad 3DF + 6BI + 4HC = 0, \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(C\bar{K} + 3B\bar{J} - 3A\bar{I}) = 0,$$

que coincidem com as mesmas condições obtidas no Lema 2.2.

Similarmente, quando aplicamos os resultados acima para obter condições necessárias para ter um centro persistente para equações não lineares do tipo

$$\dot{z} = iz + \sum_{k=0}^n f_{n(k-n)} z^n \bar{z}^{n-k}.$$

Quando $n = 2k + 1$, obtemos que $f_{(k+1)k} = 0$, e quando $n \in \{2k, 2k + 1\}$ temos

$$\sum_{j=0}^{k-1} f_{(n-j)j} f_{(j+1)(n-j-1)} = 0.$$

Em particular, quando

$$F(z, \bar{z}) = Hz^4 + Iz^3\bar{z} + Jz^2\bar{z}^2 + Kz\bar{z}^3 + L\bar{z}^4,$$

então $IJ + HK = 0$, e quando

$$F(z, \bar{z}) = Mz^5 + Nz^4\bar{z} + Oz^3\bar{z}^2 + Pz^2\bar{z}^3 + Qz\bar{z}^4 + R\bar{z}^5,$$

obtemos $O = NP + MQ = 0$.

Provas dos resultados principais

4.1 Prova do Teorema A

Sejam f uma função analítica complexa, A , B e C números complexos e ψ uma função analítica, tal que $z^k \bar{z}^l \psi(z, \bar{z})$ começa com termos de no mínimo ordem dois. Temos que as equações diferenciais

Quadrática: $\dot{z} = iz + Az^2 + C\bar{z}^2$,

Holomorfa: $\dot{z} = iz + f(z)$ com $f(0) = f'(0) = 0$,

Hamiltoniana: $\dot{z} = iz + f(\bar{z})$ com $f(0) = f'(0) = 0$,

Separada: $\dot{z} = iz + z\bar{z}f(\bar{z})$,

Reversível: $\dot{z} = iz + Bz^k \bar{z}^l \psi(z, \bar{z})$ com $k \neq l + 1$.

possuem um centro persistente na origem.

Prova. A partir das expressões das equações listadas acima, fica claro que se elas possuem um centro na origem, este centro é persistente, de acordo com a Definição 2.1. Vamos provar efetivamente que todos eles são centros.

A equação quadrática é bem conhecida, e sabemos que ela possui centro da origem, ver por exemplo [28].

As equações holomorfa e hamiltoniana, seguem facilmente do Teorema 3.2.

A equação separada segue também do mesmo Teorema citado acima, pois

$$iz + z\bar{z}f(\bar{z}) = iz[1 - i\bar{z}f(\bar{z})].$$

Finalmente, a equação reversível. Note que, Teorema 3.2, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_{kl} = -\overline{f_{kl}} e^{i(1+l-k)\alpha}, \quad (4-1)$$

para todos os monômios dos F correspondentes. No nosso caso

$$F(z, \bar{z}) = Bz^k \bar{z}^l \psi(z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^{\infty} B\psi_j z^{k+j} \bar{z}^{l+j},$$

para alguns $\psi_j \in \mathbb{R}$, $j \geq 0$.

Seja $re^{i\theta} = B\psi_j$ na equação (4-1), como $-1 = e^{i\pi}$, desenvolvendo, obtemos

$$\begin{aligned} re^{i\theta} &= -re^{-i\theta} e^{i(1+l-k)\alpha} \\ &= re^{i\pi} e^{i(-\theta)} e^{i(1+l-k)\alpha} \\ &= re^{i[\pi - \theta + (1+l-k)\alpha]}, \end{aligned}$$

assim,

$$\theta = \pi - \theta + \alpha(1 + l - k),$$

onde θ é o argumento comum dos $B\psi_j$. Desde que $1 + l - k \neq 0$, tomamos

$$\alpha = \frac{2\theta - \pi}{1 + l - k},$$

e o resultado fica provado. ■

4.2 Prova do Teorema B

Considere a equação diferencial complexa cúbica.

$$\dot{z} = iz + Az^2 + Bz\bar{z} + C\bar{z}^2 + Dz^3 + Ez^2\bar{z} + Fz\bar{z}^2 + G\bar{z}^3.$$

A origem é um centro persistente, se e somente se, for escrito nos seguintes formas

Quadrática: $\dot{z} = iz + Az^2 + C\bar{z}^2,$

Holomorfa: $\dot{z} = iz + Az^2 + Dz^3,$

Hamiltoniana: $\dot{z} = iz + C\bar{z}^2 + G\bar{z}^3,$

Separada: $\dot{z} = iz + Bz\bar{z} + Fz\bar{z}^2.$

Prova. Pelo Teorema A, sabemos que todas as equações listadas aqui tem um centro persistente na origem. Provaremos que eles são os únicos.

Pelo Lema 2.2, temos que as condições $E = AB = BC = DF = 0$ são necessárias. Então temos as seguintes possibilidades.

- (i) $E = B = D = 0$,
- (ii) $E = B = 0$, $D \neq 0$ e $F = 0$,
- (iii) $E = 0$, $B \neq 0$ e $A = C = DF = 0$.

para cada uma das possibilidades, encontramos na equação cúbica geral uma classe, a qual os centros persistentes pertencem a uma das seguintes classes usaremos muitas vezes a expressão de V_7 . Por [11], temos que, quando $E = B = 0$,

$$V_7 = \frac{\pi}{216} \left[9\text{Re} (18\bar{G}F^2 + 48\bar{F}DG - 18D^2G) - 3\text{Im} (96A\bar{C}\bar{D}^2 - 138A\bar{D}\bar{G}C + 63\bar{F}\bar{G}C^2 + 183\bar{G}C^2D - 216A\bar{C}\bar{D}F + 198A\bar{G}CF + 72A\bar{A}DF + 456\bar{C}CDF + 72A\bar{C}F^2 - 27A^2\bar{F}G + 45A^2DG) + 2\text{Re} (72A^2\bar{C}\bar{D}C + 36A^2\bar{A}\bar{F}C + 396A\bar{C}\bar{F}C^2 - 72A^2\bar{G}C^2 - 36A^2\bar{A}CD - 396A\bar{C}C^2D - 72A^2\bar{C}CF + 36A^2\bar{A}\bar{C}G + 54A^3\bar{F}G + 396A\bar{C}^2CG) \right],$$

