



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS
INSTITUTO DE FÍSICA ARMANDO DIAS TAVARES

Marcio André Lopes Capri

**Aspectos não perturbativos das teorias de
Yang-Mills no calibre abeliano maximal**

Rio de Janeiro
2009

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Marcio André Lopes Capri

**Aspectos não perturbativos das teorias de
Yang-Mills no calibre abeliano maximal**

Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Teoria de Campos.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Paolo Sorella

Rio de Janeiro
2009

Marcio André Lopes Capri

Aspectos não perturbativos das teorias de Yang-Mills no calibre abeliano maximal

Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor ao Programa de Pós-Graduação em Física, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Área de concentração: Teoria de Campos.

Aprovado em _____

Banca examinadora: _____

Prof. Dr. Silvio Paolo Sorella (Orientador)
Instituto de Física da UERJ

Prof. Dr. Attilio Cucchieri
Instituto de Física de São Carlos – USP

Prof. Dr. Luis Esteban Oxman
Instituto de Física da UFF

Prof. Dr. Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior
Instituto de Física da UERJ

Prof. Dr. Rudnei de Oliveira Ramos
Instituto de Física da UERJ

À minha esposa Adriana e aos meus pais.

Have not the small Particles of Bodies certain Powers, or Forces, by which they act [...] upon one another for producing a great Part of the Phaenomena of Nature? For it's well known, that Bodies act one upon another by the Attractions of Gravity, Magnetism, and Electricity; [...] and make it not improbable but that there may be more attractive Powers than these [...].
How these attractions may be perform'd, I do not here consider. [...] The Attractions of Gravity, Magnetism, and Electricity, reach to very sensible distances, [...] and there may be others which reach to so small distances as hitherto escape observation; [...].

Sir Isaac Newton, *Opticks*, Livro III, Pergunta 31.

AGRADECIMENTOS

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo amparo financeiro.

À pós-graduação do Instituto de Física da UERJ.

Ao professor Silvio Paolo Sorella pela excelente orientação.

À minha querida esposa Adriana.

Aos meus pais João e Candida pela dedicação e paciência.

Ao professor Vitor Emanuel Rodino Lemes pela orientação no mestrado, por sua confiança em meu trabalho e por sua amizade.

Aos amigos e colaboradores Ronaldo Thibes, Rodrigo Sobreiro e Arturo Mellado.

Aos colaboradores externos David Dudal, Henri Vershelde, Nele Vandersickel e John Gracey.

Aos amigos da UERJ Fabio Antonio, prof. José Roberto Mahon, Monica Borges, Ana Thereza e Jordan.

Aos amigos da natação e do rock'n'roll Raphael Greco, Anderson Carvalho e Cláudio Filgueiras.

Aos membros da banca de defesa por cordialmente aceitarem fazer parte desta.

Aos professores que ministraram as disciplinas que cursei durante a pós-graduação.

Aos demais alunos da pós-graduação.

RESUMO

CAPRI, Marcio André Lopes. *Aspectos não perturbativos das teorias de Yang-Mills no calibre abeliano maximal*. 130p. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

Nesta tese, estudamos os efeitos não perturbativos associados à presença do horizonte de Gribov e à condensação de operadores locais de dimensão dois, numa teoria de Yang-Mills euclidiana em $SU(2)$, quantizada no calibre abeliano maximal. Estes efeitos são introduzidos de modo a preservar as propriedades de renormalizabilidade e localidade da teoria, e refletem-se diretamente no comportamento dos propagadores. A comparação com os dados da rede indicam um bom acordo qualitativo.

Palavras-chave: QCD. Ambiguidades de Gribov. Cópias de Gribov. Região de Gribov. Horizonte de Gribov. Ação de Gribov-Zwanziger. Função horizonte. Teorias de Yang-Mills. Campos de Yang-Mills. Ação de Yang-Mills. Calibre maximal Abeliano. Regime infravermelho. Regime não perturbativo. Condensado(s) de dimensão dois. Propagador do glúon(ghost).

ABSTRACT

In this thesis, we study the nonperturbative effects associated to the presence of the Gribov horizon and to the condensation of local dimension two operators in an Euclidean $SU(2)$ Yang-Mills theory quantized in the maximal Abelian gauge. Such effects are introduced in a way to preserve the properties of renormalizability and locality of the theory. The comparison with the lattice data indicates a good qualitative agreement.

Keywords: QCD. Gribov ambiguity. Gribov copies. Gribov region. Gribov-Zwanziger action. Horizon function. Yang-Mills theories. Yang-Mills fields. Yang-Mills action. Maximal Abelian gauge. Infrared regime. Nonperturbative regime. Dimension two condensate(s). Gluon(ghost) propagator.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE AS TEORIAS DE YANG-MILLS	18
1.1 Os campos de Yang-Mills	18
1.2 Quantização dos campos de Yang-Mills	20
1.3 Alguns aspectos não perturbativos	25
2 O CALIBRE ABELIANO MAXIMAL (MAG)	28
2.1 Introdução	28
2.2 Quantização de Faddeev-Popov	29
2.3 Identidades de Ward	31
2.4 Interações quárticas entre os campos fantasmas	33
2.5 Considerações	33
3 AMBIGUIDADES DE GRIBOV	35
3.1 Introdução	35
3.2 Cópias de Gribov	37
3.3 Determinação da região de Gribov Ω	40
3.4 A restrição à região Ω elimina cópias de Gribov	42
3.5 Restrição do domínio de integração à região Ω	46
3.6 Propagadores na aproximação de Gribov	49
3.6.1 <u>Propagadores dos glúons</u>	50
3.6.2 <u>Propagador dos ghosts não-diagonais</u>	51
3.6.3 <u>Considerações a respeito da aproximação de Gribov</u>	52
3.7 A região modular fundamental Λ	53
4 FUNÇÃO HORIZONTE E A AÇÃO DE GRIBOV-ZWANZIGER	55
4.1 Introdução – Ação de Gribov-Zwanziger no calibre de Landau	55

4.2	Função horizonte no MAG em $SU(2)$	57
4.3	Localização da função horizonte	58
4.4	Simetria de BRST	59
4.4.1	<u>Caso particular com $\gamma = 0$</u>	59
4.4.2	<u>Reintroduzindo o termo com $\gamma \neq 0$</u>	60
4.5	Simetria $U(8)$ global e notação de multi-índice	62
4.6	Introduzindo interações quárticas	63
4.7	Discussão sobre a quebra suave de BRST	64
5	OPERADORES DE DIMENSÃO DOIS	66
5.1	Introdução	66
5.2	Operadores não-locais	67
5.3	Operadores Locais	69
5.3.1	<u>Operadores de glúons</u>	70
5.3.2	<u>Operadores de ghost</u>	71
5.3.3	<u>Operadores associados ao modelo de Gribov-Zwanziger</u>	73
5.4	Como introduzir os operadores na teoria	75
6	RENORMALIZAÇÃO	79
6.1	Identificação da ação clássica completa	79
6.1.1	<u>Introduzindo fontes externas</u>	80
6.1.2	<u>Introduzindo operadores de dimensão dois</u>	82
6.1.3	<u>Ação clássica completa</u>	85
6.2	Identidades de Ward	86
6.3	Contratermo mais geral via métodos algébricos	88
6.4	Fatores de renormalização	91
7	PROPAGADORES E RESULTADOS DA REDE	94
7.1	Propagadores	94
7.1.1	<u>Sobre os parâmetros massivos (γ, m, μ, v)</u>	96
7.1.2	<u>Sobre o propagador dos glúons não-diagonais</u>	96
7.1.3	<u>Sobre o propagador dos glúons diagonais</u>	97
7.1.4	<u>Sobre os propagadores dos ghosts</u>	100

7.2	Resultados da rede	101
7.3	De volta à questão do <i>enhancement</i> dos ghosts	106
8	CONCLUSÕES	110
A	PROVA DA HERMITICIDADE DE \mathcal{M}^{ab}	114
B	DESACOPLAMENTO DOS GHOSTS DIAGONAIS	115
	REFERÊNCIAS	117

LISTA DE TABELAS

1.1	Números quânticos de campos e fontes.	25
4.1	Números quânticos de campos e fontes.	63
6.1	Números quânticos das fontes externas.	82
6.2	Números quânticos das fontes externas.	85
7.1	Dimensão de massa dos parâmetros de (7.49).	103

LISTA DE FIGURAS

3.1	Horizontes de Gribov	41
3.2	Cópias próximas ao horizonte	43
7.1	Propagador de ghosts a <i>1-loop</i> . As linhas tracejada, ondulada e enrolada representam, respectivamente, ghosts, glúons diagonais e glúons não-diagonais.	101
7.2	(a) Fatores de forma $D(p^2)$ versus p em GeV; (b) função “vestida” $p^2 D(p^2)$ versus p em GeV. Gráficos extraídos de [72].	102
7.3	Plot de $G_{\text{sim}}(p^2)$ em função do momento melhorado p em GeV. Gráfico extraído de [64].	105

INTRODUÇÃO

Como se depreende do próprio título desta tese, iremos nos dedicar aos aspectos não perturbativos das chamadas teorias de Yang-Mills, num particular calibre que é o abeliano maximal. Antes porém, faremos uma breve apresentação dessas teorias a partir de sua origem e de sua aplicação no âmbito das interações fundamentais da natureza. Em seguida, discutiremos as principais motivações desta tese e descreveremos como esta será organizada. Além disso, faremos um apanhado sobre as notações e convenções que serão utilizadas ao longo desta tese.

Teorias de Yang-Mills: origem e aplicações

As teorias de campos de calibre surgiram em 1954, quando C. N. Yang e R. L. Mills, pela primeira vez, generalizaram o princípio de invariância de calibre da interação entre cargas elétricas para o caso de isospins interagentes. No seu artigo [1], eles introduziram um campo vetorial — que mais tarde ficou conhecido como campo de Yang-Mills — e, no âmbito da teoria clássica de campos, desenvolveram sua dinâmica. Assim, inspiradas na eletrodinâmica quântica (QED¹) — uma das mais bem sucedidas teorias da história da física —, surgiram as teorias de campos de calibre ou, como também são chamadas, teorias de Yang-Mills.

A partir daí, a aplicabilidade das teorias de Yang-Mills se expandiu rapidamente ao longo dos anos e atualmente existem diversos modelos que visam, através dos campos de Yang-Mills, descrever e/ou unificar ao menos três das quatro interações fundamentais conhecidas na natureza: eletromagnética, fraca e nuclear ou forte [2, 3].

De fato, as teorias de Yang-Mills são invariantes por transformações associadas ao grupo de simetria $SU(N)$ — grupo cujos elementos são matrizes unitárias de ordem N , na representação fundamental, com determinante $(+1)$ — e, dessa forma, a QED é vista como um caso particular de Yang-Mills por tratar-se de uma teoria invariante por

¹Do inglês: *Quantum electrodynamics*.

transformações associadas ao grupo abeliano $U(1)$.

A interação fraca pode ser descrita através de uma teoria de calibre $SU(2)$. Entretanto, a presença de bósons massivos carregados, que podem interagir com o campo eletromagnético, levou à criação do modelo eletrofraco, também conhecido como modelo de Glashow-Salam-Weinberg, que unifica as interações eletromagnética e fraca, e que é uma teoria invariante por transformações associadas ao grupo $SU(2) \times U(1)$. As massas dos bósons de calibre são obtidas por um mecanismo de quebra espontânea da simetria $SU(2) \times U(1)$. Este mecanismo — o mecanismo de Higgs — introduz uma nova partícula associada a um campo escalar — o bóson de Higgs — que, no entanto, não possui ainda qualquer evidência experimental [4, 5, 6].

A cromodinâmica quântica (QCD²) é hoje a teoria mais aceita para descrever a interação forte. O ingrediente básico desta teoria é que as partículas do espectro hadrônico — que engloba bárions (como prótons e nêutrons) e mésons (como píons e káons) — são formadas por partículas fundamentais denominadas *quarks*. Aos quarks são atribuídos dois números quânticos: a *cor* e o *sabor*. Existem três cores: *vermelho*, *verde* e *azul*³; e seis sabores: *up*, *down*, *charm*, *strange*, *bottom* e *top*. A interação entre os quarks é mediada por bósons de calibre chamados *glúons*. Assim, o glúon exerce um papel análogo ao do fóton na QED, porém, os glúons, ao contrário dos fótons, interagem entre si. O número de cores está associado à dimensão do grupo de simetria que, no caso da QCD, é o grupo $SU(3)$.

Uma das características fundamentais da QCD é a chamada liberdade assintótica. Formalmente, uma teoria apresenta liberdade assintótica quando a função- β , que dita o comportamento da constante de acoplamento com a escala de energia, assume valores negativos quando a constante de acoplamento tende a zero [7, 8]. Isto significa que a teoria é bem definida, perturbativamente, na região ultravioleta, ou seja, a altas energias (curtas distâncias). Entretanto, conforme a escala de energia diminui, a constante de acoplamento cresce, chegando ao ponto em que os métodos perturbativos já não são mais aplicáveis. Portanto, numa teoria com liberdade assintótica na região infravermelha, isto é, a baixas energias (longas distâncias), ocorrem os chamados *efeitos não perturbativos*. Assim, como consequência deste comportamento da QCD, quando a separação entre dois

²Do inglês: *Quantum chromodynamics*.

³A escolha das cores é arbitrária e não interfere no conteúdo físico da teoria.

quarks diminui, a intensidade do acoplamento fica mais fraca. Ao contrário, a grandes distâncias, a interação se torna tão forte que os quarks e os glúons ficam confinados permanentemente no interior dos hádrons. Isto significa que não é possível detectar quarks e glúons livres na natureza. Este fenômeno, que até o presente momento não possui um entendimento satisfatório do ponto de vista teórico, é conhecido na literatura como o *problema do confinamento da QCD* e é, como veremos, a grande motivação desta tese.

Além disso, existem as teorias de grande unificação como é o caso do modelo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ — o famoso modelo “três-dois-um” — que é um subgrupo de $SU(5)$ [4, 6]. Este modelo engloba a QCD, que corresponde ao grupo $SU(3)$, e o modelo eletrofraco de Glashow-Salam-Weinberg, cujo grupo de simetria é o $SU(2) \times U(1)$.

É interessante comentar a ausência da interação gravitacional dentro do cenário das teorias de calibre. De fato, gravitação e mecânica quântica parecem ser tão antagônicas que a união das duas, ou seja, uma gravitação quântica, é sem dúvida um dos grandes desafios da física moderna. Contudo, existem propostas, ver [9] por exemplo, na qual uma teoria de Yang-Mills euclidiana em $SO(4)$ é mapeada num espaço-tempo curvo e assim, um modelo gravitacional é obtido através de um mecanismo de quebra da simetria de cor. Neste sentido, a gravitação seria interpretada como uma teoria clássica efetiva advinda de uma teoria quântica de calibre.

Sobre a tese

O comportamento na região infravermelha da QCD, e das teorias de Yang-Mills de um modo geral, requer um tratamento especial através de métodos não perturbativos. Na verdade, tais métodos não existem do ponto de vista analítico. O melhor que podemos fazer para obter informações deste setor é considerar alguns aspectos que podem ter implicações a baixas energias e nos fixarmos numa região intermediária, onde os cálculos perturbativos ainda funcionam; porém, começam a aparecer efeitos tipicamente não perturbativos. Este tipo de abordagem lembra a aproximação semiclássica usada em mecânica quântica. Nesta tese, iremos destacar dois aspectos não perturbativos. Um deles é a problemática de Gribov [10], que está relacionada com a correta quantização da teoria, e o outro são os condensados de dimensão dois, que permitem introduzir parâmetros massivos que ajudam a regular as divergências do setor infravermelho.

Tendo estes dois aspectos em mente, elaboramos a tese da seguinte maneira. No

capítulo 1, fazemos uma introdução aos conceitos fundamentais das teorias de Yang-Mills, partindo da ação clássica de Yang-Mills, passando por aspectos da quantização perturbativa da teoria (fixação de calibre, método de Faddeev-Popov, simetria de BRST, identidade de Slavnov-Taylor, etc), e terminando por apresentar os principais aspectos não perturbativos de Yang-Mills como o cenário de Gribov-Zwanziger, o mecanismo de supercondutividade dual, a geração dinâmica de massa e a dominância abeliana.

No capítulo 2, apresentamos o calibre abeliano maximal, conhecido como MAG, e mostramos o conjunto de identidades de Ward que a ação de Yang-Mills possui neste calibre. Ainda neste capítulo, introduzimos termos de interação extra entre os campos de Faddeev-Popov, compatíveis com o conjunto de simetrias da ação inicial, em decorrência da não-linearidade da condição de calibre do MAG.

No capítulo 3, abordamos a questão das cópias de Gribov no MAG em $SU(2)$. A eliminação dessas cópias, seguindo a linha original de Gribov [10], e a influência disto nos propagadores da teoria são os destaques deste capítulo. Também fazemos uma pequena digressão acerca da região modular fundamental.

Como uma extensão natural da abordagem de Gribov, obtemos, no capítulo 4, a função horizonte no MAG em $SU(2)$ sob os critérios de localizabilidade e renormalizabilidade. Assim, construímos a ação de Gribov-Zwanziger para este calibre em sua versão local e estendida. Neste capítulo, apresentamos um conceito muito delicado que é o da quebra explícita da simetria de BRST como uma forma de se introduzir efeitos não perturbativos na teoria.

O capítulo 5 é inteiramente dedicado à apresentação dos operadores de dimensão dois, com destaque especial para os operadores locais compostos. Ainda, mostramos como introduzi-los na teoria e como estudar sua condensação.

Com o montante de informações acumuladas nos capítulos anteriores, fomos capazes de propor, no capítulo 6, um modelo que engloba os diversos efeitos não perturbativos discutidos nessa tese e mostramos sua renormalizabilidade.

No capítulo 7, calculamos os propagadores do modelo anteriormente proposto e confrontamos nossos resultados com os de simulações numéricas na rede. Finalmente, no capítulo 8, concluímos a tese analisando nossos resultados no contexto atual da física no infravermelho, e apresentamos algumas perspectivas de continuidade desta pesquisa.

Notações e convenções

- O sistema de unidades natural é implicitamente escolhido, portanto, $\hbar = c = 1$.
- A tese é toda baseada num espaço euclidiano quadridimensional e por isso, a métrica é a identidade 4×4 , representada em componentes pelo tensor de Kronecker $\delta_{\mu\nu}$.
- Os índices gregos ($\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots$) representam vetores no espaço quadridimensional euclidiano e, portanto, variam de 1 até 4.
- Os índices latinos maiúsculos (A, B, C, D, \dots) são os índices do grupo $SU(N)$ na representação adjunta e variam de 1 até $N^2 - 1$.
- Os índices latinos minúsculos (a, b, c, d, e) são os índices do setor não-diagonal do grupo de calibre. No caso de $SU(N)$, estes variam de 1 até $N(N - 1)$; em $SU(2)$ vão de 1 a 2.
- Os índices latinos minúsculos (i, j, k, l), quando representam os índices do subgrupo abeliano $U(1)^{N-1}$ de $SU(N)$, vão de 1 a $N - 1$. Quando representam o multi-índice $\{\mu, a\}$, variam de 1 até 8. Não existe possibilidade de confusão no texto pois, em todos os casos onde aparece o multi-índice $\{\mu, a\}$ o grupo de simetria é o $SU(2)$, para o qual existe apenas uma componente diagonal, a componente 3, e não há necessidade de se empregar um índice.
- A convenção de somatório entre índices repetidos é adotada. Logo, o termo $g^2 f^{aci} f^{dbi} \bar{c}^a c^b A_\mu^c A_\mu^d$ que aparece em (2.14) equivale a

$$g^2 \sum_{a,b,c,d=1}^{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\mu=1}^4 f^{aci} f^{dbi} \bar{c}^a c^b A_\mu^c A_\mu^d,$$

enquanto que o termo $\bar{M}_{\mu i}^a D_\mu^{ab} \phi_i^b$ que aparece em (4.43) equivale a

$$\sum_{a,b=1}^2 \sum_{i=1}^8 \sum_{\mu=1}^4 \bar{M}_{\mu i}^a D_\mu^{ab} \phi_i^b,$$

onde neste caso i representa o multi-índice $\{\mu, a\}$ e o grupo de simetria é o $SU(2)$.

CAPÍTULO 1

CONCEITOS BÁSICOS SOBRE AS TEORIAS DE YANG-MILLS

Neste capítulo, iremos apresentar alguns conceitos fundamentais das teorias de Yang-Mills como a ação clássica e sua invariância por transformações de calibre. Iremos adentrar na questão da quantização e na decorrente necessidade de se escolher, ou fixar, um calibre. Por fim, discutiremos alguns aspectos não perturbativos.

1.1 Os campos de Yang-Mills

Uma teoria de calibre pode ser decomposta em três setores principais: um setor fermiônico, que corresponde aos campos de matéria; um setor de interação, aquele que promove a interação entre férmions mediada por bósons de calibre; e, finalmente, um setor puramente bosônico, que envolve somente os campos de Yang-Mills. Às teorias constituídas exclusivamente por esses campos são dadas o nome de *teorias de Yang-Mills puras*¹.

Os campos de Yang-Mills, $\mathcal{A}_\mu(x)$, assumem valores na álgebra de Lie do grupo $SU(N)$. Portanto, devem ser tomados como matrizes na representação adjunta desta álgebra [11]. Desta forma, podem ser escritos como combinação linear dos $N^2 - 1$ geradores de $SU(N)$:

$$\mathcal{A}_\mu(x) = \sum_{A=1}^{N^2-1} A_\mu^A(x) T^A \equiv A_\mu^A(x) T^A. \quad (1.1)$$

Os coeficientes $A_\mu^A(x)$, em (1.1), descrevem os $N^2 - 1$ bósons de calibre envolvidos na teoria², enquanto que os geradores, T^A , são matrizes hermitianas de traço nulo, que obedecem a uma álgebra de Lie e formam uma base ortonormalizada:

$$[T^A, T^B] = if^{ABC} T^C, \quad \text{tr}(T^A T^B) = \frac{1}{2} \delta^{AB}, \quad (1.2)$$

¹Daqui para frente, referir-nos-emos a tais teorias simplesmente por *teorias de Yang-Mills*.

²No caso da QCD existem, portanto, oito glúons envolvidos.

com $A, B, C = 1, \dots, N^2 - 1$ e sendo f^{ABC} a constante de estrutura do grupo que obedece à identidade de Jacobi:

$$f^{ABC} f^{CDE} + f^{ADC} f^{CEB} + f^{AEC} f^{CBD} = 0. \quad (1.3)$$

A dinâmica dos campos de Yang-Mills é descrita, num espaço-tempo quadridimensional euclidiano, através da ação

$$S_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^A. \quad (1.4)$$

Nesta ação, o tensor do campo de calibre, $\mathcal{F}_{\mu\nu} = T^A F_{\mu\nu}^A$, é dado por

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + g f^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C. \quad (1.5)$$

Nesta última expressão, o terceiro termo do lado direito desperta-nos um particular interesse. Este termo é não-linear nos campos e traz consigo a constante de acoplamento g . Esta não-linearidade é a responsável pelo aparecimento de autointerações entre os bósons de calibre. No caso particular abeliano, no qual se enquadra a QED, este termo desaparece, explicando, assim, a não existência de interação entre os fótons.

A ação (1.4) é invariante pela seguinte transformação dos campos de Yang-Mills

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow U \mathcal{A}_\mu U^\dagger + \frac{1}{ig} (\partial_\mu U) U^\dagger, \quad (1.6)$$

sendo $U(x)$ uma matriz do grupo $SU(N)$, ou seja, uma matriz unitária ($UU^\dagger = \mathbf{1}$), com $\det(U) = +1$, e que pode ser escrita como

$$U(x) = \exp \left(ig \omega^A(x) T^A \right) = \mathbf{1} + ig \omega^A(x) T^A + O(\omega^2). \quad (1.7)$$

A invariância de (1.4) fica mais evidente se tomarmos transformações infinitesimais, ou seja, aquelas cujos parâmetros da transformação, $\omega^A(x)$, são muito pequenos. Neste caso, temos

$$A_\mu^A \rightarrow A_\mu^A + D_\mu^{AB} \omega^B, \quad (1.8)$$

sendo D_μ^{AB} a derivada covariante na representação adjunta,

$$D_\mu^{AB} = \partial_\mu \delta^{AB} - g f^{ABC} A_\mu^C. \quad (1.9)$$

A ação clássica (1.4) é o ponto de partida para a quantização das teorias de Yang-Mills. Entretanto, mesmo classicamente, esta ação possui várias propriedades interessantes. Um bom exemplo disso se extrai da equação de movimento do campo. Esta

equação é, tal como a própria ação, invariante de calibre, logo, se $\mathcal{A}_\mu(x)$ é uma solução da equação de movimento, então, o campo transformado de acordo com (1.6) também será uma solução para qualquer $U(x) \in SU(N)$. Assim, vemos que a fixação de calibre faz-se necessária mesmo na teoria clássica. Além disso, a não-linearidade da equação de movimento permite soluções topológicas como monopólos e vórtices [3]. Contudo, nosso maior interesse está nos aspectos quânticos das teorias de Yang-Mills que passaremos a descrever a partir de agora.

1.2 Quantização dos campos de Yang-Mills

Passemos agora a tratar da quantização das teorias de Yang-Mills. Primeiramente, tomemos o exemplo de um campo escalar $\varphi(x)$. Na quantização por integração funcional, ou integrais de caminho de Feynman, do campo escalar, define-se uma função de partição como

$$\mathcal{Z} = \int [d\varphi] e^{-S[\varphi]}, \quad (1.10)$$

sendo $[d\varphi]$ uma medida funcional que indica que a integração é feita sobre todas as configurações possíveis do campo escalar, o termo exponencial, $e^{-S[\varphi]}$, é um peso de Boltzmann e $S[\varphi]$ é a ação clássica do modelo. A partir desta definição, podemos calcular valores esperados como, por exemplo, a função de Green de dois pontos:

$$\langle T\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x') \rangle = \frac{\int [d\varphi] \varphi(x)\varphi(x') e^{-S[\varphi]}}{\int [d\varphi] e^{-S[\varphi]}}. \quad (1.11)$$

Em princípio, pode-se pensar que a quantização do campo de Yang-Mills é obtida, simplesmente, substituindo-se, em (1.10), o campo escalar $\varphi(x)$ pelo campo de calibre $\mathcal{A}_\mu(x)$ e a ação $S[\varphi]$ pela ação de Yang-Mills (1.4). Entretanto, analisando a questão com cuidado, somos levados à conclusão de que, sendo a teoria invariante de calibre, a integração funcional, que leva em consideração todas as configurações de campos possíveis, irá incluir no cálculo todas as infinitas configurações equivalentes regidas pela transformação (1.6). Para lidar com esse problema, é preciso impor uma condição subsidiária sobre os campos de calibre de tal forma que, entre todas as configurações equivalentes do campo, apenas uma obedeça tal condição. Impor uma condição deste tipo sobre os campos equivale a fazer uma *fixação de calibre*, pois, a liberdade de escolha de calibre é perdida. Dentre os calibres mais comuns podemos mencionar os seguintes:

- Calibre de Landau: $\partial_\mu A_\mu^A = 0$;

- Calibres lineares covariantes: $\partial_\mu A_\mu^A = f^A(x)$;
- Calibre de Coulomb: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^A = 0$;
- Calibre abeliano maximal: $\partial_\mu A_\mu^a = g f^{abi} A_\mu^i A_\mu^b$, $\partial_\mu A_\mu^i = 0$.

Veamos, então, cada um desses calibres separadamente. O calibre de Landau é um caso particular dos calibres lineares covariantes quando $f^A(x) = 0$ para todo $A = 1, \dots, N^2 - 1$. A condição de calibre de Landau, $\partial_\mu A_\mu^A = 0$, restringe a teoria apenas aos campos transversos, ou seja, aqueles cuja 4-divergência é nula. Este calibre tem propriedades muito importantes tais como a de linearidade, covariância e renormalizabilidade. Além disso, é definido como a condição de extremo do funcional

$$\mathcal{A}_{\text{LG}}^2[A] = \int d^4x A_\mu^A(x) A_\mu^A(x), \quad (1.12)$$

o que permite sua implementação na rede. Devido a todas essas propriedades, existe uma extensa gama de trabalhos na literatura que exploram as propriedades das teorias de Yang-Mills neste calibre. Dentro da física no infravermelho podemos citar: [10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37].

Os calibres lineares covariantes são uma classe de calibres que, como o próprio nome diz, são lineares e covariantes. Nesta classe se inclui, como já dissemos, o calibre de Landau. Estes calibres são renormalizáveis e, assim como no calibre de Landau, existem diversos trabalhos em cima destes calibres: [13, 38, 39, 40, 41].

O calibre de Coulomb é o único entre os calibres aqui citados que não é covariante, o que compromete sua renormalizabilidade. No entanto, este pode ser implementado na rede através da condição de extremo do funcional

$$\mathcal{A}_{\text{CG}}^2[A] = \int d^3\vec{x} \vec{A}^A(\vec{x}, x_4) \cdot \vec{A}^A(\vec{x}, x_4). \quad (1.13)$$

Alguns trabalhos interessantes neste calibre são encontrados em [10, 42, 43, 44, 45, 46].

Finalmente, restanos comentar a respeito do calibre abeliano maximal, ou MAG³, que pode ser considerado o “calibre oficial” desta tese, pois, no decorrer da mesma, discutiremos diversas propriedades deste calibre. Aqui, porém, vamos adiantar apenas algumas dessas propriedades.

Em primeiro lugar, para entender o MAG é preciso entender o significado dos campos $A_\mu^a(x)$ e $A_\mu^i(x)$. Vimos anteriormente que o campo de Yang-Mills $\mathcal{A}_\mu(x)$ pode ser

³Do inglês: *maximal Abelian gauge*.

expandido em termos dos geradores da álgebra de Lie de $SU(N)$. Estes geradores, porém, podem ser decompostos em duas partes: uma correspondente aos geradores não-diagonais e a outra aos geradores diagonais. Por exemplo, na representação fundamental do grupo $SU(2)$ os geradores são proporcionais às matrizes de Pauli:

$$T^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Temos então, duas matrizes não-diagonais e uma matriz diagonal. Na representação fundamental de $SU(3)$ os geradores são proporcionais às matrizes de Gell-Mann sendo diagonais os geradores

$$T^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

e não-diagonais os outros seis restantes. Em $SU(5)$ há quatro geradores diagonais e vinte não-diagonais⁴. Desta forma, podemos inferir que, dos $N^2 - 1$ geradores de $SU(N)$, temos $N(N - 1)$ não-diagonais e $N - 1$ diagonais⁵. Com efeito, o campo de calibre $\mathcal{A}_\mu(x)$ é escrito como

$$\mathcal{A}_\mu(x) = A_\mu^A(x)T^A = A_\mu^a(x)T^a + A_\mu^i(x)T^i, \quad (1.16)$$

sendo $a, b, c = 1, \dots, N(N - 1)$ e $i, j, k = 1, \dots, N - 1$. Portanto, os campos $A_\mu^a(x)$ são as componentes não-diagonais e os campos $A_\mu^i(x)$ são as componentes diagonais, ou abelianas, do campo de Yang-Mills.

A condição imposta aos campos não-diagonais, $\partial_\mu A_\mu^a = gf^{abi}A_\mu^i A_\mu^b$, é obtida a partir da extremização do funcional

$$\mathcal{A}_{\text{MAG}}^2[A] = \int d^4x A_\mu^a(x)A_\mu^a(x). \quad (1.17)$$

Já a condição imposta às componentes abelianas, $\partial_\mu A_\mu^i = 0$, é devida à necessidade de se fixar uma simetria $U(1)^{N-1}$ residual. Entretanto, a escolha desta condição em particular — que é idêntica à condição do calibre de Landau —, é feita por ser esta a mais simples possível, não estando ligada à condição de extremo de nenhum funcional⁶.

Tal como o calibre de Landau, o MAG é um calibre renormalizável e implementável na rede, embora seja um calibre não-linear. O grande interesse no MAG está no fato de

⁴Os geradores de $SU(3)$ encontram-se em [47] e os de $SU(5)$ em [6].

⁵Os $N - 1$ geradores diagonais formam o chamado subgrupo abeliano de Cartan.

⁶Existe uma outra escolha que leva ao calibre conhecido como MAG modificado [48].

este promover a separação das componentes abelianas do campo de calibre das demais. Esta característica do MAG o credencia a ser o calibre mais adequado ao estudo da chamada dominância abeliana.

Além destes, há ainda outros calibres que valem ser citados como, por exemplo, o de Curci-Ferrari [37, 49, 50], que é um calibre não-linear, e os calibres interpolantes, que dependem de uma série de parâmetros que, devidamente ajustados, dão origem a outros calibres já conhecidos. Os calibres interpolantes funcionam como pontes que conectam diferentes calibres [48, 51, 52, 53].

A fixação do calibre se dá através do método de quantização de Faddeev-Popov. Neste método é necessário introduzir campos extras que são os chamados campos fantasmas de Faddeev-Popov. Tais campos são escalares e anticomutantes, ou seja, obedecem à estatística de Fermi. Esta combinação entre spin e estatística faz com que estes campos violem a causalidade. Portanto, as excitações destes campos não podem ser interpretadas como partículas físicas observáveis. Contudo, estes campos são responsáveis pela unitariedade da teoria, uma vez que seus diagramas cancelam graus de liberdade não-físicos da série perturbativa [6, 47].

Por simplicidade, tomemos como exemplo o calibre de Landau, $\partial_\mu A_\mu^A = 0$. Para fixar este calibre de acordo com o método de Faddeev-Popov, devemos adicionar o seguinte termo à ação de Yang-Mills (1.4):

$$S_{\text{gf}} = \int d^4x \left(i b^A \partial_\mu A_\mu^A + \bar{c}^A \partial_\mu D_\mu^{AB} c^B \right). \quad (1.18)$$

Neste termo, $b^A(x)$ é o campo auxiliar de Nakanishi-Lautrup que funciona como um multiplicador de Lagrange para a condição de calibre⁷, e os campos grassmannianos $c^A(x)$ e $\bar{c}^A(x)$ são os tais campos fantasmas que havíamos mencionado anteriormente⁸.

Agora, vejamos uma propriedade muito importante que surge da quantização de Faddeev-Popov. Sabemos que a simetria de calibre é perdida ao fixarmos um calibre. Porém, ao considerarmos a ação

$$S_0 = S_{\text{YM}} + S_{\text{gf}}, \quad (1.19)$$

que nada mais é que a ação de Yang-Mills com o calibre fixado, obtemos uma nova simetria, a chamada simetria de BRST⁹[54, 55]. Definindo-se um operador anticomutante

⁷De fato, ao tomar a equação de movimento de $b^A(x)$ obtém-se $\partial_\mu A_\mu^A = 0$.

⁸Mais precisamente, $c^A(x)$ e $\bar{c}^A(x)$ são, respectivamente, os campos de *ghost* e *antighost*.

⁹Becchi, Rouet, Stora e Tyutin.

s como o operador de BRST, verifica-se facilmente que a ação (1.19) é invariante sob o seguinte conjunto de transformações:

$$sA_\mu^A = -D_\mu^{AB} c^B, \quad sc^A = \frac{g}{2} f^{ABC} c^B c^C, \quad s\bar{c}^A = ib^A, \quad sb^A = 0. \quad (1.20)$$

Esta nova simetria é a peça fundamental na demonstração da renormalizabilidade da teoria descrita pela ação (1.19). Além disso, o operador de BRST é dito nilpotente, *id est*, $s^2 = 0$. Esta propriedade permite provar a unitariedade da matriz de espalhamento da teoria, dando a esta última um sentido físico.

Para mostrar a renormalizabilidade da teoria devemos conhecer o conteúdo de simetria nela existente. As simetrias que sobrevivem ao processo de quantização perturbativa da teoria devem ser escritas como equações funcionais — também chamadas de identidades de Ward — de forma compatível com o chamado *princípio de ação quântica*¹⁰. De acordo com este princípio, transformações não-lineares dos campos, como é o caso das transformações de BRST, dão origem a inserções de operadores locais compostos. Como estes operadores não são campos fundamentais da teoria, devem ser acoplados a fontes externas. Portanto, devemos acrescentar à ação (1.19) o seguinte termo

$$S_{\text{ext}} = \int d^4x \left[\Omega_\mu^A (sA_\mu^A) + L^A (sc^A) \right]. \quad (1.21)$$

Essas fontes externas são invariantes pela atuação do operador de BRST,

$$s\Omega_\mu^A = 0, \quad sL^A = 0, \quad (1.22)$$

e a fonte $\Omega_\mu^A(x)$ é anticomutante tal como os ghosts e o operador de BRST.

Assim, ao definirmos a ação S como sendo

$$S = S_0 + S_{\text{ext}}, \quad (1.23)$$

podemos escrever a invariância de BRST como uma equação funcional,

$$\mathcal{S}(S) \equiv \int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta \Omega_\mu^A} \frac{\delta S}{\delta A_\mu^A} + \frac{\delta S}{\delta L^A} \frac{\delta S}{\delta c^A} + ib^A \frac{\delta S}{\delta \bar{c}^A} \right) = 0, \quad (1.24)$$

que é amplamente conhecida na literatura como a *identidade de Slavnov-Taylor*.

Vale a pena comentar também, que, com a introdução dos campos fantasmas, aparece uma simetria envolvendo os campos (\bar{c}^A, c^A) e as fontes (Ω_μ^A, L^A) :

$$c^A \rightarrow e^{i\theta} c^A, \quad \bar{c}^A \rightarrow e^{-i\theta} \bar{c}^A, \quad \Omega_\mu^A \rightarrow e^{-i\theta} \Omega_\mu^A, \quad L^A \rightarrow e^{-2i\theta} L^A, \quad (1.25)$$

¹⁰Para maiores detalhes a respeito do princípio de ação quântica recomendamos a referência [56].

	A	b	\bar{c}	c	Ω	L
dimensão	1	2	2	0	3	4
número de ghost	0	0	-1	1	-1	-2

Tabela 1.1: Números quânticos de campos e fontes.

sendo θ um parâmetro finito, global e comutante. Esta simetria da ação define um novo número quântico, o chamado *número de ghost*. A paridade deste número define o caráter comutante dos campos. Por exemplo, o campo $c^A(x)$ tem número de ghost igual a (+1), logo, é anticomutante, enquanto que a fonte $L^A(x)$, que possui número de ghost igual a (-2), é comutante. Além disso, podemos escrever esta simetria como uma equação funcional:

$$\mathcal{N}_{\text{gh}}(S) = 0, \quad (1.26)$$

onde o operador de número de ghost, \mathcal{N}_{gh} , é dado por

$$\mathcal{N}_{\text{gh}} := \int d^4x \left(c^A \frac{\delta}{\delta c^A} - \bar{c}^A \frac{\delta}{\delta \bar{c}^A} - \Omega_\mu^A \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^A} - 2L^A \frac{\delta}{\delta L^A} \right). \quad (1.27)$$

A dimensão de massa e o número de ghost dos campos e das fontes da teoria encontram-se dispostos na tabela 1.1. Com isso, podemos constatar ainda que o operador de BRST, s , carrega número de ghost (+1).

Apesar do grande sucesso da quantização de Faddeev-Popov, em [10], Gribov chamou a atenção para o fato de que a simples fixação do calibre não é suficiente para eliminar completamente as configurações equivalentes do campo. De fato, uma simetria de calibre residual sobrevive ao processo perturbativo de quantização e seus efeitos são evidentes na região infravermelha. Este problema está associado às chamadas *ambiguidades de Gribov*¹¹. Com isso, a quantização de Faddeev-Popov deve ser aprimorada para dar conta desta simetria residual.

1.3 Alguns aspectos não perturbativos

Para encerrar este capítulo, vamos comentar brevemente alguns dos aspectos não perturbativos das teorias de Yang-Mills. Já na introdução, mencionamos o fenômeno do confinamento da QCD na região infravermelha, e, naquela ocasião, dissemos não haver um entendimento satisfatório deste fenômeno do ponto de vista teórico. Entretanto, existem

¹¹Uma revisão didática e detalhada é feita em [12] no calibre de Landau.

alguns aspectos não perturbativos da teoria que podem explicar o confinamento. Tais aspectos, não são necessariamente excludentes e é provável que eles coexistam na teoria, contribuindo mutuamente para a manifestação deste fenômeno.

O primeiro aspecto a ser abordado é a problemática de Gribov [10], ou, como se diz atualmente, o cenário de Gribov-Zwanziger [14, 15, 57], que está associada à correta quantização das teorias de Yang-Mills. Como já dissemos, a simples fixação do calibre, aplicada no método de Faddeev-Popov, não é suficiente para eliminar completamente as configurações equivalentes do campo, levando ao surgimento das chamadas *cópias de Gribov*. A eliminação dessas cópias faz com que os glúons deixem de fazer parte do espectro físico na região infravermelha devido a supressão do propagador, uma propriedade característica de objetos confinados e, além disso, certas divergências infravermelhas da teoria são eliminadas.

Outro aspecto que poderia explicar o confinamento é o mecanismo de supercondutividade dual, proposto por Nambu [58], 't Hooft [59] e Mandelstam [60]. De acordo com este mecanismo, que, como o próprio nome sugere, é inspirado no modelo de supercondutor abeliano do tipo II, o regime de baixa energia da QCD é descrito por uma teoria abeliana efetiva em presença de monopólos magnéticos. Se o vácuo da QCD contiver esses monopólos e se eles, de fato, condensam, ocorrerá um efeito Meissner dual que comprime o campo cromoeletrico num fino tubo de fluxo. Isto resultaria num potencial linear, *i. e.*, $V(r) \propto r$, confinando as carga cromoeletricas. O desacoplamento dos setores abeliano (elétrico) e não-diagonal (magnético), inerente ao mecanismo, deu origem aos chamados calibres abelianos [61], sendo o MAG um representante dessa classe de calibres.

Além do próprio problema do confinamento, as teorias de Yang-Mills são repletas de divergências infravermelhas. Para resolver este problema, uma hipótese bastante aceita é que exista um *gap de massa*, ou seja, de algum modo surgem parâmetros de massa que regularizam as divergências infravermelhas. Por outro lado, devido ao próprio fenômeno do confinamento e a autointeração entre glúons, podem existir estados ligados compostos por glúons, conhecidos como *glueballs*, ou bolas de glúons, com massas da ordem de 1,6 GeV, vide [62, 63]. É natural então supor que estes estados ligados sejam formados por excitações massivas. Além disso, em simulações da QCD na rede, parâmetros de massa são utilizados para ajustar os dados obtidos, apesar de não ser possível determinar a origem desses parâmetros na rede [64, 65].

