

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS  
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: FÍSICA

**O estudo do emaranhamento na  
emissão espontânea no espaço livre e  
em uma cadeia de osciladores  
harmônicos acoplados**

**João Frederico Haas Leandro Monteiro**

**PONTA GROSSA**

**2010**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**João Frederico Haas Leandro Monteiro**

**O estudo do emaranhamento na  
emissão espontânea no espaço livre e  
em uma cadeia de osciladores  
harmônicos acoplados**

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação em Ciências - Área de concentração: Física - da Universidade Estadual de Ponta Grossa como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Luis Semião da Silva

**PONTA GROSSA  
2010**

Ficha Catalográfica Elaborada pelo Setor de Processos Técnicos BICEN/UEPG

M775e

Monteiro, João Frederico Haas Leandro

O estudo do emaranhamento na emissão espontânea no espaço livre e em uma cadeia de osciladores harmônicos acoplados. / João Frederico Haas Leandro Monteiro. Ponta Grossa, 2010.

74f.

Dissertação ( Mestrado em Ciências - Área de concentração : Física), Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Luis Semião da Silva

1. Emaranhamento . 2. Emissão Espontânea.  
3. Oscilador Harmônico Acoplado. 4. Sistema  
Microeletromecânico. I. Silva, Fernando Luis Semião da.  
II. T.

CDD: 531.163

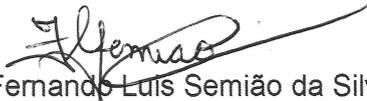
## TERMO DE APROVAÇÃO

JOÃO FREDERICO HAAS LEANDRO MONTEIRO

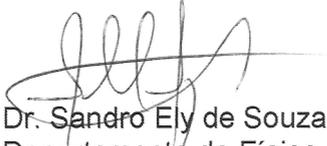
### “O ESTUDO DO EMARANHAMENTO NA EMISSÃO ESPONTÂNEA NO ESPAÇO LIVRE E EM UMA CADEIA DE OSCILADORES HARMÔNICOS ACOPLADOS”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ciências - Física da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador:

  
Prof. Dr. Fernando Luis Semião da Silva  
Departamento de Física, UEPG/PR

  
Dra. Kyoko Furuya  
UNICAMP/ SP

  
Dr. Sandro Ely de Souza Pinto  
Departamento de Física, UEPG/PR

Ponta Grossa, 11 de março de 2010

*A Deus e a toda a minha família.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me permitir viver e realizar esse trabalho.

À toda minha família, em especial a minha mãe, que amo muito, por sempre ter acreditado em mim e a minha esposa que sempre me deu muito amor e carinho.

Agradeço muito ao meu orientador, por me ensinar e me ajudar a ser um pesquisador de verdade. Com certeza o senhor é um guia a ser seguido por mim, não só como pesquisador, mas também como pessoa.

Ao professor Antônio Sérgio por me ajudar e muito nessa jornada com suas discussões sobre a física e a vida.

Aos professores Sandro e Batista por suas contribuições para a melhoria da dissertação.

Ao pós-doc Pablo Parmezani por sua imensurável disposição em ajudar.

Aos meus amigos do grupo de informação quântica, Carlos e Jader, por suas inúmeras contribuições e discussões.

À todos os amigos e colegas que estiveram comigo durante essa jornada do mestrado.

À secretária Josecler que sempre nos atende com alegria e disposição.

À todos os professores do programa de pós-graduação e do departamento de Física.

Ao INCT-IQ por seu financiamento parcial através da bolsa de mestrado.

Enfim, a todos que contribuíram de alguma maneira para esse trabalho.

# Resumo

Nesta dissertação estudamos o emaranhamento em alguns sistemas fundamentais da Física, como um átomo no espaço livre realizando emissão espontânea e em osciladores harmônicos acoplados. Para o estudo do emaranhamento na emissão espontânea no espaço livre, utilizamos a teoria de Weisskopf-Wigner que nos permitiu obter a evolução temporal, tanto do estado do átomo, quanto do estado do campo. Para o caso de emaranhamento bipartido entre os modos do campo após a emissão espontânea, mostramos que os modos podem ficar altamente emaranhados e que as características desse emaranhamento dependem fortemente de como são realizadas as partições. Para o emaranhamento entre o átomo e o campo durante a emissão espontânea, pudemos relacionar o emaranhamento com uma quantidade Física bastante conhecida, o tempo de vida do átomo no seu estado excitado. Ainda com o intuito de estudar sistemas físicos simples, mas de relevância na Física, utilizamos, em um segundo trabalho, uma cadeia de osciladores harmônicos acoplados. Já era bem conhecido dos pesquisadores na área de informação quântica que uma cadeia linear de osciladores acoplados, na aproximação de onda girante e preparados em estados clássicos, não cria emaranhamento. Assim, utilizamos dois osciladores de referência em estados comprimidos para permitir a criação de emaranhamento. Encontramos resultados a respeito da relação das fases dos osciladores de referência e a dinâmica do emaranhamento na cadeia para algumas configurações de acoplamentos. Mostramos que nem sempre a compressão dos estados comprimidos favorece a criação de emaranhamento e que na configuração utilizada por nós é possível localizar o emaranhamento. Nós propusemos uma possível implementação de nossos estudos em sistemas microeletromecânicos acoplados.

**Palavras-chave:** Emaranhamento, Emissão Espontânea, Oscilador Harmônico Acoplado, Sistema Microeletromecânico.

# Abstract

In this dissertation, we studied entanglement in some fundamental systems of physics, such as an excited atom in free-space spontaneously decaying and coupled harmonic oscillators. In order to study entanglement in spontaneous emission in free-space, we employed the Weisskopf-Wigner theory which allowed us to obtain the time evolution of both the atom and field states. In the case of bipartite entanglement among field modes after spontaneous emission, we showed that the modes can become highly entangled and that the features of this entanglement strongly depend on the way the partitions are made. For the entanglement between atom and field during spontaneous emission, we were able to relate entanglement to a well known physical quantity namely the lifetime of an atom in a excited state. Keeping in mind the intention to study simple but relevant physical systems, we used in the second work a chain of coupled harmonic oscillators. It was well-known among researchers in the field of quantum information that a linear chain of coupled oscillators in the rotating wave approximation and prepared in classical states would never create entanglement. Then, we used two reference oscillators prepared in squeezed states to make creation of entanglement possible. We found results concerning the relationship between the phases in the reference oscillators' state and dynamics of entanglement in the chain for some coupling configurations. We showed that it is not always true that squeezing can favor entanglement creation and that with the configuration used by us it is possible to localize entanglement. We proposed a possible implementation of our results in coupled microelectromechanical systems.

**Keywords:** Entanglement, Spontaneous Emission, Coupled Harmonic Oscillator, Microelectromechanical System.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>Sumário</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>1 Fundamentos</b>	<b>5</b>
1.1 Oscilador Harmônico Unidimensional . . . . .	5
1.2 Quantização do Campo Eletromagnético . . . . .	8
1.3 Sistema de Dois Níveis . . . . .	10
1.4 Interação Átomo-Campo . . . . .	12
1.5 Estados Quânticos do Oscilador Harmônico . . . . .	14
1.5.1 Estado de Fock . . . . .	15
1.5.2 Estado Coerente . . . . .	16
1.5.3 Estado Comprimido . . . . .	17
1.5.4 Estado Térmico . . . . .	19
1.5.5 Estado Gaussiano Geral . . . . .	20
1.6 Emaranhamento . . . . .	22
1.6.1 Definição . . . . .	22
1.6.2 Critérios de Separabilidade . . . . .	25
1.6.3 Quantificação de Emaranhamento . . . . .	27
<b>2 Emaranhamento na Emissão Espontânea</b>	<b>33</b>
2.1 Teoria de Weisskopf-Wigner . . . . .	33
2.2 Emaranhamento entre os modos do campo . . . . .	36
2.3 Emaranhamento entre o átomo e o campo . . . . .	40
2.4 Conclusões . . . . .	43
<b>3 Localização do emaranhamento usando estados comprimidos</b>	<b>45</b>
3.1 Descrição do Sistema . . . . .	45
3.2 Dinâmica do Emaranhamento . . . . .	48
3.3 Conclusões . . . . .	55
<b>4 Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	<b>56</b>
<b>A Operador de Evolução Temporal da Matriz de Covariância</b>	<b>58</b>
<b>B Solução Analítica do Anel de Osciladores</b>	<b>62</b>
<b>C Osciladores Microeletromecânicos</b>	<b>64</b>

# Lista de Figuras

1.1	Teletransporte do estado da partícula $C$ para a partícula $B$ . A linha tracejada indica que as partículas $A$ e $C$ estão localmente separadas da partícula $B$ e o tempo corre de cima para baixo. . . . .	24
2.1	Bipartição teórica do campo eletromagnético no espaço livre. $\Delta$ é a dissonância entre $v_{\vec{q}}$ e $\omega$ . . . . .	36
2.2	Emaranhamento $S$ entre as partições $A$ e $B$ como função do tamanho $\tilde{\delta}$ da partição $A$ . As curvas correspondem a diferentes valores de $\tilde{\Delta}$ : 0,0 (sólida), 2,0 (ponto-tracejada), 4,0 (ponto), 8,0 (tracejada). . . . .	38
2.3	Emaranhamento $S$ entre as partições $A$ e $B$ como função da dissonância $\tilde{\Delta}$ entre o átomo e o modo central da partição $A$ . As curvas correspondem a diferentes valores de $\tilde{\delta}$ : 0,2 (sólida), 0,5 (ponto-tracejada), 5,0 (ponto), 9,0 (tracejada). . . . .	39
2.4	Evolução temporal do emaranhamento entre o átomo e os modos do campo eletromagnético do espaço livre. . . . .	41
2.5	Fidelidade entre o estado da partição $A$ e o estado de vácuo como função do tamanho da partição $\tilde{\delta}$ e a dissonância $\tilde{\Delta}$ entre o modo central e a frequência atômica. . . . .	43
3.1	Um diagrama da configuração dos osciladores usado nesse trabalho. $M + 2$ osciladores idênticos (massa e frequência unitária) são inicialmente preparados no estado de vácuo exceto dois osciladores (nomeados como $r_1$ e $r_2$ ) que são inicialmente preparados em estados comprimidos puros. $N$ é a negatividade logarítmica calculada entre os osciladores dos extremos da cadeia e $c$ são constantes de acoplamento. . . . .	46
3.2	Evolução temporal da negatividade logarítmica para diferentes ângulos relativos de compressão. Utilizamos $M = 38$ e $r = 1$ . . . . .	49
3.3	Representação dos dois estados comprimidos considerados nesse trabalho. Os osciladores de referência são preparados em estados comprimidos $ re^{i\phi_1}\rangle$ e $ re^{i\phi_2}\rangle$ , com ângulo de compressão relativo $\delta = \phi_2 - \phi_1$ . . . . .	49
3.4	Negatividade logarítmica em $ct = 58$ como função do ângulo de compressão relativo $\delta$ para o caso $M = 38$ . . . . .	50
3.5	Primeiro máximo local da negatividade logarítmica no domínio $ct < 80$ como função do ângulo de compressão relativo $\delta$ para diferentes números $M$ de osciladores na cadeia. Consideramos $r = 1$ . . . . .	51
3.6	Evolução temporal da negatividade logarítmica para diferentes ângulos de compressão. Utilizamos $M = 4$ e $r = 1$ . . . . .	52
3.7	Negatividade logarítmica em $ct = 1$ como função da magnitude de compressão e diferentes ângulos relativos $\delta$ , para o caso $M = 2$ . . . . .	53

3.8	Exemplos de diferentes arranjos que localizam o emaranhamento. Cadeias de diferentes tamanhos podem ser acopladas em tais estruturas através das linhas abertas a fim de estudar a criação e propagação do emaranhamento. Dependendo do ângulo relativo de compressão dos osciladores de referência $r_1$ e $r_2$ não haverá criação de emaranhamento entre os membros das cadeias acopladas a essas estruturas. . . . .	54
C.1	Barra de tamanho $l$ fixa em apenas uma das extremidades utilizada como modelo para um sistema MEMS. . . . .	65
C.2	Duas barras idênticas fixas em apenas uma das extremidades, com separação $d$ entre suas posições de equilíbrio. As oscilações das placas foi exagerada para melhor visualização. . . . .	68

# Introdução

A mecânica quântica teve seu início em 1900 com o trabalho de Planck sobre a radiação de corpo negro. Mas seu desenvolvimento estrutural ocorreu por cerca de 30 anos com os trabalhos de Einstein, de Broglie, Schrödinger, Bohr, Sommerfeld, Heisenberg, Pauli, Dirac, entre outros [1, 2].

Em 1935 Einstein, Podolski e Rosen (EPR) [3] apresentaram um trabalho em que consideravam a mecânica quântica uma teoria incompleta. Segundo os autores, uma teoria completa deveria contemplar o que eles definiram como elementos de realidade. Um elemento de realidade seria, ainda segundo os autores, qualquer grandeza física que pudesse ser definida antes que uma medida fosse feita. Passaram-se muitos anos de discussões e debates qualitativos em torno da dúvida se a mecânica quântica era uma teoria completa ou não. Nesses anos surgiram teorias de variáveis ocultas que tentavam acabar com a interpretação probabilística da mecânica quântica [4, 5].

Na década de 60, Bell [6] publicou um trabalho em que deduziu uma desigualdade, a qual qualquer teoria local de variáveis ocultas deveria obedecer, e que poderia ser testada experimentalmente. Os primeiros experimentos para testar a desigualdade de Bell resultaram na violação dessa [7, 8, 9], derrubando a idéia clássica de realidade, ou seja, algo já estar definido antes da medida, ajudando na afirmação da mecânica quântica como uma teoria completa. Contudo, ainda existem certos aspectos desses experimentos ( deficiência dos detectores, etc.) que faz com que a possibilidade de teorias de variáveis ocultas não tenha ainda sido completamente eliminada [10, 11]. Tais deficiências são comumente chamadas "Loopholes"[12].

Por trás do argumento EPR, encontra-se uma propriedade quântica, ligada às correlações (relações entre duas variáveis) não-locais dos resultados das medidas, denominada emaranhamento. Muitos pesquisadores em vez de persistirem nessa discussão, da natureza ser local ou não-local, partiram para a seguinte questão: O emaranhamento pode ser útil?

Emaranhamento é uma correlação quântica entre grandezas físicas (polarização, spin, posição, momento, etc.) de dois ou mais sistemas quânticos (fótons, íons, elétrons, moléculas, etc.). Um aspecto fundamental do emaranhamento é que embora possamos ter completo conhecimento de um sistema composto, teremos menor conhecimento sobre seus subsistemas. Essa relação do emaranhamento com a informação foi formalizada através da entropia de von Neumann [13].

O emaranhamento é estudado e utilizado em diversos ramos de pesquisa, como por exemplo: criptografia quântica [14], computação quântica [15], óptica quântica [16], transição de fase quântica [17], física da matéria condensada [18], entre outros. Nesta dissertação, estudamos essa propriedade, exclusivamente do âmbito da mecânica quântica, no processo de emissão espontânea e em um sistema de osciladores harmônicos.

Emissão espontânea é um fenômeno natural em que átomos ou moléculas no estado excitado emitem fótons ao passar para um estado de menor energia. Esse processo é essencial em muitas aplicações tais como tubos de fluorescência, lasers, etc [19]. A emissão espontânea já foi muito estudada sob diversos aspectos, tais como seu controle [20], sua inibição [21], sua ocorrência em cristais fotônicos [22] ou cavidades [23], entre outros. Estudamos a emissão espontânea no espaço livre do ponto de vista do emaranhamento, buscando alguma relação deste com a conhecida constante de decaimento e também estudando o emaranhamento entre os modos do campo. Esse é um estudo de fundamentos da Física, em que visamos compreender melhor a relação de um fenômeno bastante conhecido, emissão espontânea, com o fenômeno do emaranhamento.

Em nosso estudo do emaranhamento na emissão espontânea observamos que o tempo necessário para o átomo e o campo se emaranharem maximamente é equivalente ao tempo médio de vida do átomo no seu estado excitado, ou seja, há uma relação entre o emaranhamento e a constante de decaimento atômica. Analisamos também o emaranhamento entre grupos de modos do campo eletromagnético separados em duas partições após a emissão espontânea e observamos que o emaranhamento entre grupos de modos das duas partições dependem do tamanho das partições e também possui uma forte dependência com a dissonância com a frequência do átomo.

Um oscilador harmônico representa qualquer sistema que oscila periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio (pequenas amplitudes). Muitos sistemas físicos podem ser mo-

delados por um oscilador harmônico como o movimento de átomos em redes cristalinas, pêndulo, uma massa presa numa extremidade de uma mola, campo eletromagnético, entre outros. Muitos pesquisadores já estudaram emaranhamento em cadeias de osciladores harmônicos [24, 25, 26, 27, 28]. Nessa dissertação, estudamos a dinâmica do emaranhamento em uma cadeia de osciladores harmônicos acoplados, utilizando uma configuração de anel central composto de quatro osciladores, ao qual são acopladas duas cadeias de osciladores. Verificamos a relação dos parâmetros dos estados dos osciladores do anel com a criação de emaranhamento.

Com essa configuração, obtemos que o emaranhamento entre o primeiro e o último oscilador da cadeia pode ser zero para uma ampla faixa de valores do ângulo relativo de compressão de osciladores no anel central no estado comprimido. Nessa faixa de ângulos o emaranhamento permanece localizado apenas no anel central e não se propaga pela cadeia. Verificamos que a largura da faixa de ângulos de compressão relativo, proibindo a geração de emaranhamento na cadeia, depende da magnitude do parâmetro de compressão dos estados comprimidos mas independe do número de osciladores na cadeia. Assim, foi possível obter uma solução analítica que relaciona o ângulo de compressão relativo com a magnitude do parâmetro de compressão analisando apenas o anel central. Constatamos também a existência de outras configurações para o arranjo central que também produzem os mesmos resultados.

Esta dissertação está organizada como segue. No capítulo 1, apresentamos os conceitos e ferramentas fundamentais utilizados em todos os trabalhos relacionados com esta dissertação, como a quantização do campo eletromagnético, a interação átomo-campo, estados quânticos do oscilador harmônico, critérios de separabilidade e medidas de emaranhamento. No capítulo 2, apresentamos a teoria de Weisskopf-Wigner [29] para a emissão espontânea de um átomo no estado excitado no espaço livre. Essa teoria nos permitiu estudar o emaranhamento entre o átomo e o campo do espaço livre durante a emissão espontânea. Obtemos uma relação entre o tempo para o emaranhamento átomo-campo máximo e o tempo médio de vida do átomo no seu estado excitado. Analisamos também o emaranhamento entre os modos do campo separados em duas partições e obtemos que os modos podem se emaranhar fortemente dependendo do tamanho das partições e de quão perto estão da ressonância com a frequência atômica. No capítulo 3, propomos uma configuração simples de osciladores harmônicos acoplados que possui dois osciladores inicialmente no estado comprimido que, dependendo dos ajustes nos parâmetros de compressão (magnitude e fase), podem localizar o emaranhamento apenas na

região central da configuração. Sugerimos os sistemas microeletromecânicos para uma possível implementação dos nossos resultados por atualmente possuírem um alto nível de controle e manipulação. No capítulo 4, apresentamos nossas conclusões finais e algumas perspectivas para trabalhos futuros.

# Capítulo 1

## Fundamentos

Neste capítulo mostraremos alguns conceitos fundamentais como a quantização do oscilador harmônico, quantização do campo eletromagnético, sistemas de dois níveis e interação átomo-campo, que são importantes principalmente nas áreas de óptica quântica, computação quântica e informação quântica. Na quantização do oscilador harmônico, veremos uma característica bem distinta do oscilador clássico que é a quantização da energia, isto é, energias discretas. Na quantização do campo eletromagnético, uma característica importante é o fato de que o campo pode ser descrito como um conjunto infinito de osciladores harmônicos quânticos independentes. Após a quantização do campo eletromagnético, veremos a descrição dos sistemas de dois níveis como, por exemplo, a polarização da luz e o spin dos elétrons. Trataremos também a interação do campo eletromagnético com átomos de dois níveis. Mostraremos alguns estados quânticos bastante conhecidos do oscilador harmônico, com ênfase nos estados gaussianos. Finalizaremos este capítulo com uma rápida revisão sobre emaranhamento, incluindo a questão de critérios de separabilidade e sua quantificação.

### 1.1 Oscilador Harmônico Unidimensional

O oscilador harmônico é um dos sistemas mais importante na Física. Seu modelo físico e matemático podem ser usados desde sistemas muito simples, como o pêndulo, até em sistemas mais complexos como redes cristalinas.

O oscilador harmônico também é muito importante no estudo e na quantização do campo eletromagnético, onde podemos associar cada modo do campo a um oscilador harmônico independente.

Na mecânica clássica o movimento de uma partícula com massa  $m$  sob a ação do potencial

$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$  é descrito pela 2ª lei de Newton

$$m \frac{d^2}{dt^2}x = -\frac{d}{dx}V(x) = -kx, \quad (1.1)$$

onde  $k$  é uma constante. A solução geral para esta equação é da forma [30]

$$x = x_m \cos(\nu t - \phi), \quad (1.2)$$

onde  $\nu = \sqrt{k/m}$  é a frequência angular,  $x_m$  a amplitude máxima e  $\phi$  uma fase.

A energia cinética da partícula é

$$T = \frac{1}{2}m \left( \frac{d}{dt}x \right)^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad (1.3)$$

onde  $p$  é o momento linear. Neste caso, a energia total clássica do sistema é

$$E = V + T = \frac{mv^2x^2}{2} + \frac{p^2}{2m}. \quad (1.4)$$

Na mecânica quântica, as quantidades clássicas  $x$  e  $p$  são substituídas, respectivamente, pelos operadores  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$ , que satisfazem a relação de comutação [30]

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar. \quad (1.5)$$

Assim, obtemos para o operador Hamiltoniano (energia)  $\hat{H}$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{mv^2\hat{X}^2}{2}. \quad (1.6)$$

Podemos definir, por conveniência, dois operadores não-Hermitianos em função dos operadores  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{mv}{2\hbar}} \left( \hat{X} + \frac{i\hat{P}}{mv} \right), \quad (1.7)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{mv}{2\hbar}} \left( \hat{X} - \frac{i\hat{P}}{mv} \right), \quad (1.8)$$

conhecidos como operadores de aniquilação e criação, respectivamente. Usando a equação 1.5 obtemos a relação de comutação para  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{I}. \quad (1.9)$$

Se agora definirmos o operador número  $\hat{n}$  como

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (1.10)$$

o qual é Hermitiano, podemos obter o Hamiltoniano, equação 1.6, em uma forma simples, linear no operador número

$$\hat{H} = \hbar\nu \left( \hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.11)$$

Esta é uma importante relação entre o operador Hamiltoniano e o operador número, pois mostra que os autovetores de  $\hat{H}$  são autovetores de  $\hat{n}$ , e vice-versa. Definindo a notação

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (1.12)$$

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (1.13)$$

é possível mostrar a partir das relações  $[\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}$  e  $[\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ , obtidas da equação 1.9, que  $n$  é um número inteiro positivo, incluindo o zero. Assim, os autovalores de energia do oscilador harmônico assumem a forma

$$E_n = \hbar\nu \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.14)$$

com  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Para o estado fundamental (menor energia)  $n = 0$ , temos

$$E_0 = \frac{\hbar\nu}{2}, \quad (1.15)$$

conhecido como energia de ponto zero. Assim, a energia possui características bem distintas entre os osciladores quântico e clássico, sendo que o último possui energias contínuas a partir do zero, em contraste com os resultados apresentados nas equações 1.14 e 1.15.

