TATIANA APARECIDA GOUVEIA

PI-ÁLGEBRAS E CRESCIMENTO POLINOMIAL DAS CODIMENSÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA

MINAS GERAIS - BRASIL

2009

TATIANA APARECIDA GOUVEIA

PI-ÁLGEBRAS E CRESCIMENTO POLINOMIAL DAS CODIMENSÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

APROVADA: 03 de Dezembro de 2009.

Plamen Emilov Kochloukov	Viviane Ribeiro Tomaz da Silva
Sônia Maria Fernandes (Co-orientadora)	Ana Cristina Vieira (Co-orientadora)

Marinês Guerreiro (Orientadora)

"Tudo é do Pai,

toda honra e toda glória,
é Dele a vitória, alcançada em minha vida."
Frederico Cruz.

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e por todas as oportunidades. Por estar sempre presente ao nosso lado, nos conduzindo, iluminando, confortando, por ser o meu porto seguro.

A minha orientadora, Prof. Marinês Guerreiro, por me introduzir no estudo das PI-álgebras, por todas as contribuições para meu desenvolvimento pessoal e profissional nestes anos de trabalho e convivência.

As Co-orientadoras, em especial, a Prof. Ana Cristina, pela paciência, atenção nos nossos encontros na UFMG, por todas as sugestões e contribuições relevantes.

A Viviane e a Sandra, pelas sugestões e questionamentos significativos durante os seminários na UFMG.

Aos professores membros da banca, pela atenção, por todas as sugestões e comentários.

Aos professores, amigos e funcionários do Departamento de Matemática da UFV, pela feliz convivência durante estes anos, apoio e incentivo, de modo especial ao corpo docente do Programa de Mestrado e aos amigos da primeira turma.

Aos meus pais, Joaquim e Maria das Graças, pelo amor, compreensão, dedicação, apoio incondicional e por todos os ensinamentos.

Aos meus irmãos, Regiane e Josimar, pelo carinho, companheirismo, confiança e amizade.

A minha avó Izaulina pelas orações e carinho.

A essa família que é meu alicerce, incentivo, refúgio, e sem a qual não teria concluído mais essa etapa.

Ao Anderson, meu namorado e amigo, pelo amor, companheirismo, paciência e o presente cheio de alegrias.

Aos familiares e amigos de Ervália, especialmente a Elaine e a Valéria, pela atenção e conselhos.

Às amigas de república e a Lílian, por tornarem os meus dias mais agradáveis e pela força nos momentos de desânimo.

A Mara, secretária do Mestrado, que se tornou uma amiga prestativa e preocupada conosco.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos o meu muito obrigada!

Biografia

Tatiana Aparecida Gouveia, filha de Joaquim do Carmo Gouveia e Maria das Graças Gouveia, nasceu no dia 15 de maio de 1984, em Ervália-MG.

Em 2001, concluiu o Ensino Médio na Escola Estadual Professor David Procópio, em Ervália. Em 2002 ingressou no curso de Matemática da Universidade Federal de Viçosa, graduando-se em Licenciatura em outubro de 2006 e em Bacharelado em março de 2007.

Em 2008 ingressou no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Viçosa, submetendo-se à defesa da dissertação no dia 03 de dezembro de 2009.

Sumário

Resumo

GOUVEIA, Tatiana Aparecida, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Dezembro, 2009. **PI-Álgebras e Crescimento Polinomial das Codimensões**. Orientadora: Marinês Guerreiro. Co-orientadoras: Sônia Maria Fernandes e Ana Cristina Vieira.

Sejam F um corpo infinito e A uma F-álgebra com identidades polinomiais, ou seja, uma PI-álgebra. Dizemos que A tem crescimento polinomial (das codimensões) se a sequência de codimensões $c_n(A)$ é limitada polinomialmente, isto é, existem constantes $a, t > 0$ tais que $c_n(A) \leq an^t$, para todo número natural $n \geq 1$. Neste trabalho caracterizamos as PI-álgebras de crescimento polinomial das codimensões. Provamos ainda que, para uma PI-álgebra associativa unitária A de crescimento polinomial, temos $c_n(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1})$, onde q é um número racional, k um inteiro não negativo e $\frac{1}{k!} \leq q \leq \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}\cdot$ Em particular, quando k é ímpar, verificamos que um melhor limite inferior do coeficiente dominante q é dado por $\frac{k-1}{k!}\cdot$ Além disso, para qualquer grau fixo k, construímos PI-álgebras associativas unitárias, cuja sequência das codimensões possui o maior e o menor crescimento polinomial possível de grau k e descrevemos explicitamente uma base para o T-ideal de tais álgebras. Por fim caracterizamos, a menos de PI-equivalência, as PI-álgebras associativas unitárias de crescimento polinomial no máximo cúbico.

Abstract

GOUVEIA, Tatiana Aparecida, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, December, 2009. **PI-Algebras and Polynomial Growth of the Codimensions**. Adviser: Marinês Guerreiro. Co-Advisers: Sônia Maria Fernandes and Ana Cristina Vieira.

Let F be an infinite field and A an F-algebra with polynomial identities, that is, a PI-algebra. We say that A is of polynomial growth (of the codimensions) if the sequence of codimensions $c_n(A)$ is polynomially bounded, that is, there exist constants $a, t > 0$ such that $c_n(A) \leq an^t$, for all natural numbers $n \geq 1$. In this work we characterize the PI-algebras of polynomial growth of the codimensions. For an unitary associative PI-algebra A of polynomial growth, we prove even that $c_n(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1})$, where q is a rational number, k a nonnegative integer and $\frac{1}{k!} \leq q \leq \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}\cdot$ In particular, when k is odd, we show that a better lower bound of the leading coefficient q is given by $\frac{k-1}{k!}\cdot$ Moreover, for any fixed degree k, we construct unitary associative PI-algebras whose codimension sequence has the largest and smallest possible polynomial growth of degree k and describe an explicit basis for the T-ideal of such algebras. Finally we characterize, up to PI-equivalence, the unitary associative PI-algebras of polynomial growth at most cubic.

Introdução

Sejam F um corpo e $F\langle X\rangle$ a álgebra livre associativa gerada por $X = \{x_1, x_2, ...\}$, um conjunto enumerável de indeterminadas não comutativas. Uma **identidade polinomial** para uma F-álgebra A é um polinômio $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in F\langle X\rangle$ que se anula quando avaliado em todos os elementos da álgebra A, ou seja, $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$, para todos $a_1, a_2, ..., a_n \in A$. Quando existe uma identidade não trivial para a álgebra A, dizemos que A é uma **PI-álgebra**. Por exemplo, o comutador de Lie $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial para qualquer álgebra comutativa. As álgebras de dimensão finita tais como as álgebras de matrizes $M_k(F)$, álgebras de matrizes triangulares superiores $UT_k(F)$ e a álgebra de Grassmann de dimensão infinita G (que satisfaz o comutador $[x_1, x_2, x_3]$) são exemplos de PI-álgebras.

Chamamos de **PI-Teoria** a subárea da Teoria de Anéis que estuda as classes de álgebras que satisfazem identidades polinomiais, dentre elas as álgebras comutativas, as álgebras de dimensão finita, as álgebras algébricas de grau limitado e as álgebras nilpotentes.

Apesar de polinômios não comutativos se anulando em álgebras aparecerem na literatura em artigos anteriores, como nos artigos de Dehn [5], Wagner [41] e Hall [21], publicados em 1922, 1936 e 1943, respectivamente, o efetivo início da PI-teoria se deu após um artigo de Kaplansky [24], em 1948. Dois anos após o Teorema de Kaplansky, Amitsur e Levitzki em [1] provaram, utilizando métodos puramente combinatoriais, que o polinômio *standard* de grau $2n$ é uma identidade de grau minimal na álgebra das matrizes $M_n(F)$. Este resultado foi o ponto inicial para uma nova abordagem da PI-Teoria cuja preocupação passou a ser a descrição das identidades polinomiais satisfeitas por uma dada álgebra.

Muito da estrutura da PI-teoria foi desenvolvida nos anos 60 e 70 e pode ser encontrada em vários livros relativos à teoria de anéis ou de outras áreas diferentes que possuem partes dedicadas à teoria de identidades polinomiais como os livros de Herstein [19], Jacobson [23], Procesi [32], Rowen [35] e Shirshov [37].

Os principais resultados desenvolvidos nos últimos anos sobre as PI-álgebras têm sido obtidos, em sua maior parte, através de técnicas que fazem o uso de representações do grupo simétrico em característica zero e teoria de álgebras graduadas, além de métodos assintóticos, integrando assim várias teorias matemáticas em uma área de pesquisa bastante atual. Muitos resultados da PI-teoria também são válidos sobre corpos de característica não nula. Neste trabalho nos restringiremos a corpos de característica zero a menos de alguma menção ao contrário.

O conjunto $Id(A)$ das identidades polinomiais satisfeitas por uma dada álgebra sobre um corpo F é um **T-ideal** da álgebra $F\langle X\rangle$ dos polinômios nas variáveis não comutativas, isto é, é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$. A fim de descrevermos todas as identidades polinomiais satisfeitas por A, é suficiente obtermos os geradores de $Id(A)$ como um T-ideal. Além disso, como álgebras distintas podem ter o mesmo T-ideal, se torna mais conveniente estudar a classe das álgebras que satisfazem essas identidades, chamada a **variedade gerada por A**.

Dessa forma, em 1950, Specht conjecturou que todo T-ideal de uma álgebra associativa é finitamente gerado sobre um corpo de característica zero. Embora provada para casos particulares nos anos seguintes, esta conjectura só teve uma prova completa em 1987, dada por Kemer. Mesmo assim, a descrição do T-ideal de uma álgebra é em geral um problema difícil, pois o trabalho de Kemer não estabelece como se determina tal base finita. Como exemplo, para a álgebra de matrizes $M_k(F)$ o T-ideal foi descrito somente para $k = 2$, até o presente momento. Logo determinar o grau mínimo de uma identidade satisfeita por uma álgebra pode se tornar relevante.

Para enfrentar estas dificuldades, é natural introduzir uma função que mede de uma certa maneira o crescimento das identidades de um T-ideal. Tal idéia foi introduzida por Regev [34] em 1972 e se tornou não apenas a maior ferramenta, mas também o principal objeto de estudo na teoria de PI-álgebras em característica zero.

Como o T-ideal é invariante sob endomorfismos de $F\langle X\rangle$ definimos uma ação do grupo simétrico S_n sobre os subespaços P_n dos polinômios multilineares em n indeterminadas $x_1, ..., x_n$ e associamos ao T-ideal de uma PI-álgebra A uma sequência de caracteres $\chi_n(A)$ dos grupos simétricos S_n, $n = 1, 2, ...$, chamada **sequência dos cocaracteres de A** e uma sequência numérica $c_n(A)$, dita **sequência das codimensões de A,** dada pelos graus correspondentes dos FS_n-módulos $\dfrac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$, que medem o crescimento do T-ideal. Como a sequência das codimensões mede, de alguma forma, a taxa de crescimento das identidades polinomiais de uma dada álgebra, faz sentido tentar estimar as codimensões assintoticamente.

O ponto inicial para a investigação do crescimento dos T-ideais é um teorema de

Regev [34] (1972) que estabelece que a sequência das codimensões de uma dada PI-álgebra A é limitada exponencialmente. Giambruno e Zaicev [12] e [13] mostraram em 1998 e 1999 que o crescimento exponencial de um T-ideal próprio é um inteiro, dito o **expoente** de um T-ideal ou de uma PI-álgebra correspondente.

Nos últimos anos, um dos enfoques da PI-Teoria tem sido a classificação de T-ideais de acordo com o comportamento assintótico de suas sequências de codimensões e muitos têm sido os resultados obtidos. De modo geral, o objetivo do estudo desta teoria é a obtenção do comportamento assintótico das sequências das codimensões e cocaracteres de específicas PI-álgebras, além do comportamento das sequências de codimensões graduadas e cocaracteres graduados de algumas importantes superálgebras. Também procura-se estabelecer novos resultados sobre classificação de PI-álgebras cuja sequência de codimensões tenha um comportamento pré-estabelecido, como por exemplo em [10] e [17].

Nosso trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos as definições básicas, como identidades polinomiais, T-ideais, variedades de álgebras, polinômios multihomogêneos e multilineares, o grupo simétrico S_n e as tabelas de Young, a sequência das codimensões e dos cocaracteres entre outros, e listamos os principais resultados relacionados a estes conceitos necessários no desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2, definimos o crescimento polinomial (das codimensões) e o crescimento exponencial (das codimensões) de uma álgebra A, apresentamos resultados importantes de caracterização de álgebras de crescimento polinomial. Primeiramente, listamos o Teorema de Wedderburn-Malcev que estabelece a decomposição de uma álgebra de dimensão finita em uma álgebra semisimples e seu radical de Jacobson, uma relevante ferramenta para a demonstração dos resultados deste capítulo. Verificamos, através de um Teorema de Kemer, a importância da álgebra de Grassmann G e da álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2, UT_2, na caracterização de crescimento polinomial quando são excluídas da variedade de uma álgebra A. Ainda, devido a Giambruno e Zaicev, garantimos que uma variedade de álgebras com crescimento polinomial é gerada por uma álgebra de dimensão finita. Além disso, apresentamos um Teorema de Giambruno e Zaicev que caracteriza o crescimento polinomial em termos da sequência de cocaracteres da álgebra A. Na Seção 2.1 listamos as álgebras M_i, para $1 \leq i \leq 6$, seus cocaracteres, codimensões e T-ideais a fim de caracterizarmos, nas seções seguintes, as álgebras de crescimento constante e linear (para o qual definimos também a álgebra M_7 de grande relevância), segundo Giambruno e La Mattina em [17]. Em seguida caracterizamos variedades minimais de crescimento quadrático segundo os resultados apresentados por Vieira e Jorge em [39].

No Capítulo 3, definimos os polinômios próprios, que têm um papel fundamental no estudo das identidades de uma álgebra unitária A. Provamos o Teorema da Base de Specht, que nos fornece uma base do espaço dos polinômios próprios multilineares, afim de obtermos os principais resultados deste capítulo, como, por exemplo, o resultado que relaciona as codimensões ordinárias e as codimensões próprias de uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito F. Para finalizar o capítulo, a partir deste resultado, verificamos que uma PI-álgebra unitária tem codimensão ou exponencial maior ou igual a 2^{n-1} ou polinomial sendo o coeficiente dominante do polinômio um número racional com determinados limites inferior e superior.

No último capítulo estudamos álgebras associativas unitárias com crescimento polinomial das codimensões. Para qualquer grau fixo k, construimos álgebras associativas cuja sequência de codimensões tem o maior e o menor crescimento polinomial possível de grau k, explicitando as identidades destas álgebras segundo os resultados demonstrados em [18] por Giambruno, La Mattina e Petrogradsky.

Mais precisamente construimos PI-álgebras que atingem o menor e o maior valor do coeficiente dominante q. Construímos uma álgebra de matrizes triangulares superiores usando o valor $q = \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}\cdot$ Ainda provamos que o limite inferior de q é obtido apenas no caso em que k é par. Para k ímpar o limite inferior é dado por $\frac{k-1}{k!}$ e construímos uma álgebra com tal propriedade. E por fim apresentamos um teorema que classifica, a menos de PI-equivalência, as PI-álgebras unitárias cuja sequência de codimensões tem crescimento no máximo cúbico.

O trabalho termina com algumas considerações finais nas quais retomamos alguns dos resultados obtidos neste texto e apontamos questões ainda em aberto.

Capítulo 1

Identidades Polinomiais e PI-Álgebras

1.1 Conceitos Básicos

Seja $X = \{x_1, x_2, ...\}$ um conjunto infinito e enumerável de elementos não comutativos aos quais chamaremos **variáveis ou indeterminadas**. Uma **palavra** em X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ com $n \in \mathbb{N}$ e a palavra $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$, com $n = 0$, será a **palavra vazia** que denotaremos por 1.

Definição 1.1 *Sejam $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras e $A \in \mathcal{B}$ uma álgebra gerada por um conjunto X. A álgebra A é chamada uma **álgebra livre** na classe $\mathcal{B}$, livremente gerada por X, se para qualquer álgebra $R \in \mathcal{B}$, qualquer aplicação $\varphi : X \to R$ pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras $\psi : A \to R$. A cardinalidade $|X|$ do conjunto X é chamada posto de A.*

Seja $F\langle X\rangle$ o F-espaço vetorial que tem uma base formada por todas as palavras em X. $F\langle X\rangle$ munido com a multiplicação natural definida por justaposição é uma **álgebra livre associativa com unidade gerada por** X.

Chamaremos de **monômios** os produtos de um escalar por uma palavra de X e de **polinômios** os elementos de $F\langle X\rangle$ que são somas formais de monômios. Se $f \in F\langle X\rangle$ escrevemos $f = f(x_1, ..., x_n)$ para indicar que $x_1, ..., x_n$ são as únicas indeterminadas aparecendo em f. Usaremos também $x, y, z, w, t, ...$ para denotar indeterminadas do conjunto X.

Além disso, temos as seguintes definições relacionadas aos elementos de $F\langle X\rangle$:

Definição 1.2 *Sejam $m = \alpha x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_n}$ um monômio e f um polinômio de $F\langle X \rangle$.*

(1) Se $x_j \in X$ então o ***grau de*** *x_j* ***em*** *m, denotado por $\deg_{x_j} m$, é o número de ocorrências de x_j em m.*

(2) O ***grau de m****, denotado por $\deg m$, é o número total n de indeterminadas presentes no monômio m, considerando também as multiplicidades de cada indeterminada.*

(3) O ***grau de*** *f, denotado por $\deg f$, é o maior grau obtido entre seus monômios.*

Recordamos que uma F-álgebra A é um F-espaço vetorial munido de um "produto" compatível com a multiplicação por escalares que satisfaz as seguintes condições:

(i) $(a + b)c = ac + bc$

(ii) $a(b + c) = ab + ac$

(iii) $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$

para todos $a, b, c \in A$, $\alpha \in F$.

Se o produto for associativo então dizemos que A é uma álgebra associativa. Usaremos simplesmente a palavra álgebra para nos referirmos a uma álgebra associativa, a menos que algo seja dito em contrário.

Se a, b são elementos de uma álgebra A então o **comutador de Lie** de peso 2 é dado por

$$[a, b] = ab - ba$$

e o **comutador de peso** n normado a esquerda é definido indutivamente por

$$[a_1, ..., a_{n-1}, a_n] = [[a_1, ..., a_{n-1}], a_n],$$

para todo $n \geq 3$ e todo $a_i \in A$.

Definição 1.3 *Uma álgebra (não necessariamente associativa) A sobre um corpo F é uma* ***álgebra de Lie*** *se existe um produto $* : A \times A \to A$ satisfazendo*

(i) $a * a = 0$ (anticomutatividade),

(ii) $(a*b)*c+(b*c)*a+(c*a)*b = 0$ (identidade de Jacobi), para todos $a, b, c \in A$.

Definição 1.4 *Dada uma álgebra (associativa) A, ao considerar um novo produto (colchete de Lie) definido por $[a,b] = ab - ba$ temos uma álgebra de Lie que denotamos por $A^{(-)}$.*

*Se uma álgebra de Lie L é isomorfa a uma subálgebra de $A^{(-)}$, dizemos que A é uma **álgebra envolvente de** L.*

Definição 1.5 *Seja L uma álgebra de Lie. Uma álgebra associativa U é uma **envolvente universal** de L se L é subálgebra de $U^{(-)}$ e para toda álgebra associativa A e todo homomorfismo $\varphi : L \to A^{(-)}$ de álgebras de Lie, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\widetilde{\varphi} : U \to A$ de modo que $\widetilde{\varphi}|_L = \varphi$.*

Teorema 1.6 ***(Poincaré-Birkhoff-Witt)***([11], *Teorema 1.3.2) Toda álgebra de Lie L possui uma única (a menos de isomorfismo) álgebra envolvente universal $U(L)$. Se L possui uma base $\{a_i : i \in I\}$, com I totalmente ordenado, então $U(L)$ tem uma base $a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_s}$, com $i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_s$, $i_k \in I$, $s = 0, 1, ...$*

Consideremos $Com(X) = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}] : k \geq 2, x_{i_j} \in X\}$, isto é, $Com(X)$ é o conjunto de todos comutadores de peso maior ou igual a 2 em X.

Notemos que para uma álgebra de Lie A (com operação de Lie $*$), os elementos de uma subálgebra de Lie de A gerada por um subconjunto $\{a_1, a_2, ..., a_k, ...\} \subset A$ são dados por combinações lineares de elementos $(...((a_{i_1} * a_{i_2}) * ...) * a_{i_s})$. Deste modo os elementos da subálgebra de Lie $L(X)$ de $F\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X são combinações lineares de elementos de X e elementos de $Com(X)$.

Teorema 1.7 ***(Witt)***([11], *Teorema 1.3.5) A subálgebra de Lie $L(X)$ de $F\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X é isomorfa a álgebra de Lie livre com X como um conjunto de geradores livres. Além disso $U(L(X)) = F\langle X\rangle$.*

Definição 1.8 *Seja A uma F-álgebra e $f = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in F\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma **identidade polinomial de** A se*

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0, \text{ para todo } a_1, a_2, ..., a_n \in A.$$

Neste caso, diremos que $f \equiv 0$ é uma identidade de A ou que A satisfaz $f \equiv 0$. Uma vez que o polinômio nulo é uma identidade para toda álgebra A, estabelecemos o seguinte:

Definição 1.9 *Se A satisfaz uma identidade polinomial não trivial então A é uma **PI-álgebra**.*

A seguir apresentamos exemplos de PI-álgebras e de identidades polinomias satisfeitas por estas álgebras.

Exemplo 1.10 *1) Se A é uma álgebra comutativa, então A é uma PI-álgebra, uma vez que satisfaz a identidade $[x, y] = xy - yx \equiv 0$.*

2) Toda álgebra nilpotente é uma PI-álgebra. De fato, se temos $A^n \equiv 0$, para algum $n \geq 1$, então $x_1 x_2 ... x_n \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A.

3) Seja A uma álgebra nil de expoente limitado, ou seja, existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $a^n = 0$, para todo $a \in A$. Então $x^n \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A.

4) Seja $UT_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre F. Então $UT_n(F)$ é uma PI-álgebra, uma vez que satisfaz a identidade

$$[x_1, x_2]...[x_{2n-1}, x_{2n}] \equiv 0.$$

Isto é facilmente visto, já que o comutador de duas matrizes triangulares superiores é exatamente uma matriz estritamente triangular superior. Ainda o conjunto das matrizes estritamente triangulares superiores formam um ideal nilpotente I de $UT_n(F)$ tal que $I^n = 0$.

5) A álgebra $M_2(F)$ das matrizes 2×2 sobre F satisfaz a identidade

$$[[x, y]^2, z] \equiv 0.$$

De fato, se $A \in M_2(F)$ então seu polinômio característico é $x^2 - tr(A)x + \det(A)E$, onde E é a matriz identidade 2×2. Se $A = [B, C]$, para $B, C \in M_2(F)$, então $tr(A) = 0$, e daí $A^2 + \det(A)E = 0$, ou seja, $A^2 = -\det(A)E$. Assim, o quadrado de um comutador é uma matriz escalar (logo central) e, portanto $[A^2, M] = 0$, para todo $M \in M_2(F)$.

6) Seja G a álgebra (exterior) de Grassmann sobre um espaço vetorial de dimensão enumerável sobre um corpo F tal que car $F \neq 2$. Esta álgebra pode ser construída como segue: Consideramos $F\langle X \rangle$ a álgebra livre de posto enumerável sobre $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Se I é o ideal de $F\langle X \rangle$ gerado pelo conjunto de polinômios $\{x_i x_j + x_j x_i : \ i, j \geq 1\}$ então $G = \dfrac{F\langle X \rangle}{I}\cdot$ Se escrevemos $e_i = x_i + I$ para $i = 1, 2, ...$, então G tem a seguinte apresentação:

$$G = \langle 1, e_1, e_2, ... : e_i e_j = -e_j e_i, \ para\ todo\ i, j \geq 1 \rangle.$$

Seja S_n o grupo simétrico sobre $\{1, 2, ..., n\}$, para $1 \leq k < l \leq n$,

$$e_{i_1} ... e_{i_{k-1}} e_{i_k} e_{i_{k+1}} ... e_{i_{l-1}} e_{i_l} e_{i_{l+1}} ... e_{i_n} = -e_{i_1} ... e_{i_{k-1}} e_{i_l} e_{i_{k+1}} ... e_{i_{l-1}} e_{i_k} e_{i_{l+1}} ... e_{i_n}.$$

Portanto, se $\sigma \in S_n$, obtemos

$$e_{\sigma(i_1)} ... e_{\sigma(i_n)} = (sgn\ \sigma) e_{i_1} ... e_{i_n},$$

onde $sgn\ \sigma$ é o sinal da permutação σ, ou seja, $sgn\ \sigma = +1$ ou $sgn\ \sigma = -1$ se σ é uma permutação par ou ímpar, respectivamente.

É conveniente escrever G na forma $G = G^{(0)} \oplus G^{(1)}$, onde

$$G^{(0)} = span_F\{e_{i_1} ... e_{i_{2k}} : \ 1 \leq i_1 < ... < i_{2k}, k \geq 0\},$$

$$G^{(1)} = span_F\{e_{i_1} ... e_{i_{2k+1}} : \ 1 \leq i_1 < ... < i_{2k+1}, k \geq 0\}.$$

É fácil ver que $G^{(0)}G^{(0)} + G^{(1)}G^{(1)} \subseteq G^{(0)}$ e $G^{(0)}G^{(1)} + G^{(1)}G^{(0)} \subseteq G^{(1)}$. Além disso, $G^{(0)}$ é o centro de G.

Devido a observação acima é fácil ver que G satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$, já que $[x_1, x_2] \in G^{(0)}$.

Observação 1.11 *Nos Exemplos 4 e 5 apresentamos PI-álgebras de dimensão finita, enquanto no Exemplo 6 temos uma PI-álgebra de dimensão infinita.*

1.2 T-ideais e Variedades de Álgebras

As identidades polinomiais de uma dada álgebra A podem também ser identidades para outras álgebras diferentes. Assim, quando estudamos um determinado conjunto de polinômios S é mais apropriado considerarmos a classe de todas as álgebras satisfazendo todas as identidades de S. Isto nos leva à noção de variedades de álgebras, que vamos definir nesta seção.

