

---

---

# Estimação e modelagem com a distribuição Birnbau-Saunders: uma nova reparametrização

Manoel Ferreira dos Santos Neto

Orientador: **Prof. Dr. Francisco José de Azevêdo Cysneiros**

Co-orientador: **Prof. Dr. Víctor Leiva Sánchez**

Área de Concentração: **Estatística Matemática**

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do grau  
de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2010

---

---

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Santos Neto, Manoel Ferreira dos  
Estimação e modelagem com a distribuição  
Birnbau-Saunders: uma nova reparametrização /  
Manoel Ferreira dos Santos Neto. - Recife: O autor,  
2010.

xii, 109 folhas: il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de  
Pernambuco. CCEN. Estatística, 2010.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Estatística matemática. 2. Análise de regressão.  
3. Modelos lineares (estatística) I. Título.

519.5      CDD (22.ed.)      MEI-2010-029

Universidade Federal de Pernambuco  
Pós-Graduação em Estatística

**23 de fevereiro de 2010**  
(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

**Manoel Ferreira dos Santos Neto**

intitulada

“Estimação e Modelagem com a Distribuição Birnbaum-Saunders: uma nova Reparametrização”

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.



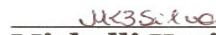
Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

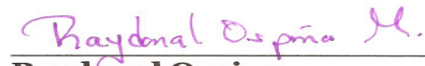
Banca Examinadora:

 Prof. Francisco C. Neto  
Coordenador  
UFPE Pós Graduação em Estatística UFPE



**Victor Leiva Sanchez (Univ. Valparaiso/Chile)** co-orientador

  
**Michelli Karinne Barros da Silva (UFCG)**

  
**Raydonal Ospina**

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

*Dedico este trabalho*  
*aos meus pais Regina e Jacinto,*  
*a minha tia Liduina, meu tio Daniel,*  
*meu avó Manoel (in memoria),*  
*as minhas irmãs Carol, Camila e Cintia,*  
*aos meus sobrinhos Matheus e Giselen,*  
*a minha namorada Alice*  
*e a todos que me ajudaram*  
*por fazerem parte da minha vida*

---

## Agradecimentos

---

A Deus por tudo que tenho em minha vida.

Aos meus pais, Jacinto e Regina, que sempre estiveram ao meu lado dando amor, carinho, incentivo e acreditando no meu sucesso.

À minha namorada, Alice, pelo amor, incentivo, paciência, companheirismo e por todos os momentos que já passamos juntos.

Às minhas avós Itelvina, Irene e Teresinha pelo carinho.

À professora Liana pela amizade, carinho, incentivo e por acreditar em meu potencial.

Aos professores do DEMA-UFC, Nelson Braga (in memorian), Ailton, Vicente, César Texeira, André Jalles, Robson, Ronald, Ana Maria, Sílvia e as secretárias Luisa e Mageri pelo carinho e confiança.

Ao professor Mauricio por ter sido como um pai durante minha graduação, com seus conselhos, incentivos e puxões de orelha.

Ao professor Welliandre pela orientação durante o período que fui bolsista de iniciação científica, por me propiciar momentos de divertimento, aprendizado e amizade.

Ao professor Juvêncio (DEMA-UFC) pela amizade e confiança.

À professora Michelle Barros (UFPB) pelas dicas e por tornar possível este trabalho.

Ao meu conterrâneo Ênio pela recepção e pela estadia em sua casa em meus primeiros dias em Recife.

À Dona Maria José e Dona Severina pela estadia, atenção, compreensão e carinho.

Ao professor Francisco Cysneiros pela excelente orientação, amizade, incentivo, confiança e pela paciência com meus atrasos.

Ao professor Víctor Leiva pela excelente orientação, atenção e enorme contribuição no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores da pós-graduação em estatística da UFPE, Francisco Cribari, Sílvio, Leandro, Cristiano e Audrey por suas contribuições na minha formação acadêmica.

À Valéria por ser essa pessoa atenciosa, dedicada e amiga.

Aos meus amigos de mestrado Helton, Jeremias, Priscila e Josimar pelos momentos de estudo, incentivo e amizade.

Aos amigos do doutorado Tarciana, Tatiane, Fabio Bayer, Abrão e Basílides pela atenção e amizade.

Ao amigo e companheiro de mestrado Lutemberg pelos momentos de estudos em sua casa, de divertimentos e principalmente por sua amizade sincera e leal.

Aos colegas de Recife, Jairo, Robson, Tiago, Roberto, Daniel, Marcelo, Otávio e Mozart pelas conversas e diversão.

As minhas amigas Talina, Rosana, Francinete, Josy, Joice, Lidia Senna, Iris, Michelli, Manuela, Fabricia, Vanderleia e Renata e ao meus amigos Jarbas, Darlon, Glauber, Thiago, Claudio, Bené, Jader e Humberto pela amizade.

Aos colegas de pensão João Batista, Paulo, Jadson, Júnior, João Paulo, Josivando, Dijeckson, Michael, Gogô e Austin pela amizade.

A todas as pessoas que conheci, durante a graduação e o mestrado, que de forma direta ou indireta contribuíram para esta conquista.

Ao programa de pós-graduação em estatística da UFPE, com sua excelente estrutura, que contribuiu para uma formação acadêmica de qualidade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*"Enquanto estiver vivo, sinta-se vivo.  
Se sentir saudades do que fazia, volte a fazê-lo.  
Não viva de fotografias amareladas...  
Continue, quando todos esperam que desistas.  
Não deixe que enferruje o ferro que existe em você.  
Faça com que em vez de pena, tenham respeito por você.  
Quando não conseguir correr através dos anos, trote.  
Quando não conseguir trotar, caminhe.  
Quando não conseguir caminhar, use uma bengala.  
Mas nunca se detenha"*

**Madre Teresa de Calcutá**

Modelos de regressão Birnbaum-Saunders vêm sendo aplicado com bastante sucesso nas áreas de análise de dados de sobrevivência e confiabilidade. Porém, os modelos existentes não ajustam diretamente a média da variável resposta e ainda, apesar do crescente interesse pela distribuição Birnbaum-Saunders, pouco é encontrado sobre reparametrizações da mesma. Desta forma, foram propostas cinco reparametrizações e estudadas as propriedades dos seus estimadores de máxima verossimilhança e de momentos. Além disso, foi definido um novo modelo de regressão baseado na distribuição Birnbaum-Saunders utilizando uma das reparametrizações propostas que possibilita modelar a média envolvendo um parâmetro de dispersão. Também, foram definidos e estudados três resíduos. Por fim, é apresentada uma aplicação a um conjunto de dados reais que representam resultados de testes de fadiga.

**Palavras-chave:** Reparametrizações, Distribuição Birnbaum-Saunders, Simulação de Monte Carlo, Modelo de Regressão.

---

## Abstract

---

Birnbaum-Saunders regression models have been applied with quite success to analysis of survival and reliability data. Nevertheless, existing models do not fit directly the mean of the response (dependent) variable and, despite the growing interest in the Birnbaum-Saunders distribution, few works are found approaching its reparameterizations. In this scenario, we propose five reparameterizations and studied the properties of their maximum likelihood and moment estimators. Furthermore, we defined a new regression model based on the Birnbaum-Saunders distribution using one of the proposed reparameterizations, which enables us to model the mean involving a dispersion parameter. We also define and study three residuals. Finally, we present an application to a real data set representing the results of fatigue tests.

**Keywords:** Reparameterizations, Birnbaum-Saunders distribution, Monte Carlo Simulation, regression model.

|          |                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                          | <b>1</b>  |
| 1.1      | Formulação do problema e definição dos objetivos . . . . . | 1         |
| 1.2      | Apresentação dos capítulos . . . . .                       | 2         |
| 1.3      | Suporte computacional . . . . .                            | 3         |
| 1.4      | Histórico da distribuição Birnbaum-Saunders . . . . .      | 3         |
| 1.5      | Função Densidade . . . . .                                 | 8         |
| 1.5.1    | Estimação dos parâmetros . . . . .                         | 9         |
| <b>2</b> | <b>Reparametrizações</b>                                   | <b>12</b> |
| 2.1      | Reparametrização de ABLV . . . . .                         | 12        |
| 2.2      | Reparametrizações . . . . .                                | 14        |
| 2.3      | Estimadores de momentos . . . . .                          | 26        |
| <b>3</b> | <b>Modelo de regressão Birnbaum-Saunders</b>               | <b>41</b> |
| 3.1      | Modelo . . . . .                                           | 41        |
| 3.2      | Estimação dos parâmetros . . . . .                         | 45        |
| 3.3      | Intervalos de confiança . . . . .                          | 45        |
| 3.4      | Resíduos . . . . .                                         | 49        |
| 3.5      | Influência local . . . . .                                 | 64        |
| 3.6      | Cálculo das curvaturas . . . . .                           | 66        |

|          |                                       |           |
|----------|---------------------------------------|-----------|
| <b>4</b> | <b>Aplicações</b>                     | <b>70</b> |
| 4.1      | Dados de vida de fadiga . . . . .     | 70        |
| <b>5</b> | <b>Conclusões e trabalhos futuros</b> | <b>79</b> |
|          | <b>Apêndice</b>                       | <b>81</b> |
|          | <b>Referências</b>                    | <b>99</b> |

---

## Lista de Figuras

---

|     |                                                                                                                          |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | fdp da $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$ para $\beta = 1.0$ (a) e $\alpha = 0.1$ (b). . . . .                                | 9  |
| 2.1 | fdp da $\mathcal{BS}(\mu, \lambda)$ para $\mu = 0.5$ (a) e $\lambda = 0.5$ (b). . . . .                                  | 15 |
| 2.2 | comportamento da variância da $\mathcal{BS}(\mu, \lambda)$ , quando $\mu \rightarrow \infty$ , para $\lambda$ fixo. . .  | 15 |
| 2.3 | fdp da $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$ para $\alpha = 0.1$ (a) e $\mu = 2.0$ (b). . . . .                                    | 17 |
| 2.4 | fdp da $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$ para $\phi = 1.5$ (a) e $\mu = 2.0$ (b). . . . .                                        | 19 |
| 2.5 | comportamento da variância da $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$ , quando $\phi \rightarrow \infty$ , para $\mu$ fixo. . .        | 19 |
| 2.6 | fdp da $\mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$ para $\sigma = 200$ (a) e $\alpha = 0.1$ (b). . . . .                              | 21 |
| 2.7 | fdp da $\mathcal{BS}(\gamma, \sigma)$ para $\sigma = 10$ (a) e $\gamma = 1.5$ (b). . . . .                               | 23 |
| 2.8 | fdp da $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$ para $\delta = 5.0$ (a) e $\mu = 1.0$ (b). . . . .                                    | 25 |
| 2.9 | comportamento da variância da $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$ , quando $\delta \rightarrow \infty$ , para $\mu$ fixo. . .    | 26 |
| 4.1 | histograma de frequência e box-plot para o número de ciclos até a ocorrência<br>da falha do pedaço de metal. . . . .     | 72 |
| 4.2 | gráfico de dispersão para o logaritmo do conjunto de dados de fadiga. . . .                                              | 73 |
| 4.3 | gráficos dos resíduos $r_i$ (a), $r_i^p$ (b) e $r_i^*$ (c) contra os valores ajustados. . . .                            | 73 |
| 4.4 | gráficos de probabilidade normais para os resíduos $r_i$ (a), $r_i^p$ (b) e $r_i^*$ (c)<br>com envelope. . . . .         | 74 |
| 4.5 | gráfico de alavanca generalizada. . . . .                                                                                | 75 |
| 4.6 | gráfico do $ d_{max} $ contra o índice das observações sob o esquema de ponder-<br>ação de casos para $\theta$ . . . . . | 76 |

|     |                                                                                                                                            |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.7 | gráfico do $ d_{max} $ contra o índice das observações sob o esquema de ponderação de casos:(a) para $\beta$ e (b) para $\delta$ . . . . . | 76 |
| 4.8 | gráficos de $C_i(\theta)$ contra o índice da observações sob o esquema de ponderação de casos. . . . .                                     | 77 |
| 4.9 | gráficos de $C_i(\beta)$ (a) e $C_i(\delta)$ (b) contra o índice da observações sob o esquema de ponderação de casos. . . . .              | 77 |

---

## Lista de Tabelas

---

|     |                                                                                                                              |    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | medidas para as estimativas de máxima verossimilhança para $\alpha = 0,2$ e $\beta = 1,0$ . . . . .                          | 32 |
| 2.2 | medidas para as estimativas de máxima verossimilhança para $\alpha = 0,5$ e $\beta = 1,0$ . . . . .                          | 33 |
| 2.3 | medidas para as estimativas de máxima verossimilhança para $\alpha = 1,0$ e $\beta = 1,0$ . . . . .                          | 34 |
| 2.4 | medidas para as estimativas de momentos para $\alpha = 0.2$ e $\beta = 1.0$ . . . . .                                        | 35 |
| 2.5 | medidas para as estimativas de momentos para $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1.0$ . . . . .                                        | 36 |
| 2.6 | medidas para as estimativas de momentos para $\alpha = 1.0$ e $\beta = 1.0$ . . . . .                                        | 37 |
| 2.7 | estimativas intervalares para os estimadores de máxima verossimilhança. .                                                    | 38 |
| 2.8 | estimativas intervalares para os estimadores de máxima verossimilhança. .                                                    | 39 |
| 2.9 | estimativas intervalares para os estimadores de máxima verossimilhança. .                                                    | 40 |
| 3.1 | estimativas do viés relativo. . . . .                                                                                        | 48 |
| 3.2 | estimativas da $\sqrt{\text{EQM}}$ . . . . .                                                                                 | 48 |
| 3.3 | estimativas do viés relativo e $\sqrt{\text{EQM}}$ . . . . .                                                                 | 49 |
| 3.4 | medidas das estimativas do resíduo $r_i$ sob o cenário I. . . . .                                                            | 55 |
| 3.5 | medidas das estimativas do resíduo $r_i^p$ sob o cenário I. . . . .                                                          | 55 |
| 3.6 | medidas das estimativas do resíduo $r_i^*$ sob o cenário I. . . . .                                                          | 56 |
| 3.7 | diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do $r_i$ para dados do cenário I. . . . . | 56 |

|      |                                                                                                                                  |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.8  | diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do $r_i^p$ para dados do cenário I. . . . .   | 57 |
| 3.9  | diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do $r_i^*$ para dados do cenário I. . . . .   | 57 |
| 3.10 | medidas das estimativas do resíduo $r_i$ sob o cenário II. . . . .                                                               | 58 |
| 3.11 | medidas das estimativas do resíduo $r_i^p$ sob o cenário II. . . . .                                                             | 58 |
| 3.12 | medidas das estimativas do resíduo $r_i^*$ sob o cenário II. . . . .                                                             | 58 |
| 3.13 | diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do $r_i$ para dados do cenário II. . . . .    | 59 |
| 3.14 | diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do $r_i^p$ para dados do cenário II. . . . .  | 59 |
| 3.15 | diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do $r_i^*$ para dados do cenário II. . . . .  | 60 |
| 3.16 | medidas das estimativas do resíduo $r_i$ sob o cenário III. . . . .                                                              | 60 |
| 3.17 | medidas das estimativas do resíduo $r_i^p$ sob o cenário III. . . . .                                                            | 61 |
| 3.18 | medidas das estimativas do resíduo $r_i^*$ sob o cenário III. . . . .                                                            | 61 |
| 3.19 | diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do $r_i$ para dados do cenário III. . . . .   | 62 |
| 3.20 | diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do $r_i^p$ para dados do cenário III. . . . . | 62 |
| 3.21 | diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do $r_i^*$ para dados do cenário III. . . . . | 63 |
| 4.1  | dados de fadiga de biaxial de Brown e Miller (1978). . . . .                                                                     | 71 |
| 4.2  | medidas resumo das variáveis $N$ e $W$ . . . . .                                                                                 | 71 |
| 4.3  | mudança relativa em $\beta$ para os casos indicados. . . . .                                                                     | 78 |

### 1.1 Formulação do problema e definição dos objetivos

Os modelos lineares generalizados (MLGs) propostos por Nelder e Wedderburg (1972) tem como objetivo dar um leque maior de opções para a distribuição da variável resposta, permitindo que a mesma faça parte da família exponencial, assim como, fornecer uma maior flexibilidade para a relação funcional entre o valor esperado da variável resposta e o preditor linear. Porém, na prática nem toda distribuição associada com a variável resposta faz parte da família exponencial e/ou o domínio da variável resposta pertence aos reais, caso da distribuição Birnbaum-Saunders ( $\mathcal{BS}$ ). Para modelar a resposta média da distribuição  $\mathcal{BS}$  é necessário algum tipo de transformação na variável resposta. Neste trabalho discutiremos uma forma alternativa de focar esse problema.

Na classe de modelos de regressão Birnbaum-Saunders algumas formas de modelagem foram propostas. Uma dessas propostas foi apresentada por Rieck e Nedelman (1991), que desenvolveram um modelo log-linear Birnbaum-Saunders. Podemos citar ainda, Barros, Paula e Leiva (2008) que apresentaram uma nova classe de modelos de regressão de sobrevivência em que a distribuição dos erros possuem caudas pesadas e Lemonte e Cordeiro (2009) que propuseram um modelo de regressão não-linear Birnbaum-Saunders.

O objetivo geral deste trabalho é o desenvolvimento inferencial, análise de resíduos e

diagnóstico de uma nova classe de modelos de regressão baseado na distribuição Birnbaum-Saunders. Podemos então relacionar os seguintes objetivos específicos:

- (i) Propor uma reparametrização que seja em função da média da distribuição e de um parâmetro de dispersão;
- (ii) Desenvolver um novo modelo de regressão Birnbaum-Saunders para modelar diretamente a média da variável resposta envolvendo um parâmetro de dispersão, bem como desenvolver um processo iterativo para a estimação dos parâmetros do modelo;
- (iii) Propor resíduos para a verificação das suposições do modelo e para o estudo de observações atípicas;
- (iv) Calcular as curvaturas normais sob diferentes tipos de perturbação para a utilização de diferentes métodos de diagnóstico.

## 1.2 Apresentação dos capítulos

A presente dissertação encontra-se dividida em cinco capítulos. Neste primeiro capítulo é estudada a distribuição Birnbaum-Saunders e algumas de suas propriedades. No segundo capítulo são apresentadas algumas reparametrizações para a distribuição Birnbaum-Saunders com a estimação pontual de seus parâmetros pelos métodos de máxima verossimilhança e de momentos. No terceiro capítulo é apresentado o modelo de regressão Birnbaum-Saunders com a estimação pontual de seus parâmetros por máxima verossimilhança, além disso são propostos alguns resíduos e são realizadas simulações de Monte Carlo com o objetivo de investigar as distribuições empíricas dos mesmos. Ainda neste capítulo é desenvolvida a análise de influência local para o modelo de regressão Birnbaum-Saunders. No quarto capítulo é aplicado o modelo de regressão Birnbaum-Saunders a um conjunto de dados reais e realizar-se-á uma análise de diagnóstico. Por fim, no quinto capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho e propostas de possíveis trabalhos a serem realizados.

## 1.3 Suporte computacional

As avaliações numéricas realizadas ao longo desta dissertação foram feitas através da linguagem matricial de programação `0x` em sua versão 5.10 para sistemas operacionais Windows. Em [www.doornik.com](http://www.doornik.com) está disponível uma versão para uso acadêmico de forma gratuita. Pode-se ainda encontrar maiores informações em Doornik (2001). Para a geração dos gráficos e aplicações foi utilizado o software `R` na sua versão 2.9.0 para sistemas operacionais Windows e que se encontra disponível de forma gratuita no endereço [www.r-project.org/](http://www.r-project.org/). Para a realização dos cálculos das derivadas parciais e integrais foi utilizado o software *Maple* (licenciado pelo Departamento de Estatística da UFPE) na sua versão 11 para sistemas operacionais Windows. Por fim, o trabalho foi digitado usando o sistema de tipografia  $\text{\LaTeX}$ , maiores detalhes podem ser encontrados em Mittelbach et al. (2004), ou através do site [www.tex.ac.uk/CTAN/latex](http://www.tex.ac.uk/CTAN/latex).

## 1.4 Histórico da distribuição Birnbaum-Saunders

A fadiga é a redução gradual da resistência de um material ou da sensibilidade de um equipamento, máquina, etc, devido ao uso contínuo. Modelos estatísticos podem ser usados para descrevermos a variação aleatória dos tempos de falhas associados aos materiais expostos à fadiga sob diferentes padrões e forçar cíclicas. Distribuições que se ajustam bem na região central da distribuição de vida como gama, normal inversa, lognormal e Weibull são bastante usadas para modelar vida por fadiga. No entanto, essas distribuições não apresentam bom desempenho quando o interesse está nos percentis mais baixos ou mais altos. Motivados por problemas nos aviões comerciais novos e falhas de material, Birnbaum e Saunders (1969a) derivaram um nova família de distribuições de vida que modela o tempo de vida de materiais e equipamentos submetidos a cargas dinâmicas.

Birnbaum e Saunders (1969a) fizeram algumas suposições sobre o processo de fadiga, são elas:

1. Um material é submetido a uma padrão cíclico de tensão e força;
2. A falha do material ocorre devido ao desenvolvimento e ao crescimento de uma fissura dominante dentro do material , ou seja, quando o tamanho da fissura excede

certo nível de resistência, denotado por  $\omega$ ;

3. A sequência de tensão imposta ao material é a constante de ciclo para ciclo;
4. A extensão incremental da fissura  $X_i$  resultante da aplicação da  $i$ -ésima oscilação de carga é uma variável aleatória com uma distribuição que só depende da fissura atual causada pela tensão neste ciclo;
5. A extensão da fissura durante o  $(j + 1)$ -ésimo ciclo é

$$Y_{j+1} = X_{jm+1} + \cdots + X_{jm+m}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

em que  $X_{jm+i}$  é a extensão da fissura após a  $i$ -ésima oscilação de carga do  $(j + 1)$ -ésimo ciclo;

6. As extensões da fissuras em diferentes ciclos são diferentes;
7. A extensão total da fissura,  $Y_j$ , devido ao  $j$ -ésimo ciclo é uma variável aleatória com distribuição de média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots$

Desta forma, pode-se representar a extensão total da fissura após  $n$  ciclos pela seguinte variável aleatória

$$W_n = \sum_{j=1}^n Y_j,$$

com a seguinte função de distribuição acumulada (fda)

$$H_n(\omega) = \mathbb{P}(W_n \leq \omega) \quad n = 1, 2, \dots$$

Definiremos como sendo  $N$  o número de ciclos necessários até que ocorra uma falha. A fda da variável aleatória  $N$  pode ser expressa por

$$\mathbb{P}(N \leq n) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n Y_j > \omega\right) = \mathbb{P}(W_n > \omega) = 1 - H_n(\omega).$$

Se supormos que os  $Y_j$ 's são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e com o uso do Teorema Central do limite temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N \leq n) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{\omega - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\omega - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&\cong 1 - \Phi\left(\frac{\omega - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{n\mu - \omega}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{n}}{\sigma} - \frac{\omega}{\sigma\sqrt{n}}\right), \tag{1.1}
\end{aligned}$$

em que  $\Phi(\cdot)$  denota a fda da  $N(0, 1)$ .

A partir da equação (1.1), Birnbaum e Saunders (1969a) definiram uma distribuição contínua de vida. Segundo os autores, ao substituirmos  $n$  por uma variável real não-negativa  $t$ , a variável aleatória  $N$  passa a ter uma extensão contínua que é a variável aleatória  $T$ . Assim,  $T$  é o tempo total até a ocorrência da falha. Se definirmos

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu\omega}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\omega}{\mu},$$

temos que a fda de  $T$  é dada por

$$F(t; \alpha, \beta) = \mathbb{P}(T \leq t) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right], \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \tag{1.2}$$

em que  $\Phi(\cdot)$  é a função de distribuição da normal padrão e  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros de forma e de escala, respectivamente. Adicionalmente,  $\beta$  é a mediana da distribuição, ou seja,  $F(\beta; \alpha, \beta) = \Phi(0) = 0.5$ .

A distribuição Birnbaum-Saunders vem sendo bastante utilizada em modelagem de processos de fadiga. Fora desta área, também vem recebendo bastante atenção. Como por exemplo, na área de ciências da terra, previsões de crédito de garantia e em ciência médicas. A distribuição Birnbaum-Saunders pode ainda ser usada em aplicações nas áreas de ciências atuariais, agricultura, cardiologia, etc. Devido a sua similaridade com a distribuição Gaussiana Inversa.

Como nos últimos anos o interesse pelo estudo da distribuição Birnbaum-Saunders e suas aplicações vem crescendo é natural que surjam vários trabalhos. A literatura desta

distribuição apresenta vários trabalhos interessantes e de relevância. Desmond (1985,1986) derivou uma forma mais geral baseada em um modelo biológico, reforçou a justificativa física para a utilização desta distribuição relaxando as suposições feitas por Birnbaum e Saunders (1969a) e investigou a relação com a distribuição gaussiana inversa. Mann, Schafer e Singpurwalla (1974, p. 155) demonstraram que a função densidade da Birnbaum-Saunders é unimodal. Engelhardt, Bain e Wright (1981) propuseram intervalos de confiança e teste de hipótese para os parâmetros da distribuição. Rieck e Nedelman (1991) propuseram um modelo log-linear baseado na distribuição  $\mathcal{BS}$ . Achcar e Espinosa (1991) desenvolveram métodos bayesianos em testes de vida acelerados considerando um modelo log-linear para o modelo Birnbaum-Saunders proposto por Rieck e Nedelman (1991). Achcar (1993) desenvolveu procedimentos de estimação bayesiana para os parâmetros da  $\mathcal{BS}$  utilizando aproximações para as distribuições posteriores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Lu e Chang (1997) utilizaram métodos bootstrap para construir intervalos de predição para observações futuras de uma distribuição  $\mathcal{BS}$ . Dupuis e Mills (1998) propuseram métodos robustos de estimação dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders na presença de outliers nos dados. Rieck (1999) derivou a função geradora de momentos para a distribuição seno hiperbólico normal (senh-normal) que pode ser usada para obter momentos de ordem inteira ou fracionária da distribuição Birnbaum-Saunders. McCarter (1999) discutiu a estimação dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders para o caso de amostras censuradas do tipo II. Owen e Padgett (1999) desenvolveram a distribuição Birnbaum-Saunders de três parâmetros. Ng, Kundu e Balakrishnan (2003) propuseram estimadores de momentos modificados para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  da distribuição Birnbaum-Saunders. Galea, Leiva e Paula (2004) fizeram uma análise de diagnóstico no modelo log-Birnbaum-Saunders. Díaz-García e Leiva (2002,2005) propuseram uma nova classe de distribuições de vida generalizando a distribuição Birnbaum-Saunders a partir de distribuições de contornos elípticos. Ng, Kundu e Balakrishnan (2006) realizaram a estimação pontual e intervalar dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders baseada em dados censurados do tipo II. From e Li (2006) apresentaram alternativas para os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders. Leiva, Hernandez e Riquelme (2006) desenvolveram um pacote no software **R** para modelar dados com a distribuição Birnbaum-Saunders. Wang, Desmond e Lu (2006) apresentaram estimativas

de momentos modificados censuradas para os dois parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders. Vilca e Leiva (2006), baseados em argumentos semelhantes aos empregados por Díaz-García e Leiva (2005), obtiveram uma maior generalização ao desenvolver a distribuição Birnbaum-Saunders mediante distribuições elípticas assimétricas. Leiva, Barros, Paula e Galea (2007) fizeram diagnóstico de influência para o modelo de regressão log-Birnbaum-Saunders com dados censurados. Balakrishnan, Leiva e López (2007) desenvolvem planos amostrais quando o teste de vida é truncado em um tempo pré-fixado. Xie e Wei (2007) apresentaram várias medidas de diagnósticos para o modelo de regressão log-Birnbaum-Saunders. Lemonte, Cribari-Neto e Vasconcelos (2007) desenvolveram estimadores com viés reduzido para os parâmetros das distribuição Birnbaum-Saunders. Barros, Paula e Leiva (2008) apresentaram uma nova classe de modelo de regressão de sobrevivência com erros de caudas pesadas. Cysneiros, Cribari-Neto e Araújo (2008) realizaram inferência com a distribuição Birnbaum-Saunders. Lemonte, Simas e Cribari-Neto (2008) realizaram correção do viés dos estimadores de máxima verossimilhança para o parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders. Desmond, Rodríguez-Yam e Lu (2008) fizeram a estimação dos parâmetros do modelo de regressão Birnbaum-Saunders com dados de censura. Ahmed, et al. (2008) apresentaram uma reparametrização para a distribuição Birnbaum-Saunders. Leiva, Riquelme, Balakrishnan e Sanhueza (2008) apresentaram uma análise baseada na função de risco da distribuição Birnbaum-Saunders generalizada. Sanhueza, Leiva e Balakrishnan (2008) realizaram um desenvolvimento teórico, incluindo distribuições relacionadas, análise de vida e análise de forma para a Birnbaum-Saunders generalizada. Leiva, Barros, Paula e Sanhueza (2008) demonstraram que a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada é um modelo útil para descrever dados de ciências ambientais. Leiva, Sanhueza, Sen e Paula (2008) desenvolveram geradores de número aleatório para a distribuição Birnbaum-Saunders generalizada. Barros, Paula e Leiva (2009) desenvolveram o pacote **gbs** para o software R, que foi desenvolvido para analisar dados a partir de modelos baseados na distribuição Birnbaum-Saunders generalizada. Leiva, Sanhueza e Angulo (2009) desenvolveram um modelos baseado na distribuição  $\mathcal{BS}$  para ajustar dados de ciências ambientais. Guiraud, Leiva e Fierro (2009) apresentaram uma versão não centrada da distribuição  $\mathcal{BS}$ . Balakrishnan, et al. (2009) desenvolveram um tipo de distribuição  $\mathcal{BS}$  baseada em modelos SMN ("scale-mixture of

normals"). Lemonte e Cordeiro (2009) desenvolveram um modelo de regressão não-linear Birnbaum-Saunders. Lemonte e Ferrari (2009) e Lemonte, Ferrari e Cribari-Neto (2009) realizaram inferência nos modelos de regressão Birnbaum-Saunders quando o número de observações é pequena. Meintanis (2010) apresentou teste de qualidades de ajuste para a distribuição Birnbaum-Saunders e suas generalizações. Xiao, Liu, Balakrishnan e Lud (2010) realizaram a estimação dos parâmetros do modelo de regressão Birnbaum-Saunders com dados de estado atual. Xu e Tang (2010) consideraram os estimadores bayesianos para os parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders sob referência anterior.

## 1.5 Função Densidade

A função densidade de probabilidade (fdp) da distribuição  $\mathcal{BS}$  obtida através de (1.2) possui a forma

$$f(t; \alpha, \beta) = \frac{\exp\{\alpha^{-2}\}}{2\alpha\sqrt{2\pi\beta}} t^{-\frac{3}{2}} [t + \beta] \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t}\right)\right\}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

A distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$  está relacionada com a distribuição normal da seguinte maneira

$$T = \beta \left[ \frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2}\right)^2 + 1} \right]^2, \quad (1.3)$$

em que  $Z$  segue distribuição normal padrão.

A distribuição Birnbaum-Saunders satisfaz a propriedade recíproca, ou seja, se  $T \sim \mathcal{BS}(\alpha, \beta)$  então  $1/T \sim \mathcal{BS}(\alpha, \beta^{-1})$  e também satisfaz a propriedade de escala, ou seja, para todo  $a > 0$ , se  $T \sim \mathcal{BS}(\alpha, \beta)$  então  $aT \sim \mathcal{BS}(\alpha, a\beta)$ . Adicionalmente, temos que o  $r$ -ésimo momento da distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$  é dado por

$$\mathbb{E}(T^r) = \beta \sum_{j=0}^r \binom{2r}{2j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{(2(r-j+i))!}{2^{r-j+i}(r-j+i)!} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2(r-j+i)}. \quad (1.4)$$

A partir da equação (1.4) podemos obter as expressões da média e da variância para a distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$ . Tais expressões são dadas, respectivamente, por

$$\mathbb{E}(T) = \beta \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) \quad (1.5)$$

e

$$Var(T) = (\alpha\beta)^2 \left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right). \quad (1.6)$$

Nota-se na Figura 1.1 (a) que com o aumento no valor do parâmetro  $\alpha$  a forma da distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$  torna-se assimétrica. Enquanto na Figura 1.1 (b), podemos notar que os valores da média e da variância aumentam com o crescimento do valor do parâmetro  $\beta$ .

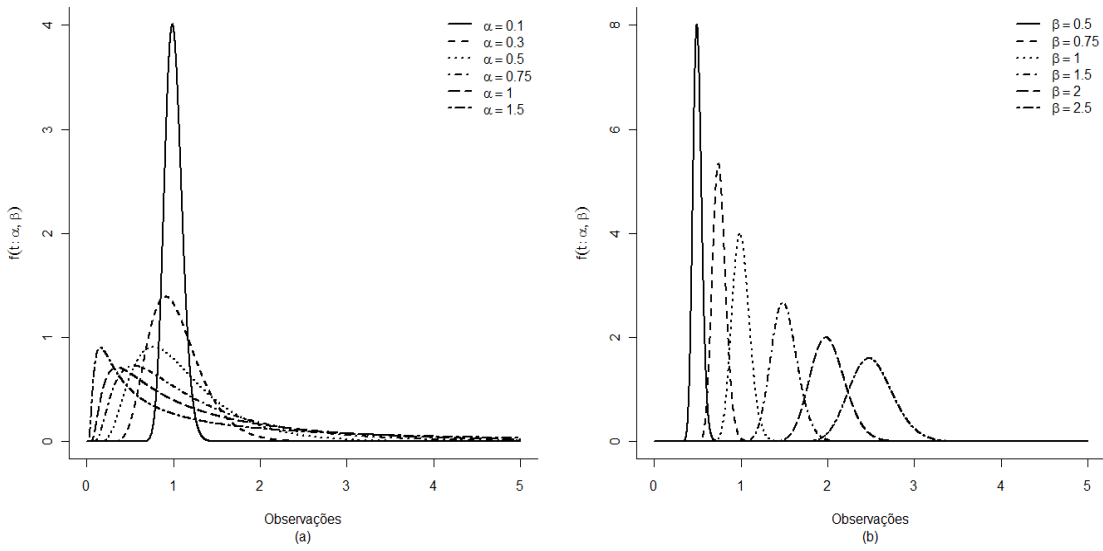


Figura 1.1: fdp da  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$  para  $\beta = 1.0$  (a) e  $\alpha = 0.1$  (b).

### 1.5.1 Estimação dos parâmetros

Se  $T_1, \dots, T_n$  é uma amostra de  $n$  observações independentes da distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$ . Então, o logaritmo da função de verossimilhança para  $\theta = (\alpha, \beta)$ , a menos de uma constante, possui a seguinte forma

$$\ell(\theta) \propto \frac{n}{\alpha^2} - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \log(t_i) - n \log(2\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} \right). \quad (1.7)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) de  $\alpha$  e  $\beta$  são obtidos maxi-

mizando (1.7) a partir das soluções das equações

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{\alpha^2}\right) + \frac{n}{\alpha^3 \beta} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{\beta}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0, \quad (1.8a)$$

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta} = -\frac{n}{2\beta} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i + \beta} + \frac{1}{2\alpha^2 \beta^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0. \quad (1.8b)$$

Podemos através de (1.8a) e (1.8b) demonstrar que o EMV de  $\alpha$ , denotado por  $\hat{\alpha}$ , possui a seguinte forma (ver também Birnbaum-Saunders 1969b)

$$\hat{\alpha} = \left[ \frac{\bar{t}}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{h} - 2 \right]^{1/2},$$

em que

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad \text{e} \quad h = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^{-1} \right]^{-1}. \quad (1.9)$$

Porém, para obter o EMV de  $\beta$ , denotado por  $\hat{\beta}$ , é necessário encontrar a raiz positiva em  $\beta$  da equação não-linear  $g(\beta) = 0$ , onde  $g(\beta)$  é dado por

$$g(\beta) = \beta^2 - \beta(2h + K(\beta)) + h(\bar{t} + K(\beta)),$$

em que

$$K(\beta) = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n (\beta + t_i)^{-1} \right]^{-1}, \text{ para } \beta > 0$$

de modo que  $h \equiv K(0)$ .

Birnbaum e Saunders (1969b) desenvolveram dois métodos iterativos (um simples e outro mais complexo) para encontrar  $\hat{\beta}$  e observaram que o método simples funciona bem para valores de  $\alpha < 2$ , mas não funciona bem para valores de  $\alpha > 2$ . Já no método complexo observaram que para alguns valores de  $\alpha$  o resultado não foi adequado.

Engelhardt, Bain e Wright (1981) apresentaram a distribuição assintótica dos estimadores  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ , que é uma distribuição normal bivariada dada por

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \stackrel{a}{\sim} N_2 \left[ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n[0.25 + \alpha^{-2} + I(\alpha)]} \end{pmatrix} \right],$$

em que  $\stackrel{a}{\sim}$  denota assintoticamente distribuído e

$$I(\alpha) = 2 \int_0^\infty \{[1 + g(\alpha x)]^{-1} - 0.5\}^2 d\Phi(x) \quad \text{e} \quad g(y) = 1 + \frac{y^2}{2} + y \left(1 + \frac{y^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Através dos resultados obtidos por Engelhardt, Bain e Wright (1981) podemos construir intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros da distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$ .

