

TESE DE DOUTORADO

**INVERSÃO GRAVIMÉTRICA DO RELEVO 3D  
DE BACIAS SEDIMENTARES E DA  
VARIAÇÃO DA DENSIDADE USANDO  
INFORMAÇÃO A PRIORI SOBRE O  
AMBIENTE GEOLÓGICO.**

*Cristiano Mendel Martins*

Orientadora

*Valéria Cristina Ferreira Barbosa*

Rio de Janeiro  
2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

“INVERSÃO GRAVIMÉTRICA DO RELEVO 3D DE BACIAS SEDIMENTARES E DA VARIAÇÃO DA DENSIDADE USANDO INFORMAÇÃO A PRIORI SOBRE O AMBIENTE GEOLÓGICO”

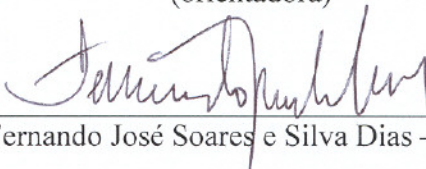
CRISTIANO MENDEL MARTINS

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM GEOFÍSICA.

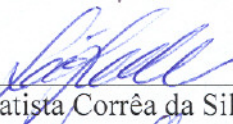
Aprovada por:



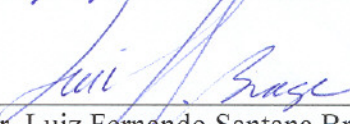
Dra. Valéria Cristina Ferreira Barbosa - ON/MCT  
(orientadora)



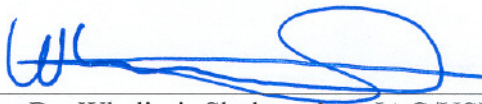
Dr. Fernando José Soares e Silva Dias – ON/MCT



Dr. João Batista Corrêa da Silva – UFPA



Dr. Luiz Fernando Santana Braga  
Fugro Gravity & Magnetic Services (FGMS)/EUA



Dr. Wladimir Shukowsky - IAG/USP

RIO DE JANEIRO – BRASIL

31 DE JULHO DE 2009

INVERSÃO GRAVIMÉTRICA DO RELEVO 3D DE BACIAS  
SEDIMENTARES E DA VARIAÇÃO DA DENSIDADE USANDO  
INFORMAÇÃO A PRIORI SOBRE O AMBIENTE GEOLÓGICO.

Cristiano Mendel Martins

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM GEOFÍSICA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DE GRAU EM DOUTOR EM GEOFÍSICA.

Aprovada por:

---

Dra. Valéria Cristina Ferreira Barbosa (Orientadora)

---

Dr. João Batista Corrêa da Silva

---

Dr. Wladimir Shukowsky

---

Dr. Luiz Fernando Santana Braga

---

Dr. Fernando José Soares e Silva Dias

---

Dr. Andres Reinaldo Rodriguez Papa (Suplente)

---

Dr. Cosme Ferreira da Ponte Neto (Suplente)

RIO DE JANEIRO - BRASIL

JULHO DE 2009

M386i Martins, Cristiano Mendel  
Inversão gravimétrica do relevo 3D de bacias sedimentares e da variação da densidade usando informação a priori sobre o ambiente geológico. - Rio de Janeiro, 2009.  
ix, 117 p. 29,7 cm: il., graf., tab.

Tese de Doutorado em Geofísica – Observatório Nacional, Rio de Janeiro, 2009.

1. Inversão. 2. Gravimetria. 3. Métodos potenciais. 4. Variação da densidade. 5. Regularização de Tikhonov. 6. Variação total. 7. Tese. I. Observatório Nacional II. Título

CDU 550.312

A minha esposa Rosana,

A meu filho e filhas,

Ana Carolina,

Ana Paula,

Juliana,

Marcela,

Pedro Henrique,

Aparecida,

Andreza,

Ana Clara

e Ana Beatriz.

## AGRADECIMENTOS

Ao apresentar este trabalho atesto com constrangimento a atenção que Deus me reserva, comprovada pela conclusão deste e pelos amigos que coleciono, inclusive por causa deste trabalho.

A vida deu-me este trabalho como uma oportunidade rara, mas para concluí-lo contraí dívidas com algumas pessoas, às quais desejo que a vida ainda me ofereça igual oportunidade para tornar-me adimplente, uma vez que simplesmente agradecer-lhes neste momento não seria paga adequada. Devo profunda gratidão, pela compreensão em suportar minha ausência e pelo comprometimento em continuamente incentivar-me, à Rosana minha esposa, às minhas filhas e ao meu filho. À Dra. Valéria minha orientadora, também devo muito pelo muito que aprendi academicamente e para a vida.

Há felizmente muitas pessoas e instituições que contribuíram comigo para a realização deste trabalho, às quais expresso minha gratidão:

Ao Observatório Nacional, como instituição pela estrutura disponível, mas principalmente as pessoas que lhe fazem ter vida, cujo convívio decisivamente contribuiu para minha vida e formação. Especialmente ao Coordenador Dr. Andrés Papa por seu comprometimento e atenção, aos Profs. Dr. Hamza e Dr. Cosme que ultrapassaram o ensinar. À comissão de pós-graduação. Ao Dr. Fernando e ao Dr. Newton pelas oportunas discussões e reflexões e pelo exercício de paciência demonstrado com minha presença em sua sala. Aos colegas, Me. André Wiermann por sua disponibilidade, subsídio e pelas conversas, oportunas e divertidas, que tornaram essa tarefa mais leve, e ao Me. Adriano Marçal, meu afilhado, por sua atenção e brilhantismo contagioso.

Ao Dr. João Batista Corrêa da Silva por suas relevantes contribuições.

À banca examinadora, especialmente ao Dr. Luiz Fernando Santana Braga e ao Dr. Wladimir Shukowsky.

À El Paso pela cessão de dados da bacia de Almada, e ao Geofísico Andrés Gordon pela gentil colaboração e importante discussão.

Ao CNPq e à FAPERJ pelo auxílio financeiro.

Aos meus pais Daniel e Maria, aos meus irmãos, minha irmã, cunhados e cunhadas, principalmente aos meus avós José, Antônia e Judith (em memória), e à Nair, mãe da minha esposa, mas praticamente minha mãe também. Ao Carlos Augusto e família.

Aos amigos Célia Neves e Tobias, principalmente ao Tobias por continuamente lembrar-me a relevância da ciência, ou a falta dela.

Aos irmãos Jorge, Márcia Eliane, Rogério e ao Pr. Dejaci e Dagmar, que foram alicerce e socorro em momentos tão decisivos, ao longo destes anos.

Aos amigos da CEDAE, que de algum modo me deram suporte para desenvolver minha vida acadêmica, Ana Tereza, Braga, Caffé, Camilo, Claudio, Paulo da Silva, Fonte, Machado, Natanael, Valério, ao amigo Santana pelo providencial socorro ao hardware, aos amigos da ASU 2.2, do Suprimentos, e ao Marcelo.

Aos colegas e à direção do IERP, especialmente ao Me. Cleber, e ao Prof. Leônidas.

Há pessoas cuja contribuição é anterior ao doutorado, mas que decisivamente trouxeram minha história aqui, às quais estendo minha gratidão:

Aos professores da física na UFRRJ, principalmente ao Dr. Claudio M. Porto que me foi mais que incentivador, tornou-se responsável pela minha graduação e ingresso na pós-graduação, e à Ma. Silvia M. Goulart.

Ao Celsão, à Claudia, ao Collier, ao Humberto e à Marineida e especialmente ao Alcides, inclusive pela contribuição direta ao texto da tese, os quais felizmente tive como professores, mas que ultrapassaram a docência e se tornaram meus amigos.

Aos amigos de quem sempre, e agora, me lembro, Cláudio, Haroldo, Lannia, Rafael, e Tereza.



## RESUMO

Apresentamos dois métodos de inversão gravimétrica para estimar simultaneamente o relevo 3D do embasamento de bacias sedimentares e os parâmetros que definem uma presumida lei parabólica de decaimento do contraste de densidade com a profundidade no pacote sedimentar, conhecendo-se a priori as profundidades do embasamento em alguns pontos. Em ambos, os métodos de inversão, o pacote sedimentar é aproximado por uma malha de prismas 3D verticais justapostos em ambas as direções horizontais do sistema de destino de coordenadas. As espessuras dos prismas representam a profundidade do embasamento e são os parâmetros a serem estimados a partir dos dados gravimétricos.

Para produzir uma estimativa única e estável das profundidades do embasamento, nossos métodos usam dois diferentes funcionais regularizadores impondo dois vínculos distintos. O primeiro, chamado **suavidade global**, impõe uma suavidade geral na estimativa do relevo do embasamento usando o regularizador de Tikhonov de primeira ordem, enquanto o segundo método de inversão, chamado de **variação total**, permite estimar relevos do embasamento descontínuos usando o regularizador variação total. Para estimar os parâmetros que definem o decaimento parabólico do contraste de densidade com a profundidade e produzir estimativa estável do relevo do embasamento, impomos um funcional regularizador às estimativas de profundidades do embasamento e impomos a proximidade entre as profundidades estimadas e profundidades conhecidas por furos de sondagens.

Aplicamos a inversão com suavidade global a dados sintéticos de uma bacia sedimentar simulada, possuindo um relevo complexo do embasamento e duas seções sedimentares tendo duas diferentes leis parabólicas de variação do contraste de densidade com a profundidade. Os resultados mostram boas estimativas do relevo do embasamento e dos parâmetros da lei parabólica do decaimento do contraste de densidade com a profundidade. Além disso, aplicamos a inversão com variação total a dados sintéticos de uma bacia extensional simulada, possuindo arcabouço estrutural fortemente controlado por

falhas. A inversão com variação total delineou bem todas as falhas. Ambas as inversões, suavidade global e variação total, foram aplicadas aos dados gravimétricos da parte continental e marinha rasa da Bacia de Almada, Bahia, Brasil. A inversão com suavidade global delineou feições geológicas no relevo do embasamento que não são diretamente inferidas através da simples inspeção da anomalia gravimétrica. A inversão com variação total mapeou não só as falhas com grande rejeito vertical que controlam as bordas da Bacia de Almada, mas também as falhas com pequeno rejeito que controlam as feições estruturais do arcabouço da Bacia de Almada.

# GRAVITY INVERSION OF 3D DEPTH-TO-BASEMENT AND DENSITY VARIATION ESTIMATES BY USING PRIOR INFORMATION ABOUT THE GEOLOGIC SETTING

## ABSTRACT

We present two gravity inversion methods for simultaneously estimating the 3D basement relief of a sedimentary basin and the parameters defining a presumably parabolic decay of the density contrast with depth in a sedimentary pack assuming the prior knowledge about the basement depth at a few points. In both inversion methods, the sedimentary pack is approximated by a grid of 3D vertical prisms juxtaposed in both horizontal directions of a right-handed coordinate system. The prisms' thicknesses represent the depths to the basement and are the parameters to be estimated from the gravity data.

To produce a unique and stable depth-to-basement estimate, our inversion methods use two different regularizing functionals imposing two different constraints. The first one, named **global smoothness**, imposes an overall smoothness on the estimated basement relief by using the first-order Tikhonov regularization, whereas the second inversion method, named **total variation**, allows estimating a discontinuous basement relief by using the total variation regularization. To estimate the parameters defining the parabolic decay of the density contrast with depth and produce stable depth-to-basement estimates we impose a regularizing functionals on the estimated basement depths and proximity between the depth estimates and known depths values at boreholes.

We apply the global smoothness inversion to synthetic data from a simulated 3D sedimentary basin presenting a complex basement relief and two sedimentary sections having distinct parabolic laws describing the density contrast variation with depth. The results show good estimates of the basement relief and of the true parameters of the

parabolic law of density contrast decay with depth. We also apply the total variation inversion to synthetic data from a simulated sedimentary extensional basin whose structural framework is strongly controlled by several faults. The total variation inversion delineates well all faults. Both the global smoothness and the total variation inversions are applied to real gravity data from the onshore and part of the shallow offshore Almada Basin, on Brazil's northeastern coast. The global smoothness inversion delineates geologic features in the basement relief that are not directly inferred just from inspection of the gravity anomaly. The total variation inversion maps not only the faults with large vertical slips controlling the Almada Basin borders, but also the faults with small vertical slips controlling the structural features on the Almada basement framework.

## SUMÁRIO

DEDICATÓRIA	i
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	iv
ABSTRACT	vi
SUMÁRIO	
1 – INTRODUÇÃO	1
2 – METODOLOGIA	8
2.1 – Problema direto	8
2.2 – Problema inverso	10
2.2.1 – Problema I: estimativa de um relevo do embasamento predominantemente suave	13
2.2.2 – Problema II: estimativa de um relevo do embasamento com descontinuidades locais	17
2.2.3 – Modificação da matriz Hessiana na inversão VT	21
2.3 – Busca sistemática	24
3 – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE NUMÉRICA	26
3.1 – Intensidade do sinal da anomalia gravimétrica versus profundidade	26
3.2 – Sinal da anomalia gravimétrica versus as constantes $\Delta\rho_0$ e $\alpha$ que descrevem o decaimento parabólico do contraste de densidade com a profundidade	28
4 – RESULTADOS – APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS	30
4.1 – Validação do modelo direto	31
4.2 – Teste em dados sintéticos	33
<i>Problema I</i>	
<i>Estimativa de um relevo do embasamento predominantemente suave</i>	
4.2.1 – Relevo Simples	33
Testes com embasamento raso	34
Testes com embasamento profundo	38
Testes com embasamento profundo sem o estabilizador suavidade	41
4.2.2 – Relevo Complexo	43
Bacia sedimentar simulada	43
Busca sistemática de $\Delta\rho_0$ e $\alpha$	45
Análise espectral	50
Estimativa do embasamento 3D via inversão SG	53
Densidade constante	55

<i>Problema II</i>	
<i>Estimativa de um relevo do embasamento com descontinuidades locais</i>	
4.2.3 – Relevo 3D	59
Testes com embasamento complexo	59
4.2.4 – Comparação entre as inversões SG e VT	65
5 – RESULTADOS COM DADOS REAIS – BACIA DE ALMADA	66
5.1 – Caracterização da Bacia de Almada	66
5.2 – Inversão gravimétrica da Bacia de Almada	73
5.2.1 – Busca sistemática das constantes $\Delta\rho_0$ e $\alpha$ da Bacia de Almada	76
5.2.2 – Inversão gravimétrica com regularizador suavidade global da Bacia de Almada	79
5.2.3 – Inversão gravimétrica com regularizador variação total da Bacia de Almada	82
6 – CONCLUSÃO	85
Apêndice A	89
<i>Expressão da componente vertical do campo gravimétrico produzida por um único prisma presumindo decaimento do contraste de densidade com a profundidade segundo uma lei parabólica.</i>	
Apêndice B	94
<i>Expressão analítica da matriz de sensibilidade e uma estratégia computacional para calculá-la</i>	
Apêndice C	98
<i>Definição do vetor-gradiente e da matriz Hessiana do funcional da Variação Total</i>	
Apêndice D	105
<i>Resultados numéricos e analíticos para justificar a modificação da matriz Hessiana do funcional <math>\phi_V</math></i>	
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	114

## INTRODUÇÃO

Mapear o relevo do embasamento de bacias sedimentares é de extrema importância por auxiliar a localização de possíveis armadilhas estruturais, capazes de aprisionar reservas de hidrocarbonetos. O mapeamento do relevo do embasamento de bacias sedimentares pode ser obtido através da inversão de dados gravimétricos. No entanto, o problema inverso de estimar corpos geológicos a partir de dados gravimétricos, em geral, é um problema matematicamente mal-posto. A tentativa de resolver um problema mal-posto é inadequada porque a solução pode não existir, e caso exista pode não ser única, e/ou não ser estável. Para garantir a existência da solução, TIKHONOV e ARSENIN (1977) introduzem o conceito de *quasisolução* que é definida como uma solução cuja métrica da diferença entre os vetores contendo os dados observados e os dados ajustados é a menor possível. Admitindo que exista solução, esta pode não ter unicidade e nem estabilidade. A não unicidade da solução é a existência de mais de uma solução que explique os dados gravimétricos observados dentro da precisão experimental. A instabilidade na solução existe se uma pequena perturbação nas observações geofísicas leva a uma grande variação na solução. Uma bacia sedimentar é um corpo geológico que pode ser definido apenas por duas superfícies que contornam o pacote sedimentar. Uma superfície é aflorante e limita o topo da bacia, e a outra superfície limita a base do pacote sedimentar sendo denominada de relevo do embasamento da bacia sedimentar. A unicidade da estimativa do relevo do embasamento da bacia sedimentar fica garantida diretamente pelo teorema de SMITH (1961), como mostrado por SILVA et al. (2002). Esse teorema garante a unicidade da solução para fontes gravimétricas anômalas confinadas no interior de uma placa horizontal, com localização conhecida e com distribuição de densidade constante ao longo da direção vertical (profundidade). No entanto, a garantia da unicidade não implica a garantia de estabilidade da solução. Usualmente a estabilidade na solução é obtida incorporando-se informação geológica a priori através da minimização de um funcional estabilizante

(TIKHONOV e ARSENIN, 1977) sujeito a explicar os dados geofísico dentro da precisão experimental. Na teoria de regularização de Tikhonov os funcionais estabilizantes são expressões matemáticas que impõem restrições físicas e que podem ser interpretadas em termos de hipóteses geológicas a respeito das fontes geológicas. SILVA et al. (2001) ressaltam que a estabilidade da solução pode ser garantida se há a intersecção em um único ponto dos espaços nulos do funcional estabilizante e do funcional geofísico. Nesse caso, o resultado é uma solução tendenciosa na direção da informação a priori introduzida pelo funcional estabilizante. Portanto, a introdução de um funcional regularizador simultaneamente confere estabilidade à solução e permite a introdução de informação geológica a priori sobre a fonte geológica. Como estamos estimando o relevo do embasamento de bacias sedimentares, a introdução de um funcional regularizador incorpora informação geológica a priori sobre a bacia sedimentar. Contudo, ao incorporar informação a priori ao problema inverso, é importante selecionar adequadamente o tipo de ambiente geológico que melhor descreve a bacia sedimentar a ser interpretada. Caso contrário, a solução explicará os dados geofísicos, será estável, mas não será uma representação factual do relevo do embasamento.

Ainda em relação ao modelo físico-matemático que associa os dados teóricos aos parâmetros do modelo interpretativo, outra questão pertinente diz respeito à distribuição vertical da massa dentro do pacote sedimentar. A maioria dos métodos de inversão de dados gravimétricos para estimar o relevo do embasamento de uma bacia sedimentar pode ser agrupada em duas categorias. Os métodos da primeira categoria consideram o pacote sedimentar e o embasamento cristalino homogêneos, ao passo que os métodos da segunda categoria consideram o embasamento homogêneo e o pacote sedimentar heterogêneo. Dentre os métodos da primeira categoria destacamos os seguintes: BOTT (1960), CORBATÓ (1965), OLDENBURG (1974), LEÃO et al. (1996) e BARBOSA et al. (1997) e (1999). Esses métodos se distinguem pelo tipo de informação a priori usada explicita ou implicitamente. Recentemente, tem sido publicada uma grande variedade de métodos da segunda categoria na literatura geofísica. Em bacias sedimentares predominantemente



preenchidas por sedimentos siliclásticos, é razoável considerar que a densidade dos sedimentos aumente com a profundidade, como consequência da compactação das camadas mais profundas provocada pelas camadas subjacentes. Estes métodos da segunda categoria partem desta premissa e presumem uma lei monotônica para o decaimento com a profundidade do contraste de densidade entre o sedimento e o embasamento. Em geral estes métodos se diferenciam pelo tipo de lei de variação do contraste de densidade empregada. Alguns exemplos clássicos da literatura são: ATHY (1930) e CORDELL (1973) (lei exponencial), RAO (1990) e GALLARDO-DELGADO (2003) (lei quadrática), CHAKRAVARTHI e SUNDARARAJAN (2004) (lei parabólica), GARCÍA-ABDESLEM (2005) (lei polinomial cúbica) e SILVA et al. (2006) (lei hiperbólica). No entanto, ressaltamos que na literatura geofísica há uma grande variedade de autores interpretando a anomalia gravimétrica presumindo algum tipo de variação do contraste de densidade. Dentre estes autores destacamos MURTHY e RAO (1979), RAO (1986), CHAI e HINZE (1988), LITINSKY (1989), GARCÍA-ABDESLEM (1992), RAO et al. (1994), POHÁNKA (1998), HANSEN (1999), HOLSTEIN (2003), CHAPPELL e KUSZNIR (2008).

Dentro da segunda categoria de métodos, CHAKRAVARTH e SUNDARARAJAN (2007) estimam simultaneamente a anomalia gravimétrica regional e o relevo 3D do embasamento de uma bacia sedimentar presumindo que o contraste de densidade decai com profundidade segundo uma lei parabólica supostamente conhecida. Embora este método não minimize um funcional estabilizador, ele pode levar a um relevo 3D do embasamento razoável devido a dois fatores combinados. O primeiro estabelece como modelo inicial das profundidades do embasamento um relevo computado, presumindo que a anomalia gravimétrica em cada estação é produzida por uma placa horizontalmente infinita abaixo desta estação e cujo contraste de densidade varia com a profundidade segundo a conhecida lei parabólica. Este modelo inicial segue, de um modo semi-quantitativo, a geometria do relevo do embasamento. O segundo fator é uma combinação de hipóteses implícitas nos testes simulados. Estas hipóteses são: i) o relevo do embasamento é muito simples, ii) a profundidade do embasamento é pequena e iii) a taxa de decaimento do

contraste de densidade com a profundidade é baixa. O primeiro fator representa uma hipótese geológica significativa e quando é combinado com o segundo fator pode conduzir a uma solução estável. Porém, os relevos do embasamento estimados por CHAKRAVARTH e SUNDARARAJAN (2007) apresentam aproximadamente a mesma forma da anomalia gravimétrica multiplicada por um fator de escala.

Nesta tese apresentamos dois métodos para a solução do problema gravimétrico inverso de estimar o relevo do embasamento em pontos discretos presumindo decaimento do contraste de densidade com a profundidade segundo lei parabólica. Para a estimativa do relevo do embasamento através destes dois métodos de inversão, precisamos primeiro estimar os parâmetros que definem o decaimento parabólico do contraste de densidade com a profundidade. Portanto, nesta tese, além de apresentarmos dois métodos de inversão gravimétrica para mapear o relevo do embasamento com contraste de densidade variando com a profundidade, estimamos, a partir da anomalia gravimétrica e de informações sobre a profundidade do embasamento conhecida em alguns pontos, o relevo 3D do embasamento, o contraste de densidade superficial e o fator parabólico que controla o gradiente da variação do contraste de densidade com a profundidade.

Nesses dois métodos de inversão gravimétrica para estimar o relevo do embasamento, combinamos o funcional do ajuste dos dados gravimétricos e mais dois funcionais dos parâmetros. O primeiro funcional dos parâmetros é o funcional estabilizador e o segundo é o funcional que introduz informação sobre a profundidade do embasamento em alguns pontos. Estes dois métodos se distinguem pelo funcional estabilizador utilizado e incorporam informação a priori sobre diferentes tipos de ambiente geológico para estimar as profundidades do relevo do embasamento.

No primeiro método, incorporamos a informação de que o relevo do embasamento apresenta-se predominantemente suave, como no caso de bacias intracratônicas. Esta informação geológica a priori é incorporada à solução estimada através do funcional dos parâmetros conhecido como regularizador de primeira ordem de Tikhonov (TWOMEY,

1963). Denominamos esse método inversão gravimétrica com vínculo de suavidade global. Este funcional estabilizador consiste em minimizar a norma dois da aproximação por diferenças finitas da derivada horizontal de primeira ordem dos parâmetros. Matematicamente, a minimização deste funcional favorece soluções relativamente suaves. Geologicamente, a minimização deste funcional favorece soluções associadas a profundidades estimadas do relevo do embasamento em pontos vizinhos que estejam verticalmente próximas entre si. Portanto, favorecemos a estimativa de um relevo embasamento globalmente suave.

Em relação ao problema abordado por este primeiro método, *inversão de dados gravimétricos que recupera relevos do embasamento predominantemente suaves*, destacamos que outros autores empregaram a inversão com vínculo suavidade global. BARBOSA et al. (1997) e (2007), por exemplo, também utilizaram o regularizador de Tikhonov de primeira ordem como vínculo para garantir estabilidade. No entanto, nesses métodos a densidade dos sedimentos é considerada constante.

No segundo método, incorporamos a informação de que há descontinuidades locais no relevo do embasamento, como no caso de bacias extencionais em que o relevo do embasamento é fortemente controlado por falhas normais com patamares localmente suaves e separados por descontinuidades abruptas. Esta informação geológica a priori é incorporada à solução estimada através do funcional dos parâmetros conhecido como variação total (RUDIN et al., 1992; ACAR e VOGEL, 1994). Denominamos esse método como inversão gravimétrica com vínculo de variação total. Este funcional estabilizador consiste em minimizar a norma um da aproximação por diferenças finitas da derivada horizontal de primeira ordem dos parâmetros. Matematicamente, a minimização deste funcional permite soluções que contenham descontinuidades. Geologicamente, minimizando esse funcional, estamos permitindo soluções nas quais as profundidades estimadas do relevo do embasamento contenham descontinuidades verticais. Portanto, favorecemos a estimativa de um relevo do embasamento controlado por falhas de alto ângulo apresentado grandes e pequenos rejeitos.

Em relação ao problema abordado por este segundo método, *inversão de dados gravimétricos que recupera relevos do embasamento contendo descontinuidades locais*, destacamos dois outros métodos adequados a este propósito: a suavidade ponderada (BARBOSA et al., 1999) e a regularização entrópica (OLIVEIRA, 2007). Semelhantes ao que apresentamos na inversão com vínculo da variação total, ambos os métodos combinam o funcional do ajuste dos dados gravimétricos com um funcional estabilizante dos parâmetros. A suavidade ponderada (BARBOSA et al., 1999) impõe globalmente que as estimativas das profundidades do relevo do embasamento em pontos vizinhos sejam próximas entre si, mas permite que localmente estas profundidades estimadas possam diferir bastante. Este funcional introduz certo grau de instabilidade. Assim, a fim de se obter estabilidade, o conhecimento da profundidade máxima da bacia é introduzido como informação a priori e impõe-se que todas as profundidades estejam próximas ao fundo da bacia sedimentar. A regularização entrópica (CAMPOS VELHOS e RAMOS, 1997; RAMOS et al., 1999; SILVA et al., 2007; e OLIVEIRA, 2007) consiste na minimização da medida de entropia de ordem um e na maximização da medida de entropia de ordem zero da solução. A minimização da entropia de ordem favorece soluções em que o relevo estimado apresenta descontinuidades abruptas e a maximização da medida de entropia de ordem zero é empregada apenas para evitar sua minimização excessiva ocasionada pela minimização da medida de entropia de ordem um, já que as duas medidas de entropia não são independentes. Esta combinação de minimização da entropia de ordem um e a maximização da entropia de ordem zero exige a calibração simultânea de dois parâmetros de regularização, apresentando acentuada dificuldade operacional.

Comparando os métodos de inversão apresentados nesta tese com alguns dos métodos anteriores, podemos destacar que a introdução de um funcional regularizador leva a estabilidade a solução estimada, tornando nossos métodos mais robustos que no caso do método apresentado por CHACRAVARTI e SUNDARARAJAN (2007). No caso de estimativa de relevos do embasamento predominantemente suaves, como os métodos apresentados por BARBOSA et al. (1997) e (2007), nosso método ainda presume que há variação no

contraste de densidade com a profundidade e estima os parâmetros que definem esta variação. No caso de estimativa de relevos do embasamento controlados por falhamentos, a inversão com vínculo da variação total apresenta vantagens em relação à suavidade ponderada (BARBOSA et al., 1999), por não exigir informação a priori a respeito da profundidade máxima da bacia, e, em relação à regularização entrópica (OLIVEIRA, 2007), por não exigir a sintonia de dois parâmetros de regularização.

Testes com dados sintéticos demonstram a ação dos funcionais estabilizadores usados nos dois métodos de inversão de dados gravimétricos apresentados nesta tese. Em todos os testes verificamos a estabilidade da solução estimada e a consequente independência desta estimativa à aproximação inicial das profundidades do embasamento. Apresentamos também resultados de testes com dados sintéticos que mostram a eficiência de ambos os métodos quando usados para estimar relevos de embasamento muito complexos, cujas estruturas geológicas não podem ser facilmente deduzidas pela inspeção da anomalia gravimétrica.

Os dois métodos de inversão de dados gravimétricos apresentados nesta tese foram aplicados ao conjunto de dados gravimétricos e de perfis de densidade da Bacia de Almada, localizada no litoral da Bahia, Brasil. Ambos os métodos mapearam um relevo do embasamento em conformidade com o arcabouço estrutural conhecido da sísmica, no entanto os detalhes estruturais, como a presença de falhas de gravidade, foram melhores revelados pela inversão com variação total.

## 2.1 – Problema direto

Seja uma bacia sedimentar com embasamento homogêneo e sedimentos heterogêneos. Presumimos que o contraste de densidade entre o embasamento e os sedimentos diminui com a profundidade,  $z$ , de acordo com uma lei parabólica (RAO et al., 1994)

$$\Delta\rho(z) = \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 + \alpha z)^2}, \quad (2.1.1)$$

sendo  $\Delta\rho_0$  o contraste de densidade na superfície da Terra expresso em  $\text{g/cm}^3$  e  $\alpha$  um fator que controla o gradiente do contraste de densidade com a profundidade, expresso em  $\text{g.cm}^{-3}/\text{km}$ . A Figura 2.1.1 mostra uma curva teórica de variação do contraste de densidade, entre sedimento e embasamento, com a profundidade, segundo uma lei parabólica definida pela equação 2.1.1.

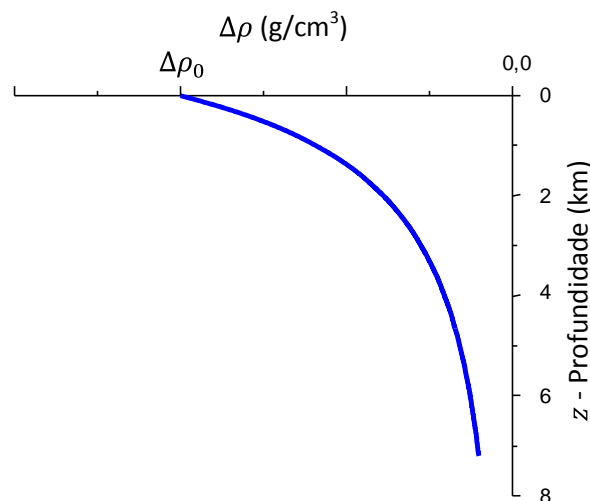


Figura 2.1.1 – Exemplo teórico do decaimento parabólico (equação 2.1.1) do contraste de densidade com a profundidade, definido pelo par  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$ .

Seja uma interface arbitrária separando o pacote sedimentar heterogêneo do embasamento homogêneo. Para estimar o relevo desta interface, selecionamos uma região

finita no espaço  $x - y$ , contendo completamente a projeção horizontal da bacia, e discretizamos esse espaço, ao longo das direções  $x$  e  $y$ , em uma malha de  $m_x \times m_y$  prismas 3D verticais justapostos, (Figura 2.1.2). O topo de cada prisma coincide com a superfície da Terra, nível  $z_0 = 0,0$  km, e todos os prismas têm dimensões horizontais iguais a  $dx$  e  $dy$  ao longo das direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. As espessuras  $p_j$  dos  $M$  prismas ( $M = m_x \times m_y$ ) são os elementos do vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$ , ( $p_j, j = 1, \dots, M$ ) a serem estimados a partir dos dados gravimétricos. Essas espessuras dos  $M$  primas representam as profundidades do embasamento em  $M$  pontos discretos e estão relacionadas à  $i$ -ésima componente vertical do campo gravimétrico teórico  $g_i$ , no  $i$ -ésimo ponto de observação ( $x = x_i, y = y_i$  e  $z = z_i$ ), pela relação não linear

$$g_i(x_i, y_i, z_i) = \sum_{j=1}^M f_i(p_j, \Delta\rho_0, \alpha), \quad i = 1, \dots, M. \quad (2.1.2)$$

A função não linear  $f_i(p_j, \Delta\rho_0, \alpha) \equiv f_i$  produzida por um único prisma com espessura  $p_j$  computada no  $i$ -ésimo ponto de observação ( $x_i, y_i, z_i$ ), pode ser escrita como

$$f_i = \gamma \int_0^{p_j} \int_{y_{0j}-dy/2}^{y_{0j}+dy/2} \int_{x_{0j}-dx/2}^{x_{0j}+dx/2} \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 + \alpha z'_j)^2} \cdot \frac{z_i - z'_j}{\left[ (x_i - x'_j)^2 + (y_i - y'_j)^2 + (z_i - z'_j)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dx'_j dy'_j dz'_j, \quad (2.1.3)$$

sendo  $\gamma$  a constante gravitacional de Newton, ( $x'_j, y'_j, z'_j$ ) as coordenadas de um pequeno prisma de volume ( $dv_j = dx'_j \cdot dy'_j \cdot dz'_j$ ) dentro do  $j$ -ésimo prisma e  $x_{0j}$  e  $y_{0j}$  as coordenadas do centro do  $j$ -ésimo prisma em relação a  $x$  e  $y$ , respectivamente. CHAKRAVARTHI et al. (2002) apresentaram uma expressão fechada para a integral em 2.1.3. No Apêndice A apresentamos uma adaptação desta fórmula fechada para esta tese.

Por simplicidade, presumimos que os dados gravimétricos são interpolados em uma malha regularmente espaçada (Figura 2.1.2) e que as coordenadas  $x$  e  $y$  de cada ponto de observação coincidem com as respectivas coordenadas horizontais dos centros dos prismas. O termo  $g_i$  define o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{g} \equiv (g_1, \dots, g_M)^T$  que contém a

anomalia gravimétrica teórica causada por  $M$  prismas que simulam um pacote sedimentar com contraste de densidade que decai com a profundidade segundo a equação 2.1.1. O sobrescrito  $T$  representa transposição.

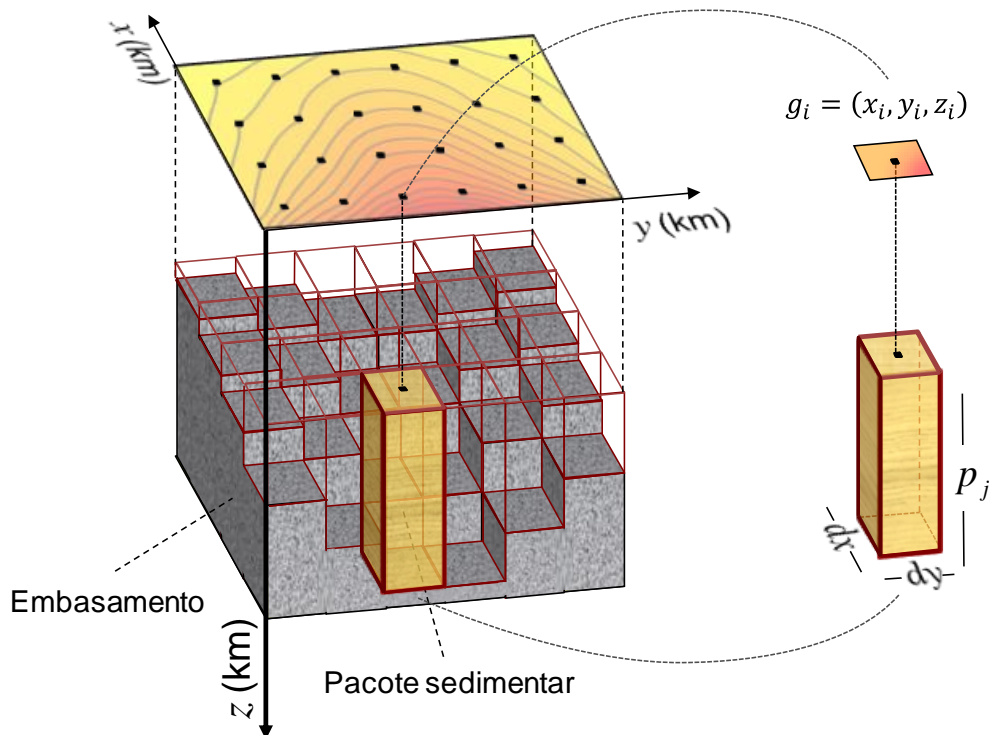


Figura 2.1.2 – Modelo interpretativo – Anomalia gravimétrica (linhas de contorno) interpoladas em uma malha regularmente espaçada (pontos pretos) produzida por um embasamento homogêneo coberto por um pacote sedimentar (não mostrado) em que o contraste de densidade varia com a profundidade segundo uma lei parabólica. O volume da subsuperfície contendo o pacote sedimentar é discretizado por uma malha  $m_x \times m_y$  de  $M$  prismas 3D cujas dimensões horizontais são iguais a  $dx$  e  $dy$ , respectivamente, nas direções  $x$  e  $y$  e cujas espessuras  $p_j$  são os parâmetros a serem estimados. O detalhe à direita mostra o  $i$ -ésimo prisma 3D e a  $i$ -ésima componente vertical da anomalia gravimétrica  $g_i$  na posição  $(x_i, y_i, z_i)$ .

## 2.2 – Problema inverso

Seja  $\mathbf{g}^0 \equiv (g^0_1, \dots, g^0_M)^T$  um vetor  $M$ -dimensional contendo as observações da componente vertical da anomalia gravimétrica presumivelmente produzidas pelo relevo do embasamento de uma bacia sedimentar. Os parâmetros a serem estimados (vetor  $\mathbf{p}$  contendo as profundidades do embasamento em  $M$  pontos discretos de uma malha  $m_x \times m_y$ ) estão relacionados aos dados gravimétricos através da relação não linear dada pela



equação 2.1.2. O problema inverso não linear de estimar  $\mathbf{p}$  a partir dos dados gravimétricos pode ser formulado como um problema de minimização, em relação a  $\mathbf{p}$ , do funcional

$$\phi_g = \frac{1}{M} \|\mathbf{g} - \mathbf{g}^0\|_2^2, \quad (2.2.1)$$

em que  $\|\cdot\|_2$  é a norma Euclidiana e  $\mathbf{g}$  é um vetor  $M$ -dimensional cujo  $i$ -ésimo elemento contém a componente vertical da anomalia teórica computada no  $i$ -ésimo ponto de observação (equação 2.1.2). Como presumimos uma variação do contraste de densidade com a profundidade segundo uma lei parabólica, então  $\mathbf{g}$  depende não só das espessuras dos  $M$  prismas ( $\mathbf{p}$ ), como também dos parâmetros  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  (equação 2.1.1). Assim  $\mathbf{g} \equiv \mathbf{g}(\mathbf{p}, \Delta\rho_0, \alpha)$ .

A minimização do funcional não linear  $\phi_g$  (equação 2.2.1) em relação a  $\mathbf{p}$  pode ser realizada iterativamente por uma família de algoritmos denominados métodos do gradiente aceitável. Dentre os métodos do gradiente aceitável, destacamos o método de Gauss-Newton. O método de Gauss-Newton consiste dos seguintes passos. Primeiro expande-se o funcional  $\phi_g$  em série de Taylor em torno da aproximação  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$  estimada na  $k$ -ésima iteração até o termo de segunda ordem, i.e.:

$$\phi_g(\hat{\mathbf{p}}_{(k)} + \Delta\mathbf{p}_{(k)}) \cong \phi_g(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) + \Delta\mathbf{p}_{(k)}^T \mathbf{j}_k^g + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{p}_{(k)}^T \mathbf{H}_{(k)}^g \Delta\mathbf{p}_{(k)}, \quad (2.2.2)$$

em que  $\Delta\mathbf{p}_k$  ( $M \times 1$ ) é o vetor de perturbação dos parâmetros, na  $k$ -ésima iteração,  $\mathbf{j}_{(k)}^g$  ( $M \times 1$ ) é o vetor-gradiente do funcional  $\phi_g$  em relação ao vetor  $\mathbf{p}$  avaliado em  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ , e  $\mathbf{H}_{(k)}^g$  ( $M \times M$ ) é a matriz Hessiana (matriz de derivada segunda) do funcional  $\phi_g$  em relação ao vetor  $\mathbf{p}$  avaliada em  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ . Em seguida, o método de Gauss-Newton calcula o gradiente da função expandida truncada  $\phi_g(\hat{\mathbf{p}}_{(k)} + \Delta\mathbf{p}_{(k)})$ , em relação ao vetor  $\Delta\mathbf{p}_{(k)}$ , e iguala o resultado ao vetor nulo, obtendo a equação normal para o estimador  $\Delta\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$  do vetor perturbação  $\Delta\mathbf{p}$  na  $k$ -ésima iteração:

$$\mathbf{H}_{(k)}^g \Delta\hat{\mathbf{p}}_{(k)} = - \mathbf{j}_{(k)}^g. \quad (2.2.3)$$

Finalmente, o método de Gauss-Newton obtém uma nova estimativa para o vetor de parâmetros calculando

$$\hat{\mathbf{p}}_{(k+1)} = \hat{\mathbf{p}}_{(k)} + \Delta \hat{\mathbf{p}}_{(k)}. \quad (2.2.4)$$

Na equação 2.2.3 o vetor-gradiente é dado por

$$\mathbf{j}_{(k)}^g = 2 \mathbf{A}_{(k)}^T (\mathbf{A}_{(k)} \hat{\mathbf{p}}_{(k)} - \mathbf{g}^0) \quad (2.2.5)$$

e a matriz Hessiana, empregando-se a aproximação de Gauss-Newton, é definida como

$$\mathbf{H}_{(k)}^g = 2 \mathbf{A}_{(k)}^T \mathbf{A}_{(k)}. \quad (2.2.6)$$

Nas equações 2.2.5 e 2.2.6,  $\mathbf{A}_{(k)}$  é a matriz de sensibilidade avaliada na  $k$ -ésima iteração (em  $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ ) e cujo  $ij$ -ésimo elemento é definido como

$$\mathbf{A}_{(k)} \equiv \{a_{ij(k)}\} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}_j} \right|_{\mathbf{p}=\hat{\mathbf{p}}_{(k)}} \quad (2.2.7)$$

A equação do  $ij$ -ésimo elemento da matriz  $\mathbf{A}_{(k)}$  e os detalhes computacionais para o cálculo desta matriz são descritos no Apêndice B.

O problema inverso não linear de estimar um vetor  $\hat{\mathbf{p}}$  apenas minimizando-se o funcional  $\phi_g$  (equação 2.2.1) é um problema mal-posto apresentando solução sem unicidade e sem estabilidade. Assim, para transformar este problema mal-posto em outro bem posto é necessário incorporar informação geológica a priori. Neste trabalho incorporamos dois tipos de informação a priori para estimarmos as profundidades do relevo do embasamento. No problema I incorpora-se a informação de que o relevo do embasamento apresenta superfície predominantemente suave e no problema II incorpora-se a informação de que há descontinuidades locais no relevo do embasamento.

### 2.2.1 – Problema I: estimativa de um relevo do embasamento predominantemente suave

Para obter uma estimativa única e estável das profundidades do embasamento em  $M$  pontos discretos de uma malha  $m_x \times m_y$ , procuramos uma solução que satisfaça a anomalia gravimétrica observada,  $g^0$ , que honre as informações de furos de sondagens sobre as profundidades do embasamento e que seja uma superfície do relevo do embasamento globalmente suave. Para tanto, formulamos o problema inverso vinculado e não linear de estimar as profundidades do embasamento 3D através da minimização de:

$$\phi_S = \|\mathbf{R}\mathbf{p}\|_2 \quad (2.2.1.1)$$

e

$$\phi_B = \sum_{k=1}^B \left[ \sum_{j=1}^M W_{kj}^B p_j - z_k^B \right]^2, \quad (2.2.1.2)$$

sujeito a

$$\phi_g = \delta^2 \quad (2.2.1.3)$$

e

$$p_j > 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (2.2.1.4)$$

No funcional  $\phi_S$  (equação 2.2.1.1)  $\mathbf{R}$  é uma matriz  $L \times M$  representando o operador diferencial discreto de primeira ordem ao longo das direções  $x$  e  $y$ . O funcional  $\phi_S$  é o regularizador de Tikhonov de primeira ordem (TIKHONOV e ARSENIN, 1977) minimizado via norma Euclidiana denotada por  $\|\cdot\|_2$ . Devido ao produto  $\mathbf{R}\mathbf{p}$  ser uma aproximação por diferenças finitas da primeira derivada de  $\mathbf{p}$  ao longo das direções  $x$  e  $y$ , então através da minimização de  $\|\mathbf{R}\mathbf{p}\|_2$  (funcional 2.2.1.1), ficam favorecidas as soluções que são relativamente suaves e, implicitamente, é introduzida a informação geológica de que o relevo do embasamento da bacia sedimentar é globalmente suave (BARBOSA et al., 1997). Por esta razão  $\phi_S$  é chamado de funcional da suavidade global. Especificamente, o

produto  $R\mathbf{p}$  resulta em um vetor  $L$ -dimensional, cujo  $l$ -ésimo elemento é a diferença entre dois elementos do vetor  $\mathbf{p}$  de parâmetros  $(p_i - p_j)$  que representam espessuras de prismas espacialmente vizinhos. No Apêndice C exemplificamos a matriz  $R$  e o vetor resultante do produto  $R\mathbf{p}$ .