e, quando $E = A = C = 0$, obtemos

$$V_7 = \frac{\pi}{216} \left[9\text{Re} (18\bar{G}F^2 + 48\bar{F}DG - 18D^2G) - 3\text{Im} (396B^2\bar{D}\bar{G} + 324B^2F\bar{G} + 1224B\bar{B}DF) + 2\text{Re} (-1728B^3\bar{B}D - 243B^4\bar{G}) \right],$$

para a primeira classe, a equação cúbica fica

$$\dot{z} = iz + Az^2 + C\bar{z}^2 + Fz\bar{z}^2 + G\bar{z}^3.$$

Usando a primeira expressão de V_7 , e argumentos similar ao usado na prova do Lema 2.2, obtemos, $\bar{G}F^2 = 0$.

Dividiremos o estudo desta classe em duas subclasses.

- Quando $G = 0$,
- Quando $G \neq 0$ e $F = 0$,

na primeira subclasse, usaremos novamente a expressão de V_7 , obtemos que, $A\bar{C}F^2 = 0$, aqui, surge mais duas possibilidades

(a) $F = 0$,

(b) $F \neq 0$.

Quando $F = 0$, temos o centro persistente quadrático dado do primeiro item.

Sempre que $F \neq 0$, temos

$$\dot{z} = iz + C\bar{z}^2 + Fz\bar{z}^2 \quad \text{e} \quad \dot{z} = iz + Az^2 + Fz\bar{z}^2,$$

usando o método para o cálculo das constantes de Lyapunov desenvolvido em [13], obtemos que

$$V_9 \propto \operatorname{Re}(\bar{C}^2 F^3) \quad \text{e} \quad V_9 \propto \operatorname{Re}(A^2 F^2 \bar{F}),$$

respectivamente. Com o mesmo argumento usado acima, obtem-se, que, ou $C = 0$ ou $A = 0$ respectivamente, ambas as situações corresponde ao caso particular dado no quarto item.

Para a segunda subclasse, a equação cúbica é escrita como

$$\dot{z} = iz + Az^2 + C\bar{z}^2 + G\bar{z}^3,$$

com $G \neq 0$. Usando novamente a expressão de V_7 , obtemos que $A^2 \bar{G} C^2 = 0$. Então $AC = 0$, pois, $\bar{G} \neq 0$. Quando $A = 0$, obtemos o centro persistente para equação hamiltoniana.

Resta-nos portanto estudar a situação em que $AG \neq 0$ e $C = 0$, para a equação

$$\dot{z} = iz + Az^2 + G\bar{z}^3.$$

Novamente, pelo método descrito em [13], vem que

$$V_9 = 0 \quad \text{e} \quad V_{11} \propto \operatorname{Re}(G^2 \bar{G} A^4).$$

Desde que, $AG \neq 0$ não há centros persistente nesta situação.

Para a segunda classe, usando a condição $D(3B^2 + AC) = 0$ do Lema 2.2, obtemos que $AC = 0$, além disso, pela primeira expressão de V_7 e argumento similar usado para a primeira classe, tem-se, $D^2 G = 0$, o que nos fornece, $G = 0$, assim a equação cúbica reduz à

$$\dot{z} = iz + Az^2 + C\bar{z}^2 + D\bar{z}^3,$$

com $D \neq 0$ e $AC = 0$. Observe que quando $C = 0$ o segundo item do teorema segue. Agora, o caso em que $CD \neq 0$ e $A = 0$. Usando novamente o método desenvolvido em [13], obtém-se, $V_9 \propto \operatorname{Re}(C^2 D^3)$, neste caso, também não temos centro persistente.

Para a últimas classe, pelo Lema 2.2, obtemos que $D^2B = 0$, então, $D = 0$. Pela segunda expressão de V_7 obtemos $B^4\bar{G} = 0$, que fornece $G = 0$, assim obtemos a expressão do quarto item do teorema.

4.3 Prova do Teorema C

O sistema rígido

$$\dot{z} = iz + zH(z, \bar{z}), \quad \text{onde} \quad \overline{H(z, \bar{z})} = H(z, \bar{z}),$$

possui um centro persistente na origem, se e somente se, é o trivial, ou seja, $H(z, \bar{z}) \equiv 0$.

Prova. Escrevamos

$$H(z, \bar{z}) = \sum_{p \geq 1} H_p(z, \bar{z}) = \sum_{j+k \geq 1} h_{jk} z^j \bar{z}^k,$$

onde H_p são polinômios homogêneos. Pelo primeiro item do Corolário 3.8, sabemos que para ter um centro persistente é necessário que $h_{(k+1)k} = 0$ para todo $k \geq 1$. Calcularemos diretamente as constantes de Lyapunov da equação

$$\dot{z} = iz + z\lambda H(z, \bar{z}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Usando (2-3), e o mesmo método empregado para obter (2-5), temos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{r^2 R_2(\theta) + r^3 R_3(\theta) + \dots + r^n R_n(\theta) + \dots}{1 + r I_2(\theta) + r^2 I_3(\theta) + \dots + r^{n-1} I_n(\theta) + \dots} \\ &= r^2 R_2(\theta) + r^3 [R_3(\theta) - I_2(\theta) R_2(\theta)] + O(r^4), \end{aligned} \tag{4-2}$$

onde

$$R_k(\theta) = \operatorname{Re} \left(\lambda H_{k-1} \left(e^{i\theta}, e^{-i\theta} \right) \right) \quad \text{e} \quad I_k(\theta) = \operatorname{Im} \left(\lambda H_{k-1} \left(e^{i\theta}, e^{-i\theta} \right) \right).$$

