



COPPE/UFRJ

COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO DE ENRIJECEDORES À FLEXÃO

Aynor Justino Ariza Gomez

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Murilo Augusto Vaz

Rio de Janeiro
Setembro de 2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO DE ENRIJECEDORES À FLEXÃO

Aynor Justino Ariza Gomez

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA OCEÂNICA.

Aprovada por:

Prof. Murilo Augusto Vaz, Ph.D.

Prof. Julio Cesar Ramalho Cyrino, D.Sc.

Prof.^a Marysilvia Ferreira da Costa, D.Sc.

Dr. Carlos Alberto Duarte de Lemos, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2009

Gomez, Aynor Justino Ariza

Resposta do comportamento viscoelástico de enrijecedores à flexão no domínio da frequência/ Aynor Justino Ariza Gomez. - Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

IX, 107 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Murilo Augusto Vaz

Dissertação (mestrado): UFRJ/COPPE Programa de Engenharia Oceânica, 2009.

Referencias Bibliográficas: p. 105-107.

1. Enrijecedor à flexão. 2. Riser flexível. 3. Análise viscoelástica. I. Vaz, Murilo Augusto II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Oceânica. III. Título.

À minha família e amigos.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Murilo Augusto Vaz pela sua valiosa orientação, paciência e colaboração para o desenvolvimento do presente trabalho.

Aos Amigos e funcionários do Núcleo de Estruturas Oceânicas (NEO).

Ao Laboratório de Polímeros do Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais, em especial à Professora Marysilvia Ferreira da Costa, pelo apoio na realização dos ensaios experimentais.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e ao Programa de Engenharia Oceânica da COPPE/UFRJ pelo suporte financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO DE ENRIJECEDORES À FLEXÃO

Aynor Justino Ariza Gomez

Setembro/2009

Orientador: Murilo Augusto Vaz

Programa: Engenharia Oceânica

Enrijecedores à flexão são componentes estruturais usados para garantir uma transição segura entre a unidade flutuante de produção e a linha flexível. Sua principal função é limitar as altas curvaturas observadas nesta região. O corpo da estrutura é fabricado com poliuretano, um material polimérico com resposta dependente do tempo que apresenta alta não linearidade. No presente trabalho, o comportamento do material é representado utilizando duas equações constitutivas, uma para material hiperelástico e outra para material viscoelástico linear. As condições de carregamento ambientais são representadas por funções harmônicas e o modelo matemático para viscoelasticidade linear é estendido do domínio do tempo para frequência, com o objetivo de incorporar estas condições. O modelo matemático permite uma melhor compreensão do fenômeno de relaxação observado no enrijecedor viscoelástico. Um estudo de caso é apresentado e os resultados mostram a importância de se considerar carregamentos harmônicos para o projeto e análise de enrijecedores viscoelásticos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

BEND STIFFENERS VISCOELASTIC BEHAVIOR

Aynor Justino Ariza Gomez

September/2009

Advisor: Murilo Augusto Vaz

Department: Ocean Engineering

Bend stiffener is a structural component used to ensure a safe transition between the float production unit and the flexible riser. Its main function is to limit the high curvatures observed in this region. The structure body is manufactured with polyurethane, a polymeric material that presents highly nonlinear time dependent response. In the present work, the material behavior is represented using two constitutive equations for comparison purposes, one for hyper-elastic response and the other for linear viscoelasticity. The environmental loading conditions are represented by harmonic functions and the viscoelastic mathematical model is extended from time to frequency domain in order to incorporate this condition. The mathematical model improves the understanding of the relaxation phenomena observed in the viscoelastic bend stiffener. A case study is presented and the results point out the importance of considering harmonic loading conditions for the viscoelastic bend stiffener analysis and design.

Sumário

1. Introdução	1
1.1 Revisão bibliográfica	2
1.2 Descrição dos capítulos	6
2. Propriedade Física dos Polímeros	7
2.1 Estrutura do polímero	7
2.2 Propriedade elástica dos polímeros	9
2.2.1 Temperatura de transição vítrea.	9
2.2.2 Propriedade elástica dos termoplásticos	9
2.2.3 Propriedade elástica dos elastômeros e termorrígidos	11
2.3 Poliuretano	12
2.3.1 Síntese	12
2.3.2 Aplicações do poliuretano na indústria offshore	13
2.4 Representação constitutiva dos polímeros	13
2.4.1 Hiperelasticidade	15
2.5 Viscoelasticidade linear	19
2.5.1 Relaxação	19
2.5.2 Fluência	20
2.5.3 Equações constitutivas da viscoelasticidade linear	22
2.5.4 Relação entre os módulos de fluência e de relaxação	24
2.5.5 Alguns modelos matemáticos da viscoelasticidade linear	25
2.5.6 Resposta dinâmica do material viscoelástico linear	35
3. Caracterização experimental do poliuretano	39
3.1 Ajuste do teste pela teoria viscoelástica linear	42
3.2 Resposta viscoelástica linear do mínimo da frequência	46
3.3 Resposta hiperelástica do poliuretano	47

4. Análise e resultados	49
4.1 Análise hiperelástico do enrijecedor à flexão	49
4.1.1 Formulação matemática: enrijecedor à flexão e linha flexível	50
4.1.2 Relações constitutivas do enrijecedor	55
4.1.3 Condições de contorno	58
4.1.4 Solução numérica	58
4.1.5 Estudo de casos e resultados	60
4.2 Análise viscoelástica do enrijecedor à flexão no domínio do tempo	66
4.2.1 Formulação matemática	66
4.2.2 Solução numérica	68
4.2.3 Estudo de casos e resultados	68
4.3 Comportamento viscoelástico do enrijecedor à flexão no domínio da frequência	75
4.3.1 Formulação matemática	76
4.3.2 Estudo de casos e resultados	87
5. Conclusões e recomendações	101
5.1 Sugestões	104
Referências Bibliográficas	105

Capítulo 1

Introdução

Na indústria offshore, os dutos flexíveis são usados principalmente para o transporte de hidrocarbonetos, levando o fluido desde o leito marítimo até uma unidade flutuante de produção. Cabos de controle (cabos umbilicais) têm em seu interior cabos elétricos ou linhas hidráulicas que fornecem energia e sinais de comando aos equipamentos submarinos.

Os risers e os cabos umbilicais têm o mesmo princípio de construção, sendo compostos de várias camadas concêntricas de diferentes propriedades mecânicas. Este conjunto de camadas resulta em uma estrutura com baixa rigidez flexional, mas com grande rigidez axial e torsional. Estas linhas flexíveis estão suspensas nas unidades, onde se encontram expostas às condições do meio ambiente e ao movimento próprio da unidade devido às ondas do mar, ventos e correntes marítimas. Devido a todas estas ações, a zona mais crítica onde é produzido o maior ponto de concentração de tensões é no engaste, portanto esta será a região mais propensa a falhas.

Devido ao movimento constante da unidade flutuante, a zona de união da unidade flutuante e linha flexível devem ter boa rigidez flexional, para garantir a vida útil da linha flexível. Na indústria offshore, o equipamento utilizado para este objetivo é o enrijecedor à flexão, feito de poliuretano, o que permite uma boa rigidez flexional e uma transição suave. Ademais, materiais poliméricos não têm problemas de corrosão pelo meio ambiente. A linha flexível está embutida no enrijecedor à flexão e todo o conjunto está preso à unidade flutuante.

O enrijecedor à flexão apresenta um pequeno trecho cilíndrico que acomoda os insertos metálicos e um longo trecho cônico. As dimensões do enrijecedor variam dependendo das dimensões da linha flexível, e do carregamento imposto, podendo variar em média de 1m a 5m. O enrijecedor encontra-se exposto aos movimentos da unidade flutuante, e aos movimentos da linha flexível.

Neste trabalho o comportamento mecânico dos polímeros e sua dependência com a temperatura são apresentados. São revisados os diferentes tipos de polímeros e é visto que a resposta mecânica de um polímero pode ser representada como material viscoelástico ou hiperelástico, sendo que esta última representa a característica mecânica a uma determinada taxa de deformação. Portanto, a relação constitutiva (curva tensão-deformação) depende da taxa do carregamento. A obtenção da curva tensão-deformação e a taxa de deformação são parâmetros muito importantes.

Desenvolveu-se ensaios experimentais do poliuretano, a partir de corpos de prova de uma amostra de *bend stiffener*, obtendo-se o módulo de fluência experimentalmente, que foi ajustado pela série de Prony, escolhendo-se a curva mais acurada. Conhecendo-se o módulo de fluência é possível obter o módulo de relaxação, estas funções são dependentes do tempo. Fazendo-se uma mudança de sistema é possível obter os módulos de fluência e relaxação no domínio da frequência. Obtendo o módulo complexo e o módulo de complacência se pode estudar a faixa onde podem acontecer as maiores perdas de energia.

Nos modelos desenvolvidos do *bend stiffener* considera-se o material homogêneo, isotrópico e simétrico (a resposta do poliuretano em tração é compressão são iguais) e assim o eixo neutro sempre coincide com o eixo do centro geométrico (centróide de área). A linha flexível será aproximada como material elástico linear.

1.1 Revisão bibliográfica

Boef e Out (1990) analisaram a conexão do enrijecedor com a linha flexível, pois este é uma zona crítica de deformações extremas e de fadiga. Eles avaliaram dois modelos: O primeiro modelo é analítico com condições particulares de solução numérica baseado na teoria de viga esbelta, considerando grandes deslocamentos das seções. Trata-se de um problema de flexão pura com seção transversal variável devido à forma cônica do enrijecedor. No outro modelo, utilizaram elementos finitos (sólido e viga). Concluíram que o enrijecedor é eficaz para diminuir as curvaturas e que o modelo analítico é ótimo para análise preliminar. Para uma análise mais avançada, recomendaram utilizar modelos em elementos finitos.

Lane et al. (1995) realizaram uma revisão do estado da arte dos materiais de construção, manufatura e instalação do enrijecedor. Desenvolveram também um software denominado Stiffener® para o cálculo do enrijecedor considerando uma viga esbelta, comparando este resultado com outros dois modelos unidimensional e tridimensional feitos em um programa comercial de elementos finitos. Os autores concluíram que a resposta do software Stiffener® com os outros modelos de elementos finitos tem uma boa precisão e validam o software.

Meniconi e Lopes (2001) apresentaram experimentalmente as propriedades do poliuretano do enrijecedor do (Floating Production Storage and Offloading com *turret*) FPSO P-34. Em 1998, após 6 meses de operação, o enrijecedor apresentou falhas por fadiga. Eles fizeram corpos de prova do enrijecedor fazendo diferentes tipos de testes, de carregamento monotônico em tração e compressão, mostrando uma alta não linearidade, e ensaios com carregamento cíclico, obtendo curvas de histereses com mudanças de área e inclinação. Fizeram testes de fadiga levantando à curva de deformação por número de ciclos (ϵ -N). Além disso, analisaram o enrijecedor por elementos finitos considerando o material linear elástico, devido as pequenas deformações produzidas durante sua operação.

Vaz e Lemos (2004) apresentaram formulação analítica numérica para bend stiffeners com comportamento não linear elástico assimétrico em tração e compressão, os cálculos foram baseados no modelo matemático de Boef e Out (1990), logo compararam-se os resultados com um material elástico linear onde seu coeficiente de rigidez foi tomado a 10% da deformação, obtendo diferenças entre os resultados.

Kiepper (2004) modelou o arranjo do enrijecedor por elementos finitos no segmento de tubo flexível-enrijecedor, comparando seus resultados com o programa desenvolvido pela Coppe/Petrobras, obtendo valores satisfatórios e precisos. O enrijecedor foi modelado como material hiperelástico, apresentando-se mais rígido do que para o material elástico.

Lemos (2005) apresentou uma metodologia de análise de fadiga de risers flexíveis conectados nas unidades flutuantes (Navios do tipo FPSO), considerando uma

representação tridimensional do meio ambiente. Ele considerou o efeito da distribuição das curvaturas do enrijecedor como material linear elástico, não linear elástico assimétrico e viscoelástico. Ele implementa a formulação de Boef e Out (1990) para a análise de *bend stiffeners* ampliando-a para materiais não lineares assimétricos e materiais viscoelásticos.

Caire et al. (2005) desenvolveram o *bend stiffener* como material viscoelástico linear, realizaram testes de fluência para representar as propriedades viscoelásticas, que foram ajustadas pela série de Prony de terceira ordem, consideraram para os cálculos cargas estáticas, que quando impostas ao *bend stiffener* apresentaram mudanças de curvatura de até 20% após algumas horas.

Demanze et al. (2005) apresentaram um estudo amplo da fadiga do poliuretano, que é usado para a fabricação do *bend stiffener*. Consideraram o limiar de fadiga para qual não acontece a propagação da trinca, que foi demonstrado e avaliado experimentalmente. Avaliaram a deformação de zonas críticas calculadas analiticamente e calibradas por elementos finitos.

Caire (2005) desenvolveu modelos de vigas que representam o sistema linha flexível-enrijecedor com comportamento do material linear elástico, não linear elástico assimétrico e viscoelástico linear com carregamentos estáticos extremos. Considerou também a viga com efeitos das deformações angulares (viga de Timoshenko), demonstrou que o efeito do esforço cortante é mais evidente quanto maior o carregamento analisado. Modelou as áreas de contato, considerando pressões de contato ao longo do comprimento do enrijecedor como uma boa alternativa para estimativa, comparada ao complexo modelo de elementos finitos.

Caire e Vaz (2007) tomaram em consideração a não linearidade da linha flexível, pois a rigidez à flexão diminui após a curvatura crítica. Consideraram este comportamento e analisaram conjuntamente com o *bend stiffener*, apresentando um modelo analítico-numérico. Os estudos de casos foram avaliados com carregamentos estáticos. Desenvolveram o modelo em elementos finitos, consideraram folgas entre a linha flexível e *bend Stiffener*, para validar os resultados da formulação analítica.

Vaz et al. (2007) realizaram o estudo de *bend stiffener* como material linear elástico e não linear elástico e compararam nesse dois modelos. Analisaram também o comportamento por separado do conjunto linha flexível *bend stiffener* para se obter o comportamento da força de contato entre as duas superfícies. A resposta mais ressaltante das análises é a excentricidade do eixo neutro no domínio da curvatura para quatro seções diferentes do *bend stiffener*.

Souza e Ramos (2008) apresentaram o estudo paramétrico da análise estrutural do *bend stiffener*, considerando uma forma geométrica mais complexa, de acordo com a realidade. Desenvolveram um código computacional para solução numérica da equação diferencial não linear de segunda ordem do comportamento do *bend stiffener*, comparam os resultados obtidos com resultados de Boef e Out (1990) e Caire (2005), validando o código computacional. Compararam as análises paramétricas das dimensões do *bend stiffener* com cargas extremas conseguindo em alguns casos até 30% de variação de curvatura.

Smith (2008) desenvolveu uma metodologia para o projeto da análise de fadiga, estabelecendo o limite da curvatura à flexão do riser flexível, considerou quatro passos para a análise: primeiro tomou-se em conta a análise global de fadiga do movimento do riser com as condições aplicadas ao *bend stiffener* obtendo as características da tração-ângulo da linha. Segundo, estabeleceu o limite do comportamento cíclico da curvatura à flexão baseado em análise de fadiga e curvas S-N. Terceiro, projetou o perfil do *bend stiffener* considerando o limite de curvatura devido à fadiga da flexão. Quarto, validou o projeto do *bend stiffener* considerando amplitudes diferentes de cargas e uma carga extrema.

Souza (2008) apresentou uma análise da geometria por meio de um modelo linear elástico, desenvolvendo um código em Matlab® para a solução numérica do problema de valor de contorno, considerou 7 parâmetros do enrijecedor cônico complexo, dos quais dois parâmetros foram os mais significativos, o comprimento total e o diâmetro máximo. A avaliação mostrou a possível otimização do projeto deste equipamento.

1.2 Descrição dos capítulos

- No capítulo 2 apresenta-se uma introdução dos polímeros, diferença entre suas propriedades mecânicas, importância da temperatura de transição, apresentando-se uma breve introdução do poliuretano. Apresentam-se também os conceitos básicos do material não linear, dando um enfoque especial na hiperelasticidade, os principais modelos matemáticos e posteriormente desenvolve-se os conceitos básicos da viscoelasticidade linear, principais modelos matemáticos para representação do material no domínio do tempo e da frequência.
- No capítulo 3 é desenvolvido o ensaio experimental do poliuretano feito no Laboratório de Polímeros do Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais. O corpo de prova foi obtido de um *bend stiffener*, a resposta do ensaio foi ajustada usando a teoria da viscoelasticidade linear, utilizando a série de Prony, que é a que representa melhor o comportamento do poliuretano, após obter-se o módulo complexo da viscoelasticidade linear (módulo de perda e armazenamento). Finalmente, o material também é ajustado por modelos hiperelásticos.
- No capítulo 4 são apresentadas as análises do enrijecedor à flexão considerado como material hiperelástico e viscoelástico linear no domínio do tempo e da frequência, obtendo-se os resultados para vários estudos de casos.
- No capítulo 5 são apresentadas as conclusões do presente trabalho, assim como algumas sugestões para os trabalhos futuros.

Capítulo 2

Propriedade Física dos Polímeros

Os polímeros são macromoléculas de alto peso molecular, formadas pela combinação de unidades mais simples (os meros), onde os átomos são mantidos unidos por ligações covalentes. Entre as cadeias a interação é por forças secundárias. As cadeias são consideradas como a construção básica do polímero, RÖSLER et al. (2007).

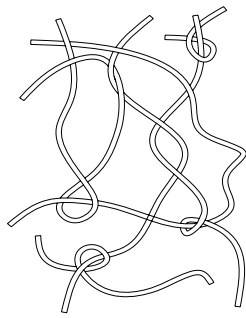
As propriedades físicas dos polímeros dependem principalmente do tipo de monômero que os integram como também de suas estruturas secundária e terciária e de sua capacidade para cristalizar ou permanecer amorfo em diferentes condições. Na maioria dos casos os polímeros podem ser projetados com propriedades específicas.

Em muitas aplicações o polímero deve permanecer estável, ou seja, deve manter suas características estruturais e morfológicas durante toda sua vida útil.

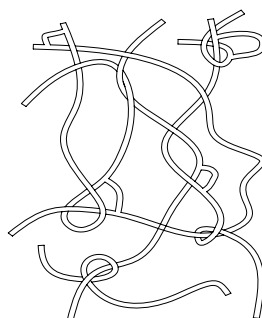
2.1. Estrutura do polímero

As estruturas das moléculas do polímero podem estar dispostas em paralelo e formar uma estrutura regular, mas devido ao comprimento das moléculas é pouco provável que elas fiquem alinhadas após esfriar e mudar do estado líquido para sólido. É mais provável que as cadeias fiquem desordenadas e entrelaçadas com outras moléculas, por este fenômeno a estrutura do polímero sempre contém alguma estrutura amorfa.

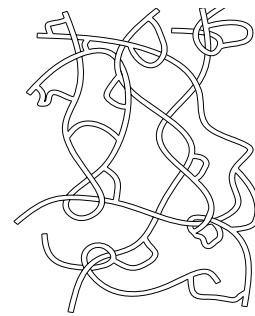
Todas as cadeias constituem as unidades do polímero, é possível o cruzamento de ligação covalente, formando uma rede molecular. Estas ligações cruzadas são importantes na determinação das propriedades mecânicas, porque fixam às moléculas e impossibilitam a extração das cadeias simples. Os polímeros são comumente classificados em três grupos: termoplástico, elastômero e termorrígido, vide figura 2.1. Este método de classificação é baseado por suas propriedades termo-mecânica descrito por RIANDE et al. (2000).



(a) Termoplástico, as cadeias moleculares não são reticulados



(b) Elastômeros, Alguns as ligações existentes entre as cadeias.



(c) Termorrígido, muitos as ligações existentes entre as cadeias.

Figura 2.1: Esquema do cruzamento das cadeias de moléculas para diferentes polímeros.

A densidade de ligações cruzadas pode ser quantificada considerando como base ao diamante, que é composto de cadeias de carbono. Os elastômeros têm uma densidade de ligações cruzadas com relação ao diamante de 10^{-4} a 10^{-3} e os termorrígidos têm uma densidade de 10^{-2} a 10^{-1} . Vide RÖSLER et al. (2007).

Nos elastômeros e termorrígido suas estruturas são completamente amorfas devido a suas ligações, impossibilitando o arranjo regular das cadeias. Os termoplásticos podem ser semicristalinos, porque contém dentro deles regiões cristalinas e amorfas. Em um termoplástico semicristalino as regiões cristalinas não consistem de cadeias de moléculas alinhadas em paralelo, mas sim de cadeias de moléculas dobradas regularmente, vide figura 2.2.

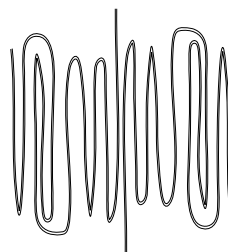


Figura 2.2: Região cristalina de um termoplástico.

2.2. Propriedade elástica dos polímeros

O comportamento elástico dos polímeros está determinado pelas ligações intermoleculares entre as cadeias, e não pelas ligações covalentes entre elas. Para os elastômeros e termorrígidos as ligações covalentes são importantes.

2.2.1. Temperatura de transição vítrea T_g

O volume específico aumenta com a temperatura devido à expansão térmica, principalmente nos polímeros amorfos. A temperatura onde o volume específico muda de inclinação formando-se um volume adicional é denominada temperatura de transição vítrea, figura 2.3.

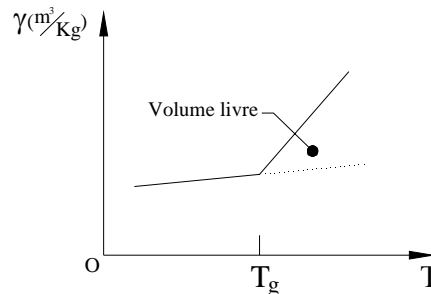


Figura 2.3: Volume específico do polímero amorfo em função da temperatura.

O incremento de volume aumenta as distâncias das cadeias e se pode dizer que as forças secundárias se enfraquecem quando se alcança a temperatura de transição vítrea.

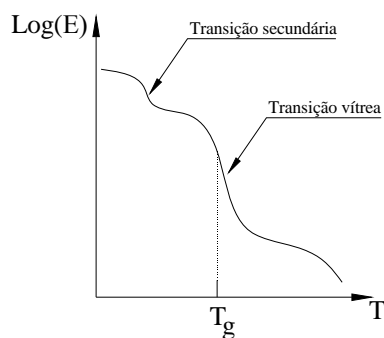
2.2.2. Propriedade elástica dos termoplásticos

A figura 2.4(a) mostra a dependência do módulo de elasticidade com a temperatura. A elasticidade diminui fortemente a temperaturas próximas à transição vítrea, por isso é necessário especificar a faixa de temperatura considerada.

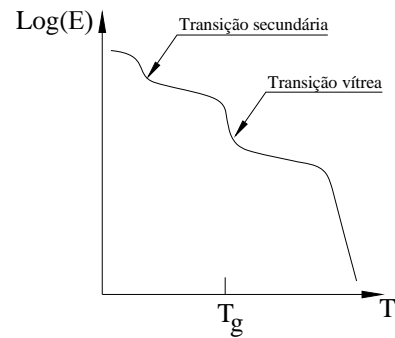
A elasticidade dos termoplásticos abaixo da temperatura vítrea depende principalmente da energia necessária para deslocar os átomos de sua posição de equilíbrio. Na descarga, os átomos voltam à sua posição de equilíbrio onde se encontram a uma baixa energia. Devido a este comportamento se denomina energia de elasticidade. As ligações covalentes não contribuem significativamente às propriedades elásticas dos termoplásticos. Para os polímeros amorfos a temperatura relevante é a temperatura de transição vítrea (T_g).

A temperatura de transição secundária é chamada assim pela relaxação do processo, que limita a mobilidade das cadeias. Estes fenômenos são responsáveis pelo comportamento viscoelástico dos polímeros.

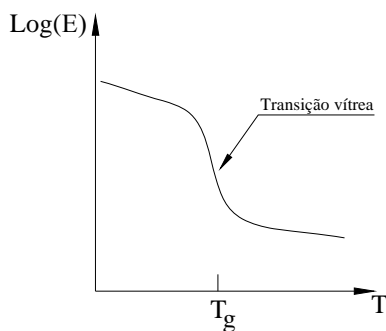
Se a temperatura do ensaio é superior à T_g , o módulo de elasticidade diminui fortemente, podendo-se pensar que o material pode fluir como um líquido viscoso, mas o comportamento é diferente devido à forte coesão das cadeias. Ao impor-se uma carga, figura 2.5, estas cadeias são esticadas parcialmente. Devido a encontrar-se acima da temperatura vítrea estes movimentos são obstruídos pelas cadeias circundantes. As cadeias encontram-se entrelaçadas, tem-se que endireitar, girar e muitas têm que mudar de posição. Devido às altas temperaturas e à maior distância das moléculas, este processo é facilitado, ainda mais para temperaturas acima da T_g . A deformação do material ainda depende do tempo.



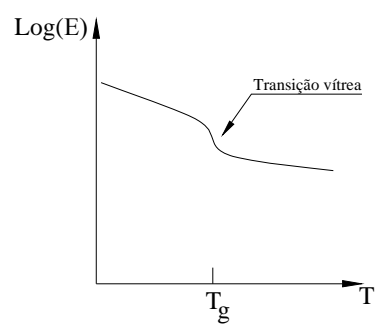
(a) Polímero termoplástico amorfo.



(b) Polímero termoplástico semicristalino.



(c) Elastômero.



(d) Termorrígido

Figura 2.4: Dependência do módulo de rigidez em função da temperatura, para diferentes polímeros.

A viscoelasticidade dos polímeros amorfos é mais acentuada perto da T_g . À temperatura mais baixa, unicamente pequenas partes das moléculas podem deslizar-se, mas próximo à T_g os processos de deslizamento das moléculas é facilitado. O deslizamento das moléculas é mais fácil devido às altas temperaturas e o tempo de relaxação decresce. À temperatura muito acima da T_g , o tempo de relaxação é menor, e o sistema retorna a seu estado inicial.

O polímero termoplástico semicristalino tem comportamento diferente com respeito ao termoplástico amorfo, como se mostra na figura 2.4(b), devido à forte ligação intermolecular das regiões cristalinas, seu módulo de elasticidade geralmente é maior que dos polímeros amorfos. A diminuição do módulo de elasticidade é menor ao chegar à temperatura T_g porque só a região amorfa muda suas propriedades, e as outras regiões seguem sendo cristalinas. A coesão entre a região cristalina e amorfa está garantida pelas muitas cadeias entrelaçadas.

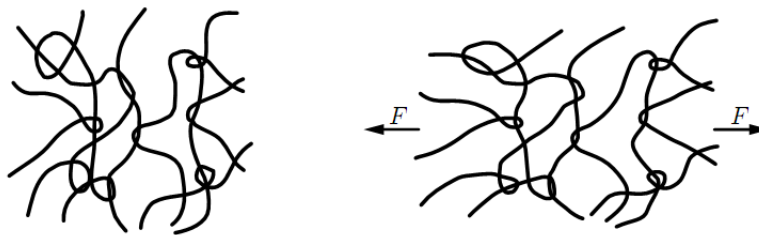


Figura 2.5: Deformação elástica de um polímero acima da temperatura (T_g) devido a uma força. As moléculas são esticadas parcialmente.

2.2.3. Propriedade elástica dos elastômeros e termorrígidos

Os elastômeros e termorrígidos caracterizam-se pelas ligações covalentes predominantemente entre as cadeias, o módulo de elasticidade é ligeiramente maior. À temperatura acima da temperatura (T_g) estas ligações são importantes, figura 2.4 (c).

A deformação elástica nos elastômeros pode alcançar valores grandes, pois as cadeias se esticam, mas as ligações cruzadas evitam que as cadeias deslizem muito e inibem as deformações plásticas.

Se a densidade das ligações cruzadas do polímero é maior o estiramento das cadeias é dificultado. Assim, os termorrígidos apresentam uma menor diminuição do módulo de elasticidade com a temperatura. (Figura 2.4 (d)).

2.3. Poliuretanos

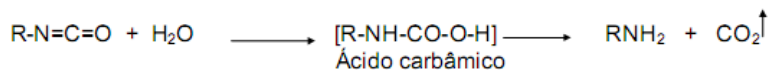
As espumas de poliuretanos foram desenvolvidas a partir da década de 1930, com a fabricação de espumas rígidas, adesivos e tintas na Alemanha. Em 1937, Otto Bayer fez a primeira síntese de poliuretano a partir de um diisocianato. Os poliuretanos são produzidos pela reação de poliadição de isocianatos e um poliol ou outros reagentes, contendo dois ou mais grupos de hidrogênio reativos. Os compostos contendo hidroxilas podem variar quanto à massa molecular, natureza química e funcionalidade. Os isocianatos podem ser aromáticos, alifáticos, ciclo-alifáticos ou policíclicos. Esta flexibilidade de escolha de reagentes permite obter uma enorme variedade de compostos com diferentes propriedades físicas e químicas. Os poliuretanos são versáteis podendo ser agregados em alguns tipos básicos como: espumas rígidas, espumas flexíveis e elastômeros. Sua estrutura pode ser celular (espuma flexível, semi-rígida, rígida, e elastômero microcelular) ou sólida (elastômeros, revestimentos, selantes, adesivos, etc.).

2.3.1. Síntese

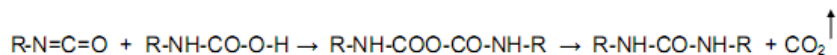
A síntese é feita através da reação de adição entre um isocianato e um composto hidroxilado, responsável pela formação do grupamento poliuretano considerada como reação de propagação da cadeia poliuretânica:



Na reação entre o isocianato e a água há a formação de ácido carbâmico como composto intermediário, que se decompõe em amina e dióxido de carbono (agente formador das células de espuma):



Ou, alternativamente, o ácido carbâmico reage com outra molécula de isocianato, para produzir ácido carbâmico anidro que se decompõe em uréia dissubstituída (formação de segmentos rígidos de poliuréia por ligações de ponte de hidrogênio) e CO₂.



2.3.2. Aplicações do poliuretano na indústria offshore

O poliuretano tem uma ampla gama de aplicação na indústria, excepcionalmente na indústria offshore, devido a suas propriedades físicas, como: diferente variedade de níveis de dureza, resistência à abrasão, ao rasgo, às cargas de tração e à degradação produzida pelo meio ambiente, dentre outras propriedades. E além disso, comparado com o aço, o poliuretano é mais leve, não sofre problemas de corrosão e o custo de fabricação é muito menor.

Na indústria offshore o poliuretano encontra-se principalmente nos *bend restrictors* e *bend stiffeners*, devido a suas boas propriedades físicas e mecânicas. Considerando-se as condições de trabalho que se encontram expostos, faz-se uma boa escolha pela utilização do poliuretano.

2.4. Representação constitutiva dos Polímeros

Muitos materiais têm resposta linear e não linear elástica. A curva tensão-deformação do material depende da forma como é realizado o ensaio (tração, compressão, flexão, torção, etc.), e para alguns materiais depende também da taxa de deformação, da temperatura do ensaio, níveis de tensões, etc.

Quando a carga é suficientemente pequena a relação tensão-deformação tem resposta linear elástica. E se a carga de ensaio é suficientemente grande, a curva tensão-deformação pode ter resposta não linear. A resposta mecânica dos materiais pode ser classificada como: elástica, plástica, viscoelástica e viscoplástica, BORESI et al. (1993).

Quando o material é carregado com tensão variável ele se deforma, e se ao ser descarregado ele retornar pelo mesmo caminho, então este processo é reversível, e o material é dito elástico, podendo ser linear ou não linear. A figura 2.6 (a) ilustra este comportamento. O objetivo do estudo da elasticidade não linear é proporcionar uma ferramenta matemática que consiga descrever melhor o comportamento mecânico não linear dos materiais (borracha, elastômeros, termoplásticos, etc.).

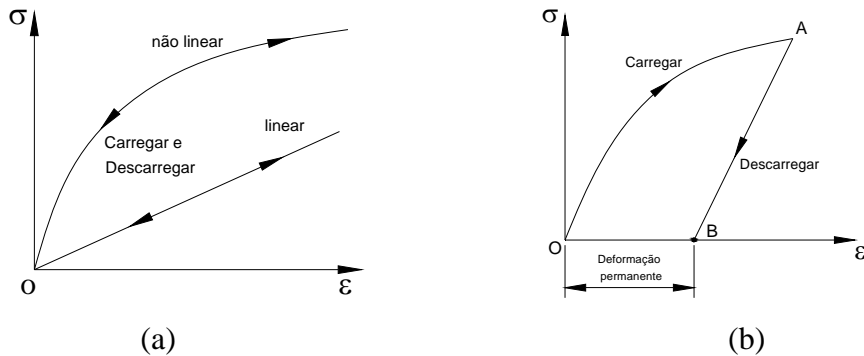


Figura 2.6: (a) Elasticidade linear e não linear. (b) Plasticidade.