Para obtermos os estimadores pelo método de momentos no caso de dois parâmetros, devemos igualar os dois primeiros momentos populacionais com o respectivos momentos amostrais. Neste caso, a média e a variância amostral deveriam ser igualadas a (1.5) e (1.6), respectivamente, e os correspondentes estimadores de momentos podem ser obtidos com as soluções em  $\alpha$  e  $\beta$  dessas equações. Ng, Kundu e Balakrishnan (2003) mostraram que se o coeficiente de variação amostral for menor do que  $\sqrt{5}$ , então os estimadores de momentos não existem. No entanto, se o coeficiente de variação amostral for maior do que  $\sqrt{5}$  os estimadores de momentos existem, porém o estimador de  $\beta$  pode não ser único. Para solucionar essa problemática, Ng, Kundu e Balakrishnan (2003) propuseram os estimadores de momentos modificados, denotados por EMMs, obtido da seguinte maneira

$$\bar{t} = \beta(1 + \frac{\alpha^2}{2}), \quad (1.10)$$

$$h^{-1} = \beta^{-1}(1 + \frac{\alpha^2}{2}), \quad (1.11)$$

em que,  $\beta^{-1}(1 + \frac{\alpha^2}{2})$  é o valor esperado de  $1/T$ . Resolvendo as equações (1.10) e (1.11) para  $\alpha$  e  $\beta$ , obtemos os EMMs para  $\alpha$  e  $\beta$ , denotados por  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$ , respectivamente, com expressões dadas por

$$\tilde{\alpha} = \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\bar{t}}{h} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}$$

e

$$\tilde{\beta} = (\bar{t}h)^{1/2}.$$

Ng, Kundu e Balakrishnan (2003) demonstraram que a distribuição assintótica conjunta de  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  é uma normal bivariada com a seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \underset{a}{\sim} N_2 \left[ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{(\alpha\beta)^2}{n} \left( \frac{1 + \frac{3}{4}\alpha^2}{(1 + \frac{1}{2}\alpha^2)^2} \right) \right] \right].$$

A partir deste resultado é possível obter intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , baseados nos estimadores de momentos.

## CAPÍTULO 2

---

### Reparametrizações

---

Neste capítulo será apresentada uma nova parametrização para a distribuição  $\mathcal{BS}$  desenvolvida por Ahmed, et al. (2008), que denominamos de ABLV. Além disso, são propostas cinco reparametrizações da distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$ . Serão também obtidos os estimadores e máxima verossimilhança e momentos para os parâmetros que compõem tais reparametrizações. Por fim, serão realizadas simulações de Monte Carlo para analisarmos o comportamento empírico dos estimadores.

O objetivo deste capítulo é verificarmos se a utilização de tais reparametrizações apresentará algum ganho analítico, computacional e inferencial com relação a distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$ . Além disso, uma das reparametrizações apresentadas neste capítulo será utilizada para a definição de um novo modelo de regressão Binbaum-Saunders.

### 2.1 Reparametrização de ABLV

Reparametrizações podem ser de grande importância, pois em algumas situações facilitam o desenvolvimento analítico de algumas distribuições e também podem melhorar a eficiência em simulações, ver Tweedie (1957). Em determinadas situações, como em regressão, quando a distribuição da variável resposta não possui a média como um de seus parâmetros é possível através de uma reparametrização que essa condição seja satisfeita,

sendo assim possível ajustar a média da variável resposta. Exemplos de distribuições em que são realizadas reparametrizações com sucesso são: distribuição beta (ver Ferrari e Cribari-Neto 2004) e distribuição gaussiana inversa (ver Tweedie 1957).

Um trabalho interessante que aborda o assunto reparametrizações na  $\mathcal{BS}$ , foi desenvolvido por Ahmed, et al. (2008) em que os novos parâmetros da distribuição Birnbaum-Saunders possuem interpretações físicas. Para obterem essa reparametrização, eles consideraram  $X_k$  como sendo o tamanho de uma rachadura no tempo  $k = 1, 2, \dots, K$ , isto é, após a  $k$ -ésima carga cíclica e utilizaram as seguintes equações de recorrência ( ver Desmond, 1986)

$$X_{k+1} = X_k + Y_k \psi(X_k), \quad k = 0, 2, \dots, K, \quad Y_0 = X_0 = 0, \quad \psi(X_0) \neq 0.$$

Estas interligam o tamanho da rachadura em momentos anteriores e próximos no tempo por uma função contínua positiva  $g$  e uma sequência de variáveis aleatórias  $Y_1, Y_2, \dots, K$ . Os  $Y_k$ 's são considerados variáveis aleatórias não negativas, independentes, identicamente distribuídas e integráveis. O interesse é no tempo  $T(1, 2 \dots)$ , em que a trinca atinge o valor crítico  $\omega$ . Com as equações de recorrência obtêm-se

$$\sum_{k=0}^{T-1} Y_k = \sum_{k=0}^{T-1} \frac{X_{k+1} - X_k}{\psi(X_k)} \approx \int_0^{X_T} \frac{dx}{\psi(x)}.$$

O incremento  $X_{k+1} - X_k$  é assumido suficientemente pequeno. Para cada valor  $t$  suficientemente grande da variável  $T$ , a variável aleatória no lado esquerdo da igualdade pode ser aproximada por uma distribuição normal com média  $t\mu_{y_1}$  e variância  $t\sigma_{y_1}^2$ , onde  $\mu_{y_1} = \mathbb{E}(Y_1)$  e  $\sigma_{y_1}^2 = \text{Var}(Y_1)$ . Portanto, para  $t$  grande,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}\left(\int_0^{X_t} \frac{dx}{\psi(x)} < \int_0^{\omega} \frac{dx}{\psi(x)}\right) \approx \mathbb{P}\left(\sum_{k=0}^{T-1} Y_k < a(\omega)\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{a(\omega) - \mu_{y_1}}{\sigma_{y_1} \sqrt{t}}\right), \end{aligned}$$

em que,

$$a(\omega) = \int_0^{\omega} \frac{dx}{\psi(x)}$$

é uma função estritamente crescente e limitada superiormente por  $\omega(> 0)$ , já que  $\psi(x) \geq 0$ . Desta forma, os autores conseguiram obter a reparametrização,

$$\lambda = \frac{a(\omega)}{\sigma_{y_1}} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\mu_{y_1}}{\sigma_{y_1}}.$$

O importante desta reparametrização é que ela se encaixa em estudos de fenômenos físicos, uma vez que os parâmetros propostos  $\lambda$  e  $\mu$  correspondem a amplitude amostral e carga nominal de tratamento na amostra, respectivamente.

Assim, em termos de  $\mu$  e  $\lambda$ , a função de distribuição acumulada de  $T$  é dada por

$$F(t; \mu, \lambda) = 1 - \Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{t}} - \mu\sqrt{t}\right), \quad x > 0, \lambda > 0, \mu > 0.$$

Ahmed, et al. (2008) apresentaram a relação entre os parâmetros usuais da distribuição Birnbaum-Saunders e os novos parâmetros, em que

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu\lambda}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Sendo assim, a fdp da distribuição  $\mathcal{BS}(\mu, \lambda)$  fica dada por

$$f(t; \mu, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\lambda}{t\sqrt{t}} + \frac{\mu}{\sqrt{t}} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\sqrt{t}} - \mu\sqrt{t} \right)^2 \right\},$$

em que  $t > 0$ ,  $\lambda > 0$  e  $\mu > 0$ . Desta forma, a média da distribuição Birnbaum-Saunders passa a ser  $\frac{\lambda\mu+1/2}{\mu^2}$  e a variância  $\frac{\lambda\mu+5/4}{\mu^4}$ .

A distribuição  $\mathcal{BS}(\mu, \lambda)$  possui duas propriedades interessantes: se  $T \sim \mathcal{BS}(\mu, \lambda)$ , então  $Y = aT$  possui distribuição  $\mathcal{BS}(\frac{\mu}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}\lambda)$  e se  $T \sim \mathcal{BS}(\mu, \lambda)$ , então  $Y = 1/T$  possui distribuição  $\mathcal{BS}(\lambda, \mu)$ .

Na Figura 2.1(a) nota-se que o aumento do valor de  $\lambda$  faz a distribuição ficar com suas caudas mais leves. Na Figura 2.1(b) observa-se que o crescimento do valor de  $\mu$  faz a variabilidade da distribuição reduzir, caracterizando  $\mu$  como um parâmetro de dispersão. Tal comportamento pode ser observado também na Figura 2.2.

## 2.2 Reparametrizações

Nesta seção serão apresentados cinco novos parâmetros para distribuição Birnbaum-Saunders, são eles:  $\mu$ ,  $\phi$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ . A combinação deste novos parâmetros e do parâmetro  $\alpha$  (parâmetro da  $\mathcal{BS}$  usual) resultaram em cinco novas parametrizações ou reparametrizações da distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$ . O novos parâmetros estão definidos em função dos parâmetros usuais da distribuição  $\mathcal{BS}$  da seguinte forma

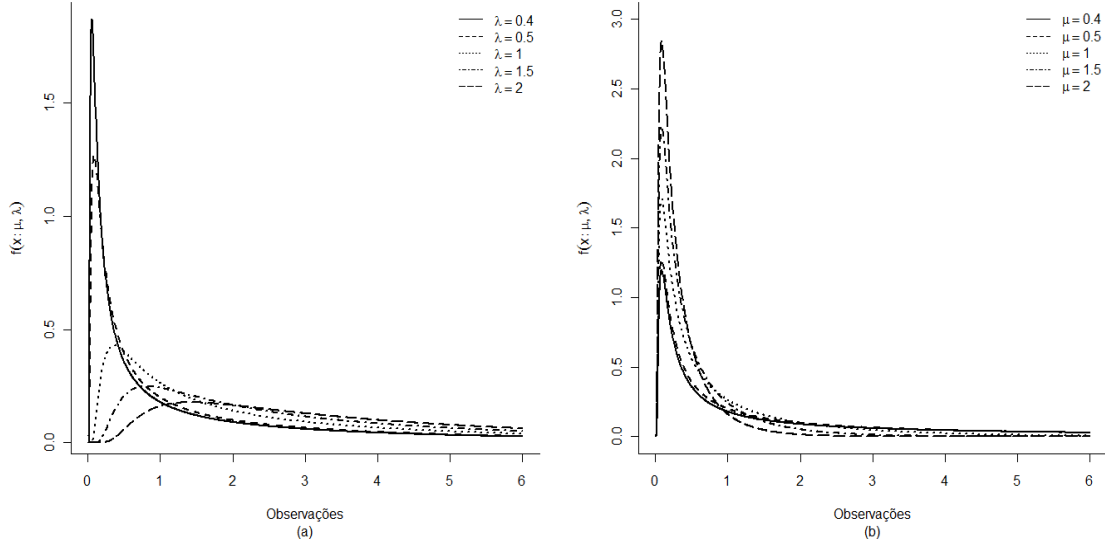


Figura 2.1: fdp da  $\mathcal{BS}(\mu, \lambda)$  para  $\mu = 0.5$  (a) e  $\lambda = 0.5$  (b).

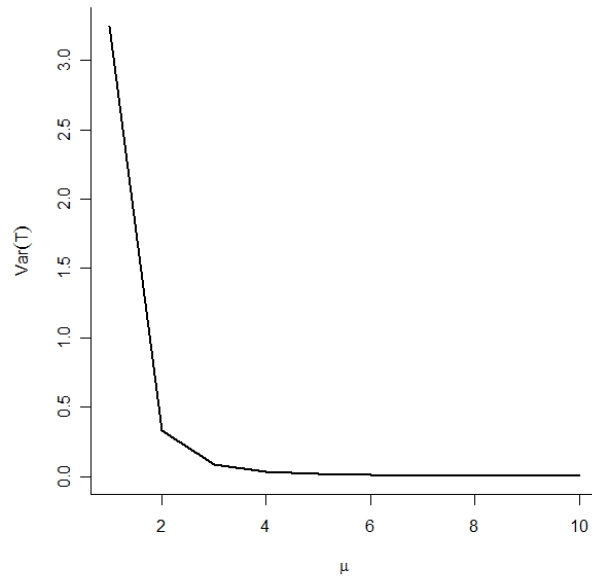


Figura 2.2: comportamento da variância da  $\mathcal{BS}(\mu, \lambda)$ , quando  $\mu \rightarrow \infty$ , para  $\lambda$  fixo.

1.  $\mu = \beta(1 + \frac{1}{2}\alpha^2)$ ;
2.  $\phi = (1 + \frac{1}{2}\alpha^2)$ ;
3.  $\sigma = \alpha^2\beta^2(1 + \frac{5}{4}\alpha^2)$ ;
4.  $\gamma = (1 + \frac{5}{4}\alpha^2)$ ;
5.  $\delta = \frac{2}{\alpha^2}$ .

Pode-se notar que os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$  são respectivamente, a média e a variância da distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$ . Temos ainda, que os parâmetros  $\phi$  e  $\delta$  são termos contidos na média da  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$  enquanto, o parâmetro  $\gamma$  é um termo contido da variância desta distribuição.

### Reparametrização 1

Nesta reparametrização temos que

$$\beta = \frac{2\mu}{2 + \alpha^2}. \quad (2.1)$$

Substituindo (2.1) na expressão (1.2), obtêm-se a fda da  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  dada por

$$F(t; \alpha, \mu) = \mathbb{P}(T \leq t) = \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{(2 + \alpha^2)t}{2\mu}} - \sqrt{\frac{2\mu}{(2 + \alpha^2)t}} \right) \right], \quad (2.2)$$

em que  $\alpha > 0$ ,  $\mu > 0$  e  $t > 0$ . A partir de (2.2), obtemos a fdp

$$f(t; \alpha, \mu) = \frac{\exp\{\alpha^{-2}\}\sqrt{2 + \alpha^2}}{4\alpha\sqrt{\pi\mu}} t^{-\frac{3}{2}} \left[ t + \frac{2\mu}{2 + \alpha^2} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha^2} \left\{ \frac{(2 + \alpha^2)t}{2\mu} + \frac{2\mu}{(2 + \alpha^2)t} \right\} \right\}.$$

A média e a variância da distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  são dadas respectivamente por

$$\mathbb{E}(T) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(T) = \frac{(\mu\alpha)^2(4 + 5\alpha^2)}{(2 + \alpha^2)^2}.$$

A distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  satisfaz a propriedade de escala, ou seja, se  $T \sim \mathcal{BS}(\alpha, \mu)$ , então  $Y = aT$  possui distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, a\mu)$ . A distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  também satisfaz a propriedade de recíproca, ou seja,  $\frac{1}{T}$  possui distribuição  $\mathcal{BS}$  (ver Apêndice).

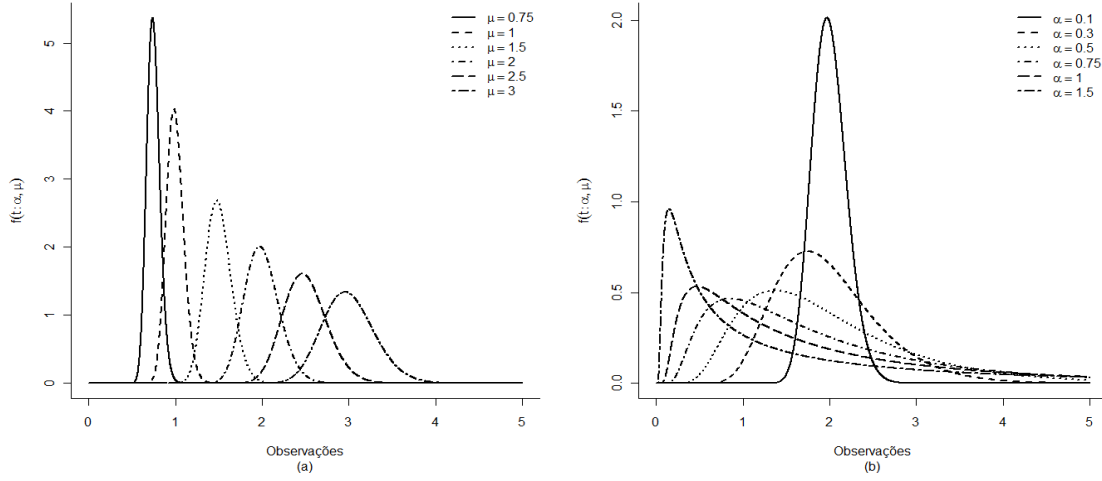


Figura 2.3: fdp da  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  para  $\alpha = 0.1$  (a) e  $\mu = 2.0$  (b).

Na Figura 2.3 (a) nota-se que a forma da distribuição é simétrica e com o aumento no valor do parâmetro  $\mu$  a variabilidade apresenta um crescimento. Na Figura 2.3 (b) observamos que a distribuição torna-se assimétrica à medida que o parâmetro  $\alpha$  cresce.

Seja  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$  em que os  $T_i$ 's são variáveis aleatórias independentes com densidade  $f(t_i; \alpha, \mu)$  dada em (2.2). Então, a função de verossimilhança é dada pela expressão

$$L(\alpha, \mu) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \alpha, \mu).$$

O logaritmo da função de verossimilhança  $\ell(\alpha, \mu)$  é da forma

$$\begin{aligned} \ell(\alpha, \mu) &= \log(L(\alpha, \mu)) \\ &= G(\alpha, \mu) - n \left\{ \frac{3}{2}g_1 - g_0(\alpha, \mu) + \frac{2 + \alpha^2}{4\mu\alpha^2}g_2 + \frac{\mu}{\alpha^2(2 + \alpha^2)}g_3 \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

em que  $G(\alpha, \mu) = \frac{n}{\alpha^2} + \frac{n}{2} \log(2 + \alpha^2) - n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\mu) - \frac{n}{2} \log(16\pi)$ ,  $g_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(t_i)$ ,  $g_0(\alpha, \mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(t_i + \frac{2\mu}{2 + \alpha^2})$ ,  $g_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$  e  $g_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}$ . Os estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\mu}$  de  $\alpha$  e  $\mu$  são obtidos maximizando (2.3) a partir da solução das equações

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \mu)}{\partial \alpha} = -\frac{4n(\alpha^2 + 1)}{(2 + \alpha^2)\alpha^3} - \sum_{i=1}^n \frac{4\alpha\mu(2 + \alpha^2)^{-2}}{(t_i + \frac{2\mu}{2 + \alpha^2})} + \frac{1}{\mu\alpha^3} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{4\mu(\alpha^2 + 1)}{(2 + \alpha^2)^2\alpha^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0, \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \mu)}{\partial \mu} = -\frac{n}{2\mu} + \sum_{i=1}^n \frac{2}{(2t_i + t_i\alpha^2 + 2\mu)} + \frac{(2 + \alpha^2)}{4\mu^2\alpha^2} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{\alpha^2(2 + \alpha^2)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0. \quad (2.4b)$$

Como as equações (2.4a) e (2.4b) não apresentam soluções analíticas, devemos encontrar os estimadores de máxima verossimilhança de  $\alpha$  e  $\mu$  através de algum método de otimização não-linear que será utilizado para maximizar o logaritmo da função de verossimilhança da  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$ .

## Reparametrização 2

Note que, se  $\phi = (1 + \frac{\alpha^2}{2})$  e  $\mu = \beta\phi$ . Então

$$\alpha = \sqrt{2(\phi - 1)} \quad (2.5)$$

e

$$\beta = \frac{\mu}{\phi}. \quad (2.6)$$

E ao substituírmos os valores definidos em (2.5) e (2.6) na expressão (1.2), obtêm-se a fda

$$F(t; \phi, \mu) = \mathbb{P}(T \leq t) = \Phi \left[ \frac{1}{\sqrt{2(\phi - 1)}} \left( \sqrt{\frac{\phi t}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\phi t}} \right) \right],$$

em que  $\phi > 1$ ,  $\mu > 0$  e  $t > 0$ . E a partir desta função obtemos a fdp da  $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$  dada por

$$f(t; \phi, \mu) = \frac{\sqrt{\phi} \exp \{ [2(\phi - 1)]^{-1} \}}{4\sqrt{\pi(\phi - 1)\mu}} t^{-3/2} \left[ t + \frac{\mu}{\phi} \right] \exp \left\{ -\frac{1}{4(\phi - 1)} \left( \frac{t\phi}{\mu} + \frac{\mu}{t\phi} \right) \right\}.$$

Consequentemente temos que a média e a variância da distribuição  $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$  apresentam as seguintes expressões

$$\mathbb{E}(T) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(T) = \frac{\mu^2(\phi - 1)(5\phi - 3)}{\phi^2}.$$

Com relação as propriedades da distribuição  $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$ , temos que ela satisfaz as propriedades de escala e de recíproca (ver Apêndice).

Nota-se na Figura 2.4 (a) que existe o aumento da variabilidade com o crescimento do valor do parâmetro  $\mu$ . Entretanto, na Figura 2.4 (b) nota-se que ao aumentarmos o valor do parâmetro  $\phi$  a variabilidade da distribuição é reduzida.

O parâmetro  $\phi$  possui uma característica interessante. Ele limita a variabilidade da distribuição, ou seja, quando  $\phi \rightarrow \infty$  a variância da  $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$  se torna constante, para  $\mu$  fixo. Comportamento esse pode ser observado na Figura 2.5.

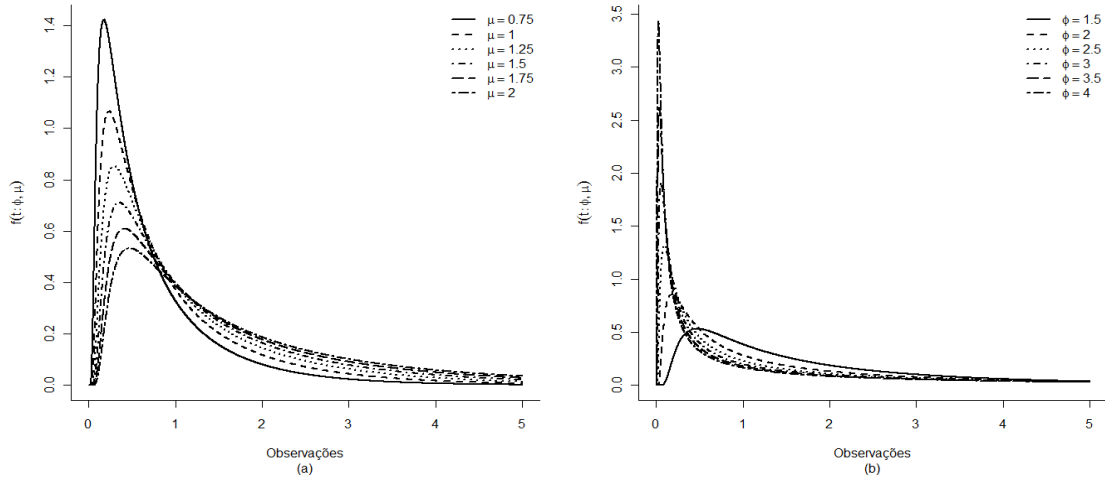


Figura 2.4: fdp da  $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$  para  $\phi = 1.5$  (a) e  $\mu = 2.0$  (b).

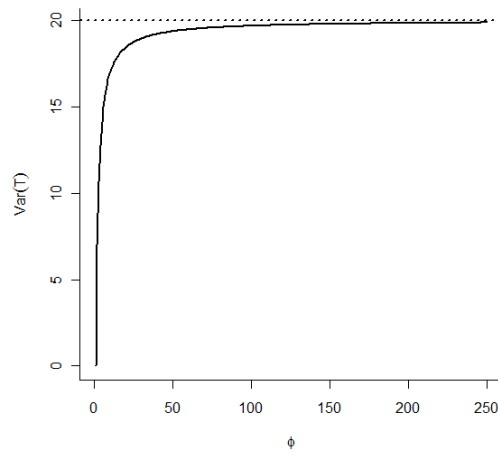


Figura 2.5: comportamento da variância da  $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$ , quando  $\phi \rightarrow \infty$ , para  $\mu$  fixo.

Podemos expressar o logaritmo da função de verossimilhança  $\ell(\phi, \mu)$  da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\ell(\phi, \mu) &= \log(L(\phi, \mu)) \\ &= G(\phi, \mu) - n \left\{ \frac{3}{2}g_1 - g_0(\phi, \mu) + \frac{\phi}{4(\phi-1)\mu}g_2 + \frac{\mu}{4\phi(\phi-1)}g_3 \right\},\end{aligned}\quad (2.7)$$

em que  $G(\phi, \mu) = \frac{n}{2} \log(\frac{\phi}{(\phi-1)}) + \frac{n}{2(\phi-1)} - \frac{n}{2} \log(\mu) - \frac{n}{2} \log(16\pi)$ ,  $g_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(t_i)$ ,  $g_0(\phi, \mu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(t_i + \frac{\mu}{\phi})$ ,  $g_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$  e  $g_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}$ . Para obter os estimadores de máxima verossimilhança de  $\phi$  e  $\mu$  deve-se maximizar (2.7), a partir da solução das equações

$$\frac{\partial \ell(\phi, \mu)}{\partial \phi} = -\frac{n(2\phi-1)}{2\phi(\phi-1)^2} - \frac{\mu}{\phi^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i + \frac{\mu}{\phi})} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{4\mu(\phi-1)^2} + \frac{\mu(2\phi-1)}{4\phi^2(\phi-1)^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0, \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial \ell(\phi, \mu)}{\partial \mu} = -\frac{n}{2\mu} + \frac{1}{\phi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i + \frac{\mu}{\phi})} + \frac{\phi}{4\mu^2(\phi-1)} \sum_{i=1}^n t_i - \frac{1}{4\phi(\phi-1)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0. \quad (2.8b)$$

De forma análoga ao que acontece com a primeira reparametrização apresentada, as equações (2.8a) e (2.8b) não possuem solução analítica para os estimadores de máxima verossimilhança, sendo assim, necessária a maximização do logaritmo da função de verossimilhança da distribuição  $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$  através de algum método de otimização não-linear, como por exemplo Newton-Raphson ou um método quasi-Newton (por exemplo BFGS).

### Reparametrização 3

Seja  $\sigma$  definido como sendo a variância da  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  dada em (1.6). Então

$$\beta = \frac{2\sqrt{\sigma}}{\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}}. \quad (2.9)$$

Utilizando o valor de  $\beta$  definido em (2.9) na expressão (1.2), obtemos a fda da  $\mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$  dada por

$$F(t; \alpha, \sigma) = \mathbb{P}(T \leq t) = \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}t}{2\sqrt{\sigma}}} - \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma}}{\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}t}} \right) \right], \quad (2.10)$$

em que  $\alpha > 0$ ,  $\sigma > 0$  e  $t > 0$ . A partir de (2.10), encontramos a seguinte fdp

$$f(t; \alpha, \sigma) = \frac{\exp\{\alpha^{-2}\}(4+5\alpha^2)^{\frac{1}{4}}}{4\sqrt{\alpha\pi}\sigma^{\frac{1}{4}}} t^{-\frac{3}{2}} \left[ t + \sqrt{\frac{4\sigma}{\alpha^2(4+5\alpha^2)}} \right] e^{-\frac{1}{2\alpha^2} \left( \frac{\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}t}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{2\sqrt{\sigma}}{\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}t} \right)}.$$

A média e a variância da distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$  possuem respectivamente as expressões

$$\mathbb{E}(T) = \frac{(2 + \alpha^2)\sqrt{\sigma}}{\alpha\sqrt{4 + 5\alpha^2}} \quad \text{e} \quad \text{Var}(T) = \sigma.$$

A distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$  não satisfaz a propriedade de escala, no entanto, satisfaz a propriedade de recíproca (ver Apêndice). Porém, possui uma variação da propriedade de escala, ou seja, se  $T \sim \mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$ , então  $Y = aT$  possui distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, a^2\sigma)$ .

Na Figura 2.6 (a) pode-se notar quando  $\alpha = 0, 1$  que a fdp tem forma parecida com a da distribuição normal e a medida que o valor do parâmetro  $\alpha$  aumenta a densidade vai tornando-se assimétrica, além disso, há um decréscimo na variabilidade. Enquanto isso, na Figura 2.6 (b) nota-se que com o aumento do valor do parâmetro  $\sigma$  a variabilidade apresenta um crescimento, comportamento este esperado, uma vez que o mesmo é a variância da distribuição.

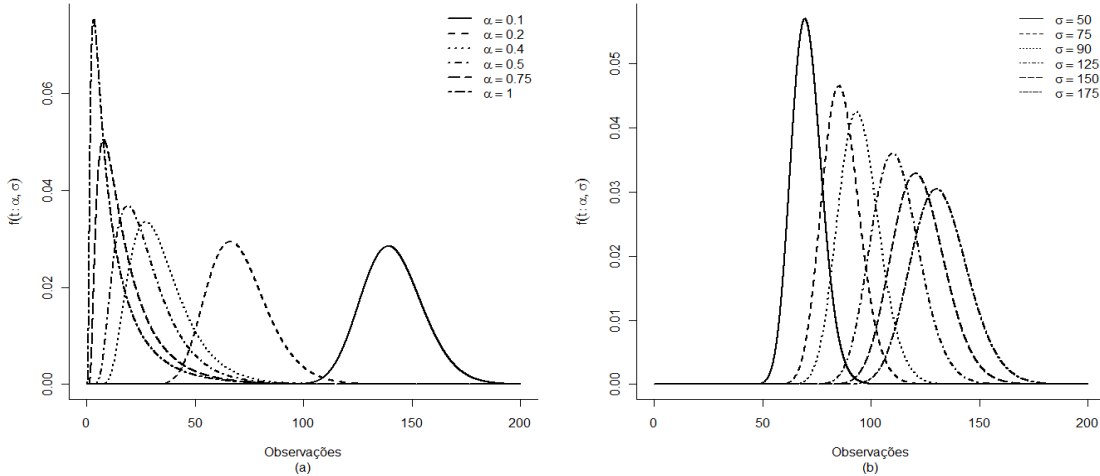


Figura 2.6: fdp da  $\mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$  para  $\sigma = 200$  (a) e  $\alpha = 0.1$  (b).

O logaritmo da função de verossimilhança  $\ell(\alpha, \sigma)$  é possui a expressão

$$\begin{aligned} \ell(\alpha, \sigma) &= \log(L(\alpha, \sigma)) \\ &= G(\alpha, \sigma) - n \left\{ \frac{3}{2}g_1 - g_0(\alpha, \sigma) + \sqrt{\frac{(4 + 5\alpha^2)}{16\alpha^2\sigma}}g_2 + \sqrt{\frac{\sigma}{\alpha^6(4 + 5\alpha^2)}}g_3 \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

em que  $G(\alpha, \sigma) = \frac{n}{\alpha^2} + \frac{n}{4} \log(4 + 5\alpha^2) - \frac{n}{2} \log(16\pi) - \frac{n}{2} \log(\alpha) - \frac{n}{4} \log(\sigma)$ ,  $g_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(t_i)$ ,  $g_0(\alpha, \sigma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(t_i + \sqrt{\frac{4\sigma}{\alpha^2(4 + 5\alpha^2)}})$ ,  $g_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$  e  $g_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}$ . A maximização

de (2.11), a partir da solução das equações abaixo, resulta nos estimadores de máxima verossimilhança de  $\alpha$  e  $\sigma$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\alpha, \sigma)}{\partial \alpha} &= \frac{n\{10\alpha(1-\alpha) - 8\}}{2(8 + 10\alpha^2)} + \frac{4\sqrt{\sigma}(2 + 5\alpha^2)}{\alpha(4 + 5\alpha^2)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\sqrt{\alpha^2(4 + 5\alpha^2)}t_i + \sqrt{4\sigma})} \\ &- \frac{1}{\sqrt{(4 + 5\alpha^2)\sigma}\alpha^2} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{4\sqrt{\sigma}(3 + 5\alpha^2)}{\alpha^4\sqrt{(4 + 5\alpha^2)^3}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0, \end{aligned} \quad (2.12a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\alpha, \sigma)}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{4\sigma} - \frac{1}{\alpha\sqrt{(4 + 5\alpha^2)\sigma}} \sum_{i=1}^n \left( t_i + \sqrt{\frac{4\sigma}{\alpha^2(4 + 5\alpha^2)}} \right)^{-1} \\ &- \frac{\sqrt{4 + 5\alpha^2}}{8\alpha\sqrt{\sigma^3}} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{1}{\sqrt{4\sigma}(4 + 5\alpha^2)\alpha^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0. \end{aligned} \quad (2.12b)$$

Notamos através das equações (2.12a) e (2.12b) que não é possível encontrar uma solução analítica para os estimadores de máxima verossimilhança de  $\alpha$  e  $\sigma$ , fazendo-se necessária a utilização de algum método de otimização não-linear como alguns dos já mencionado.

#### Reparametrização 4

Dados  $\gamma = (1 + \frac{5}{4}\alpha^2)$  e  $\sigma = (\alpha\beta)^2\gamma$ . Temos

$$\alpha = \frac{2\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\sqrt{5\sigma}}{2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}}. \quad (2.13)$$

Substituindo os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  apresentados em (2.13) na expressão (1.2), temos a fda da  $\mathcal{BS}(\gamma, \sigma)$  dada por

$$F(t; \gamma, \sigma) = \mathbb{P}(T \leq t) = \Phi \left[ \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\gamma-1}} \left( \sqrt{\frac{2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}t}{\sqrt{5\sigma}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5\sigma}}{2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}t}} \right) \right], \quad (2.14)$$

em que  $\gamma > 1$ ,  $\sigma > 0$  e  $t > 0$ . A partir de (2.14), obtemos a fdp

$$f(t; \gamma, \sigma) = \frac{e^{\frac{5}{4(\gamma-1)}} \sqrt{5} [\gamma(\gamma-1)]^{\frac{1}{4}}}{4(5\sigma)^{\frac{1}{4}} \sqrt{(\gamma-1)\pi}} t^{-\frac{3}{2}} \left[ t + \sqrt{\frac{5\sigma}{4\gamma(\gamma-1)}} \right] e^{-\frac{5}{8(\gamma-1)} \left( \frac{\sqrt{4\gamma(\gamma-1)}t}{\sqrt{5\sigma}} + \frac{\sqrt{5\sigma}}{\sqrt{4\gamma(\gamma-1)}t} \right)}. \quad (2.15)$$

A média e a variância obtidas através de (2.15), possuem respectivamente, as expressões

$$\mathbb{E}(T) = \frac{(2\gamma+3)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{20\gamma(\gamma-1)}} \quad \text{e} \quad \text{Var}(T) = \sigma$$

A propriedade de escala não é satisfeita na distribuição  $\mathcal{BS}(\gamma, \sigma)$ . Enquanto isso, a  $\mathcal{BS}(\gamma, \sigma)$  satisfaz recíproca (ver Apêndice). Temos que se  $T \sim \mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$ , então  $Y = aT$  possui distribuição  $\mathcal{BS}(\gamma, a^2\sigma)$ .

Na Figura 2.7, apresentamos o comportamento da fdp da  $\mathcal{BS}(\gamma, \sigma)$  para diferentes combinações dos parâmetros  $\gamma$  e  $\sigma$ . Podemos observar na Figura 2.7 (a) que com o aumento do valor de  $\gamma$  a variabilidade da distribuição diminui. Enquanto que o aumento do valor de  $\sigma$  provoca um crescimento na variabilidade, comportamento este que pode ser observado na Figura 2.7 (b).

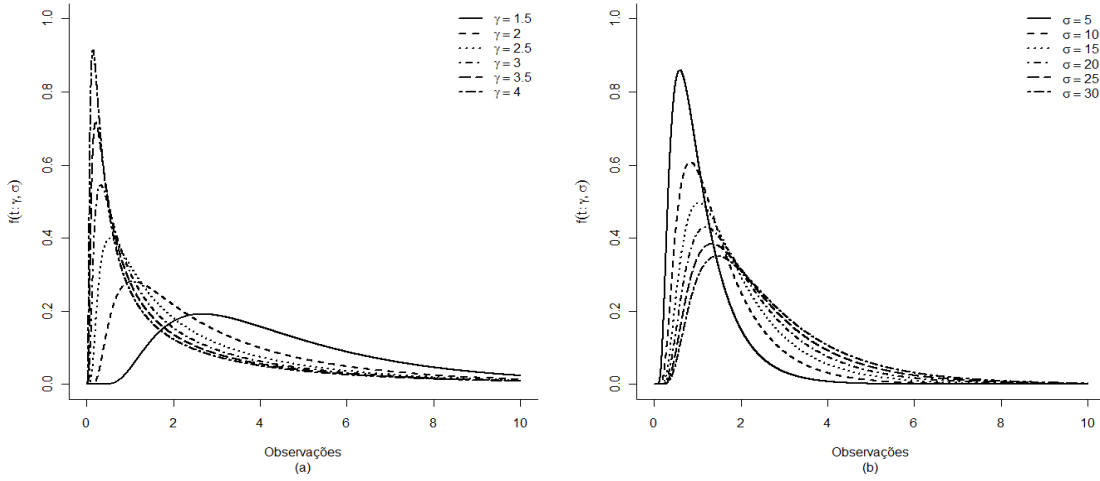


Figura 2.7: fdp da  $\mathcal{BS}(\gamma, \sigma)$  para  $\sigma = 10$  (a) e  $\gamma = 1.5$  (b).

Para encontramos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição  $\mathcal{BS}(\gamma, \sigma)$ , será definido o logaritmo da função de verossimilhança  $\ell(\gamma, \sigma)$  dado por

$$\begin{aligned} \ell(\gamma, \sigma) &= \log(L(\gamma, \sigma)) \\ &= G(\gamma, \sigma) - n \left\{ \frac{3}{2}g_1 - g_0(\gamma, \sigma) + \sqrt{\frac{5\gamma}{16(\gamma-1)\sigma}}g_2 + \sqrt{\frac{125\sigma}{256\gamma(\gamma-1)^3}}g_3 \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

em que  $G(\gamma, \sigma) = \frac{5}{4(\gamma-1)}n + \frac{n}{2}\log(5) - \frac{n}{2}\log(\pi) + \frac{n}{4}\log(\frac{\gamma}{\gamma-1}) - n\log(5\sigma)$ ,  $g_0(\gamma, \sigma) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(t_i + \sqrt{\frac{5\sigma}{4\gamma(\gamma-1)}})$ ,  $g_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(t_i)$ ,  $g_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i$  e  $g_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}$ . Os estimadores de máxima verossimilhança  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\sigma}$  de  $\gamma$  e  $\sigma$  são obtidos maximizando (2.16) a

partir da solução das equações

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\gamma, \sigma)}{\partial \gamma} &= -\frac{(6\gamma - 6)}{4\gamma(\gamma - 1)}n - \frac{\sqrt{5\sigma}(2\gamma - 1)}{\gamma(\gamma - 1)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2\sqrt{\gamma(\gamma - 1)}t_i + \sqrt{5\sigma})} + \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{\gamma(\gamma - 1)^3\sigma}} \sum_{i=1}^n t_i \\ &+ \frac{\sqrt{125\gamma(\gamma - 1)\sigma}(4\gamma - 1)}{32\gamma^2(4\gamma - 1)^3} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0,\end{aligned}\quad (2.17a)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\gamma, \sigma)}{\partial \sigma} &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\sigma}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2\sqrt{\gamma(\gamma - 1)}t_i + \sqrt{5\sigma})} + \frac{\sqrt{5\gamma}}{8\sigma\sqrt{(\gamma - 1)\sigma}} \sum_{i=1}^n t_i \\ &- \frac{5\sqrt{5(\gamma - 1)}}{32\sqrt{\sigma\gamma(\gamma - 1)^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0.\end{aligned}\quad (2.17b)$$

Como anteriormente, note que através das equações (2.17a) e (2.17b) não é possível determinar uma solução analítica para os estimadores de máxima verossimilhança de  $\alpha$  e  $\sigma$ .