Substituindo a expressão dada em (2-6) em (4-2), obtemos

$$u'_2(\theta) = R_2(\theta) \quad \text{e} \quad u'_3(\theta) = 2R_2(\theta)u_2(\theta) + [R_3(\theta) - I_2(\theta)R_2(\theta)],$$

com isso,

$$V_2 = u_2(2\pi) = \int_0^{2\pi} R_2(\theta) d\theta = \operatorname{Re} \left[\int_0^{2\pi} \lambda \left(h_{10} e^{i\theta} + \overline{h_{10}} e^{-i\theta} \right) d\theta \right] = 0.$$

e

$$\begin{aligned} V_3 &= u_3(2\pi) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[R_3(\theta) - I_2(\theta)R_2(\theta) \right] d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left[I_2(\theta)R_2(\theta) \right] d\theta, \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned} V_3 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \left[\lambda^2 H_1^2 \left(e^{i\theta}, e^{-i\theta} \right) \right] d\theta \\ &= -\pi \operatorname{Im}(\lambda^2) |h_{10}|^2. \end{aligned}$$

Onde nas igualdades acima usamos o fato de que

$$\operatorname{Im}(A)\operatorname{Re}(A) = \frac{\operatorname{Im}(A^2)}{2}.$$

Logo a condição para se ter um centro persistente é que $h_{10} = 0$, assim, $H_1(z, \bar{z}) \equiv 0$ e consequentemente $R_2(\theta) \equiv I_2(\theta) \equiv 0$ e por fim, $V_3 = 0$.

Para finalizar a demonstração, usaremos indução matemática, ou seja, provaremos que se, $H_1 = H_2 = \dots = H_{k-1} = 0$ que significa que $V_3 = V_5 = \dots = V_{2k-1} = 0$, então $H_k = 0$ e $V_{2k+1} = 0$.

Vamos provar para o caso $k = 2$, neste caso a equação diferencial (4-2) é escrita como

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{r^3 R_3(\theta) + r^4 R_4(\theta) + \dots}{1 + r^2 I_3(\theta) + r^3 I_4(\theta) + \dots} \\ &= r^3 R_3(\theta) + r^4 R_4(\theta) + r^5 [R_5(\theta) - I_3(\theta)R_3(\theta)] + O(r^6), \end{aligned}$$

substituindo novamente a solução dada em (2-6), temos o sistema

$$\begin{cases} u'_3(\theta) = R_3(\theta) \\ u'_4(\theta) = R_4(\theta) \\ u'_5(\theta) = 3R_3(\theta)u_3(\theta) + [R_5(\theta) - I_3(\theta)R_3(\theta)] \end{cases}$$

comparando novamente com a expressão de (4-2) no caso $k = 2$, como feito anteriormente, obtém-se que, $V_2 = V_3 = V_4 = 0$, e

$$V_5 = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \left[\lambda^2 H_2^2 \left(e^{i\theta}, e^{-i\theta} \right) \right] d\theta = -\pi \operatorname{Im}(\lambda^2) [|h_{20}|^2],$$

como V_5 tem que ser zero, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, pois temos que ter um centro persistente,

assim, temos $h_{20} = 0$, e então, $H_2 = 0$ como queríamos.

Assumindo agora que $H_1 = H_2 = \dots = H_{k-1} = 0$, temos a seguinte hipótese de indução

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{r^{k+1}R_{k+1}(\theta) + r^{k+2}R_{k+2}(\theta) + \dots}{1 + r^{k+1}I_{k+1}(\theta) + r^{k+2}I_{k+2}(\theta)} + \\ &= r^{k+1}R_{k+1}(\theta) + r^{k+2}R_{k+2}(\theta) + \dots + r^{2k}R_{2k} + \\ &+ r^{2k+1}[R_{2k+1}(\theta) - I_{k+1}(\theta)R_{k+1}(\theta)] + O(r^{2k+2}), \end{aligned}$$

sustituindo a solução, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_{k+1}(\theta) = R_{k+1}(\theta) \\ \dots \\ u'_{2k}(\theta) = R_{2k}(\theta) \\ u'_{2k+1}(\theta) = (k+1)R_{k+1}(\theta)u_{k+1}(\theta) + [R_{2k+1}(\theta) - I_{2k}(\theta)R_{2k}(\theta)] \end{array} \right.$$

que implica, $V_2 = V_3 = \dots = V_{2k} = 0$, e

$$V_{2k+1} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{Im} \left[\lambda^2 H_k^2 \left(e^{i\theta}, e^{-i\theta} \right) \right] d\theta = -\pi \text{Im}(\lambda^2) \left[\sum_{j=0}^{\frac{k+1}{2}} |h_{k,k-j}|^2 \right],$$

então, $H_k = 0$ e $V_{2k+1} = 0$, como queríamos provar. ■

Centros fracamente persistentes

Neste capítulo, apresentamos equações diferenciais polinomiais que tenham a origem como centro fracamente persistente, e não somente persistente, pois se assim o fosse, coincidiriam com as listadas nos Teoremas principais **A**, **B** ou **C**. Assim, dada a equação diferencial $\dot{z} = iz + F_n(z, \bar{z})$ a origem é um centro fracamente persistente se é um centro para

$$\dot{z} = iz + uF_n(z, \bar{z}), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Os Teoremas 5.1, 5.2 e 5.3 apresentam equações diferenciais polinomiais de grau 2, de grau 3, e a generalização dos casos anteriores para equações diferenciais polinomiais de grau n , $n \in \mathbb{N}$, respectivamente, que possuem a propriedade de ter um centro fracamente persistente na origem.

Teorema 5.1. *A equação diferencial*

$$\dot{z} = iz + Az^2 + Bz\bar{z}. \quad (5-1)$$

Onde $A, B \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\bar{A}B) \neq 0$ e $A \neq B$, possui um centro fracamente persistente na origem.

Prova. Mostraremos que a equação diferencial (5-1) possui um centro na origem, o qual é fracamente persistente.

Considere a mudança de coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, e defina

$$S_2(\theta) = e^{-i\theta} F_2 \left(e^{i\theta}, e^{-i\theta} \right).$$

Se existir $s \in \mathbb{R}$, tal que

$$\text{Re} \left(sS_2'(\theta)i + S_2(\theta) \right) \equiv 0, \quad (5-2)$$

então, de acordo com a Proposição 3.3, a origem é um centro fracamente persistente e além disso é Darboux integrável.