Os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  atuam no *ket*  $|n\rangle$  da seguinte forma [31]

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (1.16)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (1.17)$$

e por isso a nomenclatura operadores criação e aniquilação. De modo semelhante a equação 1.12 explica a origem do termo operador número.

Da equação 1.16 podemos ver que o estado  $|n\rangle$  pode ser obtido a partir de sucessivas aplicações do operador de criação no estado de vácuo  $|0\rangle$

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad (1.18)$$

e através da equação 1.17, temos também que  $\hat{a}|0\rangle = 0$ . Os resultados da próxima seção nos permitirão interpretar os autovalores de energia, equação 1.14, como a existência de  $n$  *quanta* ou fótons de energia  $\hbar\nu$ , quando se trata da energia de um modo do campo eletromagnético.

## 1.2 Quantização do Campo Eletromagnético

Para realizar a quantização do campo eletromagnético, partiremos das equações de Maxwell, considerando o campo no vácuo e na ausência de fontes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.19)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (1.20)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -c^2 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.21)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.22)$$

onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico,  $\vec{B}$  é o campo magnético e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Podemos relacionar  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  com o potencial vetor  $\vec{A}$  através da relações

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.23)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} U, \quad (1.24)$$

onde  $U$  é o potencial escalar. Utilizando o calibre de Coulomb definido por  $U(\vec{r}, t) = 0$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , é possível utilizar as equações de Maxwell para obter a seguinte equação de onda para o potencial vetor

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.25)$$

Vamos considerar que o campo está confinado em um cubo de tamanho  $L$  e que o potencial vetor é uma somatória de ondas planas

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (1.26)$$

com as componentes do vetor  $\vec{k}$  dadas por  $k_j = 2\pi n_j / L$ , com  $n_j$  sendo um número inteiro.

Para que a equação 1.26 seja real é necessário impor que  $\vec{A}_{-\vec{k}}(t) = \vec{A}_{\vec{k}}^*(t)$ . Substituindo a equação 1.26 na equação 1.25 obtemos para as amplitudes do potencial vetor

$$\vec{A}_{\vec{k}}(t) = \vec{e}_{\vec{k}} e^{-i\nu_{\vec{k}} t} + \vec{e}_{\vec{k}}^* e^{i\nu_{\vec{k}} t}, \quad (1.27)$$

sendo  $\nu_{\vec{k}}$  a frequência do modo  $\vec{k}$ .

Para satisfazer a condição de calibre  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , os vetores  $\vec{k}$  e  $\vec{A}_{\vec{k}}$  devem ser perpendiculares. Desse fato, segue que  $\vec{e}_{\vec{k}}$  pode ser escrito como a combinação linear de dois versores ortogonais

$\vec{e}_{\vec{k}1}$  e  $\vec{e}_{\vec{k}2}$  satisfazendo

$$\vec{e}_{\vec{k}} = \varepsilon_{\vec{k}1} \vec{e}_{\vec{k}1} + \varepsilon_{\vec{k}2} \vec{e}_{\vec{k}2}, \quad (1.28)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{e}_{\vec{k}s} = 0; \quad s = 1, 2, \quad (1.29)$$

$$\vec{e}_{\vec{k}s}^* \cdot \vec{e}_{\vec{k}s'} = \delta_{ss'}, \quad (1.30)$$

$$\vec{e}_{\vec{k}1}^* \times \vec{e}_{\vec{k}2} = \vec{k}/k, \quad (1.31)$$

onde  $\varepsilon_{\vec{k}1} = \vec{e}_{\vec{k}} \cdot \vec{e}_{\vec{k}1}$  e  $\varepsilon_{\vec{k}2} = \vec{e}_{\vec{k}} \cdot \vec{e}_{\vec{k}2}$ . Utilizando as equações 1.26 e 1.28 teremos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \sum_s [u_{\vec{k}s}(t) \vec{e}_{\vec{k}s} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + u_{\vec{k}s}^*(t) \vec{e}_{\vec{k}s}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}], \quad (1.32)$$

com  $u_{\vec{k}s}(t) = \varepsilon_{\vec{k}s} e^{-iv_{\vec{k}} t}$ . Pela substituição da equação 1.32 nas equações 1.23 e 1.24, obtemos finalmente os campos elétrico e magnético

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \sum_s iv_{\vec{k}} [u_{\vec{k}s}(t) \vec{e}_{\vec{k}s} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - u_{\vec{k}s}^*(t) \vec{e}_{\vec{k}s}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}], \quad (1.33)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \sum_s [u_{\vec{k}s}(t) (\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}s}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + u_{\vec{k}s}^*(t) (\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}s}^*) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}], \quad (1.34)$$

a partir das quais podemos calcular o Hamiltoniano para o campo eletromagnético.

O Hamiltoniano para o campo eletromagnético é dado por [32]

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left[ \varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{\vec{B}^2(\vec{r}, t)}{\mu_0} \right] dv, \quad (1.35)$$

no qual substituindo as equações 1.33 e 1.34 torna-se

$$H = 2 \sum_{\vec{k}} \sum_s v_{\vec{k}}^2 |u_{\vec{k}s}(t)|^2. \quad (1.36)$$

É importante salientar que até o presente momento todas as equações para o campo eletromagnético são aquelas da Física Clássica. No intuito de obter uma forma mais propícia para efetuar a quantização, podemos empregar novas variáveis definidas como

$$q_{\vec{k}s}(t) = u_{\vec{k}s}(t) + u_{\vec{k}s}^*(t), \quad (1.37)$$

$$p_{\vec{k}s}(t) = -iv_{\vec{k}} [u_{\vec{k}s}(t) - u_{\vec{k}s}^*(t)], \quad (1.38)$$

com as quais obtemos  $H$  escrito de maneira conveniente como

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_s [p_{\vec{k}s}^2(t) + v_{\vec{k}}^2 q_{\vec{k}s}^2(t)]. \quad (1.39)$$

Notamos que o campo eletromagnético é matematicamente isomorfo a um conjunto de osciladores harmônicos independentes. Assim, para a quantização do campo, podemos usar o mesmo raciocínio da seção 1.1, substituindo as variáveis canônicas  $p_{\vec{k}s}$  e  $q_{\vec{k}s}$  pelos operadores  $\hat{p}_{\vec{k}s}$  e  $\hat{q}_{\vec{k}s}$ , respectivamente, e obter

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_s [\hat{p}_{\vec{k}s}^2(t) + v_k^2 \hat{q}_{\vec{k}s}^2(t)], \quad (1.40)$$

obedecendo a relação de comutação  $[\hat{q}_{\vec{k}s}, \hat{p}_{\vec{k}'s'}] = i\hbar \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{ss'}$ . Assim como fizemos com o oscilador harmônico simples, iremos agora definir os operadores de criação e aniquilação para o campo eletromagnético

$$\hat{a}_{\vec{k}s} = \sqrt{\frac{mv_{\vec{k}}}{2\hbar}} \left( \hat{q}_{\vec{k}s} + \frac{i\hat{p}_{\vec{k}s}}{mv} \right), \quad (1.41)$$

$$\hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger = \sqrt{\frac{mv_{\vec{k}}}{2\hbar}} \left( \hat{q}_{\vec{k}s} - \frac{i\hat{p}_{\vec{k}s}}{mv} \right), \quad (1.42)$$

em termos dos quais o Hamiltoniano da equação 1.40 pode ser reescrito, a menos de uma constante, como

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \sum_s \hbar v_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s}. \quad (1.43)$$

Os campos elétricos e magnéticos passam a ser dados por

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \sum_s \sqrt{v_{\vec{k}}} i [\hat{a}_{\vec{k}s} \vec{\epsilon}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - v_{\vec{k}}t)} - \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \vec{\epsilon}_{\vec{k}s}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - v_{\vec{k}}t)}], \quad (1.44)$$

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \sum_{\vec{k}} \sum_s \frac{1}{\sqrt{v_{\vec{k}}}} [\hat{a}_{\vec{k}s} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}s}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - v_{\vec{k}}t)} + \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger (\vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\vec{k}s}^*) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - v_{\vec{k}}t)}], \quad (1.45)$$

que são operadores Hermitianos.

### 1.3 Sistema de Dois Níveis

Os sistemas de dois níveis, comumente chamados de *qubits* nas áreas de informação quântica e computação quântica [33], são sistemas que possuem apenas duas dimensões no espaço de estados [30]. Existem sistemas físicos que possuem naturalmente apenas dois níveis, como spins-1/2 e fótons, e outros que podem ser aproximados por *qubits*, como moléculas de amônia [30].

Os *qubits* são muito utilizados por possuírem um modelo matemático simples e permitirem a verificação experimental de inúmeros fenômenos quânticos, tais como ressonância quântica [34], emaranhamento [35], oscilações de Rabi [36], coerência quântica [37], entre outros.

Para sistema de dois níveis é conveniente utilizar as matrizes de Pauli [30]

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

escritas aqui na base dos autoestados da matriz  $\sigma_z$ ,  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ . Da equação 1.46 é possível obter algumas propriedades importantes tais como

$$\text{Det}[\sigma_j] = -1; \quad \text{com } j = x, y, z, \quad (1.47)$$

$$\text{Tr}[\sigma_j] = 0, \quad (1.48)$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{I}; \quad \text{com } \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.49)$$

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z; \quad \text{e permutações cíclicas.} \quad (1.50)$$

É fundamental notar que, em conjunto com a matriz identidade  $\mathbb{I}$ , as matrizes de Pauli formam uma base no sentido de que uma matriz arbitrária  $2 \times 2$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

pode sempre ser escrita como uma combinação linear de  $\mathbb{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . De fato,

$$M = \left( \frac{M_{11} + M_{22}}{2} \right) \mathbb{I} + \left( \frac{M_{11} - M_{22}}{2} \right) \sigma_z + \left( \frac{M_{12} + M_{21}}{2} \right) \sigma_x + i \left( \frac{M_{12} - M_{21}}{2} \right) \sigma_y \quad (1.52)$$

$$= a_0 \mathbb{I} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}, \quad (1.53)$$

na qual os coeficientes  $a_0, a_x, a_y, a_z$  são números complexos.

Vamos agora definir duas novas matrizes, úteis ao longo da dissertação, em função das matrizes de Pauli

$$\sigma_+ = \frac{\sigma_x + i\sigma_y}{2}, \quad (1.54)$$

$$\sigma_- = \frac{\sigma_x - i\sigma_y}{2}, \quad (1.55)$$

conhecidas como operadores de levantamento e abaixamento, respectivamente. Podemos visualizar melhor o motivo dessa nomenclatura aplicando os operadores  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$  nos *kets*  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ ,

$$\sigma_+ |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |+\rangle, \quad (1.56)$$

$$\sigma_- |+\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |-\rangle. \quad (1.57)$$

Um cálculo análogo mostra que  $\sigma_+|+\rangle = 0 = \sigma_-|-\rangle$ , consistente com o fato do sistema possuir apenas dois níveis.

## 1.4 Interação Átomo-Campo

Um elétron atômico de carga  $e$  e massa  $m$  interagindo com um campo eletromagnético externo é descrito pelo Hamiltoniano de acoplamento mínimo (sem considerar o spin) [38]

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{p} - e\vec{A}(\vec{r},t)]^2 + eU(\vec{r},t) + V(\vec{r}), \quad (1.58)$$

sendo  $\hat{p}$  é o operador momento,  $\vec{A}(\vec{r},t)$  é o potencial vetor,  $U(\vec{r},t)$  potencial escalar e  $V(\vec{r})$  é o potencial eletrostático central. Consideraremos que o campo externo seja uma onda plana e trabalharemos no calibre de Coulomb,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = U(\vec{r},t) = 0$ .

O Hamiltoniano de acoplamento mínimo entre o átomo e o campo eletromagnético pode ser reduzido a uma forma simples usando a aproximação de dipolo. Nesta aproximação, é considerado que o comprimento de onda do campo é muito maior que a dimensão do átomo, ou seja,  $\vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1$ . Assim, se  $\vec{r}_0$  é a posição do centro de massa do átomo, podemos considerar  $e^{i\vec{k}\vec{r}} \approx e^{i\vec{k}\vec{r}_0}$  [39], e o Hamiltoniano pode ser escrito como

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{p} - e\vec{A}(\vec{r}_0,t)]^2 + V(\vec{r}). \quad (1.59)$$

A equação de Schrödinger na aproximação de dipolo e no calibre de Coulomb é então dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0,t) \right]^2 + V(\vec{r}) \right\} \Psi(\vec{r},t). \quad (1.60)$$

Para simplificar a equação 1.60, vamos definir uma nova função de onda  $\Phi(\vec{r},t)$  tal que

$$\Psi(\vec{r},t) = e^{i\frac{ie}{\hbar} \vec{A}(\vec{r}_0,t) \cdot \vec{r}} \Phi(\vec{r},t). \quad (1.61)$$

Substituindo a equação 1.61 na equação 1.60 e desprezando os termos quadráticos do potencial vetor, obtemos a nova equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r},t) = [\hat{H}_0 + \hat{H}_I] \Phi(\vec{r},t), \quad (1.62)$$

com  $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$  a parte livre e  $\hat{H}_I = -e\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}_0,t)$  a parte de interação átomo-campo. O Hamiltoniano de interação é um termo de dipolo elétrico, por isso a aproximação  $e^{i\vec{k}\vec{r}} \approx e^{i\vec{k}\vec{r}_0}$

recebe o nome de aproximação de dipolo. Vamos considerar agora a interação de um átomo de dois níveis com o campo eletromagnético quântico, realizando as alterações  $\vec{E}(\vec{r}_0, t) \Rightarrow \hat{E}(\vec{r}_0, t)$  e  $\hat{H}_0 \Rightarrow \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) + \sum_{\vec{k}} \sum_s \hbar v_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s}$ .

Os autoestados  $|i\rangle$  de  $\hat{H}_0$  formam uma base para o espaço de estados do átomo. Considerando  $\mathbb{I} = \sum_i \sigma_{ii}$ , onde  $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ , e assim

$$\hat{H}_0 = \mathbb{I} \hat{H}_0 \mathbb{I} = \sum_i E_i \sigma_{ii} + \sum_{\vec{k}} \sum_s \hbar v_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s}, \quad (1.63)$$

$$\hat{H}_I = \mathbb{I} \hat{H}_I \mathbb{I} = - \sum_{ij} \hat{\phi}_{ij} \cdot \hat{E}(\vec{r}_0, t) \sigma_{ij}, \quad (1.64)$$

com  $\hat{\phi}_{ij} = \langle i | \hat{\phi} | j \rangle$ , e  $\hat{\phi} = e\vec{r}$  é o operador de momento de dipolo. Denotaremos os dois níveis do átomo como  $|a\rangle$  (nível excitado) e  $|b\rangle$  (nível fundamental) com autovalores  $E_a = \hbar\omega_a$  e  $E_b = \hbar\omega_b$ , respectivamente. Teremos então para o Hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \quad (1.65)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \sum_s \hbar v_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s} + E_a \sigma_{aa} + E_b \sigma_{bb} - \hat{\phi}_{ab} \cdot \hat{E}(\vec{r}_0, t) \sigma_{ab} - \hat{\phi}_{ba} \cdot \hat{E}(\vec{r}_0, t) \sigma_{ba}. \quad (1.66)$$

Como  $\sigma_{ab}|b\rangle = |a\rangle$  e  $\sigma_{ba}|a\rangle = |b\rangle$ , vemos que  $\sigma_{ab}$  corresponde ao operador  $\sigma_+$ , equação 1.54, e  $\sigma_{ba}$  corresponde ao operador  $\sigma_-$  dada pela equação 1.55. Os termos correspondentes a  $\sigma_{aa}$  e  $\sigma_{bb}$  do Hamiltoniano de interação são nulos porque não existe momento de dipolo entre um mesmo nível, isto é,  $\hat{\phi}_{aa} = \hat{\phi}_{bb} = 0$ .

Obtemos então, a menos de um termo constante

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \sum_s \hbar v_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s} + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z - \hat{\phi}_{ab} \cdot \hat{E}(\vec{r}_0, t) \sigma_+ - \hat{\phi}_{ba} \cdot \hat{E}(\vec{r}_0, t) \sigma_-, \quad (1.67)$$

utilizando as relações  $E_a - E_b = \hbar\omega$  e  $\sigma_{aa} - \sigma_{bb} = \sigma_z$ . Substituindo o campo elétrico dado pela equação 1.44 no Hamiltoniano da equação 1.67, temos

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{\vec{k}} \sum_s \hbar v_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s} + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z + i\hbar \sum_{\vec{k}} \sum_s g_{\vec{k},s} \left( \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}_0 - v_{\vec{k}}t)} \sigma_+ - \hat{a}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}_0 - v_{\vec{k}}t)} \sigma_+ \right. \\ & \left. + \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}_0 - v_{\vec{k}}t)} \sigma_- - \hat{a}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}_0 - v_{\vec{k}}t)} \sigma_- \right), \end{aligned} \quad (1.68)$$

sendo

$$g_{\vec{k},s} = - \sqrt{\frac{\hbar v_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 L^3}} \frac{\hat{\phi}_{ab} \cdot \vec{e}_{\vec{k}s}}{\hbar}. \quad (1.69)$$

Algumas vezes é conveniente tratar os problemas em outras representações, ou seja, em uma representação diferente da de Schrödinger. Nesta dissertação, trataremos o Hamiltoniano acima na representação de interação [38]

$$\hat{H}_{int} = i\hbar \sum_{\vec{k}} \sum_s g_{\vec{k},s} \left( \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} e^{i(v_{\vec{k}}+\omega)t} \sigma_+ - \hat{a}_{\vec{k}s} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} e^{-i(v_{\vec{k}}-\omega)t} \sigma_+ + \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} e^{i(v_{\vec{k}}-\omega)t} \sigma_- - \hat{a}_{\vec{k}s} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} e^{-i(v_{\vec{k}}+\omega)t} \sigma_- \right), \quad (1.70)$$

utilizando a transformação  $\hat{H}_{int} = e^{iH_0 t/\hbar} H_I e^{-iH_0 t/\hbar}$  na qual

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} \sum_s \hbar v_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}s} + \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z, \quad (1.71)$$

$$H_I = i\hbar \sum_{\vec{k}} \sum_s g_{\vec{k},s} \left( \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}_0 - v_{\vec{k}} t)} \sigma_+ - \hat{a}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}_0 - v_{\vec{k}} t)} \sigma_+ + \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}_0 - v_{\vec{k}} t)} \sigma_- - \hat{a}_{\vec{k}s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}_0 - v_{\vec{k}} t)} \sigma_- \right). \quad (1.72)$$

O Hamiltoniano na representação de interação facilita a identificação dos termos dominantes na evolução temporal do sistema sob a condição de acoplamento fraco, ou seja,  $g_{\vec{k},s} \ll v_{\vec{k}} \omega$ . É possível demonstrar, no âmbito da teoria da perturbação dependente do tempo, que os termos que possuem a soma das frequências,  $v_{\vec{k}}$  e  $\omega$ , podem ser desprezados em relação aos termos que possuem a subtração dessas frequências. A aproximação na qual desprezam-se os termos rapidamente oscilantes (soma das frequências) é conhecida como aproximação de onda girante [38]. Neste caso, o Hamiltoniano do sistema na representação de interação assume a forma simples

$$\hat{H}_{int} = i\hbar \sum_{\vec{k}} \sum_s \left[ g_{\vec{k},s}(\vec{r}_0) \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger e^{i(v_{\vec{k}}-\omega)t} \sigma_- - g_{\vec{k},s}^*(\vec{r}_0) \hat{a}_{\vec{k}s} e^{-i(v_{\vec{k}}-\omega)t} \sigma_+ \right], \quad (1.73)$$

com

$$g_{\vec{k},s}(\vec{r}_0) = g_{\vec{k},s} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}_0)}. \quad (1.74)$$

## 1.5 Estados Quânticos do Oscilador Harmônico

Nesta seção, por questão de simplicidade, iremos considerar o campo eletromagnético quântico com apenas um único modo. Neste caso, os campos elétrico e magnético são dados

por

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} i \sqrt{v} [\hat{a} \vec{\epsilon} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt)} - \hat{a}^\dagger \vec{\epsilon}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt)}], \quad (1.75)$$

$$\hat{B}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{v}} [\hat{a} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt)} + \hat{a}^\dagger (\vec{k} \times \vec{\epsilon}^*) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - vt)}]. \quad (1.76)$$

Já o Hamiltoniano para o campo com apenas um modo é igual ao do oscilador harmônico quântico, equação 1.11, com autovalores e autovetores

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle. \quad (1.77)$$

A generalização para multimodos é possível fazendo o produto tensorial dos espaços de estados de cada modo.

### 1.5.1 Estado de Fock

Na quantização do campo eletromagnético, os autoestados do Hamiltoniano da equação 1.77 possuem número de fótons bem definido e por isso são denominados estados de Fock [31]. Estes estados formam uma base ortogonal completa

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad (1.78)$$

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{I}. \quad (1.79)$$

Uma importante propriedade do estado de Fock  $|n\rangle$  é que o valor esperado do campo elétrico é zero, isto é

$$\langle n|\hat{E}|n\rangle = 0. \quad (1.80)$$

Porém, o valor esperado do quadrado do campo elétrico não é nulo:

$$\langle n|\hat{E}^2|n\rangle = 2|\eta|^2 \left( \frac{n+1}{2} \right), \quad (1.81)$$

sendo  $\eta = \sqrt{\hbar v / 2\epsilon_0 L^3}$  a amplitude do campo. Do desvio quadrático médio,  $\Delta \hat{E} = \sqrt{\langle \hat{E}^2 \rangle - \langle \hat{E} \rangle^2}$ , percebemos então que há flutuações no campo proporcionais ao número de fótons. Ainda podemos notar que estas flutuações existem mesmo para o estado de vácuo  $|0\rangle$ . Essas flutuações são responsáveis por muitos fenômenos em óptica quântica, como por exemplo a emissão espontânea de um fóton por um átomo excitado no espaço livre, que veremos com mais detalhes adiante.

## 1.5.2 Estado Coerente

O estado coerente  $|\alpha\rangle$ , sendo  $\alpha$  um número complexo, surge da idéia de se criar um estado quântico que, sob certas condições, se aproxime de um estado clássico [30]. Este estado é definido como autoestado do operador de aniquilação  $\hat{a}$ , ou seja

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (1.82)$$

Diferentemente dos estados de Fock, os estados coerentes formam uma base super completa [40]

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha = \mathbb{I}, \quad (1.83)$$

e dois estados coerentes distintos não são ortogonais [38]

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{\frac{1}{2}(2\beta\alpha^* - |\alpha|^2 - |\beta|^2)}. \quad (1.84)$$

Uma maneira de gerar o estado coerente é a partir do acoplamento entre uma distribuição de corrente clássica, representada por um vetor  $\vec{J}(r,t)$ , o qual não é um operador, e o operador potencial vetor  $\hat{A}(r,t)$ . Para maiores detalhes verificar [38].

O estado coerente pode ser expandido na base de Fock como [38]

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (1.85)$$

Tal expansão facilita alguns cálculos como a probabilidade  $p(n)$  de encontrar  $n$  fótons no estado  $|\alpha\rangle$  e a dispersão  $\Delta\hat{n} = \sqrt{\langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2}$ . O resultado é

$$p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!}, \quad (1.86)$$

$$\Delta\hat{n} = |\alpha|. \quad (1.87)$$

Além disso, pode-se usar equação 1.86 para mostrar que  $\langle n\rangle = \sum_n np_n = |\alpha|^2$ . Analisando a relação

$$\frac{\Delta\hat{n}}{\langle n\rangle} = \frac{1}{|\alpha|}, \quad (1.88)$$

percebemos que no limite  $\alpha \rightarrow \infty$  o estado coerente terá energia, ou seja, número de fótons bem definido. Como o estado coerente já possui fase bem definida [38], no limite de  $\alpha$  muito grande o estado coerente se aproxima então do estado clássico para o campo eletromagnético.