O funcional  $\phi_B$ , descrito pela equação 2.2.1.2, introduz informação sobre a profundidade do embasamento em alguns pontos fornecida por furos de sondagem, forçando a proximidade entre as profundidades conhecidas e estimadas nas coordenadas horizontais destes poços, ou próximas a eles. Nesse funcional,  $B$  é o número de furos de sondagem interceptando o relevo do embasamento nas profundidades  $z_k^B$ ,  $k = 1, \dots, B$ , que formam o vetor  $\mathbf{z}_k^B$  ( $B \times 1$ ), e  $W_{kj}^B$  é o  $kj$ -ésimo elemento de uma matriz  $\mathbf{W}^B$  ( $B \times M$ ) que contém todos os elementos nulos exceto um único elemento não nulo por linha, igual a um. Este elemento não nulo, na  $k$ -ésima linha de  $\mathbf{W}^B$  está associado ao elemento do vetor  $\mathbf{p}$ , cuja correspondente coordenada horizontal é a mais próxima à coordenada horizontal do  $k$ -ésimo poço.

Na equação 2.2.1.3,  $\phi_g$  é definido pela equação 2.2.1 e  $\delta^2$  é o valor esperado para a média da soma dos quadrados da realização do ruído nos dados gravimétricos observados.

O vetor  $\hat{\mathbf{p}}$ , contendo as  $M$  estimativas das profundidades do embasamento, que soluciona o problema de otimização vinculado dado pela minimização dos funcionais 2.2.1.1 e 2.2.1.2 sujeito a explicar os dados geofísicos (condição 2.2.1.3), será obtido minimizando-se o funcional não vinculado:

$$\lambda_S(\mathbf{p}) = \phi_g + \mu_{(\delta)}(\mu_S\phi_S + \mu_B\phi_B), \quad (2.2.1.5a)$$

$$\text{sujeito a } p > 0, \quad (2.2.1.5b)$$

em que,  $\mu_{(\delta)}$  é o parâmetro de regularização,  $\mu_S$  e  $\mu_B$  são escalares positivos e representam pesos associados aos funcionais  $\phi_S$  e  $\phi_B$ , respectivamente. Resolvemos este problema não linear iterativamente pelo método Gauss-Newton empregando-se a

estratégia de MARQUARDT (1963). Primeiro expande-se  $\lambda_S(\mathbf{p})$  em série de Taylor em torno da aproximação  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$  obtida na  $k$ -ésima iteração conservando apenas os termos até a segunda ordem; em seguida deriva-se a função expandida e truncada,  $\lambda_S(\hat{\mathbf{p}}_{(k)} + \Delta\mathbf{p}_{(k)})$  em relação a  $\Delta\mathbf{p}_{(k)}$  e iguala-se ao vetor nulo. Desta forma, obtemos a equação normal para a estimativa de  $\Delta\mathbf{p}_{(k)}$ :

$$\mathbf{H}_{(k)}\Delta\hat{\mathbf{p}}_{(k)} = -\mathbf{j}_{(k)}. \quad (2.2.1.6)$$

Neste caso, a matriz Hessiana do funcional  $\lambda_S(\mathbf{p})$  é

$$\mathbf{H}_{(k)} = \mathbf{H}_{(k)}^g + \mu_{(\delta)}(\mu_S\mathbf{H}^S + \mu_B\mathbf{H}^B) \quad (2.2.1.7)$$

e o vetor-gradiente é

$$\mathbf{j}_{(k)} = \mathbf{j}_{(k)}^g + \mu_{(\delta)}(+\mu_S\mathbf{j}_{(k)}^S + \mu_B\mathbf{j}_{(k)}^B), \quad (2.2.1.8)$$

sendo

$$\mathbf{j}_{(k)}^g = 2\mathbf{A}_{(k)}^T(\mathbf{A}_{(k)}\hat{\mathbf{p}}_{(k)} - \mathbf{g}^0), \quad (2.2.1.9a)$$

$$\mathbf{j}_{(k)}^S = 2\mathbf{R}^T\mathbf{R}\hat{\mathbf{p}}_{(k)} \quad (2.2.1.9b)$$

e

$$\mathbf{j}_{(k)}^B = 2\mathbf{W}_B^T(\mathbf{W}_B\hat{\mathbf{p}}_{(k)} - \mathbf{z}_B), \quad (2.2.1.9c)$$

os vetores-gradientes avaliados em  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$  dos funcionais  $\phi_g$ ,  $\phi_S$  e  $\phi_B$ , respectivamente, e

$$\mathbf{H}_{(k)}^g = 2\mathbf{A}_{(k)}^T\mathbf{A}_{(k)}, \quad (2.2.1.10a)$$

$$\mathbf{H}^S = 2\mathbf{R}^T\mathbf{R} \quad (2.2.1.10b)$$

e

$$\mathbf{H}^B = 2\mathbf{W}_B^T\mathbf{W}_B, \quad (2.2.1.10c)$$

as matrizes Hessianas avaliadas em  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$  dos funcionais  $\phi_g$ ,  $\phi_S$  e  $\phi_B$ , respectivamente. Note que as matrizes Hessianas dos funcionais  $\phi_S$  e  $\phi_B$  ( $\mathbf{H}^S$  e  $\mathbf{H}^B$ ) são invariantes a cada iteração, pois são independentes da aproximação  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ . A estratégia de MARQUARDT (1963) foi aplicada em combinação com a aproximação de Gauss-Newton para a matriz Hessiana do funcional geofísico ( $\mathbf{H}^g$ ) a cada iteração (SILVA et al., 2001) ao invés de

combiná-la com o método de Newton, que calcula as derivadas de segunda ordem e demandam um elevado esforço computacional.

Finalmente, o vínculo de positividade (inequação 2.2.1.4, 2.2.1.5b) é introduzido por uma transformação homeomórfica (e.g., BARBOSA et al., 1999).

O algoritmo de inversão é interrompido quando não há mais significativa variação do funcional  $\lambda_S(\mathbf{p})$  (equação 2.2.1.5). Na prática a convergência ocorre quando, em uma  $k$ -ésima iteração, a seguinte inequação é satisfeita:

$$\left| \frac{\lambda_S(\hat{\mathbf{p}}_{(k)}) - \lambda_S(\hat{\mathbf{p}}_{(k-1)})}{\lambda_S(\hat{\mathbf{p}}_{(k-1)})} \right| \leq 0.01 . \quad (2.2.1.11)$$

A estimação do relevo do embasamento através da minimização do funcional  $\lambda_S(\mathbf{p})$  (equação 2.2.1.5a) incorpora o funcional de regularização de Tikhonov de primeira ordem (equação 2.2.1.1). A minimização do funcional  $\phi_S$  impõe o mínimo da norma Euclidiana da primeira derivada dos parâmetros nas direções  $x$  e  $y$ . Na literatura geofísica, a solução estimada minimizando-se o funcional  $\phi_S$  (equação 2.2.1.1) é conhecida por solução de mínima estrutura ou solução com achatamento ou solução com máxima suavidade global. Nesse trabalho, o problema inverso de minimizar o funcional  $\lambda_S(\mathbf{p})$  (equação 2.2.1.5a) será chamado de inversão com Suavidade Global (SG). Esta inversão impõe um certo grau de suavidade às estimativas do relevo do embasamento. No entanto, essa suavidade pode não representar informação factual a respeito deste relevo do embasamento. Portanto, a inversão SG é particularmente adequada à interpretação de uma interface suave separando dois meios; porém, não é adequada se aplicada a relevos descontínuos.

## 2.2.2 – Problema II: estimativa de um relevo do embasamento com descontinuidades locais

Para gerar soluções estáveis que recuperem superfícies globalmente suaves, mas que permitam descontinuidades locais no relevo de embasamento de bacias sedimentares, minimizamos a variação total dos parâmetros que é chamada de inversão usando Variação Total (VT) (RUDIN et al., 1992; ACAR e VOGEL, 1994).

Nesta seção reformulamos o problema inverso vinculado não linear de estimar as profundidades  $\hat{p}$  do embasamento 3D a partir das observações gravimétricas  $g^0$ , que apresentamos na seção anterior através do conjunto de relações 2.2.1.1 a 2.2.1.4. Especificamente, eliminaremos o funcional de regularização de Tikhonov de primeira ordem (equação 2.2.1.1) e introduziremos o funcional do regularizador da variação total que é definido como

$$\phi_V = \|\mathbf{R}\mathbf{p}\|_1, \quad (2.2.2.1)$$

em que  $\|\cdot\|_1$  é a norma  $l_1$  (norma 1).

Por definição, a norma  $l_n$  de um vetor genérico  $M$ -dimensional  $\mathbf{v}$ , para  $n \geq 1$ , é dada por:

$$\|\mathbf{v}\|_n = \left[ \sum_{i=1}^M |\mathbf{v}_i|^n \right]^{1/n}. \quad (2.2.2.2)$$

Assim, se  $n = 2$ , temos a expressão da norma  $l_2$  (ou norma Euclidiana), e, se  $n = 1$ , temos a norma  $l_1$ .

Utilizando as definições da norma  $l_n$  (equação 2.2.2.2) e do produto  $\mathbf{R}\mathbf{p}$  (Apêndice C), o funcional da variação total  $\phi_V$  (equação 2.2.2.1) é reescrito como:

$$\phi_V = \sum_{i=1}^L |p_i - p_j|_l, \quad (2.2.2.3)$$

em que  $p_i$  e  $p_j$  são o  $l$ -ésimo par de parâmetros espacialmente adjacentes e  $L$  é o número total de pares de parâmetros adjacentes ao longo das direções  $x$  e  $y$ .

Definimos o problema II como a inversão com regularização da Variação Total (VT). Matematicamente, formulamos o problema inverso vinculado e não linear de estimar as profundidades do embasamento 3D através da minimização dos funcionais  $\phi_V$  (equação 2.2.2.1) e  $\phi_B$  (equação 2.2.1.2) sujeito ao ajuste dos dados geofísicos  $\phi_g$  (equação 2.2.1.3) e ao vínculo de positividade (inequação 2.2.1.4). Este problema de otimização vinculado é transformado no problema inverso não vinculado de minimizar o funcional

$$\lambda_V(\mathbf{p}) = \phi_g + \mu_{(\delta)}(\mu_V\phi_V + \mu_B\phi_B), \quad (2.2.2.4)$$

em que  $\mu_{(\delta)}$  é o parâmetro de regularização,  $\mu_V$  e  $\mu_B$  são escalares positivos e representam pesos associados aos funcionais  $\phi_V$  e  $\phi_B$ , respectivamente. O problema de minimizar o funcional não vinculado  $\lambda_V(\mathbf{p})$  será resolvido de modo análogo ao descrito na inversão SG. Dessa forma, a solução estimada minimizando-se  $\lambda_V(\mathbf{p})$  é obtida iterativamente pelo método de Gauss-Newton adaptado com a estratégia de MARQUARDT (1963). Para tanto, primeiro expande-se  $\lambda_V(\mathbf{p})$  em série de Taylor em torno da aproximação  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$  obtida na  $k$ -ésima iteração, conservando-se apenas os termos até a segunda ordem. Em seguida, deriva-se a função expandida e truncada,  $\lambda_V(\hat{\mathbf{p}}_{(k)} + \Delta\mathbf{p}_{(k)})$ , em relação a  $\Delta\mathbf{p}_{(k)}$  e iguala-se ao vetor nulo. Novamente a equação normal para a estimativa de  $\Delta\mathbf{p}_{(k)}$  é dada por

$$\mathbf{H}_{(k)}\Delta\hat{\mathbf{p}}_{(k)} = -\mathbf{j}_{(k)}. \quad (2.2.2.5)$$

Como vimos anteriormente na minimização do funcional  $\lambda_S(\mathbf{p})$  (equação 2.2.1.5a), a matriz Hessiana  $\mathbf{H}_{(k)}$  e o vetor-gradiente  $\mathbf{j}_{(k)}$  equações 2.2.1.7 e 2.2.1.8, respectivamente, envolvem as somas das matrizes Hessianas e dos vetores-gradientes correspondentes a cada um dos funcionais que compõem o funcional  $\lambda_V(\mathbf{p})$ . No caso da minimização do funcional  $\lambda_V(\mathbf{p})$  (equação 2.2.2.4), a matriz Hessiana e o vetor-gradiente do funcional  $\lambda_V(\mathbf{p})$ , usados para a estimativa iterativa do vetor perturbação (equação 2.2.2.5), também envolvem as somas das matrizes Hessianas e dos vetores-gradiente correspondentes a



cada um dos funcionais que compõem o funcional  $\lambda_V(\mathbf{p})$  a ser minimizado. Assim o novo vetor-gradiente  $\mathbf{j}_{(k)}$  do funcional  $\lambda_V(\mathbf{p})$  avaliado em  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$  é dado por:

$$\mathbf{j}_{(k)} = \mathbf{j}_{(k)}^g + \mu_{(\delta)}(+\mu_V \mathbf{j}_{(k)}^V + \mu_B \mathbf{j}_{(k)}^B), \quad (2.2.2.6)$$

em que os vetores  $\mathbf{j}_{(k)}^g$  e  $\mathbf{j}_{(k)}^B$  foram definidos, respectivamente, pelas equações 2.2.1.9.a e 2.2.1.9.c, e a nova matriz Hessiana  $\mathbf{H}_{(k)}$  é dada por:

$$\mathbf{H}_{(k)} = \mathbf{H}_{(k)}^g + \mu_{(\delta)}(\mu_S \mathbf{H}^V + \mu_B \mathbf{H}^B), \quad (2.2.2.7)$$

em que as matrizes Hessianas  $\mathbf{H}_{(k)}^g$  e  $\mathbf{H}^B$  foram definidas pelas equações 2.2.1.10.a e 2.2.1.10.c, respectivamente.

O  $i$ -ésimo elemento do vetor-gradiente  $\mathbf{j}_{(k)}^V$  ( $M \times 1$ ) (equação 2.2.2.6) é igual à primeira derivada do funcional  $\phi_V$  (equação 2.2.2.1) em relação ao  $i$ -ésimo parâmetro  $p_i$ , avaliado em  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ , portanto, o vetor-gradiente  $\mathbf{j}_{(k)}^V$  é definido como

$$\mathbf{j}_{(k)}^V = \left[ \frac{\partial \phi_V}{\partial p_1} \Big|_{\hat{\mathbf{p}}_{(k)}}, \dots, \frac{\partial \phi_V}{\partial p_i} \Big|_{\hat{\mathbf{p}}_{(k)}}, \dots, \frac{\partial \phi_V}{\partial p_M} \Big|_{\hat{\mathbf{p}}_{(k)}} \right]^T. \quad (2.2.2.8)$$

A matriz Hessiana do funcional  $\phi_V$ , avaliada em  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ ,  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  ( $M \times M$ ) é definida como

$$\mathbf{H}_{(k)}^V = \nabla \mathbf{j}_{(k)}^{V^T}, \quad (2.2.2.9)$$

em que  $\nabla$  é o operador vetorial  $M$ -dimensional cujo  $i$ -ésimo elemento é definido como  $\partial/\partial p_i$ .

Especificamente, o  $ij$ -ésimo elemento da matriz Hessiana  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  é a primeira derivada do  $i$ -ésimo elemento do vetor-gradiente  $\mathbf{j}_{(k)}^V$  (equação 2.2.2.8) em relação ao  $j$ -ésimo parâmetro  $p_j$  avaliado em  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ , i.e.:

$$\mathbf{H}_{(k)}^V = \begin{bmatrix} \frac{\partial j_{1(k)}^V}{\partial p_1} & \frac{\partial j_{2(k)}^V}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial j_{i(k)}^V}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial j_{M(k)}^V}{\partial p_1} \\ \frac{\partial j_{1(k)}^V}{\partial p_2} & \frac{\partial j_{2(k)}^V}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial j_{i(k)}^V}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial j_{M(k)}^V}{\partial p_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial j_{1(k)}^V}{\partial p_j} & \frac{\partial j_{2(k)}^V}{\partial p_j} & \dots & \frac{\partial j_{i(k)}^V}{\partial p_j} & \dots & \frac{\partial j_{M(k)}^V}{\partial p_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial j_{1(k)}^V}{\partial p_M} & \frac{\partial j_{2(k)}^V}{\partial p_M} & \dots & \frac{\partial j_{i(k)}^V}{\partial p_M} & \dots & \frac{\partial j_{M(k)}^V}{\partial p_M} \end{bmatrix}_{p=\hat{\mathbf{p}}_{(k)}} \quad (2.2.2.10)$$

A função explícita para calcular a primeira derivada do funcional  $\phi_V$  (equação 2.2.2.3) em relação ao parâmetro  $p_i$ , e que, portanto, calcula o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{j}_{(k)}^V$  é dada por

$$\frac{\partial \phi_V}{\partial p_i} = \sum_{l=1}^L [\text{sgn}(p_i - p_j)]_l, \quad (2.2.2.11)$$

em que  $p_i$  e  $p_j$  formam o  $l$ -ésimo par de parâmetros espacialmente vizinhos ao longo das direções  $x$  e  $y$  (ver Apêndice C). Note que a função  $\text{sgn}(p_i - p_j)$  apresenta uma singularidade quando a diferença entre as espessuras dos prismas vizinhos  $p_i$  e  $p_j$  for igual a zero. Assim, há uma impossibilidade matemática para calcularmos  $\mathbf{j}_{(k)}^V$  e  $\mathbf{H}_{(k)}^V$ .

Para contornar esta impossibilidade adotamos a aproximação proposta por ACAR e VOGEL (1994), definida por

$$|p_i - p_j| \cong \left[ (p_i - p_j)^2 + \beta \right]^{1/2}, \quad (2.2.2.12)$$

em que  $\beta$  é um escalar pequeno e positivo. Esta estratégia evita a não diferenciabilidade do funcional  $\phi_V$  (equação 2.2.2.3) através da aproximação do valor absoluto por uma função suave e diferenciável. Assim, reescrevendo o funcional da variação total  $\phi_V$  (equação 2.2.2.3), temos

$$\phi_V \cong \sum_{l=1}^L \left[ \left[ (p_i - p_j)^2 + \beta \right]^{1/2} \right]_l. \quad (2.2.2.13)$$

O vetor gradiente e a matriz Hessiana da aproximação do funcional da variação total (equação 2.2.2.13), com relação a  $\mathbf{p}$  avaliados em  $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ , são, respectivamente,

$$\mathbf{j}_{(k)}^V = \mathbf{R}^T \mathbf{d}_{1(k)} \quad (2.2.2.14)$$

e

$$\mathbf{H}_{(k)}^V = \mathbf{R}^T \mathbf{D}_{1(k)} \mathbf{R}, \quad (2.2.2.15)$$

em que  $\mathbf{d}_{1(k)}$  é o vetor  $L$ -dimensional, avaliado em  $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ , cujo  $l$ -ésimo elemento é dado por

$$\mathbf{d}_{1(k)} \equiv \{d_{1l}\} = \frac{\hat{p}_i - \hat{p}_j}{\left[ (\hat{p}_i - \hat{p}_j)^2 + \beta \right]^{\frac{1}{2}}} \Bigg|_{p=\hat{\mathbf{p}}(k)}, \quad (2.2.2.16)$$

e  $\mathbf{D}_1$  é a matriz diagonal, avaliada em  $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}(k)$ , cujo  $l$ -ésimo elemento da diagonal é dado por

$$\mathbf{D}_{1(k)} \equiv \{D_{1ll}\} = \frac{\beta}{\left[ (\hat{p}_i - \hat{p}_j)^2 + \beta \right]^{\frac{3}{2}}} \Bigg|_{p=\hat{\mathbf{p}}(k)}. \quad (2.2.2.17)$$

Nas equações 2.2.2.16 e 2.2.2.17, os subscritos  $i$  e  $j$  definem o  $l$ -ésimo par de parâmetros espacialmente adjacentes nas direções  $x$  e  $y$ , que são estimados na  $k$ -ésima iteração. O Apêndice C mostra a dedução das equações 2.2.2.14 a 2.2.2.17.

Semelhantemente ao definido na inversão SG, o algoritmo de inversão é interrompido quando não há mais significativa variação do funcional  $\lambda_V(\mathbf{p})$  (equação 2.2.2.4). Na prática, a convergência ocorre quando, na  $k$ -ésima iteração, a seguinte inequação é satisfeita:

$$\left| \frac{\lambda_V(\hat{\mathbf{p}}(k)) - \lambda_V(\hat{\mathbf{p}}(k-1))}{\lambda_V(\hat{\mathbf{p}}(k-1))} \right| \leq 0.01. \quad (2.2.2.18)$$

A estimativa de uma interface usando a inversão com regularização pela variação total permite descontinuidades locais no relevo estimado, sendo particularmente adequada à interpretação de relevo abrupto; porém, pode não ser adequada se aplicada a relevos suaves.

### 2.2.3 – Modificação da matriz Hessiana na inversão VT

Como mostrado na seção 2.2.2, a definição da aproximação do funcional  $\phi_V$  (equação 2.2.2.13) garante a definição da matriz Hessiana  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  (equação 2.2.2.15) do

funcional regularizador VT. No entanto, para que esta aproximação seja válida, o valor de  $\beta$  (equação 2.2.2.13) tem que ser pequeno. Portanto, embora a matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  seja diagonal dominante e simétrica, seus elementos não nulos podem ser numericamente muito pequenos dependendo dos valores das diferenças dos parâmetros vizinhos ( $p_i$  e  $p_j$ ), tornando-a uma matriz mal-condicionada. No Apêndice D realizamos a decomposição em autovalores da matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  usando um exemplo numérico simples. Notamos neste exemplo a existência de vários autovalores nulos, ou próximos a zero, em algumas das iterações intermediárias do método de Gauss-Newton com a estratégia de MARQUARDT (1963), levando ao mal-condicionamento da matriz a ser invertida (matriz  $\mathbf{H}_{(k)}$  na equação 2.2.2.5). Conforme mostraremos numericamente no Apêndice D, notamos que a matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  tem seus autovetores, associados aos seus menores autovalores, aproximadamente paralelos aos autovetores associados aos menores autovalores da Hessiana do funcional do ajuste geofísico,  $\mathbf{H}_{(k)}^g$ . Esse fato leva a um número elevado de iterações para se chegar à solução, uma vez que a não ortogonalidade desses autovetores implica um maior vale de ambigüidade na hipersuperfície do espaço dos parâmetros.

Lembramos que, no método do gradiente aceitável, a matriz Hessiana atua como um acelerador da convergência na busca de um mínimo do funcional a ser minimizado. Se a matriz Hessiana, por exemplo, for igual à matriz identidade, temos o método da máxima declividade (ou steepest descent), que é um método de convergência lenta. Então, se na equação normal do estimador  $\Delta\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$  (equação 2.2.2.5) definirmos o vetor-gradiente pela equação 2.2.2.6 e a matriz Hessiana como  $\mathbf{H}_{(k)} = \mathbf{I}$ , estaríamos buscando o mínimo do funcional (2.2.2.4) através do método da máxima declividade. Como optamos pelo método de Gauss-Newton, a matriz Hessiana na equação normal do estimador  $\Delta\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$  (equação 2.2.2.5) foi definida como a soma das matrizes Hessianas dos funcionais  $\phi_g$ ,  $\phi_V$  e  $\phi_B$  (equação 2.2.2.7). No entanto, ressaltamos que nos métodos do gradiente aceitável a matriz  $\mathbf{H}_{(k)}$  (equação 2.2.2.5) pode ser qualquer matriz ( $M \times M$ ) definida positiva. Realizamos a decomposição da matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  em autovalores e autovetores e verificamos que esta tem

posto  $M - 1$ , sendo, portanto, mal condicionada. Adicionalmente, os  $M - 1$  autovalores diferentes de zero podem ser valores desprezíveis se existirem descontinuidades no relevo estimado, uma vez que a diferença entre as espessuras de prismas vizinhos ( $p_i - p_j$ ) é muito grande e os elementos da matriz  $\mathbf{D}_{1(k)}$  (equação 2.2.2.17) são muito pequenos. Como a matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  é uma matriz mal-condicionada em algumas iterações do algoritmo de Gauss-Newton com a estratégia de MARQUARDT (1963), a matriz a ser invertida  $\mathbf{H}_{(k)}$  (equação 2.2.2.5) para a estimativa do vetor perturbação  $\Delta \mathbf{p}_{(k)}$  pode também ser mal-condicionada. Como no método do gradiente aceitável a única restrição é que a matriz  $\mathbf{H}_{(k)}$  (equação 2.2.2.5) seja uma matriz definida positiva, então a estratégia que adotamos para contornar o mal-condicionamento da matriz  $\mathbf{H}_{(k)}$  devido ao mal-condicionamento da matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  foi modificar a matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  (equação 2.2.2.15) por

$$\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V = \varepsilon \mathbf{H}_{(k)}^V + \mathbf{R}^T \mathbf{R}. \quad (2.2.3.1)$$

em que  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$  é a matriz Hessiana do funcional  $\phi_S$ , e  $\varepsilon$  é um escalar introduzido como um fator de peso associado a matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$ .

Podemos reescrever a equação 2.2.3.1, levando em consideração a equação 2.2.2.15, como

$$\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V = \mathbf{R}^T (\varepsilon \mathbf{D}_{1(k)} + \mathbf{I}) \mathbf{R}. \quad (2.2.3.2)$$

Mostramos no Apêndice D, através da decomposição em autovalores e autovetores das matrizes Hessiana  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  e Hessiana modificada  $\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V$  do funcional  $\phi_V$  o melhor condicionamento da matriz  $\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V$ .

Ressaltamos que possivelmente o algoritmo de Marquardt não seja suficiente para resolver o mal-condicionamento da matriz Hessiana  $\mathbf{H}_{(k)}$  (equação 2.2.2.7) uma vez que o parâmetro de Marquardt (MARQUARDT, 1963) pode atingir valores numericamente muito pequenos em algumas iterações.

## 2.3 - Busca sistemática dos parâmetros parabólicos

Para estimar o relevo do embasamento (i.e., obter o vetor  $\hat{\mathbf{p}}$  que é o mínimo do funcional  $\lambda_S(\mathbf{p})$ , equação 2.2.1.5, ou  $\lambda_V(\mathbf{p})$ , equação 2.2.2.4), primeiro precisamos obter as estimativas do contraste de densidade superficial,  $\Delta\rho_0^*$ , e do fator,  $\alpha^*$ , que controlam o decaimento parabólico do contraste de densidade com a profundidade (equação 2.1.1). Para tanto, obtemos o par  $(\Delta\rho_0^*, \alpha^*)$  do seguinte modo: fixamos um par  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  e obtemos um vetor de parâmetros estimados,  $\hat{\mathbf{p}}$ , pela minimização do funcional regularizador de Tikhonov de primeira-ordem usando a norma  $l_2$  (equação 2.2.1.1) sujeito a ajustar as observações gravimétricas dentro dos erros de medida (equação 2.2.1.3), obedecendo ao vínculo de positividade (inequação 2.2.1.4) e sem, no entanto, levar em conta o funcional  $\phi_B$  (equação 2.2.1.2). Especificamente, minimizamos o funcional

$$\xi(\mathbf{p}) = \phi_g + \mu_{(\delta)}\phi_S, \quad (2.3.1)$$

sujeito a

$$p_j > 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (2.3.2)$$

Depois de estimar o vetor  $\hat{\mathbf{p}}(\Delta\rho_0, \alpha)$  avaliamos o funcional

$$\Theta(\Delta\rho_0, \alpha) = \sum_{k=1}^B \left[ \left[ \sum_{j=1}^M W_{kj}^B \hat{p}_j(\Delta\rho_0, \alpha) \right] - z_k^B \right]^2, \quad (2.3.3)$$

sendo  $\hat{p}_j(\Delta\rho_0, \alpha)$  a  $j$ -ésima estimativa da profundidade do embasamento, para um par fixo de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$ . Em seguida, plotamos  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  no plano  $\Delta\rho_0 \times \alpha$ . Finalmente, repetimos este procedimento para diferentes pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$ . Deste modo produzimos um mapeamento discreto de  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  para incrementos de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  fixados pelo intérprete. O mapeamento discreto de  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  permite uma estimativa visual do par mínimo  $(\Delta\rho_0^*, \alpha^*)$  do funcional

2.3.3. Então verificamos se a desigualdade

$$\left[ \frac{1}{M} \sum_{k=1}^B [g_i^0 - g_i(\hat{\mathbf{p}}, \Delta\rho_0^*, \alpha^*)]^2 \right]^{1/2} \leq \sigma, \quad (2.3.4)$$

é válida. Se o ajuste das observações é razoável então o par  $(\Delta\rho_0^*, \alpha^*)$  é aceito. Se a desigualdade não é válida o ajuste dos dados gravimétricos não é aceitável então provavelmente a região de  $\Delta\rho_0 \times \alpha$  não contém o par verdadeiro. Neste caso, a região é ampliada e o processo repetido.

## ANALISE DE SENSIBILIDADE NUMÉRICA

Realizamos testes simples para exemplificar qualitativa e quantitativamente a relação do sinal da anomalia gravimétrica com os demais parâmetros envolvidos no modelo interpretativo.

### 3.1 – Intensidade do sinal da anomalia gravimétrica versus profundidade

Seja um prisma de pequeno volume ( $dv$ ) de dimensões  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , com centro localizado a uma profundidade  $z_p$ , e coordenadas horizontais  $x_p$  e  $y_p$  (prisma azul escuro na Figura 3.1.1). Seja  $g_i(x_p, y_p, z_0)$  (equação 2.1.2) a intensidade de uma única observação da anomalia gravimétrica produzida por este pequeno prisma e medida por um sensor localizado na superfície  $z_0=0,0$  km e nas mesmas coordenadas horizontais  $x_p$  e  $y_p$  do centro do pequeno prisma. Podemos considerar  $g_i(x_p, y_p, 0)$  igual à diferença entre a anomalia gravimétrica produzida por dois prismas, ambos com topo na superfície,  $z_0=0,0$  km, centro localizado nas coordenadas horizontais  $x_p$  e  $y_p$  e

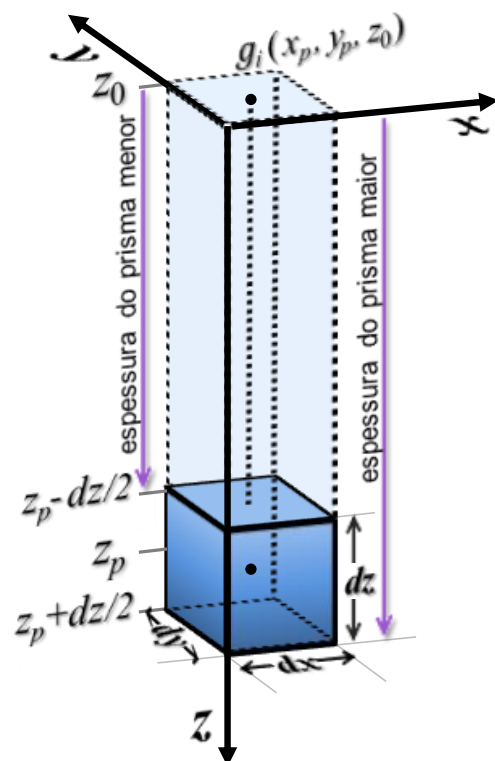


Figura 3.1.1 – Anomalia gravimétrica  $g_i(x_p, y_p, z_0)$  produzida por um prisma de pequeno volume ( $dv$ ), com dimensões  $dx=dy=1,0$  km e  $dz=0,2$  km e centro localizado nas coordenadas  $x_p$ ,  $y_p$ , e  $z_p$ .

dimensões horizontais  $dx$  e  $dy$ . Um dos prismas tem espessura  $z_p + dz/2$  e o outro prisma, tem espessura  $z_p - dz/2$  (Figura 3.1.1). Também consideramos que o contraste de



densidade varia com a profundidade segundo uma lei parabólica definida pela equação 2.1.1. Calculamos a anomalia gravimétrica  $g_i(x_p, y_p, 0)$  produzida pelo pequeno prisma de volume  $dv$  (prisma azul escuro, Figura 3.1.1), porém posicionando o seu centro em várias profundidades. Para tanto, variamos discretamente a profundidade do centro deste pequeno prisma ( $z_p$ ) da profundidade inicial  $z_p = dz/2$  km até a profundidade máxima  $z_p = 7$  km, com um deslocamento de 0,2 km. Este procedimento de calcular os valores de  $g_i(x_p, y_p, z_0)$  para o pequeno prisma em várias profundidades foi repetido sete vezes, com um mesmo contraste de densidade superficial  $\Delta\rho_0$ , mas com sete diferentes constantes de decaimento  $\alpha$  definindo, portanto diferentes leis parabólicas (equação 2.1.1) de variação do contraste de densidade com a profundidade. Na Figura 3.1.2 cada uma das curvas coloridas mostra a variação da intensidade da anomalia gravimétrica  $g_i(x_p, y_p, 0)$  devida à variação da profundidade do pequeno prisma e considerando uma lei parabólica de variação do contraste de densidade com a profundidade. Para cada curva, o valor de  $\alpha$  é tal que o contraste de densidade na profundidade máxima (7 km) é um percentual ( $\eta$ ) do contraste superficial de densidade ( $\Delta\rho_{(z_{max})} = \eta\% \cdot \Delta\rho_0$ ).

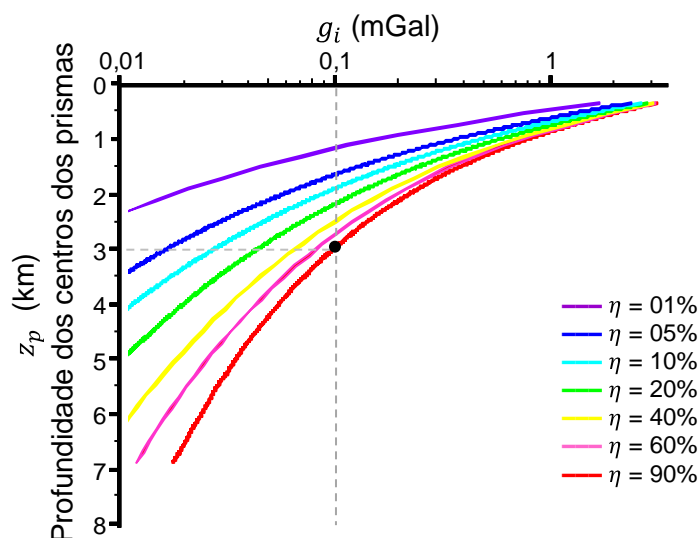


Figura 3.1.2 - Diferentes curvas da variação da anomalia gravimétrica geradas por um prisma de volume  $dv = 0,2 \text{ km}^3$ , cujo centro muda de posição em profundidade. Cada curva é obtida considerando diferentes leis parabólicas de variação do contraste de densidade com a profundidade de modo que o contraste de densidade na profundidade máxima é igual a  $\eta\%$  de  $\Delta\rho_0$ . Em todos os casos  $\Delta\rho_0 = -0,7 \text{ g/cm}^3$  e o sensor está posicionado nas coordenadas horizontais do centro do prisma ( $x_p, y_p$ ) e na superfície ( $z_0 = 0 \text{ km}$ ). O eixo horizontal indica a intensidade da anomalia gravimétrica na escala logarítmica.

A Figura 3.1.2 mostra que mesmo quando há um grande contraste de densidade na máxima profundidade de 7 km (e.g., curva vermelha em que  $\Delta\rho_0 = -0,7 \text{ g/cm}^3$  e  $\eta = 90\%$ ), um prisma de volume  $0,2 \text{ km}^3$  posicionado a uma profundidade maior que 3,0 km produz, na superfície, um sinal gravimétrico com intensidade inferior a 0,1 mGal (ponto preto, Figura 3.1.2). Assim, ilustramos a dificuldade em estimar com precisão o relevo de um embasamento muito profundo a partir da inversão gravimétrica presumindo a variação no contraste de densidade com a profundidade. Esta dificuldade ocorre porque a adição ou não de um volume com algumas centenas de metros e localizado em grandes profundidades, pode significar uma variação no sinal de anomalia gravimétrica muito inferior à precisão instrumental.

### **3.2 – Sinal da anomalia gravimétrica versus as constantes $\Delta\rho_0$ e $\alpha$ que descrevem o decaimento parabólico do contraste de densidade com a profundidade**

Considere uma única observação da anomalia gravimétrica produzida por um único prisma 3D com dimensões horizontais de 1,0 km nas direções  $x$  e  $y$ , espessura de 7,0 km e com topo na superfície da Terra ( $z_0 = 0,0 \text{ km}$ ). Esta observação da anomalia gravimétrica também está localizada na superfície ( $z_0 = 0,0 \text{ km}$ ) e nas mesmas coordenadas horizontais do centro deste prisma. Considere também que o contraste de densidade entre os sedimentos que preenchem este prisma e o embasamento decai em função da profundidade segundo uma lei parabólica (equação 2.1.1), sendo que esta variação do contraste de densidade é definida por um par de constantes  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$ . Realizamos um mapeamento discreto no plano  $\Delta\rho_0 \times \alpha$  da intensidade da anomalia gravimétrica em uma única observação (Figura 3.2.1) produzida por este único prisma considerando diferentes valores de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  para o decaimento do contraste de densidade entre os sedimentos que preenchem este prisma 3D e o embasamento localizado abaixo do prisma.

A Figura 3.2.1 mostra que uma mesma intensidade da observação gravimétrica pode ser produzida por diferentes pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  que definem a variação do contraste de densidade com a profundidade dentro do volume do prisma. Os dois triângulos pretos da Figura 3.2.1 indicam que o mesmo valor da observação gravimétrica (aproximadamente 6,0 mGal) é produzido por dois diferentes pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$ . Podemos notar que há famílias de pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  capazes de produzir, para este prisma, o mesmo valor da observação gravimétrica.

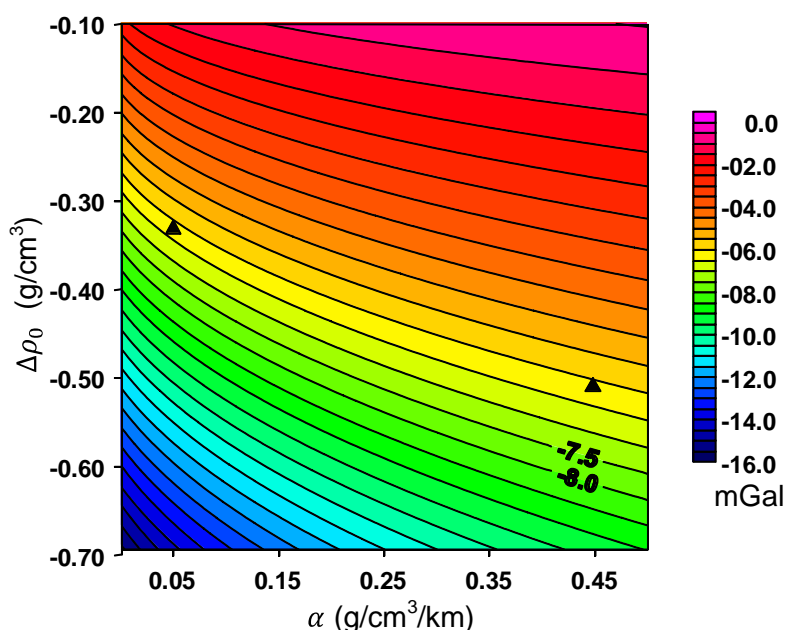


Figura 3.2.1 - Mapa no plano  $\Delta\rho_0 \times \alpha$  do efeito gravimétrico produzido por um único prisma 3D com dimensões 1,0 km nas direções  $x$  e  $y$ , topo em  $z_0 = 0,0$  km e espessura 7 km. Os dois triângulos pretos indicam dois pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  que definem duas diferentes leis parabólicas de variação do contraste de densidade com a profundidade, que produzem a mesma intensidade da anomalia gravimétrica.

Nesse teste, exemplificamos que diferentes distribuições verticais de massa dentro de um mesmo prisma são capazes de produzir o mesmo efeito gravimétrico em um sensor localizado nas mesmas coordenadas horizontais do centro do prisma. No entanto cabe ressaltar que isto ocorre por causa de uma combinação posicional entre o prisma e o sensor.

## RESULTADOS – APLICAÇÃO A DADOS SINTÉTICOS

Neste capítulo apresentamos resultados numéricos das metodologias apresentadas no capítulo dois aplicadas a dados sintéticos. Primeiro, realizamos a validação do modelo direto simulando duas diferentes bacias sedimentares. Em seguida, para testarmos a eficácia das inversões SG e VT simulamos dados gravimétricos sintéticos produzidos por relevos simples e complexos do embasamento e realizamos as correspondentes inversões em cada caso.

No teste sintético simulado com relevo complexo e usando a inversão SG para a reconstituição do relevo do embasamento, testamos o procedimento da busca sistemática dos parâmetros  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  que definem o decaimento parabólico da variação do contraste de densidade com a profundidade. Nesse mesmo exemplo realizamos uma análise espectral em perfis gravimétricos e do relevo da bacia sedimentar simulada, para justificar a necessidade de uma maior (ou menor) quantidade de informações sobre a profundidade do embasamento fornecidas por furos de sondagem para que a busca sistemática seja eficiente na estimativa do par verdadeiro dos parâmetros ( $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$ ) que descrevem a lei parabólica (equação 2.1.1). Ainda nesse exemplo, realizamos uma comparação entre duas inversões SG. Numa inversão supomos que o contraste de densidade varia com a profundidade segundo lei parabólica, e na outra inversão supomos que a densidade é constante. Em ambos os casos realizamos as correspondentes buscas sistemáticas. Simulamos um teste sintético 2D e realizamos uma comparação dos resultados estimados via as inversões VT e SG exemplificando a adequação de cada método. Verificamos para um exemplo 3D sintético com poucos parâmetros a validação da estratégia de cálculo da matriz Hessiana da inversão VT. Finalmente, simulamos uma bacia sedimentar 3D com um relevo complexo fortemente controlado por falhas de gravidade e comparamos as estimativas do relevo obtidas via inversões SG e VT.

## 4.1 – Validação do modelo direto

Realizamos dois testes a fim de validar numericamente a expressão que calcula a componente vertical da anomalia gravimétrica  $g_i$  (equação 2.1.2). Essa componente é definida pelo somatório da função não linear  $f_i$  (equação 2.1.3), cuja solução em forma fechada foi adaptada de CHAKRAVARTHI et al. (2002) e apresentada no Apêndice A. Nesses dois testes simulamos duas bacias sedimentares com diferentes formatos como mostram as Figuras 4.1.1a e b.

No primeiro teste, comparamos duas anomalias gravimétricas, ambas produzidas pela mesma bacia sedimentar simulada com um formato simplificado de um paralelepípedo (Figura 4.1.1a) e com o contraste de densidade variando com a profundidade segundo a lei parabólica (equação 2.1.1) com  $\Delta\rho_0 = -0,52 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha = 0.057 \text{ g.cm}^{-3}/\text{km}$ . Porém essas duas anomalias serão computadas através de duas diferentes estratégias. Na primeira a anomalia gravimétrica é calculada presumindo um decaimento contínuo do contraste de densidade com a profundidade segundo a lei parabólica definida na equação 2.1.1 e usando a solução apresentada no Apêndice A. Na segunda estratégia a anomalia gravimétrica é calculada presumindo uma variação discreta do decaimento do contraste de densidade com a profundidade segundo a mesma lei parabólica usada na primeira estratégia. Para tanto, discretizamos a bacia sedimentar em camadas horizontais finas e calculamos a anomalia gravimétrica produzida por cada camada presumindo um contraste de densidade constante dentro de cada camada horizontal. As camadas horizontais têm contrastes de densidades diferentes ( $\Delta\rho_{(z)}$ ) definidos pela lei parabólica (equação 2.1.1) em que  $z$  é a profundidade do centro da camada. A anomalia gravimétrica total é o somatório das anomalias gravimétricas produzidas por cada uma das finas camadas horizontais.