Se ao descarregar apresentam deformação permanente, se pode dizer que tem comportamento plástico (Figura 2.6 b). Mas se ao descarregar a resposta do material voltar por outro caminho e após algum tempo retornar à sua configuração original o material tem comportamento viscoelástico, vide figura 2.7 (a). Mas se ao descarregar a tensão ainda mantiver uma deformação residual permanente o material é viscoplástico, vide figura 2.7 (b).

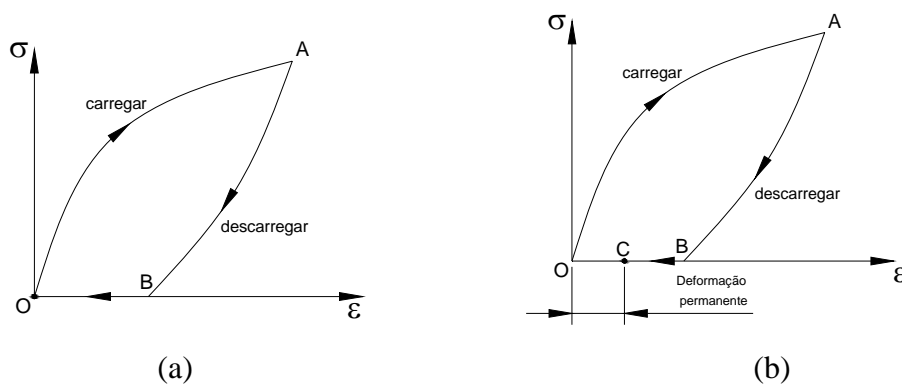


Figura 2.7: (a) Viscoelasticidade. (b) Viscoplasticidade.

2.4.1 Hiperelasticidade

Materiais hiperelásticos podem sofrer deformações da ordem de 100% ou mais e o comportamento do material é notadamente não linear. O comportamento do material é elástico (reversível), armazenando e recuperando energia potencial elástica respectivamente nos ciclos de carregamento e descarregamento do material. As relações constitutivas de materiais hiperelásticos podem ser expressas pela função de densidade de energia da deformação e a tensão no material pode ser calculada como a derivada da densidade de energia de deformação com respeito à deformação. Esta forma de solução é útil por duas razões: A primeira, a densidade de energia de deformação pode ser calculada utilizando o método termodinâmico, e a segunda, que a energia armazenada não depende da história do material, depende unicamente do estado de deformações imposto. Estas condições são importantes porque nos processos hiperelásticos o material não dissipa energia.

Dentre os principais modelos analíticos para materiais hiperelásticos é possível citar: Neo-Hookean, Ogden, Mooney-Rivlin, Arruda-Boyce, Yeoh, etc.

Antes de fazer menção a alguns modelos matemáticos, Cowin e Doty (2007) apresentam a densidade de energia de deformação por unidade de volume:

$$P(F) = \frac{\partial W(F)}{\partial F} \quad (2.1)$$

$$W(F) = \int_{\Gamma} P dF \quad (2.2)$$

Onde $P(F)$ é o primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff, $W(F)$ a densidade de energia de deformação, F o tensor do gradiente de deformação e Γ o caminho da deformação.

Para materiais isotrópicos a função da energia de deformação por unidade de volume pode ser representada pelos invariantes do tensor de Cauchy-Green.

$$W(C) = W(\bar{I}_1^C, \bar{I}_2^C, \bar{I}_3^C) \quad (2.3)$$

$$\bar{I}_1^C = \text{tr}(C) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2.4)$$

$$\bar{I}_2^C = \frac{1}{2} [\text{tr}(C^2) - \text{tr}(C)^2] = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} \quad (2.5)$$

$$\bar{I}_3^C = \det(C) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (2.6)$$

Onde $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ são alongamentos nas direções principais ($\lambda_x = \varepsilon_x + I$), C é o tensor de deformação de Cauchy-Green, ($C = FF^T$), $(\bar{I}_1^C, \bar{I}_2^C, \bar{I}_3^C)$ são os invariantes da deformação. Para materiais incompressíveis e isotrópicos ($\bar{I}_3^C = 1$), como descrito em Brown (2006). Para testes uniaxiais os alongamentos nas direções principais são expressos por:

$$\lambda_1 = \lambda \quad \wedge \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

2.4.1.1 Neo-Hookean

$$W = \frac{\mu}{2} (\bar{I}_1 - 3) \quad (2.7)$$

O parâmetro μ originalmente foi determinado de forma analítica de acordo com a formulação $\mu = \frac{1}{2} NKT$, onde N é o número de cadeias por unidade de volume, K é a constante de Boltzmann e T é a temperatura. Hoje em dia o coeficiente μ é determinado de forma experimental.

2.4.1.2 Mooney-Rivlin

$$W = \frac{\mu_1}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{\mu_2}{2} (\bar{I}_2 - 3) \quad (2.8)$$

Onde μ_1, μ_2 são as constantes do material determinadas experimentalmente. O modelo foi originalmente desenvolvido para materiais de borracha, hoje em dia é aplicado para materiais incompressíveis.

2.4.1.3 Ogden

No modelo do material de Ogden a densidade da energia de deformação é expressa em termos das elongações principais como:

$$W = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (2.9)$$

Onde N , μ_p e α_p são constantes do material. O módulo de cisalhamento é representado por:

$$2\mu = \sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p \quad (2.10)$$

Dependendo dos valores das constantes utilizadas no modelo de Ogden, podem-se reduzir os modelos Neo-Hookean ($N=1, \alpha=2$) e Mooney-Rivlin ($N=2, \alpha_1=2, \alpha_2=-2$).

2.4.1.4 Yeoh

O modelo matemático só tem validade para materiais de borracha incompressíveis, onde a densidade de energia de deformação é dependente do primeiro invariante de deformação, e os demais parâmetros são propriedades do material (μ_1, μ_2, μ_3).

$$W = \mu_1 (\bar{I}_1 - 3) + \mu_2 (\bar{I}_1 - 3)^2 + \mu_3 (\bar{I}_1 - 3)^3 \quad (2.11)$$

2.4.1.5 Arruda-Boyce

Nos polímeros o módulo de cisalhamento depende quase sempre das deformações. O modelo de Arruda-Boyce leva em consideração esta dependência, o modelo matemático é mostrado a seguir:

$$W = \mu_0 \sum_{p=1}^N \frac{C_p}{\lambda_{lock}^{2p-2}} \left[(\bar{I}_1)^p - 3^p \right] \quad (2.12)$$

Onde μ_0 é o módulo de cisalhamento, C_p são constantes obtidas de curvas estatísticas do material, λ_{lock} e N são constantes do material.

2.4.1.6 Blatz e Ko

Eles utilizam argumentos teóricos verificados por resultados experimentais em borrachas de poliuretano, para propor seu modelo matemático da densidade de energia de deformação:

$$W = \frac{\mu}{2}(\bar{I}_1 - 3) - \frac{\mu}{2\beta} \left[(\bar{I}_3)^{-\beta} - 1 \right] \quad (2.13)$$

Onde μ é o módulo de cisalhamento, β é dependente do coeficiente de Poisson ν , como é mostrado a seguir:

$$\beta = \frac{\nu}{1 - 2\nu} \quad (2.14)$$

No limite, considerando material incompressível $\bar{I}_3 = 1$ a equação (2.13) reduz ao modelo Neo-Hookean.

2.4.1.7 Polinomial

Para o modelo polinomial de borracha a densidade da energia de deformação é representada como:

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j \quad (2.15)$$

Onde C_{ij} e N são constantes do material.

2.4.2 Viscoelasticidade linear

A característica da resposta do material define as propriedades, sólida elástica ou líquida viscosa. Nos sólidos, o tempo de relaxação é muito grande. Nos líquidos, o tempo de relaxação é muito pequeno. A diferença de se considerar um material sólido ou líquido é muito subjetiva e usualmente o número de Deborah pode ser utilizado:

$$N_D = \frac{\tau}{\tau_{\text{exp}}} \quad (2.16)$$

Onde τ é o tempo de relaxação do material e τ_{exp} o tempo de observação. O número de Deborah $N_D \approx 0$ é considerado para líquidos viscosos e números de Deborah $N_D \rightarrow \infty$ é considerado para sólidos elásticos. O tempo de observação sempre está limitado à duração do ensaio, desde milésimo de segundos até infinito. Vide RIANDE et al. (2000).

A deformação elástica perfeita e o fluido viscoso perfeito são idealizações desenvolvidas com algumas limitações. Em forma geral, os materiais ao terem mudanças em suas estruturas produzidas pelas deformações, ou tensões contêm dentro deles funções memórias de suas respostas. Alguns materiais apresentam comportamento da tensão e deformação no domínio do tempo, como são os polímeros em forma geral. A esta característica física se denomina viscoelasticidade.

A viscoelasticidade linear exhibe respostas mecânicas de um fluido viscoso e de um sólido elástico: quando é submetido a cargas o material retorna à sua configuração original de forma lenta. Pode-se aplicar o princípio da superposição linear das cargas e respostas do material, descrito em MEDINA (2008).

2.4.3 Relaxação

Considere-se o histórico de deformação constante, a resposta da tensão é então dependente do tempo. A tensão cresce instantaneamente e logo começa a descer com o tempo até atingir um valor quase constante. Este comportamento é conhecido como relaxação de tensão (vide figura 2.8). O módulo de relaxação na viscoelasticidade linear

é representado como a tensão aplicada dividida pela deformação constante, onde este valor é único para qualquer porcentagem de deformações. Esta afirmação é definida apenas para a viscoelasticidade linear.

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (2.17)$$

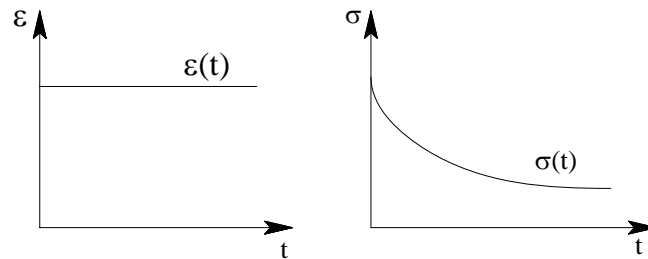


Figura 2.8: Comportamento da relaxação de tensão do material viscoelástico.

2.4.4 Fluência

Considere-se constante a tensão aplicada, o material agora responde instantaneamente a um valor de deformação, que logo aumenta progressivamente. A curva da deformação geralmente é dividida em três subdivisões. Fluência primária, fluência secundária e fluência terciária, como descrito em BETTEN (2005).

- **Fluência Primária.**

A fluência primária ou transiente é caracterizada por ter um decréscimo da taxa de deformação. No início tem-se uma taxa de deformação relativamente alta e logo atinge-se uma taxa de deformação constante.

- **Fluência Secundária.**

Nesta fase a taxa de deformação é constante e o material encontra-se em equilíbrio, como se pode apreciar na figura 2.9.

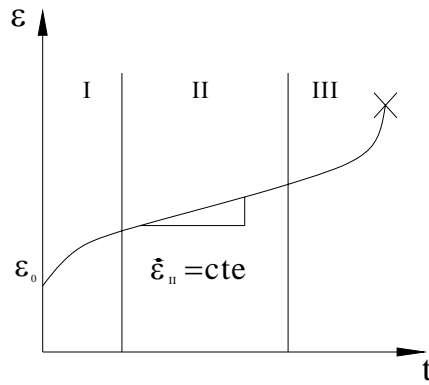


Figura 2.9: Curva de fluência típica.

- **Fluência Terciária.**

Nesta fase a taxa de deformação tende a aumentar com o decorrer do tempo, até acontecer a ruptura do material.

Algumas deformações produzidas pela fluência são reversíveis, ou seja, ao cessar a tensão o material consegue voltar a sua configuração original com o transcorrer do tempo, veja figura 2.10, onde dois incrementos instantâneos de deformação são aplicados.

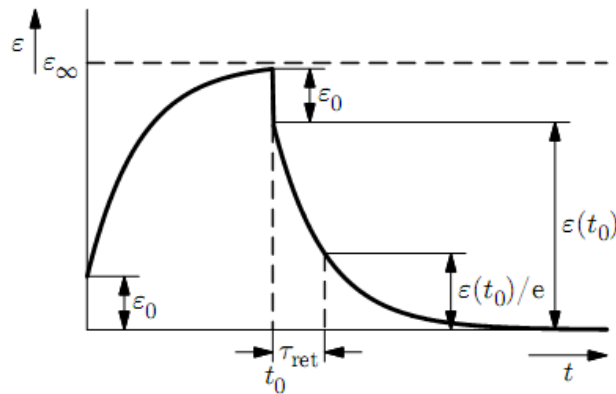


Figura 2.10: Resposta no tempo da deformação ao cessar a tensão.

Na viscoelasticidade linear o módulo de fluência é representado como a relação da deformação dividida pela tensão. A tensão é constante no domínio do tempo e a deformação resultante é a resposta do material.

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (2.18)$$

2.4.5 Equações constitutivas da viscoelasticidade linear

O modelo consiste na combinação de molas e amortecedores lineares, representando adequadamente o comportamento viscoelástico linear. A viscoelasticidade linear está baseada no princípio de superposição de Boltzmann que é a principal hipótese matemática.

Considere-se o histórico de deformação mostrado na figura 2.11, que é formado por incrementos de deformação. A tensão no instante qualquer “t”, mostrada na figura 2.12, é representada como a soma de todos os incrementos antes de relaxar, como se pode apreciar na equação (2.19).

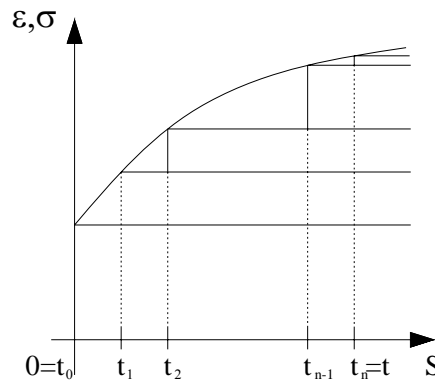


Figura 2.11: História de deformação e tensão por superposição de incrementos.

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)G(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \{ [\varepsilon(t_{k+1}) - \varepsilon(t_k)] G(t - t_{k+1}) \} \quad (2.19)$$

No intervalo de tempo $[t_k, t_{k+1}]$ a variação da deformação aproxima-se do diferencial da deformação, onde o intervalo de tempo tem que ser muito próximo um do outro. As equações (2.20) e (2.21) mostram esta aproximação.

$$\varepsilon(t_{k+1}) - \varepsilon(t_k) \approx \dot{\varepsilon}(s) ds \quad (2.20)$$

$$\dot{\varepsilon}(s) ds = d\varepsilon(s) \quad (2.21)$$

Substituindo as equações (2.20) e (2.21) na equação (2.19) e além disso aproximando o somatório pela integral, a tensão resulta em:

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)G(t) + \int_{0+}^t G(t-s)d\varepsilon(s) \quad (2.22)$$

A equação (2.22) é conhecida como a integral de Riemann-Stieltjes, e representa a equação de relaxação do material viscoelástico linear.

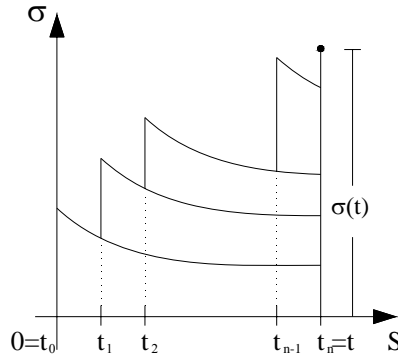


Figura 2.12: Aproximação da tensão por superposição devido à deformação.

No modelo, incrementos de deformação foram impostos para se avaliar a tensão, agora incrementos de tensão são aplicados ao material, como é mostrado na figura 2.11. Assim obtêm-se incrementos de deformação, e usando o princípio de superposição na deformação no instante “t”, obtém-se.

$$\varepsilon(t) = \sigma(0)J(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ [\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)] J(t - t_{k+1}) \right\} \quad (2.23)$$

Quando impõem-se incrementos de tensão no material, este começa a fluir, como ilustrado na figura 2.13. A variação do tempo no intervalo da tensão tem que tender a zero para se aproximar por diferenciais:

$$\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k) \approx \dot{\sigma}(s) ds \quad s \in [t_k, t_{k+1}] \quad (2.24)$$

$$\dot{\sigma}(s) ds = d\sigma(s) \quad (2.25)$$

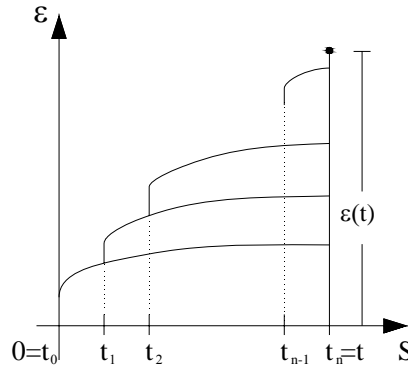


Figura 2.13: Aproximação da deformação por superposição da resposta do histórico de deformação.

Substituindo as equações (2.24) e (2.25) na equação (2.23), obtém-se a equação constitutiva da viscoelasticidade linear da deformação, em função do histórico de tensão e da propriedade de fluência do material:

$$\varepsilon(t) = \sigma(0)J(t) + \int_{0+}^t J(t-s)d\sigma(s) \quad (2.26)$$

2.4.6 Relação entre os módulos de fluência e de relaxação

A forma da equação constitutiva da viscoelasticidade linear é dada pelas equações (2.22) e (2.26). Estas equações dependem dos módulos de relaxação e de fluência, respectivamente. Substituindo-se um histórico de tensão constante na equação (2.26) obtém-se a deformação em função da tensão e do módulo de fluência:

$$\sigma(t) = \sigma_0 1(t) \Rightarrow \varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) \quad t \geq 0 \quad (2.27)$$

Substituindo este histórico de deformação na equação (2.22) obtém-se:

$$1 = J(0)G(t) + \int_0^t G(t-s)J(s)ds \quad (2.28)$$

Igualmente, impondo-se uma deformação constante na equação (2.22) obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 1(t) \Rightarrow \sigma(t) = \varepsilon_0 G(t) \quad t \geq 0 \quad (2.29)$$

Substituindo este histórico de tensão na equação (2.26) obtém-se:

$$1 = G(0)J(t) + \int_0^t J(t-s)\dot{G}(s)ds \quad (2.30)$$

As equações (2.28) e (2.30) representam a relação entre os módulos de relaxação e de fluência. Uma forma de poder se obter uma expressão analítica entre eles é através da transformada de Laplace de ambas as equações, chegando-se a uma equação algébrica que será de muita utilidade. Quando se conhece uma das funções é possível obter a outra:

$$L\{G(t)\}L\{J(t)\} = \frac{1}{s^2} \quad (2.31)$$

Onde s é o espaço de Laplace.

2.4.7 Alguns modelos matemáticos da viscoelasticidade linear

Uma forma de simular as propriedades mecânicas dos polímeros é representá-las por meio de molas e amortecedores, que são idealizações de um sólido elástico e um fluido viscoso. Estas combinações além de serem modelos simples que podem representar os módulos de fluência e de relaxação podem explicar o comportamento dos polímeros.

No presente trabalho serão apresentados os principais modelos.

2.4.7.1 Modelo de Maxwell

O modelo é formado pela combinação em série de uma mola e um amortecedor (figura 2.14), onde a tensão na mola é proporcional à deformação, sem ter deformações permanentes. A tensão no amortecedor é proporcional à taxa de deformação, portanto segue a lei de viscosidade de Newton.

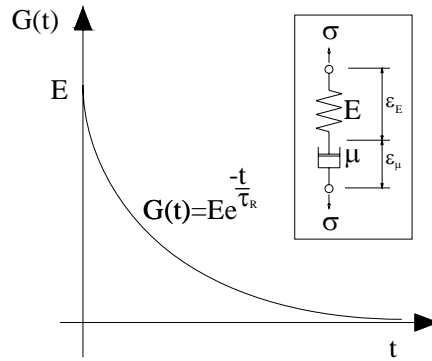


Figura 2.14: Função de relaxação de tensão do modelo de Maxwell

A deformação do conjunto é representada pela soma das deformações da mola e do amortecedor $\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_\mu(t)$. As tensões na mola e no amortecedor são respectivamente dadas por $\sigma_E(t) = E\varepsilon_E(t)$, $\sigma_\mu(t) = \mu\dot{\varepsilon}_\mu(t)$ e que são iguais à tensão equivalente, pois o sistema encontra-se em série, ($\sigma(t) = \sigma_E(t) = \sigma_\mu(t)$). Igualando e rearranjando as equações anteriormente descritas obtém-se a equação diferencial que domina este fenómeno.

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\mu} \quad (2.32)$$

Para se obter o módulo de relaxação do modelo de Maxwell toma-se o histórico de deformação constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, no domínio do tempo. No início, a deformação só é dada pela mola, isto é $\sigma(0^+) = E\varepsilon_0$. Integrando a equação (2.32) e tomando as condições iniciais mencionadas o módulo de relaxação resulta:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = Ee^{-t/\tau} \quad (2.33)$$

Onde $\tau = \mu/E$, é o tempo de relaxação, que mostra a rapidez com que a tensão relaxa, como pode ser mostrado na figura 2.14.

Para se obter a função de fluência considera-se o histórico de tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0$, e como no caso anterior $\varepsilon(0^+) = \sigma_0/E$, só a mola consegue ter deformação

no tempo (0^+). Integrando a equação (2.32) e considerando as condições antes descritas o módulo de fluência resulta em:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} + \frac{t}{\mu} \quad (2.34)$$

2.4.7.2 Modelo de Voigt-Kelvin

O modelo é formado pela combinação em paralelo de uma mola linear e um amortecedor, como é apresentado na figura 2.15.

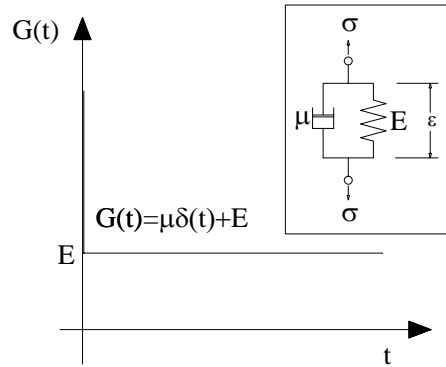


Figura 2.15: Função de relaxação de tensão do modelo de Voigt-Kelvin.

A deformação imposta ao modelo é a mesma deformação na mola e no amortecedor, por compatibilidade $\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) = \varepsilon_\mu(t)$, devido a que se encontra em paralelo, ver figura 2.15. A tensão no modelo é igual à soma das tensões produzidas por cada elemento $\sigma(t) = \sigma_E(t) + \sigma_\mu(t)$, e as tensões na mola e no amortecedor são respectivamente $\sigma_E(t) = E\varepsilon_E(t)$ e $\sigma_\mu(t) = \mu\dot{\varepsilon}_\mu(t)$. Rearranjando as equações descritas obtém-se a equação diferencial do modelo:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \mu\dot{\varepsilon}(t) \quad (2.35)$$

Para se obter o módulo de relaxação toma-se o histórico de deformação constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, no domínio do tempo. No tempo (0^+) a tensão é dada por $\sigma(t) = \mu\varepsilon_0\delta(t)$,

devido a se precisar de uma tensão muito alta instantaneamente. Integrando-se a equação (2.35) e tomando as condições iniciais obtém-se o módulo de relaxação de tensão:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \mu\delta(t) + E \quad (2.36)$$

Onde $\delta(t)$ é o delta de Dirac. No início, para se manter uma deformação constante é preciso uma tensão “infinita”, que logo cai instantaneamente para manter uma deformação constante. A figura 2.15 mostra a curva de relaxação.

Para se obter o módulo de fluência, impõe-se uma tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0$, e integra-se a equação diferencial (2.35) considerando as condições iniciais, obtendo-se:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{tE}{\mu}} \right) \quad (2.37)$$

2.4.7.3 Modelo Sólido Linear Padrão (SLP)

Existem na bibliografia dois modelos que são conhecidos como Sólido Linear Padrão, o modelo Poynting-Thomson e Zener, vide figuras 2.16 e 2.18, conforme Nielsen (2005) e Ju & Liu (2002), estes modelos apresentam a mesma formulação matemática do módulo de relaxação e fluência $G(t) = G_\infty + (G_0 - G_\infty)e^{-t/\tau}$ e $J(t) = J_\infty + (J_0 - J_\infty)e^{t/\tau}$, respectivamente.

- Modelo de Poynting-Thomson

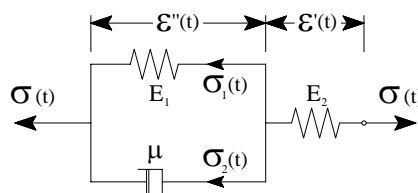


Figura 2.16: Modelo Poynting-Thomson.

O modelo é um arranjo do modelo de Voigt-Kelvin em série com uma mola linear, onde a tensão ou deformação imposta é igual à soma da resposta de cada elemento, como é mostrado nas equações (2.38) e (2.39).

$$\varepsilon(t) = \varepsilon'(t) + \varepsilon''(t) \quad (2.38)$$

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t) \quad (2.39)$$

As equações constitutivas da mola e amortecedor são substituídas nas equações (2.38) e (2.39) após fazer manipulações algébricas obtém-se a equação diferencial que controla o movimento:

$$\mu \dot{\sigma}(t) + \sigma(t)(E_2 + E_1) = E_1 \mu \dot{\varepsilon}(t) + E_1 E_2 \varepsilon(t) \quad (2.40)$$

Para se obter o módulo de relaxação ou fluência impõe-se uma deformação constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ ou tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0$, respectivamente, que será substituída na equação diferencial (2.40) e integra-se posteriormente obtendo-se os módulos de relaxação e de fluência, vide figura 2.17.

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \left[1 + \frac{E_1}{E_2} e^{-\left(\frac{E_2 + E_1}{\mu}\right)t} \right] \quad (2.41)$$

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_2} e^{-\left(\frac{E_2}{\mu}\right)t} \quad (2.42)$$

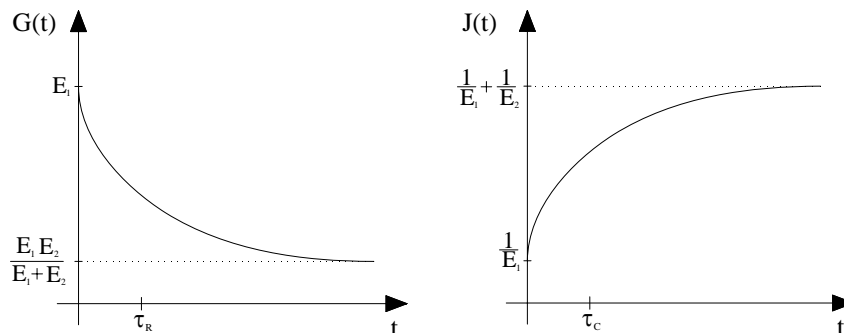


Figura 2.17: Módulos de relaxação e de fluência.

- Modelo Zener

A representação do modelo Zener é do modelo Maxwell em paralelo com uma mola linear. Na figura 2.18 são representadas as deformações e tensões produzidas em cada elemento do modelo.

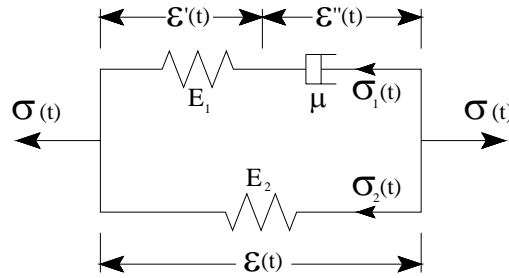


Figura 2.18: Modelo Zener.

A tensão imposta ao modelo é igual à soma das tensões, a deformação no modelo é igual à deformação do modelo Maxwell é à deformação na mola linear por compatibilidade, devido a encontrarem-se em paralelo.

Substituindo as deformações e tensões das molas e amortecedor nas equações (2.38) e (2.39), arranjando e fazendo manipulações algébricas adequadamente, se chega à equação diferencial (2.43), que é a equação diferencial do movimento.

$$\dot{\sigma}(t) + \frac{E_1}{\mu} \sigma(t) = \dot{\varepsilon}(t)(E_2 + E_1) + \frac{E_1 E_2}{\mu} \varepsilon(t) \quad (2.43)$$

Para se obter o módulo de relaxação toma-se o histórico de deformação constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ no domínio do tempo. No início do tempo (0^+) a tensão é dada por $\sigma(0) = (E_2 + E_1)\varepsilon_0$, que é a condição inicial pra desenvolver a equação diferencial (2.43). Integra-se a equação (2.43) e considerando as condições iniciais antes descritas, o módulo de relaxação resulta em:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = E_1 e^{-\left(\frac{E_1}{\mu}\right)t} + E_2 \quad (2.44)$$

Para se obter o módulo de fluência, impõe-se uma tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0$, na equação (2.43) e integra-se, (figura 2.19) obtendo-se:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{E_2} + \left(\frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_2} \right) e^{-t \frac{E_1 E_2}{\mu (E_1 + E_2)}} \quad (2.45)$$

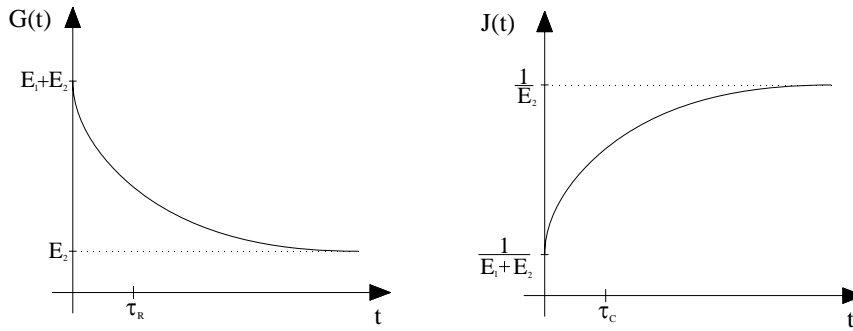


Figura 2.19: Módulos de relaxação e de fluência.

2.4.7.4 Modelo Lethersich

O modelo de Lethersich é representado pelo modelo Voigt-Kelvin em série com um amortecedor, como descrito em NIELSEN (2005), o modelo é representado na figura 2.20, com suas tensões e deformações.

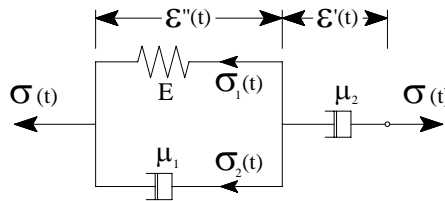


Figura 2.20: Modelo Lethersich.

As equações constitutivas da mola e dos amortecedores representadas da figura 2.20 serão substituídas nas equações (2.38) e (2.39), e com ajuda da figura 2.14 será desenvolvido o modelo de Lethersich, obtendo-se:

$$\dot{\sigma}(t)(\mu_1 + \mu_2) + E\sigma(t) = \mu_1\mu_2\ddot{\varepsilon}(t) + E\mu_2\dot{\varepsilon}(t) \quad (2.46)$$

A condição inicial do modelo no domínio do tempo (0^+) é importante devido a conter dois amortecedores, ao impor uma deformação constante diferente de zero, se precisará, para movimentá-la uma tensão “infinita” instantaneamente.

Para se obter o módulo de fluência impõe-se deformação constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, para se desenvolver a tensão esta será separada em duas parcelas, uma no início ($t=0^+$) e outra para tempos maiores que zero ($t > 0$). No início, a equação (2.46) é integrada onde os limites do intervalo de integração são $[0^- : 0^+]$, a tensão obtida é $\sigma(t) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \varepsilon(0^+) \delta(t)$, para tempos maiores o histórico de deformação é substituído na equação (2.46) obtendo-se esta tensão, e juntando-se ambas as tensões obtêm-se:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left[\delta(t) + \frac{E(2\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)} e^{-\left(\frac{E}{\mu_1 + \mu_2}\right)t} \right] \quad (2.47)$$

Para se obter o módulo de relaxação impõe-se uma tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0$, que será substituída na equação diferencial (2.46) e integra-se para se obter o módulo de relaxação:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{t}{\mu_2} + \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{tE}{\mu_1}} \right) \quad (2.48)$$

2.4.7.5 Modelo de Burgers

O modelo de Burgers é representado pela combinação do modelo Voigt-Kelvin em série com o modelo de Maxwell, o modelo é representado na figura 2.21. A deformação é igual às somas parciais de cada elemento, do modelo de Voigt-Kelvin e do Maxwell, que estão representadas separadamente.