Assim como ocorre para o estado de Fock é possível obter o estado coerente a partir da aplicação de um operador sobre o estado de vácuo através de

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \quad (1.89)$$

com

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}, \quad (1.90)$$

conhecido como operador de deslocamento de Glauber [38].

O operador de deslocamento é unitário, isto é,  $\hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = \mathbb{I}$  e atua nos operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  da seguinte forma [38]

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad (1.91)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (1.92)$$

### 1.5.3 Estado Comprimido

Se dois operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  satisfazem a relação de comutação  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ , a relação de incerteza de Heisenberg pode ser escrita como [31]

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|. \quad (1.93)$$

Um estado de um sistema qualquer é dito ser um estado comprimido se possui

$$\Delta\hat{A} < \sqrt{\frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|} \quad \text{ou} \quad \Delta\hat{B} < \sqrt{\frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|}. \quad (1.94)$$

No caso dos operadores  $\hat{Y}_1$  e  $\hat{Y}_2$  definidos como

$$\hat{Y}_1 = \hat{a} + \hat{a}^\dagger, \quad (1.95)$$

$$\hat{Y}_2 = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad (1.96)$$

também chamados de operadores de quadratura, obtemos a seguinte relação utilizando a equação 1.93

$$\Delta\hat{Y}_1\Delta\hat{Y}_2 \geq 1. \quad (1.97)$$

Para o estado coerente  $|\alpha\rangle$ , assim como para o estado de vácuo  $|0\rangle$ , temos que  $\Delta\hat{Y}_1 = \Delta\hat{Y}_2 = 1$ , que corresponde exatamente à mínima incerteza permitida pelo princípio de Heisenberg na

equação 1.97. Os estados que satisfazem a equação 1.94 terão incerteza (flutuações), em uma das quadraturas, menor que aquela do estado coerente (ou estado de vácuo). As flutuações nessa quadratura são então ditas comprimidas, ou seja, menores que um. Obviamente que flutuações na outra quadratura aumentarão pois é necessário satisfazer a relação de incerteza.

Estados comprimidos podem ser gerados a partir da aplicação do operador de compressão definido como [38]

$$\hat{S}(\epsilon) = e^{\frac{1}{2}(\epsilon^* \hat{a}^2 - \epsilon \hat{a}^{\dagger 2})}, \quad (1.98)$$

onde  $\epsilon = r e^{i\phi}$ , com  $r$  conhecido como parâmetro de compressão,  $0 \leq r < \infty$ , e  $\phi$  o ângulo de compressão,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Semelhante ao operador de deslocamento, o operador de compressão também é unitário  $\hat{S}^\dagger(\epsilon)\hat{S}(\epsilon) = \mathbb{I}$ . Além disso, pode-se demonstrar as seguintes propriedades de transformações dos operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  [40]

$$\hat{S}^\dagger(\epsilon)\hat{a}\hat{S}(\epsilon) = \hat{a} \cosh(r) - \hat{a}^\dagger e^{i\phi} \sinh(r), \quad (1.99)$$

$$\hat{S}^\dagger(\epsilon)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\epsilon) = \hat{a}^\dagger \cosh(r) - \hat{a} e^{-i\phi} \sinh(r). \quad (1.100)$$

Dentre os muitos estados comprimidos, aquele obtido a partir do vácuo pela aplicação do operador de compressão é um exemplo importante. Tal estado é portanto chamado de vácuo comprimido e é matematicamente dado por

$$|\epsilon\rangle = \hat{S}(\epsilon)|0\rangle. \quad (1.101)$$

Usando as equações 1.99 e 1.100, obtemos para esse estado as variâncias (quadrado das incertezas)

$$(\Delta \hat{Y}_1)^2 = \cosh(2r) - \sinh(2r) \cos(\phi), \quad (1.102)$$

$$(\Delta \hat{Y}_2)^2 = \cosh(2r) + \sinh(2r) \cos(\phi). \quad (1.103)$$

Fazendo  $\phi = 0$ , estas se reduzem à

$$(\Delta \hat{Y}_1)^2 = e^{-2r}, \quad (1.104)$$

$$(\Delta \hat{Y}_2)^2 = e^{2r}, \quad (1.105)$$

nas quais podemos verificar que a compressão ocorre apenas na quadratura  $\hat{Y}_1$ . Para  $\phi = \pi$  a compressão será apenas na quadratura  $\hat{Y}_2$ . Notamos que nos casos de  $\phi = 0$  ou  $\pi$ , o estado de vácuo comprimido é um estado de mínima incerteza, isto é, estado que tem a igualdade na equação 1.97.

### 1.5.4 Estado Térmico

No equilíbrio térmico, o estado de um sistema com Hamiltoniano  $\hat{H}$  é representado pelo operador densidade [31]

$$\hat{\rho}_t = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{\text{Tr}[e^{-\beta\hat{H}}]}, \quad (1.106)$$

onde  $\beta = (k_B T)^{-1}$ , sendo  $k_B$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura absoluta.

Para um oscilador harmônico de frequência angular  $\nu$  em um estado térmico à temperatura  $T$ , o operador densidade é

$$\hat{\rho}_t = \frac{e^{-\beta\hbar\nu\hat{n}}}{\text{Tr}[e^{-\beta\hbar\nu\hat{n}}]}. \quad (1.107)$$

Podemos ver que este operador é função apenas do operador de número  $\hat{n}$ , assim o estado térmico é diagonal na base de Fock

$$\hat{\rho}_t = \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle\langle n|, \quad (1.108)$$

onde a probabilidade  $P(n)$  é dada por

$$P_n = e^{-n\hbar\nu\beta}(1 - e^{-\hbar\nu\beta}). \quad (1.109)$$

O número médio  $\bar{n}$  é o valor esperado do operador número  $\hat{n}$ , que no caso térmico é dado por

$$\bar{n} = \langle \hat{n} \rangle, \quad (1.110)$$

$$= \frac{1}{e^{\hbar\nu\beta} - 1}, \quad (1.111)$$

da qual podemos inverter obtendo

$$e^{-\hbar\nu\beta} = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}, \quad (1.112)$$

para reescrever o estado térmico em função do número médio de fótons

$$\hat{\rho}_t = \frac{1}{\bar{n} + 1} \sum_n \left( \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n |n\rangle\langle n|. \quad (1.113)$$

## 1.5.5 Estado Gaussiano Geral

Os estados coerente, comprimido e térmico são também chamados de estados gaussianos, pois possuem a sua função característica gaussiana. A função característica nos dá todas as informações sobre o sistema, assim como o operador densidade. Neste sentido, ela é uma alternativa completa para a descrição do estado do sistema [31].

Podemos definir a função característica para  $n$ -osciladores como [31]

$$\chi(\xi, p) = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{D}(\xi)]e^{p|\xi|^2/2}, \quad (1.114)$$

com  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{C}^n$  e  $p = -1, 0, 1$ , onde cada valor do parâmetro  $p$  corresponde ao ordenamento anti-normal ( $p = -1$ ), simétrico ( $p = 0$ ) e normal ( $p = 1$ ) dos operadores criação e aniquilação. Substituindo a generalização do operador de deslocamento para o caso de  $n$  modos

$$\hat{D}(\xi) = \bigotimes_{k=1}^n \hat{D}_k(\xi_k) = \bigotimes_{k=1}^n e^{\xi_k \hat{a}_k^\dagger - \xi_k^* \hat{a}_k}, \quad (1.115)$$

na equação 1.114 obtemos

$$\chi(\xi, p) = \text{Tr}[\hat{\rho} \bigotimes_{k=1}^n e^{\xi_k \hat{a}_k^\dagger - \xi_k^* \hat{a}_k}] e^{p|\xi|^2/2}. \quad (1.116)$$

A transformada de Fourier das funções características anti-normal, simétrica e normal nos fornece as funções distribuição: função  $Q$  de Husimi, função de Wigner e função  $P$  de Glauber, respectivamente [31]. Estas funções de distribuição são similares às funções de distribuição de probabilidade, exceto pelo fato das funções de Wigner e função  $P$  poderem apresentar valores negativos. Por essa razão, muitas vezes são denominadas funções quasi-probabilidades.

Para estados gaussianos a função característica tem a seguinte forma para  $p = 0$

$$\chi(\xi) = \chi(0)e^{-\frac{1}{4}\xi^T \Gamma \xi + D^T \xi}, \quad (1.117)$$

com  $\Gamma$  uma matriz  $2n \times 2n$ ,  $D \in \mathfrak{R}^{2n}$ . O vetor  $D$  se relaciona com os primeiros momentos e a matriz  $\Gamma$  com os segundos momentos pelas seguintes relações [25]

$$D = \sigma d, \quad (1.118)$$

$$\Gamma = \sigma^T \gamma \sigma, \quad (1.119)$$

sendo  $\sigma$  uma matriz anti-simétrica  $2n \times 2n$ , conhecida como matriz simplética, dada por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.120)$$

$d$  um vetor cujos elementos são os primeiros momentos (valores médios) e  $\gamma$  a matriz das covariâncias (segundos momentos). Matematicamente [25]

$$d_j = \langle O_j \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} O_j], \quad (1.121)$$

$$\gamma_{ij} = 2\text{Re} \text{Tr}[\hat{\rho}(O_i - \langle O_i \rangle)(O_j - \langle O_j \rangle)], \quad (1.122)$$

onde  $O$  é um vetor composto dos operadores momento e posição de cada oscilador do sistema,  $O = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_n)^T$ . Essa é uma grande vantagem dos estados gaussianos, eles são completamente caracterizados pelos seus primeiros e segundos momentos, equação 1.117.

Vamos mostrar agora, como exemplo, a função característica para o estado coerente  $|\alpha\rangle$ . Por simplicidade, consideraremos um único oscilador,  $\hat{O} = (\hat{Y}_1, \hat{Y}_2)^T$ . Assim, os valores médios são dados por

$$d_1 = \langle \alpha | \hat{Y}_1 | \alpha \rangle = \alpha + \alpha^*, \quad (1.123)$$

$$d_2 = \langle \alpha | \hat{Y}_2 | \alpha \rangle = i(\alpha^* - \alpha). \quad (1.124)$$

Considerando  $\alpha$  como

$$\alpha = a + ib = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (1.125)$$

podemos simplificar as equações 1.123 e 1.124 obtendo

$$d_1 = 2a, \quad (1.126)$$

$$d_2 = 2b. \quad (1.127)$$

Já para a matriz de covariância, equação 1.122, temos

$$\gamma_{11} = 2\text{Re}[\langle \hat{Y}_1^2 \rangle - \langle \hat{Y}_1 \rangle^2] = 2\text{Re}[\langle \alpha | \hat{Y}_1^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{Y}_1 | \alpha \rangle^2] = 2, \quad (1.128)$$

$$\gamma_{12} = 2\text{Re}[\langle \hat{Y}_1 \hat{Y}_2 \rangle - \langle \hat{Y}_1 \rangle \langle \hat{Y}_2 \rangle] = 2\text{Re}[\langle \alpha | \hat{Y}_1 \hat{Y}_2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{Y}_1 | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{Y}_2 | \alpha \rangle] = 0, \quad (1.129)$$

$$\gamma_{21} = 2\text{Re}[\langle \hat{Y}_2 \hat{Y}_1 \rangle - \langle \hat{Y}_2 \rangle \langle \hat{Y}_1 \rangle] = 2\text{Re}[\langle \alpha | \hat{Y}_2 \hat{Y}_1 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{Y}_2 | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{Y}_1 | \alpha \rangle] = 0, \quad (1.130)$$

$$\gamma_{22} = 2\text{Re}[\langle \hat{Y}_2^2 \rangle - \langle \hat{Y}_2 \rangle^2] = 2\text{Re}[\langle \alpha | \hat{Y}_2^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{Y}_2 | \alpha \rangle^2] = 2, \quad (1.131)$$

onde utilizamos as equações 1.95-1.96 e a relação  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ .

Utilizando as equações 1.118-1.120 podemos obter a função característica dada pela equação 1.117,

$$\chi(\alpha) = e^{-(a^2+b^2)/2} = e^{-|\alpha|^2/2}. \quad (1.132)$$

Este resultado, obviamente, deve ser o mesmo se partimos da equação 1.114 com  $p = 0$ ,

$$\chi(\alpha) = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{D}(\alpha)], \quad (1.133)$$

$$= \langle \alpha | \hat{D}(\alpha) | \alpha \rangle, \quad (1.134)$$

$$= \langle 0 | \alpha \rangle, \quad (1.135)$$

$$= e^{-|\alpha|^2/2}. \quad (1.136)$$

De acordo com [41], podemos construir qualquer estado gaussiano (chamado estado gaussiano geral) a partir do estado térmico, equação 1.113, e dos operadores de compressão e deslocamento, equações 1.98 e 1.90, através de

$$\hat{\rho}_{GG} = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\epsilon)\hat{\rho}_t\hat{S}^\dagger(\epsilon)\hat{D}^\dagger(\alpha). \quad (1.137)$$

Para o estado gaussiano geral de um único oscilador, que será de grande interesse no decorrer da dissertação, os elementos da matriz de covariância são

$$\gamma_{11} = (2\bar{n} + 1)[\cosh(2r) - \sinh(2r) \cos(\phi)], \quad (1.138)$$

$$\gamma_{12} = -(2\bar{n} + 1)[\sinh(2r)\sin(\phi)], \quad (1.139)$$

$$\gamma_{21} = -(2\bar{n} + 1)[\sinh(2r)\sin(\phi)], \quad (1.140)$$

$$\gamma_{22} = (2\bar{n} + 1)[\cosh(2r) + \sinh(2r) \cos(\phi)]. \quad (1.141)$$

A partir da equação 1.137 podemos obter alguns dos estados apresentados neste capítulo. O estado térmico obtemos fazendo  $r = \phi = \alpha = 0$ , o estado coerente puro considerando  $r = \phi = \bar{n} = 0$  e o estado comprimido puro fazendo  $\alpha = \bar{n} = 0$ .

## 1.6 Emaranhamento

### 1.6.1 Definição

O fenômeno de *emaranhamento* é observado em sistemas quânticos compostos, ou seja, sistemas com no mínimo dois subsistemas. Tal fenômeno é um dos mais interessantes na mecânica quântica[33, 42]. Apresentaremos agora alguns resultados fundamentais sobre emaranhamento.

O espaço de estados  $\mathcal{H}$  associado com um sistema composto é o produto tensorial de cada espaço de estados  $\mathcal{H}_i$  associado com o subsistema  $i$ . Em um caso simples de um sistema quântico bipartido, isto é, sistema com dois subsistemas, temos

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (1.142)$$

A base mais natural para o espaço de estados  $\mathcal{H}$  é construída com produtos tensoriais dos vetores base de  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ . Por exemplo, tendo para  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente,

$$\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\} ; \{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}, \quad (1.143)$$

como vetores de base, então a base de  $\mathcal{H}$  é dada por

$$\{|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B, |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\}. \quad (1.144)$$

O princípio de superposição permite que o estado (puro) mais geral no espaço de estados  $\mathcal{H}$  não seja um produto tensorial dos estados de  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , mas uma superposição arbitrária de tais estados, escrita como

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} C_{ij} |i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2 = \sum_{ij} C_{ij} |ij\rangle. \quad (1.145)$$

Por definição, um estado de  $\mathcal{H}$  é dito ser emaranhado, ou não-separável, se não pode ser escrito como o produto tensorial de um estado  $|\Phi\rangle_A$  pertencendo a  $\mathcal{H}_A$  e um estado  $|\Theta\rangle_B$  pertencendo a  $\mathcal{H}_B$ . Ao contrário, se podemos escrever

$$|\psi\rangle = |\Phi\rangle_A \otimes |\Theta\rangle_B, \quad (1.146)$$

dizemos que o estado  $|\psi\rangle$  é separável, ou seja, não-emaranhado. Como exemplo de estado emaranhado, considere o estado de dois *qubits* ( $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ )

$$|\psi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle). \quad (1.147)$$

Pode-se mostrar que não existe nenhuma operação unitária atuando em  $\mathcal{H}$  que leva  $|\psi\rangle_1$  a uma forma fatorada (equação 1.146). Como exemplo de estado não-emaranhado considere

$$|\psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |11\rangle), \quad (1.148)$$

que é separável porque podemos escrevê-lo na forma fatorada (equação 1.146) como

$$|\psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle]. \quad (1.149)$$

Quando dois sistemas são emaranhados, não é possível determinar seus vetores de estado individuais,  $|\Phi\rangle_A$  e  $|\Theta\rangle_B$ . Nesse caso, cada subsistema é descrito por um operador (operador densidade) [31].

Um estado de mistura estatística  $\hat{\rho}$  descrevendo um sistema cujo espaço de estados é  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  é dito ser emaranhado quando não puder ser escrito como

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i. \quad (1.150)$$

sendo  $p_i$  a probabilidade estatística do estado  $i$ . Um exemplo de estado misto emaranhado é o estado de Werner [43]

$$\hat{\rho}_1 = \frac{1}{8}\mathbb{I} + \frac{1}{2}|\psi^-\rangle\langle\psi^-|, \quad (1.151)$$

sendo  $\mathbb{I}$  a identidade e  $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ . Como exemplo de estado misto separável temos

$$\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11|), \quad (1.152)$$

pois podemos escrever da forma fatorável, equação 1.150,

$$\hat{\rho}_2 = \frac{1}{2}[(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \otimes |1\rangle\langle 1|]. \quad (1.153)$$

Além de vários aspectos qualitativos, o emaranhamento é visto como um importante recurso para processamento de informação quântica [44]. Esse recurso permite a realização de tarefas que são impossíveis ou ineficientemente realizadas com estados separáveis. Um exemplo é o teletransporte quântico proposto por Bennett et al [45].

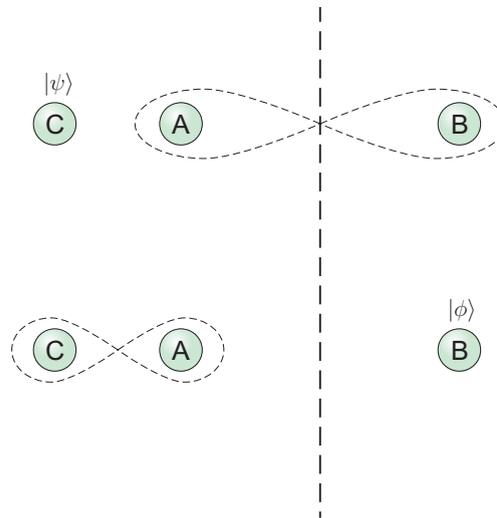


Figura 1.1: Teletransporte do estado da partícula C para a partícula B. A linha tracejada indica que as partículas A e C estão localmente separadas da partícula B e o tempo corre de cima para baixo.

O teletransporte do estado  $|\psi\rangle$  da partícula  $C$  para a partícula  $B$  com uma fidelidade  $F$ ,  $F = \langle \psi|\phi\rangle$ , acima de  $\frac{2}{3}$  só é possível utilizando um canal emaranhado, na figura acima, o par de partículas  $AB$ . Se este canal for maximamente emaranhado, o estado teletransportado  $|\phi\rangle$  é exatamente igual ao estado  $|\psi\rangle$ . Se o estado das partículas  $A$  e  $B$  forem separáveis, a fidelidade do teletransporte será sempre menor ou igual à  $\frac{2}{3}$ .

Assim, naturalmente surge a pergunta: Dado um sistema quântico composto de dois ou mais subsistemas, como saber se ele é emaranhado ou não?

## 1.6.2 Critérios de Separabilidade

Como resposta a pergunta do item anterior, apresentaremos aqui dois critérios de separabilidade, a decomposição de Schmidt e o critério Peres-Horodecki [46, 47].

*Decomposição de Schmidt.* Seja  $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  um estado puro bipartido. Se  $\{|i\rangle\}$  e  $\{|j\rangle\}$  são bases ortonormais de  $\mathcal{H}_A$  e  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente, podemos expandir o estado da seguinte maneira

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} C_{ij}|ij\rangle. \quad (1.154)$$

A matriz quadrada  $C$  cujos elementos são os coeficientes  $C_{ij}$  da expansão acima pode ser decomposta, como  $C = UDV$  [48], onde  $U$  e  $V$  são matrizes unitárias e  $D$  uma matriz diagonal positiva semidefinida, ou seja, possui autovalores maiores ou iguais a zero. Logo,

$$|\psi\rangle = \sum_{ijk} U_{ik} D_{kk} V_{kj} |ij\rangle. \quad (1.155)$$

Podemos definir  $|k_A\rangle = \sum_i U_{ik}|i\rangle$ ,  $|k_B\rangle = \sum_j V_{kj}|j\rangle$  e  $\lambda_k = D_{kk}$ , ficando com a seguinte expressão

$$|\psi\rangle = \sum_k \lambda_k |k_A k_B\rangle, \quad (1.156)$$

onde  $\lambda_k$  são números reais positivos, satisfazendo  $\sum_k \lambda_k^2 = 1$ , conhecidos como coeficientes de Schmidt. Podemos mostrar que os coeficientes de Schmidt são invariantes por operações locais, como segue

$$|\tilde{\psi}\rangle = U|\psi\rangle, \quad (1.157)$$

com  $U$  uma operação local

$$U = U_A \otimes U_B. \quad (1.158)$$

Assim

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum_k \lambda_k U_A |k_A\rangle \otimes U_B |k_B\rangle, \quad (1.159)$$

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum_k \lambda_k |\tilde{k}_A \tilde{k}_B\rangle, \quad (1.160)$$

com os mesmos coeficientes de Schmidt. Desse fato, temos que um estado é emaranhado se este possuir mais que um coeficiente de Schmidt, isto é, possuir no mínimo dois coeficientes de Schmidt.

*Cr terio Peres-Horodecki.* O cr terio Peres-Horodecki   baseado em transposi o parcial de um sistema. Dadas as bases ortonormais quaisquer  $\{|e_m\rangle\}$  de  $\mathcal{H}_A$  e  $\{|f_n\rangle\}$  de  $\mathcal{H}_B$ , aplicando a transposi o parcial aos elementos de matriz  $\hat{\rho}_{\mu\alpha\eta\beta}$  de um estado arbitrário  $\hat{\rho}$  atuando em  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , obtemos

$$\hat{\rho}_{\mu\alpha\eta\beta}^{T_B} = \langle e_\mu \otimes f_\alpha | \hat{\rho}^{T_B} | e_\eta \otimes f_\beta \rangle = \langle e_\mu \otimes f_\beta | \hat{\rho} | e_\eta \otimes f_\alpha \rangle = \hat{\rho}_{\mu\beta\eta\alpha}. \quad (1.161)$$

Essa transforma o corresponde a transpormos apenas os elementos de matriz correspondentes ao segundo subsistema, em outras palavras, aplicarmos a transforma o  $\mathbb{I}_A \otimes T_B$ , onde  $\mathbb{I}_A$    a identidade no subsistema  $A$  e  $T_B$    a transposi o no subsistema  $B$ .