Dada uma álgebra A podemos considerar

$$Id(A) = \{f \in F\langle X \rangle : f \equiv 0 \text{ em } A\},$$

o conjunto de todas as identidades polinomiais de A e claramente $Id(A)$ é um ideal de $F\langle X \rangle$. Além disso se $f = f(x_1, ..., x_n)$ é qualquer polinômio em $Id(A)$ e $g_1, ..., g_n$ são polinômios arbitrários em $F\langle X\rangle$ é claro que $f(g_1, ..., g_n) \in Id(A)$. Como qualquer endomorfismo de $F\langle X\rangle$ é determinado pela aplicação $x_i \longrightarrow g_i$, para $i = 1, 2, ...,$ com $g_i \in F\langle X\rangle$, segue que $Id(A)$ é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$. Os ideais de $F\langle X\rangle$ com essa propriedade são chamados **T-ideais**, conforme a próxima definição.

Definição 1.12 *Um ideal I de $F\langle X\rangle$ é um **T-ideal** se $\varphi(I) \subseteq I$, para todo endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$.*

Assim, dada uma álgebra A, $Id(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$ dito o T-ideal da álgebra A. Por outro lado é fácil verificar que todos T-ideais de $F\langle X\rangle$ são desse tipo, para isto é suficiente mostrarmos que $Id\left(\frac{F\langle X\rangle}{I}\right) = I$, com I um T-ideal de $F\langle X\rangle$.

Definição 1.13 *Dado um subconjunto S de $F\langle X\rangle$ o **T-ideal gerado por** S, denotado por $\langle S\rangle_T$, é o conjunto*

$$\langle S\rangle_T = span_F\{h_1\phi(f)h_2;\ f \in S, \phi \in End(F\langle X\rangle), h_1, h_2 \in F\langle X\rangle\}.$$

Definimos o **polinômio *standard* de grau** n por

$$St_n(x_1, ..., x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} (sgn\ \sigma)x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}.$$

Exemplo 1.14 *1) Em* [1], *Amistur-Levitzki provaram que o polinômio standard $St_{2n}(x_1, ..., x_{2n})$ é uma identidade minimal da álgebra de matrizes $M_n(F)$. Além disso, Razmyslov, em* [33], *considerando F um corpo de característica zero determinou uma base com 9 identidades para $Id(M_2(F))$. E em 1981, Drensky* [7] *provou que*

$$Id(M_2(F)) = \langle [[x_1, x_2]^2, x_3], St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\rangle_T,$$

sobre um corpo F de característica zero.

Porém, o T-ideal $Id(M_n(F))$ ainda não é conhecido para $m \geq 3$.

2) Se A é uma álgebra comutativa e unitária então $Id(A) = \langle [x_1, x_2]\rangle_T$.

3) $Id(UT_n) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4]...[x_{2n-1}, x_{2n}]\rangle_T$.

4) ([29], *Krakowski e Regev, 1973) $Id(G) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle_T$.*

Vimos que qualquer álgebra A determina um T-ideal de $F\langle X\rangle$. Por outro lado, muitas álgebras podem corresponder a um mesmo T-ideal (como o ideal de suas identidades). Introduzimos assim a noção de variedades de álgebras.

Definição 1.15 *Dado um conjunto não vazio $S \subseteq F\langle X\rangle$, a classe de todas as álgebras B tais que $f \equiv 0$, em B, para todo $f \in S$, é chamada* ***variedade*** *$\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ determinada por S e dizemos que $Id(\mathcal{V}) = \langle S\rangle_T$ é o* ***T-ideal da variedade*** *$\mathcal{V}$. Em particular, se $Id(\mathcal{V}) = Id(A)$ para alguma álgebra A, denotaremos $\mathcal{V} = var(A)$ e diremos que $\mathcal{V}$ é a* ***variedade gerada por*** *A.*

1.3 Polinômios Homogêneos e Multilineares

Quando o corpo base F é infinito (ou ainda *car* $F = 0$), o estudo das identidades de uma dada álgebra se reduz ao estudo dos polinômios homogêneos (ou multilineares). Nesta seção daremos as definições correspondentes e provaremos essas reduções.

Seja $F_k = F\langle x_1, ..., x_k\rangle$ a álgebra livre de posto $k \geq 1$ sobre F. Uma tal álgebra pode ser naturalmente decomposta como:

$$F_k = F_k^{(1)} \oplus F_k^{(2)} \oplus ..., \tag{1.1}$$

onde, para cada $n \geq 1$, $F_k^{(n)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios de grau total n. Como $F_k^{(i)} \cdot F_k^{(j)} \subseteq F_k^{(i+j)}$, para todo $i, j \geq 1$, dizemos que F_k é graduada pelo grau ou que F_k tem uma estrutura de álgebra graduada. Os $F_k^{(i)}$ são chamados **componentes homogêneas** de F_k. A decomposição (1.1) ainda pode ser refinada como segue: para cada $n \geq 1$, escreva

$$F_k^{(n)} = \bigoplus_{i_1+...+i_k=n} F_k^{(i_1,...,i_k)},$$

onde $F_k^{(i_1,...,i_k)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios de grau i_1 em $x_1, ..., i_k$ em x_k. Além disso, $F_k^{(i_1,...,i_k)} \cdot F_k^{(j_1,...,j_k)} \subseteq F_k^{(i_1+j_1,...,i_k+j_k)}$ e dizemos que F_k é **multigraduada**.
É claro que tais decomposições se estendem de maneira óbvia para $F\langle X\rangle$.

Definição 1.16 *Um polinômio f pertencente a $F_k^{(n)}$, para algum $n \geq 1$, será chamado* ***homogêneo de grau*** *n. Se f pertence a algum $F_k^{(i_1,...,i_k)}$, f será dito* ***completa-***

mente homogêneo de múltiplo grau $(i_1, ..., i_k)$. *Também dizemos que* f *é* ***homogêneo na variável*** x_i, *se* x_i *aparece com o mesmo grau em todos os monômios de* f.

Se F é um corpo infinito então todo T-ideal é homogêneo em relação à multigraduação acima. Se $f \in F\langle X \rangle$ podemos sempre escrever:

$$f = \sum_{i_1 \geq 0, ..., i_n \geq 0} f^{(i_1, ..., i_n)},$$

onde $f^{(i_1,...,i_n)}$ é a soma de todos os monômios em f, onde x_1 aparece com grau $i_1, ..., x_n$ aparece com grau i_n. Os polinômios $f^{(i_1,...,i_n)}$ que são não-nulos são chamados **componentes multihomogêneas** de f.

Teorema 1.17 *Seja* F *um corpo infinito. Se* $f \equiv 0$ *é uma identidade polinomial para a álgebra* A *então toda componente multihomogênea de* f *é também uma identidade polinomial para* A.

Prova: Para cada x_t, $1 \leq t \leq n$, podemos decompor $f = \sum_{i=0}^{m} f_i$, onde f_i é a soma de todos os monômios de f nos quais x_t aparece com grau i e $m = \deg_{x_t} f$ é o grau de x_t em f. Por um argumento indutivo sobre n é suficiente provar que, para cada variável x_t, $f_i \equiv 0$, para todo $i \geq 0$. Sejam $\alpha_0, ..., \alpha_m$ elementos distintos de F. Claramente, para $j = 0, ..., m$,

$$f(x_1, ..., \alpha_j x_t, ..., x_n) \equiv 0$$

é ainda uma identidade para A. Como cada componente f_i é homogênea em x_t de grau i, temos $f_i(x_1, ..., \alpha_j x_t, ..., x_n) = \alpha_j^i f_i(x_1, ..., x_t, ..., x_n)$. Logo

$$f(x_1, ..., \alpha_j x_t, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_j^i f_i(x_1, ..., x_n) \equiv 0 \tag{1.2}$$

em A, para todo $j = 0, ..., m$. Escrevendo a matriz de Vandermonde:

$$\triangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0^m & \alpha_1^m & \dots & \alpha_m^m \end{pmatrix}$$

Desta maneira (1.2) nos diz que para cada $a_1, ..., a_n \in A$ se escrevemos $f_i(a_1, ..., a_n) =$

$\overline{f}_i$, temos

$$(\bar{f}_0\ \bar{f}_1\ ...\ \bar{f}_m)\triangle = (\bar{f}_0\ \bar{f}_1\ ...\ \bar{f}_m)\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_0^m & \alpha_1^m & \dots & \alpha_m^m \end{pmatrix}$$

$= \bar{f}_0 + \alpha_0\bar{f}_1 + ... + \alpha_0^m\bar{f}_m + \bar{f}_0 + \alpha_1\bar{f}_1 + ... + \alpha_1^m\bar{f}_m + ... + \bar{f}_0 + \alpha_m\bar{f}_1 + ... + \alpha_m^m\bar{f}_m = 0.$

Como o determinante de Vandermonde $\det(\triangle) = \prod_{0\leq i<j\leq m}(\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$, segue que $f_0 \equiv 0, ..., f_m \equiv 0$ são identidades de A. ■

Observação 1.18 *O Teorema* 1.17 *ainda é válido se F é um corpo finito tal que $|F| > \deg f$. Por outro lado, se F é um corpo com q elementos, F satisfaz a identidade $x^q - x \equiv 0$, mas as componentes homogêneas dessa identidade não se anulam em F.*

Uma consequência importante do Teorema 1.17 é que, sobre um corpo infinito, todo T-ideal é gerado pelos seus polinômios multihomogêneos.

Dentre os polinômios multihomogêneos, um papel importante é desempenhado pelos multilineares, que definiremos a seguir.

Definição 1.19 *Um polinômio f é **linear na variável** x_i, se x_i ocorre com grau* 1 *em cada monômio de f. Um polinômio que é multihomogêneo e linear em cada uma de suas variáveis é dito **multilinear**.*

Na linguagem acima, dizemos que um polinômio $f(x_1, ..., x_n) \in F\langle X\rangle$ é multilinear se ele é multihomogêneo de múltiplo grau $(1, 1, ..., 1)$.

Observação 1.20 *Como em um polinômio multilinear $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ cada variável aparece em cada monômio com grau* 1, *é claro que tal polinômio é sempre da forma*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}...x_{\sigma(n)},$$

onde $\alpha_\sigma \in F$.

Note que se $f(x_1, ..., x_n)$ é um polinômio linear numa variável, digamos x_1, então

$$f\left(\sum \alpha_i y_i, x_2, ..., x_n\right) = \sum \alpha_i f(y_i, x_2, ..., x_n),$$

para todos $\alpha_i \in F$, $y_i \in F\langle X\rangle$.

Esta propriedade será usada a seguir.

Proposição 1.21 *Seja A uma F-álgebra gerada como espaço vetorial por um conjunto B sobre F. Se um polinômio multilinear f se anula em B então f é uma identidade polinomial de A.*

Prova: Sejam $a_1 = \sum \alpha_{1i} u_i, ..., a_n = \sum \alpha_{ni} u_i$ elementos de A, onde os $u_i's$ são elementos de B. Então, como f é linear em cada uma de suas variáveis, tem-se

$$f(a_1, ..., a_n) = f\left(\sum \alpha_{1i} u_i, ..., \sum \alpha_{ni} u_i\right) = \sum \alpha_{1i_1} ... \alpha_{ni_n} f(u_{i_1}, ..., u_{i_n}) = 0,$$

pois, por hipótese, f se anula em B. ∎

Definição 1.22 *Seja S um conjunto de polinômios em $F\langle X\rangle$ e $f \in F\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma **consequência dos polinômios em** S (ou que f segue dos polinômios em S) se $f \in \langle S\rangle_T$, o T-ideal gerado pelo conjunto S.*

Definição 1.23 *Dois conjuntos de polinômios são **equivalentes** se eles geram o mesmo T-ideal. Ainda escrevemos $\langle f_1, ..., f_k\rangle_T$ para indicar $\langle S\rangle_T$, se $S = \{f_1, ..., f_k\}$. Note que se $S_1 \subseteq S_2$ então $\langle S_1\rangle_T \subseteq \langle S_2\rangle_T$.*

A seguir apresentaremos o **Processo de Multilinearização** que nos permite obter uma identidade multilinear de grau menor ou igual a k a partir de uma identidade polinomial arbitrária de grau k de uma álgebra A. Verificaremos como funciona este processo. Além disso, veremos um resultado que nos diz que, em característica zero, todo T-ideal é gerado pelo conjunto formado por seus polinômios multilineares.

Seja $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in F\langle X\rangle$ uma identidade polinomial para a álgebra A. Se cada variável x_i aparece com grau menor ou igual a 1 em cada monômio de f, então aplicando endomorfismos de $F\langle X\rangle$, podemos eliminar alguns monômios (e ainda assim, ter uma identidade polinomial) da seguinte maneira: suponha que x_1 não aparece em algum monômio de f. Aplique o endomorfismo $\varphi_1 \colon x_1 \longmapsto 0 \; x_i \longmapsto x_i$, para todo $i \neq 1$. Assim, f^{φ_1} só possui monômios sem x_1 e continua sendo uma identidade polinomial para a álgebra A. Continuando, se x_2 não aparece em algum monômio de f^{φ_1}, aplique $\varphi_2 \colon x_2 \longmapsto 0 \; x_i \longmapsto x_i$, para todo $i \neq 2$. Logo $f^{\varphi_1\varphi_2}$ só tem monômios sem x_1 e sem x_2. Seguindo dessa forma este algorítmo termina pelo fato do número de variáveis em f ser finito e o polinômio resultante $f^{\varphi_1 \cdots \varphi_n}$ ser multilinear, pois o algorítmo termina quando no polinômio $f^{\varphi_1 \cdots \varphi_n}$ todas as variáveis que aparecem têm expoente igual a 1 em todos os monômios.

Assim, podemos supor que existe uma variável, digamos x_1, tal que $\deg_{x_1} f = d > 1$. Consideremos o polinômio

$$h(y_1 + y_2, x_2, ..., x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, ..., x_n) - f(y_1, x_2, ..., x_n) - f(y_2, x_2, ..., x_n).$$

Note que h é uma identidade polinomial para A e deg $h <$ deg f. Vamos mostrar que $h \neq 0$.

Suponha que $h = 0$, ou seja, que $f(y_1 + y_2, x_2, ..., x_n) = f(y_1, x_2, ..., x_n) + f(y_2, x_2, ..., x_n)$. Como qualquer função $X \longrightarrow X$ pode ser estendida a um endomorfismo de $F\langle X\rangle$, a função $y_1 \longmapsto x_1$, $y_2 \longmapsto x_1$, $x_i \longmapsto x_i$, para todo $i \neq 1$, promove uma troca das variáveis y_1 e y_2 por x_1. Assim:

$$f(2x_1, x_2, ..., x_n) = 2f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Agora, se decompormos f na soma $f = f_0 + f_1 + ... + f_d$, onde f_i é a soma de todos os monômios de f nos quais x_1 aparece com grau i temos $f_i(2x_1, x_2, ..., x_n) = 2^i f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, assim $f_0 + 2f_1 + ... + 2^d f_d = 2(f_0 + f_1 + ... + f_d)$ e, portanto,

$$f_0 = (2^2 - 2)f_2 + ... + (2^d - 2)f_d \tag{1.3}$$

o que contradiz a desigualdade $d > 1$, pois em (1.3) no primeiro membro da igualdade não aparece x_1, enquanto no segundo membro aparece x_1 com grau maior ou igual a 2.

Como $\deg_{y_1} h = \deg_{y_2} h = d - 1 < \deg_{x_1} f$, por um argumento indutivo, utilizando o fato do número de variáveis ser finito, aplicamos o algorítmo para $h(y_1 + y_2, x_2, ..., x_n)$ e para as outras variáveis, obtendo um polinômio que é multilinear e que continua sendo uma identidade polinomial em A.

Teorema 1.24 *Se $carF = 0$, todo polinômio não nulo $f \in F\langle X\rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Prova: Pelo Teorema 1.17, f é equivalente ao conjunto de suas componentes multihomogêneas. Assim podemos supor que $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é multihomogênea. Aplicamos a f o processo de multilinearização: se $\deg_{x_1} f = d > 1$,então escrevemos:

$$h = f(y_1 + y_2, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{d} g_i(y_1, y_2, x_2, ..., x_n),$$

onde $\deg_{y_1} g_i = i$, $\deg_{y_2} g_i = d - i$ e $\deg_{x_t} g_i = \deg_{x_t} f$, para todo $t = 2, ..., n$. Assim todos os polinômios $g_i = g_i(y_1, y_2, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, ..., d-1$ são consequências de f. Note que, $\langle g_1, ..., g_d\rangle \subseteq \langle f\rangle_T$, para cada i,

$$g_i(y_1, y_1, x_2, ..., x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, ..., x_n).$$

Como $carF = 0$, $\binom{d}{i} \neq 0$, logo f é uma consequência de qualquer g_i, $i = 1, ..., d - 1$. Portanto, $f \in \langle g_i\rangle_T$. Aplicando indução sobre o índice das variáveis podemos completar a demonstração. ■

1.4 O Grupo Simétrico S_n e as Tabelas de Young

A teoria de representações de grupos, desenvolvida por Schur e Frobenius, teve particularmente para as representações dos grupos simétricos S_n, uma contribuição significativa a partir da utilização dos métodos desenvolvidos por Young. Esta teoria tem papel fundamental no estudo de PI-álgebras, como se pode constatar em diversos artigos científicos recentes. Vamos estabelecer aqui alguns conceitos importantes da teoria de Young. Utilizaremos como referência o livro [20].

Como sobre corpos de característica zero qualquer S_n-representação irredutível é absolutamente irredutível é suficiente considerar as representações irredutíveis de S_n sobre $\mathbb{Q}$.

Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma **partição** λ de n é uma sequência finita de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$ tal que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r > 0$ e $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Neste caso escrevemos $\lambda \vdash n$.

Sabe-se que as classes de conjugação de S_n são indexadas pelas partições de n. De fato, se $\sigma \in S_n$, decompomos σ em um produto de ciclos disjuntos, incluindo 1-ciclos, e esta decomposição é única se exigirmos que

$$\sigma = \pi_1 \pi_2 ... \pi_r,$$

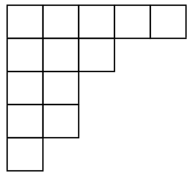
com $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_r$, ciclos de comprimento $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r \geq 1$, respectivamente. Então a partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$ unicamente determina a classe de conjugação de σ, pois duas permutações são conjugadas em S_n se, e somente se, têm a mesma estrutura cíclica.

Desta maneira, todos os caracteres irredutíveis de S_n são indexados pelas partições de n, já que caracteres são funções de classe. Denote por χ_λ o S_n-caracter irredutível correspondente à partição $\lambda \vdash n$ e por d_λ o seu grau, ou seja, $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$.

A seguir descrevemos uma fórmula para calcular os graus d_λ.

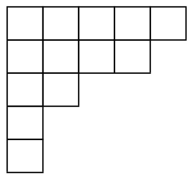
Para cada $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) \vdash n$, definiremos o **diagrama de Young associado a** λ consistindo de n *boxes* distribuídos de modo que tenhamos r linhas de *boxes* dispostos lado a lado, os primeiros boxes à esquerda de cada linha sejam colocados um abaixo do outro e, para cada $i = 1, ..., r$, o número de *boxes* da i-ésima linha seja λ_i.

Por exemplo, o diagrama $D_{(5,3,2,2,1)}$ é representado por



Para uma partição $\lambda \vdash n$ denotaremos por λ' a **partição conjugada** de λ; $\lambda' = (\lambda'_1, ..., \lambda'_s)$ é a partição tal que $\lambda'_1, ..., \lambda'_s$ são os comprimentos das colunas de D_λ. Logo D'_λ é obtido de D_λ, através de uma reflexão de D_λ em relação à diagonal principal.

Exemplo 1.25 *Para* $\lambda = (5, 3, 2, 2, 1)$ *temos* $\lambda' = (5, 4, 2, 1, 1)$, *logo* $D_{\lambda'}$ *é dada por:*



Definição 1.26 *Seja* $\lambda \vdash n$. *Uma* ***tabela de Young*** T_λ *do diagrama* D_λ *é um preenchimento dos boxes de* D_λ *com os inteiros* $1, 2, ..., n$. *Também diremos que* T_λ *é uma tabela de tipo* λ.

Existem $n!$ tabelas distintas. Dentre estas, as tabelas *standard* são de grande importância no nosso estudo.

Definição 1.27 *Uma tabela* T_λ *de tipo* λ *é* ***standard*** *se os inteiros em cada linha e em cada coluna de* T_λ *crescem da esquerda para à direita e de cima para baixo, respectivamente.*

Como exemplo temos a tabela $T_{(4,4,1)}$ abaixo:

1	3	5	7
2	4	6	9
8			

Existe uma estreita relação entre as tabelas *standard* e os graus dos S_n-caracteres irredutíveis.

Teorema 1.28 *([20], Corolário 3.1.13) Dada uma partição $\lambda \vdash n$, o número de tabelas standard de tipo λ é igual a d_λ, o grau do caracter irredutível χ_λ correspondendo a λ.*

Dado um diagrama D_λ, $\lambda \vdash n$, identificamos um *box* de D_λ com o correspondente ponto (i, j). Por exemplo, o terceiro *box* da primeira coluna tem coordenadas $(3, 1)$.

Definição 1.29 *Para qualquer box $(i, j) \in D_\lambda$, definimos o* ***gancho*** *de (i, j) como $h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$, onde $\lambda' = (\lambda'_1, ..., \lambda'_s)$ é a partição conjugada de λ.*

Observe que h_{ij} conta o número de *boxes* no gancho com extremidade em (i, j), isto é, todos os *boxes* à direita e abaixo de (i, j) incluindo o *box* (i, j). No seguinte exemplo temos escrito dentro de cada *box* este número.

6	4	3	1
4	2	1	
1			

Proposição 1.30 *([20], Teorema 2.3.21) (A Fórmula do Gancho)*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$

onde o produto percorre todos os boxes de D_λ.

Dada qualquer tabela T_λ de tipo $\lambda \vdash n$, denote por $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$, onde a_{ij} é o inteiro no *box* (i, j). Então

Definição 1.31 *O* ***estabilizador-linha de*** *T_λ é o grupo*

$$R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1\lambda_1}) \times ... \times S_{\lambda_r}(a_{r1}, a_{r2}, ..., a_{r\lambda_r}),$$

onde $S_{\lambda_i}(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{i\lambda_i})$ denota o grupo simétrico agindo sobre os inteiros $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{i\lambda_i}$.

Logo R_{T_λ} é o subgrupo de S_n consistindo de todas as permutações que estabilizam as linhas de T_λ.

Definição 1.32 *O* ***estabilizador-coluna de*** *$T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$ é o grupo*

$$C_{T_\lambda} = S_{\lambda'_1}(a_{11}, a_{21}, ..., a_{\lambda'_1 1}) \times ... \times S_{\lambda'_s}(a_{1\lambda_1}, a_{2\lambda_1}, ..., a_{\lambda'_s \lambda_1}),$$

onde $\lambda' = (\lambda'_1, ..., \lambda'_s)$ é a partição conjugada de λ.

Portanto, C_{T_λ} é o subgrupo de S_n consistindo de todas as permutações que estabilizam as colunas de T_λ.

Definição 1.33 *Para uma dada tabela T_λ, definimos o idempotente essencial correspondente de FS_n por*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (sgn\tau)\sigma\tau.$$

Pelo Teorema de Wedderburn-Artin, considerando que todo corpo de característica zero é um corpo de decomposição para S_n ([20], Teorema 2.1.12) e pelo Teorema 3.1.24, [20], obtemos o próximo resultado.

Proposição 1.34 *(*[16], *Proposição 2.2.2) Seja F um corpo de característica zero e $n \geq 1$. Seja $\{\chi_\lambda : \lambda \vdash n\}$ um conjunto completo de caracteres irredutíveis de S_n e seja $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ o grau de χ_λ, $\lambda \vdash n$. Então*

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda,$$

onde $I_\lambda \cong M_{d_\lambda}(F)$ é um ideal minimal bilateral de FS_n de dimensão d_λ^2 e $I_\lambda = e_\lambda FS_n$.

Descrevemos a seguir um conjunto completo de ideais minimais à esquerda de FS_n.

Teorema 1.35 *(*[20], *Teorema 3.1.10 e Corolário 3.1.11) Seja M um S_n-módulo irredutível à esquerda com caracter $\chi(M) = \chi_\lambda$, $\lambda \vdash n$. Então M pode ser gerado como um S_n-módulo por um elemento da forma $e_{T_\lambda} f$, para algum $f \in M$ e alguma tabela de Young T_λ de tipo λ. Além disso, para qualquer tabela de Young T_λ^* de tipo λ existe $f' \in M$ de modo que $M = FS_n e_{T_\lambda^*} f'$.*

Lema 1.36 *(*[16], *Lema 2.4.2) Seja T_λ uma tabela de Young correspondente a $\lambda \vdash n$ e seja M um S_n-módulo tal que $M = M_1 \oplus ... \oplus M_m$, onde $M_1, ..., M_m$ são FS_n-submódulos irredutíveis com caracter χ_λ. Então m é igual ao número máximo de elementos linearmente independentes $g \in M$ tais que $\sigma g = g$ para todo $\sigma \in RT_\lambda$.*

1.5 Codimensões e Cocaracteres de uma Álgebra

A fim de minimizar a dificuldade de descrever o T-ideal de uma F-álgebra A, associaremos à A duas sequências numéricas $c_n(A)$ e $l_n(A)$ para $n = 1, 2, ...$, chamadas **sequência de codimensões de** A e **sequência de cocomprimentos de** A, respectivamente, que medem de um certo modo a taxa de crescimento das identidades polinomiais satisfeitas por A. Dessa forma, é interessante estudar o comportamento assintótico destas sequências para compreendermos o T-ideal da álgebra A.

Nesta seção apresentaremos as definições de codimensões, cocaracteres e cocomprimentos de uma dada álgebra e relacionaremos tais definições com o T-ideal.

Em geral é uma tarefa teoricamente difícil calcular os valores exatos das codimensões para uma dada álgebra e até o momento isto foi feito para poucas PI-álgebras.