O próximo passo é verificar se existe $s \in \mathbb{R}$ de forma que a expressão dada em

(5-2) seja nula. Temos

$$\begin{aligned} S_2(\theta) &= e^{-i\theta} (Ae^{2i\theta} + B) \\ &= Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta}, \end{aligned}$$

e sua derivada é dada por

$$S_2'(\theta) = iAe^{i\theta} - iBe^{-i\theta}.$$

Logo da expressão (5-2), segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(sS_2'(\theta)i + S_2(\theta)) &= \operatorname{Re} \left[s \left(iAe^{i\theta} - iBe^{-i\theta} \right) i + \left(Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[-sAe^{i\theta} + sBe^{-i\theta} + Ae^{i\theta} + Be^{-i\theta} \right] \\ &= [A + B - s(A - B)] \cos(\theta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto existe $s = \frac{A+B}{A-B}$, tal que (5-2) seja verdadeira.

Observe que $s \in \mathbb{R}$, pois

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(s) &= \operatorname{Im} \left(\frac{A+B}{A-B} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{A+B}{A-B} - \overline{\frac{A+B}{A-B}} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{(A+B)\overline{(A-B)} - \overline{(A+B)}(A-B)}{\|A-B\|^2} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{\|A-B\|^2} [A\bar{A} - A\bar{B} + B\bar{A} - B\bar{B} - \bar{A}A + \bar{A}B - \bar{A}\bar{B} + \bar{B}B] \\ &= \frac{1}{2i} \frac{2}{\|A-B\|^2} [\bar{A}B - A\bar{B}] \\ &= \frac{2}{\|A-B\|^2} \operatorname{Im}(\bar{A}B) = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $s \in \mathbb{R}$. ■

Teorema 5.2. *A equação diferencial*

$$\dot{z} = iz + Dz^3 + Fz\bar{z}^2, \quad (5-3)$$

onde $D, F \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\overline{D}F)$ e $D \neq F$, possui um centro fracamente persistente na origem.

Prova. Vamos mostrar que a Equação (5-3) possui um centro fracamente persistente na origem, para isto, usaremos a Proposição 3.3, ou seja, devemos verificar se $\exists s \in \mathbb{R}$, tal que

$$\text{Re}(sS'_3(\theta)i + S_3(\theta)) \equiv 0. \quad (5-4)$$

Usando $S_n(\theta)$ como definido na Proposição 3.3 para $n = 3$, temos

$$\begin{cases} S_3(\theta) = De^{2i\theta} + Fe^{-2i\theta} \text{ e} \\ S'_3(\theta) = 2i(De^{2i\theta} - Fe^{-2i\theta}). \end{cases}$$

Substituindo as expressões de $S_3(\theta)$ e $S'_3(\theta)$ em (5-4), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Re}(sS'_3(\theta)i + S_3(\theta)) &= \text{Re}\left[i2s(De^{i2\theta} - Fe^{-i2\theta})i + (De^{i2\theta} + Fe^{-i2\theta})\right] \\ &= \text{Re}\left[-2sDe^{i2\theta} + 2sFe^{-i2\theta} + De^{i2\theta} + Fe^{-i2\theta}\right] \\ &= [D + F - 2s(D - F)]\cos(2\theta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para $s = \frac{D + F}{2(D - F)}$, o resultado fica provado. Verificaremos mais um vez, que $s \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Im}(s) &= \text{Im}\left(\frac{D + F}{2(D - F)}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{D + F}{2(D - F)} - \frac{\overline{D + F}}{2(\overline{D - F})}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\frac{2}{\|D - F\|^2}[\overline{D}F - D\overline{F}] \\ &= \frac{2}{\|D - F\|^2}\text{Im}(\overline{D}F) = 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $s \in \mathbb{R}$. ■

Como foi visto no início do trabalho,

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

A seguir generalizaremos a expressão dada na Proposição 3.3 e que tem nos ajudado encontrar equações diferenciais que tem a propriedade de ter um centro fracamente persistente na origem.

Seja $F_n(z, \bar{z}) = \sum_{k+l=n} A_{kl} z^k \bar{z}^l$, onde $A_{kl} \in \mathbb{R}$. Como,

$$S_n(\theta) = e^{-i\theta} F_n(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = e^{-i\theta} \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-ik\theta} e^{-il\theta} = \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-i(k-l-1)\theta},$$

derivando, obtemos

$$S'_n(\theta) = \sum_{k+l=n} A_{kl} i(k-l-1) e^{-i(k-l-1)\theta}.$$

Sendo assim, a expressão da Proposição 3.3 é dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(sS'_n(\theta)i + S_n(\theta)) &= \frac{1}{2} \left[sS'_n(\theta)i + S_n(\theta) + \overline{sS'_n(\theta)i + S_n(\theta)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-s \left(\sum_{k+l=n} A_{kl} (k-l-1) e^{i(k-l-1)\theta} \right) + \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{i(k-l-1)\theta} - \right. \\ &\quad \left. - s \left(\sum_{k+l=n} A_{kl} (k-l-1) e^{-i(k-l-1)\theta} \right) + \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-i(k-l-1)\theta} \right] \\ &\equiv 0. \end{aligned} \tag{5-5}$$

Estudaremos os casos para $n = 2, 3, 4$ e 5 . Para uma melhor notação, seja

$$\operatorname{Re}(sS'_n(\theta)i + S_n(\theta)) = \Omega_n.$$

$n = 2$

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= \frac{1}{2} \left[-s \left(A_{20} e^{i\theta} - A_{11} e^{-i\theta} - 3A_{02} e^{i3\theta} \right) + \right. \\
&\quad + A_{20} e^{i\theta} + A_{11} e^{-i\theta} + A_{02} e^{-i3\theta} - \\
&\quad - s \left(A_{20} e^{-i\theta} - A_{11} e^{i\theta} - 3A_{02} e^{-i3\theta} \right) + \\
&\quad \left. + A_{20} e^{-i\theta} + A_{11} e^{i\theta} + 3A_{02} e^{i3\theta} \right] = \\
&= (-s + 1)A_{20} \cos(\theta) + (s + 1)A_{11} \cos(\theta) + (3s + 1)A_{02} \cos(3\theta).
\end{aligned}$$