Considerando um estado separável arbitrário  $\hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i$ , a matriz transposta parcial   simplesmente

$$\hat{\rho}' = (\mathbb{I}_A \otimes T_B) \hat{\rho} = \sum_i p_i \hat{\rho}_A^i \otimes (\hat{\rho}_B^i)^T. \quad (1.162)$$

Como a transposi o preserva tanto o traço quanto os autovalores e hermiticidade de  $\hat{\rho}_B^i$ , vemos que  $(\hat{\rho}_B^i)^T$  representa um estado leg timo\* e, conseqentemente,  $\hat{\rho}'$  também corresponde a um estado legítimo. Logo, chegamos   seguinte condi o necessária para separabilidade

*Seja  $\hat{\rho}$    um estado separável, então a matriz densidade transposta parcial de  $\hat{\rho}$  também   um estado.*

Assim, dado um estado arbitrário, se sua transposta parcial não corresponder a um estado legítimo, conclui-se que o estado em questão não tem a forma da equa o 1.162, e   portanto emaranhado. Na prática, basta checar se a matriz transposta parcial possui algum autovalor negativo para ser emaranhado. O cr terio Peres-Horodecki também   condi o suficiente para sistemas com dimensões  $2 \otimes 2$ ,  $2 \otimes 3$  [47] e para estados gaussianos [49].

---

\*Para descrever um estado físico, o operador densidade, deve: (i) ser Hermitiano; (ii) ser positivo semidefinido; (iii) ter traço unitário.

Utilizando o critério Peres-Horodecki vamos verificar se o estado na equação 1.151 é realmente emaranhado. Escrevendo o estado de forma explícita temos

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1 &= \frac{1}{8}[|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|] + \frac{1}{4}[|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01|], \\ &= \frac{1}{8}[|00\rangle\langle 00| + 3|01\rangle\langle 01| + 3|10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| - 2|01\rangle\langle 10| - 2|10\rangle\langle 01|].\end{aligned}\quad (1.163)$$

Fazendo a transposição parcial sobre o subsistema  $B$ , ou seja, trocando linhas por colunas, obtemos

$$\hat{\rho}_1^{T_B} = \frac{1}{8}[|00\rangle\langle 00| + 3|01\rangle\langle 01| + 3|10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| - 2|00\rangle\langle 11| - 2|11\rangle\langle 00|],\quad (1.164)$$

com autovalores  $\{\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\}$ . Como esse estado possui pelo menos um autovalor negativo após a transposição parcial, concluímos que ele é emaranhado.

### 1.6.3 Quantificação de Emaranhamento

Obviamente depois do conhecimento do que é emaranhamento, qual a sua importância e como definir se um estado é emaranhado ou não, devemos nos preocupar em saber quanto emaranhamento certo sistema possui, isto é, devemos aprender a quantificar o emaranhamento. Este será nosso objetivo neste item.

Atualmente não está fechado todos os requisitos que uma medida de emaranhamento  $E$  deve satisfazer [44, 50], entretanto, podemos listar alguns [50]:

- Se  $\hat{\rho}$  é separável, então  $E(\hat{\rho}) = 0$ .
- *Não aumentar com OLCC*: Aplicando operações locais (OL) em  $\hat{\rho}$  e se comunicando classicamente (CC) não se pode aumentar o emaranhamento de  $\hat{\rho}$

$$E(\Lambda_{OLCC}(\hat{\rho})) \leq E(\hat{\rho}).\quad (1.165)$$

- *Continuidade*: No limite em que a distância entre dois estados tende a zero, a diferença entre seus emaranhamentos deve tender a zero

$$E(\hat{\rho}) - E(\hat{\sigma}) \rightarrow 0\quad (1.166)$$

para  $\|\hat{\rho} - \hat{\sigma}\| \rightarrow 0$ , sendo  $\|\cdot\|$  alguma função distância.

- *Aditividade*: O emaranhamento de  $n$  cópias idênticas de  $\hat{\rho}$  deve ser igual a  $n$  vezes o emaranhamento de uma cópia de  $\hat{\rho}$ , isto é:

$$E(\hat{\rho}^{\otimes n}) = nE(\hat{\rho}). \quad (1.167)$$

- *Convexidade*: O emaranhamento deve ser uma função convexa, ou seja:

$$E(\lambda\hat{\rho} + (1 - \lambda)\hat{\sigma}) \leq \lambda E(\hat{\rho}) + (1 - \lambda)E(\hat{\sigma}) \quad (1.168)$$

para  $0 < \lambda < 1$ .

O primeiro requisito vem da própria definição de emaranhamento, ou seja, se o estado do sistema pode ser escrito como produto de estados dos seus subsistemas, esse sistema não é emaranhado. O requisito seguinte trata do comportamento do emaranhamento sobre operações locais, ou seja, medidas, mudanças de base e comunicação clássica. Uma vez que o emaranhamento é uma propriedade não-local, ele não pode aumentar com operações locais. O terceiro requisito diz que uma medida de emaranhamento deve ser contínua, uma vez que alterando um estado infinitesimalmente, o emaranhamento deve ser alterado por quantidades infinitesimais. O quarto requisito exige que  $n$  cópias independentes de um estado  $\hat{\rho}$  tenham  $n$  vezes a quantidade de emaranhamento de cada cópia. O último requisito está relacionado com a perda de informação, pois uma soma convexa de estados leva à um estado de mistura estatística, que consequentemente possuirá menor emaranhamento.

Existem várias medidas de emaranhamento, cada uma com suas peculiaridades, mas daremos ênfase nas medidas usadas nesta dissertação, ou seja, a entropia de emaranhamento, entropia linear, negatividade logarítmica e emaranhamento destilável. Vamos nos restringir ao emaranhamento bipartido, isto é, emaranhamento entre dois subsistemas.

*Entropia de Emaranhamento.* A entropia de emaranhamento  $E(\hat{\rho}_{AB})$  é uma medida do grau de mistura do estado quântico reduzido [51]. Ela é definida como a entropia de von Neumann,  $S(\hat{\rho}_i)$ , para um dos estados reduzidos de um estado  $\hat{\rho}_{AB}$  puro de dois subsistemas,  $A$  e  $B$  [52]

$$E(\hat{\rho}_{AB}) = S(\hat{\rho}_A) = -\text{Tr}[\hat{\rho}_A \ln(\hat{\rho}_A)], \quad (1.169)$$

onde  $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B[\hat{\rho}_{AB}]$  é o operador densidade do subsistema  $A$ .

A entropia de von Neumann tem um papel importante na correspondência entre o emaranhamento e a Termodinâmica. A entropia de von Neumann pode ser vista como o equivalente

quântico da entropia de Gibbs-Boltzmann

$$E = -k \sum_i p_i \ln(p_i), \quad (1.170)$$

com  $k$  a constante de Boltzmann e  $p_i$  a probabilidade de uma partícula estar no estado  $i$ .

Além disso, existe também uma outra correspondência formal. Esta correspondência se dá por alguns princípios existentes na Termodinâmica que são aplicados ao emaranhamento. Um princípio é a impossibilidade de se construir uma máquina *perpetuum mobile*, resultado da segunda lei da Termodinâmica. A correspondência com o emaranhamento se dá pela impossibilidade de criar (ou aumentar) o emaranhamento entre sistemas quânticos distantes por operações locais, como descrito no item dos requisitos exigidos as medidas de emaranhamento, expressos na equação 1.165. O análogo de uma máquina térmica reversível é qualquer transformação reversível, consistindo somente de operações locais que transformam um estado emaranhado em outro. Outro princípio é o limite termodinâmico, que exige a definição de quantidades intensivas. Assim, uma medida de emaranhamento também deve ser uma grandeza intensiva, isto é, a medida de emaranhamento de  $n$  estados iguais emaranhados deve ser proporcional a  $n$ , ou seja,  $E(\hat{\rho}^{\otimes n}) = nE(\hat{\rho})$  [53], sendo que esta correspondência também faz parte das propriedades das medidas de emaranhamento, equação 1.167.

Podemos demonstrar que para estados puros a entropia de von Neumann do subsistema  $A$  é igual àquela para o subsistema  $B$ . De fato, utilizando a desigualdade de Araki-Lieb [54]

$$S(\hat{\rho}_{AB}) \leq |S(\hat{\rho}_A) - S(\hat{\rho}_B)|, \quad (1.171)$$

temos que  $S(\hat{\rho}_A) = S(\hat{\rho}_B)$ , onde  $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A[\hat{\rho}_{AB}]$ .

Se  $\hat{\rho}_A$  estiver diagonalizado, podemos escrever a entropia de emaranhamento como

$$S(\hat{\rho}_A) = - \sum_i p_i \ln(p_i), \quad (1.172)$$

onde  $p_i$  são os autovalores de  $\hat{\rho}_A$ . A entropia de emaranhamento somente é válida para quantificar emaranhamento em sistemas cujo estado  $\hat{\rho}_{AB}$  é puro.

*Negatividade Logarítmica.* A negatividade logarítmica é uma medida de emaranhamento que quantifica a violação do critério Peres-Horodecki apresentado na seção 1.6.2. A negatividade  $\mathfrak{N}(\hat{\rho})$  é definida como

$$\mathfrak{N}(\hat{\rho}) = \frac{\|\hat{\rho}^{T_B}\| - 1}{2}, \quad (1.173)$$

onde  $\|\hat{\rho}^{T_B}\| = \text{Tr}[\sqrt{\hat{\rho}^{T_B\dagger}\hat{\rho}^{T_B}}]$  é a norma-traço de  $\hat{\rho}^{T_B}$  (transposta parcial de  $\hat{\rho}$  em relação ao subsistema  $B$ ). A negatividade logarítmica é dada por

$$N(\hat{\rho}) = \ln\|\hat{\rho}^{T_B}\|. \quad (1.174)$$

Já sabemos que o estado da equação 1.151 é emaranhado, mas agora através da negatividade logarítmica podemos saber o quanto esse estado possui de emaranhamento. Utilizando o estado da equação 1.164, onde foi feita a transposição parcial na base dos seus autovetores, temos

$$\tilde{\rho}_1^{T_B} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad (1.175)$$

implicando na norma-traço  $\|\tilde{\rho}_1^{T_B}\| = \frac{10}{8}$ . Assim o emaranhamento do estado  $\hat{\rho}_1$ , equação 1.151, é

$$N(\hat{\rho}_1) = \ln\|\tilde{\rho}_1^{T_B}\| = 0,223144. \quad (1.176)$$

Para estados gaussianos, que é de nosso interesse, a negatividade logarítmica é relacionada apenas com a matriz de covariância definida na equação 1.122, e é dada por [25]

$$N(\hat{\rho}) = -\sum_{j=1}^2 \ln[\min(1, |\gamma_j^{T_B}|)], \quad (1.177)$$

onde  $\gamma_j^{T_B}$  são os autovalores simpléticos da matriz de covariância transposta parcialmente  $\gamma^{T_B}$ . A transposição parcial é obtida a partir de [25]

$$\gamma^{T_B} = P\gamma P, \quad (1.178)$$

sendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.179)$$

e os autovalores simpléticos são obtidos como módulo dos autovalores da matriz  $\sigma^{-1}\gamma^{T_B}$ , com  $\sigma$  dada pela equação 1.120 [25].

*Emaranhamento Destilável.* Emaranhamento destilável surgiu da dificuldade de se obter estados puros maximamente emaranhados nos laboratórios, sendo que estes são fundamentais nas aplicações práticas. Esta dificuldade deve-se às imperfeições nas operações nos estados e às perdas da coerência quântica (decoerência) pela interação com o ambiente. Bennett et al. [55]

foram os primeiros a considerar a destilação (purificação) de emaranhamento. Quando duas partes distantes compartilham  $n$  cópias de um estado misto bipartido, que contém emaranhamento não puro, eles podem realizar operações locais e comunicação clássica (OLCC) e obter  $m$  cópias de um estado muito próximo de um estado puro emaranhado, com  $m$  sempre menor que  $n$ . Uma sequência de OLCC realizando esta tarefa é chamada de purificação de emaranhamento ou protocolo de destilação de emaranhamento. O maior interesse são nos protocolos ótimos de destilação de emaranhamento, ou seja, nos que resultam em uma fração  $\frac{m}{n}$  máxima no limite de um número  $n$  grande de cópias de entrada. Essa fração ótima é chamada de emaranhamento destilável, e satisfaz os requisitos já apresentados anteriormente.

De uma maneira mais formal, temos que o emaranhamento destilável  $E_D$  caracteriza a quantidade de emaranhamento de um estado  $\rho$ , como a fração de estados maximamente emaranhados que podem ser destilados usando um protocolo de purificação ótimo:  $E_D \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$ , onde  $n$  é o número de cópias de  $\hat{\rho}$  e  $m$  é o número máximo de estados maximamente emaranhados que podem ser destilados de  $\hat{\rho}$ . O emaranhamento destilável relaciona-se com as entropias através de [44]

$$E_D(\hat{\rho}_{AB}) \leq \max[S(\hat{\rho}_B) - S(\hat{\rho}_{AB}), 0]. \quad (1.180)$$

*Entropia Linear.* A entropia linear é uma medida de emaranhamento para um estado puro  $\hat{\rho}_{AB}$  baseada na pureza dos estados reduzidos. Para o estado reduzido  $\hat{\rho}_A$  do sistema  $A$  possuindo dimensão  $d$ , ela é definida como [56]

$$S_L(\hat{\rho}_A) = \frac{d}{d-1} [1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_A^2)]. \quad (1.181)$$

Note que na entropia linear, assim como na entropia de von Neumann, a escolha do subsistema  $A$  ou  $B$  é indiferente. Tal fato segue da desigualdade de Araki-Lieb, mostrada na equação 1.171. Com essa definição,  $S_L(\hat{\rho}_A)$  varia de 0 (para estado não-emaranhado) à 1 (para estado maximamente emaranhado). Geralmente a entropia linear é mais simples de calcular do que a entropia de emaranhamento, pois não é necessário fazer a diagonalização do operador densidade reduzido.

A entropia linear também é considerada como uma aproximação da entropia de emaranhamento em primeira ordem. Da equação 1.169 temos

$$S(\hat{\rho}_A) = -\text{Tr}[\hat{\rho}_A \ln(\hat{\rho}_A)]. \quad (1.182)$$

Usando a expansão

$$\ln(y) = (y - 1) - \frac{(y - 1)^2}{2} + \frac{(y - 1)^3}{3} - \frac{(y - 1)^4}{4} + \dots, \quad (1.183)$$

com  $0 < y < 2$ , podemos expandir o logaritmo da equação 1.182 em primeira ordem como

$$\ln(\hat{\rho}_A) \simeq \hat{\rho}_A - 1, \quad (1.184)$$

que substituindo na entropia de emaranhamento resulta

$$S_L(\hat{\rho}_A) = 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_A^2). \quad (1.185)$$

Para um estado puro  $\hat{\rho}_{AB}$  maximamente emaranhado, sabemos que  $\hat{\rho}_A = \mathbb{I}/d$ . Nesse caso,

$$S_L(\hat{\rho}_A) = 1 - \frac{1}{d}, \quad (1.186)$$

$$= \frac{d - 1}{d}, \quad (1.187)$$

assim para o emaranhamento estar normalizado entre 0 e 1 devemos acrescentar o fator  $\frac{d}{d-1}$ , obtendo finalmente

$$S_L(\hat{\rho}_A) = \frac{d}{d-1} [1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_A^2)]. \quad (1.188)$$

# Capítulo 2

## Emaranhamento na Emissão Espontânea

Além da importância do emaranhamento como um recurso, comentado na subseção 1.6.1, existem alguns trabalhos que investigaram a conexão entre a matéria e a teoria de informação quântica [57, 58] e apontaram que o emaranhamento pode ser importante em outras áreas além da informação quântica pura, como nas áreas de Física do estado sólido [59], Biofísica [60] e Cosmologia [61].

Considerando então o emaranhamento como uma legítima quantidade física, estudamos seu comportamento no fenômeno da emissão espontânea atômica, que é um dos processos físicos mais fundamentais da natureza.

O sucesso da descrição do decaimento atômico no espaço livre é uma das notáveis conquistas da teoria quântica da radiação. Esta mostra que as flutuações do campo eletromagnético no espaço livre são responsáveis pelo decaimento atômico. Apresentaremos agora o tratamento teórico desse problema, a chamada teoria de Weisskopf-Wigner [29]. Usando essa teoria, vamos estudar o emaranhamento entre os modos dos campos e o emaranhamento entre o átomo e o campo eletromagnético. Estes resultados foram publicados em [62].

### 2.1 Teoria de Weisskopf-Wigner

Começamos com o Hamiltoniano átomo-campo dado pela equação 1.73

$$\hat{H}_{int} = i\hbar \sum_{\vec{k}} \sum_s \left[ g_{\vec{k},s}(\vec{r}_0) \hat{a}_{\vec{k}s}^\dagger e^{i(v_{\vec{k}} - \omega)t} \sigma_- - g_{\vec{k},s}^*(\vec{r}_0) \hat{a}_{\vec{k}s} e^{-i(v_{\vec{k}} - \omega)t} \sigma_+ \right]. \quad (2.1)$$

Assumimos que inicialmente ( $t_0 = 0$ ) o átomo está no estado excitado  $|a\rangle$  e os modos do campo estão no estado de vácuo  $|0\rangle = |0,0,\dots,0\rangle$ . O vetor de estado para o sistema é então

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t)|a,0\rangle + \sum_{\vec{k},s} c_{b,\vec{k},s}(t)|b,1_{\vec{k},s}\rangle, \quad (2.2)$$

sendo  $|1_{\vec{k},s}\rangle$  o estado do campo com um fóton no modo  $\{\vec{k},s\}$  e o restante no estado de vácuo, e

$$c_a(0) = 1, \quad (2.3)$$

$$c_{b,\vec{k},s}(0) = 0. \quad (2.4)$$

Da equação de Schrödinger na representação de interação

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{int}|\psi(t)\rangle, \quad (2.5)$$

encontramos as equações de movimento para as amplitudes de probabilidades

$$\frac{d}{dt}c_a(t) = -\sum_{\vec{k},s} g_{\vec{k},s}^*(\vec{r}_0)e^{i(\omega-v_{\vec{k}})t}c_{b,\vec{k},s}(t), \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt}c_{b,\vec{k},s}(t) = g_{\vec{k},s}(\vec{r}_0)e^{-i(\omega-v_{\vec{k}})t}c_a(t). \quad (2.7)$$

Podemos integrar a equação 2.7

$$c_{b,\vec{k},s}(t) = g_{\vec{k},s}(\vec{r}_0) \int_0^t dt' e^{-i(\omega-v_{\vec{k}})t'} c_a(t'), \quad (2.8)$$

e substituí-la na equação 2.6, o que resulta em

$$\frac{d}{dt}c_a(t) = -\sum_{\vec{k},s} |g_{\vec{k},s}(\vec{r}_0)|^2 \int_0^t dt' e^{i(\omega-v_{\vec{k}})(t-t')} c_a(t'). \quad (2.9)$$

Ressaltamos que até aqui não fizemos nenhuma aproximação.

Assumindo que os modos são muito próximos em frequência, que é uma característica do espaço livre, podemos trocar a somatória por uma integral, que em coordenadas esféricas é dada por [38]

$$\sum_{\vec{k},s} \rightarrow 2\frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty dk k^2, \quad (2.10)$$

com  $V$  sendo o volume do cubo utilizado na seção 1.2. Da equação 1.74 temos

$$|g_{\vec{k},s}(\vec{r}_0)|^2 = \frac{v_{\vec{k}}}{2\hbar\epsilon_0 V} \hat{\phi}_{ab}^2 \cos^2 \theta, \quad (2.11)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o momento de dipolo elétrico e o vetor de onda do campo. Obtemos então para a equação 2.9

$$\frac{d}{dt}c_a(t) = -\frac{4\hat{\phi}_{ab}^2}{(2\pi)^2 6\hbar\epsilon_0 c^3} \int_0^\infty dv_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^3 \int_0^t dt' e^{i(\omega - v_{\vec{k}})(t-t')} c_a(t'), \quad (2.12)$$

onde foi feita a integração sobre  $\theta$  e  $\phi$  e utilizado  $k = \frac{v_{\vec{k}}}{c}$ . Vamos considerar que a intensidade da luz associada com a radiação emitida é muito centrada em torno da frequência atômica  $\omega$ , ou seja,  $v_{\vec{k}} \approx \omega$ . Assim, podemos trocar  $v_{\vec{k}}^3$  por  $\omega^3$  e o limite inferior da integração em  $v_{\vec{k}}$  por  $-\infty$ , obtendo

$$\frac{d}{dt}c_a(t) = -\frac{4\hat{\phi}_{ab}^2 \omega^3}{(2\pi)^2 6\hbar\epsilon_0 c^3} \int_0^t dt' \int_{-\infty}^\infty dv_{\vec{k}} e^{i(\omega - v_{\vec{k}})(t-t')} c_a(t'), \quad (2.13)$$

$$= -\frac{4\hat{\phi}_{ab}^2 \omega^3}{(2\pi)^2 6\hbar\epsilon_0 c^3} \int_0^t dt' \frac{2\pi\delta(t-t')}{2} c_a(t'), \quad (2.14)$$

$$= -\frac{4\hat{\phi}_{ab}^2 \omega^3}{4\pi 6\hbar\epsilon_0 c^3} c_a(t), \quad (2.15)$$

$$= -\frac{\Gamma}{2} c_a(t), \quad (2.16)$$

com  $\Gamma = \frac{4\hat{\phi}_{ab}^2 \omega^3}{3\hbar c^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  (real e positivo). A solução da equação 2.16 é

$$c_a(t) = e^{-\Gamma t/2}, \quad (2.17)$$

o que leva a

$$|c_a(t)|^2 = e^{-\Gamma t}, \quad (2.18)$$

ou seja, a probabilidade de encontrar um átomo no estado excitado no espaço livre (vácuo) decai exponencialmente, com tempo de vida  $\tau = 1/\Gamma$ . Tal comportamento é observado experimentalmente [63, 64].

Substituindo a equação 2.17 na 2.8 obtemos

$$c_{b,\vec{k},s}(t) = g_{\vec{k},s}(\vec{r}_0) \int_0^t dt' e^{-i(\omega - v_{\vec{k}})t' - \Gamma t'/2}, \quad (2.19)$$

$$= ig_{\vec{k},s}(\vec{r}_0) \left[ \frac{1 - e^{-i(\omega - v_{\vec{k}})t - \Gamma t/2}}{(v_{\vec{k}} - \omega) + i\Gamma/2} \right]. \quad (2.20)$$

Finalmente obtemos a seguinte forma para o vetor de estado para o átomo e o campo

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\Gamma t/2} |a,0\rangle + \sum_{\vec{k},s} ig_{\vec{k},s}(\vec{r}_0) \left[ \frac{1 - e^{-i(\omega - v_{\vec{k}})t - \Gamma t/2}}{(v_{\vec{k}} - \omega) + i\Gamma/2} \right] |b,1_{\vec{k},s},\{0}\rangle. \quad (2.21)$$

## 2.2 Emaranhamento entre os modos do campo

Vamos agora estudar o emaranhamento contido nos modos do campo eletromagnético do espaço livre devido à emissão espontânea de um fóton pelo átomo. O estado do campo após a emissão é denotado por  $|\gamma_0\rangle$  e é obtido da equação 2.21 considerando  $t \gg \Gamma^{-1}$

$$|\gamma_0\rangle = \sum_{\vec{k},s} \frac{ig_{\vec{k},s}(\vec{r}_0)}{(v_{\vec{k}} - \omega) + i\Gamma/2} |1_{\vec{k},s}\rangle |0\rangle. \quad (2.22)$$

Este estado representa uma superposição das diferentes possibilidades de distribuição de um fóton entre os infinitos modos, conseqüentemente é um estado emaranhado multipartido. Existem muitas maneiras de separar este estado em duas partições, e escolhemos aquela apresentada na figura 2.1. Uma partição é formada por um modo central com frequência  $v_{\vec{q}}$  e modos distribuídos no intervalo  $(v_{\vec{q}} - \delta, v_{\vec{q}} + \delta)$ , chamada de partição *A*, e a outra partição é formada pelos modos restantes e chamada de partição *B*. Esta é uma escolha fisicamente interessante porque nos permite estudar o efeito de ter  $v_{\vec{q}}$  próximo ou longe da ressonância com a frequência  $\omega$  do átomo, através do parâmetro  $\Delta = v_{\vec{q}} - \omega$ , e verificar qual a importância do tamanho da partição via parâmetro  $\delta$ .

