

ESTRUTURA DE BANDAS EM SUPER-REDES MAGNÉTICAS E EM CRISTAIS MAGNÔNICOS

por

CARLOS HUMBERTO OLIVEIRA COSTA

Dissertação de Mestrado

Universidade Federal do Piauí – UFPI
Teresina – PI
9 de fevereiro de 2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

ESTRUTURA DE BANDAS EM SUPER-REDES MAGNÉTICAS E EM CRISTAIS MAGNÔNICOS

por

CARLOS HUMBERTO OLIVEIRA COSTA

Trabalho de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO apresentado ao PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA – PPGF da UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ – UFPI como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE EM FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA e aprovado pela banca examinadora constituída por:

Prof. Dr. PAULO HENRIQUE RIBEIRO BARBOSA
Universidade Federal do Piauí – UFPI
Orientador e Examinador Interno

Prof. Dr. MANOEL SILVA DE VASCONVELOS
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Colaborador e Examinador Externo

Prof. Dr. EUDENILSON LINS DE ALBUQUERQUE
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Examinador Externo

Universidade Federal do Piauí – UFPI
Teresina – PI
9 de fevereiro de 2010

*À Deus, à Denise Christiane, minha amada esposa, à
Débora, minha adorável e doce filha, à meus pais, à meus
irmãos.*

Agradecimentos

A muitos devo minha gratidão, mas ao meu Senhor Jesus Cristo, a vida.

“Eu sou a videira, vós, os ramos. Quem permanece em Mim, e Eu, nele, esse dá muito fruto; porque sem Mim nada podeis fazer.” (Jo 15:5)

Desculpem-me todos aqueles que, porventura, tenha esquecido de mencionar.

Agradeço:

- primeiramente, ao meu *Senhor Jesus Cristo* pelas doces e encorajadoras palavras que sempre me disse tanto nos momentos bons, quanto nos ruins, e que me serviram de um inabalável alicerce durante todo esse curso;
- à minha esposa, *Denise Christiane Reis de Alencar Costa*, que é um presente que Deus me deu durante o desenvolvimento deste trabalho, pela compreensão, ajuda, encorajamento, paciência, e amor que contribuíram de modo crucial para a realização desse trabalho. Sem ela, a conclusão deste trabalho seria ainda mais difícil;
- à meus pais, *José Humberto Vaz da Costa* e *Celene Maria de Almeida Oliveira Costa*, pela paciência, amor, perseverança que sempre tiveram para comigo e pelos exemplos de vida, dos quais sempre pude receber ajuda insondável;
- aos meus irmãos, *Joelene Oliveira Costa*, *José Humberto Vaz Costa Júnior*, e *Samuel Humberto Oliveira Costa*, pela saudável companhia, amizade;
- aos meus amados *irmãos na fé*, pelas saudáveis e ricas comunhões, conselhos, exortações, repreensões e consolos porporcionados por todos vocês. Enfim, pelo cuidado de amor que sempre tiveram para comigo e para com minha família. Que Deus os abençoe mais;
- ao Prof. Dr. *Paulo Henrique Ribeiro Barbosa*, pela orientação;
- ao Prof. Dr. *Francisco Ferreira Barbosa Filho*, pela orientação, não apenas para este trabalho, mas para a minha vida, e pela paciência, perseverança e confiança em mim;
- do Prof. Dr. *Manoel Silva de Vasconcelos*, pela colaboração e sugestões para esta trabalho;
- a todos os professores do Departamento de Física, que contribuíram para minha formação acadêmica, moral e ética;

- a todos os funcionários do Departamento de Física.

Resumo

Neste trabalho investigamos estruturas magnéticas que apresentam as chamadas **desordens determinísticas**. Especificamente, sistemas de **super-redes magnéticas**, que são construídos obedecendo a **sequência quasi-periódica de Fibonacci generalizada**, e **cristais magnônicos**. O principal interesse de nosso estudo foi investigar o efeito da quasi-periodicidade nas propriedades físicas dos sistemas citados acima. No caso das super-redes magnéticas quasi-periódicas, mostramos o efeito da quasi-periodicidade nas bandas de volume através do espectro de ondas de spin em estruturas que seguem as sequências de Fibonacci *golden mean* (GM), *silver mean* (SM), *bronze mean* (BM) e *nickel mean* (NM). Entre estes efeitos destacamos: (i) *a fragmentação das bandas de volume* que, no limite de altas gerações, se tornam conjuntos de Cantor; e (ii) *a obediência a uma lei de escala* que relaciona a largura total das bandas de volume e o número de camadas que compõem a célula unitária. Percebemos que as super-redes magnéticas podem ser consideradas como cristais magnônicos unidimensionais. Logo, estendemos o modelo teórico para investigar a propagação de ondas de spin em cristais e quasi-cristais magnônicos. Com relação ao quasi-cristal, a sequência quasi-periódica considerada é a de Fibonacci GM. Neste último caso, verificamos que *o sistema apresenta uma banda magnônica parcialmente proibida*, na qual a excitação propaga-se apenas em algumas direções do vetor de onda, cujo intervalo de frequência é da ordem do terahertz (THz). Portanto, do ponto de vista tecnológico, os cristais magnônicos podem ser utilizados como transportadores ou processadores de informações, sendo o *magnon* o responsável por esse transporte e processamento.

Palavras-chave: Onda de Spin; Super-rede Magnética; Fractal; Cristal Magnônico e Banda Magnônica Proibida.

Abstract

In this work we investigate magnetic structures that present the so called **deterministic disorders**. Specifically, **magnetic superlattices** systems, which are constructed in according with by obeying the **generalized Fibonacci quasiperiodic sequence**, and **magnonic crystals**. The aim of our study was to investigate the quasiperiodicity effect in physical properties of the systems mentioned above. In the case of quasiperiodic magnetic superlattices, we show the quasiperiodicity effect on the spin waves bulk bands throughout the spectrum of spin waves in structures which follow the Fibonacci sequence *golden mean* (GM), *silver mean* (SM), *bronze mean* (BM) and *nickel mean* (NM). Among these effects we emphasize: (i) *the fragmentation of bulk bands* that, in the high generations limit, become Cantor sets and (ii) *the obedience to a scaling law* that relates the total width of the bulk bands and number layers that compose the unit cell. We realized that the superlattices can be considered as unidimensional magnonic crystals. So, we extend the theoretical model to investigate the propagation of spin waves in magnonic crystals and quasicrystals. With respect to the quasicrystal, the quasiperiodic sequence considered is Fibonacci (golden mean). In this case, *the system displays a partial magnonic band gap*, in which the excitation can propagate only in some directions of wavevector, whose frequency range is from order of terahertz (THz). Therefore, in the technological point of view, magnonic crystals can be used like carriers or processors information, and the magnon is the responsible for this transporting and processing.

Keywords: Spin Waves; Magnetic Superlattices; Fractal; Magnonic Crystal and Magnonic Band Gap.

Sumário

1	Introdução	1
2	Excitações Elementares: Ondas de Spin	5
2.1	Conceitos Básicos de Estado Sólido	5
2.1.1	Redes de Bravais	6
2.1.2	Simetrias do Estado Cristalino	7
2.1.3	Rede Recíproca	7
2.2	Materiais Magnéticos	9
2.2.1	Origem do Alinhamento Magnético: Interação de Troca	10
2.3	Excitações Elementares em Sólidos	12
2.3.1	<i>Phonons</i>	12
2.3.2	<i>Plasmons</i>	13
2.3.3	<i>Magnons</i>	14
2.3.4	<i>Polaritons</i>	14
2.4	Ondas de Spin ou “ <i>Magnons</i> ”	15
2.4.1	Regimes Magnéticos	16
2.4.2	Magnons em Materiais Ferromagnéticos (FM) e Aproximação <i>RPA</i>	17
3	Super-redes Magnéticas	23
3.1	Super-redes	23
3.2	<i>Magnons</i> em Super-redes Periódicas e Método da Matriz Transferência	24
3.3	<i>Magnons</i> em Super-redes Quasi-Periódicas	33
4	Super-redes Quasi-periódicas de Fibonacci Generalizada $\sigma(p, q)$	37
4.1	Sequência de Fibonacci Generalizada $\sigma(p, q)$	37
4.1.1	Sequência de Fibonacci <i>Golden Mean</i> (GM), $\sigma(1, 1) = \sigma_g$	39
4.1.2	Sequência de Fibonacci <i>Silver Mean</i> (SM), $\sigma(2, 1) = \sigma_s$	39
4.1.3	Sequência de Fibonacci <i>Bronze Mean</i> (BM), $\sigma(3, 1) = \sigma_b$	40
4.1.4	Sequência de Fibonacci <i>Nickel Mean</i> (NM), $\sigma(1, 3) = \sigma_n$	41
4.2	Localização e Leis de Escala	41
4.3	Resultados Numéricos e Conclusões	46
5	Cristais Magnônicos	57
5.1	Cristais Fotônicos	57
5.2	Cristais Magnônicos	58
5.3	Resultados Numéricos e Conclusões	61

6	Conclusões Gerais e Perspectivas	65
A	Seqüência Quasiperiódica de Fibonacci Generalizada $\sigma(p, q)$	67
A.1	Fibonacci Golden Mean (GM) $\sigma(1, 1) = \sigma_g (B \rightarrow A \text{ e } A \rightarrow AB)$	67
A.2	Fibonacci Silver Mean (SM) $\sigma(2, 1) = \sigma_s (B \rightarrow A \text{ e } A \rightarrow AAB)$	69
A.3	Fibonacci Bronze Mean (BM) $\sigma(3, 1) = \sigma_b (B \rightarrow A \text{ e } A \rightarrow AAAB)$	71
A.4	Fibonacci Nickel Mean (NM) $\sigma(1, 3) = \sigma_n (B \rightarrow A \text{ e } A \rightarrow AB BB)$	75

Lista de Figuras

1.1	Bússola chinesa antiga.	2
2.1	Exemplos de Redes de Bravais.	6
2.2	Materiais magnéticos.	10
2.3	Cadeias unidimensionais de íons.	13
2.4	Espectro de <i>phonons</i> em cadeias unidimensionais.	14
2.5	Visão clássica da propagação de ondas de spin em meios magnéticos.	16
2.6	Regimes magnéticos.	17
2.7	Representação esquemática de um ferrimagneto com estrutura SC.	18
2.8	Representação da vizinhança de um spin em ferromagneto.	20
2.9	Espectro de magnons em ferromagnetos com estrutura SC.	21
3.1	Super-rede periódica.	25
3.2	Interface da super-rede periódica.	26
3.3	Sítio α e sua vizinhança.	27
3.4	Curva de dispersão de ondas de spin para a super-rede ferromagnética periódica.	32
4.1	Sequências de Fibonacci generalizada $\sigma(p, q)$.	40
4.2	Exemplos de sistemas fractais.	42
4.3	Contagem de caixas.	43
4.4	Figura mostrando as primeiras gerações do conjunto de Cantor.	44
4.5	Frequência reduzida Ω versus a geração n da sequência de Fibonacci generalizada.	45
4.6	Curva de dispersão de <i>magnons</i> em super-redes quasi-periódicas do tipo Fibonacci GM.	46
4.7	Curva de dispersão de <i>magnons</i> em super-redes quasi-periódicas do tipo Fibonacci SM.	47
4.8	Curva de dispersão de <i>magnons</i> em super-redes quasi-periódicas do tipo Fibonacci BM.	47
4.9	Curva de dispersão de <i>magnons</i> em super-redes quasi-periódicas do tipo Fibonacci NM.	48
4.10	Localização das larguras de bandas permitidas em função de n para Fibonacci GM.	49
4.11	Localização das larguras de bandas permitidas em função de n para Fibonacci SM.	51
4.12	Localização das larguras de bandas permitidas em função de n para Fibonacci BM.	52

4.13	Localização das larguras de bandas permitidas em função de n para Fibonacci NM.	53
4.14	Plot de Δ versus F_n .	54
4.15	Plot de $\text{Log}(\Delta)$ versus $\text{Log}(F_n)$.	55
4.16	Dependência do coeficiente de difusão do espectro com o vetor de onda.	56
5.1	Estrutura de bandas de um semiconductor.	58
5.2	Estrutura de bandas de um cristal fotônico.	59
5.3	Estrutura de bandas de um cristal magnônico.	60
5.4	Esquema da zona de Brillouin reduzida.	61
5.5	Estrutura de bandas em um MC.	62
5.6	Estrutura de bandas em um MQC segundo a sequência de Fibonacci GM.	63

CAPÍTULO 1

Introdução

Há muito o magnetismo atrai a curiosidade humana e possui inúmeras aplicações práticas[1]. A Figura 1.1 mostra-nos a bússola que os chineses utilizavam em suas navegações. O estudo da ciência do magnetismo se apresenta há muito como um dos campos mais profícuos e competitivos do conhecimento. Desde o descobrimento da **magnetita** (Fe_3O_4)¹ há aproximadamente 4000 anos atrás na Região da Magnésia e Ásia Menor[2], passando por novas e intrigantes descobertas sobre crescimento e comportamento de estruturas multi-cristalinas[3], até investigações em nanomateriais, o interesse por seu estudo só tem aumentado. A razão para isso é a possibilidade de uma grande quantidade de aplicações práticas na área de dispositivos magnéticos: sensores magnéticos feitos com materiais que apresentam magnetoresistência gigante[4], gravação de dados em fitas magnéticas e discos rígidos, memórias magnetoresistivas (MRAM), etc.

Dentro deste amplo contexto, o estudo de sistemas físicos tais como **super-redes**, **multi-camadas** e **filmes finos magnéticos** têm tornado-se uma área de muita atividade na Física da Matéria Condensada nestes últimos 50 anos devido ao importante papel que estes novos materiais magnéticos têm desempenhado no desenvolvimento de novas tecnologias[5]. Uma das principais características destes sistemas físicos, e que também é a principal motivação para o forte interesse nestas estruturas artificiais, é que estas podem exibir novas e intrigantes propriedades físicas, não presentes nos seus constituintes individualmente. Além disso, com o desenvolvimento de novas e altamente sofisticadas técnicas de crescimento, muitos dos sistemas magnéticos que foram alvo somente de trabalhos teóricos puderam ser realizados experimentalmente. Esta combinação de avanços teóricos e experimentais têm sido o combustível para o sucesso nesta área.

Dentre as várias técnicas de crescimento podemos citar como exemplos a *epitaxia por feixe molecular* (MBE) e a *deposição por vapor químico metal-orgânico* (MOCVD)[6, 7, 8, 9].

Existem também algumas técnicas de caracterização que têm tornado possível a fabricação de materiais com forma e interfaces de alta qualidade, e com dimensões comparáveis à do livre caminho médio e do comprimento de onda de Broglie do elétron. O *espalhamento de raio X*, a *difração de elétrons de baixa energia* (LEED) e a difração de nêutrons são alguns exemplos destas técnicas.

Já com relação às técnicas utilizadas para investigar as propriedades físicas destes sistemas, temos o *método de espalhamento inelástico da luz*, que inclui o *espalhamento Raman*, a técnica experimental mais útil para estudar os mais diversos modos de propagação em sólidos, o *espalhamento Brillouin ressonante* (RBS), apropriado ao estudo de *polaritons de excitons*; e o *método de reflexão total atenuada*, que foi originalmente desenvolvido por Otto[10] para

¹Este minério era conhecido pelos gregos antigos como *magnes lapis*, que significa *Pedra da Magnésia*.



Figura 1.1 Bússola utilizada pelos chineses por volta do ano 1100 a.C. É considerada o primeiro dispositivo a utilizar materiais magnéticos.

o estudo de *polaritons* de superfície (*surface polaritons*) em metais. A partir destes trabalhos experimentais, muitas técnicas e métodos teóricos foram testados, o que levou a um razoável entendimento do comportamento destas estruturas.

Paralelamente ao desenvolvimento de sistemas fabricados artificialmente, uma nova área de pesquisa surgiu na Física, os *sistemas quasi-cristalinos*. O primeiro trabalho nesta área foi desenvolvido em 1984 por Schechtman e colaboradores[11], os quais relataram a descoberta de uma fase quasi-cristalina em ligas de Al-Mn. Após isto, motivados pelas idéias de Levine e Steinhardt[12], Merlin e colaboradores[13] desenvolveram a primeira super-rede seguindo uma *seqüência quasi-periódica de Fibonacci*, a qual é a realização unidimensional de um quasi-cristal². Seguindo estes trabalhos, um grande número de sistemas têm sido estudados em quasi-cristais unidimensionais, sendo a motivação para isto o fato destes serem classificados como intermediários entre um *cristal periódico* e um *sólido aleatoriamente amorfo*. Além disso, *correlações de longo alcance* induzidas pela construção do sistema³, juntamente com o arranjo quasi-periódico, exercem uma forte influência no comportamento das várias propriedades físicas dos sistemas quasi-periódicos, tais como transmissão eletrônica, propagação de luz, densidade de estados, magnetização, magnetoresistência, calor específico, etc. Estas propriedades apresentam uma característica que é comum aos sistemas quasi-periódicos: a *fractalidade* de seus vários espectros[14].

Neste trabalho estamos interessados em estudar os efeitos da quasi-periodicidade em sistemas magnéticos que seguem a *seqüência de Fibonacci generalizada*, restringindo-nos aos sistemas magnéticos conhecidos como *super-redes magnéticas quasi-periódicas*. Utilizamos uma teoria microscópica baseada no *hamiltoniano de Heisenberg* para o estudo das propriedades dinâmicas, mais especificamente a obtenção dos espectros das *ondas de spin*. O método de cálculo utilizado é o da equação de movimento do operador de spin, dentro da aproximação

²Embora o termo quasi-cristal seja mais apropriado quando aplicado a compostos naturais ou ligas artificiais, em uma dimensão (1D), não existe diferença entre estes e as estruturas quasi-periódicas formadas pelo arranjo de células unitárias periódicas.

³Os sistemas quasi-cristalinos são estudados teoricamente usando-se *relações de recorrência* para construí-los, e no Capítulo 4 nós faremos uso de algumas relações para estudar as super-redes quasi-periódicas.

RPA (*Random Phase Approximation*), juntamente com o método da *matriz transferência*, que simplifica bastante a álgebra do problema. Supomos que os materiais que compõem as multicamadas são ferromagnetos de Heisenberg com estrutura cúbica simples e estão sob a ação de um campo magnético externo estático.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. No Capítulo 2, fazemos uma breve exposição de alguns conceitos de Física do Estado Sólido considerados básicos e, ao mesmo tempo de fundamental importância para o entendimento dos resultados do nosso trabalho. No Capítulo 3 discutimos alguns aspectos ligados ao problema de super-redes: resultados da literatura, modelos e técnicas de estudo destes sistemas. No Capítulo 4 apresentamos nossos resultados para a sequência de Fibonacci generalizada, enfatizando os espectros das ondas de spin nas sequências *golden mean* (GM), *silver mean* (SM), *bronze mean* (BM) e *nickel mean* (NM), o comportamento fractal destes espectros e a obediência a uma lei de escala. No Capítulo 5 apresentamos o problema da super-rede magnética periódica (quasi-periódica) considerando-a como um *cristal (quasi-cristal) magnônico unidimensional*. Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos as conclusões gerais e algumas perspectivas para possíveis extensões do nosso trabalho.

Excitações Elementares: Ondas de Spin

Neste Capítulo apresentamos alguns conceitos de Física do Estado Sólido considerados como básicos e, ao mesmo tempo de fundamental importância para o entendimento dos capítulos seguintes, como redes de Bravais, suas simetrias e redes recíprocas (para uma revisão, são recomendadas algumas referências como Ascroft[15], Kittel[16] e Oliveira[17].). Falamos brevemente dos tipos de materiais magnéticos, bem como da origem deste alinhamento espontâneo dos spins. Discorreremos rapidamente as principais excitações coletivas elementares em sólidos, a fim de dar uma visão mais ampla sobre estas. Então, faremos uma discussão de maneira mais detalhada sobre a propagação de ondas de spin em materiais magnéticos (especificamente, em ferromagnetos) através da obtenção da relação de dispersão e do espectro desta excitação, e sobre os regimes em que estas ondas podem ser estudadas. Pretendemos, através do espectro de *magnons*, obter alguns “insights” qualitativos e quantitativos para entendermos os espectros nas super-redes magnéticas periódicas e quasi-periódicas. Aqui também será apresentada a maior parte do cálculo teórico utilizado neste trabalho que é o *hamiltoniano de Heisenberg* e a *aproximação RPA*.

2.1 Conceitos Básicos de Estado Sólido

O modelo de elétrons livres em metais (modelo de Drude), que considera os elétrons como sendo um gás ideal em uma caixa, é capaz de descrever semi-quantitativamente várias propriedades dos metais, tais como a condutividade elétrica DC e AC, o efeito Hall, a magnetoresistência e a condutividade térmica, e sendo ainda hoje muito evocado como ponto de partida, ou até mesmo como um limite, em diversas situações. Entretanto, um grande número de fenômenos importantes não encontram explicações se não considerarmos os efeitos do potencial gerado pelos íons do material sobre os elétrons, como no modelo de Fermi. Este é, por exemplo, o caso do calor específico e do fenômeno da supercondutividade, talvez o mais espetacular destes efeitos. Sobre este modelo, H. A. Lorentz afirmou: “*Em uma teoria que têm dado resultados como estes, certamente deve existir um grande fundo de verdade (In a theory which has given results like these, there must certainly be a great deal of truth)*”.

A propriedade mais importante do *potencial cristalino* é o fato de ele possuir periodicidade espacial determinada pelas simetrias do cristal. Portanto, a sua inclusão na equação de Schrödinger de um elétron, quer localizado, quer itinerante, demanda um conhecimento preciso da estrutura cristalina do sólido.

2.1.1 Redes de Bravais

O estado cristalino se caracteriza pela repetição espacial de uma estrutura básica que pode conter um ou mais átomos ligados entre si. As implicações dessa regularidade espacial para as propriedades físicas dos materiais são muitas. Tais estruturas periódicas são as conhecidas **redes de Bravais**.

Uma rede de Bravais é um arranjo *infinito* de pontos dispostos regularmente no espaço, tal que qualquer ponto desta rede pode ser localizado pelo **vetor de translação**

$$\mathbf{R} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3, \quad (2.1)$$

onde n_1 , n_2 e n_3 são números inteiros e $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ são chamados **vetores primitivos** ou **vetores da base**, que gera todo o cristal a partir de uma **célula unitária**. Esta é definida como sendo o volume necessário para envolver um único sítio da rede, ou seja, um átomo por célula unitária. Note que uma rede de Bravais, como definida acima, é um conceito matemático, pois possui dimensão infinita, e quaisquer de seus pontos é equivalente a qualquer outro. Um cristal real consiste de um número muito grande, porém finito, de átomos que ocupam posições dentro de uma rede de Bravais subjacente. Obviamente que os átomos da superfície em um cristal real ocupam posições que não são equivalentes àsquelas dos átomos em seu interior (“*bulk*”). No entanto, os *efeitos de superfície* que surgem desse fato podem ser, na maioria dos casos, desprezados¹.

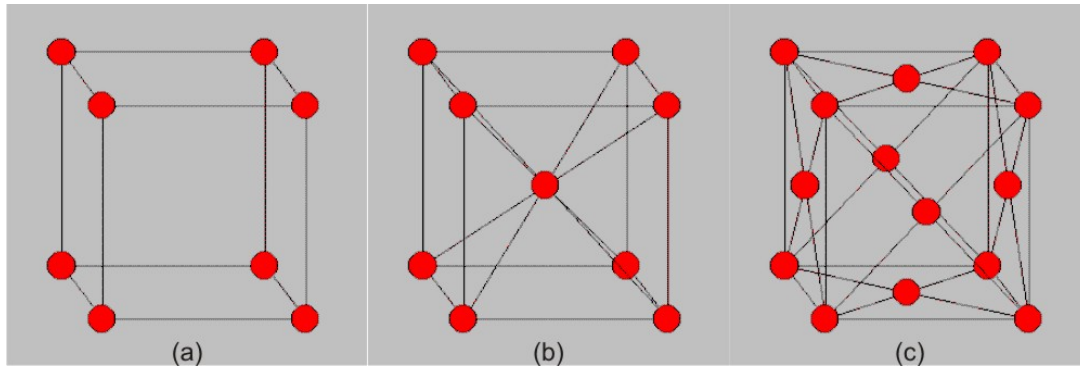


Figura 2.1 Principais tipos de redes de Bravais: (a) cúbica simples (SC), (b) cúbica de corpo centrado (BCC), e (c) cúbica de face centrada (FCC).

O exemplo mais simples de uma rede de Bravais em três dimensões é a *cúbica simples* (SC), mostrado na Figura 2.1 (a). Além desta, outras redes importantes são a rede *cúbica de corpo centrado* (BCC) e a rede *cúbica de face centrada* (FCC), que estão esquematizadas nas Figuras 2.1(b) e (c), respectivamente. O comprimento da aresta do cubo que forma a célula unitária é chamado **parâmetro de rede**, e, na maioria dos cristais, é da ordem de alguns angstroms (de 2 a 8 Å). Existem, em uma, duas e três dimensões, quatorze redes de Bravais ao todo[15, 16].

¹Estes efeitos de superfície (ou de borda) se tornam relevantes quando lidamos com amostras em que uma ou mais dimensões são mesoscópicas ou nanoscópicas.

2.1.2 Simetrias do Estado Cristalino

O conceito matemático que exprime a regularidade de um objeto é o de **simetria**. As estruturas cristalográficas conhecidas na natureza são classificadas de acordo com as suas propriedades de simetria e são afetadas pela simetria do cristal. Aqui, apenas introduzimos a noção de **operações de simetria** e de **grupo pontual de simetria**. Um estudo mais detalhado é encontrado em Cornwell[18] e Dresselhaus[19].

Se realizarmos operações em um cristal, tal como uma rotação em torno de um eixo, uma inversão em relação a um ponto, ou uma reflexão em torno de um plano, e após a operação o cristal permanecer com a exata aparência de antes, dizemos que a operação realizada foi uma **operação de simetria** e que o cristal contém esta simetria. Abaixo estão descritas as chamadas *operações de simetria pontuais*. Esta denominação vem do fato de que estas operações são realizadas em relação a um ponto fixo no espaço:

- **Identidade E** . Todos os objetos possuem esta simetria. Ele leva todas as coordenadas nelas mesmas: $E(x, y, z) = (x, y, z)$;
- **Inversão I** . Todas as coordenadas são invertidas em relação à origem:
 $I(x, y, z) = (-x, -y, -z)$;
- **Rotação C_n** . Rotação de um ângulo igual a $360^\circ/n$ em torno de um eixo. Por exemplo, C_4 , representa um rotação de 90° , C_4^2 de 180° , etc. Tomando z como eixo de rotação, teremos: $C_4(x, y, z) = (y, -x, z)$;
- **Reflexão em um plano horizontal σ_h** . Reflete as coordenadas em relação a um plano horizontal que contém o eixo principal de simetria. Um cubo, por exemplo, possui este elemento de simetria;
- **Reflexão em um plano vertical σ_v** . Reflete as coordenadas em relação a um plano vertical que contém o eixo principal de simetria;
- **Reflexão em um plano diagonal σ_d** . Reflete as coordenadas em relação a um plano diagonal que contém o eixo principal de simetria;
- **Rotação imprópria S_n** . Esta operação de simetria consiste de uma rotação de um ângulo igual a $360^\circ/n$, seguida de uma reflexão em um plano horizontal: $S_n = \sigma_h C_n$.

2.1.3 Rede Recíproca

Em quase todas as situações em Física lidamos com problemas envolvendo muitos corpos que interagem entre si, e quando usamos as leis da Física, sejam as leis de Newton, na Mecânica Clássica, ou a equação de Schrödinger, na Mecânica Quântica, para descrever tal situação, as equações expressas não são independentes, isto é, a equação de movimento para um dado corpo depende das demais, devido a existência da interação. Dizemos então que as equações estão *acopladas*. Uma maneira de resolver este impasse é considerar as interações desprezíveis. Em outras situações, utilizamos procedimentos aproximativos, dentre os quais podemos citar

a aproximação de Hartree-Fock, o método *tight-binding*, e métodos perturbativos. Mesmo desprezando as interações, ainda assim o problema pode ser bastante complicado de resolver. Outra saída é procurar uma base onde as equações de movimento sejam independentes ou *desacopladas*, que, no estudo de sistemas cristalinos, chamamos de *espaço dos momentos* ou *espaço k* . O espaço real (coordenadas x , y e z) é assim chamado de *espaço das configurações*. Ao considerarmos os efeitos do potencial da rede cristalina sobre os elétrons, é conveniente procurar resolver o problema no espaço k . Esta idéia leva ao conceito de **rede recíproca**.

Por definição, a rede recíproca associada a uma dada rede cristalina é aquela formada pelos vetores $\mathbf{K}$ que satisfazem a seguinte condição:

$$e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} = 1, \quad (2.2)$$

para todo vetor $\mathbf{R}$ da **rede direta**². Esta definição embute a propriedade da periodicidade da rede de Bravais. De fato, considerando a onda plana, $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}}$, verificamos a periodicidade da rede de Bravais por

$$e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{K}\cdot(\mathbf{R}+\mathbf{r})}, \quad (2.3)$$

que somente será verdadeira se a Equação (2.2) for satisfeita.

É fácil mostrar que a rede recíproca também é uma rede de Bravais com vetores primitivos $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_3$ dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}; \\ \mathbf{b}_2 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}; \\ \mathbf{b}_3 &= 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ são os vetores primitivos da rede direta. Repare que $(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$ é o volume da célula unitária na rede direta. Note também que

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi \delta_{ij}. \quad (2.5)$$

A periodicidade da rede possui importantes consequências para a análise de problemas envolvendo a condução em cristais. Considere, por exemplo, duas funções de onda, $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ e $\psi_{\mathbf{k}+\mathbf{K}}(\mathbf{r})$, onde $\mathbf{K}$ é um vetor da rede recíproca. Na medida em que a rede recíproca é também uma rede de Bravais, isto é, possui simetria de translação, essas duas funções de onda podem diferir no máximo por um fator de fase global, ou seja,

$$|\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 = |\psi_{\mathbf{k}+\mathbf{K}}(\mathbf{r})|^2. \quad (2.6)$$

Isto significa que todos os valores de $\mathbf{k}$ que são fisicamente distinguíveis pertencem a uma única célula unitária da rede recíproca. Esta região, devido à sua importância no estudo da dinâmica dos elétrons na rede, possui um nome especial: **primeira zona de Brillouin**.

²Passaremos a nos referir à rede de Bravais no espaço real como *rede direta* a fim de diferenciá-la da rede recíproca.

A primeira zona de Brillouin é construída em duas etapas: primeiro tomamos um ponto qualquer da rede recíproca e o ligamos por linhas retas a todos os seus pontos vizinhos mais próximos. Depois, traçamos planos perpendiculares a essas linhas em seus ponto médios. A figura obtida pela interseção desses planos conterá somente um ponto da rede recíproca e refletirá toda as suas propriedades de simetria. Esta é a primeira zona de Brillouin. Esta maneira que explicamos para determinar a primeira zona de Brillouin também pode ser usada na rede direta, e a célula obtida é chamada de **célula de Wigner-Seitz**. Portanto, podemos dizer que a primeira zona de Brillouin é célula de Wigner-Seitz na rede recíproca.

O conceito de zona de Brillouin pode ser estendido para abranger outras zonas da rede recíproca. Por exemplo, a *segunda zona de Brillouin* é obtida da mesma forma que a primeira, mas considerando os segundos vizinhos mais próximos; a *terceira*, em relação aos terceiros; etc.

A aplicação destes conceitos a elétrons em um cristal é apenas por razões históricas, e, como veremos a seguir, todos os conceitos discutidos aqui podem ser aplicados a diversos sistemas. No nosso caso, estamos interessados em sistemas magnéticos.

Vamos, a seguir, fazer uma breve descrição dos tipos de alinhamentos magnéticos, ou seja, os materiais magnéticos presentes na natureza, e de sua origem microscópica[16, 17, 20].

2.2 Materiais Magnéticos

Todas as substâncias, sejam sólidas, líquidas ou gasosas, revelam algum carácter magnético, em todas as temperaturas. Dessa forma, o magnetismo torna-se uma propriedade fundamental de qualquer material.

Existem três tipos principais de materiais que apresentam um ordenamento magnético, a saber: **ferromagnetos**, **antiferromagnetos** e **ferrimagnetos** ($\chi \gg 1$)³. Estes arranjos estão mostrados esquematicamente na Figura 2.2, considerando que os momentos magnéticos de spin comportam-se como vetores no espaço Euclidiano. Em ferromagnetos (Figura 2.2 (a)), a interação entre os spins de íons vizinhos favorece um alinhamento paralelo espontâneo a baixas temperaturas. Já em antiferromagnetos e ferrimagnetos (Figuras 2.2(b) e (c), respectivamente), a interação possui sinal oposto, levando a um alinhamento antiparalelo espontâneo dos spins. Diferentemente dos antiferromagnetos, os ferrimagnetos possuem os spins que estão para cima (“up”) com magnitude diferente dos spins que estão para baixo (“down”). Isto leva a uma magnetização espontânea diferente de zero em baixas temperaturas mesmo na ausência de um campo magnético externo aplicado, e, neste aspecto, os ferrimagnetos se comportam similarmente aos ferromagnetos. Por sua vez, os antiferromagnetos, sem campo magnético externo aplicado, possuem magnetização líquida igual a zero devido a mesma magnitude dos spins “up” e “down”.