Com base em todos esses argumentos, surge um novo aspecto que é o da geração dinâmica de massa. A maneira de se introduzir estas massas é obtida através da condensação de operadores locais compostos de dimensão dois. Um exemplo muito conhecido é o operador de glúons $A_\mu^A(x)A_\mu^A(x)$, intensamente estudado nos calibres de Landau e linear covariante [39, 40, 66], e seu análogo $\frac{1}{2}A_\mu^a(x)A_\mu^a(x) + \alpha \bar{c}^a(x)c^a(x)$, estudado no MAG [67]. Outros operadores como os operadores de ghosts também têm um papel importante, como iremos ver no capítulo 5.

Finalmente, como último aspecto que vamos citar aqui, aparece o conceito de dominância abeliana [61, 68]. De acordo com este conceito, a baixas energias, a QCD seria governada exclusivamente por graus de liberdade abelianos. Note-se que este conceito não está em desacordo com o mecanismo de supercondutividade dual, pois ambos os casos requerem o desacoplamento dos setores diagonal e não-diagonal. Este conceito também pode se compatibilizar com a idéia de geração dinâmica de massa se houver uma quebra na degenerescência da massa dos glúons, tal que a massa do setor não-diagonal seja maior que a do setor diagonal. Assim, os graus de liberdade não-diagonais “congelariam” mais rápido que os abelianos conforme a energia se aproxima de zero. O MAG é portanto, um calibre adequado para se estudar este aspecto não perturbativo. Além disso, a dominância abeliana tem recebido confirmações da rede [64, 69, 70, 71, 73, 74, 72].

CAPÍTULO 2

O CALIBRE ABELIANO MAXIMAL (MAG)

Neste capítulo, iremos analisar o chamado calibre abeliano maximal¹ (MAG), já apresentado no capítulo anterior. Dentro desta análise, faremos a quantização de Faddeev-Popov da ação de Yang-Mills tendo o MAG como calibre fixado e apresentaremos o conteúdo de simetria da teoria através do conjunto de identidades de Ward. Algumas considerações são feitas no final do capítulo.

2.1 Introdução

No capítulo anterior, começamos a descrever o MAG, que é um exemplo dos calibres abelianos [61, 75, 76]. Naquela ocasião, definimos as condições de calibre do MAG como sendo

$$\partial_\mu A_\mu^a = g f^{abi} A_\mu^i A_\mu^b, \quad (2.1)$$

ou ainda,

$$\left(\partial_\mu \delta^{ab} - g f^{abi} A_\mu^i \right) A_\mu^b \equiv D_\mu^{ab} A_\mu^b = 0, \quad (2.2)$$

para as componentes não-diagonais de $\mathcal{A}_\mu(x)$, e

$$\partial_\mu A_\mu^i = 0, \quad (2.3)$$

para as componentes abelianas do campo. Os índices a, b, c , etc, que variam de 1 até $N(N-1)$, representam o setor não-diagonal, enquanto os índices i, j, k , etc, que variam de 1 a $N-1$, representam as componentes diagonais. Vimos também, que a condição imposta aos campos não-diagonais é a condição de extremo do funcional

$$\mathcal{A}_{\text{MAG}}^2[A] = \int d^4x A_\mu^a(x) A_\mu^a(x), \quad (2.4)$$

¹Também conhecido como *calibre abeliano máximo*, ou *calibre maximalmente abeliano*.

e que as componentes diagonais formam um subgrupo abeliano $U(1)^{N-1}$, o chamado subgrupo de Cartan. Este subgrupo gera uma simetria residual que precisa ser fixada². Porém, não havendo um funcional associado aos campos $A_\mu^i(x)$, é comum, por simplicidade, adotar a condição (2.3).

A ação de Yang-Mills (1.4) pode ser escrita em termos das componentes diagonais e não-diagonais do tensor do campo de calibre, $F_{\mu\nu}^A$, como

$$S_{\text{YM}} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^A = \frac{1}{4} \int d^4x \left(F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i \right). \quad (2.5)$$

As componentes $F_{\mu\nu}^a$ e $F_{\mu\nu}^i$ do tensor são dadas por

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= D_\mu^{ab} A_\nu^b - D_\nu^{ab} A_\mu^b + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \\ F_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g f^{abi} A_\mu^a A_\nu^b. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nestas, D_μ^{ab} é uma derivada covariante definida com relação às componentes diagonais, como em (2.2), e aparecem dois tipos de constantes de estrutura: f^{abc} e f^{abi} , que obedecem às seguintes identidades³:

$$\begin{aligned} f^{abi} f^{bjc} + f^{abj} f^{bci} &= 0, \\ f^{abc} f^{bdi} + f^{abd} f^{bic} + f^{abi} f^{bcd} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Além disso, a ação (1.4) é invariante pelas transformações

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + D_\mu^{ab} \omega^b + g f^{abc} A_\mu^b \omega^c + g f^{abi} A_\mu^b \omega^i, \\ A_\mu^i &\rightarrow A_\mu^i + \partial_\mu \omega^i + g f^{abi} A_\mu^a \omega^b, \end{aligned} \quad (2.8)$$

sendo $\omega^a(x)$ e $\omega^i(x)$ as componentes do parâmetro da transformação:

$$\omega^A(x) T^A = \omega^a(x) T^a + \omega^i(x) T^i. \quad (2.9)$$

2.2 Quantização de Faddeev-Popov

Vejam agora como quantizar a teoria descrita pela ação (2.5) — com o MAG como o calibre a ser fixado —, utilizando, para tanto, o método de quantização de Faddeev-Popov que introduzimos na seção 1.2. De acordo com este método, a função de partição

²Notando-se que o funcional (2.4) corresponde à norma dos campos não-diagonais e, por não depender das componentes diagonais, exibe uma invariância $U(1)^{N-1}$, podemos justificar o nome deste calibre imaginando que a norma dos campos não-diagonais é minimizada, não apenas extremizada, pela condição (2.2). Assim, a teoria restante é, neste sentido, maximalmente abeliana.

³Estas são oriundas da identidade de Jacobi: $f^{ABC} f^{CDE} + f^{ADC} f^{CEB} + f^{AEC} f^{CBD} = 0$.

de uma teoria de calibre é dada pela expressão

$$\mathcal{Z} = \int [d\mathcal{A}] \delta(\Phi[\mathcal{A}]) \det \left(\frac{\delta\Phi[\mathcal{A}^\omega(x)]}{\delta\omega(x')} \right) e^{-S_{\text{YM}}[\mathcal{A}]}. \quad (2.10)$$

Aqui, $\Phi[\mathcal{A}] = 0$ é a condição de calibre introduzida através da distribuição de Dirac funcional, e $\mathcal{A}_\mu^\omega(x)$ é o campo transformado de acordo com (1.8) através do parâmetro infinitesimal (2.9). No caso do MAG temos

$$\Phi^a[\mathcal{A}] = D_\mu^{ab} A_\mu^b, \quad \Phi^i[\mathcal{A}] = \partial_\mu A_\mu^i, \quad \frac{\delta\Phi[\mathcal{A}^\omega(x)]}{\delta\omega(x')} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\delta\Phi^a[\mathcal{A}^\omega(x)]}{\delta\omega^b(x')} & \frac{\delta\Phi^a[\mathcal{A}^\omega(x)]}{\delta\omega^j(x')} \\ \frac{\delta\Phi^i[\mathcal{A}^\omega(x)]}{\delta\omega^b(x')} & \frac{\delta\Phi^i[\mathcal{A}^\omega(x)]}{\delta\omega^j(x')} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Phi^a[\mathcal{A}^\omega(x)]}{\delta\omega^b(x')} &= (D_\mu^{ac} D_\mu^{cb} - g^2 f^{aci} f^{dbi} A_\mu^c A_\mu^d) \delta(x - x') + D_\mu^{ac} (g f^{cdb} A_\mu^d \delta(x - x')), \\ \frac{\delta\Phi^a[\mathcal{A}^\omega(x)]}{\delta\omega^j(x')} &= g f^{abj} (D_\mu^{dc} A_\mu^c) \delta(x - x'), \\ \frac{\delta\Phi^i[\mathcal{A}^\omega(x)]}{\delta\omega^b(x')} &= \partial_\mu (g f^{abi} A_\mu^a \delta(x - x')), \\ \frac{\delta\Phi^i[\mathcal{A}^\omega(x)]}{\delta\omega^j(x')} &= \partial^2 (\delta^{ij} \delta(x - x')). \end{aligned} \quad (2.12)$$

As condições de calibre do MAG, uma vez introduzidas pelas funções- δ , podem ser exponenciadas através dos campos auxiliares de Nakanishi-Lautrup (b^a, b^i). Já o determinante é exponenciado introduzindo-se os campos fantasmas de Faddeev-Popov ($\bar{c}^{a,i}, c^{a,i}$). Dessa forma, a função de partição é escrita como

$$\mathcal{Z} = \int [dA^a][dA^i][db^a][db^i][dc^a][d\bar{c}^a][dc^i][d\bar{c}^i] e^{-(S_{\text{YM}} + S_{\text{MAG}})}, \quad (2.13)$$

sendo S_{MAG} a ação de fixação de calibre tendo o MAG como calibre escolhido:

$$\begin{aligned} S_{\text{MAG}} &= \int d^4x \left[ib^a D_\mu^{ab} A_\mu^b + \bar{c}^a D_\mu^{ac} D_\mu^{cb} c^b - g^2 f^{aci} f^{dbi} \bar{c}^a c^b A_\mu^c A_\mu^d + \bar{c}^a D_\mu^{ac} (g f^{cdb} A_\mu^d c^b) \right. \\ &\quad \left. + g f^{abi} \bar{c}^a (D_\mu^{bc} A_\mu^c) c^i + ib^i \partial_\mu A_\mu^i + \bar{c}^i \partial_\mu (\partial_\mu c^i + g f^{abi} A_\mu^a c^b) \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

No capítulo anterior, vimos que a simetria de calibre é perdida ao fixarmos um calibre, neste caso o MAG. Porém, a quantização de Faddeev-Popov introduz uma nova simetria que é a chamada simetria de BRST. De fato, ao definirmos a ação

$$S_0 = S_{\text{YM}} + S_{\text{MAG}}, \quad (2.15)$$

como nosso ponto de partida, podemos verificar que esta é invariante pelo seguinte conjunto de transformações:

$$\begin{aligned}
sA_\mu^a &= -(D_\mu^{ab}c^b + gf^{abc}A_\mu^b c^c + gf^{abi}A_\mu^b c^i), & sA_\mu^i &= -(\partial_\mu c^i + gf^{abi}A_\mu^a c^b), \\
sc^a &= gf^{abi}c^b c^i + \frac{g}{2}f^{abc}c^b c^c, & sc^i &= \frac{g}{2}f^{abi}c^a c^b, \\
s\bar{c}^a &= ib^a, & s\bar{c}^i &= ib^i, \\
sb^a &= 0, & sb^i &= 0,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

sendo s o operador de BRST. Com efeito, a ação (2.14) pode ser reescrita como

$$S_{\text{MAG}} = s \int d^4x \left(\bar{c}^a D_\mu^{ab} A_\mu^b + \bar{c}^i \partial_\mu A_\mu^i \right). \tag{2.17}$$

Esta maneira de escrever S_{MAG} evidencia sua invariância frente às transformações de BRST (2.16) devido a propriedade de nilpotência do operador de BRST, $s^2 = 0$.

2.3 Identidades de Ward

Agora, vamos determinar as chamadas identidades de Ward da ação (2.15). Ou seja, vamos obter um conjunto de identidades compatíveis com o princípio de ação quântica [56]. Para tanto, é necessário, antes de tudo, introduzir um termo com fontes externas acopladas às transformações de BRST não-lineares:

$$S_{\text{ext}} = \int d^4x \left[\Omega_\mu^a (sA_\mu^a) + \Omega_\mu^i (sA_\mu^i) + L^a (sc^a) + L^i (sc^i) \right]. \tag{2.18}$$

Assim, definindo a ação

$$S = S_0 + S_{\text{ext}}, \tag{2.19}$$

podemos escrever a simetria de BRST como uma equação funcional

$$\mathcal{S}(S) = 0, \tag{2.20}$$

onde

$$\mathcal{S}(S) \equiv \int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta \Omega_\mu^a} \frac{\delta S}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta S}{\delta \Omega_\mu^i} \frac{\delta S}{\delta A_\mu^i} + \frac{\delta S}{\delta L^a} \frac{\delta S}{\delta c^a} + \frac{\delta S}{\delta L^i} \frac{\delta S}{\delta c^i} + ib^a \frac{\delta S}{\delta c^a} + ib^i \frac{\delta S}{\delta c^i} \right), \tag{2.21}$$

que é a identidade de Slavnov-Taylor que vimos no capítulo 1.

São também compatíveis com o princípio de ação quântica, equações funcionais que tenham quebras lineares nos campos — as chamadas quebras clássicas. Dessa forma,

a equação de movimento do campo auxiliar $b^i(x)$, que dá a condição de calibre do setor diagonal, é também uma identidade de Ward:

$$\frac{\delta S}{\delta b^i} = i\partial_\mu A_\mu^i. \quad (2.22)$$

Além desta, temos ainda as equações de movimento dos campos de antighost,

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{c}^i} + \partial_\mu \frac{\delta S}{\delta \Omega_\mu^i} = 0, \quad (2.23)$$

e ghost diagonais,

$$\mathcal{G}^i(S) = \Delta_{\text{class}}^i, \quad (2.24)$$

sendo

$$\mathcal{G}^i \equiv \frac{\delta}{\delta c^i} - igf^{abi}\bar{c}^a \frac{\delta}{\delta b^b} \quad (2.25)$$

e

$$\Delta_{\text{class}}^i = -\partial_\mu(\Omega_\mu^i + \partial_\mu \bar{c}^i) + gf^{abi}(\Omega_\mu^a A_\mu^b - L^a c^b). \quad (2.26)$$

Também é possível verificar a invariância da ação (2.19) pelas transformações

$$\delta \bar{c}^a = c^a, \quad \delta b^a = gf^{abi}c^b c^i + \frac{g}{2}f^{abc}c^b c^c, \quad (2.27)$$

sendo δ um operador comutante. Esta simetria é representada por

$$\int d^4x \left(c^a \frac{\delta S}{\delta \bar{c}^a} + \frac{\delta S}{\delta L^a} \frac{\delta S}{\delta b^a} \right) = 0. \quad (2.28)$$

Por fim, podemos escrever a simetria $U(1)^{N-1}$ residual como

$$\mathcal{W}^i(S) = -\partial^2 b^i, \quad (2.29)$$

com

$$\mathcal{W}^i \equiv \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^i} + gf^{abi} \left(A_\mu^a \frac{\delta}{\delta A_\mu^b} + b^a \frac{\delta}{\delta b^b} + \bar{c}^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^b} + c^a \frac{\delta}{\delta c^b} + \Omega_\mu^a \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^b} + L^a \frac{\delta}{\delta L^b} \right). \quad (2.30)$$

O conjunto de identidades (2.20 – 2.29) é a nossa principal ferramenta para provar a renormalizabilidade da teoria. Entretanto, como iremos mostrar na seção seguinte, a ação (2.19) não é a ação mais geral que obedece este conjunto de identidades. De fato, é necessário introduzir termos extras de interação entre os campos fantasmas que, no entanto, estão todos ligados a um único parâmetro de calibre que deve ser tomado para zero após a remoção das divergências ultravioletas.

2.4 Interações quárticas entre os campos fantasmas

Na seção anterior vimos que a ação (2.19) obedece ao conjunto de identidades de Ward (2.20 – 2.29) e mencionamos que esta ação não é a mais geral que obedece a este conjunto. Para obter a ação mais geral devemos adicionar a (2.19) o seguinte termo:

$$\begin{aligned}
S_\alpha &= -\frac{\alpha}{2} s \int d^4x \left(i\bar{c}^a b^a - g f^{abi} \bar{c}^a \bar{c}^b c^i - \frac{g}{2} f^{abc} c^a \bar{c}^b \bar{c}^c \right) \\
&= \frac{\alpha}{2} \int d^4x \left(b^a b^a + 2ig f^{abi} b^a \bar{c}^b c^i + ig f^{abc} b^a \bar{c}^b c^c + \frac{g^2}{2} f^{abi} f^{cdi} \bar{c}^a \bar{c}^b c^c c^d \right. \\
&\quad \left. + \frac{g^2}{2} f^{abc} f^{adi} \bar{c}^b \bar{c}^c c^d c^i + \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} \bar{c}^b \bar{c}^c c^d c^e \right). \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Neste termo, destacam-se o parâmetro de calibre α e as interações quárticas entre os campos fantasmas. De fato, ao acrescentarmos este termo na ação (2.19), a equação de movimento do multiplicador de Lagrange $b^a(x)$ é modificada da seguinte maneira:

$$\frac{\delta(S + S_\alpha)}{\delta b^a} = iD_\mu^{ab} A_\mu^b + \alpha \left(b^a + ig f^{abi} \bar{c}^b c^i + i\frac{g}{2} f^{abc} \bar{c}^b c^c \right). \tag{2.32}$$

Desta equação podemos verificar que, ao tomarmos o limite em que α vai a zero, reobtemos a condição original do MAG para o setor não-diagonal.

Para entendermos melhor a necessidade de se acrescentar (2.31), voltemos até a ação (2.19) e tomemos a equação de movimento do campo auxiliar $b^a(x)$:

$$\frac{\delta S}{\delta b^a} = iD_\mu^{ab} A_\mu^b. \tag{2.33}$$

Notemos nesta última que, ao contrário das identidades obtidas na seção anterior, esta equação não pode ser entendida como uma identidade de Ward genuína por conter uma quebra não-linear nos campos. Conseqüentemente, não é possível eliminar o termo S_α que certamente apareceria nas correções quânticas, ainda que não fosse incluído na ação de partida. Portanto, a ação de partida mais geral é dada por

$$\Sigma = S_{\text{YM}} + S_{\text{MAG}} + S_{\text{ext}} + S_\alpha, \tag{2.34}$$

onde S_{YM} , S_{MAG} , S_{ext} e S_α são, respectivamente, (2.5), (2.14), (2.18) e (2.31). A renormalizabilidade desta ação é provada em [77, 78].

2.5 Considerações

Neste capítulo fizemos uma apresentação introdutória aos calibres abelianos, dando uma atenção especial para o MAG. Apresentamos também a quantização de Faddeev-

Popov tendo o MAG como calibre a ser fixado e analisamos o conteúdo de simetria da ação de Yang-Mills no MAG através das identidades de Ward. Desta análise, concluímos ser necessário introduzir interações extras entre os campos fantasmas — fato que se justifica pela não-linearidade das condições de calibre do MAG, equação (2.2).

No entanto, o estudo de um calibre — qualquer que seja ele — não está completo sem a análise das ambigüidades de Gribov. É preciso entender, em primeiro lugar, que o problema das ambigüidades de Gribov é um problema que afeta, não só o MAG, mas qualquer calibre que se tenha em mente (Landau [10, 12], Coulomb [10], linear covariante [38], etc). Em segundo lugar, o problema de Gribov está intimamente ligado ao problema de se quantizar corretamente uma teoria de calibre e, além disso, este problema afeta diretamente o setor infravermelho da teoria.

Portanto, a partir do próximo capítulo, iremos nos dedicar ao estudo das ambigüidades de Gribov no MAG e em como estas afetam os propagadores dos glúons⁴ e dos ghosts. Tal estudo, foi feito primeiramente em [79] seguindo a linha do trabalho original de Gribov [10] — que trata dos calibres de Landau e de Coulomb —, levando-se em conta, também, os efeitos do condensado de dimensão dois $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$ [67]. Com isso, pretendemos chegar a um maior entendimento deste calibre e obter informações sobre o setor infravermelho da teoria.

⁴Por simplicidade, referir-nos-emos aos bósons de calibre como glúons.

CAPÍTULO 3

AMBIGUIDADES DE GRIBOV

Neste capítulo, daremos início ao estudo das ambiguidades de Gribov no MAG em $SU(2)$. Seguindo a linha original de Gribov [10], determinaremos a equação que define as cópias de Gribov e obteremos a chamada região de Gribov. Faremos a restrição da função de partição a esta região, e veremos qual será a influência disto sobre os propagadores dos glúons e dos ghosts. Também iremos discorrer sobre a região modular fundamental.

3.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, já havíamos feito alguns comentários sobre o problema das ambigüidades de Gribov, nos quais chamamos a atenção para certos aspectos importantes como a questão de que o método de quantização de Faddeev-Popov falha no regime não-perturbativo. O problema deste método reside no fato de que o procedimento de fixação de calibre, destinado a eliminar configurações equivalentes que são indiscriminadamente contadas nas integrais de trajetória, na realidade, não cumpre inteiramente este papel. Neste procedimento, escolhemos uma condição adicional sobre os campos de calibre, isto é, um vínculo, de tal forma que apenas uma entre as infinitas configurações equivalentes do campo satisfaça esta condição. No entanto, o que ocorre, na verdade, é que, ao sair do regime perturbativo, observa-se ainda uma simetria de calibre residual, ou seja, existe mais de uma configuração equivalente dos campos que obedece ao vínculo pré-estabelecido. Estas configurações extras são as chamadas *cópias de Gribov*.

A solução encontrada por Gribov para resolver o problema das cópias foi a de restringir o domínio de integração do espaço funcional dos campos de calibre a uma certa região denominada *primeira região de Gribov*, ou simplesmente, *região de Gribov*. A idéia original de Gribov era a de obter uma região que fosse livre de cópias. Porém, descobriu-se posteriormente que a própria região de Gribov, no calibre de Landau, possui cópias em seu

interior [80, 81, 82, 83]. Entretanto, a restrição proposta por Gribov não é inconsistente, pois, como é demonstrado em [82, 84, 85, 57], toda órbita de calibre passa pelo menos uma vez pela região de Gribov. Dessa forma, qualquer configuração que esteja fora desta região é uma cópia de uma outra configuração equivalente que se encontra dentro da região de Gribov. Assim, podemos compreender a restrição à região de Gribov como um aperfeiçoamento do método usual de quantização devido a Faddeev e Popov. Além disso, a restrição pode ser feita acrescentando-se um termo na ação original de Yang-Mills com um calibre fixado. A ação resultante, que é a *ação de Gribov-Zwanziger*, possui as propriedades de localizabilidade e renormalizabilidade [14, 15, 17]¹.

Os efeitos físicos da restrição podem ser observados através dos propagadores da teoria. O propagador dos glúons, no calibre de Landau,

$$\langle A_\mu^A(-k)A_\nu^B(k) \rangle = \frac{k^2}{k^4 + 2Ng^2\gamma^4} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{AB}, \quad (3.1)$$

é suprimido no regime infravermelho, ou seja, para $k^2 \rightarrow 0$, devido a presença do parâmetro massivo γ , conhecido como *parâmetro de Gribov*, que é definido pela equação

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{3Ng^2/4}{k^4 + 2Ng^2\gamma^4} = 1, \quad (3.2)$$

enquanto que o propagador dos ghosts torna-se mais singular neste regime do que na predição perturbativa, o chamado *enhancement* dos ghosts, como infere-se da expressão abaixo

$$\frac{1}{N^2 - 1} \sum_{A=1}^{N^2-1} \langle \bar{c}^A(-k)c^A(k) \rangle \Big|_{k^2 \rightarrow 0} \sim \frac{\gamma^2}{k^4}. \quad (3.3)$$

Estes efeitos têm interpretações físicas muito interessantes. No caso do propagador dos glúons, nota-se que este deixa de ter pólos reais, eliminando com isso, os glúons do espectro físico da teoria, que é uma característica esperada para objetos confinados. Com relação ao propagador dos ghosts, este comportamento indica a existência de forças de longo alcance a baixas energias que são fundamentais para explicar o fenômeno do confinamento. Ainda sobre o comportamento do propagador dos ghosts, este vinha recebendo confirmações através de cálculos utilizando as equações de Dyson-Schwinger e simulações na rede até de meados de 2007. Porém, com a possibilidade de se trabalhar com redes maiores, surgiram novos resultados, obtidos por diferentes grupos, que indicam que o propagador dos ghosts tem um comportamento bem mais suave do que se imaginava. Atualmente,

¹Maiores detalhes sobre a ação de Gribov-Zwanziger serão discutidos no próximo capítulo.

acredita-se que este comportamento é tipicamente $1/k^2$. Isto é um sinal de que outros efeitos não-perturbativos devem ser levados em conta como, por exemplo, os efeitos dos condensados de dimensão dois, que veremos a partir do capítulo 5.

Além da região de Gribov, existe uma outra região, contida na região de Gribov, que é a chamada *região modular fundamental* [80, 81, 82, 83]. Esta região é livre de cópias com exceção de sua borda. Porém, como veremos mais adiante, não há uma definição operacionalmente viável desta região para que se possa implementá-la de modo consistente. No entanto, uma tentativa de implementar esta região é feita em [83] na formulação Hamiltoniana.

Como já dissemos, o problema das ambigüidades de Gribov não é um problema exclusivo dos calibres de Landau e Coulomb. Porém, pouco foi feito fora destes calibres. Portanto, passaremos a tratar do problema das ambigüidades de Gribov no MAG em $SU(2)$. Um estudo das cópias de Gribov no MAG em $SU(2)$ pode ser encontrado em [86, 87] e a influência da restrição à região de Gribov sobre os propagadores da teoria é encontrada em [79], seguindo os moldes do trabalho original de Gribov [10].

3.2 Cópias de Gribov

Inicialmente, vamos recapitular algumas propriedades do MAG em $SU(2)$, que é um caso particular do que foi apresentado no capítulo anterior. Sabemos que o campo de calibre, $\mathcal{A}_\mu(x)$, pode ser decomposto nas componentes não-diagonais e diagonais (ou abelianas) da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a + A_\mu(x)T^3, \quad (3.4)$$

sendo T^a , com $a = 1, 2$, os geradores não-diagonais de $SU(2)$, enquanto T^3 é o gerador diagonal, ver eq. (1.14), que obedecem a uma álgebra de Lie

$$[T^a, T^b] = i\varepsilon^{ab}T^3, \quad [T^3, T^a] = i\varepsilon^{ab}T^b. \quad (3.5)$$

A constante de estrutura ε^{ab} é tal que

$$\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}, \quad \varepsilon^{12} = 1, \quad \varepsilon^{ca}\varepsilon^{cb} = \delta^{ab}. \quad (3.6)$$

Analogamente, o tensor de curvatura do campo de calibre pode ser decomposto em suas componentes diagonais e não-diagonais:

$$F_{\mu\nu}^a = D_\mu^{ab}A_\nu^b - D_\nu^{ab}A_\mu^b,$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g\varepsilon^{ab} A_\mu^a A_\nu^b, \quad (3.7)$$

onde a derivada covariante D_μ^{ab} é definida com relação à componente abeliana $A_\mu(x)$,

$$D_\mu^{ab} = D_\mu^{ab}(A) \equiv \partial_\mu \delta^{ab} - g\varepsilon^{ab} A_\mu. \quad (3.8)$$

Dessa forma, a ação de Yang-Mills é dada, num espaço-tempo euclidiano, por

$$S_{\text{YM}} = \frac{1}{4} \int d^4x \left(F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (3.9)$$

sendo invariante pelas transformações de calibre

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a + D_\mu^{ab} \omega^b + g\varepsilon^{ab} A_\mu^b \omega, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \omega + g\varepsilon^{ab} A_\mu^a \omega^b. \end{aligned} \quad (3.10)$$

O MAG é então obtido quando impomos que a componente não-diagonal do campo de calibre obedeça à condição não-linear

$$\partial_\mu A_\mu^a = g\varepsilon^{ab} A_\mu^a A_\mu^b, \quad (3.11)$$

ou, equivalentemente,

$$D_\mu^{ab} A_\mu^b = 0, \quad (3.12)$$

que vem da condição de que o funcional

$$\mathcal{A}_{\text{MAG}}^2[A] = \int d^4x A_\mu^a(x) A_\mu^a(x) \quad (3.13)$$

seja estacionário com respeito às transformações de calibre (3.10). Além disso, devemos impor uma condição adicional aos campos diagonais devido à simetria $U(1)$ residual que discutimos no capítulo anterior. Iremos adotar uma condição do tipo Landau, que é também a condição adotada nas simulações na rede,

$$\partial_\mu A_\mu = 0. \quad (3.14)$$

Até aqui, fizemos apenas uma pequena revisão do que foi visto no capítulo precedente, para o caso particular onde o grupo de simetria é o $SU(2)$. Agora, vamos estabelecer a condição de existência de cópias de Gribov no MAG. Para tanto, vamos definir um campo $\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x)$, ou seja,

$$\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x) = \tilde{A}_\mu^a(x) T^a + \tilde{A}_\mu(x) T^3, \quad (3.15)$$

de tal maneira que suas componentes $(\tilde{A}_\mu^a, \tilde{A}_\mu)$ sejam definidas por

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\mu^a &= A_\mu^a - D_\mu^{ab}(A)\omega^b - g\varepsilon^{ab}A_\mu^b\omega, \\ \tilde{A}_\mu &= A_\mu - \partial_\mu\omega - g\varepsilon^{ab}A_\mu^a\omega^b.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Em outras palavras, $\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x)$ é simplesmente o campo $\mathcal{A}_\mu(x)$ transformado pelas transformações de calibre (3.10)². Uma vez definido o campo $\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x)$, vamos requerer que as componentes $(\tilde{A}_\mu^a, \tilde{A}_\mu)$ deste campo satisfaçam às mesmas condições de (A_μ^a, A_μ) , ou seja, aos vínculos (3.12) e (3.14):

$$D_\mu^{ab}(\tilde{A})\tilde{A}_\mu^b = 0, \quad \partial_\mu\tilde{A}_\mu = 0. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.16) em (3.17) obtemos a condição de existência de cópias, à primeira ordem nos parâmetros de calibre, como sendo

$$\mathcal{M}^{ab}\omega^b = 0, \quad (3.18)$$

$$-\partial^2\omega - g\varepsilon^{ab}\partial_\mu(A_\mu^a\omega^b) = 0, \quad (3.19)$$

sendo \mathcal{M}^{ab} dado por

$$\mathcal{M}^{ab} = -D_\mu^{ac}D_\mu^{cb} - g^2\varepsilon^{ac}\varepsilon^{bd}A_\mu^cA_\mu^d. \quad (3.20)$$

O operador \mathcal{M}^{ab} é identificado como sendo o operador de Faddeev-Popov do setor não-diagonal. Este operador desfruta das propriedades de ser hermitiano³ e, tal como é assinalado em [87], é a diferença entre dois operadores positivos semidefinidos,

$$\mathcal{M}^{ab} = \mathcal{O}_1^{ab} - \mathcal{O}_2^{ab}, \quad (3.21)$$

dados por

$$\mathcal{O}_1^{ab} = -D_\mu^{ac}D_\mu^{cb}, \quad \mathcal{O}_2^{ab} = g^2\varepsilon^{ac}\varepsilon^{bd}A_\mu^cA_\mu^d. \quad (3.22)$$

Além disso, devemos destacar que o parâmetro diagonal $\omega(x)$ aparece apenas em (3.19), de tal sorte que nos é permitido expressá-lo em termos da solução da primeira condição de existência de cópias (3.18). Isto significa que, uma vez solucionada a equação (3.18) para $A_\mu^a(x)$, $A_\mu(x)$ e $\omega^a(x)$, podemos escrever que

$$\omega(x) = -g\varepsilon^{ab}\frac{\partial_\mu}{\partial^2}(A_\mu^a\omega^b). \quad (3.23)$$

²Por conveniência fizemos $(\omega^a, \omega) \rightarrow -(\omega^a, \omega)$ em (3.16), com relação às transformações (3.10).

³Esta propriedade é mostrada no apêndice A.

Esta última expressão nos diz, essencialmente, que o parâmetro diagonal $\omega(x)$ não tem um papel especial na determinação das cópias de Gribov, ou seja, as cópias de Gribov são determinadas exclusivamente pela equação (3.18). Ademais, da equação (3.19) segue que uma nova variável, digamos $\tilde{\omega}(x)$, definida por

$$\tilde{\omega} = \omega + g\varepsilon^{ab} \frac{\partial_\mu}{\partial^2} (A_\mu^a \omega^b) \quad (3.24)$$

obedece a

$$\partial^2 \tilde{\omega} = 0. \quad (3.25)$$

Como é mostrado no apêndice B, a mudança de variável (3.24) pode ser efetuada na função de partição que expressa a quantização de Faddeev-Popov da ação de Yang-Mills no MAG. Como o jacobiano correspondente a esta transformação é independente dos campos, os ghosts diagonais são desacoplados da teoria. Em decorrência disto, o propagador dos ghosts diagonais não é afetado pela restrição à região de Gribov.

3.3 Determinação da região de Gribov Ω

Como vimos, a condição de existência de cópias de Gribov é dada pela equação (3.18). Com base nesta equação, somos levados a estabelecer que, para que haja cópias de Gribov, o operador \mathcal{M}^{ab} , cujo determinante entra na fórmula de quantização de Faddeev-Popov (ver apêndice B), deve ter autovalores iguais a zero. Também observamos que este operador pode ser escrito como a diferença entre dois operadores positivos semidefinidos, eq's (3.21) e (3.22). Dessa forma, para valores suficientemente grandes de $A_\mu^a(x)$, podemos esperar que autovalores nulos, de fato, existam. Para melhor analisarmos esta questão, tomemos a equação de autovalores do operador de Faddeev-Popov:

$$\mathcal{M}^{ab} \psi^b = \epsilon(A) \psi^a. \quad (3.26)$$

Para pequenos valores dos campos (A_μ^a, A_μ), a equação (3.26) possui apenas soluções para autovalores positivos, pois, neste caso

$$\mathcal{M}^{ab} \approx -\partial^2 \delta^{ab} \quad (3.27)$$

e, como é sabido, o operador $-\partial^2$ admite apenas autovalores positivos. Mais precisamente, denotando $\epsilon_1(A)$, $\epsilon_2(A)$, $\epsilon_3(A)$, etc, para os autovalores correspondentes a uma dada

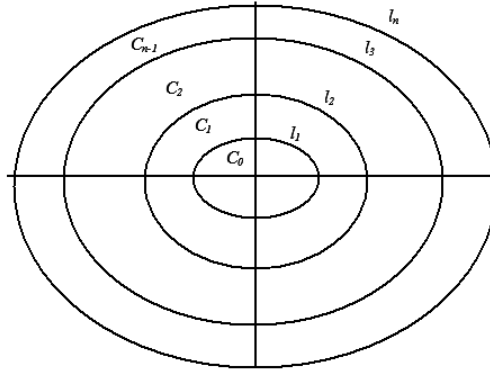


Figura 3.1: Horizontes de Gribov

configuração de campos (A_μ^a, A_μ) , temos que, para valores pequenos, todos os $\epsilon_i(A)$ são positivos. Isto equivale a dizer que

$$\mathcal{O}_1^{ab}(A) > \mathcal{O}_2^{ab}(A), \quad (3.28)$$

sendo $\mathcal{O}_1^{ab}(A)$ e $\mathcal{O}_2^{ab}(A)$ definidos em (3.22). Porém, para valores suficientemente grandes dos campos (A_μ^a, A_μ) , um dos autovalores, digamos $\epsilon_1(A)$, vai a zero, tornando-se negativo conforme os campos continuem crescendo. Em uma escala de magnitude ainda maior dos campos, um segundo autovalor, digamos $\epsilon_2(A)$, vai a zero, e torna-se negativo ao acompanhar o crescimento dos campos. Assim, conforme os campos vão crescendo, mais autovalores vão se tornando negativos⁴. Assim, seguindo a linha de raciocínio de Gribov [10], podemos dividir o espaço funcional dos campos em regiões $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$, etc, nas quais o operador de Faddeev-Popov tem, respectivamente, 0, 1, 2, \dots , n , etc, autovalores negativos, tal como é ilustrado na figura 3.1. Estas regiões são separadas por linhas $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, etc, nas quais o operador \mathcal{M}^{ab} tem algum autovalor nulo. Assim, na região \mathcal{C}_0 todos os autovalores do operador \mathcal{M}^{ab} são positivos, *i. e.*, $\mathcal{M}^{ab} > 0$. Na borda l_1 da região \mathcal{C}_0 o primeiro autovalor nulo aparece e, desta forma, o operador de Faddeev-Popov possui um modo zero normalizável, ou seja,

$$\mathcal{M}^{ab}\psi_0^b = 0, \quad \int d^4x \psi_0^{a\dagger}(x)\psi_0^a(x) = 1. \quad (3.29)$$

A região \mathcal{C}_0 é, como veremos, uma região de particular interesse. Assim sendo, esta será intitulada como a *região de Gribov* e denotada pela letra Ω . Portanto, a região de

⁴Lembrando que o operador \mathcal{M}^{ab} é hermitiano e, portanto, seus autovalores são reais.

Gribov é definida como

$$\Omega := \{A_\mu^a, A_\mu | D_\mu^{ab} A_\mu^b = 0, \partial_\mu A_\mu = 0, \mathcal{M}^{ab} > 0\}, \quad (3.30)$$

ou seja, é a região no espaço funcional onde se encontram todas as configurações de campos de calibre (A_μ^a, A_μ) que obedecem às condições de calibre do MAG, eq's (3.12) e (3.14), e para as quais o operador de Faddeev-Popov assume valores positivos. Notemos ainda que as configurações de campos pertencentes a esta região correspondem aos mínimos relativos do funcional (3.13). Esta propriedade decorre do fato de que o operador \mathcal{M}^{ab} pode ser obtido tomando-se a variação segunda de (3.13),

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x A_\mu^a A_\mu^a &= \int d^4x \omega^a D_\mu^{ab} A_\mu^b, \\ \delta^2 \int d^4x A_\mu^a A_\mu^a &= \int d^4x (\omega^a \mathcal{M}^{ab} \omega^b - g \varepsilon^{ab} \omega^a (D_\mu^{bc} A_\mu^c) \omega). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Devemos também destacar que, dentro da região de Gribov, Ω , encontram-se as configurações que validam os cálculos perturbativos que são, justamente, as configurações próximas à origem, *i. e.*, $(A_\mu^a, A_\mu) \approx 0$. Nestas, o operador de Faddeev-Popov comporta-se como $-\partial^2$ que possui apenas autovalores positivos.

Os contornos $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$, etc, são chamados de horizontes de Gribov. Em particular, o contorno l_1 , que é o contorno da região de Gribov, $\partial\Omega$, é chamado de primeiro horizonte de Gribov, ou simplesmente, *horizonte de Gribov*.