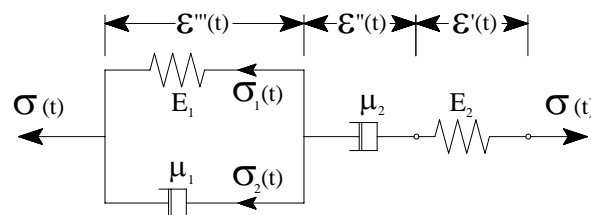


Figura 2.21: Modelo Burgers.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon'(t) + \varepsilon''(t) + \varepsilon'''(t) \quad (2.49)$$

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t) \quad (2.50)$$

As equações constitutivas das molas e dos amortecedores representadas na figura 2.22 serão substituídas adequadamente nas equações (2.49) e (2.50), para se obter a equação diferencial (2.51):

$$\left(\frac{\mu_1}{E_1}\right)^2 \ddot{\sigma}(t) + (m_{B1} + m_{B2}) \left(\frac{\mu_1}{E_1}\right) \dot{\sigma}(t) + m_{B1} m_{B2} \sigma(t) = E_2 \left[\left(\frac{\mu_1}{E_1}\right)^2 \ddot{\varepsilon}(t) + \left(\frac{\mu_1}{E_1}\right) \dot{\varepsilon}(t) \right] \quad (2.51)$$

Onde:

$$m_{B1} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\mu_1 E_2}{E_1 \mu_2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\mu_1 E_2}{E_1 \mu_2} \right)^2 - 4 \frac{\mu_1 E_2}{E_1 \mu_2}} \right] \quad (2.52)$$

Para se obter o módulo de relaxação e de fluência impõe-se uma deformação constante $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ e tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0$ respectivamente, que serão substituídas adequadamente na equação diferencial (2.51), integra-se posteriormente e obtém-se os módulos de relaxação e de fluência.

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{t}{\mu_2} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \left[1 - e^{-\left(\frac{E_1}{\mu_1}\right)t} \right] \quad (2.53)$$

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \frac{E_1}{m_{B1} - m_{B2}} \left[(m_{B1} - 1) e^{-t \left(\frac{m_{B1} E_1}{\mu_1}\right)} - (m_{B2} - 1) e^{-t \left(\frac{m_{B2} E_1}{\mu_1}\right)} \right] \quad (2.54)$$

2.4.7.6 Modelos de Maxwell generalizados

O modelo de Maxwell generalizado é representado através de uniões em paralelo e em série do modelo, obtendo-se novas equações constitutivas. Para o modelo de Maxwell em série, as equações constitutivas podem ser representadas por:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\sigma}(t) \sum_{i=1}^N \frac{1}{E_i} + \sigma(t) \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mu_i} \quad (2.55)$$

O modelo de Maxwell generalizado em paralelo pode ser representado como:

$$\left[\left(\frac{D}{E_1} + \frac{1}{\mu_1} \right) \left(\frac{D}{E_2} + \frac{1}{\mu_2} \right) \left(\frac{D}{E_3} + \frac{1}{\mu_3} \right) \dots \right] \sigma(t) = \left[D \left(\frac{D}{E_2} + \frac{1}{\mu_2} \right) \left(\frac{D}{E_3} + \frac{1}{\mu_3} \right) \left(\frac{D}{E_4} + \frac{1}{\mu_4} \right) \dots + D \left(\frac{D}{E_1} + \frac{1}{\mu_1} \right) \left(\frac{D}{E_3} + \frac{1}{\mu_3} \right) \left(\frac{D}{E_4} + \frac{1}{\mu_4} \right) \dots + \dots \right] \varepsilon(t) \quad (2.56)$$

Onde D é o operador diferencial com relação ao tempo $\left(D = \frac{d}{dt} \right)$.

2.4.7.7 Modelos de Voigt-Kelvin generalizados

O modelo de Voigt-Kelvin generalizado é representado através de uniões em paralelo e em série, obtendo-se novas equações constitutivas. Para o modelo de Voigt-Kelvin em paralelo, as equações constitutivas podem ser representadas por:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) \sum_{i=1}^N E_i + \dot{\varepsilon}(t) \sum_{i=1}^N \mu_i \quad (2.57)$$

O modelo de Voigt-Kelvin generalizado em serie pode ser representado como:

$$\left[(D\mu_1 + E_1)(D\mu_2 + E_2)(D\mu_3 + E_3) \dots \right] \varepsilon(t) = \left[(D\mu_2 + E_2)(D\mu_3 + E_3)(D\mu_4 + E_4) \dots + (D\mu_1 + E_1)(D\mu_3 + E_3)(D\mu_4 + E_4) \dots + \dots \right] \sigma(t) \quad (2.58)$$

2.4.7.8 Série de Prony

A série de Prony é representada por somas de exponenciais, como é mostrado na equação (2.59). Este somatório de exponenciais representa de maneira uniforme e adequada o comportamento dos fenômenos de relaxação e fluência para a maioria dos materiais viscoelásticos lineares.

$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-t}{\tau_i}} \quad (2.59)$$

Os módulos de relaxação e de fluência dos modelos generalizados de Maxwell em paralelo e Voigt-Kelvin em série podem ser representados pela equação (2.59).

2.4.8 Resposta dinâmica do material viscoelástico linear

Quando tensão ou deformação são impostas no domínio do tempo ao material, este exibe resposta viscoelástica, muda seu comportamento até que o material se estabiliza. O tempo necessário para estabilização da resposta é muito variável (minutos, horas, dias, etc.), esta resposta depende do material, da temperatura do ensaio e outras considerações.

Quando impõe-se uma deformação harmônica, estas funções são periódicas no domínio do tempo, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t} = \varepsilon_0 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)]$. Por conveniência a representação por números complexos será utilizada. Só será considerada a parte real ou imaginária, dependendo da deformação imposta. O módulo de relaxação pode ser aproximado por, $G(t) = G(\infty) + \Delta G(t)$ que substituído na equação (2.22), e após manipulações algébricas resulta em:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [G'(\omega) + iG''(\omega)] [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \quad (2.60)$$

Onde, ω é a frequência da função harmônica, $G'(\omega)$ é denominado módulo de armazenamento e $G''(\omega)$ denominado módulo de perda, dados por:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta G(t) &= 0 \\ G'(\omega) &= \lim_{t \rightarrow \infty} G'(\omega, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[G(\infty) + \omega \int_0^t \Delta G(s) \sin(\omega s) ds \right] \\ G''(\omega) &= \lim_{t \rightarrow \infty} G''(\omega, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\omega \int_0^t \Delta G(s) \cos(\omega s) ds \right] \end{aligned} \quad (2.61)$$

O material relaxa constantemente, mas no tempo “infinito” ele se estabiliza.

O coeficiente $G^*(\omega)$ é denominado módulo complexo, e definido pela relação:

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) = |G^*(\omega)| e^{i\delta(\omega)} \quad (2.62)$$

Substituindo a equação (2.62) em (2.60) pode-se ver que a deformação imposta e a tensão obtida estão defasadas por $\delta(\omega)$ que depende só da frequência de excitação.

$$\sigma(t) = G^*(\omega) \varepsilon_0 e^{i\omega t} = |G^*(\omega)| \varepsilon_0 e^{i[\delta(\omega) + \omega t]} \quad (2.63)$$

De igual forma é possível impor um carregamento de tensão harmônica, $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$. Assumindo-se que o módulo de fluência tem a forma analítica $J(t) = \frac{t}{\mu} + J_0(\infty) - \Delta J(t)$, substitui-se estas duas equações em (2.26), e fazendo manipulações algébricas e arranjando adequadamente obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 [J'(\omega) + iJ''(\omega)] [\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)] \quad (2.64)$$

Onde:

$$\begin{aligned} J'(\omega) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[J_0(\infty) - \omega \int_0^t \Delta J(s) \operatorname{sen}(\omega s) ds \right] \\ J''(\omega) &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\mu\omega} + \omega \int_0^t \Delta J(s) \cos(\omega s) ds \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

Como no caso anterior, no tempo infinito o material se estabiliza e não apresenta mudanças de fluência. O coeficiente $J^*(\omega)$ é denominado complacência complexa:

$$J^*(\omega) = J'(\omega) + iJ''(\omega) = |J^*(\omega)| e^{-i\alpha(\omega)} \quad (2.66)$$

Substituindo a equação (2.66) em (2.64) pode-se ver que a tensão imposta e a deformação obtida estão defasadas por $\alpha(\omega)$ que só depende da frequência de excitação:

$$\varepsilon(t) = J^*(\omega) \sigma_0 e^{i\omega t} = |J^*(\omega)| \varepsilon_0 e^{i[-\alpha(\omega) + \omega t]} \quad (2.67)$$

Deve-se ressaltar que considera-se material viscoelástico linear, e que não ocorrem mudanças de temperatura. Assim como existe uma relação matemática entre os módulos de fluência e de relaxação no domínio do tempo, pode-se obter também uma relação entre o módulo complexo e a complacência complexa, que seriam suas respectivas equivalências no domínio da frequência.

$$J^*(\omega) G^*(\omega) = 1 \quad (2.68)$$

A série de Prony da equação (2.59) depende do tempo, mas pode ser representada em função da frequência. O módulo de relaxação pode ser escrito de forma simplificada como $G(t) = G(\infty) + \Delta G(t)$, e igualando esta forma com a equação (2.59) obtém-se:

$$\begin{aligned} G(\infty) &= E_0 \\ \Delta G(t) &= \sum_{i=1}^N E_i e^{\frac{-t}{\tau_i}} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Substituindo a equação (2.69) em (2.49) tem-se os módulos de armazenamento e de perda, respectivamente:

$$G'(\omega) = E_0 + \sum_{i=1}^N \frac{E_i (\omega \tau_i)^2}{1 + (\omega \tau_i)^2} \quad (2.70)$$

$$G''(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{E_i (\omega \tau_i)}{1 + (\omega \tau_i)^2} \quad (2.71)$$

2.4.8.1 Trabalho por período devido a carregamento senoidal

O trabalho por unidade de volume é igual à integral da tensão multiplicada pela taxa da deformação durante um período. Devido a um carregamento de deformação $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \text{sen}(\omega t)$ pode-se escrever o trabalho como:

$$W(\omega) = \int_t^{t+2\pi/\omega} \sigma(s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds \quad (2.72)$$

Substituindo a deformação e a tensão, (equação 2.60), e tomando apenas a parte imaginária da equação, obtém-se:

$$W(\omega) = \varepsilon_0^2 \omega \int_t^{t+2\pi/\omega} [G'(\omega) \text{sen}(\omega s) + G''(\omega) \text{cos}(\omega s)] \text{cos}(\omega s) ds \quad (2.73)$$

Integrando-se a equação (2.73), o trabalho por unidade de volume resulta em:

$$W(\omega) = \varepsilon_0^2 \pi G''(\omega) \quad (2.74)$$

De igual forma se for imposto um histórico de deformação $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \text{cos}(\omega t)$, chega-se à mesma equação do trabalho. O trabalho é diretamente proporcional ao módulo de perda.

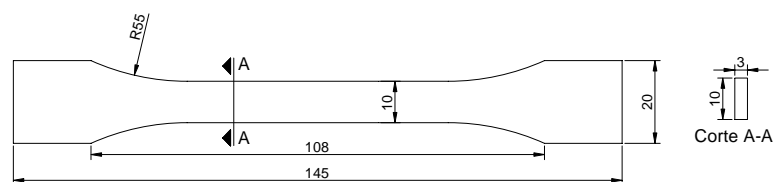
Capítulo 3

Caracterização experimental do poliuretano

O objetivo do ensaio experimental realizado no presente trabalho é conhecer as propriedades de fluência e relaxação do poliuretano, que não estão plenamente desenvolvidas na literatura. Nosso ensaio considerou-se apenas a resposta do poliuretano nos primeiros segundos à temperatura ambiente. Em ensaios de fluência ou relaxação, os tempos de duração do ensaio são de horas, dias e até meses, até que o material não apresente mais mudanças de deformação ou tensão, respectivamente.

O ensaio fornece a curva de fluência, e esta curva será ajustada pela série de Prony, que são funções exponenciais que dependem do tempo e possuem um termo independente. Este termo é muito importante já que é a resposta do material no tempo infinito (pode ser dias ou meses). Obtida a série de Prony pode-se representá-la no domínio da frequência, que é matéria do presente trabalho. Assim, é possível determinar em que faixa de frequência o material apresenta maior perda de energia.

O ensaio de fluência foi feito usando a norma ASTM D2990 e ASTM D412, e o corpo de prova é mostrado na figura 3.1. O ensaio foi desenvolvido na Máquina Universal Instron modelo 5567, pertencente ao Laboratório de Polímeros do Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais, e para medir as deformações uniaxiais usou-se um *clip gage* Instron. A máquina Instron armazena o histórico de forças, tensões, deformações e deslocamentos em cada passo de tempo.



OBS. : dimensões em milímetros

Figura 3.1: Corpo de prova para ensaio de fluência

Para fazer o ensaio de “fluência” precisa-se manter a tensão constante durante todo o ensaio. No ensaio impõe-se diferentes tensões e obtém-se suas deformações respectivas, que serão as respostas do material em cada passo de tempo. No entanto, como não é possível se obter uma tensão constante instantaneamente (limitação experimental) é então preciso impor carregamento de tensão tipo rampa (Figura 3.2).

O carregamento de tensão tipo rampa é útil para ver o comportamento do poliuretano nos primeiros segundos, quando o material apresenta grandes (rápidas) mudanças na resposta (deformação).

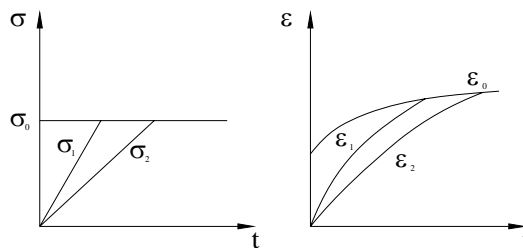


Figura 3.2: Histórico de tensão e deformação

Para este ensaio foram utilizados dois carregamentos de tensão com três níveis de velocidades do travessão (ver tabela 3.1). A análise está focada nos primeiros segundos da resposta, pois deseja-se captar termos da série de Prony na faixa de frequência de excitação do mar. O tempo do ensaio foi de 900 segundos aproximadamente.

Foram realizados nove ensaios de fluência em três corpos de prova de mesmas características geométricas, ou seja, foram executados três testes por cada corpo de prova, sendo que o primeiro teste de cada corpo de prova foi considerado válido. Os demais testes mostraram deformações excessivas, pois o corpo de prova ainda não havia retornado à sua configuração inicial, (na resposta viscoelástica a sua forma original é recuperada de forma muito lenta).

Tabela 3.1: Ensaios realizados

Teste	Tensão (MPa)	Velocidade ($\frac{mm}{min}$)
01	2,60	50
02	2,62	100
03	2,62	500

No início dos ensaios as curvas de tensão no domínio do tempo apresentam oscilações, quando atinge o nível de tensão desejável. Com cerca de 15 segundos, aproximadamente, a tensão de ensaio fica quase estável (figura 3.3).

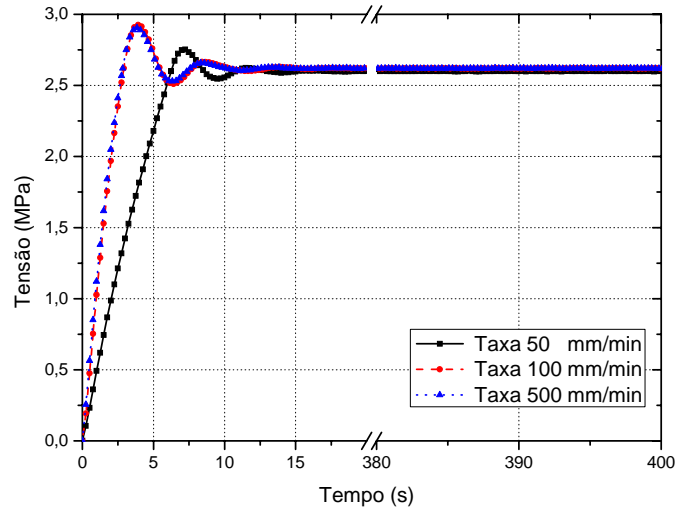


Figura 3.3: Histórico de tensão no domínio do tempo.

As respostas da deformação também têm oscilações no mesmo intervalo de tempo, só que estas oscilações encontram-se fora de fase com respeito à tensão, o que é esperado na teoria da viscoelasticidade. Com cerca de 15 segundos aproximadamente esta deformação começa a crescer sem oscilações (figura 3.4).

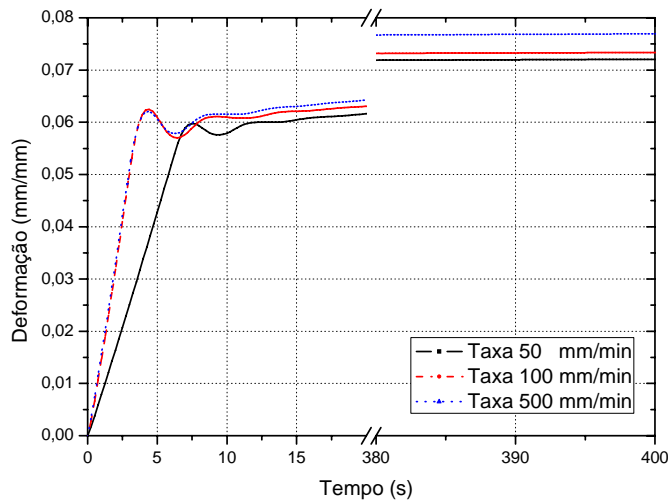


Figura 3.4: Histórico de deformação no domínio do tempo.

Obtidos os históricos de tensões e deformações, e assumindo que o material tem resposta viscoelástica linear, é possível realizar um ajuste numérico para obtenção das curvas de fluência e relaxação.

3.1. Ajuste do teste pela teoria viscoelástica linear

O teste anteriormente descrito será ajustado pela série de Prony com ajuda da teoria da viscoelasticidade linear. O teste de fluência diz que a tensão deve ser constante ao longo de todo o ensaio, mas como na prática isso é impossível, foi escolhido o carregamento tipo rampa.

Com uma mudança de variável a equação (2.26) que mostra a função de fluência, pode ser reescrita como:

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma(0) + \int_{0^+}^t J(\psi)D\sigma(t-\psi)d\psi \quad (3.1)$$

Onde: $D\sigma(t) = \frac{\partial\sigma(t)}{\partial t}$

No início do ensaio a integral da equação (3.1) é nula e a função de fluência é:

$$J(0) = \frac{\varepsilon(0)}{\sigma(0)} \quad (3.2)$$

A tensão do ensaio não é constante nos primeiros segundos, então pode-se aproximar a integral da equação (3.1) em somatórios com ajuda da regra dos trapézios, para se obter a função de fluência de forma explícita, que só dependam da deformação e tensão. Para que a função de fluência seja aproximada, é preciso conhecer a resposta sempre em um passo anterior do ponto de análise, isto será feito até cobrir todo o intervalo de tempo de duração o ensaio.

Para tempos maiores de zero ($t > 0$) será utilizada a aproximação da função de fluência:

$$J(t) = \frac{1}{2\sigma(0) + \Delta\psi \cdot D\sigma(0)} \left\{ 2\varepsilon(t) + J(0) \cdot \Delta\psi \cdot D\sigma(t) - 2\Delta\psi \sum_{i=0}^{\frac{t}{\Delta\psi}-1} J[\Delta\psi(i)] D\sigma[t - \Delta\psi(i)] \right\} \quad (3.3)$$

Com ajuda das equações (3.2) e (3.3) obtém-se a curva de fluência do ensaio dos corpos de prova. Obtidas as curvas experimentais de fluência, ajusta-se cada teste pela série de Prony. O número de termos da série dependerá da minimização do erro da curva experimental. Serão utilizados quatro termos já que o ensaio foi de pouco tempo de duração. São três funções exponenciais mais um termo constante independente do tempo:

$$J(t) = Ec_0 + Ec_1 e^{\frac{-t}{\tau_{c1}}} + Ec_2 e^{\frac{-t}{\tau_{c2}}} + Ec_3 e^{\frac{-t}{\tau_{c3}}} \quad (3.4)$$

Fazendo o ajuste por uma regressão não linear, obtém-se os valores da série de Prony. A tabela 3.2 mostra os três ajustes dos ensaios experimentais. Obtidas as funções, pode-se mostrá-las graficamente para cada ensaio experimental com seu respectivo ajuste para as velocidades de deformação de 50, 100 e 500 (mm/min), vide figuras 3.5 a 3.7. Na figura 3.8 são mostradas as três funções de fluência ajustadas.

Tabela 3.2: Coeficientes da série de Prony (Fluência)

Taxa de deformação	$Ec_0 (MPa^{-1})$	$Ec_1 (MPa^{-1})$	$Ec_2 (MPa^{-1})$	$Ec_3 (MPa^{-1})$	$\tau_{c1} (s)$	$\tau_{c2} (s)$	$\tau_{c3} (s)$
50	0,02970	-0,009924	-0,002558	-0,004163	2,1465	30,7908	335,514
100	0,02915	-0,010843	-0,002811	-0,003782	1,4484	32,4767	332,346
500	0,03082	-0,011990	-0,003378	-0,004734	1,4142	32,8586	332,510

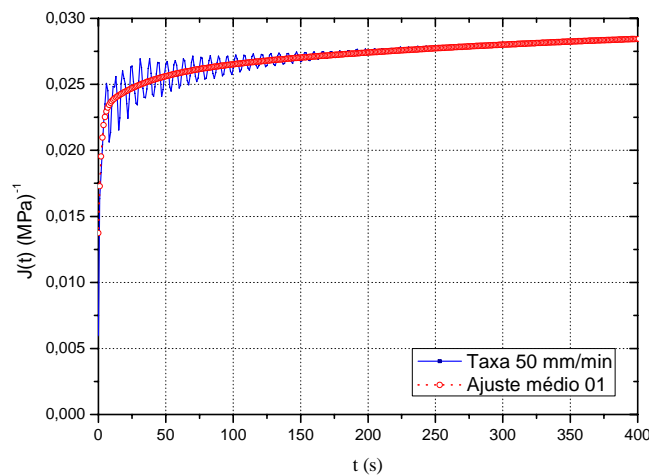


Figura 3.5: Função de fluência, com velocidade de deformação de 50 (mm/min)

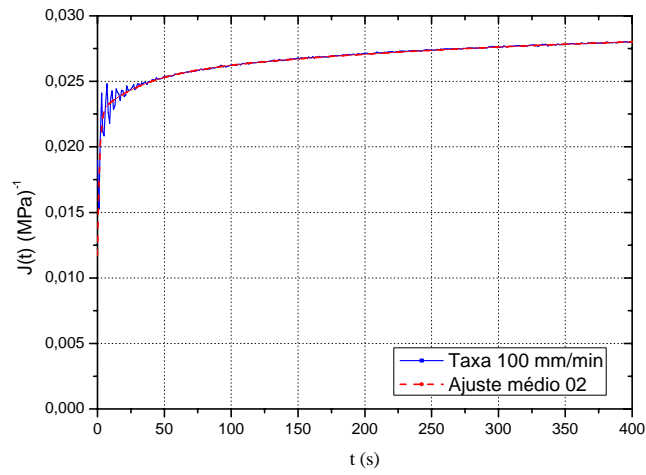


Figura 3.6: Função de fluência, com velocidade de deformação de 100 (mm/min)

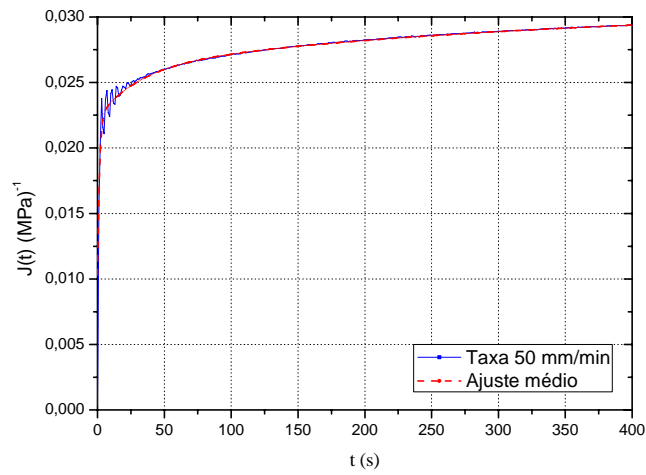


Figura 3.7: Função de fluência, com velocidade de deformação de 500 (mm/min)

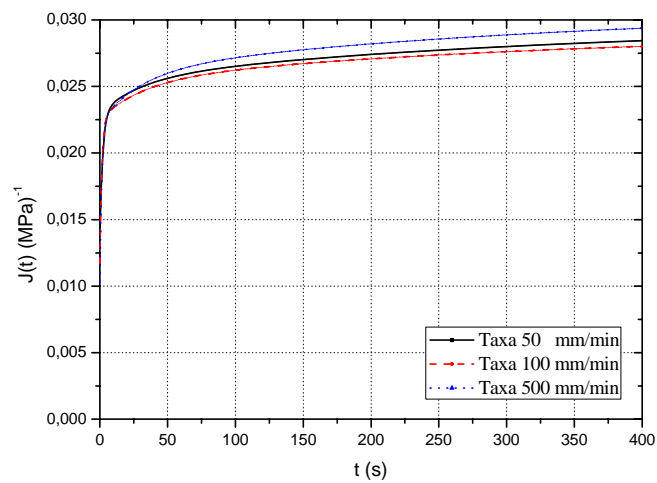


Figura 3.8: Função de fluência dos três testes

Conhecendo a função de fluência é possível se obter a função de relaxação no domínio do tempo, substituindo-se a transformada de Laplace da função de fluência na equação (2.31), após manipulações algébricas, tomando-se a inversa de Laplace:

$$G(t) = Er_0 + Er_1 e^{\frac{-t}{\tau_{r1}}} + Er_2 e^{\frac{-t}{\tau_{r2}}} + Er_3 e^{\frac{-t}{\tau_{r3}}} \quad (3.5)$$

Os coeficientes da série de Prony das três funções de relaxação são apresentados na tabela 3.3.

Tabela 3.3: Coeficientes da série de Prony (relaxação)

Taxa de deformação	Er_0 (MPa)	Er_1 (MPa)	Er_2 (MPa)	Er_3 (MPa)	τ_{r1} (s)	τ_{r2} (s)	τ_{r3} (s)
50	33,6655	33,4121	4,17558	5,32768	1,215	27,761	289,079
100	34,3053	41,3041	4,80277	4,95202	0,75	28,908	289,826
500	32,4517	49,6457	5,58789	5,66760	0,665	28,631	282,247

As curvas das funções de relaxação são mostradas na figura 3.9. Pode-se apreciar que o material mudou seu modo de relaxação nos primeiros segundos para logo descer de forma progressiva. O material não se estabiliza no tempo de 400 segundos, pois o material ainda está relaxando, este teste tem que ser feito em muitas horas ou até mesmo dias.

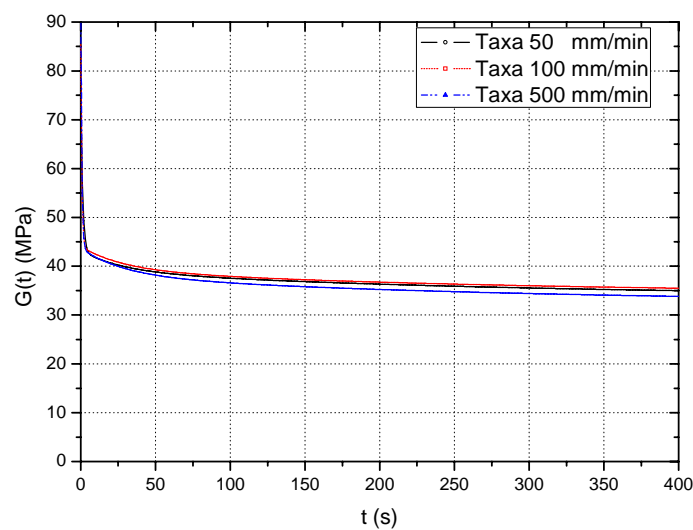


Figura 3.9: Funções de relaxação ajustadas dos três testes.

As funções de fluência e de relaxação utilizada na presente dissertação será de 100 (mm/min) (vide figuras 3.8 e 3.9).

3.2. Resposta viscoelástica linear do poliuretano no domínio da frequência

Para se obter a função de relaxação no domínio da frequência, o módulo de relaxação pode ser aproximado por $G(t)=G(\infty)+\Delta G(t)$, onde:

$$G(\infty) = Er_0 \quad (3.6)$$

$$\Delta G(t) = Er_1 e^{\frac{-t}{\tau_{r1}}} + Er_2 e^{\frac{-t}{\tau_{r2}}} + Er_3 e^{\frac{-t}{\tau_{r3}}} \quad (3.7)$$

Os coeficientes da série de Prony que serão utilizados correspondem à velocidade de 100 (mm/min), tabela 3.3.

Substituindo as equações (3.6) e (3.7) em (2.70) e (2.71), obtém-se os módulos de armazenamento e perda respectivamente, vide figura 3.10. Observa-se que o material dissipa bastante energia na faixa de atuação das ondas do mar, $0,05 \text{ Hz} \leq f \leq 0,25 \text{ Hz}$.

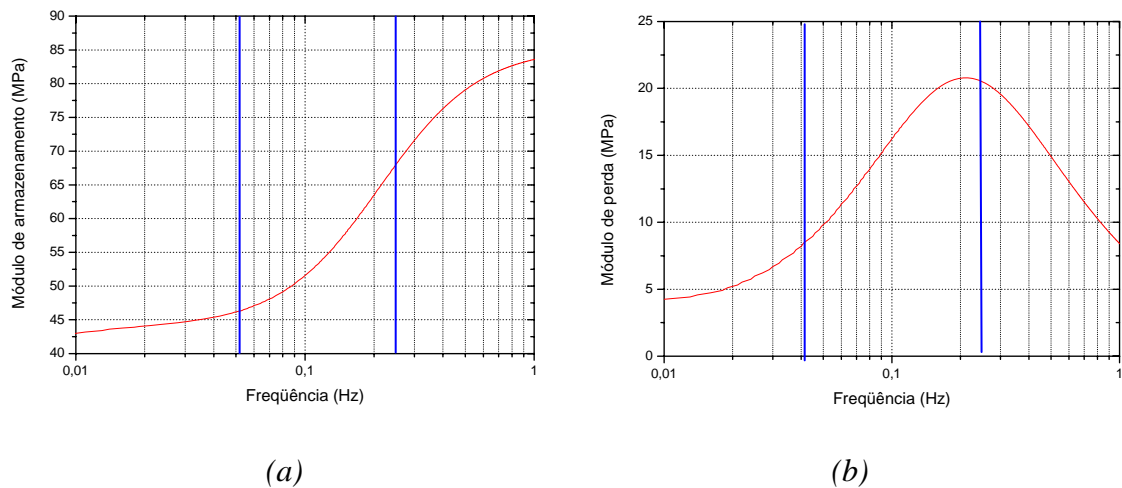


Figura 3.10: (a) Módulo de armazenamento. (b) Módulo de perda.

3.3. Resposta hiperelástica do poliuretano

O poliuretano tem comportamento não linear elástico, ou seja, a relação tensão-deformação não é descrita por uma relação linear. A não linearidade do poliuretano depende de outras considerações do ensaio (temperatura, níveis de tensões, velocidade do ensaio, etc.). Assumindo todos estes fatores constantes e aplicando-se uma taxa de deformação constante ao longo do ensaio, obtém-se uma curva de tensão como na figura 3.11.

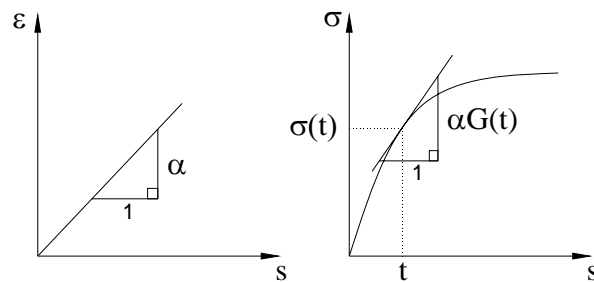


Figura 3.11: Histórico de deformação e correspondente histórico de tensão.

A resposta do material depende da taxa de deformação, como mostrado na figura 3.12. As taxas de deformações mais rápidas produzem maiores esforços.

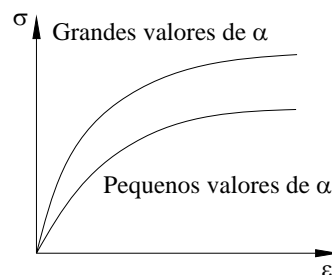


Figura 3.12: influência da taxa de deformação.

Boef e Out 1990 e Lemos 2005 consideram um valor médio do módulo de elasticidade do poliuretano, tomando-se o módulo secante do ensaio tensão-deformação a uma porcentagem de deformação. No entanto, para diferentes taxas de deformação têm-se diferentes módulos secantes. A taxa do ensaio de tração ou compressão é importante para se poder conhecer melhor o comportamento do material.

Na presente análise o poliuretano será considerado como material hiperelástico onde, com ajuda da série de Prony desenvolvida no item anterior, obtém-se as curvas de tensão-deformação.