Experimentalmente é observado que a ordem magnética, ou mais claramente, a magnetização, diminui com o aumento da temperatura até anular-se a uma dada temperatura crítica

³O símbolo χ é a **susceptibilidade magnética** e é definida pela razão entre a magnetização M e campo magnético externo aplicado H : $\chi = M/H$. Em ferromagnetos, a relação entre M e H não é linear, de modo que a susceptibilidade é calculada como sendo a variação de M com relação a H : $\chi = \partial M / \partial H$.

T_c , onde ocorre a transição de uma fase *ordenada* (fase ferro-, antiferro-, ou ferrimagnética) para uma *desordenada*, em que não há alinhamento algum entre os spins, que é chamada **fase paramagnética** ($\chi \geq 1$).

Para ferromagnetos e ferrimagnetos, a temperatura T_c , onde ocorre a transição de fase, é chamada de *temperatura de Curie* (T_C), e em antiferromagnetos, *temperatura de Néel* (T_N). Com respeito às transições de fase, há uma grande quantidade de livros textos e artigos científicos que tratam deste assunto de forma detalhada. Uma discussão pode ser encontrada em Stanley[21] e Salinas[22].

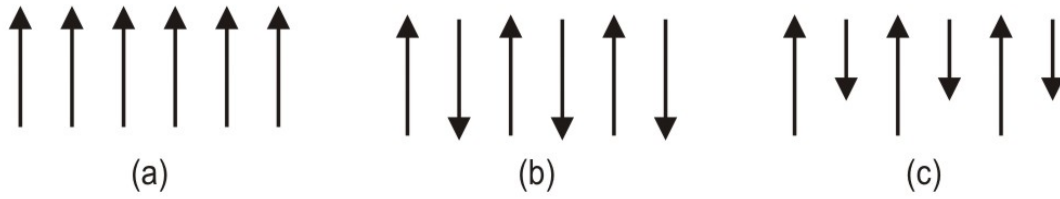


Figura 2.2 Configuração do alinhamento dos spins nos três principais tipos de materiais magnéticos: (a) ferromagneto, (b) antiferromagneto, e (c) ferrimagneto.

2.2.1 Origem do Alinhamento Magnético: Interação de Troca

Um ponto de fundamental importância no estudo do magnetismo é o entendimento da origem microscópica do mecanismo que leva ao alinhamento dos spins. As substâncias ferromagnéticas, por exemplo, possuem um momento magnético espontâneo em temperaturas abaixo da temperatura crítica T_c .

A existência de um momento magnético espontâneo sugere, portanto, que os spins no interior da amostra estão dispostos de forma regular, conforme já foi dito anteriormente. Poderíamos em princípio imaginar que a interação direta entre os spins, como aquelas que ocorrem entre dipolos magnéticos, fosse responsável por esse alinhamento magnético. Mas a energia envolvida nesta interação é tão pequena que a agitação térmica, mesmo em baixas temperaturas, seria capaz de destruir o ordenamento entre os spins. Experimentalmente observa-se que no ferro (Fe) a fase ferromagnética pode persistir até 1000 K.

A descrição da interação entre os spins, responsável pelo efeito do ordenamento destes, foi feita por Heisenberg[23], e é conhecida como **interação de troca** ou **termo de exchange**. A origem microscópica desta interação é eletrostática e também devido ao comportamento fermiônico dos elétrons. Consequentemente, sua função de onda global deve ser anti-simétrica sob uma troca de coordenadas. Isto é válido para dois ou mais elétrons mesmo que estejam em íons diferentes. Por simplicidade, consideremos o caso de dois íons vizinhos cada qual com um elétron. A função de onda total pode ser escrita como a parte orbital ψ vezes a parte “spinorial” χ . Uma vez que os elétrons são indistinguíveis, podemos escrever a função de onda orbital como sendo

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) \pm \psi_b(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2)], \quad (2.7)$$

onde a e b se referem aos íons, e $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, aos elétrons. Como a função de onda global deve ser anti-simétrica, o sinal (+) na Equação (2.7) se acopla com a função de onda de spin anti-simétrica, que descreve o estado singleto (spins antiparalelos, $S = 0$), e o sinal (-) se acopla com a função de onda de spin simétrica, que descreve o estado tripleto (spins paralelos, $S = 1$).

Se levarmos em conta a interação eletrostática dos íons, a qual pode ser escrita como um potencial da forma

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}, \quad (2.8)$$

onde $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ é a distância entre os elétrons, e calcularmos a energia média usando as funções de onda espaciais, temos,

$$\langle U \rangle = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \psi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{1}{r_{12}} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (2.9)$$

Substituindo a Equação (2.7) na expressão da energia média, obtemos

$$\langle U \rangle = E \pm J, \quad (2.10)$$

onde

$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \psi_a^*(\mathbf{r}_1) \psi_b^*(\mathbf{r}_2) \frac{1}{r_{12}} \psi_a(\mathbf{r}_1) \psi_b(\mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2, \quad (2.11)$$

e

$$J = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \psi_a^*(\mathbf{r}_2) \psi_b^*(\mathbf{r}_1) \frac{1}{r_{12}} \psi_a(\mathbf{r}_1) \psi_b(\mathbf{r}_2) d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (2.12)$$

Podemos notar que E é a energia Coulombiana média do sistema. Este seria o único termo presente se o princípio da exclusão de Pauli não tivesse sido levado conta. A imposição feita pelo princípio de Pauli sobre a função de onda do par introduz o outro termo, J , que é conhecido como **interação de troca** ou **termo de exchange**.

O sinal ($\pm$) na expressão de $\langle U \rangle$ será positivo ou negativo, dependendo do estado de spin, se singleto ou tripleto. Portanto, embora a interação entre os elétrons não dependa explicitamente dos spins, a energia média dependerá. É plausível então pensar que a energia do sistema possa ser escrita em termos das variáveis de spin. Podemos ver isso de uma maneira simplificada escrevendo a expressão para $\langle U \rangle$ da seguinte forma:

$$\langle U \rangle = E \pm 4JS_1 \cdot S_2. \quad (2.13)$$

Note que quando os dois spins forem paralelos, teremos $S_1 \cdot S_2 = +1/4$ e a função espacial é anti-simétrica, e quando forem anti-paralelos, $S_1 \cdot S_2 = -1/4$, e a função de onda espacial é simétrica.

Werner Heisenberg foi o primeiro a notar, em 1928, a importância da energia de troca para explicar o ordenamento espontâneo dos spins nos materiais magnéticos. Ele escreveu o *hamiltoniano de troca* como sendo

$$\mathcal{H} = -2JS_1 \cdot S_2, \quad (2.14)$$

que é conhecido como **hamiltoniano de Heisenberg**, e é a base dos modelos de magnetismo nos sólidos.

2.3 Excitações Elementares em Sólidos

Um cristal pode ser estudado por várias técnicas experimentais dependendo do efeito em interesse: campos elétricos e magnéticos, gradientes de temperatura, fenômenos ópticos, espalhamento de elétrons e nêutrons, dopagem, etc. Logo, é impossível desenvolver um único modelo teórico que leve em conta todos estes fenômenos, por tratar-se de um sistema de muitos corpos. Modelos apropriados e simplificados são então deduzidos para áreas particulares de interesse. Porém, deverá haver um conceito que possa *unificar* estes aspectos individuais. Este conceito é o de **excitações elementares**.

O conceito de excitações elementares pode ser entendido da seguinte maneira. Se temos um sistema mecânico de massas pontuais, nós sabemos como descrever os modos complexos de oscilação em termos simples. Para um sistema com n graus de liberdade, introduz-se n novas **coordenadas generalizadas** (ou **normais**) de tal maneira que o operador hamiltoniano apresente-se numa forma diagonal. Isto é, as complexas equações de movimento são expressas em coordenadas normais nas quais as n equações de movimento são agora independentes, representando, assim, o movimento de osciladores livres. Resumindo, o que fazemos é substituir o complicado sistema com partículas interagentes por um sistema simples equivalente, em que seus constituintes são agora não-interagentes. Estes constituintes são o que chamamos de **quasi-partículas**. A seguir discutimos superficialmente as excitações elementares mais conhecidas em Matéria Condensada. Pode-se encontrar uma excelente discussão sobre excitações elementares em Madelung[24] e Albuquerque[25].

2.3.1 Phonons

Os **phonons** são os “*quanta*” de energia associados às vibrações da rede. Para introduzir este conceito vamos considerar dois casos: (i) uma *cadeia monoatômica* formada por N íons idênticos (mesma massa), distribuídos ao longo de uma rede de Bravais unidimensional como mostrado na Figura 2.3 (a); e (ii) uma *cadeia diatômica* constituída de dois tipos diferentes de íons com massas m_1 e m_2 por célula unitária, isto é, a célula unitária agora contém dois íons, distribuídos ao longo de uma reta como mostrado na Figura 2.3 (b). Por simplicidade, consideraremos ainda que o movimento vibracional se dá apenas ao longo da cadeia. Tais modos são, assim, denominado, **modos longitudinais de vibração**.

A relação de dispersão é a expressão que relaciona a frequência da oscilação com o seu vetor de onda e os demais parâmetros do sistema. Para **phonons**, em cadeias como as acima descritas, a relação de dispersão é obtida por meio da segunda lei de Newton aplicada ao movimento de um íon num dado sítio da rede. É esta relação que determina em quais modos a rede é permitida vibrar, isto é, ela fornece os **modos de ressonância** da rede.

As curvas de dispersão obtidas para as cadeias unidimensionais monoatômica e diatômica estão mostradas na Figura 2.4. No primeiro caso, cadeia monoatômica, o espectro de energia é formado por apenas um único ramo (Figura 2.4 (a)); enquanto que no outro caso, cadeia diatômica, o espectro revela dois ramos (Figura 2.4 (b)). O ramo de menor energia é conhecido como *ramo acústico*. Já o ramo mais energético é conhecido como *ramo óptico*.

A classificação dos modos vibracionais em ramos acústicos e ópticos pode ser aplicada para sólidos tridimensionais com uma base poliatômica. Suponha que se tenha um cristal com

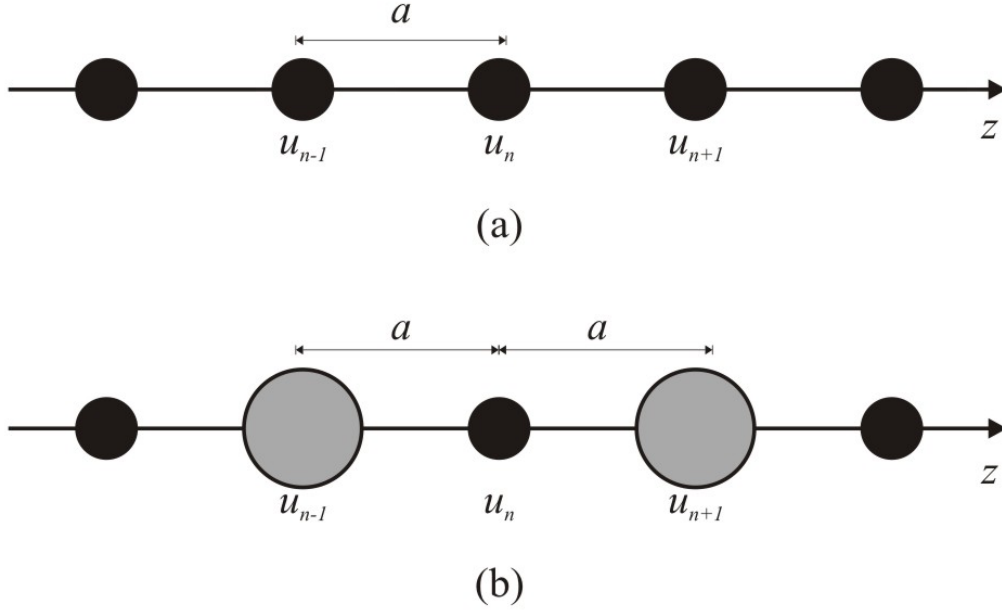


Figura 2.3 Cadeias lineares formadas por: (a) N íons de massa m (cadeia monoatômica), e (b) $2N$ íons de massas m_1 e m_2 (cadeia diatômica), ambas separadas por um parâmetro de rede a .

p átomos em cada célula unitária e um número de sítios N muito grande, de tal modo que estas células formem um cristal. Neste caso, existirão $3pN$ graus de liberdade e, portanto, $3pN$ modos normais de vibração (ramos). De todos estes ramos, apenas $3N$ serão acústicos, sendo $2N$ transversais (*TA modes*) e N longitudinais (*LA modes*), tendo a propriedade de que $\omega(k) \propto k$ para $k \rightarrow 0$. Os $3(p-1)N$ modos restantes são ramos ópticos transversais (*TO modes*) e longitudinais (*LO modes*), tendo a propriedade de que $\omega(k)$ tende a um valor constante não-nulo para $k \rightarrow 0$. O modo óptico transversal com grande comprimento de onda em cristais iônicos pode interagir com a radiação eletromagnética (o *photon*), dando origem a um modo chamado **phonon-polariton**[27, 28], que será discutido mais à frente. Contudo, nem todos estes modos são opticamente ativos no sentido de interagirem com o campo de radiação[16, 26, 29].

2.3.2 Plasmons

Uma *oscilação de plasma* em um metal é uma excitação longitudinal coletiva do gás de elétrons de condução. O termo “plasma” foi sugerido em 1916 por Langmuir[30] para descrever as propriedades elétricas coletivas que ele notou em um gás ionizado. Desde esse tempo, muitos dos fenômenos observados em plasma gasoso (um meio com igual concentração de cargas positivas e negativas, onde pelo menos um tipo de carga move-se) podem ser reproduzidos no gás de elétrons em um metal ou um semiconductor.

O **plasmon** é o “quantum” de energia associado à oscilação de plasma. Embora tenha poucas observações diretas do ponto de vista experimental, uma notável exceção é a perda de energia, em múltiplo de $\hbar\omega_p$ (onde ω_p é a frequência do *plasmon*), quando elétrons são atirados

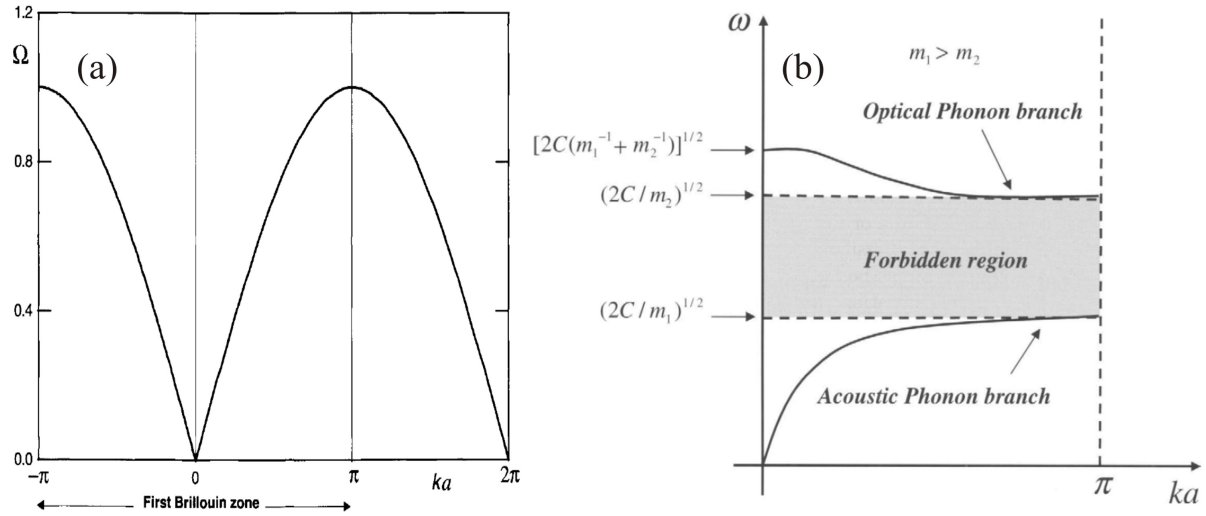


Figura 2.4 Relação de dispersão de *phonons* na 1ª zona de Brillouin em uma cadeia unidimensional: (a) monoatômica e (b) diatômica. Fonte: Albuquerque e Cottam[26].

através de um filme metálico, ou refletindo um elétron ou um *photon* de um filme[31]. Também pode-se ter *plasmons* com energia comparável à dos *photons*, resultando num modo misto entre estas duas excitações, o *plasmon-polariton*. Para mais detalhes, ver[32, 33].

2.3.3 Magnons

Em materiais magnéticos, também pode-se encontrar excitações coletivas que são fruto da interação entre os momentos magnéticos de spin do material. Tais modos são chamados **ondas de spin**, e o “quantum” de sua energia é o que conhecemos como *magnon*. Uma discussão sobre a quantização destas excitações é encontrada em[29, 34, 35, 36].

Assim como as excitações descritas acima, os *magnons* também se acoplam aos *photons*, gerando o *magnetic-polariton* (ou *magnon-polariton*), que podem ser vistos em mais detalhes em[26, 37]. Mais detalhes sobre as ondas de spin são apresentados na Subseção 2.4.2. Para uma leitura específica e atual sobre ondas de spin, ver[38].

2.3.4 Polaritons

Quando a radiação eletromagnética se propaga em um cristal dielétrico polarizável ou magnético, ela excita alguns graus de liberdade internos do cristal, dando origem a um modo híbrido (ou misto) chamado *polariton*. Logo, *polaritons* são quasi-partículas em sólidos formadas por um *photon* (“quantum” da radiação eletromagnética) acoplado a uma outra excitação elementar (*phonon*, *plasmon*, *magnon*, etc.) que polariza o cristal[39]. Evidências experimentais da existência de *polaritons* foram fornecidas por Henry e Hopfield[40] para *phonon-polariton*. Albuquerque e Cottam fazem uma ampla discussão sobre *polaritons*[26].

Após esta brevíssima discussão sobre as principais excitações elementares que podemos encontrar em sólidos, vamos nos restringir somente àquelas que se propagam em meios mag-

néticos, a saber, as ondas de spin (*magnons*).

2.4 Ondas de Spin ou “Magnons”

Ondas de spin (SWs)⁴ são excitações coletivas de menor energia que propagam-se em um sistema magnético. As ondas de spin foram postuladas em 1930 por Felix Bloch[41], possuindo naquela época um caráter muito mais teórico do que experimental. Entretanto, vários trabalhos experimentais[42, 43] comprovaram a existência das ondas de spin em materiais magnéticos, indicando que elas são muito mais do que uma entidade puramente matemática. Elas são previstas do próprio operador hamiltoniano do sistema, que, no nosso caso, é o *hamiltoniano de Heisenberg*. A introdução das SWs foi uma tentativa de explicar o comportamento da magnetização M de um ferromagneto à medida que sua temperatura era elevada lentamente a partir do zero, pois os resultados experimentais mostram que a magnetização diminui com o aumento da temperatura devido à agitação térmica que desalinha os momentos magnéticos microscópicos, acarretando uma magnetização menor do que a observada a 0 K, onde os momentos magnéticos estão todos alinhados.

As SWs podem ser geradas, por exemplo, quando um ou mais spins são invertidos (em $T \neq 0$). Por exemplo, se o momento magnético de um íon é devido, como no caso mais simples, a um spin $S = 1/2$, então haverá somente dois valores possíveis da componente z do momento, que são $+1/2$ ou $-1/2$. Neste caso, a propagação de um desalinhamento através da rede será a propagação de um spin reverso. Isso fará com que o sistema esteja em um estado excitado e, então, as ondas de spin propagam-se através do meio magnético. De maneira mais clara, considere a cadeia unidimensional de spins com ordenamento ferromagnético conforme mostra a Figura 2.5 (a). Se um dos spins é perturbado (Figura 2.5 (b)), ele começa a precessionar “classicamente” em torno da direção de equilíbrio (Figura 2.5 (c)). Como ele está acoplado aos vizinhos através do termo de “*exchange*”, esta perturbação se propaga na rede de forma coerente. Podemos considerar este cenário como uma superposição de desalinhamentos simples que viajam de um íon a outro através da rede (Figura 2.5 d). A propagação deste desalinhamento através da rede, em termos bastante simples, é o que entendemos por *onda de spin*. Caso o sistema magnético apresente spin $S > 1/2$, a propagação será devida a um desvio de spin do valor máximo de S^z .

As ondas de spin têm sido intensamente estudadas teórica e experimentalmente. O interesse reside em diversos fatores. Primeiro, como quaisquer outras excitações de um sistema, os magnons desempenham um papel importante para se determinar as propriedades termodinâmicas de um sistema, uma vez que são excitações de spin a partir de um estado fundamental[44]. Isto é, os magnons são os auto-valores (auto-energias) do operador energia associado aos micro-estados acessíveis do sistema, quântica e estatisticamente falando. As ondas de spin podem ser termicamente excitadas quando o sistema se encontra a uma temperatura finita. A quantidade de magnons excitados determina o comportamento de várias quantidades termodinâmicas, tais como magnetização[45], calor específico[46, 47], magnetoresistência[48], etc. Portanto, eles

⁴A abreviação SWs para ondas de spin vem da palavra inglesa “*spin waves*”, e acabou tornando-se uma notação muito utilizada por pesquisadores da área, motivo pelo qual nós a utilizaremos aqui também.

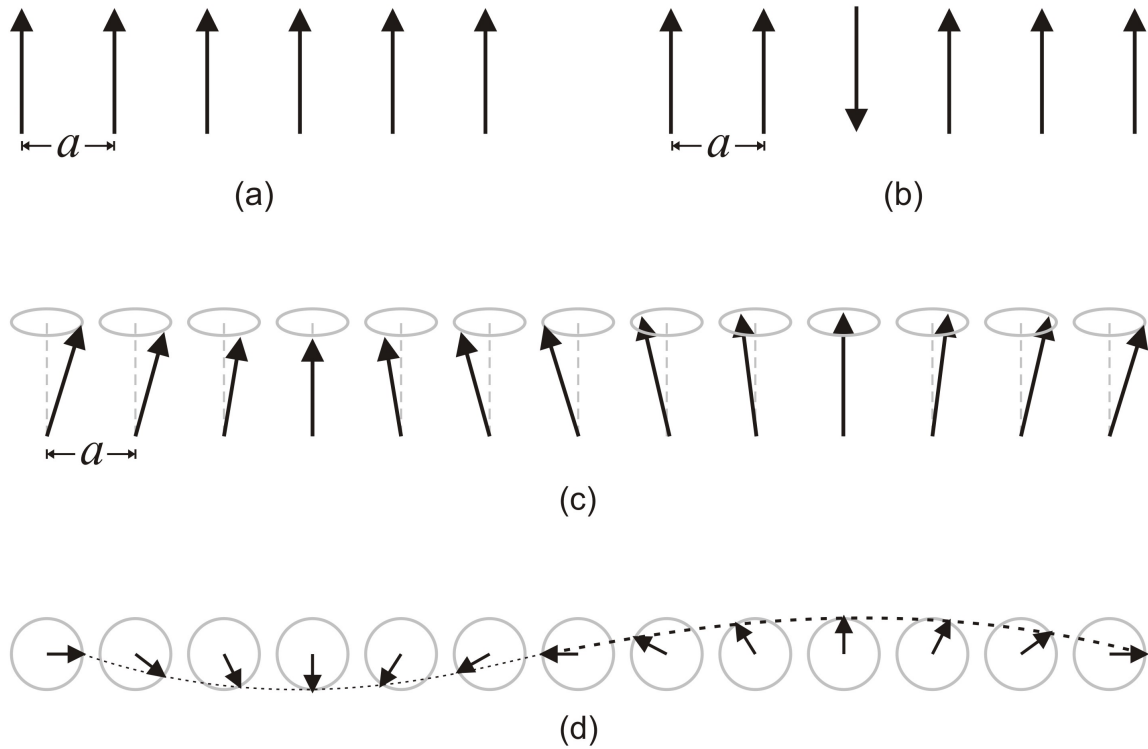


Figura 2.5 (a) Esquema clássico do estado fundamental de um ferromagneto simples mostrando todos os spins paralelamente alinhados; (b) um possível estado excitado, com apenas um spin invertido; (c) excitações elementares de baixa energia, chamadas ondas de spin, com as extremidades dos vetores precessionando conicamente; (d) a propagação de uma onda de spin vista de cima.

influenciam a resposta dinâmica de um sistema magnético[49, 50]. Segundo, as SWs são afetadas por estímulos externos de diferentes tipos, tal como a radiação eletromagnética, sendo provado por diversas técnicas experimentais, como excitação de microondas[51, 52], espectroscopia, espalhamento de luz[53, 54, 55]. Há algum tempo, as propriedades não-lineares das ondas de spin têm ganhado muita atenção[56].

2.4.1 Regimes Magnéticos

Excitações em materiais magnéticos podem ser estudadas por diversos modelos teóricos. O modelo adequado é definido pelo regime no qual deseja-se estudar as SWs. No nosso caso, como estamos fazendo uma análise microscópica, o termo predominante no hamiltoniano do sistema é o que contém a interação de troca (ver Subseção 2.2.1). Portanto, o regime que estamos interessados é o denominado **regime de exchange**. Para tanto, nós utilizamos um modelo baseado no hamiltoniano de Heisenberg.

Existem vários estudos em outros regimes sobre excitações em materiais magnéticos (ou não-magnéticos, no caso de filmes finos, multicamadas e super-redes). Conforme esquematizado na Figura 2.6, temos o **regime magnetostático** ou **dipolo-dipolo**, onde o comprimento

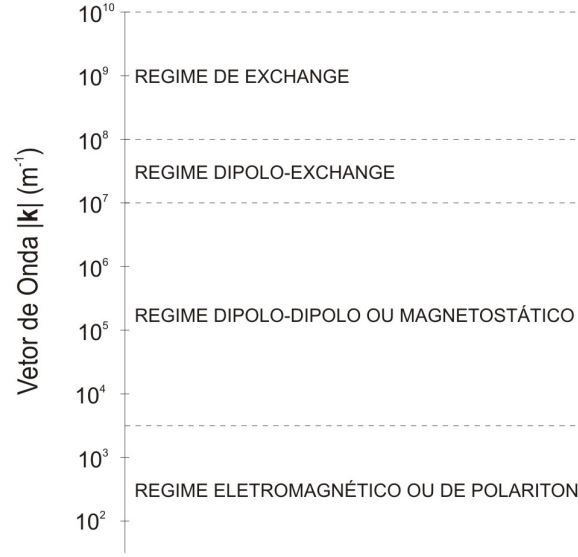


Figura 2.6 Diferentes regiões do comportamento magnético em termos da magnitude do vetor de onda $|\mathbf{k}|$. Os números são aproximados e podem variar para diferentes materiais.

de onda da excitação é maior que o espaçamento entre os spins, o **regime dipolo-exchange**, que é um regime de transição entre o de “*exchange*” e o magnetostático e o **regime de polariton**, onde a energia da excitação é da mesma ordem que a energia do *photon*, havendo assim a possibilidade dessas duas excitações se acoplarem formando o *magnetic-polariton*, citado anteriormente (ver Subsecções 2.3.3 e 2.3.4.).

2.4.2 Magnons em Materiais Ferromagnéticos (FM) e Aproximação RPA

Esta seção é destinada à determinação da relação de dispersão e do espectro de ondas de spin em materiais ferromagnéticos (um meio homogêneo) com a finalidade de obter alguns “*insights*” qualitativos e quantitativos e, então, entender o espectro destas excitações em super-redes ferromagnéticas periódicas e quasi-periódicas. A relação de dispersão dessas excitações nestes materiais já foi amplamente estudada e pode ser encontrada em[57].

Para os cálculos desenvolvidos nesta seção, nós utilizamos um ferromagneto cuja distribuição espacial dos átomos segue uma estrutura cúbica simples com parâmetro de rede a , como mostrado na Figura 2.7. O hamiltoniano que iremos utilizar para estudar ondas de spin que se propagam em ferromagnetos é o hamiltoniano de Heisenberg

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} J_{ij} \left(S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z \right) - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z,
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde o primeiro somatório representa a interação de troca entre um spin no sítio i e seus vizi-

nhos mais próximos j ⁵. O fator $(1/2)$ foi introduzido neste termo com a finalidade de excluir os termos duplicados no somatório. Já o segundo somatório no hamiltoniano é devido à interação do campo magnético externo $\mathbf{H}_0 = H_0\hat{z}$ com o spin do sítio i , que também é conhecida como **energia Zeeman**[58].

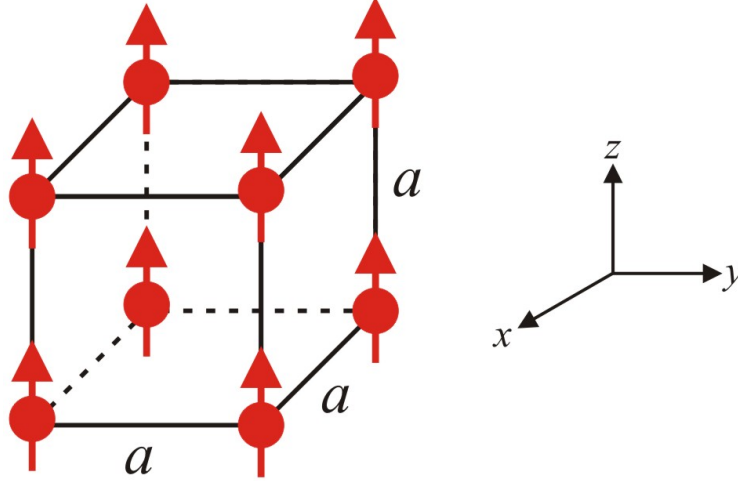


Figura 2.7 Representação esquemática de um ferromagneto cujos sítios estão dispostos segundo uma estrutura cúbica simples e com parâmetro de rede a .

Vê-se facilmente pela Equação (2.15) que as componentes de $\mathbf{S}_i$ não são independentes. Por outro lado, esta equação é quadrática, o que nos leva diretamente a propor uma base de operadores “escada” $S^\pm$, sabendo que esta representação será mais conveniente que aquela seguindo assim a idéia de Holstein e Primakoff[34]. Portanto, vamos definir os operadores $S_i^\pm$ como sendo

$$S_i^\pm = S_i^x \pm iS_i^y, \quad (2.16)$$

de modo que tais operadores obedeçam às seguintes relações de comutação (aqui fizemos $\hbar = 1$)

$$[S_i^+, S_j^-] = 2S_i^z \delta_{ij}, \quad (2.17)$$

$$[S_i^z, S_j^\pm] = \pm S_i^\pm \delta_{ij}. \quad (2.18)$$

A Equação (2.15) na representação dos operadores “escada” torna-se, usando a definição mostrada na Equação (2.16),

$$\mathcal{H} = \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} J_{ij} \left(\frac{1}{2} S_i^+ S_j^- + \frac{1}{2} S_i^- S_j^+ + S_i^z S_j^z \right) - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z, \quad (2.19)$$

⁵Seguindo a convenção utilizada por vários autores, tomaremos o valor da constante de troca J_{ij} como sendo positivo para materiais ferromagnéticos e, portanto, devemos introduzir o sinal $(-)$ no hamiltoniano a fim de que a energia do estado fundamental seja mínima.

Dos textos básicos de Mecânica Quântica[59, 60, 61], temos que a equação de movimento para o operador $S_i^\pm$ é

$$i\frac{dS_i^\pm}{dt} = i\hbar\frac{\partial S_i^\pm}{\partial t} + [S_i^\pm, \mathcal{H}]. \quad (2.20)$$

Como neste caso não há uma dependência explícita de $S_i^\pm$ com o tempo t , a Equação (2.20) é simplificada, podendo ser reescrita na seguinte forma

$$i\frac{dS_i^\pm}{dt} = [S_i^\pm, \mathcal{H}]. \quad (2.21)$$

Usando a Equação (2.19) juntamente com a Equação (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} i\frac{dS_i^\pm}{dt} &= \left[S_i^\pm, \left(-\frac{1}{2} \right) \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} J_{ij} \left(\frac{1}{2} S_i^+ S_j^- + \frac{1}{2} S_i^- S_j^+ + S_i^z S_j^z \right) - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z \right] \\ &= \left(-\frac{1}{2} \right) \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} J_{ij} \left[S_i^\pm, \left(\frac{1}{2} S_i^+ S_j^- + \frac{1}{2} S_i^- S_j^+ + S_i^z S_j^z \right) \right] - g\mu_B H_0 \sum_i [S_i^\pm, S_i^z], \end{aligned}$$

ou ainda

$$i\frac{dS_i^\pm}{dt} = \pm \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} J_{ij} [S_j^z S_i^\pm - S_j^\pm S_i^z] \pm g\mu_B H_0 S_i^\pm. \quad (2.22)$$

A equação acima é a equação de movimento para os operadores $S_i^\pm$ para um spin localizado no sítio i , sendo não-linear. Portanto, a Equação (2.22) não possui solução exata, e pode parecer, em princípio, que apenas introduzimos no problema operadores mais complicados tais como $S_j^z S_i^\pm$ e $S_j^\pm S_i^z$. Nota-se também que não há acoplamento entre os operadores $S_i^\pm$. Isto é devido ao fato de não ter-se considerado termos de anisotropia na Equação (2.15) [62]. Portanto, a escolha de qual operador (S_i^+ ou S_i^-) utilizar na Equação (2.21) é completamente arbitrária, e optaremos por S_i^+ .

