

Inflação C3smica e
Teorias Escalar-Tensoriais da Gravita33o

Marcos Carvalho Brum de Oliveira
Orientador: Ioav Waga

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



INFLAÇÃO COSMICA E
TEORIAS ESCALAR-TENSORIAIS DA GRAVITAÇÃO

Marcos Carvalho Brum de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Ioav Waga

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2010

I 79 Oliveira, Marcos Carvalho Brum de

Inflação Cósmica e Teorias Escalar-Tensoriais da Gravitação
2010.

xiii, 57f.: il. ; 29,7cm.

Orientador: Ioav Waga

Dissertação (mestrado) - UFRJ / Instituto de Física / Programa de Pós-graduação em Física , 2010.

Referências Bibliográficas: f. 54-57.

1. Cosmologia. 2. Inflação Cósmica. 3. Gravitação Escalar-Tensorial. I. Waga, Ioav. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Física, Programa de pós-graduação em Física. III. Inflação Cósmica e Teorias Escalar-Tensoriais da Gravitação.

Resumo

Inflação Cósmica e Teorias Escalar-Tensoriais da Gravitação

Marcos Carvalho Brum de Oliveira
Orientador: Ioav Waga

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Inflação Cósmica é uma hipótese acerca do Universo primordial cuja motivação é explicar a homogeneidade e a isotropia do Universo, ao mesmo tempo que fornece uma explicação para a origem das flutuações na densidade de energia que geraram estruturas em largas escalas, como galáxias e seus aglomerados. Os modelos inflacionários existentes, para que sejam consistentes, requerem certas condições que, quando comparadas às condições impostas pelas observações, deixam uma faixa muito estreita, dentro da qual os cenários são viáveis. Na maioria dos casos, dificilmente esta faixa é fisicamente realizável.

É questionado se a teoria da Relatividade Geral é a teoria final de gravitação. Uma das ideias que nortearam Einstein na formulação desta teoria é que a inércia de um corpo é determinada pela sua interação com todos os outros corpos do Universo. Esta ideia, contudo, não está completamente incorporada à teoria de Einstein. Uma maneira de realizar isto é substituir a constante de acoplamento gravitacional por um campo escalar dinâmico, determinado pela distribuição de energia no Universo. As teorias que buscam realizar isso são as chamadas teorias Escalar-Tensoriais da Gravitação.

Este trabalho se propõe a analisar a possibilidade de formular um cenário inflacionário, nos moldes do que hoje é chamado "Velha Inflação", dentro do contexto de gravitação escalar-tensorial.

Palavras-chave: Cosmologia. Inflação Cósmica. Gravitação Escalar-Tensorial.

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2010

Abstract
Cosmic Inflation and
Scalar-Tensor Theories of Gravitation

Marcos Carvalho Brum de Oliveira

Orientador: Ioav Waga

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Cosmic Inflation is a hypothesis about the Early Universe whose motivation is to explain the homogeneity and isotropy of the Universe, at the same time that it provides an explanation to the origin of the fluctuations in the energy density that generates large-scale structures, such as galaxies and clusters. The existing inflationary models, to be consistent, require some conditions that, when compared to the ones imposed by observations, leave a very narrow range, inside which the scenarios are viable. In most cases, this range is hardly physically realizable.

It is questioned whether the General Relativity Theory is the ultimate theory of gravitation. One of the ideas that guided Einstein to the formulation of this theory is that the inertia of a body is determined by its interaction with all the other bodies in the Universe. Nonetheless this idea is not embodied in Einstein's theory. A way of doing this is substituting the gravitational coupling constant for a scalar dynamical field determined by the distribution of energy in the Universe. The theories that attempt to realize this are called Scalar-Tensor theories of Gravitation.

This work proposes to analyse the possibility of formulating an inflationary scenario in the role of what is presently called "Old Inflation" in the context of scalar-tensor gravitation.

Key-words: Cosmology. Cosmic Inflation. Scalar-Tensor Theories of Gravity.

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2010

Notações e Convenções

1. Índices gregos variam de 0 a 3.
2. Índices latinos variam de 1 a 3.
3. Derivada Parcial: $\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha \phi = \phi_{,\alpha}$
4. Símbolo de Christoffel: $\{\alpha_{\beta\gamma}\} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(\partial_\gamma g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\gamma} - \partial_\mu g_{\beta\gamma})$
5. Derivada covariante: $T_{\beta;\alpha} = \nabla_\alpha T_\beta = \partial_\alpha T_\beta - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} T_\lambda$
6. Tensor de Riemann: $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\alpha\nu}$
7. Tensor de Ricci: $R_{\mu\nu} := \delta_\alpha^\beta R^\alpha_{\mu\beta\nu}$
8. Escalar de Ricci: $R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$
9. Tensor de Einstein: $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$
10. Tensores simétricos: $T_{(\alpha\beta)} \equiv \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha})$
11. Assinatura da métrica: $(-, +, +, +)$
12. No sistema de unidades utilizado: $\hbar = c = k_b = 1$
13. Equações de Einstein: $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida e pelo trabalho. A meus pais, Mauro Brum Peixoto de Oliveira e Deise Lúcia Carvalho Brum de Oliveira, pelo amor, apoio, paciência, conselhos, sempre presentes. A meus irmãos Mauro C. Brum de Oliveira e Mateus C. Brum de Oliveira, por serem meus irmãos, no sentido completo da palavra. A meus avós, pela alegria com que encaram a vida, a qual transmitem à sua família. A todos os meus amigos e companheiros do Centro Espírita Pedro de Alcântara, em especial a Luiz Otávio R. de L. Felgueiras e Mateus V. Sprovieri, cujo companheirismo e amizade têm sido imprescindíveis nesta vida. Agradeço a meu orientador, Ioav Waga, pela oportunidade do trabalho e por mostrar com clareza os caminhos de uma ótima formação acadêmica. A Vinícius Miranda Bragança, Marcelo Vargas dos Santos, Ramón G. Campos e Bruno L. Lago, pela amizade, companheirismo e apoio computacional. Aos professores Maurício O. Calvão e Sérgio E. de Carvalho E. Jorás por diversas sugestões e comentários. À Emille E. de O. Ishida e ao professor Ribamar R. R. Reis, pelo companheirismo e conselhos. À CAPES, CNPq e FAPERJ, pelo apoio financeiro.

Lista de Figuras

1.1	Mapa de flutuações de temperatura na Radiação Cós mica de Fundo. As regiões vermelhas são mais quentes e as azuis, mais frias. A variação fracional de temperatura é $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$ [1].	6
1.2	A velocidade de recessão de galáxias em função da distância. Dados do Hubble Space Telescope (Freedman et al. 2001 [2]). Na parte inferior, o valor atual do parâmetro de Hubble, $72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Não será usado este valor fixo, mas a parametrização acima.	8
2.1	Potencial do campo escalar. Muito acima de uma temperatura crítica T_c , o potencial tem apenas um mínimo (curva A). Conforme a temperatura diminui, o potencial desenvolve outro mínimo e, em T_c , estes se tornam igualmente favoráveis (curvas B , C e D). Abaixo da T_c é mais favorável, energeticamente, que o campo escalar esteja concentrado no novo mínimo (curva E).	41
2.2	Forma do potencial do campo escalar abaixo da Temperatura Crítica. A seta pontilhada indica que a Transição de Fase ocorre pelo tunelamento do Falso Vácuo ao Vácuo Verdadeiro.	41

- 2.3 Primeiramente, o campo rola pela parte aproximadamente plana do potencial. Durante este período, ocorre a expansão semelhante a de Sitter. Ao fim da Inflação, o campo chega próximo do mínimo do potencial e oscila, perdendo sua energia por atrito. 48
- 2.4 O potencial não apresenta parte plana. Este potencial pode ser, por exemplo, uma potência do campo escalar. Assim, as condições de rolamento lento são satisfeitas para campos altos. Neste caso, o termo de atrito na equação de Klein-Gordon impede que o campo role rápido ao longo do potencial, garantindo a expansão semelhante a de Sitter. Ao fim da Inflação, o campo chega próximo do mínimo do potencial e oscila, novamente perdendo sua energia por atrito. 49
- 3.1 Dois difeomorfismos diferentes induzindo dois sistemas de coordenadas diferentes na mesma variedade \mathcal{M} 55
- 3.2 A linha indicada como τ define a linha de x^i constante. A linha x^i denota a hipersuperfície de tempo constante, ou "fatia" (slice). A figura deixa explícito que estas não são ortogonais, e esta não-ortogonalidade é dada pela função de deslocamento, que define a linha ortogonal à hipersuperfície de tempo constante. A linha deslocada de τ pelo vetor \vec{v} indica a direção de propagação de um fluido com velocidade \vec{v} arbitrária. . . . 57
- 5.1 No eixo vertical esta $N_{50h^{-1}Mpc} \left(\frac{1-2\beta}{1+2\beta} \right)$. A região escura mostra onde a função é maior ou menor que 46,5. Pode-se ver claramente um limite superior em β , $\beta = 0.016$ 116
- 5.2 A localização do mínimo de β , $\beta = 3.59 \times 10^{-5}$ 116

Conteúdo

Resumo	iv
Abstract	v
Notações e Convenções	vii
Agradecimentos	ix
Lista de Figuras	x
1 Introdução à Cosmologia	1
1.1 As equações de Einstein	2
1.2 A métrica de Robertson-Walker	5
1.2.1 Desvio para o Vermelho	8
1.2.2 Equações de Friedman	9
1.3 Parâmetro de Densidade	17
1.4 Horizontes	19
1.4.1 O Horizonte de Partícula	20
1.4.2 O Horizonte de Curvatura	21
1.5 Termodinâmica do Universo Primitivo	22
1.5.1 Entropia	25
1.5.2 Desacoplamento de Neutrinos	27

2	Inflação Cósmica	31
2.1	Os problemas abordados pela Inflação Cósmica	32
2.1.1	O Problema do Horizonte	33
2.1.2	O Problema da Chateza	35
2.1.3	Solução dos Problemas	36
2.1.4	O aspecto termodinâmico destes problemas	37
2.2	A solução Inflacionária	40
2.2.1	Velha Inflação: a versão original	40
2.2.2	Rolamento Lento	46
3	Perturbações Inflacionárias	51
3.1	Flutuações no campo escalar e na métrica	52
3.1.1	Escolha de Calibre	54
3.2	A perturbação de Curvatura; Evolução das Perturbações . . .	59
3.2.1	O tensor energia-momento	61
3.2.2	Perturbações e quantização da ação	63
3.2.3	O espectro de potências	66
4	Gravitação Escalar-Tensorial	71
4.1	Introdução - Conceitos básicos da Relatividade Geral	71
4.1.1	Princípio de Equivalência	71
4.1.2	O Princípio de Mach	72
4.2	Gravitação Escalar	73
4.3	Gravitação Escalar-Tensorial	76
4.4	A teoria de Brans-Dicke	78
4.4.1	Campo Fraco e PPN	80
4.4.2	O Princípio de Equivalência	85
4.5	Transformações Conformes	86

5	Inflação em Gravitação Escalar-Tensorial	91
5.1	Inflação Estendida	92
5.2	Perturbações Inflacionárias em Gravitação Escalar-Tensorial .	96
5.3	O Modelo de Di Marco & Notari	102
5.4	Modificações	108
5.4.1	Resultados	116
5.4.2	Perturbações Tensoriais	117
5.5	Conclusões e Perspectivas	118
	Bibliografia	120

Capítulo 1

Introdução à Cosmologia

Neste capítulo serão discutidos alguns aspectos básicos, observacionais e teóricos, da Cosmologia moderna. Ênfase será dada ao material necessário para os capítulos seguintes.

A princípio, será feita uma breve discussão sobre as equações de Einstein, seguida do Princípio Variacional (porém sem entrar em muitos detalhes, principalmente os técnicos), que permite uma maneira bastante elegante de se chegar às equações da Relatividade Geral, qualquer que seja o conteúdo material do Universo.

Na sequência, será descrito um Universo homogêneo e isotrópico em expansão, com a introdução da métrica de Robertson-Walker, apontando algumas observações que dão suporte ao uso desta para o Universo observável. Alguns aspectos da teoria da Relatividade Geral serão tratados quando Gravitação Escalar-Tensorial for tratada. Este capítulo partirá das equações de Einstein. Para uma leitura mais aprofundada, sugere-se a literatura consagrada [3, 4, 5, 6].

Mostrar-se-á como se dá a expansão no caso de um Universo contendo matéria não-relativística (poeira, daqui para a frente), radiação, curvatura

e constante cosmológica. Falar-se-á sobre a existência de horizontes. Já pode ser adiantado que existem alguns tipos diferentes de horizonte, mas a presente discussão irá se concentrar no mais importante para a Cosmologia Inflacionária, o *horizonte de curvatura* H^{-1} .

1.1 As equações de Einstein

Como se sabe, a Teoria da Relatividade Geral mostra que a interação gravitacional pode ser interpretada como uma distorção do espaço-tempo, alterando sua geometria, tornando-a curva. A maneira mais simples de expressar essa relação, respeitando os princípios de conservação de energia e de momento, é através das equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} . \quad (1.1)$$

O lado esquerdo desta equação é conhecido como *Tensor de Einstein*

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}.$$

A equação de Einstein mostra de que forma a distribuição de energia no Universo, dada pelo tensor energia-momento, influencia sua geometria, dada pelo Tensor de Einstein.

A geometria do espaço-tempo, dada pelo lado esquerdo das equações acima, é descrita pela métrica, que pode ser definida através do elemento de linha:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu . \quad (1.2)$$

O tensor energia-momento, lado direito das equações de Einstein, descre-

ve o conteúdo material do Universo. Para um fluido perfeito¹ (sem tensão anisotrópica nem fluxo de energia), sua forma é

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} , \quad (1.3)$$

onde u_α é a quadri-velocidade de um elemento do fluido, ρ é sua densidade de energia e p pressão. Para um observador co-móvel, $u_\alpha = -\delta_\alpha^0$ (será tomada esta situação, salvo indicação explícita do contrário). Em geral, $u^\alpha := \frac{dx^\alpha}{dt}$.

Se a matéria for descrita em termos de campos (escalares, vetoriais ou tensoriais, dependendo do caso; não será falado aqui de espinores), é mais conveniente usar-se a formulação Lagrangeana. Pode-se, de fato, escrever o lado esquerdo (geometria) das equações de Einstein a partir de uma Lagrangeana, a chamada Lagrangeana de Einstein-Hilbert, e chega-se à ação correspondente

$$S = \int \sqrt{-g}R , \quad (1.4)$$

onde $\sqrt{-g}$ é a raiz do módulo do determinante da métrica (o Jacobiano da Transformação, de um sistema cartesiano para um sistema arbitrário de coordenadas). A variação desta ação em relação à métrica conduz às equações de Einstein no vazio [3]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 . \quad (1.5)$$

À inclusão matéria, dada pela densidade Lagrangeana² $\mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi)$, onde

¹Este é o único tipo de fluido compatível com a métrica de Robertson-Walker. Tanto fluxo de energia quanto tensão anisotrópica indicariam anisotropias, e o primeiro seria, também, indicativo de inhomogeneidades.

²Chamar-se-á a densidade Lagrangeana apenas de Lagrangeana. Será usada uma notação simplista. A Lagrangeana, em geral, também depende de derivadas dos campos ψ e, em alguns casos particulares, também de derivadas da métrica.

ψ denota, coletivamente, todos os campos de matéria, tem-se a ação

$$S = \int \sqrt{-g} \{R + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi)\} . \quad (1.6)$$

Variação desta ação em respeito à metríca conduz às equações de Einstein (1.1), dado que [3]

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} . \quad (1.7)$$

Pelo Teorema de Noether, se a Lagrangeana da matéria for invariante por deslocamentos infinitesimais, o tensor energia-momento é conservado. Por conservação, diz-se

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 ,$$

onde $;$ indica derivação covariante [3]. Pode-se mostrar [3] que, levando-se em conta as simetrias dos campos de matéria, que se refletirão em simetrias do espaço-tempo, via equações de Einstein, as equações deduzidas a partir da conservação do tensor energia-momento reduzem-se às equações de Euler-Lagrange calculadas pela variação da ação em relação aos campos de matéria,

$$\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta\psi} = 0.$$

Esta equação de Euler-Lagrange mostra como a geometria do Universo influencia no movimento de partículas.

Visto desta forma, entendemos com mais clareza a célebre frase: "Space tells matter how to move. Matter tells space how to curve."

1.2 A métrica de Robertson-Walker

Primeiramente, é importante colocar o que significa exatamente a afirmação que o Universo é homogêneo e isotrópico. Dentro da galáxia verificam-se inhomogeneidades e anisotropias. Se o Universo for observado numa escala de distância da ordem de 300 milhões de anos-luz ($\sim 10^{13}$ km) veremos um Universo isotrópico. A afirmação da isotropia do Universo é válida para distâncias a partir desta.

Na Radiação Cósmica de Fundo, essa isotropia³ é da ordem de uma parte em 10^{-5} , como pode ser visto na figura (3.2). Uma vez que nossa posição no Universo não é privilegiada, constata-se que quaisquer outros observadores veriam o Universo isotrópico, ao seu redor. A afirmação de que o Universo é isotrópico em relação a todos os pontos leva à conclusão de que o Universo é, também, homogêneo.

É importante ressaltar que esta afirmação é feita em relação a observadores que não se movem relativisticamente em relação às galáxias. Estes são chamados *observadores co-móveis*.

³Um observador movendo-se relativisticamente numa dada direção veria a Radiação Cósmica de Fundo com muito mais intensidade à sua frente do que às suas costas. Ao contrário, observadores movendo-se juntamente com as galáxias vêem a Radiação Cósmica de Fundo isotrópica. É estes observadores que são referidos quando se afirma que o Universo é, em largas escalas, homogêneo e isotrópico.

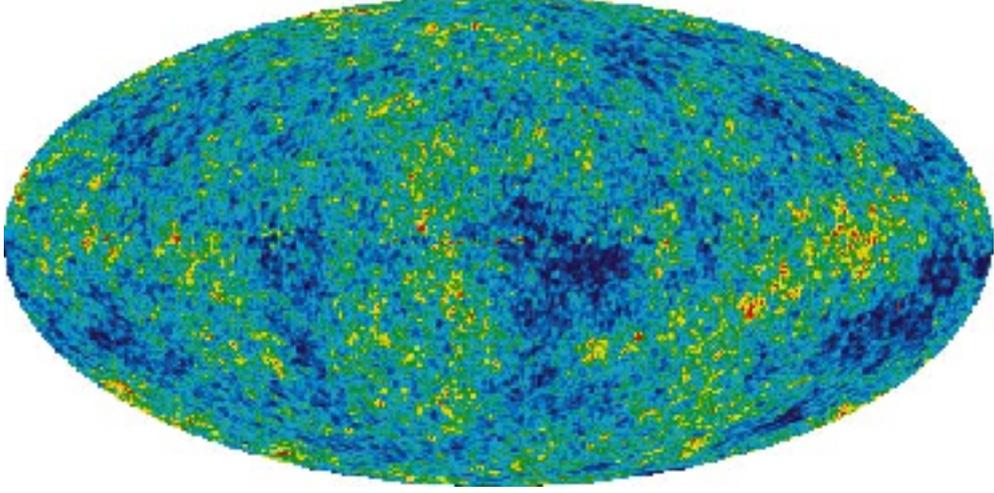


Figura 1.1: Mapa de flutuações de temperatura na Radiação Cósmica de Fundo. As regiões vermelhas são mais quentes e as azuis, mais frias. A variação fracional de temperatura é $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$ [1].

A métrica de Robertson-Walker, que descreve o Universo homogêneo e isotrópico em expansão, é dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right) \\ &= a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + \frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

O fator $a(t)$ é o fator de escala, através do qual descreve-se a evolução de distâncias espaciais. Um fator de escala crescente (decrescente) indica que o Universo está se expandindo (contraído). Com a expansão do Universo, as distâncias entre objetos são alteradas (tornando-se notável apenas a partir da escala de galáxias), e esta alteração é medida pelo fator de escala. É conveniente definir o conceito de *distâncias co-móveis*, a distância que um

dado objeto teria de nós caso o Universo não estivesse em expansão. As distâncias medidas são chamadas de *distâncias físicas*. Ve-se pela métrica de Robertson-Walker que $\lambda_{fis} = a(t)\lambda_{co}$, onde λ refere-se a uma distância qualquer.

Não menos importante é o parâmetro de Hubble,

$$H(t) := \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} = \frac{d \ln a(t)}{dt},$$

que pode ser medido pelas observações, de uma maneira bem simples: Tome-se uma galáxia a uma distância (co-móvel) x de nós, fixa. A distância física correspondente evolui da seguinte forma:

$$\frac{d(a(t)x)}{dt} = \dot{a}(t)x = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}a(t)x \therefore \dot{x}_{fis} = H(t)x_{fis} . \quad (1.9)$$

Observações que indiquem esta relação linear entre a velocidade de afastamento (recessão) de galáxias e a distância são um forte indicativo de que o Universo sofre expansão, e esta é homogênea e isotrópica. Esta relação é exatamente a que tem sido observada desde 1929, quando Edwin Hubble concluiu que a velocidade de recessão, em relação à nossa galáxia, de galáxias observadas aumentava linearmente com a distância a nós. Apesar de erros naquelas medidas, a linearidade e a isotropia foram confirmadas por diversos outros grupos, até os dias atuais.

Uma das grandes fontes de erro nessas medidas é o fato de as galáxias observadas terem um movimento próprio, independente da expansão do Universo. Galáxias próximas umas das outras formam estruturas gravitacionalmente ligadas, chamadas *Agglomerados de Galáxias*, e cada galáxia orbita em torno do centro de massa do aglomerado. Esse movimento, em galáxias a distâncias d tais que $d \ll \frac{c}{H}$, é difícil de ser distinguido do movimento devido

à expansão do Universo.

Como se ve, o parâmetro de Hubble tem dimensão de tempo⁻¹. Usualmente, ele é escrito na forma

$$H_o = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} ,$$

e as observações são usadas para restringir o valor de h figura (1.2).

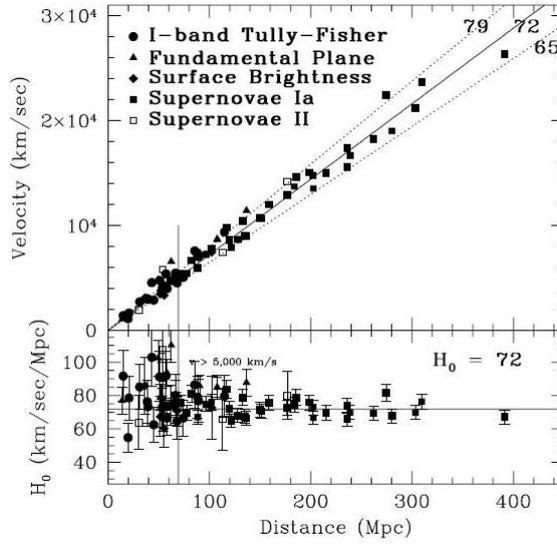


Figura 1.2: A velocidade de recessão de galáxias em função da distância. Dados do Hubble Space Telescope (Freedman et al. 2001 [2]). Na parte inferior, o valor atual do parâmetro de Hubble, $72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Não será usado este valor fixo, mas a parametrização acima.

Outro conceito já introduzido em (1.8) é o de tempo conforme, $d\tau := \frac{dt}{a(t)}$. Escrevendo a métrica desta forma, fica evidente que se pode obter a métrica de Minkowski a partir de uma Transformação Conforme (mais sobre transformações conformes será colocado no capítulo sobre Gravitação Escalar-Tensorial). Escrevendo a métrica em termos do tempo conforme, a solução de algumas equações se torna mais imediata.

Por fim, K é a tri-curvatura das seções espaciais do Universo. Dada uma hipersuperfície de tempo constante, este parâmetro mede o quanto a geometria desta se afasta da geometria euclideana. Se $K = 0$, a geometria é euclideana. Se $K = +(-)1$, a geometria é esférica (hiperbólica).

1.2.1 Desvio para o Vermelho

Ver-se-á como a expansão do Universo altera as medidas de tempo feitas por 2 observadores observando um mesmo fenômeno em instantes diferentes.

Supõe-se que um observador num ponto r_1 mande, no instante t , um sinal luminoso para outro observador, situado no ponto r_2 . Este segundo observador receberá o sinal em t_0 . Como a luz viaja numa geodésica nula,

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} .$$

Como a distância (co-móvel) entre os observadores é fixa, a passagem do tempo deve se relacionar com o fator de escala na forma

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_1}{a(t_1)} .$$

Relacionando então a frequência da luz na emissão e na recepção,

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t)} =: 1 + z . \quad (1.10)$$

Se $z > 0$, a frequência na emissão (ν) é maior que a recebida, ν_0 , ou seja, há um *desvio para o vermelho* nas linhas espectrais de fontes distantes de luz. Por isso, o parâmetro z é conhecido como Desvio para o Vermelho. z é ajustado para 0 hoje. É comum caracterizar o instante de ocorrência dos eventos do passado do Universo (desacoplamento, equipartição matéria-

radiação) pelo desvio para o vermelho.

1.2.2 Equações de Friedman

Um conjunto de equações pode ser deduzido a partir das equações de Einstein (1.1), usando a métrica de Robertson-Walker (1.8). Estas são chamadas *Equações de Friedman* [7, 8, 9, 10]:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{K}{a^2(t)} \quad (1.11)$$

e

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho(t) + 3p(t)) . \quad (1.12)$$

A primeira delas mostra como o parâmetro de Hubble se relaciona com a densidade de energia da matéria (poeira, radiação, ou qualquer outra componente) presente no Universo e com a tri-curvatura das seções espaciais. Já se pode ver que, num Universo vazio ($\rho = 0$), caso a geometria seja euclidiana ($K=0$), não há expansão ($H = 0 \therefore a = \text{constante}$). A segunda equação mostra a relação entre a aceleração do Universo e o seu conteúdo material. Ve-se que, para que o Universo se expanda de uma maneira acelerada, $\rho + 3p < 0$. Nenhum tipo de matéria observado na natureza se comporta dessa forma, com exceção do vácuo, para o qual $p = -\rho$. A densidade de energia do vácuo é também chamada de Constante Cosmológica.