$n = 3$

$$\begin{aligned}
\Omega_3 &= \frac{1}{2} \left[-s \left(2A_{30} e^{2i\theta} - 2A_{12} e^{-i2\theta} - 4A_{03} e^{-i4\theta} \right) + \right. \\
&\quad + A_{30} e^{i2\theta} + A_{21} + A_{12} e^{-i2\theta} + A_{03} e^{-i4\theta} - \\
&\quad - s \left(2A_{30} e^{-i2\theta} - 2A_{12} e^{i2\theta} - 4A_{03} e^{i4\theta} \right) + \\
&\quad \left. + A_{30} e^{-i2\theta} + A_{21} + A_{12} e^{i2\theta} + A_{03} e^{i4\theta} \right] = \\
&= (-2s + 1)A_{30} \cos(2\theta) + 2A_{21} + (2s + 1)A_{12} \cos(2\theta) + (4s + 1)A_{03} \cos(4\theta).
\end{aligned}$$

$n = 4$

$$\begin{aligned}
\Omega_4 &= \frac{1}{2} \left[-s \left(3A_{40} e^{3i\theta} + A_{31} e^{i\theta} - A_{22} e^{-i\theta} - 3A_{13} e^{-i3\theta} - 5A_{04} e^{-i5\theta} \right) + \right. \\
&\quad + A_{40} e^{i3\theta} + A_{31} e^{i\theta} + A_{22} e^{-i\theta} + A_{13} e^{-i3\theta} + A_{04} e^{-i5\theta} - \\
&\quad - s \left(3A_{40} e^{-i3\theta} + A_{31} e^{-i\theta} - A_{22} e^{i\theta} - 3A_{13} e^{i3\theta} - 5A_{04} e^{i5\theta} \right) + \\
&\quad \left. + A_{40} e^{-i3\theta} + A_{31} e^{-i\theta} + A_{22} e^{i\theta} + A_{13} e^{i3\theta} + A_{04} e^{i5\theta} \right] = \\
&= (-3s + 1)A_{40} \cos(3\theta) + (-s + 1)A_{31} \cos(\theta) + (s + 1)A_{22} \cos(\theta) + \\
&\quad + (3s + 1)A_{13} \cos(3\theta) + (5s + 1)A_{04} \cos(5\theta).
\end{aligned}$$

$n = 5$

$$\begin{aligned}
\Omega_5 &= \frac{1}{2} \left[-s \left(4A_{50}e^{4i\theta} + 2A_{41}e^{2i\theta} - 2A_{23}e^{-i2\theta} - 4A_{14}e^{-i4\theta} - 6A_{05}e^{-i6\theta} \right) + \right. \\
&\quad + A_{50}e^{i4\theta} + A_{41}e^{i4\theta} + A_{32} + A_{23}e^{-i2\theta} + A_{14}e^{-i4\theta} + A_{05}e^{-i6\theta} - \\
&\quad - s \left(4A_{50}e^{-i4\theta} + 2A_{41}e^{-i2\theta} - 2A_{23}e^{i2\theta} - 4A_{14}e^{i4\theta} - 6A_{05}e^{i6\theta} \right) + \\
&\quad \left. + A_{50}e^{-i4\theta} + A_{41}e^{-i2\theta} + A_{32} + A_{23}e^{i2\theta} + A_{14}e^{i4\theta} + A_{05}e^{i6\theta} \right] = \\
&= (-4s + 1)A_{50} \cos(4\theta) + (-2s + 1)A_{41} \cos(2\theta) + 2A_{32} + \\
&\quad + (2s + 1)A_{23} \cos(2\theta) + (4s + 1)A_{14} \cos(4\theta) + (6s + 1)A_{05} \cos(6\theta).
\end{aligned}$$

Teorema 5.3. *Considere a equação diferencial*

$$\dot{z} = iz + F_n(z, \bar{z}) = iz + \sum_{k+l=n} A_{kl} z^k \bar{z}^l, \text{ onde } A_{kl} \in \mathbb{C}. \text{ E seja}$$

$$S_n(\theta) = e^{-i\theta} F_n \left(e^{i\theta}, e^{-i\theta} \right) = e^{-i\theta} \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-ik\theta} e^{-il\theta} = \sum_{k+l=n} A_{kl} e^{-i(k-l-1)\theta}.$$

Temos que, as equações diferenciais polinomiais planares a seguir possuem a propriedade de ter um centro fracamente persistente na origem.

(a) *para n par, temos m casos*

$$\begin{aligned}
1^o) \quad \dot{z} &= iz + A_{k0}z^k + A_{1,k-1}z\bar{z}^{k-1}, \\
2^o) \quad \dot{z} &= iz + A_{k-1,1}z^{k-1}\bar{z} + A_{2,k-2}z^2\bar{z}^{k-2}, \\
3^o) \quad \dot{z} &= iz + A_{k-2,2}z^{k-2}\bar{z}^2 + A_{3,k-3}z^3\bar{z}^{k-3}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$(m-1)^o) \quad \dot{z} = iz + A_{\frac{k}{2}+2, \frac{k}{2}-2} z^{\frac{k}{2}+2} \bar{z}^{\frac{k}{2}-2} + A_{\frac{k}{2}-1, \frac{k}{2}+1} z^{\frac{k}{2}-1} \bar{z}^{\frac{k}{2}+1},$$

$$m^o) \quad \dot{z} = iz + A_{\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}-1} z^{\frac{k}{2}+1} \bar{z}^{\frac{k}{2}-1} + A_{\frac{k}{2}, \frac{k}{2}} z^{\frac{k}{2}} \bar{z}^{\frac{k}{2}}.$$

(b) *para n ímpar, temos m casos*

$$\begin{aligned}
1^o) \quad \dot{z} &= iz + A_{k0}z^k + A_{1,k-1}z\bar{z}^{k-1}, \\
2^o) \quad \dot{z} &= iz + A_{k-1,1}z^{k-1}\bar{z} + A_{2,k-2}z^2\bar{z}^{k-2},
\end{aligned}$$

$$3^o) \dot{z} = iz + A_{k-2,2} z^{k-2} \bar{z}^2 + A_{3,k-3} z^3 \bar{z}^{k-3},$$