Como, em característica zero, $Id(A)$ é completamente determinado pelos polinômios multilineares, é importante considerar

$$P_n = span_F\{x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_n\}$$

o **espaço dos polinômios multilineares nas indeterminadas** $x_1, ..., x_n$. O grupo simétrico S_n age sobre P_n à esquerda do seguinte modo:

$$\sigma.f(x_1, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}),$$

onde $\sigma \in S_n$ e $f(x_1, ..., x_n) \in P_n$.

Como $Id(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, o subespaço $P_n \cap Id(A)$ é invariante por esta ação, assim

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

tem uma estrutura de S_n-módulo.

O S_n-caracter de $P_n(A)$, denotado por $\chi_n(A)$, é chamado n**-ésimo cocaracter de** A.

Definição 1.37 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, o inteiro não-negativo*

$$c_n(A) = \dim\ P_n(A)$$

é chamado a ***n-ésima codimensão da álgebra*** *A.*
Para $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras tal que $\mathcal{V} = var(A)$, definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$.

Observação 1.38 *Seja A uma álgebra. Então A é uma PI-álgebra se, e somente se, $c_n(A) < n!$ para algum $n \geq 1$.*

Teorema 1.39 *(Regev, 1972)([11], Teorema 4.2.4) Se uma álgebra A satisfaz uma identidade de grau $d \geq 1$ então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$.*

Exemplo 1.40 *1) Seja A uma álgebra nilpotente tal que $A^m = 0$, então $c_n(A) = 0$, para todo $n \geq m$.*

2) Seja A uma álgebra comutativa, então $c_n(A) \leq 1$, para todo $n \geq 1$.

3) ([30], Malcev, 1971) Para todo $n \geq 1$, temos $c_n(UT_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2$.

4) ([29], Krakowski e Regev, 1973) Para todo $n \geq 1$, $c_n(G) = 2^{n-1}$.

Como, em característica zero, existe uma correspondência um a um entre S_n-caracteres irredutíveis e as partições $\lambda \vdash n$, se χ_λ denota o S_n-caracter irredutível correspondente a λ então

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \tag{1.4}$$

onde $m_\lambda \geq 0$ é a multiplicidade de χ_λ na decomposição dada.

Existe uma outra sequência numérica que pode ser associada às identidades de uma álgebra A, a saber, a sequência dos cocomprimentos definida a seguir.

Definição 1.41 *O número*

$$l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$$

*é chamado n-**ésimo cocomprimento de** A.*

Em outras palavras, $l_n(A)$ conta o número de S_n-módulos irredutíveis que aparecem na decomposição de $\dfrac{P_n}{P_n \bigcap Id(A)}$.

Observação 1.42 *Sejam A e B duas F-álgebras e $A \oplus B$ a soma direta de A e B. Se $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, $\chi_n(B) = \sum_{\lambda \vdash n} m'_\lambda \chi_\lambda$ e $\chi_n(A \oplus B) = \sum_{\lambda \vdash n} m''_\lambda \chi_\lambda$ são os n-ésimos cocaracteres de A, B e $A \oplus B$, respectivamente, então*

$$m''_\lambda \leq m_\lambda + m'_\lambda, \quad l_n(A \oplus B) \leq l_n(A) + l_n(B), \quad c_n(A \oplus B) \leq c_n(A) + c_n(B).$$

Se B é uma álgebra nilpotente e $B^k = 0$, então para todo $n \geq k$ temos $m''_\lambda = m_\lambda$. Logo $l_n(A \oplus B) = l_n(A)$ e $c_n(A \oplus B) = c_n(A)$.

Prova: Considere a aplicação de S_n-módulos

$$\alpha : P_n \to \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)} \oplus \frac{P_n}{P_n \cap Id(B)}$$

de modo que $\alpha(f) = (f + (P_n \cap Id(A)), f + (P_n \cap Id(B)))$. Notemos que $Id(A \oplus B) = Id(A) \cap Id(B)\cdot$ Assim, $Ker(\alpha) = P_n \cap Id(A) \cap Id(B) = P_n \cap Id(A \oplus B)$ e temos uma imersão de S_n-módulos

$$\frac{P_n}{P_n \cap Id(A \oplus B)} \hookrightarrow \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)} \oplus \frac{P_n}{P_n \cap Id(B)}.$$

Assim, $m''_\lambda \leq m_\lambda + m'_\lambda$, $l_n(A \oplus B) \leq l_n(A) + l_n(B)$ e $c_n(A \oplus B) \leq c_n(A) + c_n(B)$. Se $B^k = 0$ então para todo $n \geq k$, $\dfrac{P_n}{P_n \cap Id(B)}$ é o módulo nulo. Portanto,

$$\frac{P_n}{P_n \cap Id(A \oplus B)} = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)},$$

para todo $n \geq k$.

■

Dada uma álgebra A, é claro que para $B \in var(A)$ temos

$$l_n(B) \leq l_n(A) \text{ e } c_n(B) \leq c_n(A),$$

pois, neste caso, $Id(A) \subseteq Id(B)$ e assim $P_n(B)$ pode ser imerso em $P_n(A)$.

Definição 1.43 *Sejam A e B álgebras. Dizemos que A é **PI-equivalente** a B, se $Id(A) = Id(B)$. Notação: $A \sim_{PI} B$.*

Teorema 1.44 *Seja A uma PI-álgebra com n-ésimo cocaracter $\chi_n(A)$ dado em (1.4). Para uma partição $\mu \vdash n$, a multiplicidade m_μ é igual a zero se, e somente se, para qualquer tabela de Young T_μ de tipo μ e para qualquer polinômio $f = f(x_1, ..., x_n) \in P_n$, a álgebra A satisfaz a identidade $e_{T_\mu} f \equiv 0$.*

Prova: *Considere as decomposições*

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda, \; P_n = Q \oplus J,$$

onde $Q = P_n \cap Id(A)$ e $J \simeq \dfrac{P_n}{P_n \cap Id(A)}\cdot$ Fixe algum $\mu \vdash n$. Então $m_\mu = 0$ em (1.4) se, e somente se, $I_\mu J = 0$. Por outro lado, a igualdade $I_\mu J = 0$ é equivalente *à inclusão $I_\mu P_n \subseteq Q$. Como I_μ é a soma de todos os ideais à esquerda $FS_n e_{T_\mu}$, a inclusão $I_\mu P_n \subseteq Q$ ocorre se, e somente se, $e_{T_\mu} f \in Q$, para qualquer $f \in P_n$, isto é, $e_{T_\mu} f \equiv 0$ é uma identidade de A e demonstração está completa.*

■

Observação 1.45 *([20], Teorema 2.4.10)*

i) Para cada n, as únicas representações ordinárias unidimensionais de S_n são as correspondentes às partições (n) e (1^n).

ii) Para $2 \leq n \neq 4$, a dimensão mínima diferente de 1 de uma representação irredutível ordinária de S_n é $n-1$. Note que para $n = 4$ e $\lambda = (2,2)$ temos o seguinte diagrama de Young

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Logo, se M_λ é o S_n-módulo irredutível associado a λ, obtemos $\dim\ M_\lambda = \dfrac{n!}{\prod h_{ij}} = \dfrac{4!}{3.2.2.1} = 2 \leq n-1 = 3.$

iii) Para $2 \leq n \neq 6$, as únicas representações irredutíveis ordinárias de S_n que têm dimensão $n-1$ são as correspondentes às partições $(n-1,1)$ e $(2,1^{n-2})$, pois, para $n = 6$, as representações irredutíveis correspondentes às partições (3^2) e (2^3) também são de dimensão $5 = n-1$.

iv) Para $2 \leq n \neq 5$, não existe representação ordinária irredutível correspondente a uma partição α de S_n que é de dimensão t tal que

$$n \leq t \leq n+2.$$

Note que para $n = 5$ as representações correspondentes às partições $(3,2)$ e $(2^2,1)$ são de dimensão $n = 5$, e a representação correspondente à partição $(3,1^2)$ é de dimensão $6 = n+1$.

Teorema 1.46 *([3], Teorema 16) Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero com cocaracter $\chi_n(A) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$. Então as multiplicidades m_λ são limitadas polinomialmente, isto é, existem constantes $a, k > 0$ tais que, para todo n e $\lambda \vdash n$, $m_\lambda \leq an^k$.*

Observação 1.47 *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F e $F \subseteq K$ uma extensão do corpo. Então*

$$Id(A) \otimes_F K = Id(A \otimes_F K).$$

Logo, para todo $n \geq 1$, $c_n(A) = c_n(A \otimes_F K)$.

Prova: É claro que $Id(A) \otimes_F K \subseteq Id(A \otimes_F K)$. Consideremos $f(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{r} k_i M_i \in Id(A \otimes_F K)$ onde os M_i's são distintos monômios no alfabeto X e $k_i \in K$. Seja $b_1, ..., b_n$ uma base do espaço vetorial gerado pelos coeficientes $k_1, ..., k_r$ sobre F e considere $k_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j$, com $\alpha_{ij} \in F$, para todo $i = 1, ..., r$. Então

$$f(x_1, ..., x_m) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j M_i \equiv \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} M_i \right) \otimes b_j.$$

Para quaisquer $a_1, ..., a_m \in A$, temos

$$0 = f(a_1 \otimes 1, ..., a_m \otimes 1) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} M_i(a_1, ..., a_m) \right) \otimes b_j.$$

Como os b_j's são linearmente independentes sobre F, segue que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} M_i$ é uma identidade polinomial de A, para todo $j = 1, ..., n$. Portanto $Id(A \otimes_F K) \subseteq Id(A) \otimes_F K$. ■

Pela observação acima, podemos considerar álgebras sobre corpos algebricamente fechados, pois é suficiente tomar K o fecho algébrico de F e como vimos as identidades serão as mesmas.

1.6 Ação do Grupo Linear Geral GL_m

Usaremos também a teoria de representações do grupo linear geral que é relativa a do grupo simétrico. Para este fim introduziremos o espaço dos polinômios homogêneos em um dado conjunto de variáveis.

Seja $F_m\langle X \rangle = F\langle x_1, ..., x_m \rangle$ a álgebra associativa livre gerada pelo conjunto finito $X = \{x_1, ..., x_m\}$. O grupo $GL(X) \cong GL_m(F)$ age naturalmente sobre o conjunto X à esquerda e podemos estender esta ação diagonalmente a uma ação sobre $F_m\langle X \rangle$. O espaço $F_m\langle X \rangle \cap Id(A)$ é invariante por esta ação, logo

$$F_m\langle X \rangle(A) = \frac{F_m\langle X \rangle}{F_m\langle X \rangle \cap Id(A)}$$

induz uma estrutura de GL_m-módulo à esquerda. Seja $F_m^n\langle X \rangle$ o espaço dos polinômios homogêneos de grau $n \geq m$ nas variáveis $x_1, ..., x_m$. A ação de GL_m sobre $F_m^1\langle X \rangle$

dada por

$$g\left(\sum_{1\leq i_1,\dots,i_n\leq m} k_{i_1,\dots,i_n}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}\right) = \sum_{1\leq i_1,\dots,i_n\leq m} k_{i_1,\dots,i_n}g(x_{i_1})g(x_{i_2})...g(x_{i_n}),$$

para todo $g \in GL_m$, pode ser estendida para $F_m^n\langle X\rangle$. O espaço $F_m^n\langle X\rangle \cap Id(A)$ é invariante sob esta ação e assim $F_m^n\langle X\rangle \cap Id(A)$ é um GL_m-submódulo de $F_m^n\langle X\rangle$. Portanto, o espaço

$$F_m^n(A) = \frac{F_m^n\langle X\rangle}{F_m^n\langle X\rangle \cap Id(A)}$$

tem uma estrutura de GL_m-módulo e então podemos considerar o seu caracter que denotamos por $\psi_m^n(A)$.

Pela teoria de representações polinomiais do grupo linear geral, o GL_m-módulo $F_m^n(A)$ é uma soma direta de GL_m-submódulos irredutíveis e existe uma correspondência um a um entre os GL_m-submódulos irredutíveis de $F_m^n(A)$ e o conjunto de todas as partições $\lambda \vdash n$ com $h_1(\lambda) \leq m$, onde $h_i(\lambda)$ corresponde a altura da i-ésima coluna do diagrama de Young de λ ([11], Teorema 12.4.4). Considere ψ_λ o GL_m-caracter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ (assumindo $\psi_\lambda = 0$ se $h_1(\lambda) > m$), temos a seguinte decomposição

$$\psi_m^n(A) = \sum_{\lambda\vdash n} \overline{m}_\lambda \psi_\lambda, \tag{1.5}$$

onde $\overline{m}_\lambda$ é a multiplicidade de ψ_λ.

Teorema 1.48 *([11], Teorema 12.4.20) Para toda partição $\lambda \vdash n$ tal que $h_1(\lambda) \leq m$, a multiplicidade $\overline{m}_\lambda$ dada na decomposição* (1.5) *é igual a multiplicidade m_λ do caracter χ_λ em $P_n(A)$.*

Assim, pela observação acima, obtemos uma relação entre a estrutura de S_n-módulo de $P_n(A)$ e a estrutura de GL_m-módulo de $F_m^n(A)$.

A seguir definiremos o vetor de peso máximo associado a uma partição λ que será uma importante ferramenta para se obter as multiplicidades m_λ.

Teorema 1.49 *([11], Teorema 12.4.12) Qualquer GL_m-submódulo irredutível de $F_m^n\langle X\rangle$ correspondente a $\lambda \vdash n$, denotado por $W_m(\lambda)$ e com $h_1(\lambda) \leq m$ é gerado por um polinômio não nulo f_λ, dito polinômio* ***vetor de peso máximo associado a*** *λ,*

$$f_\lambda = \prod_{i=1}^{\lambda_1} St_{h_i(\lambda)}(x_1, ..., x_{h_i(\lambda)}) \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma \sigma, \tag{1.6}$$

onde $\alpha_\sigma \in F$, a ação à direita de S_n sobre $F_m^n\langle X\rangle$ é definida pela permutação de lugares, ou seja,

$$\left(\sum_{1\le i_1,\ldots,i_n\le m} \alpha_{i_1,\ldots,i_n} x_{i_1}\ldots x_{i_n}\right)\sigma = \sum_{1\le i_1,\ldots,i_n\le m} \alpha_{i_1,\ldots,i_n} x_{i_{\sigma(1)}}\ldots x_{i_{\sigma(n)}},$$

para todo $\sigma \in S_n$, $\alpha_{i_1,\ldots,i_n} \in F$. Aqui $h_i(\lambda)$ é a altura da i-ésima coluna do diagrama de Young de λ e $St_{h_i(\lambda)}(x_1,\ldots,x_{h_i(\lambda)})$ é o polinômio standard *de grau $h_i(\lambda)$. Note que f_λ é único a menos de uma constante multiplicativa.*

Para uma tabela de Young T_λ, denote por f_{T_λ} o **vetor de peso máximo associado a** T_λ obtido de (1.6) considerando a única permutação $\sigma \in S_n$ tal que os inteiros $\sigma(1),\ldots,\sigma(h_1(\lambda))$, nesta ordem preenchem a primeira coluna de T_λ de cima para baixo, $\sigma(h_1(\lambda)+1),\ldots,\sigma(h_1(\lambda)+h_2(\lambda))$ preenchem a segunda coluna de T_λ de cima para baixo, e assim por diante.

Proposição 1.50 *([11], Proposição 12.4.12) Cada polinômio f_λ pode ser expresso de forma única como uma combinação linear dos polinômios f_{T_λ}.*

Observamos que as representações irredutíveis de S_n e os GL_m-submódulos irredutíveis de $F_m^n\langle X\rangle$ são descritos por meio de partições e de tabelas de Young, o que nos indica a existência de uma conexão entre estes, sobretudo nas identidades de A (ver por exemplo [11, Proposição 12.4.14]).

Proposição 1.51 *Se $\psi_n(A) = \sum_{\lambda\vdash n} \overline{m}_\lambda \psi_\lambda$ é o GL_m-caracter de $F_m^n(A)$, então $\overline{m}_\lambda \neq 0$ se, e somente se, existe uma tabela T_λ tal que o vetor de peso máximo correspondente f_{T_λ} não é uma identidade polinomial para A. Além disso, $\overline{m}_\lambda$ é igual ao número máximo de vetores de peso máximo linearmente independentes f_{T_λ} em $F_m^n(A)$.*

Prova: A multiplicidade m_λ ser não nula significa que na decomposição

$$F_m^n(A) \cong \sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ h_1(\lambda)\le m}} m_\lambda W_m(\lambda)$$

$W_m(\lambda)$ aparece efetivamente, isto é, $W_m(\lambda) = span_F\{f_\lambda\} \neq 0$. Portanto, $f_\lambda \neq 0$. Como pela Observação 1.50, f_λ é combinação linear dos f_{T_λ}, segue que existe uma tabela T_λ de modo que $f_{T_\lambda} \notin Id(A)$. ■

Capítulo 2

Álgebras com Crescimento Polinomial das Codimensões

Definição 2.1 *Uma álgebra A tem **crescimento polinomial** (das codimensões) se sua sequência de codimensões $c_n(A)$ é limitada polinomialmente, isto é, se existem constantes $a, t > 0$ tais que $c_n(A) \leq an^t$, para todo $n \geq 1$.*

Definição 2.2 *Dizemos que uma álgebra A tem **crescimento exponencial** (das codimensões) se sua sequência de codimensões $c_n(A)$ é limitada exponencialmente, ou seja, se existem constantes $a, \alpha > 0$ tais que $c_n(A) \leq a\alpha^n$, para todo $n \geq 1$.*

Pelo Teorema 1.39, toda PI-álgebra tem crescimento exponencial. Dessa forma álgebras de crescimento polinomial têm crescimento exponencial.

Neste capítulo caracterizaremos álgebras com crescimento polinomial das codimensões. O resultado a seguir estabelece uma decomposição para uma álgebra de dimensão finita em termos de seu radical de Jacobson que será uma importante ferramenta na demonstração de muitos resultados neste capítulo.

Teorema 2.3 *(**Wedderburn-Malcev**)([4], Teorema 72.19) Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F, de característica zero e seja $J(A)$ o radical de Jacobson de A. Então existe uma subálgebra semisimples maximal B de A tal que*

$$A = B + J(A).$$

O primeiro resultado de caracterização de álgebras com crescimento polinomial é o seguinte, devido a Kemer.

Teorema 2.4 ***(Kemer, 1979)***(*[26]) *Sejam G a álgebra de Grassmann e UT_2 a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2. Então $c_n(A)$, $n = 1, 2, ...$, é limitada polinomialmente se, e somente se, $G, UT_2 \notin var(A)$, onde $var(A)$ denota a variedade das álgebras gerada por A.*

As álgebras G e UT_2 são álgebras de **crescimento quase polinomial**, isto é, $var(G)$ e $var(UT_2)$ têm crescimento exponencial, como vimos no Exemplo 1.40 e suas subvariedades próprias têm crescimento polinomial.

O próximo resultado garante que uma variedade de álgebras com crescimento polinomial é gerada por uma álgebra de dimensão finita.

Teorema 2.5 ***(Giambruno e Zaicev, 2001)***([14], *Teorema 1) Seja A uma PI-álgebra. Se $c_n(A)$ é limitada polinomialmente então existe uma álgebra de dimensão finita B tal que $Id(A) = Id(B)$.*

Observação 2.6 *Para A uma álgebra de dimensão finita, usando o Teorema 2.3, temos a seguinte decomposição:*

$$A = B_1 \oplus B_2 \oplus ... \oplus B_k + J,$$

onde os $B_i's$ são álgebras simples, subálgebras de A e $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A.
A partir dos Lemas 2 e 3, [12], *de Giambruno e Zaicev, uma álgebra A tem crescimento polinomial se, e somente se, $\dim_F \ B_i = 1$ e $B_iJB_j = 0$, para todo $i \neq j$.*

Teorema 2.7 *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F. Então a sequência das codimensões $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é limitada polinomialmente se, e somente se,*

(1) $A = A_0 \oplus A_1 \oplus ... \oplus A_m$ é uma soma direta de F-álgebras onde, para $i = 1, ..., m$, $A_i = B_i + J_i$, $B_i \cong F$, J_i é um ideal nilpotente de A_i e $A_0, J_1, ..., J_m$ são ideais nilpotentes à direita de A;

(2) para todo $i, k \in \{1, ..., m\}, i \neq k$, $A_iA_k = 0$ e $B_iA_0 = 0$.

Prova: Seja $A = B + J$ a decomposição de Wedderburn-Malcev de A, onde B é uma subálgebra semisimples de A e $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A. Escreva $B = B_1 \oplus ... \oplus B_m$, com $B_1, ..., B_m$ F-álgebras simples. Como $c_n(A)$ é limitada polinomialmente, pela Observação 2.6, $B_iJB_k = 0$, para todo $i \neq k$, e $\dim_F B_i = 1$, $i, k = 1, ..., m$.

Seja $e = e_1 + ... + e_m$ a decomposição do elemento unidade de B em idempotentes centrais ortogonais em B. Assim $e_iB = B_i \cong F$. Defina, para todo $i = 1, ..., m$, $J_i = e_iJ$ e $J_0 = \{x \in J : Bx = 0\}$. É fácil mostrar que $A = B + J = (B_1 + J_1) \oplus ... \oplus (B_m + J_m) \oplus J_0$. Agora faça $A_i = B_i + J_i$ e $A_0 = J_0$.

Para $i \neq k \in \{1, ..., m\}$, observe que $A_iA_k = (B_i + J_i)(B_k + J_k) = 0$, pois $e_ie_k = 0$ e $B_iJB_k = 0$. Além disso, para $i \neq 0$, $B_iA_0 = 0$.

Reciprocamente, suponha que A satisfaça (1) e (2). Das relações $A_iA_k = 0$ e $B_iA_0 = 0$ segue que $J = A_0 + J_1 + ... + J_m$ é um ideal bilateral nilpotente de A e $A = B_1 \oplus ... \oplus B_m \oplus J$, onde $B_i \cong F$, para todo i. Como das relações definidas $A_iA_k = 0$ e $B_iA_0 = 0$ temos $B_iJB_k = 0$, para todo $i \neq k$, então $c_n(A)$ é limitada polinomialmente pela Observação 2.6.

■

A seguir damos uma caracterização do crescimento polinomial em termos da sequência de cocaracteres da álgebra A.

No que segue, para $\lambda \vdash n$, escrevemos $\chi_\lambda(1) = d_\lambda$ para o grau do S_n-caracter irredutível χ_λ e, se T_λ é uma tabela de Young de tamanho λ, consideramos e_{T_λ} o idempotente essencial correspondente de FS_n. Note que se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \vdash n$ então $n - \lambda_1$ denota o número de boxes abaixo a primeira linha do diagrama de Young de λ.

Teorema 2.8 ***(Giambruno e Zaicev, 2001)*** *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Então $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é limitada polinomialmente se, e somente se,*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n-\lambda_1 < q}} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde $J(A)^q = 0$.

Prova: Note que a decomposição de $\chi_n(A)$ em componentes irredutíveis não muda quando estendemos o corpo base. Portanto, como $J(A \otimes_F \overline{F}) = J(A) \otimes_F \overline{F}$ e assim $J(A \otimes_F \overline{F})^q = 0$, podemos assumir sem perda de generalidade, que F é algebricamente fechado.

Suponha primeiro que as codimensões de A são limitadas polinomialmente. Seja λ uma partição de n tal que $n - \lambda_1 \geq q$ e suponha, por contradição, que $m_\lambda \neq 0$. Então, pelo Teorema 1.44, existe uma tabela de Young T_λ de modo que $e_{T_\lambda}f(x_1, ..., x_n)$ $\notin Id(A)$. Considere $\lambda' = (\lambda'_1, ..., \lambda'_t)$ a partição conjugada de λ. Assim $e_{T_\lambda}f(x_1, ..., x_n)$

é uma combinação linear de polinômios cada um alternando sobre t conjuntos disjuntos de $\lambda'_1, ..., \lambda'_t$ variáveis, respectivamente. Chegaremos a uma contradição provando que cada tal polinômio f se anula em A.

Fixe uma base de A que seja a união de bases de $B_1, ..., B_m$ e J, respectivamente. Pela Observação 2.6, $B_iJB_k = 0$, para todo $i \neq k$, e como $B_iB_k = 0$ para obter um valor não-nulo de f devemos substituir todas as variáveis com elementos de J e de uma componente simples, digamos B_i. Além disso, como $\dim B_i = 1$, podemos substituir no máximo um elemento de B_i em cada conjunto alternado. Logo podemos substituir ao todo no máximo $t = \lambda_1$ elementos de B_i. Segue que, para obter um valor não nulo devemos substituir no mínimo $n - \lambda_1 \geq q$ elementos de J. Como $J^q = 0$, conseguimos $f \equiv 0$ e com essa contradição a demonstração da primeira parte do teorema está completa.

Suponha agora $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ e $m_\lambda = 0$, quando $n - \lambda_1 \geq q$. Pelo Teorema 1.46, as multiplicidades m_λ são limitadas polinomialmente, logo

$$c_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n-\lambda_1 < q}} m_\lambda d_\lambda \leq Cn^t \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n-\lambda_1 < q}} d_\lambda,$$

e a demonstração agora decorre da fórmula do gancho para os graus d_λ.

■

2.1 T-ideal de algumas PI-álgebras

Nesta seção apresentamos os cocaracteres, as codimensões e os T-ideais de algumas PI-álgebras que desempenharão um importante papel neste capítulo.

Utilizamos uma notação concisa para descrever algumas álgebras de matrizes que denotamos por M_i, $i = 1, ..., 7$. Por exemplo, para $M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in F \right\}$ usamos $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$.

Lema 2.9 *([17], Lema 3) Sejam $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ e $M_2 = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Então, para todo $n > 1$,*

(i) $\chi_n(M_1) = \chi_n(M_2) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}$.

(ii) $c_n(M_1) = c_n(M_2) = n$.

(iii) $Id(M_1) = \langle z[x,y]\rangle_T$ *e* $Id(M_2) = \langle [x,y]z\rangle_T$.

Lema 2.10 *(*[17], *Lema 4) Seja* $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a,b,c,d \in F \right\}$. *Então, para todo* $n > 3$,

(i) $\chi_n(M_3) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,1,1)}$.

(ii) $c_n(M_3) = \dfrac{n(n-1)+2}{2}$.

(iii) $Id(M_3) = \langle [x,y,z], [x,y][z,w]\rangle_T$.