Procede-se na análise impondo-se históricos de deformações, com taxas constantes de deformação:

$$\varepsilon(t) = \alpha.t \quad (3.8)$$

Três taxas de deformação são utilizadas (0,01; 0,05 e 0,1 1/s) e obtém-se as respectivas tensões. A deformação imposta é proporcional ao tempo, figura 3.13 (a). Para obter a tensão respectiva, substitui-se a equação (3.8) e o módulo de relaxação na equação (2.22), obtendo-se a relação da tensão no domínio do tempo, vide figura 3.13 (b).

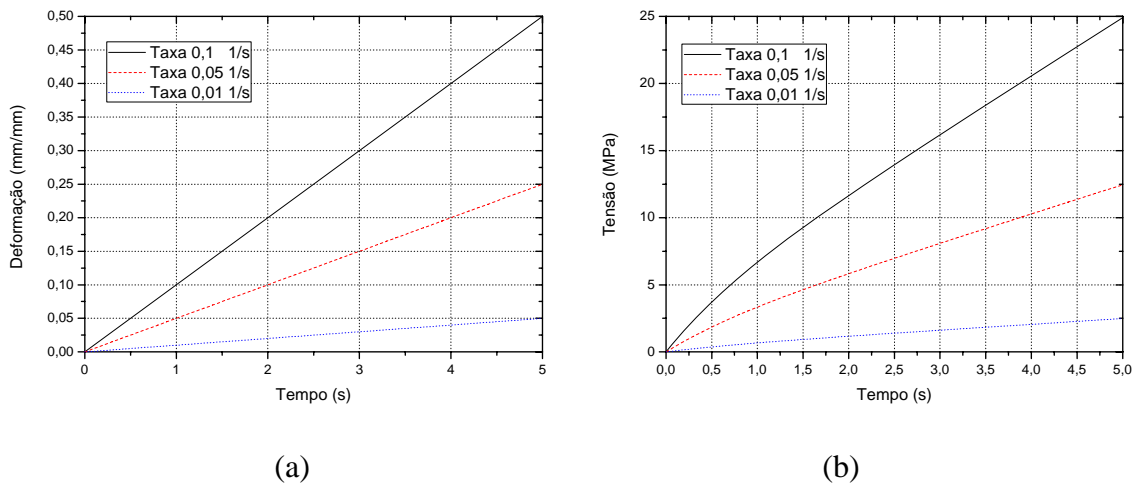


Figura 3.13: (a) Deformação linear, (b) Tensão não linear.

Na figura 3.14 está representada a curva tensão-deformação para cada taxa de deformação.

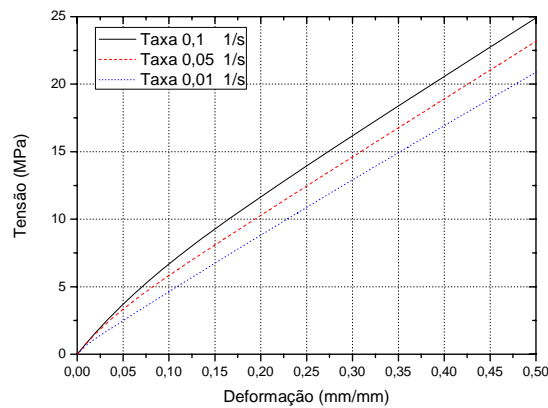


Figura 3.14: Tensão-deformação com taxas de deformação.

Capítulo 4

Análise e Resultados

A transição da linha flexível com a unidade flutuante requer a utilização do enrijecedor à flexão. Sua principal função é limitar a curvatura da linha flexível devido aos movimentos na unidade flutuante induzidos pelas condições ambientais. Na análise matemática o enrijecedor é considerado como uma viga esbelta, como proposto por Boef e Out (1990), encontrando-se engastado na unidade flutuante e no outro extremo encontra-se submetido aos movimentos da linha flexível.

Estudos recentes do enrijecedor à flexão consideram o poliuretano como material hiperelástico assimétrico, devido às propriedades mecânicas diferentes em tração e compressão e material viscoelástico linear assimétrico no domínio do tempo. Os estudos de casos avaliados foram feitos usando-se cargas estáticas para as análises.

No presente estudo serão consideradas duas condições do material do enrijecedor. O primeiro estudo será desenvolvido como material hiperelástico simétrico com cargas harmônicas e no segundo estudo de caso considera-se como material viscoelástico linear, com cargas e condições de contorno harmônicas. O enrijecedor então apresentará resposta no domínio do tempo até se estabilizar (tempo “infinito”), desenvolvendo um comportamento no domínio da frequência que pode ser obtido via formulação analítico-numérica.

4.1 Análise hiperelástica do enrijecedor à flexão

No presente estudo considera-se o enrijecedor como material não linear elástico, homogêneo, isotrópico e simétrico na resposta de carga de tração e compressão. Nesta dissertação a linha flexível é modelada como uma viga com rigidez flexional constante. O modelo não considera o deslizamento entre o enrijecedor e a linha flexível, assume-se que estas estruturas permanecem juntas.

4.1.1 Formulação matemática: enrijecedor à flexão e linha flexível

O conjunto enrijecedor-linha flexível é aproximado por uma viga esbelta (formulação de Bernoulli-Euler), ou seja, não serão consideradas as deformações produzidas por cisalhamento. Além disso, assume-se que não existe deslizamento entre a linha flexível e enrijecedor, e que a viga estará exposta a grandes deslocamentos. A área da seção cônica do enrijecedor é variável ao longo do comprimento e o material é considerado hiperelástico.

As dimensões geométricas do enrijecedor e parte da linha flexível são mostradas na figura 4.1. O enrijecedor à flexão encontra-se engastado na unidade flutuante, e parte da linha flexível (1,3 m) é tomada para análise, o eixo axial da linha flexível no extremo forma um ângulo com a vertical, como pode apreciar-se melhor na figura 4.2. Este ângulo é obtido da análise global da linha flexível através de programas comerciais de análise global de risers.

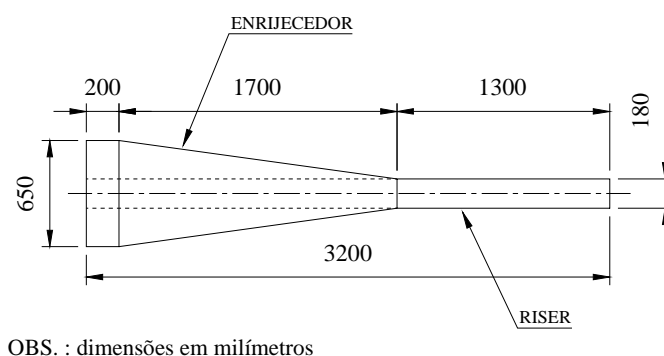


Figura 4.1: Geometria do enrijecedor.

O enrijecedor à flexão encontra-se exposto a forças estáticas e dinâmicas, oriundas do peso próprio da linha flexível, movimento da unidade flutuante, movimento das ondas do mar, correntes marinhas, ventos, etc. Se estes carregamentos dinâmicos fossem assumidos com comportamento periódico, é possível aproximá-los por cargas em função de senos ou cossenos.

Devido aos carregamentos e às condições de contorno, o enrijecedor se deforma e assume uma configuração com diferentes curvaturas ao longo do comprimento. Devido a sua geometria variável, que é de forma cilíndrica no início e cônica ao final, apresenta

deformações diferentes na fibra externa, onde encontram-se seus pontos mais críticos, vide figura 4.2.

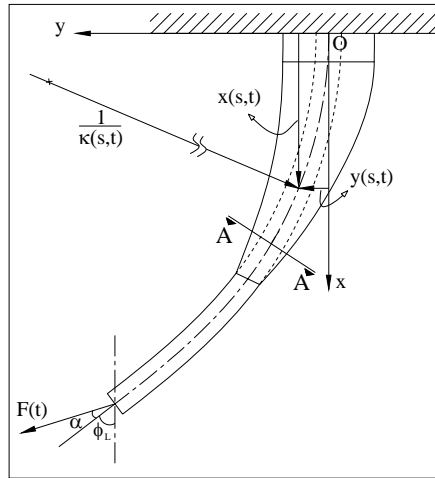


Figura 4.2: Configuração do enrijecedor.

O equilíbrio do elemento infinitesimal, mostrado na figura 4.3, é tomado de uma posição arbitrária, o conjunto linha flexível enrijecedor é tomado como um só elemento. O diferencial do arco de comprimento (ds) com os diferenciais da posição (dx e dy) forma um triângulo retângulo, podendo-se obter as relações trigonométricas do mesmo.

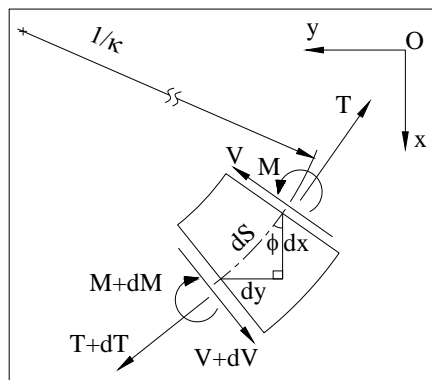


Figura 4.3: Elemento infinitesimal do enrijecedor-linha flexível

As relações geométricas obtidas do triângulo diferencial são:

$$\frac{\partial x(s,t)}{\partial s} = \cos[\phi(s,t)] \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial y(s,t)}{\partial s} = \text{sen}[\phi(s,t)] \quad (4.2)$$

Outra relação geométrica importante é a curvatura. A relação matemática da curvatura para qualquer curva plana é dada por:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} \quad (4.3)$$

Onde Δs é o comprimento da curva entre dois pontos tomados na mesma curva, e $\Delta \phi$ é o ângulo de giro da tangente da curva entre os dois pontos tomados do arco de comprimento. A curvatura e o ângulo são funções que dependem da posição e tempo, tomando limites da equação (4.3) obtém-se:

$$\frac{\partial \phi(s,t)}{\partial s} = k(s,t) \quad (4.4)$$

Fazendo o corte A-A da figura 4.2, esta seção encontra-se em equilíbrio, como é mostrado na figura 4.4.

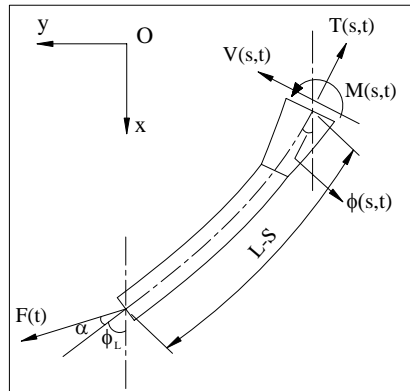


Figura 4.4: Tramo do enrijecedor e linha flexível.

Fazendo o somatório de forças nas direções x e y na figura 4.4, obtém-se uma relação da força cortante e força de tração.

$$F(t) \cos(\phi_L + \alpha) - V(s,t) \sin[\phi(s,t)] - T(s,t) \cos[\phi(s,t)] = 0 \quad (4.5)$$

$$F(t) \sin(\phi_L + \alpha) + V(s,t) \cos[\phi(s,t)] - T(s,t) \sin[\phi(s,t)] = 0 \quad (4.6)$$

Fazendo manipulações algébricas das equações (4.5) e (4.6) obtém-se as forças cortante e de tração:

$$V(s,t) = -F(t) \text{sen}[\phi_L + \alpha - \phi(s,t)] \quad (4.7)$$

$$T(s,t) = F(t) \text{cos}[\phi_L + \alpha - \phi(s,t)] \quad (4.8)$$

Tomando momentos na posição “s” da figura 4.4, obtém-se o momento fletor:

$$M(s,t) = F(t) \text{sen}[\phi_L + \alpha] \int_s^L \text{cos}[\phi(s,t)] ds - F(t) \text{cos}[\phi_L + \alpha] \int_s^L \text{sen}[\phi(s,t)] ds \quad (4.9)$$

Devido ao fato de não se conhecer o histórico do ângulo ao longo do comprimento, a integral na equação (4.9), não pode ser desenvolvida, mas derivando-se o momento fletor com respeito à posição (s), tem-se:

$$\frac{\partial M(s,t)}{\partial s} = -F(t) \text{sen}[\phi(L,t) + \alpha - \phi(s,t)] \quad (4.10)$$

Existe uma força de contato entre o enrijecedor e a linha flexível, que é uma carga distribuída por unidade de comprimento. O elemento infinitesimal mostrado na figura 4.3 considera a linha flexível e enrijecedor como um só elemento diferencial. Para obter a força de contato estuda-se em separado cada elemento infinitesimal, vide figura 4.5.

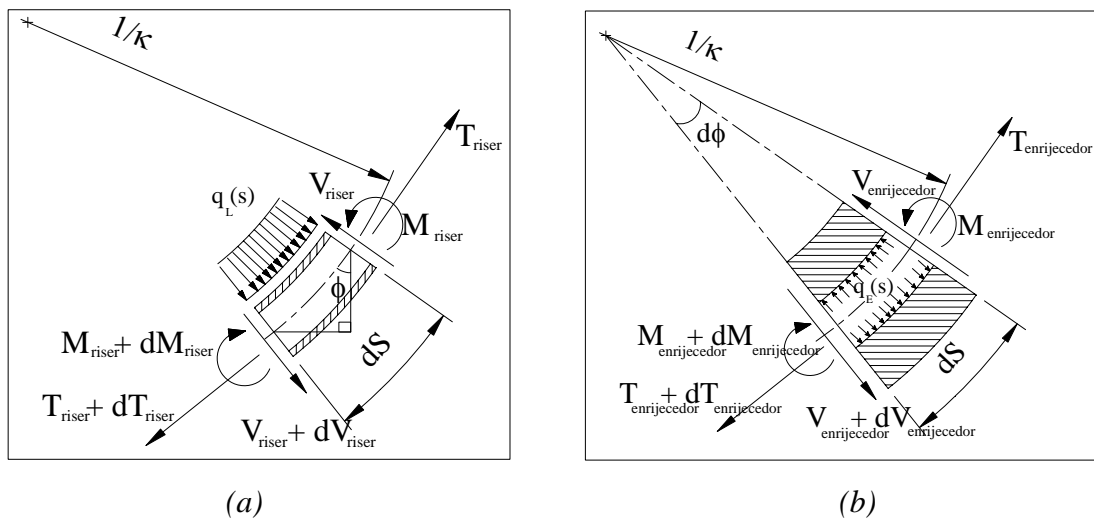


Figura 4.5: Elemento infinitesimal: a) linha flexível e b) Enrijecedor.

A contribuição por separado das forças e momento fletor da linha flexível e do enrijecedor pode ser apreciada melhor na figura 4.5. Ao somar estas cargas, obtêm-se a resposta global do conjunto, nas equações seguintes:

$$M_{riser} + M_{enrijecedor} = M \quad (4.11)$$

$$T_{riser} + T_{enrijecedor} = T \quad (4.12)$$

$$V_{riser} + V_{enrijecedor} = V \quad (4.13)$$

Despreza-se no modelo matemático os pesos próprios do enrijecedor e da linha flexível comparadas com as cargas a que estão expostos.

a) Formulação matemática do enrijecedor à flexão

Tomando-se o equilíbrio estático do elemento diferencial da figura 4.5 (a) e considerando que o elemento diferencial é curvo, obtêm-se as três equações diferenciais que descrevem os esforços internos e a força de contato:

$$\frac{\partial V_{enrijecedor}}{\partial s} - T_{enrijecedor} \frac{\partial \phi(s,t)}{\partial s} + q_E(s,t) = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial T_{enrijecedor}}{\partial s} + V_{enrijecedor} \frac{\partial \phi(s,t)}{\partial s} = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial M_{enrijecedor}}{\partial s} - V_{enrijecedor} = 0 \quad (4.16)$$

b) Formulação matemática da linha flexível

Da mesma forma como no caso anterior, toma-se o equilíbrio do elemento diferencial figura 4.5 (b):

$$\frac{\partial V_{riser}}{\partial s} - T_{riser} \frac{\partial \phi(s,t)}{\partial s} - q_L(s,t) = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial T_{riser}}{\partial s} + V_{riser} \frac{\partial \phi(s,t)}{\partial s} = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial M_{riser}}{\partial s} - V_{riser} = 0 \quad (4.19)$$

Observa-se, comparando-se as equações (4.14) e (4.17) que os sinais das forças distribuídas de contato possuem sinal trocado.

4.1.2 Relações constitutivas do enrijecedor

O enrijecedor à flexão é considerado material hiperelástico, a análise será feita usando a curva de tensão-deformação mostrada na figura 3.13, e a rigidez flexional da linha flexível será assumida constante. A deformação axial em qualquer ponto do conjunto será dada por:

$$\varepsilon(s, t, \nu) = \nu k(s, t) \quad (4.20)$$

Onde:

ν : distância da linha neutra ao ponto da análise

A localização da linha neutra da viga (enrijecedor-linha flexível) é obtida a partir da condição que a resultante da força devido à flexão é nula:

$$\int \sigma dA = 0 \quad (4.21)$$

A linha neutra coincidirá com o centróide da viga, devido a considerar-se o material simétrico em tração e compressão.

O momento fletor dado por:

$$M = \int \nu \cdot \sigma \cdot dA \quad (4.22)$$

Para desenvolver a equação (4.22) precisa-se ter definida a função da tensão, a área e a distância da linha neutra ao ponto de análise.

A rigidez à flexão da linha flexível é assumida constante:

$$M_{riser} = EI_1 k(s, t) \quad 4.23$$

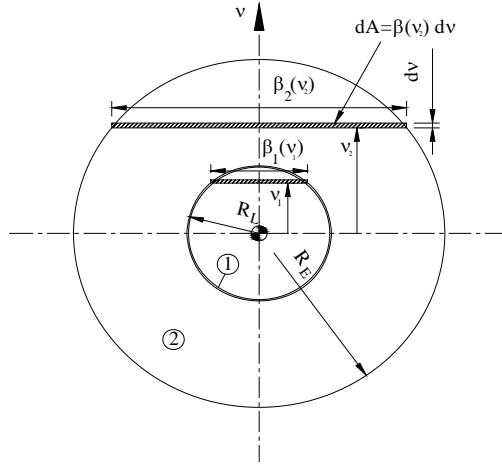


Figura 4.6: Seção transversal da linha flexível e enrijecedor.

A rigidez à flexão do enrijecedor tem comportamento não linear elástico, o diferencial de área da figura 4.6 é representado por:

$$dA(v) = \beta(v) dv \quad (4.24)$$

Onde:

$$\beta_1(s) = 2\sqrt{R_{riser}^2 - v(s)^2} \quad se \quad -R_{riser} \leq v(s) \leq R_{riser} \quad (4.25)$$

$$\beta_2(s) = 2\sqrt{R_E(s)^2 - v(s)^2} \quad se \quad -R_E(s) \leq v(s) \leq R_E(s) \quad (4.26)$$

Substituindo adequadamente as equações (4.20), (4.24), (4.25) e (4.26) na equação (4.22) e tomando os limites da geometria, obtém-se:

$$M_{enrijecedor} = \int_{-k(s,t)R_E}^{k(s,t)R_E} \frac{\varepsilon \sigma(\varepsilon) \left[\beta_2\left(\frac{\varepsilon}{k(s,t)}\right) - \beta_1\left(\frac{\varepsilon}{k(s,t)}\right) \right]}{k(s,t)^2} d\varepsilon \quad (4.27)$$

Somando os momentos parciais, equações (4.23) e (4.28) e substituindo na equação (4.11) obtém-se o momento fletor global:

$$M(s,t) = EI_1 k(s,t) + \int_{-k(s,t)R_E}^{k(s,t)R_E} \frac{\varepsilon \sigma(\varepsilon) \left[\beta_2 \left(\frac{\varepsilon}{k(s,t)} \right) - \beta_1 \left(\frac{\varepsilon}{k(s,t)} \right) \right]}{k(s,t)^2} d\varepsilon \quad (4.28)$$

A equação (4.28) não pode ser desenvolvida em forma analítica, é necessário discretizar o comprimento do enrijecedor-linha flexível e desenvolver a integral numericamente tomando incrementos de curvatura e o momento fletor pode ser representado matricialmente. O momento fletor será ajustado por séries de potências pelo método de mínimos quadrados, optou-se por utilizar um polinômio de ordem cinco.

$$M(s,t) = A(s)k(s,t) + B(s)k(s,t)^2 + C(s)k(s,t)^3 + D(s)k(s,t)^4 + E(s)k(s,t)^5 \quad (4.29)$$

Onde $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $D(s)$ e $E(s)$ são coeficientes interpolados que serão ajustados por um polinômio de ordem cinco para se ter uma melhor precisão do ajuste:

$$\begin{aligned} A(s) &= a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5 \\ B(s) &= b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + b_4s^4 + b_5s^5 \\ C(s) &= c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + c_4s^4 + c_5s^5 \\ D(s) &= d_0 + d_1s + d_2s^2 + d_3s^3 + d_4s^4 + d_5s^5 \\ E(s) &= e_0 + e_1s + e_2s^2 + e_3s^3 + e_4s^4 + e_5s^5 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Derivando o momento fletor da equação (4.29) com relação à posição, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{dM(s,t)}{ds} &= \frac{dA(s)}{ds}k(s,t) + \frac{dB(s)}{ds}k(s,t)^2 + \frac{dC(s)}{ds}k(s,t)^3 + \frac{dD(s)}{ds}k(s,t)^4 \\ &+ \frac{dE(s)}{ds}k(s,t)^5 + A(s)\frac{dk(s,t)}{ds} + 2B(s)k(s,t)\frac{dk(s,t)}{ds} \\ &+ 3C(s)k(s,t)^2\frac{dk(s,t)}{ds} + 4D(s)k(s,t)^3\frac{dk(s,t)}{ds} + 5E(s)k(s,t)^4\frac{dk(s,t)}{ds} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo a equação (4.10) em (4.31) e fazendo manipulações algébricas obtém-se:

$$\frac{dk(s,t)}{ds} = \frac{\left[\frac{dA(s)}{ds}k(s,t) + \frac{dB(s)}{ds}k(s,t)^2 + \frac{dC(s)}{ds}k(s,t)^3 + \frac{dD(s)}{ds}k(s,t)^4 \right]}{A(s) + 2B(s)k(s,t) + 3C(s)k(s,t)^2 + 4D(s)k(s,t)^3 + 5D(s)k(s,t)^4} \quad (4.32)$$

$$- \frac{\left\{ \frac{dE(s)}{ds}k(s,t)^5 + F(t) \operatorname{sen}[\phi_L + \alpha - \phi(s,t)] \right\}}{A(s) + 2B(s)k(s,t) + 3C(s)k(s,t)^2 + 4D(s)k(s,t)^3 + 5D(s)k(s,t)^4}$$

4.1.3 Condições de contorno

As primeiras três condições de contorno são obtidas por condições geométricas iniciais do enrijecedor e a última é obtida pelo ângulo no extremo da linha flexível:

$$x(0,t) = y(0,t) = \phi(0,t) = \phi(L,t) - \phi_L(t) = 0 \quad (4.33)$$

Têm-se quatro equações diferenciais e quatro condições de contorno, o sistema será desenvolvido numericamente, obtendo-se como resposta o histórico do ângulo, da posição e da curvatura ao longo do comprimento e do tempo.

4.1.4 Solução numérica

O comportamento mecânico do enrijecedor é descrito pelo sistema de quatro equações diferenciais ordinárias não lineares de primeira ordem, (4.1), (4.2), (4.4) e (4.32). Estas equações diferenciais serão desenvolvidas em forma numérica pelo método numérico das diferenças finitas. Para a programação usou-se o programa Mathcad®.

Para desenvolver as equações, primeiro se desenvolverá de forma numérica a equação (4.28) discretizando o comprimento e tomando passos de curvatura, obtendo-se o momento fletor. Em seguida serão ajustados os coeficientes da equação (4.30) para cada passo de comprimento.

Para obter-se a força distribuída de contato, pode-se utilizar o momento fletor da linha flexível em função da curvatura (equação (4.23)) e substituí-lo na equação (4.19) para o cálculo da força cortante na linha flexível:

$$V_{riser} = EI_1 \frac{\partial k(s,t)}{\partial s} \quad (4.34)$$

Integrando-se a equação (4.18) pode-se obter a força de tração na linha flexível:

$$T_{riser} = F(t) \cos(\alpha) + \int_s^L V_{riser} k(s,t) ds \quad (4.35)$$

Onde $F(t) \cos(\alpha)$ representa a força de tração na linha flexível na posição “L”.

Finalmente substituindo as equações (4.34) e (4.35) na equação (4.17) obtém-se:

$$q_L(s,t) = -\frac{\partial V_{riser}}{\partial s} + T_{riser} k(s,t) \quad (4.36)$$

A equação de contato é apresentada pela equação (4.36). Escolhe-se a linha flexível por facilidade, pois sua rigidez flexional é constante.

4.1.5 Estudo de caso e resultados

O modelo hiperelástico desenvolvido no presente estudo é baseado no modelo de Boef e Out (1990), Lemos (2005) e Caire (2005). A geometria estudada é a mesma desenvolvida por Caire (2005). No presente modelo impõe-se força e o ângulo no extremo com condições harmônicas e com ângulo de defasagem entre eles (δ):

$$F(t) = F_0 + \Delta F \cdot \text{Sen}(\omega t) \quad (4.37)$$

$$\phi_L(t) = \phi_L + \Delta \phi \cdot \text{Sen}(\omega t - \delta) \quad (4.38)$$

Todos os estudos de casos serão desenvolvidos para cada curva de tensão versus deformação, obtendo um melhor entendimento do comportamento do enrijecedor e da linha flexível. A tabela 4.1 apresenta os valores das forças e ângulo imposto na extremidade e condições da forma destas cargas.

Tabela 4.1: Coeficiente de cargas e propriedades do estudo de caso

Força	$F_0 = [62,5; 125; 250; 500] \text{ KN}$
Ângulo	$\phi_L = 45^\circ$
Variação de força e ângulo	$\Delta F = (15\% - 20\%) F_0$ $\Delta \phi = (15\% - 20\%) \phi_L$
Frequência	$f = 0,2 \text{ Hz}$
Ângulo de fase	$\delta = 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$
Rigidez da linha flexível	$EI_1 = 10 \text{ KN m}^2$

A frequência do movimento avaliada para todos os casos é de 0,2 Hz, correspondente a um período de 5 segundos, o ângulo médio em toda a análise será de 45° . A curvatura máxima é obtida em cada seção do comprimento do enrijecedor ao longo do tempo, para logo eleger o valor máximo. A variação da curvatura máxima é feita considerando a diferença de curvaturas máxima e mínima avaliada no domínio do tempo, para cada seção do enrijecedor e escolhendo o valor máximo deles.

a) Caso 1: Força aplicada: $F_0 = 62,5 \text{ (KN)}$ e $\Delta F = 20\% F_0$

É aplicada uma força no extremo da linha flexível, vide equação (4.37). A força média imposta é de $62,5 \text{ (KN)}$, a amplitude da força senoidal é 20% da força constante. O ângulo no extremo, equação (4.38), segue o mesmo princípio.

Pode-se apreciar na figura 4.7, a curvatura máxima correspondente a diferentes taxas de deformações e diferentes ângulos de fase ao longo do comprimento do enrijecedor. Para taxa de deformação de $0,1 \text{ (1/s)}$ apresenta 4% de variação entre a curvatura máxima e mínima, a maior curvatura corresponde quando encontra-se à 90° fora de fase; na taxa de $0,05 \text{ (1/s)}$ apresenta 3% de variação entre as curvaturas. Na taxa de $0,01 \text{ (1/s)}$ a curvatura máxima diminui, o material é mais flexível, apresentando só 2% de variação da curvatura entre os ângulos os ângulos fora de fase (0° - 90°).

Pode-se ver que a menor curvatura para uma de taxa de deformação é dada quando a força e o ângulo no extremo encontram-se em fase, e a maior curvatura para a mesma taxa é dada quando este ângulo encontra-se 90° fora de fase. Quando a taxa de deformação aumenta a posição da curvatura máxima começa a movimentar-se para direita.

A variação da curvatura, figura 4.8, aumenta à medida que a taxa de deformação aumenta; quando aumenta a taxa de deformação, a variação da curvatura máxima correspondente ao ângulo de defasagem de 90° aumenta.

Na figura 4.9 apresenta-se a curvatura máxima no engaste no domínio do ângulo de fase, a maior curvatura acontece quando a força encontra-se em fase (0°) com o ângulo na extremidade, ao diminuir a taxa de deformação a curvatura máxima no engaste tende aumentar.

Na figura 4.10 apresenta-se a variação da curvatura máxima no engaste no domínio do ângulo de fase, a maior variação da curvatura acontece quando a força encontra-se em fase (0°) com o ângulo na extremidade, ao diminuir a taxa de deformação a variação da curvatura máxima no engaste tende aumentar.

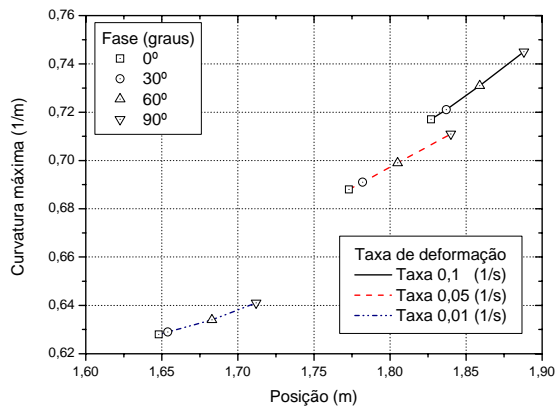


Figura 4.7: Curvatura máxima x arco comprimento

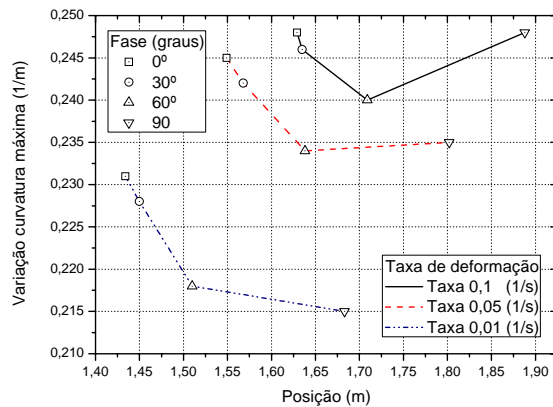


Figura 4.8: Variação curvatura máxima x arco comprimento

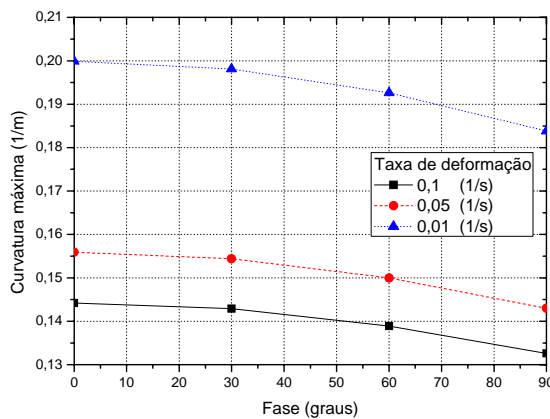


Figura 4.9: Curvatura máxima x ângulo de fase (engaste)

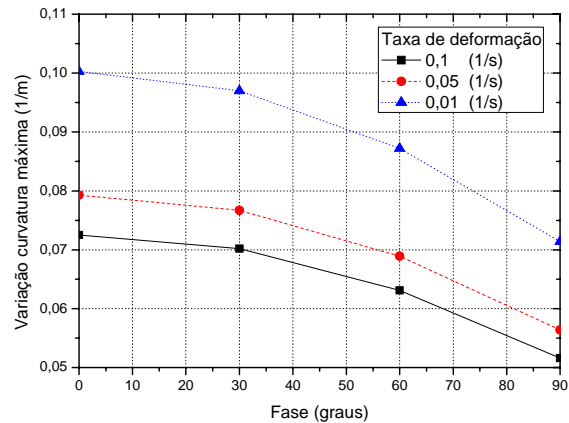


Figura 4.10: Variação curvatura máxima x ângulo de fase (engaste)

b) Caso 2: Força aplicada: $F_0 = 125 \text{ (KN)}$ e $\Delta F = 20\% F_0$

A força média aplicada é de 125 (KN) com uma força senoidal de amplitude de 20% da força aplicada. O ângulo no extremo oscila em torno de 45° com uma amplitude de 20% do ângulo médio.

Na figura 4.11, a taxa de deformação 0,1(1/s) apresenta uma variação entre curvaturas máxima de 4% e na taxa de 0,05 (1/s) apresenta 3% de variação, considerando-se para o estudo os ângulos de fase 0° e 90°. A curvatura aumenta com o aumento da taxa de deformação e com o ângulo de fase.

Na figura 4.12 apresenta-se a variação da curvatura máxima. Quando se aumenta o ângulo de fase entre a força imposta e o ângulo no extremo, a posição da seção onde acontece a curvatura máxima movimenta-se para a direita. A posição da curva para o ângulo de fase de 90° aumenta com a taxa de deformação.