Uma terceira equação pode ser obtida através destas duas, ou, igualmente, da conservação do Tensor energia-momento (1.3). Para um fluido perfeito e a métrica de Robertson-Walker, essa equação se torna

$$\dot{\rho}(t) + 3H(t)(\rho(t) + p(t)) = 0 . \quad (1.13)$$

Por apenas duas destas três equações serem independentes, e ter-se três variáveis independentes ($a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$), não se pode resolver estas equações para um fluido genérico. Precisa-se ainda de uma equação de estado para o fluido. Uma equação usual é $p(t) = w(t)\rho(t)$, onde $w(t)$ é conhecido como o parâmetro de estado. Desta forma, a equação acima tem a seguinte solução:

$$\rho(a) = \rho_0 e^{-3 \int (1+w(a)) d \ln a} . \quad (1.14)$$

Para os casos onde w é constante, pode-se ir mais adiante.

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3(1+w)} \rightarrow a(t) = a(0) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}} . \quad (1.15)$$

Antes de usar essas relações para estudar alguns casos ilustrativos, vale chamar à atenção um fato importante: A energia total de uma partícula relativística é

$$E^2 = p^2 + m^2.$$

No caso de fótons ($m=0$), $p \propto \nu \propto a^{-1}$. Então, a densidade de energia $\rho = E/V \propto a^{-1}/a^3$, ou seja, $\rho \propto a^{-4}$. Para partículas massivas, a energia cinética é proporcional à temperatura da partícula. Neste caso, com a diminuição da temperatura do Universo, quando $T \lesssim m$, elas deixarão de ser partículas relativísticas.

Como será colocado abaixo [7], a entropia destas partículas é transferida para as partículas ainda relativísticas. Não há, aqui, produção de entropia, apenas transferência. A menos deste ou de processos que produzam entropia (Transições de Fase, por exemplo), a expansão do Universo é adiabática e, neste caso, pode-se mostrar que $T \propto a^{-1}$ [7]. Apesar de decaimentos, a massa é constante. Então, após um certo tempo da evolução do Universo,

$E \approx m \rightarrow$ constante. Assim, neste caso, $\rho \propto a^{-3}$.

O mais importante desse último comentário é que, se observar-se a evolução do Universo retrospectivamente, ver-se-á o momento linear de partículas não-relativísticas aumentando com o fator de escala a , e, a partir de um certo momento, este passou a ser (retrospectivamente falando) o termo mais importante na energia da partícula, e passa-se então a ter, mesmo para partículas massivas, $\rho \propto a^{-4}$. Ou seja, a matéria não-relativística, aqui tratada como poeira, nos primórdios do Universo, era também relativística! Este fato será de fundamental importância quando falarmos sobre dissipação de perturbações antes da formação de galáxias.

Serão agora estudados alguns casos ilustrativos:

Poeira

Essa descrição serve para a matéria bariônica (além de elétrons) e para a matéria escura, após elas terem perdido sua energia cinética com a expansão do Universo. Por essas partículas terem velocidades muito baixas, sua pressão é desprezível frente à densidade de energia, e pode-se tomar $w = 0$. Então, para um Universo dominado por poeira (desconsiderando curvatura, $K=0$), tem-se (1.11)

$$a \propto t^{2/3} .$$

O Universo se expande de maneira desacelerada. Esse tipo de expansão é o necessário para a formação de galáxias [11].

Radiação

Radiação é uma maneira genérica de referir-se a fótons e neutrinos⁴. Como foi colocado acima, esta descrição também serve para bárions e matéria escura, antes de estes perderem sua energia com a expansão. No equilíbrio térmico, um gás de fótons tem equação de estado $p = \frac{1}{3}\rho$, o que, pela equação de conservação, (1.15), concorda com $\rho \propto a^{-4}$. Então (desconsiderando curvatura, $K=0$),

$$a \propto t^{1/2} .$$

A densidade de energia da radiação é diluída mais rapidamente que a da poeira. A expansão do Universo também é desacelerada neste caso, mas não ocorre formação de galáxias durante esse período [11].

Sabe-se que, até muito recentemente, a densidade de energia do Universo era composta, predominantemente, por poeira. Conforme foi visto, a densidade de energia da radiação diminui mais rapidamente que a da poeira. Isso quer dizer que, se a evolução do Universo for analisada retroativamente, a densidade de energia da radiação aumenta mais rapidamente que a da poeira, o que leva à conclusão que, antes de o Universo ser dominado por poeira, ele foi dominado por radiação.

Seria interessante se, de alguma forma, essa transição pudesse ser tratada. O que será visto a seguir é que se pode calcular analiticamente a evolução do fator de escala, se utilizar-se o tempo conforme.

Poeira e radiação

Caso poeira e radiação estejam juntas, com abundâncias comparáveis, tem-se que levar as duas em conta ao se analisar a expansão do Universo. A

⁴Não será tratado aqui da massa dos neutrinos. A discussão será concentrada em radiação eletromagnética

equação de Friedman (1.11) (desconsiderando curvatura, $K=0$) fica

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^3 + \rho_{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^4 \right], \quad (1.16)$$

onde eq indica o instante no qual poeira e radiação estão com densidades iguais. Esta equação pode ser reescrita na forma

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho_{eq} \left[\frac{a_{eq}^3}{a} + \frac{a_{eq}^4}{a^2} \right]. \quad (1.17)$$

Como $d\tau := \frac{dt}{a(t)} \therefore \frac{d}{dt} = \frac{1}{a(\tau)} \frac{d}{d\tau}$, a equação acima fica

$$(a')^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{eq} a_{eq}^4 \left(1 + \frac{a(\tau)}{a_{eq}} \right), \quad (1.18)$$

onde $' \equiv \frac{d}{d\tau}$. Integrando esta equação de τ_{eq} até τ , e ajustando $a(0) = 0$, encontra-se

$$\frac{a(\tau)}{a_{eq}} = (2\sqrt{2} - 2) \left(\frac{\tau}{\tau_{eq}} \right) + (3 - 2\sqrt{2}) \left(\frac{\tau}{\tau_{eq}} \right)^2, \quad (1.19)$$

onde $\tau_{eq} = \frac{2\sqrt{2}-2}{a_{eq}} \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_{eq}}}$. Ve-se que

$$\tau \gg \tau_{eq} \Rightarrow a \propto \tau^2 \rightarrow t \propto \tau^3 \therefore a \propto t^{2/3}$$

$$\tau \ll \tau_{eq} \Rightarrow a \propto \tau \rightarrow t \propto \tau^2 \therefore a \propto t^{1/2}.$$

Consegue-se reproduzir a expansão do Universo, em termos do tempo conforme, desde a época na qual a dinâmica do Universo era dominada pela radiação (Era da Radiação) até a época na qual a poeira dominava a dinâmica o Universo (Era da Matéria).

Constante Cosmológica

A Constante Cosmológica é caracterizada pela equação de estado $w = -1$. Com isso, $a(t) = a(0)e^{Ht}$, onde $H = \frac{8\pi G}{3}\rho$ é constante. Ela não se dilui. Portanto, se estiver presente, por menor que seja sua contribuição, em algum momento ela começará a ser a componente mais relevante para a dinâmica do Universo. Isso é exatamente o que se verifica nos dias atuais, pela constatação de que, presentemente, a expansão do Universo ocorre de forma acelerada (este assunto não será abordado nesta Dissertação) [12].

O período inflacionário também é um período no qual o Universo esteve acelerado e, naturalmente, buscou-se obter esta aceleração através de um termo com densidade de energia constante. Porém, como será visto no próximo capítulo, este cenário não é viável.

Curvatura

Para um Universo com curvatura espacial positiva, $K = 1$. Se considerar-se o Universo contendo apenas poeira, $\rho \propto a^{-3}$. Então,

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} - 1 \rightarrow \frac{\sqrt{ada}}{\sqrt{C-a}} = dt .$$

Definindo

$$\sin^2 \theta \equiv \frac{a}{C} ,$$

$$2C \sin^2 \theta d\theta = dt \therefore C \left(\frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{2} \right) = t . \quad (1.20)$$

onde $C = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a_0^3$.

Quando $t=0$, $\theta = 0$ e $a = 0$. O fator de escala atinge um valor máximo quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, correspondendo ao tamanho máximo que o Universo atinge,

neste caso, e depois contrai-se, colapsando quando $\theta = \pi$, $t = C\frac{\pi}{2}$. Este, claramente, não é o caso do nosso Universo [9, 10].

No caso de um Universo espacialmente aberto, $K = -1$, apenas com poeira, tem-se [13]

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \frac{C}{a} + 1 \rightarrow \frac{\sqrt{ada}}{\sqrt{C+a}} = dt \\ t &= \frac{1}{2}C(\sinh \psi - \psi) , \end{aligned} \quad (1.21)$$

onde $a = \frac{1}{2}C(\cosh \psi - 1)$.

Como o termo de curvatura é diluído mais lentamente que a densidade de energia da poeira, poderíamos esperar que o Universo, após a Era da Matéria, fosse dominado pela curvatura. Porém, este cenário está em desacordo tanto com as observações da Radiação Cósmica de Fundo quanto com os modelos de formação de estruturas. É importante ressaltar que a hipótese descartada pelas observações é a de uma fase dominada pela curvatura. A existência de um pequeno termo de curvatura não é descartada pelas observações.

Campos Escalares

Para descrever-se a dinâmica do Universo dominado por um campo escalar, convém retornar-se à lagrangeana deste campo. A lagrangeana mais simples que pode-se formular para um campo escalar é

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) . \quad (1.22)$$

Da equação (1.7), juntamente com as equações de Einstein e usando a métrica de Robertson-Walker, encontra-se as equações de campo para o

campo escalar:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + V(\phi) \right] \quad (1.23)$$

e

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 . \quad (1.24)$$

Quando mencionou-se de fluidos genéricos, afirmou-se que era necessário uma equação de estado do fluido para que o sistema pudesse ser resolvido. No caso do campo escalar, precisa-se especificar a forma do potencial ao qual este está submetido. Estes casos podem ser relacionados através da identificação, pelas equações (1.22), (1.7) e (1.3),

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + V(\phi) \quad \text{e} \quad p_\phi = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - V(\phi) . \quad (1.25)$$

Um caso interessante, a ser discutido rapidamente, é: $V(\phi) = \text{constante}$. A equação (1.24) apresenta soluções

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi = \text{constante} ; \\ \dot{\phi} \propto a^{-3} . \end{array} \right. \quad (1.26)$$

No primeiro caso, a equação (1.23) mostra que o parâmetro de Hubble é constante. Logo a expansão do Universo é exponencial. Pode-se ver pelas equações (1.25) que, neste caso, $p = -\rho$.

No segundo caso, se considerar-se que a energia potencial do campo é, inicialmente, desprezível frente à cinética, verifica-se que o fator de escala evolui com $a \sim t^{1/3}$ e, conseqüentemente, $\dot{\phi} \sim t^{-1}$, ou seja, a energia cinética diminui e, como a potencial é constante, esta passa a dominar. Então, no caso de um potencial constante, mesmo que a expansão não seja exponencial

inicialmente, ela passa a ser assim após um tempo.

Para outros tipos de potencial, tem-se comportamentos diferentes, podendo ter tanto aceleração quanto desaceleração. Diversas possibilidades de se obter aceleração a partir de campos escalares foram utilizadas na tentativa de se obter um cenário inflacionário viável. Mais sobre isso será falado no próximo capítulo.

Será introduzido agora um conceito muito importante na conexão entre teoria e observações: o Parâmetro de Densidade.

1.3 Parâmetro de Densidade

O Parâmetro de Densidade é uma grandeza adimensional que expressa qual a contribuição de cada componente material (poeira, radiação, constante cosmológica, curvatura, ou qualquer outra componente exótica) para o conteúdo total do Universo.

Parte-se da equação de Friedmann,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_r) - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.27)$$

onde Λ é a constante cosmológica. Escrevendo a densidade de energia da poeira como

$$\rho_m = \rho_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 = \rho_{m,0} (1+z)^3,$$

e a da radiação da forma correspondente, tem-se

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3} [\rho_{m,0}(1+z)^3 + \rho_{r,0}(1+z)^4] - K(1+z)^2 + \frac{\Lambda}{3} \\ &= H_0^2 [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{K,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}] \end{aligned}, \quad (1.28)$$

onde, para poeira e radiação,

$$\Omega := \frac{\rho}{\rho_{cr}},$$

sendo ρ_{cr} a densidade crítica, definida como

$$\rho_{cr} := \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

A definição conceitual da densidade crítica será dada adiante.

Para as outras componentes,

$$\Omega_{K,0} := -\frac{K}{H_0^2} \quad \Omega_{\Lambda,0} := \frac{\Lambda}{3H_0^2} .$$

Então, pode-se reescrever a equação de Friedmann de uma maneira bastante usual:

$$1 = \frac{H_0^2}{H^2} [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{K,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}] . \quad (1.29)$$

Como já foi citado acima, e será mais explorado adiante, a curvatura K do espaço é desprezível. A densidade crítica é, então, definida como *a densidade que toda a matéria deve ter (poeira, radiação, constante cosmológica) para que o Universo seja espacialmente chato*.

Atualmente existem boas restrições sobre os valores desses parâmetros. O resultado conjunto de observações de Supernovas, Radiação Cósica de Fundo e Espectro de potências de galáxias, juntamente com a previsão de Nucleossíntese Primordial, dá os valores para estes parâmetros:

$$\Omega_{m,0} = 0,0456 \pm 0,0015; \quad \Omega_{c,0} = 0,228 \pm 0,013; \quad \Omega_{\Lambda,0} = 0,726 \pm 0,015 ;$$

$$-0,0179 < \Omega_{K,0} < 0,0081 (1\sigma); \Omega_{r,0} \approx 10^{-5} ,$$

onde c indica matéria escura não-bariônica [12]. Todos os dados são consistentes com $\Omega_K(o) = 0$. Como será visto no capítulo sobre Inflação, este fato é origem de um dos problemas que Inflação Cósmica pretende resolver.

Será agora apresentado o conceito de horizontes, um conceito primordial para a Cosmologia Inflacionária.

1.4 Horizontes

O fato de que a luz viaja a uma velocidade constante leva à existência de uma distância máxima que pode ser percorrida num dado intervalo de tempo. Esta distância será chamada horizonte. Existem algumas definições distintas de horizonte em Cosmologia. Pode-se considerar toda a região que tem contato causal conosco, cuja extremidade será chamada *Horizonte de Partícula*, $d_p(t)$, ou a máxima distância na qual um evento pode ocorrer, de forma que ele possa influenciar nosso futuro, o *Horizonte de Eventos*. Pode-se, também, associar um horizonte ao parâmetro de Hubble. Mais precisamente, a H^{-1} . Este será chamado *Horizonte de Curvatura*. Aqui serão descritos apenas o Horizonte de Partícula e o Horizonte de Curvatura.

1.4.1 O Horizonte de Partícula

Num Universo homogêneo e isotrópico, descrito pela métrica de Robertson-Walker, pode-se escrever o elemento de linha na forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + \Phi^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] , \quad (1.30)$$

onde

$$\Phi(\chi) = \begin{cases} \sinh \chi & , K = -1; \\ \chi & , K = 0; \\ \sin \chi & , K = +1. \end{cases} \quad (1.31)$$

Sabe-se que, para fótons, $ds^2 = 0$. Considerando geodésicas radiais, as trajetórias de fótons são descritas pela equação

$$\chi = \int \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.32)$$

χ , na equação acima, é uma coordenada co-móvel. Define-se o *Horizonte de Partícula* como a máxima distância física que um fóton, emitido num instante inicial t_i , pode viajar até um outro dado instante t .

$$d_p(t, t_i) = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.33)$$

Ve-se que $d_p \propto t$, desde que $a \propto t^n$, $n \neq 1$. No caso de um Universo desacelerado ($n < 1$), uma dada distância física $L_{fis} = a(t)L_{co}$, para a qual $L_{co} = \text{cte}$, que seja, num dado instante, maior que o horizonte de partícula, irá entrar no horizonte, num instante posterior. Caso o Universo seja acelerado, distâncias físicas menores que o horizonte saem deste. Esta possibilidade de cruzar o horizonte nos dois sentidos (saída e entrada) é de fundamental importância para a Inflação Cósmica.

Pode-se reescrever esta equação em termos do desvio para o vermelho. Primeiramente, faz-se uma mudança de variáveis

$$\frac{dt}{a} = \frac{dt}{da} \frac{da}{a} = \frac{da}{Ha^2}$$

$$dz = -\frac{a_0}{a^2} da \rightarrow \frac{da}{a^2} = -\frac{dz}{a_0}.$$

E utilizando a equação (1.28), o horizonte de partícula fica

$$d_p(z) = \frac{1}{(1+z)H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z')^3 + \Omega_{r,0}(1+z')^4 + \Omega_{K,0}(1+z')^2 + \Omega_{\Lambda,0}}} . \quad (1.34)$$

Pode-se relacionar, para um dado desvio para o vermelho, o horizonte de partícula, sendo conhecidos os valores atuais dos parâmetros de densidade.

1.4.2 O Horizonte de Curvatura

Pelas equações de Einstein, para o caso de um Universo dominado por uma densidade de energia constante (seja uma constante cosmológica, ou um campo escalar no estado de vácuo), o escalar de Ricci é

$$R = 12H^2 .$$

Assim, H^{-1} define uma escala natural de curvatura. Como veremos no capítulo 3, esta escala é de fundamental importância para a descrição da evolução de perturbações inflacionárias.

As perturbações serão caracterizadas pelo seu comprimento de onda $\lambda = \frac{a}{k}$. Durante a maior parte do período inflacionário, na grande maioria dos cenários, a expansão do Universo é acelerada com $a \propto t^n$, onde $n > 1$ e $H^{-1} \propto t$, ou a expansão é exponencial e H é constante. Em ambos estes casos, escalas inicialmente menores que o horizonte de curvatura poderão, depois de um certo tempo, sair deste. Veremos que, a partir deste momento, a amplitude das perturbações nestas escalas passa a ser, com muito boa aproximação, constante. É como se estas escalas não mais interagissem com as perturbações próximas. Ou seja, como se estivessem separadas por distâncias maiores que

o horizonte de partícula. Porém, como veremos, este efeito é consequência da evolução do campo num espaço-tempo curvo.

Caso o fator de escala evolua como uma potência do tempo, $a \propto t^n$, o horizonte de partícula irá diferir do horizonte de curvatura por um fator multiplicativo. Isto só reforça a confusão que geralmente é feita entre essas duas escalas.

Analisar-se-á a evolução térmica do Universo. Serão discutidos brevemente a evolução de espécies em equilíbrio térmico e a entropia do Universo.

1.5 Termodinâmica do Universo Primitivo

Num gás de partículas, a uma dada temperatura, pode-se encontrar partículas com valores diferentes de energia. A fração de partículas com uma dada energia é dada pela função de distribuição,

$$f(p) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \quad (1.35)$$

onde o sinal de + ocorre se o gás em questão for um gás de férmions, – se for um gás de bósons, $E^2(\vec{p}) = |\vec{p}|^2 + m^2$ e μ é o potencial químico. Se houver diversas espécies i, j, k, l em equilíbrio químico, o potencial de todas essas espécies se relaciona. Se o equilíbrio for dado pela relação

$$i + j \leftrightarrow k + l ,$$

teremos

$$\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l .$$

A densidade numérica n , densidade de energia ρ e pressão do gás p são dadas por [7]

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} E dE \quad (1.36)$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} E^2 dE \quad (1.37)$$

$$p = \frac{g}{6\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} dE . \quad (1.38)$$

Nestas equações, g é o número de graus de liberdade de spin das partículas.

No limite relativístico ($T \gg m$), e para $T \gg \mu$ (não será tratado aqui o caso onde o potencial químico das espécies é relevante), as equações acima tem solução

$$n = \begin{cases} \left(\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\right) gT^3 & \text{(Bósons)} \\ \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{\zeta(3)}{\pi^2}\right) gT^3 & \text{(Férmions)} \end{cases} ; \quad (1.39)$$

$$\rho = \begin{cases} \left(\frac{\pi^2}{30}\right) gT^4 & \text{(Bósons)} \\ \left(\frac{7}{8}\right) \left(\frac{\pi^2}{30}\right) gT^4 & \text{(Férmions)} \end{cases} ; \quad (1.40)$$

$$p = \rho/3 . \quad (1.41)$$

No limite não-relativístico ($m \gg T$),

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T} ; \quad (1.42)$$

$$\rho = mn ; \quad (1.43)$$

$$p = nT \ll \rho . \quad (1.44)$$

Na ocasião de termos várias espécies (diferentes bósons e férmions), as energia e pressão totais podem ser expressas em termos da temperatura dos

fótons

$$\rho_R = T^4 \sum_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 \frac{g_i}{2\pi^2} \int_{x_i}^{\infty} \frac{(u^2 - x_i^2)^{1/2}}{e^{u-y_i} \pm 1} u^2 du \quad (1.45)$$

$$p_R = T^4 \sum_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 \frac{g_i}{6\pi^2} \int_{x_i}^{\infty} \frac{(u^2 - x_i^2)^{3/2}}{e^{u-y_i} \pm 1} du . \quad (1.46)$$

onde $x_i \equiv m_i/T$, $y_i \equiv \mu/T$, $u \equiv E/T$, T_i é a temperatura da espécie i e T a temperatura dos fótons.

Como a densidade de energia e a pressão de partículas não-relativísticas são suprimidas por um fator exponencial, pode-se aproximar as equações (1.45) (1.46), levando em consideração apenas a contribuição das componentes relativísticas. Assim,

$$\rho_R = \left(\frac{\pi^2}{30} \right) g_* T^4 \quad (1.47)$$

$$p_R = \rho_R/3 = \left(\frac{\pi^2}{90} \right) g_* T^4 , \quad (1.48)$$

onde

$$g_* = \sum_{i=\text{bósons}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{férmions}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 . \quad (1.49)$$

Estes conceitos serão usados para analisar a evolução da entropia no Universo. Esta será importante quando colocar-se os problemas abordados pela inflação.

1.5.1 Entropia

No Universo em expansão, tomando um volume comóvel unitário ($V_{fis} = a^3$), a primeira Lei da Termodinâmica, desprezando os potenciais químicos, fica

$$TdS = d(\rho V) + pdV = d[(\rho + p)V] - Vdp . \quad (1.50)$$

Como derivadas parciais comutam,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} ,$$

a densidade de energia e a pressão se relacionam por

$$T \frac{dp}{dT} = \rho + p . \quad (1.51)$$

Substituindo (1.51) em (1.50), tem-se

$$dS = \frac{1}{T} d[(\rho + p)V] - (\rho + p)V \frac{dT}{T^2} = d \left[\frac{\rho + p}{T} V \right] . \quad (1.52)$$

Pela conservação de energia, $d(\rho V) = -pdV$. Usando isso na equação (1.50),

$$d \left[\frac{\rho + p}{T} V \right] = 0 . \quad (1.53)$$

Isto implica que, em equilíbrio térmico, a entropia do Universo é conservada!

Pode-se, pela equação (1.52), definir a densidade de entropia

$$s \equiv \frac{S}{V} = \frac{\rho + p}{T} . \quad (1.54)$$

Pelas equações (1.47) e (1.48),

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3, \quad (1.55)$$

onde

$$g_{*s} = \sum_{i=\text{bósons}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{férmions}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3. \quad (1.56)$$

Antes que qualquer espécie de partícula tenha se desacoplado, todas elas têm a mesma temperatura e g_* e g_{*s} podem ser intercambiados.

Como entropia (S) é conservada, $s \propto a^{-3}$ e a equação (1.55) mostra que

$$g_{*s}^{1/3} T a$$

é constante ao longo da evolução do Universo. Enquanto se estiver em regimes nos quais o número de graus de liberdade não muda, g_{*s} permanece constante e tem-se a relação

$$a \propto T^{-1}.$$

Conforme partículas deixam de ser relativísticas, g_{*s} diminui e, como $T \propto g_{*s}^{-1/3} a^{-1}$, a temperatura das partículas que permanecem relativísticas diminui mais lentamente nesta situação.

Como ilustração deste efeito de desacoplamento e alteração no número de graus de liberdade de partículas relativísticas, será analisado brevemente o desacoplamento de neutrinos. Esta parte dará uma estimativa da entropia do Universo e, conforme será mostrado no próximo capítulo, esta está diretamente ligada aos problemas cosmológicos para os quais o modelo inflacionário foi desenvolvido para resolver.

1.5.2 Desacoplamento de Neutrinos

No Universo primitivo, neutrinos são mantidos em equilíbrio através de reações do tipo $\nu\bar{\nu} \leftrightarrow e^+e^-$, $\nu e \leftrightarrow \nu e$, e outras. A seção de choque para estes processos de interação fraca é $\sigma \simeq G_F^2 T^2$, onde G_F é a constante de Fermi, que vale $G_F = 1,664 \times 10^{-5} GeV^{-2}$. A densidade numérica para partículas não-massivas⁵ é $n \propto T^3$. Então, a taxa de interação por neutrino é

$$\Gamma_{int} = n\sigma|v| \approx G_F^2 T^5. \quad (1.57)$$

Dizemos que uma espécie desacoplou quando a razão

$$\frac{\Gamma_{int}}{H}$$

torna-se menor que 1. Pode-se motivar essa conclusão pelo seguinte argumento: considerando o número de colisões que uma espécie sofre a partir de um instante t ,

$$N = \int_t^\infty \Gamma_{int}(t') dt'. \quad (1.58)$$

Considere-se $\Gamma_{int} \propto T^n \propto a^{-n}$ (como caso que estamos estudando). Na Era da Radiação,

$$N = \frac{(\Gamma_{int}/H)|_t}{n-2}.$$

Para $n > 2$, a partícula interage menos que uma vez após o instante no qual $\Gamma_{int} \propto H$.