### Reparametrização 5

Seja  $\mu = \beta(1 + \frac{\alpha^2}{2})$  e  $\delta = \frac{2}{\alpha^2}$ . Então,

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\delta}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\mu}{(1 + \frac{1}{\delta})}. \quad (2.18)$$

A fda da  $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$  é obtida substituindo os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  definidos em (2.18) na expressão (1.2). Sendo assim, temos

$$F(t; \delta, \mu) = \mathbb{P}(T \leq t) = \Phi \left[ \sqrt{\frac{\delta}{2}} \left( \sqrt{\frac{(\delta + 1)t}{\delta\mu}} - \sqrt{\frac{\delta\mu}{(\delta + 1)t}} \right) \right], \quad (2.19)$$

em que  $\delta > 0$ ,  $\mu > 0$  e  $t > 0$ .

A fdp para esta distribuição é obtida a partir de (2.19) e apresenta a seguinte expressão

$$f(t; \delta, \mu) = \frac{\exp(\frac{\delta}{2})\sqrt{\delta + 1}}{4\sqrt{\pi\mu}} t^{-3/2} \left[ t + \frac{\delta\mu}{\delta + 1} \right] \exp \left\{ -\frac{\delta}{4} \left( \frac{t(\delta + 1)}{\delta\mu} + \frac{\delta\mu}{t(\delta + 1)} \right) \right\}.$$

Adicionalmente, temos que o valor esperado e a variância da distribuição  $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$  apresentam as seguintes expressões, respectivamente

$$\mathbb{E}(T) = \mu \quad \text{e} \quad \text{Var}(T) = \frac{g(\mu)}{h(\delta)},$$

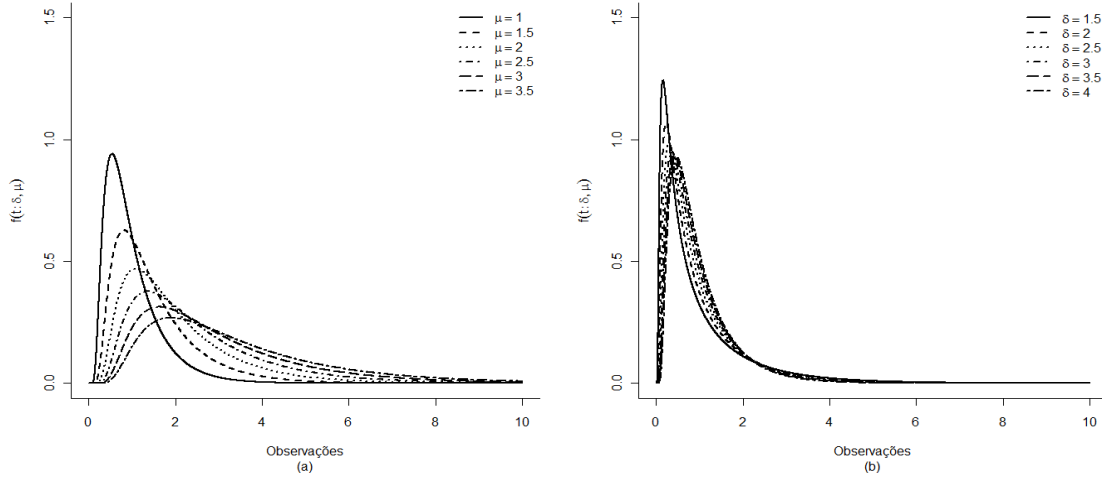


Figura 2.8: fdp da  $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$  para  $\delta = 5.0$  (a) e  $\mu = 1.0$  (b).

em que

$$g(\mu) = 2\mu^2 \quad \text{e} \quad h(\delta) = \frac{1}{\frac{1}{\delta+2+\frac{1}{\delta}} + \frac{5}{2(\delta^2+\delta+1)}}.$$

A distribuição  $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$  satisfaz a propriedade de escala, ou seja, se  $T \sim \mathcal{BS}(\delta, \mu)$ , então  $Y = aT$  possui distribuição  $\mathcal{BS}(\delta, a\mu)$  e também satisfaz a propriedade recíproca. Para maiores detalhes ver Apêndice.

Observamos na Figura 2.8 (a) que a curtose reduz com o aumento no valor do parâmetro  $\mu$ . Nas Figuras 2.8 (b) e 2.9 nota-se que o aumento no valor do parâmetro  $\delta$  causa pequena mudança na forma da densidade e também diminuição na variabilidade da  $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$ . Deste modo, o parâmetro  $\delta$  pode ser caracterizado como parâmetro de dispersão ou precisão.

Temos que o logaritmo da função de verossimilhança  $\ell(\delta, \mu)$  é dado por

$$\begin{aligned} \ell(\delta, \mu) &= \log(L(\delta, \mu)) \\ &= G(\delta, \mu) - n \left\{ \frac{3}{2}g_1 - g_0(\delta, \mu) + \frac{(\delta+1)}{4\mu}g_2 + \frac{\delta^2\mu}{4(\delta+1)}g_3 \right\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

em que  $G(\delta, \mu) = \frac{n}{2}\delta + \frac{n}{2}\log(\delta+1) - \frac{n}{2}\log(16\pi) - \frac{n}{2}\log(\mu)$ ,  $g_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(t_i)$ ,  $g_0(\delta, \mu) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(t_i + \frac{\delta\mu}{(\delta+1)})$ ,  $g_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n t_i$  e  $g_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}$ . Os estimadores de máxima verossimilhança de  $\delta$  e  $\mu$  são obtidos maximizando (2.20), a partir da solução das equações

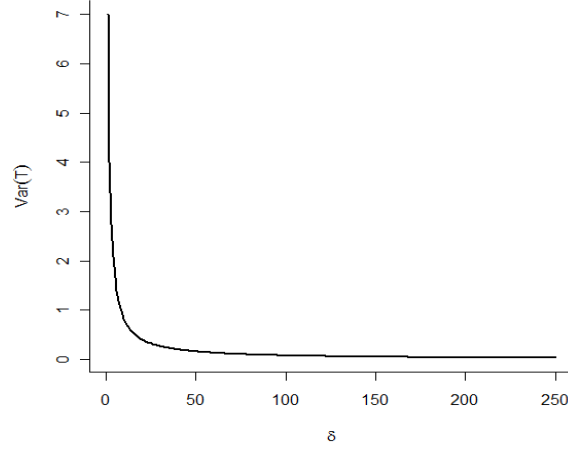


Figura 2.9: comportamento da variância da  $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$ , quando  $\delta \rightarrow \infty$ , para  $\mu$  fixo.

$$\frac{\partial \ell(\delta, \mu)}{\partial \delta} = \frac{n}{2} + \frac{n}{2(\delta + 1)} - \delta \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\delta t_i + \delta \mu + t_i)} + \frac{1}{4\mu} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{\delta \mu (\delta + 2)}{(\delta + 1)^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0, \quad (2.21a)$$

$$\frac{\partial \ell(\delta, \mu)}{\partial \mu} = -\frac{n}{2\mu} - \frac{\mu}{(\delta + 1)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\delta t_i + \delta \mu + t_i)} - \frac{(\delta + 1)}{4\mu^2} \sum_{i=1}^n t_i + \frac{\delta^2}{4(\delta + 1)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} = 0. \quad (2.21b)$$

Novamente, podemos notar através das equações (2.21a) e (2.21b) que não é possível obtermos uma solução analítica para os estimadores de máxima verossimilhança de  $\delta$  e  $\mu$ .

## 2.3 Estimadores de momentos

Ng, Kundu e Balakrishman (2003) mostraram que o estimador de momentos do parâmetro  $\beta$  da distribuição Birnbaum-Saunders, baseado nos dois primeiros momentos populacionais e amostrais não existem, pois não é possível obter uma única solução para as equações resultantes. A seguir, serão apresentados os estimadores de momentos, denotados por EMs, para cada uma das reparametrizações. Definindo  $T_1, \dots, T_n$  como uma amostra de um dado conjunto de números positivos, define-se a variância amostral como sendo

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2,$$

em que  $\bar{t}$  está definido em (1.9).

Os EMs dos parâmetros que compõem as reparametrizações apresentadas neste trabalho possuem as seguintes expressões

1.  $\tilde{\alpha} = 2 \left[ \frac{s^2 - \bar{t}^2 + \sqrt{\bar{t}^4 + 3\bar{t}^2 s^2}}{(10\bar{t}^2 - 2s^2)} \right]^{\frac{1}{2}};$
2.  $\tilde{\mu} = \bar{t};$
3.  $\tilde{\phi} = \frac{4\bar{t}^2 + \bar{t}\sqrt{\bar{t}^2 + 3s^2}}{(5\bar{t}^2 - s^2)};$
4.  $\tilde{\sigma} = s^2;$
5.  $\tilde{\gamma} = \frac{5\bar{t}^2 + 3s^2 + 5\sqrt{\bar{t}^4 + 3\bar{t}^2 s^2}}{(10\bar{t}^2 - 2s^2)};$
6.  $\tilde{\delta} = \frac{\bar{t}^2 - s^2 + \sqrt{\bar{t}^4 + 3\bar{t}^2 s^2}}{s^2}.$

No Apêndice é apresentado de forma detalhada como foram obtidos cada um dos EMs apresentados acima. Para que os estimadores  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\gamma}$  e  $\tilde{\delta}$  existam será necessário que o coeficiente de variação amostral seja inferior  $\sqrt{5}$ . A seguir serão realizadas simulações de Monte Carlo para estudarmos o comportamento empírico dos EMVs e EMs, adicionalmente serão calculadas os intervalos de confiança assintóticos para os EMVs e calculadas suas respectivas taxas de coberturas.

## Simulações

No estudo do comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança e de momentos dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $\phi$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  que compõem as distribuições  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$ ,  $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$ ,  $\mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$ ,  $\mathcal{BS}(\gamma, \sigma)$ , e  $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$  considerou-se amostras pequenas, moderadas e grandes, ou seja, 10, 25 e 100, respectivamente. Também foi estudado o EMV do parâmetro  $\beta$ , que juntamente com o parâmetro  $\alpha$  compõem a  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$ . Os valores considerados como verdadeiros para o parâmetro  $\alpha$  no estudo foram 0,20, 0,50 e 1,0, que representam assimetria fraca, moderada e forte, respectivamente. O valor do parâmetro  $\beta$  usado no estudo foi fixado no valor 1,0. A geração dos números pseudo-aleatórios foi realizada usando a expressão (1.3) e as relações entre os parâmetros da distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \beta)$  e suas reparametrizações. Foram realizadas 10000 réplicas de Monte Carlo e um programa em `0x` foi desenvolvido para executar o estudo de simulação. E para a construção dos intervalos assintóticos baseados nos EMV, foram calculados os valores aproximados das

variâncias destes estimadores através do método Delta. Obteve-se as aproximações para as variâncias dos estimadores de máxima verossimilhança, utilizando a seguinte expressão

$$\text{Var}(d_r) = \sum_i \left( \frac{\partial d_r}{\partial \theta_i} \right)^2 \text{Var}(\theta_i) + \sum_i \sum_{i \neq j} \left( \frac{\partial d_r}{\partial \theta_i} \right) \left( \frac{\partial d_r}{\partial \theta_j} \right) \text{Cov}(\theta_i, \theta_j),$$

em que  $d_r$  é o  $r$ -ésimo elemento de  $d(\boldsymbol{\theta})$ .

- $V(\hat{\alpha}) = \frac{\alpha^2}{2n}$ ;
- $V(\hat{\beta}) = \frac{\beta^2}{n[0,25+\alpha^{-2}+I(\alpha)]}$ ;
- $V(\hat{\mu}) = \frac{\alpha^3\beta^2}{2n} + \frac{\beta^2(1+\frac{1}{2}\alpha^2)}{n[0,25+\alpha^{-2}+I(\alpha)]}$  ;
- $V(\hat{\phi}) = \frac{\alpha^4}{2n}$  ;
- $V(\hat{\sigma}) = [2\alpha\beta^2 + 5\beta\alpha^2\alpha^3]^2 \frac{\alpha^2}{2n} + [2\beta\alpha^2(1 + \frac{5}{4}\alpha^2)]^2 \frac{\beta^2}{n[0,25+\alpha^{-2}+I(\alpha)]}$ ;
- $V(\hat{\gamma}) = \frac{5\alpha^4}{4n}$ ;
- $V(\hat{\delta}) = \frac{8}{n\alpha^4}$ .

Na Tabela 2.1 apresentamos resultados numéricos referentes às estimativas dos EMV para o caso em que  $\alpha = 0,2$  e  $\beta = 1,0$ . Observamos que os estimadores  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\gamma}$  apresentaram, em módulo, viés relativo consideravelmente menor que o viés relativo do estimador  $\hat{\alpha}$ , para todos os tamanhos amostrais. Nota-se ainda que os estimadores  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\beta}$  apresentaram comportamento similar quando o tamanho amostral cresce. Também temos que os estimadores  $\hat{\sigma}$  e  $\hat{\delta}$  foram os menos eficazes no que tange ao valor do viés relativo. Note também que as estimativas de  $\sqrt{\text{EQM}}$  dos estimadores  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\gamma}$  apresentaram assim como no viés relativo valores inferiores a estimativa de  $\sqrt{\text{EQM}}$  do estimador  $\hat{\alpha}$ . Observe também que o estimador  $\hat{\delta}$  apresentou o pior desempenho dentre todos os estimadores no que tange a estimativa de  $\sqrt{\text{EQM}}$ . Por exemplo, para  $n = 100$ , a estimativa de  $\sqrt{\text{EQM}}$  do estimador  $\hat{\delta}$  foi igual a 7,6933. Nota-se também que o estimador  $\hat{\sigma}$  apresentou desempenho inferior aos estimadores  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\beta}$  no que tange ao viés relativo.

Na Tabela 2.2 são apresentados os resultados da estimação dos EMV para o caso em que  $\alpha = 0,5$  e  $\beta = 1,0$ . Observe que de forma análoga ao que acontece na Tabela 2.1, os estimadores  $\hat{\phi}$  e  $\hat{\gamma}$  apresentaram, em módulo, viés relativo consideravelmente menor

que o viés relativo do estimador  $\hat{\alpha}$ . Nota-se ainda que o estimador  $\hat{\sigma}$  apresentou, em módulo, desempenho similar ao estimador  $\hat{\beta}$  quando comparadas as estimativas do viés. Por exemplo, para  $n = 100$  temos que as estimativas do viés relativo dos estimadores  $\hat{\sigma}$  e  $\hat{\beta}$  apresentaram os respectivos valores, 0,0019 e 0,0010. Nota-se também que o estimador  $\hat{\delta}$  apresentou estimativas de viés relativo superiores, em módulo, as estimativas dos demais estimadores. Pode-se observar que as estimativas de  $\sqrt{\text{EQM}}$  dos estimadores  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\sigma}$  e  $\hat{\gamma}$  apresentaram valores relativamente próximos. Por exemplo, para  $n = 100$  temos que as estimativas de  $\sqrt{\text{EQM}}$  para tais estimadores ficou em torno de 0,0550.

Na Tabela 2.3 estão apresentados os resultados da estimação dos EMV para o caso em que  $\alpha = 1,0$  e  $\beta = 1,0$ . Nota-se que os estimadores  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\phi}$  apresentaram melhor desempenho com relação ao viés e viés relativo do que os estimadores  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\delta}$ . Note ainda que dentre todos os estimadores,  $\hat{\delta}$  apresentou o pior desempenho com relação ao viés e viés relativo. Observe também que os estimadores  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\phi}$  apresentaram estimativas de  $\sqrt{\text{EQM}}$  bem próximas, por exemplo, temos que para  $n = 100$  tais estimativas assumiram os respectivos valores: 0,0712, 0,0882 e 0,0704. Além desses estimadores outros apresentaram comportamento parecido quando levamos em consideração as estimativas de  $\sqrt{\text{EQM}}$ , com os estimadores  $\hat{\mu}$  e  $\hat{\gamma}$ . Podemos observar que o estimador que apresentou melhor desempenho para todos os cenários estudados foi o  $\hat{\mu}$  que apresentou um baixo viés e relativa precisão. Enquanto que os estimador  $\hat{\delta}$  apresentou o pior desempenho dentre todos os estimadores estudados, comportamento que pode ser observado nas Tabelas 2.1 - 2.3. Adicionalmente, pode-se notar que as estimativas do viés, viés relativo, EQM e  $\sqrt{\text{EQM}}$ , para a maioria dos estimadores, apresentam um aumento em suas estimativas com o crescimento do valor do parâmetros  $\alpha$ , ou seja, com o aumento do grau de assimetria.

Na Tabela 2.4 apresentamos as estimativas para os estimadores de momentos para o caso em que  $\alpha = 0,2$  e  $\beta = 1,0$ . Observamos que a maioria dos estimadores subestimam o verdadeiro valor dos respectivos parâmetros. No entanto o estimador  $\tilde{\delta}$  superestima o valor verdadeiro do parâmetro  $\delta$ . Pode-se observar ainda que os EMs apresentaram estimativas do viés relativo similares as estimativas do viés relativo dos EMV. Por exemplo, para  $n = 100$  as estimativas, em módulo, do viés relativo dos estimadores  $\tilde{\alpha}$  e  $\hat{\alpha}$  apresentam valores em torno de 0,0080. Nota-se ainda que as estimativas de  $\sqrt{\text{EQM}}$

para os estimadores  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\sigma}$  e  $\tilde{\gamma}$  apresentaram valores relativamente baixos indicando, da mesma forma que os EMV, que esses estimadores apresentaram boa precisão. Note que o estimador  $\tilde{\delta}$  assim como os estimador  $\hat{\delta}$  apresentou estimativas de  $\sqrt{EQM}$  bem superiores aos demais estimadores.

Na Tabela 2.5 estão apresentados os resultados das estimativas dos EMs para o caso em que  $\alpha = 0,5$  e  $\beta = 1,0$ . Pode-se observar que de forma análoga ao que é apresentado na Tabela 2.4, os estimadores  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\sigma}$  e  $\tilde{\gamma}$  subestimam o verdadeiro valor de seus respectivos parâmetros. Também de forma analoga aos resultados da Tabela 2.4 temos que o estimador  $\tilde{\delta}$  apresentou as maiores estimativas para o viés relativo e  $\sqrt{EQM}$ . Observamos também, na Tabela 2.5, que os EMs apresentaram estimativas de viés relativo e  $\sqrt{EQM}$  superiores as estimativas obtidas pelos EMV apresentadas na Tabelas 2.2. Na Tabela 2.6 os resultados das estimativas dos EMs para o caso em que  $\alpha = 1,0$  e  $\beta = 1,0$ . Podemos observar que as estimativas apresentadas nesta Tabela possuem interpretações similares as das Tabelas 2.4 e 2.5. No entanto, as estimativas do viés e viés relativo são relativamente superiores as estimativas do viés e viés relativo das Tabelas 2.4 e 2.5. Podemos observar também que com o crescimento do valor do parâmetro  $\alpha$  houve uma perda de precisão dos EMs da mesma forma que aconteceu com os EMV. Por fim, temos que de modo geral os resultados obtidos pelos EMV foram melhores no sentido de menor viés e precisão do que os EMs, resultado esse já esperado.

Nas Tabelas 2.7-2.9 apresentamos as estimativas para os intervalos assintóticos dos EMV e suas respectivas taxas de cobertura. Em todas essas Tabelas temos como resultado principal o fato de que as taxas de cobertura dos intervalos dos parâmetros  $\delta$  e  $\mu$  foram superiores as taxas de cobertura dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Outro resultado importante que pode ser observado nestas Tabelas é que os intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros  $\phi$ ,  $\sigma$  e  $\gamma$  apresentaram taxas de cobertura inferiores aos demais parâmetros.

Com os resultados das simulações foi possível observarmos que alguns dos novos parâmetros propostos possibilitou a melhoria dos resultados inferenciais da distribuição Birnbaum-Saunders. Além disso, através da quinta reparametrização proposta é possível modelarmos a média de uma variável aleatória com distribuição Birnbaum-Saunders envolvendo um parâmetro de dispersão.

Tabela 2.1: medidas para as estimativas de máxima verossimilhança para  $\alpha = 0, 2$  e  $\beta = 1, 0$ .

| Est.           | $n$ | Par.    | Média   | DP.     | Assimetria | Curtose | Viés    | Viés R. | EQM       | $\sqrt{\text{EQM}}$ |
|----------------|-----|---------|---------|---------|------------|---------|---------|---------|-----------|---------------------|
| $\hat{\alpha}$ | 10  | 0,2000  | 0,1856  | 0,0435  | 0,3372     | 2,9827  | -0,0144 | -0,0719 | 0,0021    | 0,0458              |
|                | 25  | 0,2000  | 0,1942  | 0,0282  | 0,1634     | 2,9344  | -0,0058 | -0,0289 | 0,0008    | 0,0288              |
|                | 100 | 0,2000  | 0,1983  | 0,0141  | 0,0487     | 3,0257  | -0,0017 | -0,0083 | 0,0002    | 0,0142              |
| $\hat{\beta}$  | 10  | 1,0000  | 1,0015  | 0,0635  | 0,2087     | 3,1081  | 0,0015  | 0,0015  | 0,0040    | 0,0635              |
|                | 25  | 1,0000  | 1,0006  | 0,0397  | 0,1614     | 2,9981  | 0,0006  | 0,0006  | 0,0016    | 0,0397              |
|                | 100 | 1,0000  | 1,0001  | 0,0198  | 0,0582     | 3,0486  | 0,0001  | 0,0001  | 0,0004    | 0,0198              |
| $\hat{\mu}$    | 10  | 1,0200  | 1,0197  | 0,0653  | 0,2094     | 3,1047  | -0,0003 | -0,0002 | 0,0043    | 0,0653              |
|                | 25  | 1,0200  | 1,0199  | 0,0410  | 0,1619     | 3,0257  | -0,0001 | -0,0001 | 0,0017    | 0,0410              |
|                | 100 | 1,0200  | 1,0199  | 0,0204  | 0,0729     | 3,0471  | -0,0001 | -0,0001 | 0,0004    | 0,0204              |
| $\hat{\phi}$   | 10  | 1,0200  | 1,0182  | 0,0085  | 0,9864     | 4,3143  | -0,0018 | -0,0018 | 0,0001    | 0,0087              |
|                | 25  | 1,0200  | 1,0193  | 0,0056  | 0,5779     | 3,4298  | -0,0007 | -0,0007 | 0,0000    | 0,0056              |
|                | 100 | 1,0200  | 1,0198  | 0,0028  | 0,2643     | 3,1244  | -0,0002 | -0,0002 | 0,0000    | 0,0028              |
| $\hat{\sigma}$ | 10  | 0,0420  | 0,0387  | 0,0198  | 1,2090     | 5,2274  | -0,0033 | -0,0797 | 0,0004    | 0,0201              |
|                | 25  | 0,0420  | 0,0407  | 0,0128  | 0,7263     | 3,7799  | -0,0013 | -0,0321 | 0,0002    | 0,0129              |
|                | 100 | 0,0420  | 0,0416  | 0,0064  | 0,3519     | 3,2703  | -0,0004 | -0,0106 | 0,0000    | 0,0064              |
| $\hat{\gamma}$ | 10  | 1,0500  | 1,0454  | 0,0212  | 0,9864     | 4,3143  | -0,0046 | -0,0043 | 0,0005    | 0,0217              |
|                | 25  | 1,0500  | 1,0481  | 0,0139  | 0,5779     | 3,4298  | -0,0019 | -0,0018 | 0,0002    | 0,0140              |
|                | 100 | 1,0500  | 1,0494  | 0,0070  | 0,2643     | 3,1244  | -0,0006 | -0,0006 | 0,0000    | 0,0070              |
| $\hat{\delta}$ | 10  | 50,0000 | 69,3301 | 37,9790 | 1,9889     | 9,1990  | 19,3301 | 0,3866  | 1816,0555 | 42,6152             |
|                | 25  | 50,0000 | 56,6288 | 17,7268 | 1,2699     | 5,9953  | 6,6288  | 0,1326  | 358,1792  | 18,9256             |
|                | 100 | 50,0000 | 51,6340 | 7,5178  | 0,6353     | 3,8359  | 1,6340  | 0,0327  | 59,1868   | 7,6933              |

Tabela 2.2: medidas para as estimativas de máxima verossimilhança para  $\alpha = 0, 5$  e  $\beta = 1, 0$ .

| Est.           | $n$ | Par.   | Média   | DP.    | Assimetria | Curtose | Viés    | Viés R. | EQM     | $\sqrt{\text{EQM}}$ |
|----------------|-----|--------|---------|--------|------------|---------|---------|---------|---------|---------------------|
| $\hat{\alpha}$ | 10  | 0,5000 | 0,4617  | 0,1098 | 0,2944     | 3,0080  | -0,0383 | -0,0767 | 0,0135  | 0,1163              |
|                | 25  | 0,5000 | 0,4851  | 0,0705 | 0,1622     | 2,9383  | -0,0149 | -0,0298 | 0,0052  | 0,0720              |
|                | 100 | 0,5000 | 0,4957  | 0,0353 | 0,0487     | 3,0248  | -0,0043 | -0,0086 | 0,0013  | 0,0355              |
| $\hat{\beta}$  | 10  | 1,0000 | 1,0111  | 0,1573 | 0,4928     | 3,4770  | 0,0111  | 0,0111  | 0,0249  | 0,1577              |
|                | 25  | 1,0000 | 1,0043  | 0,0974 | 0,3270     | 3,1354  | 0,0043  | 0,0043  | 0,0095  | 0,0975              |
|                | 100 | 1,0000 | 1,0010  | 0,0482 | 0,1431     | 3,0628  | 0,0010  | 0,0010  | 0,0023  | 0,0482              |
| $\hat{\mu}$    | 10  | 1,1250 | 1,1250  | 0,1831 | 0,4877     | 3,4227  | -0,0000 | -0,0000 | 0,0335  | 0,1831              |
|                | 25  | 1,1250 | 1,1250  | 0,1149 | 0,3309     | 3,1966  | 0,0000  | 0,0000  | 0,0132  | 0,1149              |
|                | 100 | 1,1250 | 1,1246  | 0,0572 | 0,1742     | 3,0663  | -0,0004 | -0,0004 | 0,0033  | 0,0572              |
| $\hat{\phi}$   | 10  | 1,1250 | 1,1126  | 0,0531 | 0,9686     | 4,2879  | -0,0124 | -0,0110 | 0,0030  | 0,0546              |
|                | 25  | 1,1250 | 1,1201  | 0,0348 | 0,5777     | 3,4309  | -0,0049 | -0,0043 | 0,0012  | 0,0351              |
|                | 100 | 1,1250 | 1,1235  | 0,0175 | 0,2642     | 3,1232  | -0,0015 | -0,0013 | 0,0003  | 0,0176              |
| $\hat{\sigma}$ | 10  | 0,3281 | 0,3170  | 0,2201 | 1,9507     | 9,9583  | -0,0112 | -0,0341 | 0,0486  | 0,2204              |
|                | 25  | 0,3281 | 0,3245  | 0,1357 | 1,1610     | 5,2681  | -0,0036 | -0,0111 | 0,0184  | 0,1357              |
|                | 100 | 0,3281 | 0,3262  | 0,0662 | 0,5696     | 3,6277  | -0,0019 | -0,0058 | 0,0044  | 0,0662              |
| $\hat{\gamma}$ | 10  | 1,3125 | 1,2815  | 0,1328 | 0,9686     | 4,2879  | -0,0310 | -0,0236 | 0,0186  | 0,1364              |
|                | 25  | 1,3125 | 1,3004  | 0,0869 | 0,5777     | 3,4309  | -0,0121 | -0,0092 | 0,0077  | 0,0878              |
|                | 100 | 1,3125 | 1,3087  | 0,0439 | 0,2642     | 3,1232  | -0,0038 | -0,0029 | 0,0019  | 0,0440              |
| $\hat{\delta}$ | 10  | 8,0000 | 11,3409 | 6,7255 | 2,6211     | 14,9609 | 3,3409  | 0,4176  | 56,3935 | 7,5096              |
|                | 25  | 8,0000 | 9,0788  | 2,8472 | 1,2871     | 6,1214  | 1,0788  | 0,1349  | 9,2705  | 3,0448              |
|                | 100 | 8,0000 | 8,2652  | 1,2034 | 0,6350     | 3,8344  | 0,2652  | 0,0331  | 1,5184  | 1,2322              |

Tabela 2.3: medidas para as estimativas de máxima verossimilhança para  $\alpha = 1, 0$  e  $\beta = 1, 0$ .

| Est.           | $n$ | Par.   | Média  | DP.    | Assimetria | Curtose | Viés    | Viés R. | EQM    | $\sqrt{\text{EQM}}$ |
|----------------|-----|--------|--------|--------|------------|---------|---------|---------|--------|---------------------|
| $\hat{\alpha}$ | 10  | 1,0000 | 0,9179 | 0,2195 | 0,3014     | 3,0076  | -0,0821 | -0,0821 | 0,0549 | 0,2343              |
|                | 25  | 1,0000 | 0,9680 | 0,1410 | 0,1633     | 2,9374  | -0,0320 | -0,0320 | 0,0209 | 0,1446              |
|                | 100 | 1,0000 | 0,9909 | 0,0706 | 0,0491     | 3,0228  | -0,0091 | -0,0091 | 0,0051 | 0,0712              |
| $\hat{\beta}$  | 10  | 1,0000 | 1,0397 | 0,3027 | 0,9291     | 4,7147  | 0,0397  | 0,0397  | 0,0932 | 0,3053              |
|                | 25  | 1,0000 | 1,0151 | 0,1815 | 0,5670     | 3,5304  | 0,0151  | 0,0151  | 0,0332 | 0,1821              |
|                | 100 | 1,0000 | 1,0034 | 0,0881 | 0,2564     | 3,1218  | 0,0034  | 0,0034  | 0,0078 | 0,0882              |
| $\hat{\mu}$    | 10  | 1,5000 | 1,5019 | 0,4809 | 0,8274     | 4,1049  | 0,0019  | 0,0013  | 0,2312 | 0,4809              |
|                | 25  | 1,5000 | 1,5008 | 0,3022 | 0,5392     | 3,5056  | 0,0008  | 0,0006  | 0,0914 | 0,3022              |
|                | 100 | 1,5000 | 1,4986 | 0,1501 | 0,2849     | 3,1432  | -0,0014 | -0,0009 | 0,0225 | 0,1501              |
| $\hat{\phi}$   | 10  | 1,5000 | 1,4454 | 0,2114 | 0,9771     | 4,3044  | -0,0546 | -0,0364 | 0,0477 | 0,2183              |
|                | 25  | 1,5000 | 1,4784 | 0,1388 | 0,5796     | 3,4332  | -0,0216 | -0,0144 | 0,0197 | 0,1405              |
|                | 100 | 1,5000 | 1,4934 | 0,0701 | 0,2645     | 3,1210  | -0,0066 | -0,0044 | 0,0050 | 0,0704              |
| $\hat{\sigma}$ | 10  | 2,2500 | 2,4329 | 2,4274 | 2,9484     | 20,3058 | 0,1829  | 0,0813  | 5,9257 | 2,4343              |
|                | 25  | 2,2500 | 2,3350 | 1,3941 | 1,6916     | 7,9153  | 0,0850  | 0,0378  | 1,9508 | 1,3967              |
|                | 100 | 2,2500 | 2,2625 | 0,6503 | 0,8152     | 4,2124  | 0,0125  | 0,0056  | 0,4230 | 0,6504              |
| $\hat{\gamma}$ | 10  | 2,2500 | 2,1135 | 0,5285 | 0,9771     | 4,3044  | -0,1365 | -0,0607 | 0,2980 | 0,5459              |
|                | 25  | 2,2500 | 2,1960 | 0,3470 | 0,5796     | 3,4332  | -0,0540 | -0,0240 | 0,1233 | 0,3512              |
|                | 100 | 2,2500 | 2,2336 | 0,1753 | 0,2645     | 3,1210  | -0,0164 | -0,0073 | 0,0310 | 0,1761              |
| $\hat{\delta}$ | 10  | 2,0000 | 2,8737 | 1,7109 | 2,6135     | 14,8388 | 0,8737  | 0,4368  | 3,6905 | 1,9211              |
|                | 25  | 2,0000 | 2,2810 | 0,7174 | 1,2887     | 6,1182  | 0,2810  | 0,1405  | 0,5937 | 0,7705              |
|                | 100 | 2,0000 | 2,0685 | 0,3013 | 0,6342     | 3,8302  | 0,0685  | 0,0343  | 0,0955 | 0,3090              |

Tabela 2.4: medidas para as estimativas de momentos para  $\alpha = 0.2$  e  $\beta = 1.0$

| Est.             | $n$ | Par.    | Média   | DP.     | Assimetria | Curtose | Viés    | Viés R. | EQM       | $\sqrt{\text{EQM}}$ |
|------------------|-----|---------|---------|---------|------------|---------|---------|---------|-----------|---------------------|
| $\tilde{\alpha}$ | 10  | 0,2000  | 0,1831  | 0,0446  | 0,3414     | 3,1377  | -0,0169 | -0,0846 | 0,0023    | 0,0477              |
|                  | 25  | 0,2000  | 0,1933  | 0,0292  | 0,3308     | 3,2464  | -0,0067 | -0,0333 | 0,0009    | 0,0299              |
|                  | 100 | 0,2000  | 0,1984  | 0,0149  | 0,1875     | 3,1303  | -0,0016 | -0,0079 | 0,0002    | 0,0149              |
| $\tilde{\mu}$    | 10  | 1,0200  | 1,0199  | 0,0651  | 0,2026     | 2,9503  | -0,0001 | -0,0001 | 0,0042    | 0,0651              |
|                  | 25  | 1,0200  | 1,0193  | 0,0409  | 0,1413     | 3,1095  | -0,0007 | -0,0007 | 0,0017    | 0,0409              |
|                  | 100 | 1,0200  | 1,0199  | 0,0203  | 0,0661     | 2,9479  | -0,0001 | -0,0001 | 0,0004    | 0,0203              |
| $\tilde{\phi}$   | 10  | 1,0200  | 1,0177  | 0,0086  | 1,0743     | 4,8462  | -0,0022 | -0,0022 | 0,0001    | 0,0089              |
|                  | 25  | 1,0200  | 1,0191  | 0,0058  | 0,8152     | 4,2062  | -0,0009 | -0,0009 | 0,0000    | 0,0059              |
|                  | 100 | 1,0200  | 1,0198  | 0,0030  | 0,4236     | 3,3984  | -0,0002 | -0,0002 | 0,0000    | 0,0030              |
| $\tilde{\sigma}$ | 10  | 0,0420  | 0,0377  | 0,0201  | 1,3480     | 6,1620  | -0,0042 | -0,1011 | 0,0004    | 0,0205              |
|                  | 25  | 0,0420  | 0,0403  | 0,0133  | 0,9695     | 4,8383  | -0,0017 | -0,0408 | 0,0002    | 0,0134              |
|                  | 100 | 0,0420  | 0,0416  | 0,0067  | 0,4740     | 3,4102  | -0,0004 | -0,0093 | 0,0000    | 0,0067              |
| $\tilde{\gamma}$ | 10  | 1,0500  | 1,0444  | 0,0215  | 1,0743     | 4,8462  | -0,0056 | -0,0053 | 0,0005    | 0,0223              |
|                  | 25  | 1,0500  | 1,0478  | 0,0145  | 0,8152     | 4,2062  | -0,0022 | -0,0021 | 0,0002    | 0,0147              |
|                  | 100 | 1,0500  | 1,0495  | 0,0074  | 0,4236     | 3,3984  | -0,0005 | -0,0005 | 0,0001    | 0,0074              |
| $\tilde{\delta}$ | 10  | 50,0000 | 72,8139 | 45,6808 | 3,6523     | 34,7148 | 22,8139 | 0,4563  | 2607,0017 | 51,0588             |
|                  | 25  | 50,0000 | 57,3473 | 18,2197 | 1,1966     | 5,7075  | 7,3473  | 0,1469  | 385,9055  | 19,6445             |
|                  | 100 | 50,0000 | 51,6672 | 7,8164  | 0,5180     | 3,5355  | 1,6672  | 0,0333  | 63,8696   | 7,9919              |