Contudo, é possível linearizar a Equação (2.22), obtendo, assim, uma solução aproximada através da conhecida **aproximação de fase aleatória** ou **aproximação RPA** (*Random Phase Approximation*)[63]. Esta aproximação consiste em considerar que os spins estão em equilíbrio e bastante bem alinhados ao longo da direção z , de tal modo que possamos substituir o operador S^z por sua média térmica $\langle S^z \rangle$, i.e.,

$$S^z \rightarrow \langle S^z \rangle, \quad (2.23)$$

que, em um ferromagneto de volume, não depende do sítio. Isto deixa a equação de movimento (2.22) como,

$$i\frac{dS_i^+}{dt} = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} J_{ij} \langle S^z \rangle [S_i^+ - S_j^+] + g\mu_B H_0 S_i^+. \quad (2.24)$$

Para as ondas que se propagam no volume (“*bulk modes*”), propomos soluções do tipo onda plana para a Equação (2.24), ou seja,

$$S_i^+ \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (2.25)$$

Assim, a Equação (2.24) fica sendo

$$\omega S_i^+ = g\mu_B H_0 S_i^+ + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} J_{ij} \langle S^z \rangle [S_i^+ - S_j^+]. \quad (2.26)$$

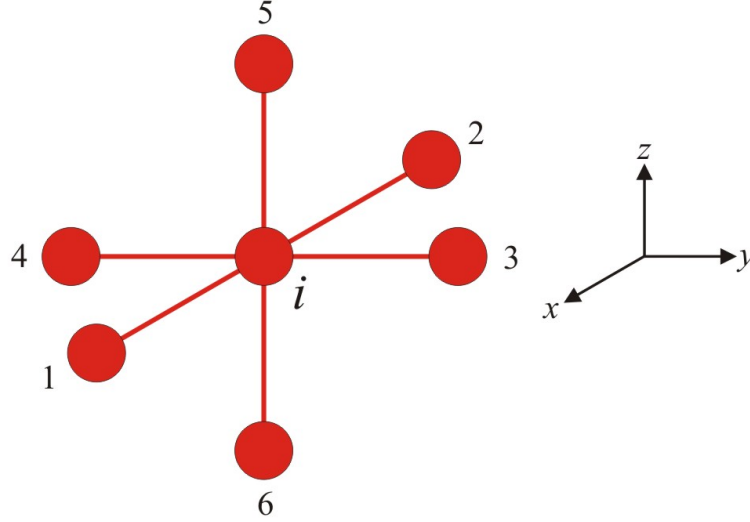


Figura 2.8 Representação esquemática do sítio “ i ” e de seus vizinhos mais próximos para uma rede SC.

Explicitando a Equação (2.26) para um dado spin no sítio i da rede e seus vizinhos mais próximos (Figura 2.8), obtemos

$$\begin{aligned} \omega S_i^+ &= g\mu_B H_0 S_i^+ + JS \sum_{j=1}^6 [S_i^+ - S_j^+] \\ \omega S_i^+ &= g\mu_B H_0 S_i^+ + JS [6S_i^+ - (S_1^+ + S_2^+) - (S_3^+ + S_4^+) - (S_5^+ + S_6^+)], \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde substituímos J_{ij} por J , que é a constante de troca do meio, e $\langle S^z \rangle$ por S , que é a média térmica dos spins do meio. Da Figura 2.8, vemos que as posições dos sítios vizinhos ao sítio i em relação a este é

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i + a\hat{\mathbf{e}}_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (2.28)$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_j = \pm\hat{\mathbf{x}}, \pm\hat{\mathbf{y}}$ ou $\pm\hat{\mathbf{z}}$.

Portanto, substituindo a proposta de solução dada na Equação (2.25) na Equação (2.27), juntamente com a Equação (3.2), obtemos a seguinte expressão

$$\omega(\mathbf{k}) = g\mu_B H_0 + 2JS \{3 - [\cos(k_x a) + \cos(k_y a) + \cos(k_z a)]\}, \quad (2.29)$$

que é a equação que fornece a frequência ω dos modos de oscilação dos spins que são permitidos propagarem-se neste material em função do vetor de onda $\mathbf{k}$ ($\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}} + k_z\hat{\mathbf{z}}$).

Esta equação é comumente conhecida como **relação de dispersão ferromagnética**. Existem outras maneiras de obter a Equação (2.29), como por exemplo, utilizando transformação de Fourier[25, 26], de forma algébrica utilizando relações de comutação, como é feito no oscilador harmônico quântico. Este último formalismo é conhecido como *segunda quantização*[29, 35, 36].

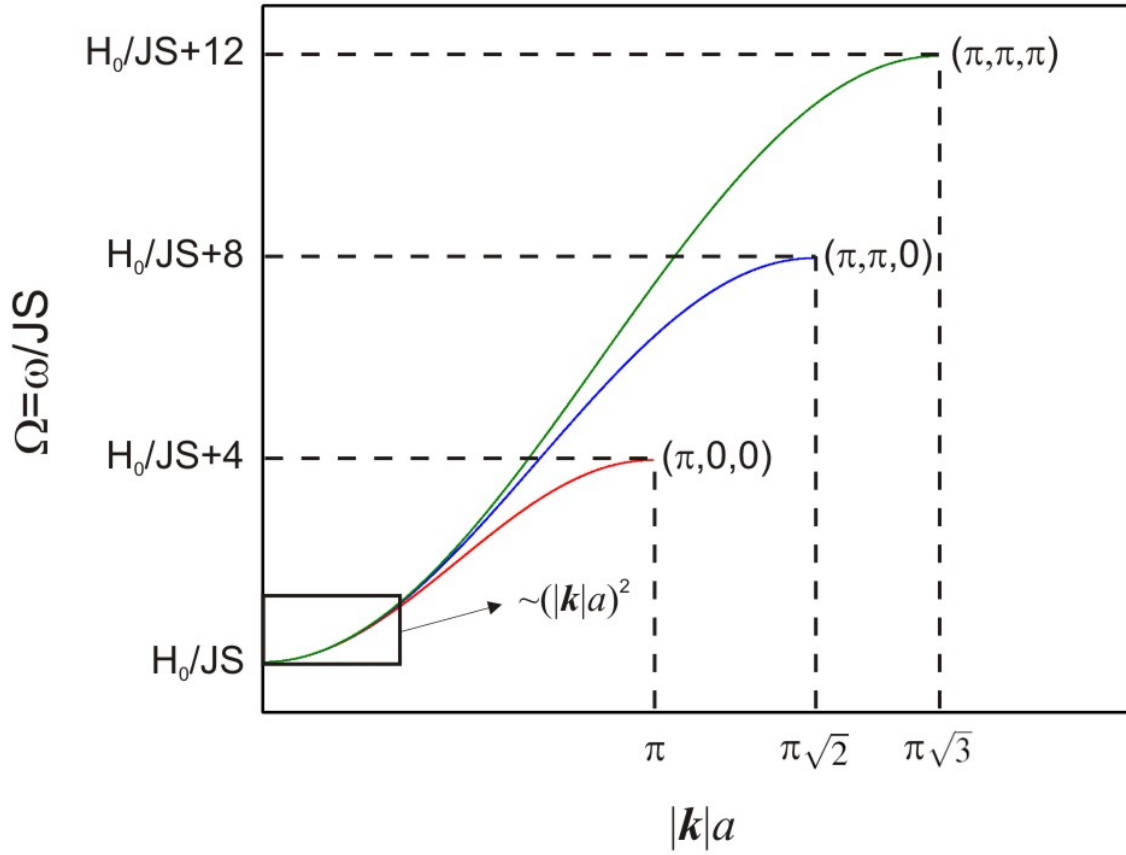


Figura 2.9 Curva de dispersão para SWs em um ferromagneto com estrutura SC para várias direções (valores) de $\mathbf{k}$. Observe que a curva de dispersão aproxima-se de uma parábola quando o vetor de onda é muito pequeno, isto é, $|\mathbf{k}| \ll \pi/a$, conforme é previsto pela Equação (2.30).

Da Equação (2.29), vemos que a frequência da onda de spin depende da direção do vetor de onda $\mathbf{k}$. A Figura 2.9 mostra o espectro de SWs em ferromagnetos, onde pode-se ver a dependência da frequência ω com o vetor de onda $\mathbf{k}$ (aqui tomamos $g\mu_B = 1$). A seguir, listamos alguns dos seus valores específicos:

→ para $\mathbf{k} = (0, 0, 0)$, temos

$$\omega = g\mu_B H_0;$$

→ para $\mathbf{k} = (\pi/a, 0, 0)$, temos

$$\omega = g\mu_B H_0 + 4JS;$$

→ para $\mathbf{k} = (\pi/a, \pi/a, 0)$, temos

$$\omega = g\mu_B H_0 + 8JS;$$

→ para $\mathbf{k} = (\pi/a, \pi/a, \pi/a)$, temos

$$\omega = g\mu_B H_0 + 12JS.$$

Para valores pequenos de $\mathbf{k}$ ($|\mathbf{k}| \ll \pi/a$), a Equação (2.29) aproxima-se de

$$\omega \approx g\mu_B H_0 + 2JS(ka)^2, \quad (2.30)$$

conforme é visto na Figura 2.9.

Super-redes Magnéticas

Neste capítulo discutiremos o espectro de energia de ondas de spin em estruturas artificiais conhecidas como **super-redes**. Primeiramente, iremos definir o que seria tal estrutura, dizer como se deu seu surgimento e que motivos temos para estudá-las. As super-redes podem ser classificadas, basicamente, em três tipos: **periódicas**, **quasi-periódicas**, e **aperiódicas** ou **aleatórias**. As estruturas quasi-periódicas são consideradas como um regime de transição do caso periódico para o aleatório, e vice-versa. Mostraremos os espectros de ondas de spin que se propagam em super-redes periódicas e quasi-periódicas, sendo que, para o caso aperiódico, serão feitos apenas alguns comentários. Os cálculos utilizados aqui são semelhantes aos apresentados no Capítulo 2 para um material ferromagnético, isto é, baseados no *hamiltoniano de Heisenberg* e na *aproximação RPA*. Porém, será necessário a utilização de um método adicional que é o da **matriz transferência**.

3.1 Super-redes

O tema **super-rede** (SL)¹ obteve grande importância logo após a publicação do artigo experimental de Schechtman e colaboradores[11] sobre ligas metálicas de Al-Mn mostrando muitos dados surpreendentes e interessantes de difração de elétrons. Eles misturaram Al e Mn em uma proporção aproximada de 6 por 1 e aqueceram a mistura até que ela fundiu-se. A mistura foi então rapidamente resfriada até retornar ao estado sólido. Após ter sido solidificada, esta foi examinada por meio de um microscópio eletrônico e uma nova estrutura foi revelada. Seu arranjo nem era amorfo e nem cristalino[64]. Medidas subsequentes usando espalhamento de raio X em alta resolução levou a padrões de difração de elétrons mostrando não somente simetria quártupla, mas também icosaédrica, proibidas pelas regras da cristalografia. Estudos teóricos desenvolvidos por Levine e Steinhardt[12] explicaram este tipo de simetria. Suas previsões eram, na verdade, qualitativamente semelhantes às observações de Schechtman e colaboradores. Além de mais estudos experimentais, a mudança seguinte foi o desenvolvimento de modelos teóricos para caracterizar estas estruturas artificiais. Desde a sua descoberta, as super-redes têm despertado um grande interesse dos físicos e matemáticos em estruturas que exibem o que foi chamado de *desordem determinística*, dando origem a vários trabalhos em *quasi-cristais*² unidimensionais[65, 66, 67, 68, 69].

¹SL é a abreviação da palavra inglesa “*superlattice*”.

²Embora o termo quasi-cristais é mais apropriado quando aplicado a compostos naturais ou ligas artificiais, em uma dimensão (1D), não existe diferença entre estas e as estruturas quasi-periódicas formadas pelo arranjo de células unitárias periódicas.

Uma classe de modelos que atraiu atenção especial foi a das **super-redes quasi-periódicas** construídas a partir de sequências substitucionais. Estas estruturas quasi-periódicas são formadas pela justaposição de dois (ou mais) blocos de construção, que são ordenados de acordo com uma determinada sequência previamente escolhida. O cristal artificial obtido possuía uma estrutura da qual podemos dizer que situava-se entre a estrutura de um cristal periódico e a de um sólido amorfo[70] (daí o nome quasi-periódico). Este fato torna as super-redes quasi-periódicas um excelente “laboratório” para sistemas desordenados, uma vez que podemos construir sequências bastantes desordenadas aproximando-nos, assim, do regime aperiódico. Uma das características mais notáveis é que estruturas artificiais do tipo super-redes possuem propriedades que não estão presentes em seus constituintes individualmente, isso por causa das correlações de longo alcance, induzidas pela construção do sistema. Logo, esperamos que isso reflita de alguma forma nos diversos espectros destas estruturas (como na propagação da luz, transmissão eletrônica, densidade de estados, *polaritons*, etc.), definindo uma nova descrição de desordem. De fato, tratamentos via matriz transferência mostram que estes espectros são fractais, o que pode ser considerado como sua assinatura básica[14, 71, 72].

Avanços na fabricação de multicamadas forneceram a possibilidade de revelar novas características destas estruturas. As técnicas incluem métodos modernos de crescimento de camadas, como epitaxia por feixe molecular (MBE), deposição por pulverização, deposição por evaporação térmica ou feixe eletrônico a ultra vácuo, e permitiu a realização em laboratórios de muitas destas estruturas, a partir das quais foi possível testar os resultados e previsões das técnicas e modelos teóricos previamente desenvolvidos[6, 7, 8].

3.2 *Magnons* em Super-redes Periódicas e Método da Matriz Transferência

Como vimos na seção anterior, super-redes são sistemas de camadas justapostas artificialmente. Se esta justaposição de camadas se dá de forma periódica ($\cdots ABAB \cdots$, onde A e B são dois materiais distintos, por exemplo), tais super-redes são ditas ser **super-redes periódicas**.

Nesta seção discutiremos a relação de dispersão de SWs para uma super-rede em que dois materiais ferromagnéticos, nominados A e B , são justapostos de maneira periódica constituindo, assim, uma super-rede, conforme pode ser visto na Figura 3.1. Esta super-rede é composta de materiais ferromagnéticos com estrutura cúbica simples (ver Seção 2.4). O parâmetro de rede em cada material vale a . As constantes de troca valem J_A (linhas vermelhas) e J_B (linhas verdes), conforme mostra a Figura 3.2, em A e B , respectivamente. Nas interfaces, a constante de troca entre spins pertencentes aos materiais A e B vale I (linhas pretas na Figura 3.2). Outro detalhe importante a ser notado nesta estrutura é que, em temperatura não-nula, a configuração de equilíbrio na interface A/B deve exibir algo análogo a uma reconstrução de superfície. Isto implica que a média do spin S é uma função da distância à interface mais próxima[57]. Embora este efeito seja de interesse, ele pode ser “driblado” restringindo nossa atenção ao regime de baixas temperaturas, ou seja, temperaturas muito abaixo da temperatura crítica ($T \ll T_c$). Assim, podemos considerar que os spins estão completamente alinhados, $\langle S^z \rangle = S$.

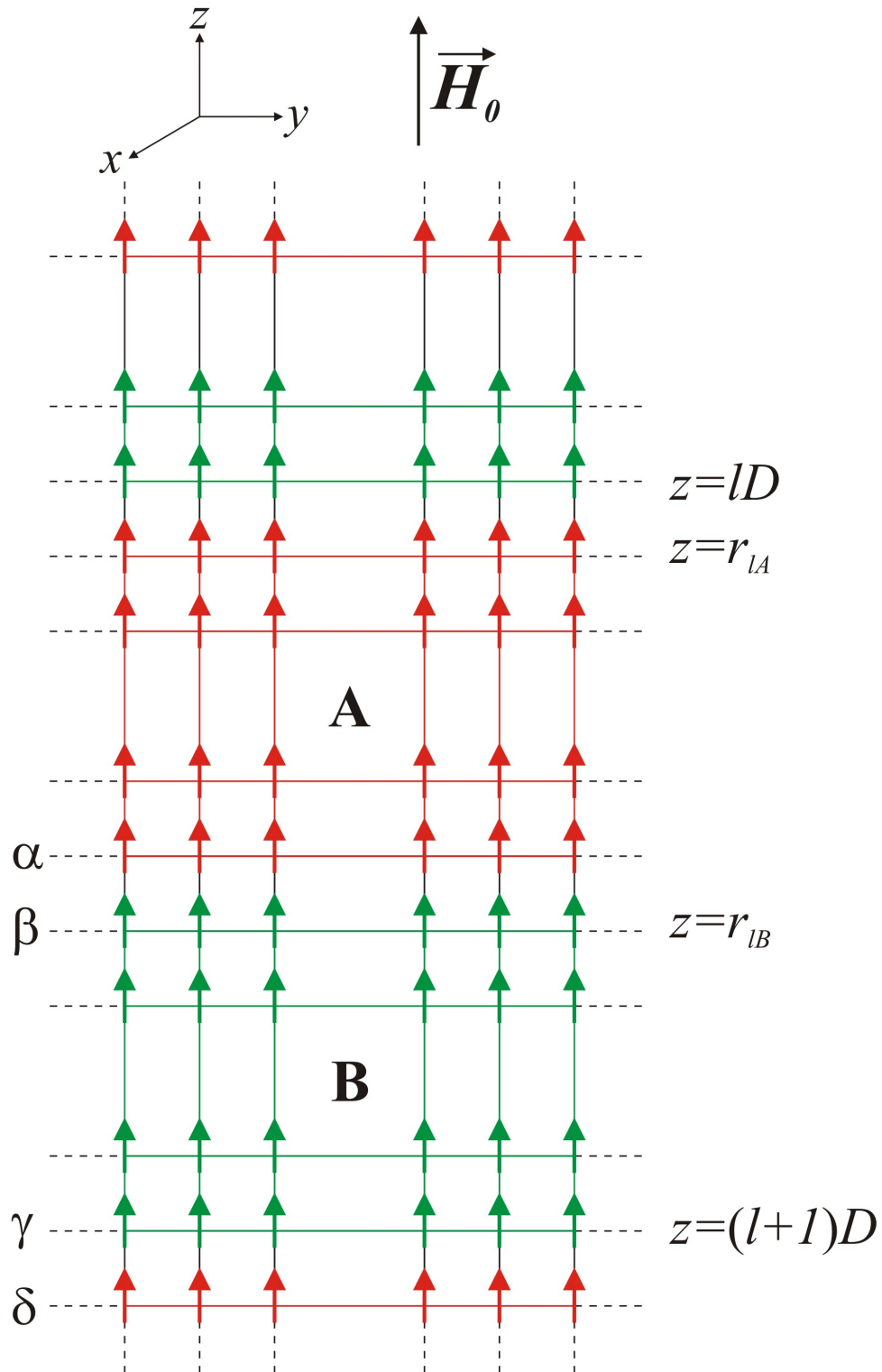


Figura 3.1 Representação esquemática da super-rede ferromagnética periódica estudada aqui.

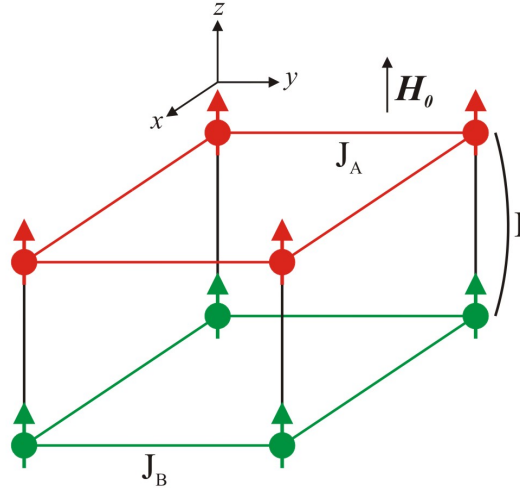


Figura 3.2 Representação esquemática da interface A/B da super-rede ferromagnética periódica apresentada na Figura 3.1.

O hamiltoniano que descreve a energia do sistema é dado pela Equação (2.15),

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - g\mu_B H_0 \sum_i S_i^z. \quad (3.1)$$

Aqui, nós não consideramos termos anisotrópicos e nem biquadráticos no hamiltoniano. Porém, alguns grupos já investigaram a influência destes termos para a propagação de *magnons* em vários tipos de materiais magnéticos e misturas destes com materiais não-magnéticos para os diversos regimes magnéticos[46, 62, 73, 74, 75, 76, 77, 78].

Na Subseção 2.4.2 nós já determinamos a expressão que fornece os modos de excitação magnética que são permitidos propagarem-se no volume de um ferromagneto (Equação (2.29)). Portanto, o que precisamos fazer agora é “casar” as funções de onda das excitações que se propagam nos materiais A e B. Para isso, devemos aplicar a equação de movimento do operador S_i^+ , dada pela Equação (2.22), em spins que estão localizados nas interfaces da super-rede. Faremos novamente o uso da aproximação RPA para linearizar esta equação de movimento.

Para tal, consideremos inicialmente o sítio “ α ” na interface “ $\alpha - \beta$ ”. A Figura 3.1 mostra o sítio “ α ” e a sua vizinhança.

A posição de cada sítio vizinho a “ α ” é

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_\alpha + a\hat{\mathbf{e}}_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (3.2)$$

onde $\hat{\mathbf{e}}_j = \pm\hat{\mathbf{x}}, \pm\hat{\mathbf{y}}$ ou $\pm\hat{\mathbf{z}}$.

Para um spin na camada “ α ”, a Equação (2.22) fica sendo

$$i \frac{dS_\alpha^+}{dt} = g\mu_B H_0 S_\alpha^+ + J_{\alpha 1} (S_1^z S_\alpha^+ - S_\alpha^z S_1^+) + J_{\alpha 2} (S_2^z S_\alpha^+ - S_\alpha^z S_2^+) + J_{\alpha 3} (S_3^z S_\alpha^+ - S_\alpha^z S_3^+) + \\ J_{\alpha 4} (S_4^z S_\alpha^+ - S_\alpha^z S_4^+) + J_{\alpha 5} (S_5^z S_\alpha^+ - S_\alpha^z S_5^+) + J_{\alpha 6} (S_6^z S_\alpha^+ - S_\alpha^z S_6^+). \quad (3.3)$$

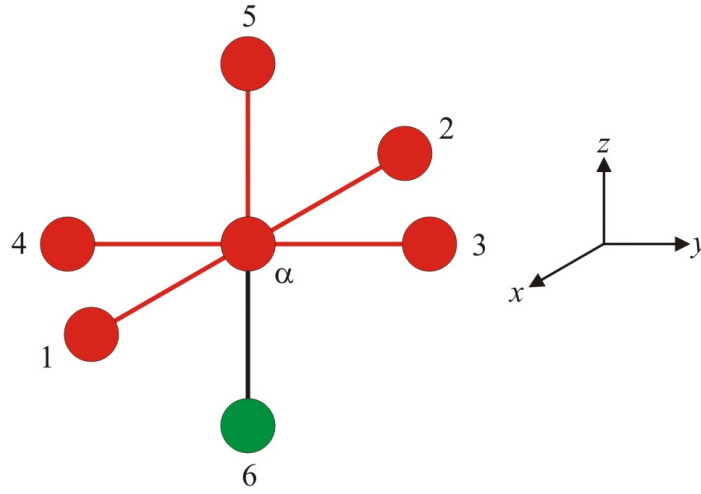


Figura 3.3 Representação esquemática do sítio “ α ” e de sua vizinhança.

Usando o fato de que $J_{\alpha 1} = J_{\alpha 2} = J_{\alpha 3} = J_{\alpha 4} = J_{\alpha 5} = J_A$ e $J_{\alpha 6} = I$, a Equação (3.3) pode ser reescrita como

$$i \frac{dS_{\alpha}^{+}}{dt} = g\mu_B H_0 S_{\alpha}^{+} + J_A [(S_1^z S_{\alpha}^{+} - S_{\alpha}^z S_1^{+}) + (S_2^z S_{\alpha}^{+} - S_{\alpha}^z S_2^{+}) + (S_3^z S_{\alpha}^{+} - S_{\alpha}^z S_3^{+})] + J_A [(S_4^z S_{\alpha}^{+} - S_{\alpha}^z S_4^{+}) + (S_5^z S_{\alpha}^{+} - S_{\alpha}^z S_5^{+})] + I [S_6^z S_{\alpha}^{+} - S_{\alpha}^z S_6^{+}]. \quad (3.4)$$

Fazendo uso da aproximação RPA, podemos fazer $S_{\alpha}^z = S_1^z = S_2^z = S_3^z = S_4^z = S_5^z = S_A$ e $S_6^z = S_B$ na Equação (3.4), que podemos escrevê-la da seguinte forma

$$i \frac{dS_{\alpha}^{+}}{dt} = g\mu_B H_0 S_{\alpha}^{+} + J_A S_A [5S_{\alpha}^{+} - (S_1^{+} + S_2^{+} + S_3^{+} + S_4^{+} + S_5^{+})] + I S_B S_{\alpha}^{+} - I S_A S_6^{+}. \quad (3.5)$$

Rearrmando a Equação (3.5), temos

$$(\omega - g\mu_B H_0 - 5J_A S_A - I S_B) S_{\alpha}^{+} + J_A S_A (S_1^{+} + S_2^{+} + S_3^{+} + S_4^{+} + S_5^{+}) = -I S_A S_6^{+}, \quad (3.6)$$

onde supomos solução do tipo $S_{\alpha}^{+} \propto \exp(-i\omega t)$ para a parte temporal do operador S_{α}^{+} .

Agora, vamos convencionar que (Figura 3.1)

$$\mathbf{r}_{lA} = [(l-1)na + a]\hat{\mathbf{z}}; \quad \mathbf{r}_{lB} = [(l-1)na + (n_A + 1)a]\hat{\mathbf{z}}, \quad (3.7)$$

e, sabendo que

$$\mathbf{r}_{\alpha} = [(l-1)na + n_A a]\hat{\mathbf{z}}; \quad \mathbf{r}_{\beta} = [(l-1)na + (n_A + 1)a]\hat{\mathbf{z}}, \quad (3.8)$$

vamos propor soluções do tipo

$$S_i^{+} = \{A_l \exp[i\mathbf{k}_A \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{lA})] + B_l \exp[-i\mathbf{k}_A \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{lA})]\} \exp(-i\omega t), \quad (3.9)$$

para spins do material A , na célula l , e solução do tipo

$$S_l^+ = \{C_l \exp[i\mathbf{k}_B \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{lB})] + D_l \exp[-i\mathbf{k}_B \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{lB})]\} \exp(-i\omega t), \quad (3.10)$$

para spins do material B , na célula l .

Então, substituindo as Equações (3.7) e (3.8) nas Equações (3.9) e (3.10), obtemos³

→ para $i = \alpha$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_{lA} &= [(l-1)na + n_A a] \hat{\mathbf{z}} - [(l-1)na + a] \hat{\mathbf{z}} \\ &= [n_A a - a] \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

e

$$S_\alpha^+ = A_l \exp[ik_z^A n_A a] \exp[-ik_z^A a] + B_l \exp[-ik_z^A n_A a] \exp[ik_z^A a]; \quad (3.11)$$

→ para $i = 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{lA} &= \mathbf{r}_\alpha + a\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{r}_{lA} \\ &= a\hat{\mathbf{x}} + [n_A a - a] \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

e

$$S_1^+ = A_l \exp[ik_x^A a] \exp[ik_z^A n_A a] \exp[-ik_z^A a] + B_l \exp[-ik_x^A a] \exp[-ik_z^A n_A a] \exp[ik_z^A a]; \quad (3.12)$$

→ para $i = 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{lA} &= \mathbf{r}_\alpha - a\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{r}_{lA} \\ &= -a\hat{\mathbf{x}} + [n_A a - a] \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

e

$$S_2^+ = A_l \exp[-ik_x^A a] \exp[ik_z^A n_A a] \exp[-ik_z^A a] + B_l \exp[ik_x^A a] \exp[-ik_z^A n_A a] \exp[ik_z^A a]; \quad (3.13)$$

→ para $i = 3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_{lA} &= \mathbf{r}_\alpha + a\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}_{lA} \\ &= a\hat{\mathbf{y}} + [n_A a - a] \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

e

$$S_3^+ = A_l \exp[ik_y^A a] \exp[ik_z^A n_A a] \exp[-ik_z^A a] + B_l \exp[-ik_y^A a] \exp[-ik_z^A n_A a] \exp[ik_z^A a]; \quad (3.14)$$

→ para $i = 4$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_{lA} &= \mathbf{r}_\alpha - a\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}_{lA} \\ &= -a\hat{\mathbf{y}} + [n_A a - a] \hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

³Aqui nós consideramos apenas a parte espacial das Equações (3.9) e (3.10) uma vez que a solução da parte temporal é a mesma para cada sítio.

e

$$S_4^+ = A_l \exp \left[-ik_y^A a \right] \exp \left[ik_z^A n_A a \right] \exp \left[-ik_z^A a \right] + B_l \exp \left[ik_y^A a \right] \exp \left[-ik_z^A n_A a \right] \exp \left[ik_z^A a \right]; \quad (3.15)$$

→ para $i = 5$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_{lA} &= \mathbf{r}_\alpha - a\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{r}_{lA} \\ &= -a\hat{\mathbf{z}} + [n_A a - a]\hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

e

$$S_5^+ = A_l \exp \left[-ik_z^A a \right] \exp \left[ik_z^A n_A a \right] \exp \left[-ik_z^A a \right] + B_l \exp \left[ik_z^A a \right] \exp \left[-ik_z^A n_A a \right] \exp \left[ik_z^A a \right]; \quad (3.16)$$

→ para $i = 6$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_{lB} &= \mathbf{r}_\alpha + a\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{r}_{lB} \\ &= [(l-1)na + n_A a]\hat{\mathbf{z}} + a\hat{\mathbf{z}} - [(l-1)na + (n_A + 1)a]\hat{\mathbf{z}} \\ &= 0\hat{\mathbf{z}}, \end{aligned}$$

e

$$S_6^+ = C_l + D_l; \quad (3.17)$$

Substituindo as Equações (3.11 - 3.17) na Equação (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} A_l t_A \bar{f}_A [\omega - g\mu_B H_0 - 5J_A S_A - IS_B + J_A S_A (\gamma_A + \bar{f}_A)] + \\ B_l \bar{t}_A f_A [\omega - g\mu_B H_0 - 5J_A S_A - IS_B + J_A S_A (\gamma_A + f_A)] &= -IS_A C_l - IS_A D_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_l t_A \bar{f}_A \left[-\frac{\omega}{S_A} + \frac{g\mu_B}{S_A} H_0 + \frac{S_B}{S_A} I + J_A (5 - \gamma_A - \bar{f}_A) \right] + \\ B_l \bar{t}_A f_A \left[-\frac{\omega}{S_A} + \frac{g\mu_B}{S_A} H_0 + \frac{S_B}{S_A} I + J_A (5 - \gamma_A - f_A) \right] &= IC_l + ID_l \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda_A t_A \bar{f}_A A_l + \bar{\lambda}_A \bar{t}_A f_A B_l = IC_l + ID_l,} \quad (3.18)$$

onde definimos

$$f_A = \exp \left[ik_z^A a \right] \quad \text{e} \quad \bar{f}_A = \exp \left[-ik_z^A a \right], \quad (3.19)$$

$$t_A = \exp \left[ik_z^A n_A a \right] \quad \text{e} \quad \bar{t}_A = \exp \left[-ik_z^A n_A a \right], \quad (3.20)$$

e

$$\boxed{\lambda_A = \left[-\frac{\omega}{S_A} + \frac{g\mu_B}{S_A} H_0 + \frac{S_B}{S_A} I + J_A (5 - \gamma_A - \bar{f}_A) \right],} \quad (3.21)$$

$$\bar{\lambda}_A = \left[-\frac{\omega}{S_A} + \frac{g\mu_B}{S_A}H_0 + \frac{S_B}{S_A}I + J_A(5 - \gamma_A - f_A) \right], \quad (3.22)$$

onde γ_A é dado por

$$\gamma_A = 2 \left[\cos(k_x^A a) + \cos(k_y^A a) \right]. \quad (3.23)$$

Aplicando a equação de movimento 3.3 aos sítios pertencentes às camadas β , na interface $\alpha - \beta$, γ e δ , na interface $\gamma - \delta$ (Figura 3.1), nós obtemos as seguintes equações:

→ para a camada β :

$$\bar{\lambda}_B C_l + \lambda_B D_l = I t_A \bar{f}_A A_l + \bar{I} t_A f_A B_l, \quad (3.24)$$

onde definimos

$$\lambda_B = \left[-\frac{\omega}{S_B} + \frac{g\mu_B}{S_B}H_0 + \frac{S_A}{S_B}I + J_B(5 - \gamma_B - \bar{f}_B) \right], \quad (3.25)$$

$$\bar{\lambda}_B = \left[-\frac{\omega}{S_B} + \frac{g\mu_B}{S_B}H_0 + \frac{S_A}{S_B}I + J_B(5 - \gamma_B - f_B) \right], \quad (3.26)$$

e γ_B é dado por

$$\gamma_B = 2 \left[\cos(k_x^B a) + \cos(k_y^B a) \right]; \quad (3.27)$$

→ para a camada γ :

$$\lambda_B t_B \bar{f}_B C_l + \bar{\lambda}_B \bar{t}_B f_B D_l = I A_{(l+1)} + I B_{(l+1)}, \quad (3.28)$$

onde definimos

$$f_B = \exp[ik_z^B a] \quad \text{e} \quad \bar{f}_B = \exp[-ik_z^B a], \quad (3.29)$$

$$t_B = \exp[ik_B^z n_B a] \quad \text{e} \quad \bar{t}_B = \exp[-ik_B^z n_B a], \quad (3.30)$$

→ para a camada δ :

$$\bar{\lambda}_A A_{(l+1)} + \lambda_A B_{(l+1)} = I t_B \bar{f}_B C_l + \bar{I} t_B f_B D_l. \quad (3.31)$$

Colocando as Equações (3.18), (3.24), (3.28) e (3.31) em uma forma matricial, temos [79]

$$\begin{pmatrix} \lambda_A t_A \bar{f}_A & \bar{\lambda}_A \bar{t}_A f_A \\ I t_A \bar{f}_A & \bar{I} t_A f_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ \bar{\lambda}_B & \lambda_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_A \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} = N_B \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix}}, \quad (3.32)$$

e

$$\begin{pmatrix} \lambda_B t_B \bar{f}_B & \bar{\lambda}_B \bar{t}_B f_B \\ I t_B \bar{f}_B & \bar{I} t_B f_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ \bar{\lambda}_A & \lambda_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{(l+1)} \\ B_{(l+1)} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_B \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix} = N_A \begin{pmatrix} A_{(l+1)} \\ B_{(l+1)} \end{pmatrix}}. \quad (3.33)$$

Podemos facilmente associar as amplitudes (A_l, B_l) com $(A_{(l+1)}, B_{(l+1)})$ fazendo algumas manipulações matemáticas e, assim, obtendo a seguinte expressão

$$\begin{pmatrix} A_{(l+1)} \\ B_{(l+1)} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

onde

$$T = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A \quad (3.35)$$

é a **matriz transferência** para a super-rede ferromagnética periódica, uma vez que ela relaciona os coeficientes da $(l+1)$ -ésima célula com os da l -ésima. A forma das matrizes N_A , M_A , N_B e M_B são dadas nas Equações (3.32) e (3.33) acima.