A Figura 4.1.1c mostra as anomalias gravimétricas produzidas pela bacia sedimentar em formato de paralelepípedo (Figura 4.1.1a) presumindo variação discreta (linhas

contínuas azuis) e contínua (linhas tracejadas vermelhas) do decaimento do contraste de densidade com a profundidade com  $\Delta\rho_0 = -0,52 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha = 0,057 \text{ g.cm}^{-3}/\text{km}$ .

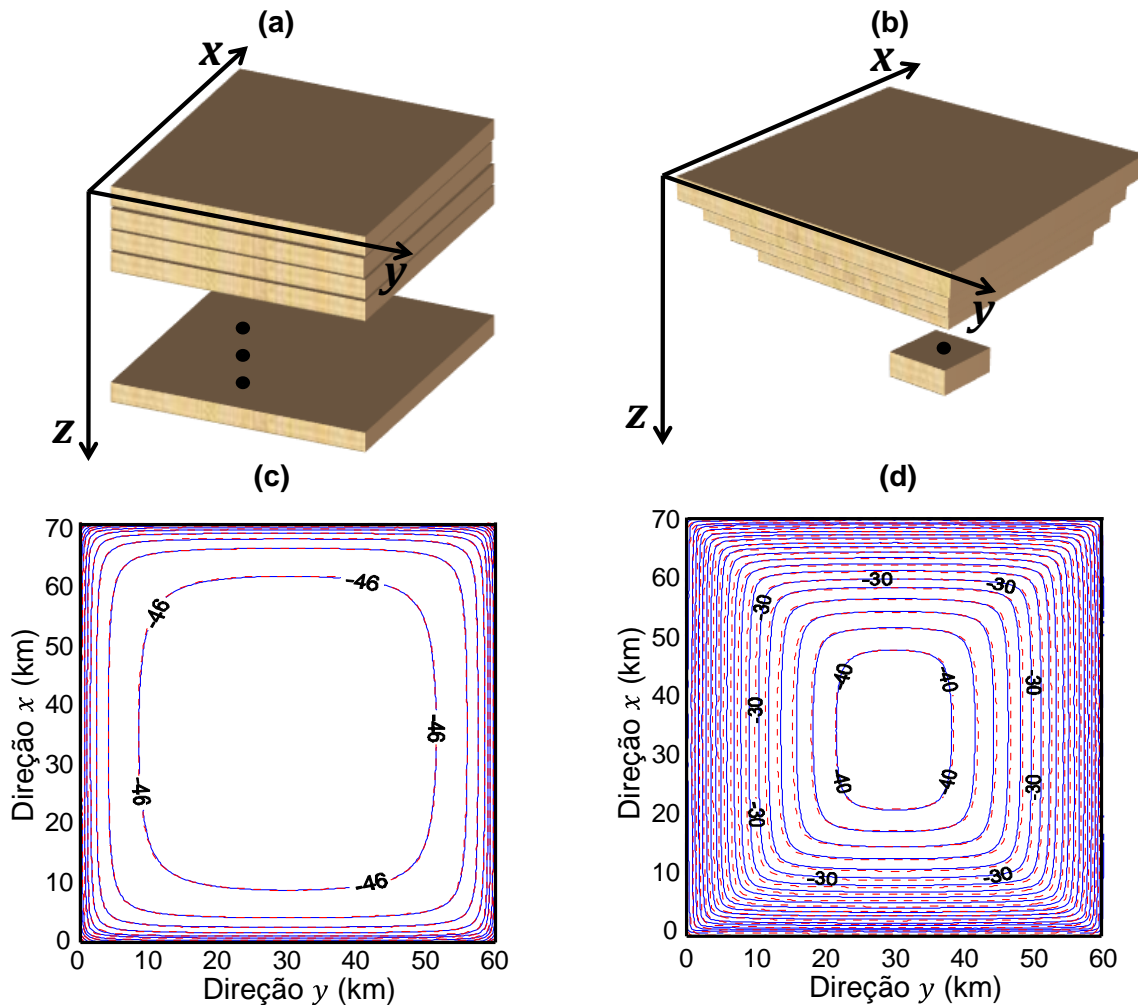


Figura 4.1.1- **(a)** e **(b)** Bacias simuladas com formatos de paralelepípedo e pirâmide invertida, respectivamente, e discretizadas em 600 camadas horizontais. **(c)** e **(d)** Anomalias gravimétricas produzidas pelas bacias simuladas respectivamente em (a) e (b) considerando as variações discreta (linhas contínuas azuis) e contínua (linhas tracejadas vermelhas) do contraste de densidade segundo lei parabólica com  $\Delta\rho_0 = -0,52 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha = 0,057 \text{ g.cm}^{-3}/\text{km}$ .

No segundo teste, as anomalias gravimétricas foram calculadas do mesmo modo que no primeiro teste, apenas modificamos o formato da bacia sedimentar simulada. Neste segundo teste a bacia simulada tem o formato de uma pirâmide invertida (Figura 4.1.1b). Similarmente, computamos as duas anomalias gravimétricas presumindo variações discreta (linhas contínuas azuis, Figura 4.1.1d) e contínua (linhas tracejadas vermelhas, Figura

4.1.1d) do decaimento do contraste de densidade com a profundidade segundo a lei parabólica com  $\Delta\rho_0 = -0,52 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha = 0.057 \text{ g.cm}^{-3}/\text{km}$ .

Em ambos os testes, objetivamos validar numericamente o cálculo da componente vertical da anomalia gravimétrica, presumindo decaimento contínuo do contraste de densidade com a profundidade. Notamos, nesse teste da figura 4.1.1, a perfeita coincidência entre as anomalias gravimétricas computadas com o algoritmo adaptado nesta tese e as anomalias gravimétricas obtidas com a densidade decaindo discretamente com a profundidade.

## **4.2 - Testes em Dados Sintéticos**

### **Problema I**

#### **Estimativa de um relevo do embasamento predominantemente suave**

Nos próximos testes (subseções 4.2.1 e 4.2.2) utilizamos o método de inversão descrito no capítulo 2 como inversão com suavidade global (SG).

#### **4.2.1 – Relevo Simples**

Para as inversões empregadas nos testes desta seção simulamos um relevo do embasamento muito simplificado produzindo um número reduzido de observações gravimétricas. Nestes testes não usamos o vínculo de positividade (inequação 2.2.1.4) e nem informação a priori da profundidade do embasamento fornecidas por furos de sondagem (funcional 2.2.1.2). Desta forma podemos reescrever o problema inverso original (funcionais 2.2.1.1 a 2.2.1.4) como o problema de minimização do funcional

$$\tau(\mathbf{p}) = \phi_g + \mu_{(\delta)}\phi_S, \quad (4.2.1.1)$$

em que  $\phi_S$  e  $\phi_g$  são funcionais definidos respectivamente pelas equações 2.2.1.1 e 2.2.1.3 e  $\mu_{(\delta)}$  é um escalar não negativo denominado parâmetro de regularização. Neste trabalho  $\mu_{(\delta)}$  é escolhido como o menor valor produzindo soluções estáveis.

Analizamos graficamente a estabilidade da solução estimada via a minimização do funcional 4.2.1.1 considerando a influência dos seguintes fatores: (1) diferentes aproximações iniciais, (2) diferentes leis parabólicas de decaimento do contraste de densidade com a profundidade, (3) diferentes bacias simuladas e (4) diferentes seqüências de ruído Gaussiano pseudo-aleatório com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. Especificamente, para acessar a estabilidade da solução produzida pela minimização do funcional  $\tau(\mathbf{p})$  (equação 4.2.1.1) produzimos testes sintéticos simplificados em que ilustramos graficamente o funcional  $\tau(\mathbf{p})$ . Por simplicidade, em todos os testes geramos apenas duas observações gravimétricas corrompidas por ruído. Estas observações são produzidas por dois prismas 3D com dimensões de 1,0 km em ambas as direções  $x$  e  $y$  e com topo na superfície da Terra. As espessuras dos dois prismas são os parâmetros a serem estimados ( $p_1$  e  $p_2$ ) e representam as espessuras dos sedimentos de uma bacia sedimentar. As duas observações gravimétricas estão localizadas na superfície da Terra e coincidem com as coordenadas horizontais dos centros dos prismas. Realizaremos três testes: um simulando embasamentos raso, outro simulando um embasamento profundo e um terceiro teste simulando um embasamento profundo mas sem o estabilizador suavidade, i.e.,  $\mu_{(\delta)} = 0$ . Esses três testes foram efetuados sob a premissa do conhecimento a priori da lei parabólica de decaimento do contraste de densidade com a profundidade.

### Testes com embasamento raso

Realizamos dois testes com dados sintéticos cujas observações foram produzidas com parâmetros verdadeiros iguais a  $p_1^V = 2,0$  km e  $p_2^V = 1,0$  km. As Figuras 4.2.1.1a e



4.2.1.2a mostram uma seção vertical dos prismas verdadeiros (em preto) cujas bases representam o embasamento sedimentar. Nesses dois testes, presumimos que o contraste de densidade na superfície é igual a  $\Delta\rho_0 = -0,7 \text{ g/cm}^3$  e presumimos dois diferentes valores para  $\alpha$ . Portanto, presumimos duas diferentes leis parabólicas de variação do contraste de densidade com a profundidade. As Figuras 4.2.1.1b e 4.2.1.2b mostram estas leis (linha azul) com valores de  $\alpha$  iguais a 0,102 e 0,757  $\text{g.cm}^{-3}/\text{km}$ , respectivamente. Note nessas diferentes leis que na profundidade máxima do embasamento sedimentar ( $z_{max} = 2,0 \text{ km}$ ) os contrastes de densidade atingem valores: **i)** alto, na Figura 4.2.1.1b, em torno de  $-0,425 \text{ g/cm}^3$  (i.e.,  $\Delta\rho_{(z_{max})} = 60\%\Delta\rho_0$ ) e **ii)** baixo, na Figuras 4.2.1.2b, abaixo de  $-0,1 \text{ g/cm}^3$  (i.e.,  $\Delta\rho_{(z_{max})} = 10\%\Delta\rho_0$ ). As Figuras 4.2.1.1c e 4.2.1.2c mostram (no espaço dos parâmetros  $p_1 \times p_2$ ) os funcionais  $\tau(\mathbf{p})$  (equação 4.2.1.1) presumindo o conhecimento a priori das leis parabólicas verdadeiras mostradas nas Figuras 4.2.1.1b e 4.2.1.2b, respectivamente. Tanto na representação de  $\tau(\mathbf{p})$  como na inversão estabelecemos  $\mu_{(\delta)} = 10^{-4}$ . Os funcionais  $\tau(\mathbf{p})$ , mostrados nas Figuras 4.2.1.1c e 4.2.1.2c, são minimizados partindo-se de duas aproximações iniciais (pontos brancos) e interrompendo-se o processo iterativo quando há uma invariância do funcional  $\tau(\mathbf{p})$ . As linhas contínuas verdes e amarelas nas Figuras 4.2.1.1c e 4.2.1.2c mostram os diferentes caminhos percorridos ao longo das sucessivas iterações até alcançar o mínimo de  $\tau(\mathbf{p})$ . As soluções estimadas são mostradas nas Figuras 4.2.1.1c e 4.2.1.2c (asteriscos vermelhos) e nas Figuras 4.2.1.1a e 4.2.1.2a (prismas tracejados vermelhos). Observe que, partindo de duas diferentes aproximações iniciais, estimamos soluções muito próximas entre si, caracterizando a estabilidade da solução para  $\mu_{(\delta)} = 10^{-4}$ .

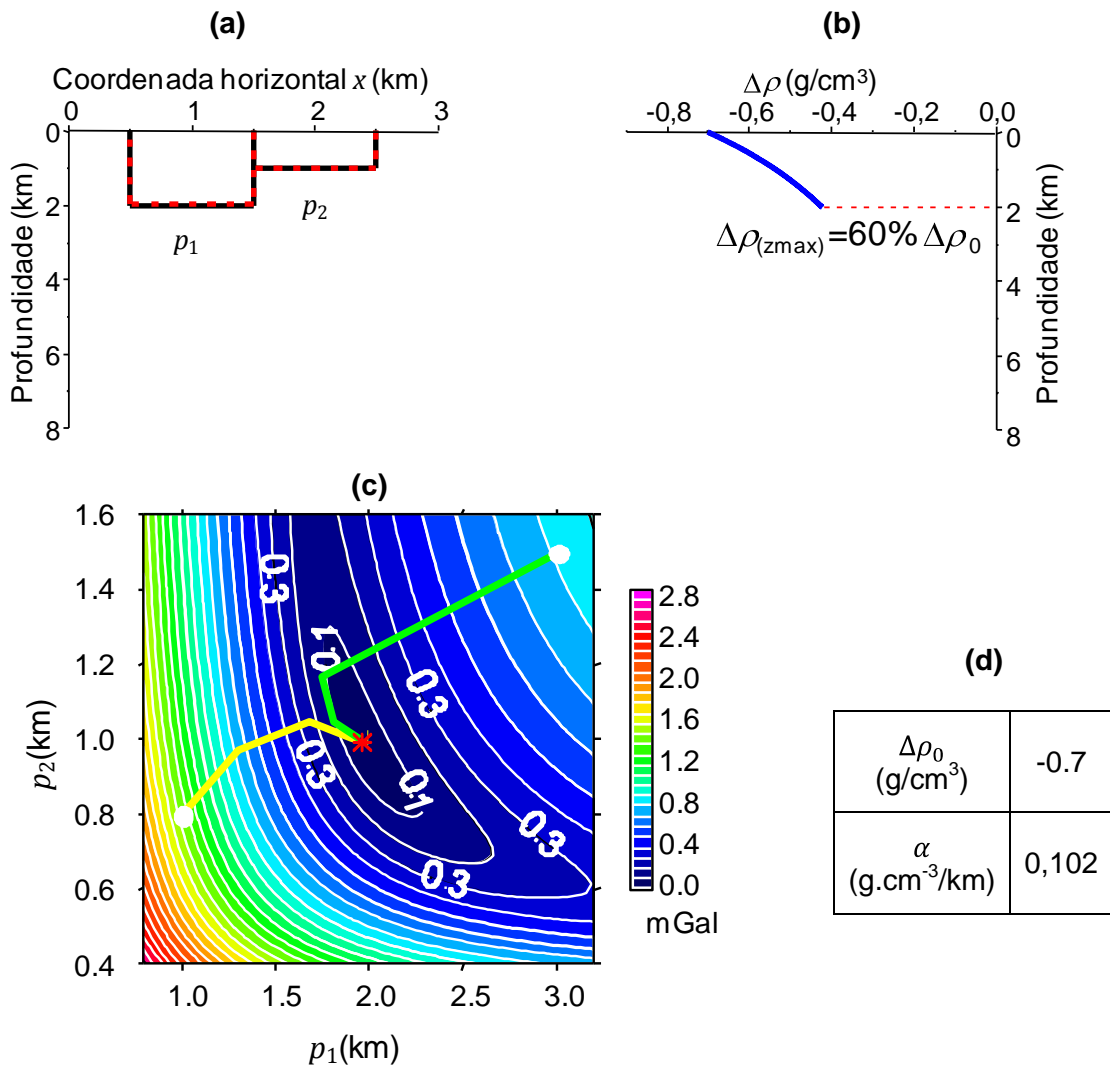


Figura 4.2.1.1 - Embasamento raso (a) Seção vertical em representação 2D das espessuras dos prismas verdadeiros (pretos) e estimados (vermelhos tracejados). (b) Lei parabólica de variação do contraste de densidade com a profundidade definida por  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  indicados em (d). (c) Funcional  $\tau(\mathbf{p})$  (equação 4.2.1.1) com  $\mu_{(\delta)} = 10^{-4}$ , no espaço dos parâmetros  $p_1 \times p_2$ . Parâmetros verdadeiros (cruz amarela), estimados (asteriscos vermelhos) e aproximações iniciais (pontos brancos). As linhas contínuas verde e amarela mostram os diferentes caminhos percorridos ao longo das iterações do método de Gauss-Newton com a estratégia de MARQUARDT (1963). (d) Valores de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  utilizados em (b).

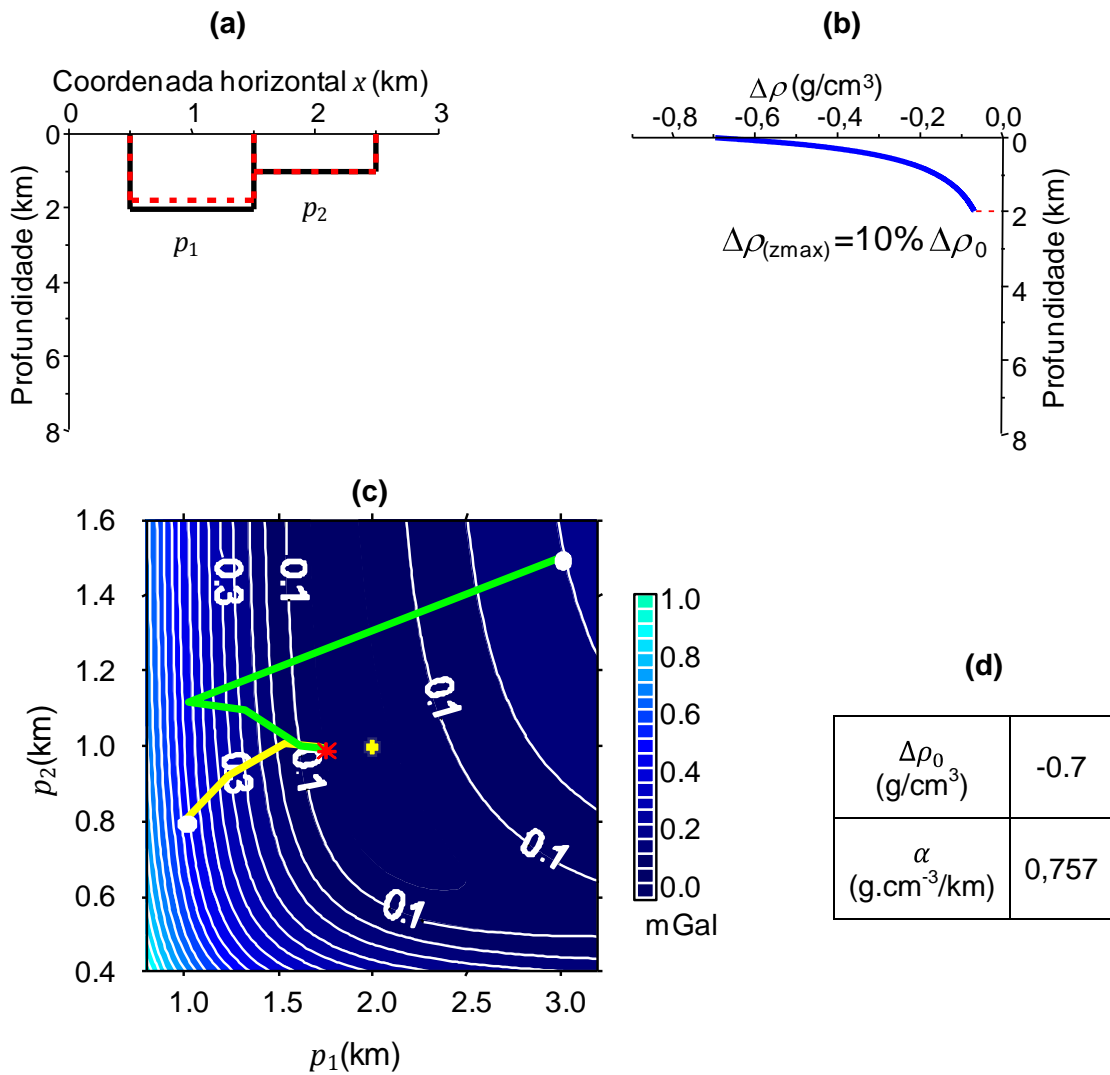


Figura 4.2.1.2: Embasamento raso **(a)** Seção vertical em representação 2D das espessuras dos prismas verdadeiros (pretos) e estimados (vermelhos tracejados). **(b)** Lei parabólica de variação do contraste de densidade com a profundidade definida por  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  indicados em (d). **(c)** Funcional  $\tau(\mathbf{p})$  (equação 4.2.1.1) com  $\mu_{(\delta)} = 10^{-4}$ , no espaço dos parâmetros  $p_1 \times p_2$ . Parâmetros verdadeiros (cruz amarela), estimados (asteriscos vermelhos) e aproximações iniciais (pontos brancos). As linhas contínuas verde e amarela mostram os diferentes caminhos percorridos ao longo das iterações do método de Gauss-Newton com a estratégia de MARQUARDT (1963). **(d)** Valores de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  utilizados em (b).

Ressalte-se que as Figuras 4.2.1.1c e 4.2.1.2c permitem a caracterização de possíveis regiões de ambiguidade no espaço dos parâmetros quando presumimos duas diferentes leis parabólicas de variação do contraste de densidade com a profundidade. As regiões de mínimos no espaço dos parâmetros (ou de ambiguidade) nas Figuras 4.2.1.1c e 4.2.1.2c são as áreas (em azul escuro) limitadas pela curva de 0,1 mGal, onde estão localizados os parâmetros verdadeiros (cruz amarela) e estimados (asterisco vermelho). Ressalte-se que qualquer par de parâmetros  $p_1$  e  $p_2$  dentro desta região produz um ajuste

aceitável dos dados observados. Portanto, concluímos que as bacias sedimentares rasas com variação abrupta do contraste de densidade com a profundidade (Figura 4.2.1.2b) produzem uma região de mínimos de  $\tau(\mathbf{p})$  (Figura 4.2.1.2c) muito maior quando comparada à região de mínimos mostrada na Figura 4.1.2.1c, em que a variação do contraste de densidade com a profundidade é mais suave (Figura 4.2.1.1b).

### Testes com embasamento profundo

Semelhantemente ao caso com embasamento raso, realizamos dois testes sintéticos com observações produzidas por um embasamento profundo. Especificamente, nestes testes os parâmetros verdadeiros são iguais a  $p_1^V = 7,0$  km e  $p_2^V = 6,0$  km. As Figuras 4.2.1.3a e 4.2.1.4a mostram uma seção vertical dos prismas verdadeiros (em preto) cujas bases representam o embasamento sedimentar. Presumimos  $\Delta\rho_0$  igual a  $-0,7$  g/cm<sup>3</sup> e dois diferentes valores para  $\alpha$ , ou seja, duas diferentes leis parabólicas de variação do contraste de densidade com a profundidade. Estas leis são mostradas nas Figuras 4.2.1.3b e 4.2.1.4b (linha azul) cujos valores de  $\alpha$  são, respectivamente,  $0,029$  e  $0,216$  g.cm<sup>-3</sup>/km.. As Figuras 4.2.1.3c e 4.2.1.4c mostram, no espaço dos parâmetros  $p_1 \times p_2$ , os funcionais  $\tau(\mathbf{p})$  (equação 4.2.1.1), que são minimizados partindo-se de duas diferentes aproximações iniciais (pontos brancos). As linhas contínuas verde e amarela nas Figuras 4.2.1.3c e 4.2.1.4c mostram dois diferentes caminhos percorridos ao longo das sucessivas iterações do método de Gauss-Newton com a estratégia de MARQUARDT (1963) até alcançar o mínimo de  $\tau(\mathbf{p})$ . As soluções estimadas são mostradas nas Figuras 4.2.1.3c e 4.2.1.4c (asteriscos vermelhos) e nas Figuras 4.2.1.3a e 4.2.1.4a (prismas tracejados vermelhos). Presumimos o conhecimento a priori das leis parabólicas verdadeiras mostradas nas Figuras 4.2.1.3b e 4.2.1.4b e estabelecemos  $\mu_{(\delta)} = 10^{-4}$ , tanto na representação de  $\tau(\mathbf{p})$  como na inversão. Novamente é possível observar que, partindo-se de diferentes aproximações iniciais, são estimadas soluções muito próximas entre si. As Figuras 4.2.1.3c e 4.2.1.4c mostram as regiões de ambiguidade no espaço dos parâmetros quando

presumimos duas diferentes leis parabólicas de variação do contraste de densidade com a profundidade. As regiões de mínimos no espaço dos parâmetros (ou de ambiguidade) nas Figuras 4.2.1.3c e 4.2.1.4c são as áreas (em azul escuro) limitadas pela curva de 0,05 mGal, onde estão localizados os parâmetros verdadeiros (cruz amarela) e estimados (asteriscos vermelhos). Note que qualquer par de parâmetros  $p_1$  e  $p_2$  dentro destas regiões produz um ajuste aceitável dos dados observados.

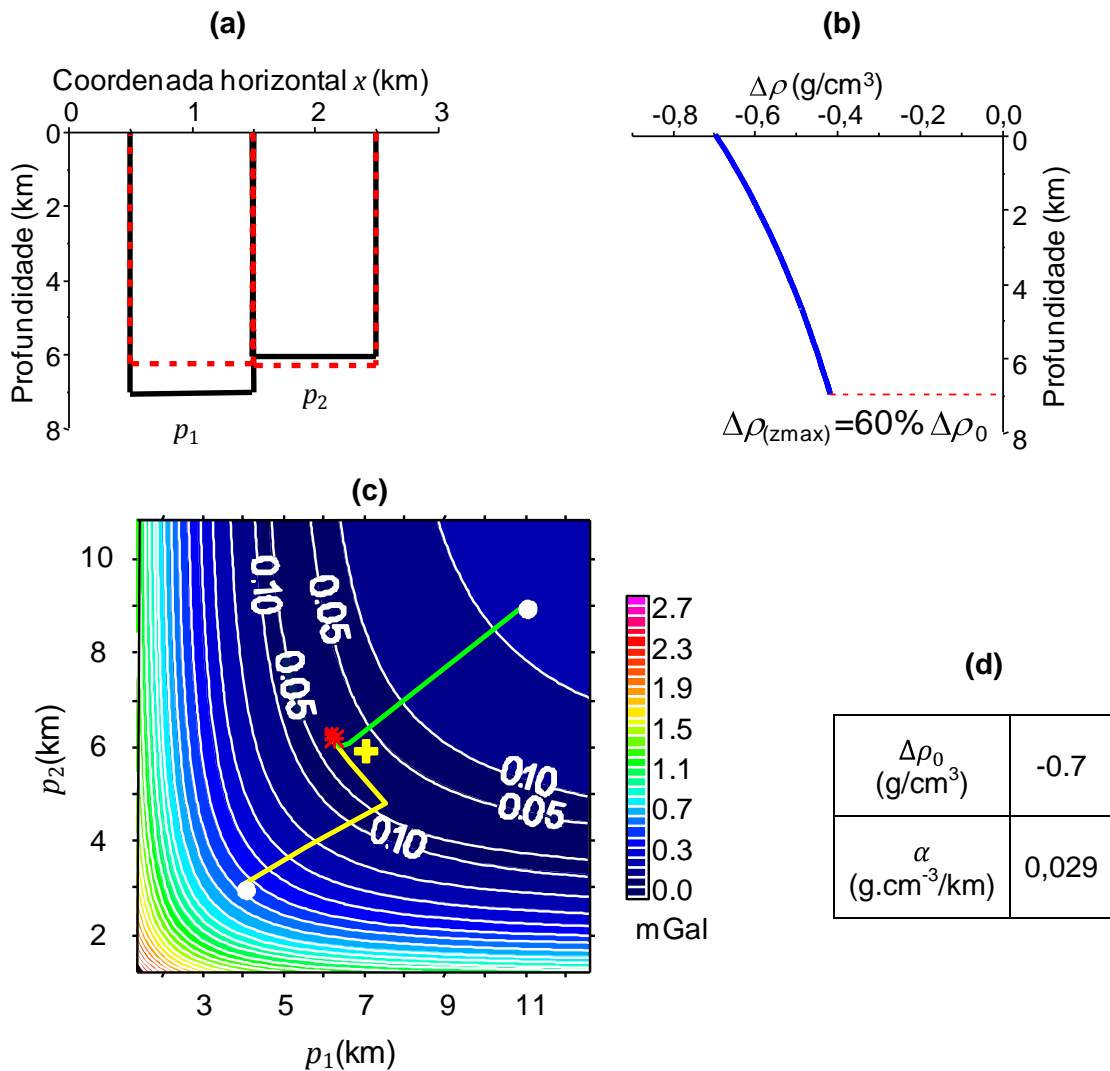


Figura 4.2.1.3 - Embasamento profundo - **(a)** seção vertical em representação 2D das espessuras dos prismas verdadeiros (pretos) e estimados (vermelhos tracejados). **(b)** Lei parabólica de variação do contraste de densidade com a profundidade definida por  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  indicados em (d). **(c)** Funcional  $\tau(p)$  (equação 4.2.1.1) com  $\mu_{(\delta)} = 10^{-4}$ , no espaço dos parâmetros  $p_1 \times p_2$ . Parâmetros verdadeiros (cruz amarela), estimados (asteriscos vermelhos) e aproximações iniciais (pontos brancos). As linhas contínuas verde e amarela mostram os diferentes caminhos percorridos ao longo das iterações do método de Gauss-Newton com a estratégia de MARQUARDT (1963). **(d)** Valores de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  utilizados em (b).

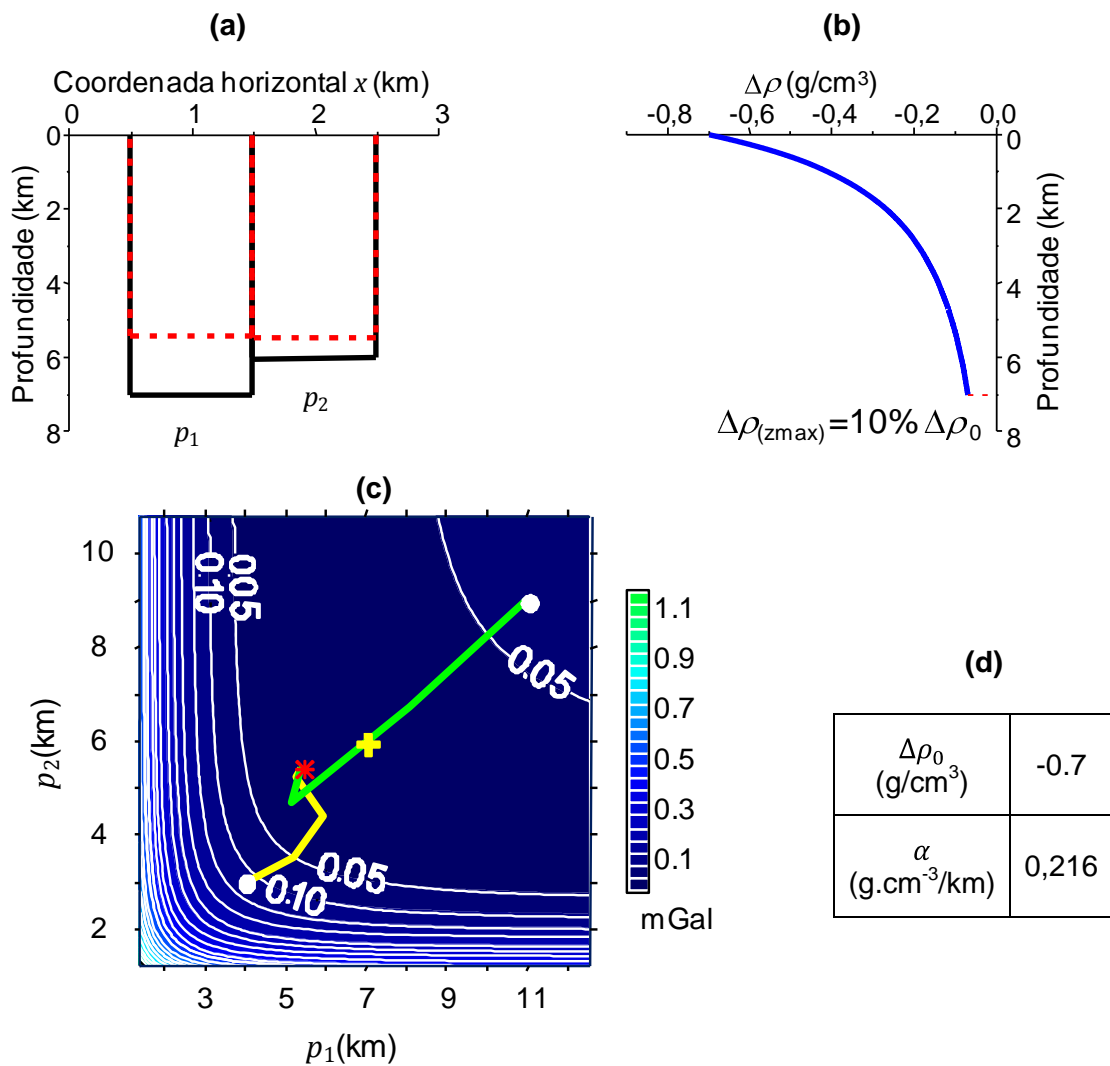


Figura 4.2.1.4 - Embasamento profundo - **(a)** Seção vertical em representação 2D das espessuras dos prismas verdadeiros (pretos) e estimados (vermelhos tracejados). **(b)** Lei parabólica de variação do contraste de densidade com a profundidade definida por  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  indicados em (d). **(c)** Funcional  $\tau(\mathbf{p})$  (equação 4.2.1.1) com  $\mu_{(\delta)} = 10^{-4}$ , no espaço dos parâmetros  $p_1 \times p_2$ . Parâmetros verdadeiros (cruz amarela), estimados (asteriscos vermelhos) e aproximações iniciais (pontos brancos). As linhas contínuas verde e amarela mostram os diferentes caminhos percorridos ao longo das iterações do método de Gauss-Newton com a estratégia de MARQUARDT (1963). **(d)** Valores de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  utilizados em (b).

Observe que igualmente ao caso raso, bacias sedimentares profundas também produzem uma região de mínimos de  $\tau(\mathbf{p})$  (Figura 4.2.1.4c) muito maior, quando o contraste de densidade nas porções mais profundas é pequeno (Figura 4.2.1.4b), comparado ao caso em que o contraste de densidade nas porções mais profundas é grande (Figura 4.2.1.3b) e a região de mínimos de  $\tau(\mathbf{p})$  é menor (Figura 4.2.1.3c).

### Testes com embasamento profundo sem o estabilizador suavidade

Repetimos o teste mostrado na Figura 4.2.1.4, empregando o valor  $\mu_{(\delta)} = 0$  e contaminamos as observações gravimétricas com duas diferentes sequências de ruído aditivo. Os funcionais  $\tau(\mathbf{p})$  (equação 4.2.1.1), considerando dois diferentes conjuntos de observações gravimétricas, são mostrados nas Figuras 4.2.1.5a e 4.2.1.5b. Partindo-se das mesmas aproximações iniciais (pontos brancos nas Figuras 4.2.1.5a e 4.2.1.5b) mostramos os diferentes caminhos percorridos (linhas contínuas verde e amarela) ao longo das sucessivas iterações até alcançar pontos de mínimo dos funcionais  $\tau(\mathbf{p})$  (asteriscos vermelhos). Tanto as Figuras 4.2.1.5a e 4.2.1.5b (asteriscos vermelhos) como as Figuras 4.2.1.5c e 4.2.1.5d (prismas tracejados vermelhos e azuis) mostram que as soluções estimadas são diferentes para cada seqüência distinta de ruído, caracterizando a instabilidade da solução quando  $\mu_{(\delta)} = 0$ .

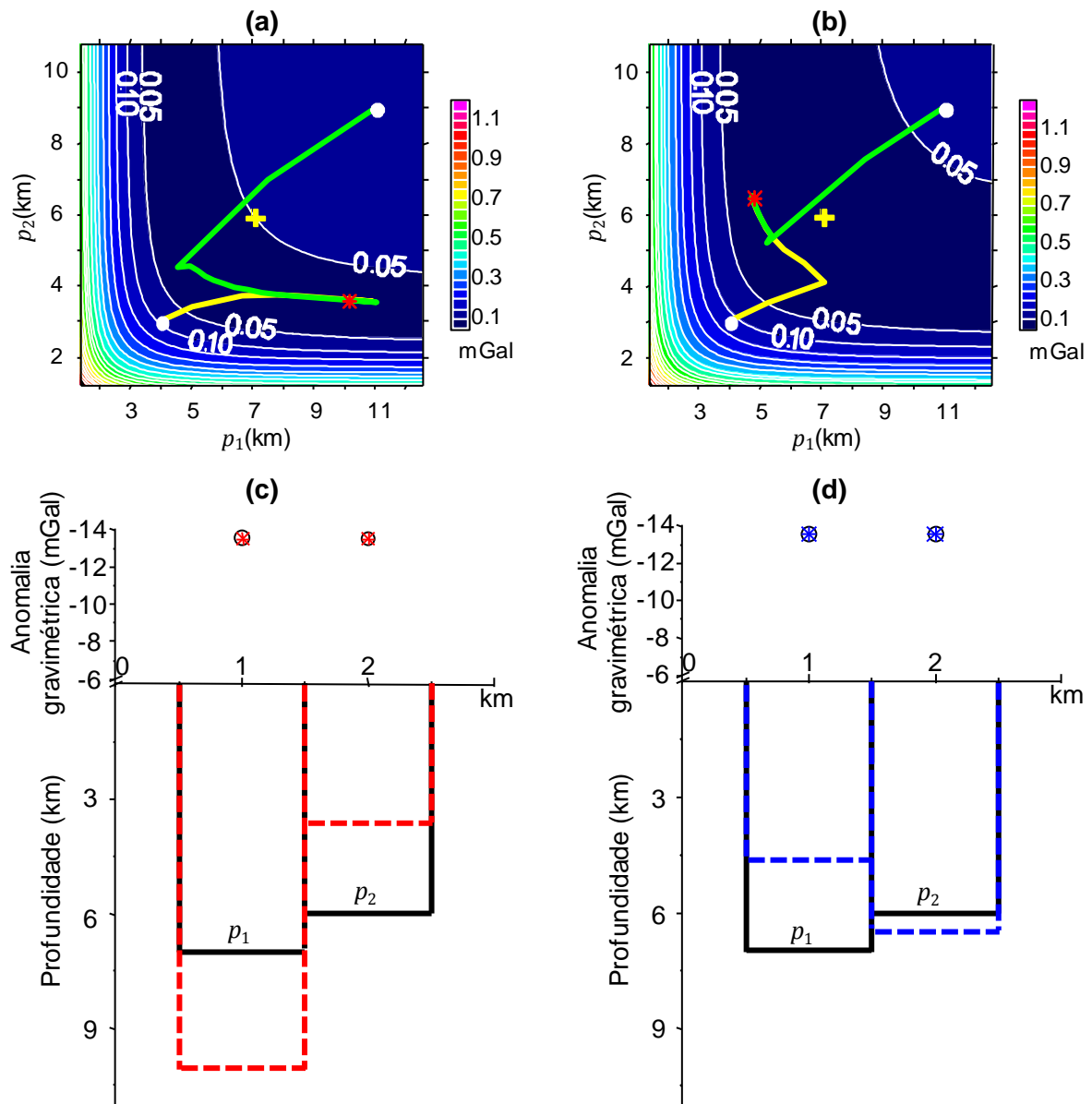


Figura 4.2.1.5 - Embasamento profundo - **(a)** e **(b)** Funcionais  $\tau(p)$  (equação 4.2.1.1) gerados por observações gravimétricas contaminadas por diferentes seqüências de ruído. Parâmetros verdadeiros (cruz amarela), estimados (asteriscos vermelhos) e aproximações iniciais (pontos brancos). As linhas contínuas verde e amarela mostram os diferentes caminhos percorridos ao longo das iterações do método de Gauss-Newton com a estratégia de MARQUARDT (1963). **(c)** e **(d)** Dados gravimétricos observados (círculos pretos) e estimados (asteriscos vermelhos e azuis) das espessuras dos prismas verdadeiros (pretos) e estimados (em vermelhos e azuis tracejados). Os dados gravimétricos observados foram produzidos com o embasamento profundo (prismas pretos) e com a lei parabólica de decaimento do contraste de densidade com a profundidade mostrada na Figura 4.2.1.4b.



## 4.2.2 - Relevo complexo

### Bacia sedimentar simulada:

A Figura 4.2.2.1a mostra a anomalia Bouguer (linhas contínuas azuis), contaminada por ruído, produzida pelo relevo do embasamento de uma bacia sedimentar sintética complexa (Figura 4.2.2.1c). Esta bacia simulada é composta por 26 x 78 prismas dispostos nas direções  $x$  e  $y$  (norte-sul e leste-oeste, respectivamente), com dimensões horizontais de 1,0 km, e topo no plano  $z_0 = 5,0 \times 10^{-4}$  km. A anomalia gravimétrica teórica foi gerada nas mesmas coordenadas horizontais dos centros dos prismas, também no plano  $z_0 = 5,0 \times 10^{-4}$  km, e corrompida por ruído através de realizações de uma variável pseudo-aleatória Gaussiana com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. A Figura 4.2.2.1c mostra o mapa de contorno e a vista em perspectiva das profundidades verdadeiras do relevo do embasamento.

Simulamos uma bacia em que o pacote sedimentar heterogêneo cobre um embasamento homogêneo com complexo arcabouço estrutural fortemente controlado por uma sucessão de falhas de direção noroeste que segmentam o relevo do embasamento em um mosaico estrutural com baixos e altos estruturais. O complexo arcabouço estrutural 3D desta bacia foi separado em duas regiões distintas (regiões I e II, Figura 4.2.2.1a e 4.2.2.1c). Presumimos que o contraste de densidade entre os sedimentos e o embasamento desta bacia diminui com a profundidade segundo uma lei parabólica (equação 2.1.1). Definimos diferentes leis parabólicas de variação do contraste de densidade para as regiões I e II estabelecendo diferentes pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$ , para cada região, como indicado na tabela da Figura 4.2.2.1b. A região II caracteriza-se por uma extensa sub-bacia com direção noroeste e com dois baixos estruturais bem definidos atingindo a profundidade de 7,2 km. A região I é composta por uma sequência de quatro sub-bacias estreitas controladas tectonicamente por falhamentos com direção noroeste-sudeste e com profundidades variando entre 3,5 a 7,2 km.

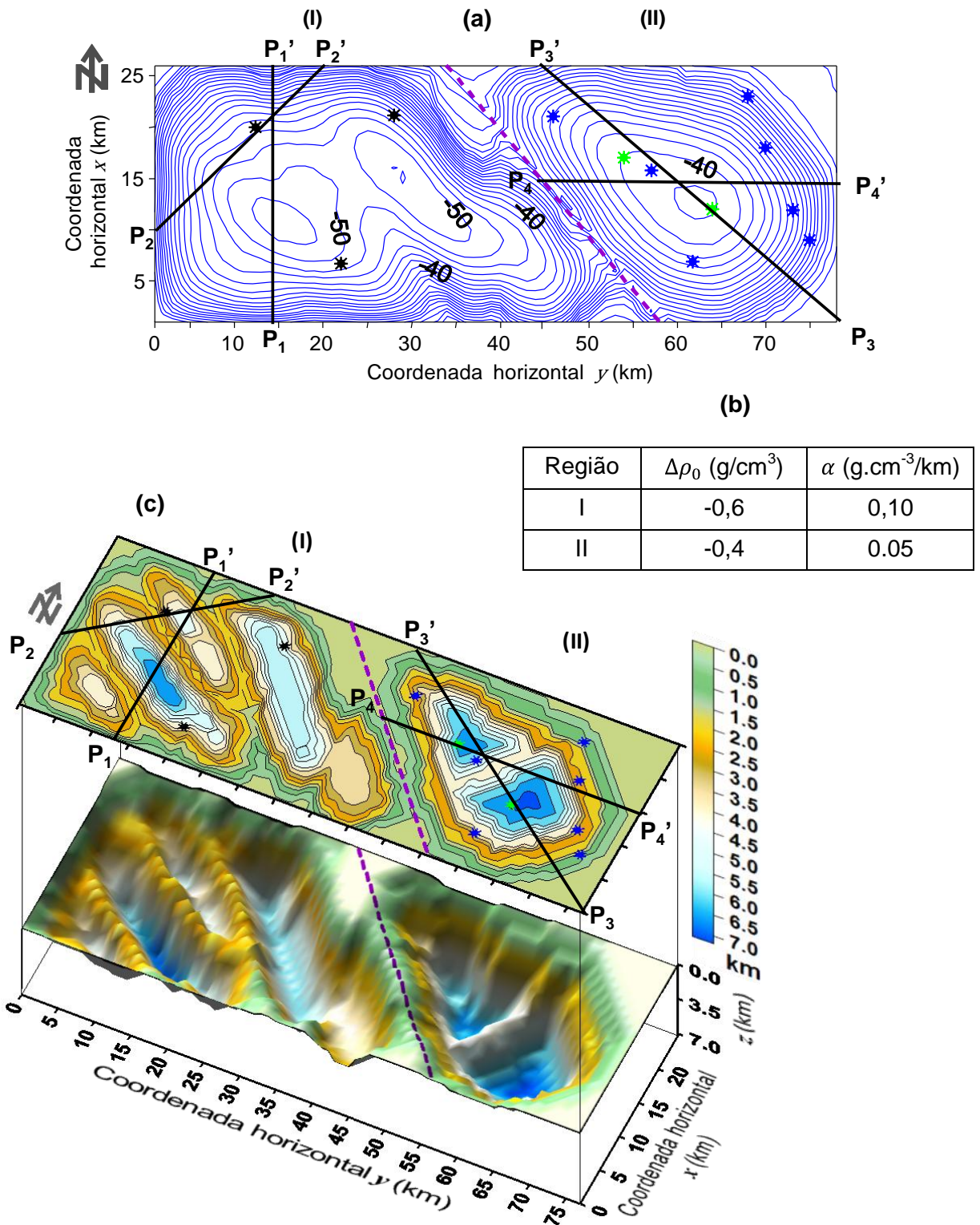


Figura 4.2.2.1 - **(a)** Anomalia Bouguer contaminada com ruído (linha contínua azul) devido à bacia sedimentar simulada em (c) tendo duas regiões distintas (I e II) com leis parabólicas definidas por  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  indicados pela tabela (b). Os asteriscos indicam as posições dos poços que tocam o embasamento. **(b)** Valores de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  de cada região. **(c)** Mapas de contorno e vista em perspectiva do relevo verdadeiro do embasamento. Os perfis P<sub>1</sub>-P<sub>1'</sub> a P<sub>4</sub>-P<sub>4'</sub>, indicados tanto em (a) (anomalia gravimétrica) como em (c) (relevo do embasamento), são usados na análise espectral (como veremos mais adiante nesta seção).