Tabela 2.5: medidas para as estimativas de momentos para  $\alpha = 0.5$  e  $\beta = 1.0$

| Est.             | $n$ | Par.   | Média   | DP.    | Assimetria | Curtose | Viés    | Viés R. | EQM     | $\sqrt{\text{EQM}}$ |
|------------------|-----|--------|---------|--------|------------|---------|---------|---------|---------|---------------------|
| $\tilde{\alpha}$ | 10  | 0,5000 | 0,4440  | 0,1155 | 0,6890     | 4,1011  | -0,0560 | -0,1120 | 0,0165  | 0,1284              |
|                  | 25  | 0,5000 | 0,4766  | 0,0828 | 0,6878     | 4,0291  | -0,0234 | -0,0468 | 0,0074  | 0,0860              |
|                  | 100 | 0,5000 | 0,4941  | 0,0444 | 0,4524     | 3,5353  | -0,0059 | -0,0118 | 0,0020  | 0,0448              |
| $\tilde{\mu}$    | 10  | 1,1250 | 1,1247  | 0,1822 | 0,4619     | 3,2449  | -0,0003 | -0,0002 | 0,0332  | 0,1822              |
|                  | 25  | 1,1250 | 1,1232  | 0,1143 | 0,3066     | 3,2237  | -0,0018 | -0,0016 | 0,0131  | 0,1143              |
|                  | 100 | 1,1250 | 1,1247  | 0,0567 | 0,1511     | 3,0213  | -0,0003 | -0,0003 | 0,0032  | 0,0567              |
| $\tilde{\phi}$   | 10  | 1,1250 | 1,1052  | 0,0569 | 1,7511     | 9,3589  | -0,0198 | -0,0176 | 0,0036  | 0,0603              |
|                  | 25  | 1,1250 | 1,1170  | 0,0422 | 1,3679     | 6,7831  | -0,0080 | -0,0071 | 0,0018  | 0,0429              |
|                  | 100 | 1,1250 | 1,1231  | 0,0224 | 0,7686     | 4,2557  | -0,0019 | -0,0017 | 0,0005  | 0,0225              |
| $\tilde{\sigma}$ | 10  | 0,3281 | 0,2950  | 0,2230 | 2,6203     | 16,4907 | -0,0331 | -0,1010 | 0,0508  | 0,2254              |
|                  | 25  | 0,3281 | 0,3143  | 0,1494 | 1,7388     | 8,9211  | -0,0138 | -0,0420 | 0,0225  | 0,1500              |
|                  | 100 | 0,3281 | 0,3250  | 0,0757 | 0,8538     | 4,3473  | -0,0031 | -0,0095 | 0,0057  | 0,0758              |
| $\tilde{\gamma}$ | 10  | 1,3125 | 1,2631  | 0,1423 | 1,7511     | 9,3589  | -0,0494 | -0,0376 | 0,0227  | 0,1507              |
|                  | 25  | 1,3125 | 1,2925  | 0,1054 | 1,3679     | 6,7831  | -0,0200 | -0,0152 | 0,0115  | 0,1073              |
|                  | 100 | 1,3125 | 1,3076  | 0,0561 | 0,7686     | 4,2557  | -0,0048 | -0,0037 | 0,0032  | 0,0563              |
| $\tilde{\delta}$ | 10  | 8,0000 | 12,5144 | 7,789  | 3,5374     | 35,4877 | 4,5144  | 0,5643  | 81,0498 | 9,0028              |
|                  | 25  | 8,0000 | 9,6028  | 3,3256 | 1,0420     | 5,1406  | 1,6028  | 0,2004  | 13,6274 | 3,6915              |
|                  | 100 | 8,0000 | 8,3879  | 1,4866 | 0,4178     | 3,4409  | 0,3879  | 0,0485  | 2,3604  | 1,5364              |

Tabela 2.6: medidas para as estimativas de momentos para  $\alpha = 1.0$  e  $\beta = 1.0$

| Est.             | $n$ | Par.   | Média  | DP.    | Assimetria | Curtose  | Viés    | Viés R. | EQM    | $\sqrt{\text{EQM}}$ |
|------------------|-----|--------|--------|--------|------------|----------|---------|---------|--------|---------------------|
| $\tilde{\alpha}$ | 10  | 1,0000 | 0,8355 | 0,2698 | 2,4544     | 25,7441  | -0,1645 | -0,1645 | 0,0998 | 0,3160              |
|                  | 25  | 1,0000 | 0,9292 | 0,2251 | 1,9145     | 12,6786  | -0,0708 | -0,0708 | 0,0557 | 0,2360              |
|                  | 100 | 1,0000 | 0,9814 | 0,1264 | 1,0126     | 5,3696   | -0,0186 | -0,0186 | 0,0163 | 0,1277              |
| $\tilde{\mu}$    | 10  | 1,5000 | 1,4993 | 0,4771 | 0,7932     | 3,9063   | -0,0006 | -0,0004 | 0,2276 | 0,4771              |
|                  | 25  | 1,5000 | 1,4958 | 0,2992 | 0,5272     | 3,5162   | -0,0042 | -0,0028 | 0,0895 | 0,2992              |
|                  | 100 | 1,5000 | 1,4994 | 0,1486 | 0,2633     | 3,1222   | -0,0006 | -0,0004 | 0,0221 | 0,1486              |
| $\tilde{\phi}$   | 10  | 1,5000 | 1,3854 | 0,3519 | 18,1599    | 796,8277 | -0,1146 | -0,0764 | 0,1370 | 0,3701              |
|                  | 25  | 1,5000 | 1,4571 | 0,2675 | 5,8232     | 101,2103 | -0,0429 | -0,0286 | 0,0734 | 0,2709              |
|                  | 100 | 1,5000 | 1,4896 | 0,1329 | 1,6862     | 9,3151   | -0,0104 | -0,0070 | 0,0178 | 0,1333              |
| $\tilde{\sigma}$ | 10  | 2,2500 | 2,0239 | 2,2442 | 3,9217     | 32,9153  | -0,2261 | -0,1005 | 5,0870 | 2,2554              |
|                  | 25  | 2,2500 | 2,1516 | 1,5069 | 2,4807     | 14,6584  | -0,0984 | -0,0437 | 2,2803 | 1,5101              |
|                  | 100 | 2,2500 | 2,2278 | 0,7633 | 1,2099     | 5,6069   | -0,0222 | -0,0099 | 0,5831 | 0,7636              |
| $\tilde{\gamma}$ | 10  | 2,2500 | 1,9635 | 0,8799 | 18,1599    | 796,8277 | -0,2864 | -0,1273 | 0,8561 | 0,9253              |
|                  | 25  | 2,2500 | 2,1427 | 0,6687 | 5,8232     | 101,2103 | -0,1073 | -0,0477 | 0,4587 | 0,6773              |
|                  | 100 | 2,2500 | 2,2239 | 0,3323 | 1,6862     | 9,3151   | -0,0261 | -0,0116 | 0,1111 | 0,3333              |
| $\tilde{\delta}$ | 10  | 2,0000 | 3,6997 | 2,3537 | 3,1283     | 32,1453  | 1,6997  | 0,8498  | 8,4284 | 2,9032              |
|                  | 25  | 2,0000 | 2,6646 | 1,1028 | 0,8862     | 4,5618   | 0,6646  | 0,3323  | 1,6577 | 1,2875              |
|                  | 100 | 2,0000 | 2,1727 | 0,5180 | 0,3267     | 3,3044   | 0,1727  | 0,0864  | 0,2981 | 0,5460              |

Tabela 2.7: estimativas intervalares para os estimadores de máxima verossimilhança.

| $\xi$ | Parâmetro | $\alpha = 0, 2 \text{ e } \beta = 1, 0$ |          |           |           |                 |          |           |           |           |          |
|-------|-----------|-----------------------------------------|----------|-----------|-----------|-----------------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|
|       |           | Limite Inferior                         |          |           |           | Limite Superior |          |           |           | Cobertura |          |
|       |           | $n = 10$                                | $n = 25$ | $n = 100$ | $n = 100$ | $n = 10$        | $n = 25$ | $n = 100$ | $n = 100$ | $n = 10$  | $n = 25$ |
| 10%   | $\alpha$  | 0,1174                                  | 0,1490   | 0,1753    | 0,2539    | 0,2394          | 0,2214   | 81,0100   | 86,1100   | 88,9000   | 88,9000  |
|       | $\beta$   | 0,9056                                  | 0,9372   | 0,9677    | 1,0975    | 1,0641          | 1,0325   | 84,5300   | 88,0100   | 89,7300   | 89,7300  |
|       | $\mu$     | 0,9173                                  | 0,9521   | 0,9853    | 1,1222    | 1,0877          | 1,0545   | 85,7200   | 89,1500   | 91,0200   | 91,0200  |
|       | $\phi$    | 1,0048                                  | 1,0103   | 1,0152    | 1,0315    | 1,0282          | 1,0244   | 77,3900   | 84,1900   | 88,4300   | 88,4300  |
|       | $\sigma$  | 0,0076                                  | 0,0201   | 0,0311    | 0,0697    | 0,0612          | 0,0520   | 76,3800   | 83,8200   | 88,6800   | 88,6800  |
|       | $\gamma$  | 1,0243                                  | 1,0340   | 1,0421    | 1,0666    | 1,0623          | 1,0567   | 63,2200   | 67,5000   | 69,4600   | 69,4600  |
|       | $\delta$  | 18,3308                                 | 30,2831  | 39,6231   | 120,3294  | 82,9745         | 63,6450  | 93,8000   | 91,3500   | 90,4200   | 90,4200  |
| 5%    | $\alpha$  | 0,1043                                  | 0,1404   | 0,1708    | 0,2670    | 0,2481          | 0,2258   | 85,8100   | 90,5500   | 93,9800   | 93,9800  |
|       | $\beta$   | 0,8872                                  | 0,9250   | 0,9615    | 1,1159    | 1,0762          | 1,0387   | 90,4000   | 93,4000   | 94,7500   | 94,7500  |
|       | $\mu$     | 0,8977                                  | 0,9391   | 0,9787    | 1,1418    | 1,1007          | 1,0611   | 91,0200   | 94,1700   | 95,6500   | 95,6500  |
|       | $\phi$    | 1,0022                                  | 1,0086   | 1,0143    | 1,0341    | 1,0299          | 1,0252   | 81,4200   | 88,4400   | 93,3500   | 93,3500  |
|       | $\sigma$  | 0,0016                                  | 0,0161   | 0,0291    | 0,0757    | 0,0652          | 0,0541   | 80,2400   | 87,7700   | 93,1400   | 93,1400  |
|       | $\gamma$  | 1,0202                                  | 1,0313   | 1,0408    | 1,0706    | 1,0650          | 1,0581   | 69,3000   | 74,6200   | 77,5500   | 77,5500  |
|       | $\delta$  | 8,5607                                  | 25,2360  | 37,3221   | 130,0995  | 88,0217         | 65,9460  | 97,1200   | 96,1900   | 95,0600   | 95,0600  |
| 1%    | $\alpha$  | 0,0787                                  | 0,1235   | 0,1622    | 0,2925    | 0,2650          | 0,2345   | 91,9000   | 96,1400   | 98,0300   | 98,0300  |
|       | $\beta$   | 0,8512                                  | 0,9012   | 0,9494    | 1,1518    | 1,1000          | 1,0508   | 96,4000   | 98,0300   | 98,8400   | 98,8400  |
|       | $\mu$     | 0,8593                                  | 0,9137   | 0,9657    | 1,1802    | 1,1260          | 1,0741   | 96,6500   | 98,1300   | 99,1000   | 99,1000  |
|       | $\phi$    | 0,9972                                  | 1,0052   | 1,0126    | 1,0391    | 1,0333          | 1,0270   | 87,4500   | 93,4900   | 97,2400   | 97,2400  |
|       | $\sigma$  | 0,0000                                  | 0,0084   | 0,0251    | 0,0873    | 0,0729          | 0,0580   | 86,4800   | 93,1200   | 97,0200   | 97,0200  |
|       | $\gamma$  | 1,0123                                  | 1,0260   | 1,0380    | 1,0785    | 1,0703          | 1,0608   | 77,0500   | 83,8600   | 88,1300   | 88,1300  |
|       | $\delta$  | 0,0000                                  | 15,3716  | 32,8249   | 149,1946  | 97,8860         | 70,4431  | 98,8000   | 99,1200   | 99,0600   | 99,0600  |

Tabela 2.8: estimativas intervalares para os estimadores de máxima verossimilhança.

| $\xi$ | Parâmetro | $\alpha = 0, 5 \text{ e } \beta = 1, 0$ |          |           |          |                 |           |          |          |           |           |
|-------|-----------|-----------------------------------------|----------|-----------|----------|-----------------|-----------|----------|----------|-----------|-----------|
|       |           | Limite Inferior                         |          |           |          | Limite Superior |           |          |          | Cobertura |           |
|       |           | $n = 10$                                | $n = 25$ | $n = 100$ | $n = 10$ | $n = 25$        | $n = 100$ | $n = 10$ | $n = 25$ | $n = 10$  | $n = 100$ |
| 10%   | $\alpha$  | 0,2919                                  | 0,3723   | 0,4381    | 0,6315   | 0,5979          | 0,5534    | 80,3500  | 85,9300  | 88,8500   |           |
|       | $\beta$   | 0,7844                                  | 0,8546   | 0,9247    | 1,2378   | 1,1540          | 1,0772    | 83,1900  | 86,9900  | 88,2800   |           |
|       | $\mu$     | 0,8436                                  | 0,9388   | 1,0296    | 1,4063   | 1,3113          | 1,2195    | 84,5900  | 88,4300  | 90,2600   |           |
|       | $\phi$    | 1,0298                                  | 1,0642   | 1,0948    | 1,1954   | 1,1760          | 1,1522    | 76,6600  | 84,0000  | 88,3700   |           |
|       | $\sigma$  | 0,0000                                  | 0,1110   | 0,2196    | 0,6501   | 0,5380          | 0,4329    | 73,4200  | 82,2000  | 88,1000   |           |
|       | $\gamma$  | 1,1505                                  | 1,2120   | 1,2633    | 1,4125   | 1,3887          | 1,3541    | 62,3900  | 67,4000  | 69,4200   |           |
|       | $\delta$  | 2,9985                                  | 4,8550   | 6,3426    | 19,6833  | 13,3026         | 10,1878   | 93,3400  | 91,3600  | 90,4100   |           |
|       |           |                                         |          |           |          |                 |           |          |          |           |           |
| 5%    | $\alpha$  | 0,2593                                  | 0,3506   | 0,4270    | 0,6640   | 0,6196          | 0,5644    | 85,1700  | 90,4600  | 93,9500   |           |
|       | $\beta$   | 0,7409                                  | 0,8259   | 0,9101    | 1,2812   | 1,1827          | 1,0918    | 89,2700  | 92,5100  | 94,1400   |           |
|       | $\mu$     | 0,7897                                  | 0,9031   | 1,0114    | 1,4602   | 1,3469          | 1,2377    | 89,7700  | 93,3900  | 95,1900   |           |
|       | $\phi$    | 1,0139                                  | 1,0535   | 1,0893    | 1,2113   | 1,1867          | 1,1577    | 80,7800  | 88,3800  | 93,2800   |           |
|       | $\sigma$  | 0,0000                                  | 0,0701   | 0,1991    | 0,7140   | 0,5789          | 0,4533    | 77,5700  | 86,1000  | 92,4000   |           |
|       | $\gamma$  | 1,1254                                  | 1,1951   | 1,2546    | 1,4375   | 1,4057          | 1,3628    | 68,6800  | 74,3800  | 77,4400   |           |
|       | $\delta$  | 1,4003                                  | 4,0459   | 5,9742    | 21,2814  | 14,1118         | 10,5561   | 97,1800  | 96,2000  | 95,0500   |           |
|       |           |                                         |          |           |          |                 |           |          |          |           |           |
| 1%    | $\alpha$  | 0,1958                                  | 0,3084   | 0,4054    | 0,7276   | 0,6618          | 0,5860    | 91,3400  | 96,1100  | 98,0100   |           |
|       | $\beta$   | 0,6560                                  | 0,7699   | 0,8815    | 1,3661   | 1,2388          | 1,1204    | 95,7100  | 97,5200  | 98,5100   |           |
|       | $\mu$     | 0,6844                                  | 0,8333   | 0,9759    | 1,5655   | 1,4167          | 1,2733    | 94,8300  | 97,5100  | 98,6800   |           |
|       | $\phi$    | 0,9829                                  | 1,0326   | 1,0785    | 1,2423   | 1,2077          | 1,1685    | 86,8700  | 93,3900  | 97,2100   |           |
|       | $\sigma$  | 0,0000                                  | 0,0000   | 0,1592    | 0,8387   | 0,6589          | 0,4932    | 83,2000  | 91,5200  | 96,4000   |           |
|       | $\gamma$  | 1,0764                                  | 1,1620   | 1,2376    | 1,4866   | 1,4388          | 1,3799    | 76,3900  | 83,7700  | 88,0300   |           |
|       | $\delta$  | 0,0000                                  | 2,4644   | 5,2544    | 24,4050  | 15,6933         | 11,2760   | 98,8300  | 99,1200  | 99,0600   |           |
|       |           |                                         |          |           |          |                 |           |          |          |           |           |

Tabela 2.9: estimativas intervalares para os estimadores de máxima verossimilhança.

| $\xi$ | Parâmetro | $\alpha = 1, 0 \text{ e } \beta = 1, 0$ |          |           |          |                 |           |          |          |           |           |
|-------|-----------|-----------------------------------------|----------|-----------|----------|-----------------|-----------|----------|----------|-----------|-----------|
|       |           | Limite Inferior                         |          |           |          | Limite Superior |           |          |          | Cobertura |           |
|       |           | $n = 10$                                | $n = 25$ | $n = 100$ | $n = 10$ | $n = 25$        | $n = 100$ | $n = 10$ | $n = 25$ | $n = 10$  | $n = 100$ |
| 10%   | $\alpha$  | 0,5803                                  | 0,7428   | 0,8757    | 1,2555   | 1,1931          | 1,1062    | 79,6000  | 85,6800  | 88,8000   |           |
|       | $\beta$   | 0,6791                                  | 0,7831   | 0,8867    | 1,4003   | 1,2471          | 1,1201    | 77,6000  | 80,3300  | 81,4300   |           |
|       | $\mu$     | 0,8717                                  | 1,0882   | 1,2894    | 2,1320   | 1,9135          | 1,7078    | 79,3800  | 82,4700  | 83,5900   |           |
|       | $\phi$    | 1,1178                                  | 1,2558   | 1,3787    | 1,7730   | 1,7010          | 1,6082    | 75,7500  | 83,7300  | 88,2800   |           |
|       | $\sigma$  | 0,0000                                  | 0,3168   | 1,2871    | 5,7662   | 4,3532          | 3,2380    | 70,3700  | 79,5500  | 85,4700   |           |
|       | $\gamma$  | 1,5955                                  | 1,8441   | 2,0521    | 2,6315   | 2,5480          | 2,4151    | 61,6300  | 66,8500  | 69,2000   |           |
|       | $\delta$  | 0,7598                                  | 1,2198   | 1,5874    | 4,9876   | 3,3423          | 2,5497    | 93,4900  | 91,2800  | 90,3000   |           |
| 5%    | $\alpha$  | 0,5156                                  | 0,6997   | 0,8536    | 1,3202   | 1,2363          | 1,1282    | 84,6300  | 90,1300  | 93,8400   |           |
|       | $\beta$   | 0,6100                                  | 0,7386   | 0,8643    | 1,4694   | 1,2915          | 1,1425    | 84,7400  | 87,2100  | 88,4400   |           |
|       | $\mu$     | 0,7510                                  | 1,0091   | 1,2493    | 2,2527   | 1,9926          | 1,7479    | 84,3300  | 88,4800  | 90,1800   |           |
|       | $\phi$    | 1,0550                                  | 1,2132   | 1,3567    | 1,8358   | 1,7436          | 1,6302    | 79,9600  | 88,1200  | 93,2200   |           |
|       | $\sigma$  | 0,0000                                  | 0,0000   | 1,1002    | 6,4047   | 4,7398          | 3,4248    | 73,6800  | 83,3500  | 90,2100   |           |
|       | $\gamma$  | 1,4962                                  | 1,7767   | 2,0173    | 2,7308   | 2,6154          | 2,4498    | 67,6800  | 74,0400  | 77,2300   |           |
|       | $\delta$  | 0,3548                                  | 1,0165   | 1,4952    | 5,3926   | 3,5456          | 2,6419    | 97,2900  | 96,2400  | 95,0600   |           |
| 1%    | $\alpha$  | 0,3892                                  | 0,6154   | 0,8104    | 1,4466   | 1,3206          | 1,1714    | 90,9000  | 95,9200  | 97,9900   |           |
|       | $\beta$   | 0,4750                                  | 0,6518   | 0,8206    | 1,6044   | 1,3784          | 1,1862    | 92,5600  | 94,8900  | 95,9900   |           |
|       | $\mu$     | 0,5151                                  | 0,8546   | 1,1710    | 2,4887   | 2,1471          | 1,8263    | 89,7600  | 94,0800  | 96,4300   |           |
|       | $\phi$    | 0,9323                                  | 1,1299   | 1,3137    | 1,9585   | 1,8270          | 1,6732    | 86,3900  | 93,1300  | 97,1400   |           |
|       | $\sigma$  | 0,0000                                  | 0,0000   | 0,7350    | 7,6528   | 5,4954          | 3,7900    | 79,0700  | 88,2100  | 94,7800   |           |
|       | $\gamma$  | 1,3022                                  | 1,6449   | 1,9494    | 2,9247   | 2,7472          | 2,5178    | 75,5100  | 83,4100  | 87,9200   |           |
|       | $\delta$  | 0,0000                                  | 0,6192   | 1,3150    | 6,1840   | 3,9429          | 2,8221    | 98,8900  | 99,1600  | 99,0500   |           |

## CAPÍTULO 3

---

### Modelo de regressão Birnbaum-Saunders

---

Neste capítulo será definido um novo modelo de regressão linear em que a variável resposta tem distribuição Birnbaum-Saunders, baseado na "reparametrização 5" definida no Capítulo 2. Modelos de regressão com resposta Birnbaum-Saunders são comumente utilizados para modelar a propagação de um dano progressivo até a ocorrência de uma falha. Será apresentado a função score e a matriz de informação de Fisher bem como o procedimento iterativo de estimação. A fim de avaliar adequacidade do modelo nós propomos alguns resíduos e estudo de simulações de Monte Carlo para estudar o comportamento empírico dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo e estudar o comportamento empírico dos resíduos propostos. Foram propostos também métodos de diagnóstico baseado em influência local sob vários esquemas de perturbação tal como ponderação de casos, perturbação na variável resposta e na dispersão.

### 3.1 Modelo

Sejam  $T_1, T_2, \dots, T_n$  variáveis aleatórias independentes com distribuição  $\mathcal{BS}(\mu_i, \delta)$ , com fdp dada por

$$f(t_i : \mu_i, \delta) = \frac{\exp(\frac{\delta}{2})\sqrt{\delta+1}}{4\sqrt{\pi\mu_i}} t_i^{-3/2} (t_i + \frac{\delta\mu_i}{\delta+1}) \exp \left\{ -\frac{\delta}{4} \left( \frac{t_i(\delta+1)}{\delta\mu_i} + \frac{\delta\mu_i}{t_i(\delta+1)} \right) \right\}, \quad (3.1)$$

em que  $\mathbb{E}(T_i) = \mu_i$  e  $\text{Var}(T_i) = V(\mu_i)/h(\delta)$ , com  $V(\mu_i)$  sendo uma função da média e  $h(\delta) > 0$  e do parâmetros de dispersão  $\delta$  constante para todas as observações.

O modelo de regressão Birnbaum-Saunders (MRBS) baseado em (3.1) é definido pela componente sistemática

$$g(\mu_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2)$$

em que  $\mu_i = g^{-1}(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$ ,  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)^\top$  para  $p < n$ , é um vetor de parâmetros desconhecidos a serem estimados e  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^\top$  representa os valores de  $p$  variáveis explicativas. No MRBS assume-se uma função de ligação  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  estritamente monótona e pelo menos duas vezes diferenciável, temos como exemplo,  $g(\mu) = \log(\mu)$  ou  $g(\mu) = \sqrt{\mu}$ .

A função de verossimilhança do modelo (3.2) para  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \delta)^\top$  possui a seguinte forma

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(t_i : \mu_i, \delta). \quad (3.3)$$

em que  $f(t_i : \mu_i, \delta)$  é dado em (3.1). Assim, o logaritmo da função de verossimilhança para  $\boldsymbol{\theta}$  pode ser escrito como

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\mu_i, \delta), \quad (3.4)$$

em que

$$\begin{aligned} \ell_i(\mu_i, \delta) &= \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \log(\delta + 1) - \frac{1}{2} \log(16\pi) - \frac{1}{2} \log(\mu_i) - \frac{3}{2} \log(t_i) + \\ &+ \log(\delta t_i + t_i + \delta \mu) - \frac{t_i(\delta + 1)}{4\mu_i} - \frac{\delta^2 \mu_i}{4t_i(\delta + 1)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

As funções escore para  $\boldsymbol{\beta}$  e  $\delta$  são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta})_{p \times 1} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{z},$$

e

$$\mathbf{U}_\delta(\boldsymbol{\theta})_{1 \times 1} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{b})).$$

em que  $\mathbf{D}(\mathbf{a}) = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , com  $a_i = \frac{1}{g'(\mu_i)}$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^\top$ , com  $z_i = \frac{\partial \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i} = -\frac{1}{2\mu_i} + \frac{\delta}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu)} + \frac{t_i(\delta + 1)}{4\mu_i^2} - \frac{\delta^2}{4t_i(\delta + 1)}$  e  $\mathbf{D}(\mathbf{b}) = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , com  $b_i = \frac{\partial \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \delta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\delta + 1)} + \frac{(t_i + \mu_i)}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu)} - \frac{t_i}{4\mu_i} - \frac{\delta(\delta + 2)\mu_i}{4(\delta + 1)^2 t_i}$ .

A inferência assintótica para  $\boldsymbol{\theta}$  pode ser baseada na normalidade assintótica do estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , dada por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N_{p+1}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}),$$

em que  $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}$  é a matriz de variâncias e covariâncias de  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , podendo ser aproximada pela matriz de Fisher observada  $-\ddot{L}_{\theta\theta}^{-1}|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ , avaliada em  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , obtida a partir de

$$\ddot{L}_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta \partial \beta^\top} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta \partial \delta} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta \partial \beta^\top} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{L}_{\beta\beta} & \ddot{L}_{\beta\delta} \\ \ddot{L}_{\delta\beta} & \ddot{L}_{\delta\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{c}) \mathbf{X} & \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{m} \\ \mathbf{m}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{X} & \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{d})) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

em que  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)^\top$ , com

$$m_i = \frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i \partial \delta} = \frac{t_i}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)^2} + \frac{t_i}{4\mu_i^2} - \frac{\delta(\delta + 2)}{4(\delta + 1)^2 t_i},$$

$\mathbf{D}(\mathbf{c}) = \text{diag}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ , com

$$c_i = \left( \frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i^2} \left( \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right)^2 + \frac{\partial \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i} \left( \frac{\partial}{\partial \mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right) \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right)$$

e  $\mathbf{D}(\mathbf{d}) = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , com

$$d_i = \frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \delta^2} = \frac{1}{2(\delta + 1)^2} - \frac{(t_i + \mu_i)^2}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)^2} - \frac{\mu_i}{2(\delta + 1)^3 t_i}.$$

,

A inversa de  $\ddot{L}_{\theta\theta}$  pode ser expressa na forma

$$\ddot{L}_{\theta\theta}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{-1} + \frac{\mathbf{A}\mathbf{A}^\top}{\mathbf{E}} & -\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{E}} \\ -\frac{\mathbf{A}^\top}{\mathbf{E}} & \frac{1}{\mathbf{E}} \end{pmatrix}$$

em que  $\mathbf{M} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{c}) \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{m}$  e  $\mathbf{E} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{d})) - \mathbf{m}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{X} \mathbf{A}$ .

A matriz de informação de Fisher esperada para  $\boldsymbol{\theta}$ , possui a seguinte forma

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\beta\beta} & \mathbf{K}_{\beta\delta} \\ \mathbf{K}_{\delta\beta} & \mathbf{K}_{\delta\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{X} & \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{s} \\ \mathbf{s}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{X} & \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

em que  $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \text{diag}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , com

$$v_i = \frac{\delta}{2\mu_i^2} \frac{1}{\{g'(\mu_i)\}^2} + \frac{\delta^2}{(\delta + 1)^2} \frac{1}{\{g'(\mu_i)\}^2} \mathcal{I}(\delta),$$

$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)^\top$ , com

$$s_i = \frac{1}{2\mu_i(\delta+1)} + \frac{\delta\mu_i}{(\delta+1)^3}\mathcal{I}(\delta)$$

e  $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \text{diag}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , com

$$u_i = \frac{(\delta^2 + 3\delta + 1)}{2\delta^2(\delta+1)^2} + \frac{\mu_i^2}{(\delta+1)^4}\mathcal{I}(\delta),$$

em que

$$\mathcal{I}(\delta) = \int_0^\infty \frac{1}{4} e^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\delta} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{(\delta+1)t}{\delta\mu} + \frac{\delta\mu}{(\delta+1)t}\right)\delta} \left(t + \frac{\delta\mu}{\delta+1}\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi\delta\mu}{\delta+1}}} t^{-3/2} dt.$$

Após algumas manipulações algébricas temos que a inversa da matriz de informação observada,  $\mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1}$ , possui forma

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{-1} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}^\top}{\mathbf{W}} & -\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{W}} \\ -\frac{\mathbf{B}^\top}{\mathbf{W}} & \frac{1}{\mathbf{W}} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

em que  $\mathbf{D} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{X}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{s}$  e  $\mathbf{W} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) - \mathbf{s}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{X} \mathbf{B}$ .

Definindo  $\mathbf{W}_{\beta\beta} = \mathbf{D}(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{W}_{\beta\delta} = \mathbf{W}_{\delta\beta}^\top = \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{s}$  e  $\mathbf{W}_{\delta\delta} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{u}))$ , podemos construir a matriz aumentada,  $\tilde{\mathbf{W}}$ , de dimensão  $(n+1) \times (n+1)$  que possui a seguinte forma

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{\beta\beta} & \mathbf{W}_{\beta\delta} \\ \mathbf{W}_{\delta\beta} & \mathbf{W}_{\delta\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{v}) & \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{s} \\ \mathbf{s}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) & \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) \end{pmatrix}.$$

Temos ainda,  $\tilde{\mathbf{X}}$ , uma matriz aumentada de dimensão  $(n+1) \times (p+1)$  na forma

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

e desta maneira a matriz de informação esperada de Fisher,  $\mathbf{K}_{\theta\theta}$ , pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = \tilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{X}},$$

e sua inversa

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} = (\tilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{X}})^{-1}.$$

No Apêndice encontram-se os cálculos mais detalhados para a obtenção das matrizes de Fisher observada e esperada, dadas respectivamente, em (3.6) e (3.7).

## 3.2 Estimação dos parâmetros

Nosso interesse é estimar os parâmetros do MRBS pelo método de máxima verossimilhança, portanto devemos solucionar as equações  $\mathbf{U}_\beta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{U}_\delta(\boldsymbol{\theta}) = 0$ . Neste caso não é possível encontrar uma solução analítica. Sendo assim, para obtermos os estimadores de máxima verossimilhança devemos fazer uso de algum método de otimização não-linear para maximizarmos o logaritmo da função de verossimilhança, tal como algoritmo de Newton (Newton-Raphson, escore de Fisher, BHHH, etc.) ou quasi-Newton (BFGS). Neste trabalho propomos utilizar o método escore de Fisher. O algoritmo para a estimação de  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \delta)^\top$  possui a forma

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}^{(m+1)} &= \boldsymbol{\theta}^{(m)} + \mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})^{(m)} \\
&= \boldsymbol{\theta}^{(m)} + (\tilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\mathbf{W}}^{(m)} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a})^{(m)} \mathbf{z} \\ \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{b})) \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\theta}^{(m)} + (\tilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\mathbf{W}}^{(m)} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^\top \begin{pmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{a})^{(m)} & 0 \\ 0 & \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{b})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}^{(m)} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\theta}^{(m)} + (\tilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\mathbf{W}}^{(m)} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\mathbf{W}}^{(m)} \{\tilde{\mathbf{W}}^{(m)}\}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{a})^{(m)} & 0 \\ 0 & \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{b})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}^{(m)} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (\tilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\mathbf{W}}^{(m)})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\mathbf{W}}^{(m)} \mathbf{z}^{*(m)} \tag{3.9}
\end{aligned}$$

em que

$$\mathbf{z}^{*(m)} = \tilde{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta}^{(m)} + \{\tilde{\mathbf{W}}^{(m)}\}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{D}(\mathbf{a})^{(m)} & 0 \\ 0 & \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{b})) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z}^{(m)} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observando (3.9) notamos que  $\boldsymbol{\theta}^{(m+1)}$  toma a forma de um estimador de mínimos quadrados ponderado,  $\mathbf{z}^*$  é uma variável reposta modificada e  $\tilde{\mathbf{X}}$  é a matriz modelo.

## 3.3 Intervalos de confiança

Sob as condições de regularidades usuais (ver Cox e Hinkley, 1974), temos que  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  e  $\mathbf{K}_{\theta\theta}|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$  são respectivamente estimadores consistentes de  $\boldsymbol{\theta}$  e  $\mathbf{K}_{\theta\theta}$ , em que  $\mathbf{K}_{\theta\theta}|_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$  é a matriz de informação de Fisher esperada e dada em (3.7) avaliada em  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ . Assumindo que  $\mathbf{J}_{\theta\theta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{K}_{\theta\theta}}{n}$  está bem definida, ou seja, existe e é não-singular, temos que

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{D} N_{p+1}(\mathbf{0}, \mathbf{J}_{\theta\theta}^{-1}),$$

em que  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top, \hat{\delta})^\top$  é o estimador de máxima verossimilhança de  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \delta)^\top$ . Desta forma pela normalidade assintótica do estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , é possível

a construção de intervalos de confiança assintóticos para os parâmetros do modelo de regressão. Portanto,

$$\left[ \hat{\beta}_j - z_{1-\frac{\xi}{2}}(\hat{K}_{jj}^{\beta\beta})^{\frac{1}{2}}; \hat{\beta}_j + z_{1-\frac{\xi}{2}}(\hat{K}_{jj}^{\beta\beta})^{\frac{1}{2}} \right],$$

para  $j = 1, 2, \dots, p$  e

$$\left[ \hat{\delta} - z_{1-\frac{\xi}{2}}(\hat{K}^{\delta\delta})^{\frac{1}{2}}; \hat{\delta} + z_{1-\frac{\xi}{2}}(\hat{K}^{\delta\delta})^{\frac{1}{2}} \right],$$

são intervalos de confiança assintóticos (IC) para  $\beta_j$  e  $\delta$  respectivamente, e com coeficiente de confiança  $100(1 - \xi)\%$ . As variâncias assintóticas de  $\hat{\beta}_j$  e  $\hat{\delta}$  são respectivamente,  $\hat{K}_{jj}^{\beta\beta}$  e  $\hat{K}^{\delta\delta}$  e para  $0 < \xi < \frac{1}{2}$ ,  $z_{1-\frac{\xi}{2}}$  representa o quantil  $1 - \frac{\xi}{2}$  da distribuição normal padrão.

## Simulações

Simulações de Monte Carlo serão utilizadas para estudar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros de dois modelos de regressão Birnbaum-Saunders aqui propostos. No primeiro modelo foi verificado o comportamento dos estimadores quando a variável explicativa é gerada sob três cenários e no segundo modelo, será verificado o comportamento dos estimadores quando as variáveis explicativas são geradas de distribuições distintas. Em ambos modelos foi utilizada tamanho de amostra finita. Neste trabalho foi utilizada a linguagem de programação **0x**.

### Modelo 1

Considere um modelo MRBS como a componente sistemática dada por

$$g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

em que  $g$  é a função de ligação logaritmo e os valores da variável explicativa  $x_i$ , são conhecidos para cada observação.

Para o modelo dado em (3.10) os valores verdadeiros foram fixados da seguinte forma:  $\beta_0 = 2,0$ ,  $\beta_1 = 0,5$  e  $\delta = 150$ ; os valores das variáveis explicativas foram geradas sob três cenários diferentes denotados por I, II e III, sendo eles  $\mathcal{U}(0,1)$ ,  $\mathcal{Exp}(10)$  e  $\mathcal{N}(0, 16/25)$  respectivamente, e mantida fixa no decorrer das simulações. Em nosso experimento utilizou-se 10000 réplicas de Monte Carlo e os seguintes tamanhos amostrais 15, 30 e 45. Para cada uma das 10000 réplicas foram geradas amostras aleatória da variável resposta  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) da  $\mathcal{BS}(\delta, \mu_i)$ , em que  $\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$

Na Tabela 3.1, são apresentadas as estimativas do viés para os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\delta$  para os cenários I, II e III, observa-se de maneira geral que a medida que a amostra cresce o viés decresce.

Vale ressaltar que no cenário I o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro  $\beta_0$  apresenta uma redução em sua estimativa de viés em  $n = 30$  quando comparado com seu valor em  $n = 15$ , porém, quando se compara a estimativa em  $n = 45$  com o valor em  $n = 30$  tem-se um leve crescimento. Enquanto isso, o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro  $\beta_1$  apresenta um comportamento inverso. Quando comparada a estimativa do viés em  $n = 15$  com o valor em  $n = 30$  tem-se um leve crescimento na estimativa do viés, já quando comparada a estimativa em  $n = 45$  com o valor em  $n = 30$  ocorre uma redução.

No cenário II, o estimador de máxima verossimilhança de  $\beta_0$  apresenta um leve crescimento na sua estimativa do viés a medida que  $n$  cresce. Porém, para o estimador de máxima verossimilhança de  $\beta_1$  tem-se um decréscimo nas estimativas de seu viés a medida que se aumenta o tamanho da amostra.

No cenário III, tanto o estimador de máxima verossimilhança de  $\beta_0$  quanto o de  $\beta_1$  têm suas estimativas de vieses decrescendo com o crescimento do tamanho da amostra.

Na Tabela 3.2, apresentamos as estimativas da raiz quadrada do erro quadrático médio ( $\sqrt{\text{EQM}}$ ). Pode-se observar que para todos os estimadores de máxima verossimilhança e todos os cenários, temos um decréscimo das estimativas  $\sqrt{\text{EQM}}$  com o crescimento da amostra. Também notamos que as estimativas da  $\sqrt{\text{EQM}}$  possuem valores elevados para o parâmetro  $\delta$ , tal comportamento é observado para todos os cenários estudados.