Lema 2.11 *(*[17], *Lema 5) Seja* $B = M_1 \oplus M_2$. *Então, para todo* $n \geq 3$,

(i) $\chi_n(B) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)}$.

(ii) $c_n(B) = 2n - 1$.

(iii) $Id(B) = \langle St_3(x,y,z), z[x,y]w, [x,y][z,w]\rangle_T$.

Lema 2.12 *(*[17], *Lema 6) Sejam* $M_4 = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$ *e* $M_6 = \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & F & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Então, para todo* $n > 3$,

(i) $\chi_n(M_4) = \chi_n(M_5) = \chi_n(M_6) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,2)} + \chi_{(n-2,1,1)}$.

(ii) $c_n(M_4) = c_n(M_5) = c_n(M_6) = n(n-1)$.

(iii) $Id(M_4) = \langle [x,y]zw\rangle_T$, $Id(M_5) = \langle zw[x,y]\rangle_T$ *e* $Id(M_6) = \langle z[x,y]w\rangle_T$.

Observação 2.13 $M_3 \in var(UT_2) \cap var(G)$.

Prova: Pelo Exemplo 1.14, $Id(UT_2) = \langle [x,y][z,w]\rangle_T$ e $Id(G) = \langle [x,y,z]\rangle_T$. Logo, como $[x,y][z,w], [x,y,z] \in Id(M_3)$, segue que $Id(UT_2) \cup Id(G) \subseteq Id(M_3)$ e assim $M_3 \in var(UT_2) \cap var(G)$. ∎

2.2 Codimensões limitadas por uma constante

Nesta e na próxima seção usamos os resultados da Seção 2.1 deste Capítulo sobre as álgebras M_i, com $i = 1, ..., 6$, para caracterizarmos álgebras de codimensões constante ou linear. Além disso, utilizamos o seguinte resultado sobre a decomposição do radical de Jacobson de uma álgebra de dimensão finita, cuja demonstração pode ser vista em [15].

Um R-módulo M é dito **zero módulo à esquerda** se $rm = 0$, para todo $r \in R$.

Lema 2.14 *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre F e tal que $A = B + J$, onde B é uma subálgebra semisimples e $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A. Então J pode ser decomposto na soma direta de B-bimódulos*

$$J = J_{00} \oplus J_{01} \oplus J_{10} \oplus J_{11},$$

onde, para $i \in \{0, 1\}$, J_{ik} é um módulo fiel à esquerda ou um zero módulo à esquerda, conforme $i = 1$ ou $i = 0$, respectivamente. Similarmente, J_{ik} é um módulo fiel à direita ou um zero módulo à direita conforme $k = 1$ ou $k = 0$, respectivamente. Além disso, para $i, k, l, m \in \{0, 1\}$, $J_{ik}J_{lm} \subseteq \delta_{kl}J_{im}$, sendo δ_{kl} o delta de Kronecker e $J_{11} = BN$, para alguma subálgebra nilpotente N de A que comuta com B.

Observação 2.15 *Seja $A = B + J$ uma álgebra satisfazendo a hipótese do lema anterior e 1_B a unidade de B, então*

$$1_B a 1_B = a, \;\; 1_B b = b \;\; e \;\; c 1_B = c,$$

para todos $a \in J_{11}$, $b \in J_{10}$ e $c \in J_{01}$.

No que segue assumimos implicitamente que J tem a decomposição dada no Lema 2.14.

Lema 2.16 *([17], Lema 9) Seja $A = F + J$. Se $[J_{11}, J_{11}] \neq 0$, então $M_3 \in var(A)$.*

Lema 2.17 *([17], Lema 10) Seja $A = F + J$ com $J_{01} \neq 0$ (respectivamente $J_{10} \neq 0$). Então $B = F + J_{01}$ ou $B = F + J_{01} + J_{11}$, no caso em que J_{11} é comutativo B é uma subálgebra PI-equivalente a M_1 (respectivamente $B = F + J_{10}$ ou $B = F + J_{10} + J_{11}$ é PI-equivalente a M_2).*

Teorema 2.18 *Seja A uma F-álgebra cujas codimensões são limitadas polinomialmente. Então existe uma álgebra B de modo que $A \sim_{PI} B$ e $B = B_1 \oplus ... \oplus B_m$, onde $B_1, ..., B_m$ são álgebras de dimensão finita tais que $\dim \dfrac{B_i}{J(B_i)} \leq 1$, sendo $J(B_i)$ o radical de Jacobson de B_i, $1 \leq i \leq m$.*

Prova: Pelo Teorema 2.5, existe uma álgebra B de dimensão finita tal que $A \sim_{PI} B$. Pelo Teorema de Wedderburn-Malcev, $B = B' + J(B)$, onde B' é uma subálgebra semisimples e maximal de B. Logo

$$B' = B_1 \oplus ... \oplus B_{m-1},$$

sendo B_i's álgebras simples. Daí pela Observação 2.6, temos $\dim B_i = 1$, para $i = 1, ..., m-1$. Assim $B = B' + J(B) = B_1 \oplus ... \oplus B_{m-1} \oplus B_m$. Temos $J(B_i) = 0$, $i = 1, ..., m-1$. Portanto, $\dim \dfrac{B_i}{J(B_i)} = \dim B_i - \dim J(B_i) = 1$. Por outro lado, como $B_m = J(B)$, segue que $J(B_m) = J(B)$. Logo $\dfrac{J(B)}{J(B_m)} = 0$. Assim $\dim \dfrac{B_i}{J(B_i)} \leq 1$, para todo $i = 1, ..., m$.

∎

Agora provaremos o principal resultado desta seção.

Teorema 2.19 ***(Giambruno e La Mattina, 2005)*** *Seja A uma F-álgebra. Então $M_1, M_2, M_3 \notin var(A)$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} l_n(A)$ existe e é limitado por 1.*

Prova: Suponha que $\lim_{n\to\infty} l_n(A) \leq 1$. Então se $M_i \in var(A)$ para algum $i \in \{1, 2, 3\}$, segue que $l_n(M_i) \leq l_n(A)$. Mas, pelos Lemas 2.9 e 2.10, temos, para todo $n > 3$, $l_n(M_i) > 1$ e isto contradiz a suposição $\lim_{n\to\infty} l_n(A) \leq 1$.

Reciprocamente, suponha que $M_1, M_2, M_3 \notin var(A)$. Pela Observação 2.13, as álgebras $UT_2, G \notin var(A)$, logo pelo Teorema 2.4 as codimensões de A são limitadas polinomialmente. Como as codimensões e os cocaracteres de uma álgebra são invariantes sob uma extensão do corpo base assumimos que F é algebricamente fechado. Também pelo Teorema 2.18 podemos assumir

$$A = A_1 \oplus ... \oplus A_m,$$

onde $A_1, ..., A_m$ são álgebras de dimensão finita tais que $\dim \dfrac{A_i}{J(A_i)} \leq 1$, para cada $1 \leq i \leq m$. Assim $A_i \cong F + J(A_i)$ ou $A_i = J(A_i)$ é uma álgebra nilpotente.

Se $A_i = J(A_i)$ é nilpotente para todo i, então A é uma álgebra nilpotente e para n suficientemente grande, $l_n(A) = 0$. Neste caso, o teorema está provado. Portanto, podemos assumir que existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $A_i = F + J(A_i)$ e seja

$J(A_i) = J_{00} \oplus J_{01} \oplus J_{10} \oplus J_{11}$, onde $J_{00}, J_{01}, J_{10}, J_{11}$, são os bimódulos definidos no Lema 2.14. Se J_{11} é não comutativo, pelo Lema 2.16, $M_3 \in var(A_i) \subseteq var(A)$, uma contradição. Logo J_{11} deve ser comutativo. Como $M_1, M_2 \notin var(A)$, pelo Lema 2.17, temos $J_{10} = J_{01} = 0$. Assim $A_i = (F + J_{11}) \oplus J_{00}$ é uma soma direta de álgebras e $F + J_{11}$ é uma subálgebra comutativa de A_i.

Provamos, desta maneira, que se para algum i, A_i não é nilpotente, então A_i é a soma direta de uma álgebra comutativa e uma álgebra nilpotente. Como $A = A_1 \oplus ... \oplus A_m$, ordenando as partes comutativas e as nilpotentes, podemos escrever

$$A = C \oplus N,$$

onde C é uma álgebra comutativa não nilpotente e N é uma álgebra nilpotente. Como, para todo n, $l_n(C) = 1$ e, para n suficientemente grande, $l_n(N) = 0$, pela Observação 1.42, temos $l_n(A) = l_n(C) = 1$, para n suficientemente grande, logo a conclusão do teorema segue.

■

A demonstração do Teorema anterior mostra que $M_1, M_2, M_3 \notin var(A)$ se, e somente se, existe $n_0 > 3$ tal que $l_{n_0}(A) \leq 1$. Também neste caso A é PI-equivalente ou a uma álgebra nilpotente ou à soma direta de uma álgebra nilpotente e uma álgebra comutativa. Assim $l_n(A)$ tem valor constante igual a 0 ou 1 para n suficientemente grande. Em termos das codimensões obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.20 ***(Giambruno e La Mattina, 2005)*** *Para uma F-álgebra A, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $M_1, M_2, M_3 \notin var(A)$.

(ii) Existe $n_0 > 3$ *tal que* $l_{n_0}(A) \leq 1$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} l_n(A)$ *existe e é limitado por 1.*

(iv) Ou $A \sim_{PI} N$ *ou* $A \sim_{PI} C \oplus N$, *sendo* N *uma álgebra nilpotente e* C *uma álgebra comutativa.*

(v) $c_n(A) \leq k$ *para alguma constante* $k \geq 0$, *para todo* $n \geq 1$.

2.3 Variedades de Cocomprimento menor ou igual a 2

Nesta seção trabalhamos com o caso $l_n(A) \leq 2$, usando ainda a notação do Lema 2.14. Usaremos os seguintes lemas cujas demonstrações serão omitidas.

Lema 2.21 *([17], Lema 15) Seja $A = F + J$ uma F-álgebra.*

(i) Se $J_{10}J_{00} \neq 0$, então $M_4 \in var(A)$.

(ii) Se $J_{00}J_{01} \neq 0$, então $M_5 \in var(A)$.

Lema 2.22 *([17], Lema 16) Seja $A = F + J$ tal que $J_{10} \neq 0$, $J_{01} \neq 0$ e $J_{10}J_{01} = J_{01}J_{10} = 0$. Se J_{11} é comutativo então $B = F + J_{10} + J_{01} + J_{11}$ é uma subálgebra de A que é PI-equivalente a $M_1 \oplus M_2$.*

Lema 2.23 *Seja $A = A_1 \oplus A_2$, onde $A_1 = F + J(A_1)$, com $J(A_1)_{10} \neq 0$, e $A_2 = F + J(A_2)$, com $J(A_2)_{01} \neq 0$. Então $M_1 \oplus M_2 \in var(A)$.*

Prova: Temos que $B = (F + J(A_1)_{10}) \oplus (F + J(A_2)_{01})$ é uma subálgebra de A. Logo

$$Id(B) = Id(F + J(A_1)_{10}) \cap Id(F + J(A_2)_{01})$$

e, pelo Lema (2.17), $Id(B) = Id(M_1) \cap Id(M_2) = Id(M_1 \oplus M_2)$. Assim $M_1 \oplus M_2 \in var(A)$. ■

Teorema 2.24 ***(Giambruno e La Mattina, 2005)*** *Seja A uma F-álgebra. Então $M_1 \oplus M_2$, $M_3, M_4, M_5 \notin var(A)$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} l_n(A)$ existe e é limitado por 2.*

Prova: Primeiramente suponha que exista um inteiro $n_0 > 3$ de modo que $l_{n_0}(A) \leq 2$. Então como, para $n \geq 4$, $M_1 \oplus M_2$, M_3, M_4, M_5 têm sequência de cocomprimentos limitada superiormente por 3, segue que $M_1 \oplus M_2$, $M_i \notin var(A)$, para cada $i = 3, 4, 5$.

Reciprocamente, suponha que $M_1 \oplus M_2$, $M_i \notin var(A)$, para $i = 3, 4, 5$. Temos, pela Observação 2.13, $UT_2, G \notin var(A)$. Podemos assumir F algebricamente fechado e que $A = A_1 \oplus ... \oplus A_m$, onde A_i ou é uma álgebra nilpotente ou $A_i \cong F + J(A_i)$, $i = 1, ..., m$. Reordenando eventualmente as álgebras A_i, podemos escrever

$$A = A_1 \oplus ... \oplus A_k \oplus A_{k+1} \oplus ... \oplus A_m,$$

onde $A_i = F + J(A_i)$, para $i = 1, ..., k$, e $A_{k+1}, ..., A_m$, são álgebras nilpotentes. Assim $A_{k+1} \oplus ... \oplus A_m$ é uma álgebra nilpotente e, pela Observação 1.42,

$$l_n(A) = l_n(A_1 \oplus ... \oplus A_k),$$

para n suficientemente grande. Logo, sem perda de generalidade, podemos assumir $A = A_1 \oplus ... \oplus A_m$, com $A_i = F + J(A_i)$, para cada $i = 1, ..., m$.

Como $M_1 \oplus M_2 \notin var(A)$, pelo Lema 2.23, A pode ser apenas de um dos seguintes tipos:

(1) para cada $i = 1, ..., m$, $A_i = F + J(A_i)$ com $J(A_i)_{01} = 0$;

(2) para cada $i = 1, ..., m$, $A_i = F + J(A_i)$ com $J(A_i)_{10} = 0$;

(3) existe i de modo que $A_i = F + J(A_i)$ com $J(A_i)_{10} \neq 0$, $J(A_i)_{01} \neq 0$, e para cada $j \neq i$, $A_j = F + J(A_j)$ com $J(A_j)_{10} = J(A_j)_{01} = 0$.

Note que, como $M_3 \notin var(A_i) \subseteq var(A)$, pelo Lema 2.16, temos que $J(A_i)_{11}$ é comutativo, para todo $i = 1, ..., m$.

Iniciamos considerando o primeiro caso, isto é, $J(A_i)_{01} = 0$, para todo i. Escreva $A_i = F + J$ com $J = J(A_i)$. Se $J_{10}J_{00} \neq 0$ então, pelo Lema 2.21 obtemos $M_4 \in var(A_i) \subseteq var(A)$, uma contradição. Portanto $J_{10}J_{00} = 0$ e isto diz que

$$A_i = (F + J_{10} + J_{11}) \oplus J_{00}$$

é uma soma direta de álgebras. Assim, pelo Lema 2.17, temos ou

$$A_i \sim_{PI} M_2 \oplus J_{00} \text{ ou } A_i \sim_{PI} C \oplus J_{00},$$

para alguma álgebra comutativa C, conforme $J_{10} \neq 0$ ou $J_{10} = 0$, respectivamente. Disto e lembrando que $C \in var(M_2)$, temos

$$A \sim_{PI} M_2 \oplus ... \oplus M_2 \oplus C \oplus N \sim_{PI} M_2 \oplus C \oplus N \sim_{PI} M_2 \oplus N$$

ou

$$A \sim_{PI} M_2 \oplus ... \oplus M_2 \oplus N \sim_{PI} M_2 \oplus N$$

ou

$$A \sim_{PI} C \oplus N,$$

onde N é uma álgebra nilpotente e C é uma álgebra comutativa não nilpotente. Assim, para n suficientemente grande, a sequência de cocomprimentos de A é constante e $l_n(A)$ é igual a 1 ou 2, como queríamos.

Para a segunda possibilidade, a demonstração é análoga à primeira e logo

$$A \sim_{PI} M_1 \oplus N \text{ ou } A \sim_{PI} C \oplus N,$$

e $l_n(A)$ é constante igual a 1 ou 2, para n suficientemente grande.

Agora mostraremos que a terceira possibilidade não ocorre. Como $M_4, M_5 \notin var(A_i)$, pelo Lema 2.21, $J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = 0$. Isto implica que $J_{10}J_{01} + J_{01}J_{10}$ é um ideal bilateral de A_i. Seja $\overline{A_i}$ a álgebra

$$\overline{A_i} = \frac{A_i}{(J_{10}J_{01} + J_{01}J_{10})}.$$

É fácil verificar que $\overline{A_i} = F + J(\overline{A_i})$ e o radical de Jacobson $J(\overline{A_i})$ satisfaz

$$J(\overline{A_i})_{01}J(\overline{A_i})_{10} = 0 \text{ e } J(\overline{A_i})_{10}J(\overline{A_i})_{01} = 0.$$

Temos $J_{10}, J_{01} \nsubseteq J_{10}J_{01} + J_{01}J_{10}$ e, portanto, $J(\overline{A_i})_{10}, J(\overline{A_i})_{01} \neq 0$. Logo, pelo Lema 2.22, $M_1 \oplus M_2 \in var(\overline{A_i}) \subseteq var(A_i) \subseteq var(A)$, uma contradição. Isto completa a demonstração.

■

Da demonstração do Teorema 2.24 segue que $M_1 \oplus M_2, M_3, M_4, M_5 \notin var(A)$ se, e somente se, existe $n_0 > 3$ tal que $l_{n_0}(A) \leq 2$. Também neste caso A é PI-equivalente ou a uma das álgebras do Corolário 2.20 ou a $M_1 \oplus N$ ou a $M_2 \oplus N$ com N uma álgebra nilpotente. Assim $l_n(A)$ tem valor constante igual ou a 0 ou 1 ou 2, para n suficientemente grande. Também em termos de codimensões temos:

Corolário 2.25 ***(Giambruno e La Mattina, 2005)*** *Para uma F-álgebra A, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) $M_1 \oplus M_2,\ M_3, M_4, M_5 \notin var(A)$.

(2) Existe $n_0 > 3$ *tal que* $l_{n_0}(A) \leq 2$.

(3) $\lim_{n\to\infty} l_n(A)$ *existe e é limitado por 2.*

(4) A é PI-equivalente a uma das álgebras $N, C \oplus N, M_1 \oplus N$, ou $M_2 \oplus N$, onde N é uma álgebra nilpotente e C é uma álgebra comutativa.

(5) $c_n(A) \leq n$, para n suficientemente grande.

Consequentemente temos a seguinte classificação, onde N denota uma álgebra nilpotente e C uma álgebra comutativa não nilpotente: para qualquer álgebra A e n suficientemente grande,

(1) $l_n(A) = 0$ se, e somente se, $A \sim_{PI} N$.

(2) $l_n(A) = 1$ se, e somente se, $A \sim_{PI} C \oplus N$.

(1) $l_n(A) = 2$ se, e somente se, $A \sim_{PI} M_1 \oplus N$ ou $A \sim_{PI} M_2 \oplus N$.

2.4 Álgebras com Crescimento Linear das Codimensões

Introduzimos uma nova álgebra denotada por M_7 e definida como

$$M_7 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in F \right\}.$$

Nesta seção e nas próximas verificaremos a importância desta álgebra na caracterização de álgebras com crescimento linear das codimensões.

Lema 2.26 *A sequência de codimensões de M_7 é limitada inferiormente por n^2.*

De fato, para mostrar isto, é suficiente obter um S_n-caracter irredutível com multiplicidade não nula na decomposição de $\chi_n(M_7)$, cujo grau é maior ou igual a n^2. Considere a partição $\lambda = (n-2, 1, 1)$ e seja f_{T_λ} o vetor de peso máximo correspondente a tabela de Young *standard* contendo os inteiros 1,2,3 na primeira coluna. Escolhendo $a_1 = e_{11} + e_{33}$, $a_2 = e_{12}$ e $a_3 = e_{23}$ obtemos $f_{T_\lambda}(a_1, a_2, a_3) = 2e_{13} \neq 0$. Portanto, pela Proposição 1.51, $\chi_{(n-2,1,1)}$ tem multiplicidade não nula em $\chi_n(M_7)$. Logo, como pela fórmula do gancho, deg $\chi_{(n-2,1,1)} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, $c_n(M_7)$ cresce assintoticamente no mínimo como $\dfrac{n^2}{2}\cdot$

Lema 2.27 *([17], Lema 20) Seja $A = F + J$ uma F-álgebra. Se $J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = 0$ e $J_{01}J_{10} \neq 0$, então $M_6 \in var(A)$.*

Lema 2.28 *Se $A = F + J$ com $J_{10}J_{01} \neq 0$ e $J_{01}J_{10} = 0$. Então $M_7 \in var(A)$.*

Prova: Sejam $a \in J_{10}$, $b \in J_{01}$ tais que $ab \neq 0$. A subálgebra B gerada por $1_F, a$ e b sobre F é isomorfa a M_7. Isto é facilmente visto pois $J_{01}^2 = J_{10}^2 = J_{01}J_{10} = 0$ implica que $a^2 = b^2 = ba = 0$. Assim $B = span_F\{1_F, a, b, ab\}$ é isomorfa a M_7 através da aplicação φ tal que

$$\varphi(1_F) = e_{11} + e_{33},\ \varphi(a) = e_{12},\ \varphi(b) = e_{23},\ \varphi(ab) = e_{13}.$$

■

Teorema 2.29 ***(Giambruno e La Mattina, 2005)*** *Seja A uma F-álgebra. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) $c_n(A) \leq kn$, para todo $n \geq 1$, para alguma constante k.

(2) $M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 \notin var(A)$.

(3) A é PI-equivalente ou a N ou a $C \oplus N$ ou a $M_1 \oplus N$ ou a $M_2 \oplus N$ ou a $M_1 \oplus M_2 \oplus N$, onde N é uma álgebra nilpotente e C é uma álgebra comutativa.

Prova: Primeiro suponha que $c_n(A)$ é limitada linearmente. Pelos Lemas 2.10, 2.12 e 2.26, $M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 \notin var(A)$. Suponha agora que a propriedade (2) é válida. Então, como $M_3 \notin var(A)$, pela Observação 2.13, $UT_2, G \notin var(A)$ e, como na demonstração do Teorema 2.24, podemos assumir F algebricamente fechado e

$$A = A_1 \oplus ... \oplus A_m,$$

onde, para cada $i = 1, ..., m$, ou $A_i \cong F + J(A_i)$ ou $A_i = J(A_i)$ é uma álgebra nilpotente. Suponha que para algum i, A_i não seja uma álgebra nilpotente. Como $M_3 \notin var(A)$, pelo Lema 2.16, J_{11} é comutativo. Também, como $M_4, M_5, M_6, M_7 \notin var(A)$, pelos Lemas 2.21, 2.27, e 2.28, temos

$$J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = J_{01}J_{10} = J_{10}J_{01} = 0.$$

Sob estas condições, J_{00} é um ideal nilpotente bilateral de A_i e $A_i = F + J_{01} + J_{10} + J_{11} + J_{00}$. Pelos Lemas 2.17 e 2.22, obtemos $A_i \sim_{PI} B$, onde B é ou $M_1 \oplus N$ ou $M_2 \oplus N$ ou $M_1 \oplus M_2 \oplus N$ ou $C \oplus N$. Os quatro casos aparecem de acordo com $J_{01} \neq 0$, $J_{10} = 0$ ou $J_{01} = 0$, $J_{10} \neq 0$ ou $J_{01} \neq 0$, $J_{10} \neq 0$ ou $J_{10} = J_{01} = 0$, $J_{11} \neq 0$, respectivamente. Como $A = A_1 \oplus ... \oplus A_m$, obtemos que a propriedade (3) é válida.

É claro que como cada uma das álgebras $N, C\oplus N, M_1\oplus N, M_2\oplus N, M_1\oplus M_2\oplus N$ têm a sequência das codimensões limitadas linearmente, então a propriedade (3) implica a propriedade (1).

■

Desta forma, as possíveis codimensões de uma PI-álgebra com crescimento linear são dadas pelo próximo resultado.

Corolário 2.30 ***(Giambruno e La Mattina, 2005)*** *Seja A uma F-álgebra tal que $c_n(A) \leq kn$, para todo $n \geq 0$. Então existe n_0 de modo que, para todo $n > n_0$, devemos ter ou $c_n(A) = 0$ ou $c_n(A) = 1$ ou $c_n(A) = n$ ou $c_n(A) = 2n - 1$.*

2.5 Variedades Minimais de Crescimento Quadrático

Vimos nas Seções 2.2, 2.3 e 2.4 deste capítulo que Giambruno e La Mattina exibiram uma lista de sete álgebras, a saber M_i, $1 \leq i \leq 7$, a serem excluídas da variedade gerada por uma álgebra sobre um corpo F de característica zero cuja sequência das codimensões tem crescimento constante ou linear. Para obterem tais resultados, estudaram o comportamento das sequências $c_n(M_i)$, $1 \leq i \leq 7$. A sequência das codimensões foi completamente descrita para $1 \leq i \leq 6$, no entanto para a álgebra M_7 a única informação era que sua sequência das codimensões tem crescimento assintótico no mínimo quadrático.

Nesta seção apresentaremos resultados obtidos por Vieira e Jorge em [39] que nos fornecem as codimensões, os cocaracteres e os cocomprimentos de M_7 e uma completa descrição do T-ideal desta álgebra, além de uma base para $\dfrac{P_n}{P_n \cap Id(M_7)}$ sobre F através da teoria de representações do grupo linear geral $GL_m(F)$.

Consideremos a subálgebra de UT_3

$$M_7 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in F \right\}.$$

Usando os resultados da Seção 1.6 do Capítulo 1 obteremos as identidades multihomogêneas de grau 4 associadas a cada partição $\lambda \vdash n$, através de combinações dos vetores de peso máximo. Além disso, verificaremos que $c_4(M_7) = 4^2 - 4 = 12$.

Para isto, consideraremos cada uma das partições de 4.

Para $\lambda = (4)$, temos apenas uma tabela *standard*:

$$T_1 : \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

cujo vetor de peso máximo é

$$f_{T_1}(x) = x^4.$$

Como $f_{T_1}(e_{11} + e_{33}) = (e_{11} + e_{33})^4 = e_{11} + e_{33} \neq 0$, segue que $f_{T_1} \notin Id(M_7)$. Logo não temos identidade associada a esta partição. Assim, pela Proposição 1.51 e pela Observação 1.48, $m_\lambda = \overline{m}_\lambda = 1$.