Utilizando o teorema de Bloch para esta super-rede, temos

$$\begin{pmatrix} A_{(l+1)} \\ B_{(l+1)} \end{pmatrix} = \exp(i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}) \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

onde $\mathbf{Q}$ é o vetor de onda de Bloch e $\mathbf{D} = lna\hat{z}$ é o tamanho da célula unitária, nós encontramos

$$[T - \exp(i\mathbf{QD})] \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} = 0. \quad (3.37)$$

Fazendo um procedimento similar para relacionar as amplitudes $(A_{(l-1)}, B_{(l-1)})$ com (A_l, B_l) , nós obtemos

$$[T^{-1} - \exp(-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D})] \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \end{pmatrix} = 0. \quad (3.38)$$

Combinando as Equações (3.37) e (3.38), temos

$$[T + T^{-1} - \exp(i\mathbf{QD}) - \exp(-i\mathbf{QD})] = 0$$

$$2 \cos(\mathbf{QD}) = [T + T^{-1}]$$

$$\cos(\mathbf{QD}) = \left(\frac{1}{2} \right) \text{Tr}[T], \quad (3.39)$$

onde $[T + T^{-1}] = \text{Tr}[T]$ já que a matriz transferência T é 2x2 é unimodular, e $\text{Tr}[T]$ é o traço da matriz T .

A Equação (3.39) descreve os modos de volume de uma onda de spin em um arranjo periódico das camadas magnéticas e, portanto, é a *relação de dispersão* de SWs nestas estruturas. Uma vez que conhecemos a forma da matriz transferência T , o espectro de volume das ondas de spin pode ser determinado.

Agora vamos apresentar agora alguns resultados numéricos que ilustram a relação de dispersão para ondas de spin de volume em super-redes periódicas[49, 79]. Nós justapomos n_A camadas do material A com n_B camadas do material B . Ambos os materiais são ferromagnetos com a estrutura de rede sendo cúbica simples e o parâmetro de rede a , conforme mostra a Figura 3.1. A interação de troca nos materiais A e B é, respectivamente, J_A e J_B . Já os termos de

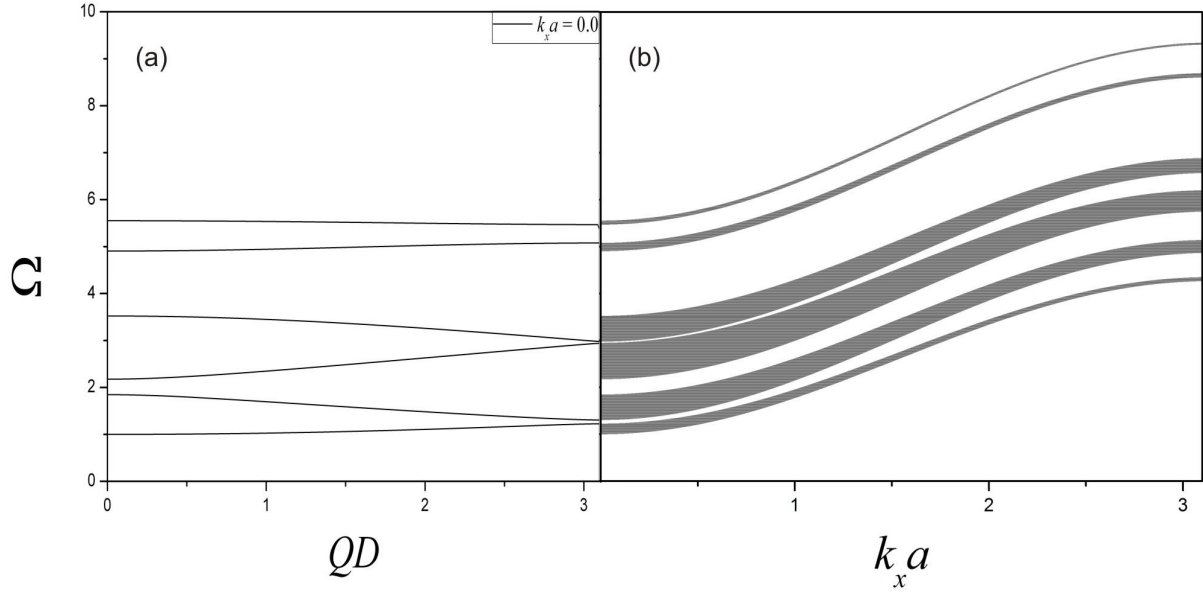


Figura 3.4 Curva de dispersão de ondas de spin para a super-rede ferromagnética periódica.

troca na interface A/B é I , segundo a Figura 3.2. Os parâmetros físicos utilizados são os mesmos considerados por Bezerra e Albuquerque[80], a saber, o número de planos atômicos em cada material $n_A = n_B = 3$, a média dos spins $S_A = 1.0$ e $S_B = 1.5$, a razão entre os acoplamentos de troca nos dois materiais $J_{AB} = J_A/J_B = 2.0$, $I_A = I/J_A = 1.2$ e $I_B = I/J_B = 2.4$. Também são considerados o campo magnético externo relativo $H_0/J_A = 1.0$ e $H_0/J_B = 2.0$. Para todas as figuras, nós consideramos $k_y a = 0.0$.

Primeiramente, vemos, por meio da Figura 3.4 a, que o espectro de ondas de spin em super-redes periódicas no plano $\Omega - QD$ ($\Omega = \omega/J_A S_A$ é a frequência reduzida) é do tipo “zig-zag”, para um valor fixo de $k_x a$. Esse “zig-zag” ocorre porque na super-rede o limite da 1ª zona é dado por $Q = \pi/(n_A + n_B)a$, bem menor que os valores $Q = \pi/n_A a$ e $Q = \pi/n_B a$ encontrados no caso dos constituintes[49]. Este comportamento do espectro é semelhante ao caso de fônons. Observamos que o número de bandas de volume é igual ao número de planos atômicos em cada material vezes o número de camadas na célula unitária, igual a seis. Nossos cálculos numéricos indicam que isto ocorre sempre que $n_A = n_B$. Vemos ainda que as extremidades dos ramos ($QD = 0$ e $QD = \pi$) são descontínuas, indicando que existem estados nos quais a excitação é **proibida** de propagar-se na rede. O que acarreta essas descontinuidades entre as curvas permitidas é o “dobramento” da zona de Brillouin, juntamente com o fato de tratar-se de uma estrutura com materiais diferentes. Tais descontinuidades são chamados **estados proibidos** ou, simplesmente, **gaps**.

Na Figura 3.4 b, temos a curva de dispersão para a mesma super-rede mostrada como função da frequência reduzida Ω versus o vetor de onda adimensional $k_x a$, onde k_x é o vetor de onda na direção x (no plano) e a é o parâmetro de rede. As áreas escuras são as **bandas de volume**, também conhecidas como *pass bands* ou *bulk bands*, e são limitadas pelas curvas $QD = 0$ e $QD = \pi$. Observe que esta ordem se inverte quando se passa de uma banda para outra, isto é, ela obedece à sequência $QD = 0, \pi, \pi, 0, 0, \pi, \pi, 0$, etc (ver Figura 3.4). As bandas

de volume são intervalos de frequência onde k_x é real. Fora desta região temos as **bandas proibidas** (os *stop bands*) ou, como são comumente conhecidos, **gaps**, e k_x agora é imaginário. É exatamente nesta região que podemos ter os **modos de superfície**, que não foram tratados aqui. Bezerra *et al.*[80] analisaram estes modos de superfície, observando a existência de dois modos superficiais distintos, a saber, os que persistem até $k_x a \rightarrow \infty$ e outros que penetram em uma banda de volume para um valor finito de $k_x a$. Os primeiros foram chamados *modos de superfície reais* e os últimos, *modos de superfície virtuais*. Analisando ainda a Figura 3.4 b, podemos notar duas regiões distintas de frequência: (a) no intervalo onde $\Omega < 3.8$, as bandas de volume são mais largas que os *gaps*; (b) para o intervalo $\Omega > 3.8$, ocorre o inverso, pois os *gaps* são mais largos que as bandas de volume.

Bezerra *et al.*[80] investigaram também a propagação de *magnons* em uma super-rede *aleatória* ou *randômica*, isto é, os blocos *A* e *B* que formavam a célula unitária foram dispostos de maneira aleatória, o que “simularia” um material completamente aperiódico. Eles utilizaram 10 blocos, cada um com 3 camadas. Logo, como descrito acima, o número de bandas de volume é $3 \times 10 = 30$. Devido ao tamanho de sua célula unitária, esta estrutura apresentou um número bem maior de bandas de volume, que por outro lado são extremamente localizadas.

Das considerações acima podemos tirar algumas conclusões importantes. Em primeiro lugar, o número de camadas na célula unitária possui uma influência direta no número de bandas de volume dos espectros. Em segundo lugar, quanto mais bandas de volume estão presentes maior a localização das mesmas. Pensando em termos de ordem e desordem, vemos que quanto mais desordenada for a super-rede (super-rede aleatória), mais localizados são os estados acessíveis (bandas de volume), e quanto mais ordenada for a super-rede (super-rede periódica) menos localizados são os estados acessíveis. Na seção seguinte discutiremos o comportamento das ondas de spin em super-redes quasi-periódicas e os resultado que já são conhecidos na literatura[5] para, então, no Capítulo 4 nos dedicarmos às sequências quasi-periódicas de Fibonacci generalizada.

3.3 Magnons em Super-redes Quasi-Periódicas

Vamos brevemente descrever algumas propriedades gerais das sequências que já foram consideradas em outros trabalhos. Inicialmente veremos a definição de uma sequência substitucional. Considere um conjunto finito $\mathcal{A}$, chamado um alfabeto, e $\mathcal{A}^*$, o conjunto de todas as palavras finitamente longas que podem ser escritas neste alfabeto. Considere ainda $\mathcal{A}^N$ e $\mathcal{A}^Z$, os conjuntos de todas as sequências de letras semi-infinitas e infinitas de $\mathcal{A}$, respectivamente. Definimos agora ξ , uma transformação de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}^*$, ou seja, uma regra que associa a qualquer letra em $\mathcal{A}$ uma palavra finita. A transformação ξ é chamada *regra de substituição*, *de inflação*, ou, como é conhecida mais comumente, *relação de recorrência*, e pode ser estendida para uma transformação de $\mathcal{A}^*$ em $\mathcal{A}^*$, especificando que ξ age sobre uma palavra substituindo cada letra α_i da palavra pela sua imagem correspondente $\xi(\alpha_i)$. Do mesmo modo a ação de ξ é estendida para $\mathcal{A}^N$ e $\mathcal{A}^Z$. Uma sequência $u \in \mathcal{A}^N$ é então chamada uma *sequência substitucional* se é um ponto fixo de ξ , ou seja, se permanece invariante quando cada letra na sequência é substituída por sua imagem em ξ . Estes pontos fixos da transformação ξ são as **sequências quasi-periódicas**. As sequências quasi-periódicas que, de imediato, mais atraíram

a atenção dos físicos foram:

i. a **sequência de Fibonacci**, onde $\mathcal{A} = A, B$ e cuja regra de substituição é,

$$A \rightarrow \xi(A) = AB, B \rightarrow \xi(B) = A; \quad (3.40)$$

ii. a **sequência de período duplo** ou **double-period (DP)**, onde $\mathcal{A} = A, B$ e cuja regra de substituição é,

$$A \rightarrow \xi(A) = AB, B \rightarrow \xi(B) = AA; \quad (3.41)$$

iii. a **sequência de Thue-Morse (TM)**, onde $\mathcal{A} = A, B$ e cuja regra de substituição é,

$$A \rightarrow \xi(A) = AB, B \rightarrow \xi(B) = BA; \quad (3.42)$$

iv. e a **sequência de Rudin-Shapiro (RS)**, onde $\mathcal{A} = A, B, C, D$ e cuja regra de substituição é,

$$A \rightarrow \xi(A) = AC, B \rightarrow \xi(B) = DC, C \rightarrow \xi(C) = AB, D \rightarrow \xi(D) = DB. \quad (3.43)$$

Matematicamente, estas SLs são ditas ser quasi-periódicas pelo fato de que em tais estruturas o número $\sigma = F_n/F_{n-1}$ é irracional, onde F_n é o número de blocos correspondente a n -ésima geração. Logo, elas não podem ser classificadas como estruturas periódicas. Apesar disso, elas também não podem ser amorfas porque existe uma regra de recorrência para cada geração. Para um estudo mais aprofundado sobre as excitações nas outras seqüências mencionadas acima, ver[25, 26].

Estas seqüências são classificadas em termos da natureza do seu espectro de Fourier[81] que pode ser : *dense pure point* (Fibonacci), *singular continuous* (período duplo e Thue-Morse) e *absolutely continuous* (Rudin-Shapiro). Uma vez definida a seqüência quasi-periódica que se quer trabalhar, associamos a ela a superposição dos blocos de construção que formarão a célula unitária do sistema físico quasi-periódico.

Com relação ao espectro de ondas de spin nas super-redes quasi-periódicas citadas acima têm-se que todos apresentam auto-similaridade, o que indicaria um possível comportamento fractal. Após a obtenção destes espectros, Bezerra *et al.* investigaram, quantitativamente, essa propriedade da auto-similaridade do espectro das ondas de spins através das **análises fractal**[82] e **multifractal**[83].

Do ponto de vista experimental, o procedimento para a construção de estruturas quasi-periódicas tornou-se padrão após os trabalhos de Merlin *et al*[13], que relataram a construção da primeira super-rede quasi-periódica seguindo a seqüência de Fibonacci, e mais tarde seguindo a seqüência de Thue-Morse[84, 85], ambas por *Molecular Beam Epitaxy (MBE)*. Do ponto de vista teórico, várias partículas e quasi-partículas têm sido estudadas nestes sistemas, a saber: *phonons*[86, 87], elétrons [88], *polaritons*[89].

Apesar desta diversidade de sistemas teóricos estudados, pouco esforço foi feito no estudo das propriedades magnéticas de super-redes quasi-periódicas. O objetivo do Capítulo 4 é investigar o efeito da quasi-periodicidade nas propriedades das ondas de spin de super-redes magnéticas construídas a partir de seqüências quasi-periódicas. É importante enfatizar que a quasi-periodicidade está embutida na construção das células unitárias das super-redes, e que a super-rede como um todo é periódica. Portanto o teorema de Bloch ainda é válido, e será utilizado no cálculo das ondas de spin. Consideramos especificamente as quatro seqüências

quasi-periódicas conhecidas como **sequências Fibonacci generalizada** $\sigma(p, q)$: (a) *Fibonacci golden mean* (GM) $\sigma_g(1, 1)$, (b) *Fibonacci silver mean* (SM) $\sigma_s(2, 1)$, (c) *Fibonacci bronze mean* (BM) $\sigma_b(3, 1)$ e (d) *Fibonacci nickel mean* (NM) $\sigma_n(1, 3)$. Os cálculos são executados usando a técnica da *matriz transferência*, e dentro da *aproximação RPA*. Nas próximas seções falaremos sobre a maneira de como se dá o crescimento de cada tipo de sequência estudada aqui, desenvolveremos a matriz transferência para cada sequência (juntamente com a relação de dispersão) e apresentaremos os resultados numéricos e as conclusões no final do capítulo.

Super-redes Quasi-periódicas de Fibonacci Generalizada $\sigma(p, q)$

Neste capítulo apresentamos a *sequência de Fibonacci generalizada*, que é a sequência quasi-periódica de nosso interesse, juntamente com os espectros de ondas de spin para as super-redes geradas a partir destas sequências. Baseado em trabalhos desenvolvidos por outros pesquisadores sobre estruturas quasi-periódicas acerca de comportamento auto-similar dos espectros, é feito um estudo sobre as propriedades de localização e de leis de escala das bandas permitidas de *magnons* nas estruturas de Fibonacci generalizada. Propriedades estas que são originadas exclusivamente pelo arranjo quasi-periódico! Este estudo tem como objetivo confirmar, ou não, os indícios de fractalidade observados nos espectros obtidos. Tal comportamento fractal é, portanto, confirmado mediante a auto-similaridade do espectro e a obediência a uma dada lei de escala para altas gerações e que foi obtido para os casos das super-redes quasi-periódicas já estudadas.

4.1 Sequência de Fibonacci Generalizada $\sigma(p, q)$

A chamada **sequência de Fibonacci generalizada**, como o próprio nome sugere, é uma generalização da famosa **sequência de Fibonacci**, que é o exemplo mais antigo de uma cadeia aperiódica. Ela foi desenvolvida por Leonardo de Pisa (cujo apelido era Fibonacci, que significa “filho de Bonacci”) em 1202 como resultado de sua investigação sobre o crescimento de uma população de coelhos, segundo determinadas regras de reprodução, e qual seria sua população total depois de um período fixo (a princípio um ano). Fibonacci observou que em cada geração de coelhos, existia uma relação entre esta e as duas gerações anteriores. Esta relação é uma *relação de recorrência*, definida por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, onde $n \geq 2$, e seus primeiros termos são (1,1,2,3,5,8,13,21,34 ...). Daí afirmar que os números da sequência de Fibonacci são gerados adicionando os dois números antecessores da sequência, após especificar as condições iniciais. Esta sequência é uma sequência infinita, e tem uma característica muito interessante: no limite $n \rightarrow \infty$, a razão entre dois termos consecutivos (F_n/F_{n-1}) tende para um número irracional, que, para os matemáticos, é considerado o número irracional mais “puro”, e é comumente conhecido pelo nome de “*razão áurea*” (ou “*número de ouro*”), a saber $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.61803398874...$. Um fato notório e curioso é que todos os termos da sequência de Fibonacci podem ser gerados a partir da razão áurea, através da relação

$$F_n = \frac{\tau^n - (-1/\tau)^n}{\sqrt{5}}, \quad (4.1)$$

ou seja, uma sequência de números inteiros é gerada por potências de números *irracionais*! Essa relação é conhecida na literatura como *Fórmula de Binet*.

Existem na literatura diversos trabalhos aplicando a sequência de Fibonacci a sistemas físicos, incluindo estudos de propriedades supercondutoras[90], *plasmon-polaritons* em super-redes do tipo Fibonacci constituídas de materiais dielétricos[91, 48], e transmissão de luz[71, 92].

Uma estrutura quasi-periódica construída segundo a sequência de Fibonacci generalizada pode ser obtida a partir de uma relação de recorrência, como a discutida acima, formando uma cadeia binária que pode ser crescida experimentalmente pela justaposição de dois blocos de construção, a saber, A e B , de maneira que o n -ésimo estágio da super-rede S_n é gerado pela relação recursiva dada por

$$S_n = S_{n-1}^p S_{n-2}^q, \quad \text{para} \quad n \geq 2, \quad (4.2)$$

com $S_0 = B$ e $S_1 = A$. Os índices p e q são números inteiros positivos arbitrários e são eles que determinam o tipo de sequência a ser gerada. A quantidade S_n^p (S_n^q) representa p (q) repetições adjacentes de S_n . Quando $p = q = 1$, tem-se a sequência de Fibonacci “normal”, discutida acima.

Uma maneira equivalente de gerar a sequência de Fibonacci generalizado é pela seguinte relação substitucional

$$B \rightarrow A, \quad \text{e} \quad A \rightarrow A^p B^q, \quad (4.3)$$

onde A^p (B^q) é uma cadeia de pA 's (qB 's). O número total de blocos A e B em S_n é igual ao *número de Fibonacci generalizado*, F_n , que é dado pela relação de recorrência a seguir,

$$F_n = pF_{n-1} + qF_{n-2}, \quad \text{para} \quad n \geq 2, \quad (4.4)$$

com os valores iniciais $F_0 = F_1 = 1$.

O *valor característico*, $\sigma(p, q)$, que é a razão F_n/F_{n-1} , no limite $n \rightarrow \infty$, é dado pela solução positiva da equação quadrática

$$\sigma^2 - p\sigma - q = 0, \quad (4.5)$$

ou explicitamente dado por

$$\sigma(p, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}. \quad (4.6)$$

Como dissemos anteriormente, os índices p e q determinam qual o tipo de sequência que está sendo analisada. Por exemplo, para $p = q = 1$, temos $\sigma(1, 1) = \sigma_g$, que é a sequência de Fibonacci “normal” e será chamada simplesmente de *golden mean* (GM). Semelhantemente, $\sigma(p = 2, q = 1) = \sigma_s$ é a *silver mean* (SM), $\sigma(p = 3, q = 1) = \sigma_b$ é a *bronze mean* (BM), e $\sigma(p = 1, q = 3) = \sigma_n$, a *nickel mean* (NM). Observe que σ é completamente equivalente à determinação dos auto-valores da matriz de substituição (para mais detalhes, ver[93]). Portanto, seguindo os critérios definidos nesta referência, nós podemos classificar as sequências substitucionais consideradas neste trabalho baseadas na irracionalidade de $\sigma^-(p, q)$ (onde o sinal (-) significa a raiz negativa da Equação (4.6)), ou seja, se $|\sigma^-(p, q)| < 1$, o valor característico é

dito ser um número irracional de Pisot-Vijayraghavan (PV), e a flutuação das propriedades físicas desta sequência substitucional são mais acentuadas. Por outro lado, se $|\sigma^-(p, q)| > 1$, ele não é um número tipo PV, e a flutuação de suas propriedades físicas é menor. Das sequências aqui estudadas, somente a do tipo NM não possui um valor característico do tipo PV e, portanto, nós esperamos uma flutuação mais pronunciada de suas propriedades físicas (no nosso caso, o espectro de propagação de *magnons* em super-redes do tipo Fibonacci NM.).

Vamos, brevemente, ver como são as estruturas das super-redes formadas segundo as sequências de Fibonacci generalizada que foram consideradas neste trabalho.

4.1.1 Sequência de Fibonacci *Golden Mean* (GM), $\sigma(1, 1) = \sigma_g$

Uma estrutura de *Fibonacci GM* é obtida fazendo $p = q = 1$ na Equação (4.2), de tal maneira que o n -ésimo estágio do processo, S_n , é dado pela regra de recorrência $S_n = S_{n-1}S_{n-2}$, para $n \geq 2$, começando com $S_0 = B$ e $S_1 = A$. Segundo a Equação (4.3), ela tem a propriedade de ser invariante sob a transformação $A \rightarrow AB$ e $B \rightarrow A$, conforme é visto na Figura 4.1 a.

As gerações de Fibonacci GM são:

$$S_0 = B; \quad S_1 = A; \quad S_2 = AB; \quad S_3 = ABA; \quad S_4 = ABAAB, \quad \text{etc.}$$

Da Equação (4.4), o número de blocos aumenta de acordo com a expressão $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (com $F_0 = F_1 = 1$).

A matriz transferência para a n -ésima geração é dada pela seguinte relação de recorrência:

$$T_{S_n} = T_{S_{n-2}} T_{S_{n-1}}, \quad (n \geq 3) \quad (4.7)$$

onde $T_{S_1} = N_{AA}^{-1} M_{AA}$ e $T_{S_2} = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A$.

4.1.2 Sequência de Fibonacci *Silver Mean* (SM), $\sigma(2, 1) = \sigma_s$

Já a estrutura de *Fibonacci SM* é obtida fazendo $p = 2$ e $q = 1$ na Equação (4.2), e o n -ésimo estágio do processo, S_n , é dado pela regra de recorrência $S_n = (S_{n-1})^2 S_{n-2}$, para $n \geq 2$, começando com $S_0 = B$ e $S_1 = A$. Esta sequência é invariante sob a transformação $A \rightarrow AAB$ e $B \rightarrow A$, conforme é visto na Figura 4.1 b.

As gerações de Fibonacci SM são:

$$S_0 = B; \quad S_1 = A; \quad S_2 = AAB; \quad S_3 = AABAABA;$$

$$S_4 = AABAABAAABAABAAAB, \quad \text{etc.}$$

Aqui, o número de blocos aumenta de acordo com a expressão $F_n = 2F_{n-1} + F_{n-2}$ (com $F_0 = F_1 = 1$).

A matriz transferência para a n -ésima geração é dada pela seguinte relação de recorrência:

$$T_{S_n} = T_{S_{n-2}} (T_{S_{n-1}})^2, \quad (n \geq 3) \quad (4.8)$$

onde a matriz T_{S_2} agora será dada por $T_{S_2} = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA}$.

A matriz transferência para a n -ésima geração é obtida através da relação:

$$T_{S_n} = T_{S_{n-2}}(T_{S_{n-1}})^3, \quad (n \geq 3) \quad (4.9)$$

com T_{S_2} sendo $T_{S_2} = N_A^{-1}M_B N_B^{-1}M_A N_{AA}^{-1}M_{AA} N_{AA}^{-1}M_{AA}$.

4.1.4 Sequência de Fibonacci *Nickel Mean* (NM), $\sigma(1, 3) = \sigma_n$

Por último, temos a sequência de *Fibonacci NM*, que corresponde a $p = 1$ e $q = 3$ na Equação (4.2), podendo, assim, ser gerada pela regra: $S_n = S_{n-1}(S_{n-2})^3$ ($n \geq 2$), com $S_0 = B$ e $S_1 = A$. Isso é análogo a fazer a seguinte transformação: $A \rightarrow AB BB$ e $B \rightarrow A$ (ver Figura 4.1 d).

As gerações de Fibonacci NM são:

$$S_0 = B; \quad S_1 = A; \quad S_2 = AB BB; \quad S_3 = AB BB AAA;$$

$$S_4 = AB BB AAA AB BB AB BB AB BB, \quad \text{etc.}$$

O número de blocos nesta sequência aumenta de acordo com a expressão $F_n = F_{n-1} + 3F_{n-2}$ (com $F_0 = F_1 = 1$).

Aqui, a matriz transferência para a n -ésima geração desta sequência é dada por

$$T_{S_n} = (T_{S_{n-2}})^3 T_{S_{n-1}}, \quad (n \geq 3) \quad (4.10)$$

sendo $T_{S_2} = N_A^{-1}M_B N_{BB}^{-1}M_{BB} N_{BB}^{-1}M_{BB} N_B^{-1}M_A$.

A partir do que foi discutido nas Subseções 4.1.1-4.1.4, por indução matemática, podemos estender o método da matriz transferência para uma sequência de Fibonacci generalizado para quaisquer valores de p e q . A matriz transferência para a n -ésima geração da sequência será dada por

$$T_{S_n} = (T_{S_{n-2}})^q (T_{S_{n-1}})^p, \quad (n \geq 3) \quad (4.11)$$

onde teremos $T_{S_1} = N_{AA}^{-1}M_{AA}$ e $T_{S_2} = N_A^{-1}M_B (N_{BB}^{-1}M_{BB})^{(q-1)} N_B^{-1}M_A (N_{AA}^{-1}M_{AA})^{(p-1)}$.

No Apêndice A nós mostramos em maiores detalhes a maneira de obter as regras de recorrência para as sequências de Fibonacci GM, SM, BM e NM.

4.2 Localização e Leis de Escala

Em diversos sistemas, físicos ou não, pode-se observar **comportamento auto-similar**, ou seja, uma mudança de escala leva essencialmente ao mesmo sistema (Figura 4.2). A presença de **objetos auto-similares** em estruturas desordenadas e processos aleatórios é hoje muito comum na ciência de uma forma geral. Tais objetos são encontrados em sistemas físicos totalmente diferentes, como por exemplo terremotos, polímeros, galáxias, etc[14]. Apesar desta diversidade de exemplos, em áreas aparentemente sem conexão e escalas tão diferentes, os objetos auto-similares são descritos por uma teoria matemática específica chamada **geometria fractal**[94]. Estes objetos auto-similares são então denominados **fractais** e caracterizados por uma

dimensão fracionária, que é mais comumente conhecida como **dimensão fractal**, d_f . Existem ainda fractais que são compostos de subconjuntos fractais, chamados **fractais compostos** ou **multifractais**, que são analisados por uma função simplesmente denominada $f(\alpha)$, onde o espectro desta função $f(\alpha)$, também conhecido como **espectro das singularidades**, caracteriza a distribuição como multifractal[76, 95].



Figura 4.2 Exemplos de diferentes sistemas mas que apresentam uma propriedade em comum: todos eles são *objetos auto-similares* e são, portanto, denominados de *fractais*.

Na Física da Matéria Condensada, muitas vezes se está interessado em sistemas que tenham resposta numa faixa bastante estreita dos espectros considerados (de frequências, de espalhamento, etc.). Uma maneira de se obter tais propriedades em sistemas cristalinos é manipular as propriedades dos materiais através de técnicas de dopagem, por exemplo. No caso de super-redes magnéticas, pode-se “simular” esta dopagem também através de diferentes técnicas de crescimento. Neste capítulo iremos aprofundar nossa descrição de ondas de spin em super-redes quasi-periódicas discutindo a **localização das bandas de volume**¹[82] para altas gerações das sequências quasi-periódicas e as **leis de escala** que são características de cada sequência neste processo. Antes de apresentarmos uma discussão quantitativa sobre a análise fractal do espectro das ondas de spin em quasi-cristais, vamos inicialmente descrever resumidamente alguns conceitos sobre objetos fractais (para uma revisão mais profunda, ver Mandelbrot[94] e Gouyet[96].).

Inicialmente definiremos o conceito de **volume observável**. Considere um objeto de dimensão d qualquer e tamanho linear L , e uma grade fixa de caixas de dimensão d e tamanho linear l . Portanto, o **volume observável** é o volume total formado pelo volume das caixas necessárias

¹Por **localização** queremos nos referir à **fragmentação** do espectro de bandas de energia que ocorre devido ao aumento da desordem da estrutura.