Tabela 3.1: estimativas do viés relativo.

| Cenário | $n$ | $\hat{\beta}_0$ | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\delta}$ |
|---------|-----|-----------------|-----------------|----------------|
| I       | 15  | 0,0409          | 0,0040          | 2,4422         |
|         | 30  | 0,0406          | 0,0058          | 1,7870         |
|         | 45  | 0,0410          | 0,0035          | 1,6089         |
| II      | 15  | 0,0406          | 0,0089          | 2,3902         |
|         | 30  | 0,0407          | 0,0047          | 1,7291         |
|         | 45  | 0,0409          | 0,0041          | 1,5597         |
| III     | 15  | 0,0407          | 0,0087          | 2,2811         |
|         | 30  | 0,0406          | 0,0073          | 1,6358         |
|         | 45  | 0,0406          | 0,0069          | 1,5037         |

Tabela 3.2: estimativas da  $\sqrt{\text{EQM}}$ .

| Cenário | $n$ | $\hat{\beta}_0$ | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\delta}$ |
|---------|-----|-----------------|-----------------|----------------|
| I       | 15  | 0,0880          | 0,0583          | 474,3877       |
|         | 30  | 0,0846          | 0,0457          | 313,2946       |
|         | 45  | 0,0841          | 0,0372          | 269,0008       |
| II      | 15  | 0,0861          | 0,1388          | 467,7736       |
|         | 30  | 0,0839          | 0,1024          | 304,6864       |
|         | 45  | 0,0837          | 0,0925          | 261,8249       |
| III     | 15  | 0,0842          | 0,0352          | 452,4314       |
|         | 30  | 0,0828          | 0,0290          | 289,6196       |
|         | 45  | 0,0820          | 0,0166          | 251,5827       |

## Modelo 2

Considere agora o MRBS com a componente sistemática

$$g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

em que  $g$  é a função de ligação logaritmo e  $x_{ij}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) é conhecido.

Para o modelo dado em (3.11) temos que os valores verdadeiros foram fixados da seguinte maneira:  $\beta_0 = 2, 0$ ,  $\beta_1 = 1, 5$ ,  $\beta_2 = 0, 5$ ,  $\beta_3 = 0, 1$  e  $\delta = 150$ . Os valores das variáveis explicativas foram gerados da seguinte forma:  $x_{i1}$  foi obtido de uma  $\mathcal{U}(0, 1)$ ,  $x_{i2}$  de uma  $\mathcal{Exp}(10)$  e  $x_{i3}$  de uma  $\mathcal{N}(0, 16/25)$ . Para os dois modelos tem-se valores de  $\mathbf{X}$  constantes para todo o experimento. Em nosso experimento utilizamos 10000 réplicas de

Tabela 3.3: estimativas do viés relativo e  $\sqrt{\text{EQM}}$ .

| Estimador       | $n$ | Viés Relativo | $\sqrt{\text{EQM}}$ |
|-----------------|-----|---------------|---------------------|
| $\hat{\beta}_0$ | 15  | 0,0256        | 0,0586              |
|                 | 30  | 0,0255        | 0,0544              |
|                 | 45  | 0,0257        | 0,0532              |
| $\hat{\beta}_1$ | 15  | 0,0018        | 0,0380              |
|                 | 30  | 0,0021        | 0,0273              |
|                 | 45  | 0,0017        | 0,0224              |
| $\hat{\beta}_2$ | 10  | 0,0038        | 0,1019              |
|                 | 30  | 0,0046        | 0,1020              |
|                 | 45  | 0,0004        | 0,0627              |
| $\hat{\beta}_3$ | 10  | 0,0029        | 0,0175              |
|                 | 30  | -0,0002       | 0,0131              |
|                 | 45  | 0,0014        | 0,0087              |
| $\hat{\delta}$  | 15  | 3,3642        | 1713,1801           |
|                 | 30  | 2,1829        | 997,1467            |
|                 | 45  | 1,8941        | 830,7173            |

Monte Carlo e os seguintes tamanhos amostrais 15, 30 e 45. Para cada uma das 10000 réplicas foram geradas uma amostra aleatória da variável resposta  $t_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) da  $\mathcal{BS}(\delta, \mu_i)$ , em que  $\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$ .

Na Tabela 3.3, nota-se que os estimadores  $\hat{\beta}_0$ ,  $\hat{\beta}_1$ ,  $\hat{\beta}_2$ ,  $\hat{\delta}$  não têm suas estimativas de viés relativo reduzidas com o aumento do tamanho amostral, apenas o estimador  $\hat{\delta}$  apresenta esta característica. Com relação a  $\sqrt{\text{EQM}}$  apenas o estimador  $\hat{\beta}_2$  não apresenta redução contínua nas suas estimativas. De maneira geral os estimadores mostraram-se não viesados e relativamente precisos. No entanto, o estimador  $\hat{\delta}$  mostrou-se bastante viesado e baixa precisão.

## 3.4 Resíduos

A análise de resíduo é uma ferramenta importante na validação do modelo em estudo. É possível através da análise de resíduos verificar se existem observações extremas, assim como o afastamento das suposições feitas para o modelo. Nesta seção, são apresentados quatro resíduos, mas para o estudo de simulações de Monte Carlo serão considerado apenas

três, sendo eles: o resíduo obtido pelo processo de estimação de  $\beta$ , o resíduo tipo Pearson e o resíduo baseado na matriz de informação de Fisher observada.

### Resíduo ordinário

Quando definimos um resíduo, estamos interessados em encontrar uma medida que possa mensurar de forma eficiente a discrepância entre o modelo ajustado e o conjunto de dados. Desta forma, pode-se definir como resíduo uma medida baseada na diferença  $t_i - \widehat{E}(t_i)$ . Logo, será definido o resíduo ordinário para o modelo de regressão Birnbaum-Saunders, dado por

$$r_i = \frac{t_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{\widehat{Var}(t_i)}}, \quad (3.12)$$

em que  $\hat{\mu}_i = g^{-1}(x_i^\top \hat{\beta})$  e  $\widehat{Var}(t_i) = \frac{2\hat{\mu}_i^2}{\frac{1}{\hat{\delta}+2+\frac{1}{\hat{\delta}}} + \frac{5}{2(\hat{\delta}^2+\hat{\delta}+1)}}$ .

Outra medida que pode ser definida como resíduo, é derivada do processo iterativo de estimação dos parâmetros do modelo. Do processo iterativo definido em (3.9) e considerando  $\delta$  conhecido, pode-se escrever a expressão da estimativa de  $\beta$  no passo  $m$  da seguinte forma

$$\beta^{(m+1)} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta\beta}^{(m)} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{W}_{\beta\beta}^{(m)} \mathbf{z}_1^{(m)}, \quad (3.13)$$

em que  $\mathbf{z}_1^{(m)} = \mathbf{X}\beta^{(m)} + \mathbf{W}_{\beta\beta}^{-1(m)} \mathbf{D}(\mathbf{a})^{(m)} \mathbf{z}^{(m)}$  é um vetor  $(p \times 1)$ . A partir da convergência do iterativo dado em (3.13) obtêm-se

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta} \mathbf{z}_2,$$

em que  $\mathbf{z}_2 = \hat{\eta} + \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta}^{-1} \mathbf{D}(\hat{\mathbf{a}}) \hat{\mathbf{z}}$ , onde  $\hat{\eta} = \mathbf{X}\hat{\beta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p)^\top$ . Portanto, podemos interpretar  $\hat{\beta}$  como a solução de mínimos quadrados da regressão linear de  $\hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{z}_2$  contra as colunas de  $\hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{X}$ .

Definindo o resíduo baseado na solução de mínimos quadrados ordinários da regressão linear ponderada de  $\mathbf{z}_2$  contra  $\mathbf{X}$ , que é definida por  $r^* = \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta}^{1/2} [\mathbf{z}_2 - \hat{\eta}] = \hat{\mathbf{W}}_{\beta\beta}^{-1/2} \mathbf{D}(\hat{\mathbf{a}}) \hat{\mathbf{z}}$  e usando a definição de  $\mathbf{W}_{\beta\beta}$  e  $\mathbf{D}(\mathbf{a})$  dadas na seção 3.1, obtemos mais um resíduo para o MRBS dado por

$$r_i^* = \frac{\hat{z}_i}{\sqrt{v_i}}, \quad (3.14)$$

em que  $v_i$  é igual a  $\frac{\delta}{2\hat{\mu}_i^2} + \frac{\delta^2}{(\delta+1)^2}\mathcal{I}(\delta)$  e  $\mathcal{I}(\delta)$  está na esperança (E5) definida no Apêndice.

Baseado em Jørgensen (1984) é definido o resíduo padronizado dado por

$$r_i^p = J_i(\hat{\mu})^{-\frac{1}{2}} u_i(\hat{\mu}), \quad (3.15)$$

em que  $\mathbf{u}(\mu) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu}$  e  $\mathbf{J}(\mu) = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \mu^\top \partial \mu}$ , com

$$u_i(\mu) = -\frac{1}{2\mu_i} + \frac{\delta}{(\delta t_i + t_i + \delta\mu)} + \frac{t_i(\delta+1)}{4\mu_i^2} - \frac{\delta^2}{4t_i(\delta+1)}$$

e

$$J_i(\mu) = -\frac{1}{2\mu_i^2} + \frac{1}{\left(\frac{(\delta+1)}{\delta}t_i + \mu_i\right)^2} + \frac{(\delta+1)}{2\mu_i^3}t_i,$$

em que  $u_i(\mu)$  e  $J_i(\mu)$  são respectivamente, o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{u}(\mu)$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal de  $\mathbf{J}(\mu)$  e todas as derivadas são avaliadas em  $\hat{\mu}$ , o estimador de máxima verossimilhança de  $\mu$ .

### Resíduo componente de desvio

Em modelos lineares generalizados, uma medida de qualidade de ajuste bastante utilizada é a função desvio, que é a distância para cada observação entre o máximo do logaritmo da função de verossimilhança para o modelo saturado e o máximo do logaritmo da função de verossimilhança para o modelo investigado. Sendo assim, definiremos a seguinte medida de qualidade de ajuste

$$\begin{aligned} r_i^D &= \pm\sqrt{2}\{\ell_i(\delta, t_i) - \ell_i(\delta, \hat{\mu}_i)\}^{1/2} \\ &= \pm\sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\log\left(\frac{\hat{\mu}_i}{t_i}\right) + \log\left(\frac{2\delta t_i + t_i}{\delta t_i + \delta\hat{\mu}_i + t_i}\right) + \left[\frac{\delta+1}{4\hat{\mu}_i} - \frac{\delta^2}{4(\delta+1)t_i}\right](t_i - \hat{\mu}_i)\right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

em que o sinal de  $r_i^D$  é o mesmo de  $t_i - \hat{\mu}_i$ . Apesar dos resíduos baseados na função desvio serem bastante citados na literatura, no MRBS essa medida apresentou problemas devido ao sinal negativo da diferença  $\ell_i(\delta, t_i) - \ell_i(\delta, \hat{\mu}_i)$ . Foram realizadas simulações de Monte Carlo onde observou-se que o percentual de amostras rejeitadas foi superior a 90%. Mesmo aumentando o valor do parâmetro  $\delta$ , o percentual de rejeição foi bastante alto.

## Simulações

Realizamos simulações de Monte Carlo, com 10000 réplicas, para estudarmos o comportamento das distribuições empírica dos resíduos  $r_i$ ,  $r_i^*$  e  $r_i^p$  definidos em (3.12), (3.14) e (3.15), respectivamente. Consideramos também o MRBS com a seguinte componente sistemática

$$g(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

em que  $g$  é a função de ligação logaritmo e os valores da variável explicativa  $x_i$  são conhecidos para cada observação. Para gerarmos os valores das variáveis explicativas utilizamos três cenários: No cenário I as variáveis explicativas foram geradas a partir de uma distribuição  $\mathcal{U}(0,1)$ , no cenário II a partir de uma distribuição  $\mathcal{Exp}(10)$  e no cenário III utilizou-se a distribuição  $\mathcal{N}(0, 16/25)$  para gerar tais valores. É importante ressaltar que estes valores são fixos para cada réplica de Monte de Carlo. Fixamos os valores verdadeiros de  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\delta$  como sendo iguais a 2,0, 0,5 e 150, respectivamente. Sendo considerado um tamanho amostral igual a 15. Para cada resíduo proposto foram calculadas as estatísticas: média, desvio padrão, assimetria e curtose. Para obtermos uma ideia numérica da distância entre a distribuição acumulada empírica e teórica calculamos os percentuais da diferença entre ambas.

### Cenário I - $\mathcal{U}(0,1)$

Na Tabela 3.4, nota-se que as estimativas da média, desvio padrão e curtose do resíduo  $r_i$ , não diferem substancialmente do valor correspondente da distribuição normal padrão. Na maioria dos casos a assimetria apresentou estimativas próximas ao valor de 0,5, sugerindo que a distribuição desse resíduo tenha uma assimetria positiva. Além disso, pode-se observar na Tabela 3.7 que os valores da maior diferença entre a distribuição teórica e empírica do resíduo  $r_i$ , de modo geral, são altos. Como consequência, poderemos ter uma eventual rejeição da hipótese de normalidade por algum teste de aderência.

Na Tabela 3.5, pode-se notar que as estimativas da média, desvio padrão, assimetria e curtose do resíduo  $r_i^p$ , não apresentou diferença muito grande do valor correspondente da distribuição normal. Pode-se observar na Tabela 3.8 que os valores da maior diferença

entre a distribuição teórica e empírica do resíduo  $r_i^p$ , de modo geral, são menores que 7,0. Para o resíduo  $r_4^p$  o valor da maior diferença foi igual a 3,77, apresentando menor valor dentre todos. O resíduo que apresentou maior diferença máxima foi o resíduo  $r_5^p$ , com valor igual a 7,66.

Na Tabela 3.6, observa-se que a média, desvio padrão e curtose, do resíduo  $r_i^*$ , apresentam estimativas bem próximas do valor correspondente da distribuição normal. A assimetria na maioria dos casos apresenta estimativas entre 0,30 e 0,50, indicando que a distribuição desse resíduo possui assimetria positiva da mesma forma que o resíduo  $r_i$ . Na Tabela 3.9, nota-se que os valores da maior diferença entre a distribuição teórica e empírica do resíduo  $r_i^*$ , geralmente, estão entre 4,0 e 7,0.

Pode-se notar, de forma geral, que os resíduos  $r_i$ ,  $r_i^p$  e  $r_i^*$  apresentam comportamento similares, uma vez que as estimativas de média, desvio padrão e curtose têm valores próximos dos correspondentes da distribuição normal padrão. Nota-se ainda, que os resíduos apresentam uma leve assimetria.

### **Cenário II-Exp(10)**

Na Tabela 3.10, pode-se notar que as estimativas da média do resíduo  $r_i$  são bem próximas de zero, que o desvio padrão, de modo geral, apresenta valores maiores que 1,0, sugerindo que a distribuição deste resíduo apresenta uma maior dispersão que a distribuição normal padrão. Além disso, temos que a distribuição deste resíduo possui forma assimétrica à direita, como também apresenta forma menos achatada que a da distribuição normal padrão. Na Tabela 3.13, temos as diferenças entre a distribuição teórica e empírica do resíduo  $r_i$ . Nesta tabela pode-se observar que o resíduo  $r_{10}$  apresenta o maior valor, dentre as diferenças máximas e o menor valor máximo observado para este resíduo foi 5,40, que corresponde ao resíduo  $r_9$ .

Na Tabela 3.11, nota-se que a estimativa da média do resíduo  $r_i^p$  apresenta valores bastante próximo de zero, porém negativos. Temos ainda que as estimativas do desvio padrão, de maneira geral, apresentam valores levemente superiores a 1,0. Além disso, a estimativa da assimetria, apresentou valores relativamente próximos de zero, enquanto que as estimativas da curtose para este resíduo em sua maioria apresentam valores superiores ao valor 3,0. Esses resultados observados indicam que a distribuição deste resíduo possui

uma forma levemente mais assimétrica que a da distribuição normal padrão. Além disso, apresenta um menor achatamento e uma dispersão um pouco maior. Já na Tabela 3.14, observa-se que das diferenças máximas entre a distribuição teórica e empírica do resíduo  $r_i^p$ , o resíduo  $r_{10}^p$  foi quem apresentou um valor superior aos outros valores observados.

Na Tabela 3.12, temos que as estimativas da média, desvio padrão e curtose do resíduo  $r_i^*$ , não apresentam diferença substancial dos valores correspondente da distribuição normal padrão. No entanto, as estimativas da assimetria se diferenciaram um pouco do valor correspondente da distribuição normal padrão, indicando que a distribuição deste resíduo apresenta uma forma levemente assimétrica. Na Tabela 3.15, pode-se observar que o resíduo  $r_{10}^*$  se destaca, apresentando um valor bastante elevado para a diferença máxima entre a distribuição teórica e empírica do resíduo  $r_i^*$ .

### **Cenário III- $\mathcal{N}(0, 16/25)$**

Na Tabela 3.16, pode-se notar que as estimativas para a média do resíduo  $r_i$ , apresentam valores bastante próximo de zero, assim como alguns valores negativos. Enquanto o desvio padrão, em sua maioria, apresenta valores superiores a 1,0, revelando que a distribuição deste resíduo é um pouco mais dispersa que a distribuição normal padrão. Nota-se também que a forma desta distribuição é um pouco assimétrica e menos achatada que a distribuição normal padrão.

Na Tabela 3.17, observa-se que o resíduo  $r_i^p$  apresenta comportamento similar ao resíduo  $r_i$ , porém as estimativas da assimetria são bem menores, revelando assim, que a forma da distribuição deste resíduo é bem mais próxima da distribuição normal padrão do que o resíduo  $r_i$ .

Na Tabela 3.18, nota-se que o comportamento do resíduo  $r_i^*$  é similar ao apresentado pelos resíduos  $r_i$  e  $r_i^p$ , apenas apresentando estimativas da média um pouco maiores que as dos demais resíduos. Nota-se na Tabela 3.18 que o resíduo  $r_4^*$  apresenta média bem superior aos demais resíduos  $r_i^*$ . Nas Tabelas 3.19-3.21 temos a diferença (em valores absoluto) relativa entre a função de distribuição acumulada empírica dos resíduos  $r_i$ ,  $r_i^p$  e  $r_i^*$  e a função de distribuição acumulada da normal padrão. Nota-se que os valores contidos na Tabela 3.21 são de um modo geral superiores aos encontrados nas Tabelas 3.19-3.20.

Para todos os cenários foi possível observar que os resíduos  $r_i$ ,  $r_i^p$  e  $r_i^*$  não apresentaram diferenças significativas com relação as estimativas da média, desvio padrão e curtose, no entanto, o resíduo  $r_i^p$  apresentou melhor desempenho no que tange a assimetria.

Tabela 3.4: medidas das estimativas do resíduo  $r_i$  sob o cenário I.

| $r_i$ | Média | DP   | Assimetria | Curtose |
|-------|-------|------|------------|---------|
| 1     | -0,01 | 1,02 | 0,54       | 3,30    |
| 2     | -0,02 | 0,98 | 0,62       | 3,28    |
| 3     | 0,02  | 1,04 | 0,51       | 3,07    |
| 4     | 0,01  | 1,00 | 0,55       | 3,13    |
| 5     | -0,02 | 1,08 | 0,58       | 3,41    |
| 6     | 0,00  | 1,03 | 0,45       | 3,17    |
| 7     | -0,03 | 0,90 | 0,60       | 3,42    |
| 8     | 0,02  | 1,09 | 0,61       | 3,23    |
| 9     | 0,02  | 1,00 | 0,73       | 3,49    |
| 10    | -0,01 | 0,99 | 0,39       | 3,10    |
| 11    | -0,01 | 1,01 | 0,55       | 3,26    |
| 12    | -0,02 | 0,98 | 0,67       | 3,49    |
| 13    | 0,01  | 0,96 | 0,51       | 2,97    |
| 14    | 0,04  | 1,02 | 0,45       | 3,07    |
| 15    | -0,01 | 1,03 | 0,52       | 3,10    |

Tabela 3.5: medidas das estimativas do resíduo  $r_i^p$  sob o cenário I.

| $r_i^p$ | Média | DP   | Assimetria | Curtose |
|---------|-------|------|------------|---------|
| 1       | -0,04 | 1,01 | 0,08       | 3,33    |
| 2       | -0,05 | 0,96 | 0,23       | 3,09    |
| 3       | -0,02 | 1,02 | 0,09       | 3,08    |
| 4       | -0,02 | 0,98 | 0,19       | 2,88    |
| 5       | -0,07 | 1,06 | 0,05       | 3,39    |
| 6       | -0,04 | 1,02 | -0,05      | 3,44    |
| 7       | -0,05 | 0,89 | 0,22       | 3,05    |
| 8       | -0,02 | 1,07 | 0,15       | 3,11    |
| 9       | -0,01 | 0,96 | 0,34       | 3,04    |
| 10      | -0,04 | 0,99 | -0,08      | 3,26    |
| 11      | -0,04 | 1,00 | 0,08       | 3,28    |
| 12      | -0,05 | 0,96 | 0,24       | 3,23    |
| 13      | -0,01 | 0,94 | 0,19       | 2,73    |
| 14      | 0,00  | 1,01 | 0,02       | 3,15    |
| 15      | -0,05 | 1,02 | 0,09       | 3,07    |

Tabela 3.6: medidas das estimativas do resíduo  $r_i^*$  sob o cenário I.

| $r_i^*$ | Média | DP   | Assimetria | Curtose |
|---------|-------|------|------------|---------|
| 1       | 0,00  | 1,00 | 0,40       | 3,21    |
| 2       | -0,02 | 0,96 | 0,51       | 3,18    |
| 3       | 0,02  | 1,05 | 0,34       | 2,98    |
| 4       | 0,03  | 0,97 | 0,51       | 2,89    |
| 5       | -0,01 | 1,06 | 0,39       | 3,21    |
| 6       | 0,00  | 1,02 | 0,33       | 3,13    |
| 7       | -0,02 | 0,88 | 0,48       | 3,13    |
| 8       | 0,03  | 1,08 | 0,50       | 2,91    |
| 9       | 0,00  | 0,97 | 0,62       | 3,23    |
| 10      | -0,01 | 1,00 | 0,18       | 3,04    |
| 11      | -0,02 | 1,01 | 0,33       | 3,12    |
| 12      | -0,01 | 0,97 | 0,52       | 3,22    |
| 13      | 0,01  | 0,94 | 0,43       | 2,84    |
| 14      | 0,02  | 1,02 | 0,27       | 3,03    |
| 15      | -0,02 | 1,03 | 0,34       | 3,00    |

Tabela 3.7: diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do  $r_i$  para dados do cenário I.

| $r_i$ | min  | 25%  | 50%  | 75%  | 90%  | 95%  | max  |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1     | 0,00 | 1,36 | 2,77 | 4,66 | 6,41 | 6,87 | 7,36 |
| 2     | 0,00 | 1,63 | 3,46 | 5,55 | 7,34 | 7,65 | 8,21 |
| 3     | 0,00 | 1,79 | 2,86 | 4,48 | 6,05 | 6,80 | 7,57 |
| 4     | 0,00 | 1,22 | 2,24 | 4,51 | 5,20 | 5,39 | 5,67 |
| 5     | 0,01 | 1,63 | 2,91 | 6,05 | 8,07 | 8,39 | 8,97 |
| 6     | 0,00 | 1,47 | 2,63 | 4,77 | 5,86 | 6,28 | 6,75 |
| 7     | 0,01 | 1,83 | 3,69 | 5,84 | 7,09 | 7,28 | 8,19 |
| 8     | 0,01 | 1,94 | 3,20 | 5,53 | 7,54 | 7,73 | 8,22 |
| 9     | 0,00 | 1,58 | 2,89 | 5,07 | 6,04 | 6,26 | 6,80 |
| 10    | 0,02 | 1,06 | 2,10 | 3,59 | 4,63 | 4,94 | 5,43 |
| 11    | 0,02 | 1,80 | 2,87 | 5,82 | 6,46 | 6,64 | 7,05 |
| 12    | 0,01 | 1,24 | 3,48 | 6,32 | 6,97 | 7,25 | 8,12 |
| 13    | 0,00 | 1,04 | 2,42 | 4,27 | 4,80 | 4,91 | 5,30 |
| 14    | 0,00 | 1,04 | 2,32 | 3,28 | 4,30 | 4,59 | 5,01 |
| 15    | 0,00 | 1,57 | 2,95 | 5,20 | 5,67 | 5,90 | 6,27 |

Tabela 3.8: diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do  $r_i^p$  para dados do cenário I.

| $r_i^p$ | min  | 25%  | 50%  | 75%  | 90%  | 95%  | max  |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1       | 0,00 | 0,68 | 2,12 | 3,66 | 5,08 | 5,53 | 6,07 |
| 2       | 0,00 | 0,96 | 2,58 | 4,50 | 6,02 | 6,21 | 6,81 |
| 3       | 0,01 | 1,09 | 1,66 | 3,37 | 5,15 | 5,71 | 6,30 |
| 4       | 0,00 | 0,54 | 1,13 | 3,29 | 3,87 | 3,99 | 4,35 |
| 5       | 0,00 | 1,10 | 2,40 | 5,18 | 7,07 | 7,41 | 7,66 |
| 6       | 0,00 | 0,77 | 1,63 | 3,67 | 4,55 | 5,06 | 5,61 |
| 7       | 0,02 | 2,13 | 3,39 | 4,59 | 5,83 | 6,03 | 6,72 |
| 8       | 0,00 | 1,16 | 2,25 | 4,61 | 6,36 | 6,58 | 7,07 |
| 9       | 0,00 | 0,83 | 2,13 | 3,95 | 4,71 | 4,92 | 5,35 |
| 10      | 0,00 | 0,53 | 1,48 | 2,50 | 3,38 | 3,62 | 4,11 |
| 11      | 0,00 | 0,75 | 2,44 | 4,67 | 5,19 | 5,31 | 5,63 |
| 12      | 0,00 | 0,86 | 2,74 | 5,12 | 5,71 | 6,08 | 6,97 |
| 13      | 0,00 | 0,58 | 1,51 | 3,14 | 3,52 | 3,67 | 4,10 |
| 14      | 0,00 | 0,44 | 1,34 | 2,24 | 3,04 | 3,29 | 3,77 |
| 15      | 0,00 | 0,93 | 2,45 | 4,21 | 4,59 | 4,83 | 5,56 |

Tabela 3.9: diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do  $r_i^*$  para dados do cenário I.

| $r_i^*$ | min  | 25%  | 50%  | 75%  | 90%  | 95%  | max  |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1       | 0,00 | 1,19 | 2,56 | 3,77 | 5,37 | 5,82 | 6,31 |
| 2       | 0,01 | 1,56 | 3,31 | 5,11 | 7,44 | 7,73 | 8,04 |
| 3       | 0,00 | 1,60 | 2,65 | 3,46 | 5,06 | 5,77 | 6,31 |
| 4       | 0,01 | 1,30 | 2,20 | 3,81 | 4,38 | 4,48 | 4,84 |
| 5       | 0,00 | 1,45 | 2,62 | 4,78 | 6,86 | 7,23 | 7,94 |
| 6       | 0,00 | 1,24 | 2,60 | 3,90 | 4,91 | 5,67 | 6,16 |
| 7       | 0,00 | 1,79 | 3,26 | 5,31 | 6,26 | 6,42 | 7,02 |
| 8       | 0,00 | 1,55 | 3,12 | 5,03 | 6,74 | 6,97 | 7,51 |
| 9       | 0,00 | 1,48 | 2,93 | 4,92 | 5,75 | 6,04 | 6,60 |
| 10      | 0,00 | 0,88 | 1,61 | 2,86 | 3,55 | 3,76 | 4,32 |
| 11      | 0,00 | 1,42 | 2,69 | 5,00 | 5,99 | 6,15 | 6,58 |
| 12      | 0,00 | 0,99 | 3,10 | 5,12 | 6,00 | 6,17 | 6,78 |
| 13      | 0,00 | 0,83 | 2,27 | 3,84 | 4,21 | 4,41 | 4,85 |
| 14      | 0,00 | 0,75 | 1,85 | 2,78 | 3,89 | 4,21 | 4,81 |
| 15      | 0,00 | 1,36 | 2,48 | 4,61 | 5,00 | 5,38 | 5,82 |

Tabela 3.10: medidas das estimativas do resíduo  $r_i$  sob o cenário II.

| $r_i$ | Média | DP   | Assimetria | Curtose |
|-------|-------|------|------------|---------|
| 1     | -0,01 | 1,02 | 0,49       | 3,22    |
| 2     | -0,00 | 1,03 | 0,68       | 3,33    |
| 3     | 0,03  | 1,06 | 0,53       | 3,13    |
| 4     | 0,01  | 1,06 | 0,55       | 3,22    |
| 5     | -0,03 | 1,07 | 0,53       | 3,43    |
| 6     | 0,01  | 1,02 | 0,48       | 3,24    |
| 7     | -0,02 | 0,97 | 0,64       | 3,44    |
| 8     | 0,03  | 1,10 | 0,63       | 3,27    |
| 9     | 0,03  | 1,01 | 0,66       | 3,35    |
| 10    | -0,02 | 0,59 | 0,03       | 2,81    |
| 11    | -0,01 | 1,03 | 0,58       | 3,25    |
| 12    | -0,01 | 1,00 | 0,75       | 3,55    |
| 13    | 0,01  | 1,01 | 0,57       | 3,13    |
| 14    | 0,01  | 1,04 | 0,50       | 3,19    |
| 15    | -0,02 | 1,05 | 0,55       | 3,19    |

Tabela 3.11: medidas das estimativas do resíduos  $r_i^p$  sob o cenário II.

| $r_i^p$ | Média | DP   | Assimetria | Curtose |
|---------|-------|------|------------|---------|
| 1       | -0,04 | 1,01 | 0,02       | 3,35    |
| 2       | -0,04 | 1,00 | 0,26       | 3,09    |
| 3       | -0,01 | 1,04 | 0,09       | 3,12    |
| 4       | -0,03 | 1,04 | 0,12       | 3,03    |
| 5       | -0,08 | 1,06 | -0,05      | 3,57    |
| 6       | -0,03 | 1,01 | -0,03      | 3,56    |
| 7       | -0,05 | 0,96 | 0,22       | 3,13    |
| 8       | -0,01 | 1,07 | 0,18       | 3,08    |
| 9       | -0,01 | 0,98 | 0,27       | 2,98    |
| 10      | -0,01 | 0,60 | -0,19      | 2,84    |
| 11      | -0,05 | 1,02 | 0,10       | 3,31    |
| 12      | -0,04 | 0,97 | 0,31       | 3,19    |
| 13      | -0,02 | 0,99 | 0,18       | 2,92    |
| 14      | -0,03 | 1,03 | 0,02       | 3,31    |
| 15      | -0,06 | 1,04 | 0,08       | 3,17    |

Tabela 3.12: medidas das estimativas do resíduo  $r_i^*$  sob o cenário II.

| $r_i^*$ | Média | DP   | Assimetria | Curtose |
|---------|-------|------|------------|---------|
| 1       | -0,01 | 1,02 | 0,28       | 3,19    |
| 2       | -0,01 | 1,02 | 0,49       | 3,17    |
| 3       | 0,03  | 1,04 | 0,38       | 3,01    |
| 4       | 0,00  | 1,06 | 0,33       | 3,02    |
| 5       | -0,03 | 1,07 | 0,25       | 3,33    |
| 6       | 0,01  | 1,02 | 0,26       | 3,21    |
| 7       | -0,02 | 0,97 | 0,42       | 3,19    |
| 8       | 0,02  | 1,08 | 0,41       | 3,09    |
| 9       | 0,03  | 0,99 | 0,49       | 3,15    |
| 10      | -0,01 | 0,57 | -0,04      | 2,82    |
| 11      | -0,02 | 1,02 | 0,38       | 3,17    |
| 12      | -0,01 | 0,98 | 0,58       | 3,22    |
| 13      | 0,01  | 1,01 | 0,37       | 2,97    |
| 14      | 0,02  | 1,01 | 0,40       | 3,07    |
| 15      | -0,02 | 1,04 | 0,35       | 3,10    |

Tabela 3.13: diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do  $r_i$  para dados do cenário II.

| $r_i$ | min  | 25%  | 50%  | 75%   | 90%   | 95%   | max   |
|-------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| 1     | 0,01 | 1,54 | 2,88 | 4,61  | 5,59  | 5,96  | 6,54  |
| 2     | 0,00 | 1,92 | 3,46 | 5,24  | 7,77  | 8,09  | 8,87  |
| 3     | 0,00 | 2,19 | 3,22 | 4,23  | 6,46  | 6,76  | 7,29  |
| 4     | 0,00 | 0,97 | 2,50 | 4,92  | 5,62  | 5,81  | 6,30  |
| 5     | 0,01 | 1,47 | 2,89 | 6,25  | 7,47  | 8,13  | 8,52  |
| 6     | 0,00 | 1,58 | 2,90 | 5,07  | 5,71  | 5,92  | 6,33  |
| 7     | 0,01 | 1,17 | 3,34 | 5,99  | 7,01  | 7,25  | 7,85  |
| 8     | 0,01 | 1,74 | 3,19 | 4,86  | 6,85  | 7,30  | 8,12  |
| 9     | 0,01 | 1,52 | 2,81 | 4,25  | 4,86  | 5,03  | 5,40  |
| 10    | 0,00 | 4,93 | 8,68 | 11,13 | 12,27 | 12,56 | 12,84 |
| 11    | 0,02 | 1,65 | 3,08 | 6,26  | 7,51  | 7,71  | 8,33  |
| 12    | 0,01 | 1,77 | 4,08 | 6,31  | 7,23  | 7,64  | 8,31  |
| 13    | 0,02 | 1,40 | 2,61 | 4,42  | 5,95  | 6,25  | 6,65  |
| 14    | 0,02 | 1,65 | 2,45 | 3,89  | 6,18  | 6,51  | 6,85  |
| 15    | 0,00 | 2,14 | 3,14 | 5,49  | 5,89  | 6,05  | 6,40  |

Tabela 3.14: diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do  $r_i^p$  para dados do cenário II.

| $r_i^p$ | min  | 25%  | 50%  | 75%   | 90%   | 95%   | max   |
|---------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| 1       | 0,01 | 0,79 | 2,25 | 3,52  | 4,21  | 4,71  | 5,24  |
| 2       | 0,00 | 1,05 | 2,84 | 4,05  | 6,39  | 6,74  | 7,48  |
| 3       | 0,01 | 1,40 | 2,05 | 3,37  | 5,36  | 5,60  | 6,53  |
| 4       | 0,00 | 0,63 | 1,64 | 3,87  | 4,31  | 4,40  | 4,74  |
| 5       | 0,00 | 1,12 | 2,43 | 5,12  | 6,57  | 7,02  | 7,53  |
| 6       | 0,00 | 0,90 | 2,11 | 3,89  | 4,47  | 4,70  | 5,00  |
| 7       | 0,01 | 1,15 | 2,55 | 4,91  | 5,77  | 5,95  | 6,49  |
| 8       | 0,00 | 1,22 | 2,30 | 4,37  | 5,76  | 6,10  | 6,82  |
| 9       | 0,00 | 0,77 | 1,95 | 3,01  | 3,72  | 3,93  | 4,37  |
| 10      | 0,02 | 4,75 | 8,91 | 10,76 | 12,14 | 12,89 | 13,48 |
| 11      | 0,01 | 0,91 | 2,15 | 5,33  | 6,19  | 6,35  | 6,94  |
| 12      | 0,01 | 0,92 | 3,19 | 5,08  | 5,94  | 6,23  | 7,07  |
| 13      | 0,00 | 0,51 | 1,74 | 3,37  | 4,73  | 5,00  | 5,56  |
| 14      | 0,00 | 0,76 | 1,43 | 3,00  | 4,86  | 5,16  | 5,67  |
| 15      | 0,00 | 1,37 | 2,91 | 4,20  | 4,90  | 5,20  | 5,59  |

Tabela 3.15: diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do  $r_i^*$  para dados do cenário II.

| $r_i^*$ | min  | 25%  | 50%  | 75%   | 90%   | 95%   | max   |
|---------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| 1       | 0,00 | 1,37 | 2,72 | 3,49  | 4,56  | 5,20  | 5,97  |
| 2       | 0,02 | 1,60 | 2,74 | 4,24  | 6,54  | 7,15  | 7,89  |
| 3       | 0,00 | 1,64 | 2,87 | 3,89  | 5,59  | 5,82  | 6,55  |
| 4       | 0,00 | 0,73 | 2,07 | 3,73  | 4,29  | 4,41  | 4,82  |
| 5       | 0,01 | 1,49 | 2,47 | 4,81  | 6,43  | 6,92  | 7,41  |
| 6       | 0,00 | 1,31 | 2,46 | 3,86  | 4,81  | 5,16  | 5,61  |
| 7       | 0,00 | 0,83 | 2,72 | 4,67  | 5,43  | 5,71  | 6,28  |
| 8       | 0,00 | 1,69 | 2,78 | 4,37  | 6,00  | 6,33  | 6,91  |
| 9       | 0,00 | 1,19 | 2,19 | 3,24  | 3,65  | 3,81  | 4,16  |
| 10      | 0,01 | 5,03 | 9,19 | 11,53 | 12,11 | 12,27 | 12,66 |
| 11      | 0,00 | 1,44 | 2,53 | 5,50  | 6,44  | 6,68  | 7,21  |
| 12      | 0,01 | 1,41 | 3,65 | 5,25  | 6,47  | 6,73  | 7,37  |
| 13      | 0,01 | 1,17 | 2,04 | 3,23  | 4,65  | 5,01  | 5,70  |
| 14      | 0,00 | 1,31 | 2,19 | 2,90  | 4,93  | 5,18  | 5,75  |
| 15      | 0,00 | 1,94 | 2,91 | 4,18  | 4,81  | 5,05  | 5,42  |

Tabela 3.16: medidas das estimativas do resíduo  $r_i$  sob o cenário III.

| $r_i$ | Média | DP   | Assimetria | Curtose |
|-------|-------|------|------------|---------|
| 1     | -0,01 | 1,01 | 0,46       | 3,18    |
| 2     | -0,02 | 0,95 | 0,45       | 3,04    |
| 3     | 0,02  | 1,07 | 0,48       | 3,20    |
| 4     | -0,01 | 0,93 | 0,27       | 2,96    |
| 5     | -0,02 | 1,03 | 0,48       | 3,30    |
| 6     | 0,01  | 1,00 | 0,46       | 3,23    |
| 7     | -0,03 | 1,00 | 0,49       | 3,14    |
| 8     | 0,03  | 1,07 | 0,54       | 3,32    |
| 9     | 0,02  | 0,96 | 0,66       | 3,36    |
| 10    | -0,01 | 0,95 | 0,51       | 3,06    |
| 11    | -0,02 | 1,04 | 0,46       | 3,23    |
| 12    | -0,01 | 1,01 | 0,59       | 3,38    |
| 13    | 0,03  | 1,02 | 0,54       | 3,10    |
| 14    | 0,04  | 1,05 | 0,51       | 3,22    |
| 15    | -0,03 | 1,02 | 0,47       | 3,16    |