Vale ressaltar que é impossível inferir, analisando-se apenas a anomalia Bouguer (Figura 4.2.2.1a), a existência de dois baixos estruturais na região II e a existência de quatro sub-bacias com direção noroeste-sudeste na região I. Esta anomalia mostra apenas a existência de duas regiões distintas caracterizadas por dois baixos gravimétricos separados por um único alto gravimétrico isolado. A única evidência sobre a possível existência de mais de um baixo estrutural na região I é a deflexão das curvas de isovalores no intervalo  $y \in [25 \text{ km}, 40 \text{ km}]$  na direção noroeste. Portanto, uma análise qualitativa desta anomalia gravimétrica (Figura 4.2.2.1a) poderia, na melhor das hipóteses, indicar erroneamente três possíveis baixos estruturais com direção noroeste.

Para estimarmos o embasamento 3D desta bacia, primeiro obteremos os valores ótimos dos pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  pelo mapeamento de  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  (equação 2.3.3) para cada uma das duas regiões (I e II, Figura 4.2.2.1).

#### Busca sistemática de $\Delta\rho_0$ e $\alpha$ :

Para estimar os pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  ótimos das regiões I e II da bacia sedimentar simulada na Figura 4.2.2.1, usamos um modelo interpretativo composto por uma malha regular de  $26 \times 78$  prismas 3D verticais justapostos com dimensões de 1 km em ambas as direções  $x$  e  $y$ . Em seguida, para cada região (I e II) definimos intervalos e incrementos para  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  e produzimos os correspondentes mapeamentos discreto do funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  (equação 2.3.3), mostrados na Figura 4.2.2.2. Para cada região, este mapeamento mostra possíveis pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  que minimizam o quadrado da distância entre as profundidades do embasamento medidas pelos poços e as correspondentes profundidades estimadas. Contudo verificamos que o número de poços, a distribuição espacial destes e as informações de profundidade do embasamento fornecida por eles podem significar informações suficientes ou não para que a região de mínimos inclua o par  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  verdadeiro.

Na região I, onde o relevo do embasamento é mais complexo, notamos que poucas informações de profundidade do embasamento são suficientes para que o mínimo de  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  inclua o par  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  verdadeiro. Por outro lado, para a região II, onde o relevo do embasamento é mais simples, foi necessário informar um maior número de pontos com as profundidades verdadeiras do embasamento para que o vale de mínimos do funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  incluísse o par  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  verdadeiro.

A Figura 4.2.2.2a mostra o mapeamento discreto de  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  no plano  $\Delta\rho_0 \times \alpha$  para a região I da bacia. Neste caso usamos as informações das profundidades do embasamento em apenas três poços (asteriscos pretos, Figura 4.2.2.1). A Figura 4.2.2.2a mostra que a região de mínimos de  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  (região azul escuro) inclui o par verdadeiro de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  (cruz vermelha). Podemos notar que, nessa região de mínimos, há ainda mínimos locais originados pelo interpolador do programa de plotagem, uma vez que a busca foi realizada de forma discreta e em poucos pontos (i.e., poucos pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$ ). Destacamos adicionalmente que todos os pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  contidos nesta região de mínimos estão associados a boas estimativas do relevo do embasamento verdadeiro, como ilustrado pelas cinco estimativas do relevo do embasamento, mostradas em perfis em linhas tracejadas coloridas na Figura 4.2.2.2b. Cada estimativa do relevo do embasamento no perfil  $P_1$ - $P_1'$  (Figura 4.2.2.2b) foi obtida usando os pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  dos pontos 1-5 (Figura 4.2.2.2a). Finalmente, ressaltamos que estes pares produzem ajustes aceitáveis da anomalia gravimétrica (erro médio inferior a 0,08 mGal).

A Figura 4.2.2.3a mostra o mapeamento discreto de  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  (equação 2.3.3) usando 7 poços (asteriscos azuis, Figura 4.2.2.1) distribuídos na região II da bacia. Note que, apesar do número elevado de poços a região de mínimos de  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  está mal definida e não inclui o par verdadeiro de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  (asterisco vermelho, Figura 4.2.2.3a). A Figura 4.2.2.3b mostra o mapeamento discreto de  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  usando 9 poços localizados na região II (asteriscos azuis e verdes, Figura 4.2.2.1). Neste mapeamento o par verdadeiro de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  (asterisco vermelho, Figura 4.2.2.3b) localiza-se na região de mínimos de  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$ .

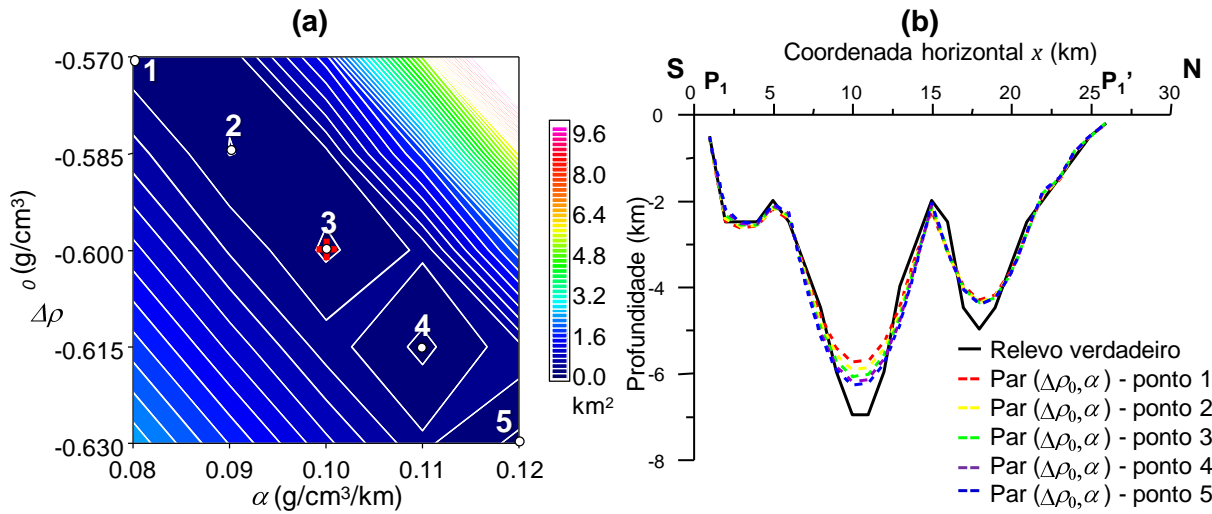


Figura 4.2.2.2 - **(a)** Busca sistemática do funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  (equação 2.3.3) no plano  $\Delta\rho_0 \times \alpha$  da região I da bacia simulada na Figura 4.2.2.1 utilizando-se 3 poços (asteriscos pretos, Figura 4.2.2.1) e incrementos de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  iguais a  $-0,015 \text{ g/cm}^3$  e  $0,01 \text{ g.cm}^{-3}/\text{km}$ , respectivamente. A cruz vermelha indica o par verdadeiro de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  ( $-0,60 \text{ g/cm}^3$  e  $0,10 \text{ g.cm}^{-3}/\text{km}$ ) **(b)** Perfil  $P_1$ - $P_1'$  (localizado na Figura 4.2.2.1) dos relevos do embasamento verdadeiro (linha contínua preta) e estimados (linhas tracejadas coloridas) com os pares  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  definidos em (a) pelos pontos 1 a 5.

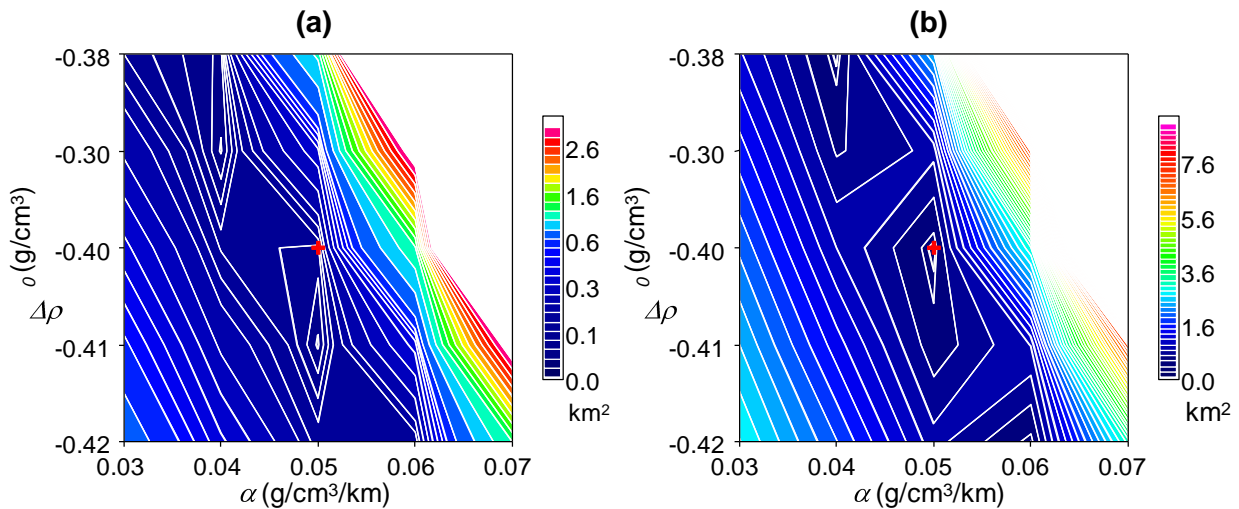


Figura 4.2.2.3 **(a)** e **(b)** Busca sistemática do funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  (equação 2.3.3) no plano  $\Delta\rho_0 \times \alpha$  da região II da bacia simulada na Figura 4.2.2.1 utilizando-se 7 poços (asteriscos azuis, Figura 4.2.2.1) e 9 poços (asteriscos azuis e verdes, Figura 4.2.2.1), respectivamente. As cruzes vermelhas indicam o par verdadeiro de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  ( $-0,40 \text{ g/cm}^3$  e  $0,05 \text{ g.cm}^{-3}/\text{km}$ ). Os incrementos de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  para produzir o funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  são  $-0,01 \text{ g/cm}^3$  e  $0,01 \text{ g.cm}^{-3}/\text{km}$ , respectivamente.

Para melhor entender como diferentes distribuições verticais de massa, dentro do pacote sedimentar da bacia, afetam a estimativa do relevo 3D do embasamento e ainda minimizam o funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  (equação 2.3.3), selecionamos doze pontos (não mostrados) que tocam o relevo verdadeiro do embasamento da região I da bacia sedimentar simulada na Figura 4.2.2.1. As profundidades destes doze pontos variam de 1,5 a 7,0 km com incremento vertical de 0,5 km. Nestes pontos comparamos as profundidades conhecidas e estimadas por cinco diferentes pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  do vale de mínimos da Figura 4.2.2.2a (pontos de 1 a 5). Consideramos as diferenças entre as profundidades verdadeiras e estimadas e calculamos o erro percentual destas diferenças em relação à profundidade verdadeira. Assim, uma diferença de 0,15 km entre as profundidades verdadeira e estimada, a uma profundidade verdadeira de 1,5 km, equivale a um erro percentual  $\vartheta$  de 10%. Cada curva colorida na Figura 4.2.2.4 representa esses erros percentuais ( $\vartheta$ ) das diferenças entre as profundidades verdadeiras e estimadas utilizando-se os cinco pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  nos doze pontos selecionados que tocam o embasamento em diferentes profundidades. A linha contínua preta na Figura 4.2.2.4 é um marco teórico definindo um erro percentual igual a zero das diferenças entre as profundidades verdadeiras e estimadas. Um valor sobre esta linha teórica significa que a profundidade estimada é exatamente igual a verdadeira.

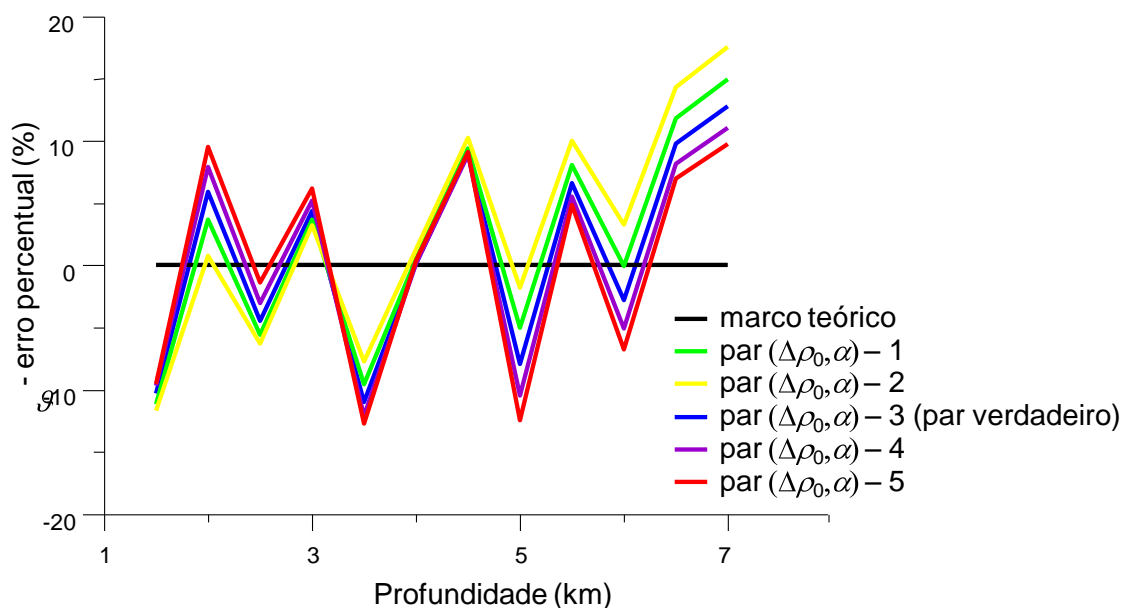


Figura 4.2.2.4 – Cada curva indica o erro percentual  $\vartheta$  das diferenças entre as profundidades verdadeiras e estimadas em doze pontos do embasamento considerando cinco diferentes pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  do vale de mínimos da Figura 4.2.2.2a (pontos de 1 a 5, Figura 4.2.2.2a). A linha contínua preta indica a diferença percentual teórica iguala a zero.

Note na Figura 4.2.2.4 que há duas regiões apresentando maior dispersão entre as cinco curvas coloridas. Uma das regiões está localizada nas profundidades menores (entre 0,5 e 3,0 km), e a outra região está localizada nas profundidades maiores (entre 5,0 e 7,0 km). Na região central da Figura 4.2.2.4 em que as profundidades são intermediárias (entre 3,5 e 4,5 km) há uma menor dispersão entre as diferentes curvas. Note ainda que as curvas que apresentam os maiores erros percentuais ( $\vartheta$ ) negativos para as profundidades mais rasas, são justamente as que apresentam maior erro percentual ( $\vartheta$ ) positivo nas profundidades maiores (curva amarela, por exemplo). Por causa destas diferentes características de dispersão de cada curva, referente às diferentes estimativas com os cinco pares  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$ , calculamos a variância ( $V_{(\vartheta)}$ ) de cada uma destas curvas que são compostas por doze medidas dos erros percentuais (curvas coloridas, Figura 4.2.2.4), em relação a um erro percentual teórico igual a zero (linha preta, Figura 4.2.2.4). Neste caso a variância do erro percentual pode ser escrita por:

$$V_{(\vartheta)} = \frac{n \sum_{i=1}^n \vartheta^2 - (\sum_{i=1}^n \vartheta)^2}{n(n-1)}, \quad (4.2.2.1)$$

em que  $n$  é igual ao número de erros percentuais calculados ( $n = 12$ , no exemplo da Figura 4.2.2.4). A curva azul, que representa o relevo estimado com o par  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  verdadeiro, é a que apresenta a menor variância. Este critério da menor variância (equação 4.2.2.1) pode ser um critério de seleção de um par de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  dos diversos pares do vale de ambiguidade do funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  (equação 2.3.3) caso haja disponível um número suficiente de informações sobre as profundidades do embasamento fornecidas por furos de sondagem. Adicionalmente, estas informações devem estar representativamente distribuídas na bacia sedimentar fornecendo diferentes profundidades do embasamento.

## Análise espectral

Vimos anteriormente que para estimar corretamente o par verdadeiro  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  da região I da bacia simulada na Figura 4.2.2.1c é necessário um número menor de informações sobre a profundidade do embasamento fornecidas por furos de sondagens quando comparada a região II. Interpretamos essa diferença como uma maior degradação da resolução da anomalia gravimétrica em relação ao relevo do embasamento na região II, ao contrário da região I, onde há uma menor degradação da resolução da anomalia gravimétrica com relação ao relevo. A fim de confirmar esta interpretação realizamos uma análise espectral. Para isso, calculamos, no domínio do número de ondas ( $k$ ), as amplitudes dos espectros da anomalia gravimétrica sem ruído,  $|A_g(k)|$ , e do relevo verdadeiro do embasamento,  $|A_p(k)|$ , de alguns perfis cruzando as regiões I e II (ver perfis  $P_1 - P_1'$  a  $P_4 - P_4'$  na Figura 4.2.2.1). Em seguida, calculamos, para cada perfil, a norma Euclidiana da diferença entre  $|A_g(k)|$  e  $|A_p(k)|$ , i.e.:

$$c = \left\| |A_g(k)| - |A_p(k)| \right\|_2. \quad (4.2.2.2)$$

O coeficiente  $c$  avalia de modo semi-quantitativo a perda do conteúdo de alto número de onda da anomalia gravimétrica que foi produzida pelo relevo verdadeiro do embasamento. Quanto menor o valor de  $c$ , mais a anomalia gravimétrica representa as características do relevo de embasamento. Em outras palavras, quanto menor o valor de  $c$ , menor será a perda de resolução da anomalia gravimétrica e menor será o número de furos de sondagens necessários para obter o par verdadeiro  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  na busca sistemática.

As Figuras 4.2.2.5 e 4.2.2.6 mostram perfis do relevo verdadeiro do embasamento e os correspondentes perfis da anomalia gravimétrica não contaminada por ruído, cruzando as regiões I e II. A Tabela 4.2.2.1 mostra os valores do coeficiente  $c$  para esses perfis. Comparando as anomalias gravimétricas da região I (Figuras 4.2.2.5a e 4.2.2.5c) com os perfis de anomalia gravimétrica da região II (Figuras 4.2.2.6a e 4.2.2.6c), podemos notar que as componentes do espectro de alto número de ondas dos perfis da anomalia gravimétrica que cruzam a região I estão sutilmente melhor representadas quando comparadas aos



perfis que cruzam a região II. Portanto, avaliamos que há uma menor degradação do conteúdo espectral da anomalia gravimétrica na região I quando comparado com a região II. O coeficiente  $c$  confirma esta conclusão. Note na Tabela 4.2.2.1, que os valores deste coeficiente para os perfis ao longo da região I são aproximadamente duas vezes menores do que os valores obtidos para os perfis ao longo da região II, confirmando a menor degradação da resolução da anomalia gravimétrica em relação ao relevo do embasamento na região I quando comparada à região II. Conseqüentemente, os menores valores do coeficiente  $c$  para os perfis da região I explicam a necessidade de um número menor de furos de sondagem fornecendo informação sobre a profundidade do embasamento para estimar o par verdadeiro  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  na região I quando comparada à região II.

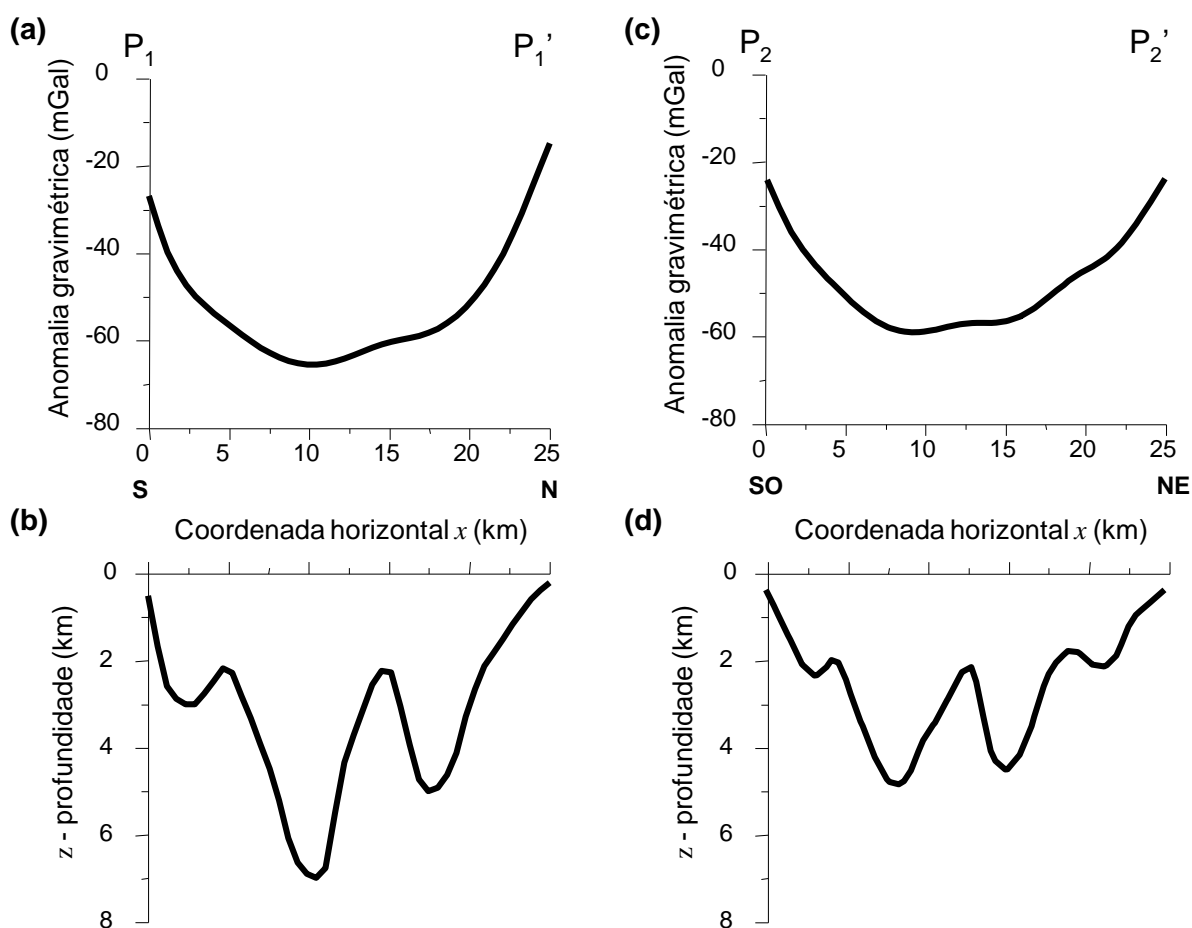


Figura 4.2.2.5 – Teste sintético – Perfis que cruzam a região I. **(a)** Anomalia gravimétrica não contaminada por ruído e **(b)** relevo verdadeiro do embasamento ao longo do perfil P<sub>1</sub>-P<sub>1</sub>'. **(c)** Anomalia gravimétrica não contaminada por ruído e **(d)** relevo verdadeiro do embasamento ao longo do perfil P<sub>2</sub>-P<sub>2</sub>'. As localizações destes perfis estão na Figura 4.2.2.1.

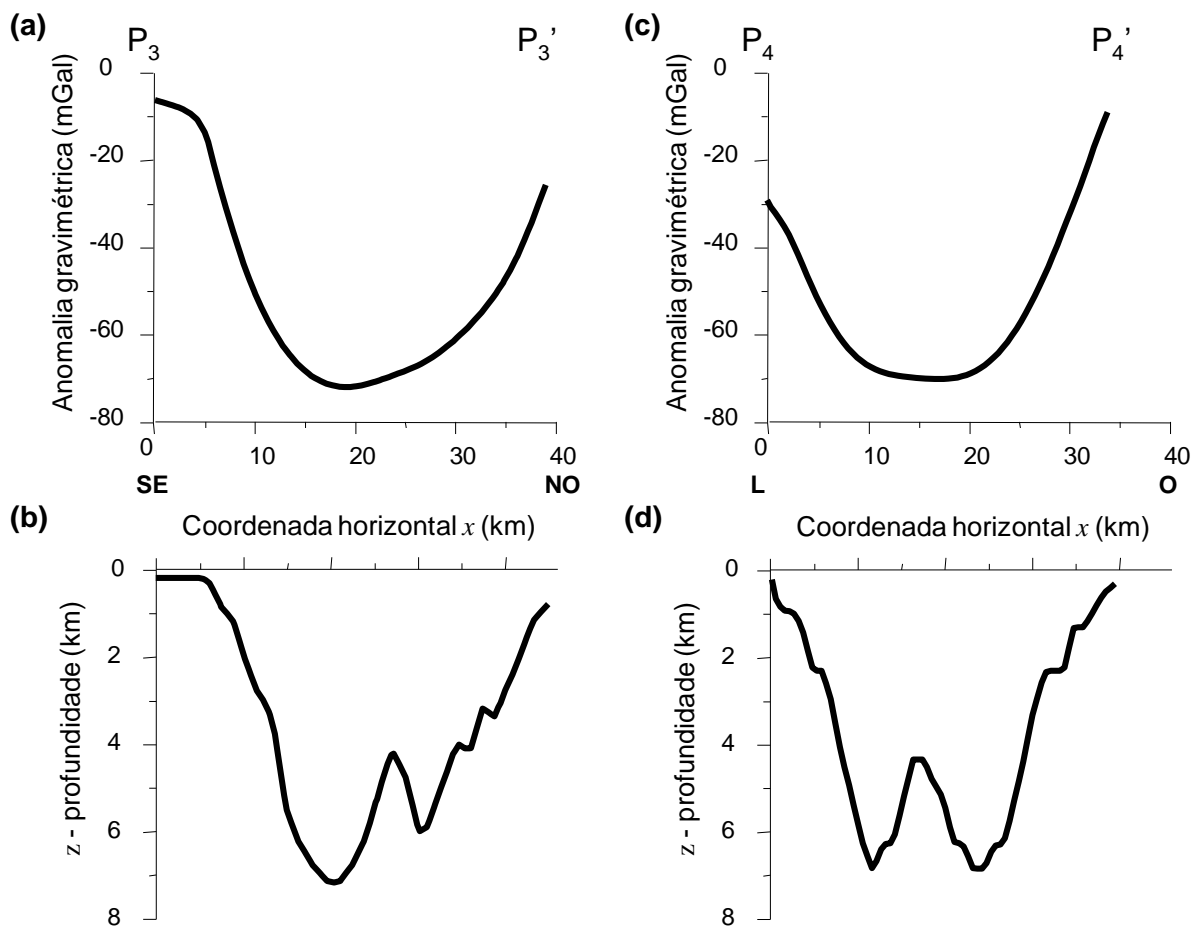


Figura 4.2.2.6 – Teste sintético – Perfis que cruzam a região II. **(a)** Anomalia gravimétrica não contaminada por ruído e **(b)** relevo verdadeiro do embasamento ao longo do perfil P<sub>3</sub>-P<sub>3</sub>'. **(c)** Anomalia gravimétrica não contaminada por ruído e **(d)** relevo verdadeiro do embasamento ao longo do perfil P<sub>4</sub>-P<sub>4</sub>'. As localizações destes perfis estão na Figura 4.2.2.1.

Tabela 4.2.2.1 - Coeficiente  $c$  (equação 4.2.2.2) calculado para cada perfil P<sub>1</sub>-P<sub>1</sub>' a P<sub>4</sub>-P<sub>4</sub>'. As localizações destes perfis estão na Figura 4.2.2.1.

Perfis	Região	Coeficiente $c$
P <sub>1</sub> -P <sub>1</sub> '	I	3,944.250
P <sub>2</sub> -P <sub>2</sub> '	I	4,358.194
P <sub>3</sub> -P <sub>3</sub> '	II	8,582.141
P <sub>4</sub> -P <sub>4</sub> '	II	10,276.730

### Estimativa do embasamento 3D via inversão SG:

A Figura 4.2.2.7a mostra o mapa de contorno e a vista em perspectiva das estimativas das profundidades do relevo do embasamento da bacia simulada na Figura 4.2.2.1. Esta estimativa foi obtida via inversão SG e usando os valores estimados pela busca sistemática para os valores de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  das regiões I e II. Especificamente selecionamos os valores  $\Delta\rho_{0I}^* = -0,6 \text{ g/cm}^3$ ,  $\alpha_{I}^* = 0,10 \text{ g/cm}^3/\text{km}$  para a região I e  $\Delta\rho_{0II}^* = -0,4 \text{ g/cm}^3$ ,  $\alpha_{II}^* = 0,05 \text{ g/cm}^3/\text{km}$  para a região II. Adotamos a aproximação inicial para as profundidades do relevo do embasamento atribuindo a cada prisma a espessura de uma placa Bouguer com contraste de densidade  $\Delta\rho_0$  que reproduz o valor absoluto da anomalia gravimétrica diretamente acima do centro do prisma.

A Figura 4.2.2.7b mostra, em linhas tracejadas vermelhas, a correspondente anomalia gravimétrica ajustada pela solução mostrada na Figura 4.2.2.7a. Comparando-se as profundidades estimadas (Figura 4.2.2.7a) com as profundidades verdadeiras do relevo do embasamento (Figura 4.2.2.1c e 4.2.2.7c), evidenciamos o ótimo desempenho do método apresentado na recuperação da interface sedimento-embasamento.

Observe que, apesar de uma pequena perda de resolução nas sub-bacias mais profundas, a estimativa do relevo do embasamento determina com excelente precisão a posição horizontal, a extensão horizontal e a direção das quatro sub-bacias estreitas na porção oeste da área. Adicionalmente, ressalte-se que os dois baixos estruturais que compõem a extensa sub-bacia da porção leste (região II) estão claramente delineados. O resultado da inversão (Figura 4.2.2.7.a) mostra que o arcabouço estrutural da bacia sedimentar simulada é fortemente controlado por falhas com direção noroeste que limitam um grande depocentro a leste (região II) e uma seqüência de estreitas sub-bacias alongadas a oeste (região I). Este controle tectônico pode ser inferido uma vez que a direção perpendicular aos gradientes das curvas de isovalores das profundidades estimadas (plano superior da Figura 4.2.2.7a) indica falhas de grande rejeito.

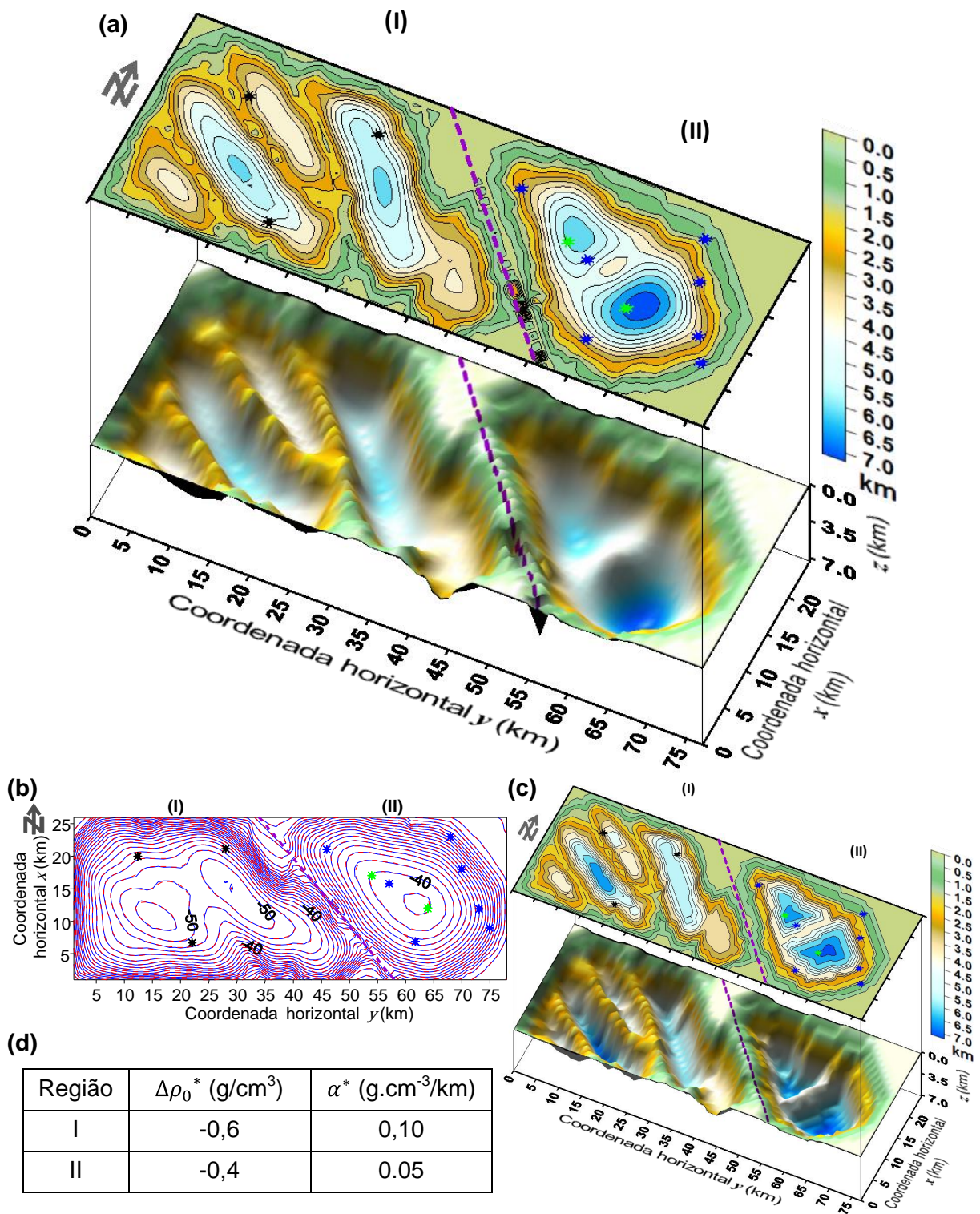


Figura 4.2.2.7 - **(a)** Mapa de contorno e vista em perspectiva do relevo estimado do embasamento via inversão SG após a estimativa dos pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  para as regiões I e II pela busca sistemática do funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$ . Os pares  $\Delta\rho_0^*$  e  $\alpha^*$  selecionados estão indicados na tabela em (d). **(b)** Anomalia Bouguer contaminada com ruído (linhas contínuas azuis) devida à bacia sedimentar simulada em (c) e a anomalia ajustada (linhas tracejadas vermelhas) pela solução (a). Os asteriscos indicam as posições dos poços utilizados na busca sistemática do funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$ . **(c)** Mapa de contorno e a vista em perspectiva do relevo verdadeiro do embasamento (esta mesma figura foi mostrada na Figura 4.2.2.2b). **(d)** Pares  $\Delta\rho_0^*$  e  $\alpha^*$  selecionados pela busca sistemática para as regiões I e II respectivamente.

Finalmente destacamos que estimamos quatro altos estruturais, todos com direção noroeste. Destes quatro altos estruturais, três estão localizados mais a oeste da bacia (região I) e apresentam profundidades estimadas em torno de 2,5 km, valor próximo ao das profundidades verdadeiras destas feições. O alto estrutural estimado mais expressivo é o alto mais raso separando a extensa sub-bacia mais a leste (região II) da seqüência de sub-bacias estreitas e alongadas da porção oeste (região I). As profundidades estimadas deste alto oscilam em torno de 0,5 e 1,0 km, sendo valores consistentes com as profundidades verdadeiras simuladas para este alto. Observe que apenas este alto estrutural mais raso é corretamente detectado através da simples inspeção dos dados gravimétricos (Figura 4.2.2.7b).

A perda de resolução que observamos nas estimativas das profundidades das sub-bacias mais profundas é uma condição necessária para a estabilização da solução estimada. No entanto, destacamos que as estimativas das profundidades dos altos estruturais são excelentes. Este fato é relevante, visto que os altos estruturais são particularmente importantes para a prospecção de óleo. Todavia, salientamos que a perda de resolução será tanto maior quanto menor o contraste de densidade entre o sedimento e o embasamento nas porções mais profundas. Neste último caso, altos estruturais profundos podem não ser recuperados.

### Densidade constante

Há na literatura uma discussão a respeito da relevância ou não da variação vertical na densidade dos sedimentos. ATHY (1930) deduziu uma lei exponencial para a variação da densidade dos sedimentos com a profundidade por causa da compactação das camadas mais profundas em função da pressão exercida pelas camadas subjacentes. No entanto alguns autores (BARBOSA et al., 1997; 1999) argumentam que é possível estimar o relevo do embasamento selecionando um valor constante e adequado para a densidade dos sedimentos. Por essa motivação, realizamos outra busca sistemática do funcional  $\theta(\Delta\rho_0, \alpha)$

(equação 2.3.3); no entanto, presumimos que o contraste de densidade não varia com a profundidade. Para isso basta que a constante  $\alpha$  (equação 2.1.1) que controla a variação do contraste de densidade com a profundidade seja numericamente igual a zero. Assim o funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  (equação 2.3.3) passa ser minimizado apenas pelo contraste de densidade  $\Delta\rho$  sendo então definido como  $\Theta(\Delta\rho)$ . Esta hipótese foi testada para a região I da bacia sedimentar simulada na Figura 4.2.2.1c. Lembramos que a anomalia gravimétrica desta bacia (Figura 4.2.2.1a) foi gerada presumindo uma variação parabólica do contraste de densidade com a profundidade. Especificamente, para a região I desta bacia o par  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  que descreve a lei parabólica (equação 2.1.1) é  $\Delta\rho_{0I} = -0,6 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha_I = 0,10 \text{ g.cm}^{-3}/\text{km}$ .

Considerando a hipótese de densidade constante, realizamos a busca sistemática do funcional  $\Theta(\Delta\rho)$  para a região I da bacia sedimentar simulada usando os três poços indicados por asteriscos pretos na Figura 4.2.2.1. A Figura 4.2.2.8 mostra que o mínimo do funcional  $\Theta(\Delta\rho)$  é  $\Delta\rho = -0,25 \text{ g/cm}^3$ . Desta forma, considerando a hipótese errônea de contraste de densidade constante entre os sedimentos e o embasamento, estimamos um contraste de densidade constante de  $-0,25 \text{ g/cm}^3$  através da busca sistemática do funcional  $\Theta(\Delta\rho)$ .

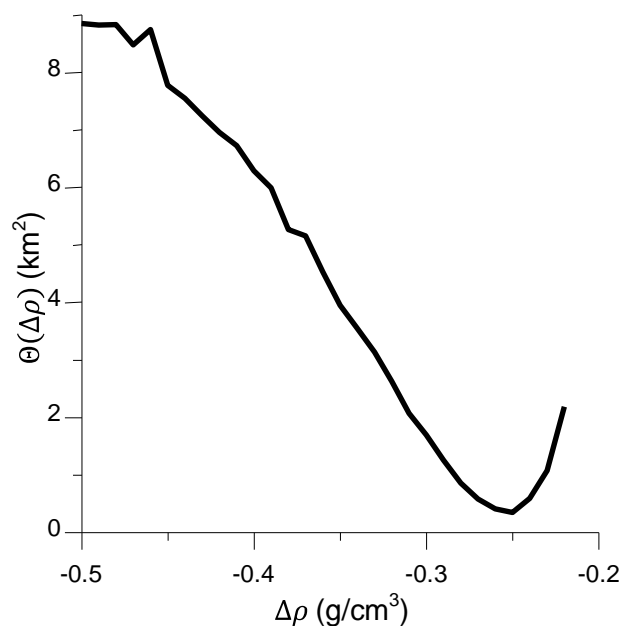


Figura 4.2.2.8 – Busca sistemática do funcional  $\Theta(\Delta\rho)$ , com incremento de  $\Delta\rho$  igual a  $-0,01 \text{ g/cm}^3$ , indica mínimo em  $\Delta\rho = -0,25 \text{ g/cm}^3$  para a região I da bacia sedimentar mostrada na Figura 4.2.2.1c.

Para comparação selecionamos um perfil ( $P_1$ - $P_1'$  - Figura 4.2.2.1) da região I da bacia sedimentar simulada e mostramos na Figura 4.2.2.9 duas estimativas do relevo do embasamento neste perfil, obtidas através da inversão gravimétrica 3D SG presumindo as hipóteses de contraste de densidade constante e decrescendo parabolicamente com a profundidade.

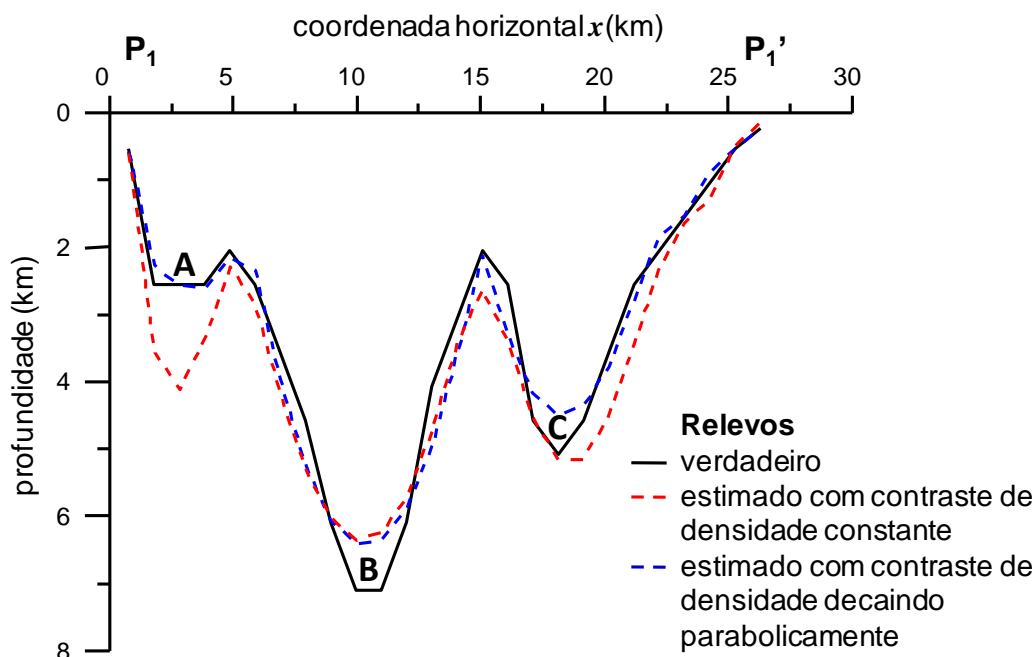


Figura 4.2.2.9 – Perfil  $P_1$ - $P_1'$  localizado na Figura 4.2.2.1. Relevos verdadeiro (linha contínua preta) e estimados com inversão SG usando a hipótese de contraste de densidade constante igual a  $-0,25 \text{ g/cm}^3$  (linha tracejada vermelha) e decaindo parabolicamente com a profundidade com  $\Delta\rho_0 = -0,6 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha = 0,10 \text{ g.cm}^{-3}/\text{km}$  (linha tracejada azul). **A**, **B** e **C** são baixos do relevo verdadeiro.