⋮

$$(m-1)^o) \dot{z} = iz + A_{\frac{(k+1)}{2}+2, \frac{(k-1)}{2}-2} z^{\frac{(k+1)}{2}+2} \bar{z}^{\frac{(k-1)}{2}-2} + A_{\frac{(k-1)}{2}-1, \frac{(k+1)}{2}+1} z^{\frac{(k-1)}{2}-1} \bar{z}^{\frac{(k+1)}{2}+1},$$

$$m^o) \dot{z} = iz + A_{\frac{(k+1)}{2}+1, \frac{(k-1)}{2}-1} z^{\frac{(k+1)}{2}+1} \bar{z}^{\frac{(k-1)}{2}-1} + A_{\frac{(k-1)}{2}, \frac{(k+1)}{2}} z^{\frac{(k-1)}{2}} \bar{z}^{\frac{(k+1)}{2}}.$$

onde,

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é o número de casos.

Prova. Para $n = 2$, temos que pelo Teorema 5.1, segue que

$$\dot{z} = iz + A_{20} z^2 + A_{11} z \bar{z}$$

possui um centro fracamente persistente na origem, para $A_{11} \neq A_{20}$ e $\text{Im}(\overline{A_{20}} A_{11}) = 0$, com

$$s = -\frac{A_{20} + A_{11}}{A_{11} - A_{20}} \in \mathbb{R},$$

o resultado segue pela Proposição 3.3.

Observe que, a expressão dada em (5-5) nos fornece uma equação, e que os termos que multiplicam os coeficientes A_{kl} possui $\cos(\theta)$ em evidência, como foi feito para o caso $n = 2$ acima.

Para $n = 3$, temos o caso dado pelo Teorema 5.2, ou seja

$$\dot{z} = iz + A_{30} z^3 + A_{12} z \bar{z}^2$$

tem a propriedade de ter um centro fracamente persistente na origem, como foi visto, para $A_{12} \neq A_{30}$ e $\text{Im}(\overline{A_{30}} A_{12}) = 0$, para

$$s = \frac{A_{30} + A_{12}}{2(A_{30} - A_{12})} \in \mathbb{R},$$

o resultado segue pela Proposição 3.3.

Observe que, a expressão dada em (5-5) nos fornece uma equação, e que os termos que multiplicam os coeficientes A_{kl} possui $\cos(2\theta)$ em evidência, como foi feito para o caso $n = 3$ acima.

Para $n = 4$, temos os seguintes casos que tem a propriedade de ter um centro fracamente persistente na origem,

$$1^\circ) \dot{z} = iz + A_{40}z^4 + A_{13}z\bar{z}^3,$$

$$2^\circ) \dot{z} = iz + A_{31}z^3\bar{z} + A_{22}z^2\bar{z}^2.$$

Observe que, temos duas equações dada pela expressão (5-5), e os termos que multiplicam os coeficientes A_{kl} possui no primeiro caso $\cos(3\theta)$ em evidência, para $A_{40} \neq A_{13}$ e $\text{Im}(\overline{A_{40}}A_{13}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{40} + A_{13}}{3(A_{40} - A_{13})} \in \mathbb{R}.$$

E no segundo caso aparece $\cos(\theta)$ em evidência, para $A_{31} \neq A_{22}$ e $\text{Im}(\overline{A_{31}}A_{22}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{31} + A_{22}}{A_{31} - A_{22}} \in \mathbb{R},$$

de acordo com o que foi feito para o caso $n = 4$ acima.

Para $n = 5$, temos os seguintes casos que tem a propriedade de ter um centro fracamente persistente na origem

$$1^\circ) \dot{z} = iz + A_{50}z^5 + A_{14}z\bar{z}^4,$$

$$2^\circ) \dot{z} = iz + A_{41}z^4\bar{z} + A_{23}z^2\bar{z}^3,$$

observe que, temos duas equações dada pela expressão (5-5), e os termos que multiplicam os coeficientes A_{kl} possui no primeiro caso $\cos(4\theta)$ em evidência, para $A_{50} \neq A_{14}$ e $\text{Im}(\overline{A_{50}}A_{14}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{50} + A_{14}}{4(A_{50} - A_{14})} \in \mathbb{R}.$$

E no segundo caso aparece $\cos(2\theta)$ em evidência, para $A_{41} \neq A_{23}$ e $\text{Im}(\overline{A_{41}}A_{23}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{41} + A_{23}}{2(A_{41} - A_{23})} \in \mathbb{R},$$

de acordo com o que foi feito para o caso $n = 5$ acima.

Para valores de $n \geq 6$, considere a seguinte Tabela 5.1 abaixo, que é obtida a partir da Expressão (5-5).

Independentemente de n ser par ou ímpar, temos que os termos que multiplicam os coeficientes A_{kl} começam com $\cos((k-1)\theta)$ em evidência. Generalizando o exposto acima, temos:

Para n par, observe pela Tabela 5.1 que os termos que multiplicam os coeficientes A_{kl} possui no primeiro caso, $\cos((k-1)\theta)$ em evidência, para $A_{k0} \neq A_{1,k-1}$ e