⁵Sabe-se que há uma massa não-nula de neutrinos. Porém, se hoje eles são relativísticos, no Universo primitivo esta aproximação era ainda melhor, onde sua temperatura era muito maior.

Voltando aos neutrinos,

$$\frac{\Gamma_{int}}{H} \simeq \frac{G_F^2 T^5}{8\pi G T^2} \simeq \left(\frac{T}{1MeV} \right)^3 . \quad (1.59)$$

As interações mantêm os neutrinos em equilíbrio térmico até a temperatura de 1 MeV. Abaixo desta, as interações dos neutrinos não são suficientes para mantê-los em equilíbrio com o plasma. A partir de então, a temperatura dos neutrinos passa a diminuir como $T \propto a^{-1}$. Para saber-se como se comporta a temperatura dos fótons, precisa-se olhar a alteração no número de graus de liberdade e usar a conservação da densidade de entropia (1.55).

Logo após o desacoplamento dos neutrinos, a temperatura torna-se menor que a massa dos elétrons ($m_e \approx 0,5MeV$), e a entropia nos pares e^\pm é transferida para os fótons, não para os neutrinos (pois estes estão desacoplados do plasma).

Para $T \gtrsim m_e$, as partículas relativísticas em equilíbrio com os fótons ($g=2$, um grau de liberdade correspondendo a spin para cima e o outro, spin para baixo) incluem os pares e^\pm ($g=4$). Pela equação (1.49),

$$g_{*i} = \frac{11}{2} ,$$

onde g_{*i} é o número de graus de liberdade antes do desacoplamento dos neutrinos. Para $T \ll m_e$, apenas o fóton permanece em equilíbrio e

$$g_{*f} = 2 .$$

Antes de $T \simeq 1MeV$, fótons e neutrinos têm a mesma temperatura T . Abaixo desta, neutrinos passam a ter uma temperatura T_ν , que se relaciona

com a temperatura anterior por

$$aT = a_d T_\nu,$$

onde a_d é o fator de escala depois do desacoplamento dos neutrinos com o plasma. Já a temperatura dos fótons segue como

$$g_{*i}^{1/3} aT = g_{*f}^{1/3} a_d T_\gamma .$$

Assim,

$$\frac{T_\gamma}{T_\nu} = \left(\frac{g_{*i}}{g_{*f}} \right)^{1/3} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} \approx 1,4 . \quad (1.60)$$

É interessante notar que o decréscimo de g_* não chega a causar um aumento na temperatura, mas diminui seu decréscimo.

Calculando agora g_* e g_{*s} hoje, para todas as partículas relativísticas (no raciocínio acima, calculamos g_* apenas para as partículas em equilíbrio térmico com os fótons),

$$g_* = 2 + \frac{7}{8} \times 2 \times 3 \times \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} = 3,36 \quad (1.61)$$

$$g_{*s} = 2 + \frac{7}{8} \times 2 \times 3 \times \frac{4}{11} = 3,91 . \quad (1.62)$$

Vale notar que estas equações não são válidas apenas hoje, mas desde $T \lesssim 1MeV$. Juntando (1.62) com (1.55),

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3 \simeq 2,23 \times 10^{-11} (eV)^3 . \quad (1.63)$$

Este resultado será utilizado no próximo capítulo para relacionarmos a

entropia do Universo com características deste.

Capítulo 2

Inflação Cósmica

O Modelo Padrão da Cosmologia explica a expansão do Universo e, juntamente com a Nucleossíntese Primordial, a presença dos elementos químicos leves (H, He e Li). Não explica, porém, a origem das galáxias¹, por que o Universo é homogêneo², por que sua geometria espacial é, com boa aproximação, chata, e qual a causa da ausência, no Universo, de monopólos magnéticos.

No ano de 1981, dois importantes artigos foram publicados, propondo que um período de aceleração cósmica no começo do Universo poderia resolver estes problemas. Alan Guth [14] mostrou que esta fase acelerada explicaria por que o Universo é, em escalas superiores às de galáxias, com boa aproximação, homogêneo - Problema do Horizonte - e, se forem tomadas as hipersuperfícies de tempo constante no Universo, estas são aproximadamente chatas - Problema da Chateza (explicava também a ausência de monopólos; não citaremos mais este problema, apesar de esta ter sido a motivação inicial para

¹Acreditava-se na formação de galáxias por instabilidade gravitacional, a partir do crescimento de flutuações na densidade de energia da matéria não-relativística, mas a origem dessas flutuações era desconhecida.

²Antes da década de 80, não haviam tantas observações que afirmassem a homogeneidade do Universo, mas esta era corroborada pelas medições do parâmetro de Hubble, sempre mostrando a relação linear entre velocidade de recessão e distância radial, independente da direção.

a formulação do modelo inflacionário por Alan Guth). Independentemente, Mukhanov [15], em colaboração com Chibisov, mostrou que perturbações na densidade de energia geradas numa fase acelerada cresceriam e dariam origem a galáxias e aglomerados. As perturbações geradas por flutuações estatísticas, num Universo em expansão usual (desacelerada), não gerariam um campo gravitacional grande o suficiente para aglomerar matéria e formar estruturas gravitacionalmente ligadas.

Como já foi mencionado, não há, na literatura, um cenário inflacionário padrão. Contudo, por suas simplicidade e flexibilidade, cenários nos quais o Universo é dominado por um campo escalar, submetido a um potencial, ganharam destaque entre os demais. Nestes casos, passou-se a buscar qual forma de potencial poderia dar origem a um período inflacionário que tanto resolvesse os problemas já citados (que serão mais minuciosamente destrinchados abaixo) quanto permitisse o retorno à evolução conforme o Modelo Padrão da Cosmologia.

Além de campos escalares, tem-se tentado obter inflação a partir de campos vetoriais [16], Branas [17], teorias de Cordas [18], lagrangeanas não-canônicas [19], gravitação modificada [20] etc. Neste Capítulo, serão abordados apenas o cenário inflacionário original, proposto por Alan Guth e, de uma maneira bem simples, o paradigma conhecido como rolamento lento. Inflação no contexto de gravitação modificada será apresentada posteriormente.

2.1 Os problemas abordados pela Inflação Cós- mica

Existem, na literatura, algumas abordagens diferentes para esses problemas. Será adotada aqui uma abordagem semelhante às adotadas por Mukhanov

e Weinberg ([9] e [10]). Outras abordagens podem ser encontradas em [7, 21, 8].

2.1.1 O Problema do Horizonte

O Problema do Horizonte é um problema de causalidade. Como foi visto na seção 1.4, existe uma distância máxima que fótons podem percorrer, num dado intervalo de tempo³.

Como foi mencionado no capítulo anterior, o nosso Universo observável é altamente homogêneo em grandes escalas, e esta afirmação tem sua melhor verificação na temperatura da Radiação Cósmica de Fundo⁴. A variação fracional desta é da ordem⁵ de 10^{-5} , ou seja, $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$, ao longo de todo o Céu [1].

Isto leva à conclusão de que regiões separadas por uma distância da ordem do tamanho do Universo observável, $d_p(t)$, têm alguma relação causal. Contudo, seja $D := d_p(t_o)$ a distância física correspondente ao nosso horizonte de partícula atual. Como D é uma distância física, evolui com o fator de escala. Pode-se determinar qual é a distância física correspondente a D no instante da recombinação:

$$D_{rec} = \frac{a(t_{rec})}{a(t_o)} D . \quad (2.1)$$

³Pode-se ver que, sendo a origem do tempo $t=0$ e a expansão do Universo acelerada, o horizonte de partícula é infinito!

⁴A Radiação Cósmica de Fundo mostra, na verdade, que o Universo é isotrópico. Como a nossa localização no Universo não é privilegiada, a isotropia deve ser verificada a partir de todos os pontos. Esta afirmação leva à conclusão de que o Universo é, também, homogêneo [5]

⁵Este valor é encontrado quando, a partir do mapa de temperaturas da Radiação Cósmica de Fundo, retira-se o termo de dipolo, pois este é causado pelo movimento de nossa galáxia.

Já o horizonte de partícula, na recombinação, media

$$d_p(t_{rec}) \propto t_{rec} = d_p(t_o) \frac{t_{rec}}{t_o} = D \left(\frac{a(t_{rec})}{a(t_o)} \right)^{3/2}. \quad (2.2)$$

Tomando a razão entre essas distâncias, encontra-se

$$\frac{D_{rec}}{d_p(t_{rec})} = \left(\frac{a(t_{rec})}{a(t_o)} \right)^{-1/2} = \left(\frac{T_{rec}}{T_o} \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Como $T_o \approx 3K \sim 10^{-4}eV$ e $T_{rec} \sim 10eV$,

$$\left(\frac{D_{rec}}{d_p(t_{rec})} \right)^3 \sim 10^{15/2}. \quad (2.4)$$

O volume próprio do presente horizonte, na recombinação, era $10^{15/2}$ vezes maior que o volume da região causalmente conectada. Se forem buscados instantes ainda mais no passado do Universo, essa razão aumenta cada vez mais.

Pode-se então resumir o problema do horizonte na seguinte pergunta:

Como poderia o Universo tornar-se tão homogêneo tendo iniciado a partir de tão grande região causalmente desconectada?

Poder-se-ia supor que o Universo começou com tal grau de homogeneidade. Por mais artificial que esse tipo de hipótese possa parecer, a questão de atribuir condições iniciais ao Universo é totalmente aberta. Como flutuações de energia tendem a crescer, para que, hoje, a flutuação na temperatura da Radiação Cós mica de Fundo seja tão pequena, esta deveria, inicialmente, ser muito finamente ajustada a 0. Senão, $\frac{\delta T}{T} \sim 1$.

2.1.2 O Problema da Chateza

O espectro de flutuações na temperatura da Radiação Cós mica de Fundo, juntamente com medidas do valor atual do parâmetro de Hubble favorecem $\Omega_{K,0} \approx 0$ [12]. Ou seja, com muito boa aproximação, o Universo é espacialmente chato.

O Problema da Chateza questiona a causa desse fato. Pode-se ver com clareza o motivo de isso ser um problema. Pela definição do parâmetro de densidade

$$\Omega(t) = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho}{H^2},$$

tem-se

$$\Omega(t) - 1 = \frac{K}{a^2 H^2} = \frac{K}{\dot{a}^2} = -\Omega_K(t). \quad (2.5)$$

Desde o começo da era dominada pela poeira, quando $T \approx 1eV$, até mais recentemente, o fator de escala $a(t)$ cresceu com $t^{2/3}$, então

$$\dot{a}^2 \propto t^{-2/3}$$

e, conseqüentemente,

$$\Omega_K \propto a(t)$$

cresceu 4 ordens de grandeza, pois, durante esta época, $a \propto T^{-1}$ e a temperatura do Universo diminuiu de $T \approx 1eV$ para $T_o \approx 10^{-4}eV$. Para que se tenha $\Omega_K(o) < 1$, seria necessário ter, na equipartição,

$$\Omega_K < 10^{-4}.$$

O mesmo ocorreu durante a Era da Radiação, pois

$$a \propto t^{1/2} \therefore \dot{a}^2 \propto t^{-1} .$$

Assim, durante esse estágio, Ω_K cresceu como $\Omega_K \propto a^2$. Do começo da produção de hélio, $T \approx 10^5 eV$ ao fim da Era da Radiação, o fator de escala cresceu 5 ordens de grandeza. Juntando este crescimento com o crescimento durante a Era da Matéria, conclui-se que, para que $\Omega_K(o) < 1$, na época da Nucleossíntese Primordial,

$$\Omega_K(t_{NP}) < 10^{-14} . \quad (2.6)$$

O Universo deveria ter começado muito finamente ajustado à chateza para reproduzir o Universo atualmente observado. Pode-se também dizer que a Chateza do Universo é um estado de equilíbrio (muito) instável.

Será visto agora, rapidamente, como um estágio acelerado durante a evolução do Universo resolve os problemas apresentados acima, e depois será explicado o mecanismo através do qual esta aceleração se realiza.

2.1.3 Solução dos Problemas

Pode ser visto, claramente, que se, durante algum período, a expansão do Universo for acelerada, \dot{a} aumenta e $|\Omega(t) - 1| \rightarrow 0$, resolvendo o Problema da Chateza. Para o Problema do Horizonte, se a expansão fosse acelerada, a equação (2.2) ficaria

$$d_p(t_{rec}) = d_p(t_o) \frac{t_{rec}}{t_o} = D \left(\frac{a(t_{rec})}{a(t_o)} \right)^n , \quad n < 1 , \quad (2.7)$$

o que inverteria o sinal do expoente na equação (2.3), ou seja, nosso Universo observável estaria todo contido, no passado, numa região de contato causal!

Como já foi mencionado, não há um mecanismo padrão de aceleração. Diversas maneiras de obter inflação cósmica foram sugeridas. Existir uma solução acelerada não é suficiente para que os problemas descritos sejam resolvidos. É necessário que a aceleração ocorra por tempo suficiente para que o Universo infle o bastante de forma a tornar-se espacialmente chato e causalmente conectado. Não menos importante é a recuperação, ao fim da inflação, da expansão usual, desacelerada. Estas são características básicas que os cenários inflacionários buscam.

Antes de seguir para a descrição da solução inflacionária, serão apresentadas estas mesmas ideias sob a perspectiva da termodinâmica do Universo primitivo. Esta era a abordagem usual na época da formulação dos modelos inflacionários.

2.1.4 O aspecto termodinâmico destes problemas

Será usado aqui o que foi desenvolvido nas seções 1.5.1 e 1.5.2. Calcula-se a presente densidade de entropia do Universo (1.63)

$$s_o = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s_o} T_o^3 \simeq 2,23 \times 10^{-11} (eV)^3, \quad (2.8)$$

lembrando-se que, como a entropia é adimensional, a densidade de entropia tem dimensão de [energia]³.

A entropia no nosso horizonte de partícula é

$$S = \frac{4\pi}{3} (d_p)^3 s.$$

Tem-se então

$$S_o = \frac{4\pi}{3} \times (3t_o)^3 s \approx 8,8 \times 10^{87} , \quad (2.9)$$

onde t é o valor atual da idade do Universo, medido em $(eV)^{-1}$. Tem-se que $t_o \approx 10^{32}(eV)^{-1}$.

Este é o valor da entropia contida atualmente no nosso horizonte de partícula. No começo do Universo, enquanto havia partículas saindo do equilíbrio e simetrias sendo quebradas, ocorria produção de entropia. O último evento desta natureza, na história do Universo, é a recombinação, quando elétrons, até então altamente espalhados pelos fótons da Radiação Cósmica de Fundo, foram capturados por núcleos atômicos, formando os átomos mais leves. Desde então, não houve produção significativa de entropia (se houve alguma). Se for calculado o valor da entropia contida no Universo logo após a recombinação ($t \approx 10^{13}s \simeq 10^{28}(eV)^{-1}$, $g_{*s} \approx 4$ e $T \approx 10^{-4/3}eV$),

$$S_{rec} \approx 6,8 \times 10^{82} . \quad (2.10)$$

Da recombinação até o presente, não ocorreram processos capazes de gerar tamanha diferença de entropia (quebras de simetria, desacoplamentos...)! Portanto, intimamente ligado ao Problema do Horizonte, está um problema de aumento da entropia do Universo. A questão que fica é a seguinte:

Qual mecanismo gerou tamanha entropia no Universo?

Será Visto agora como o Problema da Chateza se relaciona à entropia do Universo.

Como é sabido, a densidade de energia dos fótons é proporcional a a^{-4} , e

sua densidade de energia é dada por

$$\rho_\gamma = \left(\frac{\pi^2}{15}\right) T_\gamma^4 . \quad (2.11)$$

Para os fótons, $g = 2$.

Assim,

$$aT_\gamma = \left(\frac{15\rho_{0\gamma}a_0^4}{\pi^2}\right)^{1/4} = \text{constante} . \quad (2.12)$$

Então,

$$S_\gamma = a^3 s_\gamma = \left(\frac{4\pi^2}{45}\right) (aT_\gamma)^3 = \left(\frac{4\pi^2}{45}\right) \left(\frac{15\rho_{0\gamma}a_0^4}{\pi^2}\right)^{3/4} . \quad (2.13)$$

$\rho_{0\gamma} \simeq 2 \times 10^{-15} (eV)^4$. Como foi visto em (2.5), e usando que [22]

$$0.01 < \Omega_0 < 2 :$$

$$\begin{cases} k = 1 \Rightarrow \frac{1}{a_0^2 H_0^2} < 1 & \therefore a_0 > H_0^{-1} \\ k = -1 \Rightarrow \frac{1}{a_0^2 H_0^2} < 0,99 & \therefore a_0 > H_0^{-1} . \end{cases} \quad (2.14)$$

Como $H^{-1} = 3000h^{-1}Mpc \simeq 6,7 \times 10^{32} eV^{-1}$, a constatação de que o Universo é, com boa aproximação, espacialmente chato, implica que a entropia total do Universo é

$$S_\gamma \simeq 3,4 \times 10^{87} . \quad (2.15)$$

Assim, ambos os problemas podem ser refraseados na seguinte pergunta:

Por que a entropia do Universo é tão grande?

Como foi mostrado acima 2.1.3, uma época acelerada na evolução do Universo poderia resolver os problemas da chateza e horizonte. Ve-se agora que esta solução, além de incluir uma fase acelerada, deve produzir uma grande quantidade de entropia!

2.2 A solução Inflacionária

Serão discutidos aqui os cenários mais simples obtidos a partir de campos escalares. Esta discussão será iniciada com o trabalho já citado de Alan Guth [14]. Esta versão é atualmente conhecida como "Velha Inflação". O paradigma de Rolamento Lento, mais usado atualmente, dentro do contexto de Inflação Cós mica, será comentado brevemente.

2.2.1 Velha Inflação: a versão original

Num trabalho publicado em 1980 [23], Guth, em colaboração com Henry Tye, mostrou que, no contexto de Teorias de Grande Unificação, uma Transição de Fase de primeira ordem, na qual ocorresse um superresfriamento, poderia resolver o problema da abundância (esperada) de monopólos magnéticos. Analisando a influência desta transição para a expansão do Universo, Guth chegou à conclusão de que um Universo dominado por um campo no estado de vácuo daria origem a uma expansão exponencial. Rapidamente ele notou que esta expansão poderia resolver os problemas do horizonte e da chateza.

Durante a Transição de Fase, a dinâmica do Universo era dominada por um campo escalar, o *ínflaton*. A altíssimas temperaturas, o potencial ao qual o ínflaton está submetido apresenta apenas um ponto de equilíbrio, localizado em $\phi = 0$. Conforme a temperatura diminui, o potencial começa a

desenvolver um segundo ponto de equilíbrio figura (2.1). Abaixo de uma certa temperatura crítica T_c , este novo ponto de equilíbrio tornou-se o ponto de equilíbrio estável, também chamado *Vácuo Verdadeiro*, e o anterior tornou-se um ponto de equilíbrio metaestável, ou *Falso Vácuo*.

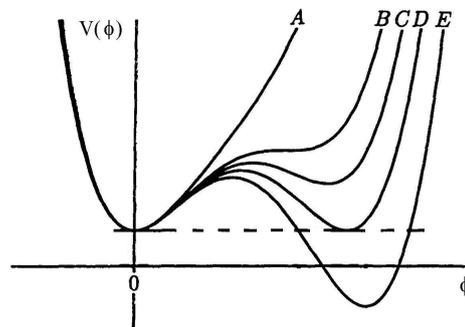


Figura 2.1: Potencial do campo escalar. Muito acima de uma temperatura crítica T_c , o potencial tem apenas um mínimo (curva A). Conforme a temperatura diminui, o potencial desenvolve outro mínimo e, em T_c , estes se tornam igualmente favoráveis (curvas B, C e D). Abaixo da T_c é mais favorável, energeticamente, que o campo escalar esteja concentrado no novo mínimo (curva E).

Ocupando o mínimo do potencial em $\phi = 0$, o campo se encontra no estado de Falso Vácuo. Classicamente, o campo está fadado a permanecer neste estado indefinidamente. Quanticamente, existe a possibilidade do campo tunelar para o estado de Vácuo Verdadeiro figura (2.2).

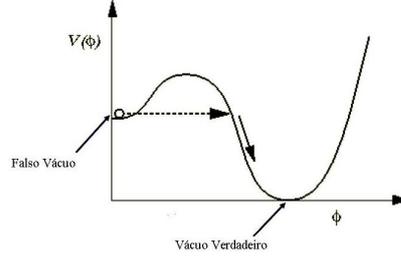


Figura 2.2: Forma do potencial do campo escalar abaixo da Temperatura Crítica. A seta pontilhada indica que a Transição de Fase ocorre pelo tunelamento do Falso Vácuo ao Vácuo Verdadeiro.

Com o Universo no estado de Falso Vácuo, o campo escalar permanece estático e, como foi visto na seção 1.2.2,

$$\rho_{vac} = V(\phi) \text{ (constante) ,}$$

e

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\phi) = \frac{8\pi G}{3} \rho_{vac} \text{ (constante).} \quad (2.16)$$

Consequentemente, a expansão é exponencial

$$a(t) = a(t_0)e^{\chi(t-t_0)} , \quad (2.17)$$

onde $\chi = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_{vac}}$. Nas regiões do Universo que sofrem expansão exponencial, antes de ocorrer a Transição de Fase, não há produção de entropia e, como não é esperada nenhuma alteração nos graus de liberdade das partículas relativísticas, $a \propto T^{-1}$ (ver seção 1.5). Assim, a expansão acelerada leva a um resfriamento exponencial do Universo.

A taxa de tunelamento depende de detalhes que não serão abordados.

A informação necessária (para não dizer indispensável) é que, a baixíssimas temperaturas, a taxa de tunelamento por unidade de volume (Γ_{vac}), é constante [14], determinada pela ação do campo escalar, assim como pela escala de energia na qual ocorre a transição [24, 25, 26, 27]. Conforme o tempo passava, regiões distintas do Universo tunelavam do estado de Falso Vácuo para o Vácuo Verdadeiro.

Seguindo o raciocínio que levou à equação (2.1), para que nosso Universo atual tenha estado todo contido numa região de contato causal logo após o período inflacionário, o fator de escala deve ter crescido, durante a Inflação, por um fator de 10^{28} (ver seção 2.1.3).

A Transição de Fase ocorre da seguinte maneira: o campo escalar tem uma certa probabilidade de tunelar do estado de Falso Vácuo para o de Vácuo Verdadeiro. Em certas regiões do Universo, este tunelamento ocorrerá, e o campo passará a ocupar o ponto de equilíbrio estável do potencial. A diferença de energia entre esses dois estados, como mostrado em [25, 26], fica armazenada nas fronteiras desta região, na forma de calor latente. Esta região é chamada de bolha, e diz-se que a energia, ao ocorrer a Transição de Fase, fica armazenada nas paredes da bolha. Após formada, o raio da bolha, se maior que um raio crítico [25], cresce aproximadamente com a velocidade da luz.

No começo da Transição de Fase, o Universo estava à temperatura crítica T_c . Conforme sofreu expansão exponencial, a temperatura do Universo diminuiu da mesma forma e, no momento em que a Transição de Fase ocorre, a temperatura do Universo é T_s , muito abaixo de T_c .

Para que a Transição de Fase se complete, dando origem a um Universo homogêneo em grandes escalas, é necessário que ocorra percolação, ou seja, que as bolhas formem uma totalidade, ocupando uma região grande o sufi-

ciente para abarcar todo o nosso Universo observável. Conforme as bolhas crescem, elas podem começar a colidir. Nesse processo de colisão, a energia, inicialmente armazenada na parede que sofreu a colisão, flui pelo interior das bolhas.

Esta liberação de energia pelo interior da bolha aquecerá o interior desta região até uma temperatura T_r (reaquecimento), da mesma ordem de T_c , e um aumento na entropia do Universo se dará por um fator da ordem de $(T_r/T_s)^3$ [14]. Se o Universo tiver sofrido um resfriamento de 28 ordens de magnitude ou mais, este processo produzirá a entropia presentemente esperada no Universo!

Para reproduzir os primórdios do nosso Universo, essa energia deve entrar em equilíbrio térmico (homogeneizar-se) no interior da bolha. Portanto, não é suficiente que ocorra a percolação. Deve haver também homogeneização da energia armazenada nas paredes da bolha.

Uma bolha nucleada no instante t_0 tem seu raio igual a

$$d(t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')} = \frac{1}{\chi} (e^{-\chi t_0} - e^{-\chi t}) . \quad (2.18)$$

Assintoticamente, este raio tende a [28]

$$D(t_0) = \frac{1}{\chi} e^{-\chi t_0} . \quad (2.19)$$

A probabilidade $p(t)$ de que um dado ponto permaneça na região de Falso Vácuo (não sofra Transição de Fase) é

$$p(t) = e^{\left[-\frac{4\pi}{3}\Gamma_{vac} \int_{t_b}^t dt' (a(t')d(t', t_0))^3\right]} , \quad (2.20)$$

onde t_b é o começo da Transição de Fase.

Após um longo tempo (em relação ao tempo cósmico, ou seja, $t - t_b \gg$

χ^{-1}),

$$p(t) \approx e^{-\frac{4\pi}{3}r\chi(t-t_b)} , \quad (2.21)$$

onde $r = \frac{\Gamma_{vac}}{H^4}$.

Para que os problemas (horizonte e chateza) sejam resolvidos, como foi visto acima, o fator de escala deve crescer, pelo menos, por 28 ordens de magnitude, antes que uma fração relevante do Universo tenha sofrido Transição de Fase. Isso pode ser obtido se [28]

$$r \lesssim 3/(4\pi \ln 10^{28}) = 4 \times 10^{-3} .$$

Apesar de a resolução dos problemas cosmológicos favorecer r muito baixo, no mesmo trabalho os autores mostram que, se $r < 10^{-6}$, não há percolação. Além disso, a região onde $10^{-6} < r < 10^{-3}$ so é satisfeita para um ajuste muito fino dos parâmetros.