A Figura 4.2.2.9 mostra que o relevo estimado (linha tracejada vermelha) postulando-se um contraste de densidade constante estimado em  $\Delta\rho = -0,25 \text{ g/cm}^3$  (através da busca sistemática do funcional  $\Theta(\Delta\rho)$ , Figura 4.2.2.8) mostra-se distorcido em relação ao relevo verdadeiro (linha contínua preta) na profundidade rasa de 2,5 km do baixo **A**. Diferentemente, o relevo estimado (linha tracejada azul) postulando-se a hipótese verdadeira de contraste de densidade decrescendo parabolicamente com a profundidade com parâmetros estimados iguais a  $\Delta\rho_0 = -0,6 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha = 0,10 \text{ g.cm}^{-3}/\text{km}$  (através da busca sistemática do funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$ , Figura 4.2.2.2a), recupera melhor o relevo verdadeiro nas profundidades rasas até 2 km. No entanto, na profundidade intermediária em torno de 5 km

do baixo **C**, o relevo estimado sob a hipótese de contraste de densidade constante (linha tracejada vermelha) recupera melhor o relevo verdadeiro (linha contínua preta) quando comparado ao relevo estimado sob a hipótese de contraste de densidade decaindo parabolicamente com a profundidade (linha tracejada azul). Finalmente, ressaltamos ainda que na porção mais profunda da bacia, baixo **B**, os relevos estimados, sob as duas hipóteses sobre o contraste de densidade, subestimam a profundidade do relevo verdadeiro. A perda de resolução em profundidade de ambas as estimativas é justificada pela informação a priori introduzida pelo funcional  $\phi_S$  (equação 2.2.1.1) que impõe um aumento da estabilidade à custa da diminuição da resolução. Por outro lado, tanto na porção rasa como na porção com profundidade intermediária, as distorções dos relevos estimados sob as duas hipóteses sobre o contraste de densidade é consequência inevitável da ambiguidade fundamental envolvendo o produto entre o volume das fontes anômalas e suas propriedades físicas.



## Problema II

### Estimativa de um relevo do embasamento com descontinuidades locais

Nos testes a seguir utilizamos o método de inversão descrito no capítulo 2 como variação total (VT).

#### 4.2.3 - Relevo 3D

##### Testes com embasamento complexo

A Figura 4.2.3.1a mostra a anomalia gravimétrica (linhas contínuas azuis), contaminada por ruído, produzida pelo relevo do embasamento de uma bacia sedimentar sintética (Figura 4.2.3.1b). As observações gravimétrica teóricas foram geradas no plano  $z_0 = 0,0$  km, nas mesmas coordenadas horizontais dos centros dos prismas que descrevem o pacote sedimentar 3D, e corrompidas por ruído Gaussiano pseudo-aleatório com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. A Figura 4.2.3.1b mostra o mapa de contorno e a vista em perspectiva das profundidades verdadeiras do relevo do embasamento. Esta bacia simulada é composta por 15 x 24 prismas verticais 3D dispostos nas direções  $x$  e  $y$  (norte-sul e leste-oeste, respectivamente), com dimensões horizontais 1,0 km, e topo no plano  $z_0 = 0,0$  km. O relevo do embasamento simulado (Figura 4.2.3.1b) apresenta dois grabens que atingem profundidades de 4,5 e 7,5 km limitados por falhas praticamente verticais e separados por um alto estrutural. Definimos uma única lei parabólica de variação do contraste de densidade com a profundidade para toda a bacia sedimentar com  $\Delta\rho_0 = -0,4$  g/cm<sup>3</sup> e  $\alpha = 0,10$  g/cm<sup>3</sup>/km.

A Figura 4.2.3.2b mostra o mapa de contorno e a vista em perspectiva das profundidades estimadas pela inversão VT para o relevo do embasamento simulado. A Figura 4.2.3.2a mostra, em linhas tracejadas vermelhas, a correspondente anomalia

gravimétrica ajustada. Igualmente, a Figura 4.2.3.3b mostra o mapa de contorno e a vista em perspectiva das profundidades estimadas pela inversão SG para o relevo do embasamento, e a Figura 4.2.3.3a mostra, em linhas tracejadas vermelhas, a correspondente anomalia gravimétrica ajustada. Presumimos o conhecimento a priori dos valores verdadeiros de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  tanto para inversão SG como para a inversão VT.

Note que os ajustes das anomalias gravimétricas produzidas pelas inversões VT (Figura 4.2.3.2a) e SG (Figura 4.2.3.3a) explicam as observações dentro da precisão experimental. Ressaltamos que adotamos o mesmo critério de parada e o mesmo parâmetro de regularização  $\mu_{(\delta)} = 10^{-5}$  nas duas inversões.

Comparando-se as estimativas do relevo via inversão VT (Figura 4.2.3.2b) e SG (Figura 4.2.3.3b), evidenciamos o ótimo desempenho da inversão VT na recuperação da interface descontínua. A inversão VT delineou com maior precisão os falhamentos que controlam as bordas da bacia, e recuperou melhor as profundidades do relevo do embasamento nas porções mais profundas da bacia simulada.

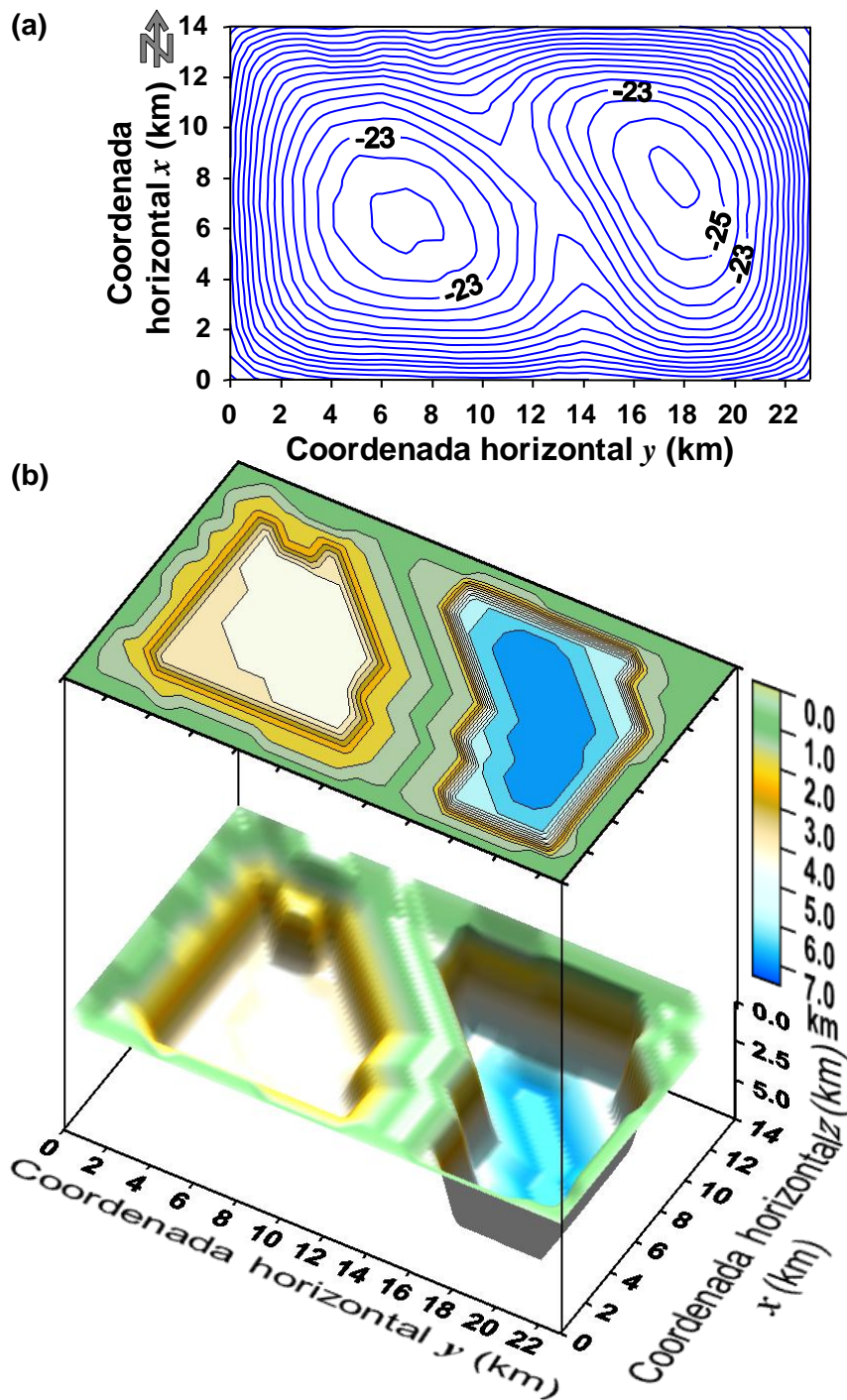


Figura 4.2.3.1 - **(a)** Anomalia Bouguer contaminada com ruído (linhas contínuas azuis) devida à bacia sedimentar simulada em **(b)**. **(b)** Mapa de contorno e vista em perspectiva do relevo do embasamento verdadeiro. A lei parabólica da variação do contraste de densidade com a profundidade da bacia simulada em **(b)** é definida pelo par  $\Delta\rho_0 = -0,4\text{g/cm}^3$  e  $\alpha = 0,10\text{g/cm}^3/\text{km}$ .

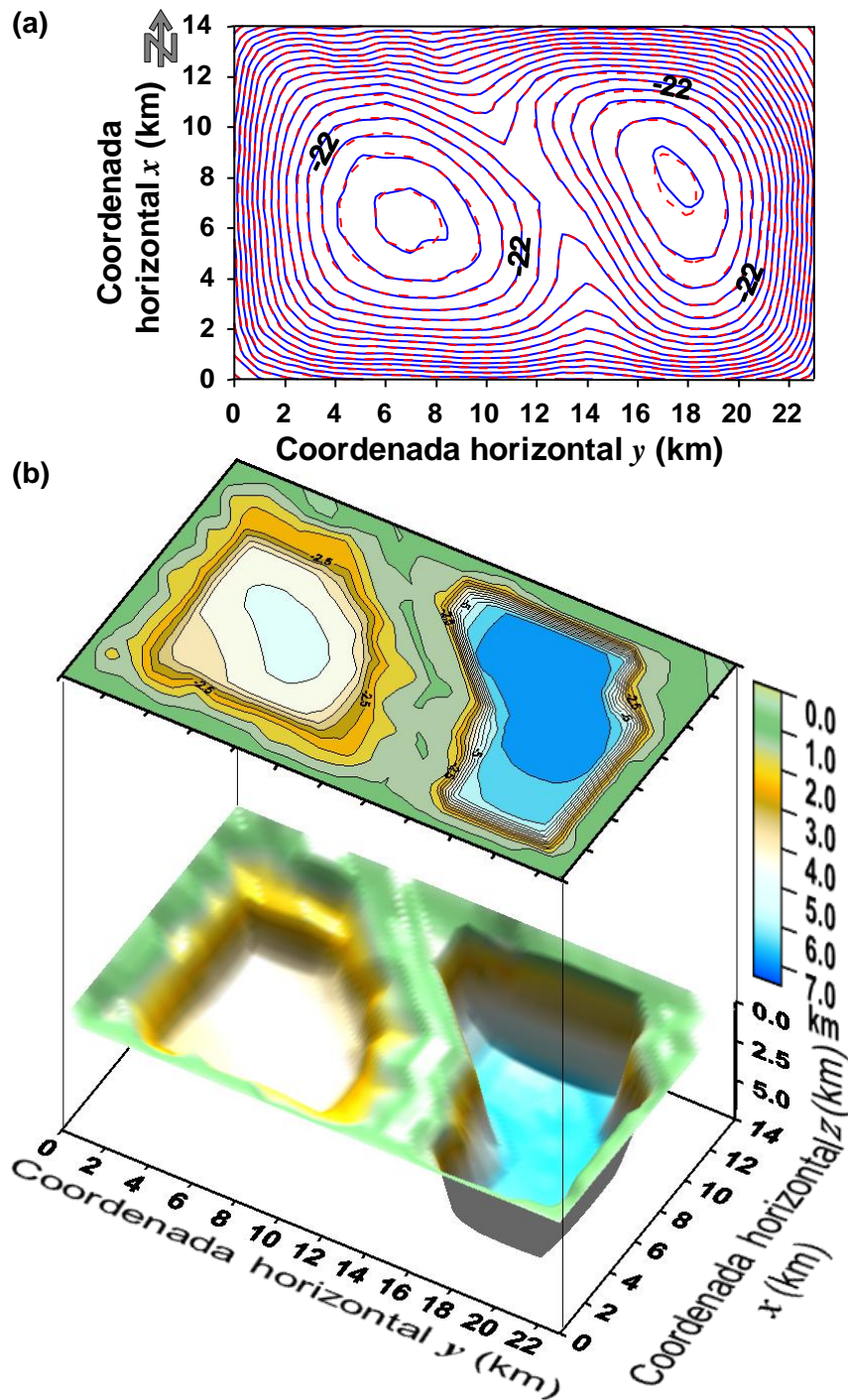


Figura 4.2.3.2 - **(a)** Anomalia Bouguer contaminada com ruído (linhas contínuas azuis) devida à bacia sedimentar simulada na Figura 4.2.3.1b e anomalia ajustada (linhas tracejadas vermelhas) pela solução da inversão VT **(b)** Mapa de contorno e vista em perspectiva do relevo do embasamento estimado via inversão VT. A lei parabólica da variação do contraste de densidade com a profundidade usada na inversão VT é definida pelo par  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  verdadeiro ( $\Delta\rho_0 = -0,4 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha = 0,10 \text{ g/cm}^3/\text{km}$ ).

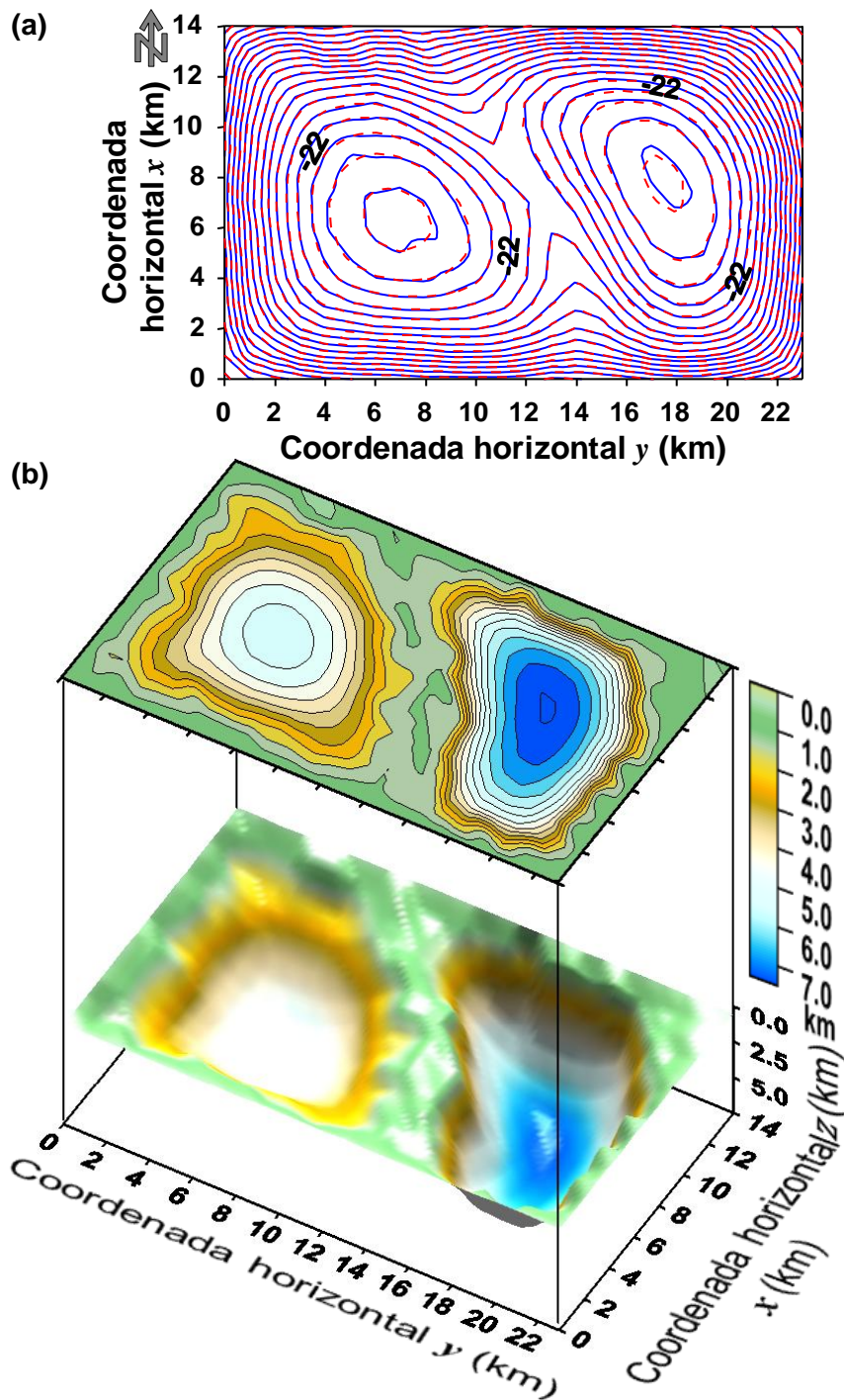


Figura 4.2.3.3 - **(a)** Anomalia Bouguer contaminada com ruído (linhas contínuas azuis) devida à bacia sedimentar simulada na Figura 4.2.3.1b e anomalia ajustada (linhas tracejadas vermelhas) pela solução da inversão VT **(b)** Mapa de contorno e vista em perspectiva do relevo do embasamento estimado via inversão SG. A lei parabólica da variação do contraste de densidade com a profundidade usada na inversão SG é definida pelo par  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  verdadeiro ( $\Delta\rho_0 = -0,4 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha = 0,10 \text{ g/cm}^3/\text{km}$ ).



A Figura 4.2.3.4 mostra uma comparação entre dois relevos estimados pela inversão VT da anomalia gravimétrica (Figura 4.2.4.1a) da bacia simulada na Figura 4.2.4.1b. Na primeira inversão utilizamos a matriz Hessiana  $H_{(k)}^V$  (equação 2.2.2.15) do funcional regularizador  $\phi_V$ , enquanto na segunda utilizamos a matriz Hessiana modificada  $\tilde{H}_{(k)}^V$  (equação 2.2.3.2), com  $\varepsilon = 2$ . Pode-se notar na Figura 4.2.3.4 que os relevos estimados são praticamente idênticos; no entanto, a principal diferença é que, usando-se um mesmo critério de parada e o mesmo parâmetro de regularização, o número de iterações é significativamente diferente. Enquanto a inversão VT com a matriz Hessiana  $H_{(k)}^V$  (Figura 4.2.3.4a) precisou de mais de setenta iterações para chegar à solução, a inversão VT com a matriz Hessiana modificada  $\tilde{H}_{(k)}^V$  (Figura 4.2.3.4b) chegou a uma solução idêntica com apenas dezessete iterações. Nesta comparação, os ajustes dos dados gravimétricos (não mostrados) por estas duas soluções são idênticos.

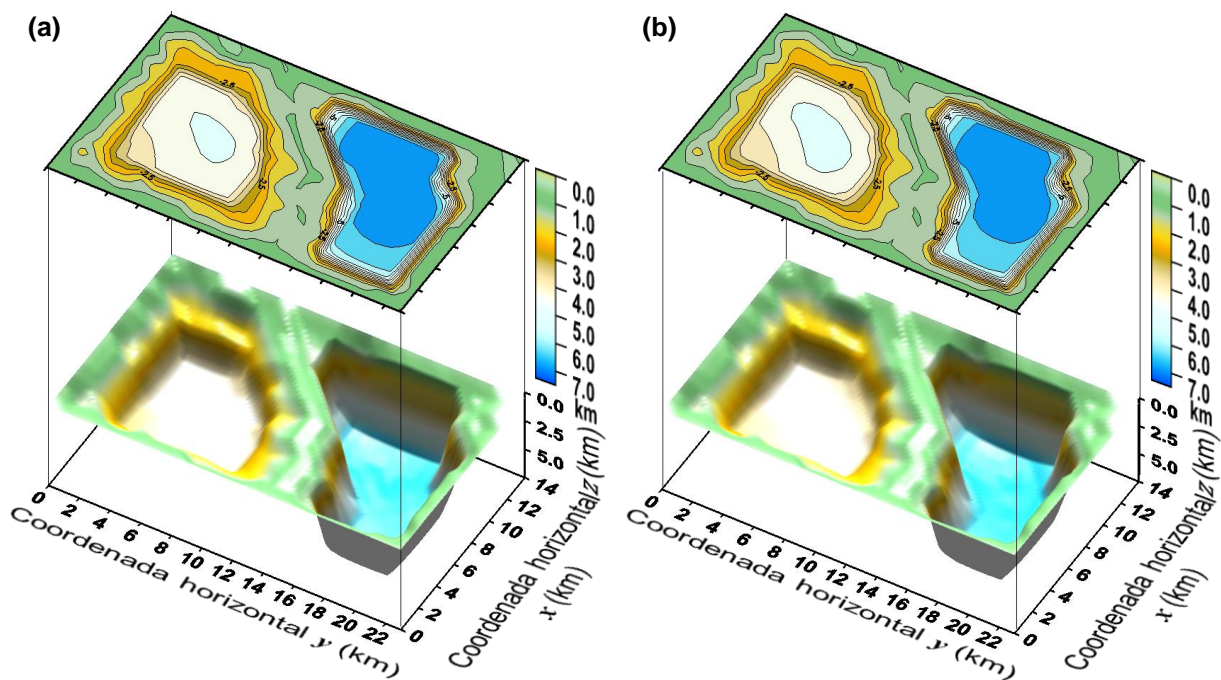


Figura 4.2.3.4 - **(a)** Vista em perspectiva das profundidades do embasamento estimadas pela inversão VT com a matriz Hessiana  $H_{(k)}^V$  (equação 2.2.2.15) e **(b)** com a matriz Hessiana modificada  $\tilde{H}_{(k)}^V$  (equação 2.2.3.2).

#### 4.2.4 - Comparação entre as inversões SG e VT

Realizamos a inversão gravimétrica 2½D de uma bacia simulada com a seguinte característica. O relevo da bacia pode ser aproximado por duas sub-bacias, transversais ao perfil gravimétrico, e com duas diferentes formas. O relevo de uma das sub-bacias tem paredes abruptas, quase verticais, e fundo plano. Diferentemente a outra sub-bacia tem uma superfície suave, em forma de U. Este relevo é constituído de um perfil com 35 prismas verticais 3D, justapostos ao longo da direção horizontal  $x$  (linha verde Figura 4.2.4), e com dimensões horizontais  $dx$  e  $dy$  iguais 1,0 km nas direções  $x$  e  $y$  e topo no plano  $z_0 = 0,0$  km. Embora as sub-bacias tenham diferentes formas, ambas produzem respostas gravimétricas praticamente idênticas. A anomalia gravimétrica calculada na superfície sobre o centro destes 35 prismas foi produzida presumindo que o contraste de densidade entre os sedimentos e o embasamento decresce com a profundidade segundo uma lei parabólica (equação 2.1.1), com  $\Delta\rho_0 = -0,4 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha = 0,05 \text{ g/cm}^3/\text{km}$ , em ambas sub-bacias. A Figura 4.2.4a mostra a anomalia gravimétrica (círculos verdes), contaminada por uma sequência de ruído Gaussiano e pseudo-aleatório com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. Contudo, produzimos cinco diferentes perfis contaminados com cinco diferentes sequências de ruído Gaussiano e pseudo-aleatório com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. Para cada uma destas diferentes anomalias gravimétricas, realizamos duas inversões, SG e VT. Os perfis gravimétricos ajustados e os relevos estimados pela inversão SG são mostrados, respectivamente, nas Figuras 4.2.4c e 4.2.4d. Os perfis gravimétricos ajustados e os relevos estimados pela inversão VT são mostrados, respectivamente, nas Figuras 4.2.4a e 4.2.4b.

Note que ambos os procedimentos de inversão, VT e SG, ajustam a anomalia gravimétrica, no entanto cada um desses procedimentos, conforme esperado, só resolve bem a parte do relevo para a qual é particularmente adequado. A VT estima um relevo com paredes abruptas e com um plano na porção mais profunda para ambos os grabens. A SG por sua vez estima superfícies suaves em ambos os grabens.

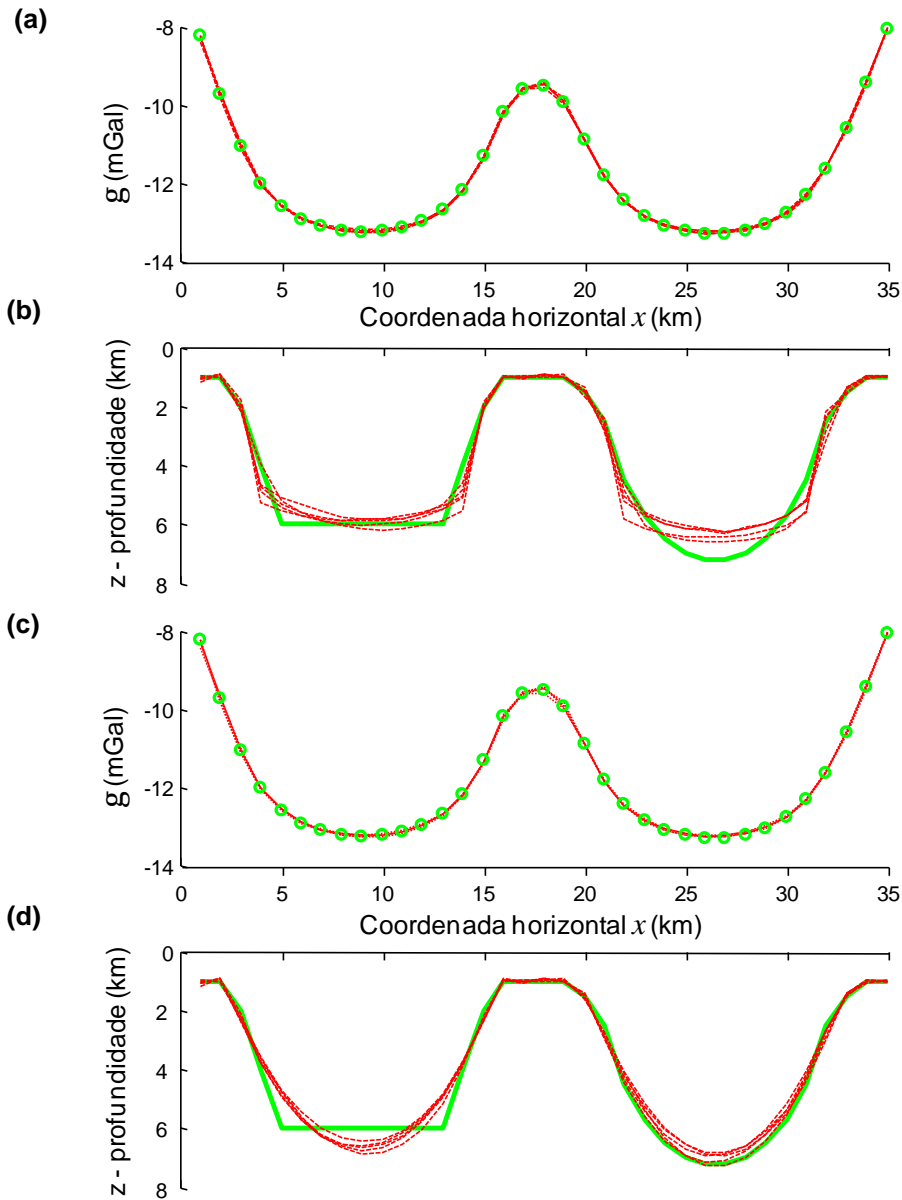


Figura 4.2.4 - **(a)** Perfil da anomalia gravimétrica contaminada por ruído (círculos verdes), produzida pelo relevo simulado em (b). Anomalias gravimétricas ajustadas pela VT (linhas tracejadas vermelhas), para cinco diferentes seqüências de ruído pseudo-aleatório. **(b)** Perfil do relevo verdadeiro (linha contínua verde), e perfis dos relevos estimados pela VT (linhas tracejadas vermelhas) para cinco diferentes seqüências de ruído pseudo-aleatório. **(c)** Perfil da anomalia gravimétrica contaminada por ruído (círculos verdes), produzida pelo relevo simulado em (d). Anomalias gravimétricas ajustadas pela SG (linhas tracejadas vermelhas), para cinco diferentes seqüências de ruído pseudo-aleatório. **(d)** Perfil do relevo verdadeiro (linha contínua verde). Perfis dos relevos estimados pela SG (linhas tracejadas vermelhas) para cinco diferentes sequências de ruído pseudo-aleatório. Nesta bacia o contraste de densidade decai com a profundidade segundo lei parabólica definida pelo par  $\Delta\rho_0 = -0,4 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha = 0,05 \text{ g/cm}^3/\text{km}$ .



## RESULTADOS COM DADOS REAIS – BACIA DE ALMADA

Neste capítulo realizamos as inversões SG e VT e a busca sistemática dos parâmetros que definem o decaimento parabólico do contraste de densidade com a profundidade, aplicando-as ao conjunto de dados gravimétricos e de poços da porção continental e marinha rasa da Bacia de Almada, Bahia, Brasil.

### 5.1 – Caracterização da Bacia de Almada

Geograficamente, a Bacia de Almada está localizada na região costeira nordeste do Brasil, no Estado da Bahia, entre os paralelos de 14°S e 15°S. A Bacia de Almada tem como limites ao norte e ao sul as Bacias Camamú e Jequitinhonha, respectivamente, sendo que os altos de Taipus e Olivença definem estes limites (Figuras 5.1.1). O limite oeste ocorre em terra na região próxima à costa, onde passa a aflorar o embasamento proterozóico e o limite leste da bacia é o limite de águas oceânicas internacionais.

A Bacia de Almada é parte do sistema de riftes formado durante o eocretáceo relacionado à abertura do Oceano Atlântico Sul que deu origem às bacias marginais orientais brasileiras (PONTE e ASMUS, 1978; OJEDA, 1982) e, em termos gerais, apresenta uma história evolutiva e composição estratigráfica passíveis de comparação com outras bacias marginais brasileiras. Em virtude da evolução geológica da Bacia de Almada, destacamos duas características desta Bacia que são particularmente relevantes para o nosso trabalho. Segundo CHANG et. al., (1992), a Bacia de Almada possui complexo arcabouço estrutural que se revela em um relevo do embasamento abrupto em algumas partes e um preenchimento sedimentar predominantemente siliclástico. Este preenchimento

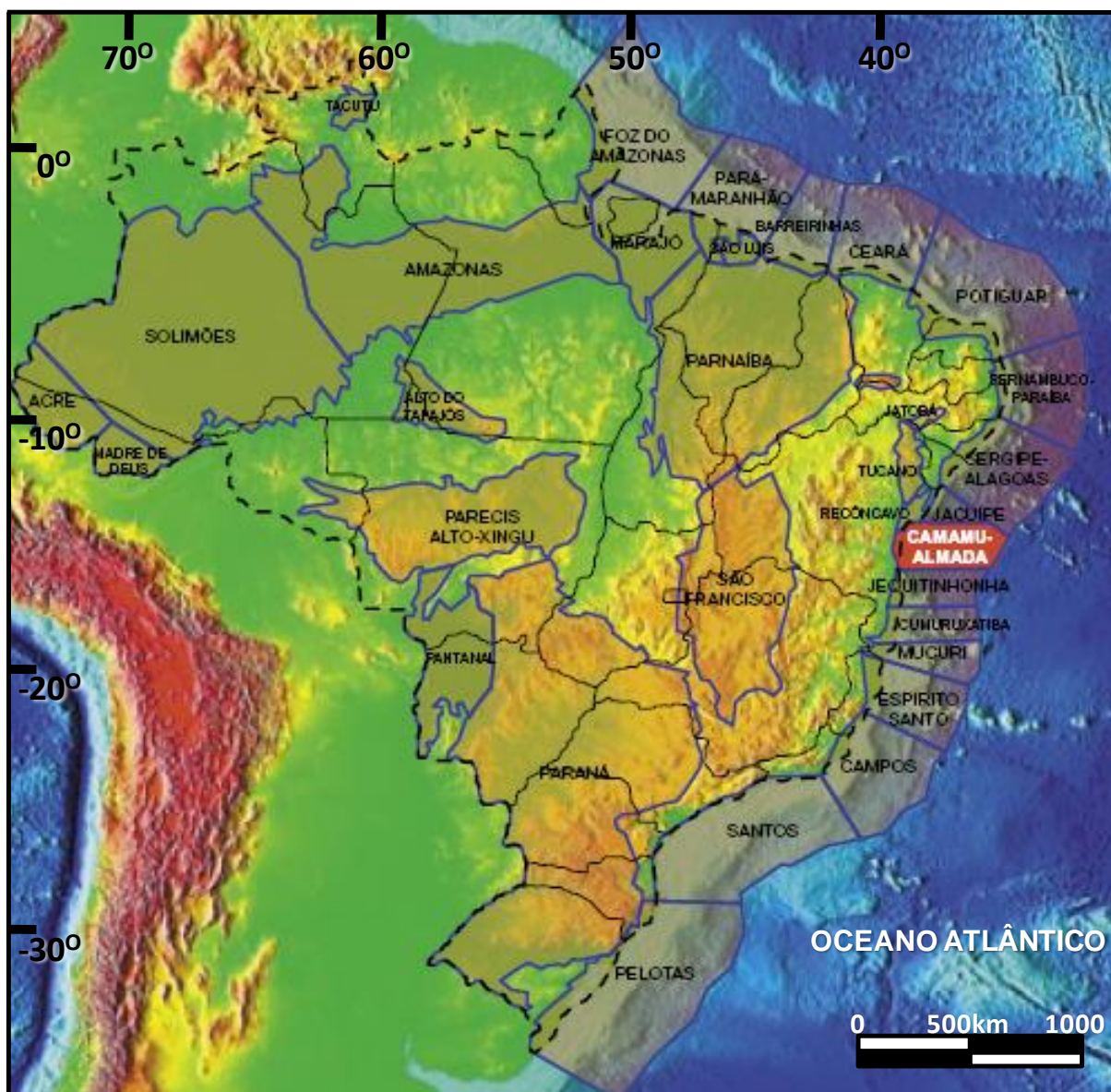
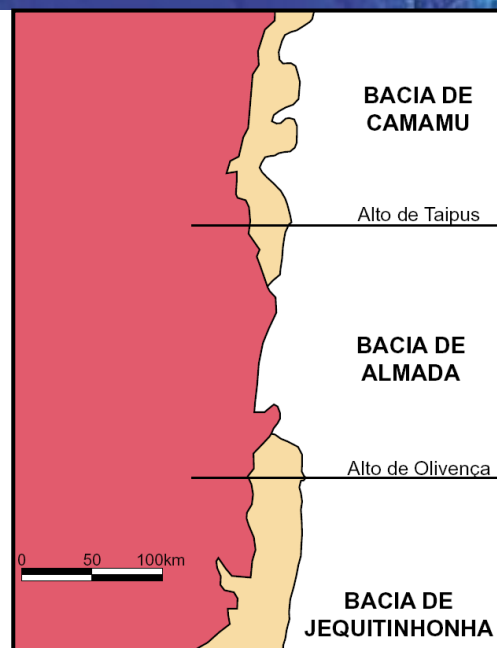


Figura 5.1.1 – Localização da Bacia de Camamu-Almada na costa nordeste do Brasil, no estado da Bahia. Detalhe mostrando os limites da Bacia de Almada onde, ao norte temos a Bacia de Camamu, e ao sul a Bacia de Jequitinhonha, e os respectivos altos estruturais limítrofes: alto de Taipus e alto de Olivença (modificado de MELLO et al., 1995).



siliclástico corrobora a premissa de variação monotônica com a profundidade, do contraste de densidade entre sedimento e embasamento. O arcabouço estrutural da Bacia de Almada é marcado por horsts e grabens com bordas controladas por falhas de direção norte-nordeste (Figura 5.1.2). Essas falhas, na porção marinha, caracterizam um relevo do embasamento em degraus e com a presença de calhas. A evolução estratigráfica da Bacia de Almada é compartimentada em três eventos distintos: pré-rifte, sin-rifte e pós-rifte. O embasamento da Bacia de Almada é composto por rochas granulíticas de idade Proterozóica relacionadas ao Cinturão Granulítico Atlântico (CORDANI, 1984).

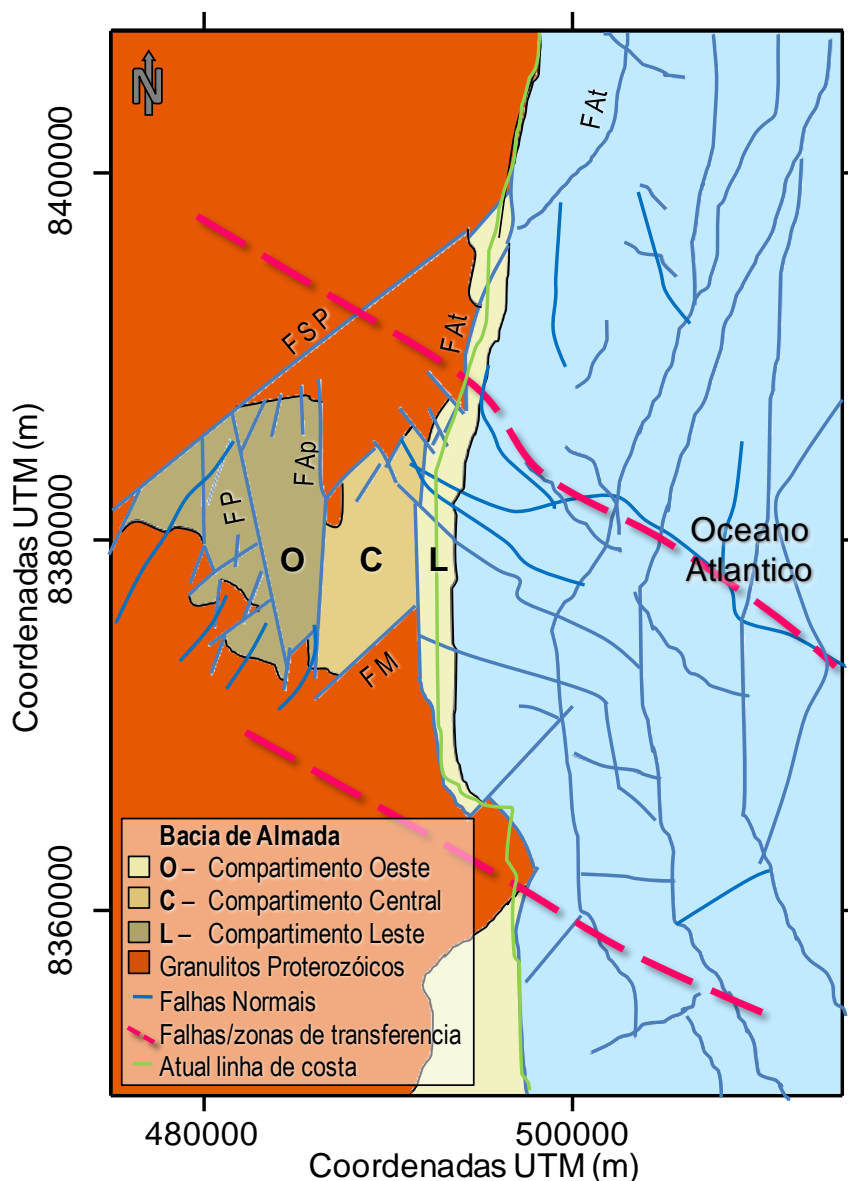


Figura 5.1.2 – Mapa Geológico da porção continental da Bacia de Almada com as principais falhas mapeadas, sendo Falha Piabas (FP), Falha Apique (FAp), Falha Aritaguá (FAt), Falha Marrom (FM) e Falha Serra Pilheira (FSP). As falhas na porção marinha rasa da Bacia de Almada foram interpretadas da sísmica (modificado de MOHRIAK et al., 2008).

A Figura 5.1.3 mostra o mapa gravimétrico Bouguer da Bacia de Almada, da parte continental e marinha rasa, interpolados em uma malha regularmente espaçada. Efetuamos à correção nestes dados dos efeitos gravimétricos produzidos pela camada de água do mar e pela interface crosta-manto.

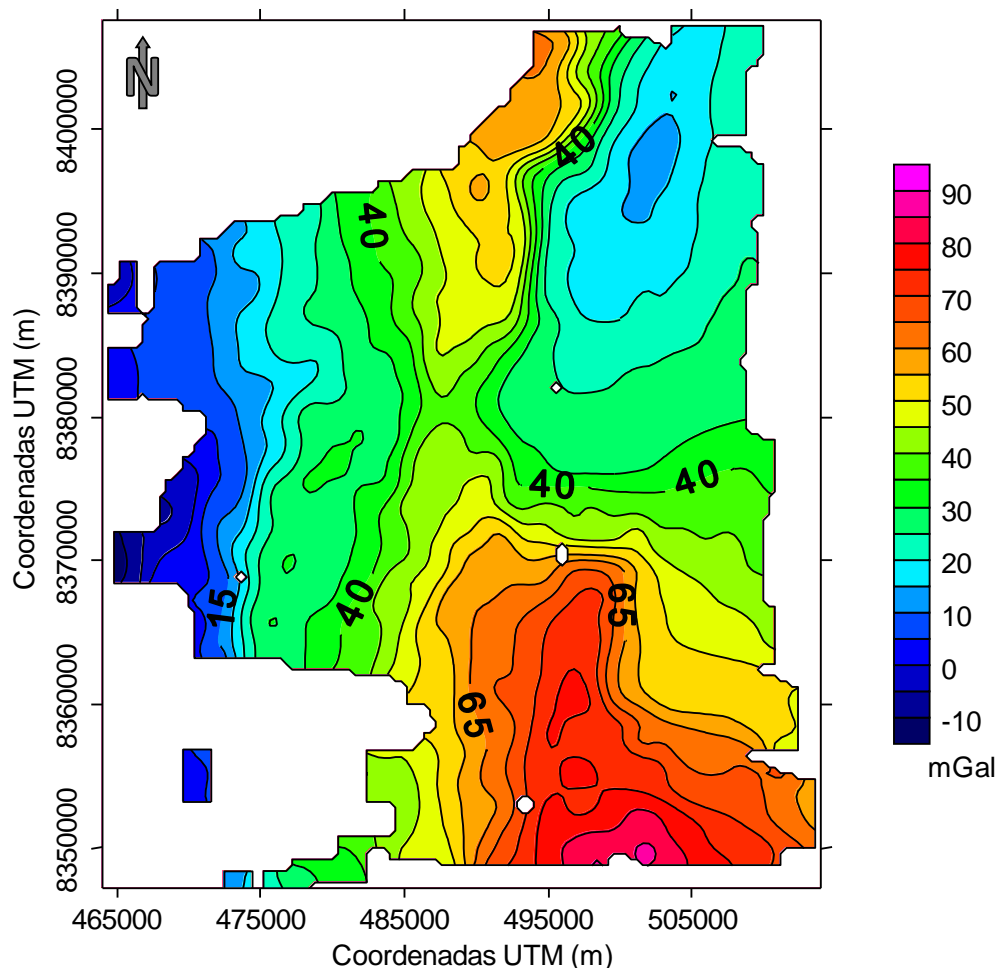


Figura 5.1.3 – Mapa Bouguer da Bacia de Almada, da parte continental e marinha rasa.

Para correção do efeito gravimétrico da camada de água do mar, subtraímos do mapa Bouguer (Figura 5.1.3) a contribuição do volume da água do mar, correspondente à batimetria, presumindo que a densidade da água marinha é constante e igual a  $1,03 \text{ g/cm}^3$ . A Figura 5.1.4 mostra uma superfície, vista em perspectiva, da batimetria da região da Bacia de Almada.