A_{kl}	0	1	2	3	...	k
0			$(-s+1)$ $\cos(\theta)$	$(-2s+1)$ $\cos(2\theta)$...	$[-(k-1)s+1]$ $\cos((k-1)\theta)$
1		$(s+1)$ $\cos(\theta)$	$2A_{21}$	$(-s+1)$ $\cos(\theta)$...	$[-(k-2)s+1]$ $\cos((k-2)\theta)$
2	$(3s+1)$ $\cos(3\theta)$	$(2s+1)$ $\cos(2\theta)$	$(s+1)$ $\cos(\theta)$	$2A_{32}$...	$[-(k-3)s+1]$ $\cos((k-3)\theta)$
3	$(4s+1)$ $\cos(4\theta)$	$(3s+1)$ $\cos(3\theta)$	$(2s+1)$ $\cos(2\theta)$	$(s+1)$ $\cos(\theta)$...	$[-(k-4)s+1]$ $\cos((k-4)\theta)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
$l-1$	$[ls+1]$ $\cos(l\theta)$	$[(l-1)s+1]$ $\cos((l-1)\theta)$	$[(l-2)s+1]$ $\cos((l-2)\theta)$	$[(l-3)s+1]$ $\cos((l-3)\theta)$...	$2A_{l+1,l}$
l	$[(l+1)s+1]$ $\cos((l+1)\theta)$	$[ls+1]$ $\cos(l\theta)$	$[(l-1)s+1]$ $\cos((l-1)\theta)$	$[(l-2)s+1]$ $\cos((l-2)\theta)$...	$(s+1)$ $\cos(\theta)$

Tabela 5.1: Termos que multiplicam os coeficientes A_{kl}

$\text{Im}(\overline{A_{k0}}A_{1,k-1}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{k0} + A_{1,k-1}}{(k-1)(A_{k0} - A_{1,k-1})} \in \mathbb{R}.$$

No segundo caso, aparece $\cos((k-3)\theta)$ em evidência, para $A_{k-1,1} \neq A_{2,k-2}$ e $\text{Im}(\overline{A_{k-1,1}}A_{2,k-2}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{k-1,1} + A_{2,k-2}}{(k-3)(A_{k-1,1} - A_{2,k-2})} \in \mathbb{R}.$$

No terceiro caso, aparece $\cos((k-5)\theta)$ em evidência, para $A_{k-2,2} \neq A_{3,k-3}$ e $\text{Im}(\overline{A_{k-2,2}}A_{3,k-3}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{k-2,2} + A_{3,k-3}}{(k-5)(A_{k-2,2} - A_{3,k-3})} \in \mathbb{R},$$

e assim sucessivamente, até chegarmos ao penúltimo caso, onde aparece $\cos(3\theta)$ em evidência, para $A_{\frac{k}{2}+2, \frac{k}{2}-2} \neq A_{\frac{k}{2}-1, \frac{k}{2}+1}$ e $\text{Im}(\overline{A_{\frac{k}{2}+2, \frac{k}{2}-2}}A_{\frac{k}{2}-1, \frac{k}{2}+1}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{\frac{k}{2}+2, \frac{k}{2}-2} + A_{\frac{k}{2}-1, \frac{k}{2}+1}}{3(A_{\frac{k}{2}+2, \frac{k}{2}-2} - A_{\frac{k}{2}-1, \frac{k}{2}+1})} \in \mathbb{R},$$

e para o último caso, aparece $\cos(\theta)$ em evidência, para $A_{\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}-1} \neq A_{\frac{k}{2}, \frac{k}{2}}$ e $\text{Im}(\overline{A_{\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}-1}}A_{\frac{k}{2}, \frac{k}{2}}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}-1} + A_{\frac{k}{2}, \frac{k}{2}}}{A_{\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}-1} - A_{\frac{k}{2}, \frac{k}{2}}} \in \mathbb{R}.$$

Para n ímpar, observe pela Tabela 5.1 que os termos que multiplicam os coeficientes A_{kl} possui no primeiro caso $\cos((k-1)\theta)$ em evidência, para $A_{k0} \neq A_{1,k-1}$ e $\text{Im}(\overline{A_{k0}}A_{1,k-1}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{k0} + A_{1,k-1}}{(k-1)(A_{k0} - A_{1,k-1})} \in \mathbb{R}.$$

No segundo caso, aparece $\cos((k-3)\theta)$ em evidência, para $A_{k-1,1} \neq A_{2,k-2}$ e $\text{Im}(\overline{A_{k-1,1}}A_{2,k-2}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{k-1,1} + A_{2,k-2}}{(k-3)(A_{k-1,1} - A_{2,k-2})} \in \mathbb{R}.$$

No terceiro caso, aparece $\cos((k-5)\theta)$ em evidência, para $A_{k-2,2} \neq A_{3,k-3}$ e $\text{Im}(\overline{A_{k-2,2}}A_{3,k-3}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{k-2,2} + A_{3,k-3}}{(k-5)(A_{k-2,2} - A_{3,k-3})} \in \mathbb{R},$$

e assim sucessivamente, até chegarmos ao penúltimo caso, onde aparece $\cos(4\theta)$ em evidência, para $A_{\frac{(k+1)}{2}+2, \frac{(k-1)}{2}-2} \neq A_{\frac{(k-1)}{2}-1, \frac{(k+1)}{2}+1}$ e $\text{Im}(\overline{A_{\frac{(k+1)}{2}+2, \frac{(k-1)}{2}-2}}A_{\frac{(k-1)}{2}-1, \frac{(k+1)}{2}+1}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{\frac{(k+1)}{2}+2, \frac{(k-1)}{2}-2} + A_{\frac{(k-1)}{2}-1, \frac{(k+1)}{2}+1}}{4 \left(A_{\frac{(k-1)}{2}+2, \frac{(k+1)}{2}-2} - A_{\frac{(k+1)}{2}-1, \frac{(k-1)}{2}+1} \right)} \in \mathbb{R},$$

e para o último caso, aparece $\cos(2\theta)$ em evidência, para $A_{\frac{(k+1)}{2}+1, \frac{(k-1)}{2}-1} \neq A_{\frac{(k-1)}{2}, \frac{(k+1)}{2}}$ e $\text{Im}(\overline{A_{\frac{(k+1)}{2}+1, \frac{(k-1)}{2}-1}}A_{\frac{(k-1)}{2}, \frac{(k+1)}{2}}) = 0$, temos que

$$s = \frac{A_{\frac{(k+1)}{2}+1, \frac{(k-1)}{2}-1} + A_{\frac{(k-1)}{2}, \frac{(k+1)}{2}}}{2 \left(A_{\frac{(k-1)}{2}+1, \frac{(k+1)}{2}-1} - A_{\frac{(k+1)}{2}, \frac{(k-1)}{2}} \right)} \in \mathbb{R},$$

observe que a Proposição 3.3 foi usada diversas vezes, ou seja, o fato de existir $s \in \mathbb{R}$, é que nos garante que a origem é um centro fracamente persistente em todos os casos, como queríamos demonstrar. ■

Observe também, que, quando n é ímpar, aparece o caso $2A_{kl}$ onde $k = l + 1$, e como sabemos as famílias de equações diferenciais que possuem estes coeficientes não possuem um centro na origem, veja Corolário 3.8, outro aspecto que se observa na Tabela 5.1 e que os coeficientes A_{0l} nunca aparecem.