Ainda restaria a possibilidade de nosso Universo observável não ser originário da percolação de bolhas formadas na Transição da Fase. Uma pequena região, na qual as bolhas colidissem e a energia liberada pudesse ser homogeneizada, resolveria o problema. Mas, no mesmo trabalho, é mostrado que, para a maioria das bolhas, as colisões que elas sofrem são com bolhas muito menores, o que impossibilita sua homogeneização, uma vez que parte da energia continuaria distribuída pela parede da bolha (a parte que não colidiu), enquanto que outra parte iria se espalhar pelo interior da bolha. Para que haja homogeneização das bolhas, é necessário que, além de elas não serem grandes (para que haja tempo de ocorrer a homogeneização), elas devem ter, aproximadamente, o mesmo tamanho, para que a energia liberada se espalhe igualmente por toda a região. Para que isso aconteça, a inflação deve ser

rápida.

Com isso, concluiu-se que o cenário inflacionário, da forma como foi proposto por Alan Guth, não era viável. Apesar disso, a ideia de uma Inflação Cósmica continua o principal paradigma para explicar os Problemas do Horizonte, Chateza e geração de perturbações para a formação de estruturas.

Durante a década de 80, e na primeira metade da década de 90, principalmente, diversos outros cenários inflacionários foram sugeridos. Alguns se tornaram mais influentes ([29, 30, 31]. Para uma revisão destes e de outros, [32]). Neste ínterim, uma nova ideia, dentro do contexto de Inflação Cósmica, foi lançada [33]. Esta ideia ficou conhecida como *Rolamento Lento*. A ideia de Rolamento Lento reúne uma variedade enorme de modelos inflacionários e aponta características básicas necessárias tanto para que o cenário seja consistente quanto para que esteja em acordo com as observações.

Será feita agora uma breve descrição deste paradigma. Para revisões, veja [34, 8, 9, 10, 35].

2.2.2 Rolamento Lento

Pela equação de aceleração,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3} (\dot{\phi}^2 - V) , \quad (2.22)$$

ve-se que, para que o campo escalar produza aceleração,

$$\dot{\phi}^2 \ll V.$$

Com esta condição, a equação de Klein-Gordon fica dominada pelo potencial do inflaton.

A existência de uma solução acelerada não é suficiente para garantir-se

que o cenário seja viável. É necessário que a energia cinética do campo escalar permaneça subdominante durante o tempo de Hubble, $\Delta t_H \equiv H^{-1}$, intervalo de tempo durante o qual o fator de escala, neste caso, cresce por um fator e^1 . É comum utilizar H^{-1} como escala de tempo. Assim, a condição acima implica que

$$\ddot{\phi} \ll \frac{\dot{\phi}}{\Delta t_H} = H\dot{\phi} .$$

Para que haja retorno à evolução ordinária, com o Universo quente e desacelerado, sem comprometer teorias já bem estabelecidas sobre o Universo primitivo (como, por exemplo, a Nucleossíntese Primordial), e para que não haja conflito com as observações (bolhas de diferentes tamanhos causando anisotropias, como vimos acima), a inflação deve ser rápida. Isso favorece a expansão exponencial. Este tipo de expansão, dentro da aproximação de rolamento lento, é obtido se o potencial do ínflaton for, durante o período inflacionário, aproximadamente constante. As equações de Klein-Gordon e Friedmann ficam então

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V_{,\phi}}{3H} . \quad (2.23)$$

e

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \rightarrow \text{constante} , \quad (2.24)$$

e a expansão é exponencial.

Pode-se resolver estas duas equações para encontrar $a(\phi)$. Basta notar que

$$H = \frac{d \ln a}{dt} = \dot{\phi} \frac{d \ln a}{d\phi} = -\frac{V_{,\phi}}{3H} \frac{d \ln a}{d\phi} . \quad (2.25)$$

Usando (2.24)

$$-V_{,\phi} \frac{d \ln a}{d\phi} = 8\pi V G , \quad (2.26)$$

e então

$$a(\phi) = a_i e^{8\pi \int_{\phi_i}^{\phi} \frac{V_{,\phi}}{V} d\phi} . \quad (2.27)$$

Para um potencial tipo lei-de-potência $V = \lambda_n \phi^n / n$, onde λ_n tem dimensão de (energia)⁴⁻ⁿ,

$$a(\phi(t)) = a_i e^{\frac{4\pi}{n} (\phi_i^2 - \phi^2(t))} . \quad (2.28)$$

Como foi visto em 1.2.2, na parte sobre campos escalares, caso o potencial seja constante (não é o caso exatamente, mas, com boa aproximação, se o valor inicial do campo for baixo), mesmo que a energia cinética do campo seja dominante inicialmente, esta decai rapidamente e a expansão do Universo tende à aceleração semelhante a de Sitter.

Pode-se resumir as condições acima colocadas nas chamadas *Condições de Rolamento Lento*:

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (2.29)$$

e

$$\eta \equiv \frac{1}{8\pi G} \left| \frac{V_{,\phi\phi}}{V} \right| \ll 1 \quad (2.30)$$

(se apenas a primeira derivada do potencial fosse muito pequena, o campo poderia estar próximo a um mínimo do potencial, situação na qual não have-

ria rolamento lento).

Este paradigma engloba tanto inflação com campo escalar inicialmente pequeno figura (2.3), como inflação com o campo escalar inicialmente alto figura (2.4)

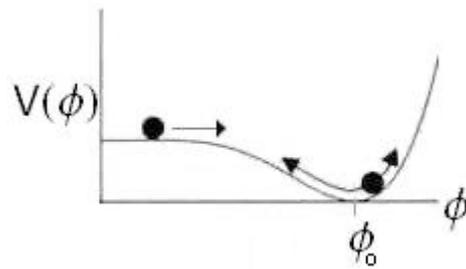


Figura 2.3: Primeiramente, o campo rola pela parte aproximadamente plana do potencial. Durante este período, ocorre a expansão semelhante a de Sitter. Ao fim da Inflação, o campo chega próximo do mínimo do potencial e oscila, perdendo sua energia por atrito.

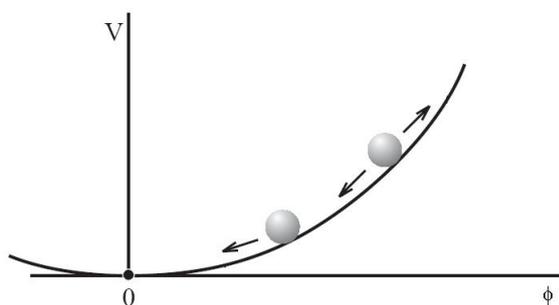


Figura 2.4: O potencial não apresenta parte plana. Este potencial pode ser, por exemplo, uma potência do campo escalar. Assim, as condições de rolamento lento são satisfeitas para campos altos. Neste caso, o termo de atrito na equação de Klein-Gordon impede que o campo role rápido ao longo do potencial, garantindo a expansão semelhante a de Sitter. Ao fim da Inflação, o campo chega próximo do mínimo do potencial e oscila, novamente perdendo sua energia por atrito.

Em rolamento lento, pode não haver percolação pois, em certos casos, uma única bolha pode crescer o suficiente para abarcar todo o Universo observável. Nestas situações, a entropia do Universo é gerada pelas oscilações do campo escalar quando este está próximo ao mínimo do potencial.

Este tipo de expansão pode levar à ocorrência de Inflação em diferentes regiões do Universo, dando origem a múltiplos mini-Universos, independentes um do outro e com características diferentes [36].

Como já foi mencionado, no começo deste capítulo, uma das maneiras mais utilizadas de restringir modelos inflacionários é através do espectro de perturbações escalares. Estas perturbações são flutuações do inflaton. No próximo capítulo, será analisada a evolução das flutuações deste campo escalar, e suas consequências observacionais.

Um outro assunto, que não faz parte do trabalho que desenvolvemos, mas que merece ser mencionado dentro do contexto da Cosmologia Inflacionária, é o Reaquecimento. Ao fim da inflação, as partículas do inflaton devem decair em radiação. No contexto de Velha Inflação, esta conversão da energia em radiação se dá pelas colisões das bolhas. No contexto de Rolamento Lento, esta conversão se dá quando o campo escalar, oscilando em seu potencial, figura (2.3) e figura (2.4), perde energia por atrito, decaindo em radiação. Caso o produto deste primeiro decaimento não seja radiação, pode haver um segundo reaquecimento [35].

O decaimento do inflaton pode ocorrer antes da fase oscilatória, no chamado Pré-aquecimento. Este ocorre durante a fase na qual a aproximação de rolamento lento já não é mais válida, e a energia é dominada pelo termo cinético, sendo então $\rho \simeq P \propto a^{-6}$. Nesta situação, dada a interação do inflaton com outras partículas, a transferência de energia pode ser bastante eficiente, convertendo praticamente toda a energia do inflaton em alguns modos do campo de radiação [9, 35, 37, 38, 39].

Capítulo 3

Perturbações Inflacionárias

O estudo de perturbações cósmicas é essencial para fazer-se a conexão entre teoria e observação. Pelo lado teórico, tem-se flutuações da métrica que podem ser interpretadas como um campo gravitacional perturbativo. Estas são geradas pelas flutuações do inflaton, e causam aglomeração de matéria em certas regiões do Universo, gerando sobredensidades.

Essas sobredensidades são responsáveis pela formação de galáxias, por reforçarem os poços no potencial gravitacional, atraindo ainda mais matéria e assim, por instabilidade gravitacional, galáxias e aglomerados são formados. Além disso, os fótons, ao atravessarem galáxias, em geral, perdem energia para sair do campo gravitacional destas. Esta é uma forma de gerar anisotropias na Radiação Cósmica de Fundo.

Será seguido um roteiro bastante simples: flutuações quânticas em torno do valor clássico do campo escalar (inflaton) geram flutuações na métrica de fundo. Será calculado o espectro das perturbações da métrica que será comparado às observações.

Não será abordado o mecanismo de formação de estruturas. Para tal, sugere-se [8, 11, 9, 10, 35]. Serão focadas a geração de perturbações a partir

da inflação e o espectro de perturbações observado.

Antes de começar-se a abordar as perturbações em si, vale mencionar que o espectro gerado pela inflação não é **exatamente** o observado. Como foi mencionado em 1.4.2, escalas saem do horizonte de curvatura durante a inflação e, após o fim desta, com a evolução desacelerada do Universo, estas escalas entram novamente no horizonte. O espectro gerado pela inflação é comparado com o espectro das perturbações neste momento de entrada. A evolução do espectro desde então até o presente, quando ele é observado, é dada pela *Função de Transferência*. Estas são calculadas levando-se em conta todas as interações da matéria (bariônica, relativística e escura).

3.1 Flutuações no campo escalar e na métrica

Considera-se flutuações do inflaton em torno do campo homogêneo,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t) . \quad (3.1)$$

Antes de se escrever flutuações da métrica, precisa-se fazer certas considerações de extrema importância.

Sabe-se que se pode decompor um vetor como a soma de um vetor sem divergência e o gradiente de uma função escalar.

$$v^\alpha = a^\alpha + b^{,\alpha} \text{ onde } a^\alpha_{,\alpha} = 0 .$$

Esta componente sem divergência é chamada de *modo vetorial*, e a função escalar é chamada *modo escalar*. Da mesma forma, um tensor de ordem 2 pode ser escrito como a soma de um tensor de ordem 2 sem divergência e sem traço, o gradiente de um modo vetorial, sem divergência, e a segunda

derivada de uma função escalar (este tensor de ordem 2 é chamado de *modo tensorial*).

$$W_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + P_{\alpha;\beta} + C_{,\alpha\beta} \quad \text{onde } A_{\alpha}^{\alpha} = 0 ; A_{\alpha\beta}{}^{;\alpha} = A_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0 \text{ e } P_{\alpha}{}^{;\alpha} = 0 .$$

É sabido que, ao se analisar a evolução de perturbações na aproximação linear, e fazendo a decomposição acima, a evolução de modos escalares, vetoriais e tensoriais é desacoplada [8]. Como inflação é gerada por um campo escalar (pelo menos, no trabalho desenvolvido aqui), este só tem perturbações escalares.

Não será mostrado aqui, mas perturbações vetoriais¹ (na métrica) decrescem rapidamente com o fator de escala [35] e perturbações tensoriais dão origem a ondas gravitacionais. Estas, apesar de não serem geradas pelas flutuações do inflaton, crescem com a expansão acelerada, e sua medição imporá fortes vínculos sobre modelos inflacionários, podendo descartar vários modelos, senão todos (comentar-se-á brevemente sobre essa possibilidade quando se falar do espectro de potências)! O fato de ondas gravitacionais ainda não terem sido observadas já serve para descartar modelos que gerem ondas gravitacionais com um espectro cuja amplitude seja comparável à das perturbações escalares. Estes conceitos (amplitude e espectro) ficarão mais claros no decorrer deste capítulo.

Considera-se, agora, apenas a parte escalar das flutuações da métrica, em torno da solução homogênea (a métrica será escrita, por conveniência, em

¹Perturbações vetoriais seriam indicativos de anisotropias. Pode-se argumentar, também, por conservação de momento angular que, com a expansão isotrópica, qualquer vetor deve ter seu módulo atenuado pela expansão.

termos do tempo conforme)

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1+2\varphi)d\tau^2 - 2B_{,i}d\tau dx^i + ((1-2\psi)\delta_{ij} - 2E_{,ij})dx^i dx^j] . \quad (3.2)$$

Não existe uma maneira unívoca de separar, numa dada grandeza física, a parte não-perturbativa (fundo) da parte perturbativa. A escolha de uma dada separação entre fundo e perturbação é chamada escolha de calibre. Será visto agora como relacionar duas escolhas diferentes de calibre. Esta parte seguirá de perto as referências [8, 9, 40].

3.1.1 Escolha de Calibre

Considere-se duas variedades: Uma variedade \mathcal{M} , na qual as grandezas físicas estão definidas, e uma variedade \mathcal{N} , a variedade de fundo, sem perturbações, na qual as coordenadas estão fixas x_f^α .

Seja uma função qualquer Q definida em \mathcal{M} e a correspondente ${}^{(0)}Q$ definida em \mathcal{N} . Um difeomorfismo [3, 41]

$$\mathcal{D} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$$

induz um sistema de coordenadas ($\mathcal{D} : x_f^\alpha \rightarrow x^\alpha$) em \mathcal{M} . A diferença entre o valor da função Q calculada num dado ponto p da variedade \mathcal{M} , $Q(p)$, e o valor da função ${}^{(0)}Q$ calculada no ponto correspondente à imagem inversa do ponto p pela transformação \mathcal{D} , ${}^{(0)}Q(\mathcal{D}^{-1}(p))$, é o que se chama de perturbação de Q , δQ [40]:

$$\delta Q = Q(p) - {}^{(0)}Q(\mathcal{D}^{-1}(p)) . \quad (3.3)$$

Um outro difeomorfismo $\tilde{\mathcal{D}}$ induz um outro sistema de coordenadas $(\tilde{\mathcal{D}} : x_f^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha)$ em \mathcal{M} e uma nova perturbação $\delta\tilde{Q}$:

$$\delta\tilde{Q} = \tilde{Q}(p) - {}^{(0)}Q(\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(p)) . \quad (3.4)$$

É importante notar que ambos os difeomorfismos são de \mathcal{N} em \mathcal{M} , e assim ${}^{(0)}Q(\mathcal{D}^{-1}(p)) = {}^{(0)}Q(\tilde{\mathcal{D}}^{-1}(p))$ figura (3.1).

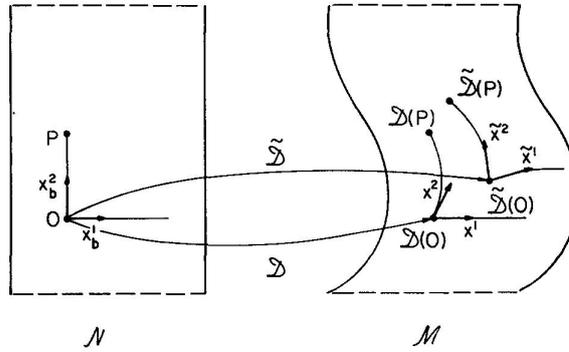


Figura 3.1: Dois difeomorfismos diferentes induzindo dois sistemas de coordenadas diferentes na mesma variedade \mathcal{M} .

A mudança de calibre é dada pela mudança de correspondência $\mathcal{D} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ entre as variedades, conseqüentemente uma mudança nas coordenadas $x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha$ induzidas nesta variedade. Pode-se considerar mudanças infinitesimais nas coordenadas

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta) \quad (3.5)$$

Ao se escolher calibres diferentes, as perturbações δQ transformam-se como

$$\Delta Q = \delta\tilde{Q} - \delta Q = \mathcal{L}_\xi Q = \mathcal{L}_\xi {}^{(0)}Q , \quad (3.6)$$

onde \mathcal{L}_ξ é a Derivada de Lie ao longo do vetor ξ . A última igualdade é devida a ξ ser um vetor infinitesimal, e assim $\mathcal{L}_\xi \delta Q = \mathcal{O}(2)$.

As perturbações de campos escalares, vetoriais e tensoriais genéricos transformam-se como [8, 9]

$$\delta \tilde{\chi} = \delta \chi - {}^{(0)}\chi_{,\alpha} \xi^\alpha \quad (3.7)$$

$$\delta \tilde{v}^\alpha = \delta v^\alpha - {}^{(0)}v^\alpha_{,\beta} \xi^\beta + {}^{(0)}v^\beta \xi^\alpha_{,\beta} \quad (3.8)$$

$$\delta \tilde{A}^\alpha_\beta = \delta A^\alpha_\beta - {}^{(0)}A^\alpha_{\beta,\gamma} \xi^\gamma + {}^{(0)}A^\gamma_{\beta} \xi^\alpha_{,\gamma} - {}^{(0)}A^\alpha_{\gamma} \xi^\gamma_{,\beta} . \quad (3.9)$$

As componentes espaciais do vetor infinitesimal $\xi^\alpha = (\xi^{(0)}, \xi^i)$ podem ser escritas como

$$\xi^i = \xi^i_\perp + \aleph^i, \quad (3.10)$$

onde $\xi^i_{\perp,i} = 0$ é um vetor com divergência nula e \aleph é uma função escalar.

Para a perturbação do inflaton e para as componentes da métrica perturbada,

$$\delta \tilde{\phi} = \delta \phi - {}^{(0)}\phi_{,0} \xi^{(0)} \quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \varphi - \frac{1}{a} (a\xi^{(0)})' & \tilde{B} &= B + \aleph' - \xi^{(0)} \\ \tilde{\psi} &= \psi + \frac{a'}{a} \xi^{(0)} & \tilde{E} &= E + \aleph . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Com as componentes da métrica, pode-se construir duas grandezas in-

variantes de calibre:

$$\Phi = \varphi - \frac{1}{a} [a(B - E')] \quad \Psi = \psi + \frac{a'}{a} (B - E') \quad (3.13)$$

e a perturbação do campo escalar invariante de calibre

$$\bar{\delta}\phi = \delta\phi - {}^{(0)}\phi' (B - E') . \quad (3.14)$$

Ao se usar grandezas invariantes de calibre existe a conveniência de desenvolver os cálculos em qualquer sistema de coordenadas.

A escolha do calibre altera a própria interpretação das coordenadas utilizadas. Por exemplo, no espaço-tempo não perturbado, as hipersuperfícies de tempo constante são ortogonais às linhas (fios, ou *threads*, como comumente encontrado na literatura [8]) ao longo das quais x^i é constante. Isso já não é verdade na presença das perturbações que estamos considerando, pois a função B , conhecida como *Função de Deslocamento* (*Shift Function*), desfaz essa ortogonalidade. Ver figura (3.2).

Mesmo na ausência desta função, a passagem do tempo não se dá da mesma forma entre dois calibres para os quais a perturbação φ seja diferente.

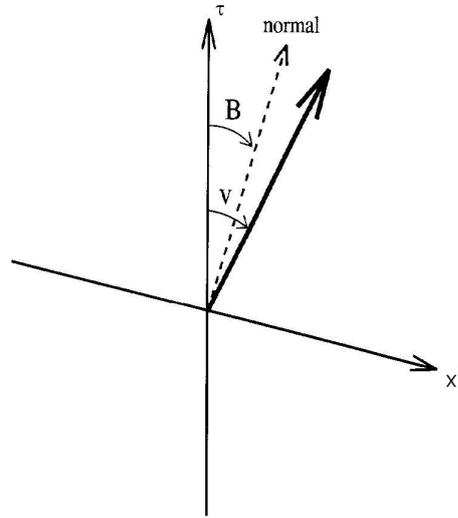


Figura 3.2: A linha indicada como τ define a linha de x^i constante. A linha x^i denota a hipersuperfície de tempo constante, ou "fatia" (slice). A figura deixa explícito que estas não são ortogonais, e esta não-ortogonalidade é dada pela função de deslocamento, que define a linha ortogonal à hipersuperfície de tempo constante. A linha deslocada de τ pelo vetor \vec{v} indica a direção de propagação de um fluido com velocidade \vec{v} arbitrária.

Poderiam ser destacados, aqui, dois calibres diferentes. Um deles, mais por sua importância histórica. O outro, além da importância histórica, pelo desenvolvimento que será feito aqui, ao se avaliar a evolução das perturbações.

Não se entrará em detalhes sobre o primeiro, o *Calibre Síncrono* [9]. Será dito apenas que ele é definido como tendo $\varphi = B = 0$, ou seja, os fios são curvas geodésicas e são ortogonais às hipersuperfícies de tempo constante. Porém, como pode ser visto pelas equações (3.12), esta escolha não deixa fixo o sistema de coordenadas utilizado. Caso haja um sistema de coordenadas (τ, x^i) que satisfaça a estas condições, um outro $(\tilde{\tau}, \tilde{x}^i)$ também as satisfará,

desde que [9]

$$\tilde{\tau} = \tau + \frac{C_1}{a} \quad \tilde{x}^i = x^i + C_{1,i} \int \frac{d\tau}{a} + C_{2,i} . \quad (3.15)$$

C_1 e C_2 são funções arbitrárias das coordenadas espaciais. Esta liberdade dificulta em muito a interpretação dos resultados.

Será dito um pouco mais sobre o segundo.

O Calibre Newtoniano (ou longitudinal)

Neste calibre, coordenadas são escolhidas tais que $B = E = 0$. Com esta escolha, a métrica volta a ser diagonal e, pela equação (3.13), ve-se que as funções φ e ψ correspondem às grandezas invariantes de calibre Φ e Ψ . A métrica perturbada é, então

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[- (1 + 2\Phi) + (1 - 2\Psi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right] . \quad (3.16)$$

Caso estas perturbações sejam geradas por um fluido isotrópico (como é o caso do campo escalar considerado), pode-se ver (será mostrado abaixo) que $\Phi = \Psi$. Comparando esta métrica com a de Schwarzschild [5], pode-se interpretar este campo como o campo gravitacional gerado pelas perturbações do ínflaton.

Pela equação (3.14), ve-se que, neste calibre, $\delta\phi = \overline{\delta\phi}$. Este calibre torna-se, então, extremamente útil pois, para se escrever as equações perturbadas numa forma invariante por calibre, basta tomá-las no calibre Newtoniano (fazendo $B=E=0$) e fazer a identificação entre estas e as perturbações invariantes de calibre [9]! Encontrar as equações para as variáveis invariantes de calibre a partir das perturbações genéricas e usando (3.13) e (3.14) é muito

mais trabalhoso.

Para se fazer a conexão entre teoria e observação, como já foi mencionado anteriormente, usa-se o espectro de potências gerado pela inflação. É no espectro da perturbação ζ que se interessará². Agora esta perturbação será definida e se mostrará como esta se relaciona a Φ e a ϕ , e seu espectro será calculado.

3.2 A perturbação de Curvatura; Evolução das Perturbações

Pode-se definir a parte espacial da métrica de uma maneira genérica [35]:

$$g_{ij} = a(\mathbf{x}, t)\gamma_{ij}(\mathbf{x}, t) , \quad (3.17)$$

onde

$$a(\mathbf{x}, t) = a(t)e^{\chi(\mathbf{x}, t)} \quad (3.18)$$

é o fator de escala local. Em primeira ordem, $\chi = -\psi$ (3.2).

O número de e-folds entre duas fatias genéricas é

$$N_{12}(\mathbf{x}) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} dt = H\delta t - \psi(\mathbf{x}, t_2) + \psi(\mathbf{x}, t_1) , \quad (3.19)$$

onde $H = \frac{1}{a} \frac{da(t)}{dt}$ e $\delta t = t_2 - t_1$ é a diferença na definição de tempo entre os dois sistemas de coordenadas, o que caracteriza a diferença entre as fatias.

²O espectro desta perturbação, especificamente, está associado à distribuição de galáxias. As anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo estão associadas ao espectro de Φ , que se relaciona com ζ de uma maneira muito simples, como se verá.

3.2. A PERTURBAÇÃO DE CURVATURA; EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES 65

Assim, define-se a perturbação de curvatura, numa fatia genérica:

$$\zeta = H\delta t - \psi . \quad (3.20)$$

Partindo da variedade de fundo para uma variedade física qualquer, e pela equação (3.7),

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = - {}^{(0)}\dot{\phi}(t)\delta t .$$

Assim, a (3.20) fica

$$\zeta = - \left(\psi + H \frac{\delta\phi}{{}^{(0)}\dot{\phi}} \right) = - \left(\Psi + H \frac{\overline{\delta\phi}}{{}^{(0)}\dot{\phi}} \right) = - \left(\Psi + \mathcal{H} \frac{\overline{\delta\phi}}{{}^{(0)}\phi'} \right) . \quad (3.21)$$

Onde foram usados (3.13) e (3.14).

Serão calculadas agora as perturbações do tensor energia-momento. Com a conservação deste e as equações de Einstein, a evolução da perturbação do campo escalar será desenvolvida e seu espectro será calculado. A este desenvolvimento deve ser adicionada a amplitude inicial das perturbações. Esta é dada pelas flutuações de vácuo do inflaton. Então, uma teoria completa de perturbações inflacionárias deve ser uma teoria quântica.