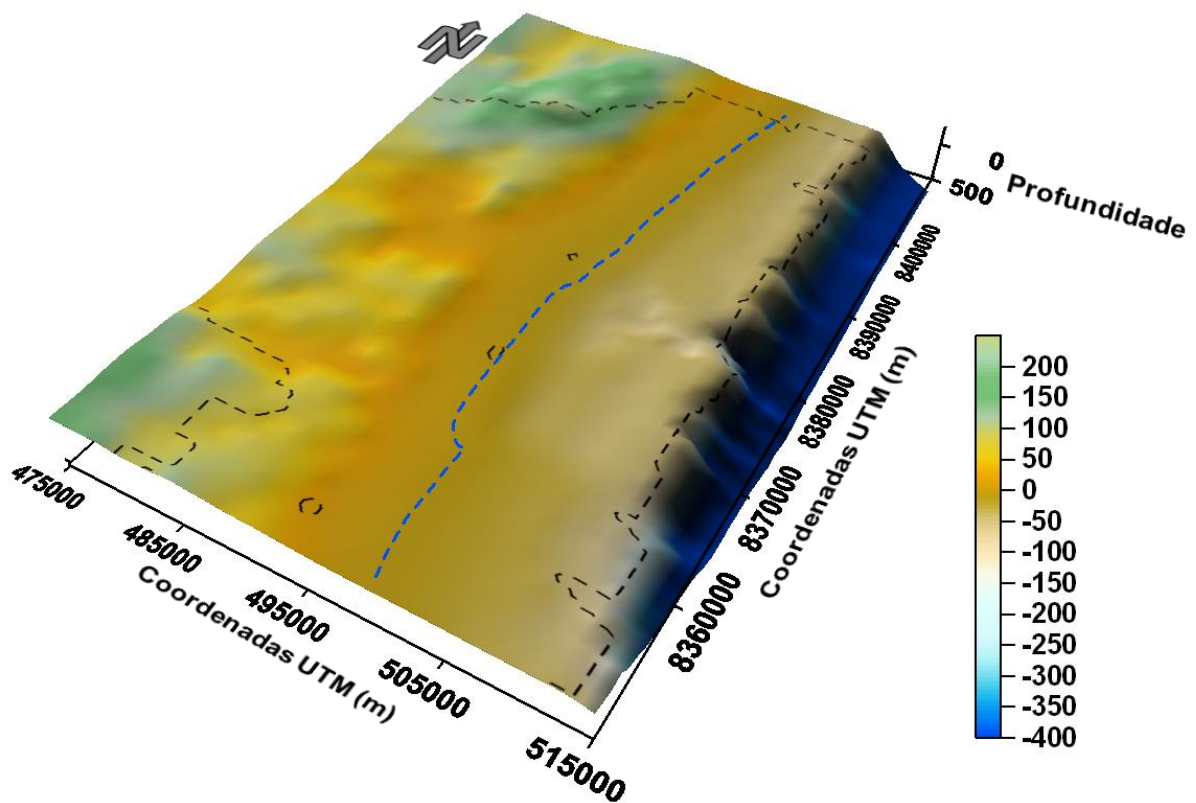


Figura 5.1.4 – Vista em perspectiva do relevo continental e da batimetria da porção marinha rasa da Bacia de Almada. Representamos em linha azul pontilhada a atual linha de costa, em linha preta pontilhada o limite dos dados gravimétricos (Figura 5.1.3).

Também realizamos a correção do efeito gravimétrico produzido por fontes crustais profundas. Especificamente, ajustamos aos dados gravimétricos, já corrigidos do efeito gravimétrico da lâmina d'água, um polinômio de segundo grau, através do método robusto de ajuste polinomial (BELTRÃO et al., 1991). A Figura 5.1.5 mostra a superfície desse polinômio de segundo grau ajustado. A Figura 5.1.6 mostra a anomalia gravimétrica residual da Bacia de Almada, obtida após a remoção deste polinômio de segundo grau.



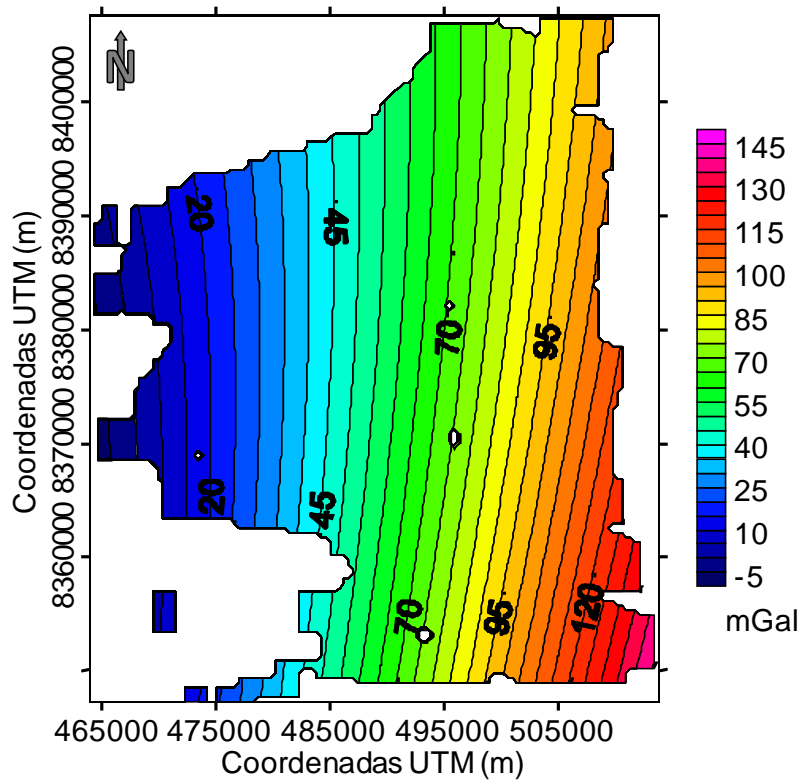


Figura 5.1.5 – Anomalia gravimétrica regional obtida pelo método robusto de ajuste de um polinômio do segundo grau (BELTRÃO et al., 1991) aos dados gravimétricos corrigidos da lamina d'água.

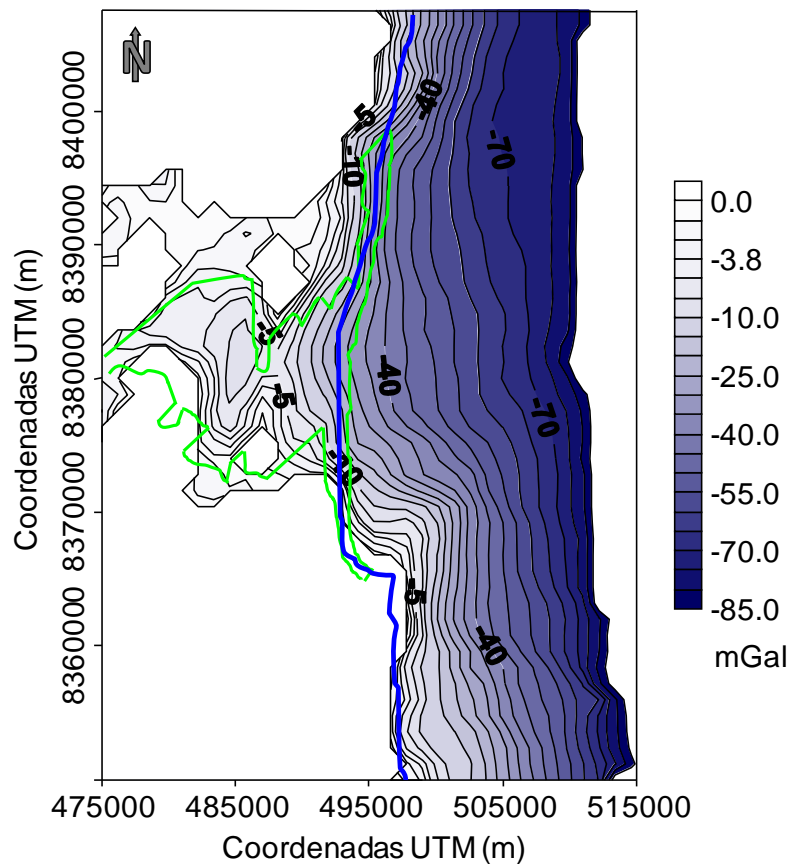


Figura 5.1.6 - **Bacia de Almada** - Anomalia gravimétrica residual da Bacia de Almada em linhas contínuas pretas, interpolada em uma malha regularmente espaçada de 1,2 km em ambas as direções horizontais  $x$  e  $y$ . A linha contínua azul indica a atual linha de costa e as linhas contínuas verdes indicam o contorno do mapa geológico.

## 5.2 – Inversão gravimétrica da Bacia de Almada

Apresentamos a seguir os resultados obtidos pelas inversões gravimétricas com o regularizador suavidade global (SG) e com o regularizador variação total (VT) da Bacia de Almada, e a busca sistemática das constantes que definem o decaimento parabólico do contraste de densidade com a profundidade. Nestas inversões gravimétricas, para obter o relevo 3D do embasamento da Bacia de Almada, modificamos ligeiramente o modelo interpretativo. Diferentemente dos exemplos com dados sintéticos em que os topos de todos os prismas coincidem com o plano  $z = 0,0$  km, para esta inversão, fixamos os topos dos prismas coincidentes com a batimetria (Figura 5.1.4). Similarmente aos exemplos com dados sintéticos, presumimos que o contraste de densidade varia com a profundidade segundo uma lei parabólica (equação 2.1.1). Embora essa hipótese permita um decaimento do contraste de densidade com a profundidade, ela não exclui a possibilidade do contraste de densidade ser constante, basta que  $\alpha$  (equação 2.2.1) seja um número positivo pequeno.

Para realizar as inversões e obter as estimativas das profundidades do relevo do embasamento, primeiro precisamos conhecer os parâmetros de decaimento parabólico do contraste de densidade com a profundidade, i.e. obter uma estimativa ótima do par  $(\Delta\rho_0, \alpha)$ . Para este fim, adotamos duas abordagens alternativas. Na primeira abordagem, ajustamos os pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  aos perfis de densidade de alguns poços disponíveis na região, e na segunda, realizamos a busca sistemática dos parâmetros parabólicos (seção 2.3) utilizando os dados gravimétricos da Bacia de Almada e informação sobre as profundidades do embasamento disponíveis em alguns poços na região.

Na primeira abordagem, utilizamos os dados de perfis de densidade medidos em 8 furos de sondagem (asteriscos amarelos, Figura 5.2.1) na Bacia de Almada. Especificamente, para cada furo de sondagem calculamos o par  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  minimizando a norma Euclidiana da diferença entre as medidas observadas e ajustadas do perfil de densidade presumindo-se a lei parabólica de variação do contraste de densidade com a

profundidade. A Figura 5.2.2 mostra os perfis de densidade ajustados para os 8 poços (asteriscos amarelos, Figura 5.2.1) em que havia dados de densidade disponíveis. A Figura 5.2.3 mostra os pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  (pontos coloridos) ajustados para cada um destes furos de sondagens. Notamos que esta primeira abordagem apresenta uma grande dispersão dos possíveis pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$ .

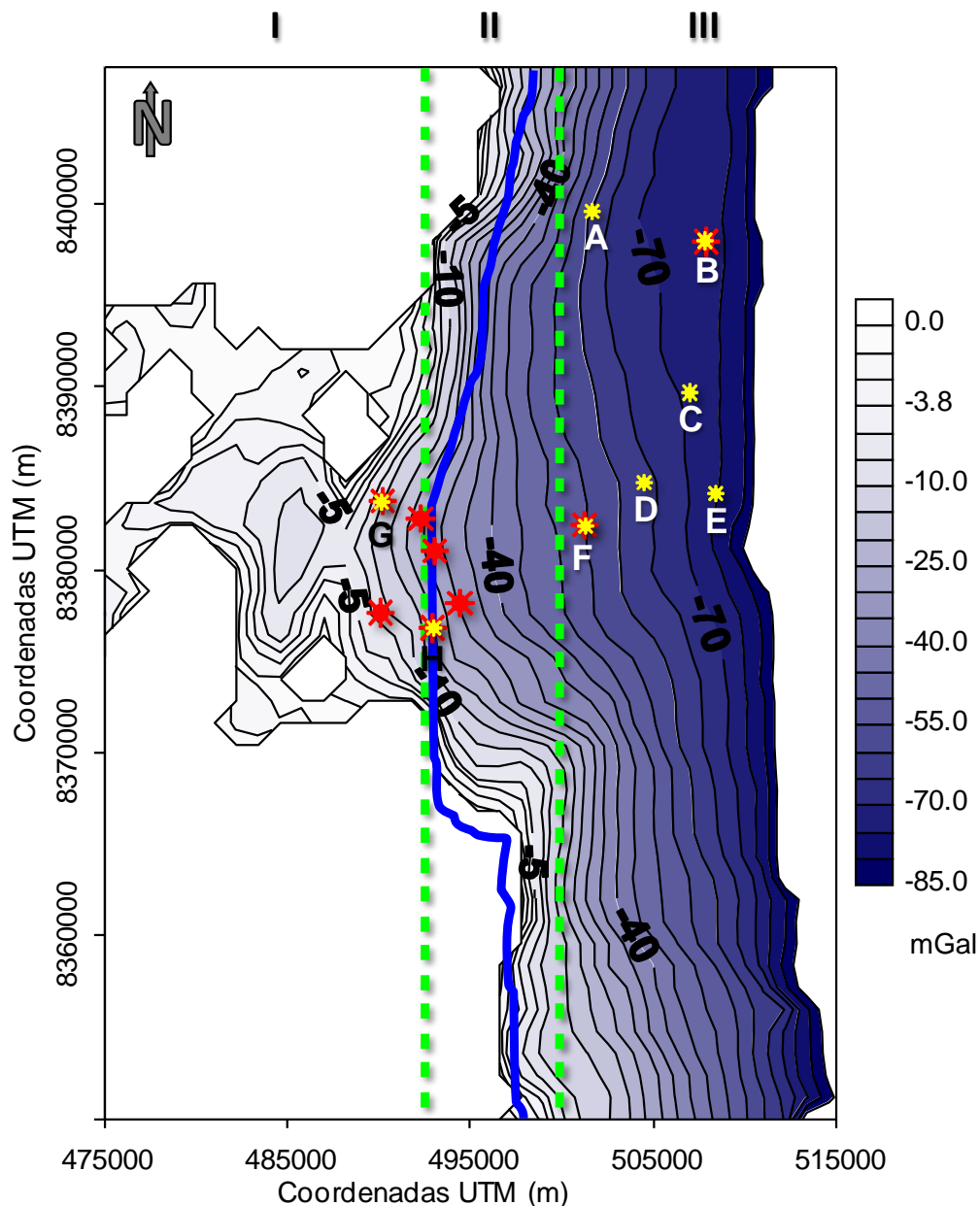


Figura 5.2.1 - **Bacia de Almada** - Anomalia residual da Bacia de Almada em linhas contínuas pretas. Os asteriscos vermelhos indicam as posições dos 8 poços que atingem o embasamento. Os asteriscos amarelos indicam as posições dos 8 poços com dados de perfis de densidade. As regiões I, II e III são adotadas durante a varredura do funcional  $\theta(\Delta\rho_0, \alpha)$ . Atual linha de costa indicada em linha contínua azul.



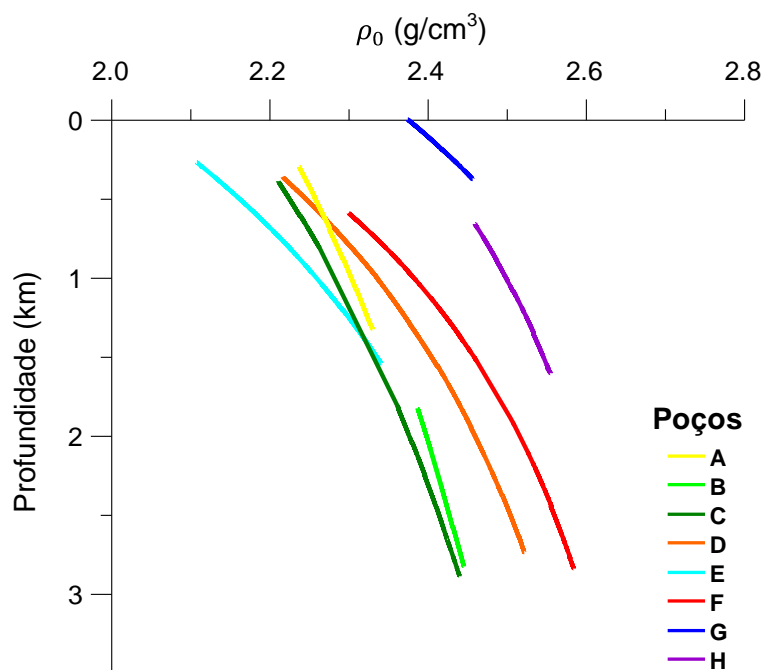


Figura 5.2.2 – Perfis de densidade ajustados para os 8 poços (asteriscos amarelos, Figura 5.2.1), presumindo lei parabólica de variação da densidade com a profundidade.

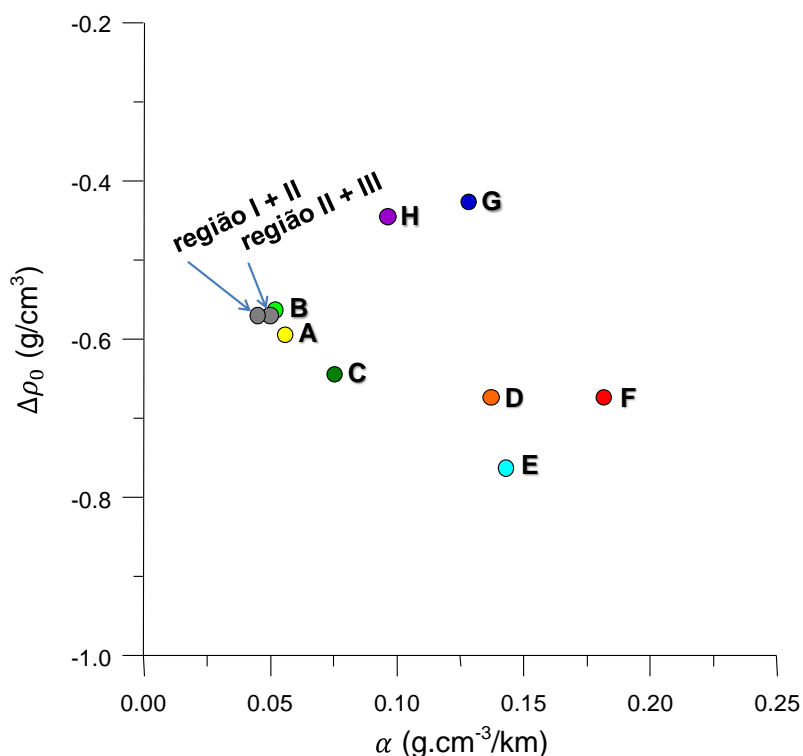


Figura 5.2.3 – Nuvem dos 8 pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  (pontos coloridos) estimados através da minimização da norma Euclidiana da diferença entre os dados de perfis de densidade (não mostrados) e os dados ajustados (Figura 5.2.2) considerando uma lei parabólica de variação do contraste de densidade. Os dois pontos cinza são os pares de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  selecionados da varredura das regiões I e III da Bacia de Almada (Figura 5.2.1.1a e b).

### 5.2.1 – Busca sistemática das constantes $\Delta\rho_0$ e $\alpha$ da Bacia de Almada

Como segunda abordagem para calcular um par ótimo ( $\Delta\rho_0, \alpha$ ), produzimos uma busca sistemática para o par  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  usando os dados gravimétricos e informações sobre as profundidades do embasamento fornecidas por oito furos de sondagem (asteriscos vermelhos, Figura 5.2.1) que tocam o embasamento na Bacia de Almada. Baseados no conhecimento geológico, presumimos que a variação de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  ao longo da direção norte-sul é desprezível, e que ao longo da direção leste-oeste apenas a variação de  $\alpha$  pode ser substancial. Deste modo, dividimos a Bacia de Almada em três regiões distintas (regiões I-III, Figura 5.2.1). A Região I é a parte mais a oeste sendo constituída pela porção continental da Bacia de Almada. A Região III é a parte mais a leste e inclui a porção marinha rasa da Bacia de Almada. A Região II é uma zona de transição e contém a atual linha de costa.

Para estimar pares ( $\Delta\rho_0, \alpha$ ) ótimos para ambas as regiões externas I e III da Bacia de Almada, mostradas na Figura 5.2.1, fixamos um modelo interpretativo inicial que consiste de uma malha de prismas 3D verticais com iguais dimensões horizontais de 1,2 km, e topo coincidente com a batimetria (Figura 5.2.1). Em seguida, definimos intervalos e incrementos para  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  para cada região e então produzimos mapeamentos discretos de dois funcionais no plano  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$ : (1) o funcional dado pelo termo do lado esquerdo da inequação 2.3.4 que mostra a projeção da região de ambiguidade e (2) o funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  (equação 2.3.3). Os dados gravimétricos e de profundidade do embasamento da região intermediária II foram incluídos na busca sistemática dos pares ótimos nas regiões I e III criando uma sobreposição dos conjuntos de dados gravimétricos e de furos de sondagem nas regiões combinadas: I-II e III-II. Os mapeamentos discretos do funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$ , no plano  $\Delta\rho_0 \times \alpha$ , associados com as regiões combinadas I-II e III-II são mostrados nas Figuras 5.2.1.1a e b, respectivamente. Os incrementos de  $\Delta\rho_0$  e de  $\alpha$  utilizados nestas varreduras foram de 0,05 g/cm<sup>3</sup> e de 0,0025 g.cm<sup>-3</sup>/km. Em ambos os casos, todos os pares inclusos nas regiões de mínimo (faixa azul escura nas Figuras 5.2.1.1a e b) produzem ajustes aceitáveis da

anomalia, exibindo um erro médio de 3,4 mGal. Baseados no conhecimento geológico, presumimos a invariabilidade de  $\Delta\rho_0$  nestas regiões. Desta forma, para as regiões combinadas I-II e III-II os pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  que selecionamos são, respectivamente,  $(-0,57\text{g/cm}^3, 0,045\text{g/cm}^3/\text{km})$ , e  $(-0,57\text{g/cm}^3, 0,050\text{g/cm}^3/\text{km})$  (quadrados verdes, Figuras 5.2.1.1a e b) indicando que não há grande variação lateral do decaimento do contraste de densidade com a profundidade na porção estudada da Bacia de Almada. Os valores estimados de  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$  para as regiões combinadas I-II e III-II serão usados nas regiões I e III, respectivamente. Para a região II nós usamos, na inversão,  $\Delta\rho_0 = -0,57\text{g/cm}^3$  e um valor interpolado de  $\alpha$  dado por

$$\alpha_i = \alpha_I + \frac{(\alpha_{II} + \alpha_I)(y_i + y_I)}{y_{II} - y_I}, \quad (5.2.1.1)$$

sendo  $\alpha_i$  o valor do parâmetro  $\alpha$  atribuído ao  $i$ -ésimo prisma do modelo interpretativo localizado na região II,  $\alpha_I = 0,045\text{g/cm}^3/\text{km}$ ,  $\alpha_{II} = 0,050\text{g/cm}^3/\text{km}$ ,  $y_i$  é a coordenada na direção leste-oeste do  $i$ -ésimo prisma, e  $y_I$  e  $y_{II}$  são coordenadas  $y$  dos limites entre as regiões I e II e as regiões II e III, respectivamente.

A Figura 5.2.3 mostra em pontos cinzas os pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  estimados pelo mapeamento sistemático do funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$  (equação 2.3.3) para as regiões combinadas I-II e III-II (quadrados verdes, Figura 5.2.1.1a e b). Note-se que estas estimativas são compatíveis com as estimativas de  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  obtidas ajustando os dados de perfis de densidade dos 8 furos de sondagem (pontos coloridos, Figura 5.2.3).

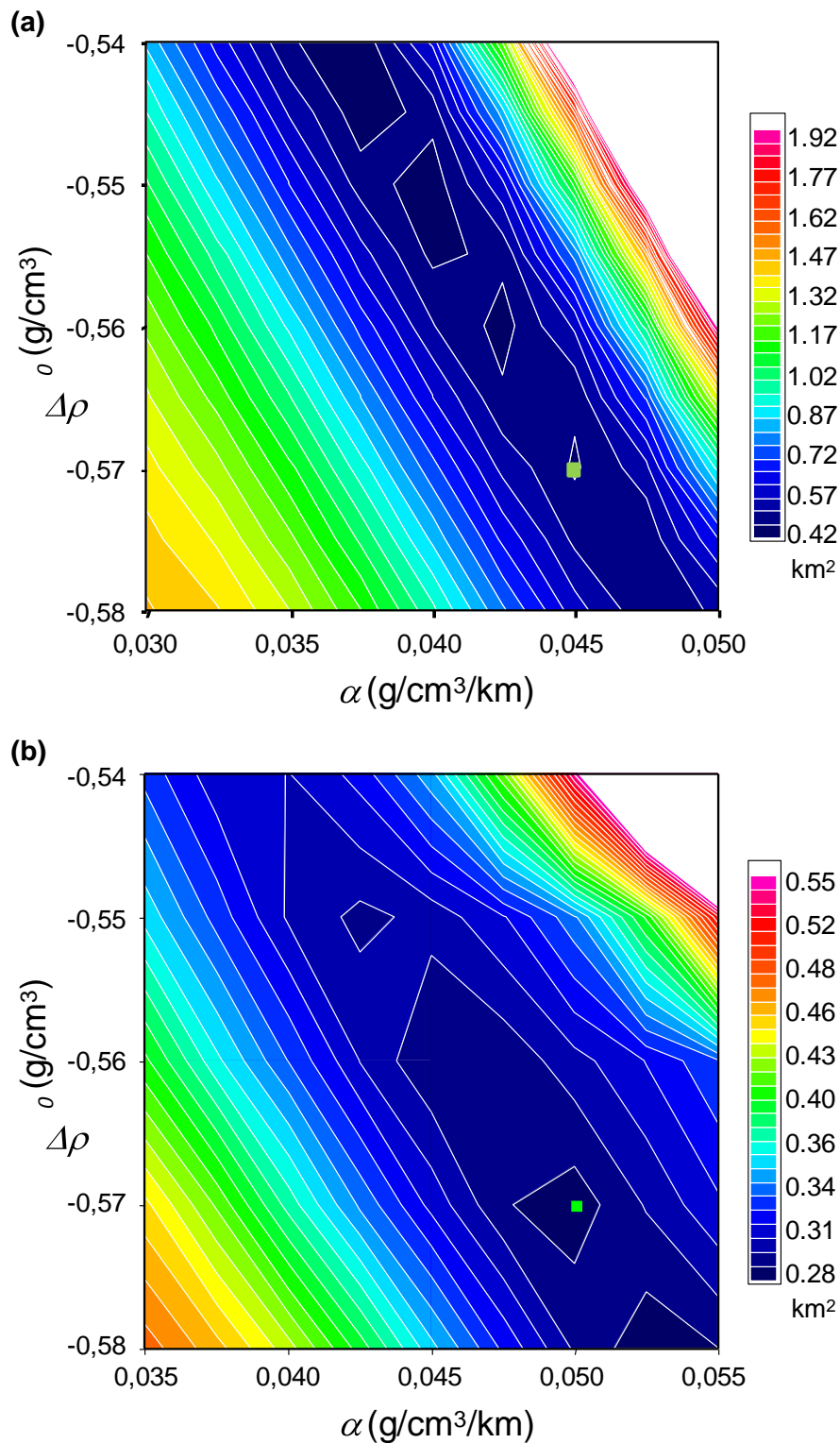


Figura 5.2.1.1: **Bacia de Almada** - Busca sistemática do funcional  $\Theta(\Delta\rho_0, \alpha)$ , equação 2.3.3, no plano  $\Delta\rho_0 \times \alpha$  usando os dados gravimétricos e poços (asteriscos vermelhos, Figura 5.2.1) das: **(a)** regiões I e II **(b)** regiões III e II. Os pontos verdes indicam pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  selecionados para a estimativa do embasamento desta bacia.

## 5.2.2 – Inversão gravimétrica com regularizador suavidade global da Bacia de Almada

Aplicamos ao conjunto de dados gravimétricos da Bacia de Almada a inversão com vínculo SG (minimização do regularizador de Tikhonov de primeira ordem via norma  $l_2$ ), utilizando os pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  selecionados para as regiões I, II e III conforme procedimento descrito na busca sistemática. Usamos um modelo interpretativo composto por uma malha de prismas 3D verticais com as mesmas dimensões  $x$  e  $y$  de 1,2 km em que os topos dos prismas coincidem com a profundidade da batimetria (Figura 5.1.4). Adotamos a aproximação inicial para as profundidades do relevo do embasamento atribuindo a cada prisma a espessura de uma placa Bouguer com contraste de densidade  $\Delta\rho_0$  de maneira a reproduzir o valor absoluto da anomalia gravimétrica diretamente acima do centro do prisma. A Figura 5.2.2.1 mostra um mapa em planta das profundidades estimadas para o relevo 3D do embasamento da Bacia de Almada, pela inversão SG, que ajusta os dados gravimétricos observados (linhas tracejadas vermelhas, Figura 5.2.2.2a). A Figura 5.2.2.2b mostra em perspectiva a superfície do relevo 3D estimado para o embasamento. Notamos que o relevo estimado não é só uma versão em escala da anomalia gravimétrica, apresentando várias características que não são aparentes no mapa de anomalia Bouguer (Figura 5.2.1). Destacamos a relação direta do relevo estimado com as falhas mapeadas através do mapeamento geológico na porção terrestre e através da interpretação de dados sísmicos (MOHRIAK et al., 2008) na porção marinha. Também notamos a existência de terraços A, B, e C que separam duas sub-bacias locais (D e E). Estas características são importantes no entendimento da evolução da bacia e na detecção de armadilhas estruturais de óleo.

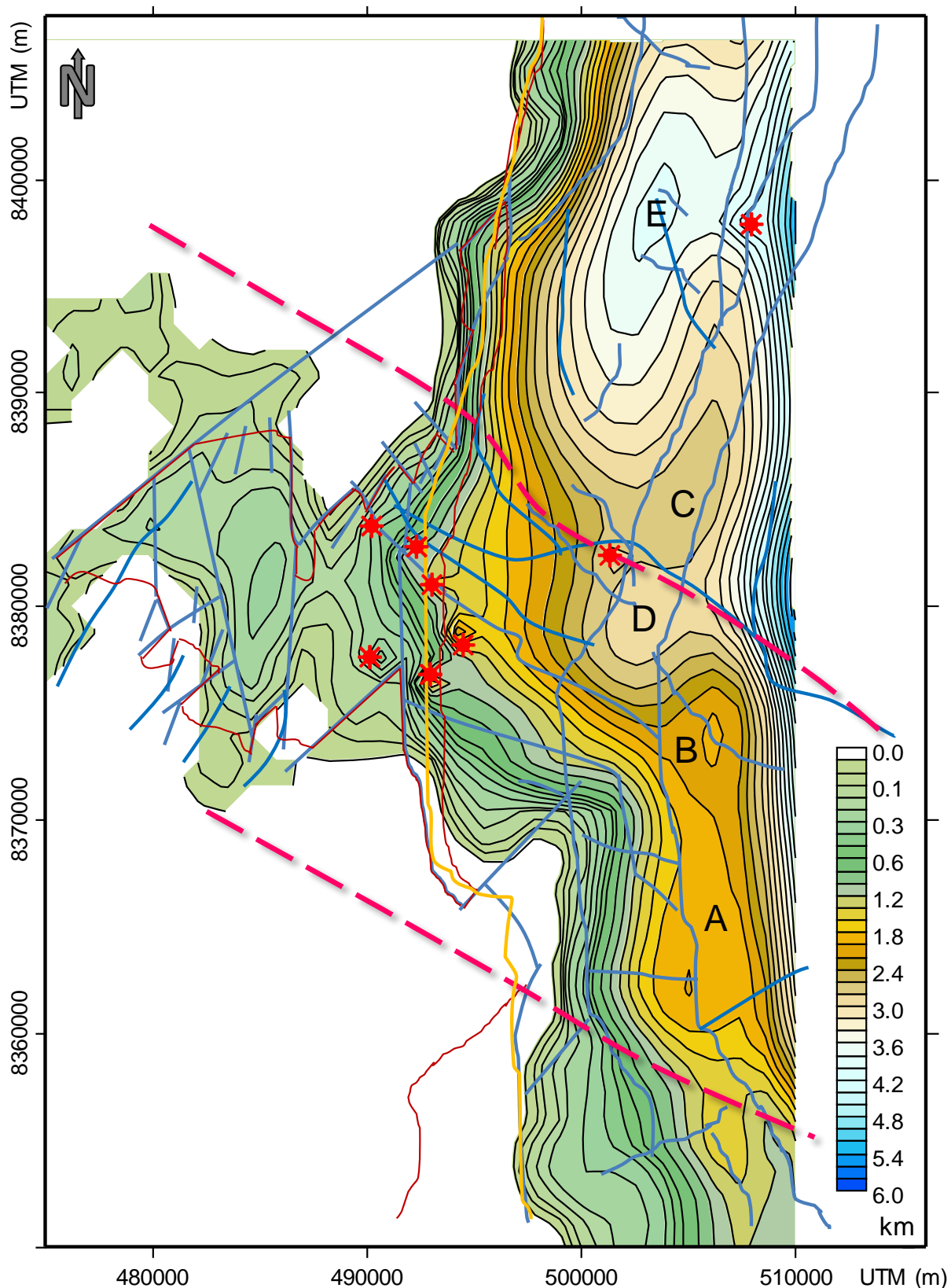


Figura 5.2.2.1 – **Bacia de Almada** – Mapa em planta das profundidades estimadas para o relevo 3D do embasamento da Bacia de Almada pela inversão gravimétrica com regularizador Suavidade Glogal (SG). Os asteriscos vermelhos indicam as localizações dos oito poços que atingem o embasamento. As linhas contínuas azuis, laranjas e vermelhas indicam falhas e as linhas tracejadas vermelhas representam falhas transformantes conhecidas na literatura. Os símbolos A, B, e C indicam terraços, em que C separa duas sub-bacias locais D e E.

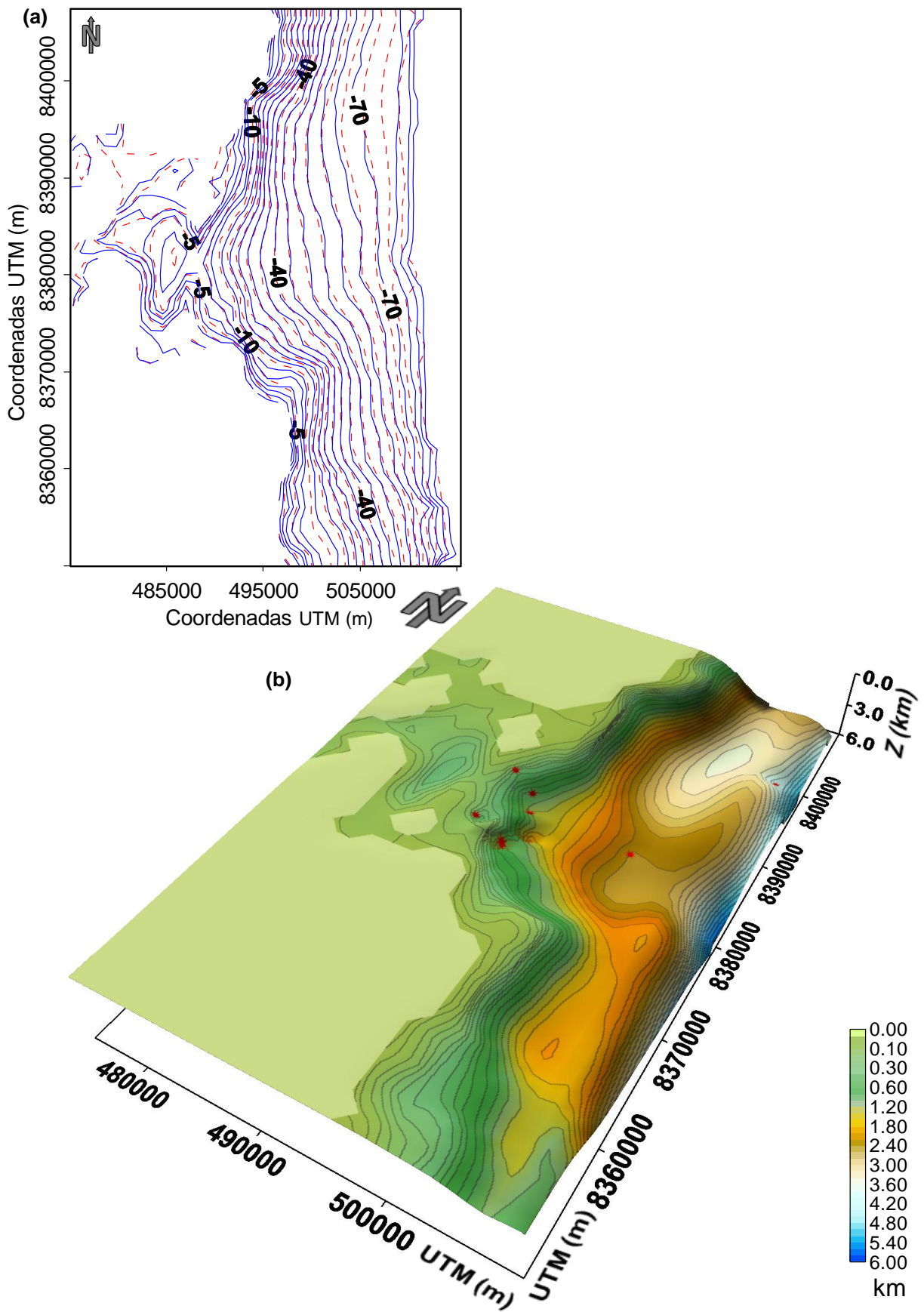


Figura 5.2.2.2 – **Bacia de Almada** – (a) Anomalias residual (linhas contínuas azuis) e ajustada (linhas tracejadas vermelhas) pelo relevo estimado com a inversão gravimétrica com regularizador Suavidade Glocal (SG) (Figura 5.2.2.1). (b) Vista em perspectiva da superfície do relevo 3D do embasamento estimado (Figura 5.2.2.1) pela inversão gravimétrica com regularizador Suavidade Glocal (SG).

### 5.2.3 - Inversão gravimétrica com regularizador variação total da Bacia de Almada

Aplicamos ao conjunto de dados da Bacia de Almada (dados gravimétricos e de profundidades do embasamento fornecidas por furos de sondagem), a inversão gravimétrica com regularizador variação total. Realizamos esta inversão objetivando recuperar um relevo 3D do embasamento da Bacia de Almada contendo descontinuidades locais melhor delineadas em comparação aos resultados obtidos pela inversão SG (Figura 5.2.2.1). Os pares  $(\Delta\rho_0, \alpha)$  selecionados para as regiões I, II e III, e o modelo interpretativo utilizados nesta inversão são os mesmos da inversão SG (seção 5.2.2). Adotamos a aproximação inicial para as profundidades do relevo do embasamento atribuindo a cada prisma a espessura de uma placa Bouguer com contraste de densidade  $\Delta\rho_0$  de maneira a reproduzir o valor absoluto da anomalia gravimétrica diretamente acima do centro do prisma. A Figura 5.2.3.1 mostra um mapa em planta das estimativas de profundidade do relevo 3D do embasamento da Bacia de Almada, através da inversão VT, que ajusta os dados gravimétricos observados (linhas tracejadas vermelhas, Figura 5.2.3.2a). A Figura 5.2.3.2b mostra em perspectiva a superfície do relevo 3D estimado para o embasamento da Bacia de Almada. Notamos que o relevo estimado além de não ser apenas uma versão em escala da anomalia gravimétrica contém virtualmente as mesmas feições geológicas mapeadas pela inversão SG. No entanto, ele apresenta descontinuidades que marcam ainda melhor a presença das falhas (linhas azuis na Figura 5.2.3.1), como as falhas com grande rejeito vertical que controlam as bordas da bacia, e as falhas com pequeno rejeito que controlam as feições estruturais do arcabouço da bacia, como por exemplo os terraços A, B, e C e as duas sub-bacias D e E (Figura 5.2.3.1). Note ainda que há um grande rejeito vertical na extremidade leste do relevo estimado pela inversão VT, que não se apresenta tão proeminente na inversão SG. Destacamos duas possíveis causas para esta feição do relevo estimado: i) ser uma consequência do efeito de borda notada mais intensamente pela inversão VT, que permite maiores descontinuidades, ou; ii) ser uma representação factível de uma falha de grande rejeito vertical que limite a oeste uma calha de direção Norte-Sul do relevo do embasamento na porção marinha mais profunda.



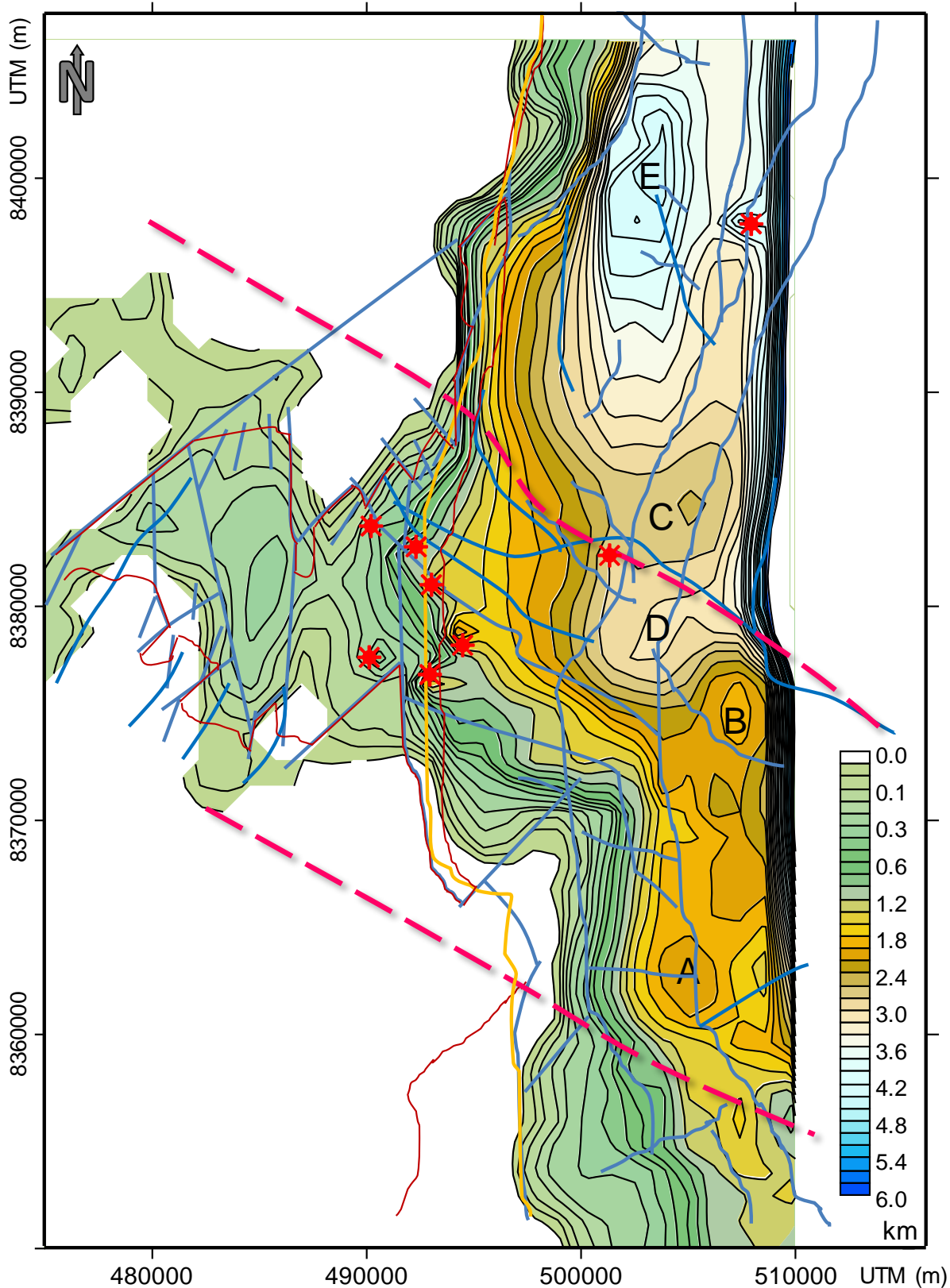


Figura 5.2.3.1 – **Bacia de Almada** – Mapa em planta das profundidades estimadas para o relevo 3D do embasamento da Bacia de Almada pela inversão gravimétrica com regularizador Variação Total (VT). Os asteriscos vermelhos indicam as localizações dos oito poços que atingem o embasamento. As linhas contínuas azuis, laranjas e vermelhas indicam falhas e as linhas tracejadas vermelhas representam falhas transformantes conhecidas na literatura. Os símbolos A, B, e C indicam terraços, em que C separa duas sub-bacias locais D e E, todos delimitados com maior riqueza de detalhes que pela inversão SG

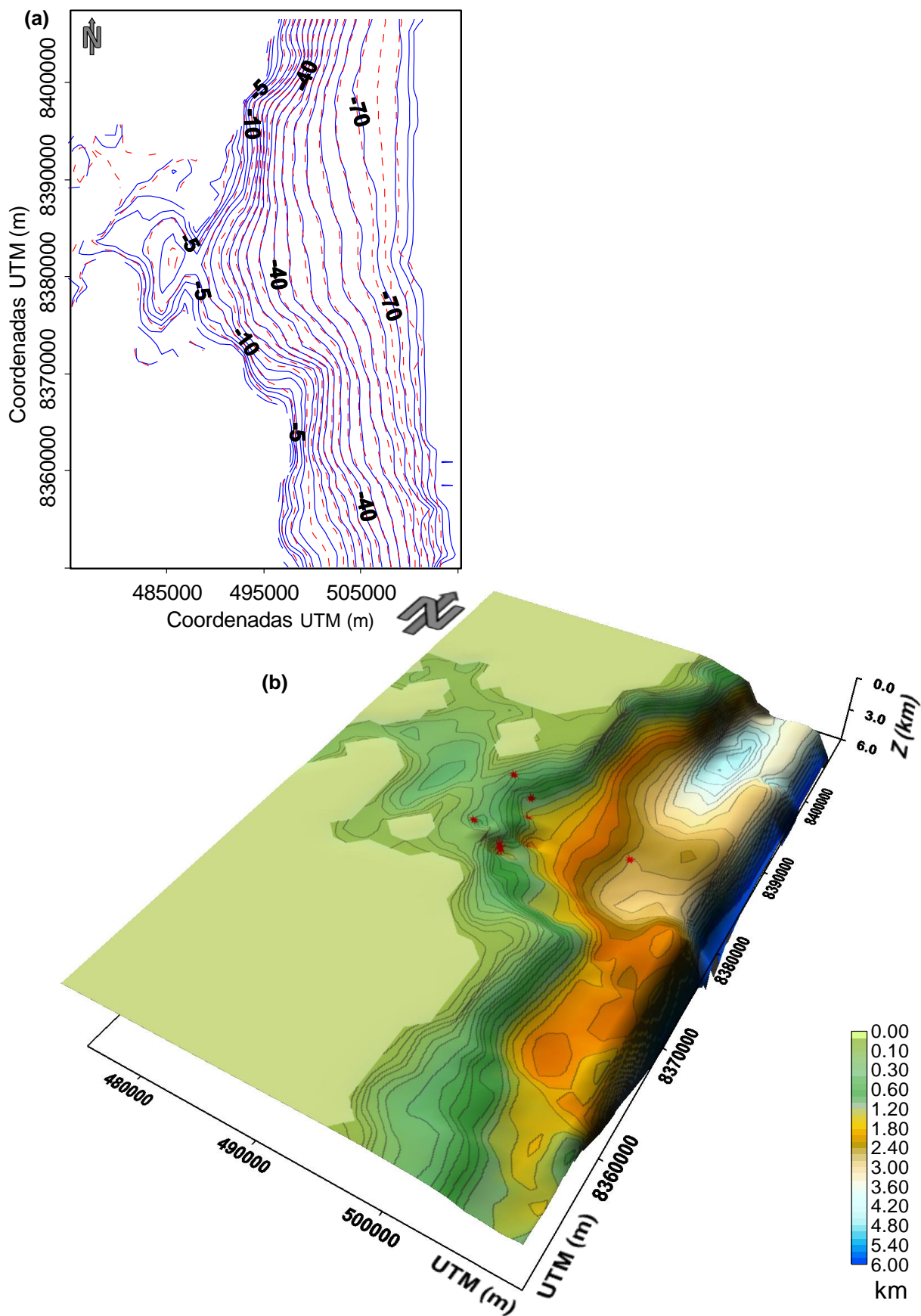


Figura 5.2.3.2 – **Bacia de Almada** – (a) Anomalias residual (linhas contínuas azuis) e ajustada (linhas tracejadas vermelhas) pelo relevo estimado (Figura 5.2.2.1) com a inversão gravimétrica com regularizador Variação Total (VT). (b) Vista em perspectiva da superfície do relevo 3D do embasamento estimado (Figura 5.2.3.1) pela inversão gravimétrica com regularizador Variação Total (VT).