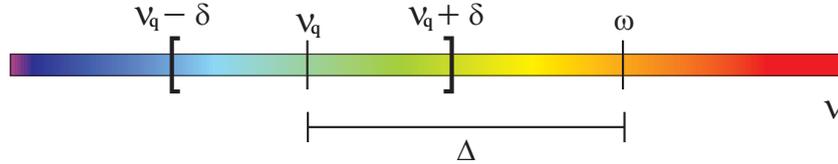


Figura 2.1: Bipartição teórica do campo eletromagnético no espaço livre.  $\Delta$  é a dissonância entre  $v_{\vec{q}}$  e  $\omega$ .

Como  $|\gamma_0\rangle$  é um estado puro, a medida de emaranhamento apropriada entre as partições *A* e *B* do sistema é a entropia de emaranhamento, discutida na seção 1.6.3. Para calculá-la é necessário obter o operador densidade reduzido de uma das partições. O estado reduzido para a partição *A* pode ser obtido da equação 2.22 traçando os modos da partição *B*. Assim, obtemos

$$\hat{\rho}_A = \sum_{\vec{k}_j,s} |p_j|^2 |0\rangle\langle 0| + \sum_{\vec{k}_m, \vec{k}_n,s} p_m p_n^* |1_{\vec{k}_m,s}\rangle\langle 1_{\vec{k}_n,s}|, \quad (2.23)$$

onde  $\vec{k}_j$  referem-se aos vetores de onda dos modos da partição *B*,  $\vec{k}_m$  ( $\vec{k}_n$ ) referem-se aos modos da partição *A*,  $|0\rangle$  ao estado de vácuo dos modos na partição *A*,  $|1_{\vec{k}_m,s}\rangle$  ao estado com um

fóton no modo  $\vec{k}_{m(n),s}$  da partição  $A$  e vácuo para o restante dos modos desta partição e

$$p_l = \frac{i g_{\vec{k}_l, s}(\vec{r}_0)}{(v_{\vec{k}} - \omega) + i\Gamma/2}. \quad (2.24)$$

Diagonalizando o estado  $\hat{\rho}_A$ , verificamos que este possui apenas dois autovalores diferentes de zero, denotados aqui por  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e dados por

$$\lambda_1 = \sum_{\vec{k}_j, s} |p_j|^2, \quad (2.25)$$

$$\lambda_2 = \sum_{\vec{k}_n, s} |p_n|^2. \quad (2.26)$$

Assim, temos para a entropia de von Neumann do estado reduzido e, portanto, a entropia de emaranhamento a seguinte equação

$$S(\hat{\rho}_A) = -\lambda_1 \log_2(\lambda_1) - \lambda_2 \log_2(\lambda_2). \quad (2.27)$$

Assim como fizemos anteriormente, vamos substituir a somatória por uma integral obtendo

$$\lambda_1 = \frac{\hat{\phi}_{ab}^2}{6\pi^2 \hbar \epsilon_0 c^3} \left[ \int_0^{v_{\vec{q}} - \delta} \frac{v^3}{(v - \omega)^2 + \Gamma^2/4} dv + \int_{v_{\vec{q}} + \delta}^{\infty} \frac{v^3}{(v - \omega)^2 + \Gamma^2/4} dv \right], \quad (2.28)$$

$$\lambda_2 = \frac{\hat{\phi}_{ab}^2}{6\pi^2 \hbar \epsilon_0 c^3} \left[ \int_{v_{\vec{q}} - \delta}^{v_{\vec{q}} + \delta} \frac{v^3}{(v - \omega)^2 + \Gamma^2/4} dv \right]. \quad (2.29)$$

Por consistência com a teoria de Weisskopf-Wigner para obter o vetor de estado, vamos trocar  $v_{\vec{q}}^3$  por  $\omega^3$  e o limite inferior de 0 para  $-\infty$ . Com essas considerações obtemos para os autovalores (equações 2.25 e 2.26)

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan \left[ \frac{2}{\Gamma} (\delta + v_{\vec{q}} - \omega) \right] - \frac{1}{\pi} \arctan \left[ \frac{2}{\Gamma} (\delta - v_{\vec{q}} + \omega) \right], \quad (2.30)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\pi} \arctan \left[ \frac{2}{\Gamma} (\delta + v_{\vec{q}} - \omega) \right] + \frac{1}{\pi} \arctan \left[ \frac{2}{\Gamma} (\delta - v_{\vec{q}} + \omega) \right]. \quad (2.31)$$

Depois dessas aproximações é importante notar nas equações 2.30 e 2.31 que a normalização do estado na equação 2.23 é conservada independentemente dos parâmetros  $\delta$ ,  $\omega$  e  $v_{\vec{q}}$  ( $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ).

Para facilitar as análises do emaranhamento, vamos definir as quantidades adimensionais  $\tilde{\delta} \equiv \delta/\Gamma$  e  $\tilde{\Delta} \equiv \Delta/\Gamma$ .

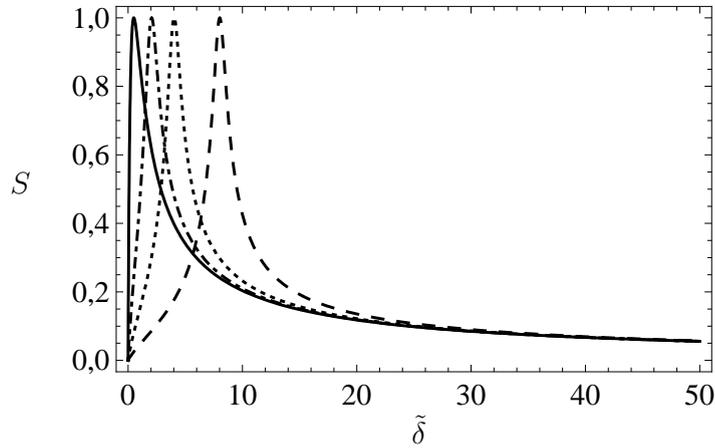


Figura 2.2: Emaranhamento  $S$  entre as partições  $A$  e  $B$  como função do tamanho  $\tilde{\delta}$  da partição  $A$ . As curvas correspondem a diferentes valores de  $\tilde{\Delta}$ : 0,0 (sólida), 2,0 (ponto-tracejada), 4,0 (ponto), 8,0 (tracejada).

Podemos ver na figura 2.2 que inicialmente o efeito de aumentar o tamanho da partição  $A$  é um aumento do emaranhamento entre as duas partições. Entendemos que fisicamente isso acontece porque mais e mais modos emaranhados são compartilhados pelas partições. Era esperado que o emaranhamento chegasse a um valor máximo porque, conforme  $\tilde{\delta}$  aumentasse, chegaria um ponto onde o número de modos em cada partição otimizaria o emaranhamento bipartido compartilhado entre as partições. Se  $\tilde{\delta}$  continua a aumentar, a situação retorna a ser desbalanceada e o emaranhamento começa a diminuir, onde no limite  $\tilde{\delta} \rightarrow \infty$  não haverá modos na partição  $B$ , e o emaranhamento entre as partições vai a zero. Também na figura 2.2 podemos observar que a quantidade de modos necessários para obter o emaranhamento máximo entre as partições depende de quanto a frequência central  $\nu_{\vec{q}}$  está próxima ou longe da ressonância com a frequência  $\omega$  do átomo (valores de  $\tilde{\Delta}$ ). Podemos ver que são necessários mais e mais modos para chegar ao máximo de emaranhamento conforme  $\nu_{\vec{q}}$  vai ficando longe da ressonância. Percebemos então que o emaranhamento entre os modos do campo eletromagnético depois do decaimento atômico depende consideravelmente também da dissonância  $\tilde{\Delta}$  entre o átomo e o modo central da partição  $A$ . Esse comportamento nos motivou a verificar a dependência do emaranhamento com a dissonância, mostrada na figura 2.3.

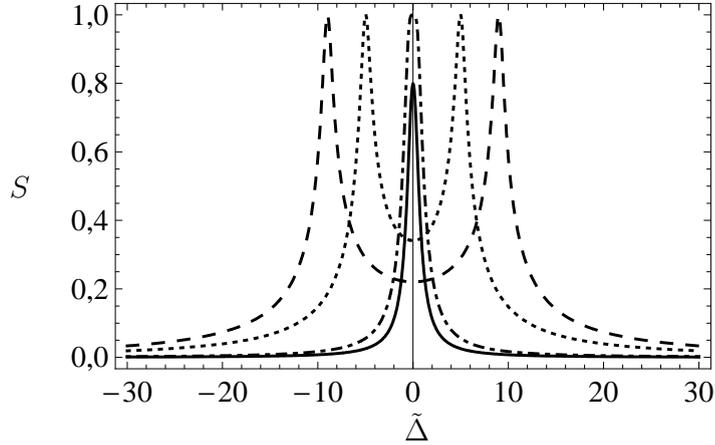


Figura 2.3: Emaranhamento  $S$  entre as partições  $A$  e  $B$  como função da dissonância  $\tilde{\Delta}$  entre o átomo e o modo central da partição  $A$ . As curvas correspondem a diferentes valores de  $\tilde{\delta}$ : 0,2 (sólida), 0,5 (ponto-tracejada), 5,0 (ponto), 9,0 (tracejada).

Primeiramente podemos notar na figura 2.3 que se o tamanho da banda de frequência  $\tilde{\delta}$  é muito pequena, o máximo de emaranhamento não é alcançado em nenhum valor da dissonância  $\tilde{\Delta}$ . Isso está em total acordo com tudo o que já foi discutido sobre a função de  $\tilde{\delta}$ . Por outro lado, se  $\tilde{\delta}$  é suficientemente grande, haverá sempre um valor de  $\tilde{\Delta}$  o qual permitirá ao sistema chegar ao máximo emaranhamento. É fisicamente esperado que se considerarmos uma partição cuja frequência central seja muito longe da ressonância com o átomo ( $\tilde{\Delta}$  grande), os modos quase não serão afetados pelo decaimento atômico. De fato, podemos ver na figura 2.3 que no limite  $\tilde{\Delta} \rightarrow \pm\infty$  o emaranhamento vai à zero.

Devemos deixar claro que na realidade  $\tilde{\Delta}$  não pode ser muito grande pois estamos no âmbito da mecânica quântica não-relativística, na qual as interações de altas energias não são devidamente consideradas. Na verdade, mesmo o Hamiltoniano equação 1.73 obtido na aproximação de dipolo não seria válido nesse regime. Apesar disso a teoria de Weisskopf-Wigner usada aqui é muito precisa no domínio de comprimentos de onda no visível e microondas, e explica completamente as principais características da emissão espontânea no espaço livre. Uma tentativa de ir além da teoria de Weisskopf-Wigner é apresentada em [65]. É importante também lembrar que o emaranhamento do momento linear do centro de massa do átomo e o campo não é incluído em nosso tratamento. Tal problema foi tratado em [66, 67], onde os autores concluem que tal emaranhamento é muito pequeno.

Usando as definições  $\tilde{\delta} \equiv \delta/\Gamma$  e  $\tilde{\Delta} \equiv \Delta/\Gamma$  na equação 2.27, com os autovalores dados pelas

equações 2.30-2.31, podemos derivar a entropia de emaranhamento em relação a  $\tilde{\delta}$  e igualar a zero, obtendo uma relação entre o tamanho da partição  $A$  e a dissonância para os quais o emaranhamento será máximo

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2} \sqrt{4\tilde{\Delta}^2 + 1}. \quad (2.32)$$

Na equação acima podemos ver que na ressonância,  $\tilde{\Delta} = 0$ , o tamanho mínimo para a partição  $A$  se emaranhar maximamente com a partição  $B$  é igual a 0,5, conforme podemos observar na figura 2.3. Os aspectos gerais da figura 2.2 também são explicados pela equação 2.32.

A teoria de Weisskopf-Wigner nos permite então estudar o emaranhamento nos modos do campo eletromagnético do espaço livre depois da emissão espontânea. Como essa teoria também fornece a evolução temporal do estado global constituído do átomo e do campo, vamos agora obter a dinâmica do emaranhamento entre esses dois subsistemas.

## 2.3 Emaranhamento entre o átomo e o campo

Partindo da equação 2.21 podemos obter o operador densidade reduzido para o átomo, traçando os modos do campo

$$\hat{\rho}_{at}(t) = e^{-\Gamma t} |a\rangle\langle a| + \sum_{\vec{k}} \left( \frac{|g_{\vec{k}}|^2 + |g_{-\vec{k}}|^2 e^{-\Gamma t/2} - 2e^{-\Gamma t/2} |g_{\vec{k}}|^2 \cos[(v_{\vec{k}} - \omega)t]}{(v_{\vec{k}} - \omega)^2 + \Gamma^2/4} \right) |b\rangle\langle b|. \quad (2.33)$$

Como já fizemos antes, passamos de somatória para integral, obtendo

$$\hat{\rho}_{at}(t) = e^{-\Gamma t} |a\rangle\langle a| + (1 - e^{-\Gamma t}) |b\rangle\langle b|, \quad (2.34)$$

o qual coincide com o operador densidade atômico obtido no formalismo da equação mestra nas aproximações de Born-Markov [68]. Em situações onde a aproximação de Markov falha, a abordagem de Weisskopf-Wigner pode ser bastante útil para o estudo de sistemas quânticos abertos. Um problema interessante onde a teoria de Weisskopf-Wigner se aplica é a inibição da emissão espontânea em cristais fotônicos, o qual é conhecido ser um processo não-Markoviano [69].

O estado  $\hat{\rho}_{at}(t)$  já está na forma diagonal, assim é direto calcular a entropia de emaranhamento entre o átomo e campo. Sua evolução temporal é mostrada na figura 2.4. O emaranhamento máximo ocorre no tempo de  $t_m = \ln(2)/\Gamma$ . Conseqüentemente, podemos reinterpretar o emaranhamento máximo como a quantidade física que fixa o tempo necessário para metade da

população num *ensemble* atômico decair espontaneamente. Esse tempo é chamado de meia vida em Física nuclear. Note que em  $t = t_m$  o átomo e o campo estão maximamente emaranhados de acordo com a figura 2.4.

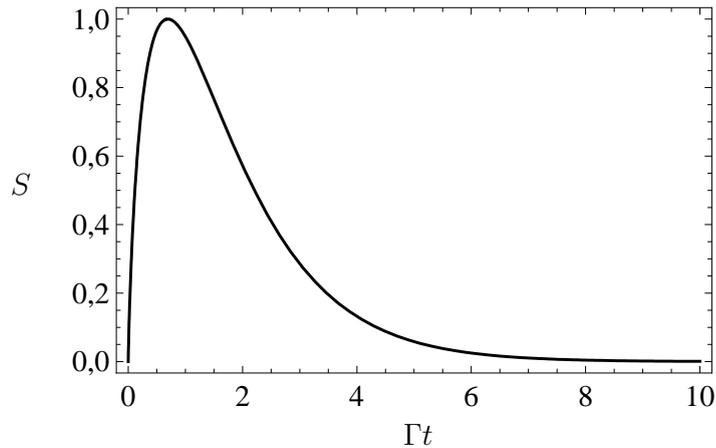


Figura 2.4: Evolução temporal do emaranhamento entre o átomo e os modos do campo eletromagnético do espaço livre.

À primeira vista, os resultados apresentados aqui parecem estar em conflito com o que é esperado nas aproximações de Born-Markov, válidas para a emissão espontânea no espaço livre. A aproximação de Born requer que o estado átomo-reservatório seja pouco diferente de um estado produto [68]. Conseqüentemente, o emaranhamento mostrado na figura 2.4 não deveria ser tão alto. De fato, se calcularmos o emaranhamento entre o átomo e cada modo ou pequeno grupo de modos do campo, veremos que o emaranhamento é praticamente zero indicando estados separáveis. Contudo, quando consideramos a quantidade grande de modos do espaço livre, esse emaranhamento bipartido somado pode ser consideravelmente alto. Assim, embora seja correto dizer que o estado átomo-reservatório é quase separável devido ao fato de que o reservatório é um sistema muito grande, é exatamente porque ele é muito grande que o pequeno emaranhamento entre cada modo e o átomo leva a um alto emaranhamento quando todos os modos são considerados, como mostrado na figura 2.4. Nós pensamos que esse é um resultado central nesse capítulo. A validade da hipótese de fatorização dos estados é estudada quantitativamente na abordagem perturbativa em [70].

Se o reservatório é um sistema quântico grande (muitos graus de liberdade), é esperado que ele seja mantido no equilíbrio térmico, de modo que não é suposto preservar as mudanças induzidas pelo átomo em tempos anteriores. Isso é o que chamamos de aproximação de Markov

nesse problema [68]. Como estamos tratando o caso de temperatura zero, o estado de equilíbrio térmico seria o estado de vácuo que não possui emaranhamento. Agora, são nossos resultados encontrados na primeira parte desse trabalho que parecem estar em conflito com a aproximação de Markov.

Novamente, o tamanho do reservatório é a peça chave para o entendimento desse aparente conflito. O estado do campo depois do decaimento atômico contém apenas um fóton compartilhado por um número infinito de modos da radiação. Fisicamente esperamos que esse estado seja muito próximo do estado de vácuo no começo do processo de decaimento atômico (exceto pelo fato de estar emaranhado). Se isso é verdade, a aproximação de Markov é ainda válida porque o estado resultante se desviaria muito pouco do equilíbrio térmico. Um cálculo da fidelidade  $F = \text{Tr}[|\gamma_0\rangle\langle\gamma_0|\hat{\rho}_{vacuo}]$ , ou seja, o quanto o estado do campo se aproxima ou se afasta do estado de equilíbrio térmico, levaria a  $F = 0$ , contrariando a aproximação de Markov. Esse tipo de cálculo não é relevante para o tipo de problema que estamos lidando (contínuo de infinitos subsistemas). Por exemplo, esperamos que o estado  $|0,1\rangle$  seja "mais distinto" do estado  $|0,0\rangle$  que  $|0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0\rangle$  é de  $|0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\rangle$ . Basicamente, nossa expectativa é baseada no número de subsistemas no estado de vácuo. Quanto mais subsistemas no estado de vácuo, mais o estado global se aproxima do estado de vácuo. Contudo, a fidelidade continua sendo zero para ambos os casos nesse exemplo. Para contornar esse problema, vamos concentrar nossa atenção em uma partição em vez do estado global  $|\gamma_0\rangle$  e veremos que isso é fisicamente mais relevante.

Na figura 2.5, mostramos como o estado da partição  $A$ , equação 2.23, se compara ao estado de vácuo usando  $F(\tilde{\delta}, \tilde{\Delta}) = \text{Tr}[\hat{\rho}_A \hat{\rho}_{vacuo}]$  no limite para o contínuo. Podemos ver que existe uma vasta região na qual a fidelidade é igual a um, com respeito ao vácuo. Embora isso não seja uma prova formal de que o estado do campo fica basicamente em equilíbrio, podemos ver facilmente que dependendo do "corte" ou partição (escolha de  $\tilde{\delta}$  e  $\tilde{\Delta}$ ), o estado resultante é de fato muito próximo do vácuo.

Comentamos anteriormente que o estado  $|\gamma_0\rangle$  é um estado puro, obtido da equação 2.21 para  $t \rightarrow \infty$ , mas agora vamos estabelecer limites de validade para tempos finitos. Primeiramente, vamos utilizar o emaranhamento destilável equação 1.180 que se relaciona com as entropias através da desigualdade 1.180, sendo que agora,  $A$  e  $B$  referem-se as partições dos modos do campo. No caso especial do estado global do campo ser puro,  $S(\hat{\rho}_{AB}) = 0$ , a desigualdade 1.180

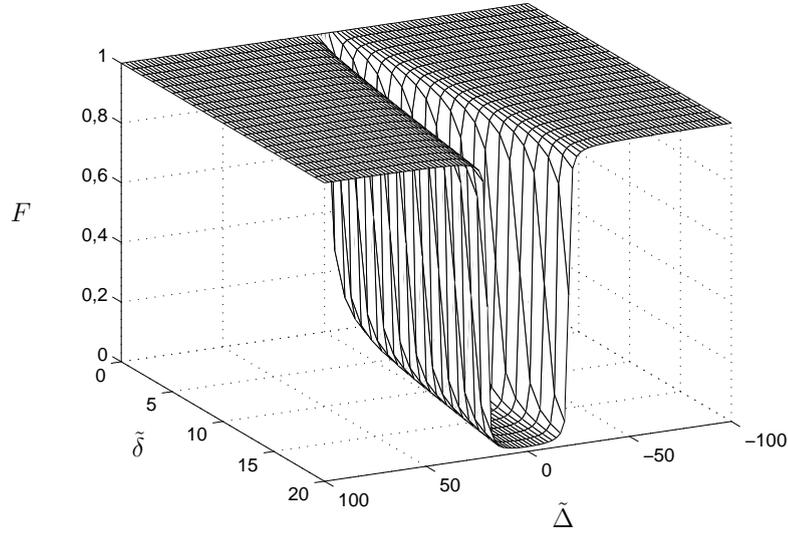


Figura 2.5: Fidelidade entre o estado da partição  $A$  e o estado de vácuo como função do tamanho da partição  $\tilde{\delta}$  e a dissonância  $\tilde{\Delta}$  entre o modo central e a frequência atômica.

se torna uma igualdade. Nesse caso, o emaranhamento passa a ser quantificado pela entropia do estado reduzido, como fizemos até agora. Para que nossos resultados sejam válidos (no mínimo qualitativamente) para tempos finitos, temos que nos certificar que a entropia dos modos  $S(\hat{\rho}_{AB})$  é de fato aproximadamente igual a zero. Da desigualdade de Araki-Lieb na equação 1.171, e do fato que o estado átomo-campo na equação 2.21 é puro para todo tempo  $t$ , segue que  $S(\hat{\rho}_{AB}) = S(\hat{\rho}_{at})$ . A figura 2.4 mostra claramente que a entropia do átomo (consequentemente a entropia dos modos  $AB$ ) vai a zero rapidamente. Por exemplo,  $S(\hat{\rho}_{AB}) = 10^{-2}$  é alcançado para  $\Gamma t \approx 7$ . Como podemos ver, nossos resultados permanecem válidos para tempos finitos, e esse fato pode facilitar a investigação experimental das propriedades do emaranhamento discutidas aqui.

## 2.4 Conclusões

Estudamos neste capítulo o emaranhamento bipartido no fenômeno de emissão espontânea. Para o estado do campo após o decaimento atômico, encontramos que os modos em grande dissonância com o átomo emaranham fracamente com o resto, e que o tamanho da banda de frequências de cada partição muda fortemente o emaranhamento. É importante ressaltar que esse trabalho representa um estudo sobre fundamentos das interações átomo-campo do ponto de vista da informação quântica, e não visa necessariamente aplicações. Atualmente, aplicações

do emaranhamento no estado do campo de radiação no espaço livre, depois de um simples decaimento atômico como considerado aqui, são improváveis. O decaimento atômico no espaço livre poderia ser usado para emaranhar átomos distantes como mostrado em [71, 72]. Contudo, o que estudamos aqui é apenas o emaranhamento entre os modos do espaço livre. Isso faz com que o controle coerente seja uma tarefa desafiadora quando comparada ao emaranhamento atômico. Por outro lado, acreditamos que um esquema para acessar experimentalmente o emaranhamento no campo induzido pelo decaimento atômico poderia ser feito utilizando cristais fotônicos [69].