Poderíamos ser escrita a lagrangeana clássica e, a partir desta, quantizar o campo na equação de movimento. Porém, este procedimento leva a incorreções na normalização dos modos encontrados [42]. Assim, é necessário quantizar a própria ação e, a partir desta, encontrar as equações clássicas às quais os campos estão submetidos. Para encontrar as equações de primeira ordem, será necessário expandir a ação em segunda ordem nas perturbações.

Antes de se calcular as equações quânticas perturbativas, serão encontradas as equações clássicas não-perturbadas. Estas serão úteis ao se analisar as perturbações quânticas. Para tal, precisa-se do tensor energia-momento

do campo escalar.

3.2.1 O tensor energia-momento

Parte-se da ação do campo escalar [9]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ - \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} + V(\phi) \right] \right\} . \quad (3.22)$$

Variando-a em relação ao campo ϕ , encontra-se a equação

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} \right) - \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 . \quad (3.23)$$

Tem-se então a equação de Klein-Gordon não perturbada

$${}^{(0)}\phi'' + 2\mathcal{H}{}^{(0)}\phi' + a^2 V_{,\phi} = 0 , \quad (3.24)$$

(onde ' é derivação em relação ao tempo conforme).

Aqui vale a pena chamar à atenção um fato importante: tanto a equação (3.22) quanto (3.23) podem ser encontradas na literatura com sinais diferentes. Esta diferença é devida à escolha de assinatura da métrica. Como foi falado na parte de Notações e Convenções desta Dissertação, a métrica aqui é usada com assinatura $(-+++)$. Então, a energia cinética do nosso campo escalar é

$$-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} .$$

O importante, ao se escrever a lagrangeana, é não se perder de vista que ela deve ter a forma $\mathcal{L} = T - V$, onde T é a energia cinética e V , a potencial. Tendo isso em vista e reconhecendo quem são as energias cinética e potencial dos campos em questão, a lagrangeana é imediata. Para conferir que a lagrangeana foi escrita corretamente, deve-se ter também em mente que,

3.2. A PERTURBAÇÃO DE CURVATURA; EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES 67

não importa qual a assinatura usada, as equações de campo devem ser as mesmas.

O tensor energia-momento é encontrado variando-se a ação (3.22) em relação à métrica. Tem-se

$$T^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\beta}} - \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \right) \delta^{\alpha}_{\beta} . \quad (3.25)$$

Escrevendo a ação completa, incluindo a parte gravitacional e o campo escalar,

$$S = \int \left\{ \frac{-1}{16\pi G} R - \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\beta}} + V(\phi) \right] \right\} \sqrt{-g} d^4x , \quad (3.26)$$

encontra-se as equações de campo

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} ({}^{(0)}\phi')^2 + V(\phi) \right] \quad (3.27)$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 = 8\pi G \left[-\frac{1}{2} ({}^{(0)}\phi')^2 + V(\phi) a^2 \right] . \quad (3.28)$$

O desenvolvimento destas depende do modelo inflacionário particular que for analisado. Elas serão mantidas nesta forma geral e, agora, as perturbações serão analisadas.

3.2.2 Perturbações e quantização da ação

A princípio, a parte gravitacional da ação (3.26) será abordada:

$$S_{gr} = \frac{-1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x . \quad (3.29)$$

Para expandir esta ação em segunda ordem nas perturbações, é conveniente usar o formalismo ADM [40, 43]:

$$ds^2 = - (\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}_i \mathcal{N}^i) d\tau^2 - 2\mathcal{N}_i dx^i d\tau + \gamma_{ij} dx^i dx^j , \quad (3.30)$$

onde

$$\mathcal{N} = a \left(1 + \phi - \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2} B_{,i} B_{,i} \right)$$

é a função Lapso (esta definição da função lapso engloba a parte não-perturbada da métrica),

$$\mathcal{N}_i = a^2 B_{,i}$$

é a função de deslocamento e

$$\gamma_{ij} = a^2 [(1 - 2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij})]$$

é a parte espacial da métrica.

Para a ação do campo escalar,

$$S_\phi = \int - \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} + V(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4x , \quad (3.31)$$

precisa-se levar diferentes termos em conta,

$$\delta_2 S_\phi = \int d^4x \sqrt{-{}^{(0)}g} \left[\frac{\delta_2(\sqrt{-g})}{\sqrt{-{}^{(0)}g}} {}^{(0)}\mathcal{L}_\phi + \frac{2\delta_1(\sqrt{-g})\delta_1(\mathcal{L}_\phi)}{\sqrt{-{}^{(0)}g}} + \delta_2(\mathcal{L}_\phi) \right] , \quad (3.32)$$

onde

$${}^{(0)}\mathcal{L}_\phi = - \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} + V(\phi) \right] .$$

$\delta_1(\mathcal{L}_\phi)$ e $\delta_2(\mathcal{L}_\phi)$ podem ser calculados expandindo-se ${}^{(0)}\mathcal{L}_\phi$ em série de Taylor em torno de ${}^{(0)}\phi$.

3.2. A PERTURBAÇÃO DE CURVATURA; EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES 69

Expandindo as ações (3.29) e (3.31) em segunda ordem nas perturbações e desprezando termos de superfície, encontra-se [40, 44]

$$\begin{aligned} \delta_2 S &= \delta_2 S_{gr} + \delta_2 S_\phi = \frac{1}{16\pi G} \int \{ a^2 [-6\psi'^2 - 12\mathcal{H}\varphi\psi' - 2\psi_{,i}(2\varphi_{,i} - \psi_{,i}) - 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\varphi^2 \\ &+ 8\pi G(\delta\phi'^2 - \delta\phi_{,i}\delta\phi_{,i} - V_{,\phi\phi} a^2 \delta\phi^2) + 16\pi G[{}^{(0)}\phi'(\varphi + 3\psi)'\delta\phi - 2V_{,\phi} a^2 \varphi\delta\phi] \\ &+ 4(B - E')_{,ii} (4\pi G {}^{(0)}\phi'\delta\phi - \psi' - \mathcal{H}\varphi) \} d^4x . \end{aligned}$$

(3.34)

É importante ressaltar que, mesmo com os índices na mesma altura, está sendo usada a convenção de soma de einstein. Esta liberdade é causada pois, uma vez que o fator de escala e as perturbações da métrica foram destacados, a ação resultante é a dos termos entre chaves num espaço-tempo de Minkowski.

Definindo a variável

$$v = a \left(\delta\phi + \frac{{}^{(0)}\phi'}{\mathcal{H}} \psi \right) = a \left(\overline{\delta\phi} + \frac{{}^{(0)}\phi'}{\mathcal{H}} \Psi \right) = -a \frac{{}^{(0)}\phi'}{\mathcal{H}} \zeta , \quad (3.35)$$

a expansão assume uma forma muito mais simples (mais uma vez, termos de superfície foram desprezados, e a equação (3.21) foi usada):

$$\delta_2 S = \frac{1}{2} \int \left(v'^2 - v_{,i} v_{,i} + \frac{z''}{z} v^2 \right) d^4x , \quad (3.36)$$

onde

$$z = a \frac{{}^{(0)}\phi'}{\mathcal{H}} . \quad (3.37)$$

A ação final, com a qual se trabalhará, é a ação de um campo escalar, com massa variável, num espaço-tempo chato [45], e este campo escalar relaciona-se de uma maneira muito simples com a variável cujo espectro pretende-se calcular (ver equação (3.35)).

Prosseguindo com a quantização do campo, define-se o momento π canonicamente conjugado a v ,

$$\pi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = v'(\tau, \mathbf{x}) . \quad (3.38)$$

Estes operadores devem obedecer às regras de comutação padrões:

$$\begin{aligned} [\hat{v}(\tau, \mathbf{x}), \hat{v}(\tau, \mathbf{x}')] &= [\hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}')] = 0 \\ [\hat{v}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}')] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Expandindo o operador $\hat{v}(\tau, \mathbf{x})$ em modos,

$$\hat{v}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left[v_{\mathbf{k}}^*(\tau) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + v_{\mathbf{k}}(\tau) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \right] \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} , \quad (3.40)$$

as regras de comutação (3.39) reduzem-se a

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^-, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^-] &= [\hat{a}_{\mathbf{k}}^+, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] = 0 \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}}^-, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Da ação (3.36), com o operador \hat{v} dado por (3.40), encontra-se a seguinte equação de movimento, para os modos:

$$v_{\mathbf{k}}'' + \omega_k^2(\tau) v_{\mathbf{k}} = 0 , \quad (3.42)$$

3.2. A PERTURBAÇÃO DE CURVATURA; EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES 71

onde

$$\omega_k^2(\tau) = k^2 - \frac{z''}{z} .$$

O vácuo desta teoria é definido, como de costume, como sendo o estado aniquilado pelo operador de destruição $a_{\mathbf{k}}^-$,

$$a_{\mathbf{k}}^-|0\rangle = 0 \quad \langle 0|a_{\mathbf{k}}^+ = 0 .$$

Com isso, calcula-se o espectro de v .

3.2.3 O espectro de potências

O espectro de uma grandeza arbitrária é definido da seguinte forma: seja uma grandeza $h(\mathbf{x}, t)$ e sua transformada de Fourier [35]

$$h(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int h(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x . \quad (3.43)$$

Define-se a Transformada de Fourier inversa:

$$h(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int h(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k . \quad (3.44)$$

Define-se o espectro de potências através de

$$\langle h^*(\mathbf{k})h(\mathbf{k}') \rangle = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_h(k) . \quad (3.45)$$

Uma maneira bastante conveniente de analisar a dependência do espectro com a escala de perturbações é através do índice espectral, definido como

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}}{d \ln k} . \quad (3.46)$$

O índice espectral do espectro de perturbações do potencial gravitacional é

o primeiro vínculo observacional que se impõe sobre modelos inflacionários. Os resultados observacionais indicam que $n_s \lesssim 1$. O melhor valor deste parâmetro, de acordo com os dados observacionais, será mencionado mais para a frente, quando for falado sobre Inflação em teorias Escalar-Tensoriais da Gravitação, quando for abordado o trabalho que desenvolvemos.

No caso de perturbações quânticas, o valor médio é o valor esperado no vácuo. Assim,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{v}(\tau, \mathbf{x}) \hat{v}(\tau, \mathbf{y}) | 0 \rangle &= \frac{1}{2} \iint \langle 0 | [v_k^*(\tau) e^{i\mathbf{kx}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + v_k(\tau) e^{-i\mathbf{kx}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+] \times \\ &\quad [v_q^*(\tau) e^{i\mathbf{qy}} \hat{a}_{\mathbf{q}}^- + v_q(\tau) e^{-i\mathbf{qy}} \hat{a}_{\mathbf{q}}^+] | 0 \rangle \frac{d^3 k d^3 q}{(2\pi)^3} \\ &= \int \frac{|v_k(\tau)|^2 k^3}{4\pi^2} \frac{\sin kr}{kr} \frac{dk}{k} . \end{aligned} \quad (3.47)$$

O espectro de v é dado por

$$\mathcal{P}_v = \frac{|v_k(\tau)|^2 k^3}{4\pi^2} . \quad (3.48)$$

Só falta a solução da equação (3.42). Pelas equações (3.27) e (3.28), encontra-se

$$\frac{{}^{(0)}\phi'}{\mathcal{H}} = \sqrt{\frac{1 - \mathcal{H}'/\mathcal{H}^2}{4\pi G}} . \quad (3.49)$$

Com isso, ve-se qual a forma de z''/z para formas genéricas do fator de escala. No caso, por exemplo, de aceleração tipo de Sitter,

$$a \propto \frac{-1}{\tau} \rightarrow \mathcal{H} = \frac{-1}{\tau} \Rightarrow 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2} = 0 \therefore z \equiv 0 . \quad (3.50)$$

Pode-se verificar que, neste caso, a equação (3.36) deixa de ser válida! Inclu-

3.2. A PERTURBAÇÃO DE CURVATURA; EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES 73

sive, pode-se ver que as perturbações da métrica decrescem com a expansão do Universo, neste caso [46].

Caso o fator de escala cresça como uma potência do tempo, $a \propto t^\alpha \rightarrow a \propto \tau^{\alpha/(1-\alpha)}$,

$$\frac{{}^{(0)}\phi'}{\mathcal{H}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\alpha}}, \quad (3.51)$$

uma constante. Assim,

$$\frac{z''}{z} = \frac{a''}{a} = \frac{\alpha(2\alpha - 1)}{(\alpha - 1)^2} \frac{1}{\tau^2}. \quad (3.52)$$

Para simplificar, será definido, momentaneamente, $p \equiv \frac{\alpha(2\alpha-1)}{(\alpha-1)^2}$. Assim, (3.42) fica

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{p}{\tau^2}\right) v_k = 0. \quad (3.53)$$

O horizonte de Hubble é proporcional a τ . No começo da inflação, quando os modos ainda estão dentro do horizonte, $k \gg \tau^{-1}$. A equação (3.53) passa a ser a equação de um oscilador harmônico, cuja solução é

$$v_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (3.54)$$

Esta solução, a de um campo propagando-se no espaço-tempo de Minkowski, corresponde à propagação de um modo de energia positiva do campo. Ela é válida como condição inicial neste caso (enquanto a aproximação $k \gg \tau^{-1}$ for válida). Este vácuo é o chamado *Vácuo de Bunch-Davies* [47].

A solução geral de (3.53), correspondente a (3.54) é

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\pi|\tau|} H_{3/2}^{(2)}(k\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \frac{k\tau - i}{k\tau}, \quad (3.55)$$

onde $H_\nu^{(2)}$ é a função de Hankel de segunda espécie.

Como

$$\zeta = -a^{-1} \frac{\mathcal{H}}{({}_0)\phi'} v ,$$

usando (3.48), o espectro de ζ é

$$\mathcal{P}_\zeta = \left(\frac{\mathcal{H}}{({}_0)\phi'} \right)^2 \left(\frac{H_k}{2\pi} \right)^2 , \quad (3.56)$$

onde H_k é o parâmetro de Hubble calculado no instante em que $k = aH_k$.

Esta é a forma geral do espectro de potências inflacionário. Para cada modelo, sua amplitude e seu espectro (3.46) são calculados e comparados às observações. Dentro do contexto de rolamento lento [9], o índice espectral pode ser associado à segunda derivada do potencial. Esta conta não será feita aqui, pois o objetivo desta Dissertação é desenvolver inflação cósmica em gravitação escalar-tensorial, e não será feito uso de rolamento lento.

O objetivo deste capítulo era mostrar como inflação gera perturbações e estas estão associadas às observações. A discussão aqui feita restringiu-se à produção das perturbações durante o período inflacionário e ao seu crescimento até a reentrada no horizonte de curvatura, após o fim da inflação. A evolução subsequente destas perturbações leva em conta sua interação com a matéria e a radiação presentes no Universo [35, 48]. Esta evolução não é tratada aqui pois os experimentos realizados em cosmologia já apresentam em seus resultados o espectro de potências inflacionário [12]. Portanto, o desenvolvimento deste capítulo já basta para a comparação da previsão inflacionária com os resultados experimentais. Os próximos capítulos tratarão de Gravitação Escalar-Tensorial, inflação cósmica e teoria de perturbação neste contexto.

Além disso, existem dois tópicos dentro do assunto de Perturbações Cós-

3.2. A PERTURBAÇÃO DE CURVATURA; EVOLUÇÃO DAS PERTURBAÇÕES 75

micas que, apesar de não serem centrais para o presente desenvolvimento, são questões em aberto dentro do contexto da Cosmologia Inflacionária e merecem atenção. Um deles é a questão de saber se as perturbações inflacionárias são gaussianas [35, 49, 50, 51, 52], ou seja, se toda a informação sobre a distribuição estatística das perturbações está contida na função de correlação de dois pontos, cujo espectro foi calculado neste capítulo. Os limites vindos do mapa da Radiação Cósmica de Fundo não são conclusivos ainda. Espera-se que o satélite Planck [53], que foi lançado ao espaço em maio de 2009, forneça melhores medidas para responder a esta questão.

O outro tópico é sobre a ocorrência de retro-reação (*backreaction*). Flutuações de vácuo geram pares virtuais. Com a expansão acelerada durante a inflação, alguns desses pares podem se afastar bastante e o campo gravitacional existente pode fornecer-lhes a energia necessária para que se tornem partículas reais. Esta geração de matéria durante a inflação poderia desacelerar a inflação e, se este efeito for relevante o suficiente, poderia até induzir o fim do período inflacionário [54, 55, 56].

Capítulo 4

Gravitação Escalar-Tensorial

4.1 Introdução - Conceitos básicos da Relatividade Geral

Antes de Gravitação Escalar-Tensorial ser apresentada como alternativa à Teoria da Relatividade Geral, serão discutidos brevemente alguns fundamentos desta. A preservação ou violação destes fundamentos na teoria escalar-tensorial será ressaltada.

4.1.1 Princípio de Equivalência

Existem algumas formulações diferentes para o princípio de equivalência [6, 57]. A ideia de Einstein ao formulá-lo era a de identificar a aceleração gravitacional com uma aceleração qualquer. Além disso, como uma teoria de gravitação, a Relatividade Geral deveria ter como limite a teoria newtoniana.

Uma característica da teoria newtoniana preservada pela Relatividade Geral é o princípio de Queda Livre Universal: Todos os corpos, independentemente de sua composição interna, devem sofrer a mesma aceleração quando

submetidos ao mesmo campo gravitacional. Na linguagem relativística, as partículas devem seguir a mesma geodésica. Este princípio é chamado de **Princípio de Equivalência Fraco**. Uma outra maneira de dizer isso é afirmar que a massa inercial m_i e a massa gravitacional m_g dos corpos são iguais.

Um outro princípio de equivalência, o **Princípio de Equivalência de Einstein**, além das características do Princípio de Equivalência Fraco, tem como características, para fenômenos não-gravitacionais (eletromagnéticos, por exemplo), a Invariância Local de Lorentz - resultados de experimentos devem ser independentes da velocidade do referencial - e a Invariância Local de Posição - o resultado dos experimentos não deve depender do local de sua realização. Ainda um outro princípio de equivalência, o **Princípio de Equivalência Forte**, tem estas mesmas características, mas ampliadas para englobar fenômenos gravitacionais.

4.1.2 O Princípio de Mach

A formulação deste princípio é um pouco menos clara. Basicamente, Mach considerava que a inércia de um corpo era determinada por suas interações com todas as outras partículas do Universo. Considerava também que, em mecânica, apenas o movimento relativo entre todas as massas era importante.

Nunca houve uma formulação quantitativa para estas ideias. Elas influenciaram Einstein no sentido de buscar uma teoria na qual o espaço fosse influenciado pela presença de matéria, em oposição à ideia de espaço absoluto newtoniana.

Apesar da influência de ideias Machianas na formulação da Relatividade Geral, esta não é uma teoria inteiramente Machiana. Por exemplo, na ausência de matéria, a solução das equações de Einstein é o bem conhecido espaço-

tempo de Minkowski. A existência de uma solução (métrica) favorece certas curvas (geodésicas) para o movimento de partículas. Num ponto de vista Machiano, não faz sentido falar em trajetórias preferenciais para partículas de teste, na ausência de outros corpos que nos permitam definir sua inércia. Portanto, num ponto de vista Machiano, não há a solução de Minkowski!

O Princípio de Mach influenciou Brans e Dicke na formulação da teoria escalar-tensorial [58] no sentido que a Constante Universal da Gravitação é substituída por um campo escalar, e este, ao entrar nas equações de campo, é determinado pela distribuição de matéria do Universo.

Estes princípios discutidos nesta seção serão citados adiante, onde será mencionado em quais situações eles são preservados, ou violados.

Antes de se seguir para discutir gravitação escalar-tensorial, será comentado rapidamente sobre uma tentativa, contemporânea à Relatividade Geral, de formular uma teoria escalar de gravitação. Esta teoria escalar não foi bem sucedida, mas serve de base e inspiração para teorias alternativas à Relatividade Geral.

4.2 Gravitação Escalar

A ideia de descrever a interação gravitacional, no contexto relativístico, através de um campo escalar, intencionava generalizar a gravitação newtoniana. Uma tentativa relevante foi feita pelo físico finlandês Gunnar Nordström. Será feita aqui uma descrição muito breve desta tentativa, baseada nas revisões [59, 60].

Tendo como ponto de partida a equação de campo newtoniana,

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho , \tag{4.1}$$

Nordström [61] considerou sua generalização mais simples,

$$\square\phi = -4\pi G\rho . \quad (4.2)$$

A quadri-velocidade u_μ de uma partícula obedeceria à equação de movimento

$$\dot{u}_\mu + \dot{\phi}u_\mu = \partial_\mu\phi . \quad (4.3)$$

Todas as partículas caem da mesma forma na presença do campo gravitacional, o que satisfaz o Princípio de Equivalência Fraco [57].

Como mencionado em [59], esta teoria não pode ser derivada a partir de um princípio variacional e, para preservar a invariância de Lorentz na equação (4.2), esta não deveria ser obtida calculando-se uma componente particular de uma equação tensorial, mas uma equação de traço, e a densidade de energia ρ deveria ser proporcional ao traço do tensor energia-momento do sistema. Além disso, esta teoria é linear. Esperava-se que o campo gravitacional, em analogia com o eletromagnetismo, carregasse energia. De acordo com a Relatividade Especial, energia equivale a massa, e esta é fonte de campo gravitacional. Portanto, a equação de campo deveria ser não-linear. Isso levou Nordström a reconsiderar a relação entre massa inercial e massa gravitacional [62].

Em 1913, Nordström formulou uma segunda versão de sua teoria [63]. Nesta, a equação de campo deveria ser

$$\phi\square\phi = -4\pi GT_m , \quad (4.4)$$

onde T_m é o traço do tensor energia-momento da matéria. A equação de movimento de uma partícula submetida a um campo gravitacional, no con-

texto desta teoria, é

$$\phi \dot{u}_\mu + \dot{\phi} u_\mu = \partial_\mu \phi . \quad (4.5)$$

Einstein e Fokker [64] mostraram que esta equação de movimento pode ser derivada a partir da Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \phi^2 \eta_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu . \quad (4.6)$$

A teoria de Nordström, como uma teoria escalar, considerava que a métrica do espaço-tempo era a métrica de Minkowski. Porém, pela Lagrangeana (4.6), vemos que esta teoria pode ser reinterpretada como uma teoria métrica cujo tensor métrico é

$$g_{\mu\nu} = \phi^2 \eta_{\mu\nu} . \quad (4.7)$$

As curvas (4.5) são as geodésicas deste espaço-tempo curvo. Como esta métrica é conformalmente chata, o escalar de Ricci é

$$R = -6 \frac{\square \phi}{\phi^3} . \quad (4.8)$$

O traço do tensor energia-momento, através da Transformação Conforme (4.7), transforma-se como [57, 20]

$$T \rightarrow T/\phi^4 .$$

Assim, a equação de campo (4.4) pode ser escrita como

$$R = 24\pi G T_m . \quad (4.9)$$

Esta equação relaciona diretamente a geometria do espaço-tempo com o conteúdo material do Universo, assim como as equações de Einstein. Porém, como esta teoria é conformalmente chata, o tensor de Weyl,

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} ,$$

é nulo [3]. Assim, toda a geometria do espaço-tempo é dada pelo tensor de Ricci, e toda a relação entre matéria e curvatura do espaço-tempo está contida na equação (4.9).

Como o tensor energia-momento do campo eletromagnético não tem traço, na teoria de Nordström não há acoplamento entre a luz e a gravitação. Assim, não haveria desvio na trajetória da luz ao passar por um campo gravitacional. Esta discordância, além do fato de a previsão desta teoria para a precessão do periélio de Mercúrio estar errada, descartam-na como uma teoria viável de gravitação. Porém, ela serve não apenas de inspiração para a construção de outras teorias alternativas de gravitação, como inspirou o próprio Einstein - que a reconheceu como uma forte candidata à sua própria teoria - na formulação da Relatividade Geral.

4.3 Gravitação Escalar-Tensorial

A Relatividade Geral é uma teoria que tem, como grandeza fundamental, um tensor. Nela, o mediador da interação gravitacional é uma partícula de spin 2. Numa teoria escalar-tensorial, além de um tensor fundamental, tem-se um campo escalar, igualmente fundamental. Ou seja, numa teoria escalar-tensorial, além de uma partícula de spin 2, a interação gravitacional é mediada por uma partícula de spin 0.

Teorias escalar-tensoriais da gravitação são formuladas a partir de uma

lagrangeana. Sua forma genérica é

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} f(\phi) R, \quad (4.10)$$

onde $f(\phi)$ é uma função arbitrária do campo escalar ϕ .

Na ação acima, foi explicitada apenas a generalização do termo de Einstein-Hilbert. O termo $f(\phi)R$ é chamado de termo de acoplamento não-mínimo. Esta nomenclatura ficará mais clara nos próximos parágrafos.

Incluindo na ação (4.10) o termo cinético do campo escalar, juntamente com o potencial e considerando a presença de matéria, tem-se a ação mais genérica

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[f(\phi)R - \frac{1}{2}w(\phi)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) + \mathcal{L}_m \right]. \quad (4.11)$$

Se o primeiro termo do membro direito desta equação fosse o termo de Einstein-Hilbert comum (R , ao invés de $f(\phi)R$), o acoplamento entre o campo escalar e a gravitação seria o mesmo que para qualquer¹ campo em Relatividade Geral. Este acoplamento é o chamado acoplamento mínimo pois, na ausência de campo gravitacional, basta fazer

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu};$$

$$\nabla \rightarrow \partial$$

e o acoplamento entre campos e gravitação desaparece.

¹Qualquer, aqui, quer dizer qualquer campo escalar. Um campo vetorial seria um pouco diferente [3] e, para se descrever um campo espinorial em espaço-tempo curvo, seria necessário usar o formalismo de tétradas [3, 47]. Esta dissertação continuará restrita a campos escalares.

O termo de acoplamento não-mínimo recebe este nome exatamente por, dadas as relações acima, o acoplamento entre o campo e a gravitação não desaparecer.