Nesta tese propomos dois novos métodos de inversão de dados gravimétricos produzidos por uma bacia sedimentar presumindo embasamento homogêneo e um pacote sedimentar heterogêneo de tal modo que o contraste de densidade entre os sedimentos e o embasamento diminui com a profundidade segundo uma lei parabólica. Ambos os métodos podem estimar simultaneamente o relevo 3D do embasamento e os parâmetros que definem o decaimento parabólico do contraste de densidade com a profundidade em bacias sedimentares, conhecendo-se a priori as profundidades do embasamento em alguns pontos, fornecidas por furos de sondagem.

Estes métodos de inversão gravimétrica diferem pelo funcional regularizador empregado, que simultaneamente tornam os métodos de inversão estáveis e introduzem informação a priori sobre o ambiente geológico da bacia sedimentar em questão. Para o primeiro método, que denominamos inversão com vínculo de suavidade global, usamos o regularizador de Tikhonov de primeira ordem como estabilizador matemático, que consiste na norma dois da aproximação por diferenças finitas da derivada horizontal de primeira ordem dos parâmetros. Este método impõe a informação de suavidade ao embasamento da bacia sedimentar, como no caso de bacias intracratônicas. Para o segundo método, que denominamos inversão com vínculo variação total, usamos como estabilizador matemático um funcional que consiste na norma um da aproximação por diferenças finitas da derivada horizontal de primeira ordem dos parâmetros. Este método permite soluções que contenham descontinuidades locais no relevo do embasamento, e desse modo é introduzida a informação geológica de que a bacia sedimentar apresenta relevo do embasamento controlado por falhas com alta inclinação, como no caso de bacias extencionais. Ambos os métodos demonstram sua eficiência ao produzir boa estimativa do relevo do embasamento de bacias sedimentares, mesmo no caso de ambientes geológicos complexos. Nossos relevos estimados não são uma simples versão em escala da anomalia gravimétrica

observada. Ao contrário, nossas estimativas contém características do relevo do embasamento que apenas são reveladas pelo processo de inversão. Apresentamos também uma metodologia para estimar as constantes que definem a lei parabólica de decaimento do contraste de densidade com a profundidade conhecendo-se a profundidade do embasamento em alguns pontos.

Realizamos testes com dados sintéticos simulando relevos complexo e simples. Evidenciamos, em ambos os casos, que o regularizador foi imprescindível para garantir estabilidade da solução. Teste em dados sintéticos com o método de inversão com vínculo de suavidade global mostrou que a estimativa simultânea de um embasamento 3D complexo e dos parâmetros que descreve a lei parabólica de decaimento do contraste de densidade com a profundidade produz bons resultados. Testes em dados sintéticos demonstram, adicionalmente, a eficiência do método de inversão gravimétrica com vínculo variação total em recuperar relevos de embasamento caracterizados por discontinuidades locais. Teste com o método de inversão com vínculo suavidade global aplicado aos dados da Bacia de Almada produziu uma estimativa do relevo 3D do embasamento com boa correlação com o conhecimento geológico prévio desta bacia, apresentando um forte controle tectônico das bordas e a presença de uma calha alongada na direção norte-sul na porção marinha rasa. Ao aplicarmos o método de inversão com vínculo variação total aos dados da Bacia de Almada, recuperamos um relevo do embasamento virtualmente com as mesmas feições geológicas mapeadas com a inversão com vínculo suavidade global, mas, com maior riqueza de detalhes estruturais. Não só as falhas com grande rejeito vertical que controlam as bordas da bacia foram melhor mapeadas, como também as falhas com pequeno rejeito que controlam as feições estruturais do arcabouço da Bacia de Almada.

Comparando os métodos apresentados nesta tese com outros desenvolvidos anteriormente, destacamos duas vantagens da inversão com vínculo suavidade global em relação ao método de CHAKRAVARTHI e SUNDARARAJAN (2007). A primeira é a estabilidade das soluções estimadas. A segunda vantagem é o aumento efetivo da definição (resolução) de feições da fonte, ou seja, a capacidade do nosso método em revelar feições

que não são apenas uma imagem em escala da anomalia gravimétrica. Podemos destacar também que o método de inversão com vínculo da variação total apresenta vantagens quando comparado a outros métodos anteriores para estimar o relevo do embasamento de bacias sedimentares com descontinuidades. Especificamente, quando comparada com o método de inversão com vínculo de suavidade ponderada (BARBOSA et al., 1999), a inversão com vínculo da variação total tem a vantagem de não exigir informação a priori adicional sobre a profundidade máxima da bacia. Quando comparada com o método da regularização entrópica (OLIVEIRA, 2007) a inversão com vínculo da variação total apresenta a facilidade de exigir apenas a sintonização de um parâmetro de regularização ao invés da sintonização simultânea de dois parâmetros de regularização.

Como limitação dos métodos de inversão apresentados nesta tese podemos destacar que o problema direto é computacionalmente dispendioso, e, por conseqüência, o problema inverso também é dispendioso. Especificamente no caso da inversão com vínculo da variação total, o gasto computacional é ainda maior uma vez que a matriz Hessiana e o vetor-gradiente do funcional aproximado da variação total são calculados a cada iteração.

Como outras possibilidades de aplicação dos métodos apresentados nesta tese, sugerimos a inversão de dados gravimétricos para a estimativa de outras superfícies, como por exemplo a Moho. Outra possibilidade é estimar uma superfície que defina a base de um corpo intrusivo ao pacote sedimentar, uma vez que esse corpo pode ser definido por duas superfícies, uma contornando seu topo e a outra sua base. Conhecendo-se a superfície que limita o topo deste corpo podemos estimar, através dos métodos de inversão gravimétrica que apresentamos nesta tese, a superfície que limita a base deste corpo. Este corpo pode ser, por exemplo, o caso de um domo, soleira ou almofada de sal intrusivo ao pacote sedimentar de uma bacia, cuja superfície que limita seu topo é fornecida pela sísmica. Esta pode ser uma importante aplicação dos métodos de inversão gravimétrica que apresentamos, uma vez que há dificuldade da sísmica em estimar o limite inferior do domo de sal. Outra medida que podemos indicar como possibilidade futura diz respeito à direção considerada da aproximação das derivadas dos parâmetros por diferenças finitas. Para a

maioria dos métodos de inversão gravimétrica, inclusive para os dois apresentados nesta tese, consideram-se as aproximações das derivadas horizontais dos parâmetros por diferenças finitas, isto é, consideram-se apenas as duas direções horizontais  $x$  (norte-sul) e  $y$  (leste-oeste), respectivamente. Esta escolha desta direção horizontal aparentemente interfere nas feições do relevo de embasamento estimado. Uma nova tentativa que leve em conta mais direções pode ser tentada.

**Expressão da componente vertical do campo gravimétrico produzida por um único prisma presumindo decaimento do contraste de densidade com a profundidade segundo uma lei parabólica.**

Neste apêndice apresentamos a solução da equação 2.1.3 proposta por CHAKRAVARTHI et al. (2002), para calcular a componente vertical da anomalia gravimétrica no  $i$ -ésimo ponto de observação  $O(x_i, y_i, z_i)$  produzida por um único prisma 3D. Por simplicidade, adotaremos neste apêndice as seguintes modificações na notação matemática:  $dx = 2T$  e  $dy = 2Y$ . Considere um prisma 3D vertical com dimensões horizontais  $2T$  e  $2Y$ , respectivamente, nas direções  $x$  e  $y$ , com centro localizado sob o ponto  $P$  com ambas coordenadas horizontais no ponto  $(0,0)$  e com topo e base nas profundidades  $0$  (zero) e  $p_j$  (Figura A-1).

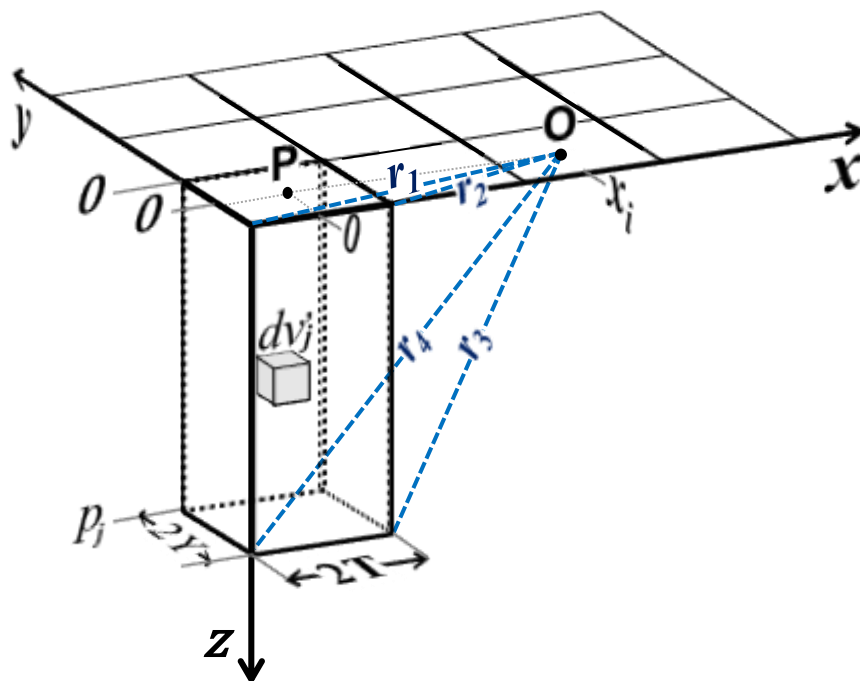


Figura A-1 – Prisma de dimensões  $2T$ ,  $2Y$  e  $p_j$ , respectivamente, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , com centro posicionado sob o ponto  $P(0,0,0)$ . Os raios  $r_1$  a  $r_4$  são distâncias dos vértices de uma das faces do prisma paralela ao eixo  $y$  até o ponto de observação  $O(x_i,0,0)$  e  $dv_j$  é um elemento de volume 3D do  $j$ -ésimo prisma.

Presumimos que este prisma seja preenchido por sedimentos cujo contraste de densidade com o embasamento homogêneo varia com a profundidade segundo uma lei parabólica (equação 2.1.1) definida pelo par de constantes  $\Delta\rho_0$  e  $\alpha$ . A função não linear que calcula a componente vertical do campo gravimétrico  $f_i(p_j, \Delta\rho_0, \alpha) \equiv f_i$  (equação 2.1.3) produzida por este único prisma, no  $i$ -ésimo ponto de observação  $\mathbf{O}(x_i, 0, 0)$  (Figura A-1) pode ser obtida pela integração do efeito gravimétrico do elemento de volume 3D ( $dv_j = dx'_j \times dy'_j \times dz'_j$ , pequeno prisma cinza na Figura A-1) interior ao prisma, sendo escrita por:

$$f_i = \gamma \int_0^{p_j} \int_{-T}^T \int_{-Y}^Y \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 + \alpha z'_j)^2} \cdot \frac{z'_j}{\left[ (x_i - x'_j)^2 + y_j'^2 + z_j'^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dy'_j dx'_j dz'_j. \quad (\text{A-1})$$

Esta integral é exatamente igual a

$$f_i = \gamma \int_0^{p_j} \int_{x_i-T}^{x_i+T} \int_{-Y}^Y \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 + \alpha z'_j)^2} \cdot \frac{z'_j}{\left[ x_j'^2 + y_j'^2 + z_j'^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dy'_j dx'_j dz'_j. \quad (\text{A-2})$$

Considerando a invariabilidade lateral do contraste de densidade, CHAKRAVARTHI et al. (2002) adotam como solução integrar em relação a  $y'_j$  dividindo os limites de integração em duas parcelas. Então a equação A-2 pode ser reescrita como:

$$f_i = \frac{\gamma}{2} [F_1 + F_2], \quad (\text{A-3})$$

em que

$$F_1 = \int_0^{p_j} \int_{x_i-T}^{x_i+T} \int_0^Y \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 + \alpha z'_j)^2} \cdot \frac{z'_j}{\left[ x_j'^2 + y_j'^2 + z_j'^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dy'_j dx'_j dz'_j \quad (\text{A-4})$$

e

$$F_2 = \int_0^{p_j} \int_{x_i-T}^{x_i+T} \int_{-Y}^0 \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 + \alpha z'_j)^2} \cdot \frac{z'_j}{\left[ x_j'^2 + y_j'^2 + z_j'^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dy'_j dx'_j dz'_j. \quad (\text{A-5})$$

Integrando a parcela  $F_1$  (equação A-4) da equação A-3, em relação a  $y'_j$ , entre os limites de 0 e  $Y$  temos:



$$F_1 = 2\Delta\rho_0^3 Y \int_0^{p_j} \int_{x_i-T}^{x_i+T} \frac{1}{(\Delta\rho_0 + \alpha z_j')^2} \cdot \frac{z_j'}{[x_j'^2 + Y^2 + z_j'^2]^{\frac{1}{2}} (x_j'^2 + z_j'^2)} dx_j' dz_j'. \quad (\text{A-6})$$

Integrando a equação A-6 em relação a  $x_j'$ , entre os limites  $x_i - T$  e  $x_i + T$ , temos:

$$F_1 = 2\Delta\rho_0^3 \int_0^{p_j} \frac{1}{(\Delta\rho_0 + \alpha z_j')^2} \cdot \left[ \tan^{-1} \frac{Y(x_i + T)}{z_j [(x_i + T)^2 + Y^2 + z_j'^2]^{\frac{1}{2}}} - \tan^{-1} \frac{Y(x_i - T)}{z_j [(x_i - T)^2 + Y^2 + z_j'^2]^{\frac{1}{2}}} \right] dz_j'. \quad (\text{A-7})$$

Note que o limite inferior da integral da equação A-7 é zero, uma vez que estabelecemos um modelo interpretativo composto por prismas 3D com topo na profundidade zero. A solução desta integral (CHAKRAVARTHI et al., 2002) envolve termos do tipo  $\tan^{-1}\left(\frac{a}{bz_j'}\right)$ , em que  $a$  e  $b$  são valores diferentes de zero. No limite em que  $z_j'$  tende a zero temos que  $\tan^{-1}_{z_j' \rightarrow 0}\left(\frac{a}{bz_j'}\right) = \frac{\pi}{2}$ . Usando esta aproximação a solução da integral A-7, em relação à  $z_j'$ , entre os limites 0 e  $p_j$ , é

$$\begin{aligned} F_1 = & 2\Delta\rho_0^3 \cdot \\ & \left[ \frac{\alpha Y(x_i + T)(2\Delta\rho_0^2 + \alpha^2|Y^2 + (x_i + T)^2|)}{L_1(Y^2\alpha^2 + \Delta\rho_0^2)(\Delta\rho_0^2 + \alpha^2|x_i + T|^2)} \ln \frac{\Delta\rho_0^2(\alpha r_4 L_1 + L_1^2 - \Delta\rho_0 L_3)}{L_3(\alpha r_1 L_1 + L_1^2 - \Delta\rho_0^3)} \right. \\ & - \frac{\alpha Y(x_i - T)(2\Delta\rho_0^2 + \alpha^2|Y^2 + (x_i - T)^2|)}{L_2(Y^2\alpha^2 + \Delta\rho_0^2)(\Delta\rho_0^2 + \alpha^2|x_i - T|^2)} \ln \frac{\Delta\rho_0^2(\alpha r_4 L_2 + L_2^2 - \Delta\rho_0 L_3)}{L_3(\alpha r_1 L_2 + L_2^2 - \Delta\rho_0^3)} \\ & + \frac{\Delta\rho_0}{\alpha(\Delta\rho_0^2 + Y^2\alpha^2)} \left[ \left[ \tan^{-1}\left(\frac{Yr_3}{p_j|x_i - T|}\right) - \frac{\pi}{2} \right] - \left[ \tan^{-1}\left(\frac{Yr_4}{p_j|x_i + T|}\right) - \frac{\pi}{2} \right] \right] \\ & - \frac{\Delta\rho_0}{\alpha(\Delta\rho_0^2 + |x_i + T|^2\alpha^2)} \left[ \tan^{-1}\left(\frac{|x_i + T|r_4}{p_j Y}\right) - \frac{\pi}{2} \right] \\ & + \frac{\Delta\rho_0}{\alpha(\Delta\rho_0^2 + |x_i - T|^2\alpha^2)} \left[ \tan^{-1}\left(\frac{|x_i - T|r_3}{p_j Y}\right) - \frac{\pi}{2} \right] \\ & + \frac{Y}{2(\Delta\rho_0^2 + Y^2\alpha^2)} \left[ \ln \frac{(|x_i + T| - r_4)(|x_i + T| + r_1)}{(|x_i + T| + r_4)(|x_i + T| - r_1)} - \ln \frac{(|x_i - T| - r_3)(|x_i - T| + r_2)}{(|x_i - T| + r_3)(|x_i - T| - r_2)} \right] \\ & - \frac{x_i + T}{2(\Delta\rho_0^2 + |x_i + T|^2\alpha^2)} \ln \frac{(Y - r_4)(Y + r_1)}{(Y + r_4)(Y - r_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{x_i - T}{2(\Delta\rho_0^2 + |x_i - T|^2\alpha^2)} \ln \frac{(Y - r_3)(Y + r_2)}{(Y + r_3)(Y - r_2)} \\
& + \frac{1}{\alpha(\Delta\rho_0 - \alpha z_2)} \left[ \tan^{-1} \frac{Y|x_i + T|}{p_j r_4} - \tan^{-1} \frac{Y|x_i - T|}{p_j r_3} \right], \tag{A-8}
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
L_1 &= [((x_i + T)^2 + Y^2)\alpha^2 + \Delta\rho_0^2]^{1/2}, & r_1 &= [(x_i + T)^2 + Y^2]^{1/2}, \\
L_2 &= [((x_i - T)^2 + Y^2)\alpha^2 + \Delta\rho_0^2]^{1/2}, & r_2 &= [(x_i - T)^2 + Y^2]^{1/2}, \\
L_3 &= \Delta\rho_0^2 - \alpha p_j, & r_3 &= [(x_i - T)^2 + Y^2 + p_j^2]^{1/2} \text{ e} \\
& & r_4 &= [(x_i + T)^2 + Y^2 + p_j^2]^{1/2}. \tag{A-9}
\end{aligned}$$

A equação A-8 calcula a primeira parcela de  $f_i$  (parcela  $F_1$ , equação A-3) que é o efeito gravimétrico devido a face do prisma na direção  $y$ , em  $y = 0 + Y$ . Para se obter o valor total de  $f_i$ , é necessário calcular o efeito da segunda parcela ( $F_2$ , equação A-5), que é o efeito gravimétrico da face oposta, em  $y = 0 - Y$ . Para calcular  $F_2$ , basta calcular novamente a equação A-8. Finalmente, a componente vertical do campo gravimétrico  $f_i$  no ponto  $\mathbf{O}$  produzida por um único prisma localizado na origem, é dada pela equação A-3 que é a média aritmética da equação A-8 calculada em  $y = 0 + Y$  (parcela  $F_1$ ), e a equação A-8 calculada em  $y = 0 - Y$  (parcela  $F_2$ ).

Generalizando, para um arranjo com o ponto de observação localizado em  $\mathbf{O}_i$  com coordenadas  $x = x_i$ ,  $y = y_i$  e  $z = 0$  km, considerando um prisma localizado em  $\mathbf{P}_j$  com centro nas coordenadas horizontais  $x = x_j$  e  $y = y_j$ , com topo em  $z = 0$  km e espessura  $p_j$ , temos que  $f_i$  é a componente vertical do campo gravimétrico produzida por este prisma medida no ponto  $\mathbf{O}_i$ . Utilizando as diferenças entre as coordenadas do prisma ( $\mathbf{P}_j$ ) e as coordenadas do ponto de observação ( $\mathbf{O}_i$ ) nas direções  $x$  e  $y$ , como  $r_y = (y_j - y_i)$  e  $r_x = (x_j - x_i)$ , então  $f_i$  é dada pela média aritmética entre os cálculos da equação A-8 calculada em  $r_y + Y$  e  $r_y - Y$  que são, respectivamente, as parcelas  $F_1$  e  $F_2$  da equação A-3. Adicionalmente, para o cálculo da equação A-8,  $x_i$  é substituído por  $r_x$ .

Para o cálculo da componente vertical do campo gravimétrico produzida por um único prisma localizado a uma distancia horizontal, do ponto de observação, superior a seis vezes a dimensão horizontal do prisma, BOTT (1960) demonstrou que a integral A-1 pode ser aproximada por uma equação que considera toda a massa do prisma concentrada em uma linha vertical e de mesma comprimento que o prisma. Embora esta aproximação pudesse significar considerável economia computacional, nós não a adotamos nesta tese.

**Expressão analítica da matriz de sensibilidade e uma estratégia computacional para calculá-la**

Seja um conjunto de  $N$  observações geofísicas  $g_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e  $M$  parâmetros  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Então, por definição, a matriz de sensibilidade avaliada na  $k$ -ésima iteração  $\mathbf{A}_{(k)}$ , de dimensões  $N \times M$ , é a matriz de primeiras derivadas do funcional não linear  $f_i(\mathbf{p}, \Delta\rho_0, \alpha) \equiv f_i$  (equação 2.1.3) em relação aos parâmetros e avaliada em  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ . Especificamente, o  $ij$ -ésimo elemento da matriz  $\mathbf{A}_{(k)}$  é igual a  $a_{ij} = \partial f_i / \partial p_j$ , avaliado na aproximação  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$ . Portanto, na  $k$ -ésima iteração, a matriz de sensibilidade  $\mathbf{A}_{(k)}$  é definida como:

$$\mathbf{A}_{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial p_j} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial p_M} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \frac{\partial f_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial p_j} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial p_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial p_1} & \frac{\partial f_i}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial p_j} & \dots & \frac{\partial f_i}{\partial p_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial p_1} & \frac{\partial f_N}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial p_j} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial p_M} \end{bmatrix}. \quad (\text{B-1})$$

Note que a  $i$ -ésima linha da matriz de sensibilidade  $\mathbf{A}_{(k)}$  carrega a variação de magnitude (sensibilidade) da função  $f_i$  devida a perturbações nos valores dos  $M$  parâmetros e a  $j$ -ésima coluna da matriz de sensibilidade  $\mathbf{A}_{(k)}$  é a influência da perturbação do  $j$ -ésimo parâmetro ( $p_j$ ) nas  $N$  funções geofísicas. Neste trabalho, por adotarmos o número de observações gravimétricas igual ao número de parâmetros (espessuras de  $M$  prismas), a matriz  $\mathbf{A}_{(k)}$  é definida com dimensão  $M \times M$ .

No Apêndice A, calculamos explicitamente a função não linear  $f_i$  (equação 2.1.3) que relaciona a  $i$ -ésima observação geofísica ao  $j$ -ésimo parâmetro. Neste Apêndice calculamos

explicitamente a derivada da equação  $f_i$  em relação à espessura  $p_j$ , considerando o sensor posicionado nas coordenadas  $(x_i, y_i, 0)$  sendo  $p_j$  referente a um prisma com centro posicionado sob as coordenadas horizontais  $x_j$  e  $y_j$ , com topo e base, respectivamente, nas profundidades zero e  $p_j$  e com dimensões horizontais  $dx = 2T$  e  $dy = 2Y$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Lembrando que  $f_i$  é a média aritmética entre  $F_1$  e  $F_2$  (equação A-3), a expressão que calcula derivada de  $f_i$  em relação à espessura  $p_j$ , e portanto o  $ij$ -ésimo elemento da matriz  $A_{(k)}$ , é dada pela derivada da equação A-3:

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial p_j} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial F_1}{\partial p_j} + \frac{\partial F_2}{\partial p_j} \right] = \frac{\gamma \Delta \rho_0^3}{(\Delta \rho_0 - \alpha p_j)^2} \cdot \left( \left[ \tan^{-1} \frac{|r_x + T|(r_y + Y)}{p_j [(r_x + T)^2 + (r_y + Y)^2 + p_j^2]^{\frac{1}{2}}} - \tan^{-1} \frac{|r_x - T|(r_y + Y)}{p_j [(r_x - T)^2 + (r_y + Y)^2 + p_j^2]^{\frac{1}{2}}} \right] + \left[ \tan^{-1} \frac{|r_x + T|(r_y - Y)}{p_j [(r_x + T)^2 + (r_y - Y)^2 + p_j^2]^{\frac{1}{2}}} - \tan^{-1} \frac{|r_x - T|(r_y - Y)}{p_j [(r_x - T)^2 + (r_y - Y)^2 + p_j^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \right), \quad (\text{B-2})$$

em que  $\gamma$  é a constante gravitacional de Newton,  $r_x = x_j - x_i$  e  $r_y = y_j - y_i$ .

Para calcular a matriz  $A_{(k)}$  adotamos uma estratégia para garantir um menor custo computacional. Como a intensidade do sinal do campo gravimétrico decai com o quadrado da distância, a contribuição da componente vertical do campo gravimétrico no  $i$ -ésimo ponto de observação  $g_i(x_i, y_i, 0)$  (equação 2.1.2) torna-se quase nula se for causada por um prisma  $p_j$  localizado a uma grande distância do ponto de observação. Igualmente a derivada desta função quase nula é numericamente nula. Por esse motivo, somente calculamos alguns elementos da matriz  $A_{(k)}$  que não são nulos ou quase nulos. Para a  $i$ -ésima linha da matriz  $A_{(k)}$  calculamos apenas alguns elementos espacialmente próximos ao  $ii$ -ésimo elemento  $A_{(k)}$ . Aos demais elementos desta linha atribuímos valores nulos. Este critério de proximidade envolve uma distância  $r$ , definida a priori na malha  $m_x \times m_y$  de  $M$  prismas 3D (Figura 2.1.2). Assim todos os parâmetros espacialmente próximos de  $p_i$ , por uma distância inferior a  $r$  são considerados para o cálculo da  $i$ -ésima linha da matriz  $A_{(k)}$ . Portanto, o

número de elementos da  $i$ -ésima linha da matriz  $A_{(k)}$  (i.e.,  $\partial f_i / \partial p_j$ ,  $j = 1, \dots, M$ ) que são efetivamente calculados depende de  $r$ . Assim por exemplo, se  $r = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  em que  $dx$  e  $dy$  são as dimensões horizontais de um elemento da malha  $mx \times my$  (Figura B-1), então a  $i$ -ésima linha da matriz  $A_{(k)}$  será escrita pelo vetor:

$$\mathbf{a}_{i(k)} = [ \dots, 0, a_{i(i-my-1)}, a_{i(i-my)}, a_{i(i-my+1)}, 0, \dots, \dots, 0, a_{i(i-1)}, a_{i(i)}, a_{i(i+1)}, 0, \dots, \dots, 0, a_{i(i+my-1)}, a_{i(i+my)}, a_{i(i+my+1)}, 0, \dots ] \quad (\text{B-3})$$

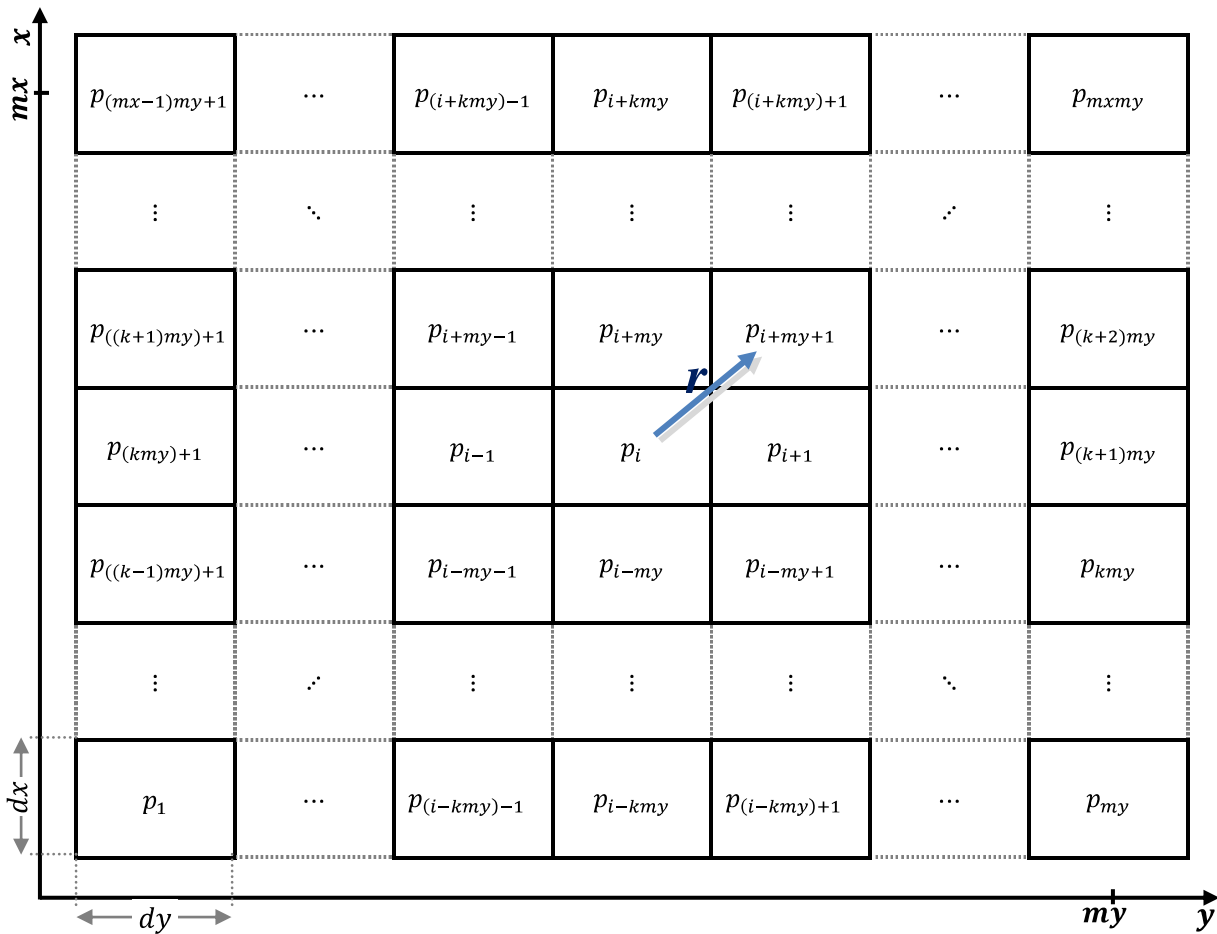


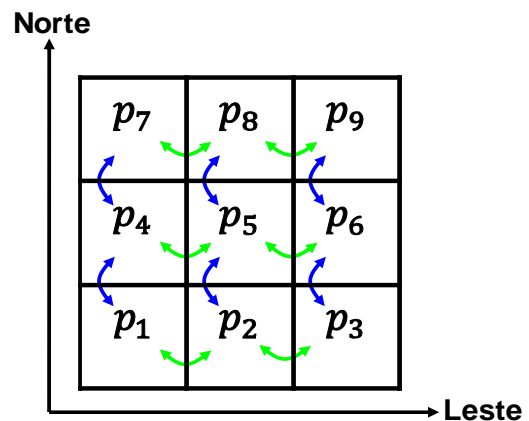
Figura B-1 – Vista em planta da distribuição espacial de  $M$  prismas em uma malha  $mx \times my$  em que  $M = mx \times my$  e  $p_i$  é o  $i$ -ésimo parâmetro (espessura do  $i$ -ésimo prisma). As dimensões horizontais de cada prisma são iguais a  $dx$  e  $dy$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. A distância  $r = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  e  $k$  é a parte inteira da razão  $i/my$ .

Durante as sucessivas iterações do algoritmo de Gauss-Newton, a distância  $r$  recebe diferentes valores. Na primeira iteração,  $r$  recebe um valor relativamente pequeno,

tipicamente de 5 vezes o valor da dimensão horizontal do prisma, no entanto isto depende do tamanho do levantamento gravimétrico. O valor de  $r$  aumenta a cada iteração e assim, o número de elementos calculados na matriz  $A_{(k)}$  aumenta à medida que a estimativa  $\hat{\mathbf{p}}_{(k)}$  se aproxima da solução (i.e., do mínimo do funcional a ser minimizado).

**Definição do vetor-gradiente e da matriz Hessiana do funcional da Variação Total**

Considere um exemplo em que o relevo do embasamento de uma bacia sedimentar é discretizado em nove prismas 3D cujas nove espessuras são os parâmetros a serem estimados. Os nove parâmetros que compõem este vetor  $\mathbf{p}$  estão espacialmente distribuídos



em planta como representado na Figura C-1. As setas verdes e azuis indicam pares de parâmetros vizinhos na direção Leste e Norte, respectivamente. A Tabela C-1 mostra os doze pares de prismas vizinhos em ambas as direções.

Figura C-1 – Vista em planta da distribuição espacial de nove prismas que representam uma discretização da subsuperfície contendo o pacote sedimentar em uma malha  $m \times n$  ( $3 \times 3$ ). As setas verdes e azuis indicam as vizinhanças entre os prismas na direção Leste e Norte, respectivamente.

Tabela C-1 – A primeira coluna contém os seis pares de prismas vizinhos na direção Leste, indicados por setas verdes na Figura C-1. A segunda coluna contém os seis pares de prismas vizinhos na direção Norte, indicados por setas azuis na Figura C-1.

<b>Parâmetros vizinhos na direção Leste</b>	<b>Parâmetros vizinhos na direção Norte</b>
$p_1, p_2$	$p_1, p_4$
$p_2, p_3$	$p_4, p_7$
$p_4, p_5$	$p_2, p_5$
$p_5, p_6$	$p_5, p_8$
$p_7, p_8$	$p_3, p_6$
$p_8, p_9$	$p_6, p_9$



Nos funcionais da suavidade  $\phi_S$  e da variação total  $\phi_V$  definidos, respectivamente, pelas equações 2.2.1.1 e 2.2.2.1,  $\mathbf{R}$  é uma matriz  $L \times M$  sendo  $L$  o número de pares de parâmetros adjacentes ao longo das direções  $x$  e  $y$ . Neste exemplo da Figura C-1,  $L$  é igual a doze e  $M$  é igual a nove. A matriz  $\mathbf{R}$  representa o operador diferencial discreto de primeira ordem ao longo das direções horizontais (TWOMEY, 1963; VOGEL, 1997), cujas linhas contêm somente dois elementos não nulos, 1 e -1, que estão associados a cada par de parâmetros adjacentes, de tal modo que, se dois parâmetros  $p_i$  e  $p_j$  representam dois prismas do modelo interpretativo espacialmente adjacentes ao longo de uma direção horizontal. A  $l$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{R}$  é composta por elementos nulos, exceto os elementos da  $i$ -ésima e  $j$ -ésima coluna, que recebem valores 1 e -1, respectivamente. Para o exemplo da Figura C-1, a matriz  $\mathbf{R}$  ( $12 \times 9$ ) é especificamente dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C-1})$$

O vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  ( $9 \times 1$ ) do exemplo da Figura C-1 é dado por:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \end{bmatrix}. \quad (\text{C-2})$$

Assim, o produto  $\mathbf{R}\mathbf{p}$  resulta num vetor  $\mathbf{d}$  ( $L \times 1$ ), sendo o  $l$ -ésimo elemento deste vetor a diferença entre dois elementos do vetor  $\mathbf{p}$  de parâmetros ( $p_i - p_j$ ) que representam espessuras de prismas espacialmente vizinhos ao longo das direções horizontais. Para o exemplo, o vetor  $\mathbf{d}$  ( $12 \times 1$ ) é dado por:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} (p_1 - p_2) \\ (p_2 - p_3) \\ (p_4 - p_5) \\ (p_5 - p_6) \\ (p_7 - p_8) \\ (p_8 - p_9) \\ (p_1 - p_4) \\ (p_4 - p_7) \\ (p_2 - p_5) \\ (p_5 - p_8) \\ (p_3 - p_6) \\ (p_6 - p_9) \end{bmatrix}. \quad (\text{C-3})$$

Neste exemplo particular da Figura C-1, o funcional da variação total  $\phi_V$  (equação 2.2.2.1) é dado pela norma  $l_1$  do vetor  $\mathbf{d}$  e a aproximação para o funcional  $\phi_V$ , definida na equação 2.2.2.12, é

$$\phi_V = \sum_{l=1}^L F_l(p_i, p_j), \quad (\text{C-4})$$

em que  $F_l(p_i, p_j)$  é a  $l$ -ésima função aproximada do módulo da diferença entre os prismas  $p_i$  e  $p_j$  que definem o  $l$ -ésimo par de parâmetros espacialmente adjacentes nas direções horizontais, i.e.,

$$F_l(p_i, p_j) = \left[ (p_i - p_j)^2 + \beta \right]_l^{\frac{1}{2}}, \quad l = 1, \dots, 12. \quad (\text{C-5})$$

Reescrevendo explicitamente  $\phi_V$  para este exemplo da Figura C-1, considerando a função  $F_l(p_i, p_j)$ ,  $l = 1, \dots, 12$ , temos

$$\phi_V = [ F_1(p_1, p_2) + F_2(p_2, p_3) + F_3(p_4, p_5) + F_4(p_5, p_6) + F_5(p_7, p_8) + F_6(p_8, p_9) + F_7(p_1, p_4) + F_8(p_4, p_7) + F_9(p_2, p_5) + F_{10}(p_5, p_8) + F_{11}(p_3, p_6) + F_{12}(p_6, p_9) ]. \quad (\text{C-6})$$

O vetor  $\mathbf{j}^V (M \times 1)$  (equação 2.2.2.8) é o gradiente do funcional  $\phi_V$ . No caso particular da Figura C-1, o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{j}^V$  é a primeira derivada do funcional  $\phi_V$  (equação C-6) em relação a  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 9$ . Como  $\phi_V$  envolve somas de  $F_l(p_i, p_j)$ ,  $l = 1, \dots, 12$ , vamos primeiro calcular a expressão da primeira derivada de  $F_l(p_i, p_j)$  (equação C-5) em relação ao vetor  $\mathbf{p}$ . Consequentemente, a primeira derivada de  $F_l(p_i, p_j)$  em relação a  $p_i$  e a  $p_j$  são, respectivamente,

$$F'(p_i, p_j)_{p_i} \equiv \frac{\partial F_l(p_i, p_j)}{\partial p_i} = \frac{p_i - p_j}{[(p_i - p_j)^2 + \beta]^{1/2}} \quad (\text{C-7})$$

e

$$F'(p_i, p_j)_{p_j} \equiv \frac{\partial F_l(p_i, p_j)}{\partial p_j} = -\frac{p_i - p_j}{[(p_i - p_j)^2 + \beta]^{1/2}}. \quad (\text{C-8})$$

Definindo

$$G(p_i, p_j) = \frac{p_i - p_j}{[(p_i - p_j)^2 + \beta]^{1/2}}, \quad (\text{C-9})$$

e substituindo a equação C-9 nas equações C-7 e C-8, temos que a primeira derivada de  $F_l(p_i, p_j)$  (equação C-5) em relação à  $p_i$  ou à  $p_j$  é genericamente definida como

$$F'(p_i, p_j) = \pm G(p_i, p_j). \quad (\text{C-10})$$

Especificamente, para o exemplo particular da Figura C-1, o vetor-gradiente da aproximação do funcional da variação total  $\phi_V$  (equação C-6), em relação à  $\mathbf{p}$ , usando as equações C-9 e C10, é dado por:

$$\mathbf{j}_{(k)}^V = \begin{bmatrix} G(p_1, p_2) + G(p_1, p_4) \\ -G(p_1, p_2) + G(p_2, p_3) + G(p_2, p_5) \\ -G(p_2, p_3) + G(p_3, p_6) \\ G(p_4, p_5) - G(p_1, p_4) + G(p_4, p_7) \\ -G(p_4, p_5) + G(p_5, p_6) - G(p_2, p_5) + G(p_5, p_8) \\ -G(p_5, p_6) - G(p_3, p_6) + G(p_6, p_9) \\ G(p_7, p_8) - G(p_4, p_7) \\ -G(p_7, p_8) + G(p_8, p_9) - G(p_5, p_8) \\ -G(p_8, p_9) - G(p_6, p_9) \end{bmatrix}. \quad (\text{C-11})$$

O resultado a cima pode ser escrito na forma compacta como:

$$\mathbf{j}_{(k)}^V = \mathbf{R}^T \mathbf{d}_1. \quad (\text{C-12})$$

em que  $\mathbf{d}_1$  ( $L \times 1$ ) é o vetor auxiliar cujo  $l$ -ésimo elemento é dado pela função  $G(p_i, p_j)$  (equação C-9) aplicada ao  $l$ -ésimo par do vetor de diferenças entre os parâmetros vizinhos,  $\mathbf{d}$  (equação C-3). Neste exemplo particular, o vetor  $\mathbf{d}_1$  ( $12 \times 1$ ) é definido como:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} G(p_1, p_2) \\ G(p_2, p_3) \\ G(p_4, p_5) \\ G(p_5, p_6) \\ G(p_7, p_8) \\ G(p_8, p_9) \\ G(p_1, p_4) \\ G(p_4, p_7) \\ G(p_2, p_5) \\ G(p_5, p_8) \\ G(p_3, p_6) \\ G(p_6, p_9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_1 - p_2}{[(p_1 - p_2)^2 + \beta]^{1/2}} \\ \frac{p_2 - p_3}{[(p_2 - p_3)^2 + \beta]^{1/2}} \\ \frac{p_4 - p_5}{[(p_4 - p_5)^2 + \beta]^{1/2}} \\ \frac{p_5 - p_6}{[(p_5 - p_6)^2 + \beta]^{1/2}} \\ \frac{p_7 - p_8}{[(p_7 - p_8)^2 + \beta]^{1/2}} \\ \frac{p_8 - p_9}{[(p_8 - p_9)^2 + \beta]^{1/2}} \\ \frac{p_1 - p_4}{[(p_1 - p_4)^2 + \beta]^{1/2}} \\ \frac{p_4 - p_7}{[(p_4 - p_7)^2 + \beta]^{1/2}} \\ \frac{p_2 - p_5}{[(p_2 - p_5)^2 + \beta]^{1/2}} \\ \frac{p_5 - p_8}{[(p_5 - p_8)^2 + \beta]^{1/2}} \\ \frac{p_3 - p_6}{[(p_3 - p_6)^2 + \beta]^{1/2}} \\ \frac{p_6 - p_9}{[(p_6 - p_9)^2 + \beta]^{1/2}} \end{bmatrix}. \quad (\text{C-13})$$

Note que cada parâmetro  $p_i$ , ou a espessura de cada prisma, tem no mínimo dois vizinhos, e no máximo quatro (Figura C-1). Os prismas que estão nos vértices da malha de discretização do exemplo ( $p_1$ ,  $p_3$ ,  $p_7$  e  $p_9$ ) têm apenas dois vizinhos, o prisma que fica bem no centro da malha de discretização ( $p_5$ ) tem quatro vizinhos, e os demais prismas têm três vizinhos. Portanto, dependendo da localização de  $p_i$  na malha de discretização, o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{j}_{(k)}^V$  será o somatório de duas a quatro parcelas da função  $G(p_i, p_j)$ .