Tabela 3.17: medidas das estimativas do resíduo  $r_i^p$  sob o cenário III.

| $r_i^p$ | Média | DP   | Assimetria | Curtose |
|---------|-------|------|------------|---------|
| 1       | -0,04 | 1,00 | -0,01      | 3,31    |
| 2       | -0,05 | 0,94 | 0,07       | 2,94    |
| 3       | -0,03 | 1,06 | -0,05      | 3,44    |
| 4       | -0,03 | 0,93 | -0,11      | 2,95    |
| 5       | -0,06 | 1,02 | -0,04      | 3,44    |
| 6       | -0,03 | 1,00 | -0,04      | 3,53    |
| 7       | -0,07 | 0,99 | 0,07       | 3,03    |
| 8       | -0,01 | 1,05 | 0,08       | 3,14    |
| 9       | -0,01 | 0,93 | 0,30       | 2,99    |
| 10      | -0,03 | 0,94 | 0,13       | 2,92    |
| 11      | -0,06 | 1,04 | -0,09      | 3,53    |
| 12      | -0,04 | 0,99 | 0,13       | 3,14    |
| 13      | -0,01 | 1,00 | 0,13       | 2,93    |
| 14      | 0,00  | 1,04 | 0,03       | 3,33    |
| 15      | -0,07 | 1,02 | -0,06      | 3,48    |

Tabela 3.18: medidas das estimativas do resíduo  $r_i^*$  sob o cenário III.

| $r_i^*$ | Média | DP   | Assimetria | Curtose |
|---------|-------|------|------------|---------|
| 1       | 0,11  | 0,93 | 0,09       | 3,20    |
| 2       | -0,18 | 0,86 | 0,45       | 3,20    |
| 3       | 0,17  | 1,03 | 0,02       | 3,24    |
| 4       | -0,62 | 1,08 | 0,35       | 2,55    |
| 5       | -0,03 | 0,93 | 0,36       | 3,43    |
| 6       | 0,06  | 0,91 | 0,23       | 3,30    |
| 7       | -0,01 | 1,13 | -0,11      | 2,65    |
| 8       | 0,23  | 1,03 | 0,03       | 3,27    |
| 9       | -0,13 | 0,87 | 0,62       | 3,63    |
| 10      | -0,19 | 0,86 | 0,52       | 3,15    |
| 11      | 0,10  | 1,00 | -0,04      | 3,43    |
| 12      | 0,18  | 1,01 | -0,03      | 3,26    |
| 13      | 0,20  | 1,02 | -0,11      | 3,03    |
| 14      | 0,10  | 0,97 | 0,22       | 3,40    |
| 15      | 0,01  | 0,94 | 0,17       | 3,37    |

Tabela 3.19: diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do  $r_i$  para dados do cenário III.

| $r_i$ | min  | 25%  | 50%  | 75%  | 90%  | 95%  | max  |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1     | 0,01 | 1,13 | 2,55 | 4,28 | 5,04 | 5,20 | 5,61 |
| 2     | 0,00 | 1,03 | 3,01 | 4,56 | 4,91 | 5,06 | 5,44 |
| 3     | 0,00 | 1,81 | 3,20 | 4,40 | 6,94 | 7,35 | 7,93 |
| 4     | 0,00 | 0,77 | 1,68 | 2,63 | 3,63 | 4,28 | 5,27 |
| 5     | 0,00 | 1,11 | 2,95 | 5,36 | 6,33 | 6,59 | 7,30 |
| 6     | 0,00 | 1,53 | 2,72 | 4,69 | 5,40 | 5,77 | 6,27 |
| 7     | 0,00 | 1,06 | 2,42 | 6,09 | 6,69 | 6,94 | 7,52 |
| 8     | 0,00 | 1,23 | 2,67 | 3,86 | 4,94 | 5,43 | 5,99 |
| 9     | 0,00 | 1,49 | 3,07 | 4,20 | 4,56 | 4,80 | 5,31 |
| 10    | 0,00 | 1,35 | 2,89 | 4,45 | 6,04 | 6,19 | 6,86 |
| 11    | 0,01 | 1,31 | 2,52 | 5,53 | 7,32 | 7,62 | 8,32 |
| 12    | 0,01 | 1,35 | 2,57 | 4,62 | 6,53 | 7,20 | 7,74 |
| 13    | 0,01 | 1,26 | 2,65 | 3,78 | 4,98 | 5,29 | 5,68 |
| 14    | 0,00 | 1,13 | 2,70 | 4,02 | 5,04 | 5,19 | 5,51 |
| 15    | 0,00 | 1,90 | 3,54 | 4,93 | 5,44 | 5,86 | 6,44 |

Tabela 3.20: diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do  $r_i^p$  para dados do cenário III.

| $r_i^p$ | min  | 25%  | 50%  | 75%  | 90%  | 95%  | max  |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1       | 0,00 | 0,57 | 1,97 | 3,19 | 3,69 | 3,83 | 4,18 |
| 2       | 0,01 | 1,19 | 2,27 | 3,41 | 3,69 | 3,81 | 4,04 |
| 3       | 0,01 | 1,18 | 2,12 | 3,37 | 5,54 | 5,90 | 6,72 |
| 4       | 0,00 | 0,54 | 1,19 | 2,21 | 2,98 | 3,41 | 4,29 |
| 5       | 0,00 | 0,65 | 1,97 | 4,15 | 5,27 | 5,49 | 5,94 |
| 6       | 0,00 | 0,76 | 2,07 | 3,59 | 4,09 | 4,41 | 4,83 |
| 7       | 0,00 | 0,68 | 1,73 | 5,05 | 5,36 | 5,54 | 5,99 |
| 8       | 0,00 | 0,71 | 1,64 | 2,88 | 3,57 | 4,05 | 4,71 |
| 9       | 0,00 | 1,19 | 2,22 | 3,05 | 3,43 | 3,63 | 4,00 |
| 10      | 0,00 | 1,03 | 2,02 | 3,45 | 4,64 | 4,79 | 5,59 |
| 11      | 0,01 | 0,85 | 1,71 | 4,36 | 6,16 | 6,44 | 7,39 |
| 12      | 0,00 | 0,69 | 1,81 | 3,63 | 5,09 | 5,73 | 6,22 |
| 13      | 0,00 | 0,55 | 1,46 | 2,60 | 3,63 | 3,87 | 4,21 |
| 14      | 0,00 | 0,74 | 1,64 | 2,85 | 3,76 | 3,94 | 4,33 |
| 15      | 0,00 | 0,88 | 3,26 | 3,99 | 4,35 | 4,65 | 5,24 |

Tabela 3.21: diferenças (em valor absoluto) entre as distribuições acumulada teórica e empírica do  $r_i^*$  para dados do cenário III.

| $r_i^*$ | min  | 25%   | 50%   | 75%   | 90%   | 95%   | max   |
|---------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1       | 0,00 | 1,06  | 1,89  | 4,44  | 6,19  | 6,52  | 7,17  |
| 2       | 0,02 | 2,64  | 7,54  | 11,35 | 12,28 | 12,66 | 13,19 |
| 3       | 0,01 | 3,34  | 4,28  | 5,31  | 7,22  | 8,18  | 8,82  |
| 4       | 0,01 | 10,32 | 18,73 | 24,31 | 25,29 | 25,68 | 26,07 |
| 5       | 0,00 | 1,50  | 3,70  | 5,06  | 5,53  | 5,75  | 6,42  |
| 6       | 0,00 | 0,82  | 1,55  | 3,34  | 6,20  | 7,10  | 7,51  |
| 7       | 0,00 | 1,26  | 1,87  | 3,33  | 4,18  | 4,42  | 4,95  |
| 8       | 0,00 | 5,35  | 6,40  | 7,31  | 8,25  | 8,76  | 9,60  |
| 9       | 0,00 | 2,60  | 6,02  | 9,99  | 11,28 | 11,47 | 11,76 |
| 10      | 0,02 | 2,61  | 7,83  | 12,24 | 13,93 | 14,42 | 15,24 |
| 11      | 0,01 | 1,41  | 2,22  | 3,44  | 4,94  | 5,39  | 6,12  |
| 12      | 0,00 | 3,75  | 5,64  | 6,83  | 7,14  | 7,29  | 8,14  |
| 13      | 0,00 | 4,89  | 6,85  | 7,42  | 8,07  | 8,20  | 8,75  |
| 14      | 0,00 | 1,08  | 1,77  | 3,06  | 5,70  | 6,28  | 6,77  |
| 15      | 0,00 | 0,68  | 2,10  | 3,04  | 4,14  | 4,65  | 5,44  |

### 3.5 Influência local

A análise de diagnóstico é uma maneira eficaz na detecção de observações influentes. Uma técnica bastante conhecida para avaliar o impacto da retirada de uma observação ou de um conjunto de observações nas estimativas dos parâmetros da regressão é a deleção de pontos. Esta técnica foi introduzida por Cook (1977) em modelos normais lineares e posteriormente adaptada para diversas classes de modelos. Algumas referências para o caso normal linear são: Belsley, Kuh e Welsch (1980), Cook e Weisberg (1982), Atkinson (1985) e Chatterjee e Hadi (1988). Alguns trabalhos que apresentam extensões dessa metodologia são: Moolgavkar, Lustbader e Venzon (1984), aplicaram essa metodologia nos modelos de regressão não-linear com aplicações em estudos emparelhados; Paula e Peres (1988), apresentaram uma discussão sobre a deleção de pontos em modelos lineares generalizados com parâmetros restritos na forma  $C\beta \geq 0$ ; Davison e Tsai (1992) e Cordeiro e Paula (1992), fizeram uma extensão para modelos onde a distribuição não pertence à família exponencial de distribuições; Galea, Riquelme e Paula (2000), analisaram esta técnica em modelos de contornos elípticos multivariados. Porém, uma desvantagem que pode surgir com a deleção individual de pontos é que essa metodologia pode eventualmente não detectar pontos que são conjuntamente influentes. No entanto, Cook (1986) propôs um método de influência local que consiste em estudar o comportamento de uma medida de influência particular sujeito a pequenas perturbações nos dados ou modelos. Assim, esta metodologia serve para verificar a existência de pontos que após modificações pequenas no modelo e/ou dados causam variações desproporcionais nas conclusões inferenciais. Um grande número de autores têm aplicado essa metodologia em modelos de regressão mais gerais do que o modelo de regressão normal linear. Podemos citar por exemplo, Paula (1993), Galea, Paula e Bolfarine (1997), Galea, Riquelme e Paula (2000) e Díaz-García, Galea e Leiva (2003). Temos também autores que investigaram a análise de influência local em modelos de análise de sobrevivência: por exemplo, Pettit e Bin Daud (1989) fizeram uma investigação da influência local em modelos de Cox com riscos proporcionais; Escobar e Meeker (1992) fizeram uma adaptação do método de influência local para modelos de regressão com censura; Ortega, Bolfarine e Paula (2003) consideraram o problema da análise de influência local em modelos de regressão log-gama generalizado com observações censuradas e temos ainda, Galea, Leiva e Paula (2004) que fizeram uma

derivação das curvaturas da influência local sob vários esquemas de perturbação em modelos de regressão linear log-BS com dados não censurados. Além de considerarem a função de verossimilhança para o cálculo das curvaturas, outras sugestões vêm sendo propostas para lidar com situações não-padrão e para vários modelos, pode-se ver por exemplo, Fung e Kwan (1997), Kwan e Fung (1998), Tanaka, Zhang e Mori (2003), Galea, Paula e Cysneiros (2005), entre outros.

O afastamento da verossimilhança expressado  $LD(\omega) = 2\{L(\hat{\theta}) - L(\hat{\theta}_\omega)\}$ , é a medida de influência mais conhecida, em que  $\hat{\theta}_\omega$  é a estimativa de máxima verossimilhança sob o modelo perturbado e  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^\top$  é o vetor de perturbação. Cook (1986) propôs estudar o comportamento de  $LD(\omega)$  numa vizinhança do vetor de não perturbação  $\omega_0$ . Ele sugeriu que seja feita a investigação da curvatura normal da linha projetada  $LD(\omega_0 + ad)$ , em que  $a \in \Re$ , numa vizinhança de  $a = 0$ , para alguma direção arbitrária  $d$ ,  $\|d\| = 1$ . É possível mostrar que a curvatura normal possui a seguinte forma geral,  $C_d(\theta) = 2|d^\top \Delta^\top \ddot{L}_{\theta\theta}^{-1} \Delta d|$ , em que  $\Delta$  é uma matriz  $(p \times n)$  dada por  $\Delta = \frac{\partial^2 \ell_\omega(\theta)}{\partial \beta \partial \omega^\top}$ , avaliada em  $\beta = \hat{\beta}$  e  $\omega = \omega_0$ . Cook (1986) sugeriu utilizar  $d_{max}$ , que é o autovetor correspondente ao maior autovalor  $C_{d_{max}}$  da matriz  $\ddot{F} = \Delta^\top \ddot{L}_{\theta\theta}^{-1} \Delta$ . Com o vetor  $d_{max}$  é possível identificar os fatores mais influentes para o esquema de perturbação em estudo.

Se o interesse é somente no vetor  $\beta$ , temos que a curvatura normal na direção  $d$  é expressa por  $C_d(\beta) = 2|d^\top \Delta^\top (\ddot{L}_{\theta\theta}^{-1} - L_1) \Delta d|$ , em que

$$L_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddot{L}_{\delta\delta}^{-1} \end{pmatrix}$$

e  $d_{max}$  neste caso é o correspondente ao maior autovalor da matriz  $\Delta^\top (\ddot{L}_{\theta\theta}^{-1} - L_1) \Delta$ . Se quisermos avaliar a influência local para o parâmetro de precisão  $\delta$ , o procedimento é similar ao demonstrado para  $\beta$ .

Escobar e Meeker (1992) sugerem que a medida de influência a ser tomada seja os elementos da diagonal principal da matriz  $\ddot{F} = \Delta^\top \ddot{L}_{\theta\theta}^{-1} \Delta$ , enquanto Lesaffre and Verbeke (1998) sugerem que a curvatura normal seja avaliada na direção da  $i$ -ésima observação, que consiste em avaliarmos  $C_d(\theta)$  no vetor  $d_i$  de dimensão  $n$  composto por um na  $i$ -ésima linha e zero nas demais. Essa curvatura é denominada por  $C_i$  que é igual a  $2|\ddot{f}_{ii}|$ , em que  $\ddot{f}_{ii}$  é o  $i$ -ésimo elemento diagonal da matriz  $\ddot{F}$ . É sugerido um atenção especial nas

---

<sup>1</sup>ver Cook(1986)

observações tal que  $C_i > 2\bar{C}$ .

### 3.6 Cálculo das curvaturas

Nesta seção obteremos, a matriz  $\Delta$  dada por

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\omega}^\top} \right),$$

para cada um dos esquemas de perturbação aqui estudados, considerando o modelo definido em (3.2).

#### Ponderação de casos

Considere  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)^\top$  o vetor de perturbação e o logaritmo da função de verossimilhança perturbada

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega}) = \sum_{i=1}^n \omega_i \ell_i(\mu_i, \delta),$$

em que  $\ell_i(\mu_i, \delta)$  está definida em (3.5),  $0 \leq \omega_i \leq 1$  e  $\omega_0 = (1, \dots, 1)^\top$  (vetor de não perturbação). A matriz  $\Delta$  é dada por

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_\beta \\ \Delta_\delta \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

em que  $\Delta_\beta$  é uma matriz  $p \times n$  expressa como  $\Delta_\beta = \mathbf{X}^\top \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\} \text{diag}\{e_1, \dots, e_n\}$  com

$$a_i = \frac{1}{g'(\mu_i)} \quad (3.18)$$

e

$$e_i = -\frac{1}{2\mu_i} + \left( \frac{\delta+1}{\delta} t_i + \mu_i \right)^{-1} + \frac{(\delta+1)}{4\mu_i^2} t_i - \frac{\delta^2}{4(\delta+1)t_i}.$$

Além disso,  $\Delta_\delta = (b_1, \dots, b_n)^\top$  com

$$b_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\delta+1)} + \frac{(t_i + \mu_i)}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)} - \frac{t_i}{4\mu_i} - \frac{\delta(\delta+2)\mu_i}{4(\delta+1)^2 t_i}$$

em que todas as derivadas são avaliadas em  $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$  e  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$ . Podemos observar que nesse esquema de perturbação, a matriz  $\Delta$  não depende do vetor  $\boldsymbol{\omega}$ .

O vetor  $d_{max}$  é então obtido e um gráfico de  $|d_{max}|$  versus a ordem das observações pode revelar quais são os casos que exercem mais influência sobre as estimativas dos parâmetros. E os cálculos datalhados das curvaturas estão presentes no Apêndice.

### Perturbação na variável resposta

Considere um esquema de perturbação aditivo na variável resposta onde  $t_i(\omega) = t_i + \omega_i s(t_i)$ , em que  $s(t_i)$  é um fator de escala utilizado com o intuito de padronizar os componentes de  $\omega$  e pode ser estimado pelo desvio padrão de  $T_i$  e  $\omega_i \in \mathbb{R}$ . O logaritmo da função de verossimilhança perturbada assume a forma

$$\ell(\theta|\omega) = \sum_{i=1}^n \ell_i(t_i + \omega_i s(t_i); \mu_i, \delta),$$

em que  $\ell_i(t_i + \omega_i s(t_i); \mu_i, \delta) = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \log(\delta + 1) - \frac{1}{2} \log(16\pi) - \frac{1}{2} \log(\mu_i) - \frac{3}{2} \log(t_i + \omega_i s(t_i)) + \log(\delta[t_i + \omega_i s(t_i)] + [t_i + \omega_i s(t_i)] + \delta\mu_i) - \frac{[t_i + \omega_i s(t_i)](\delta+1)}{4\mu_i} - \frac{\delta^2 \mu_i}{4[t_i + \omega_i s(t_i)](\delta+1)}$ ,  $\omega_0 = (0, \dots, 0)^\top$  e a matriz  $\Delta$  assume a mesma forma dada em (3.17), em que

$$\Delta_\beta = \mathbf{X}^\top \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\} \text{diag}\{\psi_1, \dots, \psi_n\},$$

com  $a_i$  dado em (3.18) e

$$\psi_i = s(t_i) \left\{ -\frac{\delta(\delta+1)}{(\delta[t_i + \omega_i s(t_i)] + [t_i + \omega_i s(t_i)] + \delta\mu_i)^2} + \frac{(\delta+1)}{4\mu_i^2} + \frac{\delta^2}{4(\delta+1)[t_i + \omega_i s(t_i)]^2} \right\}. \quad (3.19)$$

Além disso,  $\Delta_\delta = (\tau_1, \dots, \tau_n)^\top$  com

$$\tau_i = s(t_i) \left\{ -\frac{\mu_i}{(\delta[t_i + \omega_i s(t_i)] + [t_i + \omega_i s(t_i)] + \delta\mu_i)^2} - \frac{1}{4\mu_i} + \frac{\delta(\delta+2)}{4[t_i + \omega_i s(t_i)]^2(\delta+1)^2} \right\}, \quad (3.20)$$

em que todas as derivadas são avaliadas em  $\theta = \hat{\theta}$  e  $\omega = \omega_0$ .

### Perturbação no parâmetro de precisão

Agora considere um esquema de perturbação na precisão do modelo definido em (3.2) onde  $\delta_i(\omega) = \frac{\delta}{\omega_i}$ . O logaritmo da função de máxima verossimilhança perturbada assume a forma

$$\ell(\theta|\omega) = \sum_{i=1}^n \ell_i(t_i; \mu_i, \frac{\delta_i}{\omega_i}), \quad \omega \neq 0$$

em que

$$\begin{aligned} \ell_i(t_i; \mu_i, \frac{\delta_i}{\omega_i}) &= \frac{\delta}{2\omega_i} + \frac{\log(\delta + \omega_i)}{2} - \frac{\log(\omega_i)}{2} - \frac{\log(16\pi)}{2} - \frac{\log(\mu_i)}{2} \\ &\quad - \frac{3\log(t_i)}{2} + \log(\delta t_i + t_i \omega_i + \delta \mu_i) - \log(\delta + \omega_i) \\ &\quad - \frac{t_i(\delta + \omega_i)}{4\mu_i \omega_i} - \frac{\delta^2 \mu_i}{4t_i(\delta + \omega_i)}. \end{aligned}$$

Neste caso  $\boldsymbol{\omega}_0 = (1, \dots, 1)^\top$  e a matriz  $\boldsymbol{\Delta}$  assume a mesma forma dada em (3.17), em que

$$\boldsymbol{\Delta}_\beta = \mathbf{X}^\top \text{diag}\{a_1, \dots, a_n\} \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_n\},$$

com  $a_i$  dado em (3.18) e

$$\xi_i = -\frac{\delta t_i}{(\delta t_i + t_i \omega_i + \delta \mu_i)^2} - \frac{\delta t_i}{4\omega_i^2 \mu_i^2} + \frac{\delta^2(\delta + 2\omega_i)}{4t_i \omega_i^2 (\delta + \omega_i)^2}.$$

Além disso,  $\boldsymbol{\Delta}_\delta = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top$  com

$$\varphi_i = -\frac{1}{2\omega_i^2} - \frac{1}{2(\delta + \omega_i)^2} - \frac{t_i(t_i + \mu_i)}{(\delta t_i + t_i \omega_i + \delta \mu_i)} + \frac{1}{(\delta + \omega_i)^2} + \frac{t_i}{4\mu_i \omega_i^2} + \frac{\mu_i \delta (\delta^2 + 3\delta \omega_i + 4\omega_i^2)}{4t_i \omega_i^2 (\delta + \omega_i)^3},$$

em que todas as derivadas são avaliadas em  $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$  e  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0$ .

### Alavancagem generalizada

A ideia principal do conceito de ponto de alavanca é avaliar a influência de  $t_i$  sobre o próprio valor predito ( ver, Hoaglin e Welsch (1978), Cook e Weisberg (1982), Emerson, Hoaglin e Kempthorne (1984), St. Laurent e Cook (1992) e Wei, Hu e Fung (1998)). Uma forma de representar essa influência é através da derivada  $\partial \hat{t}_i / \partial t_i$  que no caso normal linear coincide com  $h_{ii}$ , em que  $h_{ii}$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal da matriz de projeção  $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top)^{-1}\mathbf{X}^\top$  e  $\mathbf{X}$  é a matriz modelo. Wei, Hu e Fung (1998) propuseram uma forma geral para  $\partial \hat{\mathbf{t}} / \partial \mathbf{t}$  quando  $\boldsymbol{\theta}$  é irrestrito e Paula (1993, 1995 e 1999b) propôs quando  $\boldsymbol{\theta}$  é restrito em desigualdades lineares. A matriz de alavanca generalizada para  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , estimador de máxima verossimilhança de  $\boldsymbol{\theta}$ , tal que  $\mathbb{E}(t) = \mu = \mu(\boldsymbol{\theta})$ , tem a forma

$$\mathbf{GL}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \{\mathbf{D}_\theta(-\ddot{\mathbf{L}}_{\theta\theta})^{-1}\ddot{\mathbf{L}}_{\theta\mathbf{t}}\}_{|\hat{\boldsymbol{\theta}}}, \quad (3.21)$$

em que  $\mathbf{D}_\theta = \partial \boldsymbol{\mu} / \partial \boldsymbol{\theta}^\top$ ,  $\ddot{\mathbf{L}}_{\theta\theta} = \partial^2 L(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^\top$  e  $\ddot{\mathbf{L}}_{\theta\mathbf{t}} = \partial^2 L(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \mathbf{t}^\top$ . A expressão (3.21) baseiam-se na mesma ideia da matriz de alavanca Jacobiana ("Jacobian leverage") proposta por St. Laurent e Cook (1992) para modelos normais não-lineares.

Sendo  $\mathbf{D}_\theta = (\mathbf{D}(\mathbf{a})\mathbf{X}, \mathbf{0})$  e com

$$\ddot{\mathbf{L}}_{\beta t} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{D}(\mathbf{v}) \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{L}}_{\delta t} = \boldsymbol{\kappa}^\top,$$

em que  $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \text{diag}\{v_1, \dots, v_n\}$ , com

$$v_i = -\frac{\delta(\delta+1)}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)^2} + \frac{(\delta+1)}{4\mu_i^2} + \frac{\delta^2}{4(\delta+1)t_i^2}$$

e  $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ , com

$$\kappa_i = -\frac{\mu_i}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)^2} + \frac{1}{4\mu_i^2} + \frac{\delta(\delta+2)\mu_i}{4(\delta+1)^2 t_i^2}.$$

Logo, a expressão (3.21) da matriz de alavanca generalizada possui a forma

$$\mathbf{GL}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{GL}_\beta(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{\mathbf{D}(\mathbf{a})\mathbf{X}(\mathbf{X}\mathbf{D}(\mathbf{c})\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a})\mathbf{m}}{\mathbf{E}} \left\{ \mathbf{m}^\top \mathbf{GL}_\beta(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{\kappa}^\top \right\} \quad (3.22)$$

em que  $\mathbf{D}(\mathbf{c}) = \text{diag}\{c_1, \dots, c_n\}$ ,  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)^\top$  e  $\mathbf{E} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{d})) - \mathbf{m}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a})\mathbf{X}\mathbf{A}$  estão definidos na seção 3.1. Temos ainda que

$$\mathbf{GL}_\beta(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{D}(\mathbf{a})\mathbf{X}(\mathbf{X}\mathbf{D}(\mathbf{c})\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a})\mathbf{D}(\mathbf{v})$$

#### 4.1 Dados de vida de fadiga

Seja o conjunto de dados não censurados de fadiga biaxial apresentado por Brown e Miller (1978) e analisado posteriormente por Rieck e Nedelman (1991) sobre um estudo do tempo de vida de uma parte de metal. A variável resposta é o número de ciclos até a ocorrência da falha ( $N$ ) e a variável explicativa é o trabalho por ciclo expressado por  $(M_j/m^3)$  ( $W$ ). O conjunto de dados contém 46 observações e está apresentado na Tabela 4.1.

Deseja-se modelar o número de ciclos até a ocorrência da falha do pedaço de metal. Inicialmente, é feita uma análise descritiva das variáveis envolvidas neste problema. Na Tabela 4.2 encontram-se os resultados de algumas medidas resumo. Nota-se que a variável resposta,  $N$ , assume valores entre 125 à 5046. Já a variável explicativa,  $W$ , assume valores entre 11,50 à 100,50.

Na Figura 4.1(a), tem-se o histograma da variável resposta. Este gráfico mostra que a variável resposta possui um comportamento assimétrico e que a maior parte das observações se encontram no intervalo que vai de 0 a 1000. Este comportamento também é observado na Figura 4.1(b) onde temos o boxplot da variável resposta. Adicionalmente, nota-se neste gráfico a presença de quatro valores extremos a saber: casos, #1, #2, #4 e #6. Visto a natureza do comportamento da variável resposta, propomos para este

Tabela 4.1: dados de fadiga de biaxial de Brown e Miller (1978).

| M  | $W$  | $N$  | M  | $W$  | $N$  | M  | $W$  | $N$ | M  | $W$   | $N$ |
|----|------|------|----|------|------|----|------|-----|----|-------|-----|
| 1  | 11,5 | 3280 | 13 | 24,0 | 804  | 25 | 40,1 | 750 | 36 | 60,3  | 283 |
| 2  | 13,0 | 5046 | 14 | 24,6 | 1093 | 26 | 40,1 | 316 | 37 | 60,5  | 212 |
| 3  | 14,3 | 1563 | 15 | 25,2 | 1125 | 27 | 43,0 | 456 | 38 | 62,1  | 327 |
| 4  | 15,6 | 4707 | 16 | 25,5 | 884  | 28 | 44,1 | 552 | 39 | 62,8  | 373 |
| 5  | 16,0 | 977  | 17 | 26,3 | 1300 | 29 | 46,5 | 355 | 40 | 66,5  | 125 |
| 6  | 17,3 | 2834 | 18 | 27,9 | 852  | 30 | 47,3 | 242 | 41 | 67,0  | 187 |
| 7  | 19,3 | 2266 | 19 | 28,3 | 580  | 31 | 48,7 | 190 | 42 | 67,1  | 135 |
| 8  | 21,1 | 2208 | 20 | 28,4 | 1066 | 32 | 52,9 | 127 | 43 | 67,9  | 245 |
| 9  | 21,5 | 1040 | 21 | 28,6 | 1114 | 33 | 56,9 | 185 | 44 | 68,8  | 137 |
| 10 | 22,6 | 700  | 22 | 30,9 | 386  | 34 | 59,9 | 255 | 45 | 75,4  | 200 |
| 11 | 22,6 | 1583 | 23 | 31,9 | 745  | 35 | 60,2 | 195 | 46 | 100,5 | 190 |
| 12 | 24,0 | 482  | 24 | 34,5 | 736  |    |      |     |    |       |     |

Tabela 4.2: medidas resumo das variáveis  $N$  e  $W$ .

| Medida        | $N$     | $W$    |
|---------------|---------|--------|
| Mínimo        | 125,00  | 11,50  |
| $Q_1$         | 242,75  | 24,00  |
| Média         | 943,65  | 40,29  |
| Mediana       | 566,00  | 33,20  |
| $Q_3$         | 1086,25 | 60,12  |
| Máximo        | 5046,00 | 100,50 |
| Desvio Padrão | 1111,26 | 20,92  |

conjunto de dados um modelo de regressão Birnbaum-Saunders onde  $N_i \sim \mathcal{BS}(\delta, \mu_i)$ , para  $i = 1, \dots, 46$ , são variáveis aleatórias independentes, tais que

$$\log(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 \log(W_i), \quad i = 1, 2, \dots, 46, \quad (4.1)$$

Para a estimação dos parâmetros do modelo utilizou-se o método de máxima verossimilhança. O logaritmo da função de verossimilhança é maximizado através do método BFGS da função `optim` do R com derivadas analíticas e utilizou-se como chute inicial para os  $\beta$ 's as estimativas de mínimos quadrados com uma variável resposta modificada (ver Ferrari e Cribari-Neto, 2004) e para o parâmetros  $\delta$  usamos o estimador de momentos  $\tilde{\delta}$  como chute inicial. A estimativa de máxima verossimilhança de  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \delta)^\top =$

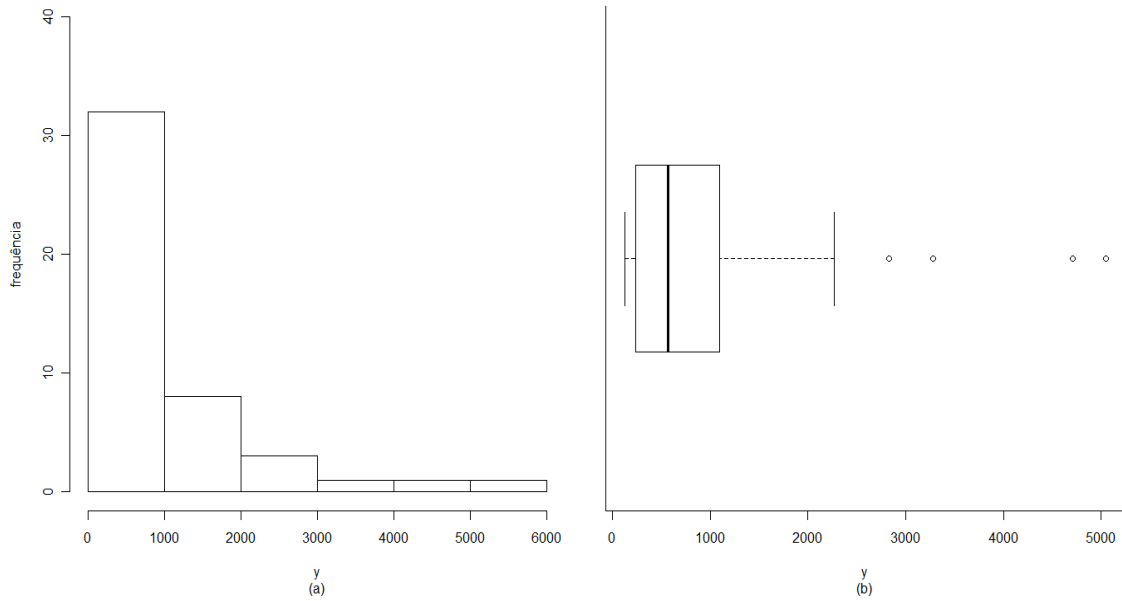


Figura 4.1: histograma de frequência e box-plot para o número de ciclos até a ocorrência da falha do pedaço de metal.

$(\beta_0, \beta_1, \delta)^\top$  e os respectivos valores dos erros-padrão (em parênteses) são

$$\hat{\beta}_0 = 12,360 (0,391) \quad \hat{\beta}_1 = -1,671 (0,109) \quad \text{e} \quad \hat{\delta} = 11,816 (2,464).$$

Na Figura 4.2 é apresentado o gráfico de dispersão com a reta ajustada sobreposta mostrando indícios que a reta está bem ajustada. Na Figura 4.3(a)-(c) são apresentados os gráficos dos resíduos  $r_i$ ,  $r_i^p$  e  $r_i^*$  contra os valores ajustados, respectivamente. Em particular na Figura 4.3(a) nota-se que o resíduo  $r_i$  não apresenta nenhum comportamento sistemático, porém a observação # 4 apresentou um valor pouco elevado. Já na Figura 4.3(b) é possível notar que apesar do resíduo,  $r_i^p$  não apresentar nenhum comportamento sistemático, esta figura apresenta três observações com valores um pouco elevados. Na Figura 4.3(c) nenhum comportamento sistemático e nem observações atípicas do resíduo  $r_i^*$ . Na Figura 4.4 são apresentados os gráficos normais de probabilidade para os resíduos  $r_i$ ,  $r_i^p$  e  $r_i^*$  com envelope simulado. Nota-se que não existe indícios de afastamento da suposição de que os erros têm distribuição  $\mathcal{BS}$ . O gráfico de pontos de alavancagem generalizada é apresentado na Figura 4.5 com o objetivo de se verificar a existência de alta alavancagem. Esta Figura destaca as observações #1, #3 e #5 como de alta alavancagem, indicando que para valores de  $\mathbf{X}$  baixos temos uma menor precisão na sua previsão.

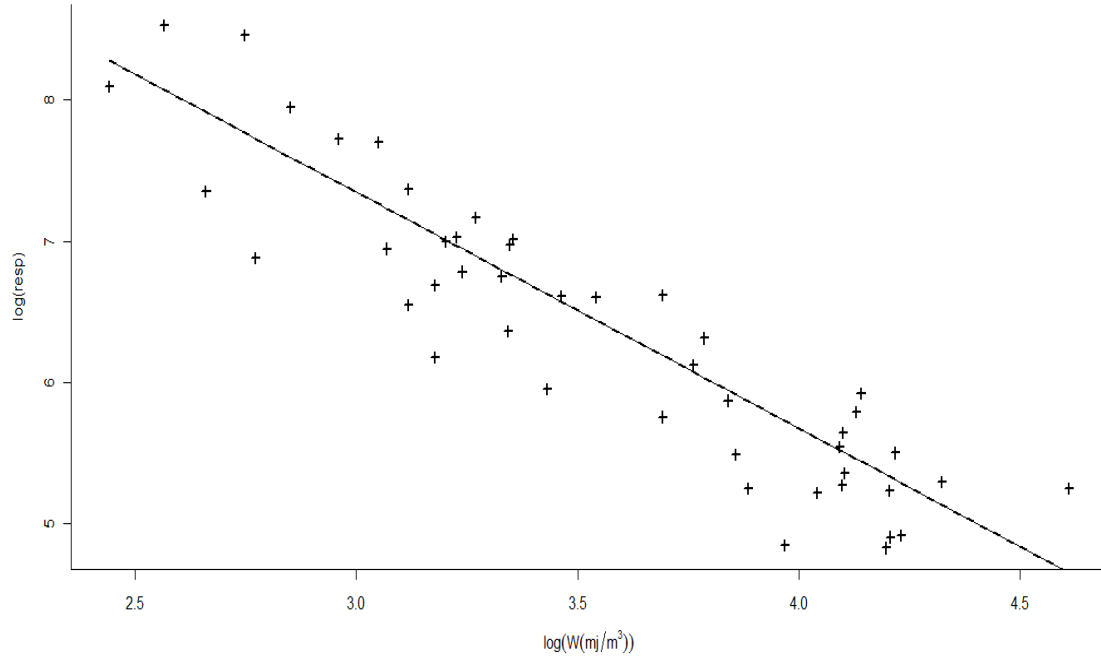


Figura 4.2: gráfico de dispersão para o logaritmo do conjunto de dados de fadiga.