Cristais fotônicos são construídos artificialmente sendo compostos de estruturas dielétricas periódicas que afetam a propagação de ondas eletromagnéticas [69]. Os fótons podem se propagar, ou não, nos cristais fotônicos dependendo de seu comprimento de onda. Os comprimentos de ondas que são permitidos formam as bandas. As bandas de comprimentos de ondas não-permitidos são chamadas *gap* de banda fotônica (GBF). Emissão espontânea nesse ambiente já foi estudado em [69] e [73], e esse sistema parece ser mais controlável que o campo eletromagnético no espaço livre. O trabalho [73] mostra que um cristal fotônico se comporta praticamente igual a um espaço livre quando a dessintonia entre o átomo e o GBF é muito grande.

Espera-se que esse trabalho possa ser um ponto de partida para lidar com o tratamento teórico das propriedades do emaranhamento no decaimento atômico em cristais fotônicos, principalmente o emaranhamento entre os modos do campo, como também para outras questões como a aplicação das técnicas usadas em [65] neste problema.

Estudamos também o emaranhamento entre o átomo e o campo eletromagnético no espaço livre durante o processo de emissão espontânea, e estabelecemos que o tempo necessário para obter o máximo de emaranhamento equivale ao tempo médio de vida do estado atômico excitado.

## Capítulo 3

# Localização do emaranhamento usando estados comprimidos

Nesse capítulo, investigamos a dinâmica da criação de emaranhamento entre o primeiro e o último membro de uma cadeia linear de osciladores harmônicos acoplados na aproximação de onda girante. É bem conhecido que em uma cadeia linear de osciladores preparados em seu estado fundamental não há criação de emaranhamento nessa aproximação. Provocamos a criação do emaranhamento acoplando à cadeia dois outros osciladores de referência preparados em estados comprimidos puros com o mesmo fator de compressão e fases diferentes. Resultados como perfeita localização do emaranhamento aparecem dependendo da relação entre as fases dos estados comprimidos dos osciladores de referência. Esses resultados foram publicados em [\[74\]](#).

### 3.1 Descrição do Sistema

A configuração estudada por nós é composta de um anel central constituído de quatro osciladores, onde dois deles são utilizados para acoplar a cadeia e os outros dois são osciladores de referência, preparados em estados especiais, conforme figura [3.1](#). Outras possibilidades de arranjos para a estrutura central serão discutidas mais tarde.

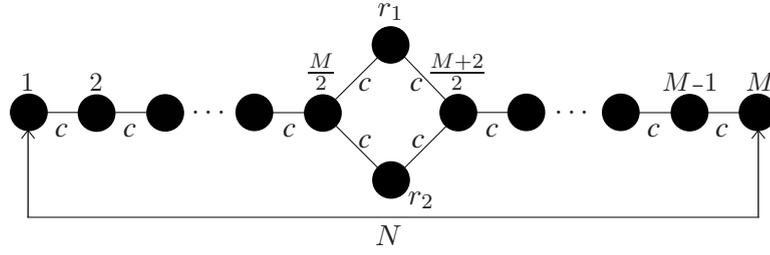


Figura 3.1: Um diagrama da configuração dos osciladores usado nesse trabalho.  $M + 2$  osciladores idênticos (massa e frequência unitária) são inicialmente preparados no estado de vácuo exceto dois osciladores (nomeados como  $r_1$  e  $r_2$ ) que são inicialmente preparados em estados comprimidos puros.  $N$  é a negatividade logarítmica calculada entre os osciladores dos extremos da cadeia e  $c$  são constantes de acoplamento.

O Hamiltoniano na aproximação de onda girante para esse sistema é dado por ( $\hbar = m = \omega = 1$ )

$$\begin{aligned}
\hat{H} = & \frac{1}{2}(\hat{p}_{r_1}^2 + \hat{q}_{r_1}^2) + \frac{1}{2}(\hat{p}_{r_2}^2 + \hat{q}_{r_2}^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M [\hat{p}_i^2 + \hat{q}_i^2] + \frac{c}{4}(\hat{q}_{r_1} - \hat{q}_{\frac{M}{2}})^2 + \frac{c}{4}(\hat{p}_{r_1} - \hat{p}_{\frac{M}{2}})^2 \\
& + \frac{c}{4}(\hat{q}_{r_1} - \hat{q}_{\frac{M+2}{2}})^2 + \frac{c}{4}(\hat{p}_{r_1} - \hat{p}_{\frac{M+2}{2}})^2 + \frac{c}{4}(\hat{q}_{r_2} - \hat{q}_{\frac{M}{2}})^2 + \frac{c}{4}(\hat{p}_{r_2} - \hat{p}_{\frac{M}{2}})^2 \\
& + \frac{c}{4}(\hat{q}_{r_2} - \hat{q}_{\frac{M+2}{2}})^2 + \frac{c}{4}(\hat{p}_{r_2} - \hat{p}_{\frac{M+2}{2}})^2 + \frac{c}{4} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \frac{M}{2} \\ i \neq \frac{M+2}{2}}}^{M-1} [(\hat{q}_{i+1} - \hat{q}_i)^2 + (\hat{p}_{i+1} - \hat{p}_i)^2], \quad (3.1)
\end{aligned}$$

onde  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  são os operadores momento e posição e  $c$  são constantes de acoplamento. Tal Hamiltoniano pode ser reescrito como

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\hat{p}_i T_{ij} \hat{p}_j + \hat{q}_i V_{ij} \hat{q}_j) = \frac{1}{2} R^T \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} R, \quad (3.2)$$

onde  $R = (\hat{q}_{r_1}, \hat{q}_{r_2}, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_M, \hat{p}_{r_1}, \hat{p}_{r_2}, \hat{p}_1, \dots, \hat{p}_M)^T$  e  $V$  e  $T$  são matrizes simétricas cujos elementos podem ser obtidos da equação 3.1.

Inicialmente todos os osciladores foram preparados em estados de vácuo individuais com exceção dos osciladores de referência  $r_1$  e  $r_2$ , que foram preparados em estados comprimidos puros, ou seja, no estado dado pela equação 1.137, com  $\alpha = \bar{n} = 0$ . Estamos trabalhando apenas com estados gaussianos e assim vamos utilizar o formalismo da função característica discutida na seção 1.5.5. Como estamos interessados no emaranhamento, precisamos apenas da matriz de covariância definida na equação 1.122. Para essa preparação inicial, a matriz de covariância

torna-se

$$\gamma(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{1,M+3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{2,M+4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{M+3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{M+3,M+3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{M+4,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{M+4,M+4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

sendo

$$\gamma_{1,1} = \cosh(2r) - \sinh(2r) \cos(\phi_1), \quad (3.4)$$

$$\gamma_{1,M+3} = \gamma_{M+3,1} = -\sinh(2r) \sin(\phi_1), \quad (3.5)$$

$$\gamma_{M+3,M+3} = \cosh(2r) + \sinh(2r) \cos(\phi_1) \quad (3.6)$$

$$\gamma_{2,2} = \cosh(2r) - \sinh(2r) \cos(\phi_2), \quad (3.7)$$

$$\gamma_{2,M+4} = \gamma_{M+4,2} = -\sinh(2r) \sin(\phi_2), \quad (3.8)$$

$$\gamma_{M+4,M+4} = \cosh(2r) + \sinh(2r) \cos(\phi_2), \quad (3.9)$$

são os elementos da matriz de covariância referentes aos dois osciladores no estado comprimido puro. Eles possuem o mesmo fator de compressão  $r$  e fases diferentes  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

A evolução temporal da matriz de covariância é dada pela expressão [25]

$$\gamma(t) = E(t)\gamma(0)E(t)^\dagger, \quad (3.10)$$

sendo

$$E(t) = \exp \left[ \begin{pmatrix} 0 & T \\ -V & 0 \end{pmatrix} t \right]. \quad (3.11)$$

Para maiores detalhes verificar apêndice A. Agora já temos todas as ferramentas necessárias para estudar a dinâmica do emaranhamento em nosso sistema.

Antes de apresentar os resultados vamos fazer uma breve discussão sobre o que já é bem conhecido sobre criação de emaranhamento com osciladores harmônicos acoplados. Um dos fatos conhecidos é que estados clássicos, estados que possuem a função  $P$  de Glauber bem comportada, isto é, uma função regular não-negativa [75], como estados coerentes ou estados

térmicos, não são capazes de criar emaranhamento em cadeias de osciladores harmônicos acoplados na aproximação de onda girante. Muitos artigos estudaram o problema de geração de emaranhamento na aproximação de onda girante e sua dependência com o estado inicial dos osciladores [76, 77]. Embora sejam necessários estados não-clássicos, como o estado comprimido, para criar emaranhamento na aproximação de onda girante, nem todos os estados não-clássicos criam emaranhamento. Por exemplo, dois osciladores harmônicos (com operadores de aniquilação  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ ) acoplados nessa aproximação e inicialmente preparados em estados comprimidos puros  $|r_a e^{i\phi_a}\rangle$  e  $|r_b e^{i\phi_b}\rangle$ , respectivamente, nunca vão se emaranhar com a interação  $\hat{H} = g(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a})$ , quando  $r_a = r_b$  e ângulo relativo  $\phi_b - \phi_a = \pi$ . Para esse caso existe uma direção relativa de compressão no domínio  $[0, 2\pi)$  no qual nunca será gerado emaranhamento.

## 3.2 Dinâmica do Emaranhamento

Veremos agora que a configuração descrita na figura 3.1 apresenta uma rica estrutura a respeito da dependência da dinâmica do emaranhamento com a direção relativa do ângulo de compressão dos dois osciladores de referência. Mostraremos também que nessa configuração ocorre uma perfeita localização do emaranhamento (independente do tempo) para uma grande família de estados comprimidos.

Na figura 3.2, mostramos a evolução temporal do emaranhamento entre os osciladores de cada extremo da cadeia considerando  $M = 38$ . O estado inicial é aquele cuja a matriz de covariância é dada pela equação 3.3. Verificamos que o comportamento do emaranhamento na figura 3.2 é um padrão cujo aspecto geral se repete para cadeias de tamanhos arbitrários. O primeiro e o último oscilador da cadeia levam um certo tempo para se emaranharem e depois desse tempo ocorre um pico inicial seguido por picos menores. Esse transiente é mais visível para cadeias com um número  $M$  grande de osciladores. Após esse período inicial ocorre sempre uma dinâmica irregular de máximos e mínimos. Aspectos particulares nesse padrão, como o tempo para se estabelecer emaranhamento, ou ainda os valores dos picos, dependem fortemente do número de osciladores na cadeia.

É interessante notar na figura 3.2 que para qualquer tempo fixo, o emaranhamento decresce quando o ângulo de compressão relativo  $\delta \equiv \phi_2 - \phi_1$  aumenta. Esse ângulo de compressão relativo é descrito na figura 3.3

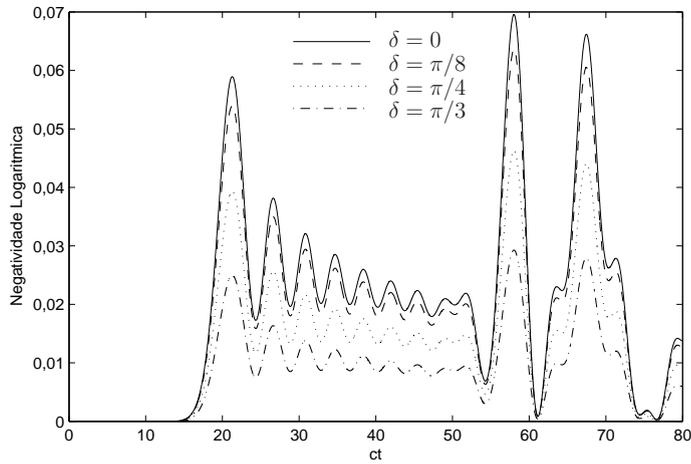


Figura 3.2: Evolução temporal da negatividade logarítmica para diferentes ângulos relativos de compressão. Utilizamos  $M = 38$  e  $r = 1$ .

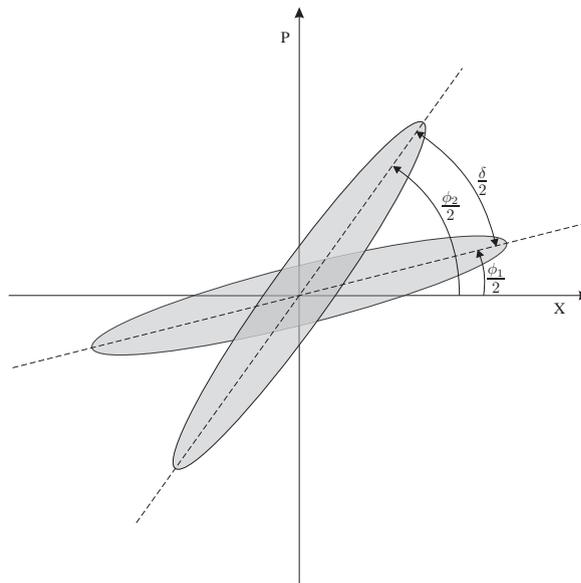


Figura 3.3: Representação dos dois estados comprimidos considerados nesse trabalho. Os osciladores de referência são preparados em estados comprimidos  $|re^{i\phi_1}\rangle$  e  $|re^{i\phi_2}\rangle$ , com ângulo de compressão relativo  $\delta = \phi_2 - \phi_1$ .

A figura 3.2 indica que conforme  $\delta$  aumenta chegará a um ponto em que não haverá criação de emaranhamento entre os osciladores 1 e  $M$  em qualquer instante de tempo. Diferentemente do caso de apenas dois osciladores acoplados na aproximação de onda girante, verificamos que  $\delta$  não é único no intervalo  $[0, 2\pi)$ . Existe em nosso sistema um contínuo de valores de  $\delta$  para os quais nunca haverá criação de emaranhamento. Continuando a aumentar  $\delta$ , ocorrerá um valor em que o emaranhamento é novamente criado entre os osciladores nos extremos da

cadeia. Essa faixa de  $\delta$  para o qual não há criação de emaranhamento entre os osciladores 1 e  $M$  depende do parâmetro de compressão  $r$  na preparação inicial.

Na figura 3.4 mostramos a variação do emaranhamento como função de  $\delta$  para diferentes valores de compressão  $r$  para o tempo fixo  $ct = 58$ . Escolhemos esse tempo por ser aproximadamente o tempo do primeiro máximo local do emaranhamento para  $ct < 80$  como pode ser visto na figura 3.2. Fica bastante claro na figura 3.4 que o aumento do parâmetro de compressão  $r$  aumenta a faixa de  $\delta$  para o qual não há criação de emaranhamento. Isso claramente indica que a declaração de que compressão favorece a criação de emaranhamento tem que ser vista no contexto correto. Aqui encontramos um exemplo em que quanto mais comprimidos os estados dos osciladores de referência, maior a dificuldade para a criação de emaranhamento, considerando o fato de que a faixa de valores de  $\delta$  que permite a criação do emaranhamento entre os osciladores 1 e  $M$  diminui. Conforme  $r$  aumenta, o sistema se torna então mais seletivo a respeito da geração de emaranhamento entre os osciladores dos extremos da cadeia.

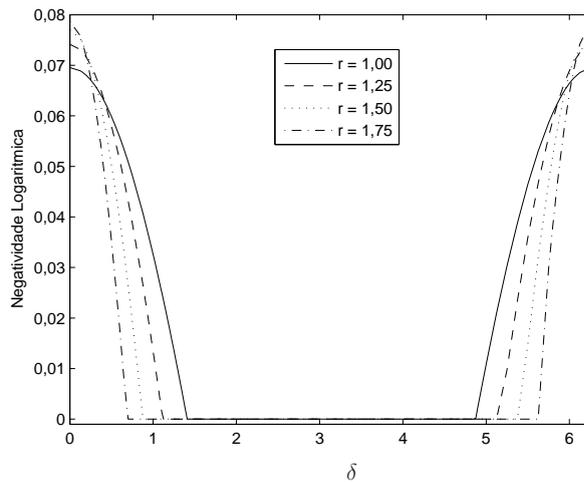


Figura 3.4: Negatividade logarítmica em  $ct = 58$  como função do ângulo de compressão relativo  $\delta$  para o caso  $M = 38$ .

A razão porque o emaranhamento não se propaga na situação descrita anteriormente reside no fato de que o emaranhamento entre os osciladores  $\frac{M}{2}$  e  $\frac{M+2}{2}$  é zero para a faixa de  $\delta$  que proíbe a criação de emaranhamento entre 1 e  $M$ . Verificamos que o emaranhamento é criado apenas entre  $\frac{M}{2}$  e  $r_1$ ,  $\frac{M}{2}$  e  $r_2$ ,  $\frac{M+2}{2}$  e  $r_1$ ,  $\frac{M+2}{2}$  e  $r_2$ , mas não entre  $\frac{M}{2}$  e  $\frac{M+2}{2}$  para aquelas faixas de  $\delta$ . Esse emaranhamento localizado na estrutura central persiste por todo o tempo. Podemos notar na figura 3.2 que os osciladores 1 e  $M$  levam um certo tempo para emaranharem,  $ct \approx 15$ , isso está

de acordo com a visão de que o emaranhamento está sendo criado no centro da configuração, no anel, e então está sendo propagado pela cadeia. Propagação de emaranhamento também é cuidadosamente estudada em [24, 25, 78].

Nós testamos numericamente a relação da faixa de  $\delta$  com o número de osciladores na cadeia, de  $M = 2$  até  $M = 98$ , e notamos que essa faixa é independente do número de osciladores. Na figura 3.5 mostramos essa independência apenas para alguns valores de  $M$  para facilitar a visualização. Como já era esperado, o emaranhamento decresce com a distância, ou seja, com o número de osciladores na cadeia. Podemos observar isso na figura 3.5 nas regiões em que o emaranhamento é diferente de zero.

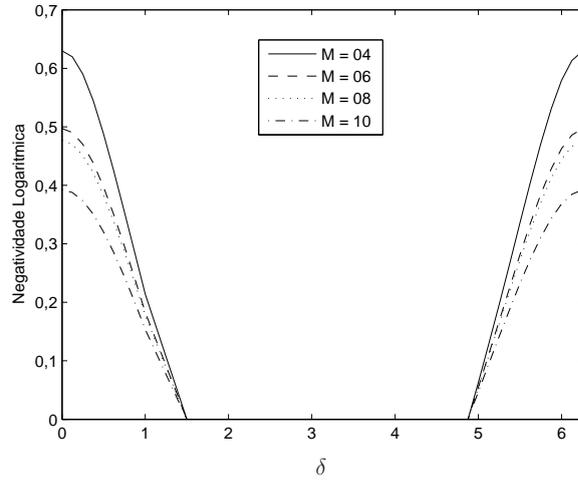


Figura 3.5: Primeiro máximo local da negatividade logarítmica no domínio  $ct < 80$  como função do ângulo de compressão relativo  $\delta$  para diferentes números  $M$  de osciladores na cadeia. Consideramos  $r = 1$ .

Para esse gráfico consideramos o emaranhamento máximo para tempos  $ct < 80$ , mas outras escolhas, testadas por nós, levarão a resultados similares (valores de  $\delta$ , independência com  $M$ , etc.), assim esse resultado é independente do tempo. Nossos resultados, mostrados nas figuras 3.2 e 3.4, sugerem independência de  $M$  e por isso resolvemos investigar o anel isoladamente. Nesse caso, uma solução analítica pode ser obtida e maiores detalhes são apresentados no apêndice B. Os autovalores simpléticos encontrados para o anel são

$$\gamma_1^{TB} = \{|\cos^2[ct] + \sin^2[ct](\cosh[2r] - \sinh[2r])\cos[\delta/2]|\}^{1/2}, \quad (3.12)$$

$$\gamma_2^{TB} = \{|\cos^2[ct] + \sin^2[ct](\cosh[2r] + \sinh[2r])\cos[\delta/2]|\}^{1/2}. \quad (3.13)$$

Da definição da negatividade logarítmica para estados gaussianos, equação 1.177, temos que

apenas os autovalores simpléticos menores que 1 contribuem para o emaranhamento. Assim, apenas o autovalor  $\gamma_1^{TB}$  é importante, pois é o único que pode ser menor que 1. Para  $\gamma_1^{TB}$  ser menor que 1 devemos ter

$$\left| \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \right| > \frac{\cosh(2r) - 1}{\sinh(2r)}. \quad (3.14)$$

É importante notar que essa desigualdade não depende da constante de acoplamento  $c$  e nem do tempo  $t$ , em conformidade com a análise numérica apresentada nas figuras anteriores. Para  $r = 1$  a desigualdade acima é satisfeita para  $-1,41005 < \delta < 1,41005$ . Então os osciladores 1 e 2 não vão emaranhar se  $1,41005 \leq \delta \leq 4,87313$ , e isso está de acordo com os valores numéricos mostrados na figura 3.4 com  $M = 38$ . Usando agora  $r = 1,75$  na desigualdade 3.14 há criação de emaranhamento se  $-0,68822 < \delta < 0,68822$ , implicando não haver emaranhamento com  $0,68822 \leq \delta \leq 5,59496$ , também em acordo com a figura 3.4. Embora a relação entre  $\delta$  e  $r$  seja independente de  $M$ , ressaltamos que a quantidade de emaranhamento e a dinâmica mudam completamente conforme o número de osciladores na cadeia. Como exemplo, mostramos na figura 3.6 a evolução temporal do emaranhamento entre os osciladores 1 e  $M$  para  $M = 4$ . Quando comparado com o gráfico mostrado na figura 3.2, onde foi considerado  $M = 38$ , podemos ver que as frequências envolvidas na evolução e a quantidade de emaranhamento disponível para os dois osciladores dos extremos da cadeia mudam. Contudo, a localização como função de  $\delta$  será idêntica, independente do número de osciladores  $M$ , em conformidade com a desigualdade 3.14.

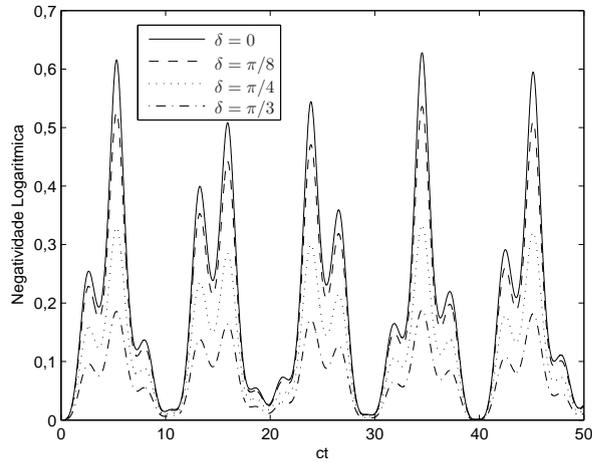


Figura 3.6: Evolução temporal da negatividade logarítmica para diferentes ângulos de compressão. Utilizamos  $M = 4$  e  $r = 1$ .

Uma outra forma de apresentar a relação entre o ângulo relativo de compressão e o emaranhamento é fixando  $\delta$  e variando o valor de  $r$ . Na figura 3.7 mostramos como o emaranhamento entre 1 e  $M$ , para o caso mais simples  $M = 2$  (anel), depende do parâmetro de compressão para diferentes valores de  $\delta$ . Vemos que uma vez fixado  $\delta$ , existe um limite superior para  $r$ . Acima desse limite nenhum emaranhamento é criado apesar do fato de o estado inicial dos osciladores de referência ser cada vez mais comprimido, e portanto, menos clássico.