Na figura 4.13 apresenta-se a curvatura máxima no engaste no domínio do ângulo de fase, a maior curvatura acontece quando a força encontra-se em fase (0°) com o ângulo na extremidade. A curvatura máxima aumenta devido à força imposta.

Na figura 4.14 apresenta-se a variação da curvatura máxima no engaste no domínio do ângulo de fase, a maior variação da curvatura acontece quando a força encontra-se em fase (0°) com o ângulo na extremidade, ao diminuir a taxa de deformação a variação da curvatura máxima no engaste tende a aumentar.

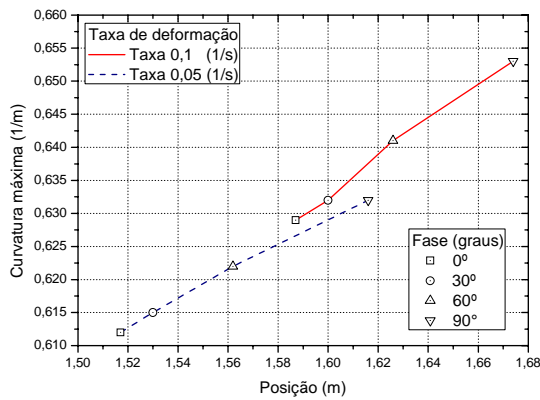


Figura 4.11: Curvatura máxima x arco comprimento

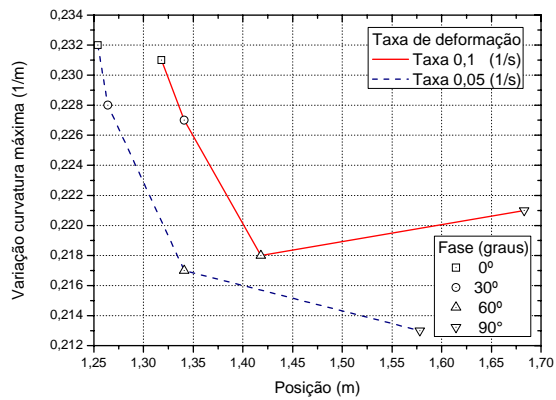


Figura 4.12: Variação da curvatura máxima x arco comprimento

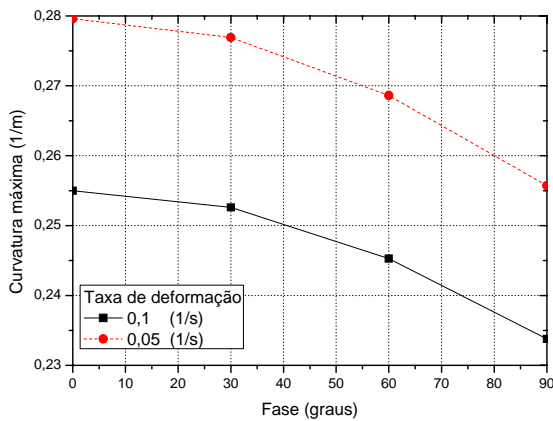


Figura 4.13: Curvatura máxima x ângulo de fase (engaste)

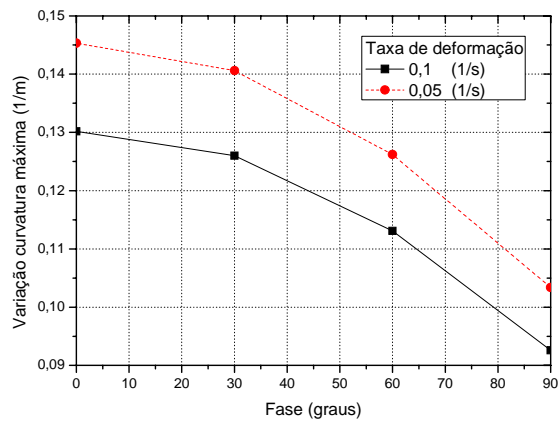


Figura 4.14: Variação curvatura máxima x ângulo de fase (engaste)

c) Caso 3: Força aplicada: $F_0 = 250 \text{ (KN)}$ e $\Delta F = 20\% F_0$

A força média aplicada é de 250 (KN) com uma força senoidal de amplitude de 20% da força aplicada. O ângulo de oscilação tem o mesmo princípio exposto nos caso 1 e 2.

Na figura 4.15, a taxa de 0,1(1/s) apresenta uma variação entre curvaturas máximas em torno de 1% e na taxa de 0,05 (1/s) apresenta só 0.5% de variação, considerando-se para o estudo os ângulos de fase de 0° e 90°. A curvatura aumenta levemente com o aumento da taxa de deformação e com o ângulo de fase. Pode-se dizer então que a curvatura máxima é independente da taxa de deformação e o ângulo de defasagem. Ainda, a posição máxima da curvatura é dada fora do engaste.

Na figura 4.16, pode-se apreciar claramente como a seção onde acontecem as variações máximas muda ao engaste, apresenta-se uma variação de 32% na taxa de 0,05 (1/s) e na taxa de 0,1 (1/s) apresenta 17% de variação. A taxa de deformação 0,05 (1/s) para os ângulos de fase (0°, 30° e 60°) a variação máxima da curvatura acontece no engaste, podendo apreciar melhor na figura 4.18.

Na figura 4.17 apresenta-se a curvatura máxima no engaste no domínio do ângulo de fase, a maior curvatura acontece quando a força encontra-se em fase (0°) com o ângulo na extremidade. A curvatura máxima aumenta devido à força imposta.

Na figura 4.18 apresenta-se a variação da curvatura máxima no engaste no domínio do ângulo de fase, a maior variação da curvatura acontece quando a força encontra-se em fase (0°) com o ângulo na extremidade.

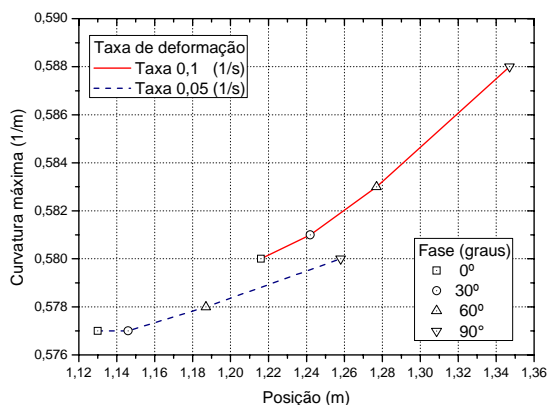


Figura 4.15: Curvatura máxima x arco comprimento

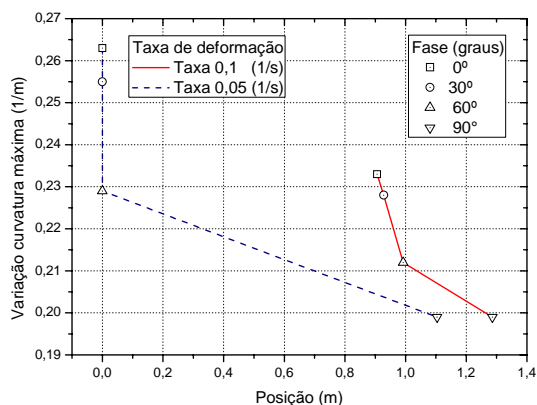


Figura 4.16: Variação da curvatura máxima x arco comprimento

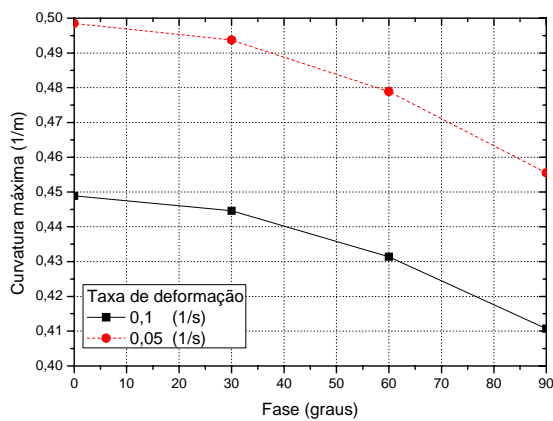


Figura 4.17: Curvatura máxima x ângulo de fase (engaste)

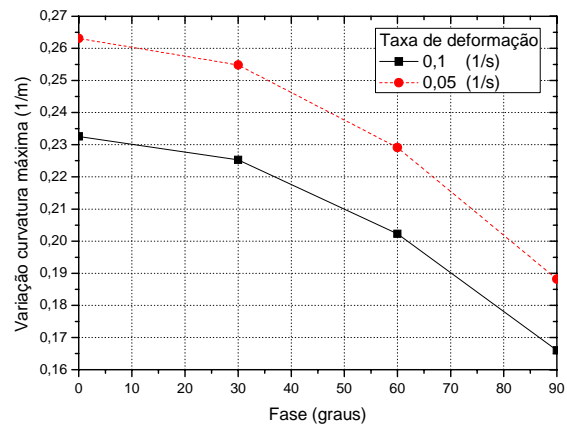


Figura 4.18: Variação curvatura máxima x ângulo de fase (engaste)

d) Caso 4: Força aplicada: $F_0 = 500$ (KN) e $\Delta F = 15\% F_0$

A força média aplicada foi de 500 (KN) com uma força senoidal de amplitude de 20% da força aplicada. Devido à magnitude da força imposta a curvatura máxima é obtida no engaste.

Na figura 4.19, a taxa de deformação de 0,05 (1/s) apresenta a maior curvatura quando a força e o ângulo no extremo encontra-se em fase, o valor da curvatura é 0,7905 (1/m). A curvatura máxima correspondente a 90° de fase é 0,7405 (1/m) que corresponde a 6,7% de variação entre estas curvaturas. A taxa de deformação de 0,1 (1/s) a curvatura máxima é 0,718 (1/m) correspondente a força e ângulo em fase e quando encontra-se fora de fase (90°) a curvatura é 0,671 correspondente a 7% de variação entre curvaturas máximas.

Na figura 4.20 apresenta-se a variação da curvatura máxima no engaste no domínio do ângulo de fase, a maior variação da curvatura acontece quando a força encontra-se em fase (0°) com o ângulo na extremidade. A variação da curvatura correspondente a taxa de deformação de 0,1 (1/s) é 39% da menor deformação e a uma taxa de deformação de 0,05 (1/s) também tem 39% de variação.

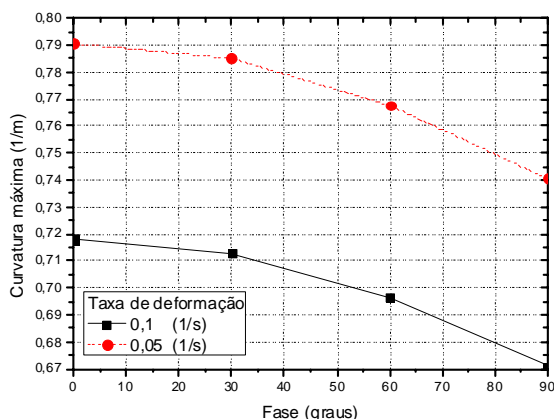


Figura 4.19: Curvatura máxima x ângulo de fase (engaste)

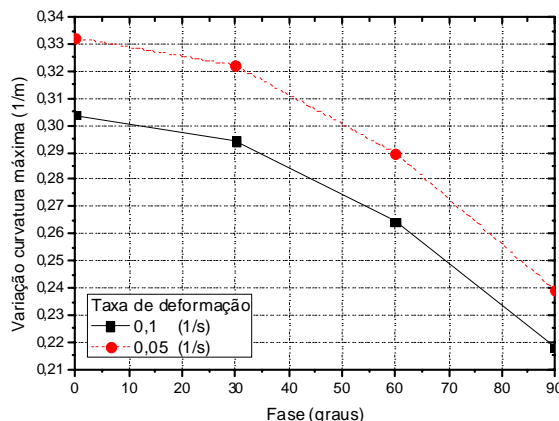


Figura 4.20: Variação curvatura máxima x ângulo de fase (engaste)

4.2 Análise viscoelástica do enrijecedor à flexão no domínio do tempo

No presente estudo será considerado o poliuretano do enrijecedor como material viscoelástico linear, e será desenvolvido o enrijecedor como uma viga esbelta, considerando material isotrópico, homogêneo e com grandes deslocamentos das seções. Portanto a resposta do sistema irá agora depender do tempo. Ao se impor uma carga dinâmica ou estática o enrijecedor apresenta mudanças do comportamento no domínio do tempo, no presente estudo apresenta-se a resposta do enrijecedor no transcurso do tempo impondo cargas combinadas (estática e dinâmica).

4.2.1 Formulação matemática

O enrijecedor e a linha flexível são representados como uma viga esbelta (deformações produzidas por cisalhamento são desprezadas), será considerado o poliuretano do enrijecedor como material viscoelástico linear, a viga está exposta a grandes deslocamentos, a área do enrijecedor é variável ao longo do comprimento devido a sua geometria cônica.

As primeiras três equações diferenciais para desenvolver o problema de contorno são devidas à geometria que são as mesmas estudadas nas equações (4.1), (4.2) e (4.4). A

relação constitutiva do momento fletor para uma viga viscoelástica linear é desenvolvida por Wineman e Rajagopal (2000), que é representada pela seguinte equação:

$$M(s,t) = I(s) \left[k(s,t)G(0) + \int_0^t k(s,t-\eta) \frac{dG(\eta)}{d\eta} d\eta \right] = I(s)k(s,t)*dG(t) \quad (4.39)$$

Onde $G(t)$ é o módulo de relaxação do poliuretano, $k(s,t)$ a curvatura e $I(s)$ o momento de inércia de área da seção transversal.

O momento fletor é dado pela equação (4.11), e as contribuições devido ao enrijecedor e linha flexível são respectivamente obtidas pelas equações (4.39) e (4.23).

Somando as equações (4.39) e (4.23) e substituindo na equação (4.11) obtém-se o momento fletor global.

$$M(s,t) = EI_1k(s,t) + I_2(s)k(s,t)*dG(t) \quad (4.40)$$

Derivando a equação (4.40) com relação à posição obtém-se:

$$\frac{\partial M(s,t)}{\partial s} = EI_1 \frac{\partial k(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial I_2(s)}{\partial s} k(s,t)*dG(t) + I_2(s) \frac{\partial k(s,t)}{\partial s} *dG(t) \quad (4.41)$$

Da equação (4.10) tem-se a relação de equilíbrio da derivada do momento fletor e força imposta, igualando as equações (4.41) e (4.10), e fazendo manipulações algébricas obtém-se:

$$-F(t) \cdot \text{sen}[\phi_L + \alpha - \phi(s,t)] = EI_1 \frac{\partial k(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial I_2(s)}{\partial s} k(s,t)*dG(t) + I_2(s) \frac{\partial k(s,t)}{\partial s} *dG(t) \quad (4.42)$$

Expandindo a equação (4.42) e explicitando a derivada da curvatura tem-se:

$$\frac{\partial k(s,t)}{\partial s} = \frac{-1}{EI_1 + I_2(s)G(0)} \left\{ \begin{array}{l} F(t) \text{ sen}[\phi_L + \alpha - \phi(s,t)] \\ + \frac{\partial I_2(s)}{\partial s} \left[k(s,t)G(0) + \int_0^t k(s,\eta) \frac{\partial G(t-\eta)}{\partial(t-\eta)} d\eta \right] \\ + I_2(s) \int_0^t \frac{\partial k(s,\eta)}{\partial s} \frac{\partial G(t-\eta)}{\partial(t-\eta)} d\eta \end{array} \right\} \quad (4.43)$$

Na equação (4.43) tem-se a relação matemática da derivada de curvatura em função da força imposta e as propriedades (momento de inércia e módulo de relaxação).

4.2.2 Solução numérica

As quatro equações diferenciais ordinárias não lineares de primeira ordem que desenvolvem o sistema linha flexível enrijecedor são: (4.1), (4.2), (4.4) e (4.43) e a condição de contorno, equação (4.33). A equação (4.43) requer uma consideração adicional, pois trata-se de uma equação diferencial com integrais dentro dela, e para desenvolvê-la é necessário considerar passos de tempo em intervalos muito próximos, e cada vez que o intervalo de tempo é menor a solução é mais exata. Estas equações diferenciais serão desenvolvidas numericamente pelo método numérico das diferenças finitas. Para a programação usou-se o programa Mathcad®.

4.2.3 Estudo de casos e resultados

O estudo de caso no presente modelo toma as mesmas considerações da geometria do enrijecedor e da linha flexível, e mesma força imposta e ângulo no extremo, equações (4.37) e (4.38).

A série de Prony do módulo de relaxação desenvolvido no capítulo anterior será utilizada. A tabela 4.2 apresenta os valores da força e ângulo impostos na extremidade e condições da forma destas cargas.

Tabela 4.2: Coeficiente de cargas e propriedades da simulação

Força média	$F_0 = 62,5KN$
Ângulo médio	$\phi_L = 45^\circ$
Variação de força e ângulo	$\Delta F = (0\% - 20\%) F_0$ $\Delta \phi = (0\% - 20\%) \phi_L$
Frequência de excitação	$f = 0,2Hz$
Ângulo de fase	$\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ$
Rigidez da linha flexível	$EI_1 = 10 KN m^2$

O presente caso de estudo foi desenvolvido para a força de 62,5 (KN), o tempo de processamento da obtenção dos resultados foi de muitas horas.

O tempo da análise da simulação em cada caso foi de 100s, o passo do tempo considerado para desenvolver as equações integrais, equação (4.43), foi de 0,1s. Este passo de tempo é muito importante, podendo mudar as resposta do comportamento do enrijecedor, sempre é preferível considerar passos de tempos cada vez menores.

a) Caso 1: $\Delta F = 0$ e $\Delta\phi = (20\%)\phi_L$

É aplicada uma força no extremo da linha flexível, vide equação (4.37), a força média imposta é de 62,5 (KN) sem variação de força senoidal, e a condição do ângulo médio imposto é de 45° mais um ângulo senoidal de amplitude de 20% do ângulo médio, equação (4.38).

Na figura 4.21 é apresentado o comportamento da posição vertical do extremo no domínio do tempo, podendo-se apreciar que a oscilação está se movimentando verticalmente, na figura 4.22 pode-se ver como a curvatura máxima diminui no transcurso do tempo, ainda o material não relaxou por completo. Na figura 4.23 representa-se o momento fletor no engaste no domínio do tempo que assim como a curvatura diminui com o tempo. Na figura 4.24 é apresentado o laço de histerese do momento-curvatura no engaste, podendo-se ver que os laços ainda não se estabilizaram.

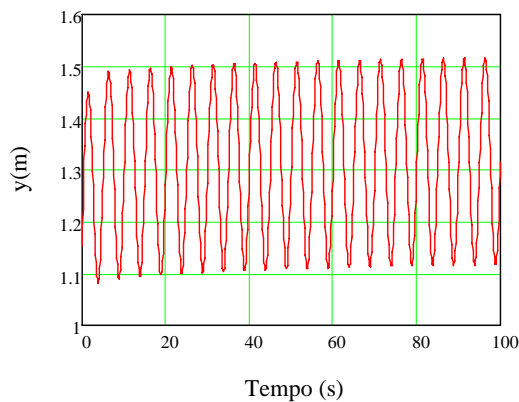


Figura 4.21: Posição vertical do extremo x tempo

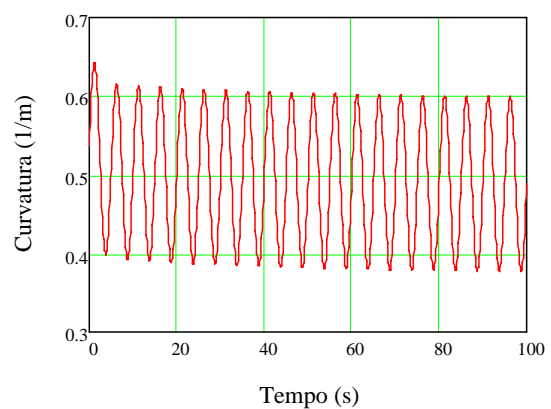


Figura 4.22: Comportamento da curvatura máxima x tempo

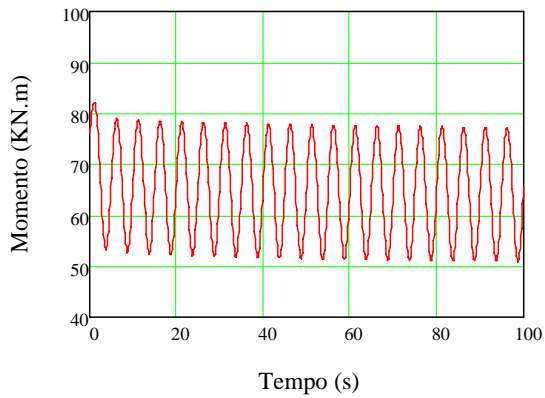


Figura 4.23: Momento no engaste x tempo

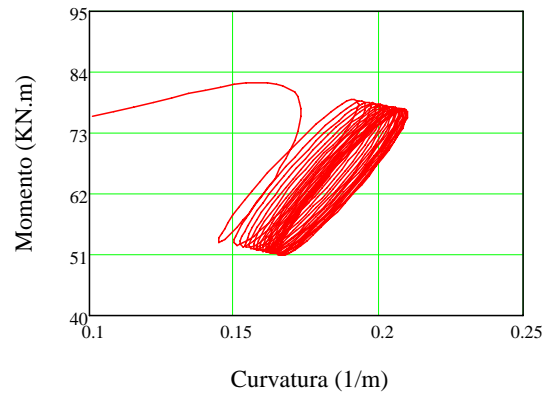


Figura 4.24: Momento x curvatura (engaste)

b) Caso 2: $\Delta F = (20\%) F_0$ e $\Delta \phi = 0$

É aplicada uma força média de 62,5 (KN) mais uma força senoidal de amplitude de 20% da força média, o ângulo no extremo é fixo (45°).

A figura 4.25 mostra como a posição vertical do extremo apresenta oscilações com pouca amplitude. Na figura 4.26 pode-se ver como a curvatura máxima diminui no transcurso do tempo com pouca amplitude de oscilação, mas ainda o material não relaxou por completo. Na figura 4.27 representa-se o momento fletor no engaste no domínio do tempo. Na figura 4.28 é apresentado o laço de histerese do momento-curvatura no engaste, podendo-se ver que os laços ainda não se estabilizaram e as amplitudes do momento e curvatura são menores.

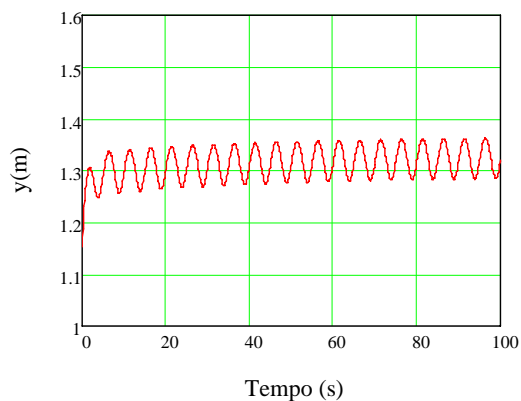


Figura 4.25: Posição vertical do extremo x tempo

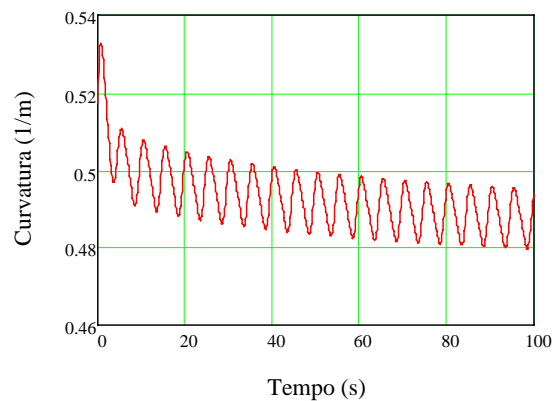


Figura 4.26: Comportamento da curvatura máxima x tempo

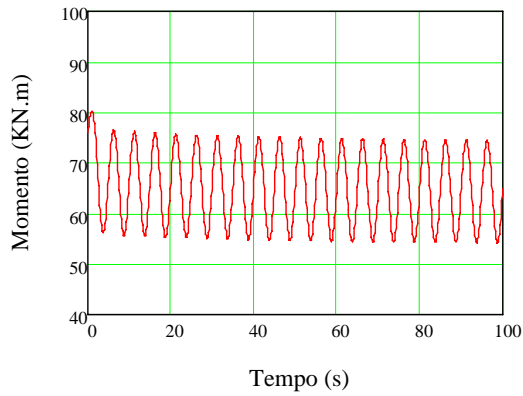


Figura 4.27: Momento no engaste x tempo

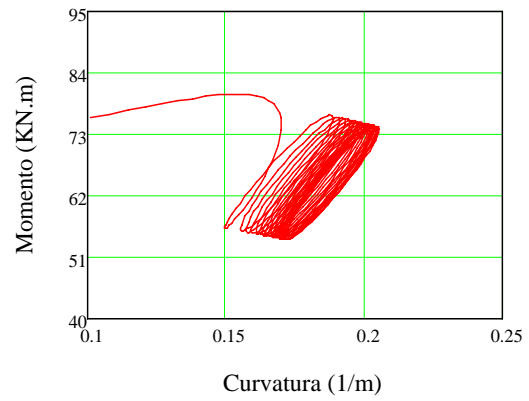


Figura 4.28: Momento x curvatura (engaste)

c) Caso 3: $\Delta F = (20\%)F_0$, $\Delta\phi = (20\%)\phi_L$ e $\delta = 0^\circ$

É aplicada uma força média de 62,5 (KN) mais uma força senoidal de amplitude de 20% da força média. O ângulo no extremo segue o mesmo princípio da força, estas encontram-se em fase.

Na figura 4.29 a posição vertical do extremo apresenta oscilações com uma amplitude em torno de 0,24 (m), mas ainda assim encontra-se movimentado para cima. Na figura 4.30 pode-se ver como a curvatura máxima diminui no transcurso do tempo e a amplitude de oscilação está em torno de 0,11 (1/m). Na figura 4.31 é apresentado o comportamento do momento fletor, seu valor médio encontra-se descendo e a amplitude é de 23,12 (KN.m). Na figura 4.32 é apresentado o laço de histerese do momento-curvatura, podendo-se apreciar melhor como o momento fletor diminui no transcurso do tempo e a curvatura no engaste tende a aumentar.

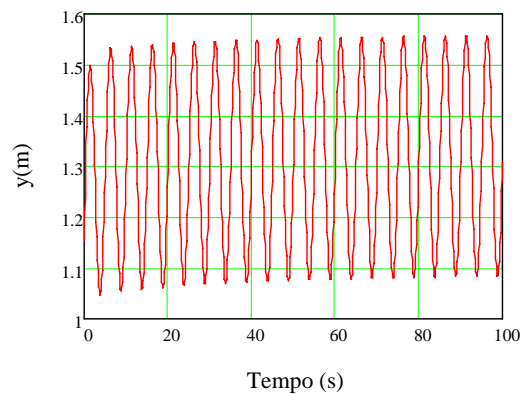


Figura 4.29: Posição vertical do extremo x tempo

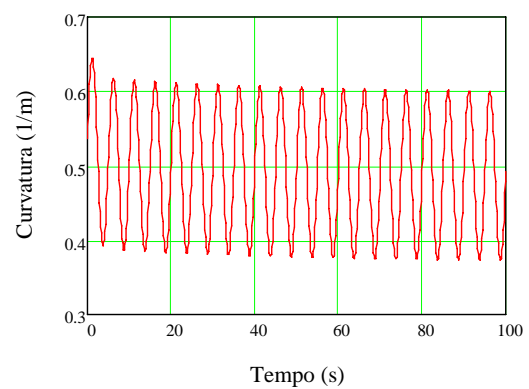


Figura 4.30: Comportamento da curvatura máxima x tempo

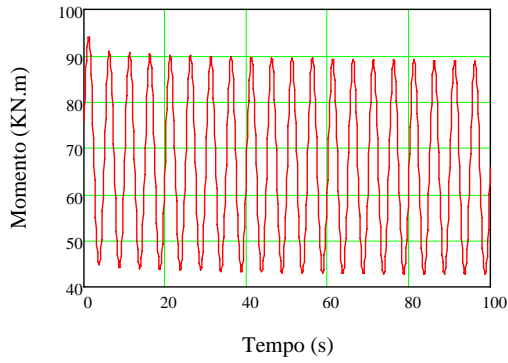


Figura 4.31: Momento no engaste x tempo

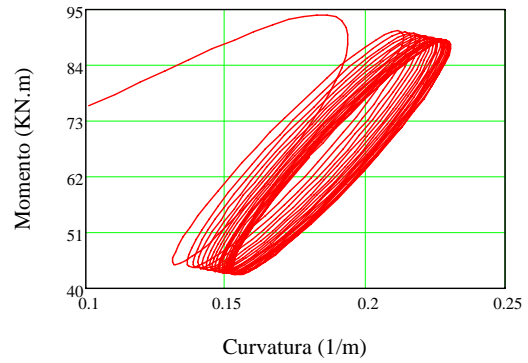


Figura 4.32: Momento x curvatura (engaste)

d) Caso 4: $\Delta F = (20\%)F_0$, $\Delta\phi = (20\%)\phi_L$ e $\delta = 30^\circ$

O caso quatro é de similar característica que o caso três, diferenciando-se pelo ângulo de fase entre a força imposta e o ângulo no extremo.

Na figura 4.33 a posição vertical do extremo apresenta oscilações com uma amplitude de 0,23 (m). Na figura 4.34 pode-se ver como a curvatura máxima diminui e a amplitude de oscilação está em torno de 0,11 (1/m). Na figura 4.35 é apresentado o comportamento do momento fletor, sua amplitude de oscilação é de 22,425 (KN.m). Na figura 4.36 é apresentado o laço de histerese do momento-curvatura, o momento no engaste está descendo constantemente e a curvatura está aumentando ligeiramente. O enrijecedor encontra-se relaxando.

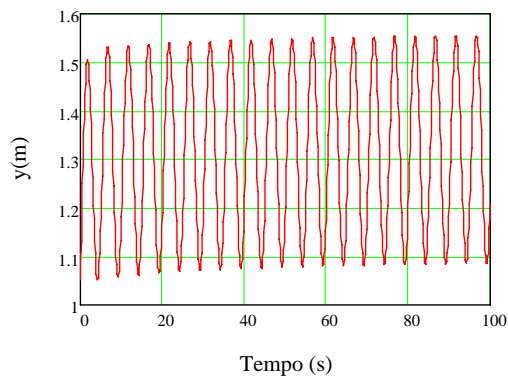


Figura 4.33: Posição vertical do extremo x tempo

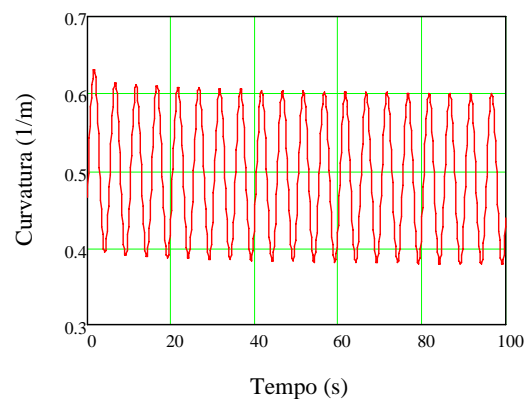


Figura 4.34: Comportamento da curvatura máxima x tempo

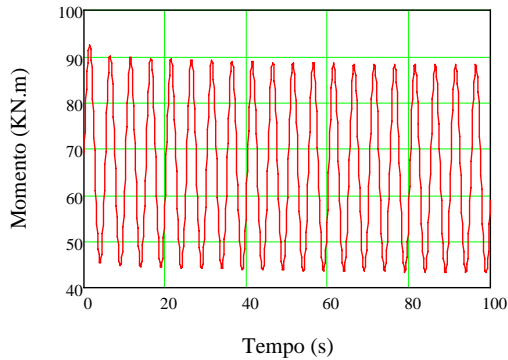


Figura 4.35: Momento no engaste x tempo

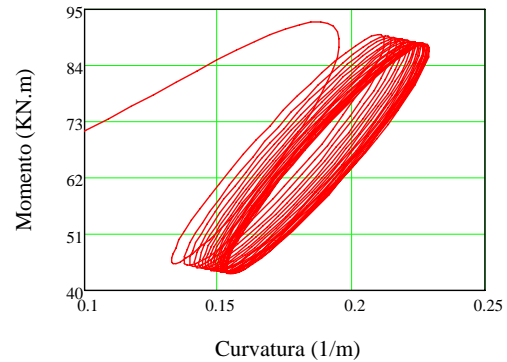


Figura 4.36: Momento x curvatura (engaste)

e) Caso 5: $\Delta F = (20\%)F_0$, $\Delta\phi = (20\%)\phi_L$ e $\delta = 45^\circ$

A força imposta e o ângulo do contorno encontram-se defasados 45 graus, a força oscila em torno de 62,5 (KN) com uma amplitude de 20% e o ângulo oscila em torno de 45° com uma amplitude de 20% do ângulo médio.