Conclusões

Apesar de termos encontrados todos os centros persistentes para a equação diferencial complexa cúbica e os sistemas rígidos, não foi possível caracterizar todos os centros para os casos estudados, e estes permanecem em aberto. A razão principal é que as condições necessárias para se obter um centro são dadas pelo anulamento das constantes de Lyapunov, tornando o problema mais viável, quando estamos procurando por centros persistentes e fracamente persistentes, veja a Observação 2.3.

Acreditamos que o problema de procurar, seja por centros persistentes ou fracamente persistentes em outras famílias de equações diferenciais não ajudará a entender melhor a estrutura de todos os centros, por isto, os Teoremas dados no Capítulo 5 não tem o propósito de catalogar todos os centros fracamente persistentes que existem.

Em particular, o problema de conhecer toda a lista de centros persistentes dada no Teorema A é exaustiva e não foi tratado neste trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Cima, A. Gasull e J. Medrado, *On persistent centers*, Bull. Sci. math. (2008), doi:10.1016/j.bulsci.2008.08.007
- [2] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maïer, *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York-Toronto, Ont., 1973, Translated from the Russian.
- [3] N. N. Bautin, *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type*, American Math. Soc. Translation **1954** (1954), no. 100, 19.
- [4] A. Cima, A. Gasull, V. Mañosa, and F. Mañosas, *Algebraic properties of the Lyapunov and period constants*, Rocky Mountain J. Math. **27** (1997), no. 2, 471 – 501.
- [5] A. Cima, J. Llibre and J. Medrado, *New families of centers for polynomial vector fields of arbitrary degree*. To appear in Comm. on Applied Nonlinear Analysis.
- [6] J. Chavarriga, *Integrable systems in the plane with center type linear part*, Appl. Math. (Warsaw) **22** (1994), no. 2, 285–309.
- [7] R. Conti, *Uniformly isochronous centers of polynomial systems in \mathbf{R}^2* , Differential equations, dynamical systems, and control science, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 152, Dekker, New York, 1994, 21–31.
- [8] W. W. Farr, C. Li, I. S. Labouriau, and W. F. Langford, *Degenerate Hopf bifurcation formulas and Hilbert’s 16th problem*, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), no. 1, 13–30.
- [9] J. P. Françoise, *Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector fields*, Ergodic Theory Dynam. Systems **16** (1996), no. 1, 87 – 96.
- [10] A. Garijo, A. Gasull and X. Jarque, *On the period function for a family of complex differential equations*, J. Differential Equations, **224** (2006) no. 2 pp. 314-331.

- [11] A. Gasull, A. Guillamon, and V. Mañosa, *An explicit expression of the first Lyapunov and period constants with applications*, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), no. 1, 190 – 212.
- [12] A. Gasull, A. Guillamon, and V. Mañosa, *An analytic–numerical method for computation of the Lyapunov and period constants derived from their algebraic structure*, SIAM J. Numer. Anal. **36** (1999), no. 4, 1030 – 1043.
- [13] A. Gasull and J. Torregrosa, *A new approach to the computation of the Lyapunov constants*, The geometry of differential equations and dynamical systems. Comput. Appl. Math. **20** (2001), 149–177.
- [14] A. Gasull and J. Torregrosa, *A relation between small amplitude and big limit cycles*, Rocky Mountain J. Math. **31** (2001), 1277–1303.
- [15] J. Giné, *The center problem for a linear center perturbed by homogeneous polynomials*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **22** (2006), 1613–1620.
- [16] J. Giné and X. Santallusia, *On the Poincaré–Lyapunov constants and the Poincaré series*, Appl. Math. (Warsaw) **28** (2001), 17–30.
- [17] B. Hassard and Y. H. Wan, *Bifurcation formula e derived from center manifold theory*, J. Math. Anal. Appl. **63** (1978), no. 1, 297–312.
- [18] I. D. Iliev, *On second order bifurcations of limit cycles*, J. London Math. Soc. (2) **58** (1998), no. 2, 353–366.
- [19] I. D. Iliev and L. M. Perko, *Higher order bifurcations of limit cycles*, J. Differential Equations **154** (1999), no. 2, 339–363.
- [20] P. Joyal, *Invariance of Poincaré–Lyapunov polynomials under the group of rotations*, Electron. J. Differential Equations **1998** (1998), No. 23, p. 8 (electronic).
- [21] Y. R. Liu and J. B. Li, *Theory of values of singular point in complex autonomous differential systems*, Sci. China Ser. A **33** (1990), no. 1, 10 – 23.
- [22] N. G. Lloyd, J. M. Pearson, and V. A. Romanovsky, *Computing integrability conditions for a cubic differential system*, Comput. Math. Appl. **32** (1996), no. 10, 99 – 107.
- [23] J. M. Pearson, N. G. Lloyd, and C. J. Christopher, *Algorithmic derivation of centre conditions*, SIAM Rev. **38** (1996), no. 4, 619–636.

- [24] J. C. Poggiale, *Applications des variétés invariantes à la modélisation de l'hétérogénéité en dynamique des populations*, Ph.D. thesis, Université de Bourgogne, 1994.
- [25] R. Roussarie, *Bifurcation of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.
- [26] K. S. Sibirskii, *On the number of limit cycles in the neighborhood of a singular point*, *Differencial'nye Uravnenija* **1** (1965), 53–66.
- [27] J. A. Sanders and F. Verhulst, *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [28] H. Żoładek, *Quadratic systems with center and their perturbations*, *J. Differential Equations* **109** (1994), no. 2, 223–273.
- [29] Perko, Lawrence, *Diferential equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1991.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)