Para $\lambda = (3, 1)$, temos três tabelas *standard* a considerar. Apresentamos cada tabela com seu respectivo vetor de peso máximo.

$$T_1 : \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad f_{T_1}(x, y) = St_2(x, y)x^2\sigma^{-1} = xyx^2 - yx^3,$$

onde $\sigma = 1$.

$$T_2 : \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad f_{T_2}(x, y) = St_2(x, y)x^2\sigma^{-1} = x^2yx - yx^3,$$

onde $\sigma = (23)$.

$$T_3 : \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad f_{T_3}(x, y) = St_2(x, y)x^2\sigma^{-1} = x^3y - yx^3,$$

onde $\sigma = (243)$.

Como

$$f_{T_1}(e_{11} + e_{33}, e_{23}) = f_{T_2}(e_{11} + e_{33}, e_{23}) = f_{T_3}(e_{11} + e_{33}, e_{23}) = -e_{23} \neq 0 \qquad (2.1)$$

temos $f_{T_1}, f_{T_2}, f_{T_3} \notin Id(M_7)$. Portanto, pela Proposição 1.51, $m_\lambda \neq 0$.

A fim de obtermos uma identidade de M_7 que seja combinação linear destes vetores de peso máximo consideremos $\alpha, \beta, \gamma \in F$ de modo que

$$f = \alpha f_{T_1} + \beta f_{T_2} + \gamma f_{T_3} \in Id(M_7).$$

Assim por (2.1) temos $\alpha + \beta + \gamma = 0$, o que implica $\alpha = -\beta - \gamma$. Usando que $f_{T_1}(e_{11}+e_{33}, e_{12}) = f_{T_2}(e_{11}+e_{33}, e_{12}) = 0$ e que $f_{T_3}(e_{11}+e_{33}, e_{12}) = e_{12}$, temos $\gamma = 0$. Logo $f = \alpha(f_{T_1} - f_{T_2})$ o que torna o polinômio

$$f_{T_1} - f_{T_2} = x[x, y]x \tag{2.2}$$

um candidato a uma identidade de M_7. Fazendo os cálculos obtemos $x[x, y]x \equiv 0$ em M_7.

Ainda, podemos concluir que temos no máximo 2 vetores de peso máximo linearmente independentes, portanto, pela Proposição 1.51, $m_\lambda = 2$.

Para $\lambda = (2, 2)$, temos 2 tabelas *standard* que apresentamos a seguir com seus respectivos vetores de peso máximo.

$$T_1 : \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad f_{T_1} = St_2(x, y)St_2(x, y)\sigma^{-1} = [x, y]^2,$$

onde $\sigma = 1$.

$$T_2 : \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad f_{T_2} = St_2(x, y)St_2(x, y)\sigma^{-1} = [x^2, y]y + [y^2, x]x,$$

onde $\sigma = (23)$.

Temos $f_{T_1}(e_{11} + e_{33}, e_{12} + e_{23}) = -e_{13} \neq 0$ e $f_{T_2}(e_{11} + e_{33}, e_{12} + e_{23}) = e_{13} \neq 0$, assim, pela Proposição 1.51, $m_\lambda \neq 0$, além disso

$$f = \alpha f_{T_1} + \beta f_{T_2} \in Id(M_7) \Rightarrow -\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow f = \alpha(f_{T_1} + f_{T_2}).$$

Note que $[A, B]^2 + [A^2, B]B + [B^2, A]A = 0$, para todo $A, B \in M_7$, logo

$$f(x, y) = f_{T_1} + f_{T_2} = [x, y]^2 + [x^2, y]y + [y^2, x]x \in Id(M_7),$$

ainda qualquer outra identidade de M_7 associada a $\lambda = (2, 2)$ é múltipla desta. Portanto, $m_\lambda = 1$.

Observação 2.31 *Aplicando o processo de multilinearização, para a identidade $f(x,y)$ acima, obtemos*

$$g(x,y,z,w)+g(z,w,x,y)+g(x,w,z,y)+g(z,y,x,w)=$$

$$f(x+y,z+w)-f(x,z+w)-f(y,z+w)-f(x+y,z)+f(x,z)+f(y,z)$$
$$-f(x+y,w)+f(x,w)+f(y,w)\in Id(M_7),$$

onde $g=g(x,y,z,w)=[x,y][z,w]+[z,w][x,y]+x[z,w]y-y[z,w]x$. *Isto sugere que verifiquemos se g é uma identidade de M_7. Fazendo os cálculos necessários verificamos que $g\in Id(M_7)$.*

Para $\lambda=(2,1,1)$, temos 3 tabelas *standard*, apresentadas aqui com seus respectivos vetores de peso máximo.

$$T_1:\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4\\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\qquad f_{T_1}(x,y,z)=St_3(x,y,z)x\sigma^{-1}=x[y,z]x+[y,z]x^2+[zx,yx],$$

onde $\sigma=1$.

$$T_2:\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}\qquad f_{T_2}(x,y,z)=St_3(x,y,z)x\sigma^{-1}=[z,x^2]y+[yx,zx]+[x^2,y]z,$$

onde $\sigma=(234)$.

$$T_3:\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}\qquad f_{T_3}(x,y,z)=St_3(x,y,z)x\sigma^{-1}=[y,z]x^2+[z,x^2y]+[x^2,y]z$$

$$+x[y,xz]+x[x,z]y,$$

onde $\sigma=(34)$.

Como $e_{11}+e_{33},e_{12},e_{23}\in M_7$, temos $f_{T_1}(e_{11}+e_{33},e_{12},e_{23})=2e_{13}$ e $f_{T_2}(e_{11}+e_{33},e_{12},e_{23})=f_{T_3}(e_{11}+e_{33},e_{12},e_{23})=e_{13}$, assim, pela Proposição 1.51, $m_\lambda\neq 0$.

Consideremos $\alpha,\beta,\gamma\in F$ de modo que $f=\alpha f_{T_1}+\beta f_{T_2}+\gamma f_{T_3}\in Id(M_7)$. Usando as observações acima temos

$$2\alpha+\beta+\gamma=0\Longrightarrow\gamma=-2\alpha-\beta\Longrightarrow f=\alpha(f_{T_1}-2f_{T_3})+\beta(f_{T_2}-f_{T_3}).$$

Fazendo os cálculos necessários, obtemos que $f_{T_1} - 2f_{T_3}$ e $f_{T_2} - f_{T_3}$ são identidades de M_7 e $m_\lambda = 1$. Logo

$$f_{T_1} - f_{T_2} - f_{T_3} = [[x,y],[z,x]] + yx[x,z] + zx[y,x] + x^2[z,y] \in Id(M_7). \tag{2.3}$$

Por fim, consideramos o último caso.

Para $\lambda = (1,1,1,1)$, temos uma tabela *standard* e seu vetor de peso máximo correspondente.

$$T_1 : \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \qquad f_{T_1}(x,y,z,w) = St_4(x,y,z,w).$$

Não é difícil mostrar que $St_4(x,y,z,w) \in Id(M_7)$. Portanto $m_\lambda = 0$.

Ainda, temos

$$\begin{aligned} c_4(M_7) &= \deg\ \chi_{(4)} + 2\deg\ \chi_{(3,1)} + \deg\ \chi_{(2,2)} + \deg\ \chi_{(2,1,1)} \\ &= 1 + 2(4-1) + \frac{4(4-3)}{2} + \frac{(4-2)(4-1)}{2} = 12. \end{aligned}$$

2.6 A PI-Álgebra M_7

O principal resultado desta seção fornecerá um conjunto gerador para o T-ideal da álgebra M_7 e descreverá as sequências $\{c_n(M_7)\}_{n\geq 1}$, $\chi_n(M_7)$ e $l_n(M_7)$, para todo $n \geq 1$.

Pelo fato de M_7 não possuir identidades de grau 3, obteremos as identidades de grau $n \geq 4$. Na Seção 2.5, vimos que o polinômio *standard* $f_1 = St_4(x,y,z,w)$ é uma identidade de M_7, que podemos escrever como:

$$f_1 = [x,y][z,w] + [z,w][x,y] + [y,z][x,w] + [x,w][y,z] + [z,x][y,w] + [y,w][z,x].$$

Uma segunda identidade, que foi obtida na Observação 2.31, é

$$f_2 = [x,y][z,w] + [z,w][x,y] + x[z,w]y - y[z,w]x.$$

Como $f_1, f_2 \in Id(M_7)$ podemos escrever f_1 a partir de f_2 da seguinte forma

$$y[x,w]z - z[x,w]y + y[z,x]w - w[z,x]y + z[x,y]w - w[x,y]z \equiv 0 \text{ em } M_7. \tag{2.4}$$

Aplicando o processo de multilinearização para a identidade $x[x,y]x$ de M_7, obtemos

$$z[x,y]w + w[x,y]z + y[x,z]w + w[x,z]y + y[x,w]z + z[x,w]y \equiv 0 \text{ em } M_7. \quad (2.5)$$

Subtraindo as equações (2.4) e (2.5) obtemos

$$z[x,w]y + y[x,z]w + w[x,y]z \equiv 0 \text{ em } M_7. \quad (2.6)$$

Por outro lado, aplicando também, o processo de multilinearização para a identidade $[[x,y],[z,x]] + yx[x,z] + zx[y,x] + x^2[z,y]$ de M_7 (equação (2.3)) obtemos

$$xy[w,z] + yx[w,z] + wx[z,y] + wy[z,x] + zx[y,w] + zy[x,w]+$$

$$[x,z][w,y] - [w,y][x,z] + [y,z][w,x] - [w,x][y,z] \equiv 0 \text{ em } M_7. \quad (2.7)$$

e, usando o fato que $yx = xy - [x,y]$, conseguimos uma nova identidade para M_7, a saber,

$$f_3 = 2xy[w,z] + wx[z,y] + wy[z,x] + zx[y,w] + zy[x,w]+$$

$$[x,y][z,w] + [x,z][w,y] - [w,y][x,z] + [y,z][w,x] - [w,x][y,z].$$

Fazendo os cálculos podemos verificar que M_7 satisfaz as identidades

$$f_4 = [x,y]z[w,t], \ f_5 = [[x,y][z,w],t], \ f_6 = [z[x,y]w,t] \text{ e } f_7 = [x,y][z,w][t,v].$$

Usando cálculo de comutadores obtemos

$$xy[z,w] - x[z,w]y = (xz[y,w] - x[y,w]z) - (xw[y,z] - x[y,z]w). \quad (2.8)$$

Agora através de propriedades de comutadores e f_4, temos

$$x[y,z][w,t] \equiv y[x,z][w,t] - z[x,y][w,t]. \quad (2.9)$$

Analogamente, usando f_4 e f_5,

$$x[y,z][w,t] \equiv w[y,z][x,t] - t[y,z][x,w]. \quad (2.10)$$

E por fim usando f_2

$$x[z,w]y - xy[z,w] \equiv (y[z,w]x - yx[z,w]) - 2[x,y][z,w] - [z,w][x,y]. \quad (2.11)$$

Considere $Q = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \rangle_T$. Como $f_7 = [x,y][z,w][t,v] \in Q$, pelo Teorema 5.2.1 [11], sabemos que qualquer identidade multilinear de grau n pode ser escrita, módulo Q, como uma combinação linear de polinômios do tipo

$$x_{i_1}...x_{i_m}[x_j, x_{j_1}, ..., x_{j_q}][x_k, x_{k_1}, ..., x_{k_p}]$$

onde $j_1 < ... < j_q,\ k_1 < ... < k_p,\ j > j_1,\ k > k_1 \quad \text{e} \quad i_1 < ... < i_m$.

Usaremos isso para obter um conjunto de geradores para $\dfrac{P_n}{P_n \cap Q}$.

Se c é um comutador de peso arbitrário, usando as identidades f_4 e f_5 temos

$$[x,y,z]c \equiv [x,y]zc - z[x,y]c \equiv -z[x,y]c,$$

$$c[x,y,z] \equiv c[x,y]z - cz[x,y] \equiv c[x,y]z \equiv zc[x,y].$$

Logo é suficiente considerar polinômios dos seguintes tipos

$$x_{i_1}...x_{i_m}[x_j, x_{j_1}][x_k, x_{k_1}], \tag{2.12}$$

$$x_{i_1}...x_{i_m}[x_j, x_{j_1}, ..., x_{j_{n-m-1}}], \tag{2.13}$$

onde $j_1 < ... < j_{n-m-1},\ j > j_1,\ k > k_1,\ i_1 < ... < i_m \quad \text{e} \quad m \neq n-1$.

Por outro lado, comutadores de peso maiores ou iguais a 3 podem ser reescritos em função de comutadores de peso 2 multiplicados pelas variáveis que não os compõe, por exemplo:

$$[x,y,z,w,t] = ([x,y]zw - z[x,y]w)t - (w[x,y]z - wz[x,y])t$$
$$-(t[x,y]z - tz[x,y])w + t(w[x,y]z - wz[x,y])$$

Assim, para $m \neq n$, qualquer polinômio (2.13) é combinação linear sobre F de polinômios do tipo

$$\begin{gathered} x_{i_1}...x_{i_m}[x_j, x_{j_1}] \\ x_{i_1}...x_{i_m}([x_j, x_{j_1}]x_{j_2}...x_{j_{n-m-1}} - x_{j_2}[x_j, x_{j_1}]x_{j_3}...x_{j_{n-m-1}}) \\ x_{i_1}...x_{i_{n-4}}(x_r[x_j, x_{j_1}]x_s - x_r x_s[x_j, x_{j_1}]) \\ x_{i_1}...x_{i_{n-5}}(x_r[x_j, x_{j_1}]x_s - x_r x_s[x_j, x_{j_1}])x_k, \end{gathered} \tag{2.14}$$

com $i_1 < ... < i_m,\ j > j_1$.

As expressões (2.12) e (2.14) sugerem que os seguintes tipos de polinômios podem formar um conjunto gerador para P_n módulo $P_n \cap Q$.

Polinômios do tipo I

$$P_I = x_1x_2...x_n.$$

Polinômios do tipo II

$$P_{II}^{(2)} = w(x_3[x_2, x_1]x_4 - x_3x_4[x_2, x_1])$$
$$P_{II}^{(3)} = w(x_2[x_3, x_1]x_4 - x_2x_4[x_3, x_1])$$
$$P_{II}^{(4)} = w(x_2[x_4, x_1]x_3 - x_2x_3[x_4, x_1])$$

Se $n \geq 5$, então $P_{II}^{(j)} = w(x_3[x_j, x_1]x_4 - x_3x_4[x_j, x_1])$, para $5 \leq j \leq n$.

Polinômios do tipo III

$$P_{III}^{(j)} = w([x_j, x_1]x_{i_1}...x_{i-n-2} - x_{i_1}[x_j, x_1]x_{i_2}...x_{i_{n-2}}),\ 2 \leq j \leq n,$$

onde $i_1 < i_2 < ... < i_{n-2}$.

Polinômios do tipo IV

$$P_{2,1,3,4} = w([x_2, x_1][x_3, x_4]),\ \ \widetilde{P}_{2,1,3,4} = w([x_3, x_4][x_2, x_1])$$

$$P_{3,1,2,4} = w([x_3, x_1][x_2, x_4])$$

$$P_{4,1,2,3} = w([x_4, x_1][x_2, x_3]),\ \ \widetilde{P}_{4,1,2,3} = w([x_2, x_3][x_4, x_1]),$$

para $5 \leq j \leq n$,

$$P_{j,1,3,4} = w([x_j, x_1][x_3, x_4]),\ \ \widetilde{P}_{j,1,3,4} = w([x_3, x_4][x_j, x_1])$$

$$P_{2,1,j-1,j} = w([x_2, x_1][x_{j-1}, x_j]),\ \ \widetilde{P}_{2,1,j-1,j} = w([x_{j-1}, x_j][x_2, x_1])$$

e, por fim,

$$P_{i,1,2,j} = w([x_i, x_1][x_2, x_j]),\ \ \widetilde{P}_{i,1,2,j} = w([x_2, x_j][x_i, x_1]),$$

onde $4 \leq i \leq j - 1$.

Além disso, cada polinômio w dado acima é um monômio linear formado pelas variáveis restantes x_k de $\{x_1, ..., x_n\}$ de modo ordenado.

A seguir apresentaremos alguns lemas que serão importantes para a demonstração do principal resultado desta seção.

Denotaremos por $T(L)$ o conjunto dos polinômios do tipo L.

Lema 2.32 *([39], Lema 3.2) Para $n = 4$, qualquer polinômio da forma $x_r[x_k, x_1]x_s - x_r x_s[x_k, x_1]$, com $r, k, s \in \{2, 3, 4\}$ pode ser escrito, módulo Q, como combinação linear dos polinômios dos tipos II e IV sobre F.*

No resultado a seguir, consideraremos os polinômios $P_{k,l,r,s} = w[x_k, x_l][x_r, x_s]$ e $\widetilde{P}_{k,l,r,s} = w[x_r, x_s][x_k, x_l]$, onde $w = x_{i_1}...x_{i_m}$, com $i_1 < ... < i_m$ e $i_1, ..., i_m \notin \{k, l, r, s\}$.

Lema 2.33 *([39], Lema 3.3) Para todo $n \geq 4$, qualquer polinômio da forma $P_{k,l,r,s}$ (e $\widetilde{P}_{k,l,r,s}$) pode ser escrito, módulo Q, como combinação linear sobre F dos elementos de $T(IV)$, onde $l, r, s, k \in \{1, ..., n\}$.*

Lema 2.34 *([39], Lema 3.4) Para todo $n \geq 4$, qualquer polinômio da forma*

$$w(x_r[x_k, x_l]x_s - x_r x_s[x_k, x_l])$$

pode ser escrito, módulo Q, como combinação linear sobre F dos polinômios de $T(II) \cup T(IV)$, onde $l, r, s, k \in \{1, ..., n\}$ e w é o produto das variáveis restantes x_i com $i \neq l, r, s, k$, ordenadas.

Lema 2.35 *([39], Lema 3.5) Para todo $n \geq 4$, qualquer polinômio da forma $w[x_r, x_s]$ pode ser escrito, módulo Q, como combinação linear sobre F dos elementos de $T(II) \cup T(IV)$, onde $r, s \in \{1, ..., n\}$ e w é o produto ordenado das variáveis x_i com $i \neq r, s$.*

Teorema 2.36 ***(Vieira e Jorge, 2006)*** *Para qualquer $n \geq 4$, temos*

(1) $\chi_n(M_7) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,1,1)} + \chi_{(n-2,2)}$,

(2) $l_n(M_7) = 5$,

(3) $\mathcal{T} = T(I) \cup T(II) \cup T(III) \cup T(IV)$ *é uma base de* P_n *módulo* $(P_n \cap Id(M_7))$,

(4) $c_n(M_7) = n(n-1)$,

(5) $Id(M_7) = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \rangle_T$.

Prova: Considere $Q = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \rangle_T$ e note que $Q \subset Id(M_7)$. Pelas observações e lemas anteriores desta seção, para mostrar que

$$\mathcal{T} = T(I) \cup T(II) \cup T(III) \cup T(IV)$$

gera P_n módulo $P_n \cap Q$, é suficiente mostrar que qualquer polinômio da forma

$$w'(x_k[x_r, x_s]x_l - x_k x_l[x_r, x_s])x_t \equiv w'(x_t[x_l, x_k][x_r, x_s] + x_k[x_r, x_s][x_l, x_t]).$$

Observe que

$$|T(I)| = 1, \ \ |T(II)| = |T(III)| = n - 1$$

e

$$|T(IV)| = 5 + \sum_{j=5}^{n}(j-2) = n^2 - 3n + 1.$$

Assim, $|\mathcal{T}| = |T(I)| + |T(II)| + |T(III)| + |T(IV)| = n^2 - n$. Portanto, se $\mathcal{V} = var(Q)$ então $c_n(M_7) \leq c_n(\mathcal{V}) \leq n^2 - n$.

Para $\lambda = (n)$, $f_{T_\lambda} = x^n \notin Id(M_7)$, pois $f_{T_\lambda}(e_{11} + e_{33}) = e_{11} + e_{33} \neq 0$. Logo, pela Proposição 1.51, $m_{(n)} \neq 0$.

Por outro lado, se $\lambda = (n-1, 1)$ então, pela Observação 1.51, afirmamos que $m_\lambda \geq 2$. Com efeito, sejam

$$f_{T_\lambda^{(n)}} = x^{n-1}y - yx^{n-1} \quad \text{e} \quad f_{T_\lambda^{(n-1)}} = x^{n-2}yx - yx^{n-1}$$

os vetores de peso máximo correspondentes às tabelas *standard* $T_\lambda^{(n)}$ e $T_\lambda^{(n-1)}$, com n e $n-1$ nos únicos boxes das segundas linhas, respectivamente, ou seja,

1	...
n	

e

1	...
$n-1$	

Como $f_{T_\lambda^{(n)}}(e_{11} + e_{33}, e_{12}) = e_{12} \neq 0$, $f_{T_\lambda^{(n-1)}}(e_{11} + e_{33}, e_{23}) = -e_{23} \neq 0$ e $f_{T_\lambda^{(n-1)}}(e_{11} + e_{33}, e_{12}) = 0$, segue que $f_{T_\lambda^{(n)}}, f_{T_\lambda^{(n-1)}} \notin Id(M_7)$ e são linearmente independentes módulo $Id(M_7)$.

Se $\lambda = (n-2, 1, 1)$, então $f_\lambda = St_3(x, y, z)x^{n-3} \notin Id(M_7)$, pois $f_\lambda(e_{11} + e_{33}, e_{12}, e_{23}) = 2e_{13} \neq 0$. Logo $m_{(n-2,1,1)} \neq 0$.

Finalmente, quando $\lambda = (n-2,2)$, temos que

$$f_\lambda = xyxyx^{n-4} - xy_2x^{n-3} - yx^2yx^{n-4} + yxyx^{n-3}$$

não pertence a $Id(M_7)$, já que $f_\lambda(e_{11}+e_{33}, e_{12}+e_{23}) = -e_{13} \neq 0$. Assim, pela Proposição 1.51, $m_{(n-2,2)} \neq 0$. Portanto,

$$c_n(M_7) \geq \deg\ \chi_{(n)} + 2\deg\ \chi_{(n-1,1)} +\ deg\ \chi_{(n-2,1,1)} +\ deg\ \chi_{(n-2,2)} = n(n-1),$$

onde a igualdade decorre da fórmula do gancho da Proposição 1.30. Daí

$$n(n-1) \leq c_n(M_7) \leq c_n(V) \leq n(n-1),$$

portanto, $c_n(M_7) = n(n-1)$ e $Id(M_7) = Q$. Assim, $\mathcal{T}$ é uma base para $\dfrac{P_n}{P_n \cap Id(M_7)}$, $\chi_n(M_7) = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,1,1)} + \chi_{(n-2,2)}$ e, consequentemente, $l_n(M_7) = 5$. ■

2.6.1 Crescimento Quadrático

Pelo Teorema 2.36 e pelos Lemas 2.10 e 2.12 podemos constatar que as variedades $var(M_i)$, para $3 \leq i \leq 7$, tem crescimento quadrático. Além disso também é possível provar que elas têm a seguinte propriedade.

Definição 2.37 *Dada uma F-álgebra A, dizemos que a variedade $\mathcal{V} = var(A)$ é* ***variedade minimal de crescimento quadrático*** *se a sequência de suas codimensões $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$ tem crescimento quadrático e se todas as suas subvariedades próprias tem crescimento linear ou constante.*

Teorema 2.38 ***(Vieira e Jorge, 2006)*** *As variedades $var(M_3)$, $var(M_4)$, $var(M_5)$, $var(M_6)$ e $var(M_7)$ são variedades minimais de crescimento quadrático.*

Prova: Sejam A uma F-álgebra e $var(A)$ uma subvariedade própria de $var(M_7)$. Então $Id(M_7) \subsetneqq Id(A)$, $M_7 \notin var(A)$ e $c_{n_0}(A) \lneqq c_{n_0}(M_7)$, para algum n_0 natural. Ainda

(i) $M_2, M_3 \notin var(A)$, pois

$$f = [[x,y],[z,x]] + yx[x,z] + zx[y,x]x^2[z,y] \in Id(M_7) \subsetneqq Id(A),$$

mas $f \notin Id(M_3)$ e $f \notin Id(M_2)$.

(ii) $M_4, M_5, M_6 \notin var(A)$, caso contrário, se $M_i \in var(A)$, para algum $i = 4, 5, 6$, então $Id(A) \subseteq Id(M_i)$ e pelos Lemas 2.10 e 2.12 teríamos

$$c_{n_0}(M_7) = c_{n_0}(M_i) \leq c_{n_0}(A) \lneqq c_{n_0}(M_7),$$

o que é uma contradição.

Se $M_1 \notin var(A)$, então pelo Corolário 2.20 segue que $c_n(A) = c_n(var(A))$ tem crescimento constante. Caso contrário, temos que $c_n(A) = c_n(var(A))$ tem crescimento linear e o resultado está provado para $var(M_7)$.

Se $var(A)$ é uma subvariedade própria de $var(M_3)$, temos $M_i \notin var(A)$, para $2 \leq i \leq 7$. Com efeito, $M_3 \notin var(A)$ e $f = [x, y, z] \in Id(M_3) \subsetneqq Id(A)$, contudo $f \not\equiv 0$ em M_i, quando $i = 2, 4, 5, 6, 7$. Assim $var(A)$ tem crescimento linear ou constante dependendo se M_1 pertence ou não a $var(A)$, respectivamente.

Por outro lado, se $\mathcal{U} = var(B)$ é uma subvariedade própria de $var(M_4)$ segue que $M_4 \notin \mathcal{U}$ e, como $c_n(M_4) = c_n(M_5) = c_n(M_6) = c_n(M_7)$, usando a mesma idéia do item (ii) acima concluímos que $M_5, M_6, M_7 \notin \mathcal{U}$.

Como $f = [x, y]zw \in Id(M_4) \subsetneqq Id(B)$, mas $f \notin Id(M_3) \cup Id(M_1)$ temos que $M_1, M_3 \notin \mathcal{U}$. Logo $\mathcal{U}$ tem crescimento constante ou linear dependendo se M_2 pertence ou não a $\mathcal{U}$, respectivamente. Usando que $f = zw[x, y] \in Id(M_5)$, $g = z[x, y]w \in Id(M_6)$ e um raciocínio análogo ao anterior para provar que todas as subvariedades próprias de $var(M_5)$ e $var(M_6)$ tem crescimento constante ou linear, concluímos o teorema.