Na figura 4.37 a posição vertical do extremo apresenta oscilações com uma amplitude de 0,23 (m). Na figura 4.38 pode-se ver como a curvatura máxima diminui e a amplitude de oscilação está em torno de 0,108 (1/m). Na figura 4.39 é apresentado o comportamento do momento fletor, sua amplitude de oscilação é de 21,525 (KN.m). Na figura 4.40 é apresentado o laço de histerese do momento-curvatura, o momento no engaste está descendo constantemente e a curvatura está aumentando ligeiramente. O laço da histerese ainda não estabiliza.

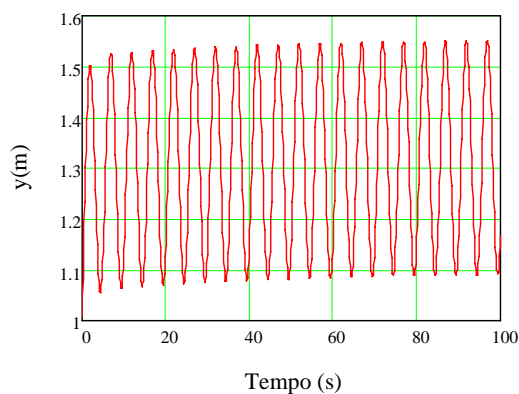


Figura 4.37: Posição vertical do extremo x tempo

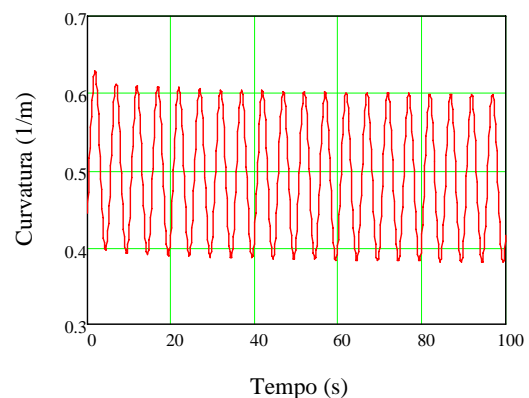


Figura 4.38: Comportamento da curvatura máxima x tempo

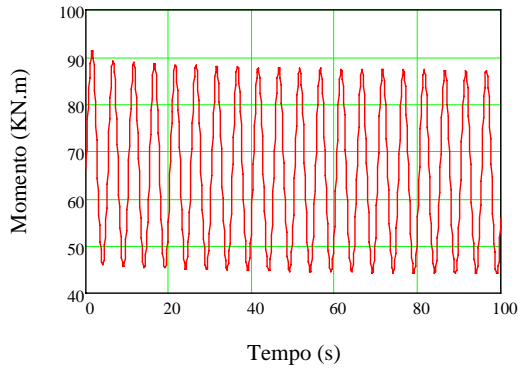


Figura 4.39: Momento no engaste x tempo

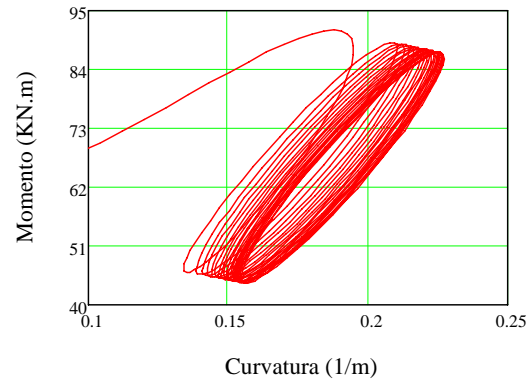


Figura 4.40: Momento x curvatura (engaste)

f) Caso 6: $\Delta F = (20\%)F_0$, $\Delta\phi = (20\%)\phi_L$ e $\delta = 90^\circ$

A força imposta e o ângulo do contorno encontram-se defasados 90° , a força oscila em torno de 62,5 (KN) com uma amplitude de 20% e o ângulo oscila em torno de 45° com uma amplitude de 20% do ângulo médio.

Na figura 4.41 a posição vertical do extremo apresenta oscilações com uma amplitude de 0,207 (m). Na figura 4.42 pode-se ver como a curvatura máxima diminui e a amplitude de oscilação está em torno de 0,103 (1/m). Na figura 4.43 é apresentado o comportamento do momento fletor e sua amplitude de oscilação é de 16,785 (KN.m). Na figura 4.44 é apresentado o laço de histerese do momento-curvatura, a variação do momento fletor e da curvatura é menor comparada com os casos 3, 4 e 5.

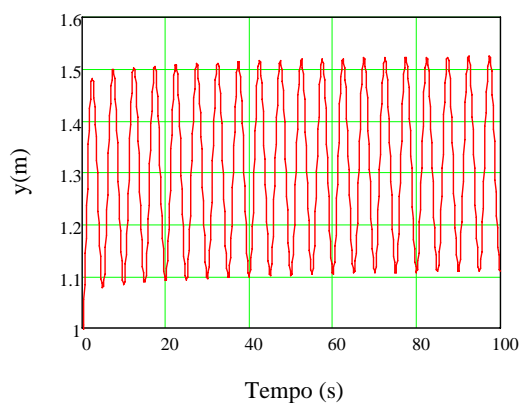


Figura 4.41: Posição vertical do extremo x tempo

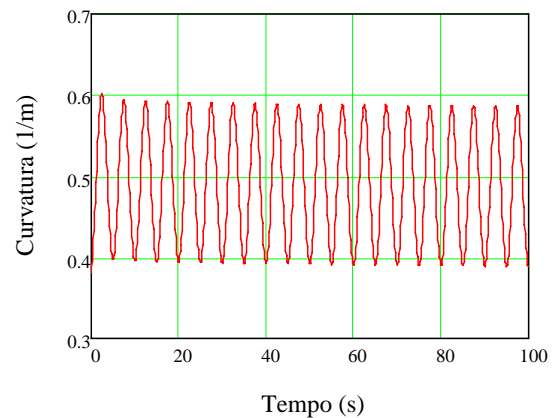


Figura 4.42: Comportamento da curvatura máxima x tempo

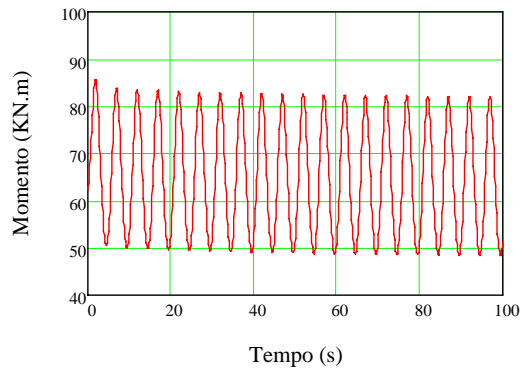


Figura 4.43: Momento no engaste x tempo

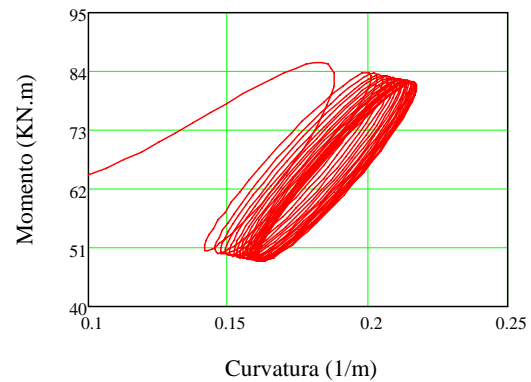


Figura 4.44: Momento x curvatura (engaste)

4.3 Comportamento viscoelástico do enrijecedor à flexão no domínio da frequência

O enrijecedor à flexão, ao ser estudado como material viscoelástico linear, muda constantemente seu comportamento no transcurso do tempo. Ao se impor um carregamento oscilatório ao enrijecedor ou considerar o ângulo no extremo com oscilações, ou tomar ambas as considerações, a resposta do enrijecedor apresentará oscilações. Estas oscilações vão diminuindo até o material relaxar por completo, onde o material oscilará sobre um valor médio com amplitudes definidas. Ao impor cargas combinadas, força média estática mais uma carga dinâmica senoidal, o momento fletor versus curvatura em cada seção do enrijecedor produz laços de histerese. O tempo necessário para a estabilização deste fenômeno depende das propriedades do material (módulo de relaxação ou fluência). O estudo será feito quando o laço de histerese estabiliza-se, ou seja, quando oscila ao longo de um só laço. Estuda-se o comportamento oscilatório do momento fletor, da curvatura e pode-se quantificar a energia dissipada em cada laço.

O ângulo no extremo devido aos movimentos próprios da linha flexível pode ser aproximado como um ângulo constante médio combinado com uma variação dinâmica senoidal que oscila com a mesma frequência que a força imposta, podendo estar em fase ou fora de fase.

4.3.1 Formulação matemática

O projeto será desenvolvido como uma viga esbelta de Bernoulli-Euler, considerando material isotrópico, homogêneo e com grandes deslocamentos das seções. O desenho do enrijecedor está apresentado nas figuras 4.1 e 4.2.

As primeiras três equações diferenciais do enrijecedor obtidas são devidas a sua geometria, equações (4.1), (4.2) e (4.4). A equação (4.10) mostra uma relação do momento fletor com a força imposta, o ângulo no extremo e o ângulo em cada seção da análise. Para desenvolver o modelo é preciso conhecer uma relação matemática entre o momento fletor, curvatura e o ângulo.

Para desenvolver o modelo matemático no domínio da frequência consideram-se algumas suposições:

- a) O problema é de flexão pura.
- b) O modelo da viga será de Bernoulli-Euler.
- c) O enrijecedor estará exposto a grandes deslocamentos, as seções permanecem planas após a deflexão.
- d) Impõem-se perturbações à força dinâmica.
- e) A resposta do enrijecedor é analisada no infinito ($tempo \rightarrow \infty$).
- f) A aproximação do ângulo, curvatura, momento fletor e posição das ordenadas x e y serão da mesma forma analítica, e todas serão expandidas em senos e cossenos.

Tomando estas considerações é possível desenvolver o modelo.

4.3.1.1 Força na extremidade

A força imposta será uma força estática mais uma força perturbada, estudo de equações diferenciais com perturbação, pode ser visto em Hooft (1982) e Thomsen (1997). A perturbação é assumida pequena ($\varepsilon \ll 1$), e quando a perturbação é zero recai-se em um problema estático. A força oscilará em torno da força média com amplitude dependente da perturbação, e considera-se que a força perturbada é de primeira ordem.

$$F(\omega, t) = F_0 + \varepsilon [F_1 \text{sen}(\omega t) + F_2 \text{cos}(\omega t)] \quad (4.44)$$

4.3.1.2 Condições de contorno

As três primeiras condições de contorno são geométricas, que são as mesmas estudadas para material hiperelástico e viscoelástico linear no domínio do tempo, equação (4.33). Na condição no extremo considera-se que oscila-se em torno de um ângulo médio e que oscila-se com a mesma frequência da força perturbada. Como no caso anterior, quando a perturbação é zero o ângulo é fixo.

$$\phi(\omega, t, L) = \phi_0(L) + \varepsilon [\phi_1(L) \text{sen}(\omega t) + \phi_2(L) \cos(\omega t)] \quad (4.45)$$

4.3.1.3 Suposições do ângulo e curvatura.

Considera-se que o ângulo e a curvatura ao longo de todo seu comprimento têm os seguintes comportamentos:

$$\phi(\omega, t, s) = \begin{cases} \phi_0(s) + \varepsilon [\phi_1(s) \text{sen}(\omega t) + \phi_2(s) \cos(\omega t)] \\ + \varepsilon^2 [\phi_3(s) + \phi_4(s) \text{sen}(2\omega t) + \phi_5(s) \cos(2\omega t)] \\ + \varepsilon^3 [\phi_6(s) \text{sen}(\omega t) + \phi_7(s) \cos(\omega t) + \phi_8(s) \text{sen}(3\omega t) + \phi_9(s) \cos(3\omega t)] \\ + O(\varepsilon^4) \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\kappa(\omega, t, s) = \begin{cases} \kappa_0(s) + \varepsilon [\kappa_1(s) \text{sen}(\omega t) + \kappa_2(s) \cos(\omega t)] \\ + \varepsilon^2 [\kappa_3 + \kappa_4(s) \text{sen}(2\omega t) + \kappa_5(s) \cos(2\omega t)] \\ + \varepsilon^3 [\kappa_6(s) \text{sen}(\omega t) + \kappa_7(s) \cos(\omega t) + \kappa_8(s) \text{sen}(3\omega t) + \kappa_9(s) \cos(3\omega t)] \\ + O(\varepsilon^4) \end{cases} \quad (4.47)$$

O ângulo e a curvatura têm a mesma representação, o coeficiente se determinará substituindo a equação (4.46) na equação (4.4):

$$\frac{\partial \phi(\omega, t, s)}{\partial s} = \begin{cases} \varepsilon^0 \frac{\partial \phi_0(s)}{\partial s} + \varepsilon \left[\frac{\partial \phi_1(s)}{\partial s} \text{sen}(\omega t) + \frac{\partial \phi_2(s)}{\partial s} \cos(\omega t) \right] \\ + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial \phi_3(s)}{\partial s} + \frac{\partial \phi_4(s)}{\partial s} \text{sen}(2\omega t) + \frac{\partial \phi_5(s)}{\partial s} \cos(2\omega t) \right] \\ + \varepsilon^3 \left[\frac{\partial \phi_6(s)}{\partial s} \text{sen}(\omega t) + \frac{\partial \phi_7(s)}{\partial s} \cos(\omega t) + \frac{\partial \phi_8(s)}{\partial s} \text{sen}(3\omega t) + \frac{\partial \phi_9(s)}{\partial s} \cos(3\omega t) \right] \\ + O(\varepsilon^4) \end{cases} \quad (4.48)$$

Igualando as equações (4.48) e (4.47), obtém-se a relação matemática entre os coeficientes do ângulo e da curvatura,

$$\frac{\partial \phi_i(s)}{\partial s} = \kappa_i(s) \quad (4.49)$$

4.3.1.4 Relação constitutiva do momento fletor e curvatura

Por suposição do modelo, o momento fletor tem a mesma representação matemática do ângulo e da curvatura:

$$M(\omega, t, s) = \begin{cases} M_0(s) + \varepsilon [M_1(s) \text{sen}(\omega t) + M_2(s) \cos(\omega t)] \\ + \varepsilon^2 [M_3 + M_4(s) \text{sen}(2\omega t) + M_5(s) \cos(2\omega t)] \\ + \varepsilon^3 [M_6(s) \text{sen}(\omega t) + M_7(s) \cos(\omega t) + M_8(s) \text{sen}(3\omega t) + M_9(s) \cos(3\omega t)] \\ + O(\varepsilon^4) \end{cases} \quad (4.50)$$

A relação matemática do momento fletor com a curvatura é dada pela equação (4.40). Substitui-se a curvatura, equação (4.47), na equação (4.40), e aproxima-se o módulo de relaxação como soma de duas funções: $G(t) = G(\infty) + \Delta G(t)$. Logo, fazendo manipulações algébricas e ordenando em forma polinomial a perturbação, obtém-se:

$$M(\omega, t, s) = \begin{cases} \varepsilon^0 \left(\kappa_0(s) [EI_1 + I_2(s)G(t)] + \right. \\ \left. \varepsilon^1 \left(\begin{aligned} &\left(\kappa_2(s)I_2(s)\Delta G(t) \right. \right. \\ &+ \left\{ \kappa_1(s) [EI_1 + I_2(s)G'(\omega, t)] - \kappa_2(s)I_2(s)G''(\omega, t) \right\} \text{sen}(\omega t) \right) + \\ &\left. \left(+ \left\{ \kappa_2(s) [EI_1 + I_2(s)G'(\omega, t)] + \kappa_1(s)I_2(s)G''(\omega, t) \right\} \cos(\omega t) \right) \right) \right. \\ \left. \varepsilon^2 \left(\begin{aligned} &\left(\kappa_3(s) [EI_1 + I_2(s)G(t)] + \kappa_5(s)I_{BS}(s)\Delta G(t) \right. \right. \\ &+ \left\{ \kappa_4(s) [EI_1 + I_2(s)G'(2\omega, t)] - \kappa_5(s)I_2(s)G''(2\omega, t) \right\} \text{sen}(2\omega t) \right) + \\ &\left. \left(+ \left\{ \kappa_5(s) [EI_1 + I_2(s)G'(2\omega, t)] + \kappa_4(s)I_2(s)G''(2\omega, t) \right\} \cos(2\omega t) \right) \right) \right. \\ \left. \varepsilon^3 \left(\begin{aligned} &\left(\kappa_7(s)I_{BS}(s)\Delta G(t) + \kappa_9(s)I_{BS}(s)\Delta G(t) \right. \right. \\ &+ \left\{ \kappa_6(s) [EI_1 + I_2(s)G'(\omega, t)] - \kappa_7(s)I_2(s)G''(\omega, t) \right\} \text{sen}(\omega t) \right) \\ &+ \left\{ \kappa_7(s) [EI_1 + I_2(s)G'(\omega, t)] + \kappa_6(s)I_2(s)G''(\omega, t) \right\} \cos(\omega t) \right) + \\ &+ \left\{ \kappa_8(s) [EI_1 + I_2(s)G'(3\omega, t)] - \kappa_9(s)I_2(s)G''(3\omega, t) \right\} \text{sen}(3\omega t) \\ &\left. \left(+ \left\{ \kappa_9(s) [EI_1 + I_2(s)G'(3\omega, t)] + \kappa_8(s)I_2(s)G''(3\omega, t) \right\} \cos(3\omega t) \right) \right) \right. \end{aligned} \right) \quad (4.51) \end{cases}$$

O momento fletor está desenvolvido para qualquer instante de tempo, equação (4.51), ainda assim a equação não é facilmente manipulável, tomando limites ($t \rightarrow \infty$) o momento fletor ficará mais reduzido:

$$M(\omega, t, s) = \begin{cases} \varepsilon^0 \left(\kappa_0(s) [EI_1 + I_2(s)G(\infty)] \right) \\ \varepsilon^1 \left(\begin{aligned} &\left\{ \kappa_1(s) [EI_1 + I_2(s)G'(\omega)] - \kappa_2(s) I_2(s)G''(\omega) \right\} \text{sen}(\omega t) \\ &\left\{ \kappa_2(s) [EI_1 + I_2(s)G'(\omega)] + \kappa_1(s) I_2(s)G''(\omega) \right\} \text{cos}(\omega t) \end{aligned} \right) \\ \varepsilon^2 \left(\begin{aligned} &\left\{ \kappa_3(s) [EI_1 + I_2(s)G(\infty)] \right. \\ &\left\{ \kappa_4(s) [EI_1 + I_2(s)G'(2\omega)] - \kappa_5(s) I_2(s)G''(2\omega) \right\} \text{sen}(2\omega t) \\ &\left. \left\{ \kappa_5(s) [EI_1 + I_2(s)G'(2\omega)] + \kappa_4(s) I_2(s)G''(2\omega) \right\} \text{cos}(2\omega t) \right) \\ \varepsilon^3 \left(\begin{aligned} &\left\{ \kappa_6(s) [EI_1 + I_2(s)G'(\omega)] - \kappa_7(s) I_2(s)G''(\omega) \right\} \text{sen}(\omega t) \\ &\left\{ \kappa_7(s) [EI_1 + I_2(s)G'(\omega)] + \kappa_6(s) I_2(s)G''(\omega) \right\} \text{cos}(\omega t) \\ &\left\{ \kappa_8(s) [EI_1 + I_2(s)G'(3\omega)] - \kappa_9(s) I_2(s)G''(3\omega) \right\} \text{sen}(3\omega t) \\ &\left\{ \kappa_9(s) [EI_1 + I_2(s)G'(3\omega)] + \kappa_8(s) I_2(s)G''(3\omega) \right\} \text{cos}(3\omega t) \end{aligned} \right) \end{cases} \quad (4.52)$$

Igualando o momento fletor das equações (4.50) e (4.52), e ordenando pelo grau da perturbação obtém-se a relação entre os coeficientes da curvatura e momento fletor:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 & \rightarrow [M_0(s)] = X_0 [\kappa_0(s)] \\ \varepsilon^1 & \rightarrow \begin{bmatrix} M_1(s) \\ M_2(s) \end{bmatrix} = X_1 \begin{bmatrix} \kappa_1(s) \\ \kappa_2(s) \end{bmatrix} \\ \varepsilon^2 & \rightarrow \begin{bmatrix} M_3(s) \\ M_4(s) \\ M_5(s) \end{bmatrix} = X_2 \begin{bmatrix} \kappa_3(s) \\ \kappa_4(s) \\ \kappa_5(s) \end{bmatrix} \\ \varepsilon^3 & \rightarrow \begin{bmatrix} M_6(s) \\ M_7(s) \\ M_8(s) \\ M_9(s) \end{bmatrix} = X_3 \begin{bmatrix} \kappa_6(s) \\ \kappa_7(s) \\ \kappa_8(s) \\ \kappa_9(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Onde:

$$\begin{aligned} X_0 &= [EI_1 + I_2(s)G(\infty)] \\ X_1 &= \begin{bmatrix} EI_1 + I_2(s)G'(\omega) & -I_2(s)G''(\omega) \\ I_2(s)G''(\omega) & EI_1 + I_2(s)G'(\omega) \end{bmatrix} \\ X_2 &= \begin{bmatrix} EI_1 + I_2(s)G(\infty) & 0 & 0 \\ 0 & EI_{riser} + I_2(s)G'(2\omega) & -I_2(s)G''(2\omega) \\ 0 & I_2(s)G''(2\omega) & EI_1 + I_2(s)G'(2\omega) \end{bmatrix} \\ X_3 &= \begin{bmatrix} EI_1 + I_2(s)G'(\omega) & -I_2(s)G''(\omega) & 0 & 0 \\ I_2(s)G''(\omega) & EI_1 + I_2(s)G'(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_1 + I_2(s)G'(3\omega) & -I_2(s)G''(3\omega) \\ 0 & 0 & I_2(s)G''(3\omega) & EI_1 + I_2(s)G'(3\omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.54)$$

4.3.1.5 Relação momento fletor ângulo

Na equação (4.10) mostra-se a relação matemática do momento fletor, ângulo e força imposta. Reescrevendo a equação e considerando a frequência obtêm-se:

$$\frac{\partial M(\omega, t, s)}{\partial s} = -F(\omega, t) \text{sen}[\alpha + \phi(\omega, t, L) - \phi(\omega, t, s)] \quad (4.55)$$

Fazendo a mudança de variável e reagrupando o ângulo da equação (4.46), obtêm-se a seguinte simplificação:

$$\begin{aligned} \phi(\omega, t, L) &= \phi_0(L) + \Delta\phi(\omega, t, L) \\ \phi(\omega, t, s) &= \phi_0(s) + \Delta\phi(\omega, t, s) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Onde:

$$\Delta\phi(\omega, t, s) = \begin{cases} \varepsilon [\phi_1(s) \text{sen}(\omega t) + \phi_2(s) \cos(\omega t)] \\ + \varepsilon^2 [\phi_3(s) + \phi_4(s) \text{sen}(2\omega t) + \phi_5(s) \cos(2\omega t)] \\ + \varepsilon^3 [\phi_6(s) \text{sen}(\omega t) + \phi_7(s) \cos(\omega t) + \phi_8(s) \text{sen}(3\omega t) + \phi_9(s) \cos(3\omega t)] + O(\varepsilon^4) \end{cases}$$

O ângulo interno da função senoidal, equação (4.55) será simplificado usando a seguinte mudança de variável:

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \alpha + \phi_0(L) - \phi_0(s) \\ \Delta\theta(s, \omega, t) &= \Delta\phi(\omega, t, L) - \Delta\phi(\omega, t, s) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Expandindo-se as funções seno e cosseno, e considerando uma aproximação de segunda ordem para ter melhor aproximação no modelo matemático, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\Delta\varphi) &\approx \Delta\varphi - \frac{\Delta\varphi^3}{3!} \\ \cos(\Delta\varphi) &\approx 1 - \frac{\Delta\varphi^2}{2!} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Substituindo as equações (4.56) e (4.57) na função senoidal da equação (4.55) e considerando a aproximação de (4.58), e fazendo manipulações algébricas obtêm-se:

$$\text{sen}[\alpha + \phi(w, t, L) - \phi(w, t, s)] = \begin{cases} \text{sen}[\theta(s)] + \cos[\theta(s)]\Delta\theta(s, w, t) \\ -\frac{\text{sen}[\theta(s)]\Delta\theta(s, w, t)^2}{2} - \frac{\cos[\theta(s)]\Delta\theta(s, w, t)^3}{6} \end{cases} \quad (4.59)$$

Derivando-se o momento fletor da equação (4.50) com respeito à posição:

$$\frac{\partial M(w, t, s)}{\partial s} = \begin{cases} \varepsilon^0 \frac{\partial M_0(s)}{\partial s} + \\ \varepsilon^1 \left[\frac{\partial M_1(s)}{\partial s} \text{sen}(wt) + \frac{\partial M_2(s)}{\partial s} \cos(wt) \right] + \\ \varepsilon^2 \left[\frac{\partial M_3(s)}{\partial s} + \frac{\partial M_4(s)}{\partial s} \text{sen}(2wt) + \frac{\partial M_5(s)}{\partial s} \cos(2wt) \right] + \\ \varepsilon^3 \left[\frac{\partial M_6(s)}{\partial s} \text{sen}(wt) + \frac{\partial M_7(s)}{\partial s} \cos(wt) + \frac{\partial M_8(s)}{\partial s} \text{sen}(3wt) + \frac{\partial M_9(s)}{\partial s} \cos(3wt) \right] \end{cases} \quad (4.60)$$

Substituindo as equações (4.59) e (4.44) em (4.55), fazendo manipulações algébricas e reagrupando as equações pelo grau do polinômio de perturbação obtém-se a seguinte equação,

$$\frac{\partial M(wt, s)}{\partial s} = \begin{cases} \varepsilon^0 [F_0 \text{sen}(\theta(s))] + \\ \varepsilon^1 \left[\begin{aligned} & (F_0 \cos(\theta(s))A_1 + F_1 \text{sen}(\theta(s))) \text{sen}(wt) + \\ & (F_0 \cos(\theta(s))A_2 + F_2 \text{sen}(\theta(s))) \cos(wt) \end{aligned} \right] + \\ \varepsilon^2 \left[\begin{aligned} & F_0 \left\{ \cos(\theta(s))A_3 - \frac{1}{2} \text{sen}(\theta(s))B_1 \right\} + \frac{\cos(\theta(s))}{2} \{F_1A_1 + F_2A_2\} + \\ & \left(F_0 \left\{ \cos(\theta(s))A_4 - \frac{1}{2} \text{sen}(\theta(s))B_2 \right\} + \frac{\cos(\theta(s))}{2} \{F_1A_2 + F_2A_1\} \right) \text{sen}(2wt) + \\ & \left(F_0 \left\{ \cos(\theta(s))A_5 - \frac{1}{2} \text{sen}(\theta(s))B_3 \right\} + \frac{\cos(\theta(s))}{2} \{F_2A_2 - F_1A_1\} \right) \cos(2wt) \end{aligned} \right] + \\ \varepsilon^3 \left[\begin{aligned} & \left(\cos(\theta(s)) \left\{ F_0 \left[A_6 - \frac{D_1}{6} \right] + F_1A_3 + \frac{1}{2} [F_2A_4 - F_1A_5] \right\} + \right) \text{sen}(wt) \\ & \left(-\frac{1}{2} \text{sen}(\theta(s)) \left\{ F_0C_1 + F_1B_1 + \frac{1}{2} [F_2B_2 - F_1B_3] \right\} \right) \end{aligned} \right] + \\ \varepsilon^3 \left[\begin{aligned} & \left(\cos(\theta(s)) \left\{ F_0 \left[A_7 - \frac{D_2}{6} \right] + F_2A_3 + \frac{1}{2} [F_1A_4 - F_2A_5] \right\} + \right) \cos(wt) \\ & \left(-\frac{1}{2} \text{sen}(\theta(s)) \left\{ F_0C_2 + F_2B_1 + \frac{1}{2} [F_1B_2 + F_2B_3] \right\} \right) \end{aligned} \right] + \\ \varepsilon^3 \left[\begin{aligned} & \left(\cos(\theta(s)) \left\{ F_0 \left[A_8 - \frac{D_3}{6} \right] + \frac{1}{2} [F_2A_4 + F_1A_5] \right\} \right) \text{sen}(3wt) \\ & \left(-\frac{1}{2} \text{sen}(\theta(s)) \left\{ F_0C_3 + \frac{1}{2} [F_2B_2 + F_1B_1] \right\} \right) \end{aligned} \right] + \\ \varepsilon^3 \left[\begin{aligned} & \left(\cos(\theta(s)) \left\{ F_0 \left[A_9 - \frac{D_4}{6} \right] + \frac{1}{2} [F_2A_5 - F_1A_4] \right\} \right) \cos(3wt) \\ & \left(-\frac{1}{2} \text{sen}(\theta(s)) \left\{ F_0C_4 + \frac{1}{2} [F_2B_3 - F_1B_2] \right\} \right) \end{aligned} \right] \end{cases} \quad (4.61)$$

Onde:

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \phi_1(L) - \phi_1(s) \\ A_2(s) &= \phi_2(L) - \phi_2(s) \\ A_i(s) &= -\phi_i(s) \quad \forall \quad i \geq 3 \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} B_1(s) &= \frac{1}{2} [A_1(s)^2 + A_2(s)^2] \\ B_2(s) &= A_1(s)A_2(s) \\ B_3(s) &= \frac{1}{2} [A_2(s)^2 - A_1(s)^2] \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} C_1(s) &= 2A_1(s)A_3(s) - A_1(s)A_5(s) + A_2(s)A_4(s) \\ C_2(s) &= 2A_2(s)A_3(s) + A_1(s)A_4(s) + A_2(s)A_5(s) \\ C_3(s) &= A_1(s)A_5(s) + A_2(s)A_4(s) \\ C_4(s) &= A_2(s)A_5(s) - A_1(s)A_4(s) \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} D_1(s) &= \frac{3}{4} [A_1(s)A_2(s)^2 + A_1(s)^3] \\ D_2(s) &= \frac{3}{4} [A_1(s)^2A_2(s) + A_2(s)^3] \\ D_3(s) &= \frac{1}{4} [3A_1(s)A_2(s)^2 - A_1(s)^3] \\ D_4(s) &= \frac{1}{4} [A_2(s)^3 - 3A_1(s)^2A_2(s)] \end{aligned} \quad (4.65)$$

As equações (4.60) e (4.61) são iguais, igualando termo a termo obtém-se um sistema de equações diferenciais não lineares. As equações (4.62-65) serão obtidas desenvolvendo a equação diferencial em ordem do grau do polinômio de perturbação.

- Ordem ε^0 :

$$\frac{\partial M_0(s)}{\partial s} = -F_0 \text{sen}(\theta(s)) \quad (4.66)$$

- Ordem ε^1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1(s)}{\partial s} &= -[F_0 \cos(\theta(s))A_1 + F_1 \text{sen}(\theta(s))] \\ \frac{\partial M_2(s)}{\partial s} &= -[F_0 \cos(\theta(s))A_2 + F_2 \text{sen}(\theta(s))] \end{aligned} \quad (4.67)$$

- Ordem ε^2 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_3(s)}{\partial s} &= - \left[F_0 \left\{ \cos(\theta(s)) A_3 - \frac{1}{2} \text{sen}(\theta(s)) B_1 \right\} + \frac{\cos(\theta(s))}{2} \{ F_1 A_1 + F_2 A_2 \} \right] \\
\frac{\partial M_4(s)}{\partial s} &= - \left[F_0 \left\{ \cos(\theta(s)) A_4 - \frac{1}{2} \text{sen}(\theta(s)) B_2 \right\} + \frac{\cos(\theta(s))}{2} \{ F_1 A_2 + F_2 A_1 \} \right] \\
\frac{\partial M_5(s)}{\partial s} &= - \left[F_0 \left\{ \cos(\theta(s)) A_5 - \frac{1}{2} \text{sen}(\theta(s)) B_3 \right\} + \frac{\cos(\theta(s))}{2} \{ F_2 A_2 - F_1 A_1 \} \right]
\end{aligned} \tag{4.68}$$

- Ordem ε^3 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_6(s)}{\partial s} &= - \left\{ \begin{aligned} &\cos[\theta(s)] \left[F_0 \left(A_6 - \frac{D_1}{6} \right) + F_1 A_3 + \frac{1}{2} (F_2 A_4 - F_1 A_5) \right] \\ &-\frac{1}{2} \text{sen}[\theta(s)] \left[F_0 C_1 + F_1 B_1 + \frac{1}{2} (F_2 B_2 - F_1 B_3) \right] \end{aligned} \right\} \\
\frac{\partial M_7(s)}{\partial s} &= - \left\{ \begin{aligned} &\cos[\theta(s)] \left[F_0 \left(A_7 - \frac{D_2}{6} \right) + F_2 A_3 + \frac{1}{2} (F_1 A_4 - F_2 A_5) \right] \\ &-\frac{1}{2} \text{sen}[\theta(s)] \left[F_0 C_2 + F_2 B_1 + \frac{1}{2} (F_1 B_2 + F_2 B_3) \right] \end{aligned} \right\} \\
\frac{\partial M_8(s)}{\partial s} &= - \left\{ \begin{aligned} &\cos[\theta(s)] \left[F_0 \left(A_8 - \frac{D_3}{6} \right) + \frac{1}{2} (F_2 A_4 + F_1 A_5) \right] \\ &-\frac{1}{2} \text{sen}[\theta(s)] \left[F_0 C_3 + \frac{1}{2} (F_2 B_2 + F_1 B_1) \right] \end{aligned} \right\} \\
\frac{\partial M_9(s)}{\partial s} &= - \left\{ \begin{aligned} &\cos[\theta(s)] \left[F_0 \left(A_9 - \frac{D_4}{6} \right) + \frac{1}{2} (F_2 A_5 - F_1 A_4) \right] \\ &-\frac{1}{2} \text{sen}[\theta(s)] \left[F_0 C_4 + \frac{1}{2} (F_2 B_3 - F_1 B_2) \right] \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

O modelo matemático está desenvolvido para a relação momento-ângulo. Para obter-se a curvatura, substitui-se os coeficientes do momento fletor obtidos das equações (4.66-69) na equação (4.53) após substituir os coeficientes da curvatura na equação (4.47), obtendo o comportamento da curvatura. Outros autores consideram as equações diferenciais do enrijecedor curvatura-ângulo, pode-se desenvolver no presente modelo em função da curvatura-ângulo substituindo as equações (4.66-69) na equação (4.52), mas a equação da curvatura resultante fica muito estendida e será omitida no presente estudo.