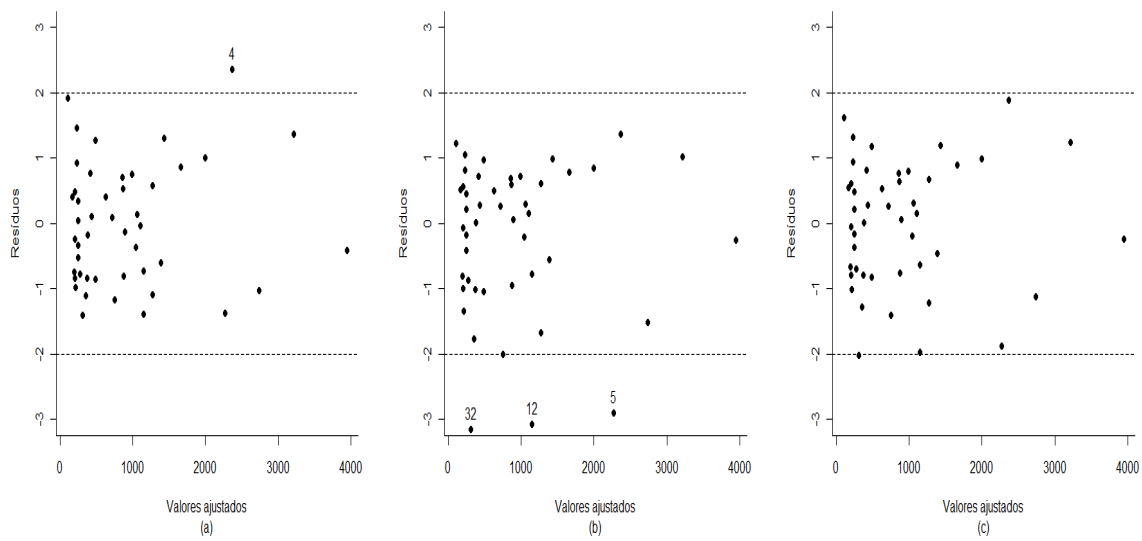


Figura 4.3: gráficos dos resíduos  $r_i$  (a),  $r_i^p$  (b) e  $r_i^*$  (c) contra os valores ajustados.

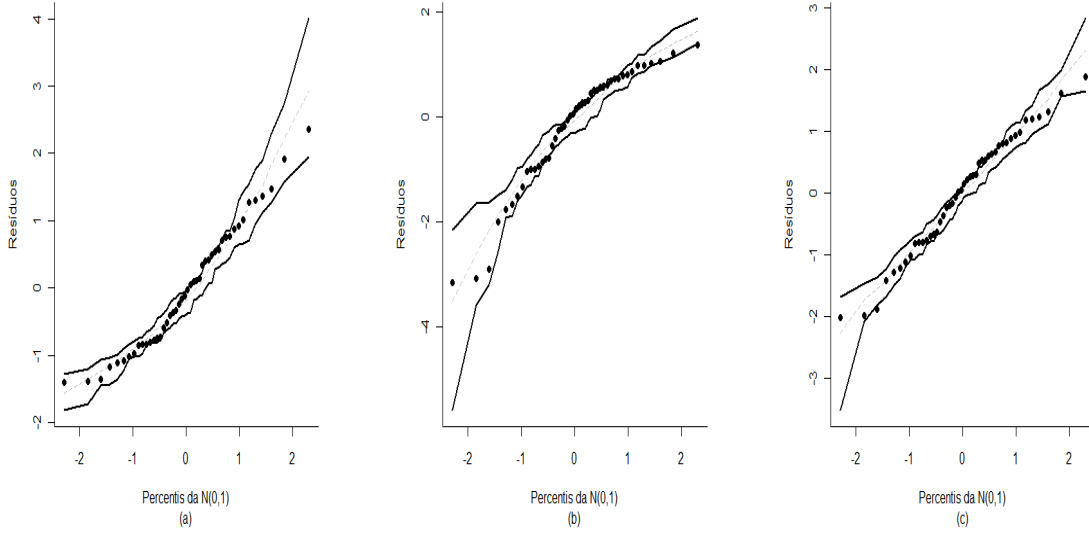


Figura 4.4: gráficos de probabilidade normais para os resíduos  $r_i$  (a),  $r_i^p$  (b) e  $r_i^*$  (c) com envelope.

Nas Figuras 4.6 e 4.7, é mostrado os gráficos de  $|d_{max}|$  contra o índice das observações para  $\theta$ ,  $\beta$  e  $\delta$  sob o esquema de ponderação de casos. Pode-se notar que as observações # 4, #5, #12, # 32 e # 46 destacam-se como influentes em todos os casos. As observações # 2, # 3, # 4, # 5, # 12, # 32 e # 46 se destacam como potencialmente influentes para  $\beta$  e  $\theta$ , enquanto que para  $\delta$ , as observações # 4, # 5, # 12, # 32 e # 46 é que se mostram como potencialmente influentes. Também foram construídos os gráficos de influência local  $C_i$ , apresentados nas Figuras 4.8 e 4.9, contra os índices das observações considerando como parâmetros de interesse  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\delta}$ . Através dos gráficos de influência local,  $C_i$ , conclui-se que as observações # 2, # 3, # 4, # 5, # 12, # 32 e # 46 exercem uma influência relevante.

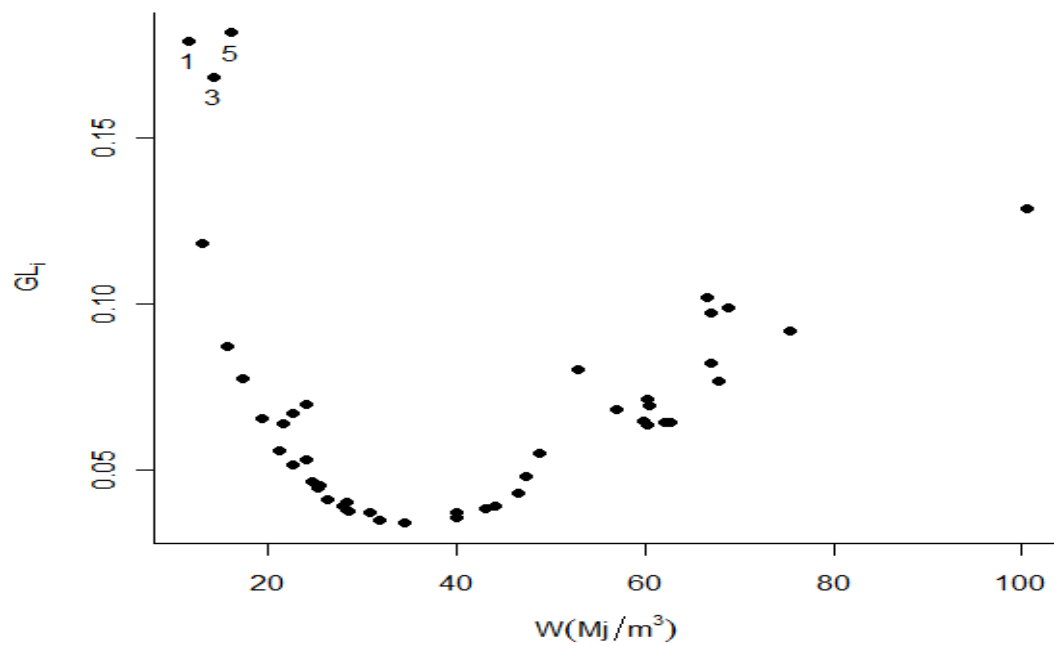
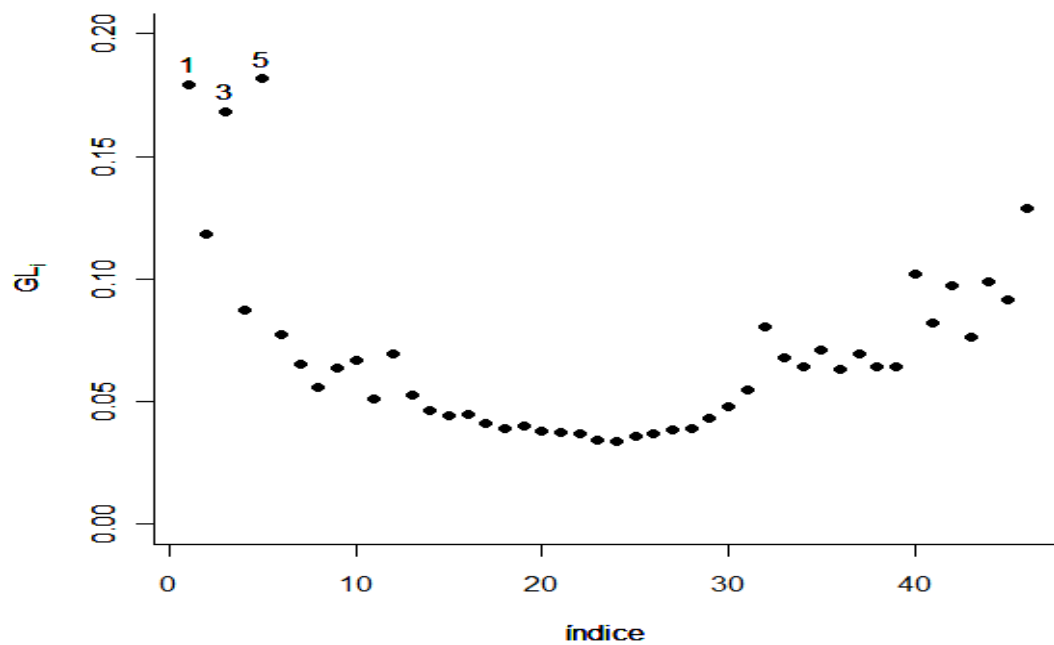


Figura 4.5: gráfico de alavanca generalizada.

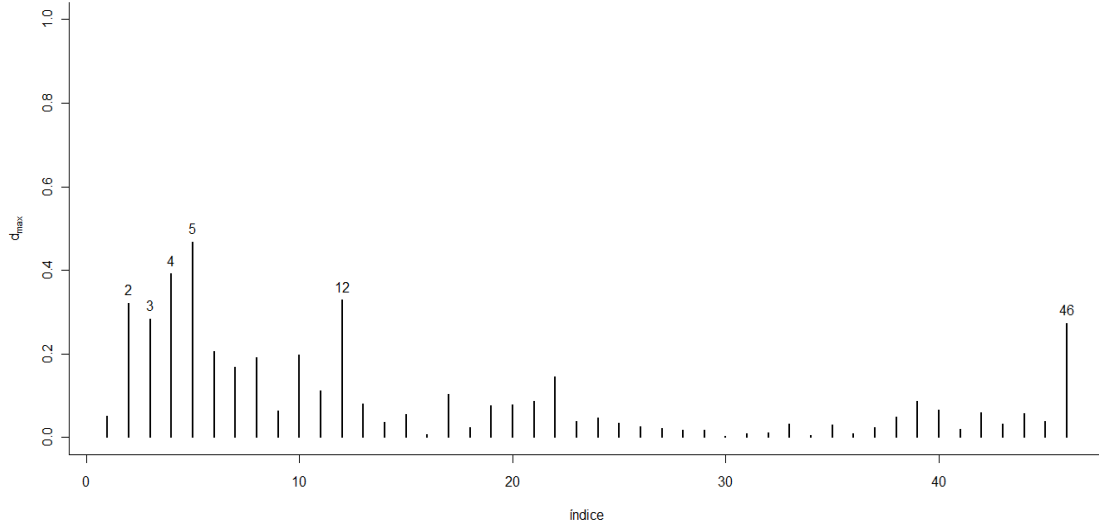


Figura 4.6: gráfico do  $|d_{max}|$  contra o índice das observações sob o esquema de ponderação de casos para  $\theta$ .

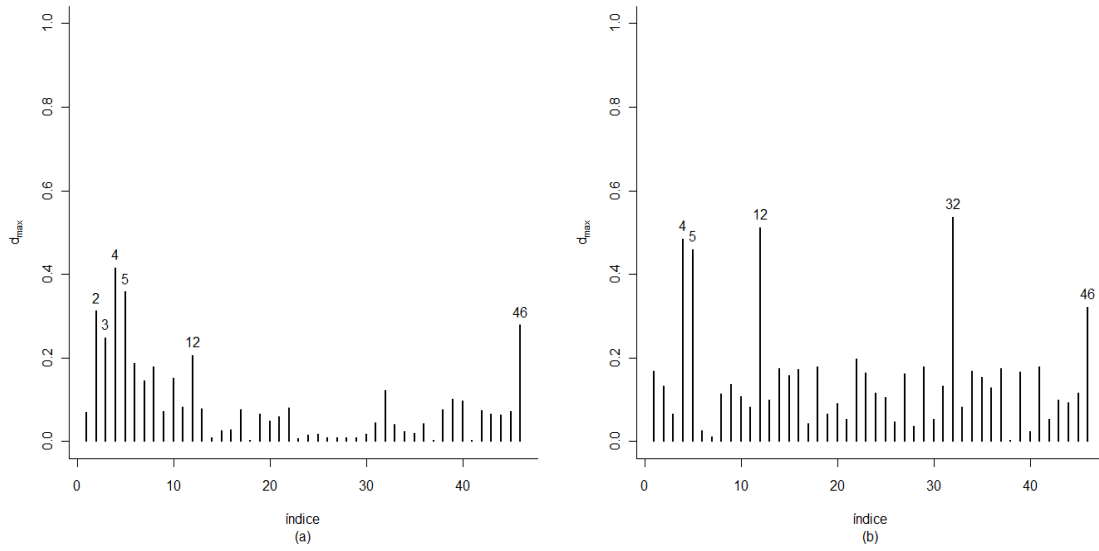


Figura 4.7: gráfico do  $|d_{max}|$  contra o índice das observações sob o esquema de ponderação de casos: (a) para  $\beta$  e (b) para  $\delta$ .

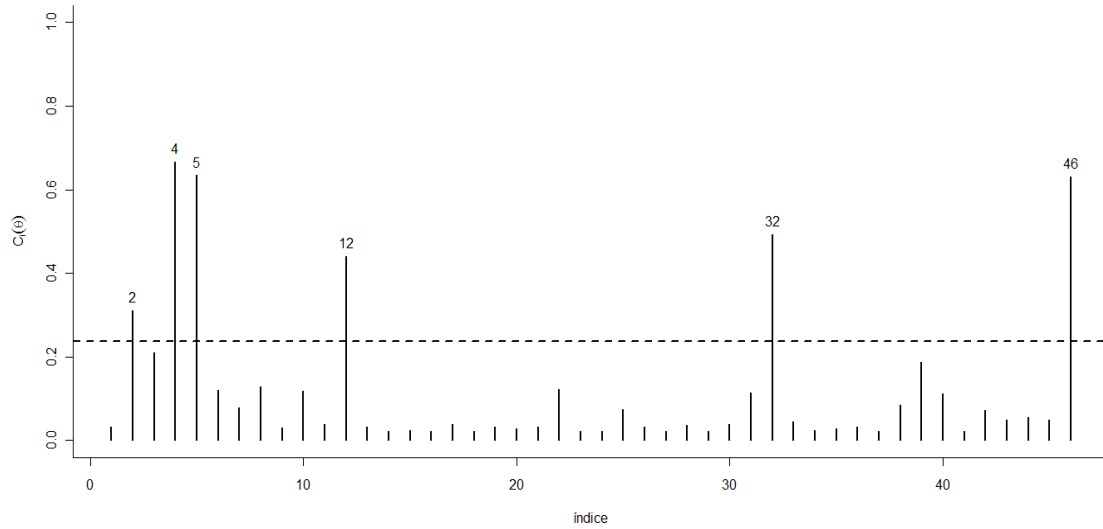


Figura 4.8: gráficos de  $C_i(\theta)$  contra o índice da observações sob o esquema de ponderação de casos.

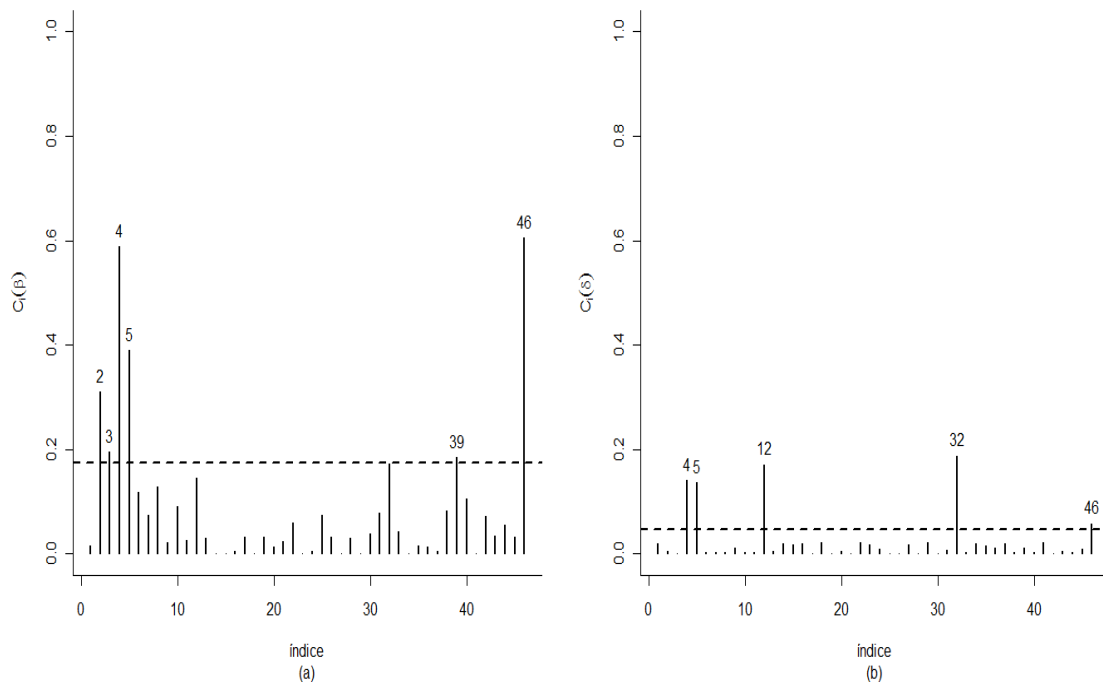


Figura 4.9: gráficos de  $C_i(\beta)$  (a) e  $C_i(\delta)$  (b) contra o índice da observações sob o esquema de ponderação de casos.

Na Tabela 4.3, encontram-se as estimativas dos parâmetros do modelo quando retiramos individualmente cada observação considerada como influente. Também foram calculadas as mudanças relativas de cada estimativa, definida por:  $RC_j = (\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_{j(i)})/\hat{\beta}_j$ , para  $j = 0, 1$  e  $i = 1, \dots, 46$ , em que  $\hat{\beta}_{j(i)}$  denota o estimador de máxima verossimilhança para  $\beta_j$  quando a  $i$ -ésima observação é excluída. As chances relativas para  $\beta_0$  e  $\beta_1$  são também apresentadas na Tabela 4.3. Observa-se que não há mudança inferencial para nenhum dos coeficientes.

Tabela 4.3: mudança relativa em  $\beta$  para os casos indicados.

| Observações<br>excluídas | $\beta_0$       |         |         | $\beta_1$       |        |         |
|--------------------------|-----------------|---------|---------|-----------------|--------|---------|
|                          | $\hat{\beta}_0$ | RC      | p-valor | $\hat{\beta}_1$ | RC     | p-valor |
| Nenhum                   | 12,3605         | 0,0000  | 0,0000  | -1,6706         | 0,0000 | 0,0000  |
| 2                        | 12,2016         | -0,0130 | 0,0000  | -1,6297         | 0,0190 | 0,0000  |
| 3                        | 12,4856         | 0,0100  | 0,0000  | -1,7030         | 0,0190 | 0,0000  |
| 4                        | 12,1602         | 0,0160  | 0,0000  | -1,6208         | 0,0300 | 0,0000  |
| 5                        | 12,5431         | 0,0150  | 0,0000  | -1,7183         | 0,0290 | 0,0000  |
| 12                       | 12,4545         | 0,0080  | 0,0000  | -1,6934         | 0,0140 | 0,0000  |
| 46                       | 12,5473         | 0,0150  | 0,0000  | -1,7289         | 0,0350 | 0,0000  |

## CAPÍTULO 5

---

### Conclusões e trabalhos futuros

---

Neste trabalho foram estudadas algumas reparametrizações da distribuição Birnbaum-Saunders e as propriedades empíricas dos estimadores de máxima verossimilhança e de momentos para cada uma. Foram propostos quatro tipos de resíduos e estudados três, cuja distribuição empírica apresentou semelhanças com a distribuição normal padrão. Além disso, foram apresentados alguns aspectos da análise de diagnóstico, cuja as curvaturas normais da influência local foram derivadas através da medida de afastamento pela verossimilhança para três esquemas de perturbação, sendo ele ponderação de casos, perturbação na variável resposta e perturbação na escala. Para ilustrar a metodologia utilizada neste trabalho, fez-se uso de dados reais oriundos de fadiga de material.

Foi possível observar que o MRBS apresentou ajuste similar a estudos realizados anteriormente, como por exemplo Rieck e Nedelman (1991) e Galea, Paula e Leiva (2004). Porém o MRBS apresentou estimativas dos erros padrão menores. Outro aspecto importante a se ressaltar é que, a partir da reparametrização que resulta na  $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$  foi possível contruir um novo modelo de regressão que modela diretamente a média da variável resposta. Isso é importante afinal em estudos de regressão quase sempre estamos interessados em modelar a média da variável resposta. Esta característica não é observada nos modelos existente baseados na distribuição Birnbaum-Saunders.

Como possíveis trabalhos a serem desenvolvidos futuramente, inicialmente seria a construção de um pacote para o software R a partir dos resultados teóricos obtidos neste

trabalho. Pretende-se ainda dar continuidade aos estudos com censura e os estudo para regressão não-linear proposto por Lemonte e Cordeiro (2009). Outro ponto importante que pode ser abordado futuramente é a proposta de novos resíduos que sejam mais simétricos. Posteriormente poderão ser propostas soluções para o problema apresentado pelo resíduo baseado na função desvio.

## Propriedades

### Reparametrização 1

i) Seja  $a > 0$  e  $Y = aT$ , então  $T = Y/a$ . Então, se

$$F(t; \alpha, \mu) = \mathbb{P}(T \leq t) = \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{(2 + \alpha^2)t}{2\mu}} - \sqrt{\frac{2\mu}{(2 + \alpha^2)t}} \right) \right], t > 0$$

obtêm-se

$$F\left(\frac{y}{a}; \alpha, \mu\right) = \mathbb{P}(T \leq \frac{y}{a}) = \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{y(2 + \alpha^2)}{2a\mu}} - \sqrt{\frac{2a\mu}{y(2 + \alpha^2)}} \right) \right], \quad y > 0.$$

Então,  $Y \sim \mathcal{BS}(\alpha, a\mu)$ , comprovando que a distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  satisfaz a propriedade de escala.

ii) E seja  $Y = T^{-1}$ . Então  $T = Y^{-1}$ . Assim,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{x}; \alpha, \mu\right) = \mathbb{P}(T \leq \frac{1}{x}) &= \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{2x\mu}{(2 + \alpha^2)}} - \sqrt{\frac{(2 + \alpha^2)}{2x\mu}} \right) \right] \\ &= \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x}{1/\beta^*}} - \sqrt{\frac{1/\beta^*}{x}} \right) \right], \quad x > 0 \end{aligned}$$

em que  $\beta^* = \frac{2\mu}{(2 + \alpha^2)}$ . Nota-se então que  $\frac{1}{T} \sim \mathcal{BS}(\alpha, \frac{(2 + \alpha^2)}{2\mu})$ . Logo a distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  satisfaz a propriedade recíproca.

## Reparametrização 2

i) Seja  $a > 0$  e  $Y = aT$ , então  $T = Y/a$ . Dado que

$$F(t; \phi, \mu) = \mathbb{P}(T \leq t) = \Phi \left[ \frac{1}{\sqrt{2(\phi - 1)}} \left( \sqrt{\frac{\phi t}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\phi t}} \right) \right], \quad t > 0$$

obtêm-se

$$F\left(\frac{y}{a}; \phi, \mu\right) = \mathbb{P}(T \leq \frac{y}{a}) = \Phi \left[ \frac{1}{\sqrt{2(\phi - 1)}} \left( \sqrt{\frac{y\phi}{a\mu}} - \sqrt{\frac{a\mu}{y\phi}} \right) \right], \quad y > 0.$$

Logo, a variável  $Y$  possui distribuição  $\mathcal{BS}(\phi, a\mu)$ . Sendo assim, a distribuição  $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$  satisfaz a propriedade de escala.

ii) E seja  $Y = T^{-1}$ . Então  $T = Y^{-1}$ . Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{x}; \phi, \mu\right) = \mathbb{P}(T \leq \frac{1}{x}) &= \Phi \left[ \frac{1}{\sqrt{2(\phi - 1)}} \left( \sqrt{\frac{x\mu}{\phi}} - \sqrt{\frac{\phi}{x\mu}} \right) \right] \\ &= \Phi \left[ \frac{1}{\sqrt{2(\phi - 1)}} \left( \sqrt{\frac{x}{1/\beta^*}} - \sqrt{\frac{1/\beta^*}{x}} \right) \right], \quad x > 0 \end{aligned}$$

em que  $\beta^* = \frac{\mu}{\phi}$ . Nota-se então que  $\frac{1}{T} \sim \mathcal{BS}(\frac{1}{\sqrt{2(\phi-1)}}, \frac{\phi}{\mu})$ . Logo a distribuição  $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$  satisfaz a propriedade recíproca.

## Reparametrização 3

i) Seja  $a > 0$  e  $Y = aT$ , então  $T = Y/a$ . Então, se

$$F(t; \alpha, \sigma) = \mathbb{P}(T \leq t) = \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}t}{2\sqrt{\sigma}}} - \sqrt{\frac{2\sqrt{\sigma}}{\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}t}} \right) \right], \quad t > 0$$

logo a fda de  $Y$ , possui a forma

$$F\left(\frac{y}{a}; \alpha, \sigma\right) = \mathbb{P}(T \leq \frac{y}{a}) = \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{y\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}}{2\sqrt{a^2\sigma}}} - \sqrt{\frac{2\sqrt{a^2\sigma}}{y\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}}} \right) \right], \quad y > 0.$$

Pode-se ver que a distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$  não possui a propriedade de escala. No entanto a distribuição da variável  $Y$  segue uma  $\mathcal{BS}(\alpha, a^2\sigma)$ .

ii) E seja  $Y = T^{-1}$ . Então  $T = Y^{-1}$ . Desta forma a fda de  $X$  possui a forma

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{x}; \alpha, \sigma\right) = \mathbb{P}(T \leq \frac{1}{x}) &= \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{2x\sqrt{\sigma}}{\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}}} - \sqrt{\frac{\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}}{2x\sqrt{\sigma}}} \right) \right], \\ &= \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x}{1/\beta^*}} - \sqrt{\frac{1/\beta^*}{x}} \right) \right], \quad x > 0. \end{aligned}$$

em que  $\beta^* = \frac{2\sqrt{\sigma}}{\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}}$ . Nota-se então que  $\frac{1}{T} \sim \mathcal{BS}(\alpha, \frac{\alpha\sqrt{4+5\alpha^2}}{2\sqrt{\sigma}})$ . Logo a distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$  satisfaz a propriedade recíproca.

#### Reparametrização 4

i) Seja  $a > 0$  e  $Y = aT$ , então  $T = Y/a$ . Então, se

$$F(t; \gamma, \sigma) = \mathbb{P}(T \leq t) = \Phi \left[ \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\gamma-1}} \left( \sqrt{\frac{2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}t}{\sqrt{5\sigma}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5\sigma}}{2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}t}} \right) \right], \quad t > 0.$$

Logo a fda de  $Y$  possui a forma

$$F\left(\frac{y}{a}; \gamma, \sigma\right) = \mathbb{P}(T \leq \frac{y}{a}) = \Phi \left[ \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\gamma-1}} \left( \sqrt{\frac{2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}y}{\sqrt{5a^2\sigma}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5a^2\sigma}}{2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}y}} \right) \right], \quad y > 0.$$

Pode-se ver que a distribuição  $\mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$  não possui a propriedade de escala. No entanto a distribuição da variável  $Y$  segue uma  $\mathcal{BS}(\alpha, a^2\sigma)$ .

ii) E seja  $Y = T^{-1}$ . Então  $T = Y^{-1}$ . Desta forma a fda de  $X$  possui a forma

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{x}; \gamma, \sigma\right) = \mathbb{P}(T \leq \frac{1}{x}) &= \Phi \left[ \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{\gamma-1}} \left( \sqrt{\frac{\sqrt{5\sigma}x}{2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}}} - \sqrt{\frac{2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}}{\sqrt{5\sigma}}x} \right) \right], \\ &= \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x}{1/\beta^*}} - \sqrt{\frac{1/\beta^*}{x}} \right) \right], \quad x > 0. \end{aligned}$$

em que  $\beta^* = \frac{\sqrt{5\sigma}}{2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}}$ . Nota-se então que  $\frac{1}{T} \sim \mathcal{BS}(\frac{2\sqrt{\gamma-1}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{\gamma(\gamma-1)}}{\sqrt{5\sigma}})$ . Logo a distribuição  $\mathcal{BS}(\gamma, \sigma)$  satisfaz a propriedade recíproca.

## Reparametrização 5

i) Seja  $a > 0$  e  $Y = aT$ , então  $T = Y/a$ . Então, se

$$F(t; \delta, \mu) = \mathbb{P}(T \leq t) = \Phi \left\{ \sqrt{\frac{\delta}{2}} \left[ \left( \frac{t(\delta+1)}{\delta\mu} \right)^{1/2} - \left( \frac{\delta\mu}{t(\delta+1)} \right)^{1/2} \right] \right\}, \quad t > 0,$$

então

$$F\left(\frac{y}{a}; \delta, \mu\right) = \mathbb{P}(T \leq \frac{y}{a}) = \Phi \left\{ \sqrt{\frac{\delta}{2}} \left[ \left( \frac{y(\delta+1)}{\delta a \mu} \right)^{1/2} - \left( \frac{\delta a \mu}{y(\delta+1)} \right)^{1/2} \right] \right\}, \quad y > 0,$$

Logo, a distribuição  $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$  pertence a família de escala.

ii) Agora seja  $X = T^{-1}$ . Então  $T = 1/X$ , por isso

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{x}; \delta, \mu\right) = \mathbb{P}(T \leq \frac{1}{x}) &= \Phi \left\{ \sqrt{\frac{\delta}{2}} \left[ \left( \frac{\delta\mu x}{(\delta+1)} \right)^{1/2} - \left( \frac{(\delta+1)}{\delta\mu x} \right)^{1/2} \right] \right\}, \\ &= \Phi \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{x}{1/\beta^*}} - \sqrt{\frac{1/\beta^*}{x}} \right) \right] \quad x > 0. \end{aligned}$$

Logo a distribuição  $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$  satisfaz a propriedade recíproca.

## Estimadores de Momentos

### Nova parametrização 1

Sabemos que a média a variância da  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  são dadas respectivamente, por

$$\mathbb{E}[T] = \mu \quad \text{e} \quad \mathbb{V}[T] = \frac{(\mu\alpha)^2(4 + 5\alpha^2)}{(2 + \alpha^2)^2}.$$

Pode-se mostrar que

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{V}[T] + \mathbb{E}^2[T].$$

Então para a  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  temos

$$\mathbb{E}[T^2] = \frac{(\mu\alpha)^2(4 + 5\alpha^2)}{(2 + \alpha^2)^2} + \mu^2.$$

Para obtermos os estimadores de momentos devemos solucionar as seguintes equações

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \bar{t} \\ (2) \frac{(\mu\alpha)^2(4+5\alpha^2)}{(2+\alpha^2)^2} + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

De 5.1 obtemos os estimador de momentos para  $\mu$ , denotado por  $\tilde{\mu} = \bar{t}$ . Sendo assim, temos que (2) passa a ter a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{t}\alpha)^2(4+5\alpha^2)}{(2+\alpha^2)^2} + \bar{t}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ \frac{(\bar{t}\alpha)^2(4+5\alpha^2)}{(2+\alpha^2)^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{t}^2 \\ \frac{(\bar{t}\alpha)^2(4+5\alpha^2)}{(2+\alpha^2)^2} &= \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}_{s^2} \\ \frac{\alpha^2(4+5\alpha^2)}{(2+\alpha^2)^2} &= \underbrace{\frac{s^2}{\bar{t}^2}}_{\kappa} \\ \alpha^2(4+5\alpha^2) &= \kappa(2+\alpha^2)^2 \\ 4\alpha^2 + 5\alpha^4 &= \kappa\{4 + 4\alpha^2 + \alpha^4\} \\ \underbrace{(5-\kappa)}_A \alpha^4 - \underbrace{(4\kappa-4)}_B \alpha^2 - \underbrace{4\kappa}_C &= 0 \\ A\alpha^4 + B\alpha^2 - C &= 0 \end{aligned}$$

O resultado que satisfaz a igualdade  $A\alpha^4 - B\alpha^2 - C = 0$  e o espaço parâmetro do parâmetros  $\alpha$  é

$$\tilde{\alpha} = \left[ \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A} \right]^{\frac{1}{2}},$$

em que  $A = (5 - \kappa) = (5 - \frac{s^2}{\bar{t}^2})$ ,  $B = (4\kappa - 4) = (4\frac{s^2}{\bar{t}^2} - 4)$  e  $C = 4\kappa = 4\frac{s^2}{\bar{t}^2}$ . No entanto, temos que  $\tilde{\alpha}$  poderá ser escrito da seguinte forma

$$\tilde{\alpha} = 2 \left[ \frac{s^2 - \bar{t}^2 + \sqrt{\bar{t}^4 + 3\bar{t}^2 s^2}}{(10\bar{t}^2 - 2s^2)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Os estimados de momentos para o parâmetros  $\alpha$ ,  $\tilde{\alpha}$ , estará bem definido apenas quando o coeficiente de variação amostral apresentar valor inferior a  $\sqrt{5}$ .

## Nova parametrização 2

Já foi mostrado que a média e a variância da  $\mathcal{BS}(\phi, \mu)$  são dadas respectivamente, por

$$\mathbb{E}[T] = \mu \quad \text{e} \quad \mathbb{V}[T] = \frac{\mu^2(\phi - 1)(5\phi - 3)}{\phi^2}.$$

É facil mostrar que

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{V}[T] + \mathbb{E}^2[T].$$

Logo para a  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  temos que

$$\mathbb{E}[T^2] = \frac{\mu^2(\phi - 1)(5\phi - 3)}{\phi^2} + \mu^2.$$

Os estimadores de momentos para os parâmetros  $\phi$  e  $\mu$ , são obtidos através das soluções das equações apresentadas abaixo

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \bar{t} \\ (2) \frac{\mu^2(\phi-1)(5\phi-3)}{\phi^2} + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{array} \right. \quad (5.2)$$

De (1) obtem-se o estimador de momentos para  $\mu$ , denotado por  $\tilde{\mu} = \bar{t}$ . Desta forma (2) passa a ter a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{t}^2(\phi - 1)(5\phi - 3)}{\phi^2} + \bar{t}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \\
\frac{\bar{t}^2(\phi - 1)(5\phi - 3)}{\phi^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{t}^2 \\
\frac{\bar{t}^2(\phi - 1)(5\phi - 3)}{\phi^2} &= \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}_{s^2} \\
\frac{(\phi - 1)(5\phi - 3)}{\phi^2} &= \underbrace{\frac{s^2}{\bar{t}^2}}_{\kappa} \\
(\phi - 1)(5\phi - 3) &= \kappa \phi^2 \\
5\phi^2 - 8\phi + 3 &= \kappa \phi^2 \\
\underbrace{(5 - \kappa)}_A \phi^2 - 8\phi + 3 &= 0 \\
A\phi^2 - 8\phi + 3 &= 0
\end{aligned}$$

O resultado que satisfaz a igualdade  $A\phi^2 - 8\phi + 3 = 0$  e o espaço parâmetro do parâmetros  $\phi$  é

$$\tilde{\phi} = \frac{4 + \sqrt{16 - 3A}}{A},$$

em que  $A = (5 - \kappa) = (5 - \frac{s^2}{\bar{t}^2})$ . Temos ainda que  $\tilde{\phi}$  pode ser expresso da seguinte forma

$$\frac{4\bar{t}^2 + \bar{t}\sqrt{\bar{t}^2 + 3s^2}}{(5\bar{t}^2 - s^2)}.$$

Temos ainda que este estimador estará bem definido quando o coeficiente de variação amostral apresentar valor inferior a  $\sqrt{5}$ .