3.4 A restrição à região Ω elimina cópias de Gribov

Até o momento, definimos a região de Gribov Ω como a região cujas as configurações de campos nela contidas obedecem às condições de calibre do MAG e fazem com que o operador de Faddeev-Popov seja positivo. Esta definição é sintetizada numa linguagem matemática por (3.30). Também definimos o horizonte de Gribov $\partial\Omega$ como o lugar onde ocorre o primeiro autovalor zero do operador de Faddeev-Popov para uma dada configuração. No entanto, ainda precisamos mostrar que fazer a restrição do espaço funcional à região Ω implica, realmente, a eliminação de cópias de Gribov. Para isto, devemos provar a seguinte proposição:

Proposição: *Para qualquer campo de calibre localizado na região Ω próximo ao horizonte $\partial\Omega$, existe uma configuração equivalente, ou seja, uma cópia, localizada no outro lado do horizonte, próxima a este mesmo horizonte, ver fig.3.2.*

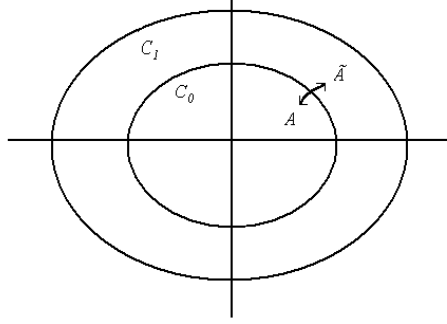


Figura 3.2: Cópias próximas ao horizonte

Para provar a proposição acima vamos começar tomando uma configuração de campos $\mathcal{C}_\mu = (C_\mu^a, C_\mu)$ localizada no horizonte $\partial\Omega$, ou seja,

$$\mathcal{M}^{ab}(C)\psi_0^b = -D_\mu^{ac}(C)D_\mu^{cb}(C)\psi_0^b - g^2\varepsilon^{ac}\varepsilon^{bd}C_\mu^c C_\mu^d \psi_0^b = 0, \quad (3.32)$$

sendo $\psi_0^a(x)$ um modo zero normalizável, e

$$D_\mu^{ab}(C)C_\mu^b = 0, \quad \partial_\mu C_\mu = 0. \quad (3.33)$$

Vamos introduzir também a componente diagonal $\psi_0(x)$ que, de acordo com (3.23), é definida como

$$\psi_0 = -g\varepsilon^{ab}\frac{\partial_\mu}{\partial^2}(C_\mu^a\psi_0^b). \quad (3.34)$$

Seja então $\mathcal{A}_\mu = (A_\mu^a, A_\mu)$ uma configuração de campos localizada na região Ω , próxima de $\partial\Omega$, como na figura 3.2. Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= C_\mu^a + a_\mu^a, \\ A_\mu &= C_\mu + a_\mu, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde (a_μ^a, a_μ) devem ser tomados como perturbações. Estando na região Ω , a configuração $\mathcal{A}_\mu(x)$ deve obedecer às condições de calibre (3.12) e (3.14). Isto equivale a dizer que

$$D_\mu^{ab}(C)a_\mu^b - g\varepsilon^{ab}C_\mu^b a_\mu, \quad \partial_\mu a_\mu = 0. \quad (3.36)$$

Diante disso, podemos calcular o autovalor de $\mathcal{M}^{ab}(A)$, para os campos (3.35), utilizando as técnicas usuais de teoria de perturbações [88]:

$$\epsilon(A) = \int d^4x \psi_0^a (2g\varepsilon^{ac}a_\mu D_\mu^{cb}(C)\psi_0^b - g^2\varepsilon^{ac}\varepsilon^{bd}(C_\mu a_\mu^d + C_\mu^d a_\mu^c)\psi_0^b). \quad (3.37)$$

Agora, procedendo como em [10], vamos introduzir uma outra configuração de campos $\tilde{\mathcal{A}}_\mu = (\tilde{A}_\mu^a, \tilde{A}_\mu)$, tal que

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\mu^a &= C_\mu^a + \tilde{a}_\mu^a, \\ \tilde{A}_\mu &= C_\mu + \tilde{a}_\mu,\end{aligned}\tag{3.38}$$

sendo $(\tilde{a}_\mu^a, \tilde{a}_\mu)$ dados por

$$\begin{aligned}\tilde{a}_\mu^a &= a_\mu^a - D_\mu^{ab}(C)\psi_0^b - g\varepsilon^{ab}C_\mu^b\psi_0, \\ \tilde{a}_\mu &= a_\mu - \partial_\mu\psi_0 - g\varepsilon^{ab}C_\mu^a\psi_0^b,\end{aligned}\tag{3.39}$$

e tomados como pequenos com relação a (C_μ^a, C_μ) . Pelas equações (3.32), (3.33) e (3.36) é possível verificar, a primeira ordem nas componentes $(\tilde{a}_\mu^a, \tilde{a}_\mu)$, que os campos (3.38) obedecem às condições de calibre do MAG,

$$D_\mu^{ab}(\tilde{A})\tilde{A}_\mu^b = 0, \quad \partial_\mu\tilde{A}_\mu = 0.\tag{3.40}$$

Assim, se encontrarmos uma transformação de calibre que leve $\mathcal{A}_\mu(x)$ em $\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x)$, *i. e.*,

$$\tilde{\mathcal{A}}_\mu = U\mathcal{A}_\mu U^\dagger + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^\dagger,\tag{3.41}$$

com

$$U(x) = \exp(-ig\vartheta(x)), \quad \vartheta(x) = \theta^a(x)T^a + \theta(x)T^3.\tag{3.42}$$

podemos identificar a configuração $\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x)$ como uma cópia de Gribov de $\mathcal{A}_\mu(x)$. Tomando $U(x)$ até a segunda ordem no parâmetro $\vartheta(x)$, ou seja,

$$U = 1 - ig\vartheta - \frac{g^2}{2}\vartheta^2 + O(\vartheta^3),\tag{3.43}$$

chegamos a

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\mu^a &= A_\mu^a - D_\mu^{ab}\theta^b - g\varepsilon^{ab}A_\mu^b\theta - \frac{g}{2}\varepsilon^{ab}\theta^b(\partial_\mu\theta + g\varepsilon^{cd}A_\mu^c\theta^d) - \frac{g}{2}\varepsilon^{ab}\theta D_\mu^{bc}\theta^c - \frac{g^2}{2}A_\mu^a\theta^2, \\ \tilde{A}_\mu &= A_\mu - \partial_\mu\theta - g\varepsilon^{ab}A_\mu^a\theta^b - \frac{g}{2}\varepsilon^{ab}\theta^a D_\mu^{bc}\theta^c + \frac{g^2}{2}A_\mu^a\theta^a\theta.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Além disso, das condições de calibre do MAG, segue⁵

$$\mathcal{M}^{ab}(A)\theta^b + D_\mu^{ab}(A)\left[-\frac{g}{2}\varepsilon^{bc}\theta^c(\partial_\mu\theta + g\varepsilon^{de}A_\mu^d\theta^e) + \frac{g}{2}\varepsilon^{bc}\theta D_\mu^{cd}\theta^d - \frac{g^2}{2}A_\mu^b\theta^2\right]$$

⁵Se tivéssemos tomado somente a primeira ordem, *i. e.*, $U = 1 - ig\theta$, obteríamos

$$\tilde{A}_\mu^a = A_\mu^a - D_\mu^{ab}(A)\theta^b - \varepsilon^{ab}A_\mu^b\theta, \quad \tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta - g\varepsilon^{ab}A_\mu^a\theta^b.$$

Logo, aplicando as condições de calibre do MAG, teríamos as seguintes equações:

$$\mathcal{M}^{ab}(A)\theta^b = 0, \quad \partial^2\theta + g\varepsilon^{ab}\partial_\mu(A_\mu^a\theta^b) = 0,$$

que não têm solução pois, por hipótese, $\mathcal{A}_\mu(x)$ não se encontra no horizonte de Gribov $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned}
-g\varepsilon^{ab} \left(\partial_\mu \theta + g\varepsilon^{cd} A_\mu^c \theta^d \right) \left(D_\mu^{be} \theta^e + g\varepsilon^{be} A_\mu^e \theta \right) + g\varepsilon^{ab} A_\mu^b \left(\frac{g}{2} \varepsilon^{cd} \theta^c D_\mu^{de} \theta^e - \frac{g^2}{2} A_\mu^a \theta^c \theta \right) &= 0, \\
\partial_\mu \left[- \left(\partial_\mu \theta + g\varepsilon^{ab} A_\mu^a \theta^b \right) - \frac{g}{2} \varepsilon^{ab} \theta^a D_\mu^{bc} \theta^c + \frac{g^2}{2} A_\mu^a \theta^a \theta \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Para podermos escrever (θ^a, θ) em termos de (ψ_0^a, ψ_0) , faremos

$$\begin{aligned}
\theta^a &= \psi_0^a + \varphi^a, \\
\theta &= \psi_0 + \varphi,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

sendo (φ^a, φ) pequenos com relação a (ψ_0^a, ψ_0) . A condição (3.45) fornece o seguinte

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{ab}(C)\varphi^b &= -D_\mu^{ac}(C)(g\varepsilon^{cb} a_\mu \psi_0^b) - g\varepsilon^{ac} a_\mu D_\mu^{cb}(C)\psi_0^b - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{db} (C_\mu^c a_\mu^d + C_\mu^d a_\mu^c) \psi_0^b \\
&+ D_\mu^{ab}(C) \left[\frac{g}{2} \varepsilon^{bc} \psi_0^c (\partial_\mu \psi_0 + g\varepsilon^{de} C_\mu^d \psi_0^e) - \frac{g}{2} \varepsilon^{bc} \psi_0 D_\mu^{cd}(C) \psi_0^d + \frac{g^2}{2} C_\mu^b \psi_0^2 \right] \\
&+ g\varepsilon^{ab} (\partial_\mu \psi_0 + g\varepsilon^{cd} C_\mu^c \psi_0^d) \left[D_\mu^{be}(C) \psi_0^e + g\varepsilon^{be} C_\mu^e \psi_0 \right] \\
&- g\varepsilon^{ab} C_\mu^b \left[\frac{g}{2} \varepsilon^{cd} \psi_0^c D_\mu^{de}(C) \psi_0^e - \frac{g^2}{2} C_\mu^c \psi_0^c \psi_0 \right].
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Esta última pode ser colocada na forma

$$\partial^2 \varphi^a = \mathcal{P}^a(C, a, \psi_0) + \mathcal{Q}^{ab}(C, \psi_0) \varphi^b, \tag{3.48}$$

com \mathcal{P}^a e \mathcal{Q}^{ab} independentes de $\varphi^a(x)$:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{P}^a(C, a, \psi_0) &= -D_\mu^{ac}(C)(g\varepsilon^{cb} a_\mu \psi_0^b) - g\varepsilon^{ac} a_\mu D_\mu^{cb}(C)\psi_0^b - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{db} (C_\mu^c a_\mu^d + C_\mu^d a_\mu^c) \psi_0^b \\
&+ D_\mu^{ab}(C) \left[\frac{g}{2} \varepsilon^{bc} \psi_0^c (\partial_\mu \psi_0 + g\varepsilon^{de} C_\mu^d \psi_0^e) - \frac{g}{2} \varepsilon^{bc} \psi_0 D_\mu^{cd}(C) \psi_0^d + \frac{g^2}{2} C_\mu^b \psi_0^2 \right] \\
&+ g\varepsilon^{ab} (\partial_\mu \psi_0 + g\varepsilon^{cd} C_\mu^c \psi_0^d) \left[D_\mu^{be}(C) \psi_0^e + g\varepsilon^{be} C_\mu^e \psi_0 \right] \\
&- g\varepsilon^{ab} C_\mu^b \left[\frac{g}{2} \varepsilon^{cd} \psi_0^c D_\mu^{de}(C) \psi_0^e - \frac{g^2}{2} C_\mu^c \psi_0^c \psi_0 \right],
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\mathcal{Q}^{ab}(C, \psi_0) = 2g\varepsilon^{ab} C_\mu \partial_\mu + g^2 \delta^{ab} C_\mu C_\mu - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{bd} C_\mu^c C_\mu^d. \tag{3.50}$$

A equação (3.48) pode ser resolvida recursivamente para $\varphi^a(x)$,

$$\varphi^a = \frac{1}{\partial^2} \mathcal{P}^a + \frac{1}{\partial^2} \mathcal{Q}^{ab} \frac{1}{\partial^2} \mathcal{P}^b + \dots \tag{3.51}$$

Isto nos permite obter uma expressão recursiva para os parâmetros (θ^a, θ) da equação (3.46), e assim para a transformação de calibre que estamos procurando, eq. (3.41).

Há ainda uma relação importante que podemos obter. Sabendo que

$$\mathcal{M}^{ab}(C)\psi_0 = 0, \quad (3.52)$$

podemos escrever, lembrando que o operador de Faddeev-Popov é hermitiano,

$$\int d^4x \psi_0 \mathcal{M}^{ab}(C) \varphi^b = 0. \quad (3.53)$$

Logo, de (3.47) vem que

$$\begin{aligned} 0 = & \int d^4x \psi_0^a \left[-2g\varepsilon^{ac} a_\mu D_\mu^{cb}(C) \psi_0^b - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{db} (C_\mu^c a_\mu^d + C_\mu^d a_\mu^c) \psi_0^b \right. \\ & \left. + g\varepsilon^{ab} (\partial_\mu \psi_0) D_\mu^{bc}(C) \psi_0^c - 2g^2 \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} C_\mu^b \psi_0^c D_\mu^{de}(C) \psi_0^e + g^3 \varepsilon^{ab} C_\mu^b C_\mu^c \psi_0^c \psi_0^a \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Uma vez que conseguimos identificar o campo $\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x)$ como uma cópia de Gribov do campo $\mathcal{A}_\mu(x)$ — lembrando que ambas as configurações estão próximas de $\partial\Omega$ —, vamos calcular o autovalor de \mathcal{M}^{ab} para os campos $\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x)$ e com isso, checar de que lado do horizonte está esta configuração. Tal como fizemos anteriormente, o autovalor $\epsilon(\tilde{A})$ é dado por

$$\epsilon(\tilde{A}) = \int d^4x \psi_0^a (2g\varepsilon^{ac} \tilde{a}_\mu D_\mu^{cb}(C) \psi_0^b - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{bd} (C_\mu^c \tilde{a}_\mu^d + C_\mu^d \tilde{a}_\mu^c) \psi_0^b). \quad (3.55)$$

Das equações (3.39) e (3.54) surge o seguinte resultado

$$\epsilon(\tilde{A}) = -\epsilon(A). \quad (3.56)$$

Com este resultado, conseguimos provar a proposição que queríamos, uma vez que, se a configuração $\mathcal{A}_\mu(x)$, próxima a $\partial\Omega$, está na região Ω e, portanto, $\epsilon(A) > 0$, existe uma configuração equivalente, ou seja, uma cópia de Gribov, $\tilde{\mathcal{A}}_\mu(x)$, também próxima a $\partial\Omega$, localizada do outro lado do horizonte, na região \mathcal{C}_1 , ver fig.3.2, pois, $\epsilon(\tilde{A}) = -\epsilon(A) < 0$. Esta proposição pode também ser estendida para campos perto de qualquer horizonte l_n .

A partir da demonstração anterior podemos ter a noção de que ao restringirmos o domínio de integração das integrais funcionais à região Ω estaremos eliminando, pelo menos, as cópias de Gribov próximas ao horizonte.

3.5 Restrição do domínio de integração à região Ω

Agora, vamos implementar a restrição do domínio de integração das integrais de caminho de Feynman à região de Gribov Ω , definida em (3.30). Para tanto, introduzimos

na função de partição da teoria de Yang-Mills no MAG, dada por (B.14), o fator $\mathcal{V}(\Omega)$ que será responsável pela restrição à região Ω , ou seja,

$$\mathcal{Z} = \int [dA^a][dA] \delta(D_\mu^{ab} A_\mu^b) \delta(\partial_\mu A_\mu) \det(\mathcal{M}^{ab}) e^{-S_{\text{YM}}} \mathcal{V}(\Omega). \quad (3.57)$$

A expressão de $\mathcal{V}(\Omega)$ deverá ser obtida através da condição de não existência de pólos da função de dois pontos do ghost não-diagonal que, por sua vez, é dada pelo inverso do operador de Faddeev-Popov \mathcal{M}^{ab} . Denotemos por $\mathcal{G}(k, A)$ a transformada de Fourier de $(\mathcal{M}^{-1})^{ab}$, isto é,

$$\mathcal{G}(k, A) = \frac{1}{2} \sum_{ab} \delta^{ab} \langle k | (\mathcal{M}^{-1})^{ab} | k \rangle. \quad (3.58)$$

A esta última, iremos requerer a condição de não-existência de pólos para um dado valor de k , excetuando-se apenas o caso em que $k = 0$, que corresponde ao contorno de Ω , ou seja, ao primeiro horizonte de Gribov. A razão de se adotar esta condição é entendida observando-se que, dentro da região Ω , o operador \mathcal{M}^{ab} é positivo definido, eq. (3.30). Isto implica que seu inverso, $(\mathcal{M}^{-1})^{ab}$, e, conseqüentemente, a função de Green (3.58) podem tornar-se singulares apenas quando se aproximam do horizonte $\partial\Omega$, onde o operador \mathcal{M}^{ab} tem um modo zero.

A função de Green $\mathcal{G}(k, A)$ pode ser calculada ordem a ordem. De fato, repetindo a abordagem de Gribov [10] para o caso do MAG, encontramos, à segunda ordem,

$$\mathcal{G}(k) = \frac{1}{k^2} + g^2 \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \frac{1}{V} \sum_q \frac{A_\mu(q) A_\nu(-q)}{(k-q)^2} + \frac{g^2}{k^4} \frac{1}{V} \sum_q \left(A_\mu(q) A_\mu(-q) + \frac{1}{2} A_\mu^a(q) A_\mu^a(-q) \right), \quad (3.59)$$

onde V é o 4-volume euclidiano. Note-se que os dois últimos termos de (3.59), *i. e.*,

$$\frac{1}{V} \sum_q A_\mu(q) A_\mu(-q), \quad \frac{1}{V} \sum_q A_\mu^a(q) A_\mu^a(-q),$$

não dependem do momento externo k_μ . Portanto, após a subtração de suas respectivas partes perturbativas⁶, estes termos devem fornecer uma contribuição não perturbativa à função de Green $\mathcal{G}(k, A)$, correspondente à singularidade em $k^2 = 0$, como se pode depreender da presença do fator $1/k^4$ em (3.59).

Assim, vamos escrever $\mathcal{G}(k, A)$ como

$$\mathcal{G}(k, A) \approx \frac{1}{k^2} \frac{1}{(1 - \sigma(k, A))} + \frac{\mathcal{B}}{k^4}, \quad (3.60)$$

⁶Perturbativamente, estes termos dão origem a *tadpoles*, desaparecendo na regularização dimensional.

sendo

$$\sigma(k, A) = g^2 \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{A_\mu(q) A_\nu(-q)}{(k-q)^2}, \quad (3.61)$$

e

$$\mathcal{B} = g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} A_\mu(q) A_\mu(-q) + \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} A_\mu^a(q) A_\mu^a(-q), \quad (3.62)$$

onde tomamos o limite termodinâmico, $V \rightarrow \infty$. A expressão (3.61) para $\sigma(k, A)$ pode ser simplificada se lembrarmos que a componente abeliana do campo de calibre é transversa, ou seja,

$$k_\mu A_\mu(k) = 0. \quad (3.63)$$

Podemos então escrever que

$$A_\mu(k) A_\nu(-k) = \frac{1}{3} A_\lambda(k) A_\lambda(-k) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (3.64)$$

e então,

$$\sigma(k, A) = \frac{g^2}{3} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{A_\lambda(q) A_\lambda(-q)}{(k-q)^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right). \quad (3.65)$$

Esta expressão é semelhante àquela obtida por Gribov no calibre de Landau [10]. Com $\mathcal{G}(k, A)$ escrita na forma (3.60) percebe-se claramente que a condição de não-existência de pólos, para um dado k^2 , é

$$\sigma(k, A) < 1. \quad (3.66)$$

No entanto, se a quantidade $A_\lambda(q) A_\lambda(-q)$, que aparece na expressão (3.65) para $\sigma(k, A)$, decresce monotonicamente com q^2 na maior parte do intervalo de integração — e isto, como veremos, é o que de fato ocorre —, então, $\sigma(k, A)$ decresce conforme k^2 cresce. Dessa forma, podemos obter uma condição de não existência de pólos mais forte que (3.66) e independente de k :

$$\sigma(0, A) < 1, \quad (3.67)$$

com

$$\sigma(0, A) = \frac{g^2}{4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{A_\lambda(q) A_\lambda(-q)}{q^2}, \quad (3.68)$$

onde fizemos uso da relação

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{A_\lambda(q) A_\lambda(-q)}{q^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) = \frac{3}{4} \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{A_\lambda(q) A_\lambda(-q)}{q^2}, \quad (3.69)$$

que vem da covariância de Lorentz⁷.

⁷A relação (3.69) é obtida da seguinte maneira: assume-se que

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{A_\lambda(q) A_\lambda(-q)}{q^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) = \mathcal{J} \delta_{\mu\nu},$$

Em suma, a condição (3.67) assegura que a função de Green $\mathcal{G}(k, A)$ não tem pólos para valores finitos não nulos de k^2 , sendo a única singularidade permitida aquela em $k^2 = 0$, que corresponde a se aproximar do horizonte de Gribov. A partir disto, podemos voltar a pensar na questão da definição do fator $\mathcal{V}(\Omega)$, que é o responsável por fazer a restrição do domínio de integração à região Ω . De acordo com [10] o fator $\mathcal{V}(\Omega)$ é dado por

$$\mathcal{V}(\Omega) = \theta(1 - \sigma(0, A)), \quad (3.70)$$

sendo $\theta(x)$ a função degrau,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

que pode também ser escrita através de sua representação integral

$$\theta(x) = \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} \frac{d\zeta}{2\pi i \zeta} e^{\zeta x}. \quad (3.71)$$

Assim, a função de partição (3.57) fica

$$\mathcal{Z} = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} \int [dA^a][dA] \frac{d\zeta}{2\pi i \zeta} \det(\mathcal{M}^{ab}) \exp\left(\zeta - S_{\text{YM}} - \frac{1}{2\alpha} (D_\mu^{ab} A_\mu^b)^2 - \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu A_\mu)^2 - \zeta \sigma(0, A)\right), \quad (3.72)$$

onde os limites $\alpha \rightarrow 0$ e $\beta \rightarrow 0$ são tomados no final para recuperar as condições de calibre do MAG (3.12) e (3.14). A partir de função de partição (3.72) podemos analisar o comportamento dos propagadores dos glúons. Em particular, aquele do setor diagonal, pois, o fator $\sigma(0, A)$, eq. (3.68), afeta justamente este setor.

3.6 Propagadores na aproximação de Gribov

Um ponto fundamental a ser analisado consiste no estudo dos propagadores da teoria com a restrição à região de Gribov. Em outras palavras, devemos investigar como esta restrição, que está intimamente ligada com a questão da correta quantização de uma teoria de calibre, afeta os propagadores da teoria.

e em seguida contrai-se ambos os lados com $\delta_{\mu\nu}$, chegando então a

$$\mathcal{J} = \frac{3}{4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{A_\lambda(q) A_\lambda(-q)}{q^2}.$$

3.6.1 Propagadores dos glúons

Para estudar os propagadores dos glúons é suficiente retermos apenas os termos quadráticos em (3.72) que contribuem para as funções de Green $\langle A_\mu^a(k)A_\nu^b(-k) \rangle$ e $\langle A_\mu(k)A_\nu(-k) \rangle$. Assim,

$$\mathcal{Z}_{\text{quadr}} = \mathcal{N} \int [dA^a][dA] \frac{d\zeta}{2\pi i} e^{(\zeta - \ln \zeta - \frac{1}{2} \sum_k A_\mu(k) \mathcal{Q}_{\mu\nu}(k, \zeta) A_\nu(-k) - \frac{1}{2} \sum_k A_\mu^a(k) \mathcal{P}_{\mu\nu}(k) A_\nu^a(-k))}, \quad (3.73)$$

onde \mathcal{N} é um fator constante e as quantidades $\mathcal{Q}_{\mu\nu}(k, \zeta)$ e $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mu\nu}(k, \zeta) &= \left(k^2 + \frac{\zeta g^2}{2V k^2} \right) \delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) k_\mu k_\nu, \\ \mathcal{P}_{\mu\nu}(k) &= k^2 \delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) k_\mu k_\nu. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Integrando nos campos de calibre e mantendo os termos que dependem de ζ encontramos

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} (\det \mathcal{P}_{\mu\nu}(k))^{-1} \int \frac{d\zeta}{2\pi i} e^{f(\zeta)}, \quad (3.75)$$

onde

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \zeta - \ln \zeta - \frac{1}{2} \ln \det \mathcal{Q}_{\mu\nu}(k, \zeta) \\ &= \zeta - \ln \zeta - \frac{3}{2} \sum_k \ln \left(k^2 + \frac{\zeta g^2}{2V k^2} \right) - \frac{1}{2} \sum_k \ln \left(\frac{1}{\beta} k^2 + \frac{\zeta g^2}{2V k^2} \right). \end{aligned} \quad (3.76)$$

A expressão (3.75) pode ser tomada no ponto de sela, ou seja,

$$\mathcal{Z}_{\text{quadr}} \approx e^{f(\zeta_0)}, \quad (3.77)$$

onde ζ_0 é determinado pela condição de mínimo

$$\left. \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_0} = 0, \quad (3.78)$$

o que implica

$$1 - \frac{1}{\zeta_0} - \frac{3g^2}{4V} \sum_k \frac{1}{k^4 + \frac{\zeta_0 g^2}{2V}} - \beta \frac{g^2}{4V} \sum_k \frac{1}{k^4 + \beta \frac{\zeta_0 g^2}{2V}} = 0. \quad (3.79)$$

Tomando o limite termodinâmico, isto é, $V \rightarrow \infty$, e introduzindo o parâmetro de Gribov⁸,

$$\gamma^4 = \frac{1}{8} \frac{\zeta_0}{V}, \quad (3.80)$$

⁸Em [79] definimos o parâmetro de Gribov como $\gamma^4 = \zeta_0 g^2 / 2V$. Porém, iremos, sempre que possível, seguir as convenções de [89].

obtemos a *equação de gap*

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{3g^2/4}{k^4 + 4g^2\gamma^4} = 1, \quad (3.81)$$

na qual tomamos o limite $\beta \rightarrow 0$ e desprezamos o termo $1/\zeta_0$ no limite termodinâmico. É notória a semelhança desta equação com aquela obtida no calibre de Landau (3.2).

Para obter os propagadores dos glúons devemos voltar a expressão (3.73) para $\mathcal{Z}_{\text{quadr}}$ e tomá-la no ponto de sela, isto é, para $\zeta = \zeta_0$:

$$\mathcal{Z}_{\text{quadr}} = \mathcal{N} \int [dA^a][dA] e^{-\frac{1}{2}(\sum_k A_\mu(k)\mathcal{Q}_{\mu\nu}(k,\gamma)A_\nu(-k) + \sum_k A_\mu^a(k)\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)A_\nu^a(-k))}, \quad (3.82)$$

com

$$\mathcal{Q}_{\mu\nu}(k, \gamma) = \left(k^2 + \frac{4g^2\gamma^4}{k^2}\right)\delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)k_\mu k_\nu. \quad (3.83)$$

Podemos então determinar os propagadores dos glúons invertendo os operadores $\mathcal{Q}_{\mu\nu}(k, \gamma)$ e $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ e tomando os parâmetros de calibre α e β para zero. Logo, o propagador do glúon diagonal é

$$\langle A_\mu(k)A_\nu(-k) \rangle = \frac{k^2}{k^4 + 4g^2\gamma^4} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right). \quad (3.84)$$

Desta expressão conclui-se que a componente diagonal do campo de Yang-Mills é suprimida na região infravermelha. Já o propagador do setor não-diagonal, ao contrário, não é afetado pelo problema das cópias de Gribov e é dado por

$$\langle A_\mu^a(k)A_\nu^b(-k) \rangle = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\delta^{ab}. \quad (3.85)$$

No entanto, o comportamento infravermelho deste setor é modificado, tal como veremos nos capítulos seguintes, quando se leva em conta o efeito do condensado de glúons $\langle A_\mu^a A_\mu^a \rangle$, ver as referências [89, 67, 90, 79, 91, 92].

Ressaltamos ainda que, para obter os propagadores dos glúons, foi necessário fazer uma série de considerações: tomar a parte quadrática da integral funcional no ponto de sela, $\zeta = \zeta_0$, e, em seguida, tomar o limite termodinâmico, $V \rightarrow \infty$, além de tomar os limites $\alpha, \beta \rightarrow 0$. A esta série de considerações daremos o nome de *aproximação de Gribov*, pois, foram exatamente estas as aproximações feitas em seu artigo [10] no cálculo dos propagadores.

3.6.2 Propagador dos ghosts não-diagonais

Resta-nos ainda determinar o comportamento do propagador dos ghosts não-diagonais, lembrando que os ghosts diagonais foram completamente desacoplados da teoria

(ver apêndice B). Tal comportamento pode ser obtido a partir da expressão (3.60), através da contração de Wick dos campos de calibre, ou seja,

$$\frac{1}{2}\langle c^a(k)c^a(-k)\rangle \equiv \mathcal{G}(k) \approx \frac{1}{k^2} \frac{1}{(1-\sigma(k))} + \frac{\mathcal{B}}{k^4}, \quad (3.86)$$

com

$$\sigma(k) = g^2 \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\langle A_\mu(q)A_\nu(-q)\rangle}{(k-q)^2}, \quad (3.87)$$

e

$$\mathcal{B} = g^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \langle A_\mu(q)A_\mu(-q)\rangle + \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \langle A_\mu^a(q)A_\mu^a(-q)\rangle. \quad (3.88)$$

Os detalhes dos cálculos estão feitos em [79]. Como resultado obtemos

$$(1-\sigma(k))\Big|_{k\sim 0} = \frac{3g}{256\pi\gamma^2} k^2, \quad \mathcal{B} = -\frac{3g^3\gamma^2}{16\pi}, \quad (3.89)$$

e, dessa forma, o propagador dos ghosts fica

$$\mathcal{G}(k)\Big|_{k\sim 0} \approx 2g\gamma^2 \left(\frac{128\pi}{3g^2} - \frac{3g^2}{32\pi} \right) \frac{1}{k^4}, \quad (3.90)$$

que é mais singular que a predição perturbativa. Devemos lembrar que, de acordo com os dados mais recentes de simulações na rede, o comportamento do propagador dos ghosts no MAG é menos singular que $1/k^2$. Tal comportamento pode ser obtido quando os efeitos de condensados de dimensão dois são levados em conta. Discutiremos mais sobre estes efeitos nos capítulos seguintes.

3.6.3 Considerações a respeito da aproximação de Gribov

Ao executarmos a aproximação de Gribov, ou seja, quando tomamos a parte quadrática da função de partição no ponto de sela $\zeta = \zeta_0$ e assumimos o limite termodinâmico, $V \rightarrow \infty$, desprezamos o termo $1/\zeta_0$ em (3.79). Isto equivale a ter omitido, desde o início, o termo $\ln \zeta$ da função $f(\zeta)$ em (3.76), e, por sua vez, equivale a ter omitido $1/\zeta$ da representação integral da função degrau (3.71). Em outras palavras, o termo $\mathcal{V}(\Omega)$, que promove a restrição à região de Gribov em (3.57), comporta-se como uma função- δ ,

$$\mathcal{V}(\Omega) = \delta(1 - \sigma(0, A)). \quad (3.91)$$

Isto pode ser facilmente verificado notando-se que

$$\delta(x) := \frac{d\theta(x)}{dx} = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{d\zeta}{2\pi i} e^{\zeta x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta'}{2\pi} e^{i\zeta' x}, \quad (3.92)$$

onde, na última integral, fizemos a mudança de variável $\zeta = i\zeta'$. Fisicamente, isto significa que as configurações próximas ao horizonte de Gribov são aquelas que dão maior contribuição à integral de caminho.

Ainda na aproximação de Gribov, podemos escrever o termo $\mathcal{V}(\Omega)$ como

$$\mathcal{V}(\Omega) = \lim_{V \rightarrow \infty} e^{8V\gamma^4 - 2g^2\gamma^4 \sum_k A_\mu(k) \frac{1}{k^2} A_\mu(-k)}, \quad (3.93)$$

ou, na representação de coordenadas,

$$\mathcal{V}(\Omega) = \lim_{V \rightarrow \infty} e^{8V\gamma^4 - 2g^2\gamma^4 \int d^4x d^4x' A_\mu(x) \Delta(x-x') A_\mu(x')}, \quad (3.94)$$

onde $\Delta(x-x')$ é o inverso do operador de Laplace,

$$-\partial_x^2 \Delta(x-x') = \delta(x-x'). \quad (3.95)$$

A expressão (3.94) será uma condição fundamental para se chegar à chamada *função horizonte*. Como veremos no próximo capítulo, a função horizonte consiste em um termo que deve ser somado à ação de Yang-Mills fixada, neste caso, no MAG, para fazer a restrição à região de Gribov Ω , o que leva à chamada ação de Gribov-Zwanziger. Ou seja, a função horizonte funciona como um peso de Boltzmann que conta os graus de liberdade da teoria. No entanto, qualquer “candidato” ao “posto” de função horizonte deve recuperar a expressão (3.94) no limite quadrático e dessa forma, reproduzir o problema de Gribov. Além disso, as questões da localizabilidade e da renormalizabilidade da função horizonte também serão critérios fundamentais que precisaremos levar em conta.

3.7 A região modular fundamental Λ

Antes de passar ao próximo capítulo e iniciar o estudo sobre a função horizonte, vamos concluir este capítulo descrevendo a região modular fundamental, que denotaremos por Λ . No início deste capítulo, seção 3.1, chamamos a atenção para o fato de que a região de Gribov Ω possui ainda cópias em seu interior e que, portanto, deveríamos, em princípio, procurar fazer a restrição à região Λ que está contida em Ω . No entanto, também comentamos naquela ocasião que a região Λ carece de uma definição matemática operacionalmente viável. Assim, devemos tentar entender melhor essas questões. Na seção 3.3, onde definimos a região Ω através de (3.30), vimos que Ω nada mais é do que

o conjunto de configurações que minimizam o funcional (3.13), ou seja,

$$A_\mu^a \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \delta \mathcal{A}_{\text{MAG}}^2[A] = 0, \\ \delta^2 \mathcal{A}_{\text{MAG}}^2[A] > 0. \end{cases} \quad (3.96)$$

Logo, a região Ω contém tanto os mínimos absolutos quanto os mínimos relativos de $\mathcal{A}_{\text{MAG}}^2[A]$. Porém, os mínimos de uma mesma órbita de calibre serão também cópias de Gribov. Assim, para eliminar as cópias existentes em Ω devemos selecionar apenas os mínimos absolutos de $\mathcal{A}_{\text{MAG}}^2[A]$. Para tanto, definimos a região Λ como o conjunto de configurações que tornam o operador $\mathcal{A}_{\text{MAG}}^2[A]$ um mínimo absoluto. Podemos sintetizar esta definição escrevendo o seguinte

$$\Lambda := \{ \mathcal{A}_\mu = (A_\mu^a, A_\mu) \mid \mathcal{A}_\mu, \mathcal{B}_\mu \in \Omega \Rightarrow \mathcal{A}_{\text{MAG}}^2[A] < \mathcal{A}_{\text{MAG}}^2[B] \forall B_\mu^a \neq A_\mu^a \}, \quad (3.97)$$

onde $\mathcal{B}_\mu = (B_\mu^a, B_\mu)$ é uma configuração pertencente à região de Gribov. Embora mais refinada, a região Λ pode ainda possuir cópias de Gribov, bastando, para isto, que diferentes configurações pertencentes a Λ existam na mesma órbita de calibre. Estas cópias, porém, vivem na fronteira de Λ e poderiam ser eliminadas através da identificação da topologia dessas cópias. Isto, no entanto, dificulta ainda mais a operacionalidade desta região.

No entanto, em [93] é mostrado, formalmente, que as cópias dentro da região de Gribov não afetam os valores esperados da teoria. A razão disto é que as regiões Ω e Λ têm uma fronteira em comum e a maior contribuição à integral de caminho viria, justamente, desta fronteira. Este resultado dá respaldo ao estudo da região de Gribov em lugar da região modular fundamental.

CAPÍTULO 4

FUNÇÃO HORIZONTE E A AÇÃO DE GRIBOV-ZWANZIGER

Neste capítulo, iremos determinar a função horizonte no MAG em $SU(2)$ através de três critérios fundamentais: o da recuperação do termo de Gribov, eq. (3.94), na aproximação quadrática; o da localizabilidade; e o da renormalizabilidade.

4.1 Introdução – Ação de Gribov-Zwanziger no calibre de Landau

No capítulo anterior, fizemos a restrição à região de Gribov Ω através da condição de ausência de pólos do propagador dos ghosts não-diagonais. Isto equivale a introduzir, na função de partição, o termo

$$\mathcal{V}(\Omega) = \theta(1 - \sigma(0, A)), \quad (4.1)$$

onde $\sigma(0, A)$, eq. (3.68), é tomado até a segunda ordem. Conseqüentemente, o termo que promove a restrição, na aproximação de Gribov, é dado por

$$\mathcal{V}(\Omega) = \lim_{V \rightarrow \infty} e^{8V\gamma^4(1-\sigma(0,A))} \equiv \lim_{V \rightarrow \infty} e^{8V\gamma^4 - S_G} \quad (4.2)$$

onde γ é o parâmetro de Gribov dado pela equação de gap (3.81), e S_G , dado por

$$S_G = 8V\gamma^4\sigma(0, A) = -2g^2\gamma^4 \int d^4x A_\mu \frac{1}{\partial^2} A_\mu, \quad (4.3)$$

é um termo não-local que deve ser adicionado à ação de Yang-Mills¹.

Com a introdução deste termo na ação, é possível analisar, ao nível árvore, as modificações dos propagadores dos glúons devido à restrição à região Ω , eq's (3.84) e (3.85). No entanto, este termo não nos permite ir além da aproximação ao nível árvore e, por conseguinte, não podemos obter efeitos de ordem mais alta nas correções quânticas.

¹Este termo é o mesmo que aparece em (3.94), porém, escrito numa notação mais intuitiva.

Em princípio, a condição de ausência de pólos pode ser tomada a ordens mais altas. Porém, o ideal seria se pudéssemos ressomar a série a todas as ordens e obter, com isto, uma expressão fechada para o termo não-local S_G . De fato, isto foi feito por Zwanziger no caso do calibre de Landau [14, 15]. Neste caso o termo não-local é dado por

$$S_G^{\text{Landau}} = -Ng^2\gamma^4 \int d^4x A_\mu^A \frac{1}{\partial^2} A_\mu^A, \quad (4.4)$$

e a expressão que corresponde à ressonância de toda série, que é conhecida como *função horizonte*, é dada por

$$S_{Zw}^{\text{Landau}} = -Ng^2\gamma^4 \int d^4x f^{ABC} A_\mu^B [(\partial \cdot D)^{-1}]^{AD} f^{DEC} A_\mu^E. \quad (4.5)$$

Nesta, o operador não-local $-(\partial \cdot D)^{-1}]^{AB}$ é o inverso do operador de Faddeev-Popov no calibre de Landau,

$$-\partial_\mu D_\mu^{AB} = -\partial_\mu (\partial_\mu \delta^{AB} - gf^{ABC} A_\mu^C). \quad (4.6)$$

Note-se que a função horizonte de Zwanziger (4.5) reduz-se ao termo de Gribov (4.4) na aproximação quadrática, na qual o operador de Faddeev-Popov é aproximado pelo operador de Laplace, *i.e.*,

$$-\partial_\mu D_\mu^{AB} \approx -\delta^{AB} \partial^2. \quad (4.7)$$

Apesar de sua aparente não-localidade, a função horizonte (4.5) pode ser escrita de forma local através da introdução adequada de campos auxiliares. Surpreendentemente, a ação local resultante é multiplicativamente renormalizável a todas as ordens [15, 17, 13]. Esta propriedade torna possível o cálculo de correções quânticas a ordens mais altas levando-se em conta os efeitos da restrição à região de Gribov. Recentemente, foram realizados estudos da condensação de operadores de dimensão dois, como por exemplo o condensado de glúons $\langle A_\mu^A A_\mu^A \rangle$, ver [22], em presença do termo de horizonte (4.5). Além disso, o cálculo a dois laços dos propagadores dos glúons e dos ghosts é feito em [94, 95]. Também devemos enfatizar que a implementação da restrição através da função horizonte de Zwanziger fornece uma sólida base teórica para que se possa atingir um entendimento mais claro sobre a origem da supressão do propagador dos glúons na região infravermelha, observada em simulações numéricas na rede [96, 97].

A então chamada ação de Gribov-Zwanziger constitui-se da ação de Yang-Mills com um calibre fixado, mais o termo de horizonte. No caso do calibre de Landau, podemos extrair da ação de Gribov-Zwanziger as seguintes propriedades:

- A ação se reduz ao problema original de Gribov na aproximação quadrática;
- A ação pode ser localizada introduzindo-se adequadamente campos auxiliares;
- A ação é multiplicativamente renormalizável a todas as ordens.

Essas três propriedades fundamentais devem estar presentes em qualquer calibre. Assim, iremos assumir essas propriedades para obter a função horizonte e a ação de Gribov-Zwanziger no MAG em $SU(2)$.

4.2 Função horizonte no MAG em $SU(2)$

O exemplo da ação de Gribov-Zwanziger no caso do calibre de Landau nos fornece propriedades gerais que servirão como guias em nossa busca pela função horizonte no MAG em $SU(2)$. Utilizando tais critérios, obtivemos em [92] que a função horizonte para o presente caso é dada por

$$S_H = \gamma^4 g^2 \int d^4x \varepsilon^{ab} A_\mu (\mathcal{M}^{-1})^{ac} \varepsilon^{cb} A_\mu, \quad (4.8)$$

onde $(\mathcal{M}^{-1})^{ab}$ é o inverso do operador de Faddeev-Popov,

$$\mathcal{M}^{ab} = -D_\mu^{ac} D_\mu^{cb} - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{bd} A_\mu^c A_\mu^d, \quad (4.9)$$

enquanto que D_μ^{ab} é a derivada covariante com relação às componentes diagonais, eq. (3.8).

Note-se que a função horizonte definida como em (4.8) reduz-se precisamente à expressão (4.3) na aproximação quadrática, ou seja, quando substituímos o operador \mathcal{M}^{ab} pelo Laplaciano, $-\delta^{ab}\partial^2$. Este é o primeiro critério que devemos estabelecer para função horizonte, pois, dessa forma, recaímos no problema de Gribov que foi nosso ponto de partida².

O segundo critério é o de localizabilidade. Ou seja, devemos ser capazes de escrever (4.8) de forma local. De fato, isto se torna possível com a introdução adequada de um conjunto de campos auxiliares³. A localização da função horizonte (4.8) será assunto para a próxima seção.

²Utilizando apenas este primeiro critério, poderíamos pensar num termo de horizonte do tipo

$$\int d^4x \varepsilon^{ab} A_\mu \frac{\partial^2}{\mathcal{M}^{ad} \mathcal{M}^{dc}} \varepsilon^{cb} A_\mu.$$

No entanto, este termo não resiste aos demais critérios de localizabilidade e renormalizabilidade.

³O método de localização é muito bem ilustrado em [15] no estudo da função horizonte no calibre de Landau e em [98] no estudo do operador de massa invariante de calibre $\text{Tr} \int d^4x \mathcal{F}_{\mu\nu} \frac{1}{D^2} \mathcal{F}_{\mu\nu}$.

O terceiro critério é o de renormalizabilidade. A ação de Gribov-Zwanziger neste caso constitui-se da ação de Yang-Mills fixada no MAG, mais o termo de horizonte (4.8), *i. e.*,

$$S_{\text{GZ}} = S_{\text{YM}} + S_{\text{MAG}} + S_{\text{H}}, \quad (4.10)$$

sendo S_{YM} dada por (3.9) e S_{MAG} por

$$\begin{aligned} S_{\text{MAG}} = & \int d^4x \left[ib^a D_\mu^{ab} A_\mu^b - \bar{c}^a \mathcal{M}^{ab} c^b + g\varepsilon^{ab} \bar{c}^a (D_\mu^{bc} A_\mu^c) c \right. \\ & \left. + ib \partial_\mu A_\mu + \bar{c} \partial_\mu (\partial_\mu c + g\varepsilon^{ab} A_\mu^a c^b) \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para mostrar a renormalizabilidade deste modelo devemos primeiro localizar o termo de horizonte S_{H} e obter o conteúdo de simetrias da ação local resultante. A partir disto podemos obter o contratermo mais geral que será absorvido através da redefinição da normalização dos campos e parâmetros da teoria. Este procedimento é feito detalhadamente em [92]. Nesta tese, vamos postergar a prova da renormalizabilidade para o capítulo 6 onde iremos analisar um modelo mais geral no qual também serão levados em conta os operadores de dimensão dois.

4.3 Localização da função horizonte

Nesta seção vamos descrever o procedimento de localização do termo de horizonte. Vamos começar considerando a função de partição do modelo de Gribov-Zwanziger (4.10), ou seja,

$$\mathcal{Z} = \int d\mu_0 e^{-S_{\text{GZ}}}, \quad (4.12)$$

na qual a medida $d\mu_0$ é dada por

$$d\mu_0 \equiv [dA^a][dA][db^a][db][dc^a][d\bar{c}^a][dc][d\bar{c}]. \quad (4.13)$$

Tal como no calibre de Landau [15], a função horizonte (4.8) pode ser localizada através de um par de campos vetoriais complexos comutantes, $(\bar{\phi}_\mu^{ab}, \phi_\mu^{ab})$, da seguinte maneira:

$$e^{-S_{\text{H}}} = \int [d\phi][d\bar{\phi}] (\det \mathcal{M})^8 \exp \left\{ - \int d^4x \left[\bar{\phi}_\mu^{ac} \mathcal{M}^{ab} \phi_\mu^{bc} + \gamma^2 g\varepsilon^{ab} (\phi_\mu^{ab} - \bar{\phi}_\mu^{ab}) A_\mu \right] \right\}. \quad (4.14)$$

Nesta, o determinante $(\det \mathcal{M})^8$ leva em conta o Jacobiano que surge da integração sobre os campos auxiliares $(\bar{\phi}_\mu^{ab}, \phi_\mu^{ab})$. Este termo pode também ser localizado através de um par de campos vetoriais complexos anticomutantes, $(\bar{\omega}_\mu^{ab}, \omega_\mu^{ab})$,

$$(\det \mathcal{M})^8 = \int [d\omega][d\bar{\omega}] \exp \left(\int d^4x \bar{\omega}_\mu^{ac} \mathcal{M}^{ab} \omega_\mu^{bc} \right). \quad (4.15)$$

Dessa forma, obtemos um modelo local descrito pela seguinte função de partição

$$\mathcal{Z} = \int d\mu e^{-S_{\text{Local}}}, \quad (4.16)$$

sendo

$$d\mu \equiv [dA^a][dA][db^a][db][dc^a][d\bar{c}^a][dc][d\bar{c}][d\phi][d\bar{\phi}][d\omega][d\bar{\omega}], \quad (4.17)$$

e

$$S_{\text{Local}} = S_{\text{YM}} + S_{\text{MAG}} + S_{\phi\omega} + S_{\gamma}, \quad (4.18)$$

com $S_{\phi\omega}$ e S_{γ} dados por

$$S_{\phi\omega} = \int d^4x \left(\bar{\phi}_{\mu}^{ac} \mathcal{M}^{ab} \phi_{\mu}^{bc} - \bar{\omega}_{\mu}^{ac} \mathcal{M}^{ab} \omega_{\mu}^{bc} \right), \quad (4.19)$$

$$S_{\gamma} = g\gamma^2 \int d^4x \varepsilon^{ab} (\phi_{\mu}^{ab} - \bar{\phi}_{\mu}^{ab}) A_{\mu}. \quad (4.20)$$

Agora que obtivemos um modelo local que leva em conta a restrição à região de Gribov, o próximo passo é analisar o conteúdo de simetria da ação local (4.18). Esta análise é fundamental para a prova da renormalizabilidade do modelo que será discutida do capítulo 6.