As equações de campo, análogas às equações de Einstein, obtidas variando-se a ação (4.11), são

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2f(\phi)} T_{\mu\nu}^{(m)} - g_{\mu\nu} \frac{\square f(\phi)}{f(\phi)} + \frac{1}{f(\phi)} \nabla_\mu \nabla_\nu f(\phi) + \frac{w(\phi)}{f(\phi)} \left(\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi \right) - g_{\mu\nu} \frac{V(\phi)}{2f(\phi)}. \quad (4.12)$$

Não é útil seguir-se calculando equações de campo genéricas. A descrição agora será restrita a um caso bastante simples, simples o bastante para que os resultados possam ser interpretados, mas não o bastante para que características importantes das teorias escalar-tensoriais sejam perdidas. Será analisado agora o modelo de Brans e Dicke (BD) da gravitação [58].

4.4 A teoria de Brans-Dicke

A formulação da teoria de Brans-Dicke tem sua motivação no princípio de Mach. Como foi mencionado acima, não há uma formulação quantitativa do princípio de Mach. Suas afirmações são conceituais e baseadas em argumentos de ordem de magnitude.

Num desses argumentos de ordem de magnitude [65], considerou-se um Universo contendo apenas uma casca esférica massiva e, próximo ao seu centro, duas partículas em mútua atração gravitacional. Num referencial no qual uma destas partículas está em repouso, a força gravitacional devida à outra partícula deve ser compensada pela atração gravitacional devida à casca es-

férica. A força inercial, pelas Leis de Newton e de acordo com o princípio de Mach, como argumentado em [65], deveria ser proporcional às massas da partícula e da casca, assim como à aceleração da partícula. Assim, a força inercial sobre a partícula em repouso deveria ser

$$F = b \frac{mMaG}{rc^2} , \quad (4.13)$$

onde m é a massa da partícula, M a massa da casca, a a aceleração da partícula, G a constante de Newton, c a velocidade da luz, b um parâmetro adimensional, que deveria ser da ordem da unidade, e r a distância entre as duas partículas. Para que esta expressão esteja em acordo com $F = ma$,

$$GM/Rc^2 \sim 1 . \quad (4.14)$$

Esta relação abre duas possibilidades [58]: na primeira delas, a razão M/R é fixa, e isso poderia resultar de condições de contorno impostas às equações de campo da Relatividade Geral. A segunda alternativa é permitir que G varie com a distribuição de massa. A primeira possibilidade não é realizável, pois não é possível especificar tais condições de contorno. A segunda possibilidade será explorada aqui.

Uma consequência imediata é a violação do Princípio de Equivalência Forte. Como G não é mais constante, o resultado de experimentos gravitacionais depende do local (no espaço ou no tempo) de sua realização.

A teoria de Brans-Dicke parte da seguinte ação

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[\phi R - \frac{w}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \right] , \quad (4.15)$$

muito semelhante à equação (4.11), com $f(\phi) = \phi$, $w(\phi) = w/2\phi$ e $V = 0$. O campo ϕ tem dimensão de [energia]². Esta escolha torna w um parâmetro

adimensional. A lagrangeana da matéria é uma função somente da métrica e de quaisquer campos (ψ) de matéria, não do campo ϕ !

Comparando-se a ação (4.15) com uma ação ordinária na Relatividade Geral,

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \right], \quad (4.16)$$

ve-se que, para que haja acordo entre os testes gravitacionais e a teoria de Brans-Dicke, $\phi \propto G^{-1}$, constante e uniforme.

Variando-se esta ação com respeito ao campo escalar, encontra-se

$$2w\phi^{-1}\square\phi - (w/\phi^2)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + R = 0. \quad (4.17)$$

Tomando (4.17) com o traço de (4.12) (ajustada à teoria de Brans-Dicke), encontra-se

$$\square\phi = \frac{1}{2(3+2w)}T^{(m)} = \zeta^2 T^{(m)} \quad (4.18)$$

onde $T^{(m)}$ é o traço do tensor energia-momento da matéria e

$$\zeta^{-2} \equiv 2(3+2w). \quad (4.19)$$

Esta equação de Poisson para o campo escalar mostra o caráter machiano desta teoria.

Será analisada, agora, a conexão entre esta teoria e a Relatividade Geral, fazendo a aproximação de campo fraco e através da Parametrização Pós-Newtoniana.

4.4.1 Campo Fraco e PPN

Esta parte segue de perto a descrição feita em [57].

Por conveniência, será feita uma redefinição do campo escalar. Define-se o campo

$$\varphi^2 \equiv 2\xi^{-1}\phi, \quad (4.20)$$

onde

$$\xi^{-1} = 4w. \quad (4.21)$$

Em termos deste campo, a ação passa a ter um termo cinético canônico.

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} \xi \varphi^2 R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \right]. \quad (4.22)$$

Faz-se a aproximação de campo fraco expandindo o campo φ :

$$\varphi = v + Z\sigma, \quad (4.23)$$

onde v é o campo de fundo, constante, e temos $v \gg Z\sigma$. O primeiro termo da ação (4.22) fica

$$\sqrt{-g} \frac{1}{2} \xi v^2 R. \quad (4.24)$$

Como este é idêntico ao termo de Einstein-Hilbert, pode-se tomar

$$\xi v^2 = 1 \Rightarrow \xi^{-1} = v^2.$$

Das equações (4.20), (4.18) e (4.23), tem-se

$$\square\sigma = \xi^{-1/2} Z^{-1} \zeta^2 T^{(m)}. \quad (4.25)$$

Considerando, no limite newtoniano, uma partícula pontual de massa M

em repouso, tem-se²

$$\sigma = \frac{M}{M_{Pl}} \xi^{-1/2} Z^{-1} \zeta^2 \frac{1}{4\pi r} . \quad (4.26)$$

Tomando a métrica perturbada em primeira ordem, onde a perturbação representa o efeito do campo fraco, tem-se

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + M_{Pl}^{-1} h_{\mu\nu} . \quad (4.27)$$

Linearizando a equação (4.12) - ajustada à teoria de Brans-Dicke - na métrica e no campo, encontra-se

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\lambda h_\nu^\lambda - \partial_\nu \partial_\lambda h_\mu^\lambda + \partial_\mu \partial_\nu h + \eta_{\mu\nu} (\partial_\sigma \partial_\rho h^{\sigma\rho} - \square h) \\ - 4Z\xi^{1/2} (\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \sigma = -2M_{Pl}^{-1} T_{\mu\nu}^{(m)} . \end{aligned} \quad (4.28)$$

O termo do lado esquerdo na segunda linha desta equação representa a mistura entre os campos. Esta mistura pode ser removida definindo-se o campo auxiliar $\chi_{\mu\nu}$,

$$\chi_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h - 2Z\xi^{1/2} \eta_{\mu\nu} \sigma . \quad (4.29)$$

Invertendo esta equação, encontra-se

$$h_{\mu\nu} \equiv \chi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \chi - 2Z\xi^{1/2} \eta_{\mu\nu} \sigma . \quad (4.30)$$

Impondo o calibre

$$\partial_\lambda \chi_\nu^\lambda = 0 ,$$

²No limite newtoniano, o campo é estático.

encontra-se

$$\square\chi_{\mu\nu} = -\frac{2}{M_{Pl}}T_{\mu\nu}^{(m)}. \quad (4.31)$$

Para uma partícula pontual em repouso com massa M , a solução desta equação é

$$\chi_{00} = 2\frac{M}{M_{Pl}}\frac{1}{4\pi r}. \quad (\text{todas as outras componentes nulas.}) \quad (4.32)$$

Pelo fato de a teoria escalar-tensorial ser uma teoria métrica, partículas pontuais de teste percorrem geodésicas da métrica. O potencial gravitacional é dado por

$$V = -\frac{1}{2}\frac{m}{M_{Pl}}h_{00} = V_\chi + V_\sigma. \quad (4.33)$$

Como (4.30)

$$h_{00} = \frac{1}{2}\chi_{00} + 2Z\xi^{1/2}\sigma, \quad (4.34)$$

usando (4.26) e (4.32),

$$V_\chi = -\frac{1}{2}\frac{mM}{M_{Pl}^2}\frac{1}{4\pi r} \quad (4.35)$$

$$V_\sigma = -\frac{mM}{M_{Pl}^2}\zeta^2\frac{1}{4\pi r}. \quad (4.36)$$

Como a força devida ao campo escalar é proporcional à massa do corpo pontual de teste, o princípio de equivalência fraco é satisfeito para estas partículas.

A Parametrização Pós-Newtoniana é usada para comparar as previsões de uma teoria métrica com observações no sistema solar. Com esta parametriza-

ção, fortes vínculos sobre alguns parâmetros da teoria são impostos. Expandindo os termos g_{00} e g_{rr} da métrica [57],

$$-g_{00} \approx 1 - \frac{a_g}{r} + \frac{\beta - \gamma a_g^2}{2 r^2} \quad (4.37)$$

$$g_{rr} \approx 1 + \gamma \frac{a_g}{r}, \quad (4.38)$$

onde a_g é o raio de Schwarzschild do corpo.

A solução original de Schwarzschild corresponde a $\beta = \gamma = 1$ [5]. Em termos destes parâmetros, alguns testes dão:

- deflexão da luz pelo Sol:

$$\Delta\phi = \frac{1 + \gamma}{2} \frac{2a_g}{r_0}; \quad (4.39)$$

- Desvio do periélio de Mercúrio:

$$\Delta\phi = \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3} \frac{3a_g\pi}{l}. \quad (4.40)$$

O resultado mais recente de deflexão da luz pelo VLBI fornece [57]

$$\gamma = 1,00000 \pm 0,00028, \quad (4.41)$$

e a teoria de BD fornece

$$\gamma - 1 = 4\zeta^2. \quad (4.42)$$

Usando (4.19) e (4.21),

$$w \gtrsim 3,6 \times 10^3 \quad \xi \lesssim 7 \times 10^{-5}. \quad (4.43)$$

Estes resultados restringem fortemente a teoria de BD. Como foi visto nesta seção, com a definição do campo φ (4.20), este resultado pode ser estendido a teorias cujo termo de acoplamento não-mínimo consista numa função não-linear do campo escalar.

4.4.2 O Princípio de Equivalência

Na teoria de BD, por ser esta uma teoria métrica, partículas pontuais de teste satisfazem o princípio de equivalência fraco. Para estas, m_i e m_g são iguais. Em 1951, Papapetrou [66] mostrou que, na Relatividade Geral, corpos extensos também satisfazem a este princípio.

Em dois artigos em 1968, Nordtvedt analisou este caso na teoria de BD. No primeiro artigo [67], ele argumentou que os testes clássicos, até então realizados, não indicavam nada sobre a contribuição da auto-energia gravitacional para a massa inercial ou gravitacional de um corpo.

No segundo artigo [68] ele analisa o caso de duas massas m_i e m_j em órbita circular em torno do centro de massa do sistema composto por estes dois corpos e uma terceira massa distante m_e . No regime em que o campo gerado por esta massa externa é fraco, ele calculou a aceleração do sistema devida à presença da massa externa. Considerando que o plano da órbita dos corpos i e j forma um ângulo θ com a direção que os liga à massa e , Nordtvedt calculou a aceleração na direção desta massa externa:

$$a = g_e \left\{ 1 + \frac{m_i m_j}{(m_i + m_j) r_{ij}} \left[8\Delta - 4\beta - 3\gamma - \chi + \frac{1}{2} \sin^2 \theta (2\beta + \chi + 8\Delta' - \alpha' - 2) \right] \right\}, \quad (4.44)$$

onde α' , β , γ , Δ , Δ' e χ são correções à métrica devidas à presença da massa externa. É imprescindível mencionar que esta equação é independente de teoria de gravitação usada.

Para que o princípio de equivalência fraco seja válido, deve-se ter

$$a = g_e .$$

Pela equação (4.44), isso corresponde a

$$8\Delta - 4\beta - 3\gamma - \chi = 0 , \quad (4.45)$$

$$2\beta + \chi + 8\Delta' - \alpha' - 2 = 0 . \quad (4.46)$$

O que Nordtvedt mostra é que, na teoria de BD, a equação (4.45) não é satisfeita, e o princípio de equivalência fraco é violado [68]!

$$(8\Delta - 4\beta - 3\gamma - \chi)_{\text{BD}} = -\frac{1}{2+w} . \quad (4.47)$$

4.5 Transformações Conformes

Pode-se reescrever a teoria escalar-tensorial de forma que ela fique com a aparência de Relatividade Geral. Isto é feito através da Transformação Conforme.

A transformação conforme consiste em redefinir a métrica a partir de uma certa função escalar pela relação

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x)g_{\mu\nu} . \quad (4.48)$$

Conforme será visto adiante, existe uma função específica $\Omega(x)$ que trans-

forma o termo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} f(\phi) R \quad (4.49)$$

em

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{1}{2} \tilde{R} . \quad (4.50)$$

Quando se trabalha com a métrica $g_{\mu\nu}$, diz-se que se está trabalhando no quadro de Jordan (*Jordan Frame*). Quando a métrica usada é $\tilde{g}_{\mu\nu}$, diz-se estar no quadro de Einstein. No quadro de Einstein, as unidades de tempo e comprimento passam a depender da função $\Omega(x)$, não sendo mais fixas [20]. As unidades fixas de tempo e espaço comumente usadas são as do quadro de Jordan.

Partindo de (4.48), ve-se que

$$\tilde{g} = \Omega^8 g \rightarrow \sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^4 \sqrt{-g} . \quad (4.51)$$

As conexões e o escalar de Ricci transformam-se como [57, 20, 3, 41]:

$$\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Omega^{-1} (\delta_{\beta}^{\alpha} \nabla_{\gamma} \Omega + \delta_{\gamma}^{\alpha} \nabla_{\beta} \Omega - g_{\beta\gamma} \nabla^{\alpha} \Omega) \quad (4.52)$$

e

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} (R - 6g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \Omega - 6g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \ln \Omega \nabla_{\nu} \ln \Omega) . \quad (4.53)$$

Juntando (4.51) e (4.53), e comparando com (4.49), ve-se que se a função Ω for definida como

$$\Omega(x) = \sqrt{f(\phi)} , \quad (4.54)$$

o termo de Einstein-Hilbert fica

$$\sqrt{-\tilde{g}} \frac{1}{2} \tilde{R} . \quad (4.55)$$

Invertendo-se a equação (4.53),

$$R = \Omega^2 \left(\tilde{R} + 6\tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \ln \Omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \ln \Omega \tilde{\nabla}_\nu \ln \Omega \right) , \quad (4.56)$$

e olhando para a ação completa (4.11), ve-se que o termo $\tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \ln \Omega$ da equação (4.56) dará origem a um termo de superfície [57], portanto será descartado.

A ação final, no quadro de Einstein, é

$$S = \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} K(\phi) \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \phi \tilde{\nabla}_\nu \phi - \frac{V(\phi)}{f^2(\phi)} + \frac{\mathcal{L}_m}{f^2(\phi)} \right] , \quad (4.57)$$

onde

$$K(\phi) \equiv \frac{3f'^2(\phi) + 2w(\phi)f(\phi)}{2f^2(\phi)} . \quad (4.58)$$

Com a definição do novo campo

$$d\Phi \equiv \sqrt{K(\phi)} d\phi , \quad (4.59)$$

tem-se

$$S = \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \Phi \tilde{\nabla}_\nu \Phi - \frac{V(\Phi)}{f^2(\Phi)} + \frac{\mathcal{L}_m}{f^2(\Phi)} \right] . \quad (4.60)$$

Estes resultados serão usados no próximo capítulo, quando for desen-

volvida a teoria de perturbações inflacionárias em gravitação escalar-tensorial.

Capítulo 5

Inflação em Gravitação

Escalar-Tensorial

Este é o capítulo final desta Dissertação. Nele, conceitos de todos os capítulos anteriores serão utilizados. O objetivo deste capítulo é chegar ao trabalho que desenvolvemos, uma tentativa de tornar viável um cenário inflacionário no contexto de gravitação escalar-tensorial. Para atingir tal objetivo, é necessário discutir inflação estendida [69]. Conforme foi percebido que existem dificuldades em compatibilizar as previsões deste com observações cosmológicas e testes gravitacionais [70, 71, 72, 73], outros cenários foram propostos.

Uma tentativa mais recente [74] traz algumas diferenças em relação à inflação estendida, mas também tem incompatibilidades com observações cosmológicas. Mais precisamente, o espectro de perturbações gerado não corresponde ao observado. Uma outra alternativa, a qual utiliza a ideia de Rolamento Lento em Gravitação Escalar-Tensorial [75], fornece um cenário, a princípio, viável.

A teoria de Perturbações Inflacionárias em Gravitação Escalar-Tensorial

será desenvolvida com certo detalhe, pois é de fundamental importância para a conexão entre teoria (Inflação) e observações (espectro). Nesta parte, a técnica de transformações conformes será fundamental.

5.1 Inflação Estendida

O cenário de Inflação Estendida [69] foi proposto com o objetivo de formular um cenário inflacionário no qual a transição de fase se completasse sem enrolamento lento. Para tal propósito, basearam-se na teoria de Brans-Dicke, partindo da ação já conhecida

$$A = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\Phi R + w \left(\frac{\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi}{\Phi} + 16\pi \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi) \right) \right], \quad (5.1)$$

onde foi considerado, assim como em [14], o Universo contendo um campo ψ que sofre uma Transição de Fase. A diferença entre o cenário de velha inflação e o cenário de Inflação Estendida é que no primeiro a gravitação é descrita pela teoria de Einstein, enquanto que neste último cenário, a gravitação é descrita pela teoria de Brans-Dicke. A transição de fase não está associada ao campo Φ mas sim ao campo ψ , inserido no conteúdo material do Universo, que é submetido a um potencial tal que a transição de fase é de primeira ordem. Enquanto no estado de Falso Vácuo, sua densidade de energia é constante. A dinâmica da transição de fase é a mesma, mas agora, como a teoria de gravitação é diferente, a expansão do Universo será diferente, então pode-se perquirir se haverá percolação e homogeneização das regiões

de Vácuo Verdadeiro. As equações de campo, para $k = 0$,

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3\Phi} + \frac{w}{6} \left(\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} \right)^2 - H \left(\frac{\dot{\Phi}}{\Phi} \right) \quad (5.2)$$

e

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} = \frac{8\pi\rho}{3 + 2w} , \quad (5.3)$$

tem solução

$$\Phi(t) = m_{Pl}^2 (1 + \chi t/\alpha)^2 \quad (5.4)$$

$$a(t) = (1 + \chi t/\alpha)^{w+1/2} , \quad (5.5)$$

onde $\chi = 8\pi\rho/3m_{Pl}^2$, m_{Pl} é o valor efetivo da massa de Planck no começo da inflação, e $\alpha^2 = (3 + 2w)(5 + 6w)/12$. Os limites então conhecidos sobre o parâmetro w vindos de medições no Sistema Solar impunham [76] $w > 500 \gg 1$ (atualmente, o vínculo é $w > 3000$ [57]). Inicialmente, enquanto $t \ll \alpha/\chi$, o campo escalar era aproximadamente constante e o fator de escala crescia exponencialmente, $a \approx e^{\chi t}$. Posteriormente, quando $t \gg \alpha/\chi$, $\Phi \propto t^2$ e $a \propto t^{w+1/2}$.

Como já foi mencionado no capítulo sobre Inflação Cósmica, a transição de fase não se completa se o Universo estiver passando por uma expansão exponencial. Considerando a probabilidade de um ponto qualquer permanecer no estado de Falso Vácuo durante a transição de fase, iniciada em t_b [70],

$$p(t) = e^{\left[-\frac{4\pi}{3}\Gamma_{vac} \int_{t_b}^t dt' (a(t')d(t',t_0))^3 \right]} , \quad (5.6)$$

onde

$$d(t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')} , \quad (5.7)$$

ve-se que, durante uma expansão tipo lei-de-potência, o expoente da equação (5.6) fica $\frac{\pi}{3}\epsilon w(y^4 - y_B^4)$, onde $\epsilon = \Gamma_{vac}/\chi^4$ e $y = \chi t/w > 1$. O espaço preenchido pelo Vácuo Verdadeiro cresce exponencialmente, como no cenário original, mas, dessa vez, o Universo cresce como uma lei-de-potência. Assim, a transição de fase pode chegar a um fim.

Analisando a fração do espaço $\mathcal{V}_>(d, t_{end})$ contido em bolhas cujo raio é maior que um certo raio d em t_{end} , o instante final da transição de fase, calcula-se que este deveria ser

$$\mathcal{V}_>(d, t_{end}) \approx \ln [p^{-1}(t_{end})] \left(\frac{d_0}{d} \right)^{4/w}, \quad (5.8)$$

onde d_0 é o raio assintótico de bolhas formadas em t_{end} .

Até que o horizonte de partícula ($d_H(T) \sim M_{Pl}/T^2$) seja igual ou maior que o raio de uma bolha $a(t)d$, a região dentro desta bolha não poderá estar em equilíbrio térmico. Pode-se, então, relacionar a razão entre o raio de duas bolhas com a razão entre as temperaturas nas quais estes raios tornaram-se iguais ao horizonte de partícula. Encontra-se

$$\frac{d_0}{d} = \frac{T}{T_{end}}.$$

Voltando à equação (5.8), considerando que a fração do espaço nestas regiões não ocupa mais que 10^{-n} quando a temperatura do Universo é T , encontra-se

$$w < \frac{4 \log_{10} (T_{end}/T)}{n + \log_{10} \ln [p^{-1}(t_{end})]} < \frac{4}{n} \log_{10} \frac{T_{end}}{T}, \quad (5.9)$$

onde a segunda desigualdade segue de $p(t_{end}) < e^{-1}$. Impondo que não mais que 10% do espaço ainda esteja em processo de termalização durante a Nucleossíntese ($T \approx 100\text{KeV}$), e considerando que a transição de fase se

completou a $T \approx 10^{14}$ GeV, chega-se a

$$w < 76 , \quad (5.10)$$

em forte desacordo com os testes gravitacionais!

Em [71] os autores argumentam que, para que a distribuição de energia após a colisão das bolhas preserve a homogeneidade da Radiação Cósmica de Fundo, o parâmetro w deve estar no intervalo $1,5 < w < 25$. Porém, observações no Sistema Solar restringem este parâmetro a $w > 3000$ [57]. Para evitar esta restrição, o campo Φ deveria estar sujeito a um potencial $V(\Phi)$ que fixasse o valor do campo escalar dentro do Sistema Solar. Este efeito é conhecido como *Mecanismo Camaleão*, e tem sido bastante usado em outros contextos [77, 78].

Num outro trabalho, analisando a dinâmica das bolhas num modelo no qual o inflaton tivesse um potencial tipo poço duplo [72],

$$V(\psi) = \frac{\lambda}{8}(\psi^2 - a^2)^2 - \frac{\rho}{2a}(\psi - a) , \quad (5.11)$$

os autores concluíram que, se $\lambda \sim \frac{M}{M_{Pl}}$, a formação de bolhas seria suprimida durante a maior parte da transição de fase. Assim, esta se completaria pela percolação de bolhas pequenas, que facilmente atingiriam a homogeneização, mesmo para valores de w satisfazendo as restrições do Sistema Solar.

Percebeu-se rapidamente [73] que $\lambda \sim \frac{M}{M_{Pl}}$, suprimindo a produção de bolhas, tornaria a inflação mais longa e, conseqüentemente, o campo escalar crescería mais, ultrapassando a escala da presente constante de acoplamento gravitacional.

Antes de se falar sobre o modelo inflacionário por nós estudado mais a fundo, é necessário que se fale antes de perturbações cósmicas em gravitação

escalar-tensorial.

5.2 Perturbações Inflacionárias em Gravitação Escalar-Tensorial

Como foi visto no capítulo anterior, uma transformação conforme permite reescrever a lagrangeana de forma a que as equações tenham a mesma aparência das equações da Relatividade Geral. A redefinição da métrica

$$\hat{g}_{\alpha\beta} \equiv \Omega^2 g_{\alpha\beta} ,$$

leva à seguinte redefinição das coordenadas [79] (esta referência será seguida ao longo desta seção):

$$\hat{a} = a\Omega \quad \hat{dt} = \Omega dt . \quad (5.12)$$

A transformação conforme aqui realizada intenciona tornar as equações da teoria escalar-tensorial idênticas às da Relatividade Geral. Partindo da teoria escalar-tensorial,

$$S = \int a^3 dt d^3x \sqrt{g^{(3)}} f(\phi, R) , \quad (5.13)$$

sabe-se que, se $\Omega = \sqrt{F}$, onde $F = \frac{\partial f(\phi, R)}{\partial R}$, este termo da ação fica

$$S = \int \hat{a}^3 \hat{dt} d^3x \sqrt{g^{(3)}} \hat{R} , \quad (5.14)$$

onde $\sqrt{g^{(3)}}$ é o determinante da métrica do tri-espaco. Por (5.12), ve-se que este termo não muda pela transformação conforme¹.

¹Para coincidir com a literatura, o termo gravitacional, $f(\phi)R$, será escrito como $f(\phi, R)$. Esta formulação permite o tratamento de teorias mais gerais que a aqui tratada.

Como foi visto no capítulo anterior, se o campo escalar for redefinido

$$d\hat{\phi} = \sqrt{\frac{w}{F}(d\phi)^2 + \frac{3}{2F^2}(dF)^2} , \quad (5.15)$$

a lagrangeana, no quadro de Einstein, fica

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\hat{R} - \frac{1}{2}\hat{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\hat{\phi}\partial_\beta\hat{\phi} - U(\hat{\phi}) , \quad (5.16)$$

onde $U(\hat{\phi}) = V/F^2$.

O procedimento para analisar as perturbações, neste momento, será idêntico ao usado no capítulo 3: a métrica e o campo escalar serão perturbados em primeira ordem e, para encontrar as equações perturbadas em primeira ordem, a ação será perturbada em segunda ordem.