As equações diferenciais (4.66-69) e as condições de contorno equação (4.33) desenvolvem a relação momento-ângulo do enrijecedor linha flexível. Estas equações diferenciais serão desenvolvidas em forma numérica pelo método numérico das diferenças finitas. Para a programação usou-se o programa Mathcad®.

4.3.1.6 Configuração das coordenadas do enrijecedor

As coordenadas do enrijecedor são dadas por: $x(\omega, t, s)$ e $y(\omega, t, s)$, estas coordenadas têm a mesma representação analítica do momento fletor, pelas suposições do modelo:

$$x(\omega, t, s) = \begin{cases} \varepsilon^0 x_0(s) \\ +\varepsilon^1 [x_1(s)\text{sen}(\omega t) + x_2(s)\text{cos}(\omega t)] \\ +\varepsilon^2 [x_3 + x_4(s)\text{sen}(2\omega t) + x_5(s)\text{cos}(2\omega t)] \\ +\varepsilon^3 [x_6(s)\text{sen}(\omega t) + x_7(s)\text{cos}(\omega t) + x_8(s)\text{sen}(3\omega t) + x_9(s)\text{cos}(3\omega t)] \\ +O(\varepsilon^4) \end{cases} \quad (4.70)$$

$$y(\omega, t, s) = \begin{cases} \varepsilon^0 y_0(s) \\ +\varepsilon^1 [y_1(s)\text{sen}(\omega t) + y_2(s)\text{cos}(\omega t)] \\ +\varepsilon^2 [y_3 + y_4(s)\text{sen}(2\omega t) + y_5(s)\text{cos}(2\omega t)] \\ +\varepsilon^3 [y_6(s)\text{sen}(\omega t) + y_7(s)\text{cos}(\omega t) + y_8(s)\text{sen}(3\omega t) + y_9(s)\text{cos}(3\omega t)] \\ +O(\varepsilon^4) \end{cases} \quad (4.71)$$

Para se desenvolver as coordenadas $x(\omega, t, s)$ e $y(\omega, t, s)$ do enrijecedor, substituí-se o ângulo, equação (4.46), na (4.58) obtendo-se:

$$\text{sen}[\phi(\omega, t, L)] = \begin{cases} \varepsilon^0 [\text{sen}(\phi_0(s))] + \\ \varepsilon^1 \left[\begin{array}{l} \phi_1 \text{cos}(\phi_0(s)) \text{sen}(wt) + \\ \phi_2 \text{cos}(\phi_0(s)) \text{cos}(wt) \end{array} \right] + \\ \varepsilon^2 \left[\begin{array}{l} \left[\phi_3 \text{cos}(\phi_0(s)) - \frac{a_1}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) \right. \\ \left. \left(\phi_4 \text{cos}(\phi_0(s)) - \frac{a_2}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) \right) \text{sen}(2wt) \right] + \\ \left. \left(\phi_5 \text{cos}(\phi_0(s)) - \frac{a_3}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) \right) \text{cos}(2wt) \right] \\ \varepsilon^3 \left[\begin{array}{l} \left(\phi_6 \text{cos}(\phi_0(s)) - \frac{b_1}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) - \frac{c_1}{6} \text{cos}(\phi_0(s)) \right) \text{sen}(wt) \\ \left(\phi_7 \text{cos}(\phi_0(s)) - \frac{b_2}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) - \frac{c_2}{6} \text{cos}(\phi_0(s)) \right) \text{cos}(wt) \\ \left(\phi_8 \text{cos}(\phi_0(s)) - \frac{b_3}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) - \frac{c_3}{6} \text{cos}(\phi_0(s)) \right) \text{sen}(3wt) \\ \left(\phi_9 \text{cos}(\phi_0(s)) - \frac{b_4}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) - \frac{c_4}{6} \text{cos}(\phi_0(s)) \right) \text{cos}(3wt) \end{array} \right] \end{cases} \quad (4.72)$$

$$\cos[\phi(\omega, t, L)] = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^0 \left[\cos(\phi_0(s)) \right] + \\ \varepsilon^1 (-1) \left[\begin{array}{l} \phi_1 \text{sen}(\phi_0(s)) \text{sen}(wt) + \\ \phi_2 \text{sen}(\phi_0(s)) \cos(wt) \end{array} \right] + \\ \varepsilon^2 (-1) \left[\begin{array}{l} \phi_3 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{a_1}{2} \cos(\phi_0(s)) \\ \left(\phi_4 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{a_2}{2} \cos(\phi_0(s)) \right) \text{sen}(2wt) + \\ \left(\phi_5 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{a_3}{2} \cos(\phi_0(s)) \right) \cos(2wt) \end{array} \right] + \\ \varepsilon^3 (-1) \left[\begin{array}{l} \left(\phi_6 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{b_1}{2} \cos(\phi_0(s)) - \frac{c_1}{6} \text{sen}(\phi_0(s)) \right) \text{sen}(wt) \\ \left(\phi_7 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{b_2}{2} \cos(\phi_0(s)) - \frac{c_2}{6} \text{sen}(\phi_0(s)) \right) \cos(wt) \\ \left(\phi_8 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{b_3}{2} \cos(\phi_0(s)) - \frac{c_3}{6} \text{sen}(\phi_0(s)) \right) \text{sen}(3wt) \\ \left(\phi_9 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{b_4}{2} \cos(\phi_0(s)) - \frac{c_4}{6} \text{sen}(\phi_0(s)) \right) \cos(3wt) \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (4.73)$$

Onde:

$$a_1(s) = \frac{1}{2} [\phi_1(s)^2 + \phi_2(s)^2]$$

$$a_2(s) = \phi_1(s)\phi_2(s)$$

$$a_3(s) = \frac{1}{2} [\phi_2(s)^2 - \phi_1(s)^2]$$

$$b_1(s) = 2\phi_1(s)\phi_3(s) - \phi_1(s)\phi_5(s) + \phi_2(s)\phi_4(s)$$

$$b_2(s) = 2\phi_2(s)\phi_3(s) + \phi_1(s)\phi_4(s) + \phi_2(s)\phi_5(s)$$

$$b_3(s) = \phi_1(s)\phi_5(s) + \phi_2(s)\phi_4(s)$$

$$b_4(s) = \phi_2(s)\phi_5(s) - \phi_1(s)\phi_4(s)$$

$$c_1(s) = \frac{3}{4} [\phi_1(s)\phi_2(s)^2 + \phi_1(s)^3]$$

$$c_2(s) = \frac{3}{4} [\phi_1(s)^2\phi_2(s) + \phi_2(s)^3]$$

$$c_3(s) = \frac{1}{4} [3\phi_1(s)\phi_2(s)^2 - \phi_1(s)^3]$$

$$c_4(s) = \frac{1}{4} [\phi_2(s)^3 - 3\phi_1(s)^2\phi_2(s)]$$

Após, substituí-se as equações (4.70) e (4.73) na (4.1) para a ordenada $x(\omega, t, s)$ e para a ordenada $y(\omega, t, s)$ substituí-se as equações (4.71) e (4.72) na (4.2). Após manipulações algébricas e ordenando-se o polinômio da perturbação, obtém-se:

- Ordem ε^0 :

$$\frac{\partial x_0(s)}{\partial s} = \cos(\phi_0(s)) \quad \vee \quad \frac{\partial y_0(s)}{\partial s} = \text{sen}(\phi_0(s)) \quad (4.74)$$

- Ordem ε^1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1(s)}{\partial s} &= -\phi_1 \text{sen}(\phi_0(s)) & \vee & \quad \frac{\partial y_1(s)}{\partial s} = -\phi_1 \cos(\phi_0(s)) \\ \frac{\partial x_2(s)}{\partial s} &= -\phi_2 \text{sen}(\phi_0(s)) & \vee & \quad \frac{\partial y_2(s)}{\partial s} = -\phi_2 \cos(\phi_0(s)) \end{aligned} \quad (4.75)$$

- Ordem ε^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_3(s)}{\partial s} &= -\left[\phi_3 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{a_1}{2} \cos(\phi_0(s)) \right] & \vee & \quad \frac{\partial y_3(s)}{\partial s} = \left[\phi_3 \cos(\phi_0(s)) - \frac{a_1}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) \right] \\ \frac{\partial x_4(s)}{\partial s} &= -\left[\phi_4 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{a_2}{2} \cos(\phi_0(s)) \right] & \vee & \quad \frac{\partial y_4(s)}{\partial s} = \left[\phi_4 \cos(\phi_0(s)) - \frac{a_2}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) \right] \\ \frac{\partial x_5(s)}{\partial s} &= -\left[\phi_5 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{a_3}{2} \cos(\phi_0(s)) \right] & \vee & \quad \frac{\partial y_5(s)}{\partial s} = \left[\phi_5 \cos(\phi_0(s)) - \frac{a_3}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) \right] \end{aligned} \quad (4.76)$$

- Ordem ε^3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_6(s)}{\partial s} &= -\left[\phi_6 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{b_1}{2} \cos(\phi_0(s)) - \frac{c_1}{6} \text{sen}(\phi_0(s)) \right] \\ \frac{\partial x_7(s)}{\partial s} &= -\left[\phi_7 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{b_2}{2} \cos(\phi_0(s)) - \frac{c_2}{6} \text{sen}(\phi_0(s)) \right] \\ \frac{\partial x_8(s)}{\partial s} &= -\left[\phi_8 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{b_3}{2} \cos(\phi_0(s)) - \frac{c_3}{6} \text{sen}(\phi_0(s)) \right] \\ \frac{\partial x_9(s)}{\partial s} &= -\left[\phi_9 \text{sen}(\phi_0(s)) + \frac{b_4}{2} \cos(\phi_0(s)) - \frac{c_4}{6} \text{sen}(\phi_0(s)) \right] \\ \frac{\partial y_6(s)}{\partial s} &= \left[\phi_6 \cos(\phi_0(s)) - \frac{b_1}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) - \frac{c_1}{6} \cos(\phi_0(s)) \right] \\ \frac{\partial y_7(s)}{\partial s} &= \left[\phi_7 \cos(\phi_0(s)) - \frac{b_2}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) - \frac{c_2}{6} \cos(\phi_0(s)) \right] \\ \frac{\partial y_8(s)}{\partial s} &= \left[\phi_8 \cos(\phi_0(s)) - \frac{b_3}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) - \frac{c_3}{6} \cos(\phi_0(s)) \right] \\ \frac{\partial y_9(s)}{\partial s} &= \left[\phi_9 \cos(\phi_0(s)) - \frac{b_4}{2} \text{sen}(\phi_0(s)) - \frac{c_4}{6} \cos(\phi_0(s)) \right] \end{aligned} \quad (4.77)$$

Com o modelo desenvolvido pode-se quantificar a energia dissipada, energia potencial e o amortecimento viscoelástico para cada faixa de frequência e ângulos de defasagem.

4.3.2 Estudo de casos e resultados

A geometria será a mesma considerada em toda a dissertação, vide figura 4.1. As equações (4.44) e (4.45) mostram a força imposta e o ângulo no extremo, respectivamente. A equação (4.78) mostra equivalência da variação da força e o ângulo. Nos estudos de casos será considerado $F_2 = 0$. Será tomada para a análise a série de Prony no domínio da frequência. A tabela 4.3 apresenta os valores que serão usados ao longo de todos os casos.

$$\begin{aligned}\Delta F &= \varepsilon \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \\ \Delta \phi &= \varepsilon \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} \\ \delta &= -\arctg\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)\end{aligned}\tag{4.78}$$

Tabela 4.3: Coeficientes de cargas e propriedades do estudo

Força	$F_0 = 62,5 - 500 \text{ KN}$
Ângulo	$\phi_L = 45^\circ$
Coeficiente de perturbação	$\varepsilon = 0,1$
Variação de força e angulo	$\Delta F = (10\% \text{ e } 20\%) F_0$ $\Delta \phi = (10\% \text{ e } 20\%) \phi_L$
Frequência	$f = 0,01 - 1 \text{ Hz}$
Ângulo de fase	$\delta = 0^\circ - 90^\circ$
Rigidez da linha flexível	$EI_1 = 10 \text{ KN m}^2$

a) Caso 1: Força aplicada: $F_0 = 62,5 \text{ (KN)}$, $\Delta F = (10\%)F_0$ e $\Delta\phi = (10\%)\phi_L$

É aplicada uma força no extremo da linha flexível, vide equação (4.37), a força média imposta é de 62,5 (KN) com amplitude do ângulo senoidal de 10% da força. O ângulo médio imposto é de 45° mais um ângulo senoidal de amplitude de 10% do ângulo médio, equação (4.38).

Nas análises seguintes o estudo será feito no domínio da frequência. Na figura 4.45 foram tomadas as maiores curvaturas para cada ângulo de fase, podendo-se apreciar como a curvatura muda no domínio da frequência, a curvatura máxima calculada é 0,54248 (1/m) e a menor 0,53647 (1/m) que representa 1,1% de variação. Ao se aumentar a frequência a curvatura máxima encontra-se em torno de 0,2 Hz, para logo descer.

Na figura 4.46 é apresentada a distribuição discreta dos harmônicos da curvatura correspondente à posição onde acontece a maior curvatura, a frequência de excitação é de 0,15 Hz, a força e o ângulo na extremidade encontra-se em fase (0°). O valor mais significativo corresponde aos dois primeiros harmônicos, cada vez que se considera mais termos os valores deixam de ser representativo. Os valores não estão afetados pela perturbação.

Na figura 4.47 é apresentada a variação da curvatura (máxima curvatura menos a menor curvatura), apresentando uma variação de 28,4% do valor máximo com respeito ao valor mínimo. O valor máximo da variação de curvatura corresponde quando a força e o ângulo são funções ortogonais e quando encontra-se a altas frequências. O valor mínimo corresponde ao ângulo de defasagem de 75° a baixas frequências.

Na figura 4.48 é apresentada a energia dissipada por cada oscilação, podendo-se observar que a maior perda de energia acontece quando a força imposta e o ângulo na extremidade encontram-se em fase (0°), em uma frequência de 0.15 Hz.

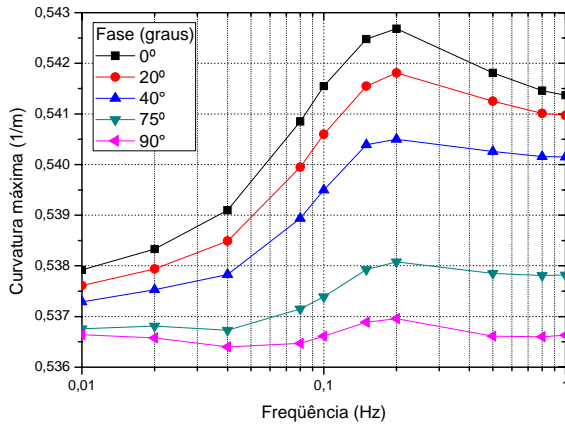


Figura 4.45: Curvatura máxima x frequência

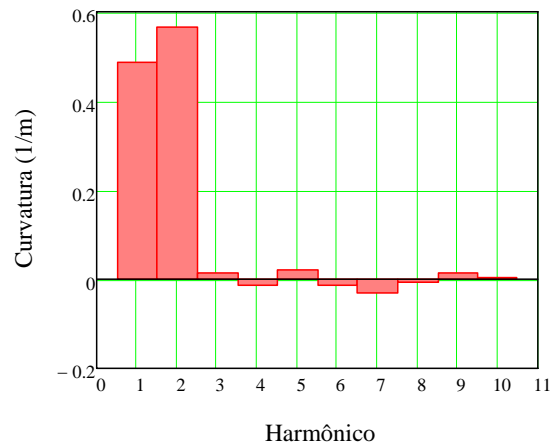


Figura 4.46: Distribuição discreta dos harmônicos da curvatura

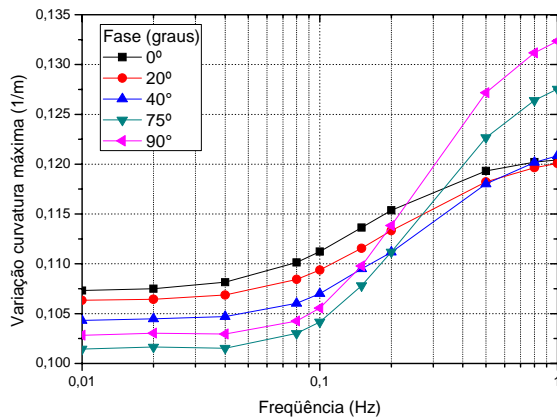


Figura 4.47: Variação da curvatura máxima x frequência

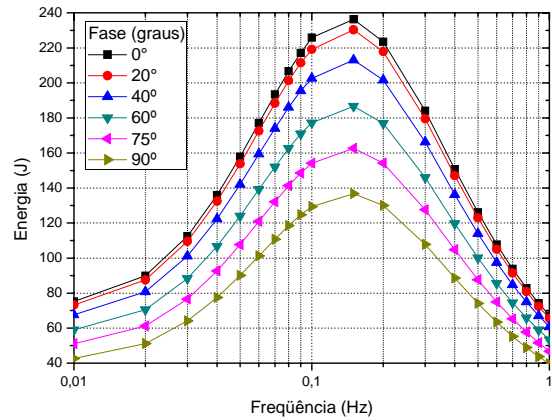


Figura 4.48: Energia dissipada x frequência

b) Caso 2: Força aplicada: $F_0 = 125(KN)$, $\Delta F = (10\%) F_0$ e $\Delta\phi = (10\%) \phi_L$

É aplicada uma força no extremo da linha flexível, vide equação (4.37), a força média imposta é de 125 (KN) com amplitude do ângulo senoidal de 10% da força. O ângulo médio imposto é de 45° mais um ângulo senoidal de amplitude de 10% do ângulo médio, equação (4.38).

Na figura 4.49 a curvatura máxima calculada é 0,52863 (1/m) correspondente ao ângulo de fase 0° e a uma frequência de 0,1 Hz e a menor curvatura é 0,52056 (1/m), que é

dada quando estas encontram-se defasadas 90° , que representa 1,5% de variação de curvaturas máximas.

Na figura 4.50 é apresentada a distribuição discreta dos harmônicos da curvatura correspondente à posição onde acontece a maior curvatura, a frequência de excitação é de 0,15 Hz, a força e o ângulo na extremidade encontra-se em fase (0°). O valor mais significativo corresponde aos dois primeiros harmônicos, cada vez que se considera mais termos os valores deixam de ser representativo. Os valores não estão afetados pela perturbação.

Na figura 4.51 é apresentado o comportamento da variação máxima de curvatura, apresentando uma variação de até 18,3% do valor máximo com respeito ao valor mínimo. O valor máximo da variação de curvatura corresponde ao ângulo de defasagem de 90° .

Na figura 4.52 é apresentada a energia dissipada, podendo-se observar sempre que a maior perda de energia acontece quando a força e o ângulo no extremo encontram-se em fase, e a menor perda de energia acontece quando estas encontram-se 90° fora de fase, além disso, pode ser ver que na faixa das ondas de mar sempre há mais perda de energia.

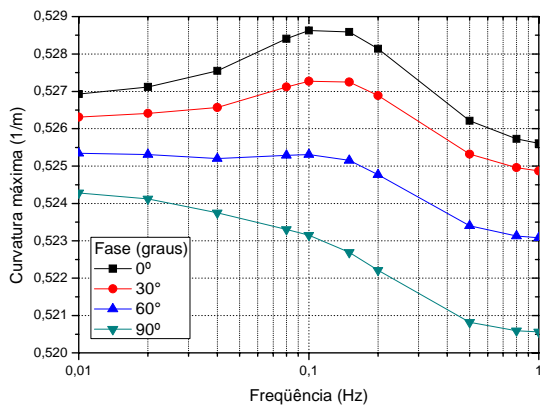


Figura 4.49: Curvatura máxima x frequência

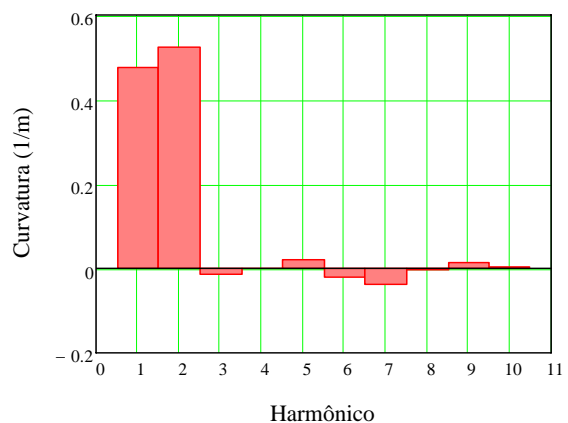


Figura 4.50: Distribuição discreta dos harmônicos da curvatura

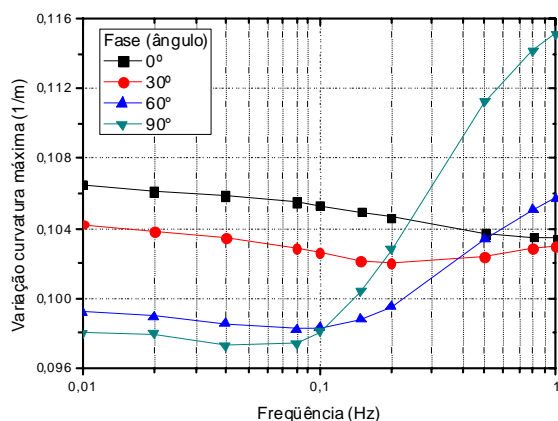


Figura 4.51: Variação da curvatura máxima x frequência

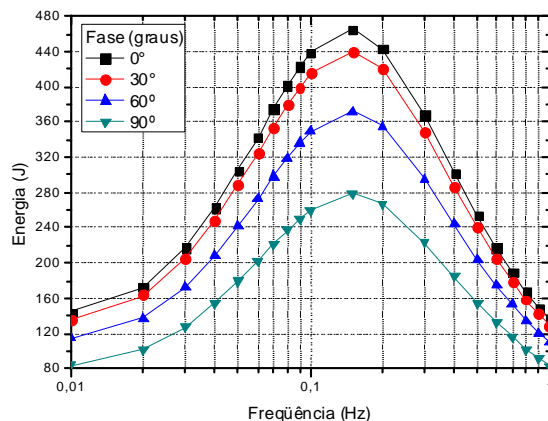


Figura 4.52: Energia dissipada x frequência

c) **Caso 3: Força aplicada:** $F_0 = 250 \text{ (KN)}$, $\Delta F = (10\%)F_0$ e $\Delta\phi = (10\%)\phi_L$

É aplicada uma força no extremo da linha flexível, vide equação (4.37), a força média imposta é de 250 (KN) com amplitude do ângulo senoidal de 10% da força. O ângulo médio imposto é de 45° mais um ângulo senoidal de amplitude de 10% do ângulo médio, equação (4.38).

Na figura 4.53 a curvatura máxima calculada é 0,59891 (1/m) correspondente ao ângulo de fase 0° e a uma frequência de 0,01Hz e a menor curvatura é 0,55838 (1/m) que corresponde ao ângulo de defasagem de 90° e 1 Hz, que representa 7,2% de variação de curvaturas máximas.

Na figura 4.54 é apresentada a distribuição discreta dos harmônicos da curvatura correspondente à posição onde acontece a maior curvatura, a frequência de excitação é de 0,15 Hz, a força e o ângulo na extremidade encontra-se em fase (0°). Os valores apresentados não estão afetados pela perturbação, o primeiro termo não é afetado pela perturbação o segundo e terceiro é afetado pela perturbação de grau 1, onde ao considerar mais termos estes não serão significativos.

Na figura 4.55 é apresentada a variação de curvaturas máximas de 47,6% do valor máximo com respeito ao valor mínimo. O valor máximo da variação de curvatura

corresponde quando o ângulo e força encontram-se em fase, e a frequência de 0,01 Hz. A variação da curvatura máxima apresenta mudanças consideráveis no domínio da frequência.

Na figura 4.56 é apresentada a energia dissipada, a maior perda sempre encontra-se em torno de 0,1 e 0,2 Hz, a maior perda de energia é de 860 J.

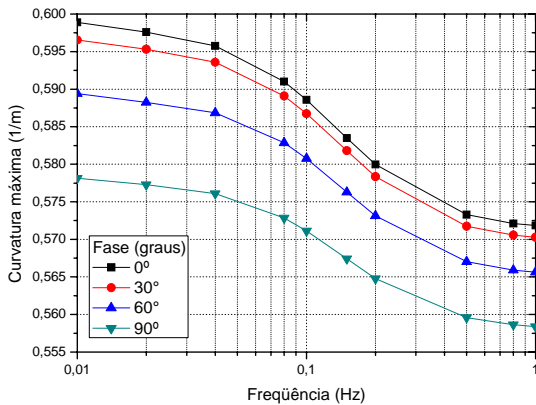


Figura 4.53: Curvatura máxima x frequência

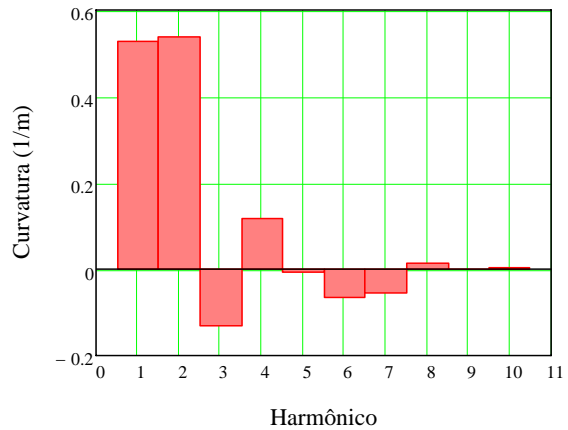


Figura 4.54: Distribuição discreta dos harmônicos da curvatura

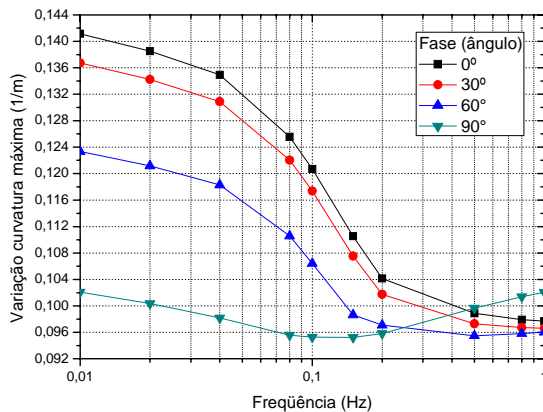


Figura 4.55: Variação da curvatura máxima x frequência

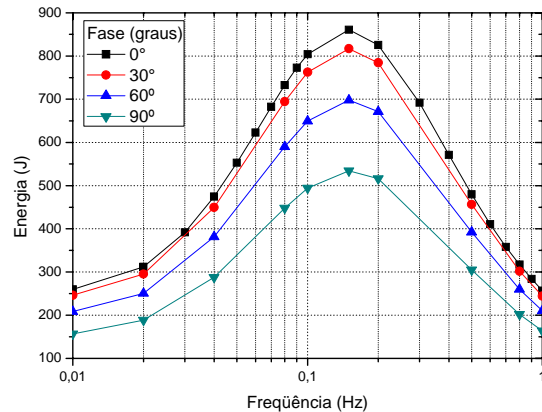


Figura 4.56: Energia dissipada x frequência

d) Caso 4: Força aplicada: $F_0 = 500 \text{ (KN)}$, $\Delta F = (10\%) F_0$ e $\Delta\phi = (10\%) \phi_L$

É aplicada uma força no extremo da linha flexível, vide equação (4.37), a força média imposta é de 500 (KN) com amplitude do ângulo senoidal de 10% da força. O ângulo médio imposto é de 45° mais um ângulo senoidal de amplitude de 10% do ângulo médio, equação (4.38).

Na figura 4.57 pode-se apreciar como a curvatura máxima desce com o aumento da frequência e do ângulo de fase. A curvatura máxima calculada é 0,92993 (1/m) correspondente ao ângulo de fase 0° e 0,01Hz, e a menor curvatura é 0,86941 (1/m) que corresponde ao ângulo de defasagem de 90° e 1 Hz, que representa 7% de variação da curvatura máxima.

Na figura 4.58 é apresentada a distribuição discreta dos harmônicos da curvatura correspondente à posição onde acontece a maior curvatura, a frequência de excitação é de 0,15 Hz, a força e o ângulo na extremidade encontra-se em fase (0°). Os valores apresentados não estão afetados pela perturbação.

Na figura 4.59 é apresentada a variação de curvatura de 114,5% do valor máximo com respeito ao valor mínimo. O valor máximo da variação de curvatura corresponde a 0,21743 (1/m) quando está em fase (0°) e 0,01 Hz, e o menor valor é 0,10136 (1/m) que corresponde a um ângulo de defasagem de 90° e 1 Hz. Às baixas frequências acontecem os maiores valores de variação de curvatura e em altas frequências de excitação a variação de curvatura é menor.

Na figura 4.60 é apresentada a energia dissipada, podendo-se observar que a maior perda de energia é 1500 J, comparada com a análise anterior (força de 250 KN) a perda de energia é menos do dobro do caso anterior, então as relações das energias não cumprem uma proporção linear com a força.

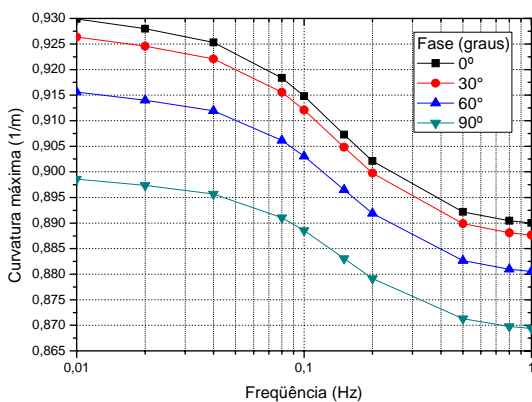


Figura 4.57: Curvatura máxima x frequência

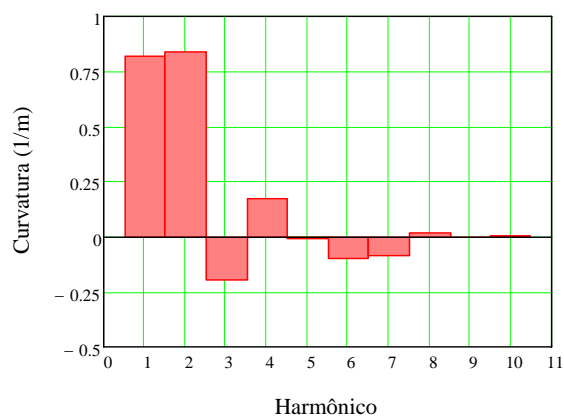


Figura 4.58: Distribuição discreta dos harmônicos da curvatura

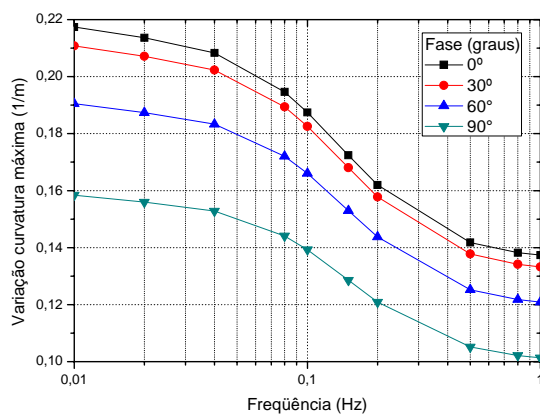


Figura 4.59: Variação da curvatura máxima x frequência

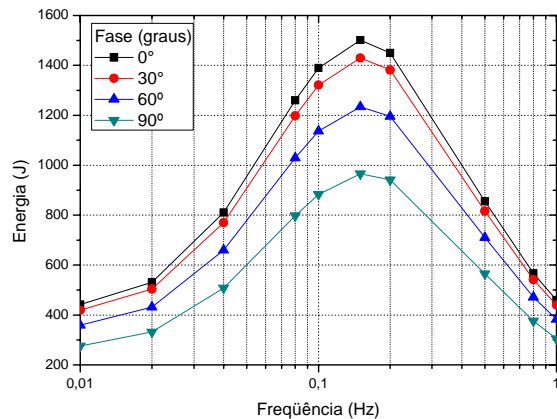


Figura 4.60: Energia dissipada x frequência

e) **Caso 5: Força aplicada:** $F_0 = 62,5 \text{ (KN)}$, $\Delta F = (20\%) F_0$ e $\Delta\phi = (20\%) \phi_L$

É aplicada uma força no extremo da linha flexível, vide equação (4.37), a força média imposta é de 62,5 (KN) com amplitude do ângulo senoidal de 20% da força. O ângulo médio imposto é de 45° mais um ângulo senoidal de amplitude de 20% do ângulo médio, equação (4.38).