4.4 Simetria de BRST

Como primeiro passo na direção de um modelo renormalizável, veremos nesta seção como reescrever a ação local (4.18) de tal forma que esta preserve a simetria de BRST. Na verdade, seremos obrigados a partir para um modelo mais geral no qual se pode reobter a ação (4.18) ao tomar-se certos limites físicos adequadamente. A abordagem que adotaremos aqui, é pormenorizada em [99] e coincide com aquela utilizada por Zwanziger em [15].

4.4.1 Caso particular com $\gamma = 0$

Para estabelecer a invariância de BRST do modelo local resultante, vamos proceder como em [14, 15] e considerar primeiro o caso particular quando $\gamma = 0$,

$$S_{\text{Local}} \Big|_{\gamma=0} = S_{\text{YM}} + S_{\text{MAG}} + S_{\phi\omega}. \quad (4.21)$$

Neste caso, teríamos introduzido nada mais que a unidade escrita como

$$1 = \int [d\phi][d\bar{\phi}][d\omega][d\bar{\omega}] \exp \left[- \int d^4x \left(\bar{\phi}_{\mu}^{ac} \mathcal{M}^{ab} \phi_{\mu}^{bc} - \bar{\omega}_{\mu}^{ac} \mathcal{M}^{ab} \omega_{\mu}^{bc} \right) \right]. \quad (4.22)$$

No entanto, a ação $S_{\text{Local}}|_{\gamma=0}$ pode ser escrita de forma invariante pelas transformações de BRST. Para constatar isto, vamos introduzir o seguinte conjunto de transformações nilpotentes de BRST:

$$\begin{aligned}
sA_\mu^a &= -(D_\mu^{ab}c^b + g\varepsilon^{ab}A_\mu^b c), & sA_\mu &= -(\partial_\mu c + g\varepsilon^{ab}A_\mu^a c^b), \\
sc^a &= g\varepsilon^{ab}c^b c, & sc &= \frac{g}{2}\varepsilon^{ab}c^a c^b, \\
s\bar{c}^a &= ib^a, & s\bar{c} &= ib, \\
sb^a &= 0, & sb &= 0, \\
s\phi_\mu^{ab} &= \omega_\mu^{ab}, & s\bar{\omega}_\mu^{ab} &= \bar{\phi}_\mu^{ab}, \\
s\omega_\mu^{ab} &= 0, & s\bar{\phi}_\mu^{ab} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Seja então a ação S_0 definida por

$$S_0 = S_{\text{YM}} + s \int d^4x (\bar{c}^a D_\mu^{ab} A_\mu^b + \bar{c} \partial_\mu A_\mu + \bar{\omega}_\mu^{ac} \mathcal{M}^{ab} \omega_\mu^{bc}), \tag{4.24}$$

que, naturalmente, satisfaz

$$sS_0 = 0. \tag{4.25}$$

Atuando o operador de BRST, podemos reescrever S_0 como

$$S_0 = S_{\text{YM}} + S_{\text{MAG}} + S_{\phi\omega} + \int d^4x \bar{\omega}_\mu^{ac} \mathcal{F}^{ab} \phi_\mu^{bc}, \tag{4.26}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{ab} &= 2g\varepsilon^{ac}(\partial_\mu c + g\varepsilon^{de}A_\mu^d c^e)D_\mu^{cb} + g\varepsilon^{ab}\partial_\mu(\partial_\mu c + g\varepsilon^{cd}A_\mu^c c^d) \\
&\quad - g^2(\varepsilon^{ac}\varepsilon^{bd} + \varepsilon^{ad}\varepsilon^{bc})A_\mu^d(D_\mu^{ce}c^e + g\varepsilon^{ce}A_\mu^e c).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

A expressão (4.26) difere de (4.21) pela presença do último termo. Dessa forma, podemos transformar $S_{\text{Local}}|_{\gamma=0}$ em S_0 através da seguinte transformação da variável $\omega_\mu^{ab}(x)$:

$$\omega_\mu^{ab} \rightarrow \omega_\mu^{ab} - (\mathcal{M}^{-1})^{ac} \mathcal{F}^{cd} \phi_\mu^{db}, \tag{4.28}$$

cujo jacobiano correspondente é independente dos campos. Assim, vale a seguinte equivalência:

$$\int d\mu e^{-S_{\text{Local}}|_{\gamma=0}} = \int d\mu e^{-S_0}. \tag{4.29}$$

4.4.2 Reintroduzindo o termo com $\gamma \neq 0$

Agora vamos considerar o termo S_γ dado por (4.20). Através das transformações de BRST definidas em (4.23) podemos reescrever S_γ como

$$S_\gamma = \gamma^2 \int d^4x [D_\mu^{ab} \phi_\mu^{ba} - s(D_\mu^{ab} \bar{\omega}_\mu^{ba}) + g\varepsilon^{ab}(\partial_\mu c + g\varepsilon^{cd}A_\mu^c c^d)\bar{\omega}_\mu^{ab}]. \tag{4.30}$$

O último termo desta expressão pode ser eliminado pela transformação de variável

$$\omega^{ab} \rightarrow \omega_{\mu}^{ab} - (\mathcal{M}^{-1})^{ac} \gamma^2 g \varepsilon^{cb} (\partial_{\mu} c + g \varepsilon^{de} A_{\mu}^d c^e). \quad (4.31)$$

Portanto, a função de partição fica

$$\mathcal{Z} = \int d\mu e^{-\{S_0 + \gamma^2 \int d^4x [D_{\mu}^{ab} \phi_{\mu}^{ba} - s(D_{\mu}^{ab} \bar{\omega}_{\mu}^{ba})]\}}. \quad (4.32)$$

No entanto, devido ao termo $D_{\mu}^{ab} \phi_{\mu}^{ba}$, a ação

$$S_0 + \gamma^2 \int d^4x [D_{\mu}^{ab} \phi_{\mu}^{ba} - s(D_{\mu}^{ab} \bar{\omega}_{\mu}^{ba})] \quad (4.33)$$

não é BRST invariante. Para lidar com este problema iremos proceder como em [99, 15] e introduzir dois dubletos de BRST de fontes locais externas:

$$\begin{aligned} sM_{\mu\nu}^{ab} &= N_{\mu\nu}^{ab}, & sN_{\mu\nu}^{ab} &= 0, \\ s\bar{N}_{\mu\nu}^{ab} &= -\bar{M}_{\mu\nu}^{ab}, & s\bar{M}_{\mu\nu}^{ab} &= 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde as fontes $N_{\mu\nu}^{ab}(x)$ e $\bar{N}_{\mu\nu}^{ab}(x)$ são anticomutantes, enquanto que $M_{\mu\nu}^{ab}(x)$ e $\bar{M}_{\mu\nu}^{ab}(x)$ são comutantes. Dessa forma, podemos definir o seguinte termo de fontes

$$\begin{aligned} S_{\text{sources}} &= s \int d^4x \left(-\bar{N}_{\mu\nu}^{ab} D_{\mu}^{ac} \phi_{\nu}^{cb} + M_{\mu\nu}^{ab} D_{\mu}^{ac} \bar{\omega}_{\nu}^{cb} \right) \\ &= \int d^4x \left\{ \bar{M}_{\mu\nu}^{ab} D_{\mu}^{ac} \phi_{\nu}^{cb} + M_{\mu\nu}^{ab} [D_{\mu}^{ac} \bar{\phi}_{\nu}^{cb} + g \varepsilon^{ac} (\partial_{\mu} c + g \varepsilon^{de} A_{\mu}^d c^e) \bar{\omega}_{\nu}^{cb}] \right. \\ &\quad \left. + N_{\mu\nu}^{ab} D_{\mu}^{ac} \bar{\omega}_{\nu}^{cb} + \bar{N}_{\mu\nu}^{ab} [D_{\mu}^{ac} \omega_{\nu}^{cb} + g \varepsilon^{ac} (\partial_{\mu} c + g \varepsilon^{de} A_{\mu}^d c^e) \phi_{\nu}^{cb}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

O segundo termo de (4.33) pode ser obtido de S_{sources} ao tomarmos o limite físico no qual as fontes assumem os seguintes valores:

$$\begin{aligned} -M_{\mu\nu}^{ab} \Big|_{\text{phys}} &= \bar{M}_{\mu\nu}^{ab} \Big|_{\text{phys}} = \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \gamma^2, \\ N_{\mu\nu}^{ab} \Big|_{\text{phys}} &= \bar{N}_{\mu\nu}^{ab} \Big|_{\text{phys}} = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Assim, é conveniente considerar, em lugar de (4.33), a ação

$$S_1 = S_0 + S_{\text{sources}}, \quad (4.37)$$

pois esta usufrui da propriedade de ser invariante pelas transformações de BRST (4.23) e (4.34) e, além disso, é possível reobter o modelo original a partir desta, através do limite físico (4.36), *i. e.*,

$$S_1 \Big|_{\text{phys}} \equiv S_0 + \gamma^2 \int d^4x [D_{\mu}^{ab} \phi_{\mu}^{ba} - s(D_{\mu}^{ab} \bar{\omega}_{\mu}^{ba})]. \quad (4.38)$$

Em outras palavras, o que fizemos aqui foi definir uma ação mais geral que contém dentro de si a ação original que localiza o operador de Zwanziger (4.8) e que além disso, respeita a simetria de BRST.

4.5 Simetria $U(8)$ global e notação de multi-índice

Além da simetria de BRST, discutida na seção anterior, a ação (4.37) dispõe ainda de uma simetria $U(8)$ global expressa por

$$\mathcal{Q}_{\mu\nu}^{ab} S_1 = 0, \quad (4.39)$$

onde o operador $\mathcal{Q}_{\mu\nu}^{ab}$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mu\nu}^{ab} := & \int d^4x \left(\phi_\mu^{ca} \frac{\delta}{\delta \phi_\nu^{cb}} - \bar{\phi}_\nu^{cb} \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}_\mu^{ca}} + \omega_\mu^{ca} \frac{\delta}{\delta \omega_\nu^{cb}} - \bar{\omega}_\nu^{cb} \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_\mu^{ca}} \right. \\ & \left. + M_{\sigma\mu}^{ca} \frac{\delta}{\delta M_{\sigma\nu}^{cb}} - \bar{M}_{\sigma\nu}^{cb} \frac{\delta}{\delta \bar{M}_{\sigma\mu}^{ca}} + N_{\sigma\mu}^{ca} \frac{\delta}{\delta N_{\sigma\nu}^{cb}} - \bar{N}_{\sigma\nu}^{cb} \frac{\delta}{\delta \bar{N}_{\sigma\mu}^{ca}} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

A presença da invariância global $U(8)$ permite-nos definir um índice composto, ou *multi-índice*,

$$i \equiv \{a, \mu\},$$

com

$$i = 1, \dots, 8,$$

tal como é feito numa vasta série de publicações, por exemplo, [15, 17, 20, 89, 92, 98, 99].

Dessa forma, é possível escrever

$$(\phi_\mu^{ab}, \bar{\phi}_\mu^{ab}, \omega_\mu^{ab}, \bar{\omega}_\mu^{ab}) \equiv (\phi_i^a, \bar{\phi}_i^a, \omega_i^a, \bar{\omega}_i^a), \quad (4.41)$$

e

$$(M_{\mu\nu}^{ab}, \bar{M}_{\mu\nu}^{ab}, N_{\mu\nu}^{ab}, \bar{N}_{\mu\nu}^{ab}) \equiv (M_{\mu i}^a, \bar{M}_{\mu i}^a, N_{\mu i}^a, \bar{N}_{\mu i}^a). \quad (4.42)$$

Note-se que, de acordo com a notação por nós adotada, para os campos $(\phi_\mu^{ab}, \bar{\phi}_\mu^{ab}, \omega_\mu^{ab}, \bar{\omega}_\mu^{ab})$, o segundo índice do grupo de calibre se junta ao índice de Lorentz compondo o multi-índice i , enquanto que para as fontes $(M_{\mu\nu}^{ab}, \bar{M}_{\mu\nu}^{ab}, N_{\mu\nu}^{ab}, \bar{N}_{\mu\nu}^{ab})$, o segundo índice do grupo se une ao segundo índice de Lorentz. Além disso, não se deve confundir os multi-índices i, j, k , etc, com os índices das componentes diagonais de $SU(N)$ apresentados em capítulos precedentes. No presente caso, estamos lidando apenas com o grupo $SU(2)$, para o qual há somente uma componente diagonal — a componente 3 — e portanto, não existe a necessidade de empregar um índice para este setor da teoria.

Através desta notação de multi-índice podemos reescrever a ação S_1 como

$$S_1 = S_{\text{YM}} + S_{\text{MAG}} + \int d^4x \left\{ \bar{\phi}_i^a \mathcal{M}^{ab} \phi_i^b - \bar{\omega}_i^a \mathcal{M}^{ab} \omega_i^b + \bar{\omega}_i^a \mathcal{F}^{ab} \phi_i^b + \bar{M}_{\mu i}^a D_\mu^{ab} \phi_i^b \right\}$$

	A	b	\bar{c}	c	ϕ	$\bar{\phi}$	ω	$\bar{\omega}$	M	\bar{M}	N	\bar{N}
dimensão	1	2	2	0	1	1	1	1	2	2	2	2
número de ghost	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0	0	1	-1
carga- \mathcal{Q}_8	0	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Tabela 4.1: Números quânticos de campos e fontes.

$$\begin{aligned}
& +N_{\mu i}^a D_{\mu}^{ab} \bar{\omega}_i^b + \bar{N}_{\mu i}^a [D_{\mu}^{ab} \omega_i^b + g\varepsilon^{ab} (\partial_{\mu} c + g\varepsilon^{cd} A_{\mu}^c c^d) \phi_i^b] + M_{\mu i}^a [D_{\mu}^{ab} \bar{\phi}_i^b \\
& + g\varepsilon^{ab} (\partial_{\mu} c + g\varepsilon^{cd} A_{\mu}^c c^d) \bar{\omega}_i^b] \}. \quad (4.43)
\end{aligned}$$

Também é possível reescrever o gerador da simetria (4.40) como

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{\mu\nu}^{ab} \equiv \mathcal{Q}_{ij} := \int d^4x \left(\phi_i^a \frac{\delta}{\delta \phi_j^a} - \bar{\phi}_j^a \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}_i^a} + \omega_i^a \frac{\delta}{\delta \omega_j^a} - \bar{\omega}_j^a \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_i^a} \right. \\
\left. + M_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta M_{\mu j}^a} - \bar{M}_{\mu j}^a \frac{\delta}{\delta \bar{M}_{\mu i}^a} + N_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta N_{\mu j}^a} - \bar{N}_{\mu j}^a \frac{\delta}{\delta \bar{N}_{\mu i}^a} \right). \quad (4.44)
\end{aligned}$$

O traço do operador \mathcal{Q}_{ij} , ou seja, $\mathcal{Q}_{ii} \equiv \mathcal{Q}_8$, define um número quântico adicional para aqueles campos, ou fontes, que possuem o multi-índice i . Este número quântico é disposto na tabela 4.1 juntamente com a dimensão e o número de ghost dos campos e fontes.

Até aqui, discutimos duas simetrias muito importantes da ação S_1 : a simetria de BRST, que é fundamental para a prova da renormalizabilidade do modelo; e a invariância global $U(8)$, que permite introduzir o multi-índice $i \equiv \{a, \mu\} = 1, \dots, 8$. Além destas, a ação clássica completa, que consiste na ação S_1 acrescida de termos de fontes externas — que se acoplam às transformações não-lineares —, exhibe outras simetrias que iremos discutir no capítulo 6 onde faremos uma análise completa das identidades de Ward.

4.6 Introduzindo interações quárticas

Ao introduzirmos a função horizonte (4.8) à ação de Yang-Mills no MAG em $SU(2)$, fomos obrigados a estender o conteúdo de campos da teoria a fim de se obter uma ação local. No entanto, como vimos no capítulo 2, onde faz-se uma introdução ao MAG em $SU(N)$, é preciso introduzir termos extras de interação entre os campos de ghost (2.31). Estes, porém, estão ligados a um único parâmetro de calibre α . No nosso caso, a presença dos campos auxiliares $(\phi_i^a, \bar{\phi}_i^a, \omega_i^a, \bar{\omega}_i^a)$ farão com que estes termos sejam escritos como

$$\begin{aligned}
S_{\alpha} &= -\frac{\alpha}{2} s \int d^4x [i\bar{c}^a b^a - g\varepsilon^{ab} \bar{c}^a \bar{c}^b c + g^2 \bar{\omega}_i^a \phi_i^a (\bar{\phi}_j^b \phi_j^b - \bar{\omega}_j^b \omega_j^b) - 2g^2 \bar{\omega}_i^a \phi_i^a \bar{c}^b c^b] \\
&= \frac{\alpha}{2} \int d^4x [b^a b^a + 2ig\varepsilon^{ab} b^a \bar{c}^b c - g^2 (\bar{\phi}_i^a \phi_i^a - \bar{\omega}_i^a \omega_i^a - \bar{c}^a c^a) (\bar{\phi}_j^b \phi_j^b - \bar{\omega}_j^b \omega_j^b - \bar{c}^b c^b) \\
&\quad - 2ig^2 \bar{\omega}_i^a \phi_i^a b^b c^b + 2g^3 \bar{\omega}_i^a \phi_i^a \varepsilon^{bc} \bar{c}^b c^c]. \quad (4.45)
\end{aligned}$$

De fato, definindo-se a ação S_2 ,

$$S_2 = S_1 + S_\alpha, \quad (4.46)$$

segue que a equação de movimento do multiplicador de Lagrange não-diagonal $b^a(x)$ é modificada de acordo com

$$\frac{\delta S_2}{\delta b^a} = iD_\mu^{ab} A_\mu^b + \alpha(b^a + ig\varepsilon^{ab}\bar{c}^b c - ig^2\bar{\omega}_i^b \phi_i^b c^a). \quad (4.47)$$

Portanto, notamos, mais uma vez, que a condição de calibre do MAG, $D_\mu^{ab} A_\mu^b = 0$, é reobtida no limite $\alpha \rightarrow 0$, que deve ser tomado após a remoção das divergências ultravioletas. Vemos também que todo o termo S_α vai a zero com $\alpha \rightarrow 0$, permitindo-nos integrar os campos localizantes $(\phi_i^a, \bar{\phi}_i^a, \omega_i^a, \bar{\omega}_i^a)$ e assim, recuperar a função horizonte (4.8).

4.7 Discussão sobre a quebra suave de BRST

A quebra suave da simetria de BRST⁴ como uma forma de se introduzir efeitos não-perturbativos numa teoria de campos bem definida na região ultravioleta, ou seja, na região perturbativa, é objeto de estudos recentes [100]. No nosso caso, em decorrência do processo de localização da função horizonte ficamos, após algumas manipulações algébricas, com a seguinte ação local:

$$S_{\text{Local}} = S_{\text{YM}} + S_{\text{MAG}} + s \int d^4x \omega_i^a \mathcal{M}^{ab} \phi_i^b + \gamma^2 \int d^4x [D_\mu^{ab} \phi_\mu^{ba} - s(D_\mu^{ab} \bar{\omega}_\mu^{ba})]. \quad (4.48)$$

A ação local (4.48) equivale a tomarmos os valores físicos das fontes $(M_{\mu\nu}^{ab}, \bar{M}_{\mu\nu}^{ab}, N_{\mu\nu}^{ab}, \bar{N}_{\mu\nu}^{ab})$, eq. (4.36), na ação (4.46). Fazendo o operador de BRST, s , atuar nos dois lados de (4.48), obtemos:

$$sS_{\text{Local}} = \gamma^2 \Delta, \quad (4.49)$$

sendo

$$\Delta = s \int d^4x D_\mu^{ab} \phi_\mu^{ba} = - \int d^4x [g\varepsilon^{ab} A_\mu \omega_\mu^{ba} - g\varepsilon^{ab} (\partial_\mu c + g\varepsilon^{cd} A_\mu^c c^d) \phi_\mu^{ba}]. \quad (4.50)$$

Isto mostra como a simetria de BRST é explicitamente quebrada por um termo de dimensão dois, ou seja, uma quebra suave. O termo de quebra Δ permite-nos dizer que o parâmetro de Gribov γ é de fato, um parâmetro físico da teoria. Caso fosse possível

⁴Por “quebra suave”, ou do inglês: *soft breaking*, devemos entender que a dimensão do termo de quebra é menor que a dimensão do espaço-tempo, de tal sorte que estas quebras podem ser desprezadas na região ultravioleta profunda.

escrever Δ como a variação de um polinômio local nos campos, digamos $\hat{\Delta}$, então, γ seria um parâmetro não-físico, como o parâmetro de calibre α . Conseqüentemente, as funções de correlação dos observáveis da teoria deveriam ser independentes de γ , significando que a introdução deste parâmetro não teria efeito algum sobre teoria [100].

A maneira de tratar esta quebra é aquela descrita na seção 4.4, ou seja, devemos introduzir fontes externas e assim, definir uma ação mais geral, BRST invariante, e que tenha como limite físico o modelo original que estamos estudando. Falta-nos ainda mostrar que a introdução da quebra não interfere na renormalizabilidade da teoria modificada. Em outras palavras, ainda temos que provar o terceiro critério, o de renormalizabilidade, que estipulamos para determinar a função horizonte. Porém, como já foi dito, deixaremos a prova da renormalizabilidade para o capítulo 6, onde iremos analisar um modelo mais geral no qual se irá introduzir outros termos de quebra suave que são os operadores de dimensão dois do capítulo seguinte.

CAPÍTULO 5

OPERADORES DE DIMENSÃO DOIS

Este capítulo será inteiramente dedicado à apresentação dos operadores de dimensão dois, com um particular enfoque aos operadores locais. Ainda assim, comentaremos brevemente os operadores não-locais invariantes de calibre. Ao final, descreveremos o formalismo que iremos adotar para se introduzir estes operadores na teoria.

5.1 Introdução

Dentro do cenário das teorias de calibre na região infravermelha, os operadores de dimensão dois têm sido, ao longo dos últimos anos, um assunto de grande repercussão e o objeto de diversos estudos: [13, 16, 21, 25, 39, 40, 49, 50, 63, 66, 67, 72, 89, 92, 98, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138]. Através destes operadores é possível introduzir parâmetros massivos na teoria de Yang-Mills. Resultados, tanto do ponto de vista da rede quanto do ponto de vista fenomenológico, mostram que tanto o propagador dos glúons quanto dos ghosts apresentam parâmetros massivos cujas interpretações físicas estão, até o presente momento, sob investigação.

Entretanto, existem duas abordagens distintas que dão origem a estes parâmetros. Uma delas refere-se à problemática de Gribov — discutida nos capítulos anteriores desta tese —, onde, na ocasião da eliminação das cópias de Gribov, faz-se necessária a introdução de um parâmetro massivo γ , o parâmetro de Gribov, que é determinado por uma equação de *gap*, ver as eq's (3.2) e (3.81). A outra possibilidade surge a partir da condensação dos operadores de dimensão dois. Esses operadores podem ser construídos através dos campos de glúons, de ghosts e, tal como foi descoberto recentemente, através dos campos auxiliares localizantes da ação de Gribov-Zwanziger.

É importante ressaltar que essas duas abordagens não são concorrentes e sim com-

plementares, ou seja, elas podem coexistir dentro do mesmo modelo. Isto não é difícil de entender, uma vez que o problema de Gribov é um problema relacionado com a própria quantização das teorias de calibre e deve, portanto, independentemente de qualquer outro efeito, sempre ser levado em conta. Além disso, as modificações que estes dois efeitos induzem nos propagadores são absolutamente díspares. De fato, o efeito da eliminação das cópias induz um propagador do tipo $k^2/(k^4 + \gamma^4)$, enquanto que o efeito da condensação dos operadores de dimensão dois induz, em geral, um propagador tipo Yukawa $1/(k^2 + m^2)$. Acrescentemos a esta argumentação os dados recentes da rede que constituem-se num forte indício que vem a corroborar a idéia de um modelo que combine estes dois efeitos. Este será o objetivo do capítulo seguinte onde, além de determinarmos tal modelo no MAG em $SU(2)$, também iremos mostrar sua renormalizabilidade.

Podemos separar os operadores em dois grandes grupos: os *locais* e os *não-locais*. Os operadores locais estão sempre atrelados a algum calibre específico devido à impossibilidade de se obter um operador local invariante por transformações de calibre. Apenas entre os operadores não-locais é que se encontram aqueles que são invariantes. De fato, esta é a grande motivação para o estudo desses operadores. No entanto, como veremos na próxima seção, tratar a não-localidade não é uma tarefa simples e, além disso, ainda temos que lidar com a questão da renormalizabilidade.

5.2 Operadores não-locais

Com relação aos operadores não-locais, podemos identificar duas categorias nas quais estes operadores podem se enquadrar. A primeira leva em conta a invariância por transformações de calibre e a segunda a localizabilidade. Na primeira categoria, destacam-se dois operadores. Um deles é o operador \mathcal{A}_{\min}^2 , definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\min}^2 &:= \min_{U \in SU(N)} \text{tr} \int d^4x \mathcal{A}_\mu^U \mathcal{A}_\mu^U, \\ \mathcal{A}_\mu^U &= U \mathcal{A}_\mu U^\dagger + \frac{1}{ig} (\partial_\mu U) U^\dagger. \end{aligned} \quad (5.1)$$

De acordo com esta definição, o operador \mathcal{A}_{\min}^2 toma a configuração que minimiza o operador $\int d^4x \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\mu$ em cada órbita de calibre. Assim, este operador, que está intimamente ligado às regiões de Gribov Ω e modular fundamental Λ , é invariante por transformações

de calibre. O outro operador que se encaixa nesta categoria é

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}\frac{1}{D^2}\mathcal{F}} := \text{tr} \int d^4x \mathcal{F}_{\mu\nu} \frac{1}{D^2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \int d^4x F_{\mu\nu}^A [(D^2)^{-1}]^{AB} F_{\mu\nu}^B. \quad (5.2)$$

É fácil verificar a invariância deste operador, uma vez que este é escrito através do traço de quantidades que se transformam covariantemente.

A segunda categoria na qual podemos classificar os operadores não-locais, diz respeito a sua localizabilidade. Nesta categoria encontra-se o operador (5.2) que pode ser escrito de forma local, tal como é feito em [98]. Já o operador \mathcal{A}_{\min}^2 não pode ser localizado. Isto fica claro ao escrevermos \mathcal{A}_{\min}^2 como uma série infinita em termos de $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, ver [139],

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\min}^2 = & -\frac{1}{2} \text{tr} \int d^4x \left(\mathcal{F}_{\mu\nu} \frac{1}{D^2} \mathcal{F}_{\mu\nu} + 2i \frac{1}{D^2} \mathcal{F}_{\alpha\mu} \left[\frac{1}{D^2} D_\beta \mathcal{F}_{\beta\alpha}, \frac{1}{D^2} D_\nu \mathcal{F}_{\nu\mu} \right] \right. \\ & \left. - 2i \frac{1}{D^2} \mathcal{F}_{\alpha\mu} \left[\frac{1}{D^2} D_\beta \mathcal{F}_{\beta\nu}, \frac{1}{D^2} D_\nu \mathcal{F}_{\alpha\mu} \right] \right) + O(\mathcal{F}^4). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Por outro lado, no calibre de Landau, $\partial_\mu \mathcal{A}_\mu = 0$, este operador reduz-se a uma forma local simples que pode ser implementada:

$$\mathcal{A}_{\min}^2 \Big|_{\partial \cdot A=0} = \int d^4x \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\mu = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^A A_\mu^A. \quad (5.4)$$

Voltando ao operador (5.2), uma vez que este é posto numa forma local, podemos estudar a renormalizabilidade da ação

$$S_{m^2} = S_{\text{YM}} + \frac{m^2}{2} \mathcal{O}_{\mathcal{F}\frac{1}{D^2}\mathcal{F}}, \quad (5.5)$$

onde se introduz um parâmetro massivo m^2 que deve ser fixado através de uma equação de *gap*. Tal estudo foi feito detalhadamente em [98] e a conclusão a que se chegou é que o modelo acima carece da introdução de termos extras de interação entre os campos auxiliares localizantes, que, ao contrário da ação de Gribov-Zwanziger, não estão associados a nenhum parâmetro de calibre que possa ser tomado para zero. O melhor que se pôde extrair deste modelo foi um outro modelo, inspirado no primeiro, que no entanto, é uma teoria alternativa às de Yang-Mills, vide a série de publicações a esse respeito: [98, 136, 137, 140]. Assim, encerraremos o assunto sobre os operadores não-locais e iremos nos concentrar apenas nos operadores locais.

5.3 Operadores Locais

A respeito dos operadores locais, existem diversos tipos que passaremos a descrever a partir de agora. Destes, talvez os mais conhecidos sejam os operadores de glúons

$$\mathcal{O}_{\text{glúon}}(x) = A_\mu(x) \cdot A_\mu(x) \quad (5.6)$$

que, dependendo do calibre adotado, assumem a forma generalizada, como um operador de glúons e ghosts,

$$\mathcal{O}_{\text{gl-gh}}(x; \alpha) = \frac{1}{2} A_\mu(x) \cdot A_\mu(x) + \alpha \bar{c}(x) \cdot c(x), \quad (5.7)$$

sendo α o parâmetro de calibre. Estudos sobre a condensação desses operadores indicam que uma massa é dinamicamente gerada para os glúons ao nível árvore, modificando o propagador.

Além destes, existem os operadores de ghosts que são divididos em dois canais: o BCS, cujos operadores são

$$\bar{\mathcal{O}}_{\text{BCS}}(x) = \bar{c}(x) \times \bar{c}(x) \quad \text{e} \quad \mathcal{O}_{\text{BCS}}(x) = c(x) \times c(x), \quad (5.8)$$

e o canal Overhauser

$$\mathcal{O}_{\bar{c} \times c}(x) = \bar{c}(x) \times c(x). \quad (5.9)$$

Esta divisão vem de uma analogia com a supercondutividade na qual o canal BCS corresponde aos pares *partícula-partícula* e *buraco-buraco* [141, 142], enquanto que o canal Overhauser corresponde ao par *partícula-buraco* [143, 144]. Os primeiros estudos da condensação destes operadores foram realizados no MAG em $SU(2)$. Nestes, mostra-se que uma massa taquiônica é gerada para os glúons não-diagonais ¹.

¹A notação com o símbolo (\cdot) indica que

$$\varphi \cdot \eta \equiv \begin{cases} \varphi^A \eta^A, & \text{para } A = 1, \dots, N^2 - 1, \text{ ou,} \\ \varphi^a \eta^a, & \text{para } a = 1, \dots, N(N - 1), \text{ ou,} \\ \varphi^i \eta^i, & \text{para } i = 1, \dots, (N - 1); \end{cases}$$

enquanto a notação com (\times) indica que

$$\varphi \times \eta \equiv \begin{cases} f^{ABC} \varphi^B \eta^C, & \text{para } A, B, C = 1, \dots, N^2 - 1, \text{ ou,} \\ f^{abc} \varphi^b \eta^c, & \text{para } a, b, c = 1, \dots, N(N - 1), \text{ ou,} \\ f^{abi} \varphi^a \eta^b, & \text{para } a, b = 1, \dots, N(N - 1) \text{ e } i = 1, \dots, (N - 1). \end{cases}$$

Finalmente, há ainda os operadores, recém-descobertos, que são construídos através dos campos auxiliares localizantes do modelo de Gribov-Zwanziger:

$$\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x) = \bar{\phi}_i(x) \cdot \phi_i(x) - \bar{\omega}_i(x) \cdot \omega_i(x). \quad (5.10)$$

Combinando-se adequadamente estes operadores e levando-se em conta a restrição à região de Gribov (3.30), é possível construir um modelo geral que se harmonize com os dados atuais da rede. Isto porém, será, como já foi dito, o assunto do próximo capítulo. Nosso objetivo agora, é fazer uma descrição mais detalhada de cada um desses operadores.

5.3.1 Operadores de glúons

Iniciamos esta seção apresentando, de uma forma bem generalizada, os operadores de glúons (5.6) e (5.7). Agora, vamos aprofundar nosso entendimento sobre estes operadores. Em primeiro lugar, devemos ressaltar a sensibilidade destes operadores com relação à escolha do calibre. Por exemplo, o operador

$$\mathcal{O}_{A^2}(x) = A_\mu^A(x)A_\mu^A(x) \quad (5.11)$$

torna-se invariante *on-shell* quando adotamos o calibre de Landau. Dessa forma, ao se estudar este operador numa teoria de Yang-Mills no calibre de Landau, obtém-se uma teoria renormalizável onde os glúons adquirem uma massa que é gerada dinamicamente a partir da condensação do operador, *i. e.*,

$$\langle A_\mu^A A_\mu^A \rangle \neq 0. \quad (5.12)$$

Em [39], o operador (5.11) foi estudado na classe dos calibres lineares e covariantes, na qual o calibre de Landau é um caso particular. Neste caso, é possível construir um potencial efetivo renormalizável. A formação do condensado é energeticamente favorecida, uma vez que esta diminui a energia do vácuo e, mais uma vez, os glúons adquirem uma massa. Além disso, é provado que a energia do vácuo independe do parâmetro de calibre. Mais recentemente, em [138], foi mostrado que o operador (5.11) é também renormalizável numa classe muito particular de calibres não-lineares. Nesta classe, o termo de fixação de calibre é construído de maneira a preservar a equação de ghost, garantindo a renormalizabilidade do modelo.

No caso do calibre de Curci-Ferrari, que é um outro exemplo de calibre não-linear, devemos lançar mão de um operador mais geral que depende do parâmetro de calibre α :

$$\mathcal{O}_{\text{gl-gh}}(x; \alpha) = \frac{1}{2} A_\mu^A(x) A_\mu^A(x) + \alpha \bar{c}^A(x) c^A(x). \quad (5.13)$$

Neste calibre, o operador (5.13) apresenta uma invariância, on-shell, por transformações de BRST, e, assim como ocorre no calibre linear covariante, é possível mostrar a independência da energia do vácuo do parâmetro α , vide referência [49].

No MAG existe um operador do tipo *glúon-ghost*, invariante on-shell, similar a (5.13) que, no entanto, envolve apenas as $N(N-1)$ componentes não-diagonais, ou seja,

$$\mathcal{O}_{\text{gl-gh}}^{\text{MAG}}(x; \alpha) = \frac{1}{2} A_\mu^a(x) A_\mu^a(x) + \alpha \bar{c}^a(x) c^a(x). \quad (5.14)$$

Este operador foi estudado em [67] e, analogamente ao casos supracitados, o resultado que se obteve foi um modelo renormalizável com a condensação do operador (5.14), diminuição da energia do vácuo, e a independência desta com relação ao parâmetro de calibre α . Dessa forma, ocorre a geração dinâmica de massa para os glúons não-diagonais, fato que é interpretado como uma evidência da dominância abeliana. Ainda em [67], é apresentado o estudo de um operador dependente de um parâmetro adicional κ que interpola os operadores (5.11) e (5.14):

$$\mathcal{O}_{\text{interp}}(x; \alpha, \kappa) = \frac{1}{2} A_\mu^a(x) A_\mu^a(x) + \frac{\kappa}{2} A_\mu^i(x) A_\mu^i(x) + \alpha \bar{c}^a(x) c^a(x). \quad (5.15)$$

Assim, escolhendo-se adequadamente os valores dos parâmetros κ e α temos

$$\mathcal{O}_{\text{interp}}(x; \alpha, \kappa) = \begin{cases} \mathcal{O}_{A^2}(x), & \text{para } \kappa = 1 \text{ e } \alpha = 0, \\ \mathcal{O}_{\text{gl-gh}}^{\text{MAG}}(x; \alpha), & \text{para } \kappa = 0 \text{ e } \alpha \text{ arbitrário.} \end{cases} \quad (5.16)$$

Isto permite mostrar que a energia do vácuo da teoria de Yang-Mills no MAG devido ao condensado de dimensão dois $\langle \mathcal{O}_{\text{gl-gh}}^{\text{MAG}} \rangle$ deve ser a mesma que no calibre de Landau com o condensado $\langle \mathcal{O}_{A^2} \rangle$. Ademais, devemos ressaltar que a condensação do operador diagonal

$$A_\mu^i(x) A_\mu^i(x)$$

é proibida no MAG devido à identidade $U(1)^{N-1}$ local (2.29).

5.3.2 Operadores de ghost

Assim como ocorre com os operadores de glúons, os operadores de ghost (5.8) e (5.9) foram estudados em diversos calibres tais como Landau [25, 21], Curci-Ferrari [131, 50]

e MAG [130, 134]. Os canais BCS e Overhauser se relacionam através da simetria de Nakanishi-Ojima, também conhecida como $SL(2, \mathbf{R})$, presente nos calibres de Landau, Curci-Ferrari e MAG. Os estados de vácuo desses dois canais podem ser interligados através dessa simetria, mostrando que são equivalentes entre si. Esta propriedade permite que se escolha, por simplicidade, o setor Overhauser [131].

Quando se estudam os operadores de ghosts, o primeiro detalhe que nos chama atenção com relação a estes operadores é que eles carregam um índice de cor. Isto, necessariamente, implica quebra da simetria de cor. Felizmente, esta quebra ocorre no setor não-físico da teoria. O segundo ponto a ser comentado a respeito desses operadores é que estes geram, em qualquer calibre, uma massa taquiônica para o setor de glúons da teoria à ordem de 1-*loop*. Isto, a princípio, parece ser um ponto desfavorável e que poderia desestimular o estudo desses operadores. No entanto, é preciso analisar esta questão num contexto mais amplo. A partir do estudo combinado desses operadores com os operadores de glúons, encontra-se como resultado final um valor positivo para a massa.

Em [21], é apresentado um estudo combinado do operador de glúons (5.11) com o operador de ghost

$$\mathcal{O}_{\text{ghost}}^A(x) = gf^{ABC}\bar{c}^B(x)c^C(x) \quad (5.17)$$

no calibre de Landau. Este trabalho rendeu resultados muito interessantes, pois o operador (5.17) gera massa apenas para o setor diagonal da teoria, enquanto que o operador de glúons (5.11) gera uma mesma massa para os dois setores. Como a massa originada pelo operador de ghost é taquiônica, o resultado final é que a massa do setor diagonal é menor, ainda assim positiva, que a massa dos glúons não-diagonais. Este resultado é interpretado como sendo mais um indício da dominância abeliana, pois, a energias muito baixas, o propagador dos glúons não-diagonais é suprimido e a teoria é inteiramente governada pelos graus de liberdade abelianos. Observa-se também que o propagador dos glúons abelianos, apesar de dominar o setor de baixas energias, possui um valor finito não-nulo quando o valor do momento é exatamente igual a zero.

Considerando-se o MAG, um estudo muito interessante é realizado em [134]. Neste, são analisados os operadores (5.14) e

$$\mathcal{O}_{\text{ghost}}^i(x) = gf^{abi}\bar{c}^a(x)c^b(x). \quad (5.18)$$

Analogamente ao caso do calibre de Landau, aqui é também possível construir um modelo

multiplicativamente renormalizável, no qual os operadores (5.14) e (5.18) condensam. O operador de ghost contribui com uma massa taquiônica, a ordem de 1-loop, para os glúons não-diagonais. Este efeito é compensado pela massa dinamicamente gerada pela condensação do operador de glúons (5.14) e o resultado final é uma massa positiva para o setor não-diagonal. O setor abeliano da teoria permanece incólume com a presença dos condensados de glúons e ghost. Enquanto a simetria $U(1)^{N-1}$ local (2.29) proíbe a geração de massa para os glúons diagonais, a equação de antighost diagonal (2.23) exclui a possibilidade de uma massa para os ghosts diagonais ². Estes resultados apontam, mais uma vez, para a dominância abeliana na região infravermelha com a conseqüente supressão dos graus de liberdade não-diagonais.

5.3.3 Operadores associados ao modelo de Gribov-Zwanziger

Quando é levado em conta o efeito das cópias de Gribov, ou seja, quando se quer restringir o domínio de integração das integrais de caminho de Feynman àquela região onde as configurações de campos obedecem à condição de calibre e o operador de Faddeev-Popov é positivo, *i. e.*, à região de Gribov, vimos que, tanto no caso de Landau quanto do MAG, faz-se necessário introduzir a chamada função horizonte. Na prática, a função horizonte é um termo não-local que é acrescido à ação de Yang-Mills fixada num certo calibre. É possível então, tratar este termo não-local introduzindo-se um conjunto de campos auxiliares que permitem escrever a função horizonte de forma local. Daí então, surgem os pares de campos $(\phi, \bar{\phi})$ e $(\omega, \bar{\omega})$ que formam os seguintes dubletos de BRST³:

$$\begin{aligned} s\phi &= \omega, & s\bar{\omega} &= \bar{\phi}, \\ s\omega &= 0, & s\bar{\phi} &= 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Posto isso, podemos facilmente verificar que o operador $\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x)$, definido em (5.10), é invariante pelas transformações de BRST (5.19), podendo assim, ser introduzido naturalmente no modelo original de Gribov-Zwanziger. É importante notar que, assim como ocorre com os demais operadores locais, existe uma forte relação entre este operador e o calibre adotado, muito embora o operador seja invariante *off-shell*. Para entender tal conexão, devemos lembrar que o problema das ambigüidades de Gribov está necessariamente associado a um calibre específico⁴, e que estes campos têm justamente o papel de

²A equação de antighost elimina a possibilidade dos operadores mistos $f^{abi}c^b\bar{c}^i$, e $f^{abc}c^b\bar{c}^c$.

³Por simplicidade, estamos omitindo os índices do grupo de cor e os índices de Lorentz.

⁴Não é em vão que se estuda este assunto em diversos calibres distintos [10, 12, 79, 91, 38].

fazer a requerida restrição à região de Gribov, uma vez que é através deles que escrevemos a função horizonte em forma local. Portanto, existe uma ligação intrínseca entre este operador e o calibre escolhido.