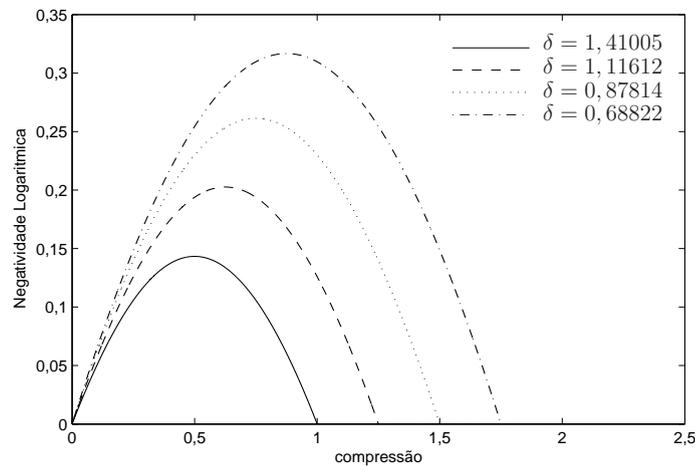


Figura 3.7: Negatividade logarítmica em  $ct = 1$  como função da magnitude de compressão e diferentes ângulos relativos  $\delta$ , para o caso  $M = 2$ .

Vamos fazer agora uma breve discussão sobre a escolha do arranjo descrito na figura 3.1. Nosso principal objetivo nesse trabalho foi mostrar a existência e a forte dependência da perfeita localização do emaranhamento com a diferença de fase de compressão entre os dois osciladores de referência. Cadeias de diferentes tamanhos foram utilizadas para enfatizar a localização do emaranhamento na estrutura central.

Exaustivo trabalho numérico mostrou que esse fenômeno ocorre quando pelo menos um oscilador é acoplado diretamente aos dois osciladores de referência. Outras escolhas para a configuração central, satisfazendo esse requisito, são mostradas na figura 3.8, onde as conexões em aberto são para o acoplamento com cadeias. Podemos perceber que a configuração do anel que utilizamos nesse trabalho é mais simples quando comparada com as configurações mostrada na figura 3.8.

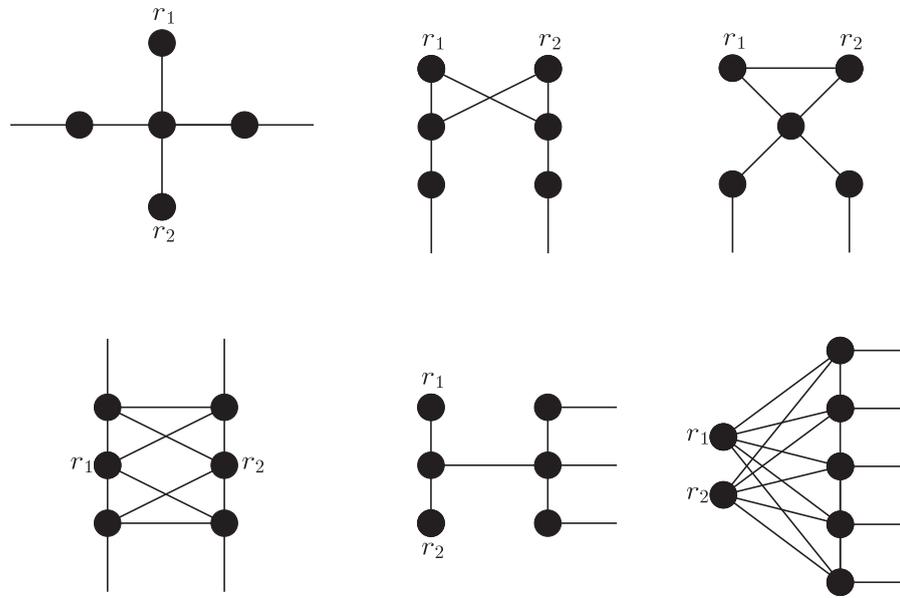


Figura 3.8: Exemplos de diferentes arranjos que localizam o emaranhamento. Cadeias de diferentes tamanhos podem ser acopladas em tais estruturas através das linhas abertas a fim de estudar a criação e propagação do emaranhamento. Dependendo do ângulo relativo de compressão dos osciladores de referência  $r_1$  e  $r_2$  não haverá criação de emaranhamento entre os membros das cadeias acopladas a essas estruturas.

Vamos agora fazer alguns comentários sobre a conexão de nossos estudos com aplicações em uma configuração de estado sólido. Escolhemos os osciladores microeletromecânicos, em inglês "microelectromechanics systems (MEMSs)", para a implementação de nosso trabalho, pois atualmente eles podem ser fabricados e controlados com alta precisão. Osciladores MEMS utilizam a integração de elementos mecânicos e eletrônicos em um substrato de silício através da tecnologia de microfabricação. Se resfriados a temperaturas suficientemente baixas, esses sistemas operam como osciladores harmônicos no regime quântico. Os osciladores podem ser construídos via fotolitografia de ouro em um substrato de silício [79]. Outros trabalhos como [81, 82] estudaram o emaranhamento em osciladores harmônicos acoplados e também sugerem esses dispositivos como possíveis implementações físicas. É claro que na prática, os osciladores não vão apenas acoplar-se entre si. Eles acoplarão também com o ambiente e o substrato de silício. Apesar disso, foi mostrado em [81] que a criação e a propagação de emaranhamento são surpreendentemente robustos contra esse ruído causado pelo acoplamento com o substrato. Eles utilizaram oito osciladores MEMS com frequências naturais de 5 GHz e resfriados a temperaturas de 10 mK e obtiveram um emaranhamento próximo de 0,2 para acoplamento  $c = 0,3$  e fator de qualidade  $Q = 10^3$ . Assim, MEMS são fortes candidatos para

implementação das idéias apresentadas nesse capítulo. Apresentamos no apêndice C, a Física básica dos MEMS.

### 3.3 Conclusões

Nós estudamos a dinâmica de emaranhamento em um arranjo simples de osciladores com ênfase na relação entre estados comprimidos e a criação de emaranhamento. Tal arranjo é formado por uma estrutura central e cadeias de osciladores acoplados. Encontramos que, para uma grande família de estados comprimidos para os dois osciladores de referência, há uma forte localização do emaranhamento entre apenas alguns dos osciladores centrais. Apresentamos uma cuidadosa análise dos parâmetros envolvidos e concluimos que tanto a magnitude do parâmetro de compressão quanto sua fase são importantes na criação de emaranhamento. Mostramos que a localização do emaranhamento depende somente do anel central e assim reduzimos a análise para apenas quatro osciladores. Isso nos permitiu obter expressões analíticas que captam todos os aspectos da localização do emaranhamento. Propomos um método para gerar e localizar emaranhamento que não envolve controle externo das constantes de acoplamento mas somente controle local de estados quânticos individuais. Finalizamos sugerindo um sistema microeletromecânico para implementação das idéias apresentadas aqui.

# Capítulo 4

## Conclusões e Perspectivas Futuras

Finalizamos essa dissertação reunindo as idéias principais dos trabalhos e sugerindo alguns possíveis trabalhos futuros.

No primeiro trabalho, estudamos o fenômeno da emissão espontânea no espaço livre do ponto de vista da teoria de informação quântica. Para isso, utilizamos a teoria de Weisskopf-Wigner que descreve quanticamente a interação de um único átomo com uma excitação e o campo eletromagnético no vácuo. O primeiro resultado que obtivemos foi analisado após a emissão espontânea e mostrou que o emaranhamento entre os modos do campo poder chegar a 1 ebit. Esse emaranhamento possui uma forte dependência com a frequência dos modos do campo e a frequência atômica e também com o tamanho das duas partições consideradas. Para o caso de ressonância basta um pequeno grupo de modos em uma das partições para que o emaranhamento vá rapidamente ao máximo. Para o caso fora de ressonância também é sempre possível chegar ao máximo de emaranhamento aumentando o número de modos. Embora mostramos que os modos do campo podem estar altamente emaranhados, parece não ser possível ter um controle total sobre o espaço livre, limitando assim a possibilidade de detecção experimental.

Nós propomos a utilização de cristais fotônicos para observação de nossos resultados, por serem um ambiente mais controlável do que o espaço livre. A Física desses sistemas é bastante rica e por este motivo há muito para ser explorado a respeito da emissão espontânea em cristais fotônicos. Assim, sugerimos como perspectiva futura de pesquisa o estudo do emaranhamento entre os modos do campo do cristal fotônico fora das condições em que este se comporte como o espaço livre. Uma vez que os modos do cristal fotônico estão sempre emaranhados com o átomo, não é mais possível utilizar a entropia de emaranhamento. Tendo em vista que

não possuímos uma medida de emaranhamento operacional para estados globalmente mistos, a não ser para estados com alta simetria, como os estados gaussianos, vemos portanto que trata-se de um problema desafiador. Também foi analisado o emaranhamento entre o átomo e o campo durante o processo da emissão espontânea e verificamos que existe uma relação do tempo médio de vida do átomo no seu estado excitado com o tempo necessário para o átomo e o campo atingirem emaranhamento máximo. Este resultado corrobora a importância do emaranhamento e também legitima o emaranhamento como uma grandeza física.

No segundo trabalho, exploramos uma configuração simples de osciladores harmônicos acoplados. Encontramos uma situação em que quanto mais comprimidos os estados dos osciladores de referência, maior é a dificuldade de se emaranhar os osciladores dos extremos da cadeia. Verificamos também que essa situação localiza o emaranhamento no anel central da cadeia. Para a situação mais simples (apenas o anel central) foi possível encontrar uma solução analítica simples que captura os aspectos essenciais dos efeitos obtidos para cadeias de tamanho arbitrário.

Encontramos outras configurações mais complexas para o arranjo central que proporcionaram os mesmos resultados do anel, mas que por serem mais complexas, as soluções analíticas não são tão facilmente obtidas. Verificamos que em todas as configurações de arranjo central em que ocorreu a localização do emaranhamento, os osciladores que servem como *hub* para conectar as cadeias devem estar acoplados diretamente aos dois osciladores no estado comprimido. O completo entendimento deste fato não nos ficou totalmente claro e assim sugerimos como trabalhos futuros a análise detalhada dessa relação, utilizando outras ferramentas como, por exemplo, as funções de quasi-probabilidade. Uma outra possibilidade de análise futura do nosso problema consiste em considerar o sistema acoplado a reservatórios para verificar se nossos resultados se preservam em condições mais próximas da realidade experimental.

Concluimos, assim, agradecendo a todos que de alguma maneira contribuíram com os trabalhos apresentados aqui e que esses trabalhos estimulem e contribuam de alguma forma para o desenvolvimento da Ciência.

# Apêndice A

## Operador de Evolução Temporal da Matriz de Covariância

Neste apêndice, iremos demonstrar a lei de evolução temporal da equação 3.10. Começamos reescrevendo a equação 1.122 para os elementos da matriz de covariância como

$$\gamma_{ij} = 2\text{Re} \left[ \langle O_i O_j \rangle - \langle O_i \rangle \langle O_j \rangle \right], \quad (\text{A.1})$$

com  $O = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_M, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_M)^T$ . Sabemos que operações locais não afetam o emaranhamento [25], assim os valores médios podem ser feitos iguais a zeros por operações locais nos osciladores individuais, neste caso através do operador de deslocamento da equação 1.90. Realizando tais transformações, podemos trabalhar com uma expressão mais simples para os elementos da matriz de covariância dada por

$$\gamma_{ij} = 2\text{Re} \langle O_i O_j \rangle. \quad (\text{A.2})$$

Por simplicidade de notação na demonstração, definiremos

$$\tilde{\gamma}_{ij} = \langle O_i O_j \rangle = \langle O O^\dagger \rangle_{ij}, \quad (\text{A.3})$$

e deixaremos para tomar a parte real apenas no final dos cálculos.

Derivando  $\tilde{\gamma}_{ij}$  com relação ao tempo obtemos

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{ij}}{dt} = \left\langle \frac{dO_i}{dt} O_j + O_i \frac{dO_j}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{dO_i}{dt} O_j \right\rangle + \left\langle O_i \frac{dO_j}{dt} \right\rangle. \quad (\text{A.4})$$

Utilizando a equação de Heisenberg [30] para os operadores  $O_i$  e  $O_j$  temos

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{ij}}{dt} = \left\langle i[\hat{H}, O_i] O_j \right\rangle + \left\langle i O_i [\hat{H}, O_j] \right\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Primeiramente vamos considerar que  $O_i = \hat{q}_i$  e  $O_j = \hat{q}_j$ , ou seja, estamos considerando que os elementos  $O_i$  e  $O_j$  sejam apenas operadores de posição. Assim,

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{ij}^{\hat{q}\hat{q}}}{dt} = \langle i[\hat{H}, \hat{q}_i]\hat{q}_j \rangle + \langle i\hat{q}_i[\hat{H}, \hat{q}_j] \rangle. \quad (\text{A.6})$$

Utilizando o Hamiltoniano da equação 3.2 obtemos

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{q}_i] &= \frac{1}{2} \sum_{kl} [\hat{p}_k T_{kl} \hat{p}_l, \hat{q}_i], \\ &= \frac{1}{2} \sum_{kl} \{ \hat{p}_k T_{kl} [\hat{p}_l, \hat{q}_i] + [\hat{p}_k, \hat{q}_i] T_{kl} \hat{p}_l \}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{kl} \{ \hat{p}_k T_{kl} (-i\delta_{li}) + (-i\delta_{ki}) T_{kl} \hat{p}_l \}, \\ &= -\frac{i}{2} \left( \sum_k \hat{p}_k T_{ki} + \sum_l T_{il} \hat{p}_l \right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

De maneira análoga,

$$[\hat{H}, \hat{q}_j] = -\frac{i}{2} \left( \sum_k \hat{p}_k T_{kj} + \sum_l T_{jl} \hat{p}_l \right). \quad (\text{A.8})$$

Substituindo as equações A.7 e A.8 na equação A.6 obtemos

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{ij}^{\hat{q}\hat{q}}}{dt} = \frac{1}{2} \langle \sum_k \hat{p}_k T_{ki} \hat{q}_j \rangle + \frac{1}{2} \langle \sum_l T_{il} \hat{p}_l \hat{q}_j \rangle + \frac{1}{2} \langle \sum_k \hat{q}_i \hat{p}_k T_{kj} \rangle + \frac{1}{2} \langle \sum_l \hat{q}_i T_{jl} \hat{p}_l \rangle. \quad (\text{A.9})$$

Uma vez que  $\hat{p}$  e  $T$  são hermitianos segue que

$$\sum_k \hat{p}_k T_{ki} = \left( \sum_k \hat{p}_k T_{ki} \right)^\dagger = \sum_k T_{ki}^\dagger \hat{p}_k^\dagger = \sum_k T_{ik} \hat{p}_k, \quad (\text{A.10})$$

$$\sum_l T_{jl} \hat{p}_l = \left( \sum_l T_{jl} \hat{p}_l \right)^\dagger = \sum_l \hat{p}_l^\dagger T_{jl}^\dagger = \sum_l \hat{p}_l T_{lj}, \quad (\text{A.11})$$

e assim

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{ij}^{\hat{q}\hat{q}}}{dt} = \langle \sum_l T_{il} \hat{p}_l \hat{q}_j \rangle + \langle \sum_k \hat{q}_i \hat{p}_k T_{kj} \rangle. \quad (\text{A.12})$$

Agrupando os operadores  $\hat{p}$  em um vetor  $O(\hat{p})$ , podemos reescrever a equação anterior como

$$\frac{d\tilde{\gamma}_{ij}^{\hat{q}\hat{q}}}{dt} = \langle [TO(\hat{p})]_i \hat{q}_j \rangle + \langle \hat{q}_i [O^\dagger(\hat{p})T]_j \rangle, \quad (\text{A.13})$$

onde  $[TO(\hat{p})]_i$  significa a  $i$ -ésima linha do produto da matriz  $T$  pela matriz  $O(\hat{p})$  e  $[O^\dagger(\hat{p})T]_j$  significa a  $j$ -ésima coluna do produto da matriz  $O^\dagger(\hat{p})$  pela matriz  $T$ . Agrupando agora os operadores  $\hat{q}$  num vetor  $O(\hat{q})$ , podemos reescrever a equação A.13

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{q}}_{ij}}{dt} &= \langle [TO(\hat{p})O^\dagger(\hat{q})]_{ij} \rangle + \langle [O(\hat{q})O^\dagger(\hat{p})T]_{ij} \rangle, \\ &= \langle TO(\hat{p})O^\dagger(\hat{q}) \rangle_{ij} + \langle O(\hat{q})O^\dagger(\hat{p})T \rangle_{ij}.\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Da equação A.14 concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{q}}}{dt} &= \langle TO(\hat{p})O^\dagger(\hat{q}) \rangle + \langle O(\hat{q})O^\dagger(\hat{p})T \rangle, \\ &= T\langle O(\hat{p})O^\dagger(\hat{q}) \rangle + \langle O(\hat{q})O^\dagger(\hat{p}) \rangle T.\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

Finalmente obtemos para o subespaço  $\hat{q}\hat{q}$

$$\frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{q}}}{dt} = T\tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{q}} + \tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{p}}T. \quad (\text{A.16})$$

Agora consideraremos  $O_i = \hat{q}_i$  e  $O_j = \hat{p}_j$ . Procedendo de maneira análoga ao que fizemos para o subespaço  $\hat{q}\hat{q}$  teremos

$$\frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{p}}_{ij}}{dt} = \langle i[\hat{H}, \hat{q}_i] \hat{p}_j \rangle + \langle i\hat{q}_i [\hat{H}, \hat{p}_j] \rangle. \quad (\text{A.17})$$

O comutador  $[\hat{H}, \hat{q}_i]$  já foi calculado na equação A.7 e assim basta calcular  $[\hat{H}, \hat{p}_j]$ . O resultado é

$$[\hat{H}, \hat{p}_j] = \frac{i}{2} \left( \sum_k \hat{q}_k V_{kj} + \sum_l V_{jl} \hat{q}_l \right). \quad (\text{A.18})$$

Assim,

$$\frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{p}}_{ij}}{dt} = \left\langle \sum_l T_{il} \hat{p}_l \hat{p}_j \right\rangle - \left\langle \sum_k \hat{q}_i \hat{q}_k V_{kj} \right\rangle, \quad (\text{A.19})$$

onde utilizamos o fato de  $\hat{q}$ ,  $\hat{p}$ ,  $V$  e  $T$  serem Hermitianos. Utilizando a mesma notação anterior, obtemos

$$\frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{p}}}{dt} = \langle TO(\hat{p})O^\dagger(\hat{p}) \rangle_{ij} - \langle O(\hat{q})O^\dagger(\hat{q})V \rangle_{ij}, \quad (\text{A.20})$$

que implica em

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{p}}}{dt} &= \langle TO(\hat{p})O^\dagger(\hat{p}) \rangle - \langle O(\hat{q})O^\dagger(\hat{q})V \rangle, \\ &= T\tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{p}} - \tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{q}}V.\end{aligned}\quad (\text{A.21})$$

Para os casos  $O_i = \hat{p}_i$ ;  $O_j = \hat{q}_j$  e  $O_i = \hat{p}_i$ ;  $O_j = \hat{p}_j$  seguimos exatamente o mesmo raciocínio dos casos anteriores, resultando em

$$\frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{q}}}{dt} = -V\tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{q}} + \tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{p}}T, \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{p}}}{dt} = -V\tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{p}} - \tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{q}}V. \quad (\text{A.23})$$

Reunindo esses resultados teremos

$$\begin{bmatrix} \frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{q}}}{dt} & \frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{p}}}{dt} \\ \frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{q}}}{dt} & \frac{d\tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{p}}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & T \\ -V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{q}} & \tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{p}} \\ \tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{q}} & \tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{q}} & \tilde{\gamma}^{\hat{q}\hat{p}} \\ \tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{q}} & \tilde{\gamma}^{\hat{p}\hat{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -V \\ T & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

ou seja,

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & T \\ -V & 0 \end{bmatrix} \tilde{\gamma} + \tilde{\gamma} \begin{bmatrix} 0 & -V \\ T & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

A solução desta equação diferencial é

$$\tilde{\gamma}(t) = E(t)\tilde{\gamma}(0)E(t)^\dagger, \quad (\text{A.26})$$

na qual

$$E(t) = \exp \left[ \begin{pmatrix} 0 & T \\ -V & 0 \end{pmatrix} t \right]. \quad (\text{A.27})$$

Demonstramos assim a equação 3.10.

## Apêndice B

# Solução Analítica do Anel de Osciladores

Nesse apêndice mostraremos com maiores detalhes a solução analítica para o anel da cadeia de osciladores do capítulo 3. A matriz de covariância inicial é dada por

$$\gamma(0) = \begin{bmatrix} \gamma_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \gamma_{1,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2,2} & 0 & 0 & 0 & \gamma_{2,6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{5,1} & 0 & 0 & 0 & \gamma_{5,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{6,2} & 0 & 0 & 0 & \gamma_{6,6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

onde os elementos  $\gamma_{ij}$  são dados pelas equações 3.4-3.9 com  $M = 2$ . As matrizes  $T$  e  $V$  são dadas por

$$T = V = \begin{bmatrix} 1+c & 0 & -c/2 & -c/2 \\ 0 & 1+c & -c/2 & -c/2 \\ -c/2 & -c/2 & 1+c & 0 \\ 0 & -c/2 & -c/2 & 1+c \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

Utilizando a equação 3.11 obtemos os seguintes elementos de matriz do operador de evolução temporal

$$\begin{aligned} E_{1,1} &= E_{2,2} = E_{3,3} = E_{4,4} = E_{5,5} = E_{6,6} = E_{7,7} = E_{8,8} = \cos^2[ct/2] \cos[(1+c)t], \\ E_{8,1} &= E_{7,2} = E_{6,3} = E_{5,4} = -E_{4,5} = -E_{3,6} = -E_{2,7} = -E_{1,8} = \sin^2[ct/2] \sin[(1+c)t], \\ E_{2,1} &= E_{3,1} = E_{1,2} = E_{4,2} = E_{1,3} = E_{4,3} = E_{2,4} = E_{3,4} = E_{6,5} = E_{7,5} = E_{5,6} = \\ &= E_{8,6} = E_{5,7} = E_{8,7} = E_{6,8} = E_{7,8} = \frac{1}{2} \sin[ct] \sin[(1+c)t], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{6,1} = E_{7,1} = E_{5,2} = E_{8,2} = E_{5,3} = E_{8,3} = E_{6,4} = E_{7,4} = -E_{2,5} = -E_{3,5} = -E_{1,6} = \\
= -E_{4,6} = -E_{1,7} = -E_{4,7} = -E_{2,8} = -E_{3,8} = \frac{1}{4} \{ \text{sen}[(1+2c)t] - \text{sen}[t] \}, \\
E_{4,1} = E_{3,2} = E_{2,3} = E_{1,4} = E_{8,5} = E_{7,6} = E_{6,7} = E_{5,8} = -\text{sen}^2[ct/2] \cos[(1+c)t], \\
E_{5,1} = E_{6,2} = E_{7,3} = E_{8,4} = -E_{1,5} = -E_{2,6} = -E_{3,7} = -E_{4,8} = -\cos^2[ct/2] \text{sen}[(1+c)t].
\end{aligned}$$

A partir desses elementos de matriz, a evolução temporal da matriz de covariância é obtida pela equação 3.10.