Na figura 4.61 foram tomadas as maiores curvaturas para cada ângulo de fase, podendo-se apreciar como a curvatura máxima muda no domínio da frequência, a curvatura máxima calculada é 0,59879 (1/m) e a menor 0,58715 (1/m), o que representa 2% de variação. Pode-se ver que quando a força e o ângulo no extremo encontram-se em fase o valor maior de curvatura é dada a 0,15Hz, e o menor valor é representado quando a força e o ângulo encontram-se defasados 90°.

Na figura 4.62 é apresentada a distribuição discreta dos harmônicos da curvatura correspondente à posição onde acontece a maior curvatura, a frequência de excitação é de 0,15 Hz, a força e o ângulo na extremidade encontra-se em fase (0°). Os valores apresentados não estão afetados pela perturbação.

Na figura 4.63 é apresentada uma variação de 29,7% do valor máximo com respeito ao valor mínimo. O valor máximo da variação de curvatura é 0,26491 (1/m),

correspondente a 90° de fase e 1 Hz, e o valor mínimo da variação da curvatura é 0,20419 (1/m), que corresponde a 60° de fase e 0,01 Hz.

Na figura 4.64 é apresentada a energia dissipada, esta energia apresenta o mesmo comportamento estudado itens acima. O valor máximo da perda de energia é 940 J que comparada com o caso 1 é mais do dobro do valor da energia.

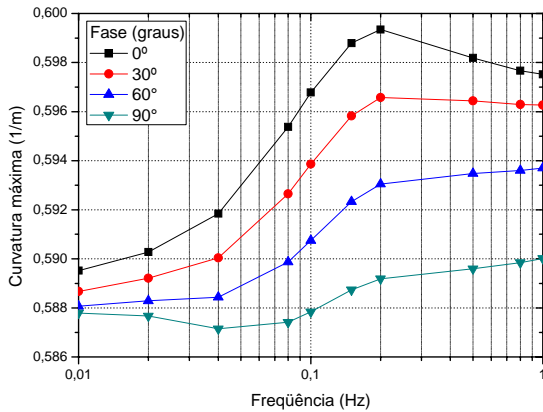


Figura 4.61: Curvatura máxima x frequência

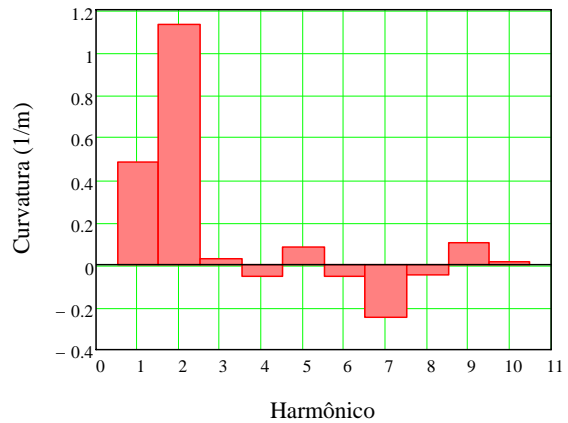


Figura 4.62: Distribuição discreta dos harmônicos da curvatura

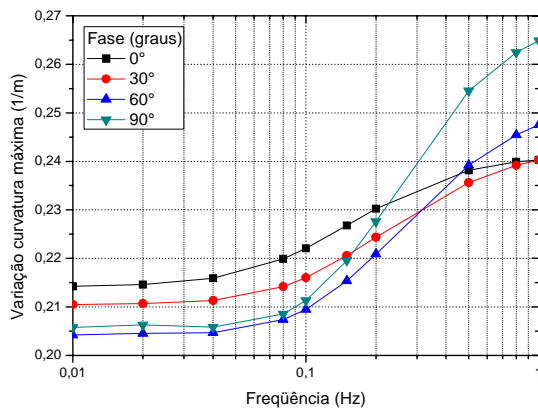


Figura 4.63: Variação da curvatura máxima x frequência

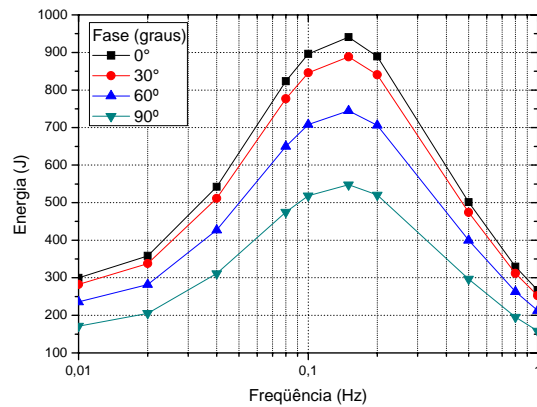


Figura 4.64: Energia dissipada x frequência

f) Caso 6: Força aplicada: $F_0 = 125 \text{ (KN)}$, $\Delta F = (20\%) F_0$ e $\Delta\phi = (20\%) \phi_L$

É aplicada uma força média de 125 (KN) mais uma força senoidal de amplitude de 20% da força. O ângulo médio imposto é de 45° mais um ângulo senoidal de amplitude de 20% do ângulo médio, equações (4.37) e (4.38), respectivamente.

Na figura 4.65 pode-se apreciar como a curvatura máxima muda no domínio da frequência, a curvatura máxima calculada é 0,58131 (1/m) e a menor 0,56692 (1/m) que representa 2,4% de variação. Pode-se ver que quando a força e o ângulo no extremo encontram-se em fase o valor maior de curvatura é dada a 0,15 Hz, e o menor valor é representado quando a força e o ângulo encontram-se defasados 90° a altas frequências (1 Hz).

Na figura 4.66 é apresentada a distribuição discreta dos harmônicos da curvatura correspondente à posição onde acontece a maior curvatura, a frequência de excitação é 0,15 Hz, a força e o ângulo na extremidade encontra-se em fase (0°). Os valores apresentados não estão afetados pela perturbação.

Na figura 4.67 é apresentado uma variação da curvatura máxima de 18,3% do valor máximo com respeito ao valor mínimo. O valor máximo da variação de curvatura é 0,23055 (1/m) correspondente a 90° de fase e 1 Hz, e o valor mínimo da variação da curvatura é 0,19499 (1/m) que corresponde a 90° de fase e 0,08 Hz. A 0° e 30° de fase a variação de curvatura máxima é quase independente da frequência, tendo em vista as pequenas variações da curvatura.

Na figura 4.68 é apresentada a energia dissipada, podendo-se observar que a maior perda de energia acontece entre as frequências próprias das ondas do mar.

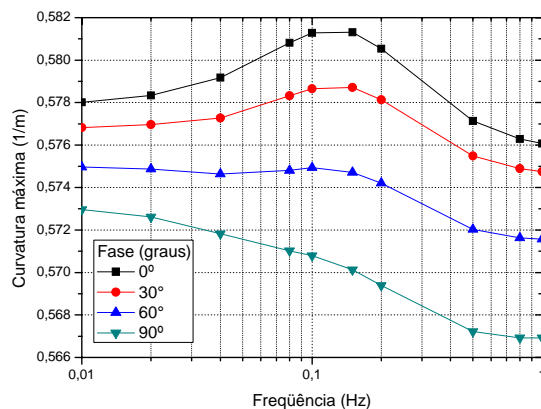


Figura 4.65: Curvatura máxima x frequência

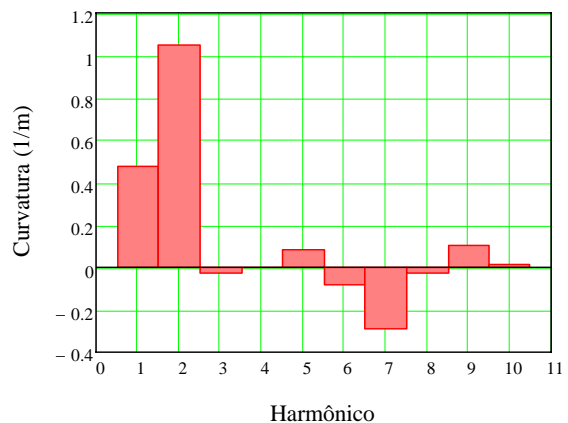


Figura 4.66: Distribuição discreta dos harmônicos da curvatura

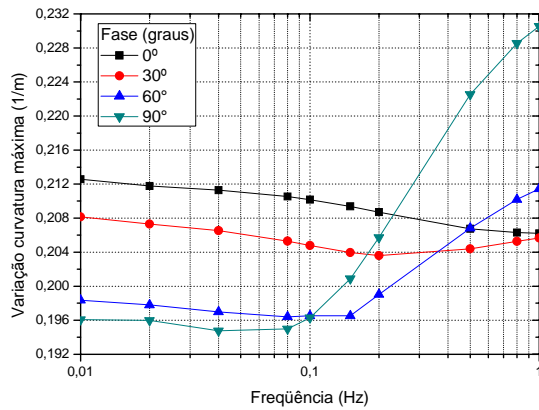


Figura 4.67: Variação da curvatura máxima x frequência

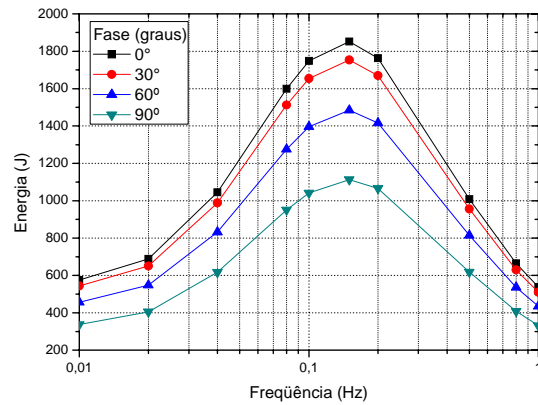


Figura 4.68: Energia dissipada x frequência

g) Caso 7: Força aplicada: $F_0 = 250 \text{ (KN)}$, $\Delta F = (20\%) F_0$ e $\Delta \phi = (20\%) \phi_L$

É aplicada uma força média de 250 (KN) mais uma força senoidal de amplitude de 20% da força. O ângulo médio imposto é de 45° mais um ângulo senoidal de amplitude de 20% do ângulo médio, equações (4.37) e (4.38), respectivamente.

Na figura 4.69 ao aumentar a frequência de excitação diminui o valor da curvatura máxima. A curvatura máxima calculada é 0,67472 (1/m) e a menor 0,59003 (1/m), o que representa 14,3% de variação. Pode-se ver que quando a força e o ângulo no extremo encontram-se em fase o valor maior de curvatura é dado a baixas frequências e o menor valor é representado quando a força e o ângulo encontram-se defasadas 90° a altas frequências.

Na figura 4.70 é apresentada a distribuição discreta dos harmônicos da curvatura correspondente à posição onde acontece a maior curvatura, a frequência de excitação é 0,15 Hz, a força e o ângulo na extremidade encontra-se em fase (0°). Os valores apresentados não estão afetados pela perturbação.

Na figura 4.71 é apresenta uma variação de 47,8% do valor máximo com respeito ao valor mínimo. A maior variação de curvatura é obtida quando estes encontra-se em fase e a baixas frequências, e a menor variação de curvatura é obtida a altas frequências independentemente do ângulo de fase.

Na figura 4.72 é apresentada a energia dissipada ao longo do enrijecedor, podendo-se observar que sempre a maior perda de energia acontece entre as frequências próprias da onda do mar, parte desta energia é dissipada ao médio ambiente em forma de calor.

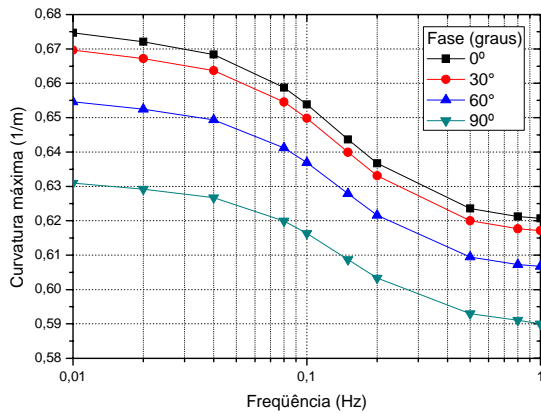


Figura 4.69: Curvatura máxima x frequência

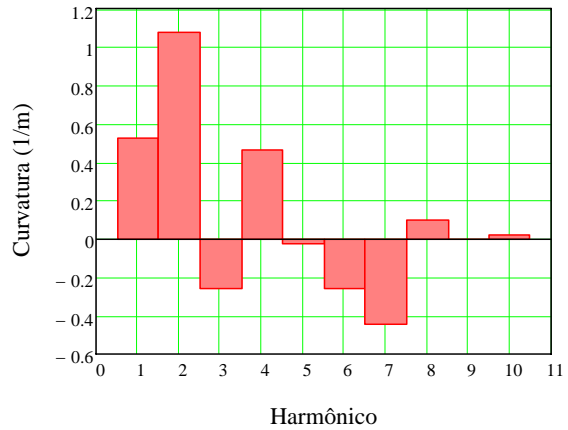


Figura 4.70: Distribuição discreta dos harmônicos da curvatura

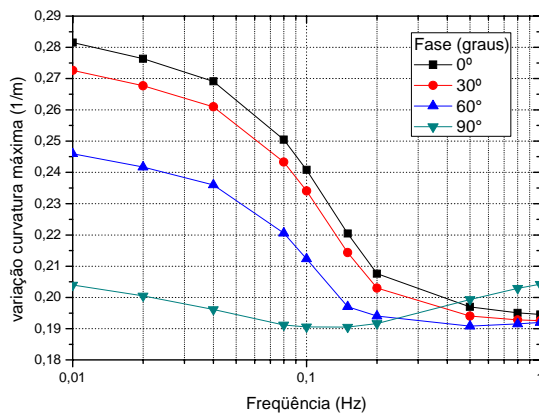


Figura 4.71: Variação da curvatura máxima x frequência

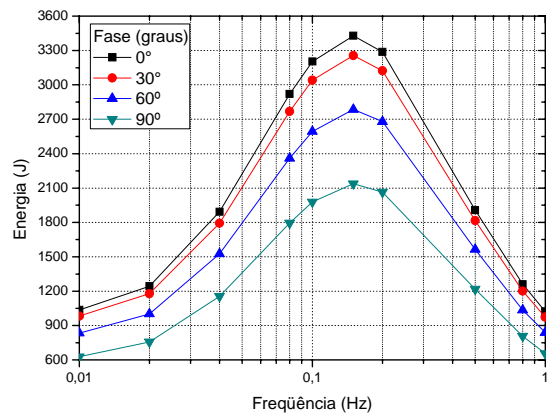


Figura 4.72: Energia dissipada x frequência

h) Caso 8: Força aplicada: $F_0 = 500 \text{ (KN)}$, $\Delta F = (20\%) F_0$ e $\Delta \phi = (20\%) \phi_L$

É aplicada uma força no extremo da linha flexível, vide equação (4.37), a força média imposta é de 500 (KN) com amplitude do ângulo senoidal de 20% da força. O ângulo médio imposto é de 45° mais um ângulo senoidal de amplitude de 20% do ângulo médio, equação (4.38).

Na figura 4.73 ao aumentar-se a frequência de excitação diminui-se o valor da curvatura máxima, a curvatura máxima calculada é 1,04639 (1/m) e a menor 0,92092 (1/m) que representa 13,6% de variação. Pode-se ver que quando a força e o ângulo no extremo encontrassem em fase o valor maior de curvatura é dada a baixas frequências e o menor valor das curvaturas máximas é representado quando a força e o ângulo encontrassem defasada 90° e a altas frequências.

Na figura 4.74 é apresentada a distribuição discreta dos harmônicos da curvatura correspondente à posição onde acontece a maior curvatura, a frequência de excitação é 0,15 Hz, a força e o ângulo na extremidade encontra-se em fase (0°). Os valores apresentados não estão afetados pela perturbação.

Na figura 4.75 é apresentada uma variação de 114% aproximadamente do valor máximo com respeito ao valor mínimo. Ao aumentar a frequência diminui-se fortemente à variação de curvatura. Podendo-se ver que em torno às frequências do mar a taxa de variação de curvatura é significativa.

Na figura 4.76 é apresentada a energia dissipada, para a frequência de 0,15 Hz apresenta 55% de variação de energia comparada entre a curva de fase de 0° e 90°.

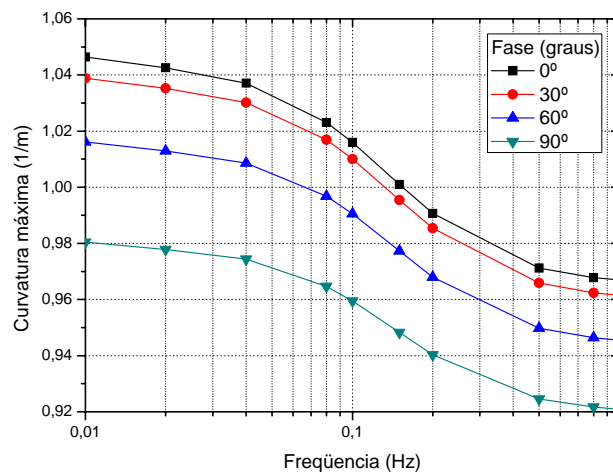


Figura 4.73: Curvatura máxima x frequência

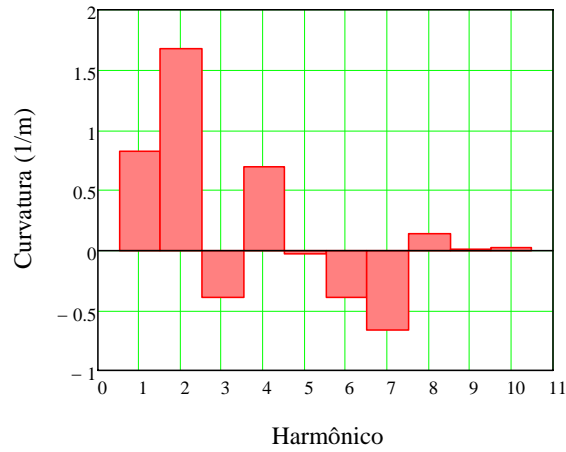


Figura 4.74: Distribuição discreta dos harmônicos da curvatura ($f=0.15$ Hz e $\delta=0^\circ$)

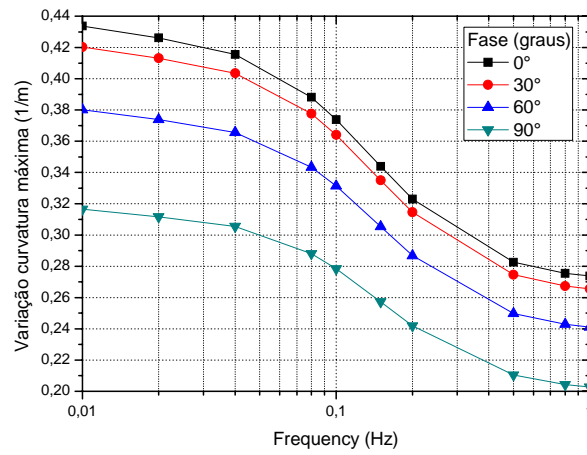


Figura 4.75: Variação da curvatura máxima x frequência

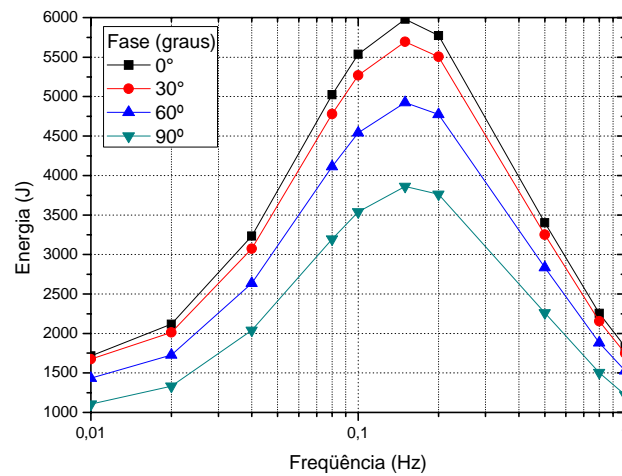


Figura 4.76: Energia dissipada x frequência

Capítulo 5

Conclusões e sugestões

No primeiro modelo desenvolvido considerou-se a enrijecedor à flexão como material hiperelástico, mudando a taxa de deformação para as respectivas análises. Foi aproximado o momento fletor em função da curvatura a um polinômio de ordem cinco para melhor aderência dos resultados, e os coeficientes do polinômio também foram ajustados por um polinômio de ordem cinco em função da posição do *bend stiffener*, formando um sistema de quatro equações diferenciais, a condições de contorno são três oriundas da geometria do problema e uma quarta resultante da condição de contorno imposta pelo ângulo no extremo.

No primeiro estudo do material hiperelástico se considerou uma força de 62,5 (KN) mais uma função senoidal de 20% de amplitude da força. O ângulo na extremidade apresentava uma combinação similar, um ângulo de 45° mais uma função senoidal de 20% de amplitude do ângulo. Foram, realizados três estudos de casos com três taxas de deformação diferentes. A taxa de deformação de 0,1 (1/s) apresenta a maior curvatura e momento fletor, sua rigidez é maior comparada com os outros casos, e a taxa de deformação 0,01 (1/s) apresentou a menor curvatura e momento fletor, o material tem comportamento mais flexível. Caso contrário aconteceu no engaste, onde a maior curvatura foi observada na menor taxa de deformação. O estudo do ângulo de defasagem não foi significativo na representação da curvatura. Os resultados foram recolhidos considerando-se a maior curvatura obtida ao longo do período da função da força, este tempo não é necessariamente igual para as demais curvaturas.

O estudo de caso para forças de 125 (KN) e 250 (KN) apresentou as mesmas características da força de 62,5 (KN). Na força de 500 (KN) é possível ver que a zona mais crítica encontra-se no engaste, a maior curvatura acontece com a taxa de deformação de 0,05 (1/s) e o maior momento fletor acontece com a taxa de 0,1 (1/s).

No segundo modelo considerou-se o poliuretano como material viscoelástico linear onde suas propriedades mecânicas mudam ao longo do tempo quando uma tensão ou deformação é imposta. O enrijecedor à flexão está exposto a uma força senoidal, o ângulo do extremo da condição de contorno tem comportamento senoidal com um ângulo de defasagem. O modelo foi desenvolvido considerando uma força de 62,5 (KN) mais uma função senoidal de 20% de amplitude, com 6 casos diferentes, o tempo da análise foi de 100 segundos. No primeiro caso foi aplicada uma força constante e ângulo no extremo oscilando, o laço de histerese momento-curvatura no engaste ainda encontrava-se movimentando, podendo-se ver que a amplitude da curvatura e momento fletor quase permanece igual. No segundo caso considerou-se ângulo fixo no extremo de 45° e uma força oscilando, foi representado o laço de histerese momento-curvatura do engaste, a amplitude do momento fletor e da curvatura comparada com o primeiro caso é menor, perde menos energia por cada laço. Os quatro casos de estudo restantes estão relacionados com o ângulo de defasagem, podendo se ver que quando está em fase (0°) apresenta maior amplitude de momento e curvatura e quando estão (90°) defasadas apresenta a menor amplitude. O tempo de análise e o incremento de tempo são importantes, pois para desenvolver a integral de Riemann-Stieltjes por somatórios o valor do incremento de tempo tem que ser o menor possível.

O tempo para conseguir que o ciclo de histerese fique estável é difícil de ser quantificado e os tempos de processamento computacional para conseguir os resultados são muito grandes. É conveniente desenvolver um modelo no domínio da frequência, considerando o *bend stiffener* como material viscoelástico linear, onde no tempo infinito ($t \rightarrow \infty$) o momento, a curvatura e o ângulo apresentam movimentos oscilatórios com amplitudes e valores médios fixos. Ao supor estas considerações é possível desenvolver a resposta do *bend stiffener* no domínio da frequência. Dois estudos de casos foram desenvolvidos, o primeiro caso com 10% de amplitude da força e ângulo no extremo conseguindo se apresentar a resposta da curvatura máxima, variação de curvatura máxima podendo ver qual é a resposta do modelo no infinito. O segundo estudo foi feito considerando 20% de amplitude do ângulo e da força oscilante. As curvaturas máximas obtidas com a resposta de 20% apresentam maiores valores de curvatura, como era de esperar-se, mas as representações da porcentagem foram muito similares.

Com a força imposta de 62,5 (KN) e frequência de excitação de 0,2 Hz, o valor máximo da curvatura em cada modelo foi: modelo hiperelástico: encontra-se em torno de 0,63-0,75 (1/m), o valor pode descer ao considerar-se menor taxa de deformação, no modelo viscoelástico linear no domínio do tempo: encontra-se em torno de 0,6 (1/m), só quando foi considerado o ângulo no extremo fixo a curvatura encontra-se em volta de 0,49 (1/m) e no modelo viscoelástico no domínio da frequência: a curvatura encontra-se em torno de 0,589-0,6 (1/m). A variação de curvatura máxima no modelo hiperelástico encontra-se em torno de 0,21-0,25 (1/m), no modelo viscoelástico linear no domínio do tempo em torno de 0,21-0,24 (1/m) e no modelo viscoelástico no domínio da frequência encontra-se em torno de 0,22-0,23 (1/m). Os valores obtidos encontram-se muito próximos e comparando os modelos viscoelásticos estão de acordo.

O modelo hiperelástico apresenta respostas das curvaturas e variação de curvaturas máximas independente da frequência de excitação. A energia armazenada no material é reversível (energia potencial), quando a análise do enrijecedor é realizada no engaste este apresenta as maiores valores de curvatura quando o ângulo de fase entre a força e o ângulo no extremo encontra-se em fase (0°). Situação contrária acontece quando a análise é feito no médio do enrijecedor, onde os valores máximos da curvatura são maiores para ângulos fora de fase.

O modelo viscoelástico apresentado no domínio da frequência têm muita relevância devido a poder conhecer as resposta do *bend stiffener* quando o material relaxo completamente, independente do tempo. Os resultados apresentados consideram o ângulo de fase entre a força imposta e o ângulo na extremidade, e como este muda o comportamento na curvatura. Além a influencia da frequência de excitação e como pode influir no projeto do *bend stiffener* mas ainda nas frequências oriundas das ondas do mar. A energia que dissipa no *bend stiffener* ao meio ambiente em forma de calor produzida pela histerese por cada ciclo.

5.1 Sugestões

- Considerar o estudo produzido pela deformação do ângulo de cisalhamento (viga de Timoshenko).
- Realizar testes de laboratório do poliuretano com carregamentos cíclicos monitorando a frequência e temperatura.
- Desenvolver modelos do *bend stiffener* considerando material viscoelástico não linear e fazer uma tentativa de estudo no domínio da frequência.
- Desenvolver o modelo descrito para diferentes níveis de temperatura.
- Desenvolver o modelo em elementos finitos que possa descrever todas as considerações acima descritas.
- Realizar estudos em escala real do *bend stiffener* impondo carregamento cíclicos e compará-los com os modelos.

Referências Bibliográficas

- BETTEN, J., 2005, *Creep Mechanics*, 2 ed. Germany, Springer Science+Business Media.
- BOEF, W. J. C., OUT, J. M. M., 1990, “Analysis of a Flexible Riser Top Connection with Bend Restrictor”. In: Proceedings of the Offshore Technology Conference, OTC 6436, pp. 131-142, Houston, May.
- BORESI, A. P., SCHMIDT, R. J., SIDEBOTTOM, O. M., 1993, *Advanced Mechanics of Materials*, 5 ed. United States of America, John Wiley & Sons, Inc.
- BROWN, R., 2006, *Physical Testing of Rubber*. 4 ed. United States of America, Springer Science+Business Media, Inc.
- CAIRE, M., 2005, *Análise de Enrijecedores à Flexão*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- CAIRE, M., VAZ, M. A., LEMOS, C. A. D., 2005, “Viscoelastic Analysis of Stiffeners”. In: Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE2005-67321, Haldidiki, Greece, June.
- CAIRE, M., VAZ, M. A., 2007, “The Effect of Flexible Pipe Non-linear Bending Stiffness Behavior on Bend Stiffener Analysis”. In: Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE2007-29108, San Diego, California, USA, June.
- COWIN, S. C. and DOTY, S. B., 2007, *Tissue Mechanics*, New York, Springer Science+Business Media, LLC.

- DEMANZE, F., HANONGE, D., CHALUMEAU, A., LECLEREC, O., et. Al., 2005, “Fatigue Life Analysis of Polyurethane Bending Stiffeners”. In: Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE2005-67506, Haldidiki, Greece, June.
- HOOFT, J. P., 1982, *Advance Dynamics of Marine Structures*, United States of America, John Wiley & Sons, Inc.
- JU, B. F., LIU, K. K., 2002, “Characterizing viscoelastic properties of thin elastomeric membrane”, *Journal of Mechanics of Materials*, v. 34, n. 8 (Aug.), pp. 485-491.
- KIEPPER, B. O., 2004, *Análise Estrutural Estática, Via Elementos Finitos do Segmento Tubo Flexível-Enrijecedor*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- LANE, M., McNAMARA, J. F., GIBSON, R., 1995, “Bend Stiffeners for Flexible Risers”. In: Proceedings of the Offshore Technology Conference, OTC 7730, pp. 345-353, Houston, May.
- LEMOS, C. A. D., 2005, *Análise de Fadiga em Riser Flexíveis*. Dissertação de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MEDINA, A. R., 2008, *Análise Estrutural Viscoelástica Axissimétrica de dutos Flexíveis*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MENICONI, L. C. M., LOPES, T. A. P., 2001, “Fatigue Analysis of Bend Stiffeners”. In: Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE2001/OFT-1215, Rio de Janeiro, Brazil, June
- NIELSEN, L. F., 2005, *Composite Materials*, Netherlands, Springer Science+Business Media.
- RIANDE, E., DÍAZ-CALLEJA, R., PROLONGO, M., 2000, *Polymer Viscoelasticity Stress and Strain in Practice*. United States of America, Marcel Dekker, Inc.

- RÖSLER, J., HARDES, H., BÄKER, M., 2007, *Mechanical Behaviour of Engineering Materials*. Heidelberg, Springer Science+Business Media.
- SMITH, R. 2008, “Bending Stiffeners for Extreme and Fatigue Loading of Unbonded Flexible Risers”. In: Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE2008-57464, Estoril, Portugal, June.
- SOUZA, J. R., RAMOS, R. Jr. 2008, “Bending Stiffeners: A Parametric Strutral Analysis”. In: Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE2008-57202, Estoril, Portugal, June.
- SOUZA, J. R., 2008, *Análise Estrutural de enrijecedores à Flexão de Geometria Complexa Utilizados em Operações Offshore*. Dissertação de M.Sc., Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- THOMSEN, J. J., 1997, *Vibration and Stability Order and Chaos*. London, McGraw-Hill.
- VAZ, M. A., LEMOS, C. A. D., 2004, “Geometrical and Material Non-Linear Formulation for Bend Stiffeners”. In: Proceedings of the International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE2004-51366, Vancouver, Canada, June.
- VAZ, M. A., LEMOS, C. A. D., CAIRE, M., 2007, “A Nonlinear Analysis Formulation for Bend Stiffeners”, *Journal of Ship Research*, v. 51, n. 3 (Sep.), pp. 250-258.
- WINEMAN, A. and RAJAGOPAL, K. R., 2000, *Mechanical Response of Polymers an Introduction*. 1 ed. United States of America, Cambridge University Press.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)