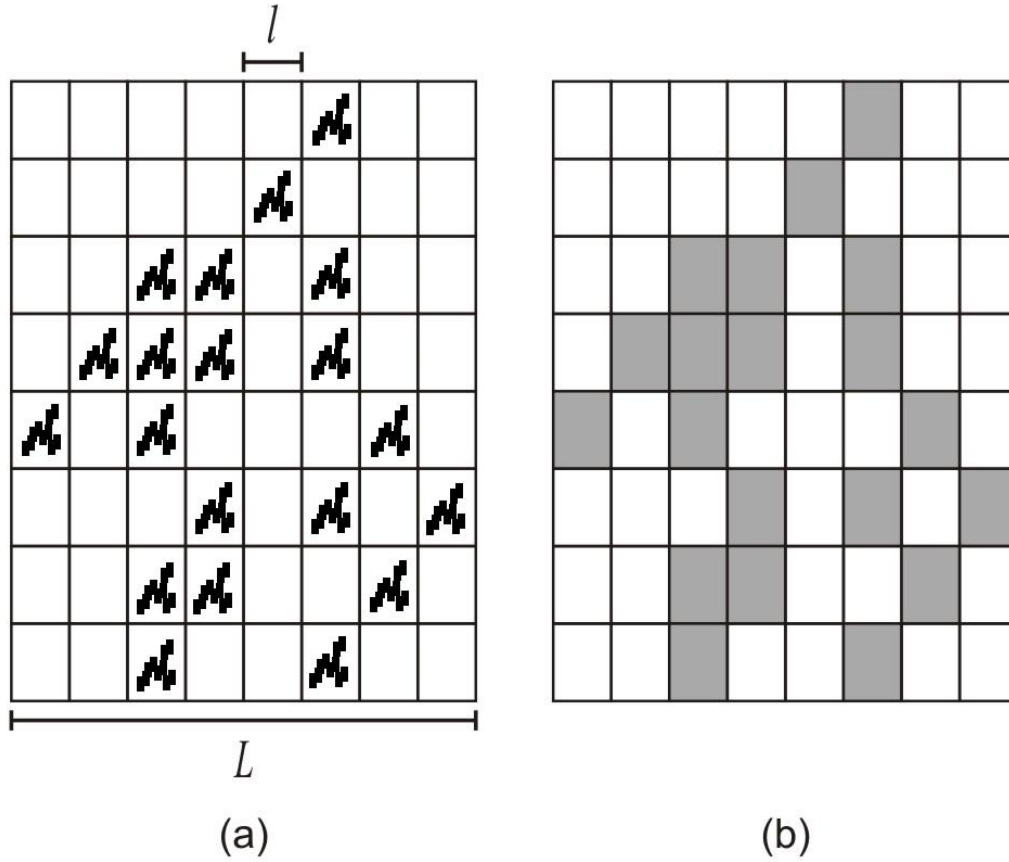


Figura 4.3 (a) O conjunto (pontos) e a grade de tamanho l . L denota o diâmetro do conjunto. (b) Caixas (em preto) necessárias para cobrir o conjunto.

para cobrir todo o objeto (veja a Figura 4.3). Note que o volume observável depende da resolução $\varepsilon = l/L$ da grade. Isto nos leva à seguinte definição de fractal: um **objeto fractal** é aquele cujo volume observável depende da resolução da grade, em várias ordens de magnitude, e cujo comportamento segue uma **lei de potência** com um expoente não-trivial. A partir da Figura 4.3 podemos concluir que à medida que diminuimos o tamanho da grade o número de caixas não-vazias $N(\varepsilon)$ aumenta. Este número de caixas não-vazias $N(\varepsilon)$, necessárias para cobrir o objeto, obedece uma lei de escala com a resolução,

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-d_f}, \quad (4.12)$$

onde d_f é a dimensão fractal do objeto a ser coberto. Por exemplo, $d_f = 1$ para uma reta e $d_f = 2$ para um plano. Em fractais, frequentemente, d_f é um número não-inteiro. É fácil determinar $N(\varepsilon)$ para um objeto geométrico simples. Como exemplo, tomemos um segmento de reta de tamanho L . A grade que utilizamos é obtida pela divisão de L em l pedaços. O número de caixas de tamanho l necessárias para cobrir o objeto é portanto L/l , e obviamente $N(\varepsilon) = L/l = \varepsilon^{-1}$. Como esperado $d_f = 1$ para um segmento de reta. Outro exemplo simples é o *conjunto de Cantor*, o qual é construído pela retirada do terço central de um segmento

unitário, e em seguida do terço central dos segmentos restantes *ad infinitum* (veja Figura 4.4). A grade que utilizaremos é obtida pela divisão do segmento unitário em 3^m partes iguais. O número de caixas necessárias para cobrir o conjunto é 2^m , e, portanto,

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-0.631} = \varepsilon^{\ln 2 / \ln 3}. \quad (4.13)$$

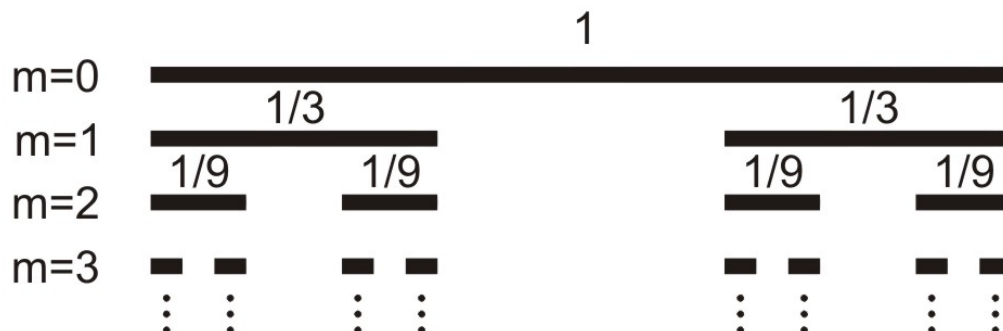


Figura 4.4 Figura mostrando as primeiras gerações do conjunto de Cantor.

O expoente fracionário indica que o conjunto de Cantor é um fractal com dimensão fractal $d_f = \ln 2 / \ln 3$. Note que a dimensão fractal é sempre menor do que a dimensão euclidiana do espaço no qual o fractal está embebido (também chamado de *dimensão do suporte*)! Um fato notável é que a dimensão fractal é universal para algumas classes de sistemas a saber[14], litorais ($d_f \approx 1.25$), paisagens ($d_f \approx 2.2$), cadeias poliméricas ($d_f \approx 1.66$), etc.

A Figura 4.5 mostra a forma como se dá a localização das larguras de bandas de frequências (energias) permitidas (*pass bands*) do espectro de ondas de spin nas super-redes de Fibonacci generalizada versus o número da geração n , para um valor fixo do vetor de onda no plano, $k_x a = 0.5$. O número de bandas permitidas é três vezes o número de Fibonacci da geração correspondente para cada sequência, confirmando o que já fora dito na Seção 3.2. Notamos claramente que, a medida que avançamos na geração da sequência, as regiões de bandas permitidas se tornam mais e mais limitadas, com um aspecto típico de um conjunto de Cantor, indicando uma localização cada vez mais forte. A largura total das bandas permitidas Δ , para uma dada geração n , obedece uma lei de escala da forma,

$$\Delta \sim F_n^{-\delta(k_x a)}, \quad (4.14)$$

onde F_n é o número de Fibonacci associado a n -ésima geração, e o expoente $\delta(k_x a)$, que, a princípio, depende do valor do vetor de onda no plano, pode ser interpretado como uma medida do grau de localização da excitação, recedendo o nome de **coeficiente de difusão do espectro**[97, 98].

Estes comportamentos do tipo leis de escala das larguras de bandas permitidas indicam quantitativamente a fractalidade das ondas de spin das super-redes quasi-periódicas. Contudo, se faz necessário uma análise mais completa dos perfis das bandas de volume das sequências

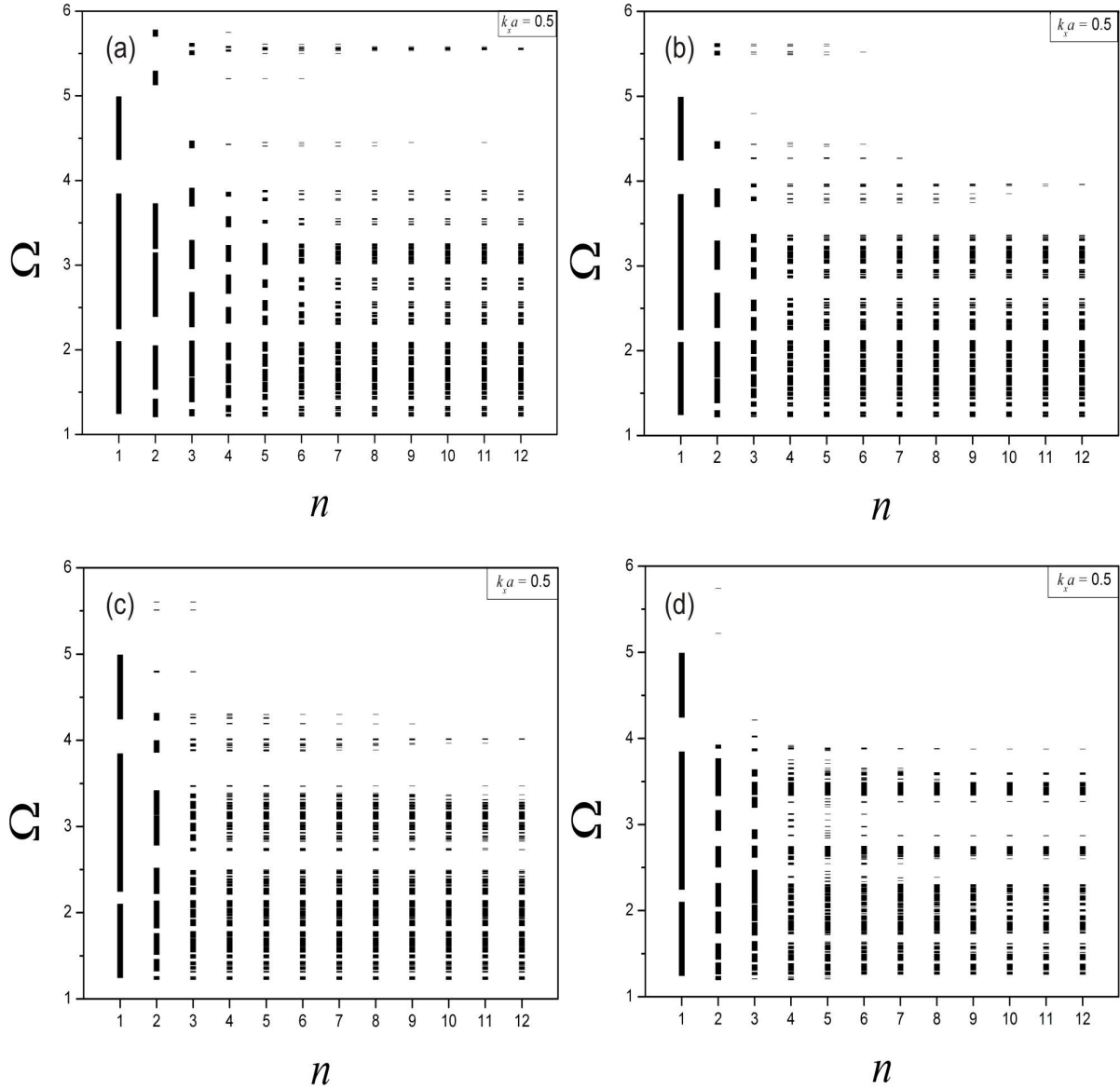


Figura 4.5 Localização das larguras de *pass bands* e *gaps* em função do número da geração das sequências quasi-periódicas estudadas, para $k_x a = 0.5$: (a) Fibonacci GM, (b) Fibonacci SM, (c) Fibonacci BM, e (d) Fibonacci NM.

quasi-periódicas via análise multifractal[83]. A análise multifractal que foi empregada no estudo das larguras de bandas permitidas mostra que estes objetos são na verdade multifractais com uma função $f(\alpha)$ bem definida.

Na seção seguinte, apresentamos as curvas de dispersão no plano $\Omega - k_x a$ para ondas de spin no *bulk* nas sequências quasi-periódicas estudadas aqui. Estas curvas são as soluções da Equação (3.39) usando as matrizes transferências correspondentes a cada uma das sequências de Fibonacci generalizada discutidas nas Subseções 4.1.1-4.1.4. Mostramos ainda os resultados obtidos com relação à análise fractal dos espectros das ondas de spin, comprovando se estas

sequências possuem um espectro fractal ou não.

4.3 Resultados Numéricos e Conclusões

Primeiramente, apresentamos alguns resultados numéricos que ilustram a relação de dispersão para ondas de spin de volume nas super-redes quasi-periódicas de Fibonacci generalizadas consideradas. Os parâmetros são os mesmos utilizados na Seção 3.2. Diferentemente do caso periódico, aqui podemos ter interfaces do tipo A/A e B/B . Porém, a Equação (3.39) permanece inalterada, havendo apenas a necessidade de mudar a constante de troca na interface de I para I_A (na interface A/A) ou I_B (na interface B/B). E os valores adotados para estes parâmetros foram: $I_{AA} = I_A/J_A = I_{BB} = I_B/J_B = 0.8$.

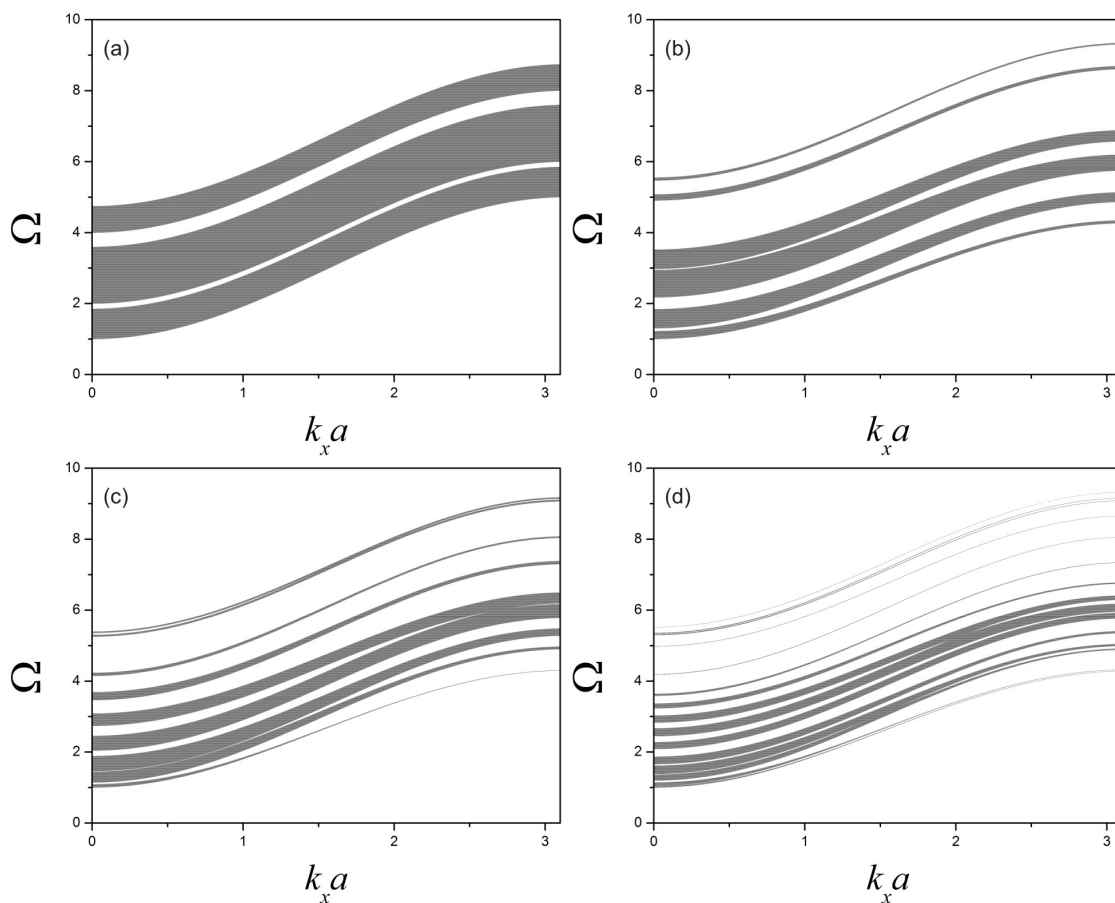


Figura 4.6 Curva de dispersão de *magnons* em super-rede ferromagnética do tipo Fibonacci GM: (a) 1ª geração ($[A]$); (b) 2ª geração ($[A|B]$, que corresponde ao caso periódico); (c) 3ª geração ($[A|B|A]$); e (d) 4ª geração ($[A|B|A|A]$).

Na Figura 4.6 temos a curva de dispersão para as quatro primeiras gerações da sequência quasi-periódica do tipo Fibonacci GM, respectivamente. Note que a forma das curvas de dispersão são semelhantes à do caso periódico. A 2ª geração desta sequência corresponde ao caso

periódico. Observe ainda que à medida que o número de gerações aumenta, as bandas de volume tornam-se mais estreitas, o que já era previsto, conforme foi discutido na Seção 3.2, pois, dessa maneira, a estrutura está saindo de uma regime ordenado (caso periódico) em direção a um desordenado (caso aperiódico). O número total de bandas de volume em cada geração é dado pelo número de blocos A 's (B 's) contidos na célula unitária vezes a quantidade de planos atômicos referentes ao material A (B), ou seja, n^0 de bandas de volume = $n_A \times n^0$ de blocos $A + n_B \times n^0$ de blocos B , que, no nosso caso, isto resume-se apenas a

$$n^0 \text{ de bandas de volume} = n \times F_n,$$

pois $n_A = n_B = n$.

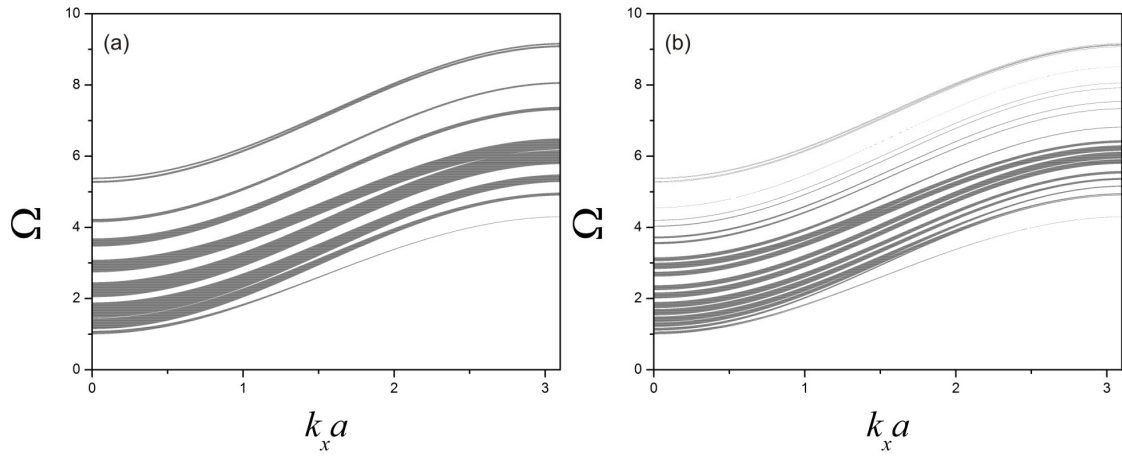


Figura 4.7 Curva de dispersão de *magnons* em super-rede ferromagnética do tipo Fibonacci SM: (a) 2ª geração ($[A|A|B]$); (b) 3ª geração ($[A|A|B|A|A|B|A]$).

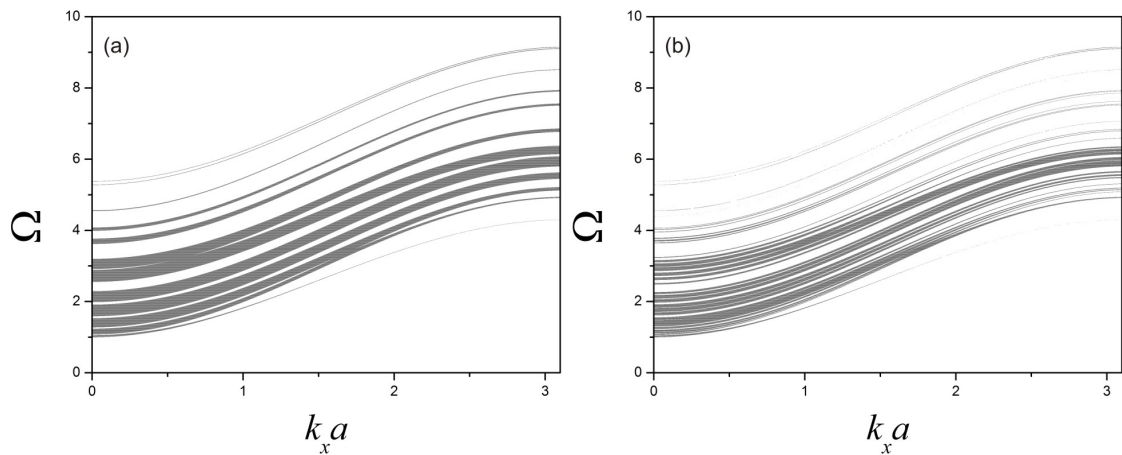


Figura 4.8 Curva de dispersão de *magnons* em super-rede ferromagnética do tipo Fibonacci BM: (a) 2ª geração ($[A|A|A|B]$); (b) 3ª geração ($[A|A|A|B|A|A|B|A|A|B|A|A|B|A]$).

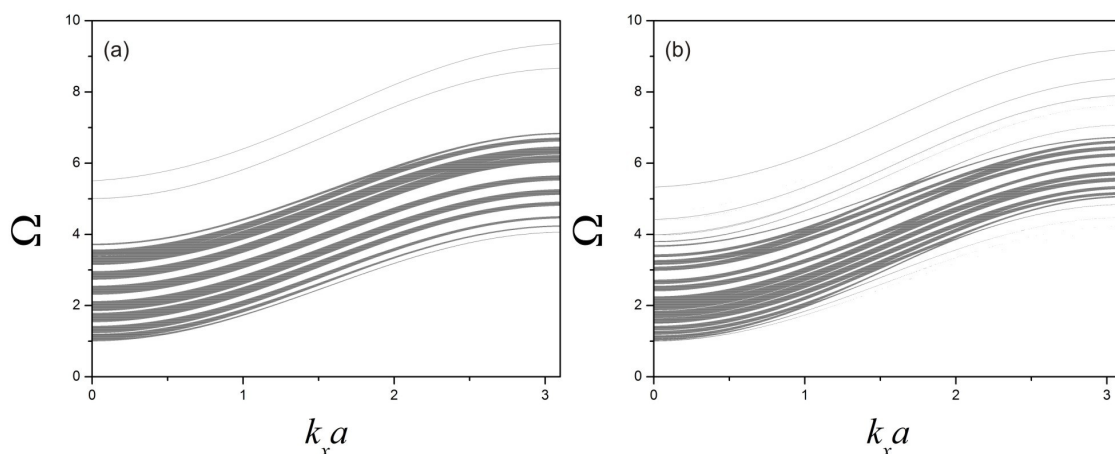


Figura 4.9 Curva de dispersão de *magnons* em super-rede ferromagnética do tipo Fibonacci NM: (a) 2ª geração ($[A|B|B|B]$); (b) 3ª geração ($[A|B|B|B|A|A|A]$).

Uma observação cuidadosa das Figuras 4.6a-4.6d revela-nos qualitativamente um comportamento dos espectros pela reprodução das bandas de volume do caso periódico. No limite de altas gerações ($n \rightarrow \infty$) esta fractalidade é mais forte, conforme veremos abaixo de maneira quantitativa!

Nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9 temos o espectro de ondas de spin para a 2ª (figuras da esquerda) e 3ª (figuras da direita) gerações das sequências de Fibonacci SM, BM e NM, respectivamente. Se compararmos as Figuras 4.6b, 4.7a e 4.8a, observamos que o número de bandas permitidas aumenta, pois, para uma mesma geração, a sequência BM possui mais blocos que a SM, que por sua vez possui mais blocos que a GM. Consequentemente, as larguras das bandas vão ficando cada vez mais estreitas, devido a este aumento na desordem da estrutura. Como foi observado para o caso GM, aqui também notamos qualitativamente a fractalidade destes espectros pela reprodução das bandas de volume do caso periódico que se torna mais forte em altas gerações ($n \rightarrow \infty$).

Dos resultados aqui apresentados podemos inferir que o grau menos desordenado da sequência de Fibonacci GM, o que pode ser visualizado com a proximidade de seu espectro com aquele da sequência periódica. Também é importante comentar que no limite de altas gerações, para qualquer uma das sequências, a localização das bandas de volume se torna mais forte, para um valor fixo de $k_x a$, e no limite $n \rightarrow \infty$, as larguras de bandas formam um conjunto de Cantor. Passaremos agora a discutir este aspecto da localização das bandas detalhadamente.

Como dissemos no Capítulo 3, um espectro de energia fractal é a assinatura básica de sistemas quasi-periódicos. Vamos agora descrever esta fractalidade além do aspecto qualitativo. Para isto vamos descrever a localização das bandas de volume das ondas de spin e as propriedades de escala que governam esta localização[82].

Nas Figuras 4.10-4.13 temos o gráfico da frequência reduzida Ω versus o número da geração n para as sequência quasi-periódicas de Fibonacci GM, SM, BM e NM, respectivamente. Aqui fizemos $k_x a = 0.5$.

Na Figura 4.10 identificamos três regiões onde encontramos um comportamento auto-

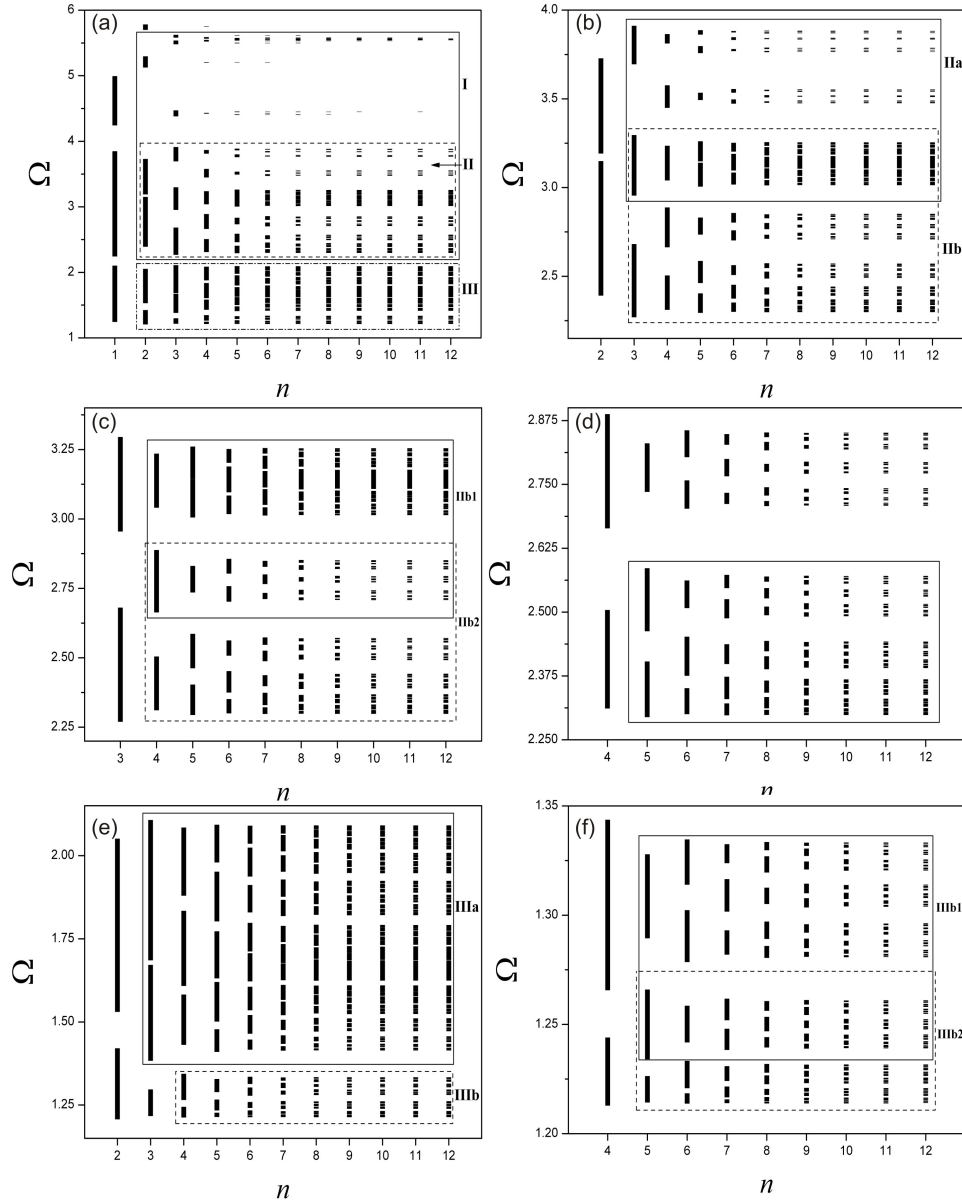


Figura 4.10 Localização das larguras de bandas permitidas (*pass bands*) em função do número da geração n para a sequência quasi-periódica de Fibonacci GM com $k_x a = 0.5$. Na Figura (a) temos o espectro completo com n variando de 1 a 12 mostrando diversas regiões do espectro que apresentam comportamento auto-similar. Nas Figuras (b)-(f) temos a ampliação dessas regiões auto-similares e podemos observar que mais regiões auto-similares são reveladas. Aqui as bandas permitidas dividem-se em outras duas.

similar (ver Figura 4.10 a). A região I é semelhante ao espectro todo. Já as regiões II e III são semelhantes entre si. Observe que temos duas bandas permitidas se fragmentando em outras três. Na Figura 4.10 b, temos a ampliação da região II, e aqui encontramos duas outras regiões auto-similares, IIa e IIb. Ampliando esta última, Figura 4.10 c, encontramos mais regiões auto-

smilares, que também podem ser visto na Figura 4.10 d, que é a ampliação da região IIb2. Na Figura 4.10 e, temos a ampliação da região III da Figura 4.10 a. Por fim, ampliamos a região IIIb, Figura 4.10 f. Em ambas novamente encontramos aspectos auto-similares. Logo, esperamos encontrar um comportamento de lei de escala para a sequência Fibonacci GM.

Na figura seguinte, Figura 4.11, temos a mesmo gráfico de antes, porém para Fibonacci SM. Nele identificamos cinco regiões onde encontramos um comportamento auto-similar (Figura 4.11 a). A região I é semelhante ao espectro todo. Já a região II é semelhante à IV, enquanto que a região III é semelhante à V. Aqui observamos que existem dois tipos de fragmentação do espectro: um em que uma única banda se divide em duas, e um outro em que esta única banda se divide em três outras. Na Figura 4.11 b temos a ampliação da região II, e encontramos outras três regiões auto-similares. Na Figura 4.11 c temos a ampliação da região IIc, onde encontramos mais três regiões auto-similares. Aqui todas as três regiões, IIc1, IIc2 e IIc3 são semelhantes entre si. Ampliando a região III da Figura 4.11 a, encontramos também outras três regiões semelhantes. Finalmente, nas Figuras 4.11e e 4.11f, temos a ampliação das regiões IV e V da Figura 4.11 a, respectivamente, que também são auto-similares. Assim como no caso da sequência GM, também esperamos obter um comportamento de lei de escala para Fibonacci SM.

Na Figura 4.12 temos o mesmo que na Figura 4.10 para o caso Fibonacci BM. Nela identificamos duas regiões onde encontramos um comportamento auto-similar (ver Figura 4.12 a). Esta menor quantidade de regiões auto-similares já era esperada devido à sequência de Fibonacci BM ser mais “desorganizada” que as sequências GM e SM. Note que o espectro aqui, para uma mesma geração, é bem mais localizado (comparar as Figuras 4.7 com 4.8, e 4.11a com 4.12a). Note que a região I é semelhante à região II. Na 4.12b temos a ampliação da região I e encontramos uma região auto-similar, que denominamos Ia. Note que esta região é semelhante às regiões I e II. Já na 4.12c, ampliamos a região Ia e novamente observamos a existência de outras três regiões auto-similares, a saber, Ia1, Ia2 e Ia3. Todas estas três regiões também são semelhantes entre si e às demais. A 4.12d, mostra-nos agora a região II ampliada, onde encontramos mais regiões auto-similares. Nas Figuras 4.12e e 4.12f temos a ampliação das regiões IIc, da 4.12d, e IIc1, da 4.12e. Observamos ainda que uma única banda se divide em três outras em todas as escalas observadas, diferentemente do que ocorre no espectro da sequência SM.

Na Figura 4.13 temos o mesmo que a Figura 4.10 para o caso Fibonacci NM. Note que não há nenhuma região auto-similar neste espectro, diferentemente dos casos GM, SM e BM. Das quatro sequências estudadas aqui, a *nickel mean* é a mais “desorganizada”. Lembre-se que a sequência BM tem um comportamento fractal, auto-similar, bem mais “pobre” que a SM, ou seja, o espectro das ondas de spin na sequência BM é menos rico em regiões auto-similares que na SM. Todavia, no caso NM, o comportamento fractal simplesmente não existe. Logo, concluímos que quanto maior for a desordem, menor será o comportamento fractal do espectro, podendo até nem mesmo existir, mesmo que a sequência seja quasi-periódica, como é o caso da sequência Fibonacci NM. Com isso, também podemos inferir que, de todas as sequências de Fibonacci generalizada estudadas aqui, a que mais se aproxima do regime aperiódico é a *nickel mean*.