O primeiro trabalho no qual se estudou a dinâmica dos campos (5.19) foi [16]. Neste, o operador

$$\mathcal{O}_{ff}^{\text{Landau}}(x) = \bar{\phi}_{\mu}^{AB}(x)\phi_{\mu}^{AB}(x) - \bar{\omega}_{\mu}^{AB}(x)\omega_{\mu}^{AB}(x), \quad (5.20)$$

é incluído na ação de Gribov-Zwanziger no calibre de Landau. A introdução deste termo na ação modifica consideravelmente os propagadores dos glúons e dos ghosts, de tal sorte que estes novos propagadores possuem agora propriedades que se adequam aos resultados mais recentes da rede. No caso do propagador dos glúons essas propriedades são:

- Supressão na região infravermelha;
- Violação da positividade⁵;
- Valor finito, não-nulo, quando $k^2 = 0$.

Para o propagador de ghosts observa-se um comportamento tipo $1/k^2$ em lugar de $1/k^4$, que era previsto no modelo original de Gribov-Zwanziger. Em seguida, foi feito em [135] um estudo profundo deste operador incluindo a prova da renormalizabilidade do modelo, e os efeitos do condensado de glúons (5.11). O propagador dos glúons neste caso é dado por

$$\langle A_{\mu}^A(k)A_{\nu}^B(-k) \rangle = \frac{1}{k^2 + \mathcal{M}^2(k)} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right) \delta^{AB}, \quad (5.21)$$

com

$$\mathcal{M}^2(k) = m^2 + \frac{2Ng^2\gamma^4}{k^2 + M^2}, \quad (5.22)$$

onde M^2 é a massa advinda da condensação do operador (5.20), m^2 à massa devida a condensação do operador de glúons (5.11), γ^4 o parâmetro de Gribov, g a constante de acoplamento da teoria de Yang-Mills, e N a dimensão do grupo de calibre $SU(N)$.

Voltando nossa atenção novamente para o MAG, notamos que o conteúdo de simetria deste calibre permite-nos fazer uma generalização do operador (5.14),

$$\mathcal{O}_{\text{MAG}}(x; \alpha) = \frac{1}{2}A_{\mu}^a(x)A_{\mu}^a(x) + \alpha [\bar{c}^a(x)c^a(x) - (\bar{\phi}_{\mu}^{ab}(x)\phi_{\mu}^{ab}(x) - \bar{\omega}_{\mu}^{ab}(x)\omega_{\mu}^{ab}(x))]. \quad (5.23)$$

⁵Tal propriedade é esperada para objetos confinados, pois isto os exclui do espectro físico da teoria.

No entanto, no limite em que α vai a zero, ou seja, quando retomamos o MAG “real”, o único termo que sobra do operador (5.23) é $\frac{1}{2}A_\mu^a(x)A_\mu^a(x)$. Dessa forma, percebe-se que a análise da condensação do operador (5.23) resume-se tão somente à questão da geração de massa para os glúons não-diagonais. Assim, continua aberta a possibilidade de se investigar, separadamente, o operador

$$\mathcal{O}_{\bar{f}f}^{\text{MAG}}(x) = \bar{\phi}_\mu^{ab}(x)\phi_\mu^{ab}(x) - \bar{\omega}_\mu^{ab}(x)\omega_\mu^{ab}(x) - \bar{c}^a(x)c^a(x). \quad (5.24)$$

No MAG, há uma predileção por este operador em lugar de algo como

$$\bar{\phi}_\mu^{ab}(x)\phi_\mu^{ab}(x) - \bar{\omega}_\mu^{ab}(x)\omega_\mu^{ab}(x)$$

por questões de simetria do modelo [89, 92], como veremos no próximo capítulo.

Ainda no MAG, poder-se-ia pensar, além de (5.24), em um outro operador que é uma generalização do operador de ghosts (5.18),

$$\mathcal{O}_{\bar{f}\times f}^i(x) = gf^{abi}(\bar{\phi}_\mu^{ca}(x)\phi_\mu^{cb}(x) - \bar{\omega}_\mu^{ca}(x)\omega_\mu^{cb}(x) - \bar{c}^a(x)c^b(x)). \quad (5.25)$$

Entretanto, estudos deste operador na ação localizada de Gribov-Zwanziger no MAG em $SU(2)$, juntamente com os demais operadores (5.14) e (5.24), mostram que o propagador dos glúons diagonais seria algo do tipo

$$\langle A_\mu(k)A_\nu(-k) \rangle = \frac{1}{k^2 + \mathcal{M}^2(k)} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (5.26)$$

com

$$\mathcal{M}^2(k) = \frac{4g^2\gamma^4(k^2 + \mu^2)}{(k^2 + \mu^2)^2 + v^4}, \quad (5.27)$$

onde μ^2 é um parâmetro massivo originado a partir da condensação de (5.24) e v^4 um parâmetro que viria da condensação do operador proposto (5.25). É fácil notar que este propagador contém um polinômio de grau seis no seu denominador e, até o presente momento, não existe uma base fenomenológica, ou algum dado numérico da rede, que sustente um propagador deste tipo. Portanto, não vamos mais nos ater a este operador.

5.4 Como introduzir os operadores na teoria

Nesta seção vamos discutir como introduzir os operadores na teoria de maneira que seja possível fazer o estudo da renormalizabilidade do modelo resultante. Para tanto, vamos definir o seguinte dubleto de BRST:

$$s\lambda^N = J^N, \quad sJ^N = 0. \quad (5.28)$$

Aqui, o índice N é um índice genérico que depende da natureza do operador a ser introduzido. Posto isso, vamos supor que se queira analisar um operador local $\mathcal{O}^N(x)$. Então, define-se o seguinte termo

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{O}} &= s \int d^4x (\lambda^N \mathcal{O}^N - \frac{1}{2} \zeta \lambda^N J^N) \\ &= \int d^4x (J^N \mathcal{O}^N + n \lambda^N s \mathcal{O}^N - \frac{1}{2} \zeta J^N J^N), \end{aligned} \quad (5.29)$$

onde n é igual a ± 1 dependendo se a fonte $\lambda^N(x)$ carrega número de ghost par ou ímpar, e o parâmetro adimensional ζ é necessário para dar conta das divergências ultravioletas da função de correlação do vácuo $\langle \mathcal{O}^N(x) \mathcal{O}^{N'}(x') \rangle$. Este parâmetro deve ser fixado pelas equações do grupo de renormalização, de tal forma que, se

$$\zeta \equiv \zeta(g) = \frac{\zeta_0}{g^2} + \zeta_1 + \zeta_2 g^2 + \dots \quad (5.30)$$

então a ação quântica⁶ obedece a uma equação homogênea do grupo de renormalização.

Seja então S_0 a ação de partida e

$$S = S_0 + S_{\mathcal{O}}, \quad (5.31)$$

a ação de que se pretende mostrar a renormalizabilidade na presença do operador $\mathcal{O}^N(x)$. A variação de S com relação à fonte $\lambda^N(x)$ é proporcional à transformação de BRST do operador $\mathcal{O}^N(x)$, *i. e.*,

$$\frac{\delta S}{\delta \lambda^N} = n s \mathcal{O}^N. \quad (5.32)$$

Estando o operador $\mathcal{O}^N(x)$ inserido num modelo no qual ele apresente uma invariância pelas transformações de BRST, *on-shell* pelo menos, então a variação da fonte $\lambda^N(x)$ dará origem a uma identidade de Ward que irá controlar o operador, garantindo sua renormalizabilidade.

Consideremos, por exemplo, o operador de glúons (5.11) a ser inserido na ação de Yang-Mills no calibre de Landau, que fará o papel de S_0 . Neste caso, o operador será introduzido através do termo

$$S_{A^2} = \int d^4x \left(\frac{1}{2} J A_{\mu}^A A_{\mu}^A + \lambda A_{\mu}^A \partial_{\mu} c^A - \frac{1}{2} \zeta J^2 \right), \quad (5.33)$$

⁶A ação quântica, ou ação efetiva, é definida como

$$\Gamma := S_{\text{class}} + \epsilon S^{(1)} + \epsilon^2 S^{(2)} + \epsilon^3 S^{(3)} + \dots,$$

onde S_{class} é a ação clássica, ϵ é o parâmetro de expansão, considerado pequeno, e $S^{(n)}$ são as correções quânticas de ordem n . Essas correções representam o chamado contratermo que deve ser reabsorvido pelos campos e parâmetros da teoria pelo processo de renormalização multiplicativa.

e a variação com relação a $\lambda(x)$ dá, quando integrada, a seguinte identidade

$$\int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta \lambda} + c^A \frac{\delta S}{\delta b^A} \right) = 0, \quad (5.34)$$

onde S é dado por

$$S = S_{\text{YM}} + S_{\text{Landau}} + S_{A^2}. \quad (5.35)$$

Voltando ao caso geral de um operador de dimensão dois arbitrário $\mathcal{O}^N(x)$, vamos supor que a ação (5.31) seja renormalizável. O problema agora é verificar se o operador condensa. Para isso, devemos calcular o potencial efetivo associado ao operador $\mathcal{O}^N(x)$. Tomando todas as possíveis fontes para zero exceto $J^N(x)$, definimos o funcional gerador $\mathcal{W}[J]$ através da seguinte expressão

$$e^{-\mathcal{W}[J]} := \int [d\Phi] e^{-S_0 - \int d^4x (J^N \mathcal{O}^N - \frac{1}{2} \zeta J^N J^N)}, \quad (5.36)$$

onde Φ denota os campos relevantes. Tomando a derivada funcional de $\mathcal{W}[J]$ com relação a $J^N(x)$ e depois tomando $J^N = 0$ temos

$$\left. \frac{\delta \mathcal{W}[J]}{\delta J^N} \right|_{J=0} = -\langle \mathcal{O}^N \rangle. \quad (5.37)$$

A presença de $J^N J^N$ destrói a interpretação de energia. Porém, podemos lidar com isto introduzindo os campos de Hubbard-Stratonovich $\sigma^N(x)$. Seja então a unidade convenientemente escrita como

$$1 = \mathcal{N} \int [d\sigma] e^{-\frac{1}{2\zeta} \int d^4x (\frac{\sigma^N}{g} + \mathcal{O}^N - \zeta J^N)(\frac{\sigma^N}{g} + \mathcal{O}^N - \zeta J^N)}, \quad (5.38)$$

onde \mathcal{N} é um fator de normalização. Inserindo esta última em (5.36) ficamos com

$$e^{-\mathcal{W}[J]} = \int [d\Phi][d\sigma] e^{-S_\sigma + \int d^4x \frac{\sigma^N}{g} J^N}, \quad (5.39)$$

sendo

$$S_\sigma = S_0 + \int d^4x \left(\frac{\sigma^N \sigma^N}{2g^2 \zeta} + \frac{\sigma^N}{g \zeta} \mathcal{O}^N + \frac{1}{2\zeta} \mathcal{O}^N \mathcal{O}^N \right). \quad (5.40)$$

Com esta nova forma de escrever o funcional gerador $\mathcal{W}[J]$ chegamos à seguinte relação:

$$\langle \mathcal{O}^N \rangle = -\frac{1}{g} \langle \sigma^N \rangle. \quad (5.41)$$

Portanto, o condensado $\langle \mathcal{O}^N \rangle$ está diretamente relacionado com o valor esperado do campo $\sigma^N(x)$. Da ação S_σ , infere-se que é suficiente que $\langle \sigma^N \rangle \neq 0$ para ter uma massa, dinamicamente gerada, ao nível árvore,

$$m = \sqrt{\frac{g |\langle \sigma^N \rangle|}{\zeta_0}}, \quad (5.42)$$

onde ζ_0 se relaciona com ζ , à ordem mais baixa, pela expressão

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{g^2}. \quad (5.43)$$

A ação quântica é então definida através de uma transformada de Legendre

$$\Gamma[\sigma] = \mathcal{W}[J] - \int d^4x J^N \sigma^N, \quad (5.44)$$

donde extrai-se que

$$\frac{\delta\Gamma[\sigma]}{\delta\sigma^N(x)} = -J^N(x). \quad (5.45)$$

Para uma configuração constante, digamos σ_*^N , o potencial efetivo $V(\sigma)$ define-se de acordo com

$$\Gamma[\sigma_*] = -V(\sigma_*) \int d^4x. \quad (5.46)$$

Logo,

$$\frac{dV(\sigma_*)}{d\sigma_*} = J^N. \quad (5.47)$$

Em particular, se tomarmos $J^N = 0$, σ_*^N tem o significado de valor esperado no vácuo do campo $\sigma^N(x)$. Assim, uma solução não trivial, *i. e.*, $\sigma_*^N \neq 0$, de

$$\frac{dV(\sigma_*)}{d\sigma_*} = 0 \quad (5.48)$$

indica um valor esperado não-nulo para $\mathcal{O}^N(x)$, ou seja, o operador condensa.

CAPÍTULO 6

RENORMALIZAÇÃO

Neste capítulo, iremos verificar a renormalizabilidade da ação de Yang-Mills em $SU(2)$ fixada no MAG, levando-se em conta a requerida restrição à região de Gribov, da maneira proposta por Zwanziger e desenvolvida no capítulo 4 para o caso do MAG, e na presença de operadores locais de dimensão dois, apropriadamente selecionados.

6.1 Identificação da ação clássica completa

O ponto de partida será a ação (4.46), que passaremos a chamar de agora em diante de Σ_0 . Esta ação nada mais é que a teoria de Yang-Mills no MAG em $SU(2)$, acrescida de um termo dependente de fontes externas, que reduz-se à função horizonte de Zwanziger em sua versão localizada, quando as fontes assumem seus valores físicos (4.36). Portanto, no limite físico, este termo será o responsável pela restrição do espaço funcional à região de Gribov. Ademais, em decorrência da não-linearidade do MAG, acrescenta-se ainda termos extras de interação, proporcionais a um único parâmetro de calibre α , que, ao final, deve ser tomado para zero. Explicitamente, a ação Σ_0 escreve-se como

$$\begin{aligned}
\Sigma_0 = & S_{\text{YM}} + \int d^4x \left[(ib^a - g\varepsilon^{ab}\bar{c}^a c) D_\mu^{ab} A_\mu^b - \bar{c}^a \mathcal{M}^{ab} c^b + ib \partial_\mu A_\mu + \bar{c} \partial_\mu (\partial_\mu c + g\varepsilon^{ab} A_\mu^a c^b) \right] \\
& + \int d^4x \left\{ \bar{\phi}_i^a \mathcal{M}^{ab} \phi_i^b - \bar{\omega}_i^a \mathcal{M}^{ab} \omega_i^b + \bar{\omega}_i^a \mathcal{F}^{ab} \phi_i^b + \bar{M}_{\mu i}^a D_\mu^{ab} \phi_i^b + N_{\mu i}^a D_\mu^{ab} \bar{\omega}_i^b \right. \\
& + \bar{N}_{\mu i}^a [D_\mu^{ab} \omega_i^b + g\varepsilon^{ab} (\partial_\mu c + g\varepsilon^{cd} A_\mu^c c^d) \phi_i^b] + M_{\mu i}^a [D_\mu^{ab} \bar{\phi}_i^b + g\varepsilon^{ab} (\partial_\mu c + g\varepsilon^{cd} A_\mu^c c^d) \bar{\omega}_i^b] \left. \right\} \\
& + \frac{\alpha}{2} \int d^4x \left[b^a b^a + 2ig\varepsilon^{ab} b^a \bar{c}^b c - g^2 (\bar{\phi}_i^a \phi_i^a - \bar{\omega}_i^a \omega_i^a - \bar{c}^a c^a) (\bar{\phi}_j^b \phi_j^b - \bar{\omega}_j^b \omega_j^b - \bar{c}^b c^b) \right. \\
& \left. - 2ig^2 \bar{\omega}_i^a \phi_i^a b^b c^b + 2g^3 \bar{\omega}_i^a \phi_i^a \varepsilon^{bc} \bar{c}^b c^c \right], \tag{6.1}
\end{aligned}$$

lembrando que S_{YM} é o termo de Yang-Mills (3.9), D_μ^{ab} a derivada covariante com relação à componente abeliana (3.8), \mathcal{M}^{ab} o operador de Faddeev-Popov no MAG em $SU(2)$ (3.20), \mathcal{F}^{ab} um operador definido por (4.27), e $i \equiv \{a, \mu\} = 1, \dots, 8$ um multi-índice.

6.1.1 Introduzindo fontes externas

Tendo em vista que é preciso escrever as simetrias do modelo sob a forma de identidades funcionais compatíveis com o princípio de ação quântica, ou seja, como identidades de Ward, para que se possam aplicar os métodos algébricos de renormalização [56], deveríamos introduzir um conjunto de fontes externas acopladas às transformações de BRST não-lineares,

$$\begin{aligned} sA_\mu^a &= -(D_\mu^{ab}c^b + g\varepsilon^{ab}A_\mu^b c), & sA_\mu &= -(\partial_\mu c + g\varepsilon^{ab}A_\mu^a c^b), \\ sc^a &= g\varepsilon^{ab}c^b c, & sc &= \frac{g}{2}\varepsilon^{ab}c^a c^b. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Antes porém, temos que fazer uma pequena observação. Não é difícil notar que a transformação de BRST das componentes não-diagonais $A_\mu^a(x)$ do campo de calibre pode ser decomposta em duas partes não-lineares distintas, a saber,

$$sA_\mu^a = \mathcal{P}_\mu^a + \mathcal{Q}_\mu^a, \quad (6.3)$$

com

$$\mathcal{P}_\mu^a = -D_\mu^{ab}c^b, \quad \mathcal{Q}_\mu^a = -g\varepsilon^{ab}A_\mu^b c. \quad (6.4)$$

Graças à propriedade de nilpotência do operador de BRST, *i. e.*, $s^2 = 0$, segue que

$$s\mathcal{P}_\mu^a = -s\mathcal{Q}_\mu^a. \quad (6.5)$$

Estes dois operadores podem então, ser definidos dentro da teoria através de um conjunto de fontes externas $(\Omega_\mu^a, K_\mu^a, \xi_\mu^a)$, da seguinte maneira

$$\Sigma_{\text{ext}}^{(1)} = \int d^4x \left[\Omega_\mu^a (-D_\mu^{ab}c^b) + K_\mu^a (-g\varepsilon^{ab}A_\mu^b c) + \xi_\mu^a s(-g\varepsilon^{ab}A_\mu^b c) \right]. \quad (6.6)$$

Para garantir a invariância de BRST de $\Sigma_{\text{ext}}^{(1)}$ requeremos que

$$s\xi_\mu^a = -(\Omega_\mu^a - K_\mu^a), \quad s\Omega_\mu^a = sK_\mu^a = 0. \quad (6.7)$$

As demais transformações não-lineares podem ser acomodadas na teoria de através fontes externas $\Omega_\mu(x)$, $L^a(x)$ e $L(x)$ de acordo com

$$\Sigma_{\text{ext}}^{(2)} = \int d^4x \left[-\Omega_\mu (\partial_\mu c + g\varepsilon^{ab}A_\mu^a c^b) + g\varepsilon^{ab}L^a c^b c + \frac{g}{2}\varepsilon^{ab}L c^a c^b \right], \quad (6.8)$$

onde requeremos que

$$s\Omega_\mu = 0, \quad sL^a = 0, \quad sL = 0. \quad (6.9)$$

Vamos então definir uma ação Σ_1 composta de Σ_0 , $\Sigma_{\text{ext}}^{(1)}$ e $\Sigma_{\text{ext}}^{(2)}$, ou seja,

$$\Sigma_1 = \Sigma_0 + \Sigma_{\text{ext}}^{(1)} + \Sigma_{\text{ext}}^{(2)}. \quad (6.10)$$

Além da simetria de BRST, esta ação é invariante pelas transformações abaixo:

— SIMETRIA δ_i —

$$\delta_i \bar{c}^a = \phi_i^a, \quad \delta_i \bar{\phi}_j^a = \delta_{ij} c^a, \quad \delta_i b^a = -ig \varepsilon^{ab} \phi_i^b c, \quad \delta_i \Omega_\mu^a = M_i^a; \quad (6.11)$$

— SIMETRIA $\bar{\delta}_i$ —

$$\bar{\delta}_i \bar{c}^a = \bar{\omega}_i^a, \quad \bar{\delta}_i \omega_j^a = -\delta_{ij} c^a, \quad \bar{\delta}_i b^a = -ig \varepsilon^{ab} \bar{\omega}_i^b c, \quad \bar{\delta}_i \Omega_\mu^a = -\bar{N}_i^a; \quad (6.12)$$

— SIMETRIA d_i —

$$\begin{aligned} d_i \bar{c}^a &= \omega_i^a + g \varepsilon^{ab} \phi_i^b c, & d_i \bar{\phi}_j^a &= \delta_{ij} g \varepsilon^{ab} c^b c, & d_i \bar{\omega}_j^a &= \delta_{ij} c^a, & d_i \xi_\mu^a &= -M_i^a, \\ d_i b^a &= -i \left(g \varepsilon^{ab} \omega_i^b c + \frac{g^2}{2} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} \phi_i^b c^c c^d \right), & d_i \Omega_\mu^a &= N_{\mu i}^a; \end{aligned} \quad (6.13)$$

— SIMETRIA \bar{d}_i —

$$\begin{aligned} \bar{d}_i \bar{c}^a &= -\bar{\phi}_i^a + g \varepsilon^{ab} \bar{\omega}_i^b c, & \bar{d}_i \omega_j^a &= \delta_{ij} g \varepsilon^{ab} c^b c, & \bar{d}_i \phi_j^a &= -\delta_{ij} c^a, & \bar{d}_i \xi_\mu^a &= \bar{N}_i^a, \\ \bar{d}_i b^a &= i \left(g \varepsilon^{ab} \bar{\phi}_i^b c - \frac{g^2}{2} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} \bar{\omega}_i^b c^c c^d \right), & \bar{d}_i \Omega_\mu^a &= -\bar{M}_{\mu i}^a. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Os operadores δ_i , $\bar{\delta}_i$, d_i , \bar{d}_i estão interligados através de relações de comutação e anticomutação com o operador de BRST,

$$\{\delta_i, s\} = d_i, \quad [\bar{\delta}_i, s] = \bar{d}_i. \quad (6.15)$$

Também é interessante notar como estas simetrias literalmente misturam os setores de fixação de calibre e de restrição do espaço funcional. Contudo, como as transformações (6.11 – 6.14) contêm diversos operadores compostos, precisamos defini-los via fontes externas. Consideremos então, os dubletos

$$\begin{aligned} sY_i^a &= X_i^a, & sX_i^a &= 0, \\ s\bar{X}_i^a &= -\bar{Y}_i^a, & s\bar{Y}_i^a &= 0, \end{aligned} \quad (6.16)$$

e escrevamos o seguinte:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{ext}}^{(3)} &= -s \int d^4x g \varepsilon^{ab} \left(\bar{X}_i^a \phi_i^b c - Y_i^a \bar{\omega}_i^b c \right) \\ &= \int d^4x \left[g \varepsilon^{ab} \bar{Y}_i^a \phi_i^b c - \bar{X}_i^a \left(g \varepsilon^{ab} \omega_i^b c + \frac{g^2}{2} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} \phi_i^b c^c c^d \right) \right. \\ &\quad \left. + g \varepsilon^{ab} X_i^a \bar{\omega}_i^b c - Y_i^a \left(g \varepsilon^{ab} \bar{\phi}_i^b c - \frac{g^2}{2} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} \bar{\omega}_i^b c^c c^d \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

	Ω	K	ξ	L	Y	\bar{Y}	X	\bar{X}
dimensão	3	3	3	4	3	3	3	3
número de ghost	-1	-1	-2	-2	-1	-1	0	-2
carga- \mathcal{Q}_8	0	0	0	0	1	-1	1	-1

Tabela 6.1: Números quânticos das fontes externas.

Logo, o termo de fontes externas mais geral que podemos adicionar a Σ_0 , preservando o conteúdo de simetria, é

$$\Sigma_{\text{ext}} = \Sigma_{\text{ext}}^{(1)} + \Sigma_{\text{ext}}^{(2)} + \Sigma_{\text{ext}}^{(3)} + \chi \int d^4x \left(\bar{M}_{\mu i}^a M_{\mu i}^a + \bar{N}_{\mu i}^a N_{\mu i}^a \right), \quad (6.18)$$

no qual o último termo, que pode ser escrito como uma variação exata de BRST

$$\chi \int d^4x \left(\bar{M}_{\mu i}^a M_{\mu i}^a + \bar{N}_{\mu i}^a N_{\mu i}^a \right) = -\chi s \int d^4x \bar{N}_{\mu i}^a M_{\mu i}^a, \quad (6.19)$$

é permitido por contagem de potências e precisa ser colocado em razão da renormalizabilidade. Ainda, o parâmetro χ aparece como um coeficiente livre¹. Para estender as simetrias (6.11 – 6.14) ao termo $\Sigma_{\text{ext}}^{(3)}$, é suficiente estender essas transformações à fonte $L^a(x)$, tal como segue

$$\delta_i L^a = -Y_i^a, \quad \bar{\delta}_i L^a = -\bar{X}_i^a, \quad d_i L^a = -X_i^a, \quad \bar{d}_i L^a = -\bar{Y}_i^a. \quad (6.20)$$

Assim, a ação definida como

$$\Sigma_2 = \Sigma_0 + \Sigma_{\text{ext}}, \quad (6.21)$$

apresenta um vasto conteúdo de simetria o que será, como veremos nas próximas seções, fundamental para que o modelo seja renormalizável. Os números quânticos, ou seja, a dimensão, o número de ghost e a carga- \mathcal{Q}_8 das fontes introduzidas nessa seção dispõem-se na tabela 6.1, enquanto que na tabela 4.1 encontram-se os números quânticos dos demais campos e fontes da teoria.

6.1.2 Introduzindo operadores de dimensão dois

O próximo passo em direção à ação clássica completa que estamos procurando é a introdução dos operadores locais de dimensão dois. Aqui iremos introduzir três tipos de

¹Este termo dá origem a “ $8\chi V\gamma^4$ ”, que aparece em (3.94) a menos do parâmetro χ , no limite físicos das fontes (4.36). Quanto ao parâmetro χ , esperamos determiná-lo por uma equação de *gap* e com isso mostrar que $\chi = 1 + O(\epsilon)$ [145], a exemplo do que ocorre no Landau, onde este parâmetro é exatamente igual a (+1) [15].

operadores. O primeiro deles é o operador de glúons não-diagonais

$$\mathcal{O}_{A^2}(x) = \frac{1}{2} A_\mu^a(x) A_\mu^a(x). \quad (6.22)$$

A maneira de se introduzir este operador na teoria é aquela descrita no capítulo anterior, ou seja, primeiro, vamos definir o dubleto de fontes

$$s\lambda = J, \quad sJ = 0, \quad (6.23)$$

e em seguida vamos introduzir o operador \mathcal{O}_{A^2} através do termo

$$\Sigma_{A^2} = s \int d^4x \lambda \left(\mathcal{O}_{A^2} - \frac{1}{2} \zeta J \right) = \int d^4x \left(J \mathcal{O}_{A^2} - \frac{1}{2} \zeta J^2 + \lambda A_\mu^a D_\mu^{ab} c^b \right), \quad (6.24)$$

onde ζ é um parâmetro constante necessário para dar conta das divergências ultravioletas advindas da função de correlação do vácuo

$$\langle (A_\mu^a(x) A_\mu^a(x)) (A_\nu^b(y) A_\nu^b(y)) \rangle.$$

De forma inteiramente análoga, introduzimos o operador

$$\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x) = \bar{\phi}_i^a(x) \phi_i^a(x) - \bar{\omega}_i^a(x) \omega_i^a(x) - \bar{c}^a(x) c^a(x), \quad (6.25)$$

que tem a propriedade de ser invariante pela atuação de δ_i , $\bar{\delta}_i$, d_i e \bar{d}_i , *i. e.*,

$$\delta_i \mathcal{O}_{\bar{f}f} = \bar{\delta}_i \mathcal{O}_{\bar{f}f} = d_i \mathcal{O}_{\bar{f}f} = \bar{d}_i \mathcal{O}_{\bar{f}f} = 0. \quad (6.26)$$

Desta vez, definimos o par de fontes

$$s\tau = \sigma, \quad s\sigma = 0 \quad (6.27)$$

e o termo

$$\Sigma_{\bar{f}f} = s \int d^4x \tau \left(\mathcal{O}_{\bar{f}f} - \frac{1}{2} \kappa \sigma + \rho J \right) = \int d^4x \left(\sigma \mathcal{O}_{\bar{f}f} - \frac{1}{2} \kappa \sigma^2 + \rho \sigma J - \tau s \mathcal{O}_{\bar{f}f} \right), \quad (6.28)$$

onde κ e ρ são parâmetros constantes necessários para fins de renormalização. Note-se que a expressão (6.28) contém o termo misto σJ . Este termo, permitido por contagem de potências, dá conta de divergências ultravioletas das funções de correlação do vácuo mistas

$$\langle (A_\mu^a(x) A_\mu^a(x)) (\bar{\phi}_i^b(y) \phi_i^b(y) - \bar{\omega}_i^b(y) \omega_i^b(y) - \bar{c}^b(y) c^b(y)) \rangle.$$

Cabe ainda comentar que os operadores $\mathcal{O}_{A^2}(x)$ e $\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x)$, quando combinados de acordo com

$$\mathcal{O}(x; \alpha) = \mathcal{O}_{A^2}(x) - \alpha \mathcal{O}_{\bar{f}f}(x),$$

rendem um operador invariante *on-shell*. Isto significa que as equações de movimento das fontes $\lambda(x)$ e $\tau(x)$ devem se combinar para gerar uma identidade de Ward que irá controlar a inserção dos operadores $\mathcal{O}_{A^2}(x)$ e $\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x)$.

Finalmente, a introdução de um terceiro dubleto de fontes externas

$$s\eta = \theta, \quad s\theta = 0, \quad (6.29)$$

permite-nos definir o operador de ghost

$$\mathcal{O}_{\bar{c}xc}(x) = g\varepsilon^{ab}\bar{c}^a(x)c^b(x), \quad (6.30)$$

ao escrevermos o seguinte termo

$$\Sigma_{\bar{c}xc} = s \int d^4x \eta \left(\mathcal{O}_{\bar{c}xc} - \frac{1}{2}\beta\theta \right) = \int d^4x \left(\theta \mathcal{O}_{\bar{c}xc} - \frac{1}{2}\beta\theta^2 - \eta s \mathcal{O}_{\bar{c}xc} \right), \quad (6.31)$$

sendo β um parâmetro constante que faz-se necessário devido às divergências da função de correlação

$$\langle (\varepsilon^{ab}\bar{c}^a(x)c^b(x))(\varepsilon^{mn}\bar{c}^m(y)c^n(y)) \rangle.$$

Note-se, no entanto, que o operador de ghosts $\mathcal{O}_{\bar{c}xc}(x)$ quebra as simetrias (6.11 – 6.14). Portanto, para manter o conteúdo de simetria da teoria é preciso introduzir mais dois dubletos de BRST de fontes externas,

$$\begin{aligned} s\eta_i &= -\theta_i, & s\theta_i &= 0, \\ s\bar{\eta}_i &= \bar{\eta}_i, & s\bar{\theta}_i &= 0, \end{aligned} \quad (6.32)$$

e definir um termo extra dado por

$$\begin{aligned} S_{\text{extra}} &= s \int d^4x g\varepsilon^{ab} \left(\bar{\theta}_i \phi_i^a c^b - \eta_i \bar{\omega}_i^a c^b \right) \\ &= \int d^4x \left[g\varepsilon^{ab} \left(\bar{\eta}_i \phi_i^a c^b + \eta_i \bar{\phi}_i^a c^b + \bar{\theta}_i \omega_i^a c^b + \theta_i \bar{\omega}_i^a c^b \right) - g^2 \bar{\theta}_i \phi_i^a c^a c + g^2 \eta_i \bar{\omega}_i^a c^a c \right]. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Com isso, as simetrias (6.11 – 6.14) estarão garantidas se acrescentarmos o seguinte:

$$\begin{aligned} \delta_i L &= 2\eta_i, & \bar{\delta}_i L &= 2\bar{\theta}_i, & d_i L &= -2\theta_i, & \bar{d}_i L &= -2\bar{\eta}_i, \\ \delta_i \bar{\eta}_j &= -\delta_{ij} \theta, & \bar{\delta}_i \theta_j &= -\delta_{ij} \theta, & d_i \bar{\theta}_j &= -\delta_{ij} \theta, & \bar{d}_i \eta_j &= \delta_{ij} \theta. \end{aligned} \quad (6.34)$$

	λ	τ	J	σ	η	θ	η_i	$\bar{\eta}_i$	θ_i	$\bar{\theta}_i$
dimensão	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
número de ghost	-1	-1	0	0	-1	0	-1	-1	0	-2
carga- \mathcal{Q}_8	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1

Tabela 6.2: Números quânticos das fontes externas.

Vemos então que para introduzir estes três operadores na teoria é preciso definir uma série de dubletos de BRST de fontes externas. Os números quânticos dessas fontes encontra-se na tabela 6.2.

6.1.3 Ação clássica completa

De acordo com o que foi colocado até aqui, podemos identificar a ação clássica completa coletando os termos de fontes externas que definem as transformações não-locais e os termos que introduzem os operadores de dimensão dois e agregando tudo isto a ação de partida (6.1). Assim, a ação Σ dada por

$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_{\text{ext}} + \Sigma_{A^2} + \Sigma_{\bar{f}f} + \Sigma_{\bar{c} \times c} + \Sigma_{\text{extra}}, \quad (6.35)$$

é a ação completa que reúne todos os efeitos discutidos ao longo desta tese representando, portanto, o modelo que vínhamos buscando e ao qual iremos nos concentrar daqui para frente, a começar pela demonstração algébrica de sua renormalizabilidade. Explicitamente, a ação Σ escreve-se como

$$\begin{aligned} \Sigma &= S_{\text{YM}} + s \int d^4x \left(\bar{c}^a D_\mu^{ab} A_\mu^b + \bar{c} \partial_\mu A_\mu + \bar{\omega}_i^a \mathcal{M}^{ab} \phi_i^b - \bar{N}_{\mu i}^a D_\mu^{ab} \phi_i^b + M_{\mu i}^a D_\mu^{ab} \bar{\omega}_i^b \right. \\ &\quad \left. - g \varepsilon^{ab} \bar{X}_i^a \phi_i^b c + g \varepsilon^{ab} Y_i^a \bar{\omega}_i^b c - \Omega_\mu^a A_\mu^a - g \varepsilon^{ab} \xi_\mu^a A_\mu^b c - \Omega_\mu A_\mu + L^a c^a + Lc - \chi \bar{N}_{\mu i}^a M_{\mu i}^a \right) \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} s \int d^4x \left[\bar{c}^a i b^a - g \varepsilon^{ab} \bar{c}^a \bar{c}^b c + g^2 \bar{\omega}_i^a \phi_i^a (\bar{\phi}_j^b \phi_j^b - \bar{\omega}_j^b \omega_j^b) - 2g^2 \bar{\omega}_i^a \phi_i^a \bar{c}^b c^b \right] \\ &\quad + s \int d^4x \lambda \left(\frac{1}{2} A_\mu^a A_\mu^a - \frac{1}{2} \zeta J \right) + s \int d^4x \tau \left[(\bar{\phi}_i^a \phi_i^a - \bar{\omega}_i^a \omega_i^a - \bar{c}^a c^a) - \frac{1}{2} \kappa \sigma + \rho J \right] \\ &\quad + s \int d^4x \left[g \varepsilon^{ab} (\eta \bar{c}^a c^b + \bar{\theta}_i \phi_i^a c^b - \eta_i \bar{\omega}_i^a c^b) - \frac{1}{2} \beta \eta \theta \right] \\ &= S_{\text{YM}} + \int d^4x \left\{ i b^a D_\mu^{ab} A_\mu^b - \bar{c}^a \mathcal{M}^{ab} c^b + g \varepsilon^{ab} \bar{c}^a (D_\mu^{bc} A_\mu^c) c + i b \partial_\mu A_\mu + \bar{c} \partial_\mu (\partial_\mu c + g \varepsilon^{ab} A_\mu^a c^b) \right. \\ &\quad + \bar{\phi}_i^a \mathcal{M}^{ab} \phi_i^b - \bar{\omega}_i^a \mathcal{M}^{ab} \omega_i^b + \bar{\omega}_i^a \mathcal{F}^{ab} \phi_i^b + \bar{M}_{\mu i}^a D_\mu^{ab} \phi_i^b + \bar{N}_{\mu i}^a [D_\mu^{ab} \omega_i^b + g \varepsilon^{ab} (\partial_\mu c + g \varepsilon^{cd} A_\mu^c c^d) \phi_i^b] \\ &\quad + N_{\mu i}^a D_\mu^{ab} \bar{\omega}_i^b + M_{\mu i}^a [D_\mu^{ab} \bar{\phi}_i^b + g \varepsilon^{ab} (\partial_\mu c + g \varepsilon^{cd} A_\mu^c c^d) \bar{\omega}_i^b] - \Omega_\mu^a D_\mu^{ab} c^b - g \varepsilon^{ab} K_\mu^a A_\mu^b c \\ &\quad + \xi_\mu^a \left[g \varepsilon^{ab} (D_\mu^{bc} c^c) c - \frac{g^2}{2} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} A_\mu^b c^c c^d \right] - \Omega_\mu (\partial_\mu c + g \varepsilon^{ab} A_\mu^a c^b) + g \varepsilon^{ab} L^a c^b c + \frac{g}{2} \varepsilon^{ab} L c^a c^b \\ &\quad + g \varepsilon^{ab} \bar{Y}_i^a \phi_i^b c - \bar{X}_i^a \left[g \varepsilon^{ab} \omega_i^b c + \frac{g^2}{2} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} \phi_i^b c^c c^d \right] + g \varepsilon^{ab} X_i^a \bar{\omega}_i^b c - Y_i^a \left[g \varepsilon^{ab} \bar{\phi}_i^b c - \frac{g^2}{2} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} \bar{\omega}_i^b c^c c^d \right] \\ &\quad \left. + \chi (\bar{M}_{\mu i}^a M_{\mu i}^a + \bar{N}_{\mu i}^a N_{\mu i}^a) + \frac{\alpha}{2} [b^a b^a + 2i g \varepsilon^{ab} b^a \bar{c}^b c - g^2 (\bar{\phi}_i^a \phi_i^a - \bar{\omega}_i^a \omega_i^a - \bar{c}^a c^a) (\bar{\phi}_j^b \phi_j^b - \bar{\omega}_j^b \omega_j^b - \bar{c}^b c^b) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2ig^2\bar{\omega}_i^a\phi_i^a b^b c^b + 2g^3\bar{\omega}_i^a\phi_i^a \varepsilon^{bc}c^b c^c] + \frac{1}{2}J A_\mu^a A_\mu^a + \lambda A_\mu^a D_\mu^{ab} c^b + \sigma(\bar{\phi}_i^a\phi_i^a - \bar{\omega}_i^a\omega_i^a - \bar{c}^a c^a) \\
& + \tau(ib^a c^a - g\varepsilon^{ab}\bar{c}^a c^b c) - \frac{\zeta}{2}J^2 + \rho J\sigma - \frac{\kappa}{2}\sigma^2 + g\varepsilon^{ab}(\theta\bar{c}^a c^b + \bar{\eta}_i\phi_i^a c^b + \eta_i\bar{\phi}_i^a c^b + \bar{\theta}_i\omega_i^a c^b + \theta_i\bar{\omega}_i^a c^b) \\
& - ig\varepsilon^{ab}\eta b^a c^b - g^2\eta\bar{c}^a c^a c - g^2\bar{\theta}_i\phi_i^a c^a c + g^2\eta_i\bar{\omega}_i^a c^a c - \frac{\beta}{2}\theta^2\}. \tag{6.36}
\end{aligned}$$

6.2 Identidades de Ward

Nesta seção, vamos coletar o conjunto de identidades de Ward que a ação (6.36) nos permite escrever. Simetrias importantes como, por exemplo, a de BRST, ganharão a forma de identidades funcionais que sobrevivem ao processo de quantização. Equações de movimento que contenham apenas quebras lineares nos campos também farão parte deste conjunto de identidades.

- Identidade de Slavnov-Taylor:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\Sigma) \equiv & \int d^4x \left[\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega_\mu^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta K_\mu^a} \right) \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega_\mu} \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta L} \frac{\delta\Sigma}{\delta c} \right. \\
& + ib^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} + ib \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} + \omega_i^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi_i^a} + \bar{\phi}_i^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\omega}_i^a} + N_{\mu i}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta M_{\mu i}^a} - \bar{M}_{\mu i}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{N}_{\mu i}^a} \\
& - (\Omega_\mu^a - K_\mu^a) \frac{\delta\Sigma}{\delta\xi_\mu^a} - \bar{Y}_i^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{X}_i^a} + X_i^a \frac{\delta\Sigma}{\delta Y_i^a} + J \frac{\delta\Sigma}{\delta\lambda} + \sigma \frac{\delta\Sigma}{\delta\tau} + \theta \frac{\delta\Sigma}{\delta\eta} \\
& \left. - \theta_i \frac{\delta\Sigma}{\delta\eta_i} + \bar{\eta}_i \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\theta}_i} \right] = 0. \tag{6.37}
\end{aligned}$$

Esta identidade é exatamente a simetria de BRST na forma funcional.

- Identidades- $\mathcal{W}_i^{(N)}$ globais:

$$\mathcal{W}_i^{(N)}(\Sigma) = 0, \quad (N = 1, 2, 3, 4), \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_i^{(1)}(\Sigma) & \equiv \int d^4x \left(\phi_i^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} + c^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\phi}_i^a} + M_{\mu i}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega_\mu^a} - Y_i^a \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} - i \frac{\delta\Sigma}{\delta Y_i^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} - \theta \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\eta}_i} + 2\eta_i \frac{\delta\Sigma}{\delta L} \right), \\
\mathcal{W}_i^{(2)}(\Sigma) & \equiv \int d^4x \left(\bar{\omega}_i^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} - c^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\omega}_i^a} - \bar{N}_{\mu i}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega_\mu^a} - \bar{X}_i^a \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} - i \frac{\delta\Sigma}{\delta X_i^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} - \theta \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\theta}_i} + 2\bar{\theta}_i \frac{\delta\Sigma}{\delta L} \right), \\
\mathcal{W}_i^{(3)}(\Sigma) & \equiv \int d^4x \left[\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta Y_i^a} + \omega_i^a \right) \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} + i \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{X}_i^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\phi}_i^a} - X_i^a \right) \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} + c^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\omega}_i^a} \right. \\
& \left. - M_{\mu i}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\xi_\mu^a} + N_{\mu i}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega_\mu^a} - \theta \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\theta}_i} - 2\theta_i \frac{\delta\Sigma}{\delta L} \right], \\
\mathcal{W}_i^{(4)}(\Sigma) & \equiv \int d^4x \left[\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta X_i^a} - \bar{\phi}_i^a \right) \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} - i \frac{\delta\Sigma}{\delta Y_i^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} + \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\omega}_i^a} - \bar{Y}_i^a \right) \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} - c^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\phi}_i^a} \right. \\
& \left. + \bar{N}_{\mu i}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\xi_\mu^a} - \bar{M}_{\mu i}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega_\mu^a} + \theta \frac{\delta\Sigma}{\delta\eta_i} - 2\bar{\eta}_i \frac{\delta\Sigma}{\delta L} \right]. \tag{6.39}
\end{aligned}$$

Estas identidades correspondem às simetrias δ_i , $\bar{\delta}_i$, d_i , e \bar{d}_i .