$\blacksquare$

Corolário 2.39 ***(Vieira e Jorge, 2006)*** *As variedades $var(M_3)$, $var(M_4)$, $var(M_5)$, $var(M_6)$ e $var(M_7)$ são as únicas variedades minimais de crescimento quadrático.*

Capítulo 3

Polinômios Próprios

Os polinômios próprios têm um papel importante no estudo das identidades de uma álgebra unitária A, conforme veremos na Proposição 3.1. O nosso objetivo é provar o Teorema da Base de Specht, que nos fornece uma base do espaço dos polinômios próprios multilineares para, a partir deste, obtermos os principais resultados deste capítulo. Para isto utilizaremos o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt e o Teorema de Witt.

Lembramos que $Com(X) = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}] : k \geq 2, x_{i_j} \in X\}$ é o conjunto de todos os comutadores de peso maior ou igual a 2 em X e consideramos $B = B(X)$ a subálgebra com unidade de $F\langle X\rangle$ gerada por $Com(X)$, ou seja, se $b \in B$ então:

$$b = \sum \alpha_{i,...,j}[x_{i_1}, ..., x_{i_t}]...[x_{j_1}, ..., x_{j_r}],\ \alpha_{i,...,j} \in F,\ t, ..., r \geq 2.$$

Convencionamos 1 o produto de um conjunto vazio de comutadores e diremos que os elementos de B são os **polinômios próprios** de $F\langle X\rangle$.

3.1 Identidades Polinomiais Próprias

Provaremos a seguir um resultado sobre a relação entre uma base para $L(X)$ e para $F\langle X\rangle$. Tal resultado diz respeito também a identidades polinomiais próprias de uma álgebra A.

Considere $F_m = F\langle x_1, ..., x_m\rangle$ o espaço dos polinômios nas indeterminadas $x_1, ...,$ x_m. Seja $B_m = B \cap F_m$ o espaço dos polinômios próprios nas variáveis $x_1, ..., x_m$.

Proposição 3.1 *(i) Se escolhemos uma base ordenada da álgebra de Lie livre $L(X)$*

$$x_1, x_2, ..., [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], ..., [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], ...$$

consistindo das variáveis em X, seguidas de comutadores ordenados pelos pesos, então o espaço vetorial $F\langle X\rangle$ tem uma base

$$x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m}u_{j_1}^{\beta_1}u_{j_2}^{\beta_2}...u_{j_t}^{\beta_t},$$

onde $\alpha_i \geq 0$, $\beta_s \geq 0$, $u_{j_i} \in Com(X)$, mantendo a ordem da base de $L(X)$.

Além disso, os elementos da base de $F\langle X\rangle$ com $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$ formam uma base para o espaço B dos polinômios próprios.

(ii) Se A é uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito F então todas as identidades polinomiais de A seguem a partir das identidades polinomiais próprias, isto é, daquelas em $Id(A) \cap B$. Se car $F = 0$ então as identidades polinomiais de A seguem das identidades polinomiais próprias multilineares, ou seja, daquelas em $\bigcup_{n\geq 1}(P_n \cap (Id(A) \cap B))$.

Prova:

(i) Dada uma base ordenada de $L(X)$: $x_1, x_2, ..., u_1, u_2, ...$, onde $\{u_i\} \subseteq Com(X)$ e estão ordenados pelo peso então, pelo Teorema 1.7, $U(L(X)) = F\langle X\rangle$ e, pelo Teorema 1.6, $F\langle X\rangle$ tem uma base

$$x_{i_1}...x_{i_s}u_{j_1}...u_{j_t},$$

com $i_1 \leq ... \leq i_s$, $j_1 \leq ... \leq j_t$, o que prova a primeira afirmação.

Agora para garantir a afirmação sobre a base de B, observamos que cada comutador $[x_{k_1}, ..., x_{k_l}]$ pode ser escrito como uma combinação linear dos comutadores u_r da base de $L(X)$ e assim cada produto de comutadores

$$[x_{i_1}, ..., x_{i_p}]...[x_{j_1}, ..., x_{j_q}]$$

pode ser escrito como combinação linear dos produtos $u_{l_1}...u_{l_t}$, com cada u_{l_p} pertencente à base de $L(X)$. Logo, resta mostrar que podemos sempre supor $l_1 \leq ... \leq l_t$. Para isto basta observar que para quaisquer dois comutadores consecutivos (ambos da base de $L(X)$) que estejam na ordem "errada", isto é,

$$[x_{b_1}, ..., x_{b_l}][x_{a_1}, ..., x_{a_k}] = u_b u_a$$

com $b > a$, podemos substituir $u_b u_a$ por

$$u_a u_b - [u_a, u_b].$$

Mas $[u_a, u_b] \in L(X)$ logo também é combinação linear de comutadores a partir da base de $L(X)$ e assim, aplicamos argumentos indutivos e garantimos que os elementos de B são combinações lineares de $u_{l_1} u_{l_2} ... u_{l_s}$, com $u_{l_t} \in Com(X)$ e $l_1 \leq l_2 \leq ... \leq l_s$.

(ii) Sejam A uma PI-álgebra unitária e $f(x_1, ..., x_n) \in Id(A)$. Como F é infinito, podemos supor f homogêneo em cada variável x_i. Escrevemos f como combinação linear dos elementos da base em (i), ou seja, $f(x_1, ..., x_n) = \sum \lambda_\alpha x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n} g_\alpha(x_1, ..., x_n)$, onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $\lambda_\alpha \in F$ e $g_\alpha \in B$. O leitor poderá, se achar conveniente, acompanhar esta demonstração com o Exemplo 3.2.

Ao substituirmos a variável x_1 por $1 + x_1$ em f, a substituição por 1 em cada comutador de g_α é nula. Como $f(1 + x_1, x_2, ..., x_n)$ é também uma identidade polinomial para A, obtemos

$$f(1 + x_1, x_2, ..., x_n) = \sum \lambda_\alpha \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} x_1^i x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} g_\alpha(x_1, ..., x_n) \in Id(A).$$

A componente homogênea de grau minimal com respeito a x_1 é obtida do somando com α_1 maximal entre aqueles em que $\lambda_\alpha \neq 0$, pois, quando α_1 é maximal, o grau de x_1 em $g_\alpha(x_1, ..., x_n)$ é minimal, com $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Como o T-ideal $Id(A)$ é homogêneo, obtemos

$$\sum_{\alpha_1 max} \lambda_\alpha x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} g_\alpha(x_1, ..., x_n) \in Id(A).$$

Multiplicando à esquerda a identidade polinomial acima por $x_1^{\alpha_1}$ e subtraindo de $f(x_1, ..., x_n)$ obtemos uma identidade similar a f mas agora envolvendo valores mais baixos para o grau de x_1 fora de comutadores. Procedendo assim, concluímos que, para todo α_1 fixo, temos

$$\sum_{\alpha_1 \text{fixo}} \lambda_\alpha x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n} g_\alpha(x_1, ..., x_n) \in Id(A).$$

Portanto, ao repetir o processo para x_2, x_3 e assim por diante até para x_n, concluíremos que $g_\alpha(x_1, ..., x_n) \in Id(A)$, para todo α tal que $\lambda_\alpha \neq 0$ e isto completa a demonstração.

A parte da afirmação sobre as identidades multilineares é também clara, pois tomando $f \in Id(A)$ multilinear, usamos o raciocínio anterior e obteremos que f segue de identidades polinomiais próprias que também são multilineares.

■

Exemplo 3.2 *Aplicaremos o processo descrito na demonstração do item (ii) da Proposição* 3.1 *ao polinômio completamente homogêneo de multigrau* $(2,2,2,1)$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2x_3[x_2,x_3][x_2,x_4] + 5x_1^2x_2x_3x_4[x_2,x_3] - 4x_1x_2x_3x_4[x_1,x_2,x_3]$$

$$+7x_2^2x_3[x_1,x_3][x_1,x_4] + x_3[x_1,x_2]^2[x_3,x_4]$$

$$+[x_1,x_2][x_2,x_3][x_1,x_3,x_4] + 14[x_1,x_2,x_3][x_1,x_2,x_3,x_4].$$

Assim

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2x_3g_{(2,0,1,0)} + 5x_1^2x_2x_3x_4g_{(2,1,1,1)} - 4x_1x_2x_3x_4g_{(1,1,1,1)}$$

$$+7x_2^2x_3g_{(0,2,1,0)} + x_3g_{(0,0,1,0)} + g_{(0,0,0,0)},$$

onde

$$g_{(2,0,1,0)} = [x_2,x_3][x_2,x_4],\ g_{(2,1,1,1)} = [x_2,x_3],\ g_{(1,1,1,1)} = [x_1,x_2,x_3],$$

$$g_{(0,2,1,0)} = [x_1,x_3][x_1,x_4], g_{(0,0,1,0)} = [x_1,x_2]^2[x_3,x_4],$$

$$g_{(0,0,0,0)} = [x_1,x_2][x_2,x_3][x_1,x_3,x_4] + 14[x_1,x_2,x_3][x_1,x_2,x_3,x_4].$$

Consideremos A uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito e $f \in Id(A)$ *então* $f(1+x_1,x_2,x_3,x_4) \in Id(A)$. *E como obtemos zero ao substituir uma variável* x_i *em um comutador por 1 temos*

$$f(1+x_1,x_2,x_3,x_4) = (1+x_1)^2x_3g_{(2,0,1,0)} + 5(1+x_1)^2x_2x_3x_4g_{(2,1,1,1)}$$

$$-4(1+x_1)x_2x_3x_4g_{(1,1,1,1)} + 7x_2^2x_3g_{(0,2,1,0)} + x_3g_{(0,0,1,0)} + g_{(0,0,0,0)} \equiv 0 \text{ em } A.$$

Note que a componente homogênea de grau minimal em x_1 *é* $x_3g_{(2,0,1,0)}+5x_2x_3x_4g_{(2,1,1,1)}$ *(obtida a partir dos termos com* $\alpha_1 = 2$*). Como* $Id(A)$ *é homogêneo, segue que esta componente também é uma identidade de A, isto é,*

$$x_3g_{(2,0,1,0)} + 5x_2x_3x_4g_{(2,1,1,1)} \equiv 0 \text{ em } A. \tag{3.1}$$

Multiplicando esta identidade por x_1^2 *e subtraindo o produto de* f *obtemos a identidade* f_1 :

$$f - x_1^2(x_3g_{(2,0,1,0)} + 5x_2x_3x_4g_{(2,1,1,1)}) = -4x_1x_2x_3x_4g_{(1,1,1,1)} + 7x_2^2x_3g_{(0,2,1,0)}$$

$$+x_3g_{(0,0,1,0)} + g_{(0,0,0,0)}.$$

Procedendo de modo análogo com f_1 temos

$$f_1(1+x_1,x_2,x_3,x_4) = -4(1+x_1)x_2x_3x_4g_{(1,1,1,1)} + 7x_2^2x_3g_{(0,2,1,0)} + x_3g_{(0,0,1,0)} + g_{(0,0,0,0)}$$

$$= -4x_2x_3x_4g_{(1,1,1,1)} - 4x_1x_2x_3x_4g_{(1,1,1,1)} + 7x_2^2x_3g_{(0,2,1,0)} + x_3g_{(0,0,1,0)} + g_{(0,0,0,0)} \equiv 0 \text{ em } A.$$

Logo a componente homogênea de grau minimal em x_1 é $-4x_2x_3x_4g_{(1,1,1,1)}$ (obtida a partir dos termos com $\alpha_1 = 1$). Assim

$$-4x_2x_3x_4g_{(1,1,1,1)} \in Id(A) \tag{3.2}$$

e

$$f_1 - x_1(-4x_2x_3x_4g_{(1,1,1,1)}) = 7x_2^2x_3g_{(0,2,1,0)} + x_3g_{(0,0,1,0)} + g_{(0,0,0,0)} \in Id(A). \tag{3.3}$$

Note que com este processo conseguimos obter as identidades (3.1), (3.2) *e* (3.3), *todas com a propriedade que a variável x_1 não aparece fora de comutadores. Repetindo este processo agora para a variável x_2 nos polinômios*

$$g^{(2)} = x_3g_{(2,0,1,0)} + 5x_2x_3x_4g_{(2,1,1,1)}, \ \ g^{(1)} = -4x_2x_3x_4g_{(1,1,1,1)}$$

e

$$g^{(0)} = 7x_2^2x_3g_{(0,2,1,0)} + x_3g_{(0,0,1,0)} + g_{(0,0,0,0)},$$

obtemos novas identidades

$$g^{(2,1)} = 5x_3x_4g_{(2,1,1,1)}, \ \ g^{(2,0)} = x_3g_{(2,0,1,0)}$$

$$g^{(1,1)} = -4x_3x_4g_{(1,1,1,1)},$$

$$g^{(0,2)} = 7x_3g_{(0,2,1,0)} \text{ e } g^{(0,0)} = x_3g_{(0,0,1,0)} + g_{(0,0,0,0)}$$

nas quais as variáveis x_1 e x_2 não aparecem fora de comutadores. Aplicando agora o processo para a variável x_3 nos polinômios $g^{(i,j)}$ acima, conseguimos desaparecer com a variável x_3 fora dos comutadores. Finalmente repetindo este processo para a variável x_4 obtemos

$$g_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)} \equiv 0 \text{ em } A$$

para todo $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. Portanto as identidades polinomiais de A seguem de identidades polinomiais próprias.

Observação 3.3 *Pela Proposição* 3.1 *podemos garantir que os produtos de elementos da forma $x_1^{\alpha_1}...x_k^{\alpha_k}$, com $\alpha_i \geq 0$ e $k > 0$, com os elementos de uma base de B geram $F\langle X\rangle$ como espaço vetorial. Em particular os produtos $x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m}$, $\alpha_1,...,\alpha_m \geq 0$, com os elementos de uma base de B_m geram F_m como espaço vetorial.*

Proposição 3.4 *Seja $PL_n = L(X) \cap P_n$ o conjunto dos polinômios de Lie multilineares. O espaço vetorial PL_n tem uma base*

$$\{[x_n, x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n-1)}] : \sigma \in S_{n-1}\}, \text{ para } n > 1.$$

Prova: Basta utilizar a identidade de Jacobi sobre os comutadores de peso maior ou igual a 3 e a anticomutatividade para mostrar que cada comutador $[x_{i_1}, ..., x_{i_n}]$ é combinação linear de comutadores do tipo $[x_n, x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n-1)}], \sigma \in S_{n-1}$, obtendo assim que o conjunto acima gera o espaço vetorial PL_n. Além disso o conjunto é linearmente independente, pois escrevendo $[x_n, x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n-1)}]$ como uma combinação linear dos monômios $x_{\tau(1)}...x_{\tau(n)}$, $\tau \in S_n$ é suficiente mostrar que $x_n x_{\sigma(1)}...x_{\sigma(n-1)}$ é o termo dominante de $[x_n, x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n-1)}]$ com respeito a ordem lexicográfica em $F\langle X\rangle$. ■

Exemplo 3.5 *Mostremos que $[x_2, x_3, x_1, x_4]$ é uma combinação linear de comutadores do tipo $[x_4, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}], \sigma \in S_3$.*
De fato, usando a identidade de Jacobi e propriedades de comutadores temos

$$\begin{aligned}
[x_2, x_3, x_1, x_4] &= [\underbrace{[x_2, x_3]}, \underbrace{x_1}, \underbrace{x_4}] \\
&= -[x_1, x_4, [x_2, x_3]] - [x_4, [x_2, x_3], x_1] \\
&= -[[x_1, x_4], [x_2, x_3]] + [\underbrace{x_2}, \underbrace{x_3}, \underbrace{x_4}, x_1] \\
&= [[\underbrace{x_2}, \underbrace{x_3}], \underbrace{[x_1, x_4]}] - [x_3, x_4, x_2, x_1] - [x_4, x_2, x_3, x_1] \\
&= -[x_3, [x_1, x_4], x_2] - [[x_1, x_4], x_2, x_3] + [x_4, x_3, x_2, x_1] - [x_4, x_2, x_3, x_1] \\
&= [[x_1, x_4], x_3, x_2] + [x_4, x_1, x_2, x_3] + [x_4, x_3, x_2, x_1] - [x_4, x_2, x_3, x_1] \\
&= -[x_4, x_1, x_3, x_2] + [x_4, x_1, x_2, x_3] + [x_4, x_3, x_2, x_1] - [x_4, x_2, x_3, x_1].
\end{aligned}$$

3.2 Teorema da Base de Specht

Consideremos o espaço dos polinômios próprios multilineares nas variáveis $x_1, ...,$ x_n denotado por $\Gamma_n = B \cap P_n$, para $n \geq 1$. Convencionamos dim $\Gamma_0 = 1$.

Já sabemos pela Proposição 3.1, que as identidades polinomias multilineares de uma PI-álgebra unitária A seguem a partir de polinômios próprios multilineares, ou seja, dos elementos de $\Gamma_n \cap Id(A)$.

Provaremos agora o teorema que fornece uma base para o espaço Γ_n, que é conhecido como Teorema da Base de Specht, o qual foi demonstrado por Specht em 1950.

Teorema 3.6 *O espaço Γ_n possui uma base que consiste de produtos de comutadores:*

$$[x_{i_1}, ..., x_{i_k}]...[x_{j_1}, ..., x_{j_t}], \tag{3.4}$$

onde:

(i) Todos os produtos são multilineares nas variáveis $x_1, ..., x_n$.

(ii) Cada comutador $[x_{r_1}, ..., x_{r_s}]$ é normado à esquerda, de peso maior ou igual a 2 e o índice máximo está na primeira posição, isto é, $r_1 > r_2, ..., r_s$.

(iii) No produto (3.4) temos $k \leq ... \leq t$, ou seja, os comutadores estão ordenados pelos pesos.

(iv) Se $[x_{p_1}, ..., x_{p_s}]$ e $[x_{q_1}, ..., x_{q_s}]$ são dois comutadores de mesmo peso consecutivos em um produto do tipo (3.4), então o índice da primeira variável do primeiro comutador é menor que o índice da primeira variável do segundo comutador, ou seja, $p_1 < q_1$.

Prova: Podemos escolher uma base de $L(X)$ formada por elementos

$$x_1, x_2, ..., [x_{i_1}, x_{i_2}], ...,$$

de modo que comutadores de peso menor precedam os de peso maior e dois comutadores de mesmo peso são comparados pelas suas primeiras variáveis. Com isto, pela Proposição 3.1 (i) e a Proposição 3.4, o resultado segue. ■

Corolário 3.7 *Para cada $n = 0, 1, 2, ...,$*

$$\dim\ \Gamma_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \right).$$

Prova: Note que cada elemento da base de Specht é um produto

$$C_1 C_2 ... C_t$$

de comutadores C_j em variáveis distintas dentre as variáveis $x_1, ..., x_n$, com peso$(C_j) = p_j \geq 2$.

Associamos a cada comutador C_j de peso p_j um ciclo de comprimento p_j, onde o primeiro elemento do ciclo é o índice da primeira variável do comutador, o segundo elemento do ciclo é o índice da segunda variável do comutador e assim por diante, por exemplo: a permutação associada ao comutador

$$C_j = [x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_{p_j}}],\ j_1 > j_2, ..., j_{p_j}$$

é

$$(j_1\, j_2\, ...\, j_{p_j}).$$

Assim, o produto $C_1C_2...C_t$ corresponde a um produto de ciclos disjuntos de comprimento maior ou igual a 2 onde todos os números de 1 até n aparecem.

Logo temos uma correspondência entre a base de Specht e o conjunto das **permutações caóticas** em S_n (que é o conjunto das permutações em S_n que movem todos os elementos $1, ..., n$), pois uma permutação é caótica se, e somente se, é um produto de ciclos disjuntos com peso maior ou igual a 2, onde todos os números de 1 até n aparecem.

Dessa forma, contando o número de permutações caóticas, obtemos dim Γ_n. Sabemos que o número total de permutações em S_n é dado por $|S_n| = n!$. Para cada $1 \leq i \leq n$, considere $Fix(i) = \{\sigma \in S_n : \sigma(i) = i\}$ e, para um conjunto $\{i_1, ..., i_k\}$ com $i_1 < ... < i_k$, denote $Fix(i_1, ..., i_k) = \bigcap\limits_{1 \leq t \leq k} Fix(i_t)$. Temos

$T_1 := \sum\limits_{i=1}^{n} |Fix(i)| = \sum\limits_{i=1}^{n} (n-1)! = n(n-1)! = n!$

$T_2 := \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} |Fix(i,j)| = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = \binom{n}{2}(n-2)! = \dfrac{n!}{2!}$

$T_3 := \sum\limits_{1 \leq i < j < k \leq n} |Fix(i,j,k)| = \sum\limits_{1 \leq i < j < k \leq n} (n-3)! = \binom{n}{3}(n-3)! = \dfrac{n!}{3!}$

$\vdots$

$T_n := Fix(1, 2, ..., n) = \binom{n}{n}(n-n)! = \dfrac{n!}{n!}.$

Como $|\bigcup_{i=1}^{n} Fix(i)| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} T_j$, segue que

$$\dim\ \Gamma_n = |S_n| - |\bigcup_{i=1}^{n} Fix(i)| = n! - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} T_j$$

$$= n! - (T_1 - T_2 + T_3 - ... + (-1)^{n-1} T_n)$$

$$= \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + ... + (-1)^n \frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}.$$

■

Como $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \sim e^{-1}$, então

$$\dim\ \Gamma_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \right) \sim \frac{n!}{e}.$$

Deste modo, ao trabalhar com polinômios próprios multilineares no lugar de polinômios multilineares arbitrários, diminuímos a quantidade de cálculos em aproximadamente e vezes.

Podemos usar o seguinte resultado ([11], Exercício 4.3.6) como um teste para garantir quando um polinômio em $F\langle X\rangle$, com *car* $F = 0$, é próprio.

Proposição 3.8 *Seja car F=0. Um polinômio $f(x_1, ..., x_n) \in F\langle X\rangle$ é próprio se, e somente se, as derivadas parciais formais $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ são iguais a zero, para $i = 1, ..., n$, onde $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é a derivação de $F\langle X\rangle$ definida por $\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ o delta de Kronecker.*

3.3 A Sequência das Codimensões Próprias

Definição 3.9 *Dada uma PI-álgebra (unitária) A sobre um corpo F de característica zero, para cada $n \geq 0$, podemos considerar o espaço vetorial $\Gamma_n(A) = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap Id(A)}$. A* ***sequência das codimensões próprias*** *de A é dada por*

$$c_n^p(A) = \dim\ \Gamma_n(A),\ n = 0, 1, 2, ...$$

Considerando $B_m(A) = \dfrac{B_m}{B_m \cap Id(A)}$ e $F_m(A) = \dfrac{F_m}{F_m \cap Id(A)}$, o próximo resultado nos diz como podemos determinar uma base para $F_m(A)$ a partir de uma base de $B_m(A)$, e uma base para $P_n(A)$ a partir de uma base de $\Gamma_k(A)$, quando A é uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito.

Teorema 3.10 *Considere A uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito F.*

(i) Seja

$$\{g_j(x_1, ..., x_m) : j = 1, 2, ...\}$$

uma base do espaço vetorial $B_m(A)$. Então $\{x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m} g_j(x_1, ..., x_m) : j = 0, 1, ...; \alpha_i \geq 0\}$ é uma base de $F_m(A)$.

(ii) Se o conjunto $\{f_{jk}(x_1, ..., x_k) : j = 1, 2, ..., c_k^p(A)\}$ é uma base do espaço vetorial $\Gamma_k(A)$ dos polinômios próprios multilineares de grau k em $\dfrac{F\langle X\rangle}{F\langle X\rangle \cap Id(A)}$ então, para $n \geq k$, o espaço $P_n(A)$ tem uma base consistindo de todos polinômios multilineares da forma

$$x_{p_1}...x_{p_{n-k}} f_{jk}(x_{q_1}, ..., x_{q_k}),\ j = 1, 2, ..., c_k^p(A),\ k = 0, 1, 2, ..., n,$$

onde $p_1 < ... < p_{n-k}$ e $q_1 < ... < q_k$.

Prova:

(i) Consideremos a projeção

$$B_m \longrightarrow \frac{B_m}{B_m \cap Id(A)} = B_m(A).$$

Dada uma base $\{g_j(x_1, ..., x_m) : j \geq 1\}$ de $B_m(A)$, consideramos $\widetilde{g_j}(x_1, ..., x_m) \in B_m$ a pré-imagem homogênea de $g_j \in B_m(A)$, para $j \geq 1$. Escolhendo uma base homogênea arbitrária $\{h_k : k \geq 1\}$ de $B_m \cap Id(A)$, temos que

$$\{\widetilde{g_j}(x_1, ..., x_m), h_k : j \geq 1, k \geq 1\}$$

é uma base homogênea de B_m. Pela Observação 3.3 vemos que

$$x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m} g_j(x_1, ..., x_m), \alpha_i \geq 0, j \geq 1$$

geram F_m (módulo $F_m \cap Id(A)$), ou seja, $F_m(A)$ é gerado por estes elementos. Ainda estes elementos são linearmente independentes, pois caso

$$\sum k_j x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m} g_j(x_1, ..., x_m) = 0 \ \ mod(F_m \cap Id(A)),$$

então $\sum k_j x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m} g_j(x_1,...,x_m) \in Id(A)$, logo usando o raciocínio da demonstração da Proposição 3.1 (ii) obtemos $\sum k_j g_j(x_1,...,x_m) = 0$ e como

$$\{g_j(x_1,...,x_m) : j \geq 1\}$$

é uma base do espaço vetorial $B_m(A)$ o resultado segue.

(ii) A demonstração é similar, basta considerar a projeção

$$\Gamma_k \longrightarrow \frac{\Gamma_k}{\Gamma_k \cap Id(A)} = \Gamma_k(A).$$

Tomamos polinômios multilineares $\widetilde{f}_{jk}(x_1,...,x_k) \in \Gamma_k$, para serem as pré-imagens de $f_{jk}(x_1,...,x_k) \in \Gamma_k$ e escolhemos uma base multilinear para $\Gamma_k \cap Id(A)$, a saber, $\{v_{ks} : s \geq 1\}$, assim

$$\{\widetilde{f}_{jk}(x_1,...,x_k), v_{ks} : s \geq 1, j = 1,...,c_k^p(A)\}$$

forma um conjunto gerador multilinear para Γ_k. Portanto, fazendo isto para cada $0 \leq k \leq n$, temos que os polinômios

$$x_{p_1}...x_{p_{n-k}} f_{jk}(x_{q_1},...,x_{q_k}), \text{ para } j = 1, 2, ..., c_k^p(A),$$

com $p_1 < ... < p_{n-k}$ e $q_1 < ... < q_k$, geram P_n módulo $P_n \cap Id(A)$ e estes elementos são linearmente independentes. Logo formam uma base para $P_n(A)$.