Escrevendo campo e métrica perturbados,

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \hat{\phi}_0(t) + \delta\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) , \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1 + 2\varphi)d\hat{t}^2 - 2\hat{a}(\hat{t})B_{,i}d\hat{t}dx^i \\ &+ \hat{a}^2(\hat{t})((1 - 2\psi)\delta_{ij} - 2E_{,ij})dx^i dx^j . \end{aligned} \quad (5.18)$$

e definindo a perturbação invariante de calibre

$$\delta\hat{\phi}_{\hat{\psi}} \equiv \delta\hat{\phi} + \frac{\dot{\hat{\phi}}}{\hat{H}}\hat{\psi} \equiv \frac{\dot{\hat{\phi}}}{\hat{H}}\hat{\psi}_{\delta\hat{\phi}} , \quad (5.19)$$

Quando o tratamento voltar a se restringir ao caso original, basta tomar o termo gravitacional como $F(\phi)R$.

a ação perturbada, no quadro de Einstein, nestas variáveis, fica [79, 80]

$$S = \frac{1}{2} \int \hat{a}^3 \left\{ -\hat{g}^{\alpha\beta} \delta\hat{\phi}_{\hat{\psi};\alpha} \delta\hat{\phi}_{\hat{\psi};\beta} + \frac{\hat{H}}{\hat{a}^3 \dot{\hat{\phi}}} \left[\hat{a}^3 \left(\frac{\dot{\hat{\phi}}}{\hat{H}} \right) \right]^{\cdot} \delta\hat{\phi}_{\hat{\psi}}^2 \right\} dt d^3x . \quad (5.20)$$

Como $\hat{a} = a\sqrt{F}$,

$$\hat{H} = \frac{1}{\hat{a}} \frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{F}} \left(H + \frac{\dot{F}}{2F} \right) . \quad (5.21)$$

Da mesma forma,

$$\frac{d\hat{\phi}}{d\hat{t}} = \sqrt{\frac{w}{F^2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{3}{2F^3} \left(\frac{dF}{dt} \right)^2} . \quad (5.22)$$

A equações (5.21) e (5.22), juntamente com $\hat{g}_{\alpha\beta} \equiv \Omega^2 g_{\alpha\beta}$ e (5.12) serão usadas para reescrever (5.20) no quadro de Jordan. Ainda resta saber como se transforma $\delta\hat{\phi}_{\hat{\psi}}$. Por (5.18) ve-se que

$$\hat{\psi} = \psi + \delta\Omega , \quad (5.23)$$

onde $\delta\Omega = \frac{\delta F}{2F}$ e $\delta F = \dot{F} \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} = \dot{F} \frac{\delta\hat{\phi}}{\dot{\hat{\phi}}}$. Juntamente com (5.19), (5.21) e (5.22), ve-se que $\hat{\psi}_{\delta\hat{\phi}}$ é invariante por transformações conformes [79]. Assim,

$$\delta\hat{\phi}_{\hat{\psi}} = -\delta\phi_{\psi} \frac{1}{\sqrt{F}} \sqrt{w + \frac{3\dot{F}^2}{2\dot{\phi}^2 F}} \frac{1}{1 + \frac{\dot{F}}{2HF}} , \quad (5.24)$$

e, definindo

$$Z \equiv \frac{w + \frac{3\dot{F}^2}{2\dot{\phi}^2 F}}{\left(1 + \frac{\dot{F}}{2HF}\right)^2} , \quad (5.25)$$

(5.20) fica [20]

$$S = \frac{1}{2} \int a^3 Z \left\{ \delta \dot{\phi}_\psi^2 - \frac{1}{a^2} \delta \phi_\psi^i \delta \phi_{\psi,i} + \frac{1}{a^3 Z} \frac{H}{\dot{\phi}} \left[a^3 Z \left(\frac{\dot{\phi}}{H} \right) \right] \right\} dt d^3 x . \quad (5.26)$$

A equação de movimento encontrada é [20, 81, 82]

$$\delta \ddot{\phi}_\psi + \frac{(a^3 Z)'}{a^3 Z} \delta \dot{\phi}_\psi - \left\{ \frac{\nabla^2}{a^2} + \frac{1}{a^3 Z} \frac{H}{\dot{\phi}} \left[a^3 Z \left(\frac{\dot{\phi}}{H} \right) \right] \right\} \delta \phi_\psi = 0 . \quad (5.27)$$

Definindo

$$z = \frac{a \dot{\phi}}{H} \sqrt{Z} = \frac{a \phi'}{\mathcal{H}} \sqrt{Z} , \quad (5.28)$$

onde $' = \frac{d}{d\tau}$ e $\mathcal{H} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau}$, e

$$v \equiv z \frac{H}{\dot{\phi}} \delta \phi_\psi = a \sqrt{Z} \delta \phi_\psi \quad (5.29)$$

a equação (5.27) fica

$$v'' - \left(\nabla^2 + \frac{z''}{z} \right) v = 0 . \quad (5.30)$$

Procedendo à quantização das perturbações, este campo torna-se um operador

$$\hat{v}(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int [v_{\mathbf{k}}^*(\tau) e^{i\mathbf{kx}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^- + v_{\mathbf{k}}(\tau) e^{-i\mathbf{kx}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^+] \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} , \quad (5.31)$$

onde os operadores a^- e a^+ obedecem às regras de quantização

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^-, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^-] &= [\hat{a}_{\mathbf{k}}^+, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] = 0 \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}}^-, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^+] &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \end{aligned} \quad (5.32)$$

A equação (5.30) torna-se uma equação de movimento para os modos do campo

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{\mathbf{k}} = 0 . \quad (5.33)$$

Serão usadas as mesmas definições de vácuo e de espectro dadas nas seções 3.2.2 e 3.2.3. É importante notar que, apesar de as equações (3.49), (3.50) e (3.51) do capítulo 3 não serem mais válidas, se

$$\frac{z''}{z} = \frac{m}{\tau^2} , \quad (5.34)$$

onde m é uma constante, continua-se tendo como solução [20, 81]

$$v_k(\tau) = \frac{\sqrt{\pi|\tau|}}{2} \left[c_1(\vec{k}) H_\nu^1(k|\tau|) + c_2(\vec{k}) H_\nu^2(k|\tau|) \right] \quad (5.35)$$

e

$$\delta\phi_{\psi_k}(\tau) = \frac{\sqrt{\pi|\tau|}}{2a\sqrt{Z}} \left[c_1(\vec{k}) H_\nu^1(k|\tau|) + c_2(\vec{k}) H_\nu^2(k|\tau|) \right] , \quad (5.36)$$

onde $\nu = \sqrt{m + \frac{1}{4}}$. c_1 e c_2 estão sujeitos à seguinte normalização:

$$|c_2(\vec{k})|^2 - |c_1(\vec{k})|^2 = 1 .$$

Esta normalização preserva as regras de comutação (5.32).

O vácuo desta teoria será escolhido como em 3.2.3. Assintoticamente, quando $k \gg \tau^{-1}$, a solução (5.36) deve corresponder à propagação de um

modo de energia positiva do campo. Conhecido o comportamento assintótico das funções de Hankel de primeira e segunda espécies [83], ve-se que o comportamento desejado é o comportamento assintótico da função de Hankel de segunda espécie. Assim, a condição de normalização de c_1 e c_2 impõe

$$c_1(\vec{k}) = 0, \quad c_2(\vec{k}) = 1. \quad (5.37)$$

Como mencionado na parte acima citada, esta escolha de vácuo corresponde ao *Vácuo de Bunch-Davies* [47].

O espectro de $\delta\phi_\psi$ é [20, 81]

$$\mathcal{P}_{\delta\phi_\psi}^{1/2} = \frac{H}{2\pi} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \left(\frac{1}{2} \frac{k}{aH} \right)^{3/2-\nu}. \quad (5.38)$$

Comparando a equação (5.19) com a definição da variável ζ , (3.21), ve-se que $\psi_{\delta\phi} = -\zeta$. Finalmente, o espectro da perturbação de curvatura gerada por um período inflacionário em gravitação escalar-tensorial é

$$\mathcal{P}_\zeta^{1/2} = \left| \frac{H}{\dot{\phi}} \right| \mathcal{P}_{\delta\phi_\psi}^{1/2} = \left| \frac{H}{\dot{\phi}} \right| \frac{H}{2\pi} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} \left(\frac{1}{2} \frac{k}{aH} \right)^{3/2-\nu}. \quad (5.39)$$

Pela definição de índice espectral (3.46),

$$n_s = 4 - 2\nu. \quad (5.40)$$

Isto completa a análise perturbativa em gravitação escalar-tensorial. Será mencionada ainda uma condição para que as perturbações, após a inflação, possam entrar no horizonte e sobreviver a processos dissipativos usuais, mas este ponto será abordado na última seção deste capítulo, quando for falado sobre as modificações que propusemos ao modelo inflacionário que será descrito agora.

5.3 O Modelo de Di Marco & Notari

O modelo de Di Marco & Notari [74] generaliza o conceito de Inflação Estendida na medida que eles consideram a relevância do estágio inicial inflacionário, enquanto a dinâmica do Universo está dominada pela densidade de energia do vácuo. Para fazer isso, o acoplamento entre o campo escalar e o escalar de Ricci é modificado,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (M^2 + \beta\phi^2) R - \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \rho_V \right], \quad (5.41)$$

onde M é um termo constante, com dimensão de energia. Este termo é importantíssimo para a duração do primeiro estágio.

Variação desta ação com respeito à métrica dá

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{M^2 + \beta\phi^2} \{ \beta [-2g_{\mu\nu} (\nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi + \phi \nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi) + \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \phi \nabla_\mu \nabla_\nu \phi] \\ &+ \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi - g_{\mu\nu} \rho_V \} . \end{aligned} \quad (5.42)$$

As equações de campo são

$$H^2 = \frac{1}{3(M^2 + \beta\phi^2)} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - 6H\beta\phi\dot{\phi} + \rho_V \right], \quad (5.43)$$

e

$$\dot{H} = \frac{-1}{2(M^2 + \beta\phi^2)} \left[\dot{\phi}^2 - 8H\beta\phi\dot{\phi} + 2\beta\dot{\phi}^2 + 2\beta^2\phi^2 R \right], \quad (5.44)$$

onde o escalar de Ricci é

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2). \quad (5.45)$$

Rearrmando termos em (5.42), encontra-se

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{M^2} [T_{\mu\nu}^\phi - g_{\mu\nu}\rho_V] , \quad (5.46)$$

de onde se calcula a densidade de energia do campo escalar

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - 6H\beta\phi\dot{\phi} - 3\beta H^2\phi^2 \quad (5.47)$$

e a pressão

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - 2H\beta\phi\dot{\phi} + 3\beta H^2\phi^2 + 2\beta^2 R\phi^2 + 2\dot{H}\beta\phi^2 + 2\beta\dot{\phi}^2 . \quad (5.48)$$

A equação de Klein-Gordon pode ser calculada pela variação da ação (5.41) com respeito ao campo escalar

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \beta R\phi = 0 . \quad (5.49)$$

Como foi mencionado no começo desta seção, inicialmente a dinâmica do Universo é dominada pela densidade de energia do vácuo. Durante este estágio, tem-se $M^2 \gg \beta\phi^2$ e $\dot{\phi}^2 \ll \rho_V$. Assim, (5.43) fica

$$H^2 \equiv H_I^2 = \frac{\rho_V}{3M^2} . \quad (5.50)$$

Com o parâmetro de Hubble constante, de (5.45) e (5.49), a evolução do campo escalar, durante este estágio, é

$$\phi = \phi_0 e^{(\epsilon H_I t)/2}, \quad \text{onde } \epsilon \equiv \sqrt{9 + 48\beta} - 3 , \quad (5.51)$$

e sua densidade de energia evolui como

$$\rho_\phi \simeq -AH_I^2 \phi_0^2 e^{\epsilon H_I t}, \quad A \equiv 3\beta(1 + \epsilon) - \frac{1}{8}\epsilon^2 > 0. \quad (5.52)$$

Enquanto este comportamento perdurar, tem-se o que é chamado, para este modelo, primeiro estágio inflacionário.

Como o valor do campo aumenta exponencialmente com o tempo, rapidamente tem-se $\beta\phi^2 \gg M^2$ e, por (5.43) e (5.47),

$$\rho_\phi = -\rho_V \rightarrow \text{constante}. \quad (5.53)$$

Disto, conclui-se que o fator de escala passa a crescer como uma potência do tempo e que o campo passa a evoluir linearmente no tempo

$$a \propto t^\alpha \quad \phi \propto Bt, \quad (5.54)$$

onde

$$\alpha = \frac{1 + 2\beta}{4\beta} = \frac{1}{4\beta} + \frac{1}{2} \quad B = \frac{4\sqrt{\beta\rho_V}}{\sqrt{60\beta^2 + 28\beta + 3}}. \quad (5.55)$$

Nesta situação, passa-se a ter o segundo estágio inflacionário.

Vê-se claramente que a equação (5.54) corresponde a (5.4) e (5.5) (como foi visto no capítulo anterior, a teoria de Brans-Dicke pode ser reescrita como uma teoria cujo termo de acoplamento não-mínimo é $\beta\phi^2 R$ e $w = \frac{1}{4\beta}$).

Como no modelo original, a transição de fase ocorre por nucleamento de bolhas cujo interior está na nova fase. Estas bolhas são formadas com uma taxa de nucleamento por unidade de volume Γ_{vac} constante. A razão entre

esta taxa e a quarta potência do parâmetro de Hubble,

$$r(t) = \frac{\Gamma_{vac}}{H^4(t)} , \quad (5.56)$$

regula o preenchimento do Universo pelas bolhas. Para que haja inflação suficiente de forma a resolver os problemas (Problema do Horizonte e Problema da Chateza), esta razão deve valer, inicialmente [28, 84, 85, 86],

$$r_0 = \frac{\Gamma_{vac}}{H_I} \lesssim 10^{-7} . \quad (5.57)$$

Para que a inflação termine com percolação de bolhas,

$$r(t_{end}) = \frac{9}{4\pi} . \quad (5.58)$$

Di Marco e Notari assumiram que as perturbações nas escalas cosmológicamente relevantes saíram do horizonte de curvatura ainda durante o primeiro estágio inflacionário. As escalas de interesse cosmológico são as escalas entre $50h^{-1}\text{Mpc}$, a escala de super aglomerados de galáxias, e $3000h^{-1}\text{Mpc}$, o tamanho atual do horizonte de Hubble.

Para restringir a saída destas escalas ao primeiro estágio inflacionário, é conveniente parametrizar as escalas pelo número de e-folds que o fator de escala cresce entre o instante no qual uma dada escala cruza o horizonte e o fim da inflação. O número de e-folds entre um instante qualquer e o fim da inflação é

$$N(t) = \int_t^{t_{end}} H dt = \int_t^{t_{end}} \frac{d \ln a}{dt} dt = \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} \quad (5.59)$$

(percebe-se que esta grandeza tem esta forma logarítmica independentemente da evolução do fator de escala).

Como este número aumenta para o começo da inflação, restringir que as escalas acima saem do horizonte durante o primeiro estágio implica em

$$N_{II} < N_{50h^{-1}Mpc} . \quad (5.60)$$

Como $3000h^{-1}Mpc$ é maior que a escala usada na equação acima, ela deverá sair do horizonte antes que $50h^{-1}Mpc$. É útil relacionar uma dada escala L ao número de e-folds no qual ela saiu do horizonte. Pode-se associar a escala com o valor do parâmetro de Hubble quando a escala o cruzou:

$$H_L^{-1} = \frac{a_L}{a_0} L .$$

A partir disto, encontra-se

$$L \left(\frac{T_0}{T_{rh}} \right) e^{-N_L} = H_L^{-1} . \quad (5.61)$$

Assumindo que o reaquecimento seja rápido,

$$H_{rh}^2 = \Gamma_{vac}^{1/2} = M_{Pl}^{-2} T_{rh}^2 \Rightarrow T_{rh}^4 = r_L^{1/2} H_L^2 M_{Pl}^2 , \quad (5.62)$$

onde r_L é o parâmetro r calculado no momento em que uma escala arbitrária L cruza o horizonte.

Tomando-se como referência a escala de Hubble presente e usando (5.62), encontra-se, para (5.61)

$$N_L = 63,3 + \Delta N + \ln \frac{L}{3000h^{-1}Mpc} , \quad (5.63)$$

onde

$$\Delta N = \frac{1}{2} \ln \frac{H_L}{10^{14} \text{GeV}} - \frac{1}{8} \ln \frac{r_L}{10^{-7}} - \frac{1}{2} \ln \frac{(M_{Pl})^2}{10^{19} \text{GeV}} . \quad (5.64)$$

Para as duas escalas de interesse,

$$N_{3000} = 63,3 + \Delta N_{3000} \quad N_{50} = 59 + \Delta N_{50} . \quad (5.65)$$

Como há o vínculo dado pela equação (5.60), é importante ter uma estimativa para N_{II} . É sabido que, durante o segundo estágio,

$$r(N) = \frac{\Gamma_{vac}}{\alpha^4} t_{end}^4 e^{-4N/\alpha} = \frac{9}{4\pi} e^{-4N/\alpha} . \quad (5.66)$$

Pode-se dizer que o segundo estágio começou quando $r \approx r_0$,

$$\frac{9}{4\pi} e^{-4N_{II}/\alpha} \approx r_0 \Rightarrow N_{II} \approx -\frac{\alpha}{4} \ln \left[\frac{4\pi}{9} r_0 \right] . \quad (5.67)$$

Assim, por (5.60) e (5.65),

$$\alpha \lesssim \frac{-4(59 + \Delta N_{50})}{\ln \left[\frac{4\pi}{9} r_0 \right]} . \quad (5.68)$$

Uma vez que esta escala saiu do horizonte durante o primeiro estágio, $r_{50} = r_0 \approx 10^{-7}$, $H_{50} = H_I \lesssim 10^{14} \text{GeV}$ [74]. O termo M_{Pl} que aparece na equação (5.64) depende do valor do campo escalar ao fim da inflação, e deve-se ter $M_{Pl} \gtrsim 10^{19} \text{GeV}$. Assim, durante todo o primeiro estágio, $\Delta N \lesssim 0$, e

$$\alpha \lesssim \frac{-236}{\ln \left[\frac{4\pi}{9} \times 10^{-7} \right]} \Rightarrow \beta \gtrsim \frac{1}{58} . \quad (5.69)$$

Este vínculo será usado para se impor uma restrição sobre o valor do índice espectral previsto pelo modelo. Para calcular este vínculo, é necessário saber se a equação (5.34) continua válida. Pela definição (5.25) e como, neste modelo, $F = M^2 + \beta\phi^2 \approx M^2 \therefore \dot{F} \approx 0$ e $w = 1$, $Z \approx 1$. Pela definição (5.28),

e como $a = -\frac{1}{H_I \tau}$, de (5.34),

$$m = 2(1 + 6\beta) ,$$

e

$$\nu \simeq \frac{3}{2} + 4\beta . \quad (5.70)$$

Assim,

$$n_s \approx 1 - 8\beta \lesssim 0,86 , \quad (5.71)$$

em claro desacordo com as observações, que indicam $n_s = 0,970 \pm 0,015$ [12]. Como este não é o espectro observado, os autores impuseram que a amplitude deste espectro deveria ser menor que a amplitude do espectro observado e incluíram um campo adicional, o *cúrvatón*, para que este campo gerasse o espectro observado.

Uma outra possibilidade é generalizar a função $F(\phi)$. Em [75] os autores encontram um índice espectral em acordo com o observado, dentro do paradigma de rolamento lento.

Agora serão mencionadas as modificações que nós propusemos para conciliar a ideia de se ter inflação, no espírito do modelo original, em gravitação escalar-tensorial.

5.4 Modificações

A hipótese de que as perturbações nas escalas relevantes saíram do horizonte durante o primeiro estágio inflacionário levou ao vínculo dado por (5.69). Ingenuamente, pode-se ver que se a desigualdade em (5.60) for invertida, ou seja, caso se suponha que as perturbações saem do horizonte durante o segundo estágio inflacionário, a restrição sobre β passará a ser um limite su-

terior e, conseqüentemente, a restrição sobre o índice espectral irá se tornar um limite inferior. Essa possibilidade nos atraiu para a investigação dessa hipótese.

A primeira mudança que ocorre é que, como a escala de $3000h^{-1}\text{Mpc}$ cruza o horizonte antes que a de $50h^{-1}\text{Mpc}$, restringir que as duas escalas cruzam o horizonte durante o segundo estágio é impor

$$N_{II} > N_{3000h^{-1}\text{Mpc}} . \quad (5.72)$$

Por (5.63), (5.64) e (5.66), vê-se que

$$N_{3000h^{-1}\text{Mpc}} = (1 + 2\beta) \left[63.3 + \frac{1}{2} \ln \frac{H_{3000h^{-1}\text{Mpc}}}{10^{14}\text{GeV}} - \frac{1}{8} \ln \frac{9}{4\pi 10^{-7}} \right] \quad (5.73)$$

e

$$N_{50h^{-1}\text{Mpc}} = (1 + 2\beta) \left[59 + \frac{1}{2} \ln \frac{H_{50h^{-1}\text{Mpc}}}{10^{14}\text{GeV}} - \frac{1}{8} \ln \frac{9}{4\pi 10^{-7}} \right] . \quad (5.74)$$

A equação (5.68) torna-se

$$\alpha > \frac{4N_{II}}{\ln \frac{9 \times 10^7}{4\pi}} . \quad (5.75)$$

Como $N_{II} > N_{3000h^{-1}\text{Mpc}}$,

$$\beta < \frac{\ln \frac{9 \times 10^7}{4\pi}}{16 \times N_{3000h^{-1}\text{Mpc}} - 2 \ln \frac{9 \times 10^7}{4\pi}} . \quad (5.76)$$

Igualmente importante à produção das perturbações e à sua entrada no horizonte com o espectro correto, é a sobrevivência dessas perturbações aos processos dissipativos usuais. Se as perturbações entrarem no horizonte en-

quanto a matéria escura ainda é relativística, esta não terá formado poços no potencial gravitacional que permitirão que as flutuações cresçam e formem estruturas gravitacionalmente ligadas. Nesta situação, como a velocidade das partículas de matéria escura ainda é alta, esta dissipará as flutuações, ao invés de aglomerá-las. Este processo é conhecido como *free-streaming* [11].

Como há interesse no momento no qual uma dada escala das perturbações entra no horizonte, deve-se prestar atenção ao momento no qual, durante a inflação, esta escala sai do horizonte. Considere-se uma dada escala da tamanho co-móvel L . Do momento no qual ela saiu do horizonte ao fim da inflação, ela cresceu por um fator e^{N_L} . O horizonte de Hubble, por sua vez, cresceu por um fator

$$\frac{H_{end}^{-1}}{H_L^{-1}} = \frac{t_{end}}{t_L} = e^{N_L/\alpha} \quad (5.77)$$

(as escalas relevantes saem do horizonte durante o segundo estágio inflacionário). A razão entre o crescimento de uma escala L e o crescimento do horizonte, durante a inflação, é

$$\frac{a_{end}/a_L}{(H_{end}/H_L)^{-1}} = e^{N_L(\frac{1-2\beta}{1+2\beta})} . \quad (5.78)$$

Ao fim da inflação, uma dada escala L é $e^{N_L(\frac{1-2\beta}{1+2\beta})}$ vezes maior que o horizonte. Do fim da inflação ($z \approx 10^{28}$) à equipartição matéria-radiação ($z \approx 10^3$), $a \propto t^{1/2}$,

$$\begin{aligned} \frac{a_{eq}}{a_i} &\simeq 10^{25} \therefore \frac{H_{eq}^{-1}}{H_i^{-1}} = \frac{t_{eq}}{t_i} = 10^{50} , \\ \Rightarrow \frac{(H_{eq}/H_i)^{-1}}{a_{eq}/a_i} &\simeq 10^{25} \approx e^{57.6} . \end{aligned}$$

Da equipartição ao presente, $a \propto t^{2/3}$,

$$\begin{aligned} \frac{a_o}{a_{eq}} &\simeq 10^3 \therefore \frac{t_o}{t_{eq}} = \frac{H_o^{-1}}{H_{eq}^{-1}} = 10^{4.5} , \\ &\Rightarrow \frac{(H_o/H_{eq})^{-1}}{a_o/a_{eq}} \simeq 10^{1.5} \approx e^{3.45} . \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{(H_o/H_i)^{-1}}{a_o/a_i} \approx 10^{26.5} \approx e^{61.02} . \quad (5.79)$$

Escalas para as quais

$$N_L \left(\frac{1 - 2\beta}{1 + 2\beta} \right) < 57.6 \quad (5.80)$$

entram no horizonte durante a Era da Radiação. Aquelas para as quais

$$57.6 < N_L \left(\frac{1 - 2\beta}{1 + 2\beta} \right) < 61.02 \quad (5.81)$$

entram no horizonte durante a Era da Matéria.

Para que as perturbações estejam livres do *free-streaming*, seu comprimento de onda deve ser maior que a distância que uma partícula de matéria escura pode cruzar num dado intervalo de tempo. Esta distância é dada por

$$l_{FS}(t) = a(t) \int_{t_i}^t \frac{v(t')}{a(t')} dt' . \quad (5.82)$$

Calculado do fim da inflação ao presente,

$$l_{FS}(t) = \begin{cases} H^{-1} & t < t_{nr} \\ \frac{l_{FS}(t_{nr})a(t)}{a_{nr}} \left(1 + \ln \frac{a(t)}{a_{nr}}\right) & t_{nr} < t < t_{eq} \\ \left[\frac{l_{FS}(t_{nr})}{a_{nr}} \left(1 + \ln \frac{a_{eq}}{a_{nr}}\right) + \frac{3}{2} \frac{l_{FS}(t_{nr})}{a_{nr}} \left(1 - \frac{a_{eq}^{1/2}}{a(t)^{1/2}}\right) \right] a(t) & t > t_{eq} . \end{cases} \quad (5.83)$$

Antes de t_{nr} , as partículas de matéria escura ainda são relativísticas, então $v \approx 1$ e a escala de *free-streaming* é o próprio horizonte de curvatura. Qualquer perturbação que entrar no horizonte durante este estágio será dissipada.

Entre t_{nr} e a equipartição matéria-radiação, a escala do *free-streaming* cresce mais rapidamente que o fator de escala, logo mais rápido que as escalas das perturbações, mas mais lentamente que o horizonte.