- Invariância $U(8)$ global:

$$\mathcal{Q}_{ij}(\Sigma) = 0, \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{ij} = \int d^4x \left(\phi_i^a \frac{\delta}{\delta \phi_j^a} - \bar{\phi}_j^a \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}_i^a} + \omega_i^a \frac{\delta}{\delta \omega_j^a} - \bar{\omega}_j^a \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_i^a} + M_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta M_{\mu j}^a} - \bar{M}_{\mu j}^a \frac{\delta}{\delta \bar{M}_{\mu i}^a} \right. \\ \left. + N_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta N_{\mu j}^a} - \bar{N}_{\mu j}^a \frac{\delta}{\delta \bar{N}_{\mu i}^a} + Y_i^a \frac{\delta}{\delta Y_j^a} - \bar{Y}_j^a \frac{\delta}{\delta \bar{Y}_i^a} + X_i^a \frac{\delta}{\delta X_j^a} - \bar{X}_j^a \frac{\delta}{\delta \bar{X}_i^a} \right. \\ \left. + \eta_i \frac{\delta}{\delta \eta_j} - \bar{\eta}_j \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_i} + \theta_i \frac{\delta}{\delta \theta_j} - \bar{\theta}_j \frac{\delta}{\delta \bar{\theta}_i} \right). \end{aligned} \quad (6.41)$$

O traço de (6.41) define a carga \mathcal{Q}_8 que aparece nas tabelas 4.1, 6.1 e 6.2. Este operador generaliza aquele da eq. (4.44).

- Simetrias rígidas:

$$\begin{aligned} R_{ij}(\Sigma) &\equiv \int d^4x \left(\phi_i^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \omega_j^a} - \bar{\omega}_j^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\phi}_i^a} + M_{\mu i}^a \frac{\delta \Sigma}{\delta N_{\mu j}^a} + \bar{N}_{\mu j}^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{M}_{\mu i}^a} \right. \\ &\quad \left. + Y_i^a \frac{\delta \Sigma}{\delta X_j^a} + \bar{X}_j^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{Y}_i^a} - \eta_i \frac{\delta \Sigma}{\delta \theta_j} - \bar{\theta}_j \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\eta}_i} \right) = 0, \\ R^{(1)}(\Sigma) &\equiv \int d^4x \left(\bar{\omega}_i^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \omega_i^a} - \bar{N}_{\mu i}^a \frac{\delta \Sigma}{\delta N_{\mu i}^a} + \bar{X}_i^a \frac{\delta \Sigma}{\delta X_i^a} - \bar{\theta}_i \frac{\delta \Sigma}{\delta \theta_i} \right) = 0, \\ R^{(2)}(\Sigma) &\equiv \int d^4x \left(\bar{\omega}_i^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \phi_i^a} - \bar{\phi}_i^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \omega_i^a} - \bar{N}_{\mu i}^a \frac{\delta \Sigma}{\delta M_{\mu i}^a} - \bar{M}_{\mu i}^a \frac{\delta \Sigma}{\delta N_{\mu i}^a} \right. \\ &\quad \left. + \bar{X}_i^a \frac{\delta \Sigma}{\delta Y_i^a} + \bar{Y}_i^a \frac{\delta \Sigma}{\delta X_i^a} + \bar{\theta}_i \frac{\delta \Sigma}{\delta \eta_i} + \bar{\eta}_i \frac{\delta \Sigma}{\delta \theta_i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.42)$$

- Condição de calibre diagonal:

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta b} = i \partial_\mu A_\mu. \quad (6.43)$$

- Equação de antighost diagonal:

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}} + \partial_\mu \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_\mu} = 0. \quad (6.44)$$

- Simetria $SL(2, \mathbf{R})$:

$$\mathcal{D}(\Sigma) \equiv \int d^4x \left(c^a \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}^a} - i \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta \Sigma}{\delta b^a} - 2\theta \frac{\delta \Sigma}{\delta L} \right) = 0. \quad (6.45)$$

- Invariância $U(1)$ local:

$$\mathcal{W}^3(\Sigma) = -i \partial^2 b, \quad (6.46)$$

$$\mathcal{W}^3 \equiv \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} + g \varepsilon^{ab} \sum_{\mathcal{Y}} \mathcal{Y}^a \frac{\delta}{\delta \mathcal{Y}^b}, \quad (6.47)$$

$$\mathcal{Y} \in \left\{ A_\mu^a, b^a, \bar{c}^a, c^a, \bar{\phi}_i^a, \phi_i^a, \bar{\omega}_i^a, \omega_i^a, \Omega_\mu^a, K_\mu^a, \xi_\mu^a, L^a, \bar{X}_i^a, X_i^a, \bar{Y}_i^a, Y_i^a, \bar{M}_{\mu i}^a, M_{\mu i}^a, \bar{N}_{\mu i}^a, N_{\mu i}^a \right\}. \quad (6.48)$$

- Invariância *on-shell* de BRST do operador $(\mathcal{O}_{A^2} - \alpha \mathcal{O}_{\bar{f}f})$:

$$\mathcal{U}(\Sigma) \equiv \int d^4x \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta \lambda} + \alpha \frac{\delta \Sigma}{\delta \tau} - ic^a \frac{\delta \Sigma}{\delta b^a} - 2\eta \frac{\delta \Sigma}{\delta L} \right) = 0. \quad (6.49)$$

6.3 Contratermo mais geral via métodos algébricos

Podemos agora encarar o problema da renormalizabilidade da ação Σ . Para tanto, vamos empregar as técnicas de renormalização algébrica, descritas em [56], e procurar pelo contratermo invariante mais geral que possa ser livremente adicionado a todas as ordens na teoria de perturbações. Com este propósito, nossa estratégia será perturbar a ação clássica Σ acrescentando um contratermo Σ_{CT} , que é um polinômio local arbitrário nos campos e nas fontes, de dimensão quatro, número de ghost zero e carga- \mathcal{Q}_8 nula, integrado em todo o espaço euclidiano quadridimensional, e impor que a ação perturbada, $\Sigma + \epsilon \Sigma_{\text{CT}}$, satisfaça as mesmas identidades de Ward que Σ , pelo menos até a primeira ordem no parâmetro de perturbação ϵ , ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Sigma + \epsilon \Sigma_{\text{CT}}) &= 0 + O(\epsilon^2), \\ \frac{\delta}{\delta b}(\Sigma + \epsilon \Sigma_{\text{CT}}) &= i\partial_\mu A_\mu + O(\epsilon^2), \\ \left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}} + \partial_\mu \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu} \right) (\Sigma + \epsilon \Sigma_{\text{CT}}) &= 0 + O(\epsilon^2), \\ \mathcal{W}_i^{(N)}(\Sigma + \epsilon \Sigma_{\text{CT}}) &= 0 + O(\epsilon^2), \quad (N = 1, 2, 3, 4), \\ R_{ij}(\Sigma + \epsilon \Sigma_{\text{CT}}) &= 0 + O(\epsilon^2), \\ R^{(K)}(\Sigma + \epsilon \Sigma_{\text{CT}}) &= 0 + O(\epsilon^2), \quad (K = 1, 2), \\ \mathcal{Q}_{ij}(\Sigma + \epsilon \Sigma_{\text{CT}}) &= 0 + O(\epsilon^2), \\ \mathcal{D}(\Sigma + \epsilon \Sigma_{\text{CT}}) &= 0 + O(\epsilon^2), \\ \mathcal{W}^3(\Sigma + \epsilon \Sigma_{\text{CT}}) &= -i\partial^2 b + O(\epsilon^2), \\ \mathcal{U}(\Sigma + \epsilon \Sigma_{\text{CT}}) &= 0 + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Isto permite-nos impor as seguintes condições sobre Σ_{CT}

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\Sigma \Sigma_{\text{CT}} &= 0, \\ \frac{\delta}{\delta b} \Sigma_{\text{CT}} &= 0, \\ \left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}} + \partial_\mu \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu} \right) \Sigma_{\text{CT}} &= 0, \\ \mathcal{W}_i^{\Sigma(N)} \Sigma_{\text{CT}} &= 0, \quad (N = 1, 2, 3, 4), \\ R_{ij} \Sigma_{\text{CT}} &= 0, \\ R^{(K)} \Sigma_{\text{CT}} &= 0, \quad (K = 1, 2), \\ \mathcal{Q}_{ij} \Sigma_{\text{CT}} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\Sigma \Sigma_{\text{CT}} &= 0, \\
\mathcal{W}^3 \Sigma_{\text{CT}} &= 0, \\
\mathcal{U} \Sigma_{\text{CT}} &= 0,
\end{aligned} \tag{6.50}$$

onde \mathcal{S}_Σ é o operador de Slavnov-Taylor linearizado nilpotente,

$$\mathcal{S}_\Sigma \mathcal{S}_\Sigma = 0, \tag{6.51}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\Sigma &= \int d^4x \left[\left(\frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_\mu^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta K_\mu^a} \right) \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu^a} \left(\frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^a} + \frac{\delta}{\delta K_\mu^a} \right) + \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_\mu} \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \Sigma}{\delta A_\mu} \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu} + \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta}{\delta c^a} \right. \\
&+ \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a} \frac{\delta}{\delta L^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta L} \frac{\delta}{\delta c} + \frac{\delta \Sigma}{\delta c} \frac{\delta}{\delta L} + ib^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + ib \frac{\delta}{\delta \bar{c}} + \omega_i^a \frac{\delta}{\delta \phi_i^a} + \bar{\phi}_i^a \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_i^a} + N_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta M_{\mu i}^a} - \bar{M}_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta \bar{N}_{\mu i}^a} \\
&\left. - (\Omega_\mu^a - K_\mu^a) \frac{\delta}{\delta \xi_\mu^a} - \bar{Y}_i^a \frac{\delta}{\delta \bar{X}_i^a} + X_i^a \frac{\delta}{\delta Y_i^a} + J \frac{\delta}{\delta \lambda} + \sigma \frac{\delta}{\delta \tau} + \theta \frac{\delta}{\delta \eta} - \theta_i \frac{\delta}{\delta \eta_i} + \bar{\eta}_i \frac{\delta}{\delta \theta_i} \right], \tag{6.52}
\end{aligned}$$

enquanto que $\mathcal{W}_i^{\Sigma(N)}$, com $N = 1, \dots, 4$, e \mathcal{D}_Σ são os operadores linearizados correspondentes às identidades de Ward (6.39) e (6.45), respectivamente, e dados por

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_i^{\Sigma(1)} &= \int d^4x \left(\phi_i^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + c^a \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}_i^a} + M_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^a} - Y_i^a \frac{\delta}{\delta L^a} - i \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{Y}_i^a} \frac{\delta}{\delta b^a} - i \frac{\delta \Sigma}{\delta b^a} \frac{\delta}{\delta \bar{Y}_i^a} - \theta \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_i} + 2\eta_i \frac{\delta}{\delta L} \right), \\
\mathcal{W}_i^{\Sigma(2)} &= \int d^4x \left(\bar{\omega}_i^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} - c^a \frac{\delta}{\delta \omega_i^a} - \bar{N}_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^a} - \bar{X}_i^a \frac{\delta}{\delta L^a} - i \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{X}_i^a} \frac{\delta}{\delta b^a} - i \frac{\delta \Sigma}{\delta b^a} \frac{\delta}{\delta \bar{X}_i^a} - \theta \frac{\delta}{\delta \theta_i} + 2\bar{\theta}_i \frac{\delta}{\delta L} \right), \\
\mathcal{W}_i^{\Sigma(3)} &= \int d^4x \left[\left(\frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{Y}_i^a} + \omega_i^a \right) \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}^a} \frac{\delta}{\delta \bar{Y}_i^a} + i \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{X}_i^a} \frac{\delta}{\delta b^a} + i \frac{\delta \Sigma}{\delta b^a} \frac{\delta}{\delta \bar{X}_i^a} + \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\phi}_i^a} - X_i^a \right) \frac{\delta}{\delta L^a} \right. \\
&\left. + \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}_i^a} + c^a \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_i^a} - M_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta \xi_\mu^a} + N_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^a} - \theta \frac{\delta}{\delta \theta_i} - 2\theta_i \frac{\delta}{\delta L} \right], \\
\mathcal{W}_i^{\Sigma(4)} &= \int d^4x \left[\left(\frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{X}_i^a} - \bar{\phi}_i^a \right) \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}^a} \frac{\delta}{\delta \bar{X}_i^a} - i \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{Y}_i^a} \frac{\delta}{\delta b^a} - i \frac{\delta \Sigma}{\delta b^a} \frac{\delta}{\delta \bar{Y}_i^a} + \left(\frac{\delta \Sigma}{\delta \omega_i^a} - \bar{Y}_i^a \right) \frac{\delta}{\delta L^a} \right. \\
&\left. + \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta}{\delta \omega_i^a} - c^a \frac{\delta}{\delta \phi_i^a} + \bar{N}_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta \xi_\mu^a} - \bar{M}_{\mu i}^a \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^a} + \theta \frac{\delta}{\delta \eta_i} - 2\bar{\eta}_i \frac{\delta}{\delta L} \right], \tag{6.53}
\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{D}_\Sigma = \int d^4x \left(c^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} - i \frac{\delta \Sigma}{\delta L^a} \frac{\delta}{\delta b^a} - i \frac{\delta \Sigma}{\delta b^a} \frac{\delta}{\delta L^a} - 2\theta \frac{\delta}{\delta L} \right). \tag{6.54}$$

Futuramente, pode ser útil ter em mãos as relações de comutação e anticomutação

$$\begin{aligned}
\{ \mathcal{W}_i^{\Sigma(1)}, \mathcal{S}_\Sigma \} &= \mathcal{W}_i^{\Sigma(3)}, & [\mathcal{W}_i^{\Sigma(2)}, \mathcal{S}_\Sigma] &= \mathcal{W}_i^{\Sigma(4)}, \\
\{ R_{ij}, \mathcal{S}_\Sigma \} &= \mathcal{Q}_{ij}, & [R^{(1)}, \mathcal{S}_\Sigma] &= R^{(2)}, \\
[\mathcal{W}^3, \mathcal{S}_\Sigma] &= 0, & \{ \mathcal{U}, \mathcal{S}_\Sigma \} &= \mathcal{D}_\Sigma.
\end{aligned} \tag{6.55}$$

De acordo com o segundo e terceiro vínculos de (6.50) conclui-se que Σ_{CT} é independente do multiplicador de Lagrange diagonal $b(x)$, e que o antighost diagonal $\bar{c}(x)$ aparece apenas na combinação $(\Omega_\mu + \partial_\mu \bar{c})$. Além disso, a partir de resultados gerais da cohomologia das

teorias de calibre [56], a solução mais geral do vínculo $\mathcal{S}_\Sigma \Sigma_{\text{CT}} = 0$, *i. e.*, a primeira das eq's (6.50), pode ser escrita como

$$\Sigma_{\text{CT}} = a_0 S_{\text{YM}} + \mathcal{S}_\Sigma \Delta^{(-1)}, \quad (6.56)$$

com $\Delta^{(-1)}$ sendo um polinômio local integrado com número de ghost -1 , dado por

$$\begin{aligned} \Delta^{(-1)} = & \int d^4x \left[a_1 \Omega_\mu^a A_\mu^a + a_2 K_\mu^a A_\mu^a + a_3 \xi_\mu^a g \varepsilon^{ab} A_\mu^b c + a_4 \xi_\mu^a \partial_\mu c^a + a_5 \xi_\mu^a g \varepsilon^{ab} A_\mu c^b \right. \\ & + a_6 (\partial_\mu \bar{c}^a) A_\mu^a + a_7 (\Omega_\mu + \partial_\mu \bar{c}) A_\mu + a_8 c^a L^a + a_9 c L + a_{10} \bar{X}_i^a g \varepsilon^{ab} \phi_i^b c + a_{11} \bar{X}_i^a \omega_i^a \\ & + a_{12} Y_i^a g \varepsilon^{ab} \bar{\omega}_i^b c + a_{13} Y_i^a \bar{\phi}_i^a + a_{14} \bar{Y}_i^a \phi_i^a + a_{15} X_i^a \bar{\omega}_i^a + a_{16} \bar{N}_{\mu i}^a \partial_\mu \phi_i^a + a_{17} \bar{N}_{\mu i}^a g \varepsilon^{ab} A_\mu \phi_i^b \\ & + a_{18} M_{\mu i}^a \partial_\mu \bar{\omega}_i^a + a_{19} M_{\mu i}^a g \varepsilon^{ab} A_\mu \bar{\omega}_i^b + a_{20} i b^a \bar{c}^a + a_{21} g \varepsilon^{ab} \bar{c}^a \bar{c}^b c + a_{22} g \varepsilon^{ab} \bar{c}^a A_\mu A_\mu^b \\ & + a_{23} \bar{\omega}_i^a \phi_i^a \bar{\phi}_j^b \phi_j^b + a_{24} \bar{\omega}_i^a \phi_i^a \bar{\omega}_j^b \omega_j^b + a_{25} \bar{\omega}_i^a \phi_i^b \bar{\phi}_j^a \phi_j^b + a_{26} \bar{\omega}_i^a \phi_i^b \bar{\omega}_j^a \omega_j^b + a_{27} \bar{\omega}_i^a \phi_i^b \bar{\phi}_j^b \phi_j^a \\ & + a_{28} \bar{\omega}_i^a \phi_i^b \bar{\omega}_j^b \omega_j^a + a_{29} \bar{\omega}_i^a \phi_j^a \bar{\phi}_i^b \phi_j^b + a_{30} \bar{\omega}_i^a \phi_j^b \bar{\phi}_i^a \phi_j^b + a_{31} \bar{\omega}_i^a \phi_j^a \bar{\omega}_i^b \omega_j^b + a_{32} \bar{\omega}_i^a \phi_i^a \bar{c}^b c^b \\ & + a_{33} \bar{\omega}_i^a \phi_i^b \bar{c}^a c^b + a_{34} \bar{\omega}_i^a \phi_i^b \bar{c}^b c^a + a_{35} \bar{\omega}_i^a \phi_i^a A_\mu A_\mu + a_{36} \bar{\omega}_i^a \phi_i^a A_\mu^b A_\mu^b + a_{37} \bar{\omega}_i^a \phi_i^b A_\mu^a A_\mu^b \\ & + a_{38} \bar{\omega}_i^a \partial^2 \phi_i^a + a_{39} \bar{\omega}_i^a g \varepsilon^{ab} A_\mu \partial_\mu \phi_i^b + a_{40} \bar{\omega}_i^a g \varepsilon^{ab} (\partial_\mu A_\mu) \phi_i^b + a_{41} \chi \bar{N}_{\mu i}^a M_{\mu i}^a \\ & + \frac{1}{2} (a_{42} \lambda + a_{43} \tau) A_\mu^a A_\mu^a + \frac{1}{2} (a_{44} \lambda + a_{45} \tau) A_\mu A_\mu + (a_{46} \lambda + a_{47} \tau) \bar{c}^a c^a \\ & + (a_{48} \lambda + a_{49} \tau) \bar{\phi}_i^a \phi_i^a + (a_{50} \lambda + a_{51} \tau) \bar{\omega}_i^a \omega_i^a + (a_{52} J + a_{53} \sigma) \bar{\omega}_i^a \phi_i^a + (a_{54} J + a_{55} \sigma) \lambda \\ & + (a_{56} J + a_{57} \sigma) \tau + a_{58} \eta \partial_\mu A_\mu + a_{59} \eta \theta + a_{60} g \varepsilon^{ab} \eta \bar{c}^a c^b + a_{61} g \varepsilon^{ab} \eta \bar{\phi}_i^a \phi_i^b \\ & \left. + a_{62} g \varepsilon^{ab} \eta \bar{\omega}_i^a \omega_i^b + a_{63} g \varepsilon^{ab} \theta \bar{\omega}_i^a \phi_i^b + a_{64} g \varepsilon^{ab} \bar{\theta}_i \phi_i^a c^b + a_{65} g \varepsilon^{ab} \eta_i \bar{\omega}_i^a c^b \right], \quad (6.57) \end{aligned}$$

onde os coeficientes a_n , $n = 0, \dots, 65$, são parâmetros livres adimensionais. Note-se também que ao escrevermos a expressão de (6.57) fizemos uso do fato que a ação Σ , e assim Σ_{CT} , são invariantes pela seguinte simetria discreta

$$\mathcal{Y}^1 \rightarrow \mathcal{Y}^1, \quad \mathcal{Y}^2 \rightarrow -\mathcal{Y}^2, \quad \mathcal{Y}^{\text{diag}} \rightarrow -\mathcal{Y}^{\text{diag}}, \quad \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad (6.58)$$

onde \mathcal{Y}^a , com $a = 1, 2$, representa os elementos do conjunto não-diagonal (6.48), enquanto que $\mathcal{Y}^{\text{diag}}$ representa o setor diagonal

$$\mathcal{Y}^{\text{diag}} \in \left\{ A_\mu, b, c, \bar{c}, \Omega_\mu, L, \eta, \theta, \eta_i, \bar{\eta}_i, \theta_i, \bar{\theta}_i \right\}, \quad (6.59)$$

e \mathcal{Y} as fontes λ, τ, J, σ . Como se pode facilmente reconhecer, esta simetria tem o papel da conjugação de carga.

Após uma extensa análise, obtém-se que a expressão mais geral para $\Delta^{(-1)}$ compatível com todos os vínculos (6.50) e com a simetria discreta (6.58) é

$$\Delta^{(-1)} = \int d^4x \left\{ a_1 (\Omega_\mu^a A_\mu^a + g \varepsilon^{ab} \xi_\mu^a A_\mu^b c) - a_2 \xi_\mu^a D_\mu^{ab} c^b + (a_1 + a_2 + a_3) (\bar{N}_{\mu i}^a D_\mu^{ab} \phi_i^b - M_{\mu i}^a D_\mu^{ab} \bar{\omega}_i^b) \right.$$

$$\begin{aligned}
& +a_3 L^a c^a - (a_3 + a_4) \bar{\omega}_i^a \mathcal{M}^{ab} \phi_i^b - a_4 \bar{c}^a D_\mu^{ab} A_\mu^b + a_5 Lc + a_6 \chi \bar{N}_{\mu i}^a M_{\mu i}^a \\
& - \frac{\alpha}{2} a_7 (i \bar{c}^a b^a - g \varepsilon^{ab} \bar{c}^a \bar{c}^b c) - \frac{\alpha}{2} (a_7 - 2a_3) g^2 \bar{\omega}_i^a \phi_i^a (\bar{\phi}_j^b \phi_j^b - \bar{\omega}_j^b \omega_j^b) + \alpha (a_7 - a_3) g^2 \bar{\omega}_i^a \phi_i^a \bar{c}^b c^b \\
& + \frac{1}{2} (a_3 - a_4 - \alpha a_8) \lambda A_\mu^a A_\mu^a + \frac{1}{2} a_8 \tau A_\mu^a A_\mu^a + \alpha (a_3 + a_7 + a_9) \lambda (\bar{\phi}_i^a \phi_i^a - \bar{\omega}_i^a \omega_i^a - \bar{c}^a c^a) \\
& - (a_3 + a_9) \tau (\bar{\phi}_i^a \phi_i^a - \bar{\omega}_i^a \omega_i^a) + a_9 \tau \bar{c}^a c^a - (a_3 - a_5) g \varepsilon^{ab} (\eta \bar{c}^a c^b + \bar{\theta}_i \phi_i^a c^b - \eta_i \bar{\omega}^a c^b) \\
& - \left(a_{10} \frac{1}{2} \zeta - 2\alpha a_8 + 2\alpha \frac{\rho}{\zeta} a_9 \right) J \lambda + \left(a_{11} \rho + (-\alpha + \frac{\zeta}{\rho}) (a_8 - a_9) \right) \sigma \lambda \\
& - \left(a_{12} \frac{1}{2} \kappa + 2 \frac{\rho}{\kappa} a_8 - 2a_9 \right) \sigma \tau - a_{13} \frac{1}{2} \beta \eta \theta \}, \tag{6.60}
\end{aligned}$$

onde a seguinte redefinição dos coeficientes a_n foi adotada

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 &\rightarrow a_1, & a_2 + a_4 &\rightarrow -a_2, & a_8 &\rightarrow a_3, & a_6 &\rightarrow a_4, \\
a_9 &\rightarrow a_5, & a_{41} &\rightarrow a_6, & a_{20} &\rightarrow -\frac{1}{2} \alpha a_7, & a_{43} &\rightarrow a_8, \\
a_{47} &\rightarrow a_9, & a_{54} &\rightarrow -\left(a_{10} \frac{1}{2} \zeta - 2\alpha a_8 + 2\alpha \frac{\rho}{\zeta} a_9 \right), \\
a_{55} + a_{56} &\rightarrow a_{11} \rho + (-\alpha + \frac{\zeta}{\rho}) (a_8 - a_9), \\
a_{57} &\rightarrow -\left(a_{12} \frac{1}{2} \kappa + 2 \frac{\rho}{\kappa} a_8 - 2a_9 \right), & a_{59} &\rightarrow -a_{13} \frac{1}{2} \beta. \tag{6.61}
\end{aligned}$$

Portanto, o contratermo mais geral compatível com os vínculos (6.50) é dado pela expressão (6.56) sendo $\Delta^{(-1)}$ dado por (6.60).

6.4 Fatores de renormalização

Após termos identificado o contratermo mais geral Σ_{CT} , respeitando o conjunto de identidades de Ward da ação clássica Σ , ainda temos que checar se este pode ser reabsorvido através de uma redefinição multiplicativa de campos, fontes e parâmetros da ação de partida Σ . Em outras palavras, queremos mostrar que se pode escrever

$$\Sigma[\Psi_0, \psi_0, \mathcal{J}_0, \vartheta_0, \Omega_0, K_0, \lambda_0, \tau_0, J_0, \sigma_0] = \Sigma[\Psi, \psi, \mathcal{J}, \vartheta, \Omega, K, \lambda, \tau, J, \sigma] + \epsilon \Sigma_{\text{CT}} + O(\epsilon^2), \tag{6.62}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Psi &\equiv \{A_\mu^a, b^a, c^a, \bar{c}^a\}, \\
\psi &\equiv \{A_\mu, b, c, \bar{c}, \phi_i^a, \bar{\phi}_i^a, \omega_i^a, \bar{\omega}_i^a\}, \\
\mathcal{J} &\equiv \{\xi_\mu^a, L^a, L, \Omega_\mu, X_i^a, \bar{X}_i^a, Y_i^a, \bar{Y}_i^a, M_{\mu i}^a, \bar{M}_{\mu i}^a, N_{\mu i}^a, \bar{N}_{\mu i}^a, \eta, \theta, \bar{\eta}_i, \eta_i, \bar{\theta}_i, \theta_i\}, \\
\vartheta &\equiv \{g, \alpha, \chi, \zeta, \rho, \kappa, \beta\}, \tag{6.63}
\end{aligned}$$

e as quantidades “nuas” — aquelas denotadas com um “0” subscripto — relacionam-se com as quantidades renormalizadas através de

$$\Psi_0 = \tilde{Z}_\Psi^{1/2} \Psi, \quad \psi_0 = Z_\psi^{1/2} \psi, \quad \mathcal{J}_0 = Z_{\mathcal{J}} \mathcal{J}, \quad \vartheta_0 = Z_\vartheta \vartheta, \quad (6.64)$$

e

$$\begin{pmatrix} \Omega_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = \mathcal{Z}_{\Omega K} \begin{pmatrix} \Omega \\ K \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \tau_0 \end{pmatrix} = \mathcal{Z}_{\lambda\tau} \begin{pmatrix} \lambda \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} J_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = \mathcal{Z}_{J\sigma} \begin{pmatrix} J \\ \sigma \end{pmatrix}. \quad (6.65)$$

As renormalizações (6.65) merecem destaque por seu caráter matricial. Isto se deve ao fato de que os pares de fontes (Ω_μ^a, K_μ^a) , (λ, τ) e (J, σ) possuem os mesmos números quânticos, ver tabelas 6.1 e 6.2, possibilitando termos de mistura nas correções quânticas que só podem ser absorvidos através de uma renormalização matricial.

A equação (6.62) é verdadeira para o contratermo (6.56) se escolhermos as renormalizações (6.64) e (6.65), à ordem ϵ , como

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_A^{1/2} &= 1 + \epsilon \left(\frac{a_0}{2} + a_1 \right), \\ Z_g &= 1 - \epsilon \frac{a_0}{2}, \\ \tilde{Z}_c^{1/2} &= 1 - \epsilon \frac{a_3 + a_4}{2}, \\ Z_{\bar{c}}^{1/2} &= 1 - \epsilon \frac{a_3 - a_4}{2}, \\ Z_c^{1/2} &= 1 + \epsilon \left(\frac{a_3 - a_4}{2} - a_5 \right), \\ Z_M &= 1 - \epsilon \left(a_1 + a_2 + \frac{a_3 - a_4}{2} \right), \\ Z_\chi &= 1 + \epsilon (2a_1 + 2a_2 + a_3 - a_4 - a_6), \\ Z_\alpha &= 1 + \epsilon (a_0 + 2a_4 + a_7), \\ Z_\zeta &= 1 + \epsilon \left[2a_0 - 2 \left(1 + \alpha \frac{\rho}{\zeta} \right) a_3 + 2a_4 - 2\alpha \frac{\rho}{\zeta} a_7 + a_{10} \right], \\ Z_\rho &= 1 + \epsilon \left[a_0 - (1 + \alpha) a_3 + a_4 - \alpha a_7 + a_{11} \right], \\ Z_\kappa &= 1 - \epsilon (2a_4 - a_{12}), \\ Z_\beta &= 1 - \epsilon (a_0 - 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 - a_{13}), \end{aligned} \quad (6.66)$$

e

$$\mathcal{Z}_{\Omega K} = \mathbf{1} + \epsilon \left(\begin{array}{c|c} \frac{-a_1 - a_2 - \frac{1}{2}(a_3 - a_4)}{0} & \frac{a_2}{-a_1 - \frac{1}{2}(a_3 - a_4)} \end{array} \right),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{\lambda\tau} &= \mathbf{1} + \epsilon \left(\frac{-\frac{1}{2}(a_0 - a_3 + a_4) - \alpha a_8}{+\alpha(a_3 + a_7 + a_9)} \left| \frac{a_8}{\frac{1}{2}(a_0 - a_3 + 3a_4) - a_9} \right. \right), \\
\mathcal{Z}_{J\sigma} &= \mathbf{1} + \epsilon \left(\frac{-a_0 + a_3 - a_4 - \alpha a_8}{+\alpha(a_3 + a_7 + a_9)} \left| \frac{a_8}{a_4 - a_9} \right. \right), \tag{6.67}
\end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
Z_A^{1/2} &= Z_g^{-1}, \\
\tilde{Z}_{\bar{c}}^{1/2} &= \tilde{Z}_c^{1/2}, \\
Z_b^{1/2} &= Z_g, \\
Z_\phi^{1/2} &= Z_{\bar{\phi}}^{1/2} = \tilde{Z}_c^{1/2}, \\
Z_{\bar{\omega}}^{1/2} &= Z_g^{-1} Z_{\bar{c}}^{1/2} \tilde{Z}_c^{1/2}, \\
Z_\omega^{1/2} &= \tilde{Z}_b^{1/2} = Z_g Z_{\bar{c}}^{-1/2} \tilde{Z}_c^{1/2}, \\
Z_{\bar{M}} &= Z_\xi = Z_M, \\
Z_N &= Z_g Z_{\bar{c}}^{-1/2} Z_M, \\
Z_{\bar{N}} &= Z_g^{-1} Z_{\bar{c}}^{1/2} Z_M, \\
Z_X &= \tilde{Z}_c^{-1/2}, \\
Z_{\bar{X}} &= Z_g^{-2} Z_{\bar{c}} \tilde{Z}_c^{-1/2}, \\
Z_Y &= Z_{\bar{Y}} = \tilde{Z}_L = Z_g^{-1} Z_{\bar{c}}^{1/2} \tilde{Z}_c^{-1/2}, \\
Z_\theta &= Z_{\bar{\eta}_i} = Z_{\eta_i} = Z_L = Z_g^{-1} Z_{\bar{c}}^{1/2} Z_c^{-1/2}, \\
Z_\eta &= Z_{\bar{\theta}_i} = Z_g^{-2} Z_{\bar{c}} Z_c^{1/2}, \\
Z_{\theta_i} &= Z_c^{-1/2}, \\
Z_\Omega &= Z_{\bar{c}}^{1/2}. \tag{6.68}
\end{aligned}$$

Com isto, concluimos a prova da renormalizabilidade da ação Σ .

CAPÍTULO 7

PROPAGADORES E RESULTADOS DA REDE

Neste capítulo, iremos calcular os propagadores do modelo (6.36) e comentar, detalhadamente, suas conseqüências, incluindo uma discussão acerca do conjunto de parâmetros massivos que são introduzidos na teoria. Em seguida, apresentaremos alguns resultados recentes da rede, confrontando-os com os aqui obtidos.

7.1 Propagadores

Agora, vamos calcular os propagadores dos glúons e dos ghosts do modelo descrito pela ação Σ , dada por (6.36). Começemos por supor que os operadores $\mathcal{O}_{A^2}(x)$, $\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x)$, e $\mathcal{O}_{\bar{c}\times c}(x)$ condensem e, dessa forma, vamos trocar as fontes (J, σ, θ) pelas massas (m^2, μ^2, v^2) , que estão relacionadas com os respectivos condensados,

$$\langle \mathcal{O}_{A^2} \rangle \sim m^2, \quad \langle \mathcal{O}_{\bar{f}f} \rangle \sim \mu^2, \quad \langle \mathcal{O}_{\bar{c}\times c} \rangle \sim v^2. \quad (7.1)$$

Devemos também tomar os valores físicos (4.36) das fontes $(M_{\mu\nu}^{ab}, \bar{M}_{\mu\nu}^{ab}, N_{\mu\nu}^{ab}, \bar{N}_{\mu\nu}^{ab})$ e atribuir às demais fontes o valor zero. Como estamos interessados em calcular os propagadores, podemos nos ater aos termos quadráticos,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{phys}}^{\text{quad}} = & \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow 0}} \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A_\mu^a (\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu^a - \frac{1}{2} A_\mu (\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu + i b^a \partial_\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2} b^a b^a \right. \\ & + i b \partial_\mu A_\mu + \frac{\xi}{2} b^2 + \bar{c}^a \partial^2 c^a + \bar{c} \partial^2 c - \bar{\phi}_\mu^{ab} \partial^2 \phi_\mu^{ab} + \bar{\omega}_\mu^{ab} \partial^2 \omega_\mu^{ab} + \gamma^2 g \varepsilon^{ab} (\phi_\mu^{ab} - \bar{\phi}_\mu^{ab}) A_\mu \\ & \left. + \frac{m^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a + \mu^2 (\bar{\phi}_\mu^{ab} \phi_\mu^{ab} - \bar{\omega}_\mu^{ab} \omega_\mu^{ab} - \bar{c}^a c^a) + v^2 g \varepsilon^{ab} \bar{c}^a c^b \right]. \quad (7.2) \end{aligned}$$

Os multiplicadores de Lagrange (b^a, b) e os campos auxiliares $(\phi_\mu^{ab}, \bar{\phi}_\mu^{ab}, \omega_\mu^{ab}, \bar{\omega}_\mu^{ab})$ podem ser integrados, resultando em

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{phys}}^{\text{quad}} = & \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow 0}} \int d^4x \left[\frac{1}{2} A_\mu^a (\delta_{\mu\nu} (-\partial^2 + m^2) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu^a - \frac{1}{2} A_\mu (\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \frac{\xi - 1}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu) A_\nu \right. \\ & \left. - \bar{c}^a (\delta^{ab} (-\partial^2 + \mu^2) - \varepsilon^{ab} v^2) c^b + \bar{c} \partial^2 c \right] + 2\gamma^4 g^2 \int d^4x d^4x' A_\mu(x) \Delta(x, x') A_\mu(x'), \quad (7.3) \end{aligned}$$

onde $\Delta(x, x')$ é o inverso do operador $(-\partial^2 + \mu^2)$, ou seja,

$$(-\partial_x^2 + \mu^2)\Delta(x, x') = \delta(x - x'). \quad (7.4)$$

Fazendo as transformadas de Fourier,

$$\varphi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \varphi(k) e^{-ikx}, \quad \Delta(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 + \mu^2}, \quad (7.5)$$

onde $\varphi = (A_\mu^a, A_\mu, c^a, c)$, obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{phys}}^{\text{quad}} = \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \alpha \rightarrow 0}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} & \left[\frac{1}{2} A_\mu^a(k) \delta^{ab} \left(\delta_{\mu\nu}(k^2 + m^2) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} k_\mu k_\nu \right) A_\nu^b(-k) \right. \\ & + \frac{1}{2} A_\mu(k) \left(\delta_{\mu\nu} \frac{k^2(k^2 + \mu^2) + 4\gamma^4 g^2}{k^2 + \mu^2} + \frac{\xi - 1}{\xi} k_\mu k_\nu \right) A_\nu(-k) \\ & \left. - \bar{c}^a(k) (\delta^{ab}(k^2 + \mu^2) - \varepsilon^{ab} v^2) c^b(-k) - \bar{c}(k) k^2 c(-k) \right]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Introduzindo a notação

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu\nu}^{ab}(k, \alpha) &= \delta^{ab} \left(\delta_{\mu\nu}(k^2 + m^2) + \frac{\alpha - 1}{\alpha} k_\mu k_\nu \right), \\ \Omega_{\mu\nu}(k, \xi) &= \delta_{\mu\nu} \frac{k^2(k^2 + \mu^2) + 4\gamma^4 g^2}{k^2 + \mu^2} + \frac{\xi - 1}{\xi} k_\mu k_\nu, \\ \Omega^{ab}(k) &= \delta^{ab}(k^2 + \mu^2) - \varepsilon^{ab} v^2, \end{aligned} \quad (7.7)$$

podemos obter os propagadores a partir das equações

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(k) A_\nu^b(-k) \rangle \Omega_{\nu\sigma}^{bc}(k, \alpha) &= \delta^{ac} \delta_{\mu\sigma}, \\ \langle A_\mu(k) A_\nu(-k) \rangle \Omega_{\nu\sigma}(k, \xi) &= \delta_{\mu\sigma}, \\ \langle \bar{c}^a(k) c^b(-k) \rangle \Omega^{bc}(k) &= \delta^{ac}, \\ \langle \bar{c}(k) c(-k) \rangle k^2 &= 1. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Logo, no limite $\alpha \rightarrow 0$ e $\xi \rightarrow 0$, temos

$$\langle A_\mu^a(k) A_\nu^b(-k) \rangle = \frac{1}{k^2 + m^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab}, \quad (7.9)$$

$$\langle A_\mu(k) A_\nu(-k) \rangle = \frac{k^2 + \mu^2}{k^4 + \mu^2 k^2 + 4g^2 \gamma^4} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (7.10)$$

$$\langle \bar{c}^a(k) c^b(-k) \rangle_{\text{sim}} = \frac{k^2 + \mu^2}{k^4 + 2\mu^2 k^2 + (\mu^4 + v^4)} \delta^{ab}, \quad (7.11)$$

$$\langle \bar{c}^a(k) c^b(-k) \rangle_{\text{antissim}} = \frac{v^2}{k^4 + 2\mu^2 k^2 + (\mu^4 + v^4)} \varepsilon^{ab}, \quad (7.12)$$

$$\langle \bar{c}(k) c(-k) \rangle = \frac{1}{k^2}, \quad (7.13)$$

que correspondem aos propagadores da teoria.

Dando prosseguimento a este capítulo, vamos discorrer um pouco a respeito do conjunto de parâmetros massivos (γ, m, μ, v) e acerca do comportamento dos propagadores (7.9 – 7.13).

7.1.1 Sobre os parâmetros massivos (γ, m, μ, v)

É importante enfatizar que os parâmetros massivos (γ, m, μ, v) que aparecem nos propagadores (7.9 – 7.12) não são parâmetros livres da teoria, sendo determinados de forma dinâmica como soluções de equações de *gap*, que por sua vez, são obtidas pela minimização da energia do vácuo. De fato, o parâmetro de Gribov γ é fixado pela equação (3.81), que pode ser escrita como

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\gamma^2} = 0, \quad (7.14)$$

sendo Γ a ação efetiva 1PI. Isto, por outro lado, equivale a dizer que

$$\langle \varepsilon^{ab} A_\mu (\phi_\mu^{ab} - \bar{\phi}_\mu^{ab}) \rangle \neq 0. \quad (7.15)$$

Uma estimativa dos parâmetros m e v , a ordem de 1-*loop*, é feita em [134, 67]. O parâmetro μ , relacionado com a condensação de $\mathcal{O}_{\bar{f}f}$, está ainda sob investigação [145]. No entanto, estudos similares realizados no calibre de Landau [16, 135] indicam um valor não-nulo de um parâmetro equivalente a este. Assim sendo, todos estes parâmetros serão proporcionais a única escala da teoria, *i. e.*,

$$(m, \gamma, \mu, v) \propto \Lambda_{\overline{\text{MS}}}.$$

Para se ter noção da relevância destes parâmetros reunidos num mesmo modelo, temos que analisar cada um dos propagadores da teoria. Isto é o que passaremos a fazer, a começar pelo propagador de glúons (7.9).