Das observações feitas com respeito à localização das bandas permitidas e à observação de

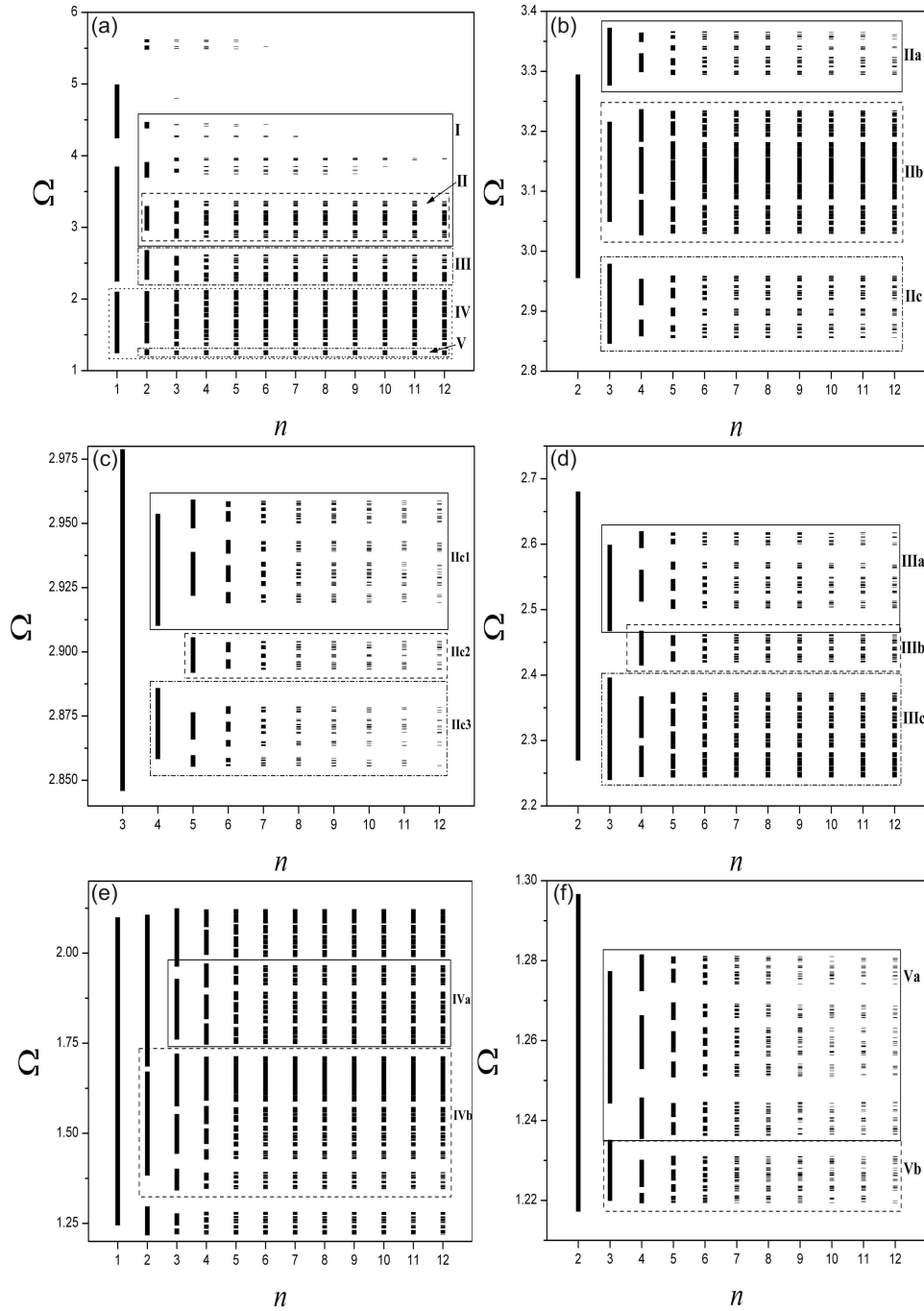


Figura 4.11 Mesmo que a Figura 4.10 para a sequência quasi-periódica de Fibonacci SM com $k_x a = 0.5$. Neste espectro podemos observar dois tipos de fragmentação da banda permitida: um em que a banda se divide em duas, e um outro que ela divide-se em outras três.

comportamento auto-similar dos espectros, nossa previsão é que os espectros das sequências de Fibonacci GM, SM e BM obedeçam a uma lei de escala, uma vez que a auto-similaridade está presente apenas nestes casos. Por sua vez, esperamos não obter tal obediência a uma lei

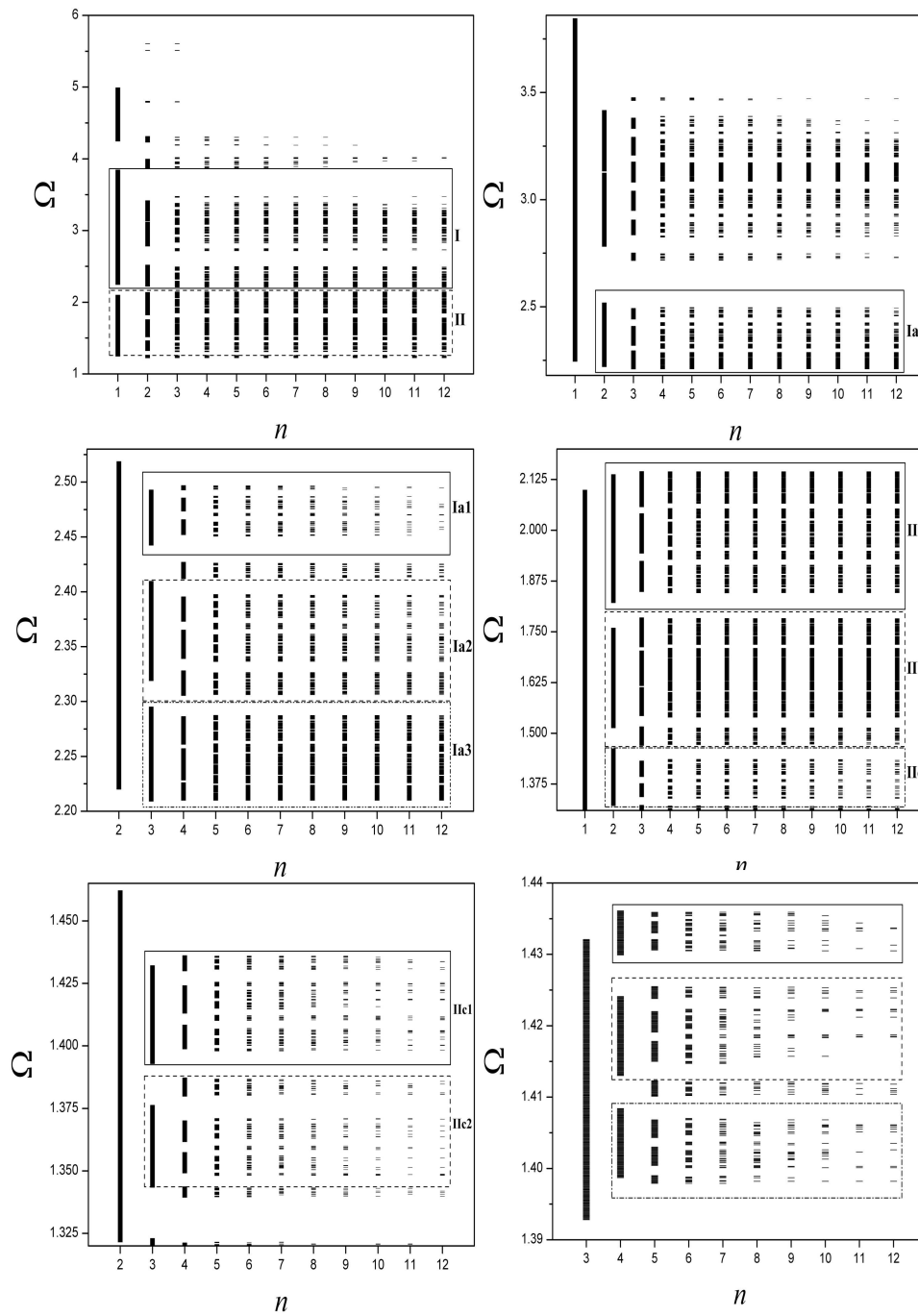


Figura 4.12 Mesmo que a Figura 4.10 para a sequência quasi-periódica de Fibonacci BM com $k_x a = 0.5$. Aqui observamos que a banda permitida se divide em outras três, diferentemente da sequência de Fibonacci SM.

de escala para o caso da sequência de Fibonacci NM. E é isto que passaremos a investigar a seguir.

A origem da auto-similaridade, do comportamento de escala e da multifractalidade dos es-

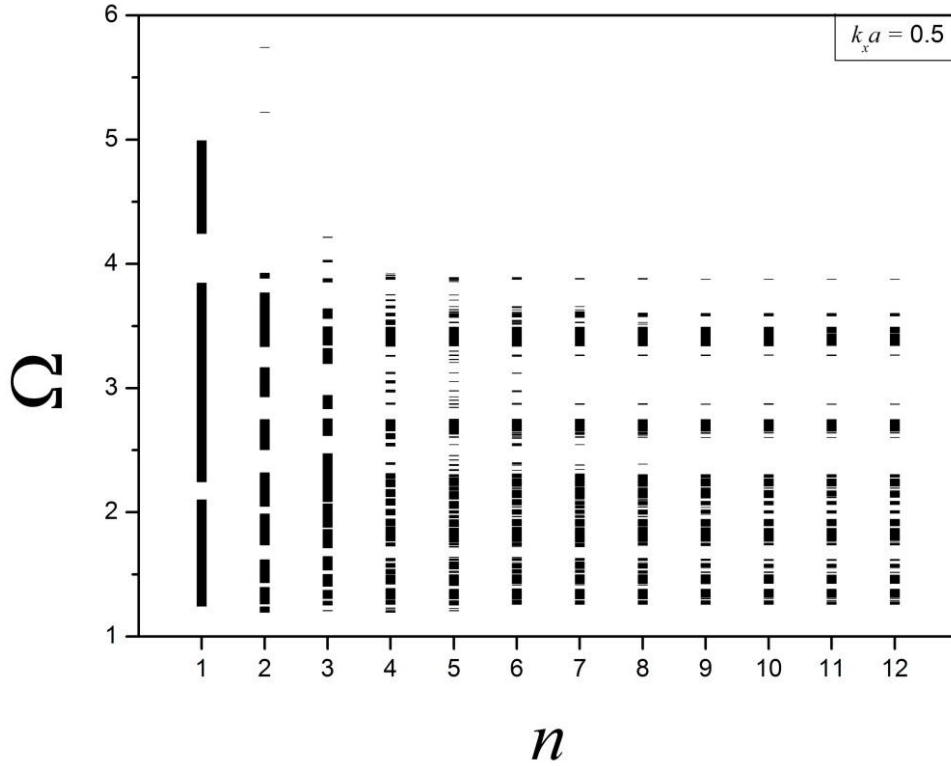


Figura 4.13 Mesmo que a Figura 4.10 para a sequência quasi-periódica de Fibonacci NM com $k_x a = 0.5$. Neste caso, o espectro não apresenta nenhuma região auto-similar, contrariamente ao observado nas sequências GM, SM e BM.

pectros das ondas de spin nestes sistemas, deve ser atribuída à própria estrutura hierárquica auto-similar não usual das sequências, que impõe uma ordem quasi-periódica de longo alcance que influencia de forma contundente as propriedades físicas das super-redes. Resultados análogos foram obtidos para *plasmon-polaritons* em multicamadas quasi-periódicas[95].

Foi observado que o comportamento de escala linear para todas as sequências não se ajusta bem para pequenos valores do índice de geração das estruturas quasi-periódicas. Argumentamos que a razão para isso é que para pequenos valores do índice de geração, n , as estruturas consideradas ainda não têm a marca da quasi-periodicidade, que pode ser observada mais facilmente para altas gerações. Por exemplo, a célula unitária para a super-rede de Fibonacci GM para $n = 2$ é $[A|B]$ (a célula unitária puramente periódica, como considerada no trabalho de Camley *et al.*[99]), e para $n = 3$ é $[A|B|A]$, e que dá praticamente o mesmo resultado para os modos de volume que a segunda geração, bastando neste caso fazer a substituição $A \rightarrow 2A$. Por outro lado, quando se aumenta o valor de n , se obtém um rápido aumento na fragmentação dos ramos em todas as sequências consideradas.

Na Figura 4.14 temos o gráfico do da largura total das bandas permitidas, Δ , versus o número de Fibonacci, F_n , para as sequências de Fibonacci GM (4.14a), de Fibonacci SM (4.14b), de Fibonacci BM (4.14c) e de Fibonacci NM (4.14d). Note que em todas as sequências a largura total das bandas diminui com um aspecto semelhante ao de uma lei de escala.

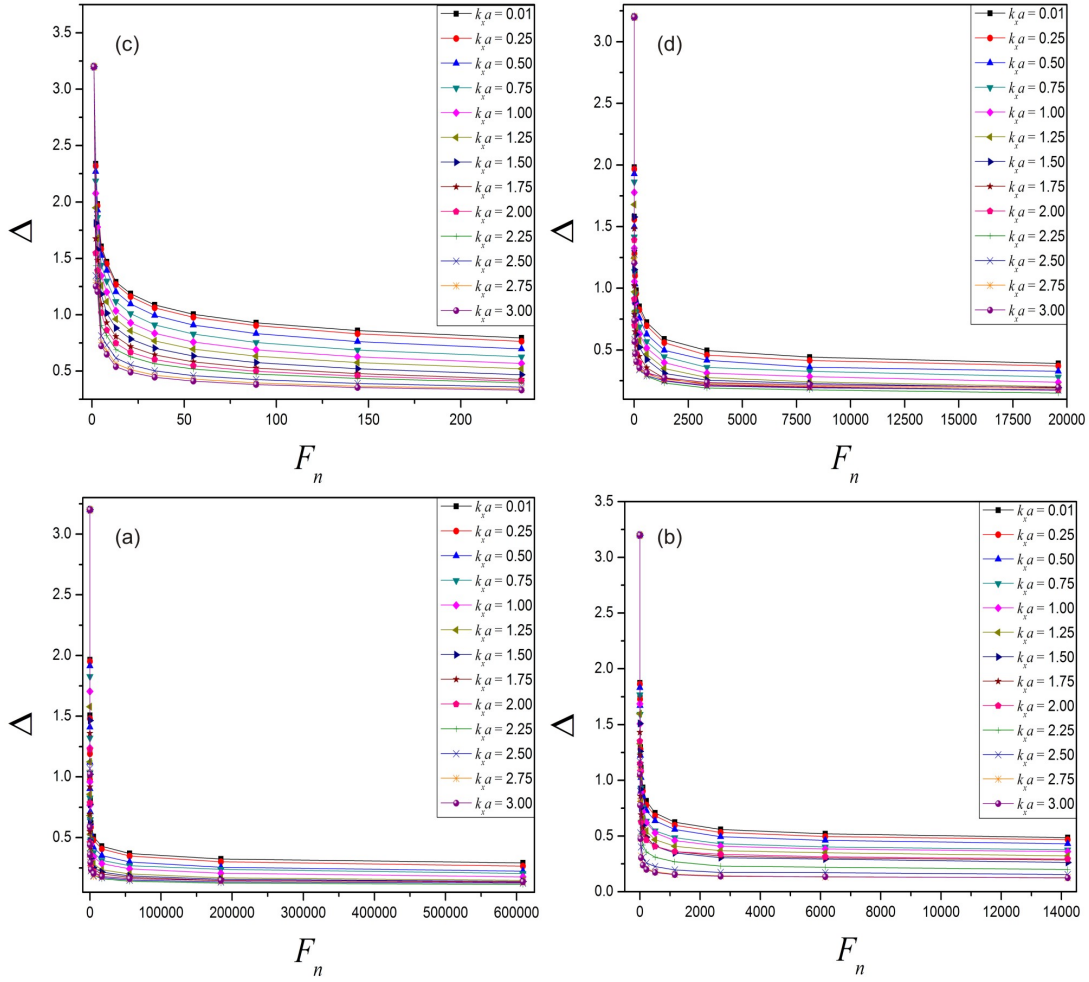


Figura 4.14 Largura total das bandas permitidas, Δ , versus o número de Fibonacci, F_n ,: (a) Fibonacci GM; (b) Fibonacci SM; (c) Fibonacci BM; e (d) Fibonacci NM.

Para confirmar, ou não, esses comportamento do tipo lei de escala, a Figura 4.15 mostra o gráfico do logaritmo da largura total das bandas de volume, $\text{Log}(\Delta)$, versus o logaritmo do número de Fibonacci, $\text{Log}(F_n)$, para as sequências de Fibonacci GM (4.15a), de Fibonacci SM (4.15b), de Fibonacci BM (4.15c) e de Fibonacci NM (4.15d), tomando vários valores de $k_x a$. Como esperado, apenas as sequências de Fibonacci GM, SM e BM obedecem à lei de escala proposta. Note que esta obediência ocorre apenas para altas gerações onde o efeito da correlação de longo alcance, induzido pelas relações de recorrências, é mais forte e a fractalidade é então observada.

Nas Figuras 4.15a, 4.15b e 4.15c vemos que o coeficiente de difusão do espectro δ , de fato, tem uma dependência como vetor de onda k_x . A Figura 4.16 mostra-nos como é esta dependência. Vemos claramente que δ possui uma dependência única para cada sequência. Logo, por meio desta dependência somos capazes de determinar qual a sequência em questão. Observamos ainda que, para $0 \leq k_x a \leq 1.75$, o coeficiente de difusão cresce monotonicamente com $k_x a$ para as sequências de Fibonacci GM e SM, que possuem relações de recorrência muito

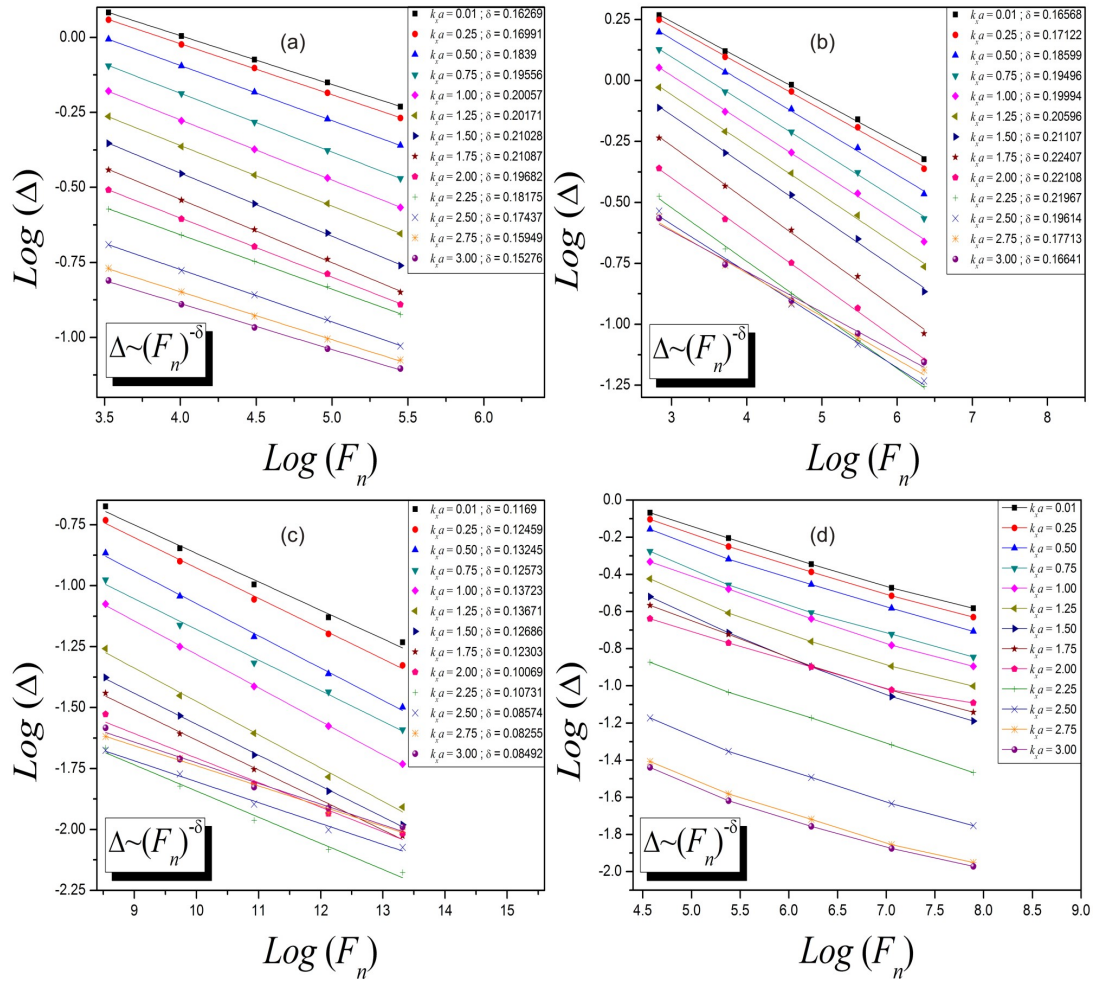


Figura 4.15 Lei de escala entre Δ e F_n : (a) Fibonacci GM; (b) Fibonacci SM; (c) Fibonacci BM; e (d) Fibonacci NM.

parecidas, o que não ocorre com Fibonacci BM (ver Figura 4.1).

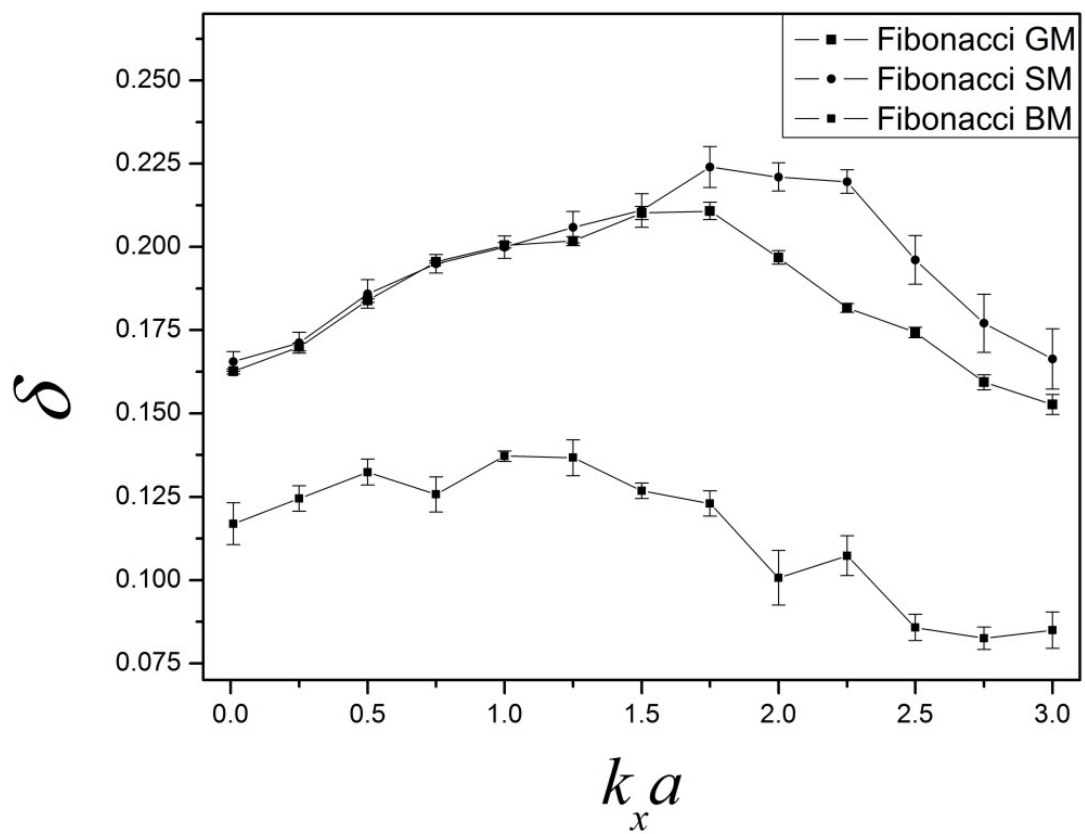


Figura 4.16 Gráfico mostrando a dependência do coeficiente de difusão do espectro δ com o vetor de onda $k_x a$. Note a semelhança entre curvas correspondentes às sequências de Fibonacci GM e SM.

Cristais Magnônicos

Neste capítulo nós investigamos a estrutura de bandas (espectro de ondas de spin) em materiais conhecidos como **cristais magnônicos**. Porém, antes de definir tais estruturas, falaremos um pouco sobre **cristais fotônicos** na Seção 5.1. Em seguida, na Seção 5.2, são apresentados os cristais magnônicos, juntamente com algumas de suas propriedades que têm atraído a atenção de vários pesquisadores. Seguindo a idéia dos quasi-cristais, é apresentado o espectro de ondas de spin para um **quasi-cristal magnônico** obtido segundo a sequência quasi-periódica de Fibonacci *golden mean* (GM). Por fim, na Seção 5.3 apresentamos os resultados obtidos em nosso estudo. Os cálculos numéricos foram feitos utilizando dados experimentais do cobalto (Co) e do Permalloy (Py)[100].

Podemos observar que há uma região de frequência, denominada **banda magnônica parcialmente proibida** (*partial magnonic band gap* ou *partial MBG*), onde há propagação de ondas de spin somente em algumas direções do vetor de onda, enquanto que em outras não há propagação. Pode ocorrer que haja intervalos de frequência, chamados **banda magnônica completamente proibida** (*complete magnonic band gaps* ou *complete MBG*), nos quais a excitação é proibida de propagar-se no material qualquer que seja a direção do vetor de onda.

Encontramos ainda que o *partial MBG* aparece numa região de frequência da ordem de terahertz (THz). Resultado este que esperamos despertar em grupos experimentais o interesse em investigar cristais magnônicos no regime de *exchange*, uma vez que os trabalhos já realizados utilizam a equação de Landau-Lifshitz (LL) para a magnetização, e as frequências correspondentes aos MBGs estão na ordem de gigahertz (GHz).

5.1 Cristais Fotônicos

Com a hipótese de de Broglie sobre a dualidade da matéria, desencadeando o desenvolvimento da Mecânica Quântica, muitos fenômenos puderam ser estudados e compreendidos teoricamente e experimentalmente. Por exemplo, o comportamento de elétrons em um cristal condutor só é plenamente entendido considerando que este propaga-se no material como onda e não como partícula. Como onda, estas partículas são espalhadas ou não pelos átomos da rede cristalina (defeitos e, ou, impurezas também podem influenciar o espalhamento). Pensando na rede cristalina como sendo um arranjo periódico de poços e barreiras de potenciais, esta pode *proibir* a propagação de ondas com determinadas energias e certos comprimentos de onda (certas direções). A esta região proibida na estrutura de bandas da energia dá-se o nome de **banda proibida** ou *gap*. Se este arranjo de poços e potenciais é muito forte, podemos ter um **banda completamente proibida** ou *complete band gap*, onde a onda é proibida de propagar-

se seja qual for a direção do vetor de onda. Em semicondutores, existe um *complete band gap* entre a banda de valência e a de condução (ver Figura 5.1).

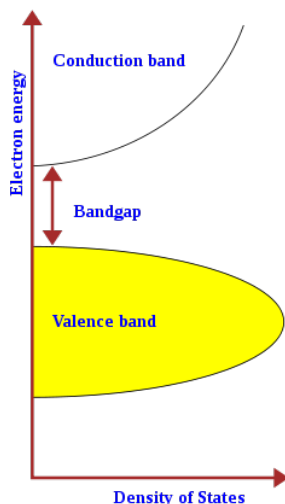


Figura 5.1 Estrutura de bandas de um semicondutor mostrando o *complete band gap*.

No caso dos semicondutores, a ênfase maior era dada às propriedades elétricas. Nas últimas décadas, porém, uma nova fronteira de pesquisa se abriu. Desta vez a ênfase são as propriedades ópticas dos materiais[101, 102]. Uma enorme gama de dispositivos têm sido desenvolvidos desde então, como os cabos de fibras ópticas, os computadores com processamento e transporte de informações cada vez mais velozes, a espectroscopia, e outros. Tais materiais que possibilitam essas novas tecnologias são conhecidos como **cristais fotônicos** ou *photonic crystals* (PCs), e são definidos como sendo o análogo *óptico* dos semicondutores[103]. Aqui, os átomos ou moléculas são substituídos por meios macroscópicos com diferentes constantes dielétricas, e o potencial periódico, por uma função dielétrica periódica ϵ^1 . Ao invés de elétrons, *photons* é que são os responsáveis pelo transporte das informações nestes materiais. Em PCs também pode-se encontrar uma **banda fotônica completamente proibida** (*complete photonic band gap* ou *complete PBG*), conforme é visto na Figura 5.2. Para um estudo mais aprofundado sobre PCs, seus potenciais tecnológicos, e, dentre muitos, alguns dos métodos utilizados para estudá-los, ver[103, 104].

5.2 Cristais Magnônicos

Uma vez que os PCs são materiais em que propriedades do campo elétrico são controladas, os físicos logo pensaram em materiais análogos aos PCs em que, ao invés do campo elétrico, o campo magnético pudesse ser controlado. Estes materiais são os **cristais magnônicos** ou *magnonic crystals* (MCs). Aqui, em vez de uma função dielétrica periódica, nós temos uma função permissividade μ periódica. Os portadores de informações em MCs são os *magnons*.

¹Ou, equivalentemente, um índice de refração periódico dado por $n = \sqrt{\epsilon}$ (fazendo $\mu = 1$).

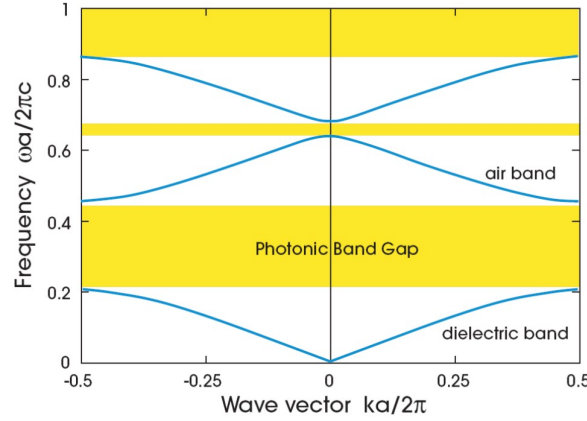


Figura 5.2 Estrutura de bandas de um cristal fotônico mostrando o *complete photonic band gap*. Fonte: Joannopoulos *et al.*[103].

Portanto, da mesma forma como ocorreu em relação às propriedades ópticas, as propriedades magnéticas vieram a despertar o interesse dos pesquisadores apenas recentemente. Logo, muitos grupos de pesquisa em todo o mundo têm sido atraídos a estudar as mais diversas propriedades dos materiais magnéticos.

A abordagem teórica utilizada na grande maioria dos trabalhos feitos sobre cristais magnônicos é baseada na equação de torque para a magnetização, comumente conhecida como equação de Landau-Lifshitz (LL) dada por (sem o termo de amortecimento)[105]

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \gamma \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_{ef}(\mathbf{r}, t), \quad (5.1)$$

onde a magnetização $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ é uma função do vetor posição $\mathbf{r}$ e do tempo t , e $\mathbf{H}_{ef}(\mathbf{r}, t)$ é o campo magnético efetivo definido, na maioria dos casos, como

$$\mathbf{H}_{ef}(\mathbf{r}, t) = H_0 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) + \frac{2}{\mu_0} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{A}}{M_S^2} \nabla \right) \mathbf{M}(\mathbf{r}, t), \quad (5.2)$$

e $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$ é o campo magnético dinâmico devido à interação dipolar e o último termo é devido à interação de troca. Portanto, o regime magnético em que as ondas de spin se propagam é o dipolo-exchange (Subseção 2.4.1). Nestas estruturas também foram encontradas as chamadas **bandas magnônicas completamente proibidas** (*complete magnonic band gaps* ou *complete MBGs*), mostrados na Figura 5.3.