■

Lembramos que F_m^n é a componente homogênea de grau n de F_m. Seja B_m^n o subespaço de todos os polinômios próprios homogêneos de grau n em F_m, isto é, $B_m^n = B \cap F_m^n$. Temos que B_m^n é um $GL_m(F)$-submódulo de F_m. Logo podemos decompor B_m^n em uma soma de submódulos irredutíveis. Temos ainda que é possível obtermos uma observação análoga à Observação 1.48 para os espaços de polinômios próprios B_m^n e Γ_n. Utilizaremos este fato no exemplo a seguir no qual apresentaremos a decomposição destes espaços para $n = 4$ e $n = 5$.

Exemplo 3.11 *A decomposição do S_4-módulo Γ_4 é dada por*

$$\Gamma_4 \cong M(3,1) \oplus M(2^2) \oplus M(2,1^2) \oplus M(1^4),$$

onde M_λ é o S_4-submódulo irredutível correspondente a $\lambda \vdash 4$.
De fato pelo comentário anterior basta mostrar que a decomposição do $GL_m(F)$-módulo B_m^4 é dada por

$$B_m^4 \cong W_m(3,1) \oplus W_m(2^2) \oplus W_m(2,1^2) \oplus W_m(1^4).$$

Agora mostraremos a decomposição de B_m^4 utilizando para isso os vetores de peso máximo e, para calcular as dimensões dos S_4-módulos irredutíveis utilizaremos a fórmula do gancho da Proposição 1.30. *Temos*

$$\dim\ M(3,1) = \dim\ M(2,1^2) = 3,$$

$$\dim\ M(2^2) = 2,\ \dim\ M(1^4) = 1.$$

Como

$$\dim \Gamma_4 = 9 = \dim\ M(3,1) + \dim\ M(2^2) + \dim\ M(2,1^2) + \dim\ M(1^4),$$

é suficiente obter em B_m^4 um vetor de peso máximo f'_λ para cada $\lambda = (3,1), (2^2), (2,1^2)$, (1^4). *Isto garantirá que o $GL_m(F)$-módulo*

$$W_m(3,1) \oplus W_m(2^2) \oplus W_m(2,1^2) \oplus W_m(1^4)$$

é um submódulo de B_m^4, portanto,

$$M(3,1) \oplus M(2^2) \oplus M(2,1^2) \oplus M(1^4)$$

será um S_4-submódulo de Γ_4. Como a dimensão deste S_4-submódulo é igual a dimensão de Γ_4, obtemos que esta decomposição coincide com a decomposição de Γ_4. Nas tabelas a seguir apresentamos os vetores de peso máximo f_λ de F_m^4, os homomorfismos de $GL_m(F)$-módulos de F_m^4 para B_m^4 e suas imagens (respectivos vetores de peso máximo f'_λ de B_m^4):

λ	*vetores de peso máximo (f_λ)*	*homomorfismos imagem de $x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}$*
(4)	x_1^4	
$(3,1)$	$St_2(x_1,x_2)x_1^2$	$\phi : [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]$
(2^2)	$St_2(x_1,x_2)St_2(x_1,x_2)$	$\varphi : [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}]$
$(2,1^2)$	$St_3(x_1,x_2,x_3)x_1$	$\theta : [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}]$
(1^4)	$St_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$	$\psi : [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}]$

imagens	$\overline{m}_\lambda$
	0
$\phi(f_{(3,1)}) = 2[x_1,x_2,x_1,x_1]$	*1*
$\varphi(f_{(2^2)}) = 2[x_1,x_2]^2$	*1*
$\theta(f_{(2,1^2)}) = 2[x_1,x_3][x_1,x_2] - 2[x_1,x_2][x_1,x_3]$	*1*
$\psi(f_{(1^4)}) = 4[x_1,x_2][x_3,x_4] + 4[x_3,x_4][x_1,x_2] + 4[x_3,x_1][x_2,x_4]$ $+4[x_2,x_4][x_3,x_1] + 4[x_2,x_3][x_1,x_4] + 4[x_1,x_4][x_2,x_3]$	*1*

De modo análogo verificamos que a decomposição de B_m^5 é a seguinte

$$B_m^5 \cong W_m(4,1) \oplus 2W_m(3,2) \oplus 2W_m(3,1^2) \oplus 2W_m(2^2,1) \oplus 2W_m(2,1^3),$$

pois as dimensões dos S_5-módulos irredutíveis são

$$\dim\ M(4,1) = \dim\ M(2,1^3) = 4,$$

$$\dim\ M(3,2) = \dim\ M(2^2,1) = 5,\ \dim\ M(3,1^2) = 6.$$

Além disso,

$$\dim \Gamma_5 = 44 = \dim\ M(4,1) + 2\dim\ M(3,2) + 2\dim\ M(3,1^2)$$

$$+2\dim\ M(2^2,1) + 2\dim\ M(2,1^3).$$

Note que neste caso enquanto para $\lambda = (4,1)$ precisamos apenas encontrar um vetor de peso máximo f'_λ em B_m^5 (o que pode ser feito de maneira análoga à acima), para as demais partições precisamos obter dois vetores de peso máximo linearmente independentes. Por exemplo, para $\lambda = (3,2)$ definimos os homomorfismos de $GL_m(F)$-módulos

$$\varphi_i : F_m^5 \to B_m^5, \text{para } i = 1, 2,$$

por

$$\varphi_1 : x_{i_1}...x_{i_5} \mapsto [x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_5}][x_{i_3}, x_{i_4}]$$

$$\varphi_2 : x_{i_1}...x_{i_5} \mapsto [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}]$$

e os polinômios

$$\varphi_1(f_{(3,2)}) = 4[x_2, x_1, x_1][x_2, x_1],\ \varphi_2(f_{(3,2)}) = 4[x_2, x_1][x_2, x_1, x_1]$$

são vetores de peso máximo linearmente independentes. Logo $2W_m(3,2) \subset B_m^5$. As considerações para os demais λ são análogas. Portanto temos a seguinte decomposição para Γ_5

$$\Gamma_5 \cong M(4,1) \oplus 2M(3,2) \oplus 2M(3,1^2) \oplus 2M(2^2,1) \oplus 2M(2,1^3).$$

3.4 Relação entre Codimensões Ordinárias e Codimensões Próprias

Apresentaremos nesta seção um resultado que relaciona as codimensões ordinárias e as codimensões próprias de uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito F. Usando este importante resultado verificaremos que uma PI-álgebra unitária tem codimensão ou exponencial maior ou igual a 2^{n-1} ou polinomial com coeficiente dominante racional.

Teorema 3.12 ***(Drensky e Regev, 1996)*** *Seja A uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito F, então $c_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k^p(A)$, para $n \geq 0$.*

Prova: No Teorema 3.10, para cada $k = 0, 1, ..., n$, considerando uma base

$$\{f_{jk}(x_1, ..., x_k) : j = 1, 2, ..., c_k^p(A)\}$$

de $\Gamma_k(A)$, construímos uma base de $P_n(A)$ formada pelos elementos $x_{p_1}...x_{p_{n-k}} f_{jk}(x_{q_1}, ..., x_{q_k})$, para $j = 1, 2, ..., c_k^p(A)$, $k = 0, 1, 2, ..., n$, com $p_1 < ... < p_{n-k}$ e $q_1 < ... < q_k$. Assim, para cada um dos $c_k^p(A)$ polinômios f_{jk} em $\Gamma_k(A)$, construímos $\binom{n}{k}$ polinômios da forma

$$x_{p_1}...x_{p_{n-k}} f_{jk}(x_{q_1}, ..., x_{q_k}), \text{ com } p_1 < ... < p_{n-k} \text{ e } q_1 < ... < q_k \text{ em } P_n(A),$$

uma vez que temos $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher as k variáveis que aparecem em f_{jk}.

Logo, para cada $k = 0, 1, ..., n$, temos $\binom{n}{k} c_k^p(A)$ polinômios, e portanto o número total de polinômios da base de $P_n(A)$ é dado por $c_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k^p(A)$. ■

Lema 3.13 ***(Drensky e Regev, 1996)*** *Se, para uma PI-álgebra unitária A, existe k tal que $c_{2k}^p(A) = 0$, então $c_m^p(A) = 0$ para todo $m \geq 2k$.*

Prova: Seja $c_{2k}^p(A) = 0$. Logo $\Gamma_{2k} = \Gamma_{2k} \cap Id(A)$ e assim $\Gamma_{2k} \subset Id(A)$. Considere $n > 2k$ e

$$u = [x_{\sigma(1)}, ...]...[..., x_{\sigma(n)}] \in \Gamma_n, \text{ para } \sigma \in S_n.$$

Se u é um produto de comutadores de peso 2, então n é par e

$$u = ([x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}]...[x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)}])[x_{\sigma(2k+1)}, x_{\sigma(2k+2)}]...[x_{\sigma(n-1)}, x_{\sigma(n)}]$$

pertence a $Id(A)$.

Suponhamos que $u \in \Gamma_n$ seja um produto de comutadores de peso no máximo t com $t > 2$ e que, para todo produto de comutadores u' com peso no máximo $t-1$ em Γ_v, com $2k \leq v \leq n$, temos $u' \in Id(A)$. Como u contém um comutador de peso maior que 2, ou seja,

$$u = [x_{\sigma(1)}, ...]...[x_{\sigma(p)}, x_{\sigma(p+1)}, x_{\sigma(p+2)}, ...]...[..., x_{\sigma(n)}],$$

renomeando o comutador $[x_{\sigma(p)}, x_{\sigma(p+1)}]$ por y obtemos um elemento $\widetilde{u}$ que é uma consequência de comutadores em Γ_{n-1}. Usando indução, temos $\widetilde{u} \in Id(A)$ e aplicando o endomorfismo $y \to [x_{\sigma(p)}, x_{\sigma(p+1)}]$, obtemos $u \in Id(A)$. ∎

Teorema 3.14 ***(Drensky e Regev, 1996)*** *Seja A uma PI-álgebra unitária. Então ou*

(i) $c_n(A) \geq 2^{n-1}$, *logo* $c_n(A)$ *é exponencial ou*

(ii) existe um inteiro $k \geq 0$ *e um número racional* q *tal que*

$$c_n(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1}),$$

e

$$\frac{1}{k!} \leq q \leq \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Prova:

(i) Supondo $c_{2l}^p(A) \neq 0$ para todo $l \geq 0$, então, pelo Teorema 3.12,

$$c_n(A) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} c_j^p(A) \geq \sum_{j\geq 0} \binom{n}{2j} c_{2j}^p(A) \geq \sum_{j\geq 0} \binom{n}{2j} = 2^{n-1}.$$

(ii) Agora se $c_{2l}^p(A) = 0$, para algum l, então pelo Lema 3.13, existe $k \geq 0$ de modo que $c_k^p(A) \neq 0$ e $c_m^p(A) = 0$ para todo $m > k$. Portanto, $c_n(A) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} c_j^p(A)$, e então

$$\begin{aligned} c_n(A) &= \binom{n}{k} c_k^p(A) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} c_j^p(A) \\ &= \frac{c_k^p(A)}{k!} n(n-1)...(n-k+1) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} c_j^p(A) \\ &= \frac{c_k^p(A)}{k!} n^k + \mathcal{O}(n^{k-1}) \cdot \end{aligned}$$

Como $c_k^p(A)$ é um inteiro temos $q = \dfrac{c_k^p(A)}{k!}$ um número racional. Pelo fato de $1 \leq c_k^p(A) \leq \dim\ \Gamma_k$ e pelo Corolário 3.7 segue que

$$c_n(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1}),$$

e

$$\frac{1}{k!} \leq q \leq \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

$\blacksquare$

Pelo Teorema anterior uma PI-álgebra unitária ou tem crescimento exponencial maior ou igual a 2^{n-1}, o qual não é polinomial, pois $2^{n-1} > an^t$ para todo $a, t > 0$ e n suficientemente grande ou tem crescimento polinomial.

Corolário 3.15 *Seja A uma álgebra associativa com unidade. Se a sequência de codimensão $c_n(A)$, $n = 0, 1, 2, ...$, é limitada por uma função polinomial, então $c_n(A)$ é um polinômio com coeficientes racionais.*

Prova: Segue da demonstração do Teorema 3.14 que, como $c_n(A)$ é limitada por uma função polinomial, então existe $k \geq 0$ de modo que $c_k^p(A) \neq 0$ e $c_m^p(A) = 0$, para todo $m > k$. Logo $c_n(A) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} c_j^p(A) = \sum_{j=0}^{k} n(n-1)...(n-j+1)\frac{c_j^p(A)}{j!}$. Expandindo todos os produtos e coletando o coeficiente q_j de cada n^j, para $j = 0, 1, ..., k$, vemos que $q_j \in \mathbb{Q}$, para todo j (já que $c_i^p(A)$ é um inteiro para todo i) e assim $c_n(A) = \sum_{j=0}^{k} q_j n^j$ é um polinômio com coeficientes racionais.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Álgebras de Matrizes de Crescimento Polinomial das Codimensões

Estudaremos álgebras associativas unitárias com crescimento polinomial das codimensões. Para qualquer grau fixo k, construiremos álgebras associativas cuja sequência de codimensões tem o maior e o menor crescimento polinomial possível de grau k, explicitando as identidades destas álgebras segundo os resultados demonstrados em [18].

4.1 Introdução

Seja A uma álgebra associativa sobre um corpo F e seja $c_n(A)$, $n = 1, 2, ...$, a sequência das codimensões. No caso em que A é uma PI-álgebra, Regev provou em [34], que $c_n(A)$ é limitada exponencialmente e se $carF = 0$, conforme vimos no Teorema 3.14, ou $c_n(A)$ cresce exponencial ou polinomialmente. Abordaremos o caso de crescimento polinomial. Neste caso provamos, no Teorema 3.14, que $c_n(A)$ se comporta assintoticamente como

$$c_n(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1}) \approx qn^k, \text{ quando } n \to \infty$$

para algum número racional q. Além disso, se A é uma álgebra unitária e $k > 1$,

$$\frac{1}{k!} \leq q \leq \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} \to \frac{1}{e}, \text{ quando } k \to \infty, \tag{4.1}$$

onde $e = 2,71...$ No caso de A ser uma álgebra não unitária, para qualquer $0 < q \in \mathbb{Q}$, é possível construir uma álgebra A tal que $c_n(A) \approx qn^k$, para um k conveniente [10].

O nosso objetivo é construir PI-álgebras que atingem o menor e o maior valor de q. Construiremos uma álgebra de matrizes triangulares superiores usando o valor $q = \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}\cdot$ Ainda provaremos que o limite inferior de (4.1) é obtido apenas no caso em que k é par. Para k ímpar o limite inferior é dado por $\frac{k-1}{k!}$ e construiremos uma álgebra com tal propriedade.

A técnica utilizada é baseada em cálculos da sequência de codimensões ordinárias e da sequência de codimensões próprias de uma PI-álgebra. Uma exposição detalhada de ambas foi feita no Capítulo 3.

Suponha agora que $c_n(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1})$ é um polinômio de grau k. No Teorema 3.14 provamos que o coeficiente dominante q é um número racional satisfazendo a desigualdade (4.1).

Primeiro melhoraremos o limite inferior de q para k ímpar.

Proposição 4.1 ***(Giambruno, La Mattina e Petrogradsky, 2007)*** *Seja A uma PI-álgebra unitária sobre um corpo F de característica zero. Se $c_n(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1})$, para algum inteiro ímpar $k > 1$ e um número racional q, então $q \geq \frac{k-1}{k!}\cdot$*

Prova: Como vimos na demonstração do item (ii) do Teorema 3.14 temos

$$c_n(A) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} c_i^p(A) = c_k^p(A)\binom{n}{k} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} c_i^p(A) \approx \frac{c_k^p(A)}{k!} n^k, \text{ quando } n \to \infty\cdot$$

Logo $q = \frac{c_k^p(A)}{k!}$ e precisamos calcular o menor valor possível de $c_k^p(A)$.

Sabemos que o grupo simétrico S_k age sobre o espaço vetorial $P_k = P_k(x_1, ..., x_k)$ dos polinômios multilineares de grau k, permutando as variáveis e P_k é isomorfo ao S_k-módulo regular, ou seja, $P_k \cong FS_k$. Pela Observação 1.45, P_k tem apenas dois submódulos unidimensionais correspondendo aos diagramas de Young $\lambda = (k)$ e $\lambda = (1^k)$. Os submódulos de dimensão 1 são gerados pelos vetores de peso máximo multilinearizados

$$f_k = \sum_{\pi \in S_k} x_{\pi(1)} ... x_{\pi(k)}$$

e

$$St_k = \sum_{\pi \in S_k} (-1)^{\pi} x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(k)},$$

correspondentes às partições $\lambda = (k)$ e $\lambda = (1^k)$, respectivamente. Claramente, $\Gamma_k \subset P_k$ é um S_k-submódulo e, como $\Gamma_k \cap Id(A)$ é invariante sobre permutações das variáveis, $\dfrac{\Gamma_k}{\Gamma_k \cap Id(A)}$ torna-se um S_k-módulo. Denotaremos seu caracter por $\chi_k^p(A)$ o qual é chamado o k- ésimo cocaracter próprio de A. Pela redutibilidade completa, $\chi_k^p(A)$ se decompõe em caracteres irredutíveis e assim podemos escrever

$$\chi_k^p(A) = \sum_{\lambda \vdash k} m_\lambda \chi_\lambda, \tag{4.2}$$

onde χ_λ é o S_k-caracter irredutível associado à partição λ e m_λ é a multiplicidade correspondente. Logo $c_k^p(A) = \sum_{\lambda \vdash k} m_\lambda \chi_\lambda(1)$.

Pode ser facilmente verificado usando a Proposição 3.8, que $f_k \notin \Gamma_k$, para todo k. Além disso, $St_k \notin \Gamma_k$, para k ímpar, e $St_k \in \Gamma_k$, para k par. Portanto, quando k é ímpar, o menor grau possível aparecendo em (4.2) com multiplicidade não nula deve ser $k-1$ pela Observação 1.45. Logo $q = \dfrac{c_k^p(A)}{k!} \geq \dfrac{k-1}{k!}$. ■

Na próxima seção provaremos, construindo álgebras convenientes, que o limite superior e o limite inferior de q são realmente obtidos para todo k.

4.2 PI-álgebras que atingem os limites

Nesta seção, para qualquer $k > 1$ fixo, construiremos álgebras associativas com unidade, cuja sequência de codimensões é dada assintoticamente pelo maior ou menor polinômio possível de grau k.

Seja $U_k = U_k(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $k \times k$ com entradas em F e entradas iguais na diagonal principal, isto é,

$$U_k = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & \alpha & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2k} \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & \alpha_{3k} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix} : \alpha,\ \alpha_{ij} \in F \right\}.$$

Note que no caso particular $k = 3$, U_k é a álgebra M_3 vista no Lema 2.10, a qual tem sequência de codimensões $\dfrac{n(n-1)+2}{2}$ e o T-ideal das identidades gerado por $[x, y, z]$ e $[x, y][z, w]$.

No próximo teorema provaremos que a álgebra U_k tem o maior crescimento polinomial possível de grau $k-1$, a saber, $c_n(U_k) \approx qn^{k-1}$, quando $n \to \infty$, onde $q = \sum_{j=2}^{k-1} \dfrac{(-1)^j}{j!}\cdot$ Seja $\theta_i = \dfrac{\dim\ \Gamma_i}{i!}$ e considere também $SU_k = SU_k(F)$ a álgebra das matrizes estritamente triangulares superiores sobre F.

Teorema 4.2 ***(Giambruno, La Mattina e Petrogradsky, 2007)***
Seja F um corpo infinito. Então:

(i) Uma base de identidades de U_k é dada pelo produto de comutadores de grau total k da forma

$$[x_1, ..., x_{a_1}][x_{a_1+1}, ..., x_{a_2}]...[x_{a_{r-1}+1}, ..., x_{a_r}], \tag{4.3}$$

com $a_r = k$, quando k é par, e pelos polinômios em (4.3) *mais o polinômio de grau $k+1$*

$$[x_1, x_2]...[x_k, x_{k+1}],$$

quando k for ímpar.

(ii)

$$c_n(U_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{n!}{(n-j)!}\theta_j \approx \theta_{k-1}n^{k-1},\ \textit{quando}\ n \to \infty.$$

Prova: Para $u_1, ..., u_t \in U_k$, escreva $u_i = \alpha_i E + v_i$, com $v_i \in SU_k$, $1 \le i \le t$, onde E denota a matriz identidade $k \times k$. Então

$$[u_1, ..., u_t] = [v_1, ..., v_t] \in (SU_k)^t,$$

e, pelo fato de SU_k ser um ideal nilpotente de índice de nilpotência k, ou seja, $(SU_k)^k = 0$, segue que todos os polinômios em (4.3) produzem identidades de U_k. Se k é ímpar, obtemos que $[x_1, x_2]...[x_k, x_{k+1}]$ é também uma identidade de U_k.

Seja agora $f \in Id(U_k)$. Como vimos na Proposição 3.1, as identidades polinomiais de uma álgebra unitária sobre um corpo infinito seguem dos polinômios próprios, logo podemos assumir que f é próprio. Além disso, sabe-se que $x_1...x_k$ é uma base das identidades de SU_k ([30], [36]). Portanto, em particular, SU_k não satisfaz qualquer identidade de grau menor que k. Se f é uma identidade de $SU_k \subset U_k$, então o grau de f é maior ou igual a k. Por outro lado, é claro que um comutador de peso $m > 2$ é uma consequência de qualquer comutador de peso menor que m. Assim um produto de comutadores de peso total $m \geq k$ é uma consequência de produtos de comutadores de peso total menor que m e, portanto, f resulta dos polinômios em (4.3) ou do polinômio $[x_1, x_2]...[x_k, x_{k+1}]$. Isto prova a primeira afirmação.

De (i) se $f \in \Gamma_t$, para $t < k$, então f não é uma identidade de U_k. Logo, para qualquer $t < k$, temos $\Gamma_t \cap Id(U_k) = \{0\}$ e assim $c_t^p(U_k) = \dim_F \Gamma_t = t!\theta_t$. Por outro lado, se $t \geq k$ então $\Gamma_t \cap Id(U_k) = \Gamma_t$ e assim $c_t^p(U_k) = 0$. Logo

$$c_n(U_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} c_i^p(U_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} i!\theta_i = \frac{n!}{(n-k+1)!}\theta_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{n}{i} i!\theta_i$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-k+1)!}{(n-k+1)!}\theta_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \binom{n}{i} i!\theta_i$$

$$= n^{k-1}\theta_{k-1} + \mathcal{O}(n^{k-2}) \approx n^{k-1}\theta_{k-1},$$

quando $n \to \infty$.

■

A importância de U_k é mostrada a seguir.

Teorema 4.3 ***(Giambruno, La Mattina e Petrogradsky, 2007)***
Seja A uma álgebra unitária sobre um corpo infinito F tal que $c_n(A) \approx qn^k$, quando $n \to \infty$. Então $Id(A) \supseteq Id(U_{k+1})$.

Prova: Por hipótese, $c_n(A) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} c_i^p(A)$ e $c_{k+j}^p(A) = 0$, para todo $j \geq 1$. Como $0 = c_{k+j}^p(A) = \dim \dfrac{\Gamma_{k+j}}{\Gamma_{k+j} \cap Id(A)}$ temos $\Gamma_{k+j} = \Gamma_{k+j} \bigcap Id(A)$ e, portanto, $\Gamma_{k+j} \subseteq Id(A)$, para $j \geq 1$. Pelo Teorema 4.2, $Id(U_{k+1})$ é gerado por Γ_{k+1} e, no caso k par, também por $[x_1, x_2]...[x_{k+1}, x_{k+2}] \in \Gamma_{k+2}$, assim obtemos $Id(U_{k+1}) \subseteq Id(A)$.

■

Agora retornamos ao problema de construir álgebras de crescimento polinomial das codimensões atingindo o menor valor possível para q.

Suponha $k \geq 3$. Considere $J = \sum_{i=1}^{k-1} e_{i,i+1} \in U_k$ a matriz com entradas não nulas iguais a 1 somente na diagonal imediatamente acima da diagonal principal. Para cada $l \in \{1, 2, ..., k-1\}$ defina a subálgebra de U_k como segue:

$$N_{k,l} = N_{k,l}(F) = span_F\{E, J, J^2, ..., J^{k-l-1}; e_{12}, e_{13}, ..., e_{1k};\ e_{ij}\ :\ j - i \geq k - l\}.$$

O caso seguinte

$$N_k = N_{k,1} = span_F\{E, J, J^2, ..., J^{k-2}; e_{12}, e_{13}, ..., e_{1k}\} = N_{k,2}$$

é de interesse especial, pois esta álgebra é gerada por $\{E, J, e_{12}\}$. Em geral temos a seguinte inclusão estrita:

$$N_{k,1} = N_{k,2} \subset .... \subset N_{k,k-1} = U_k.$$

Exemplo 4.4 *Consideremos $k = 6$ e $1 \leq l \leq k - 1 = 5$. As subálgebras $N_{k,l}$ de U_6 são:*

$$N_{6,1} = span_F\{E, J, J^2, J^3, J^4; e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}\},$$

onde $J = \sum_{i=1}^{5} e_{i,i+1} = e_{12} + e_{23} + e_{34} + e_{45} + e_{56},\ J^2 = e_{13} + e_{24} + e_{35} + e_{46},\ J^3 = e_{14} + e_{25} + e_{36},\ J^4 = e_{15} + e_{26}$ *e*

$$N_{6,2} = span_F\{E, J, J^2, J^3; e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{26}\},$$

$$N_{6,3} = span_F\{E, J, J^2; e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{25}, e_{26}, e_{36}\},$$

$$N_{6,4} = span_F\{E, J; e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{35}, e_{36}, e_{46}\},$$

$$N_{6,5} = span_F\{E; e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{34}, e_{35}, e_{36}, e_{45}, e_{46}, e_{56}\}.$$

Assim $$N_{6,1} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{11} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} : a_{ij} \in F,\ 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 6 \right\},$$

$$N_{6,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{11} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} : a_{ij} \in F,\ 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq 6 \right\},$$

$$N_{6,3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{11} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{23} & a_{24} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} : a_{ij} \in F,\ 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 6 \right\},$$

$$N_{6,4} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{11} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{23} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{23} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} : a_{ij} \in F,\ 1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 6 \right\}$$

e

$$N_{6,5} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & a_{11} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix} : a_{ij} \in F,\ 1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 6 \right\} = U_6.$$

Portanto $N_{6,1} = N_{6,2} \subset N_{6,3} \subset N_{6,4} \subset N_{6,5} = U_6$.