Após a equipartição, a escala de *free-streaming* cresce mais lentamente que a escala das perturbações. Qualquer escala que entre no horizonte após a equipartição sobreviverá ao *free-streaming*.

É interessante notar que perturbações que entram no horizonte durante a Era da Radiação podem crescer e formar estruturas pois, se elas entrarem muito tempo após t_{nr} , elas poderão sobreviver até a equipartição e então *free-streaming* não será mais um problema.

O momento t_{nr} no qual partículas de matéria escura tornam-se não-relativísticas é o momento no qual $T_{DM} \approx m_{DM}$. Sabendo que a matéria escura deve ser fria, $t_{nr} < t_{dec}$, o momento no qual ela desacopla do plasma formado pelas partículas ordinárias. Para $t < t_{dec}$, $T_{DM} \simeq T_r$, e pode-se usar a temperatura da radiação ($a \propto T^{-1}$) para encontrar o instante no qual a matéria escura torna-se não-relativística.

Os resultados mais recentes de detecção de matéria escura, apesar de

ainda não conclusivos, favorecem a hipótese de que esta é uma *WIMP* cuja massa é, aproximadamente, 90GeV [87]. Então, essas partículas terão se tornado não-relativísticas quando sua temperatura cair abaixo deste valor.

$$T_{nr} \simeq 9 \times 10^{10} eV.$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{nr}}{T_{eq}} &\approx 9 \times 10^{10} \therefore \frac{a_{nr}}{a_{eq}} \approx 1,1 \times 10^{-11} \rightarrow \\ \frac{t_{nr}}{t_{eq}} &\approx 1,2 \times 10^{-22} = H_{nr}^{-1} / H_{eq}^{-1}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\frac{l_{FS}(t_{eq})}{l_{FS}(t_{nr})} = \left(1 + \ln \frac{a_{eq}}{a_{nr}}\right) \frac{a_{eq}}{a_{nr}} \simeq 23,6 \times 10^{11}. \quad (5.85)$$

Enquanto o fator de escala cresceu por um fator de 9×10^{10} desde t_{nr} até a equipartição, l_{FS} cresceu por $23,6 \times 10^{11}$, 26 vezes mais.

Ainda,

$$l_{FS}(t_{eq}) \simeq 23,6 \times 10^{11} \underbrace{l_{FS}(t_{nr})}_{H_{nr}^{-1}} \approx 2 \times 10^{-10} H_{eq}^{-1}. \quad (5.86)$$

Para que as escalas de interesse não sejam dissipadas, elas devem entrar no horizonte num instante tal que seu comprimento de onda físico, na equipartição, seja maior que $10^{-9} H_{eq}^{-1}$. Como os cálculos aqui feitos são baseados em estimativas de ordem de magnitude, será requerido que, no momento da equipartição, o comprimento físico da escala de interesse seja quatro ordens de magnitude maior que a escala de *free-streaming*. Isso quer dizer

$$\underbrace{H_{enter}^{-1}}_{a(t_{enter})L} \frac{a_{eq}}{a_{enter}} \sim 10^{-5} H_{eq}^{-1},$$

por exemplo. Esta escala começará a Era da Matéria 10.000 vezes maior que a escala de *free-streaming*, e em t_{nr} essa razão era 260.000.

Então, $\frac{a_{eq}}{a_{ent}} \simeq 10^5 \approx e^{11}$. Tomando a menor escala de interesse, $50h^{-1}Mpc$, caso

$$N_{50h^{-1}Mpc} \left(\frac{1-2\beta}{1+2\beta} \right) \gtrsim 46.5 \quad (5.87)$$

as escalas de perturbação estarão livres do *free-streaming*. Isso será usado como um vínculo sobre o nosso trabalho.

Para calcular $N_{50h^{-1}Mpc}$ será necessária a amplitude das perturbações escalares quando esta escala cruza o horizonte.

Para calcular a amplitude do espectro, serão necessários conceitos da seção 5.2. Em primeiro lugar, o parâmetro Z , definido em (5.25), é

$$Z = \frac{\phi^2(1+6\beta)}{\left(\phi + \frac{\dot{\phi}}{H}\right)^2}, \quad (5.88)$$

onde foi usado que $F = M^2 + \beta\phi^2 \approx \beta\phi^2$.

Uma vez que $a \propto t^\alpha$,

$$d\tau = t^{-\alpha} dt \Rightarrow \tau = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad t = [(1-\alpha)\tau]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (5.89)$$

Então,

$$\frac{z''}{z} = 2 \frac{(1+8\beta+12\beta^2)}{(2\beta-1)^2} \frac{1}{\tau^2}. \quad (5.90)$$

Como (5.34) continua válido, o espectro terá a forma de (5.39), e será [88]

$$\mathcal{P}_\zeta^{1/2} = \frac{H^2}{B} \left(\frac{1-2\beta}{1+2\beta} \right)^\nu \sqrt{\frac{1+6\beta}{1-4\beta^2}} \left(\frac{\Gamma(\nu)}{2\pi\Gamma(3/2)} \right) \left(\frac{k}{2aH} \right)^{3/2-\nu}, \quad (5.91)$$

onde

$$\nu = \sqrt{n + \frac{1}{4}} = \frac{3 + 10\beta}{2(1 - 2\beta)}. \quad (5.92)$$

A amplitude deste espectro é

$$A = \left(\frac{H^2}{B}\right)^2 \left(\frac{1 - 2\beta}{1 + 2\beta}\right)^{2\nu} \left(\frac{1 + 6\beta}{1 - 4\beta^2}\right) \left(\frac{\Gamma(\nu)}{2\pi\Gamma(3/2)}\right)^2 \quad (5.93)$$

e o índice espectral é

$$n_s = 1 + \frac{d\mathcal{P}_C}{d \ln k} = 4 - 2\nu. \quad (5.94)$$

Em [12], a amplitude das perturbações é descrita pela parametrização

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = \Delta_{\mathcal{R}}^2(k_0) \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s(k_0) - 1 + (1/2)dn_s/d \ln k}.$$

Em $k_0 = 0.002 Mpc^{-1}$, $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_0) = 2.445 \times 10^{-9}$. Precisa-se do valor de H em $k = (3000h^{-1} Mpc)^{-1}$ e em $k = (50h^{-1} Mpc)^{-1}$.

O modelo prevê que o índice espectral é constante e, como será mencionado adiante, há produção de ondas gravitacionais. Para este caso, o valor observado do índice espectral é $n_s = 0,97$. Usando $h=0,7$, encontra-se

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k = (3000h^{-1} Mpc)^{-1}) = 2.6 \times 10^{-9}. \quad (5.95)$$

Durante o segundo estagio inflacionário,

$$\phi \gg M/\sqrt{\beta} \therefore B \gg \frac{M}{t\sqrt{\beta}} = \frac{4\sqrt{\beta}}{1 + 2\beta} HM.$$

Um limite inferior para $H_{3000h^{-1} Mpc}$, como função do parâmetro M , é encontrado pela substituição desta relação na equação (5.95). O mesmo é feito para $H_{50h^{-1} Mpc}$.

5.4.1 Resultados

Numericamente, encontrou-se que o vínculo do *free-streaming* (5.87), impõe que $M \geq 10^{10}\text{GeV}$. De outra forma, as perturbações inflacionárias não estão livres do *free-streaming*.

A partir de $M = 10^{10}\text{GeV}$, encontrou-se uma faixa de valores de β que resolve o *free-streaming*. Isto está mostrado na figura (5.1). Na figura (5.2) está mostrado, explicitamente, a localização do valor mínimo de β .

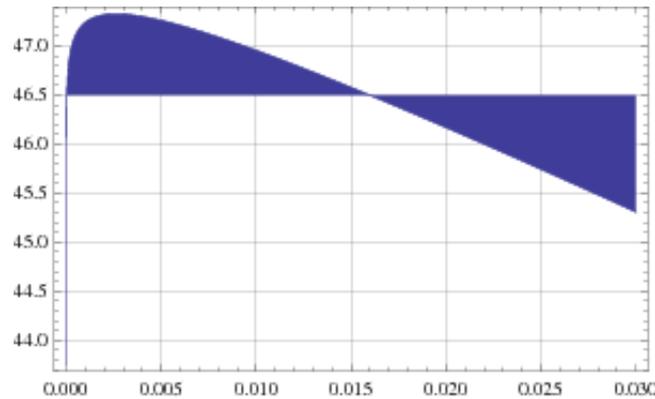


Figura 5.1: No eixo vertical esta $N_{50h^{-1}Mpc} \left(\frac{1-2\beta}{1+2\beta} \right)$. A região escura mostra onde a função é maior ou menor que 46,5. Pode-se ver claramente um limite superior em β , $\beta = 0.016$.

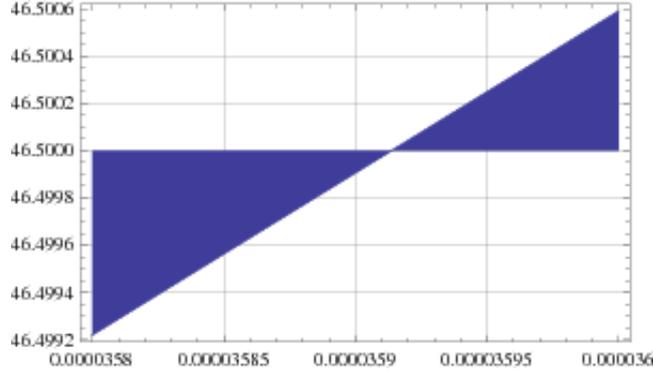


Figura 5.2: A localização do mínimo de β , $\beta = 3.59 \times 10^{-5}$.

Para estes valores de β , o índice espectral está na faixa

$$0.7359 < n_s < 0.9994 , \quad (5.96)$$

Em acordo com as observações.

Ve-se de (5.66) que

$$r_{3000h^{-1}Mpc} = 1,1 \times 10^{-6} \quad (5.97)$$

e

$$r_{50h^{-1}Mpc} = 3,3 \times 10^{-6} . \quad (5.98)$$

Para valores maiores de M o mesmo comportamento foi verificado, mas o limite superior de β que satisfaz à equação (5.87) não satisfaz (5.76). O limite inferior em β não apresenta conflito. Para estas, o limite superior em β é calculado diretamente de (5.76).

Para $M = 10^{11}\text{GeV}$ até $M = 10^{19}\text{GeV}$, os limites no índice espectral estão

na faixa

$$0.69 < n_s < 1 , \quad (5.99)$$

também em acordo com as observações.

5.4.2 Perturbações Tensoriais

Este modelo também gera ondas gravitacionais. A evolução das perturbações tensoriais é semelhante à das perturbações escalares. Uma análise destas pode ser vista em [20, 89, 90]. Aqui elas serão brevemente discutidas.

Levando-se em conta perturbações tensoriais na métrica,

$$ds^2 = -dt^2 + 2a^2(t)H_T Y_{ij} dx^i dx^j ,$$

e seguindo o mesmo procedimento usado para as perturbações escalares, encontra-se que as perturbações tensoriais obedecem à equação

$$v_g'' - \left(\frac{z_g''}{z_g} + \nabla^2 \right) v_g = 0 \quad (5.100)$$

onde $v_g(t, \vec{x}) = z_g c_{ij}(t, \vec{x})$, $c_{ij}(t, \vec{x}) = H_T(t) Y_{ij}(\vec{x})$, e $z_g = a\sqrt{F}$, $F = M^2 + \beta\phi^2$.

O que se encontra é que $\frac{z_g''}{z_g} = \frac{z''}{z}$, assim como $\nu_g = \nu$, e o vínculo sobre o índice espectral de perturbações tensoriais é o mesmo que no caso escalar.

A razão entre a amplitude das perturbações tensoriais e a das perturbações escalares é

$$r = \frac{8\beta}{1 + 6\beta} < 0,133 \quad (5.101)$$

em acordo com os limites presentes [1].

5.5 Conclusões e Perspectivas

Aparentemente, as modificações apresentadas na seção anterior tornam o cenário inflacionário viável, tendo ainda o mérito de garantir que as perturbações geradas sobrevivem a processos dissipativos e podem crescer e dar origem a galáxias e aglomerados [88].

Este cenário é bastante semelhante ao modelo de inflação estendida, tanto que cabe perguntar se ele sofre das mesmas dificuldades que aquele [91, 92]. A princípio, poderia-se acreditar que não, devido à relevância do primeiro estágio da evolução inflacionária. De fato, é assim no trabalho de Di Marco & Notari [74]. Olhando-se para a equação (5.10), ve-se que este resultado pode ser re-escrito como

$$\beta > \frac{1}{304}, \quad (5.102)$$

satisfeito por este.

Porém, o que a nossa modificação faz é diminuir a relevância do primeiro estágio, tornando portanto o modelo mais semelhante à inflação estendida. Pode ser visto, pelas figura (5.1) e figura (5.2), que o valor (5.102) está dentro da faixa de valores de β que tornam o modelo viável, mas este levaria a um limite superior muito baixo para o índice espectral, $n_s < 0,95$, em claro desacordo com as observações.

A conclusão final é que, apesar de uma possibilidade interessante, este cenário não é viável, nem em sua forma original [74], nem com a modificação que propusemos aqui [88]. Uma possibilidade que permanece como viável é construir um cenário inflacionário, em gravitação escalar-tensorial, dentro da ideia de rolamento lento [75].

Bibliografia

- [1] WMAP-COLLABORATION. WMAP mission results. 2008.
<http://map.gsfc.nasa.gov/>.
- [2] FREEDMAN et al. Final results from the Hubble space telescope key project to measure the Hubble constant. The Astrophysical Journal, v. 553, p. 47, 2001.
- [3] WALD, R. M. General Relativity. The University of Chicago Press, 1984. Chicago.
- [4] SCHUTZ, B. A First Course in General Relativity. Cambridge University Press, 1985. Cambridge.
- [5] WEINBERG, S. Gravitation and Cosmology, Principles and Applications of the General Theory of Relativity. John Wiley and Sons, 1972. United States of America.
- [6] RINDLER, W. Relativity: Special, General and Cosmological. Oxford University Press, 2001.
- [7] KOLB, E. W.; TURNER, M. S. The Early Universe. Frontiers in Physics. Addison-Wesley, 1990. United States of America.

- [8] LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. Cosmological Inflation and Large-Scale Structure. Cambridge University Press, 2000. Cambridge.
- [9] MUKHANOV, V. F. Physical Foundations of Cosmology. Cambridge University Press, 2005. Cambridge.
- [10] WEINBERG, S. Cosmology. Oxford University Press, 2008. Oxford.
- [11] PADMANABHAN, T. Structure Formation in the Universe. Cambridge University, 1993.
- [12] KOMATSU, E. et al. Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation. Astrophys. J. Suppl., v. 180, p. 330, 2009.
- [13] NARLIKAR, J. V. Introduction to Cosmology. Cambridge University Press, 1993.
- [14] GUTH, A. H. The Inflationary Universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. Phys. Rev., v. D23, p. 347, 1981.
- [15] MUKHANOV, V. F.; CHIBISOV, G. V. Quantum fluctuation and non-singular universe. (in russian). JETP Lett., v. 33, p. 532, 1981.
- [16] GOLOVNEV, A.; MUKHANOV, V.; VANCHURIN, V. Vector Inflation. JCAP, v. 06, p. 009, 2008.
- [17] KOYAMA, K.; MENNIM, A.; WANDS, D. Brane-world Inflation: Slow-roll corrections to the spectral index. Phys. Rev., v. D77, p. 021501, 2008.
- [18] BAUMANN, D.; MCALLISTER, L. Advances in Inflation in String Theory. An Rev Nucl Phys, v. 59, p. 67, 2009.

- [19] ARMENDARIZ-PICON, C.; DAMOUR, T.; MUKHANOV, V. k -Inflation. Phys Lett, v. B458, p. 209, 1999.
- [20] FARAONI, V. Cosmology in Scalar-Tensor Gravity. Fundamental Theories of Physics. Kluwer Academic, 2004.
- [21] LINDE, A. D. Particle Physics and Inflationary Cosmology. Contemporary Concepts in Physics. Harwood Academic Publishers, 1996.
- [22] WAGA, I. Introdução à Cosmologia - Notas de Aula.
- [23] H.GUTH, A.; TYE, H. Phase transitions and magnetic monopole production in the very early universe. Phys. Rev. Lett., v. 44, p. 631, 1980. Erratum-ibid. 62, 963 (1980).
- [24] PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. An Introduction to Quantum Field Theory. Addison-Wesley, 1995.
- [25] COLEMAN, S. Fate of the false vacuum: Semiclassical theory. Phys. Rev. D, v. 15, p. 2929 ; Errata 16:1248, 1977.
- [26] Callan Jr, C. G.; COLEMAN, S. Fate of the false vacuum. ii. first quantum corrections. Phys. Rev. D, v. 16, p. 1762, 1977.
- [27] SIDNEY COLEMAN; DE LUCCIA, F. Gravitational effects on and of vacuum decay. Phys. Rev, v. D21, p. 3305, 1980.
- [28] GUTH, A. H.; WEINBERG, E. J. Could the universe have recovered from a slow first order phase transition? Nucl. Phys., v. B212, p. 321, 1983.

- [29] LINDE, A. D. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. Phys. Lett., v. B108, p. 389, 1982.
- [30] LINDE, A. D. Chaotic inflation. Phys. Lett., v. B129, p. 177, 1983.
- [31] ALBRECHT, A.; STEINHARDT, P. J. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. Phys. Rev. Lett., v. 48, p. 1220, 1982.
- [32] GOLDWIRTH, D. S.; PIRAN, T. Initial conditions for inflation. Physics Reports, v. 214, p. 223, 1992.
- [33] LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. The cold dark matter density perturbation. Phys. Rep., v. 231, p. 1, 1993.
- [34] GUTH, A. H. Inflationary models and connections to particle physics. 2000.
- [35] LYTH, D. H.; LIDDLE, A. R. The Primordial Density Perturbation. Cambridge University, 2009.
- [36] LINDE, A. D. Eternally existing, self-reproducing chaotic inflationary universe. Phys. Lett., v. B175, p. 395, 1986.
- [37] KOFMAN, L.; LINDE, A.; STAROBINSKY, A. A. Reheating after Inflation. Phys. Rev. Lett.
- [38] BOYANOVSKY, D.; DE VEGA, H. J.; HOLMAN, R.; SALGADO, J. F. J. Preheating and Reheating after Inflation: a pedagogical survey. astro-ph/9609007.

- [39] TRASCHEN, J. H.; BRANDENBERGER, R. H. Particle Production during out-of-equilibrium phase transitions. Phys. Rev., v. D42, p. 2491, 1990.
- [40] MUKHANOV, V. F.; FELDMAN, H. A.; BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. Phys. Rept., v. 215, p. 203, 1992.
- [41] CARROLL, S. Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity. Addison-Wesley, 2004. California.
- [42] DERUELLE, N.; GUNDLACH, C.; POLARSKI, D. On the quantization of perturbations in inflation. Classical and Quantum Gravity, v. 9, p. 137, 1992.
- [43] ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. The Dynamics of General Relativity. Gravitation: An Introduction to Current Research. John Wiley and Sons, 1962.
- [44] MUKHANOV, V. F. The quantum theory of gauge-invariant cosmological perturbations. Journal of Experimental and Theoretical Physics, v. 68, p. 1, 1988.
- [45] MUKHANOV, V. F.; WINITZKI, S. Introduction to Quantum Effects in Gravity. Cambridge University Press, 2007.
- [46] BRANDENBERGER, R. H. Lectures on the theory of cosmological perturbations. hep-th/0306071.
- [47] BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. Quantum fields in curved space. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University, 1982. Cambridge.

- [48] DODELSON, S. Modern Cosmology. Elsevier Academic Press, 2003.
- [49] KOMATSU, E. et al. First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Tests of Gaussianity. Astro. J. Supp., v. 148, p. 119, 2003.
- [50] MALDACENA, J. Non-gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models. JHEP, p. 13, 2003.
- [51] BARTOLO, N.; KOMATSU, E.; MATARRESE, S.; RIOTTO, A. Non-gaussianity from inflation: theory and observations. Phys. Rep., v. 402, p. 103, 2004.
- [52] SMITH, K. M.; SENATORE, L.; ZALDARRIAGA, M. Optimal limits on f_{NL}^{local} from WMAP 5-year data. JCAP, v. 09, p. 6, 2009.
- [53] PLANCK-COLLABORATION. <http://www.rssd.esa.int/index.php?project=planck>.
- [54] ABRAMO, L. R. W. The backreaction of cosmological perturbations. Nucl. Phys. Proc. Suppl., v. 127, p. 95, 2004.
- [55] BASSETT, B. A.; VINIEGRA, F. Massless metric preheating. Phys. Rev., v. D62, p. 043507, 2000.
- [56] FINELLI, F.; BRANDENBERGER, R. H. Parametric amplification of metric fluctuations during reheating in two field models. Phys. Rev., v. D62, p. 083502, 2000.
- [57] FUJII, Y.; ICHI MAEDA, K. The Scalar-Tensor Theory of Gravitation. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University, 2003.

- [58] BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. Phys. Rev., v. 124, p. 925, 1961.
- [59] RAVNDAL, F. Scalar Gravitation and Extra Dimensions. gr-qc/0405030.
- [60] BRANS, C. H. The roots of scalar-tensor theory: an approximate history. gr-qc/0506063.
- [61] NORDSTRÖM, G. Relativitätsprinzip und gravitation. Phys. Zeit., v. 13, p. 1126, 1912.
- [62] NORDSTRÖM, G. Träge und schwere masse in der relativitätsmechanik. Ann. d. Phys., v. 40, p. 856, 1913.
- [63] NORDSTRÖM, G. Zur theorie der gravitation von standpunkt des relativitätsprinzip. Ann. d. Phys., v. 42, p. 533, 1913.
- [64] EINSTEIN, A.; FOKKER, A. D. Die nordströmsche gravotationstheorie von standpunkt des absoluten differentialkalküls. Ann. d. Phys., v. 44, p. 321, 1914.
- [65] DICKE, R. H. New Research on Old Gravitation. Science, Washington, v. 129, p. 621, 1959.
- [66] PAPAPETROU, A. Equations of motion in general relativity. Proc. Phys. Soc. A, v. 64, p. 57, 1951.
- [67] Nordtvedt Jr, K. Equivalence principle fro massive bodies. i. phenomenology. Physical Review, New York, v. 169, p. 1014, 1968.
- [68] Nordtvedt Jr, K. Equivalence principle fro massive bodies. ii. theory. Physical Review, New York, v. 169, p. 1017, 1968.

- [69] LA, D.; STEINHARDT, P. J. Extended inflationary cosmology. Phys. Rev. Lett., v. 62, p. 376, 1989. Erratum-ibid. 62, 1066 (1989).
- [70] WEINBERG, E. J. Some problems with extended inflation. Phys. Rev. D, v. 40, p. 3950, 1989.
- [71] LA, D.; STEINHARDT, P. J.; BERTSCHINGER, E. W. Prescription for successful extended inflation. Phys. Lett., v. B231, p. 231, 1989.
- [72] GOLDWIRTH, D. S.; ZAGLAUER, H. W. Is there a big-bubble problem in extended-inflation? Phys. Rev. Lett., v. 67, p. 3639, 1991.
- [73] LIDDLE, A. R.; WANDS, D. There is a big-bubble problem in extended inflation. Phys. Rev., v. D46, p. 3655, 1992.
- [74] MARCO, F. D.; NOTARI, A. 'Graceful' old inflation. Phys. Rev., v. D73, p. 063514, 2006.
- [75] BISWAS, T.; NOTARI, A. Can inflation solve the hierarchy problem? Phys. Rev., v. D74, p. 043508, 2006.
- [76] REASENBERG, R. D. et al. Viking relativity experiment: verification of signal retardation by solar gravity. Astrophys. J., v. 234, p. L219, 1979.
- [77] KHOURY, J.; WELTMAN, A. Chameleon fields: Awaiting surprises for tests of gravity in space. Phys. Rev. Lett., v. 93, p. 171104, 2004.
- [78] KHOURY, J.; WELTMAN, A. Chameleon cosmology. Phys. Rev. D, v. 69, p. 044026, 2004.

- [79] CHAN HWANG, J. Cosmological perturbations in generalized gravity theories: conformal transformation. Class. Quantum Grav., v. 14, p. 1981, 1997.
- [80] CHAN HWANG, J. Perturbative semiclassical approximation in the uniform curvature gauge. Class. Quantum Grav., v. 11, p. 2305, 1994.
- [81] CHAN HWANG, J.; NOH, H. Density spectra from pole-like inflations based on generalized gravity theories. Class. Quant. Grav., v. 15, p. 1387, 1998.
- [82] CHAN HWANG, J.; NOH, H. Cosmological perturbations in generalized gravity theories. Phys. Rev. D, v. 54, p. 1460, 1996.
- [83] BUTKOV, E. Física Matemática. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 1988.
- [84] LA, D.; STEINHARDT, P. J. Bubble percolation in extended inflationary models. Phys. Lett., v. B220, p. 375, 1989.
- [85] LIDDLE, A. R.; WANDS, D. Microwave background constraints on extended inflationary voids. Mon. Not. R. astr. Soc, v. 253, p. 637.
- [86] TURNER, M. S.; WEINBERG, E. J.; WIDROW, L. M. Bubble nucleation in first-order inflation and other cosmological phase transitions. Phys. Rev., v. D46, p. 2384, 1992.
- [87] AHMED, Z. et al. Results from the final exposure of the CDMS II experiment. astro-ph.CO/0912.3592.
- [88] BRUM, M.; WAGA, I. A ser publicado.

- [89] CHAN HWANG, J. Gravitational wave spectrums from pole-like inflations based on generalized gravity theories. Class. Quant. Grav., v. 15, p. 1401, 1998.
- [90] NOH, H.; HWANG, J.-C. Inflationary spectra in generalized gravity: unified forms. Phys. Lett. B, v. 515, p. 231, 2001.
- [91] CORTÊS, M.; LIDDLE, A. R. Viable inflaitonary models ending with a first-order phaase transition. Phys. Rev., v. D80, p. 083524, 2009.
- [92] NOTARI, A. Comunicação particular.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)