### Nova parametrização 3

A  $\mathcal{BS}(\alpha, \sigma)$  possui como média e variância respectivamente, as seguintes expressões

$$\mathbb{E}[T] = \frac{(2 + \alpha^2)\sqrt{\sigma}}{\alpha(4 + 5\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{e} \quad \mathbb{V}[T] = \sigma.$$

Pode-se mostrar que

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{V}[T] + \mathbb{E}^2[T].$$

Assim a  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  apresenta como resultado

$$\mathbb{E}[T^2] = \sigma + \left[ \frac{(2 + \alpha^2)\sqrt{\sigma}}{\alpha(4 + 5\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^2.$$

Os estimadores de momentos para os parâmetros  $\alpha$  e  $\sigma$ , são obtidos através das soluções das equações apresentadas abaixo

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{(2+\alpha^2)\sqrt{\sigma}}{\alpha(4+5\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \bar{t} \\ (2) \sigma + \left[ \frac{(2+\alpha^2)\sqrt{\sigma}}{\alpha(4+5\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{(2+\alpha^2)\sqrt{\sigma}}{\alpha(4+5\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} = \bar{t} \\ (2) \sigma + \bar{t}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{array} \right. \quad (5.4)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{(2+\alpha^2)\sqrt{\sigma}}{\alpha(4+5\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} = \bar{t} \\ (2) \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{t}^2 \end{array} \right. \quad (5.5)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{(2+\alpha^2)\sqrt{\sigma}}{\alpha(4+5\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} = \bar{t} \\ (2) \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \end{array} \right. \quad (5.6)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{(2+\alpha^2)\sqrt{\sigma}}{\alpha(4+5\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} = \bar{t} \\ (2) \sigma = s^2 \end{array} \right. \quad (5.7)$$

De (1.7)-2 obtem-se o estimador de momentos para  $\sigma$ , denotado por  $\tilde{\sigma} = s^2$ . Desta forma (1) passa a ter a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
\frac{(2 + \alpha^2)\sqrt{s^2}}{\alpha(4 + 5\alpha^2)^{\frac{1}{2}}} &= \bar{t} \\
\frac{(2 + \alpha^2)^2 s^2}{\alpha^2(4 + 5\alpha^2)} &= \bar{t}^2 \\
(2 + \alpha^2)^2 \underbrace{\frac{s^2}{\bar{t}^2}}_{\kappa} &= \alpha^2(4 + 5\alpha^2) \\
\{4 + 4\alpha^2 + \alpha^4\} \kappa &= 4\alpha^2 + 5\alpha^4 \\
\underbrace{(5 - \kappa)}_A \alpha^4 + \underbrace{(4 - 4\kappa)}_B \alpha^2 - \underbrace{4\kappa}_C &= 0 \\
A\alpha^4 + B\alpha^2 - C &= 0
\end{aligned}$$

O resultado que satisfaz a igualdade  $A\alpha^4 + B\alpha^2 - C = 0$  e o espaço parâmetro do parâmetros  $\alpha$  é

$$\tilde{\alpha} = \left[ \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A} \right]^{\frac{1}{2}},$$

em que  $A = (5 - \kappa) = (5 - \frac{s^2}{\bar{t}^2})$ ,  $B = (4 - 4\kappa) = (4 - 4\frac{s^2}{\bar{t}^2})$  e  $C = 4\kappa = 4\frac{s^2}{\bar{t}^2}$ . Assim como na reparametrização 1, temos que o estimador de momentos para  $\alpha$  existirá quando  $cv < \sqrt{5}$ . E substituindo os respectivos valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$  obtemos a seguinte expressão

$$\tilde{\alpha} = 2 \left[ \frac{s^2 - \bar{t}^2 + \sqrt{\bar{t}^4 + 3\bar{t}^2 s^2}}{(10\bar{t}^2 - 2s^2)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

## Nova parametrização 4

NA  $\mathcal{BS}(\gamma, \sigma)$  temos que a média e a variância são respectivamente, dadas por

$$\mathbb{E}[T] = \frac{(2\gamma + 3)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{20\gamma(\gamma - 1)}} \quad \text{e} \quad \mathbb{V}[T] = \sigma.$$

Pode-se mostrar que

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{V}[T] + \mathbb{E}^2[T].$$

Assim a  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  apresenta como resultado

$$\mathbb{E}[T^2] = \sigma + \left[ \frac{(2\gamma+3)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{20\gamma(\gamma-1)}} \right]^2.$$

Os estimadores de momentos para os parâmetros  $\gamma$  e  $\sigma$ , são obtidos através das soluções das equações apresentadas abaixo

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{(2\gamma+3)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{20\gamma(\gamma-1)}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \bar{t} \\ (2) \sigma + \left[ \frac{(2\gamma+3)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{20\gamma(\gamma-1)}} \right]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{array} \right. \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{(2\gamma+3)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{20\gamma(\gamma-1)}} = \bar{t} \\ (2) \sigma + \bar{t}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{array} \right. \quad (5.9)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{(2\gamma+3)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{20\gamma(\gamma-1)}} = \bar{t} \\ (2) \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{t}^2 \end{array} \right. \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{(2\gamma+3)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{20\gamma(\gamma-1)}} = \bar{t} \\ (2) \sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \end{array} \right. \quad (5.11)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1) \frac{(2\gamma+3)\sqrt{\sigma}}{\sqrt{20\gamma(\gamma-1)}} = \bar{t} \\ (2) \sigma = s^2 \end{array} \right. \quad (5.12)$$

De (1.12)-2 obtem-se o estimador de momentos para  $\sigma$ , denotado por  $\tilde{\sigma} = s^2$ . Desta forma (1) passa a ter a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}
\frac{(2\gamma + 3)\sqrt{s^2}}{\sqrt{20\gamma(\gamma - 1)}} &= \bar{t} \\
\frac{(2\gamma + 3)^2 s^2}{20\gamma(\gamma - 1)} &= \bar{t}^2 \\
(2\gamma + 3)^2 \underbrace{\frac{s^2}{\bar{t}^2}}_{\kappa} &= 20\gamma(\gamma - 1) \\
\{4\gamma^2 + 12\gamma + 9\}\kappa &= 20\gamma^2 - 20\gamma \\
\underbrace{(20 - 4\kappa)}_A \gamma^2 - \underbrace{(20 + 12\kappa)}_B \gamma - \underbrace{9\kappa}_C &= 0 \\
A\gamma^2 - B\gamma - C &= 0
\end{aligned}$$

O resultado que satisfaz a igualdade  $A\gamma^2 - B\gamma - C = 0$  e o espaço parâmetro do parâmetros  $\gamma$  é

$$\tilde{\gamma} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A},$$

em que  $A = (20 - 4\kappa) = (20 - 4\frac{s^2}{\bar{t}^2})$ ,  $B = (20 + 12\kappa) = (20 + 12\frac{s^2}{\bar{t}^2})$  e  $C = 9\kappa = 9\frac{s^2}{\bar{t}^2}$ . Da mesma forma que para o estimador de momentos de  $\alpha$ , temos que o estimadores de momentos de  $\gamma$  existirá se  $cv < \sqrt{5}$ . Pode-se escrever o estimador  $\tilde{\gamma}$  da seguinte maneira

$$\frac{5\bar{t}^2 + 3s^2 + 5\sqrt{\bar{t}^4 + 3\bar{t}^2 s^2}}{(10\bar{t}^2 - 2s^2)}.$$

## Nova parametrização 5

Temos que a média e a variância da  $\mathcal{BS}(\delta, \mu)$  possuem respectivamente as seguintes expressões

$$\mathbb{E}[T] = \mu \quad \text{e} \quad \mathbb{V}[T] = \frac{\mu^2(2\delta + 5)}{(\delta + 1)^2}.$$

Facilmente mostra-se que

$$\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{V}[T] + \mathbb{E}^2[T].$$

Desta forma para a  $\mathcal{BS}(\alpha, \mu)$  temos o seguinte resultado

$$\mathbb{E}[T^2] = \frac{\mu^2(2\delta + 5)}{(\delta + 1)^2} + \mu^2.$$

Os estimadores de momentos para os parâmetros  $\delta$  e  $\mu$ , são obtidos através das soluções das equações apresentadas abaixo

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \bar{t} \\ (2) \frac{\mu^2(2+5\delta)}{(\delta+1)^2} + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \end{array} \right. \quad (5.13)$$

De (1) obtem-se o estimador de momentos para  $\mu$ , denotado por  $\tilde{\mu} = \bar{t}$ . Desta forma (2) passa a ter a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{\bar{t}^2(2\delta + 5)}{(\delta + 1)^2} + \bar{t}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ \frac{\bar{t}^2(2\delta + 5)}{(\delta + 1)^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{t}^2 \\ \frac{\bar{t}^2(2\delta + 5)}{(\delta + 1)^2} &= \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}_{s^2} \\ \frac{(2\delta + 5)}{(\delta + 1)^2} &= \underbrace{\frac{s^2}{\bar{t}^2}}_{\kappa} \\ (2\delta + 5) &= \kappa(\delta + 1)^2 \\ 2\delta + 5 &= \kappa\{\delta^2 + 2\delta + 1\} \\ \underbrace{(\kappa)}_A \delta^2 - \underbrace{(2 - 2\kappa)}_B \delta - \underbrace{(5 - \kappa)}_C &= 0 \\ A\delta^2 - B\delta - C &= 0 \end{aligned}$$

O resultado que satisfaz a igualdade  $A\delta^2 - B\delta - C = 0$  e o espaço parâmetro do parâmetros  $\delta$  é

$$\tilde{\delta} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A},$$

em que  $A = \kappa = \frac{s^2}{\bar{t}^2}$ ,  $B = (2 - 2\kappa) = (2 - 2\frac{s^2}{\bar{t}^2})$  e  $C = (5 - \kappa) = (5 - \frac{s^2}{\bar{t}^2})$ . Temos que esse valor será a única solução que satisfaça as condições do espaço paramétrico de  $\delta$  se o

coeficiente de variação amostral for inferior a  $\sqrt{5}$ . Temos ainda que este estimador poder ser expresso da seguinte forma

$$\tilde{\delta} = \frac{\bar{t}^2 - s^2 + \sqrt{\bar{t}^4 + 3\bar{t}^2 s^2}}{s^2}.$$

## Funções escore

A função escore para  $\beta_j (j = 1, \dots, p)$  é dada por

$$U_{\beta_j}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j},$$

em que

$$\frac{\partial \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i} = -\frac{1}{2\mu_i} + \frac{\delta}{(\delta t_i + t_i + \delta\mu)} + \frac{t_i(\delta + 1)}{4\mu_i^2} - \frac{\delta^2}{4t_i(\delta + 1)}, \quad (5.14)$$

e  $\frac{d\mu_i}{d\eta_i} = \frac{1}{g'(\mu_i)}$ ,  $\frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = x_{ij}$ . Assim,

$$U_{\beta_j}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{1}{2\mu_i} + \frac{\delta}{(\delta t_i + t_i + \delta\mu)} + \frac{t_i(\delta + 1)}{4\mu_i^2} - \frac{\delta^2}{4t_i(\delta + 1)} \right\} \frac{1}{g'(\mu_i)} x_{ij}.$$

Seja  $\mathbf{D}(\mathbf{a})_{(n \times n)} = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , com

$$a_i = \frac{1}{g'(\mu_i)},$$

$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^\top$ , com

$$z_i = -\frac{1}{2\mu_i} + \frac{\delta}{(\delta t_i + t_i + \delta\mu)} + \frac{t_i(\delta + 1)}{4\mu_i^2} - \frac{\delta^2}{4t_i(\delta + 1)}$$

e  $\mathbf{X}$  uma matriz de dimensão  $(n \times p)$  onde a  $i$ -ésima linha é  $\mathbf{x}_i^\top$ . Então a forma matricial da função escore de  $\boldsymbol{\beta}$  é dada por

$$\mathbf{U}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\theta})_{p \times 1} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{z},$$

e a função escore de  $\delta$  é dada por

$$U_{\delta}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \delta}$$

em que

$$\frac{\partial \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \delta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\delta + 1)} + \frac{(t_i + \mu_i)}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)} - \frac{t_i}{4\mu_i} - \frac{\delta(\delta + 2)\mu_i}{4(\delta + 1)^2 t_i}.$$

Consequentemente

$$U_\delta(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\delta + 1)} + \frac{(t_i + \mu_i)}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)} - \frac{t_i}{4\mu_i} - \frac{\delta(\delta + 2)\mu_i}{4(\delta + 1)^2 t_i} \right\}.$$

Seja  $\mathbf{D}(\mathbf{b}) = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ , com

$$b_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\delta + 1)} + \frac{(t_i + \mu_i)}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)} - \frac{t_i}{4\mu_i} - \frac{\delta(\delta + 2)\mu_i}{4(\delta + 1)^2 t_i}.$$

Então,

$$\mathbf{U}_\delta(\boldsymbol{\theta})_{1 \times 1} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{b})).$$

## Matrizes Hessiana

A matriz hessiana é dada por

$$\ddot{L}_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^\top} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \delta} \\ \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta \partial \boldsymbol{\beta}^\top} & \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{c}) \mathbf{X} & \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{m} \\ \mathbf{m}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{X} & \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{d})) \end{pmatrix}$$

em que  $\ell(\boldsymbol{\theta})$  está definida em (3.4). Segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j \partial \beta_l} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i^2} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} + \frac{\partial \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i} \frac{\partial}{\partial \mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right) \frac{d\mu_i}{d\eta_i} x_{ij} x_{il} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i^2} \left( \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right)^2 + \frac{\partial \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i} \left( \frac{\partial}{\partial \mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right) \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right) x_{ij} x_{il}, \end{aligned}$$

em que

$$\frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i^2} = \frac{1}{2\mu_i^2} - \frac{\delta^2}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)^2} - \frac{t_i(\delta + 1)}{2\mu_i^3},$$

e  $\frac{\partial \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i}$  é apresentada na seção 3.1. Seja  $\mathbf{D}(\mathbf{c}) = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , com

$$c_i = \left( \frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i^2} \left( \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right)^2 + \frac{\partial \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i} \left( \frac{\partial}{\partial \mu_i} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right) \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \right).$$

Em notação matricial,

$$\ddot{L}_{\beta\beta} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{c}) \mathbf{X}.$$

A derivada segunda de  $\ell(\boldsymbol{\theta})$  com respeito a  $\beta_j (j = 1, 2, \dots, p)$  e  $\delta$  é dada por

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j \partial \delta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i \partial \delta} \frac{d\mu_i}{d\eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j}$$

em que

$$\frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \mu_i \partial \delta} = \frac{t_i}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)^2} + \frac{t_i}{4\mu_i^2} - \frac{\delta(\delta + 2)}{4(\delta + 1)^2 t_i},$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_j \partial \delta} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{t_i}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)^2} + \frac{t_i}{4\mu_i^2} - \frac{\delta(\delta + 2)}{4(\delta + 1)^2 t_i} \right\} \frac{1}{g'(\mu_i)} x_{ij}$$

Seja  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)^\top$ , com

$$m_i = \frac{t_i}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)^2} + \frac{t_i}{4\mu_i^2} - \frac{\delta(\delta + 2)}{4(\delta + 1)^2 t_i}.$$

Em notação matricial

$$\ddot{L}_{\beta\delta} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{m}.$$

A derivada de segunda ordem de  $\ell(\boldsymbol{\theta})$  com respeito a  $\delta$  é dada por

$$\frac{\partial^2 \ell(\beta, \delta)}{\partial \delta^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \delta^2}$$

em que

$$\frac{\partial^2 \ell_i(\mu_i, \delta)}{\partial \delta^2} = \frac{1}{2(\delta + 1)^2} - \frac{(t_i + \mu_i)^2}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)^2} - \frac{\mu_i}{2(\delta + 1)^3 t_i},$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 \ell(\beta, \delta)}{\partial \delta^2} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2(\delta + 1)^2} - \frac{(t_i + \mu_i)^2}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)^2} - \frac{\mu_i}{2(\delta + 1)^3 t_i} \right\}.$$

Seja  $\mathbf{D}(\mathbf{d}) = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , com

$$d_i = \frac{1}{2(\delta + 1)^2} - \frac{(t_i + \mu_i)^2}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)^2} - \frac{\mu_i}{2(\delta + 1)^3 t_i}.$$

Em notação matricial

$$\ddot{L}_{\delta\delta} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{d})).$$

A inversa de  $\ddot{L}_{\theta\theta}$  pode ser expressa da forma

$$\ddot{L}_{\theta\theta}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{-1} + \frac{\mathbf{A}\mathbf{A}^\top}{\mathbf{E}} & -\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{E}} \\ -\frac{\mathbf{A}^\top}{\mathbf{E}} & \frac{1}{\mathbf{E}} \end{pmatrix}$$

em que  $\mathbf{M} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{c})\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a})\mathbf{m}$  e  $\mathbf{E} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{d})) - \mathbf{m}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a})\mathbf{X}\mathbf{A}$ .

A matriz de informação de Fisher esperada para  $\boldsymbol{\theta}$ , denotada por

$$\mathbf{K}_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\beta\beta} & \mathbf{K}_{\beta\delta} \\ \mathbf{K}_{\delta\beta} & \mathbf{K}_{\delta\delta} \end{pmatrix},$$

é obtida utilizando valores esperados descritos abaixo

$$(E1) \quad \mathbb{E}(T) = \mu,$$

$$(E2) \quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{(\delta+1)^2}{\mu\delta^2},$$

$$(E3) \quad \mathbb{E}\left(\left(T + \frac{\mu\delta}{(\delta+1)}\right)^{-1}\right) = \frac{(\delta+1)}{2\mu\delta},$$

$$(E4) \quad \mathbb{E}\left(\left(T + \frac{\mu\delta}{(\delta+1)}\right)^{-2}\right) = \mathcal{I}(\delta),$$

em que

$$\mathcal{I}(\delta) = \int_0^\infty \frac{1}{4} e^{\frac{\delta}{2}} \sqrt{\delta} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{(\delta+1)t}{\delta\mu} + \frac{\delta\mu}{(\delta+1)t}\right)\delta} \left(t + \frac{\delta\mu}{\delta+1}\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi\delta\mu}{\delta+1}}} t^{-3/2} dt.$$

Temos que  $\mathbf{K}_{\beta\beta} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{X}$ , com  $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \text{diag}\{v_1, \dots, v_n\}$  e  $v_i = \frac{\delta}{2\mu_i^2} \frac{1}{\{g'(\mu_i)\}^2} + \frac{\delta^2}{(\delta+1)^2} \frac{1}{\{g'(\mu_i)\}^2} \mathcal{I}(\delta)$ ,  $\mathbf{K}_{\beta\delta} = \mathbf{K}_{\delta\beta}^\top = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a})\mathbf{s}$  com  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)^\top$  e  $s_i = \frac{1}{2\mu_i(\delta+1)} + \frac{\delta\mu_i}{(\delta+1)^3} \mathcal{I}(\delta)$  e  $\mathbf{K}_{\delta\delta} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{u}))$  com  $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \text{diag}\{u_1, \dots, u_n\}$  e  $u_i = \frac{(\delta^2+3\delta+1)}{2\delta^2(\delta+1)^2} + \frac{\mu_i^2}{(\delta+1)^4} \mathcal{I}(\delta)$ .

Após algumas manipulações algébricas obtêm-se a inversa da matriz de informação observada,  $\mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1}$ , possui forma

$$\mathbf{K}_{\theta\theta}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{-1} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}^\top}{\mathbf{W}} & -\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{W}} \\ -\frac{\mathbf{B}^\top}{\mathbf{W}} & \frac{1}{\mathbf{W}} \end{pmatrix}$$

em que  $\mathbf{D} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a})\mathbf{s}$  e  $\mathbf{W} = \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{u})) - \mathbf{s}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a})\mathbf{X}\mathbf{B}$ .

# Curvaturas

## Ponderação de Casos

Primeiramente, é dado

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \omega_r} &= \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \log(\delta + 1) - \frac{1}{2} \log(16\pi) - \frac{1}{2} \log(\mu_r) - \frac{3}{2} \log(t_r) \\ &+ \log(\delta t_r + t_r + \delta \mu_r) - \frac{t_r(\delta + 1)}{4\mu_r} - \frac{\delta^2 \mu_r}{4t_r(\delta + 1)}.\end{aligned}$$

Daí segue que,

$$\frac{\partial^2 \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \omega_r \partial \beta_j} = \left\{ -\frac{1}{2\mu_r} + \frac{\delta}{(\delta t_r + t_r + \delta \mu_r)} + \frac{(\delta + 1)t_r}{4\mu_r^2} - \frac{\delta^2}{4(\delta + 1)t_r} \right\} \frac{1}{g'(\mu_r)} x_{rj},$$

e

$$\frac{\partial^2 \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \omega_r \partial \delta} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\delta + 1)} + \frac{(t_r + \mu_r)}{(\delta t_r + t_r + \delta \mu_r)} - \frac{t_r}{4\mu_r} - \frac{\delta(\delta + 2)\mu_r}{4t_r(\delta + 1)^2} \right\}.$$

Sejam  $\mathbf{D}(\mathbf{e}) = \text{diag}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  e  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^\top$ , com

$$e_i = -\frac{1}{2\mu_i} + \left( \frac{\delta + 1}{\delta} t_i + \mu_i \right)^{-1} + \frac{(\delta + 1)}{4\mu_i^2} t_i - \frac{\delta^2}{4(\delta + 1)t_i}$$

e

$$b_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\delta + 1)} + \frac{(t_i + \mu_i)}{(\delta t_i + t_i + \delta \mu_i)} - \frac{t_i}{4\mu_i} - \frac{\delta(\delta + 2)\mu_i}{4t_i(\delta + 1)^2}.$$

Em notação matricial

$$\frac{\partial^2 \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{D}(\mathbf{e})$$

e

$$\frac{\partial^2 \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta \partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{b}^\top.$$

## Perturbação na variável resposta

Nesta caso,

$$\frac{\partial \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \omega_r} = -\frac{3s(t_r)}{2[t_r + \omega_r s(t_r)]} + \frac{(\delta + 1)s(t_r)}{(\delta[t_r + \omega_r s(t_r)] + [t_r + \omega_r s(t_r)] + \delta \mu_i)} - \frac{(\delta + 1)s(t_r)}{4\mu_r} + \frac{\delta^2 \mu_r s(t_r)}{4(\delta + 1)[t_r + \omega_i s(t_r)]^2}.$$

Note que

$$\frac{\partial^2 \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \omega_r \partial \beta_j} = s(t_r) \left\{ -\frac{\delta(\delta + 1)}{(\delta[t_r + \omega_i s(t_r)] + [t_r + \omega_i s(t_r)] + \delta \mu_r)^2} + \frac{(\delta + 1)}{4\mu_r^2} + \frac{\delta^2}{4(\delta + 1)[t_r + \omega_r s(t_r)]^2} \right\} \frac{1}{g'(\mu_r)} x_{rj}$$

e

$$\frac{\partial^2 \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \omega_r \partial \delta} = s(t_r) \left\{ -\frac{\mu_r}{(\delta[t_r + \omega_r s(t_r)] + [t_r + \omega_r s(t_r)] + \delta \mu_i)^2} - \frac{1}{4\mu_r} + \frac{\delta(\delta + 2)\mu_r}{4[t_r + \omega_i s(t_r)]^2(\delta + 1)^2} \right\}.$$

Seja  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\psi}) = \text{diag}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ , com

$$\psi_i = s(t_i) \left\{ -\frac{\delta(\delta + 1)}{(\delta[t_i + \omega_i s(t_i)] + [t_i + \omega_i s(t_i)] + \delta \mu_i)^2} + \frac{(\delta + 1)}{4\mu_i^2} + \frac{\delta^2}{4(\delta + 1)[t_i + \omega_i s(t_i)]^2} \right\}$$

e  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top$ , com

$$\tau_i = s(t_i) \left\{ -\frac{\mu_i}{(\delta[t_i + \omega_i s(t_i)] + [t_i + \omega_i s(t_i)] + \delta \mu_i)^2} - \frac{1}{4\mu_i} + \frac{\delta(\delta + 2)\mu_i}{4[t_i + \omega_i s(t_i)]^2(\delta + 1)^2} \right\}.$$

Em notação matricial

$$\frac{\partial^2 \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\psi})$$

e

$$\frac{\partial^2 \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta \partial \boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\tau}^\top.$$

### Perturbação no parâmetro de precisão

Para o cálculo desta curvaturas primeiramente calcula-se

$$\frac{\partial \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \omega_r} = \frac{1}{2(\delta + \omega_r)} - \frac{\delta}{2\omega_r^2} - \frac{1}{2\omega_r} + \frac{t_r}{(\delta t_r + t_r \omega_r + \delta \mu_r)} - \frac{1}{(\delta + \omega_r)} + \frac{\delta t_r}{4\mu_r \omega_r^2} + \frac{\delta^2(\delta + 2\omega_r)}{4t_r \omega_r^2(\delta + \omega_r)^2}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \omega_r \partial \beta_j} &= \left\{ -\frac{\delta t_r}{(\delta t_r + t_r \omega_r + \delta \mu_r)^2} - \frac{\delta t_r}{4\omega_r^2 \mu_r^2} + \frac{\delta^2(\delta + 2\omega_r)}{4t_r \omega_r^2(\delta + \omega_r)^2} \right\} \frac{1}{g'(\mu_r)} x_{rj} \\ \frac{\partial^2 \ell_{\omega}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \omega_r \partial \delta} &= \left\{ -\frac{1}{2\omega_r^2} - \frac{1}{2(\delta + \omega_r)^2} - \frac{t_r(t_r + \mu_r)}{(\delta t_r + t_r \omega_r + \delta \mu_r)} + \frac{1}{(\delta + \omega)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_r}{4\mu_r \omega_r^2} + \frac{\mu_r \delta(\delta^2 + 3\delta \omega_r + 4\omega_r^2)}{4t_r \omega_r^2(\delta + \omega_r)^3} \right\}. \end{aligned}$$

Sejam  $\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) = \text{diag}\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  e  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^\top$ , com

$$\xi_i = -\frac{\delta t_i}{(\delta t_i + t_i \omega_r + \delta \mu_i)^2} - \frac{\delta t_i}{4\omega_i^2 \mu_i^2} + \frac{\delta^2(\delta + 2\omega_i)}{4t_i \omega_i^2 (\delta + \omega_i)^2}$$

e

$$\varphi_i = -\frac{1}{2\omega_i^2} - \frac{1}{2(\delta + \omega_i)^2} - \frac{t_i(t_i + \mu_i)}{(\delta t_i + t_i \omega_i + \delta \mu_i)} + \frac{1}{(\delta + \omega)^2} + \frac{t_i}{4\mu_i \omega_i^2} + \frac{\mu_i \delta (\delta^2 + 3\delta \omega_i + 4\omega_i^2)}{4t_i \omega_i^2 (\delta + \omega_i)^3}.$$

As curvaturas possuem a forma

$$\frac{\partial^2 \ell_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{X}^\top \mathbf{D}(\mathbf{a}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi})$$

e

$$\frac{\partial^2 \ell_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta \partial \boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varphi}^\top.$$

---

## Referências

---

- Achcar, J. A. (1993). Inference for the Birnbaum-Saunders fatigue life model using Bayesian methods. *Computational Statistics and Data Analysis*, **15**, 367-380.
- Achcar, J. A. e Espinosa, M. M. (1991). Bayesian methods in accelerated life tests considering a log-linear model for the Birnbaum-Saunders distribution. *Revista Brasileira de Estatística*, **52**, 47-68.
- Ahmed, S. E., Budsaba, K., Lisawadi, S., Volodin, A. (2008). Parametric estimation for the Birnbaum-saunders lifetime distribution based on a new parametrization. *Thailand Statistician*, **6**, 213-240.
- Atkinson, A. C. (1985). *Plots, Transformations and Regression: An Introduction to Graphical Methods of Diagnostic Regression Analysis*. New York: Oxford University Press.
- Balakrishnan, N., Leiva, V., López, J. (2007). Acceptance sampling plans from truncated life tests from generalized Birnbaum-Saunders distribution. *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, **36**, 643-656.
- Balakrishnan, N., Leiva, V., Sanhueza, A., Vilca, F. (2009). Estimation in the Birnbaum-Saunders distribution based on scale-mixture of normals and the EM-algorithm. *Statistics and Operations Research Transactions*, **33 (2)**, 171-192.

- Barros, M., Paula, G. A., Leiva, V. (2008). A new class of survival regression models with heavy-tailed errors: robustness and diagnostics. *Lifetime Data Analysis*, **14**(3), 316-332.
- Barros, M., Paula, G. A., Leiva, V. (2009). An R implementation for generalized Birnbaum-Saunders distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**(5), 1511-1528.
- Belsley, D. A., Kuh, E. e Welsch, R. E. (1980). *Regression Diagnostics: Identifying Influential Data and Sources of Collinearity*. Jonh Wiley and Sons, New York.
- Birnbaum, Z. W. e Saunders, S. C. (1969a) A new family of life distributions. *Journal of Applied probability*, **6**, 319-327.
- Birnbaum, Z. W. e Saunders, S. C. (1969b) Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal of Applied probability*, **6**, 328-347.
- Chatterjee, S. e Hadi, A. S. (1988). *Sensitivity Analysis in Linear Regression*. Jonh Wiley and Sons, New York.
- Cook, R. D. (1977). Detection of influential observations in linear regression. *Technometrics*, **19**, 15-18.
- Cook, R. D. (1986). Assessment of local influence (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society B*, **48**, 133-169.
- Cook, R. D., Weisberg, S. (1982). *Residuals and influence in Regressions*. London: Chapman and Hall.

- Cordeiro, G. M., Paula, G. A. (1992). Estimation, large sample parametric tests and diagnostics for nonexponential family nonlinear models. *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, **21**, 149-172.
- Cox, D. R. e Hinkley, D. V. (1974). *Theoretical Statistics*. London: Chapman and Hall.
- Cox, D. R. e Snell, E. (1968). A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society B*, **30**, 248-275.
- Cribari-Neto, F. e Zarkos, S. G. (2003). Econometric and statistical computing using Ox. *Computational Economics*, **21**, 277-295.
- Cysneiros, A., Cribari-Neto, F., Araujo, C.G.J. (2008) On Birnbaum-Saunders inference. *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 4939-4950.
- Davison, A. C. e Gigli, A. (1989). Deviance residuals and normal scores plots. *Biometrika*, **76**, 211-221.
- Davison, A. C. e Tsai, C. L. (1992). Regression model diagnostics. *International Statistical Review*, **60**, 337-353.
- Desmonde, A. F. (1985). Stochastic models of failure in random environments. *Canadian Journal of Statistics*, **13**, 171-183.
- Desmonde, A. F. (1986). On the relationship between two fatigue-life models. *IEEE Transactions on Reliability*, **35**, 167-169.

- Desmonde, A. F., Rodríguez-Yam, G. A. e Lu, X. (2008). Estimation of parameters for a Birnbaum-Saunders regression model with censored data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **78**, 983-997.
- Díaz-García, J. A., Galea, M. e Leiva, V. (2003). Influence diagnostics for elliptical multivariate linear regression models. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **32**, 625-641.
- Díaz-García, J. A. e Leiva, V. (2005). A new family of life distributions based on the contoured elliptically distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **128**, 88-95.
- Doornik, J. A. (2001). *Ox: an Object-Oriented Matrix Language*. fourth ed. Timberlake Consultants Press, London, Oxford. (www.doornik.com).
- Dupuis, D. J. e Mills, J. E. (1998). Robust estimation of the Birnbaum-Saunders distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **47**, 88-95.
- Emerson, J. D., Hoaglin, D.C., Kempthorne, P. J. (1984). Leverage in least squares additive-plus-multiplicative fits for two-way tables. *Journal of the American Statistical Association*, **79**, 329-335.
- Engelhardt, M., Bain, L. J. e Wright, F. T. (1981). Inferences on the parameters of the Birnbaum-Saunders fatigue life distribution based on maximum likelihood estimation. *Technometrics*, **23**, 251-255.
- Escobar, L. A. e Meeker, W. Q. (1992). Assessing influence in regression analysis with censored data. *Biometrics*, **48**, 507-528.
- Ferrari, S. L. P. e Cribari-Neto, F. (2004). Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, **31**, 799-815.

- From, S. G. Li, L. X. (2006) Estimation of the parameters of the Birnbaum-Saunders distribution. *Communications in Statistics Theory and Methods*, **35**, 2157-2169.
- Fung, W. K. e Kwan, C. W. (1997). A note on local influence based on the normal curvature. *Journal of Royal Statistical Society B*, **59**, 839-843.
- Galea, M., Paula, G. A. e Bolfarine, H. (1997). Local influence in elliptical linear regression models. *The Statistician*, **46**, 71-79.
- Galea, M; Paula, G. A. e Cysneiros, F. J. A. (2005). On Diagnostic in Symmetrical Nonlinear Models *Statistics and Probability Letters*, **73(4)**, 459-467.
- Galea, M., Paula, G. A. e Uribe-Opazo, M. (2003). On influence diagnostic in univariate elliptical linear regression models. *Statistical Papers*, **44**, 23-45.
- Galea, M., Riquelme, M. e Paula, G. A., (2000). Diagnostics methods in elliptical linear regression models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **14**, 167-184.
- Guiraud, P., Leiva, V., Fierro, R. (2009). A non-central version of the Birnbaum-Saunders distribution for reliability analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, **58(1)**, 152-160.
- Hoaglin, D. C., Welsch, R. E. (1978). The hat matrix in regression and ANOVA. *The American Statistician*, **32**, 17-22.
- Johnson, N. L., Kotz, S. e Balakrishnan, N. (1995) *Continuous Univariate Distributions*. Volume 2. Second edition. John Wiley and Sons, New York.
- Jørgensen, B. (1984). The delta algorithm and GLIM. *International Statistical Review*, **52**, 283-300.

- Leiva, V., Barros, M., Paula, G. A., Galea, M. (2007). Influence diagnostics in log Birnbaum-Saunders regression models with censored data. *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**(12), 5694-5707.
- Leiva, V., Barros, M., Paula, G. A., Sanhueza, A. (2008). Generalized Birnbaum-Saunders distributions applied to air pollutant concentration. *Environmetrics*, **19**, 235-249.
- Leiva, V., Hernández, H., Riquelme, M. (2006). A new package for the Birnbaum-Saunders distribution. *R Journal*, **6**, 35-40.
- Leiva, V., Riquelme, M., Balakrishnan, N., Sanhueza, A. (2008). Lifetime analysis based on the generalized Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**(4), 2079-2097.
- Leiva, V., Sanhueza, A., Angulo, J. M. (2009). A length-biased version of the Birnbaum-Saunders distribution with application in water quality. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **23**, 299-307.
- Leiva, V., Sanhueza, A., Sen, P. K., Paula, G. A. (2008). Random number generators for the generalized Birnbaum-Saunders distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **78**, 1105-1118.
- Lemonte, A. J. e Cordeiro, G. M. (2009). Birnbaum-Saunders nonlinear regression models. *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 4441-4452.
- Lemonte, A., Cribari-Neto, F., Vasconcellos, K. L. P. (2007) Improved statistical inference for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4656-4681.

- Lemonte, A. J., Ferrari, S. L. P. (2009). Small-sample corrections for score tests in Birnbaum-Saunders regressions. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, (aceito).
- Lemonte, A. J., Ferrari, S. L. P., Cribari-Neto, F. (2009). Improved likelihood inference in Birnbaum Saunders regressions. *Computational Statistics and Data Analysis*, (Article in Press).
- Lemonte, A., Simas, A., Cribari-Neto, F. (2008) Bootstrap-based improved estimators for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **78**, 37-49.
- Lesaffre, F. e Verbeke, G. (1998). Local influence in linear mixed models. *Biometrics*, **38**, 963-974.
- Lu, M. e Chang, D. S. (1997). Bootstrap prediction intervals for the Birnbaum-Saunders distribution. *Microelectron Reliability*, **37**, 1213-1216.
- Mann, N. R., Schafer, R. E. e Singpurwalla, N. (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. John Wiley and Sons, New York.
- McCarter, K. S. (1999). *Estimation and Prediction for the Birnbaum-Saunders Distribution Using Type-II Censored Samples, with a Comparison to the Inverse Gaussian Distribution*. Ph.D Thesis, Kansas State University, Department of Statistics, College of Arts and Sciences.
- McCullagh, P. (1987). *Tensor Methods in Statistics*. Chapman e Hall, London.
- McCullagh, P. e Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Models*. Chapman and Hall, London.

- Meintanis, S. G. (2010). Inference procedures for the Birnbaum-Saunders distribution and its generalizations. *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 367-373.
- Mittelbach, F., Goossens, M., Braams, J., Carlisle, D. e Rowley, C. (2004). *The LATEX Companion*. Tools and Techniques for Computer Typesetting. Addison Wesley, Boston.
- Moolgavkar, S., Lustbader, E. e Venzon, D. (1984). A geometric approach to nonlinear regression diagnostic with application to matched case-control studies. *Annals of Statistics*, **12**, 816-826.
- Nelder, J. A. e Wedderburn, R. W. M. (1972). Generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society A*, **135**, 370-384.
- Ng, H. K. T., Kundu, D. e Balakrishnan, N. (2003). Modified moment estimation for the two parameters Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **43**, 283-298.
- Ng, H. K. T., Kundu, D. e Balakrishnan, N. (2006). Point and interval estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution based on Type-II censored samples. *Computational Statistics and Data Analysis*, **50(11)**, 3222-3242.
- Ortega, E. M., Bolfarine, H. e Paula, G. A. (2003). Influence diagnostics in generalized log-gamma regression models. *Computational Statistics and Data Analysis*, **42**, 165-186.
- Owen, W. J. e Padgett, W. J. (1999). Accelerated test models for system strength based on Birnbaum-Saunders distribution. *Lifetime Data Analysis* **5**:133-147.

- Paula, G. A. (1993). Assessing local influence in restricted regression models. *Computational Statistics and Data Analysis*, **16**, 63-79.
- Paula, G. A. (1995). Influence and residuals in restricted generalized linear models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **51**, 315-331.
- Paula, G. A. (1996). On approximation of the level probabilities for testing ordered parallel regression lines. *Statistics and Probability Letters*, **30**, 333-338.
- Paula, G.A. (1999b). Leverage in inequality constrained regression models. *The Statistician*, **48**, 529-538.
- Paula, G. A. e Peres, C. A. (1988). Diagnostics for GLMs with linear inequality parameter constraints. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **17**, 4205-4219.
- Pettit, A. N. e Bin Daud, I. (1989). Case-weight measures of influence for proportional hazards regression. *Applied Statistics*, **38**, 51-67.
- Pregibon, D. (1981). Logistic Regression diagnostics. *Annals of Statistics*, **9**, 705-724.
- R Development Core Team (2009). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria., URL <http://www.R-project.org>.
- Rieck, J. R. (1999). A moment-generating function with application to the Birnbaum-Saunders distribution. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **28**, 2213- 2222.

- Rieck, J. R. e Nedelman, J. R. (1991) A log-linear model for the Birnbaum-Saunders distribution. *Technometrics*, **33**, 51-60.
- Sanhueza, A., Leiva, V., Balakrishnan, N., (2008). The generalized Birnbaum-Saunders distribution and its theory, methodology and application. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **37**, 645-670.
- St. Laurent, R. T. e Cook, R. D. (1992). Leverage and superleverage in nonlinear regression. *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 985-990.
- Tanaka, Y., Zhang, F. e Mori (2003). Local influence in principal component analysis: relationship between the local influence and influence function approaches revisited. *Computational Statistics and Data Analysis*, **44**, 143-160.
- Tsai, C. H. e Wu, X. (1992). Assessing local influence in linear regression models with first-order autoregressive or heteroscedastic error struture. *Statistics and Probability Letters*, **14**, 247-252.
- Vilca-Labra e Leiva, V. (2006). A new fatigue life model based on the family of skew-elliptical distributions. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **35**, 1-16.
- Wang, Z., Desmond, A. F., Lu, X. (2006). Modified censored moment estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **50**, 1033-1051.
- Wei, B.-C., Hu, Y.-Q. and Fung, W.-K. (1998). Generalized leverage and its applications. *Scandinavian Journal of Statistics*, **25**, 25-37.

- Xiao, Q., Lu, Z., Balakrishnan, N. e Lu, X. (2010). Estimation of the Birnbaum-Saunders regression model with current status data. *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 326-332.
- Xie, F.-C. e Wei, B.-C. (2007). Diagnostics analysis for log-Birnbaum-Saunders regression models. *Computational Statistics and Data Analysis*, **51(9)**, 4692-4706.
- Xu, A. e Tang, Y. (2010). Reference analysis for Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 185-192.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)