Mostraremos que as álgebras $N_k, N_{k,3}, ..., N_{k,k-2}$ têm assintoticamente o mesmo crescimento das codimensões o qual é diferente daquele de $N_{k,k-1} = U_k$, para $k > 4$.

Exemplo 4.5 *Descreveremos os elementos típicos de alguns comutadores na álgebra* $N_{k,l}$.
Sejam $A, B, C, D, E \in N_{6,1} = N_{6,2}$. *Assim,*

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \alpha_{ij} \in F,\ i = 1,\ 3 \leq j \leq 6,$$

$$[A, B, C] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_{14} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \beta_{ij} \in F,\ i = 1,\ 4 \leq j \leq 6,$$

$$[A, B, C, D] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{15} & \gamma_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_{ij} \in F,\ i = 1,\ j = 5, 6,$$

$$[A, B, C, D, E] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \delta_{16} \in F.$$

Sejam $A, B, C, D, E \in N_{6,3}$. *Logo*

$$[A,B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \alpha_{ij} \in F,\ i = 1,2,\ 3 \leq j \leq 6,$$

$$[A,B,C] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_{14} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \beta_{ij} \in F,\ i = 1,\ 4 \leq j \leq 6,$$

$$[A,B,C,D] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{15} & \gamma_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_{ij} \in F,\ i = 1,\ j = 5,6,$$

$$[A,B,C,D,E] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \delta_{16} \in F.$$

Sejam $A, B, C, D, E \in N_{6,4}$. *Portanto,*

$$[A,B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \alpha_{ij} \in F,\ 1 \leq i \leq 3,\ 3 \leq j \leq 6,$$

$$[A,B,C] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_{14} & \beta_{15} & \beta_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \beta_{ij} \in F,\ i = 1,2,\ 4 \leq j \leq 6,$$

$$[A,B,C,D] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{15} & \gamma_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \gamma_{ij} \in F,\ i = 1,\ j = 5,6,$$

$$[A, B, C, D, E] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \delta_{16} \in F.$$

Teorema 4.6 ***(Giambruno, La Mattina e Petrogradsky, 2007)***
Sejam l, k inteiros positivos tais que $1 \leq l \leq k-2, k > 4$. Se F é um corpo infinito, então:

(i) $N_{k,l}$ e U_k geram variedades diferentes.

(ii) Quando $n \to \infty$, o comportamento assintótico das codimensões de $N_{k,l}$ é dado por

$$c_n(N_{k,l}) \approx \frac{k-2}{(k-1)!} n^{k-1}.$$

Prova: Como $N_{k,l}$ é uma subálgebra de U_k, $c_n(N_{k,l}) \leq c_n(U_k)$. Logo pelo Teorema 4.2 $c_n^p(N_{k,l}) = 0$, para todo $n \geq k$ e assim precisamos calcular $c_{k-1}^p(N_{k,l})$. Para este fim afirmamos que o polinômio $[x_1, ..., x_{k-1}]$ não é uma identidade de $N_{k,l}$.

De fato, substituindo $x_1 = e_{12}, x_2 = ... = x_{k-1} = J$ no comutador obtemos $[e_{12}, J, ..., J] = e_{1k} \neq 0$. Por outro lado, qualquer produto de comutadores de Lie

$$[x_1, ..., x_{r_1}][x_{r_1+1}, ..., x_{r_2}]...[x_{r_{t-1}+1}, ..., x_{r_t}] \tag{4.4}$$

de grau total $r_t = k-1$ e contendo $t \geq 2$ comutadores é uma identidade de $N_{k,l}$.

Com efeito considere o polinômio $[x_1, x_2, ..., x_r]$, onde $r \geq 2$. Por indução sobre r prova-se que o resultado de todas as substituições por elementos de $N_{k,l}$ no comutador $[x_1, x_2, ..., x_r]$ está contido no espaço vetorial $span_F\{e_{1,r+1}, e_{1,r+2}, ..., e_{1k}; e_{ij} : j-i \geq k-l+r-1\}$.

Note que a primeira parte deste conjunto contém matrizes cujas entradas não nulas estão sobre ou acima da r-ésima diagonal acima da diagonal principal, enquanto a segunda parte está sobre ou acima da diagonal $r + (k-l-1) \geq r+1$.

Ao considerarmos a matriz resultante da avaliação dos elementos da álgebra $N_{k,l}$ no produto (4.4), vemos que um elemento não nulo nesta matriz só poderá ser obtido a partir do produto dos elementos das diagonais $r_1, (r_2 - r_1), ..., (r_t - r_{t-1})$ das matrizes obtidas dos comutadores de pesos $r_1, r_2, ..., r_t$, respectivamente, pois $r_t = k-1$. Mas estes elementos pertencem à primeira linha e, portanto, como $r_i \geq 2$ e $t \geq 2$, concluímos que seu produto nos dá o elemento nulo. Logo (4.4) é uma identidade de $N_{k,l}$, que não é uma identidade de U_k, pelo Teorema 4.2. Obtemos que Γ_{k-1} é gerado módulo $Id(N_{k,l})$ pelos comutadores

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{k-1}}] \tag{4.5}$$

de comprimento $k-1$. Afirmamos que podemos tomar $i_1 > i_2 \leq ... \leq i_{k-1}$.

Para este fim provaremos que $N_{k,l}$ satisfaz as identidades

$$[[x_1, ..., x_r], [x_{r+1}, x_{r+2}], x_{r+3}, ..., x_{k-1}],\ r \geq 2. \tag{4.6}$$

De fato, pelo argumento acima, qualquer avaliação dos dois primeiros comutadores por elementos de $N_{k,l}$ produz matrizes cujas entradas não nulas estão sobre ou acima da r-ésima diagonal e da segunda diagonal acima da diagonal principal, respectivamente, enquanto os $k-r-3$ fatores restantes são matrizes cujas entradas não nulas estão no mínimo sobre a primeira diagonal, pois a diagonal principal é central. Somente o caso extremo poderia ser um produto não nulo, mas neste caso os dois primeiros fatores pertencem à primeira linha e conseguimos anular.

As identidades (4.6) nos permitem permutar os elementos $x_{i_3}, ..., x_{i_{k-1}}$ no comutador (4.5) de um modo arbitrário. Também, podemos fazer x_{i_2} mínimo entre $\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}\}$ usando a identidade de Jacobi.

Portanto, os polinômios $[x_i, x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_{k-1}]$, $i = 2, 3, ..., k-1$, onde o símbolo $\widehat{x}_i$ significa que a variável x_i está omitida, geram Γ_{k-1} módulo $Id(N_{k,l})$.
Para mostrar que estes elementos são linearmente independentes consideraremos

$$f = \sum_{j=2}^{k-1} \alpha_j [x_j, x_1, x_2, ..., \widehat{x}_j, ..., x_{k-1}] = 0,\ \text{módulo } Id(N_{k,l}),\ \text{com } \alpha_j \in F.$$

Fazendo a seguinte substituição $x_2 = e_{12}$, $x_1 = x_3 = ... = x_{k-1} = J$ obtemos $f(J, e_{12}, J, ..., J) = \alpha_2 [e_{12}, J, ..., J] = \alpha_2 e_{1\,(k-1)+1} = 0$, e portanto $\alpha_2 = 0$.

Prosseguindo de modo análogo obtemos $\alpha_i = 0$, para $3 \leq i \leq k-1$. Assim os polinômios $[x_i, x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_{k-1}]$, $i = 2, 3, ..., k-1$, formam uma base para Γ_{k-1} módulo $Id(N_{k,l})$. Logo $c^p_{k-1}(N_{k,l}) = k-2$ e

$$c_n(N_{k,l}) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} c^p_j(N_{k,l}) = \binom{n}{k-1} c^p_{k-1}(N_{k,l}) + \sum_{j=0}^{k-2} \binom{n}{j} c^p_j(N_{k,l})$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-k+2)}{(k-1)!}(k-2) + \sum_{j=0}^{k-2} \binom{n}{j} c^p_j(N_{k,l})$$

$$= \frac{k-2}{(k-1)!} n^{k-1} + \mathcal{O}(n^{k-2}).$$

Portanto, quando $n \to \infty$, $c_n(N_{k,l}) \approx \dfrac{k-2}{(k-1)!} n^{k-1}$.

■

A seguir descrevemos explicitamente as identidades de $N_k = N_{k,1} = N_{k,2}$. Lembre que definimos $N_{k,l}$ somente para $k \geq 3$.

Teorema 4.7 ***(Giambruno, La Mattina e Petrogradsky, 2007)***
Sejam $k \geq 3$ e F um corpo de característica zero. Então:

(i) Uma base das identidades de N_k é dada pelos polinômios

$$[x_1, ..., x_k], [x_1, x_2][x_3, x_4]. \tag{4.7}$$

(ii) O comportamento assintótico das codimensões $c_n(N_k)$, quando $n \to \infty$, é dado por

$$c_n(N_k) = 1 + \sum_{j=2}^{k-1} (j-1) \binom{n}{j} \approx \frac{k-2}{(k-1)!} n^{k-1}.$$

Prova: É claro que $[N_k, N_k] \subseteq span\{e_{13}, e_{14}, ..., e_{1k}\}$, pela demonstração do Teorema 4.6. Assim $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ é uma identidade de N_k. A outra identidade em (4.7) segue do Teorema 4.2, pois N_k é uma subálgebra de U_k.

Seja agora f uma identidade de N_k. Como N_k é uma álgebra com unidade, pela Proposição 3.1, podemos tomar f próprio multilinear. Após reduzir o polinômio

f módulo as identidades em (4.7), pela demonstração do Teorema 4.6, f pode ser escrito como uma combinação linear de comutadores normados à esquerda de peso digamos $s \leq k-1$, isto é,

$$f = \sum_{j=2}^{s} \alpha_j [x_j, x_1, x_2, ..., \widehat{x}_j, ..., x_s], \text{ com } \alpha_j \in F.$$

Como $f \in Id(N_k)$ substituindo $x_2 = e_{12}$, $x_1 = J$, e $x_3 = ... = x_s = J$ obtemos $0 = f(J, e_{12}, J, ..., J) = \alpha_2[e_{12}, J, ..., J] = \alpha_2 e_{1\ s+1}$, e assim $\alpha_2 = 0$ (já que $e_{1\ s+1} \neq 0$). De modo análogo obtemos $\alpha_j = 0$, para $j = 3, ..., s$. Logo uma base das identidades de N_k é dada pelos polinômios (4.7).

Note que os argumentos acima também provam que os polinômios $[x_i, x_1, ..., \widehat{x}_i, ..., x_s]$, onde $i = 2, 3, ..., s$ formam uma base de polinômios próprios multilineares de grau s módulo $Id(N_k)$. Logo $c_s^p(N_k) = s-1$, para $s = 2, ..., k-1$, e $c_n(N_k) = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} c_j^p(N_k) = \binom{n}{0} c_0^p(N_k) + \binom{n}{1} c_1^p(N_k) + \sum\limits_{j=2}^{k-1} \binom{n}{j} c_j^p(N_k) = 1 + \sum\limits_{j=2}^{k-1} (j-1)\binom{n}{j}$, pois $c_0^p(N_k) = 1$, $c_1^p(N_k) = 0$ e $c_j^p(N_k) = j-1$, para $j = 2, ..., k-1$. Assim

$$c_n(N_k) = (k-2)\binom{n}{k-1} + \sum_{j=2}^{k-2} (j-1)\binom{n}{j} + 1 = \frac{k-2}{(k-1)!} n^{k-1} + \mathcal{O}(n^{k-2})\cdot$$

E consequentemente, quando $n \to \infty$, temos

$$c_n(N_k) \approx \frac{k-2}{(k-1)!} n^{k-1}.$$

■

Vamos introduzir agora a álgebra G_{2k} que também é uma álgebra de dimensão finita, obteremos uma base para o T-ideal desta e verificaremos que $c_n(G_{2k})$ tem o menor crescimento polinomial possível de grau $2k$, a saber, $c_n(G_{2k}) \approx \frac{1}{(2k)!} n^{2k}$, quando $n \to \infty\cdot$

Seja G_{2k} a álgebra de Grassmann com unidade sobre um espaço vetorial de dimensão $2k$ sobre um corpo F de característica diferente de 2. Lembre que

$$G_{2k} = \langle 1, e_1, ..., e_{2k} \ : \ e_i e_j = -e_j e_i \rangle$$

e $G_{2k} = span_F\{e_{i_1} ... e_{i_r} \ : \ 0 \leq i_1 < ... < i_r \leq 2k\}$. Podemos decompor G_{2k} da seguinte forma $G_{2k} = G_{2k}^{(0)} \oplus G_{2k}^{(1)}$, onde $G_{2k}^{(0)}$ e $G_{2k}^{(1)}$ são os subespaços gerados pelos monômios nos e_i's de graus par e ímpar, respectivamente.

Teorema 4.8 ***(Giambruno, La Mattina e Petrogradsky, 2007)***
Seja F um corpo de característica zero. Então:

(i) Uma base de identidades da álgebra G_{2k} é dada pelos polinômios

$$[x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2]...[x_{2k+1}, x_{2k+2}]. \tag{4.8}$$

(ii) $c_n(G_{2k}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{2j} \approx \frac{1}{(2k)!} n^{2k}$, *quando* $n \to \infty\cdot$

Prova: É facil ver que os polinômios em (4.8) são identidades para G_{2k}, pois $[x_1, x_2, x_3]$ gera o T-ideal da álgebra de Grassmann de dimensão infinita e quando substituímos elementos de G_{2k} em $[x_1, x_2]...[x_{2k+1}, x_{2k+2}]$ obtemos um monômio de grau $2k + 2$.

Seja agora f uma identidade de G_{2k}. Como F é um corpo de característica zero, pela Proposição 3.1, podemos assumir f um polinômio próprio multilinear. Após reduzir o polinômio f módulo as identidades em (4.8) obtemos que f é um produto de comutadores de Lie de peso 2. Pode ser verificado que $[y, x][y, z] \equiv 0$ é uma consequência de $[x_1, x_2, x_3] \equiv 0$. Aplicando o processo de multilinearização ao polinômio $[y, x][y, z] \equiv 0$, obtemos $[y_2, x][y_1, z] \equiv -[y_1, x][y_2, z]$ e isto juntamente com $[x_1, x_2, x_3]$ diz que o polinômio f pode ser escrito como um produto de comutadores de Lie de peso 2 ordenados, isto é, $f = \alpha[x_1, x_2]...[x_{2j+1}, x_{2j+2}]$, com $j < k$ (ver [16, Teorema 4.1.8]). Como $f \in Id(G_{2k})$, substituindo $x_i = e_i$, $i = 1, ..., 2j + 2$, obtemos $0 = f(e_1, e_2, ..., e_{2j+2}) = \alpha[e_1, e_2]...[e_{2j+1}, e_{2j+2}] = \alpha 2^{j+1} e_1 e_2 ... e_{2j+1} e_{2j+2}$ e assim $\alpha = 0$ (pois $e_1 e_2 ... e_{2j+1} e_{2j+2} \neq 0$). Portanto (i) está provado.

A fim de concluirmos (ii) é suficiente notar que os argumentos acima provam que, para $j \leq k$, o polinômio

$$[x_1, x_2]...[x_{2j-1}, x_{2j}]$$

é uma base de polinômios próprios multilineares de grau $2j$ módulo $Id(G_{2k})$. Assim $c^p_{2j}(G_{2k}) = 1$ e $c^p_{2j+1}(G_{2k}) = 0$, para $j = 1, ..., k$. Portanto, obtemos $c_n(G_{2k}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{2j}$.

■

Uma classificação dos T-ideais cujo crescimento das codimensões é no máximo linear foi feita no Capítulo 2. O teorema a seguir nos diz que podemos classificar, a menos de PI-equivalência, as PI-álgebras com unidade cuja sequência de codimensões tem crescimento no máximo cúbico.

Teorema 4.9 ***(Giambruno, La Mattina e Petrogradsky, 2007)*** *Seja A uma álgebra unitária sobre um corpo de característica zero. Se $c_n(A) \leq an^3$, para algum $a \geq 1$, então $Id(A) = Id(F)$ ou $Id(A) = Id(U_3)$ ou $Id(A) = Id(U_4)$.*

Prova: Seja A uma PI-álgebra tal que $c_n(A) \approx qn^k$, para $k \leq 3$. Como $c_0^p(A) = 1, c_1^p(A) = 0$ e $c_2^p(A) \leq 1$, pelo Teorema 3.12, obtemos $c_n(A) = 1$, se $k = 0$, e $c_n(A) = 1 + \binom{n}{2}$ se $k = 2$. Note que A não pode ter crescimento linear. No caso $k = 3$, pela demonstração da Proposição 4.1, o menor grau possível aparecendo na decomposição $\chi_3^p(A) = m_{(1^3)}\chi_{(1^3)} + m_{(2,1)}\chi_{(2,1)} + m_{(3)}\chi_{(3)}$ com multiplicidade não nula deve ser $k - 1 = 2$. Como associadas às partições $\lambda = (1^3)$ e $\lambda = (3)$ temos submódulos unidimensionais, segue que $m_{(1^3)} = m_{(3)} = 0$. Assim $\chi_3^p(A) = m_{(2,1)}\chi_{(2,1)}$. Por outro lado, $c_3^p(A) = \chi_3^p(A)(1) \leq \dim \Gamma_3 = 2$ e $\chi_{(2,1)}(1) = 2$, portanto $\chi_3^p(A) = \chi_{(2,1)}$ e $c_3^p(A) = 2$.

Temos $c_2^p(A) \neq 0$, pois caso contrário, pelo Lema 3.13, deveríamos ter $c_m^p(A) = 0$, para todo $m \geq 2$, o que não ocorre, já que $c_3^p(A) = 2$, assim obtemos

$$c_n(A) = 1 + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{3}.$$

Logo se $k = 0$, $Id(A) = Id(F) = Id(U_1)$. Se $k = 2$, como $c_3^p(A) = c_4^p(A) = 0$, obtemos que $[x_1, x_2, x_3] \equiv 0$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv 0$ são identidades de A. Assim, $Id(U_3) \subseteq Id(A)$ e, como as duas álgebras têm o mesmo crescimento das identidades multilineares, temos a igualdade $Id(U_3) = Id(A)$.

Se $k = 3$, $c_4^p(A) = 0$. Portanto $\Gamma_4 \subseteq Id(A)$ e, como Γ_4 é uma base das identidades de U_4, obtemos que $Id(U_4) \subseteq Id(A)$. Como estes T-ideais têm o mesmo crescimento também neste caso temos $Id(U_4) = Id(A)$. ■

4.3 Considerações Finais

Uma classificação dos T-ideais $Id(A)$ de modo que $c_n(A) \approx qn^k$, para $k \geq 4$, parece ser inatingível até o momento.

Para uma álgebra A com unidade tal que $c_n(A) \approx qn^k$, sabemos que $\frac{r}{k!} \leq q \leq \sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}$, onde $r = 1$ ou $r = k - 1$ se k é par ou ímpar, respectivamente.

Um problema interessante neste contexto é determinar todos os valores possíveis de q para $k \geq 2$. Pela demonstração do Teorema 4.9, já sabemos a resposta quando $k = 2, 3$. Para $k = 4$, temos $\frac{1}{24} \leq q \leq \frac{9}{24}$ e o S_4-caracter de Γ_4 tem a seguinte decomposição

$$\chi(\Gamma_4) = \chi_{(3,1)} + \chi_{(2^2)} + \chi_{(2,1^2)} + \chi_{(1^4)}$$

(ver Exemplo 3.11). Como $\chi_{(3,1)}(1) = \chi_{(2,1^2)}(1) = 3$, $\chi_{(2^2)}(1) = 2$, $\chi_{(1^4)}(1) = 1$, é fácil ver que q pode assumir todos os valores possíveis $q = \frac{i}{24}$, com $i = 1, 2, ..., 9$. Não é verdade em geral que q pode assumir todos os valores possíveis $q = \frac{i}{k!}$, para $i = k-1, k, ..., k!\left(\sum_{j=2}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}\right)$, para k ímpar. De fato, considerando a decomposição de Γ_5 dada no Exemplo 3.11, é possível verificar que q não pode tomar alguns dos valores entre $\frac{4}{5!}$ e $\frac{44}{5!}$, como por exemplo $\frac{7}{5!}$.

Referências Bibliográficas

[1] S. A. Amitsur and J. Levitzki. *Minimal identities for algebra.* Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 449-463.

[2] A. Berele. *Homogeneous polynomial identities.* Israel Journal of Mathematics **42** (1982) 258-272.

[3] A. Berele and A. Regev. *Applications of hook diagrams to P.I.algebras.* Journal of Algebra **82** (1983) 559-567.

[4] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Interscience Publishers, New York, 1962.

[5] M. Dehn. *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme.* Math. Ann. **85** (1922) 184-194.

[6] V. Drensky. *Representation of the symmetric group and varieties of linear algebras.* Mat. Sb. **115** (1981) 98-115 (in Russian), English translation in: Math. USSR Sb. **43** (1981) 85-101.

[7] V. Drensky. *A minimal basis for the identities of a second order matrix algebra over a field of characteristic 0.* Algebra and Logic **20** (1981) 188-194.

[8] V. Drensky. *Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras.* Journal of Algebra **91** (1984) 1-17.

[9] V. Drensky. *Relations for the cocharacter sequences of T-ideals.* Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 2(Novosibirsk, 1989), Contemporary Mathematics, **131**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1992) 285-300.

[10] V. Drensky and A. Regev. *Exact asymptotic behaviour of the codimensions of some P.I.algebras.* Israel Journal of Mathematics **96** (1996) 231-242.

[11] V. Drensky. *Free Algebras and PI-algebras.* Springer-Verlag, Singapore, 2000.

[12] A. Giambruno and M. Zaicev. *On codimension growth of finitely generated associative algebras*. Adv. Math. **140** (1998) 145-155.

[13] A. Giambruno and M. Zaicev. *Exponential codimension growth of PI-algebras: an exact estimative*. Adv. Math. **142** (1999) 221-243.

[14] A. Giambruno and M. Zaicev. *A characterization of algebras with polinomial growth of the codimensions*. Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2000) 59-67.

[15] A. Giambruno and M. Zaicev. *Asymptotics for the standard and the capelli identities*. Israel Journal of Mathematics **135** (2003) 125-145.

[16] A. Giambruno and M. Zaicev. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. Mathematical Surveys and Monographs, Amer. Math. Soc. **122**, Providence R. I., 2005.

[17] A. Giambruno and D. La Mattina. *PI-algebras with slow codimension growth*. Journal of Algebra **284** (2005) 371-391.

[18] A. Giambruno and D. La Mattina and V. M. Petrogradsky. *Matrix algebras of polinomial codimension growth*. Israel Journal of Mathematics **158** (2007) 367-378.

[19] I. N. Herstein. *Topics in algebra*. John Wiley and Soons, 2nd edition, 1975.

[20] G. James and A. Kerber. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1981.

[21] M. Hall. *Projective planes*. Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943) 229-277.

[22] G. James and M. Liebeck. *Representations and Characteres of Groups*. Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 1993.

[23] N. Jacobson. *PI-Algebras. An introduction*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **441** Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[24] I.Kaplansky. *Rings with a polynomial identities*. Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948) 496-500.

[25] A. R. Kemer. *T-ideals with power growth of the codimensions are Specht* (Russian). Sibirskii Matematicheskii Zhurnal **19** (1978) 54-69; English translation: Siberian Mathematical Journal **19** (1978) 37-48.

[26] A. R. Kemer. *Varieties of finite rank*. Proc. 15th All the Union Algebraic Conf., Krasnoyarsh **2** (1979) (in Russian).

[27] A. R. Kemer. *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*. Math. USSR, Izv. **25** (1985) 359-374.

[28] A. R. Kemer. *Ideals of identities of associative algebras*, Trans. Math. Monogr., **87**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1988.

[29] D. Krakowski and A. Regev. *The polynomial identities of the Grassmann algebra*. Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973) 429-438.

[30] Yu. N. Malcev. *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices* (Russian). Algebra i Logika **10** (1971) 393-400; English translation: Algebra and Logic **10** (1971).

[31] J. B. Olson and A. Regev. *Applications of representation theory to PI-algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), 253-257; Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1976) 100-111.

[32] C. Procesi. *Rings with polynomial identities*. Pure and Applied Mathematics, **17**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[33] Yu. P. Razmyslov. *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field characteristic zero*. Algebra and Logic **12** (1973) 47-63.

[34] A. Regev. *Existence of identities in $A \otimes B$*. Israel Journal of Mathematics **11** (1972) 131-152.

[35] L. H. Rowen. *Polynomial Identities in Ring Theory*. Academic Press, New York, 1980.

[36] P. N. Siderov. *A basis for identities of an algebra of triangular matrices over an arbitrary field* (Russian), Pliska Studia Mathematica Bulgarica **2** (1981) 143-152.

[37] A. I. Shirshov. *On rings with polynomial identities*. Amer. Math. Soc. Transl. **119** (2) 133-139 (1983).

[38] A. C. Vieira and S.M. Jorge. *Representações do grupo simétrico e aplicações a álgebras com identidades polinomias*. XIX Escola de Álgebra, 2006.

[39] A. C. Vieira and S.M. Jorge. *On minimal varieties of quadratic growth*. Linear Algebra an its Appl. **418** (2006) 925-938.

[40] A. C. Vieira, V. R. da Silva and S.M. Jorge. *Combinatorial aspects in the computation of proper multiplicities*. To appear.

[41] W. Wagner. *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*. Math. Ann. **113** (1936) 528-567.