7.1.2 Sobre o propagador dos glúons não-diagonais

O propagado não-diagonal $\langle A_\mu^a(k) A_\nu^b(-k) \rangle$ é dado neste modelo pela equação (7.9), que iremos reescrever da seguinte maneira:

$$\langle A_\mu^a(k) A_\nu^b(-k) \rangle = D_{m^2}^{\text{off}}(k^2) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab}, \quad (7.16)$$

onde $(\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu/k^2)$ é o projetor transverso, indicando a transversalidade do propagador, e

$$D_{m^2}^{\text{off}}(k^2) = \frac{1}{k^2 + m^2}, \quad (7.17)$$

é uma função que caracteriza o comportamento do propagador em função do momento k^2 . Note-se que esta função depende apenas do parâmetro m^2 que se origina da condensação de $\mathcal{O}_{A^2}(x)$, ou seja, o propagador dos glúons não-diagonais não é afetado pela restrição à região Ω , de Gribov, e pela inserção dos operadores $\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x)$ e $\mathcal{O}_{\bar{c}xc}(x)$. Na verdade, este propagador tem um comportamento tipo Yukawa, bem conhecido na literatura, sendo suprimido na região infravermelha, como se pode comprovar analisando a função $D_{m^2}^{\text{off}}(k^2)$ quando $k^2 \approx 0$,

$$D_{m^2}^{\text{off}}(k^2)\Big|_{k^2 \approx 0} = \frac{1}{m^2} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{m^2}} \approx \frac{1}{m^2} \left(1 - \frac{k^2}{m^2}\right). \quad (7.18)$$

Por suprimido, entende-se que os graus de liberdade não-diagonais são “congelados” no infravermelho pois o propagador tende a um valor constante. De fato, no limite em que $k^2 \rightarrow 0$ temos

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} D_{m^2}^{\text{off}}(k^2) = D_{m^2}^{\text{off}}(0) = \frac{1}{m^2}. \quad (7.19)$$

Este é um dado muito importante, pois, se tivéssemos $m^2 = 0$ o propagador seria singular na origem. No entanto, sendo o parâmetro m^2 suficientemente pequeno, da ordem de Λ_{QCD}^2 , recuperamos o propagador perturbativo na região ultravioleta,

$$D_{m^2}^{\text{off}}(k^2)\Big|_{k^2 \gg m^2} = \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + \frac{m^2}{k^2}} \approx \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{m^2}{k^2}\right) \sim \frac{1}{k^2}. \quad (7.20)$$

Devemos comentar aqui que a passagem do regime infravermelho para o ultravioleta se dá de forma contínua e não como uma transição de fase.

7.1.3 Sobre o propagador dos glúons diagonais

Consideremos agora o propagador do glúon Abeliano $\langle A_\mu(k)A_\nu(-k) \rangle$, expresso pela equação (7.10), que será então reescrito como

$$\langle A_\mu(k)A_\nu(-k) \rangle = D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(k^2) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (7.21)$$

onde

$$D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(k^2) = \frac{k^2 + \mu^2}{k^4 + \mu^2 k^2 + 4g^2 \gamma^4}. \quad (7.22)$$

A função $D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(k^2)$ caracteriza o propagador abeliano. Como se pode observar, esta função depende dos parâmetros γ^4 e μ^2 . A dependência em γ^4 se deve ao fato de que o propagador do glúon diagonal é diretamente afetado pela restrição à região Ω , tal como vimos no capítulo 3, enquanto que a dependência em μ^2 se deve à dinâmica dos campos auxiliares $(\phi_\mu^{ab}, \bar{\phi}_\mu^{ab}, \omega_\mu^{ab}, \bar{\omega}_\mu^{ab})$, que se reflete na condensação do operador $\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x)$.

A função $D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(k^2)$ pode também ser escrita de uma forma mais conveniente:

$$D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(k^2) = \frac{1}{k^2 + M^2(k)}, \quad (7.23)$$

sendo a função $M^2(k)$ dada por:

$$M^2(k) = \frac{4\gamma^4 g^2}{k^2 + \mu^2}. \quad (7.24)$$

Assim, toda a dependência dos parâmetros está contida nesta função, e além disso, esta notação se adéqua àquela usada nas referências [101, 146, 147, 148]. Vejamos então como a função $D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(k^2)$ se comporta quando mexemos nos parâmetros γ^4 e μ^2 . Primeiro, vamos tomar $\mu^2 = 0$. Neste caso, verifica-se que o propagador de Gribov (3.84) é recuperado, *i. e.*,

$$D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(k^2) \Big|_{\mu^2=0} = \frac{k^2}{k^4 + 4g^2\gamma^4}. \quad (7.25)$$

Agora, tomando $\gamma^4 = 0$, verifica-se de imediato que $M^2(k) = 0$ e a dependência em μ^2 desaparece completamente,

$$D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(k^2) \Big|_{\gamma^4=0} = \frac{1}{k^2}. \quad (7.26)$$

Este é um fato muito interessante e merece alguns comentários. O que ocorre na verdade é que a dependência em μ^2 do propagador abeliano vem apenas da parte $(\bar{\phi}_\mu^{ab} \phi_\mu^{ab} - \bar{\omega}_\mu^{ab} \omega_\mu^{ab})$ do operador $\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x)$. Esta parte, no entanto, é BRST invariante,

$$s(\bar{\phi}_\mu^{ab} \phi_\mu^{ab} - \bar{\omega}_\mu^{ab} \omega_\mu^{ab}) = 0, \quad (7.27)$$

uma vez que os campos $(\phi_\mu^{ab}, \bar{\phi}_\mu^{ab}, \omega_\mu^{ab}, \bar{\omega}_\mu^{ab})$ se transformam como dubletos,

$$\begin{aligned} s\phi_\mu^{ab} &= \omega_\mu^{ab}, & s\bar{\omega}_\mu^{ab} &= \bar{\phi}_\mu^{ab}, \\ s\omega_\mu^{ab} &= 0, & s\bar{\phi}_\mu^{ab} &= 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Portanto, o parâmetro μ^2 só tem significado físico quando é levado em conta o operador

$$g\varepsilon^{ab} A_\mu(\phi_\mu^{ab} - \bar{\phi}_\mu^{ab}),$$

que tem uma quebra suave da simetria de BRST,

$$s(g\varepsilon^{ab}A_\mu(\phi_\mu^{ab} - \bar{\phi}_\mu^{ab})) = g\varepsilon^{ab}A_\mu\omega_\mu^{ab} - g\varepsilon^{ab}(\partial_\mu c + g\varepsilon^{cd}A_\mu^c c^d)(\phi_\mu^{ab} - \bar{\phi}_\mu^{ab}). \quad (7.29)$$

Esta quebra garante que tanto γ^4 quanto μ^2 são parâmetros físicos da teoria.

Com relação ao comportamento do propagador com o momento k^2 podemos dizer o seguinte. Quando k^2 se aproxima da origem, o propagador será suprimido devido a presença dos parâmetros de massa,

$$D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(k^2)|_{k^2 \approx 0} \approx \frac{\mu^2}{4g^2\gamma^4} \left(1 - \frac{k^2}{4g^2\gamma^4/\mu^2}\right). \quad (7.30)$$

No limite em que $k^2 \rightarrow 0$, o propagador adquire um valor finito não-nulo,

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(k^2) = D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(0) = \frac{\mu^2}{4g^2\gamma^4}, \quad (7.31)$$

graças ao parâmetro μ^2 . Note-se que se $\mu^2 = 0$, então $D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(0) = 0$. Tal comportamento do propagador diagonal deixa dúvidas sobre a questão da dominância abeliana da teoria, pois, assim como no caso não-diagonal, o propagador do glúon abeliano é suprimido e tem um valor finito na origem. Definindo-se a razão,

$$r = \frac{m^2}{4g^2\gamma^4/\mu^2}, \quad (7.32)$$

podemos comparar os setores diagonal e não-diagonal na região infravermelha. Se por acaso $r > 1$, então os graus de liberdade não-diagonais “congelam” mais rápido que os diagonais quando $k^2 \rightarrow 0$ e a teoria é descrita nesta região, exclusivamente, por graus de liberdade abelianos, caracterizando assim a chamada dominância abeliana. Além disso, também é preciso levar em conta a contribuição, a ordens mais altas, do condensado de ghosts [134].

Quando k^2 assume valores muito maiores que γ^2 e μ^2 , ou seja, na região ultravioleta, esses parâmetros podem ser desprezados e o propagador perturbativo é recuperado¹,

$$D_{\gamma^4, \mu^2}^{\text{diag}}(k^2)|_{k^2 \gg \gamma^2, \mu^2} \sim \frac{1}{k^2}. \quad (7.33)$$

¹Na verdade, é suficiente que γ^2 seja desprezível quando confrontado com k^2 , independentemente do valor de μ^2 , para se reobter o propagador perturbativo, pois, neste caso, não se enxerga mais a quebra de BRST e μ^2 perde seu caráter físico.

7.1.4 Sobre os propagadores dos ghosts

O propagador do ghost diagonal (7.13) permanece intocável frente aos efeitos introduzidos no modelo, por estar protegido pela equação de antighost diagonal (6.44). Já o setor não-diagonal é afetado, mesmo ao nível árvore, pelos condensados $\langle \mathcal{O}_{\bar{f}f} \rangle$ e $\langle \mathcal{O}_{\bar{c}xc} \rangle$, e a ordens mais altas pela restrição à região de Gribov. O propagador dos ghosts não-diagonais pode ser dividido num setor simétrico

$$\langle \bar{c}^a(k)c^b(-k) \rangle_{\text{sim}} = G_{\mu^2, v^2}^{\text{sim}}(k^2) \delta^{ab}, \quad (7.34)$$

com

$$G_{\mu^2, v^2}^{\text{sim}}(k^2) = \frac{k^2 + \mu^2}{k^4 + 2\mu^2 k^2 + (\mu^4 + v^4)}, \quad (7.35)$$

e num setor antissimétrico:

$$\langle \bar{c}^a(k)c^b(-k) \rangle_{\text{antissim}} = G_{\mu^2, v^2}^{\text{anti}}(k^2) \varepsilon^{ab}, \quad (7.36)$$

com

$$G_{\mu^2, v^2}^{\text{anti}}(k^2) = \frac{v^2}{k^4 + 2\mu^2 k^2 + (\mu^4 + v^4)}. \quad (7.37)$$

O que temos a fazer então, é analisar as funções $G_{\mu^2, v^2}^{\text{sim}}(k^2)$ e $G_{\mu^2, v^2}^{\text{anti}}(k^2)$ sob dois aspectos. O primeiro é ver como estas se comportam quando mexemos nos parâmetros μ^2 e v^2 , e o outro é estudar o comportamento no infravermelho, $k^2 \approx 0$, e no ultravioleta, $k^2 \gg \mu^2, v^2$.

Na ausência do condensado de ghost, temos $v^2 = 0$ e a parte antissimétrica se anula, enquanto a parte simétrica tem o comportamento típico de Yukawa,

$$G_{\mu^2, v^2}^{\text{sim}}(k^2) \Big|_{v^2=0} = \frac{1}{k^2 + \mu^2}, \quad G_{\mu^2, v^2}^{\text{anti}}(k^2) \Big|_{v^2=0} = 0. \quad (7.38)$$

Por outro lado, quando fazemos $\mu^2 = 0$ as funções $G_{\mu^2, v^2}^{\text{sim}}(k^2)$ e $G_{\mu^2, v^2}^{\text{anti}}(k^2)$ ficam

$$G_{\mu^2, v^2}^{\text{sim}}(k^2) \Big|_{\mu^2=0} = \frac{k^2}{k^4 + v^4}, \quad G_{\mu^2, v^2}^{\text{anti}}(k^2) \Big|_{\mu^2=0} = \frac{v^2}{k^4 + v^4}, \quad (7.39)$$

ou seja, a parte simétrica é do tipo Gribov e a antissimétrica não se anula.

Agora, temos que examinar o comportamento dos propagadores com relação ao momento. Nossa primeira preocupação é saber se o propagador continuará a se comportar como $1/k^4$ quando $k^2 \approx 0$. Porém, temos que ir pelo menos a *1-loop*, ver fig. 7.1, para verificar este resultado:

$$\frac{1}{2} \sum_{ab} \delta^{ab} \langle \bar{c}^a(k)c^b(-k) \rangle \approx \frac{k^2 + \mu^2}{(k^2 + \mu^2)^2 + v^4} \frac{1}{1 - \sigma(k)} + \mathcal{J} \frac{(k^2 + \mu^2)^2}{[(k^2 + \mu^2)^2 + v^4]^2}, \quad (7.40)$$

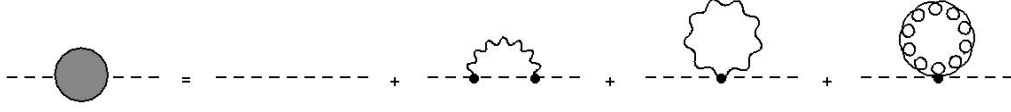


Figura 7.1: Propagador de ghosts a 1-loop. As linhas tracejada, ondulada e enrolada representam, respectivamente, ghosts, glúons diagonais e glúons não-diagonais.

onde, $\sigma(k)$ e \mathcal{J} são dados por

$$\sigma(k) = g^2 \frac{(k^2 + \mu^2)k_\mu k_\nu}{(k^2 + \mu^2)^2 + v^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{[(k-q)^2 + \mu^2] \langle A_\mu(q) A_\nu(-q) \rangle}{[(k-q)^2 + \mu^2]^2 + v^4}, \quad (7.41)$$

$$\mathcal{J} = g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \langle A_\mu(q) A_\mu(-q) \rangle + \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \langle A_\mu^a(q) A_\mu^a(-q) \rangle. \quad (7.42)$$

Como $\mathcal{J} \neq \mathcal{J}(k)$, apenas $\sigma(k)$ poderá contribuir para o *enhancement* do propagador de ghosts. Contudo, para que isto de fato ocorra, deveríamos poder mostrar que

$$\sigma(k) \rightarrow 1 - \text{cte} \frac{(k^2 + \mu^2)k^4}{(k^2 + \mu^2)^2 + v^4}, \quad (7.43)$$

sendo “cte” uma constante qualquer. Por se tratar de uma questão muito delicada e complexa, deixaremos a resposta para o final do capítulo. Por enquanto, vamos nos restringir à análise das funções $G_{\mu^2, v^2}^{\text{sim}}(k^2)$ e $G_{\mu^2, v^2}^{\text{anti}}(k^2)$ ao nível árvore. Assim como ocorre com os propagadores dos glúons, aqui os propagadores adquirem um valor finito não nulo quando $k^2 \rightarrow 0$:

$$G_{\mu^2, v^2}^{\text{sim}}(0) = \frac{\mu^2}{\mu^4 + v^4}, \quad G_{\mu^2, v^2}^{\text{anti}}(0) = \frac{v^2}{\mu^4 + v^4}, \quad (7.44)$$

e no ultravioleta, quando $k^2 \gg \mu^2, v^2$, temos

$$G_{\mu^2, v^2}^{\text{sim}}(k^2) \Big|_{k^2 \gg \mu^2, v^2} = \frac{1}{k^2}, \quad G_{\mu^2, v^2}^{\text{anti}}(k^2) \Big|_{k^2 \gg \mu^2, v^2} = 0. \quad (7.45)$$

7.2 Resultados da rede

Nesta seção, vamos apresentar os resultados obtidos em simulações na rede para o comportamento dos propagadores de glúons e ghosts. Nossas principais fontes são os trabalhos [118, 72, 73, 64, 149, 74]. O primeiro estudo dos propagadores de glúons na rede no MAG foi feito em [118] no caso de $SU(2)$. Neste, os propagadores foram analisados no espaço de coordenadas e o calibre tipo Landau foi adotado para fixar a simetria $U(1)$ residual do setor diagonal. Para a componente não-diagonal foi obtido um comportamento típico de interações de curto alcance, tipo Yukawa, ou seja, com a

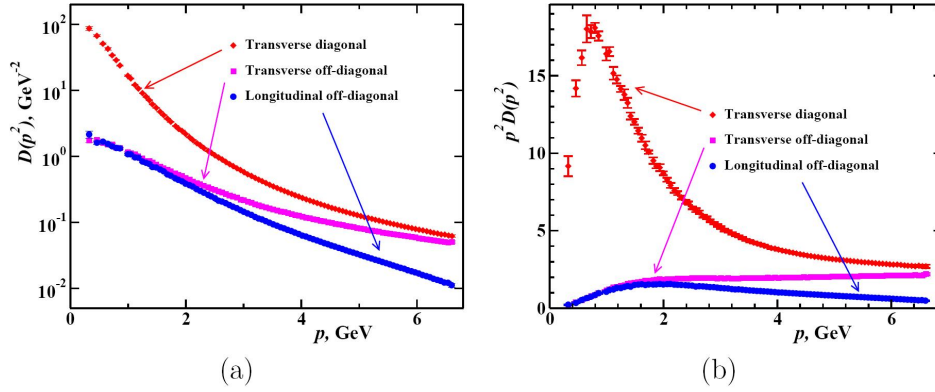


Figura 7.2: (a) Fatores de forma $D(p^2)$ versus p em GeV; (b) função “vestida” $p^2 D(p^2)$ versus p em GeV. Gráficos extraídos de [72].

supressão a grandes distâncias devido à presença de um parâmetro massivo da ordem de 1,2 GeV. A respeito da componente diagonal, foi obtido que esta se propaga a longas distâncias. Estes resultados foram interpretados como evidência da dominância abeliana no infravermelho.

Em [72, 73] os propagadores dos glúons são investigados no espaço de momentos, o que permite uma comparação direta com nossos resultados. Assim como em [118], o grupo de calibre é o $SU(2)$ e fixação do setor diagonal foi feita escolhendo-se a condição de Landau. Os resultados obtidos neste trabalho, mostram que, a momentos pequenos, a componente abeliana é muito maior que a do não-diagonal, ver fig. 7.2. Vários tipos de *fits* foram estudados e, em particular, um fit tipo Gribov,

$$D_{\text{diag}}(k^2) = Z_{\text{diag}} \frac{k^2}{k^4 + m_{\text{diag}}^4}, \quad (7.46)$$

parece se adequar bem para o propagador abeliano. Para os glúons não-diagonais, um *fit* tipo Yukawa, *i. e.*,

$$D_{\text{off}}(k^2) = Z_{\text{off}} \frac{1}{k^2 + m_{\text{off}}^2}, \quad (7.47)$$

é obtido com sucesso. As funções $D_{\text{diag}}(k^2)$ e $D_{\text{off}}(k^2)$ ditam o comportamento das componentes transversas dos propagadores dos glúons diagonal e não-diagonais, respectivamente. O parâmetro de massa m_{off} é cerca de duas vezes maior que m_{diag} ,

$$m_{\text{off}} \approx 2m_{\text{diag}}, \quad (7.48)$$

e tem aproximadamente o mesmo valor que o obtido em [118], $m_{\text{off}} \approx 1,2$ GeV. Isto indica que o propagador não-diagonal tem alcance mais curto quando comparado com

	a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{d}{c}$
dimensão	2	0	-2	-2	2	4	2	0

Tabela 7.1: Dimensão de massa dos parâmetros de (7.49).

o diagonal, ou seja, seus graus de liberdade são suprimidos no infravermelho antes do abeliano.

Os trabalhos [64, 149, 74] apresentam os dados mais recentes da rede no MAG em $SU(2)$. Nestes, é apresentado, pela primeira vez, o estudo dos propagadores de ghosts no MAG². A forma do propagador do glúon diagonal que tem o melhor acordo com os dados tem a forma

$$D_{\text{diag}}(k^2) = \frac{1 + dk^2}{a + bk^2 + ck^4}, \quad (7.49)$$

com uma massa

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \approx 0,72 \text{ GeV}. \quad (7.50)$$

De acordo com a tabela 7.1, a expressão (7.49) pode ser reescrita como

$$D_{\text{diag}}(k^2) = \frac{d}{c} \frac{k^2 + \frac{1}{d}}{k^4 + \frac{b}{c}k^2 + \frac{a}{c}}, \quad (7.51)$$

e identificada com (7.22), a menos de um fator multiplicativo global, quando fazemos a seguinte correspondência:

$$\frac{b}{c} \rightarrow \mu^2, \quad \frac{1}{d} \rightarrow \mu^2, \quad \frac{a}{c} \rightarrow 4g^2\gamma^4. \quad (7.52)$$

Dessa forma, vemos que a partir do modelo aqui apresentado, o propagador do glúon abeliano está em acordo qualitativo com o *fit* (7.49). Porém, o modelo sugere um caso particular de (7.49) quando

$$\frac{bd}{c} = 1. \quad (7.53)$$

Quanto ao propagador de glúons não-diagonal, os autores apresentam como o melhor *fit*, o de Yukawa, *i. e.*,

$$D_{\text{off}}(k^2) = \frac{1}{a + bk^2}, \quad (7.54)$$

com uma massa

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \approx 0,97 \text{ GeV}. \quad (7.55)$$

²Em [65] é apresentado um estudo da condensação dos ghosts no Landau.

Esta massa é maior que aquela obtida no setor diagonal, eq. (7.50), como é esperado num cenário de dominância abeliana. A comparação de (7.54) com (7.17) é imediata:

$$\frac{a}{b} \rightarrow m^2, \quad b D_{\text{off}}(k^2) \rightarrow D_{m^2}^{\text{off}}(k^2). \quad (7.56)$$

No entanto, o valor obtido para m em [67], assumindo $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} \approx 0,275 \text{ GeV}$, é

$$m \approx 0,62 \text{ GeV}, \quad (7.57)$$

que difere bastante de (7.55). Ainda no setor não-diagonal, parece haver um propagador longitudinal que vai como

$$D_{\text{off}}^{\parallel}(k^2) = \frac{1}{a + b k^2 + c k^4}, \quad (7.58)$$

com uma massa

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \approx 1,25 \text{ GeV}. \quad (7.59)$$

Agora, vejamos o que se pode dizer sobre os propagadores dos ghosts. Em [64, 149, 74] o fator de forma da componente simétrica do propagador dos ghosts é dado por

$$G_{\text{sim}}(k^2) = \frac{1 + d k^2}{a + b k^2 + c k^4}, \quad (7.60)$$

onde k é o chamado “momento melhorado” [150], que coincide com o momento comum quando o espaçamento da rede vai a zero, e os parâmetros (a, b, c, d) são dados por

$$\begin{aligned} a &= 0,45(1) \text{ GeV}^2, \\ b &= 1,1(3), \\ c &= 0,73(30) \text{ GeV}^{-2}, \\ d &= 2,1(9) \text{ GeV}^{-2}, \end{aligned} \quad (7.61)$$

o que leva a uma massa

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \approx 0,6 \text{ GeV}. \quad (7.62)$$

Com estes valores é possível ajustar o propagador do ghost na rede como se depreende da figura 7.3. Além disso, devemos destacar um resultado muito importante que é o de que nenhum *enhancement* para o propagador de ghosts é obtido.

De posse dos dados (7.61) e do fator de forma (7.60) podemos comparar os resultados da rede com a função (7.35). Reescrevendo (7.60) como

$$G_{\text{sim}}(k^2) = \frac{d}{c} \frac{k^2 + \frac{1}{d}}{k^4 + \frac{b}{c} k^2 + \frac{a}{c}}, \quad (7.63)$$

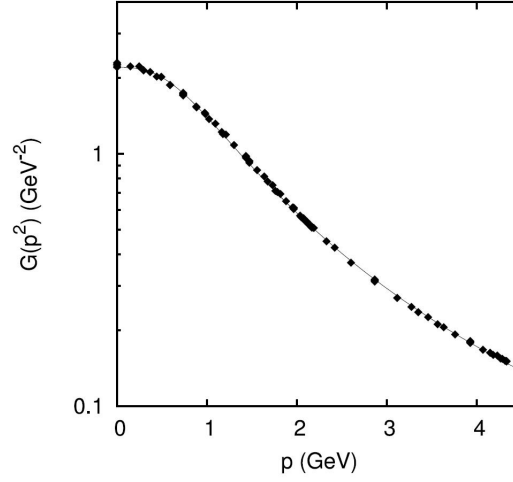


Figura 7.3: Plot de $G_{\text{sim}}(p^2)$ em função do momento melhorado p em GeV. Gráfico extraído de [64].

e comparando com (7.35), temos

$$\frac{1}{d} \rightarrow \mu^2, \quad \frac{b}{2c} \rightarrow \mu^2, \quad \frac{a}{c} \rightarrow \mu^4 + v^4. \quad (7.64)$$

A partir dos valores (7.61), podemos determinar os intervalos onde se encontram as quantidades $1/d$ e $b/2c$:

$$\frac{1}{d_{\text{máx}}} \leq \frac{1}{d} \leq \frac{1}{d_{\text{mín}}}, \quad \frac{b_{\text{mín}}}{2c_{\text{máx}}} \leq \frac{b}{2c} \leq \frac{b_{\text{máx}}}{2c_{\text{mín}}}. \quad (7.65)$$

Logo, podemos considerar um bom acordo com esses resultados se μ^2 estiver na interseção destes intervalos. Neste caso, deveríamos encontrar μ^2 dentro do intervalo

$$\frac{b_{\text{mín}}}{2c_{\text{máx}}} \leq \mu^2 \leq \frac{1}{d_{\text{mín}}}, \quad (7.66)$$

onde

$$\frac{b_{\text{mín}}}{2c_{\text{máx}}} \approx 0,39 \text{ GeV}^2, \quad \frac{1}{d_{\text{mín}}} \approx 0,83 \text{ GeV}^2. \quad (7.67)$$

Já o valor do condensado de ghost v^2 deverá estar no intervalo

$$v_{\text{mín}}^2 \leq v^2 \leq v_{\text{máx}}^2, \quad (7.68)$$

onde

$$\begin{aligned} v_{\text{mín}}^2 &= 0, \\ v_{\text{máx}}^2 &= \sqrt{\frac{a_{\text{máx}}}{c_{\text{mín}}} - \left(\frac{b_{\text{mín}}}{2c_{\text{máx}}}\right)^2} \approx 0,96 \text{ GeV}^2. \end{aligned} \quad (7.69)$$

De fato, o parâmetro v^2 foi calculado no MAG em $SU(2)$ em [134], sem a presença da função horizonte, e o valor obtido naquela ocasião foi

$$v^2 \approx 0,18 \text{ GeV}^2, \quad (7.70)$$

que se encontra no intervalo (7.68). Além disso, O limite inferior $v_{\min}^2 = 0$ implica a existência de um valor limite para μ^2 , acima do qual v^2 se torna imaginário. Este valor limite nos permitirá refinar o intervalo (7.66). Assim, o novo intervalo para μ^2 é

$$\mu_{\min}^2 \leq \mu^2 \leq \mu_{\max}^2, \quad (7.71)$$

onde

$$\begin{aligned} \mu_{\min}^2 &= \frac{b_{\min}}{2c_{\max}} \approx 0,39 \text{ GeV}^2, \\ \mu_{\max}^2 &= \sqrt{\frac{a_{\min}}{c_{\max}}} \approx 0,65 \text{ GeV}^2. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Finalmente, os autores propõem a quantidade

$$\Phi(k) = \left(r + \frac{s k}{L^2} \right) \frac{1}{k^4 + t^2}, \quad (7.73)$$

para estudar o propagador antissimétrico dos ghosts, onde L é o comprimento da rede e (r, s, t) é um conjunto de parâmetros que serão fixados para acertar o *fit* de $\Phi(k)$. A quantidade $\Phi(k)$ se relaciona com o propagador dos ghosts através da expressão

$$\Phi(k) = \frac{L^2}{\cos\left(\frac{\pi k a}{L}\right)} \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} G^{ab}(k^2) \right\rangle, \quad (7.74)$$

onde os detalhes da notação são extraídos de [65]. A conclusão a que se chega desta abordagem é que existiria um condensado de ghosts da ordem de $1,3 \text{ GeV}^2$; porém, não se pode afirmar que este sobreviva ao limite do contínuo.

Assim, encerramos esta seção lembrando que os propagadores da teoria descrita pela ação Σ no seu limite físico estão qualitativamente de acordo com os resultados numéricos da rede [118, 72, 73, 64, 149, 74]. No entanto, ainda é preciso fixar o valor de μ^2 a fim de que se verifique se estamos realmente no intervalo (7.71).

7.3 De volta à questão do *enhancement* dos ghosts

Como já foi dito, a investigação do *enhancement* do propagador dos ghosts é uma questão delicada e merece uma atenção especial, pois é preciso ir além do nível árvore,

ver fig. 7.1. Para simplificar o problema vamos tomar o caso particular em que $v^2 = 0$, ou seja, vamos desconsiderar a presença do condensado $\langle \varepsilon^{ab} \bar{c}^a c^b \rangle$. Dessa forma, temos

$$\frac{1}{2} \sum_{ab} \delta^{ab} \langle \bar{c}^a(k) c^b(-k) \rangle \approx \frac{1}{k^2 + \mu^2} \frac{1}{1 - \sigma(k)} + \mathcal{J} \frac{1}{(k^2 + \mu^2)^2}, \quad (7.75)$$

onde, $\sigma(k)$ e \mathcal{J} são dados por

$$\sigma(k) = g^2 \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \mu^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\langle A_\mu(q) A_\nu(-q) \rangle}{(k - q)^2 + \mu^2}, \quad (7.76)$$

$$\mathcal{J} = g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \langle A_\mu(q) A_\mu(-q) \rangle + \frac{g^2}{2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \langle A_\mu^a(q) A_\mu^a(-q) \rangle. \quad (7.77)$$

Como \mathcal{J} independe de k , a única possibilidade de *enhancement* viria de $\sigma(k)$. Logo, substituindo na expressão de $\sigma(k)$ o propagador (7.10) temos

$$\sigma(k) = g^2 \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \mu^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q^2 + \mu^2)(\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2)}{[(k - q)^2 + \mu^2](q^4 + \mu^2 q^2 + 4g^2 \gamma^4)}. \quad (7.78)$$

Para podermos desenvolver a expressão acima devemos levar em conta que a introdução do operador $\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x)$ e a presença do parâmetro χ , até então arbitrário, alteram a equação de *gap* que define γ^2 . Tomemos então o funcional de vértice a 1-loop,

$$e^{-\Gamma_{\gamma^2}^{(1)}} = \int [d\Phi] e^{-\Sigma_{\text{phys}}^{\text{quad}} + 8V\chi\gamma^4}, \quad (7.79)$$

sendo suficiente manter apenas os termos onde aparece o parâmetro γ^2 . Assim,

$$\Gamma_{\gamma^2}^{(1)} = -8\chi\gamma^4 + \frac{3}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \frac{k^4 + \mu^2 k^2 + 4g^2 \gamma^4}{k^2 + \mu^2}. \quad (7.80)$$

Aplicando a equação do *gap* (7.14), obtemos

$$\frac{\partial \Gamma_{\gamma^2}^{(1)}}{\partial \gamma^2} = 16\gamma^2 \left(-\chi + \frac{3}{4} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4 + \mu^2 k^2 + 4g^2 \gamma^4} \right) = 0. \quad (7.81)$$

Redefinindo o parâmetro χ como

$$\chi = 1 - \delta, \quad (7.82)$$

obtemos uma equação de *gap* modificada:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{3g^2/4}{k^4 + \mu^2 k^2 + 4g^2 \gamma^4} = 1 - \delta. \quad (7.83)$$

Voltemos agora a equação (7.78). Esta pode ser facilmente reescrita na forma

$$\begin{aligned} \sigma(k) &= \frac{3}{4} g^2 \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^4 + \mu^2 q^2 + 4g^2 \gamma^4} \\ &\quad - g^2 \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \mu^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k^2 - 2k \cdot q)(\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2)}{[(k - q)^2 + \mu^2](q^4 + \mu^2 q^2 + 4g^2 \gamma^4)}. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Notando-se que

$$\frac{k^2 - 2k \cdot q}{(k - q)^2 + \mu^2} = \frac{\frac{k^2 - 2k \cdot q}{q^2 + \mu^2}}{1 + \frac{k^2 - 2k \cdot q}{q^2 + \mu^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{k^2 - 2k \cdot q}{q^2 + \mu^2} \right)^{n+1} \quad (7.85)$$

e utilizando a equação de *gap* modificada (7.83), temos

$$\sigma(k) = (1 - \delta) \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} (1 - k^2 \mathcal{I}(\mu, \gamma)) + O(k^6), \quad (7.86)$$

onde a integral $\mathcal{I}(\mu, \gamma)$ é dada por

$$\mathcal{I}(\mu, \gamma) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{3g^2/4}{(q^2 + \mu^2)(q^4 + \mu^2 q^2 + 4g^2 \gamma^4)}. \quad (7.87)$$

Neste ponto há uma importante observação a ser feita. No problema original de Gribov, a função $\sigma(k)$, como sabemos, determina se estamos dentro da região de Gribov através de condição de ausência de pólos do propagador, uma vez que se verifique

$$\sigma(0)|_{\mu^2=0} < 1. \quad (7.88)$$

Então, fazendo $\mu^2 = 0$ e em seguida tomando-se a função $\sigma(k)|_{\mu^2=0}$ na origem, temos

$$\sigma(0)|_{\mu^2=0} = 1 - \delta, \quad (7.89)$$

o que restringe o valor de δ a

$$0 < \delta \leq 1. \quad (7.90)$$

No entanto, independentemente do valor de δ a função $\sigma(k)$, para um valor não-nulo de μ^2 , vai a zero no limite em que $k_\mu \rightarrow 0$, *i. e.*,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma(k) = \sigma(0) = 0. \quad (7.91)$$

Isto ocorre porque o propagador completo dos ghosts não-diagonais é o inverso do operador

$$\mathcal{O}^{ab} = \mathcal{M}^{ab} + \delta^{ab} \mu^2, \quad (7.92)$$

que não é singular quando \mathcal{M}^{ab} atinge um modo zero. Isto no entanto, não nos impede de verificar ordem a ordem a condição de não-existência de pólos da função de Green

$$\mathcal{G}(k) = \frac{1}{2} \sum_{ab} \delta^{ab} \langle k | (\mathcal{M}^{-1})^{ab} | k \rangle, \quad (7.93)$$

bastando para isto tomar o limite em que $\mu^2 \rightarrow 0$ no propagador de ghosts

$$\lim_{\mu^2 \rightarrow 0} \frac{1}{2} \langle \bar{c}^a(k) c^a(-k) \rangle = \mathcal{G}(k). \quad (7.94)$$

Voltando ao cálculo do propagador próximo à origem, podemos notar de imediato que para $k^2 \approx 0$ temos

$$\sigma(k) \approx \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} (1 - k^2 \mathcal{I}(\mu, \gamma)), \quad (7.95)$$

onde desprezamos o fator δ . Logo,

$$\frac{1}{2} \sum_{ab} \delta^{ab} \langle \bar{c}^a(k) c^b(-k) \rangle \approx \frac{1}{k^4 \mathcal{I}(\mu, \gamma) + \mu^2} + \frac{\mathcal{J}(\mu, \gamma)}{(k^2 + \mu^2)^2}, \quad (7.96)$$

e nenhum *enhancement* é observado. De fato, para $k^2 = 0$,

$$\frac{1}{2} \langle \bar{c}^a(k) c^a(-k) \rangle|_{k^2=0} = \frac{1}{\mu^2} + \frac{\mathcal{J}(\mu, \gamma)}{\mu^4}. \quad (7.97)$$

Notemos ainda que os resultados do capítulo 3 são reproduzidos quando a massa μ^2 é igual a zero:

$$\frac{1}{2} \langle \bar{c}^a(k) c^a(-k) \rangle|_{\mu^2=0} \approx \left(\frac{1}{\mathcal{I}(\gamma)} + \mathcal{J}(\gamma) \right) \frac{1}{k^4}. \quad (7.98)$$

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES

A primeira metade desta tese, que se constitui dos capítulos 1, 2 e 3, foi destinada à apresentação de alguns conceitos fundamentais das teorias de Yang-Mills e a introdução do MAG, na qual inclui-se a investigação do problema das cópias de Gribov neste calibre no caso particular de $SU(2)$. Em seguida, no capítulo 4, conseguimos ir um pouco além e determinamos a chamada função horizonte,

$$S_H = g^2 \gamma^4 \int \varepsilon^{ab} A_\mu (\mathcal{M}^{-1})^{ac} \varepsilon^{cb} A_\mu,$$

definindo assim a ação de Gribov-Zwanziger para este calibre.

Inspirados em dados recentes da rede, tanto no Landau [18, 28, 65] quanto no próprio MAG [74, 149, 64], e numa vasta gama de publicações ao longo dos últimos anos, ver as referências do capítulo 5, construímos um modelo no MAG em $SU(2)$, descrito pela ação Σ , eq. (6.36), que engloba diversos efeitos de caráter não-perturbativo como o termo de horizonte de Gribov em sua versão local e estendida, e uma série de operadores locais de dimensão dois, adequadamente selecionados. Estes operadores são: o operador de glúons

$$\mathcal{O}_{A^2}(x) = \frac{1}{2} A_\mu^a(x) A_\mu^a(x),$$

cuja condensação gera uma massa m^2 ; o operador

$$\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x) = \bar{\phi}_\mu^{ab}(x) \phi_\mu^{ab}(x) - \bar{\omega}_\mu^{ab}(x) \omega_\mu^{ab}(x) - \bar{c}^a(x) c^a(x),$$

que envolve os campos auxiliares responsáveis pela localização da função horizonte $(\phi_\mu^{ab}, \bar{\phi}_\mu^{ab}, \omega_\mu^{ab}, \bar{\omega}_\mu^{ab})$ e os campos não-diagonais de Faddeev-Popov (c^a, \bar{c}^a) , e cuja condensação gera o parâmetro de massa μ^2 ; e finalmente, o operador de ghosts

$$\mathcal{O}_{\bar{c} \times c}(x) = g \varepsilon^{ab} \bar{c}^a(x) c^b(x),$$

que gera o parâmetro v^2 . O vasto conteúdo de simetria da ação Σ garante que esta seja renormalizável, fato este que foi comprovado no capítulo 6.

Podemos usar os propagadores do nosso modelo como parâmetros de comparação entre nossos resultados e os resultados da rede. No capítulo 7 calculamos os propagadores da teoria obtendo o seguinte:

$$\begin{aligned}\langle A_\mu^a(k)A_\nu^b(-k) \rangle &= \frac{1}{k^2 + m^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab}, \\ \langle A_\mu(k)A_\nu(-k) \rangle &= \frac{k^2 + \mu^2}{k^4 + \mu^2 k^2 + 4g^2 \gamma^4} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \\ \langle \bar{c}^a(k)c^b(-k) \rangle_{\text{sim}} &= \frac{k^2 + \mu^2}{k^4 + 2\mu^2 k^2 + (\mu^4 + v^4)} \delta^{ab}, \\ \langle \bar{c}^a(k)c^b(-k) \rangle_{\text{antissim}} &= \frac{v^2}{k^4 + 2\mu^2 k^2 + (\mu^4 + v^4)} \varepsilon^{ab}, \\ \langle \bar{c}(k)c(-k) \rangle &= \frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$

Estes são os propagadores calculados à ordem mais baixa. Portanto, são ainda resultados preliminares. No entanto, ainda assim estão em bom acordo qualitativo com as predições numéricas [72, 73, 64, 149, 74]¹. Um dos resultados mais interessantes que se extrai do modelo é a presença da componente antissimétrica do propagador dos ghosts não-diagonais, também observada na rede, que ocorre graças à condensação do operador de ghost $\mathcal{O}_{\bar{c} \times c}(x)$. Também não poderíamos deixar de mencionar a supressão dos propagadores dos glúons no infravermelho, e a inobservância do *enhancement* dos propagadores de ghosts. Esta última propriedade se deve à presença das massas μ e v .

Como vimos, o modelo fisicamente relevante é aquele dado pela ação Σ no limite em que as fontes tomam os valores físicos. Assim, o modelo físico depende dos parâmetros massivos (γ, μ, m, v) e ainda de um conjunto de parâmetros adimensionais $(\zeta, \rho, \kappa, \beta, \chi)$. Estes, porém, não são parâmetros livres. Os parâmetros adimensionais devem ser fixados através do grupo de renormalização, tal como é feito numa série de trabalhos anteriores, ver, por exemplo, [133, 67, 134, 21]. Já os parâmetros massivos devem ser fixados através de equações de *gap*, como, por exemplo, a fixação de γ através da equação

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma^2} = 0.$$

No nosso caso, a equação que fixa γ depende também de μ . Portanto, a equação de *gap* citada acima fornece uma dependência em μ de γ , ou seja,

$$\gamma^2 = \gamma^2(\mu).$$

¹A rede também prevê uma componente longitudinal para os glúons não-diagonais.

A fixação de μ^2 poderá ser feita a partir da minimização do potencial efetivo relacionado ao operador $\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x)$, como descrito na seção 5.4. Este procedimento foi utilizado em [67] e [134] para fixar os valores de $m \approx 0,62 \text{ GeV}$ e $v^2 \approx 0,18 \text{ GeV}^2$, com $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} \approx 0,275 \text{ GeV}$. Em todo caso, uma comparação com os dados numéricos da rede leva à previsão de um intervalo para μ^2 entre $\mu_{\text{min}}^2 \approx 0,39 \text{ GeV}^2$ e $\mu_{\text{máx}}^2 \approx 0,65 \text{ GeV}^2$. Uma vez obtidos os valores de todos estes parâmetros, a questão da dominância abeliana poderá ser avaliada pela relação $r = m^2\mu^2/4g^2\gamma^4$, sendo $r > 1$ um resultado favorável à esta hipótese. Vale ainda ressaltar que, em [135], um extenso trabalho similar a este é apresentado no calibre de Landau com grande sucesso.

Um outro ponto que não podemos deixar de mencionar é a quebra explícita da simetria de BRST. De fato, o termo de Gribov-Zwanziger e os operadores locais quebram explicitamente esta simetria, porém de forma suave. Assim, toda a construção do modelo pode ser entendida do ponto de vista desse mecanismo de quebra. Em outras palavras, é possível construir um modelo estendido, dado pela ação Σ , que possui um rico conteúdo de simetria, o que garante sua renormalizabilidade, que só é quebrado quando se tomam valores físicos, funcionando como condições de contorno que dão sentido à teoria [100]. Claro está que tais valores devem ser adequadamente fixados de maneira que o único parâmetro genuíno seja a constante de acoplamento g da teoria.

Com relação ao mecanismo de confinamento, notemos primeiro o que ocorre atualmente no calibre de Landau. Na série de trabalhos [155, 154, 153, 152, 151] argumenta-se, através de soluções das equações de Dyson-Schwinger², que um potencial linear entre quarks resultaria de um propagador de ghosts divergente no infravermelho, tipicamente $\sim 1/(k^2)^{1,6}$. Ainda, o propagador dos glúons iria como $\sim (k^2)^{0,19}$, ou seja, neste cenário o setor infravermelho seria governado pelos ghosts. Entretanto, recentes resultados da rede³ [18, 156] descartam o *enhancement* dos ghost e uma nova solução das equações de Dyson-Schwinger⁴ [157, 158] também aponta nesta direção. A única proposta puramente analítica de que se tem notícia até o presente momento é [135]. Voltando ao MAG, o que podemos afirmar é que, se por um lado, a supressão dos propagadores de glúons e ghosts indica a ausência de estados assintóticos de glúons, o que é esperado para objetos confinados, por outro lado, persiste a questão acerca da origem da interação de longo al-

²Devemos ressaltar que não há estudos das equações de Dyson-Schwinger no MAG.

³Providos pelo advento de redes maiores.

⁴Na verdade, uma solução já conhecida que foi revitalizada pelos novos resultados da rede.

cance responsável pelo confinamento dos quarks. Esta é ainda uma pergunta em aberto, cuja resposta pode estar em efeitos topológicos como o mecanismo de supercondutividade dual num cenário de dominância abeliana [58, 60, 59, 61], ou a condensação de vórtices centrais [159, 160].