Embora a forma compacta do vetor-gradiente  $\mathbf{j}^V$  (equação C-12) tenha sido deduzida a partir de um exemplo simples da Figura C-1, este vetor pode ser generalizado para calcular qualquer vetor-gradiente da aproximação do funcional da variação total (equação C-4). Em um caso geral, o  $l$ -ésimo elemento de  $\mathbf{d}_1$  ( $L \times 1$ ) é dado por:

$$\mathbf{d}_1 \equiv \{d_{1l}\} = G(p_i, p_j) = \frac{p_i - p_j}{[(p_i - p_j)^2 + \beta]^{1/2}}, \quad (\text{C-14})$$

em que  $p_i$  e  $p_j$  são o  $l$ -ésimo par de parâmetros espacialmente adjacentes nas direções horizontais.

Vimos na equação 2.2.2.9 que a matriz Hessiana do funcional  $\phi_V$ ,  $\mathbf{H}^V$ , é a derivada do vetor-gradiente  $\mathbf{j}^V$  (equação 2.2.2.8). Como o cálculo de  $\mathbf{j}^V$  envolve a função  $G(p_i, p_j)$ , então primeiro vamos calcular a derivada de  $G(p_i, p_j)$  em relação à  $p_i$ , i.e.:

$$G'(p_i, p_j)_{p_i} \equiv \frac{\partial G(p_i, p_j)}{\partial p_i} = \frac{1}{[(p_i - p_j)^2 + \beta]^{1/2}} - \frac{(p_i - p_j)^2}{[(p_i - p_j)^2 + \beta]^{3/2}}. \quad (\text{C-15})$$

ou:

$$G'(p_i, p_j)_{p_i} = \frac{\beta}{[(p_i - p_j)^2 + \beta]^{3/2}}. \quad (\text{C-16})$$

Similarmente, a derivada de  $G(p_i, p_j)$  em relação à  $p_j$ , é dada por,

$$G'(p_i, p_j)_{p_j} \equiv \frac{\partial G(p_i, p_j)}{\partial p_j} = -\frac{\beta}{[(p_i - p_j)^2 + \beta]^{3/2}}. \quad (\text{C-17})$$

Definindo

$$Q(p_i, p_j) = \frac{\beta}{[(p_i - p_j)^2 + \beta]^{3/2}} \quad (\text{C-18})$$

e substituindo a equação C-18 nas equações C-16 e C-17, temos que a primeira derivada de  $G(p_i, p_j)$  em relação a  $p_i$  ou a  $p_j$  é genericamente definida como

$$G'(p_i, p_j) = \pm Q(p_i, p_j). \quad (\text{C-19})$$

Especificamente para o nosso exemplo, a matriz Hessiana  $\mathbf{H}^V$  (9×9) da aproximação do funcional da variação total  $\phi_V$ , (equação C-6), em relação a  $\mathbf{p}$ , usando as equações C-18 e C-19, é dada por

$$\mathbf{H}^V = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & 0 & H_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{32} & H_{33} & 0 & 0 & H_{36} & 0 & 0 & 0 \\ H_{41} & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} & 0 & H_{47} & 0 & 0 \\ 0 & H_{52} & 0 & H_{54} & H_{55} & H_{56} & 0 & H_{58} & 0 \\ 0 & 0 & H_{63} & 0 & H_{65} & H_{66} & 0 & 0 & H_{69} \\ 0 & 0 & 0 & H_{74} & 0 & 0 & H_{77} & H_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{85} & 0 & H_{87} & H_{88} & H_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{96} & 0 & H_{98} & H_{99} \end{bmatrix}. \quad (\text{C-20})$$

em que os elementos não nulos da matriz  $H^V$  são:

$$H_{11} = Q(p_1, p_2) + Q(p_1, p_4) ,$$

$$H_{12} = -Q(p_1, p_2) ,$$

$$H_{14} = -Q(p_1, p_4) ,$$

$$H_{21} = H_{12} ,$$

$$H_{22} = Q(p_1, p_2) + Q(p_2, p_3) + Q(p_2, p_5) ,$$

$$H_{23} = -Q(p_2, p_3) ,$$

$$H_{25} = -Q(p_2, p_5) ,$$

$$H_{32} = H_{23} ,$$

$$H_{33} = Q(p_2, p_3) + Q(p_3, p_6) ,$$

$$H_{36} = -Q(p_3, p_6) ,$$

$$H_{41} = H_{14} ,$$

$$H_{44} = Q(p_4, p_5) + Q(p_1, p_4) + Q(p_4, p_7) ,$$

$$H_{45} = -Q(p_4, p_5) ,$$

$$H_{47} = -Q(p_4, p_7) ,$$

$$H_{52} = H_{25} ,$$

$$H_{54} = H_{45} ,$$

$$H_{55} = Q(p_4, p_5) + Q(p_5, p_6) + Q(p_2, p_5) + Q(p_5, p_8) ,$$

$$H_{56} = -Q(p_5, p_6) ,$$

$$H_{58} = -Q(p_5, p_8) ,$$

$$H_{63} = H_{36} ,$$

$$H_{65} = H_{56} ,$$

$$H_{66} = Q(p_5, p_6) + Q(p_3, p_6) + Q(p_6, p_9) ,$$

$$H_{69} = -Q(p_6, p_9) ,$$

$$H_{74} = H_{47} ,$$

$$H_{77} = Q(p_7, p_8) + Q(p_4, p_7) ,$$

$$H_{78} = -Q(p_7, p_8) ,$$

$$H_{85} = H_{58} ,$$

$$H_{87} = H_{78} ,$$

$$H_{88} = Q(p_7, p_8) + Q(p_8, p_9) + Q(p_5, p_8) ,$$

$$H_{89} = -Q(p_8, p_9) ,$$

$$H_{96} = H_{69} ,$$

$$H_{98} = H_{89}$$

e

$$H_{99} = Q(p_8, p_9) + Q(p_6, p_9) .$$

A matriz simétrica expressa na equação C-20 é a matriz Hessiana do funcional  $\phi_V$ , avaliada em  $\hat{p}_{(k)}$ . Esta matriz pode ser reescrita na forma compactada:

$$\mathbf{H}^V = \mathbf{R}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{R} , \tag{C-21}$$

em que  $\mathbf{D}_1$  ( $L \times L$ ) é a matriz diagonal cujo  $ll$ -ésimo elemento é dado pela função  $Q(p_i, p_j)$  (equação C-18) em que  $p_i$  e  $p_j$  são os elementos do vetor de parâmetros que formam o  $l$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{d}$  (equação C-3). Para o nosso exemplo a matriz  $\mathbf{D}_1$  ( $12 \times 12$ ), é definida como:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} Q(p_1, p_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q(p_2, p_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q(p_4, p_5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q(p_5, p_6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q(p_7, p_8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q(p_8, p_9) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q(p_1, p_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q(p_4, p_7) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q(p_2, p_5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q(p_5, p_8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q(p_3, p_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q(p_6, p_9) \end{bmatrix} . \tag{C-22}$$

Note que nos elementos da diagonal principal da matriz  $\mathbf{H}^V$  (equação C-20) dois fatos acontecem. i) Derivamos duas vezes em relação ao mesmo parâmetro ( $p_i$  ou  $p_j$ ), portanto as funções  $Q(p_i, p_j)$ , equação C-18, são sempre computadas como positivas. ii). No  $ii$ -ésimo elemento da matriz  $\mathbf{H}^V$  a função  $Q(p_i, p_j)$  é computada algumas vezes e esse número de vezes é igual ao número de parâmetros vizinhos do  $i$ -ésimo parâmetro.

Note que na  $i$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{H}^V$  (equação C-20), os elementos não nulos e fora da diagonal principal estão localizados na  $k$ -ésima coluna associada ao  $k$ -ésimo parâmetro que é espacialmente vizinho ao  $i$ -ésimo parâmetro na malha de discretização. Portanto, nestes elementos a função  $Q(p_i, p_k)$  é calculada apenas uma vez sendo computada como negativa.

Embora a forma compacta da matriz Hessiana do funcional (equação C-21) foi deduzida a partir do exemplo simplificado da Figura C-1, esta matriz pode ser generalizada para calcular qualquer matriz Hessiana da aproximação do funcional da variação total (equação C-4). Generalizando, o  $l$ -ésimo elemento da diagonal de  $\mathbf{D}_1$  ( $L \times L$ ) é dado por:

$$\mathbf{D}_1 \equiv \{D_{1ll}\} = G(p_i, p_j) = \frac{\beta}{\left[(p_i - p_j)^2 + \beta\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{C-23})$$

em que  $p_i$  e  $p_j$  são o  $l$ -ésimo par de parâmetros espacialmente adjacentes nas direções horizontais.

Note que tanto o gradiente  $\mathbf{j}^V$  (equação C-12) como a matriz Hessiana  $\mathbf{H}^V$  (equação C-21) variam a cada iteração por dependerem dos valores das diferenças dos parâmetros vizinhos  $p_i$  e  $p_j$  estimados a cada iteração.

Finalmente, ressaltamos que a matriz Hessiana do funcional da variação total ( $\mathbf{H}^V$ , equação C-21) guarda semelhança com a matriz Hessiana do funcional da suavidade global ( $\mathbf{H}^S$ , equação 2.2.1.10b) em relação à disposição dos elementos diferentes de zero. No caso particular em que  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{I}$  temos que  $\mathbf{H}^V = \mathbf{H}^S = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ .



## Resultados numéricos e analíticos para justificar a modificação da matriz Hessiana do funcional $\phi_V$

Realizamos testes numéricos com dados sintéticos e apresentamos uma decomposição em autovalores e autovetores das matrizes Hessiana ( $H^V$ , equação 2.2.2.1.5) e Hessiana modificada ( $\tilde{H}^V$ , equação 2.2.3.2) do funcional  $\phi_V$  que mostram como e porque ao adotarmos a Hessiana modificada o algoritmo de inversão gravimétrica, baseado no método de Gauss-Newton e utilizando a estratégia de MARQUARDT (1963), torna-se mais eficiente.

Considere um exemplo em que o relevo do embasamento de uma bacia sedimentar é discretizado em nove prismas 3D cujas nove espessuras são os parâmetros a serem estimados. A Figura D-1 mostra uma vista em perspectiva das profundidades verdadeiras do relevo do embasamento de uma bacia simulada composta por 3 x 3 prismas verticais 3D dispostos nas direções  $x$  e  $y$  (norte-sul e leste-oeste, respectivamente), com dimensões horizontais 1,0 km, e topo no plano  $z_0 = 0$  km. O relevo do embasamento simulado (Figura D-1) apresenta dois patamares que atingem profundidades de 1 e 3 km. Definimos a lei parabólica de variação do contraste de densidade com a profundidade desta bacia sedimentar pelo par  $\Delta\rho_0 = -0,4 \text{ g/cm}^3$  e  $\alpha = 0,10 \text{ g/cm}^3/\text{km}$ . As observações gravimétrica teóricas foram geradas no plano  $z_0 = 0,0$  km, nas mesmas coordenadas horizontais dos centros dos prismas que descrevem o pacote sedimentar 3D, e corrompidas por ruído Gaussiano pseudo-aleatório com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. Realizamos as inversões VT e SG destes dados gravimétricos (sem utilização de dados de poço). A cada iteração do método de Newton, realizamos a decomposição em autovalores e autovetores das matrizes Hessianas envolvidas nas minimizações dos funcionais VT ( $\lambda_V$  - equação

2.2.2.4) e SG ( $\lambda_S$  - equação 2.2.15). Estas matrizes são: i) matriz Hessiana do ajuste dos dados geofísicos  $\mathbf{H}_{(k)}^g$  definida pela equação 2.2.1.10a; ii) matriz Hessiana do funcional da variação total  $\mathbf{H}_{(k)}^V$ , definida pela equação 2.2.2.15; iii) matriz Hessiana do funcional da suavidade  $\mathbf{H}^S$  definida pela equação 2.2.1.10b.

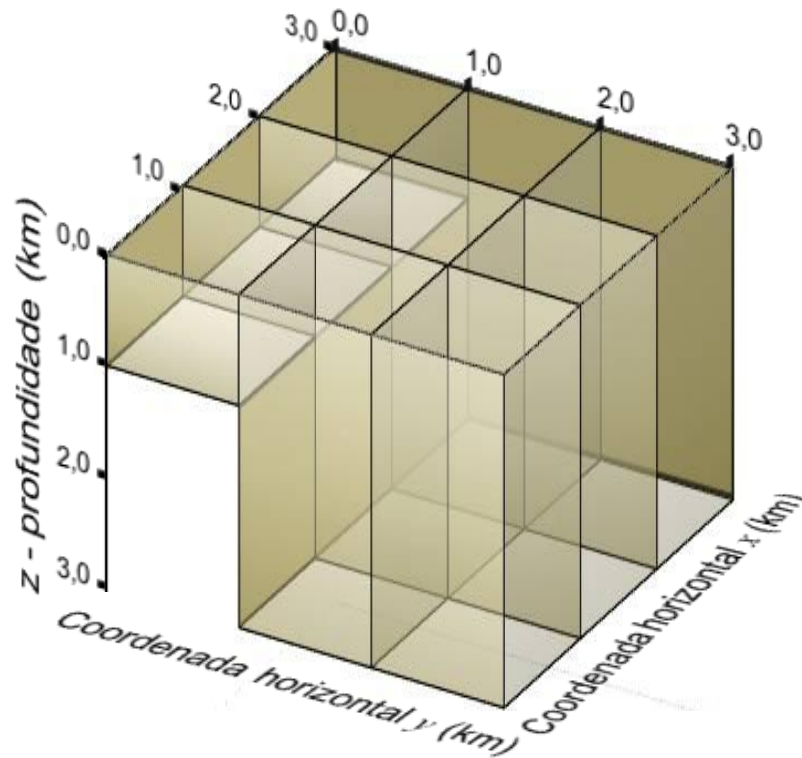


Figura D-1 – Vista em perspectiva dos nove prismas de dimensões horizontais  $dx$  e  $dy$  iguais a 1 km, que simulam uma bacia sedimentar com variação do contraste de densidade com a profundidade definida pelo par de parâmetros parabólicos  $\Delta\rho_0 = -0,4\text{g/cm}^3$  e  $\alpha = 0,10\text{ g/cm}^3/\text{km}$ .

A Figura D-2 mostra uma pseudo-superfície dos nove autovalores da matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  plotados nas vinte e três primeiras iterações da inversão VT. Considerando uma mesma iteração, cada linha indica os elementos da diagonal da matriz de autovalores ( $9 \times 9$ ) da decomposição de  $\mathbf{H}_{(k)}^V$ . Note que em todas as iterações há um autovalor igual à zero. Adicionalmente, note que a partir da terceira até a oitava iteração há um vale de autovalores iguais à zero ou muito próximos à zero. Note também que a partir da décima sexta iteração os nove valores singulares mantêm-se praticamente constantes a cada iteração.

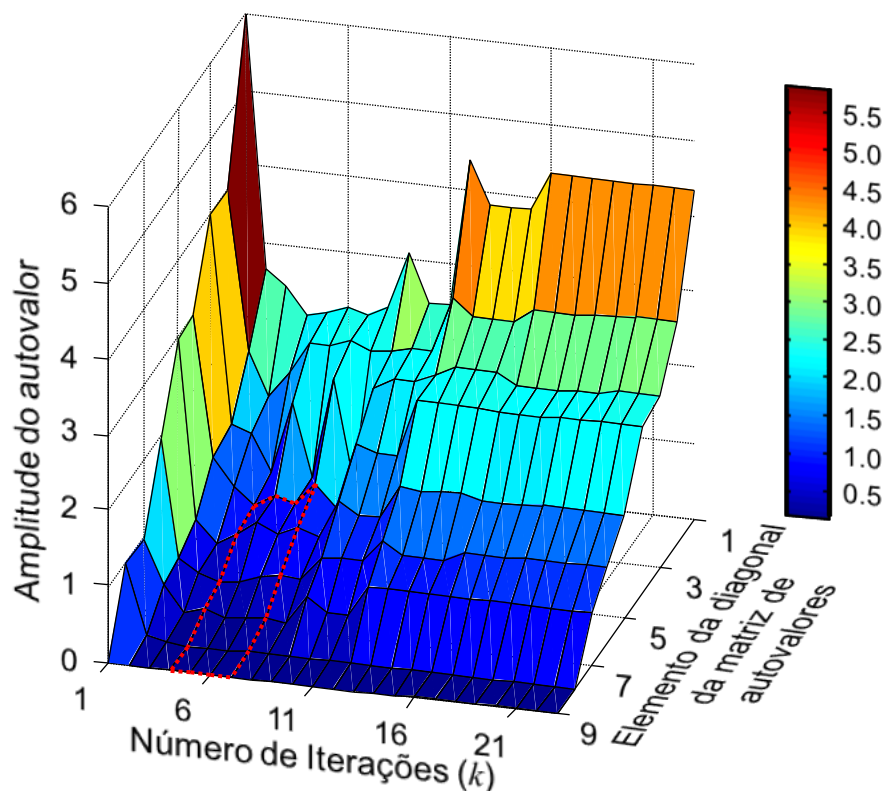


Figura D-2 – Vista em perspectiva de uma pseudo-superfície, indicando a cada linha, a diagonal da matriz de autovalores da decomposição de  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  nas 23 primeiras iterações da inversão VT. A região limitada pelo polígono em linhas tracejadas vermelhas indica a área utilizada na análise da ortogonalidade entres os autovetores (Figura 4.2.4.2).

A Figura D-3 mostra quatro gráficos em degraus relacionados à decomposição em autovalores de quatro iterações, da quarta a sétima iteração, das matrizes Hessianas  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  e  $\mathbf{H}_{(k)}^g$  usadas na inversão VT e da matriz  $\mathbf{H}^S$  usadas na inversão SG dos dados gravimétricos gerados pelo relevo 3D sintético simulado de nove parâmetros (Figura D-1). Cada gráfico da Figura D-3 mostra, em linhas vermelhas, os ângulos formados entre os autovetores de  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  e  $\mathbf{H}_{(k)}^g$  associados aos cinco menores autovalores, e, em linhas azuis, os ângulos formados entre os autovetores de  $\mathbf{H}^S$  e  $\mathbf{H}_{(k)}^g$  associados aos cinco menores autovalores. Em todos os casos foram utilizados autovetores e autovalores da quarta a sétima iterações. Os cinco menores autovalores têm seus valores numéricos mostrados na Figura D-2 (região limitada por uma poligonal tracejada vermelha).

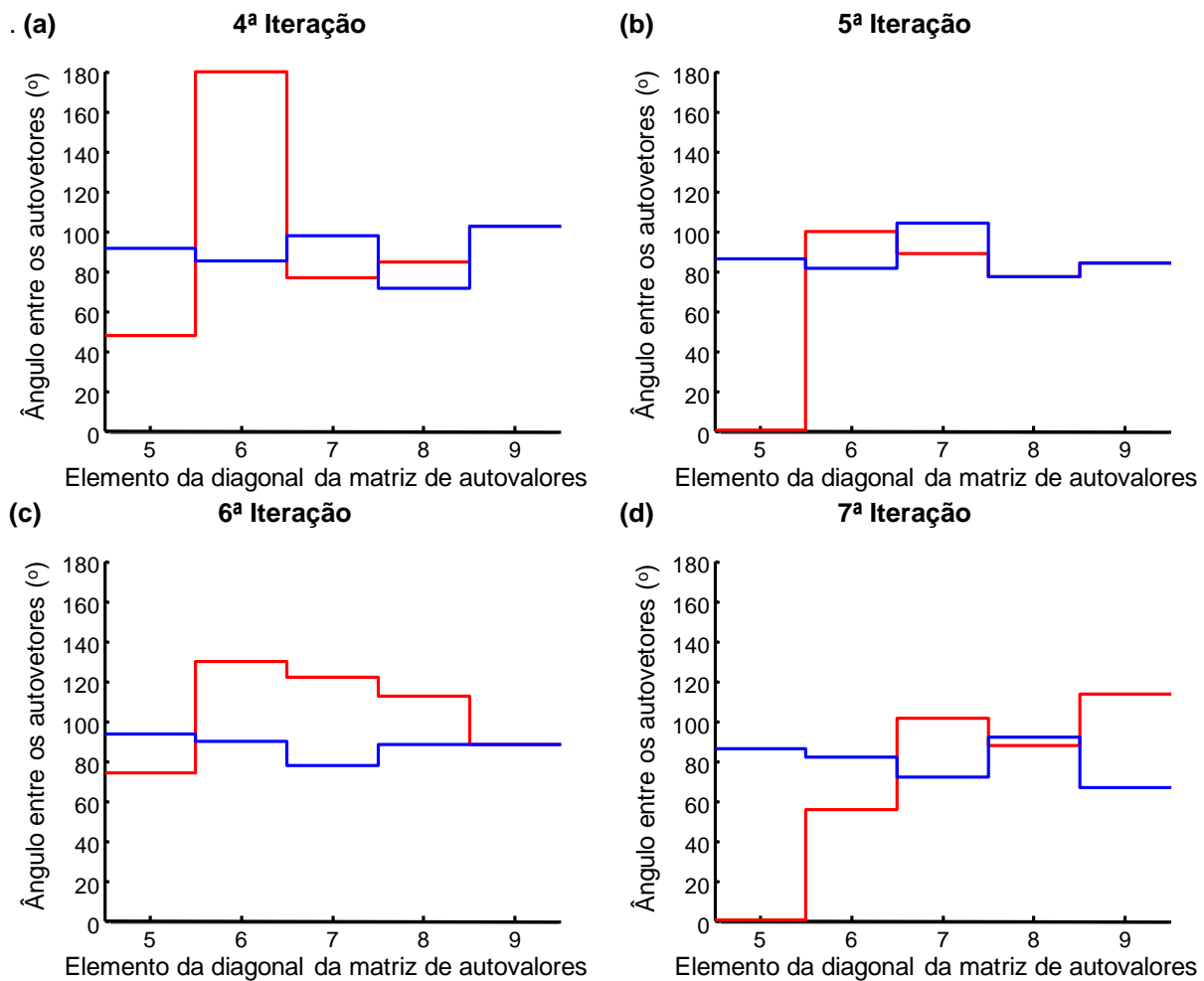


Figura D-3 – Gráficos dos ângulos formados entre os autovetores associados aos cinco menores autovalores das matrizes  $H^V_{(k)}$  e  $H^g_{(k)}$  (linhas vermelhas) e  $H^S$  e  $H^g_{(k)}$  (linhas azuis) formadas na (a) quarta, (b) quinta, (c) sexta e (d) sétima iterações das inversões VT e SG.

Note que os autovetores de  $H^S$  e de  $H^g_{(k)}$  são praticamente ortogonais, uma vez que os ângulos formados por esses autovetores valem em torno de  $90^\circ$  (linha azul, Figura D-3). Esta quase ortogonalidade resulta em um mínimo do funcional  $\lambda_S$  (equação 2.2.1.5a) bem definido no espaço das soluções. Diferentemente, para alguns dos cinco menores autovalores das matrizes  $H^V_{(k)}$  e  $H^g_{(k)}$  os correspondentes autovetores são quase paralelos (ângulos em torno de  $180^\circ$  ou  $0^\circ$ , linhas vermelhas na Figura D-3). Essa não ortogonalidade resulta em um mínimo mal definido do funcional  $\lambda_V$  (equação 2.2.2.4). Ao utilizar na inversão VT a aproximação da matriz Hessiana  $\tilde{H}^V_{(k)}$  (equação 2.2.3.1) envolvendo a soma de matrizes Hessianas  $H^S$  e  $H^V_{(k)}$ , a ortogonalidade entre o autovetor associado à matriz  $H^S$  e a matriz  $H^g_{(k)}$  cobre a não ortogonalidade entre o autovetor associado a matriz  $H^V_{(k)}$  e os

autovetores da matriz Hessiana do funcional do ajuste geofísico  $\mathbf{H}_{(k)}^g$ . Essa ortogonalidade leva a um mínimo no espaço das soluções melhor definido e portanto contribui para a convergência da solução.

Diante do mal condicionamento da matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$ , propomos a utilização da matriz Hessiana modificada ( $\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V$ , equação 2.2.3.2). Para provarmos o melhor desempenho da inversão com vínculo da VT utilizando a matriz  $\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V$  realizamos a decomposição em autovalores e autovetores das matrizes Hessianas  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  e  $\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V$ .

Decompondo a matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  (equação 2.2.2.15) temos:

$$\mathbf{H}_{(k)}^V = \underset{M \times L}{\mathbf{R}^T} \underset{L \times L}{\mathbf{D}_1} \underset{L \times M}{\mathbf{R}} = \underset{L \times L}{\mathbf{V}_R} \underset{L \times L}{\mathbf{S}_R^T} \underset{L \times L}{\mathbf{U}_R^T} \underset{L \times L}{\mathbf{U}_{D_1}} \underset{L \times L}{\mathbf{S}_{D_1}} \underset{L \times L}{\mathbf{U}_{D_1}^T} \underset{L \times M}{\mathbf{U}_R} \underset{L \times M}{\mathbf{S}_R} \underset{L \times M}{\mathbf{V}_R^T} \quad (\text{D-1})$$

em que  $\mathbf{S}_{D_1}$  é uma matriz diagonal  $L \times L$  de autovalores e as colunas da matriz  $\mathbf{U}_{D_1}$  ( $L \times L$ ) são autovetores ortogonais resultantes da decomposição da matriz  $\mathbf{D}_1$ . Na equação D-1, a matriz  $\mathbf{R}$  é decomposta em  $\mathbf{R} = \mathbf{U}_R \mathbf{S}_R \mathbf{V}_R^T$  em que  $\mathbf{U}_R$  é uma matriz ortogonal  $L \times L$  cujas colunas são os autovetores da matriz  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ ,  $\mathbf{V}_R$  é uma matriz ortogonal  $M \times M$  cujas colunas são os autovetores da matriz  $\mathbf{R}^T\mathbf{R}$  e  $\mathbf{S}_R$  é uma matriz diagonal  $L \times M$  cujos valores da diagonal são chamados de valores singulares.

Note na equação D-1 que a decomposição da matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  envolve as matrizes diagonais de autovalores da  $\mathbf{S}_{D_1}$  e de valores singulares  $\mathbf{S}_R$ . Como a matriz de autovalores da  $\mathbf{S}_{D_1}$  pode conter valores singulares muito próximos a zero temos então um mal-condicionamento da matriz  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  e conseqüentemente um mal-condicionamento da matriz a ser invertida (matriz  $\mathbf{H}_{(k)}$  na equação 2.2.2.5). No entanto, decompondo a matriz  $\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V$  (equação 2.2.3.2) temos:

$$\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V = \underset{M \times L}{\mathbf{R}^T} \left[ \underset{L \times L}{\mathbf{D}_1} + \underset{L \times L}{\mathbf{I}} \right] \underset{L \times M}{\mathbf{R}} = \underset{L \times L}{\mathbf{V}_R} \underset{L \times L}{\mathbf{S}_R^T} \underset{L \times L}{\mathbf{U}_R^T} \underset{L \times L}{\mathbf{U}_{D_1}} [\underset{L \times L}{\mathbf{S}_{D_1}} + \underset{L \times L}{\mathbf{I}}] \underset{L \times L}{\mathbf{U}_{D_1}^T} \underset{L \times M}{\mathbf{U}_R} \underset{L \times M}{\mathbf{S}_R} \underset{L \times M}{\mathbf{V}_R^T} \quad (\text{D-2})$$

Note na equação D-2 que a decomposição da matriz  $\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V$  também envolve o as matrizes diagonais de autovalores da  $\mathbf{S}_{D_1}$  e de valores singulares  $\mathbf{S}_R$ . No entanto, a matriz

de valores singulares  $S_{D_1}$  é somada a matriz identidade garantindo assim um melhor condicionamento da matriz Hessiana modificada  $\tilde{H}_{(k)}^V$  e conseqüentemente um melhor condicionamento da matriz a ser invertida.

A Figura D-4 mostra para quatro exemplos com três parâmetros ( $p_i, i = 1, \dots, 3$ ) os autovalores de cada uma destas matrizes. Em todos os casos, o menor autovalor de cada matriz Hessiana é igual a zero, ou seja, estas matrizes têm posto  $M - 1$ .

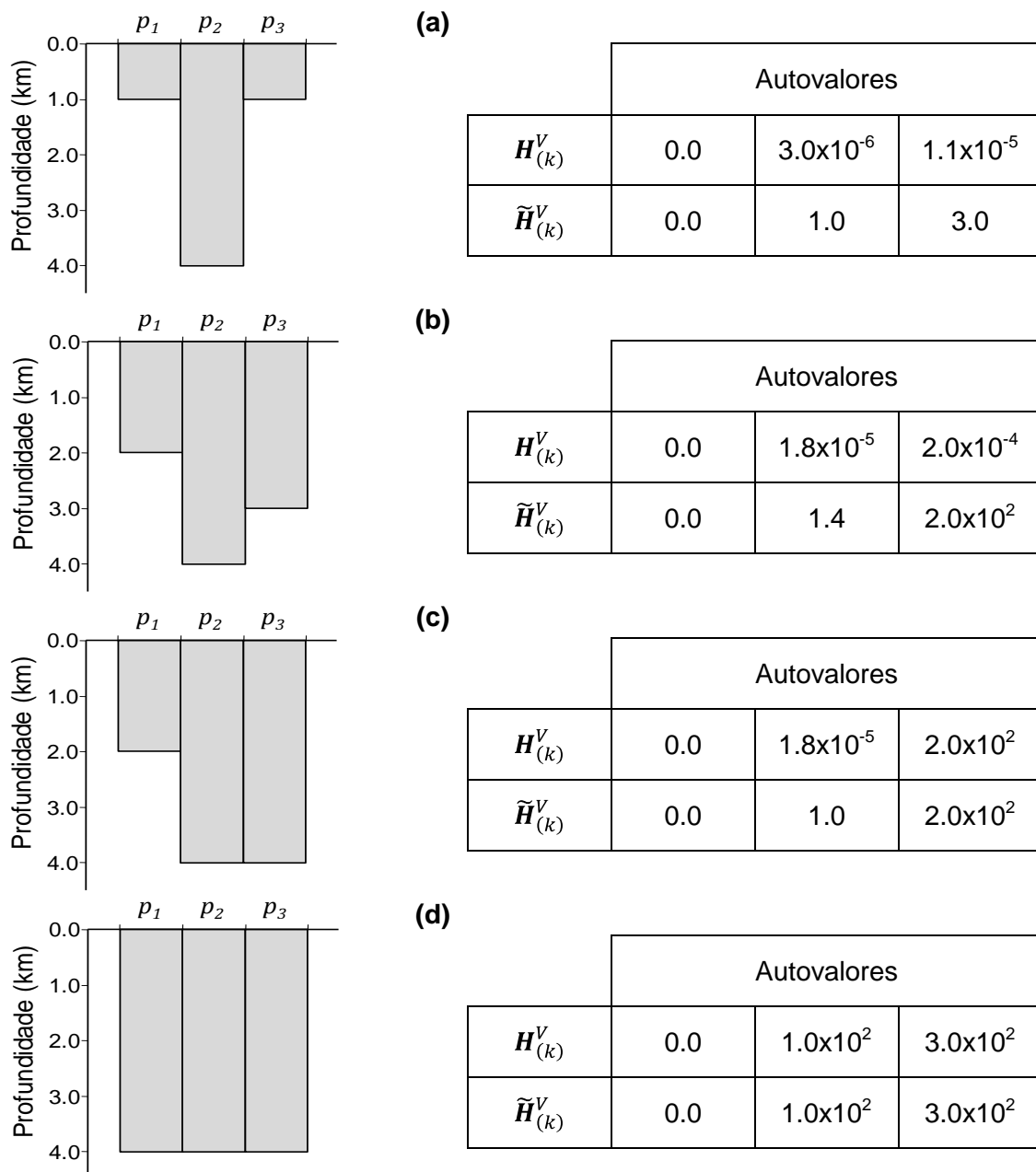


Figura D-4 – **(a)-(d)** A esquerda, indicação da espessura de cada um dos três parâmetros  $p_i$  em km, a direita tabela com os autovalores de cada matriz Hessianas  $H_{(k)}^V$  e  $\tilde{H}_{(k)}^V$ .

Note que os autovalores da matriz Hessiana  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  diferentes de zero são iguais aos autovalores da matriz Hessiana aproximada  $\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V$  se o relevo é suave (Figura D-4d). No entanto, estes autovalores de  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  são menores quanto maiores forem as descontinuidades do relevo do embasamento (Figura D-4a-c). Isto advém diretamente da grande diferença numérica entre os parâmetros vizinhos desses casos, uma vez que para o cálculo de  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  (equação 2.2.2.15) cada elemento da matriz diagonal  $\mathbf{D}_1$  (equação 2.2.2.17) envolve a razão entre a constante  $\beta$  e a diferença entre os parâmetros. Assim, como a matriz Hessiana  $\mathbf{H}_{(k)}^V$  é calculada pelo produto  $\mathbf{R}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{R}$  cada um de seus elementos diferentes de zero são numericamente muito pequenos. Por sua vez, ao somarmos a matriz identidade à matriz  $\mathbf{D}_1$  para definirmos a matriz Hessiana aproximada, tornamos  $\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V$  (equação 2.2.3.2) fortemente diagonal dominante, o que contribui para que os autovalores de  $\tilde{\mathbf{H}}_{(k)}^V$  sejam numericamente maiores em todos os exemplos da Figura D-4.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ATHY, L. E. Density, porosity and compaction of sedimentary rocks. *AAPG Bull*, v. 14, p. 1-14. 1930.
- ACAR, R.; VOGEL, C. R. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, v. 10, p. 1217-1229 . 1994.
- BARBOSA, V. C. F.; MENEZES, P. T. L.; SILVA, J. B. C. Case History – Gravity data as a tool for detecting faults: In-depth enhancement of subtle Almada's basement faults, Brazil. *Geophysics*, v.72, p. B59–B68. 2007.
- BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E. Gravity inversion of a discontinuous relief stabilized by weighted smoothness constraints on depth. *Geophysics*, v. 64, n. 5, p. 1429-1437. 1999.
- \_\_\_\_\_. Stable inversion of gravity anomalies of sedimentary basins with nonsmooth basement reliefs and arbitrary density contrast variations. *Geophysics*, v. 64, p. 754–764. 1999.
- \_\_\_\_\_. Gravity inversion of basement relief using approximate equality constraints on depths. *Geophysics*, v. 62, p. 1745–1757. 1997.
- BELTRÃO, J. F.; SILVA, J. B. C.; COSTA, J. C. Robust polynomial fitting for regional gravity estimation. *Geophysics*, v. 56, p. 80–89. 1991.
- BOTT, M. H. P. The use of rapid digital computing methods for direct gravity interpretation of sedimentary basins. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, v. 3, p. 63–67. 1960.
- CAMPOS VELHO, H. F.; RAMOS, F. M. Numerical inversion of two-dimensional geoelectric conductivity distributions from magnetotelluric data. *Revista Brasileira de Geofísica*, v.15, n. 2, p.133-142. 1997.
- CHAI, Y.; HINZE, W. J. Gravity inversion of an interface above which the density contrast varies exponentially with depth. *Geophysics*, v. 53, p. 837–845. 1988.
- CHAKRAVARTHI, V.; RAGHURAM, H. M.; SINGH, S. B. 3D forward gravity modeling of density interfaces above which the density contrast varies continuously with depth. *Computers & Geosciences*, v. 28, p. 53–57. 2002.



- CHAKRAVARTHI, V.; SUNDARARAJAN, N. Ridge regression algorithm for gravity inversion of fault structures with variable density. *Geophysics*, v. 69, p. 1394–1404. 2004.
- \_\_\_\_\_. 3D gravity inversion of basement relief – A depth-dependent density approach. *Geophysics*, v. 72, n. 2, p. 123–132, 2007.
- CHAPPELL, A.; KUSZNIR, N. An algorithm to calculate the gravity anomaly of sedimentary basins with exponential density-depth relationships. *Geophysical Prospecting*, v. 56, p. 249–258. 2008.
- CHANG, K. H.; KOWSMANN, R. O.; FIGUEIREDO, A. M. F. Tectonics and stratigraphy of the east Brazil rift system: An overview. *Tectonophysics*, p. 97-138. 1992.
- CORBATÓ, C. E. A least-squares procedure for gravity interpretation. *Geophysics*, v. 30, p. 228–23. 1965.
- CORDANI, U. G.; NEVES, B. B. B.; FUCK, R. A.; PORTO, R.; THOMAZ FILHO, A.; CUNHA, F. M. B. da . Estudo preliminar de integração do Pré-cambriano com os eventos tectônicos das bacias sedimentares brasileiras. *Ciência Técnica Petróleo*, p. 1-70. 1984.
- CORDELL, L. Gravity analysis using an exponential density-depth function—San Jacinto Graben, California. *Geophysics*, v. 38, p. 684–690. 1973.
- GALLARDO-DELGADO. A.; PÉREZ-FLORES, M. A.; GOMEZ-TERVIÑO, E. A versatile algorithm for joint 3D inversion of gravity and magnetic data. *Geophysics*, v. 68, n. 3, p. 949–959. 2003.
- GARCÍA-ABDESLEM, J. The gravitational attraction of a right rectangular prism with density varying with depth following a cubic polynomial. *Geophysics*, v. 70, J39–J42. 2005.
- \_\_\_\_\_. Gravitational attraction of a rectangular prism with depth-dependent density. *Geophysics*, v. 57, p. 470–473. 1992.
- HANSEN, R. O. An analytical expression for the gravity field of a polyhedral body with linearly varying density. *Geophysics*, v. 64, p. 75–77. 1999.
- HOLSTEIN, H. Gravimagnetic anomaly formulas for polyhedra of spatially linear media. *Geophysics*, v. 68, p. 157–167. 2003.
- LEÃO, J. W. D.; MENESES, P. T. L.; BELTRÃO, J. F.; SILVA, J. B. C. Gravity inversion of basement relief constrained by the knowledge of depth at isolated points. *Geophysics*, v. 61, p. 1702–1714. 1996.

- LITINSK, V. A.; Concept of effective density: Key to gravity depth determinations for sedimentary basins. *Geophysics*, v. 54, p. 1474–1482. 1989.
- MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society of Industrial and Applied Mathematics*, v. 2, p. 601–612. 1963.
- MELLO, M. R.; GONÇALVES, F. T. T.; NETTO, A. S. T.; AMORIN, J. L.; WITZKE, R. E. Application of the petroleum system concept in the assessment of exploration: the Camamu basin example, offshore Brazil. In: *4th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, 1st Latin American Geophysical Conference*, v.1, p. 90-93. 1995.
- MOHRIAK, W.; SZATMARI, P.; COUTO ANAJOS, S. M. *Sal Geologia e Tectônica, Exemplos nas Bacias Brasileiras*. São Paulo: Beca, 2008. p. 250–270.
- MURTHY, I. V. R.; RAO, D. B. Gravity anomalies of two dimensional bodies of irregular cross-section with density contrast varying with depth. *Geophysics*, v. 44, p. 1525–1530. 1979.
- OJEDA, H. A. O. Structural framework, stratigraphy and evolution of the Brazilian marginal basins. *AAPG Bulletin*, v.66, p. 732–749. 1982.
- OLIVEIRA, A. S. *Inversão gravimétrica do relevo do embasamento usando regularização entrópica*. 2007. 81 f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) - Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.
- OLDENBURG, D. W. The inversion and interpretation of gravity anomalies. *Geophysics*, v. 39, p. 526–536. 1974.
- POHÁNKA, V. Optimum expression for computation of the gravity field of a polyhedral body with linearly increasing density. *Geophysical Prospecting*, v. 46, p. 391–404. 1998.
- PONTE, F. C.; ASMUS, H. E. Geological framework of the Brazilian continental margin: *Geologische Rundschau*, v. 68, p. 201–235. 1978.
- RAMOS, F. M.; CAMPOS VELHO, H. F.; CARVALHO, J.C.; FERREIRA, N.J. Novel approaches on entropic regularization. *Inverse Problem*, v. 15, p. 1139-1148. 1999.
- RAO, V.; CHAKRAVARTHI, C. V.; RAJU, M. L. Forward modelling: Gravity anomalies of two-dimensional bodies of arbitrary shape with hyperbolic and parabolic density functions. *Computers and Geosciences*, v. 20, p. 873–880. 1994.

- RAO, D. B. Analysis of gravity anomalies of sedimentary basins by an asymmetrical trapezoidal model with quadratic density function. *Geophysics*, v. 55, p. 226–231. 1990.
- \_\_\_\_\_. Modelling of sedimentary basins from gravity anomalies with variable density contrast. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, v.84, p. 207–212. 1986.
- RUDIN, L. I.; OSHER, S.; FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, v. 60, p. 259-268, 1992.
- SILVA, J. B. C.; COSTA, D. C. L.; BARBOSA, V. C. F. Gravity inversion of basement relief and estimation of density contrast variation with depth. *Geophysics*, v. 71, J51-J58. 2006.
- SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E.; BARBOSA, V. C. F. Practical applications of uniqueness theorems in gravimetry: Part I – Constructing sound interpretation methods. *Geophysics*, n. 67, p. 788–794. 2002.
- \_\_\_\_\_. Pitfalls in nonlinear inversion. *Pure and Applied Geophysics*, v. 158, p. 945–964. 2001
- SILVA, J. B. C.; OLIVEIRA, A. S.; BARBOSA, V. C. F. Inversão Gravimétrica do relevo do embasamento usando regularização entrópica. In: *Tenth International Congress of The Brazilian Geophysical Society*, Rio de Janeiro, 2007.
- \_\_\_\_\_. Apparent-density mapping using entropic regularization. *Geophysics*, v. 72, p. 151-160. 2007.
- SMITH, R. A. A uniqueness theorem concerning gravity fields, *Proc. Cam. Phil. Soc.*, v. 57, p. 865–870. 1961.
- TIKHONOV, A. N.; ARSENIN, V. Y. Solutions of ill-posed problems, *W. H. Winston & Sons*. 1977.
- TWOMEY, S. On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature. *Journal of the Association for Computing Machinery*, v.10, p. 97–101. 1963.
- VOGEL, C.R. Nonsmooth regularization, in *Inverse Problems in Geophysical Applications*. *Engl, H.W., Louis, A. & Rundell, W., SIAM*, Philadelphia, p. 1-11, 1997.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)