Portanto, também tivemos interesse em investigar a propagação de *magnons* em cristais magnônicos, porém, no regime dominado pela interação de troca (regime de *exchange*). Neste regime, a constante de troca desempenha papel análogo ao da permissividade magnética. Portanto, todo o cálculo teórico desenvolvido nas Seções 2.4, onde obtivemos a relação de dispersão para as ondas de spin em um ferromagneto por meio do hamiltoniano de Heisenberg juntamente com a aproximação RPA, e 3.2, onde obtivemos a relação de dispersão para super-redes periódicas por meio do método da matriz transferência, pode e será utilizado neste capítulo para os cristais magnônicos. Outro detalhe também importante é que a periodicidade da

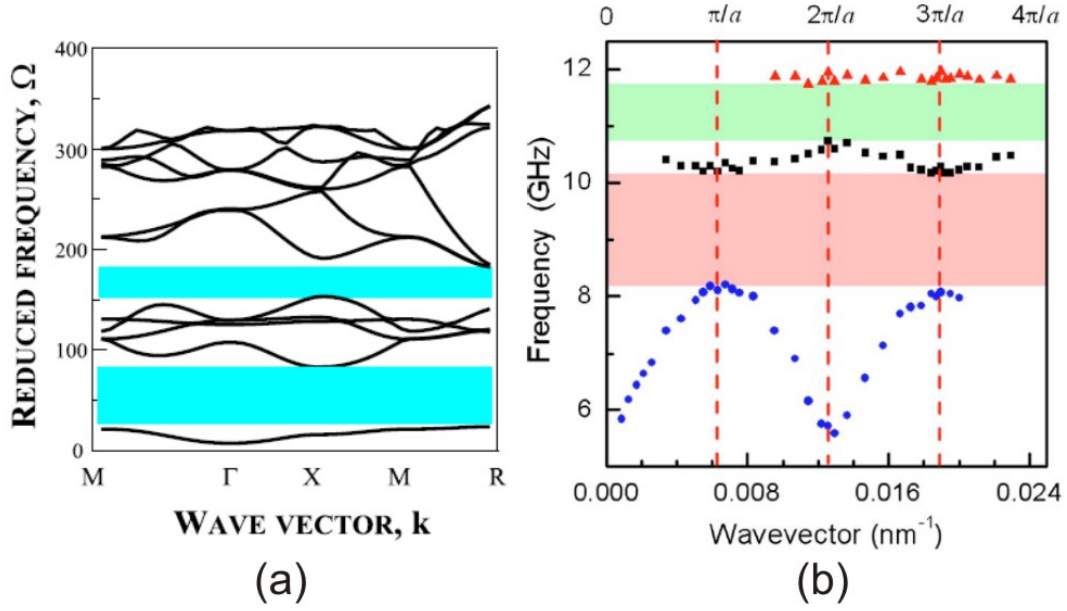


Figura 5.3 Estrutura de bandas de um cristal magnônico mostrando o *complete magnonic band gap*: (a) Fonte: Krawczyk *et al.*[106], (b) Fonte: Wang *et al.*[100].

super-rede ocorre apenas em uma direção (ao longo do eixo z , conforme Figura 3.1). Assim, as super-redes estudadas aqui podem ser consideradas como sendo cristais magnônicos unidimensionais. Dessa maneira, nosso estudo também pode ser estendido para investigar a propagação de *magnons* em um cristal magnônico arranjado espacialmente de maneira quasi-periódica, e a sequência quasi-periódica escolhida para este fim é a Fibonacci GM. Tal estrutura é então chamada **quasi-cristal magnônico** ou *magnonic quasicrystal* (MQC).

Nossa ênfase aqui é, portanto, estender o estudo das super-redes ferromagnéticas que foi apresentado no plano $\Omega - k_x a$ (ou seja, o vetor de onda varia apenas em uma direção), olhando as estruturas de bandas para outras direções do vetor de onda. Esta maneira de apresentar o espectro de energia para ondas de spin em materiais magnéticos fornece mais informação que a forma em que foram apresentados nos Capítulos 3 e 4, pois, aqui, vemos como se dá a propagação de *magnons* em várias direções do vetor de onda. As direções dos vetores de onda que serão percorridos são mostradas na Figura 5.4, a qual é a representação esquemática da primeira zona de Brillouin. A direção $\Gamma \rightarrow X$ corresponde a variar o vetor de onda apenas na direção x partindo do ponto $(0,0,0)$ em direção ao ponto $(\pi/a, 0, 0)$, enquanto que na direção $X \rightarrow M$ o vetor de onda varia somente na direção y partindo do ponto $(\pi/a, 0, 0)$ em direção ao ponto $(\pi/a, \pi/a, 0)$. Já na direção $M \rightarrow R$ varia-se o vetor de onda na direção z , partindo do ponto $(\pi/a, \pi/a, 0)$ ao ponto $(\pi/a, \pi/a, \pi/a)$. Finalmente, no caminho $R \rightarrow \Gamma$ o vetor de onda varia nas direções x , y e z , simultaneamente, saindo do ponto $(\pi/a, \pi/a, \pi/a)$ e retornando ao ponto $(0,0,0)$. A seguir, apresentamos os nossos resultados obtidos para ondas de spin propagando-se em cristais e quasi-cristais magnônicos unidimensionais.

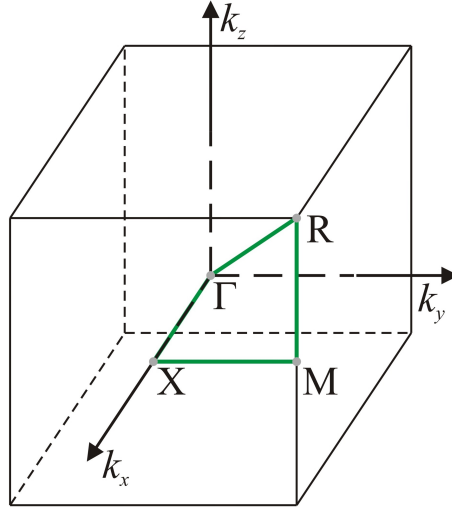


Figura 5.4 Esquema da zona de Brillouin reduzida mostrando correspondente à estrutura considerada e os caminhos ao longo dos quais as estruturas de bandas são calculadas.

5.3 Resultados Numéricos e Conclusões

Nesta seção nós apresentamos alguns resultados numéricos para os cálculos das estruturas de bandas em MCs e MQCs através da dependência da frequência ω com o vetor de onda adimensional ka , sendo k o vetor de onda ($k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$) e a o parâmetro de rede. Aqui, os materiais A e B são ajustados com base nos dados experimentais dos compostos cobalto (Co) e Permalloy² (Py)[100], respectivamente. O número de camadas em cada material é $n_{Co} = n_{Py} = 4$. Os demais parâmetros usados são $A_{Co} = 2.88 \times 10^{-11}$ J/m para o cobalto, e $A_{Py} = 1.11 \times 10^{-11}$ J/m para o Permalloy, onde A é a constante de troca, J, por unidade de comprimento. Em seu trabalho, Wang *et al.* reportaram a observação experimental de *band gaps* em um MC nano-estruturado composto de dois materiais magnéticos diferentes. A amostra, na forma de um arranjo periódico unidimensional consistindo de nano-tiras de cobalto e de Permalloy alternadas, foi fabricada usando técnicas litográficas avançadas. As relações de dispersão de ondas de spin nesta amostra foi mapeada por espectroscopia de Brillouin. Eles fabricaram um cristal com um período D igual a 500 nm (sendo 250 nm para Co e 250 nm para o Py) e tiras medindo 250 nm de largura.

A fim de obter as constantes de troca em cada material, nós usamos a expressão[107] $A = NJS^2/a$, onde N é o número de átomos nos lados da célula unitária. Em nosso caso, temos 4 camadas, e, portanto, $N = 16$. Também temos considerado as médias dos spins como sendo $S_A = 5/2$ e $S_B = 3/2$ para Co e Py, respectivamente. Como não temos o valor experimental para a constante de troca na interface Co/Py, parecia-nos razoável defini-la como sendo uma média simples entre as constantes de troca nos meios Co e Py, isto é, $I = (J_{Co} + J_{Py})/2$.

²Permalloy é o termo usado para referir-se a uma liga magnética formada por ferro (Fe) e níquel (Ni) (geralmente composta por 20% de Fe e 80% de Ni).

Como último parâmetro a ser considerado, o campo magnético estático aplicado ao sistema vale $H_0 = 0.2$ T, e aponta na direção z .

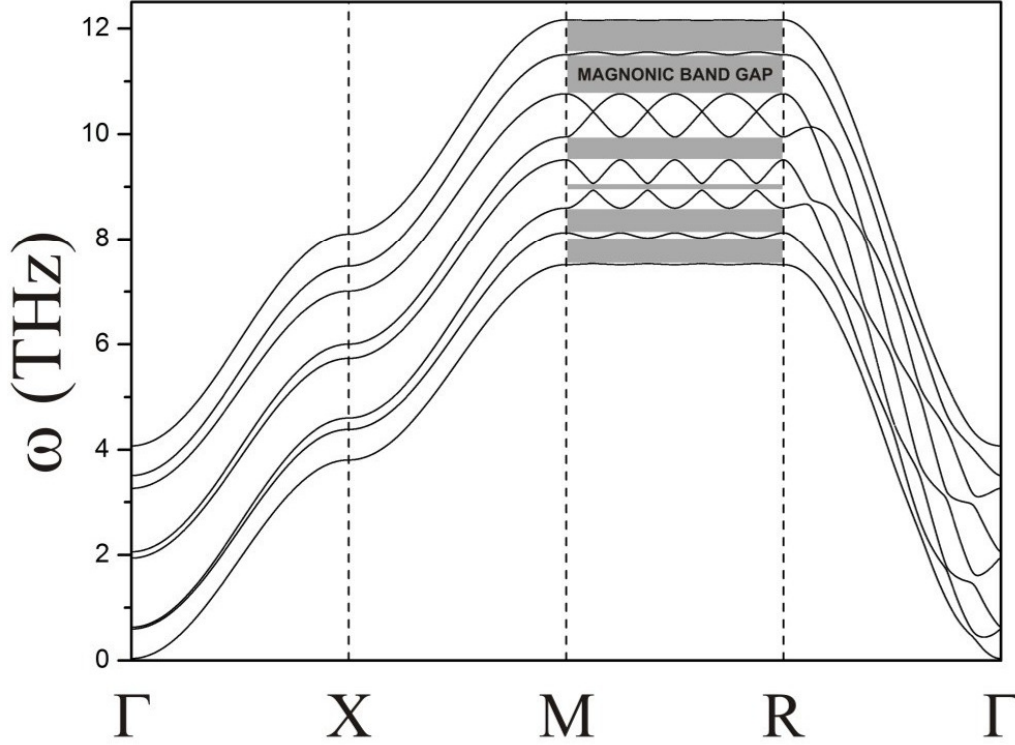


Figura 5.5 Estrutura de bandas de um MC, considerando a zona de Brillouin reduzida, apresentada na Figura 5.4. A área sombreada representa o *partial magnonic band gap*. Note que a largura dos MBGs são independentes do vetor de onda na direção $M \rightarrow R$ (direção z no espaço real).

Nas Figuras 5.5 e 5.6, apresentamos a estrutura de banda magnônica segundo o ponto de vista da zona de Brillouin reduzida para uma super-rede *periódica* e *quasi-periódica*, respectivamente. Esta última trata-se da *terceira* geração da sequência de Fibonacci GM, cuja célula unitária é $[A|B|A]$. Dessa maneira, o caso periódico corresponde à *segunda* geração desta sequência quasi-periódica.

Observamos, inicialmente, que as frequências permitidas (e, conseqüentemente, os *magnonic band gaps*) estão na região do terahertz (THz). Chamamos a atenção de que na maioria dos trabalhos sobre MCs, as frequências permitidas e os MBGs estão na região de gigahertz (GHz) apenas [108, 109, 100]. A explicação para isto é o fato de estudarmos os MCs no regime em que a energia é dominada pela interação de troca e, portanto, é uma teoria que leva em conta interações microscópicas. Nós esperamos que isto seja uma motivação para que grupos experimentais estudem MCs no regime de *exchange*. Notamos ainda a existência regiões proibidas entre as bandas de volume, onde podemos ter a propagação de modos de superfície, que não foram considerados em nosso estudo.

Para a construção das Figuras 5.5 e 5.6 nós consideramos que os modos de propagação permitidos satisfazem à Equação (3.39) para vários caminhos da rede recíproca (ou espaço k): $\Gamma(0,0,0) \rightarrow X(\pi,0,0)$, $X(\pi,0,0) \rightarrow M(\pi,\pi,0)$, $M(\pi,\pi,0) \rightarrow R(\pi,\pi,\pi)$, e, finalmente,

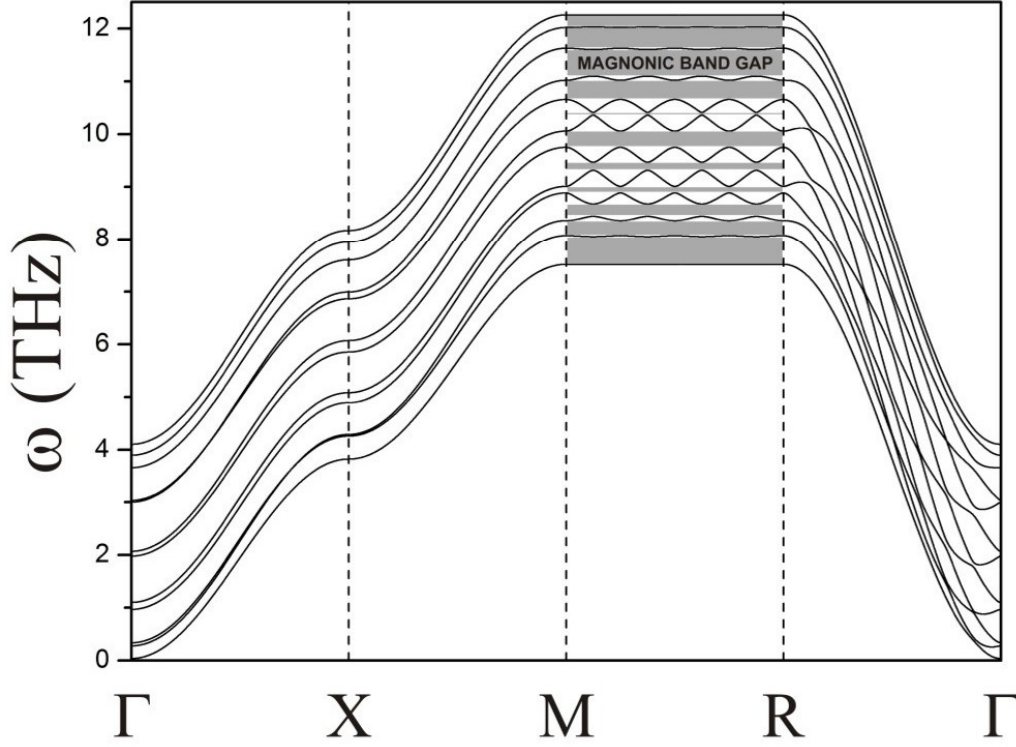


Figura 5.6 Mesmo que na Figura 5.5, porém para a terceira geração da sequência de Fibonacci GM. Aqui os MBGs são mais estreitos que no caso periódico, e o número de modos permitidos é $4 \times F_3 = 12$.

$R(\pi, \pi, \pi) \rightarrow \Gamma(0, 0, 0)$, onde neste último, $k_x = k_y = k_z$, e, em todos eles, $k_z = Q$ (Q é o vetor de onda de Bloch). Nestas estruturas, não observamos os *complete magnonic band gaps*, todavia, no caminho $M \rightarrow R$, que corresponde à direção z no espaço real, elas apresentam o que chamamos *partial magnonic band gaps* (*partial MBGs*), em contraste com os *complete MBGs*. Note que, para esta direção do vetor de onda, as larguras dos MBGs são independentes do vetor de onda.

Toda esta riqueza de informações sobre a propagação de *magnons* em super-redes magnéticas estava oculta devido à forma como os espectros eram analisados. Porém, ao passar a investigar essas excitações do ponto de vista da zona de Brillouin reduzida, o que já era feito há muito em semicondutores e cristais fotônicos, tais informações puderam ser reveladas.

Temos ainda que o espectro na Figura 5.6 apresenta *band gaps* mais estreitos em comparação com a Figura 5.5. Portanto, chamamos a atenção para este fenômeno de localização que está relacionado com o estreitamento dos *bulk bands*. Este estreitamento das bandas é devido ao crescimento da célula unitária, e tal comportamento é também observado em diversos sistemas quasi-periódicos, como afirmado vimos nas Seções 3.2 e 4.3. Note que o número de modos está relacionado com o número de camadas em cada material ($n_{Co} = n_{Py} = 4$), e aumenta com a relação $4 \times F_n$, onde F_n é o número de Fibonacci para a sua n -ésima geração. Já o número de *gaps* é $(4 - 1) \times F_n$.

Conclusões Gerais e Perspectivas

Nesta dissertação de mestrado investigamos a propagação de ondas de spin em super-redes magnéticas quasi-periódicas, e também em cristais e quasi-cristais magnônicos usando o método da matriz transferência. No caso das super-redes periódicas, obtivemos a relação de dispersão para ondas de spin que se propagam nestas estruturas mostrando que esta relação depende da matriz transferência da estrutura. E é isso que nos permitiu estender nosso modelo teórico para o caso das super-redes quasi-periódicas.

Logo, no Capítulo 4, estudamos as super-redes quasi-periódicas de Fibonacci generalizada, onde estudamos as sequências de Fibonacci *golden mean* (GM), *silver mean* (SM), *bronze mean* (BM) e *nickel mean* (NM). A propagação de *magnons* nestas estruturas foi analisada através do espectro da frequência reduzida Ω versus o vetor de onda adimensional no plano $k_x a$. Em todos os casos observamos a presença das bandas permitidas e proibidas. Vimos também que o número de bandas está relacionado com o número de Fibonacci F_n para cada sequência e é determinado por

$$n^{\text{º}} \text{ de bandas de volume} = n \times F_n,$$

para $n_A = n_B = n$.

Outro detalhe importante destes espectros é que, em todas as sequências consideradas, a largura das bandas de volume vão tornando-se cada vez mais estreitas à medida que o número n das gerações aumenta e revelam indícios qualitativos de um comportamento auto-similar. Para altas gerações ($n \rightarrow \infty$), estes espectros são semelhantes a um conjunto de Cantor. Diante desta observação, fizemos um estudo quantitativo do comportamento dos espectros observando a dependência de Ω com o número da geração n , para um valor fixo de $k_x a$ (aqui fizemos $k_x a = 0.5$). Nos casos das sequências de Fibonacci GM, SM e BM encontramos, de fato, várias regiões de seus espectros que são auto-similares para várias escalas. Isto leva-nos a pensar que tais espectros sejam realmente fractais. Porém, para o caso Fibonacci NM, tal comportamento não foi observado, o que impossibilita obter um comportamento fractal para esta sequência. Para confirmar então a fractalidade dos espectros que apresentaram auto-similaridade, propomos uma lei de escala do tipo $\Delta \sim F_n^{-\delta(k_x a)}$, onde Δ é a soma de todas as bandas permitidas, F_n é o número de Fibonacci para a sua n -ésima geração, e δ é o expoente da lei de escala. Como esperado, as sequências de Fibonacci GM, SM e BM possuem um espectro fractal, pois a lei de escala proposta é obedecida.

Um resultado também interessante que pudemos observar é com relação ao comportamento de δ com $k_x a$. Este comportamento pode prontamente indentificar a sequência quasi-periódica em questão, como também pode ser interpretado como uma medida da localização da excitação. Aqui pudemos observar um crescimento monotônico de δ para $k_x a$ variando de 0 a 1.75, que corresponde à metade da primeira zona de Brillouin. Um comportamento semelhante

foi obtido por Anselmo *et al.*[110], onde eles estudaram *magnons* no regime magnetostático em multicamadas quasi-periódicas de Fibonacci, de Thue-Morse e de double-period, e encontraram que a dependência de δ com o vetor de onda é linear, neste mesmo intervalo de $k_x a$. Isso pode levar-nos a concluir que a relação entre essas duas grandezas é influenciada e determinada pela sequência quasi-periódica considerada, e não pelo tipo de excitação ou o regime em que esta está sendo estudada.

No Capítulo 5, apresentamos uma nova maneira para investigar a propagação de *magnons* em cristais e em quasi-cristais magnônicos no regime de *exchange*. Aplicamos o mesmo modelo desenvolvido para as super-redes utilizando dados experimentais do cobalto (Co) e do Permalloy (Py). Para os MCs, mostramos a típica estrutura de banda magnônica da maneira que é feita em semicondutores e cristais fotônicos, e observamos os *magnonic band gaps* apenas na direção $M \rightarrow R$, e tal região é assim chamada *partial magnonic band gap*. Para os MQCs, nós temos encontrado um estreitamento destes MBGs. Vimos ainda que podemos obter mais informações sobre a propagação de *magnons* em super-redes magnéticas analisando o seu espectro variando o vetor de onda ao longo de toda a primeira zona de Brillouin. A fractalidade do espectro ainda é observada na direção $M \rightarrow R$. Uma observação também importante é que as regiões do espectro em que os MBGs aparecem correspondem a uma frequência na ordem do terahertz (THz)!

Recentes desenvolvimentos em técnicas experimentais aplicáveis a sistemas magnéticos permitem aos experimentais considerar e investigar a possibilidade de *magnons* serem utilizados para transmitir ou processar informações. Nós esperamos que este trabalho possa inspirar experimentais a aprofundarem as pesquisas nesta área.

Algumas extensões deste trabalho podem ser feitas e consideradas como perspectivas, como, por exemplo:

- Incluir os termos de interação biquadrática e de anisotropia no hamiltoniano e investigar sua influência no espectro das ondas de spin;
- Estudar a propagação das excitações magnéticas em outros regimes, como o dipolo-exchange, o magnetostático e o de *polariton*;
- Investigar outras propriedades físicas, como a magnetização, a magnetoresistência, o calor específico, a transmitância, etc;
- Fazer uma análise multifractal dos espectros das ondas de spin nas super-redes quasi-periódicas de Fibonacci generalizada;
- Estender o método para estudar cristais magnônicos bi- e tridimensionais;
- Estudar super-redes formadas por antiferromagnetos, ferrimagnetos, metamateriais e até mistura destes com os não-magnéticos.

Seqüência Quasiperiódica de Fibonacci Generalizada $\sigma(p, q)$

$$S_0 = B; \quad S_1 = A; \quad S_2 = \underbrace{(AAA \cdots AA)}_{p \text{ vezes}} \underbrace{(BBB \cdots BB)}_{q \text{ vezes}} = A^p B^q; \quad \dots$$

$$S_n = S_{n-1}^p S_{n-2}^q, \quad (\text{A.1})$$

onde $n \geq 2$, p e q são iguais a 1, 2, 3, ...

A.1 Fibonacci Golden Mean (GM) $\sigma(1, 1) = \sigma_g (B \rightarrow A \text{ e } A \rightarrow AB)$

$$S_0 = B; \quad S_1 = A; \quad S_2 = AB; \quad S_3 = ABA; \quad S_4 = ABAAB; \quad \dots$$

$$S_n = S_{n-1} S_{n-2}, \quad (\text{A.2})$$

onde $n \geq 2$.

– 1 Geração: $S_1 = A$

$$M_{AA} |A_l^1\rangle = N_{AA} |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^1\rangle$$

$$|A_{l+1}^1\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^1\rangle$$

$$T_{S_1} = N_{AA}^{-1} M_{AA}$$

– 2 Geração: $S_2 = AB$

$$M_A |A_l^1\rangle = N_B |B_l^2\rangle \Rightarrow |B_l^2\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^1\rangle$$

$$M_B |B_l^2\rangle = N_A |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^2\rangle$$

$$|A_{l+1}^1\rangle = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A |A_l^1\rangle$$

$$T_{S_2} = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A$$

– 3 Geração: $S_3 = ABA$

$$\begin{aligned}
 M_A |A_l^1\rangle &= N_B |B_l^2\rangle \Rightarrow |B_l^2\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^1\rangle \\
 M_B |B_l^2\rangle &= N_A |A_l^3\rangle \Rightarrow |A_l^3\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^2\rangle \\
 M_{AA} |A_l^3\rangle &= N_{AA} |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^3\rangle \\
 |A_{l+1}^1\rangle &= N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A |A_l^1\rangle \\
 T_{S_3} &= N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A \\
 \boxed{T_{S_3} = T_{S_1} T_{S_2}}
 \end{aligned}$$

– 4 Geração: $S_4 = ABAAB$

$$\begin{aligned}
 M_A |A_l^1\rangle &= N_B |B_l^2\rangle \Rightarrow |B_l^2\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^1\rangle \\
 M_B |B_l^2\rangle &= N_A |A_l^3\rangle \Rightarrow |A_l^3\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^2\rangle \\
 M_{AA} |A_l^3\rangle &= N_{AA} |A_l^4\rangle \Rightarrow |A_l^4\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^3\rangle \\
 M_A |A_l^4\rangle &= N_B |B_l^5\rangle \Rightarrow |B_l^5\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^4\rangle \\
 M_B |B_l^5\rangle &= N_A |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^5\rangle \\
 |A_{l+1}^1\rangle &= N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A |A_l^1\rangle \\
 T_{S_4} &= N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A \\
 \boxed{T_{S_4} = T_{S_2} T_{S_3}}
 \end{aligned}$$

– N-ésima Geração: $S_n = S_{n-1} S_{n-2}$

$$\boxed{T_{S_n} = T_{S_{n-2}} T_{S_{n-1}}},$$

com $n \geq 3$.

A.2 Fibonacci Silver Mean (SM) $\sigma(2, 1) = \sigma_s (B \rightarrow A \text{ e } A \rightarrow AAB)$

$$S_0 = B; \quad S_1 = A; \quad S_2 = AAB; \quad S_3 = AABAABA; \quad S_4 = AABAABAAABAABAAAB; \quad \dots$$

$$S_n = S_{n-1}S_{n-1}S_{n-2} = (S_{n-1})^2 S_{n-2}, \quad (\text{A.3})$$

onde $n \geq 2$.

– 1 Geração: $S_1 = A$

$$T_{S_1} = N_{AA}^{-1} M_{AA}$$

– 2 Geração: $S_2 = AAB$

$$M_{AA} |A_l^1\rangle = N_{AA} |A_l^2\rangle \Rightarrow |A_l^2\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^1\rangle$$

$$M_A |A_l^2\rangle = N_B |B_l^3\rangle \Rightarrow |B_l^3\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^2\rangle$$

$$M_B |B_l^3\rangle = N_A |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^3\rangle$$

$$|A_{l+1}^1\rangle = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^1\rangle$$

$$T_{S_2} = N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA}$$

– 3 Geração: $S_3 = AABAABA$

$$M_{AA} |A_l^1\rangle = N_{AA} |A_l^2\rangle \Rightarrow |A_l^2\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^1\rangle$$

$$M_A |A_l^2\rangle = N_B |B_l^3\rangle \Rightarrow |B_l^3\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^2\rangle$$

$$M_B |B_l^3\rangle = N_A |A_l^4\rangle \Rightarrow |A_l^4\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^3\rangle$$

$$M_{AA} |A_l^4\rangle = N_{AA} |A_l^5\rangle \Rightarrow |A_l^5\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^4\rangle$$

$$M_A |A_l^5\rangle = N_B |B_l^6\rangle \Rightarrow |B_l^6\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^5\rangle$$

$$M_B |B_l^6\rangle = N_A |A_l^7\rangle \Rightarrow |A_l^7\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^6\rangle$$

$$M_{AA} |A_l^7\rangle = N_{AA} |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^7\rangle$$

$$|A_{l+1}^1\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^1\rangle$$

$$T_{S_3} = N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA}$$

$$T_{S_3} = T_{S_1} T_{S_2} T_{S_2} = T_{S_1} (T_{S_2})^2$$

– 4 Geração: $S_4 = AABAABAAABAABAAAB$

$$\begin{aligned}
M_{AA} |A_l^1\rangle &= N_{AA} |A_l^2\rangle \Rightarrow |A_l^2\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^1\rangle \\
M_A |A_l^2\rangle &= N_B |B_l^3\rangle \Rightarrow |B_l^3\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^2\rangle \\
M_B |B_l^3\rangle &= N_A |A_l^4\rangle \Rightarrow |A_l^4\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^3\rangle \\
M_{AA} |A_l^4\rangle &= N_{AA} |A_l^5\rangle \Rightarrow |A_l^5\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^4\rangle \\
M_A |A_l^5\rangle &= N_B |B_l^6\rangle \Rightarrow |B_l^6\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^5\rangle \\
M_B |B_l^6\rangle &= N_A |A_l^7\rangle \Rightarrow |A_l^7\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^6\rangle \\
M_{AA} |A_l^7\rangle &= N_{AA} |A_l^8\rangle \Rightarrow |A_l^8\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^7\rangle \\
M_{AA} |A_l^8\rangle &= N_{AA} |A_l^9\rangle \Rightarrow |A_l^9\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^8\rangle \\
M_A |A_l^9\rangle &= N_B |B_l^{10}\rangle \Rightarrow |B_l^{10}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^9\rangle \\
M_B |B_l^{10}\rangle &= N_A |A_l^{11}\rangle \Rightarrow |A_l^{11}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{10}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{11}\rangle &= N_{AA} |A_l^{12}\rangle \Rightarrow |A_l^{12}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{11}\rangle \\
M_A |A_l^{12}\rangle &= N_B |B_l^{13}\rangle \Rightarrow |B_l^{13}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{12}\rangle \\
M_B |B_l^{13}\rangle &= N_A |A_l^{14}\rangle \Rightarrow |A_l^{14}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{13}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{14}\rangle &= N_{AA} |A_l^{15}\rangle \Rightarrow |A_l^{15}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{14}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{15}\rangle &= N_{AA} |A_l^{16}\rangle \Rightarrow |A_l^{16}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{15}\rangle \\
M_A |A_l^{16}\rangle &= N_B |B_l^{17}\rangle \Rightarrow |B_l^{17}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{16}\rangle \\
M_B |B_l^{17}\rangle &= N_A |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{17}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{l+1}^1\rangle &= N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^1\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{S_4} &= N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA}
\end{aligned}$$

$$\boxed{T_{S_4} = T_{S_2} T_{S_3} T_{S_3} = T_{S_2} (T_{S_3})^2}$$

– N-ésima Geração: $S_n = S_{n-1}S_{n-1}S_{n-2} = (S_{n-1})^2S_{n-2}$

$$T_{S_n} = T_{S_{n-2}}T_{S_{n-1}}T_{S_{n-1}} = T_{S_{n-2}}(T_{S_{n-1}})^2,$$

com $n \geq 3$.

A.3 Fibonacci Bronze Mean (BM) $\sigma(3,1) = \sigma_b(B \rightarrow A \text{ e } A \rightarrow AAAB)$

$$S_0 = B; \quad S_1 = A; \quad S_2 = AAAB; \quad S_3 = AAABAAABAAABA;$$

$$S_4 = AAABAAABAAABAAABAAABAAABA \\ AAABAAABAAABAAAB; \quad \dots$$

$$S_n = S_{n-1}S_{n-1}S_{n-2} = (S_{n-1})^3S_{n-2}, \quad (\text{A.4})$$

onde $n \geq 2$.