Como estamos interessados apenas no emaranhamento entre os osciladores 1 e  $M$ , nesse caso considerando  $M = 2$ , traçamos os osciladores de referência e ficamos com a matriz de covariância evoluída temporalmente apenas para os osciladores 1 e 2. Definindo  $\text{sh}[\eta] = \text{senh}[\eta]$  e  $\text{ch}[\eta] = \text{cosh}[\eta]$ , os elementos da matriz de covariância são dados por

$$\begin{aligned}
\gamma_{11}^{AB}(t) = \gamma_{22}^{AB}(t) \\
= \frac{1}{4} \{ 3 - 2 \cos[2ct] \text{sh}^2[r] + \text{ch}[2r] + 2 \cos[\delta/2] \cos[2(c+1)t + \delta/2 + \phi_1] \text{sen}^2[ct] \text{sh}[2r] \},
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{33}^{AB}(t) = \gamma_{44}^{AB}(t) \\
= \frac{1}{4} \{ 3 - 2 \cos[2ct] \text{sh}^2[r] + \text{ch}[2r] - 2 \cos[\delta/2] \cos[2(c+1)t + \delta/2 + \phi_1] \text{sen}^2[ct] \text{sh}[2r] \},
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{31}^{AB}(t) = \gamma_{13}^{AB}(t) = \gamma_{41}^{AB}(t) = \gamma_{14}^{AB}(t) = \gamma_{32}^{AB}(t) = \gamma_{23}^{AB}(t) = \gamma_{42}^{AB}(t) = \gamma_{24}^{AB}(t) \\
= -\frac{1}{2} \cos[\delta/2] \text{sen}^2[ct] \text{sen}[2(c+1)t + \delta/2 + \phi_1] \text{sh}[2r],
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\gamma_{21}^{AB}(t) = \gamma_{12}^{AB}(t) = \frac{1}{2} \text{sen}^2[ct] \{ \text{ch}[2r] - 1 + \cos[\delta/2] \cos[2(c+1)t + \delta/2 + \phi_1] \text{sh}[2r] \}, \tag{B.6}$$

$$\gamma_{43}^{AB}(t) = \gamma_{34}^{AB}(t) = \frac{1}{2} \text{sen}^2[ct] \{ \text{ch}[2r] - 1 - \cos[\delta/2] \cos[2(c+1)t + \delta/2 + \phi_1] \text{sh}[2r] \}, \tag{B.7}$$

onde  $A$  e  $B$  referem-se aos osciladores 1 e 2 respectivamente.

Fazendo a transposição parcial utilizando a matriz dada pela equação 1.179, e a transformação simplética utilizando a matriz dada pela equação 1.120 obtemos a matriz de covariância simplética transposta parcialmente. Agora, basta diagonalizar para obter os autovalores simpléticos

$$\gamma_1^{TB} = \{ \{ \cos^2(ct) + \text{sen}^2(ct) [\cosh(2r) - \text{senh}(2r)] \cos(\delta/2) \} \}^{1/2}, \tag{B.8}$$

$$\gamma_2^{TB} = \{ \{ \cos^2(ct) + \text{sen}^2(ct) [\cosh(2r) + \text{senh}(2r)] \cos(\delta/2) \} \}^{1/2}. \tag{B.9}$$

# Apêndice C

## Osciladores Microeletromecânicos

Osciladores microeletromecânicos (MEMS) são sistemas mecânicos controlados eletronicamente e fabricados na escala de micrômetro. Podem ser compostos de componentes micromecânicos como microengrenagens, microalavancas, etc, e componentes microeletrônicos para obter informação e controle. A integração entre os sistemas mecânicos e eletrônicos são comumente feitos em um substrato de silício através da tecnologia de microfabricação. Enquanto os eletrônicos são fabricados usando processos sequenciais de circuitos integrados, os componentes micromecânicos são fabricados usando o processo de microusinagem [79].

O nosso objetivo nesse apêndice é mostrar que os sistemas MEMS podem se comportar como osciladores harmônicos sobre certas condições, possibilitando assim uma possível implementação de nosso trabalho. A demonstração foi baseada na referência [80].

O sistema micromecânico escolhido pode ser modelado por uma barra com uma das extremidades fixa e a outra livre para oscilar, conforme figura [C.1](#)

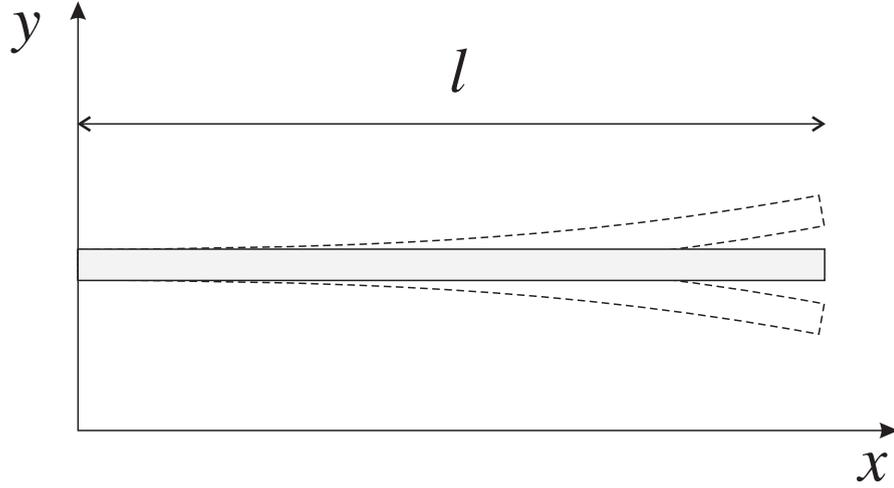


Figura C.1: Barra de tamanho  $l$  fixa em apenas uma das extremidades utilizada como modelo para um sistema MEMS.

A equação de movimento é dada por [83]

$$E_Y I \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $u(x,t)$  é o deslocamento, na direção  $y$ , de um ponto na barra,  $E_Y$  é o módulo de Young do material,  $I$  é o momento de inércia,  $T$  é a tensão na barra e  $m$  é a massa por unidade de comprimento (densidade linear). O termo de quarta ordem resulta da rigidez da barra, enquanto que o termo de segunda ordem espacial resulta da aplicação de tensão.

Considerando que a função  $u(x,t)$  pode ser escrita como

$$u(x,t) = y(x)\tau(t), \quad (\text{C.2})$$

e substituindo na equação C.1, a equação diferencial para a parte espacial se torna

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} - \frac{T}{\epsilon} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \alpha^4 y(x), \quad (\text{C.3})$$

na qual definimos  $\epsilon = E_Y I$  e  $\alpha$  uma constante de separação. Supondo uma solução do tipo

$$y_\alpha(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} + Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x}, \quad (\text{C.4})$$

obtemos

$$k^4 + (T/\epsilon)k^2 = \alpha^4, \quad (\text{C.5})$$

$$\kappa^4 - (T/\epsilon)\kappa^2 = \alpha^4. \quad (\text{C.6})$$

As constantes  $k$  e  $\kappa$  são determinadas aplicando as condições de contorno.

A parte dependente do tempo obedece a equação diferencial

$$\frac{m}{\epsilon} \frac{d^2 \tau(t)}{dt^2} = -\alpha^4 \tau(t), \quad (\text{C.7})$$

sendo a solução geral dada por

$$\tau_\alpha(t) = c_1 e^{i\omega_\alpha t} + c_2 e^{-i\omega_\alpha t}, \quad (\text{C.8})$$

onde

$$\omega_\alpha = \alpha^2 \sqrt{\epsilon/m}. \quad (\text{C.9})$$

Assim, chegamos a solução geral

$$u(x,t) = \sum_{\{\alpha\}} y_\alpha(x) \tau_\alpha(t), \quad (\text{C.10})$$

onde a soma é feita sobre todos os valores possíveis de  $\alpha$  para um conjunto particular de condições de contorno escolhidas. Os modos espaciais  $y_\alpha(x)$  são ortogonais e normalizados tais que

$$\int_0^l y_\alpha(x) y_{\alpha'}(x) dx = \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (\text{C.11})$$

Agora vamos obter o Hamiltoniano para o sistema. A energia total do sistema é a soma da energia cinética e a energia potencial. A energia potencial  $V$  é dada por

$$V = \frac{1}{2} \left[ \epsilon \int_0^l \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + T \int_0^l \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \right]. \quad (\text{C.12})$$

Utilizando a expansão da equação C.10, obtemos para a energia potencial

$$V = \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_{\alpha'} \tau_\alpha(t) \tau_{\alpha'}(t) \left[ \epsilon \int_0^l \left( \frac{d^2 y_\alpha(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 y_{\alpha'}(x)}{dx^2} \right) dx + T \int_0^l \left( \frac{dy_\alpha(x)}{dx} \right) \left( \frac{dy_{\alpha'}(x)}{dx} \right) dx \right]. \quad (\text{C.13})$$

Fazendo a integração por partes e utilizando as condições de contorno para uma barra, fixa em uma extremidade e livre na outra [83], ou seja,

$$y_\alpha(0) = \frac{dy_\alpha(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{d^2 y_\alpha(x)}{dx^2} \Big|_{x=l} = \frac{d^3 y_\alpha(x)}{dx^3} \Big|_{x=l} = 0, \quad (\text{C.14})$$

obtemos

$$V = \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_{\alpha'} \tau_\alpha(t) \tau_{\alpha'}(t) \int_0^l \left( \epsilon \frac{d^4 y_\alpha(x)}{dx^4} - T \frac{d^2 y_\alpha(x)}{dx^2} \right) y_{\alpha'}(x) dx. \quad (\text{C.15})$$

Utilizando as equações C.3 e C.11, obtemos a forma final para a energia potencial

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \epsilon \alpha^4 \tau_{\alpha}^2(t). \quad (\text{C.16})$$

A energia cinética é dada por

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l m \left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (\text{C.17})$$

na qual utilizando novamente a equação C.10 e as condições de contorno da equação C.14 obtemos

$$K = \frac{1}{2} m \sum_{\alpha} \left( \frac{d\tau_{\alpha}(t)}{dt} \right)^2. \quad (\text{C.18})$$

Assim o Hamiltoniano clássico para a barra é

$$H = V + K \quad (\text{C.19})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left[ \epsilon \alpha^4 \tau_{\alpha}^2(t) + m \left( \frac{d\tau_{\alpha}(t)}{dt} \right)^2 \right]. \quad (\text{C.20})$$

Definindo  $\tau_{\alpha} = q_{\alpha}$  e  $(d\tau_{\alpha}/dt) = (p_{\alpha}/m)$  podemos reescrever o Hamiltoniano como

$$H = \sum_{\alpha} \left( \frac{p_{\alpha}^2}{2m} + \frac{m\omega_{\alpha}^2 q_{\alpha}^2}{2} \right). \quad (\text{C.21})$$

Demonstramos então que cada modo de vibração da barra é modelado por um oscilador harmônico com massa  $m$  e frequência  $\omega_{\alpha}$ . A quantização, como fizemos para o campo eletromagnético, se dá pela troca de  $p_{\alpha}$  e  $q_{\alpha}$  pelos operadores  $\hat{p}_{\alpha}$  e  $\hat{q}_{\alpha}$  ( $[\hat{q}_{\alpha}, \hat{p}_{\alpha'}] = i\hbar \delta_{\alpha\alpha'}$ )

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \left( \frac{\hat{p}_{\alpha}^2}{2m} + \frac{m\omega_{\alpha}^2 \hat{q}_{\alpha}^2}{2} \right). \quad (\text{C.22})$$

Vamos mostrar agora como acoplar os osciladores. Para isso, vamos considerar a situação descrita na figura C.2

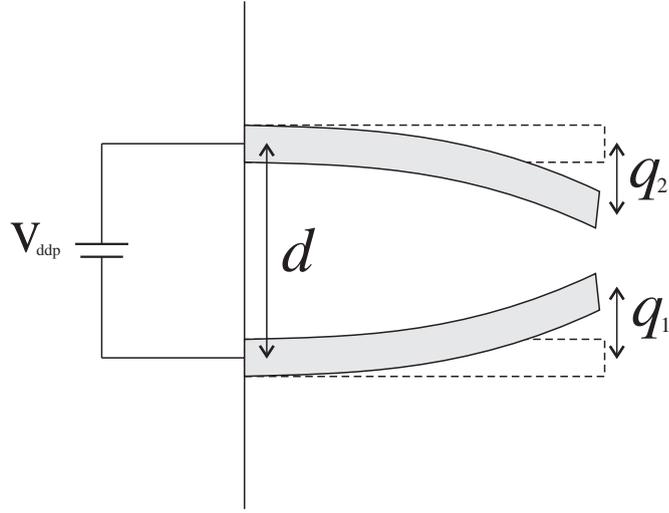


Figura C.2: Duas barras idênticas fixas em apenas uma das extremidades, com separação  $d$  entre suas posições de equilíbrio. As oscilações das placas foi exagerada para melhor visualização.

O Hamiltoniano para esse sistema é dado por

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I, \quad (\text{C.23})$$

com a parte livre dada pela equação

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{q}_1^2}{2} + \frac{m\omega^2 \hat{q}_2^2}{2} \quad (\text{C.24})$$

e a parte de interação dada por

$$\hat{H}_I = \frac{C(q)V^2}{2}, \quad (\text{C.25})$$

na qual  $C(q)$  é a capacitância, sendo  $q = (q_2 - q_1)$ , e  $V$  é a diferença de potencial elétrico aplicado entre as barras, considerando-as como um capacitor de placas paralelas. Nesse caso a capacitância é [84]

$$C(q) = \frac{\varepsilon_0 A}{(d - q)}, \quad (\text{C.26})$$

com  $\varepsilon_0$  a permissividade elétrica do vácuo,  $A$  a área das placas e  $d$  a distância entre as posições de equilíbrio das placas. Assim, temos para o Hamiltoniano de interação

$$\hat{H}_I = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2d(1 - \frac{q}{d})}. \quad (\text{C.27})$$

Considerando pequenas oscilações,  $q \ll d$ , vamos fazer a expansão de  $(1 - \frac{q}{d})^{-1}$  até a segunda ordem, obtendo

$$\hat{H}_I = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2d^2} q + \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2d^3} q^2 + \text{cte.} \quad (\text{C.28})$$

O termo linear em  $q$  causa apenas uma redefinição da posição de equilíbrio e o termo quadrático é o responsável pela interação. Finalmente, o Hamiltoniano do sistema é dado por

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\tilde{\omega}_\alpha^2 \hat{q}_1^2}{2} + \frac{m\tilde{\omega}_\alpha^2 \hat{q}_2^2}{2} + \lambda(q_2 - q_1)^2, \quad (\text{C.29})$$

no qual

$$\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha + \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2d^2}, \quad (\text{C.30})$$

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2d^3}. \quad (\text{C.31})$$

Escrevendo os operadores  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  em função dos operadores de criação e aniquilação, aparecerão termos quadráticos que na aproximação de onda girante podem ser desprezados. Após essa aproximação podemos voltar a escrever o Hamiltoniano em termos dos operadores  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$ , e o resultado é

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\tilde{\omega}_\alpha^2 \hat{q}_1^2}{2} + \frac{m\tilde{\omega}_\alpha^2 \hat{q}_2^2}{2} + \frac{\lambda}{2}(\hat{q}_2 - \hat{q}_1)^2 + \frac{\lambda}{2}(\hat{p}_2 - \hat{p}_1)^2, \quad (\text{C.32})$$

sendo este o mesmo Hamiltoniano generalizado para a configuração utilizada nesta dissertação descrita pela equação 3.1.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. F. R. T. Piza, *Mecânica Quântica* (EDUSP, Brasil, 2003).
- [2] B. L. van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics* (North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967).
- [3] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [4] D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 166 (1952).
- [5] D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 180 (1952).
- [6] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [7] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982).
- [8] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982).
- [9] J. G. Rarity and P. R. Tapster, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2495 (1990).
- [10] A. Garg and N. D. Mermin, *Phys. Rev. D* **35**, 3831 (1987).
- [11] J. -A. Larsson, *Phys. Rev. A* **57**, 3304 (1998).
- [12] P. Pearle, *Phys. Rev. D* **2**, 1418, (1970).
- [13] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
- [14] A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).
- [15] D. Gross, S. T. Flammia and J. Eisert, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 190501 (2009).
- [16] A. S. Coelho, F. A. S. Barbosa, K. N. Cassemiro, A. S. Villar, M. Martinelli and P. Nussenzveig, *Science* **326**, 823 (2009).

- [17] S. L. Sondhi, S. M. Girvin, J. P. Carini and D. Shahar, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 315 (1997).
- [18] C. A. Sackett, D. Kielpinski, B. E. King, C. Langer, V. Meyer, C. J. Myatt, M. Rowe, Q. A. Turchette, W. M. Itano, D. J. Wineland and C. Monroe, *Nature* **404**, 256 (2000).
- [19] S. M. Rezende, *Materiais e dispositivos eletrônicos* (Livraria da Física, Brasil, 2004).
- [20] A. A. Houck, J. A. Schreier, B. R. Johnson, J. M. Chow, J. Koch, J. M. Gambetta, D. I. Schuster, L. Frunzio, M. H. Devoret, S. M. Girvin and R. J. Schoelkopf, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 080502 (2008).
- [21] D. Kleppner, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 233 (1981).
- [22] S. John and T. Quang, *Phys. Rev. A* **50**, 1764 (1994).
- [23] P. P. Munhoz, J. A. Roversi, A. Vidiella-Barranco and F.L. Semião, *J. Phys. B* **38**, 3875 (2005).
- [24] M. B. Plenio and F. L. Semião, *New J. Phys.* **7**, 73 (2005).
- [25] M. B. Plenio, J. Hartley and J. Eisert, *New J. Phys.* **6**, 36 (2004).
- [26] M. Paternostro, M. S. Kim, E. Park and J. Lee, *Phys. Rev. A* **72**, 052307 (2005).
- [27] K. Audenaert, J. Eisert, M. B. Plenio and R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **66**, 042327 (2002).
- [28] J. Kofler, V. Vedral, M. S. Kim and C. Brukner, *Phys. Rev. A* **73**, 052107 (2006).
- [29] V. Weisskopf and E. Wigner, *Z. Phys.* **63**, 54 (1930).
- [30] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics, Vol 1* (John Wiley, France, 1977).
- [31] S. M. Barnett and P. M. Radmore, *Methods in Theoretical Quantum Optics* (Clarendon Press, Oxford, 1997).
- [32] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley, New York, 1999).
- [33] G. Benenti, G. Casati and G. Strini, *Principles of Quantum Computation and Information, Vol 1* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2004).
- [34] C. P. Slichter, *Principles of Magnetic Resonance* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).

- [35] J. -W. Pan, D. Bouwmeester, M. Daniell, H. Weinfurter and A. Zeilinger, *Nature* **403**, 515 (2000).
- [36] T. A. Johnson, E. Urban, T. Henage, L. Isenhower, D. D. Yavuz, T. G. Walker and M. Saffman, *Phys. Rev. Lett* **100**, 113003 (2008).
- [37] F. L. Mettes, G. Aromi, F. Luis, M. Evangelisti, G. Christou, D. Hendrickson and L. J. de Jongh, *Polyhedron* **20**, 1459 (2001).
- [38] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, United Kingdom, 1997).
- [39] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, *Quantum Mechanics, Vol 2* (John Wiley, France, 1977).
- [40] C. Gerry and P. Knight, *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, United Kingdom, 2005).
- [41] G. Adam, *J. Mod. Opt.* **42**, 1311 (1995).
- [42] J. Schlienz and G. Mahler, *Phys. Rev. A* **52**, 4396 (1995).
- [43] R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
- [44] M. B. Plenio and S. Virmani, *Quant. Inf. Comp.* **7**, 1 (2007).
- [45] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [46] A. Peres, *Phys. Rev. Lett* **77**, 1413 (1996).
- [47] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, *Phys. Lett. A* **223**, 1 (1996).
- [48] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, United Kingdom, 2000).
- [49] R. Simon, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000).
- [50] D. Bruß, *J. Math. Phys.* **43**, 4237 (2002).
- [51] C. H. Bennett, H. Bernstein, S. Popescu and B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).

- [52] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin and P. L. Knight, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2275 (1997).
- [53] S. Popescu and D. Rohrlich, *Phys. Rev. A* **56**, 3319 (1997).
- [54] G. Jaeger, *Quantum Information: An Overview* (Springer, New York, 2007).
- [55] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin and W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 722 (1996).
- [56] J. P. Paz, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1187 (1993).
- [57] S. Lloyd, *Science* **319**, 1209 (2008).
- [58] J. Eisert, M. Cramer, M.B. Plenio, e-print quant-ph/0808.3773.
- [59] M. R. Dowling, A. C. Doherty and H. M. Wiseman, *Phys. Rev. A* **73**, 052323 (2006).
- [60] R. J. Sension, *Nature* **446**, 740 (2007).
- [61] M. Genovese, *Adv. Sci. Lett.* **2**, 303 (2009).
- [62] J. F. Leandro and F. L. Semião, *Opt. Commun.* **282**, 4736 (2009).
- [63] W. Nagourney, J. Sandberg and H. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2797 (1986).
- [64] A. A. Madej and J. D. Sankey, *Phys. Rev. A* **41**, 2621 (1990).
- [65] S. R. Zhao, C. P. Sun and W. X. Zhang, *Phys. Lett. A* **207**, 327 (1995).
- [66] K. W. Chan, C. K. Law and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 100402 (2002).
- [67] K. W. Chan, C. K. Law and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **68**, 022110 (2003).
- [68] H. Carmichael, *An Open systems Approach to Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
- [69] D. G. Angelakis, P. L. Knight and E. Paspalakis, *Contemp. Phys.* **45**, 303 (2004).
- [70] M. O. Terra Cunha, S. Geraj Mekarzel, J. G. Peixoto de Faria and M. C. Nemes, e-print quant-ph/0409061v2.
- [71] S. Bose, P. L. Knight, M. B. Plenio and V. Vedral, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5158 (1999).
- [72] C. Cabillo, J. I. Cirac, P. Garcia-Fernandez and P. Zoller, *Phys. Rev. A* **59**, 1025 (1999).

- [73] S. R. Entezar, *Phys. Lett. A* **373**, 3413 (2009).
- [74] J. F. Leandro and F. L. Semião, *Phys. Rev. A* **79**, 052334 (2009).
- [75] P. Marian, T. A. Marian and H. Scutaru, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 153601 (2002).
- [76] M. S. Kim, W. Son, V. Bužek and P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **65**, 032323 (2002).
- [77] R. Tahira, M. Ikram, H. Nha and M. S. Zubairy, *Phys. Rev. A* **79**, 023816 (2009).
- [78] G. Vidal and R. F. Werner, *Phys. Rev. A* **65**, 032314 (2002).
- [79] E. Buks and M. L. Roukes, *J. Microelectromech. Syst.* **11**, 802 (2002).
- [80] E. K. Irish, *The Theory of Quantum Electromechanics: A Solid-State Analog of Quantum Optics*, 2006. 157f. Tese (Doctor of Philosophy) - University of Rochester, New York, 2006.
- [81] J. Eisert, M. B. Plenio, S. Bose and J. Hartley, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 190402 (2004).
- [82] M. Paternostro, H. McAneney and M. S. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 070501 (2005).
- [83] F. F. Cap, *Mathematical Methods in Physics and Engineering with Mathematica* (CRC Press LLC, New York, 2003).
- [84] A. Manninen, A. Kärkkäinen, N. Pesonen, A. Oja and H. Seppä, e-print arXiv:0707.0637v1.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)