Como perspectivas de continuidade desta pesquisa tem-se a extensão da análise aqui apresentada — ambiguidades de Gribov, modelo de Gribov-Zwanziger, introdução de operadores locais de dimensão dois, formulação de um modelo estendido renormalizável, análise dos propagadores, fixação dos parâmetros, etc — no caso geral onde o grupo de calibre é o $SU(N)$, já que existe um interesse óbvio para o caso $SU(3)$ por se tratar do grupo da QCD. Porém, ainda em $SU(2)$ é preciso fixar os parâmetros μ^2 e $\gamma^2(\mu)$ e o parâmetro adimensional $\chi = 1 - \delta$. Estes dados são de importância crucial para dar consistência ao modelo. Uma vez que tenhamos uma estimativa de todos os parâmetros da teoria poderemos concluir se, ao introduzir o operador $\mathcal{O}_{\bar{f}f}(x)$, continuamos dentro da região de Gribov; poderemos atestar a dominância abeliana; e poderemos fazer uma comparação ao nível quantitativo com os dados da rede.

Por fim, esperamos fortemente que esta tese possa inspirar e/ou auxiliar tanto aos pesquisadores da área quanto aos estudantes que venham a se interessar pelo assunto, ou ainda àqueles que tenham apenas alguma curiosidade.

APÊNDICE A

PROVA DA HERMITICIDADE DE \mathcal{M}^{ab}

Podemos mostrar que o operador,

$$\mathcal{M}^{ab} = -D_\mu^{ac} D_\mu^{cb} - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{bd} A_\mu^c A_\mu^d, \quad (\text{A.1})$$

é hermitiano, ou seja,

$$\int d^4x (\mathcal{M}\varphi)^{a\dagger} \psi^a = \int d^4x \varphi^{a\dagger} (\mathcal{M}\psi)^a, \quad (\text{A.2})$$

substituindo (A.1) no lado esquerdo de (A.2) e integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int d^4x (\mathcal{M}\varphi)^{a\dagger} \psi^a &= \int d^4x (-D_\mu^{ac} D_\mu^{cb} \varphi^{b\dagger} - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{bd} A_\mu^c A_\mu^d \varphi^{b\dagger}) \psi^a \\ &= \int d^4x [-(\partial^2 \varphi^{a\dagger}) \psi^a + g \varepsilon^{ab} \partial_\mu (A_\mu \varphi^{b\dagger}) \psi^a + g \varepsilon^{ab} A_\mu (\partial_\mu \varphi^{b\dagger}) \psi^a \\ &\quad - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{cb} A_\mu A_\mu \varphi^{b\dagger} \psi^a - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{bd} A_\mu^c A_\mu^d \varphi^{b\dagger} \psi^a] \\ &= \int d^4x [-\varphi^{a\dagger} \partial^2 \psi^a - g \varepsilon^{ab} \varphi^{b\dagger} A_\mu \partial_\mu \psi^a - g \varepsilon^{ab} \varphi^{b\dagger} \partial_\mu (A_\mu \psi^a) \\ &\quad - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{cb} A_\mu A_\mu \varphi^{b\dagger} \psi^a - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{bd} A_\mu^c A_\mu^d \varphi^{b\dagger} \psi^a] \\ &= \int d^4x [-\varphi^{a\dagger} \partial^2 \psi^a + g \varepsilon^{ab} \varphi^{a\dagger} A_\mu \partial_\mu \psi^b + g \varepsilon^{ab} \varphi^{a\dagger} \partial_\mu (A_\mu \psi^b) \\ &\quad - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{cb} A_\mu A_\mu \varphi^{a\dagger} \psi^b - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{bd} A_\mu^c A_\mu^d \varphi^{a\dagger} \psi^b] \\ &= \int d^4x \varphi^{a\dagger} (-D_\mu^{ac} D_\mu^{cb} \psi^b - g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{bd} A_\mu^c A_\mu^d \psi^b) \\ &= \int d^4x \varphi^{a\dagger} \mathcal{M}^{ab} \psi^b \\ &= \int d^4x \varphi^{a\dagger} (\mathcal{M}\psi)^a. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

APÊNDICE B

DESACOPLAMENTO DOS GHOSTS DIAGONAIS

No capítulo 2, vimos diversos aspectos do MAG, incluindo nestes a quantização de Faddeev-Popov, que leva ao termo de fixação de calibre (2.14), e à introdução de interações quárticas entre os ghosts, eq. (2.31). Aqui, iremos mostrar, no MAG em $SU(2)$, que os ghosts diagonais (\bar{c}, c) podem ser inteiramente desacoplados da teoria. Nosso ponto de partida será a seguinte função de partição

$$\mathcal{Z} = \int [dA^a][dA][db^a][db][dc^a][d\bar{c}^a][dc][d\bar{c}] e^{-(S_{\text{YM}}+S_{\text{MAG}}+S_\alpha)}, \quad (\text{B.1})$$

onde S_{YM} é dada por (3.9), enquanto S_{MAG} e S_α são as versões em $SU(2)$ de (2.14) e (2.31), respectivamente,

$$S_{\text{YM}} = \frac{1}{4} \int d^4x \left(F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (\text{B.2})$$

$$S_{\text{MAG}} = \int d^4x \left[ib^a D_\mu^{ab} A_\mu^b + \bar{c}^a D_\mu^{ac} D_\mu^{cb} c^b + g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{bd} \bar{c}^a c^b A_\mu^c A_\mu^d + g \varepsilon^{ab} \bar{c}^a (D_\mu^{ab} A_\mu^b) c \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2} b^2 + ib \partial_\mu A_\mu + \bar{c} \partial_\mu (\partial_\mu c + g \varepsilon^{ab} A_\mu^a c^b) \right], \quad (\text{B.3})$$

$$S_\alpha = \frac{\alpha}{2} \int d^4x \left(b^a b^a + 2ig \varepsilon^{ab} b^a \bar{c}^b c + \frac{g^2}{2} \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} \bar{c}^a \bar{c}^b c^c c^d \right). \quad (\text{B.4})$$

Note-se que em (B.3) introduzimos um termo proporcional ao parâmetro de calibre β . Este termo, no entanto, não altera em nada a ação do MAG, pois no final, tomaremos o limite $\beta \rightarrow 0$, assim como ocorrerá com α . Porém, este termo permite que se faça a integração gaussiana no campo auxiliar $b(x)$. Assim, fazendo as integrações gaussianas nos campos $b^a(x)$ e $b(x)$ obtemos:

$$\mathcal{Z} = \int [dA^a][dA][dc^a][d\bar{c}^a][dc][d\bar{c}] e^{-S_{\text{YM}}} e^{-\int d^4x \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu A_\mu)^2} e^{-\int d^4x \frac{1}{2\alpha} (D_\mu^{ab} A_\mu^b)^2} \\ \times \exp \left[- \int d^4x \left(\bar{c}^a D_\mu^{ac} D_\mu^{cb} c^b + g^2 \varepsilon^{ac} \varepsilon^{bd} \bar{c}^a c^b A_\mu^c A_\mu^d - g \varepsilon^{ab} \bar{c}^a (D_\mu^{ab} A_\mu^b) c \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{c} \partial_\mu (\partial_\mu c + g \varepsilon^{ab} A_\mu^a c^b) + \frac{\alpha}{4} g^2 \varepsilon^{ab} \varepsilon^{cd} \bar{c}^a \bar{c}^b c^c c^d \right) \right]. \quad (\text{B.5})$$

Tomando os limites quando α e β vão para zero, temos

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} e^{-\int d^4x \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu A_\mu)^2} \propto \delta(\partial_\mu A_\mu), \quad (\text{B.6})$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\int d^4x \frac{1}{2\alpha} (D_\mu^{ab} A_\mu^b)^2} \propto \delta(D_\mu^{ab} A_\mu^b). \quad (\text{B.7})$$

Usando a propriedade da delta

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x),$$

segue que

$$e^{+\int d^4x g\varepsilon^{ab}\bar{c}^a c (D_\mu^{bc} A_\mu^c)} \delta(D_\mu^{ab} A_\mu^b) = \delta(D_\mu^{ab} A_\mu^b). \quad (\text{B.8})$$

A função de partição fica então,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int [dA^a][dA][dc^a][d\bar{c}^a][dc][d\bar{c}] \delta(D_\mu^{ab} A_\mu^b) \delta(\partial_\mu A_\mu) e^{-S_{\text{YM}}} \\ &\times \exp\left[-\int d^4x \left(-\bar{c}^a \mathcal{M}^{ab} c^b + \bar{c} \partial_\mu (\partial_\mu c + g\varepsilon^{ab} A_\mu^a c^b)\right)\right], \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

lembrando que \mathcal{M}^{ab} é o operador de Faddeev-Popov (3.20).

Agora, para lidar com os ghosts diagonais (\bar{c}, c) faremos uma mudança de variáveis:

$$c \rightarrow \xi = c + g\varepsilon^{ab} \frac{\partial_\mu}{\partial^2} (A_\mu^a c^b), \quad \bar{c} \rightarrow \bar{\xi} = \bar{c}, \quad (\text{B.10})$$

com os outros campos permanecendo inalterados. Podemos, facilmente, verificar que

$$\bar{c} \partial_\mu (\partial_\mu c + g\varepsilon^{ab} A_\mu^a c^b) \rightarrow \bar{\xi} \partial^2 \xi, \quad (\text{B.11})$$

e que o jacobiano correspondente a esta transformação é independente dos campos. Assim, torna-se possível visualizar que a transformação (B.10) desacopla os ghosts diagonais da teoria,

$$\mathcal{Z} = \left(\int [d\xi][d\bar{\xi}] e^{-\int d^4x \bar{\xi} \partial^2 \xi} \right) \int [dA^a][dA][dc^a][d\bar{c}^a] \delta(D_\mu^{ab} A_\mu^b) \delta(\partial_\mu A_\mu) e^{-S_{\text{YM}}} e^{+\int d^4x \bar{c}^a \mathcal{M}^{ab} c^b}. \quad (\text{B.12})$$

Logo, integrando nos ghosts diagonais $(\bar{\xi}, \xi)$, obtemos

$$\mathcal{Z} = \mathcal{N} \int [dA^a][dA] \delta(D_\mu^{ab} A_\mu^b) \delta(\partial_\mu A_\mu) \left(\int [dc^a][d\bar{c}^a] e^{+\int d^4x \bar{c}^a \mathcal{M}^{ab(A)} c^b} \right) e^{-S_{\text{YM}}[A]}, \quad (\text{B.13})$$

sendo \mathcal{N} uma constante com pouca relevância para nossos propósitos. Por fim, integrando nos ghosts não-diagonais (\bar{c}^a, c^a) ficamos com a seguinte expressão:

$$\mathcal{Z} = \int [dA^a][dA] \delta(D_\mu^{ab} A_\mu^b) \delta(\partial_\mu A_\mu) \det(\mathcal{M}^{ab}) e^{-S_{\text{YM}}}. \quad (\text{B.14})$$

REFERÊNCIAS

- [1] YANG, C. N.; MILLS, R. L. *Conservation of the isotopic spin and isotopic gauge invariance*. Phys. Rev. **96**, 101(1954).
- [2] CHUNG, K. C. *Introdução à Física Nuclear*. Rio de Janeiro: EdUERJ, 2001. 286p.
- [3] 'T HOOFT, G. *50 Years of Yang-Mills Theory*. EUA, 1st ed., 2005.
- [4] GREINER, W.; MÜLLER, B. *Gauge theory of weak interactions*. Berlim: Springer, 3rd ed., 2000. 402p.
- [5] MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum Field Theory*. Chichester: John Wiley & Sons, rev. ed., 1995. 357p.
- [6] BAILIN, D.; LOVE, A. *Introduction to Gauge Field Theory*. Londres: IOP Publishing, rev. ed., 1994. 364p.
- [7] DUDAL, D. *Vacuum structure and condensates in quantum chromodynamics*. 2005. 310f. Tese (Doutorado em Ciências: Física) – Faculteit Wetenschappen Vakgroep Wiskundige Natuurkunde en Sterrenkunde, Universiteit Gent, Gent, 2005.
- [8] GROSS, F. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. New York: John Wiley & Sons, 1993. 628p.
- [9] SOBREIRO, R. F.; VASQUEZ OTOYA, V. J. *Effective gravity from a quantum gauge theory in Euclidean space-time*. Class. Quant. Grav. **24**, 4937 (2007) [arXiv:0705.2200 [hep-th]].
- [10] GRIBOV, V. N. *Quantization of non-Abelian gauge theories*. Nucl. Phys. B **139**, 1 (1978).
- [11] SLAVNOV, A. A.; FADDEEV, L. D. *Gauge Fields: an introduction to quantum theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 2a ed, 1991.

- [12] SOBREIRO, R. F.; SORELLA, S. P. *Introduction to the Gribov ambiguities in Euclidean Yang-Mills theories*. arXiv:hep-th/0504095.
- [13] SOBREIRO, R. F. *Non-perturbative aspects of Yang-Mills theories*. arXiv:0705.4107 [hep-th].
- [14] ZWANZIGER, D. *Local and renormalizable action from the Gribov horizon*. Nucl. Phys. B **323** (1989) 513.
- [15] ZWANZIGER, D. *Renormalizability of the critical limit of lattice gauge theory by BRS invariance*. Nucl. Phys. B **399**, 477 (1993).
- [16] DUDAL, D. et al. *New features of the gluon and ghost propagator in the infrared region from the Gribov-Zwanziger approach*. arXiv:0711.4496 [hep-th].
- [17] MAGGIORE, N.; SCHADEN, M. *Landau Gauge Within The Gribov Horizon*. Phys. Rev. D **50**, 6616 (1994) [arXiv:hep-th/9310111].
- [18] CUCCHIERRI, A.; MENDES, T. *What's up with IR gluon and ghost propagators in Landau gauge? A puzzling answer from huge lattices*. arXiv:0710.0412 [hep-lat].
- [19] BOGOLUBSKY, I. L. et al. *The Landau gauge gluon and ghost propagators in 4D SU(3) gluodynamics in large lattice volumes*. arXiv:0710.1968 [hep-lat].
- [20] CAPRI, M. A. L. et al. *The Gribov-Zwanziger action in the presence of the gauge invariant, nonlocal mass operator $\text{Tr} \int d^4x F_{\mu\nu}(D^2)^{-1} F_{\mu\nu}$ in the Landau gauge*. Eur. Phys. J. C **52**, 459 (2007) [arXiv:0705.3591 [hep-th]].
- [21] CAPRI, M. A. L. et al. *A combined study of the gluon and ghost condensates and in Euclidean SU(2) Yang-Mills theory in the Landau gauge*. Phys. Rev. D **73**, 014001 (2006) [arXiv:hep-th/0508216].
- [22] DUDAL, D. et al. *The Gribov parameter and the dimension two gluon condensate in Euclidean Yang-Mills theories in the Landau gauge*. Phys. Rev. D **72**, 014016 (2005) [arXiv:hep-th/0502183].
- [23] SOBREIRO, R. F. et al. *Gribov horizon in the presence of dynamical mass generation in Euclidean Yang-Mills theories in the Landau gauge*. Phys. Lett. B **590**, 265 (2004) [arXiv:hep-th/0403135].

- [24] DUDAL, D.; VERSCHELDE, H.; SORELLA, S. P. *The anomalous dimension of the composite operator A^2 in the Landau gauge.* Phys. Lett. B **555**, 126 (2003) [arXiv:hep-th/0212182].
- [25] LEMES, V. E. R.; SARANDY, M. S.; SORELLA, S. P. *Ghost condensates in Yang-Mills theories in the Landau gauge.* Annals Phys. **308**, 1 (2003) [arXiv:hep-th/0210077].
- [26] CUCCHIERI, A. et al. *Just how different are $SU(2)$ and $SU(3)$ Landau-gauge propagators in the IR regime?* Phys. Rev. D **76**, 114507 (2007) [arXiv:0705.3367 [hep-lat]].
- [27] CUCCHIERI, A.; MAAS, A.; MENDES, T. *Infrared properties of propagators in Landau-gauge pure Yang-Mills theory at finite temperature.* Phys. Rev. D **75**, 076003 (2007) [arXiv:hep-lat/0702022].
- [28] CUCCHIERI, A.; MAAS, A.; MENDES, T. *Infrared-suppressed gluon propagator in 4d Yang-Mills theory in a Landau-like gauge.* Mod. Phys. Lett. A **22**, 2429 (2007) [arXiv:hep-lat/0701011].
- [29] VON SMEKAL, L.; ALKOFER, R.; HAUCK, A. *A solution to coupled Dyson-Schwinger equations for gluons and ghosts in Landau gauge.* Ann. Phys., 1, [Erratum-ibid. **269**, 182(1998)], (1998).
- [30] VON SMEKAL, L.; ALKOFER, R.; HAUCK, A. *The infrared behavior of gluon and ghost propagators in Landau gauge QCD.* Phys. Rev. Lett., 79 (1997).
- [31] WATSON, P.; ALKOFER, R. *Verifying the Kugo-Ogima confinement criterion in Landau QCD.* Phys. Rev. Lett., 86 (2001).
- [32] ZWANZIGER, D. *Non-perturbative Landau gauge and infrared critical exponents in QCD.* Phys. Rev. D **65**, 094039 (2002).
- [33] LERCHE, C.; VON SMEKAL, L. *On the infrared exponent for gluon and ghost propagators in Landau gauge QCD.* Phys. Rev. D **65**, 125006 (2002).
- [34] CUCCHIERI, A. *Infrared behavior of the gluon propagator in lattice Landau gauge: The three-dimensional case.* Phys. Rev. D **60**, 034508 (1999).

- [35] BONNET, D. R. et al. *Infinite volume and continuum limits of the Landau-gauge gluon propagator*. Phys. Rev. D **64**, 034501 (2001).
- [36] CUCCHIERI, A.; MENDES, T.; TAURINES, A. R. *SU(2) Landau gluon propagator on a 140^3 lattice*. Phys. Rev. D **67**, 091502 (2003).
- [37] DUDAL, D. et al. *On the $SL(2, \mathbf{R})$ symmetry in Yang-Mills theories in the Landau, Curci-Ferrari and maximal Abelian gauge*. JHEP **0212**, 008 (2002) [arXiv:hep-th/0211007].
- [38] SOBREIRO, R. F.; SORELLA, S. P. *A study of the Gribov copies in linear covariant gauges in Euclidean Yang-Mills theories*. JHEP **0506**, 054 (2005) [arXiv:hep-th/0506165].
- [39] DUDAL, D. et al. *Dynamical gluon mass generation from in linear covariant gauges*. JHEP **0401**, 044 (2004) [arXiv:hep-th/0311194].
- [40] DUDAL, D. et al. *Renormalizability of the local composite operator A_μ^2 in linear covariant gauges*. Phys. Lett. B **574**, 325 (2003) [arXiv:hep-th/0308181].
- [41] CUCCHIERI, A.; MAAS, A.; MENDES, T. *Linear Covariant Gauges on the Lattice*. arXiv:0806.3124 [hep-lat].
- [42] BAULIEU, L.; ZWANZIGER, D. *Regularized Coulomb Gauge*. Braz. J. Phys. **37** (2007) 293.
- [43] GREENSITE, J.; OLEJNÍK, Š.; ZWANZIGER, D. *Infrared divergent Coulomb self-energy in Yang-Mills theory*. arXiv:hep-lat/0410028.
- [44] GREENSITE, J.; OLEJNÍK, Š.; ZWANZIGER, D. *Confinement and center vortices in Coulomb gauge: Analytic and numerical results*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. **141**, 170 (2005) [arXiv:hep-lat/0408023].
- [45] CUCCHIERI, A. *Lattice results in Coulomb gauge*. AIP Conf. Proc. **892**, 22 (2007) [arXiv:hep-lat/0612004].
- [46] BURGIO, G.; QUANDT, M.; REINHARDT, H. *Coulomb gauge gluon propagator and the Gribov formula*. arXiv:0807.3291 [hep-lat].

- [47] GREINER, W; SCHRAMM, S.; STEIN, E. *Quantum Chromodynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 2a ed, 2002.
- [48] DUDAL, D. et al. *Remarks on a class of renormalizable interpolating gauges*. JHEP **0507**, 059 (2005) [arXiv:hep-th/0505037].
- [49] DUDAL, D. et al. *Gluon-ghost condensate of mass dimension 2 in the Curci-Ferrari gauge*. Annals Phys. **308**, 62 (2003) [arXiv:hep-th/0302168].
- [50] LEMES, V. E. R. et al. *Ghost condensates in Yang-Mills theories in nonlinear gauges*. Mod. Phys. Lett. A **18**, 711 (2003) [arXiv:hep-th/0210036].
- [51] CAPRI, M. A. L. et al. *Renormalizability of a generalized gauge fixing interpolating among the Coulomb, Landau and maximal Abelian gauges*. Annals Phys. **322**, 1776 (2007) [arXiv:hep-th/0607117].
- [52] CAPRI, M. A. L.; SOBREIRO, R. F.; SORELLA, S. P. *Interpolating among the Landau, Coulomb and maximal Abelian gauges*. Phys. Rev. D **73**, 041701 (2006) [arXiv:hep-th/0512096].
- [53] BAULIEU, L.; ZWANZIGER, D. *Renormalizable non-covariant gauges and Coulomb gauge limit*. Nucl. Phys. B **548**, 527 (1999) [arXiv:hep-th/9807024].
- [54] BECCHI, C.; ROUET, A.; STORA, R. *Renormalization Of Gauge Theories*. Annals Phys. **98**, 287 (1976).
- [55] TYUTIN, I. V. *Gauge invariance in field theory and statistical Physics in operator formalism*. Lebedev Institute preprint (unpublished), 75-39, 1975.
- [56] PIGUET, O.; SORELLA, S. P. *Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*. Lect. Notes Phys. **m 28**. Berlin: Springer-Verlag, 1995, 134 p.
- [57] ZWANZIGER, D. *Action from Gribov horizon*. Nucl. Phys. B (1989) 321.
- [58] NAMBU, Y. *Strings, monopoles, and gauge fields*. Phys. Rev. D **10**, 4262 (1974).
- [59] 'T HOOFT, G., *High Energy Physics EPS Int. Conference*, Palermo 1975, editor A. Zichichi.

- [60] MANDELSTAM, S. *Vortices And Quark Confinement In Nonabelian Gauge Theories*. Phys. Rept. **23**, 245 (1976).
- [61] 'T HOOFT, G. *Topology Of The Gauge Condition And New Confinement Phases In Nonabelian Gauge Theories*. Nucl. Phys. B **190**, 455 (1981).
- [62] BOSCHI-FILHO, H.; BRAGA, N. R. F. *AdS/CFT correspondence and strong interactions*. PoS **IC2006**, 035 (2006) [arXiv:hep-th/0610135].
- [63] GREENSITE, J.; HALPERN, M. B. *Variational Computation Of Glueball Masses In Continuum QCD*. Nucl. Phys. B **271**, 379 (1986).
- [64] CUCCHIERI, A.; MENDES, T.; MIHARA, A. *Infrared maximally Abelian gauge*. AIP Conf. Proc. **892**, 203 (2007) [arXiv:hep-lat/0611002].
- [65] CUCCHIERI, A.; MENDES, T.; MIHARA, A. *Ghost condensation on the lattice*. Phys. Rev. D **72**, 094505 (2005) [arXiv:hep-lat/0508028].
- [66] DUDAL, D. et al. *A determination of and the non-perturbative vacuum energy of Yang-Mills theory in the Landau gauge*. Phys. Lett. B **562**, 87 (2003) [arXiv:hep-th/0302128].
- [67] DUDAL, D. et al. *An analytic study of the off-diagonal mass generation for Yang-Mills theories in the maximal Abelian gauge*. Phys. Rev. D **70**, 114038 (2004) [arXiv:hep-th/0406132].
- [68] EZAWA, Z. F., IWAZAKI, A. "Abelian Dominance And Quark Confinement In Yang-Mills Theories," Phys. Rev. D **25**, 2681 (1982).
- [69] SUZUKI, T.; YOTSUYANAGI, I. *A possible evidence for Abelian dominance in quark confinement*. Phys. Rev. D **42**, 4257 (1990).
- [70] SUZUKI, T. et al. *Abelian Dominance In SU(2) Color Confinement*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. **26**, 441 (1992).
- [71] HIOKI, S. et al. *Abelian dominance in SU(2) color confinement*. Phys. Lett. B **272**, 326 (1991) [Erratum-ibid. B **281**, 416 (1992)].

- [72] BORNYAKOV, V. G. et al. *Abelian dominance and gluon propagators in the maximally Abelian gauge of SU(2) lattice gauge theory*. Phys. Lett. B **559**, 214 (2003) [arXiv:hep-lat/0302002].
- [73] BORNYAKOV, V. G. et al. *Numerical study of gluon propagators in maximally Abelian gauge*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. **129**, 644 (2004) [arXiv:hep-lat/0308028].
- [74] MENDES, T.; CUCCHIERI, A.; MAAS, A.; MIHARA, A. *Infrared Propagators in MAG and Feynman gauge on the lattice*. arXiv:0809.3741 [hep-lat].
- [75] KRONFELD, A. S.; SCHIERHOLZ, G.; WIESE, U. J. *Topology and Dynamics of the Confinement Mechanism*. Nucl. Phys. B **293**, 461 (1987).
- [76] KRONFELD, A. S. et al. *Monopole Condensation And Color Confinement*. Phys. Lett. B **198**, 516 (1987).
- [77] MIN, H.; LEE, T.; PAC, P. Y. *Renormalization of Yang-Mills theory in the Abelian gauge*. Phys. Rev. D **32** (1985) 440.
- [78] FAZIO, A. R. et al. *The diagonal ghost equation Ward identity for Yang-Mills theories in the maximal Abelian gauge*. Phys. Rev. D **64**, 085003 (2001) [arXiv:hep-th/0105060].
- [79] CAPRI, M. A. L. et al. *The influence of the Gribov copies on the gluon and ghost propagators in Euclidean Yang-Mills theory in the maximal Abelian gauge*. Phys. Rev. D **72**, 085021 (2005) [arXiv:hep-th/0507052].
- [80] SEMENOV-TYAN-SHANSKII, M. A.; FRANKE, V. A. *Zapiski Nauchnykh Seminarov Leningradskogo Otdeleniya Matematicheskogo Instituta im. V. A. Steklov AN SSSR* vol 120, p. 159 (1982). Tradução para o Inglês: Plenum Press, New York, (1986) p. 999.
- [81] DELL'ANTONIO, G.; ZWANZIGER, D. *Ellipsoidal Bound on the Gribov horizon contradicts the perturbative renormalization group*. Nucl. Phys. **B**, 326, 1989.
- [82] DELL'ANTONIO, G.; ZWANZIGER, D. *Every gauge orbit passes inside the Gribov horizon*. Commun. Math. Phys. 138, 1991

- [83] VAN BAAL, P. *More (thoughts on) Gribov copies*. Nucl. Phys. **B**, 369, 1992.
- [84] ZWANZIGER, D. *Nonperturbative modifications of the Faddeev-Popov formula*. Phys. Lett. B (1982)114.
- [85] ZWANZIGER, D. *Nonperturbative modifications of the Faddeev-Popov formula and banishment of the naive vacuum*. Nucl. Phys. B (1982) 209.
- [86] QUANDT, M.; REINHARDT, H. *Field strength formulation of $SU(2)$ Yang-Mills theory in the maximal Abelian gauge: Perturbation theory*. Int. J. Mod. Phys. A **13**, 4049 (1998) [arXiv:hep-th/9707185].
- [87] BRUCKMANN, F. et al. *Instantons and Gribov copies in the maximally Abelian gauge*. Nucl. Phys. B **584**, 589 (2000) [arXiv:hep-th/0001175].
- [88] SAKURAI, J. J.; TUAN, S. F. (Ed.) *Modern Quantum Mechanics: Revised Edition*. Massachusetts: Addison-Wesley, rev. ed., 1994. 500p.
- [89] CAPRI, M. A. L. et al. *The gluon and ghost propagators in Euclidean Yang-Mills theory in the maximal Abelian gauge: taking into account the effects of the Gribov copies and of the dimension two condensates*. arXiv:0801.0566 [hep-th].
- [90] DUDAL, D. et al. *Off-diagonal mass generation for Yang-Mills theories in the maximal Abelian gauge*. Braz. J. Phys. **37**, 406 (2007) [arXiv:hep-th/0501227].
- [91] CAPRI, M. A. L. et al. *The infrared behavior of the gluon and ghost propagators in $SU(2)$ Yang-Mills theory in the maximal Abelian gauge*. Braz. J. Phys. **37**, 591 (2007) [arXiv:hep-th/0603167].
- [92] CAPRI, M. A. L. et al. *A study of the maximal Abelian gauge in $SU(2)$ Euclidean Yang-Mills theory in the presence of the Gribov horizon*. Phys. Rev. D **74**, 105007 (2006) [arXiv:hep-th/0609212].
- [93] ZWANZIGER, D. *Non-perturbative Faddeev-Popov formula and infrared limit of QCD*. Phys. Rev. D **69**, 016002 (2004).
- [94] GRACEY, J. A. *Two loop correction to the Gribov mass gap equation in Landau gauge QCD*. Phys. Lett. B **632**, 282 (2006) [arXiv:hep-ph/0510151].

- [95] GRACEY, J. A. *One loop gluon form factor and freezing of alpha(s) in the Gribov-Zwanziger QCD Lagrangian*. JHEP **0605**, 052 (2006) [arXiv:hep-ph/0605077].
- [96] LEINWEBER, D. B. et al. *Asymptotic scaling and infrared behavior of the gluon propagator*. Phys. Rev. D **60**, 094507 (1999) [Erratum-ibid. D **61**, 079901 (2000)] [arXiv:hep-lat/9811027].
- [97] BOGOLUBSKY, I. L. et al. *Landau gauge ghost and gluon propagators in SU(2) lattice gauge theory: Gribov ambiguity revisited*. Phys. Rev. D **74** (2006) 034503 [arXiv:hep-lat/0511056].
- [98] CAPRI, M. A. L. et al. *A study of the gauge invariant, nonlocal mass operator $\text{Tr} \int d^4x F_{\mu\nu}(D^2)^{-1} F_{\mu\nu}$ in Yang-Mills theories*. Phys. Rev. D **72**, 105016 (2005) [arXiv:hep-th/0510240].
- [99] CAPRI, M. A. L. et al. *Local renormalizable gauge theories from nonlocal operators*. Annals Phys. **323**, 752 (2008) [arXiv:hep-th/0703273].
- [100] BAULIEU, L; SORELLA, S. P. *Soft breaking of BRST invariance for introducing non-perturbative infrared effects in a local and renormalizable way*. arXiv:0808.1356 [hep-th].
- [101] CORNWALL, J. M. *Dynamical Mass Generation In Continuum QCD*. Phys. Rev. D **26**, 1453 (1982).
- [102] STINGL, M. *Propagation Properties And Condensate Formation Of The Confined Yang-Mills Field*. Phys. Rev. D **34**, 3863 (1986) [Erratum-ibid. D **36**, 651 (1987)].
- [103] LAVELLE, M. J.; SCHADEN, M. *Propagators and condensates in QCD*. Phys. Lett. B **208**, 297 (1988).
- [104] GUBAREV, F. V.; ZAKHAROV, V. I. *On the emerging phenomenology of $\langle (A_{\mu}^a)_{\min}^2 \rangle$* . Phys. Lett. B **501**, 28 (2001) [arXiv:hep-ph/0010096].
- [105] GUBAREV, F. V.; STODOLSKI, L.; ZAKHAROV, V. I. *On the significance of the quantity A^2* . Phys. Rev. Lett. **86**, 2220 (2001) [arXiv:hep-ph/0010057].

- [106] VERSCHELDE, H. et al. *The non-perturbative groundstate of QCD and the local composite operator A_μ^2* . Phys. Lett. B **516**, 307 (2001) [arXiv:hep-th/0105018].
- [107] KONDO, K. I. *Vacuum condensate of mass dimension 2 as the origin of mass gap and quark confinement*. Phys. Lett. B **514**, 335 (2001) [arXiv:hep-th/0105299].
- [108] KONDO, K. I. et al. *Renormalizing a BRST-invariant composite operator of mass dimension 2 in Yang-Mills theory*. Phys. Rev. D **65**, 085034 (2002) [arXiv:hep-th/0111256].
- [109] BROWNE, R. E.; GRACEY, J. A. *Two loop effective potential for $\langle A_\mu^2 \rangle$ in the Landau gauge in quantum chromodynamics*. JHEP **0311**, 029 (2003) [arXiv:hep-th/0306200].
- [110] ELLWANGER, U.; WSCHEBOR, N. *Massive Yang-Mills theory in Abelian gauges*. Int. J. Mod. Phys. A **18**, 1595 (2003) [arXiv:hep-th/0205057].
- [111] AGUILAR, A. C.; NATALE, A. A.; RODRIGUES DA SILVA, P. S. *Relating a gluon mass scale to an infrared fixed point in pure gauge QCD*. Phys. Rev. Lett. **90**, 152001 (2003) [arXiv:hep-ph/0212105].
- [112] BROWNE, R. E.; GRACEY, J. A. *One loop \overline{MS} gluon pole mass from the LCO formalism*. Phys. Lett. B **597**, 368 (2004) [arXiv:hep-ph/0407238].
- [113] GRACEY, J. A. *Two loop \overline{MS} gluon pole mass from the LCO formalism*. Eur. Phys. J. C **39**, 61 (2005) [arXiv:hep-ph/0411169].
- [114] PARISI, G.; PETRONZIO, R. *On Low-Energy Tests Of QCD*. Phys. Lett. B **94**, 51 (1980).
- [115] FIELD, J. H. *A phenomenological analysis of gluon mass effects in inclusive radiative decays of the J/ψ and Υ* . Phys. Rev. D **66**, 013013 (2002) [arXiv:hep-ph/0101158].
- [116] SZCZEPANIAK, A. P.; SWANSON, E. S. *The low lying glueball spectrum*. Phys. Lett. B **577**, 61 (2003) [arXiv:hep-ph/0308268].

- [117] LI, D. X.; SHAKIN, C. M. *Description of gluon propagation in the presence of an A^2 condensate*. Phys. Rev. D **71**, 074007 (2005) [arXiv:hep-ph/0410404].
- [118] AMEMIYA, K.; SUGANUMA, H. *Effective mass generation of off-diagonal gluons as the origin of infrared Abelian dominance in the maximally Abelian gauge in QCD*. Phys. Rev. D **60**, 114509 (1999) [arXiv:hep-lat/9811035].
- [119] BOUCAUD, P. et al. *Testing Landau gauge OPE on the lattice with a condensate*. Phys. Rev. D **63**, 114003 (2001) [arXiv:hep-ph/0101302].
- [120] BOUCAUD, P. et al. *Instantons and condensate*. Phys. Rev. D **66**, 034504 (2002) [arXiv:hep-ph/0203119].
- [121] BOUCAUD, P. et al. *Artefacts and $\langle A^2 \rangle$ power corrections: revising the MOM $Z_\psi(p^2)$ and Z_V* . Phys. Rev. D **74**, 034505 (2006) [arXiv:hep-lat/0504017].
- [122] LANGFELD, K.; REINHARDT, H.; GATTNAR, J. *Gluon propagators and quark confinement*. Nucl. Phys. B **621**, 131 (2002) [arXiv:hep-ph/0107141].
- [123] ALEXANDROU, C.; de FORCRAND, P.; FOLLANA, E. *The gluon propagator without lattice Gribov copies*. Phys. Rev. D **63**, 094504 (2001) [arXiv:hep-lat/0008012].
- [124] ALEXANDROU, C.; DE FORCRAND, P.; FOLLANA, E. *The gluon propagator without lattice Gribov copies on a finer lattice*. Phys. Rev. D **65**, 114508 (2002) [arXiv:hep-lat/0112043].
- [125] RUIZ ARRIOLA, E.; BOWMAN, P. O.; BRONIOWSKI, W. *Landau-gauge condensates from the quark propagator on the lattice*. Phys. Rev. D **70**, 097505 (2004) [arXiv:hep-ph/0408309].
- [126] SUZUKI, T. et al. *The dual Meissner effect and Abelian magnetic displacement currents*. Phys. Rev. Lett. **94**, 132001 (2005) [arXiv:hep-lat/0410001].
- [127] CHERNODUB, M.N. et al. *Vacuum type of $SU(2)$ gluodynamics in maximally Abelian and Landau gauges*. Phys. Rev. D **72**, 074505 (2005) [arXiv:hep-lat/0508004].
- [128] DUDAL, D. et al. *Dimension two gluon condensates in a variety of gauges and a gauge invariant Yang-Mills action with a mass*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. **174**, 201 (2007) [arXiv:hep-th/0611114].

- [129] DUDAL, D. et al. *Vacuum condensates of dimension two in pure Euclidean Yang-Mills*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. **127C**, 154 (2004) [arXiv:hep-th/0304249].
- [130] LEMES, V. E. R.; SARANDY, M. S.; SORELLA, S. P. *Ghost condensates and dynamical breaking of $SL(2, R)$ in Yang-Mills in the maximal Abelian gauge*. J. Phys. A **36**, 7211 (2003) [arXiv:hep-th/0206251].
- [131] D. Dudal et al., *More on ghost condensation in Yang-Mills theory: BCS versus Overhauser effect and the breakdown of the Nakanishi-Ojima annex $SL(2, R)$ symmetry*. JHEP **0306**, 003 (2003) [arXiv:hep-th/0305020].
- [132] DUDAL, D. et al. *Renormalization properties of the mass operator $A_\mu^a A_\mu^a$ in three dimensional Yang-Mills theories in the Landau gauge*. Annals Phys. **317**, 203 (2005) [arXiv:hep-th/0409254].
- [133] SORELLA, S. P. *On the dynamical mass generation in confining Yang-Mills theories*. Annals Phys. **321**, 1747 (2006) [arXiv:0704.3186 [hep-th]].
- [134] CAPRI, M. A. L. et al. *Nonperturbative ghost dynamics in the maximal Abelian gauge*. JHEP **0801**, 006 (2008) [arXiv:0708.4303 [hep-th]].
- [135] DUDAL, D. et al. *A refinement of the Gribov-Zwanziger approach in the Landau gauge: infrared propagators in harmony with the lattice results*. arXiv:0806.4348 [hep-th].
- [136] CAPRI, M. A. L. et al. *Quantum properties of a non-Abelian gauge invariant action with a mass parameter*. Phys. Rev. D **74**, 045008 (2006) [arXiv:hep-th/0605288].
- [137] CAPRI, M. A. L. et al. *A local non-Abelian gauge invariant action stemming from the nonlocal operator $F_{\mu\nu}(D^2)^{-1}F_{\mu\nu}$* . Braz. J. Phys. **37**, 232 (2007) [arXiv:hep-th/0609184].
- [138] LEMES, V. E. R.; SOBREIRO, R. F.; SORELLA, S. P. *Renormalizability of the dimension two gluon operator A^2 in a class of nonlinear covariant gauges*. J. Phys. A **40**, 4025 (2007) [arXiv:hep-th/0611231].
- [139] ZWANZIGER, D. *Quantization of gauge fields, classical gauge invariance and gluon confinement*. Nucl. Phys. B **345**, 461 (1990).

- [140] DUDAL, D.; VANDERSICKEL, N.; VERSCHELDE, H. *Unitarity analysis of a non-Abelian gauge invariant action with a mass*. Phys. Rev. D **76**, 025006 (2007) [arXiv:0705.0871 [hep-th]].
- [141] BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. *Microscopic Theory Of Superconductivity*. Phys. Rev. **106**, 162 (1957).
- [142] BARDEEN, J.; COOPER, L. N.; SCHRIEFFER, J. R. *Theory Of Superconductivity*. Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [143] OVERHAUSER, A. W. *Charge-density waves and isotropic metals*. Advances in Physics **27**, 343 (1978).
- [144] PARK, B. Y. et al. *Dense QCD: Overhauser or BCS pairing?*. Phys. Rev. D **62**, 034015 (2000) [arXiv:hep-ph/9910347].
- [145] CAPRI, M. A. L., et al. *Trabalho em andamento*.
- [146] CORNWALL, J. M.; HOU, W. S. *Extension Of The Gauge Technique To Broken Symmetry And Finite Temperature*. Phys. Rev. D **34**, 585 (1986).
- [147] M. Lavelle, Phys. Rev. D **44**, 26 (1991).
- [148] A. C. Aguilar and J. Papavassiliou, Eur. Phys. J. A **35**, 189 (2008) [arXiv:0708.4320 [hep-ph]].
- [149] CUCCHIERI, A.; MENDES, T.; MIHARA, A. *Study of ghosts in maximally Abelian gauge on the lattice*. Int. J. Mod. Phys. E **16**, 2935 (2007).
- [150] MA, J. P. *A study of gluon propagator on coarse lattice*. Mod. Phys. Lett. A **15**, 229 (2000) [arXiv:hep-lat/9903009].
- [151] ALKOFER, R. et al. *The quark-gluon vertex in Landau gauge QCD: Its role in dynamical chiral symmetry breaking and quark confinement*. arXiv:0804.3042 [hep-ph].
- [152] FISCHER, C. S. et al. *Large volume behavior of Yang-Mills propagators*. PoS **LAT2007**, 300 (2007) [arXiv:0709.3205 [hep-lat]].

- [153] ALKOFER, R. et al. *What the Infrared Behaviour of QCD Vertex Functions in Landau gauge can tell us about Confinement*. Int. J. Mod. Phys. E **16**, 2720 (2007) [arXiv:0705.4402 [hep-ph]].
- [154] ALKOFER, R.; GREENSITE, J. *Quark Confinement: The Hard Problem of Hadron Physics*. J. Phys. G **34**, S3 (2007) [arXiv:hep-ph/0610365].
- [155] ALKOFER, R.; FISCHER, C. S.; LLANES-ESTRADA, F. J. *Dynamically induced scalar quark confinement*. Mod. Phys. Lett. A **23**, 1105 (2008) [arXiv:hep-ph/0607293].
- [156] STERNBECK, A. et al. *Comparing $SU(2)$ to $SU(3)$ gluodynamics on large lattices*. PoS **LAT2007**, 340 (2007) [arXiv:0710.1982 [hep-lat]].
- [157] AGUILAR, A. C.; BINOSI, D; PAPAVALASSILIOU, J. *Gluon and ghost propagators in the Landau gauge: Deriving lattice results from Schwinger-Dyson equations*. Phys. Rev. D **78**, 025010 (2008) [arXiv:0802.1870 [hep-ph]].
- [158] BOUCAUD, P. et al. *IR finiteness of the ghost dressing function from numerical resolution of the ghost SD equation*. JHEP **0806**, 012 (2008) [arXiv:0801.2721 [hep-ph]].
- [159] OXMAN, L. E. *Center vortices as sources of Abelian dominance in pure $SU(2)$ Yang-Mills theory*. arXiv:0806.1078 [hep-th].
- [160] GREENSITE, J. *The confinement problem in lattice gauge theory*. Prog. Part. Nucl. Phys. **51**, 1 (2003) [arXiv:hep-lat/0301023].

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)