– 1 Geração: $S_1 = A$

$$T_{S_1} = N_{AA}^{-1}M_{AA}$$

– 2 Geração: $S_2 = AAAB$

$$M_{AA} |A_l^1\rangle = N_{AA} |A_l^2\rangle \Rightarrow |A_l^2\rangle = N_{AA}^{-1}M_{AA} |A_l^1\rangle$$

$$M_{AA} |A_l^2\rangle = N_{AA} |A_l^3\rangle \Rightarrow |A_l^3\rangle = N_{AA}^{-1}M_{AA} |A_l^2\rangle$$

$$M_A |A_l^3\rangle = N_B |B_l^4\rangle \Rightarrow |B_l^4\rangle = N_B^{-1}M_A |A_l^3\rangle$$

$$M_B |B_l^4\rangle = N_A |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_A^{-1}M_B |B_l^4\rangle$$

$$|A_{l+1}^1\rangle = N_A^{-1}M_B N_B^{-1}M_A N_{AA}^{-1}M_{AA} N_{AA}^{-1}M_{AA} |A_l^1\rangle$$

$$T_{S_2} = N_A^{-1}M_B N_B^{-1}M_A N_{AA}^{-1}M_{AA} N_{AA}^{-1}M_{AA}$$

– 3 Geração: $S_3 = AAABAAABAAABA$

$$M_{AA} |A_l^1\rangle = N_{AA} |A_l^2\rangle \Rightarrow |A_l^2\rangle = N_{AA}^{-1}M_{AA} |A_l^1\rangle$$

$$M_{AA} |A_l^2\rangle = N_{AA} |A_l^3\rangle \Rightarrow |A_l^3\rangle = N_{AA}^{-1}M_{AA} |A_l^2\rangle$$

$$M_A |A_l^3\rangle = N_B |B_l^4\rangle \Rightarrow |B_l^4\rangle = N_B^{-1}M_A |A_l^3\rangle$$

$$M_B |B_l^4\rangle = N_A |A_l^5\rangle \Rightarrow |A_l^5\rangle = N_A^{-1}M_B |B_l^4\rangle$$

$$\begin{aligned}
M_{AA} |A_l^5\rangle &= N_{AA} |A_l^6\rangle \Rightarrow |A_l^6\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^5\rangle \\
M_{AA} |A_l^6\rangle &= N_{AA} |A_l^7\rangle \Rightarrow |A_l^7\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^6\rangle \\
M_A |A_l^7\rangle &= N_B |B_l^8\rangle \Rightarrow |B_l^8\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^7\rangle \\
M_B |B_l^8\rangle &= N_A |A_l^9\rangle \Rightarrow |A_l^9\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^8\rangle \\
M_{AA} |A_l^9\rangle &= N_{AA} |A_l^{10}\rangle \Rightarrow |A_l^{10}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^9\rangle \\
M_{AA} |A_l^{10}\rangle &= N_{AA} |A_l^{11}\rangle \Rightarrow |A_l^{11}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{10}\rangle \\
M_A |A_l^{11}\rangle &= N_B |B_l^{12}\rangle \Rightarrow |B_l^{12}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{11}\rangle \\
M_B |B_l^{12}\rangle &= N_A |A_l^{13}\rangle \Rightarrow |A_l^{13}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{12}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{13}\rangle &= N_{AA} |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{13}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{l+1}^1\rangle &= N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^1\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{S_3} &= N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA}
\end{aligned}$$

$$T_{S_3} = T_{S_1} T_{S_2} T_{S_2} T_{S_2} = T_{S_1} (T_{S_2})^3$$

– 4 Geração:

$$\begin{aligned}
S_4 &= AAABAAABAAABAAAABAAABAAABA \\
&\quad AAABAAABAAABAAAAB;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{AA} |A_l^1\rangle &= N_{AA} |A_l^2\rangle \Rightarrow |A_l^2\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^1\rangle \\
M_{AA} |A_l^2\rangle &= N_{AA} |A_l^3\rangle \Rightarrow |A_l^3\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^2\rangle \\
M_A |A_l^3\rangle &= N_B |B_l^4\rangle \Rightarrow |B_l^4\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^3\rangle \\
M_B |B_l^4\rangle &= N_A |A_l^5\rangle \Rightarrow |A_l^5\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^4\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{AA} |A_l^5\rangle &= N_{AA} |A_l^6\rangle \Rightarrow |A_l^6\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^5\rangle \\
M_{AA} |A_l^6\rangle &= N_{AA} |A_l^7\rangle \Rightarrow |A_l^7\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^6\rangle \\
M_A |A_l^7\rangle &= N_B |B_l^8\rangle \Rightarrow |B_l^8\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^7\rangle \\
M_B |B_l^8\rangle &= N_A |A_l^9\rangle \Rightarrow |A_l^9\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^8\rangle \\
M_{AA} |A_l^9\rangle &= N_{AA} |A_l^{10}\rangle \Rightarrow |A_l^{10}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^9\rangle \\
M_{AA} |A_l^{10}\rangle &= N_{AA} |A_l^{11}\rangle \Rightarrow |A_l^{11}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{10}\rangle \\
M_A |A_l^{11}\rangle &= N_B |B_l^{12}\rangle \Rightarrow |B_l^{12}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{11}\rangle \\
M_B |B_l^{12}\rangle &= N_A |A_l^{13}\rangle \Rightarrow |A_l^{13}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{12}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{13}\rangle &= N_{AA} |A_l^{14}\rangle \Rightarrow |A_l^{14}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{13}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{14}\rangle &= N_{AA} |A_l^{15}\rangle \Rightarrow |A_l^{15}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{14}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{15}\rangle &= N_{AA} |A_l^{16}\rangle \Rightarrow |A_l^{16}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{15}\rangle \\
M_A |A_l^{16}\rangle &= N_B |B_l^{17}\rangle \Rightarrow |B_l^{17}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{16}\rangle \\
M_B |B_l^{17}\rangle &= N_A |A_l^{18}\rangle \Rightarrow |A_l^{18}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{17}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{18}\rangle &= N_{AA} |A_l^{19}\rangle \Rightarrow |A_l^{19}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{18}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{19}\rangle &= N_{AA} |A_l^{20}\rangle \Rightarrow |A_l^{20}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{19}\rangle \\
M_A |A_l^{20}\rangle &= N_B |B_l^{21}\rangle \Rightarrow |B_l^{21}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{20}\rangle \\
M_B |B_l^{21}\rangle &= N_A |A_l^{22}\rangle \Rightarrow |A_l^{22}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{21}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{22}\rangle &= N_{AA} |A_l^{23}\rangle \Rightarrow |A_l^{23}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{22}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{23}\rangle &= N_{AA} |A_l^{24}\rangle \Rightarrow |A_l^{24}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{23}\rangle \\
M_A |A_l^{24}\rangle &= N_B |B_l^{25}\rangle \Rightarrow |B_l^{25}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{24}\rangle \\
M_B |B_l^{25}\rangle &= N_A |A_l^{26}\rangle \Rightarrow |A_l^{26}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{25}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{26}\rangle &= N_{AA} |A_l^{27}\rangle \Rightarrow |A_l^{27}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{26}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{27}\rangle &= N_{AA} |A_l^{28}\rangle \Rightarrow |A_l^{28}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{27}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{28}\rangle &= N_{AA} |A_l^{29}\rangle \Rightarrow |A_l^{29}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{28}\rangle \\
M_A |A_l^{29}\rangle &= N_B |B_l^{30}\rangle \Rightarrow |B_l^{30}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{29}\rangle \\
M_B |B_l^{30}\rangle &= N_A |A_l^{31}\rangle \Rightarrow |A_l^{31}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{30}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{AA} |A_l^{31}\rangle &= N_{AA} |A_l^{32}\rangle \Rightarrow |A_l^{32}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{31}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{32}\rangle &= N_{AA} |A_l^{33}\rangle \Rightarrow |A_l^{33}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{32}\rangle \\
M_A |A_l^{33}\rangle &= N_B |B_l^{34}\rangle \Rightarrow |B_l^{34}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{33}\rangle \\
M_B |B_l^{34}\rangle &= N_A |A_l^{35}\rangle \Rightarrow |A_l^{35}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{34}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{35}\rangle &= N_{AA} |A_l^{36}\rangle \Rightarrow |A_l^{36}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{35}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{36}\rangle &= N_{AA} |A_l^{37}\rangle \Rightarrow |A_l^{37}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{36}\rangle \\
M_A |A_l^{37}\rangle &= N_B |B_l^{38}\rangle \Rightarrow |B_l^{38}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{37}\rangle \\
M_B |B_l^{38}\rangle &= N_A |A_l^{39}\rangle \Rightarrow |A_l^{39}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{38}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{39}\rangle &= N_{AA} |A_l^{40}\rangle \Rightarrow |A_l^{40}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{39}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{40}\rangle &= N_{AA} |A_l^{41}\rangle \Rightarrow |A_l^{41}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{40}\rangle \\
M_{AA} |A_l^{41}\rangle &= N_{AA} |A_l^{42}\rangle \Rightarrow |A_l^{42}\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^{41}\rangle \\
M_A |A_l^{42}\rangle &= N_B |B_l^{43}\rangle \Rightarrow |B_l^{43}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{42}\rangle \\
M_B |B_l^{43}\rangle &= N_A |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{43}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{l+1}^1\rangle &= N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^1\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{S_4} = & N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
& N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA}
\end{aligned}$$

$$T_{S_4} = T_{S_2} T_{S_3} T_{S_3} T_{S_3} = T_{S_2} (T_{S_3})^3$$

– N-ésima Geração: $S_n = S_{n-1} S_{n-1} S_{n-1} S_{n-2} = (S_{n-1})^3 S_{n-2}$

$$T_{S_n} = T_{S_{n-2}} T_{S_{n-1}} T_{S_{n-1}} T_{S_{n-1}} = T_{S_{n-2}} (T_{S_{n-1}})^3,$$

com $n \geq 3$.

A.4 Fibonacci Nickel Mean (NM) $\sigma(1,3) = \sigma_n(B \rightarrow A \text{ e } A \rightarrow AB BB)$

$S_0 = B$; $S_1 = A$; $S_2 = AB BB$; $S_3 = AB BB AAA$; $S_4 = AB BB AAA AB BB AB BB AB BB$; ...

$$S_n = S_{n-1} S_{n-2} S_{n-2} S_{n-2} = S_{n-1} (S_{n-2})^3, \quad (\text{A.5})$$

onde $n \geq 2$.

– 1 Geração: $S_1 = A$

$$T_{S_1} = N_{AA}^{-1} M_{AA}$$

– 2 Geração: $S_2 = AB BB$

$$\begin{aligned}
M_A |A_l^1\rangle &= N_B |B_l^2\rangle \Rightarrow |B_l^2\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^1\rangle \\
M_{BB} |B_l^2\rangle &= N_{BB} |B_l^3\rangle \Rightarrow |B_l^3\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^2\rangle \\
M_{BB} |B_l^3\rangle &= N_{BB} |B_l^4\rangle \Rightarrow |B_l^4\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^3\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_B |B_l^4\rangle &= N_A |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^4\rangle \\
|A_{l+1}^1\rangle &= N_A^{-1} M_B N_{BB}^{-1} M_{BB} N_{BB}^{-1} M_{BB} N_B^{-1} M_A |A_l^1\rangle \\
\boxed{T_{S_2} &= N_A^{-1} M_B N_{BB}^{-1} M_{BB} N_{BB}^{-1} M_{BB} N_B^{-1} M_A}.
\end{aligned}$$

– 3 Geração: $S_3 = ABBBAAA$

$$\begin{aligned}
M_A |A_l^1\rangle &= N_B |B_l^2\rangle \Rightarrow |B_l^2\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^1\rangle \\
M_{BB} |B_l^2\rangle &= N_{BB} |B_l^3\rangle \Rightarrow |B_l^3\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^2\rangle \\
M_{BB} |B_l^3\rangle &= N_{BB} |B_l^4\rangle \Rightarrow |B_l^4\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^3\rangle \\
M_B |B_l^4\rangle &= N_A |A_l^5\rangle \Rightarrow |A_l^5\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^4\rangle \\
M_{AA} |A_l^5\rangle &= N_{AA} |A_l^6\rangle \Rightarrow |A_l^6\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^5\rangle \\
M_{AA} |A_l^6\rangle &= N_{AA} |A_l^7\rangle \Rightarrow |A_l^7\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^6\rangle \\
M_{AA} |A_l^7\rangle &= N_{AA} |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^7\rangle \\
|A_{l+1}^1\rangle &= N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_{BB}^{-1} M_{BB} N_{BB}^{-1} M_{BB} N_B^{-1} M_A |A_l^1\rangle \\
T_{S_3} &= N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_{BB}^{-1} M_{BB} N_{BB}^{-1} M_{BB} N_B^{-1} M_A \\
\boxed{T_{S_3} &= T_{S_1} T_{S_1} T_{S_1} T_{S_2} = (T_{S_1})^3 T_{S_2}}
\end{aligned}$$

– 4 Geração: $S_4 = ABBBAAAABBBABBBABBB$

$$\begin{aligned}
M_A |A_l^1\rangle &= N_B |B_l^2\rangle \Rightarrow |B_l^2\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^1\rangle \\
M_{BB} |B_l^2\rangle &= N_{BB} |B_l^3\rangle \Rightarrow |B_l^3\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^2\rangle \\
M_{BB} |B_l^3\rangle &= N_{BB} |B_l^4\rangle \Rightarrow |B_l^4\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^3\rangle \\
M_B |B_l^4\rangle &= N_A |A_l^5\rangle \Rightarrow |A_l^5\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^4\rangle \\
M_{AA} |A_l^5\rangle &= N_{AA} |A_l^6\rangle \Rightarrow |A_l^6\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^5\rangle \\
M_{AA} |A_l^6\rangle &= N_{AA} |A_l^7\rangle \Rightarrow |A_l^7\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^6\rangle \\
M_{AA} |A_l^7\rangle &= N_{AA} |A_l^8\rangle \Rightarrow |A_l^8\rangle = N_{AA}^{-1} M_{AA} |A_l^7\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_A |A_l^8\rangle &= N_B |B_l^9\rangle \Rightarrow |B_l^9\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^8\rangle \\
M_{BB} |B_l^9\rangle &= N_{BB} |B_l^{10}\rangle \Rightarrow |B_l^{10}\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^9\rangle \\
M_{BB} |B_l^{10}\rangle &= N_{BB} |B_l^{11}\rangle \Rightarrow |B_l^{11}\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^{10}\rangle \\
M_B |B_l^{11}\rangle &= N_A |A_l^{12}\rangle \Rightarrow |A_l^{12}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{11}\rangle \\
M_A |A_l^{12}\rangle &= N_B |B_l^{13}\rangle \Rightarrow |B_l^{13}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{12}\rangle \\
M_{BB} |B_l^{13}\rangle &= N_{BB} |B_l^{14}\rangle \Rightarrow |B_l^{14}\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^{13}\rangle \\
M_{BB} |B_l^{14}\rangle &= N_{BB} |B_l^{15}\rangle \Rightarrow |B_l^{15}\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^{14}\rangle \\
M_B |B_l^{15}\rangle &= N_A |A_l^{16}\rangle \Rightarrow |A_l^{16}\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{15}\rangle \\
M_A |A_l^{16}\rangle &= N_B |B_l^{17}\rangle \Rightarrow |B_l^{17}\rangle = N_B^{-1} M_A |A_l^{16}\rangle \\
M_{BB} |B_l^{17}\rangle &= N_{BB} |B_l^{18}\rangle \Rightarrow |B_l^{18}\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^{17}\rangle \\
M_{BB} |B_l^{18}\rangle &= N_{BB} |B_l^{19}\rangle \Rightarrow |B_l^{19}\rangle = N_{BB}^{-1} M_{BB} |B_l^{18}\rangle \\
M_B |B_l^{19}\rangle &= N_A |A_{l+1}^1\rangle \Rightarrow |A_{l+1}^1\rangle = N_A^{-1} M_B |B_l^{19}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{l+1}^1\rangle &= N_A^{-1} M_B N_{BB}^{-1} M_{BB} N_{BB}^{-1} M_{BB} N_B^{-1} M_A \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_{BB}^{-1} M_{BB} N_{BB}^{-1} M_{BB} N_B^{-1} M_A \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_{BB}^{-1} M_{BB} N_{BB}^{-1} M_{BB} N_B^{-1} M_A \\
&\quad N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{S_4} &= N_A^{-1} M_B N_{BB}^{-1} M_{BB} N_{BB}^{-1} M_{BB} N_B^{-1} M_A \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_{BB}^{-1} M_{BB} N_{BB}^{-1} M_{BB} N_B^{-1} M_A \\
&\quad N_A^{-1} M_B N_{BB}^{-1} M_{BB} N_{BB}^{-1} M_{BB} N_B^{-1} M_A \\
&\quad N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA} N_A^{-1} M_B N_B^{-1} M_A N_{AA}^{-1} M_{AA}
\end{aligned}$$

$$T_{S_4} = T_{S_2} T_{S_2} T_{S_2} T_{S_3} = (T_{S_2})^3 T_{S_3}$$

– N-ésima Geração: $S_n = S_{n-1} S_{n-2} S_{n-2} S_{n-2} = S_{n-1} (S_{n-2})^3$

$$T_{S_n} = T_{S_{n-2}} T_{S_{n-2}} T_{S_{n-2}} T_{S_{n-1}} = (T_{S_{n-2}})^3 T_{S_{n-1}}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Nussenzveig, H. M., *Curso de Física Básica: Eletromagnetismo*, vol. 3, Edgard Blücher, 2003.
- [2] Sinnecker, J. P., *Materiais Magnéticos Doces e Materiais Ferromagnéticos Amorfos*, Revista Brasileira de Ensino de Física **22** 396-405 (2000).
- [3] Scheel, H. J. e Fukuda, T., *Crystal Growth Technology*, John Wiley, 2004.
- [4] Baibich, M. N., Broto, J. M., Fert, A., van Dau, F. N., Petroff, F., Eitenne, P., Creuzet, G., Friederich, A. e Chazelas, J., *Giant Magnetoresistance of (001)Fe/(001)Cr Magnetic Superlattices*, Phys. Rev. Lett. **61** 2472-2475 (1988).
- [5] Bezerra, C. G., *Propriedades de Multicamadas e Filmes Finos Magnéticos Quasi-periódicos*, Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, 1999.
- [6] Chang, L. L. e Ploog, K., *Molecular Beam Epitaxy and Heterostructure*, Plenum, 1985.
- [7] Parker, E. H., *The Technology and Physics of Molecular Beam Epitaxy*, Plenum, 1985.
- [8] Leavens, C. R. e Taylor, R., *Interfaces, Quantum Wells and Superlattices*, Plenum, 1988.
- [9] George, J., *Preparation of Thin Films*, Dekker, 1992.
- [10] Otto, A., *Optical Properties of Solids: New Developments*, 1976.
- [11] Schechtman, D., Blech, I., Gratias, D. e Cahn, J. W., *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*, Phys. Rev. Lett. **53** 1951-1953 (1984).
- [12] Levine, D. e Steinhardt, P. J., *Quasicrystals: A New Class of Ordered Structures*, Phys. Rev. Lett. **53** 2477-2480 (1984).
- [13] Merlin, R., Bajema, K., Clarke, R. e Juang, F.-Y., *Quasiperiodic GaAs-AlAs Heterostructures*, Phys. Rev. Lett. **55** 1768-1770 (1985).
- [14] Bunde, A. e Havlin, S., *Fractals and Disordered Systems*, Springer-Verlag, 1991.
- [15] Ashcroft, W. N. e Mermin, N. D., *Solid State Physics*, Pioneira Thomson, 1976.

- [16] Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, 8^a ed., John Wiley, 2004.
- [17] Oliveira, I. S. e de Jesus, V. L. B., *Introdução à Física do Estado Sólido*, Livraria da Física, 2005.
- [18] Cornwell, J. P., *Group Theory in Physics: An Introduction*, Academic Press, 1997.
- [19] Dresselhaus, M. S., Dresselhaus, G. e Jorio, A., *Group Theory: Application to the Physics of Condensed Matter*, Springer, 2008.
- [20] Morrish, H. A., *The Physical Principles of Magnetism*, John Wiley & Sons, 1965.
- [21] Stanley, H. E., *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford, 1987.
- [22] Salinas, S. R. A., *Introdução à Física Estatística*, Edusp, 2005.
- [23] Heisenberg, W., *Zur Theorie des Ferromagnetismus*, Z. Phys. **49** 619 (1928).
- [24] Madelung, O., *Introduction to Solid-State Theory*, Springer, 1996.
- [25] Albuquerque, E. L. e Cottam, M. G., *Theory of Elementary Excitations in Quasiperiodic Structures*, Phys. Rep. **376** 225-337 (2003).
- [26] Albuquerque, E. L. e Cottam, M. C., *Polaritons in Periodic and Quasiperiodic Structures*, Elsevier, 2004.
- [27] Huang, K., *Lattice Vibrations and Optical Waves in Ionic Crystals*, Nature **167** 779-780 (1951).
- [28] Huang, K., *On the Interaction Between the Radiation Field and ionic Crystals*, Proc. R. Soc. Lond. A **208** 352-365 (1951).
- [29] Kittel, C., *Quantum Theory of Solids*, John Wiley & Sons, 1963.
- [30] Langmuir, I., *The Constitution and Fundamental Properties of Solids and Liquids. I. Solids*, J. Am. Chem. Soc. **38** 2221-2295 (1916).
- [31] Powell, C. J. e Swan, J. B., *Origin of the Characteristic Electron Energy Losses in Aluminum*, Phys. Rev. **115** 869-875 (1959).
- [32] Vasconcelos, M. S., *Espectro de Polariton de Plasmons e Propriedades Ópticas de Super-Redes Tipo Cantor*, Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, 1995.
- [33] Vasconcelos, M. S., *Espectro de Polariton de Plasmons e Ondas de Luz em Quasi-Cristais*, Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, 1999.
- [34] Holstein, T. e Primakoff, H., *Field Dependence of the Intrinsic Domain Magnetization of a Ferromagnet*, Phys. Rev. **58** 1098-1113 (1940).

- [35] Mattuck, R. D., *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*, Dover Publications, 1992.
- [36] Fetter, A. L. e Walecka, J. D., *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, Dover, 2003.
- [37] Araújo, C. A. A., *Polaritons em Materiais Magnéticos Nanoestruturados*, Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, 2007.
- [38] Stancil, D. D. e Prabhakar, A., *Spin Waves: Theory and Application*, Springer, 2009.
- [39] Hopfield, J. J., *Theory of the Contribution of Excitons to the Complex Dielectric Constant of Crystals*, Phys. Rev. **112** 1555-1567 (1958).
- [40] Henry, C. H. e Hopfield, J. J., *Raman Scattering by Polaritons*, Phys. Rev. Lett. **15** 964-966 (1965).
- [41] Bloch, F., *Zur Theorie des Ferromagnetismus*, Z. Phys. **61** 206 (1930).
- [42] van Kranendonk, J. e van Vleck, J. H., *Spin Waves*, Rev. Mod. Phys. **30** 1-23 (1958).
- [43] Mattis, D. C., *The Theory of Magnetism*, Springer-Verlag, (1981).
- [44] White, R. M., *Quantum Theory of Magnetism: Magnetic Properties of Materials*, 3^a ed., Springer, 2007.
- [45] Bezerra, C. G., Araújo, J. M., Chesman, C. e Albuquerque, E. L., *Magnetization in Quasiperiodic Magnetic Multilayers with Biquadratic Exchange Coupling*, J. Appl. Phys. **89** 2286-2292 (2001).
- [46] Bezerra, C. G., Albuquerque, E. L. e Cottam, M. G., *Influence of the Biquadratic Inter-layer Coupling in the Specific Heat of Fibonacci Magnetic Multilayers*, Physica A **301** 341-350 (2001).
- [47] Bezerra, C. G., Albuquerque, E. L., Mariz, A., da Silva, L. e Tsallis, C., *Spin Wave Specific Heat in Quasiperiodic Fibonacci Structures*, Physica A **294** 415-423 (2001).
- [48] Albuquerque, E. L., Bezerra, C. G. e Chesman, C., *Magnetoresistance Profiles of Quasiperiodic Fe/Cr Structures*, Surf. Sci. **532-535** 47-52 (2003).
- [49] Anselmo, D. H. A. L., *Ondas de Spin em Super-Redes Ferromagnéticas com Campo de Anisotropia*, Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, 1995.
- [50] Anselmo, D. H. A. L., *Espectro das Ondas de Spin Lineares e Não-Lineares em Multicamadas Magnéticas Anisotrópicas*, Tese de Doutorado apresentada à Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN, 1999.
- [51] Slichter, C. P., *Principles of Magnetic Resonance*, Harper and Row, 1963.

- [52] Sparks, M., *Ferromagnetic Relaxation Theory*, McGraw-Hill, 1964.
- [53] Hayes, W. e Loudon, R., *Scattering of Light by Crystals*, Willey, 1978.
- [54] Cottam, M. G. e Lockwood, D. J., *Light Scattering in Magnetic Solids*, Willey, 1986.
- [55] Cardona, M. e Guntherodt, G. (eds.), *Light Scattering in Solids*, vols. I-VI, Springer-Verlag, 1975-1991.
- [56] Cottam, M. G. (ed.), *Linear and Nonlinear Spin Waves in Magnetic Films and Superlattices*, World Scientific, 1994.
- [57] Cottam, M. G. e Tilley, D. R., *Introduction to Surface and Superlattice Excitations*, 2^a ed., IOP, 2004.
- [58] Zeeman, P., *The Effect of Magnetisation on the Nature of Light Emitted by a Substance*, Nature **55** 347 (1897).
- [59] Tannoudji, C. C.-, Diu, B. e Laloë, F., *Quantum Mechanics*, vol. 1, John Wiley, 1977.
- [60] Gasiorowicz, E., *Quantum Physics*, Willey, 2003.
- [61] le Bellac, M., *Quantum Physics*, Cambridge, 2007.
- [62] Anselmo, D. H. A. L. e Albuquerque, E. L., *Spin Wave Spectrum in Magnetic Superlattices with Anisotropic Fields*, Phys. Status Solidi B **198** 827-838 (1996).
- [63] Bohm, D. e Pines, D., *A Collective Description of Electron Interactions: III. Coulomb Interactions in a Degenerate Electron Gas*, Phys. Rev. **92** 609-625 (1953).
- [64] Simon, B., *Almost periodic Schrödinger operators: A Review*, Adv. Appl. Math. **3** 463-490 (1982).
- [65] Kohmoto, M. e Oono, Y., *Cantor Spectrum for an Almost Periodic Schrödinger Equation and a Dynamical Map*, Phys. Lett. A **102** 145-148 (1984).
- [66] Kohmoto, M. e Banavar, J. R., *Quasiperiodic Lattice: Electronic Properties, Phonon Properties, and Diffusion*, Phys. Rev. B **34** 563-566 (1986).
- [67] Kolář, M. e Ali, M. K., *Generalized Fibonacci Superlattices, Dynamical Trace Maps, and Magnetic Excitations*, Phys. Rev. B **39** 426-432 (1989).
- [68] Kolář, M. e Ali, M. K., *One-dimensional Generalized Fibonacci Tilings*, Phys. Rev. B **41** 7108-7112 (1990).
- [69] Kolář, M., Ali, M. K. e Nori, F., *Generalized Thue-Morse Chains and Their Physical Properties*, Phys. Rev. B **43** 1034-1037 (1991).
- [70] Steinhardt, P. J. e Ostlund, S., *The Physics of Quasicrystals*, World Scientific, 1987.

- [71] Kohmoto, M., Sutherland, B. e Iguchi, K., *Localization of Optics: Quasiperiodic Media*, Phys. Rev. Lett. **58** 2436-2438 (1987).
- [72] Kohmoto, M., Sutherland, B. e Tang, C., *Critical Wave Functions and a Cantor-set Spectrum of a One-dimensional Quasicrystal Model*, Phys. Rev. B **35** 1020-1033 (1987).
- [73] Costa, R. N., Anselmo, D. H. A. L., Albuquerque, E. L. e Cottam, M. G., *Non-linear Spin Wave Spectra in Anisotropic Magnetic Superlattices*, Solid State Commun. **108** 827-831 (1998).
- [74] Anselmo, D. H. A. L., Albuquerque, E. L. e Cottam, M. G., *Surface Spin Waves in Metamagnets with Nonuniaxial Single-Ion Anisotropy*, J. Appl. Phys. **83** 6955-6957 (1998).
- [75] Bezerra, C. G. e Cottam, M. G., *Magnetization in Quasiperiodic Magnetic Multilayers with Biquadratic Exchange and Uniaxial Anisotropy*, J. Magn. Magn. Mater. **240** 529-531 (2002).
- [76] Bezerra, C. G. e Cottam, M. G., *Multifractal Spectra of Spin Waves in Fibonacci Magnetic Superlattices with Biquadratic Exchange Coupling*, Physica A **309** 121-130 (2002).
- [77] Bezerra, C. G. e Cottam, M. G., *Effects of the Biquadratic Exchange Coupling on the Localization and Scaling Laws of Spin Waves in Fibonacci Superlattices*, Phys. Rev. B **65** 054412 (2002).
- [78] Bezerra, C. G. e Cottam, M. G., *Surface and Bulk Spin Waves in Magnetic Superlattices with Biquadratic Exchange Coupling*, J. Appl. Phys. **91** 7221-7223 (2002).
- [79] Albuquerque, E. L., Fulco, P., Sarmiento, E. F. e Tilley, D. R., *Spin Waves in a Magnetic Superlattice*, Solid State Commun. **58** 41-44 (1986).
- [80] Bezerra, C. G. e Albuquerque, E. L., *Spin Waves in Quasi-periodic Magnetic Superlattices*, Physica A **245** 379-392 (1997).
- [81] Luck, J. M., *Cantor Spectra and Scaling of Gap Widths in Deterministic Aperiodic Systems*, Phys. Rev. B **39** 5834-5849 (1989).
- [82] Bezerra, C. G. e Albuquerque, E. L., *Localization and Scaling Properties of Spin Waves in Quasi-periodic Magnetic Multilayers*, Physica A **255** 285-292 (1998).
- [83] Bezerra, C. G., Albuquerque, E. L. e Nogueira Jr., E., *On the Spin Wave Multifractal Spectra in Magnetic Multilayers*, Physica A **267** 124-130 (1999).
- [84] Merlin, R., Bajema, K., Nagle, J. e Ploog, K., J. Phys. (Paris) Colloq. **48** C5-503 (1987).
- [85] Cheng, Z., Savit, R. e Merlin, R., *Structure and Electronic Properties of Thue-Morse Lattices*, Phys. Rev. B **37** 4375-4382 (1988).
- [86] Wang, C. M. e Barrio, R. A., *Theory of the Raman Response in Fibonacci Superlattices*, Phys. Rev. Lett. **61** 191-194 (1988).

- [87] Quilichini, M., *Phonon Excitations in Quasicrystals*, Rev. Mod. Phys. **69** 277-314 (1997).
- [88] Oh, G. Y. e Lee, M. H., *Band-structural and Fourier-spectral Properties of One-dimensional Generalized Fibonacci Lattices*, Phys. Rev. B **48** 12465-12477 (1993).
- [89] Vasconcelos, M. S. e Albuquerque, E. L., *Plasmon-polariton Fractal Spectra in Quasiperiodic Multilayers*, Phys. Rev. B **57** 2826-2833 (1998).
- [90] Karkut, M. G., Triscone, J. -M, Ariosa, D. e Fischer, Ø., *Quasiperiodic Metallic Multilayers: Growth and Superconductivity*, Phys. Rev. B **34** 4390-4393 (1986).
- [91] Albuquerque, E. L. e Cottam, M. G., *Theory of Plasmon-polaritons in Fibonacci-type Superlattices with Two-dimensional Electron Gas Layers*, Solid State Commun. **81** 383-386 (1992).
- [92] Gellermann, W., Kohmoto, M. e Sutherland, B., *Localization of Light Waves in Fibonacci Dielectric Multilayers*, Phys. Rev. Lett. **72** 633-636 (1994).
- [93] Grimm, U. e Baake, M., *The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order*, Kluwer, 1997.
- [94] Mandelbrot, B. B., *Fractals: Form, Chance and Dimension*, Freeman, 1977.
- [95] Vasconcelos, M. S., Albuquerque E. L. e Nogueira Jr., E., *Multifractal Analysis of Plasmon-polariton and Light Transmission Spectra in Quasiperiodic Multilayers*, Physica A **268** 165-174 (1999).
- [96] Gouyet, J. -F., *Physics and Fractal Structures*, Springer, 1996.
- [97] Hawrylak, P. and J. J. Quinn, J. J., *Critical Plasmons of a Quasiperiodic Semiconductor Superlattice*, Phys. Rev. Lett. **57** 380-383 (1986).
- [98] Kohmoto, M., Kadano, L. P. e Tang, C., *Localization Problem in One Dimension: Mapping and Escape*, Phys. Rev. Lett. **50** 1870-1872 (1983).
- [99] Camley, R. E. e Cottam, M. G., *Magnetostatic Theory of Collective Excitations in Ferromagnetic and Antiferromagnetic Superlattices with Magnetization Perpendicular to the Surface*, Phys. Rev. B **35** 189-196 (1987).
- [100] Wang, X. K., Zhang, V. L., Lim, H. S., Ng, S. C., Kuok, M. H., Jain, S., e Adeyeye, A. O., *Observation of Frequency Band Gaps in a One-dimensional Nanostructured Magnonic Crystal*, Appl. Phys. Lett. **94** 083112 (2009).
- [101] Yablonovitch, E., *Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics*, Phys. Rev. Lett. **58** 2059-2062 (1987).
- [102] John, S., *Strong Localization of Photons in Certain Disordered Dielectric Superlattices*, Phys. Rev. Lett. **58** 2486-2489 (1987).

- [103] Joannopoulos, J. D., Johnson, S. G., Winn, J. N. e Meade, R. D., *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, 2^a ed., Princeton University Press, 2008.
- [104] Sakoda, K., *Optical Properties of Photonic Crystals*, 2^a ed., Springer, 2005.
- [105] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 3^a ed., John Wiley, 1998.
- [106] Krawczyk, M. e Puzkarski, H., *Theory of Spin-wave Frequency Gaps in 3D Magnonic Crystals. Application to Manganites*, arXiv:cond-mat/0504073v1 (2005).
- [107] Xu, S., He, Z., Zhang, Z., Wang, Z., Chen, H. e Dong, C., J. Shanghai University **4** 155 (2000).
- [108] Kruglyak, V. V. e Kuchko, A. N., *Spectrum of spin waves propagating in a periodic magnetic structure*, Physica B **339** 130-133 (2003).
- [109] Kruglyak, V. V., e Hicken, R. J., *Magnonics: Experiment to prove the concept*, J. Magn. Magn. Mater **306** 191-194 (2006).
- [110] Anselmo, D. H. A. L., Farias, G. A., Costa, R. N. e Albuquerque, E. L., *Mutifractal Spectra of Magnetostatic Spin Waves in Quasiperiodic Magnetic Multilayers*, Physica A **286** 283-291 (2000).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)