

CARLOS MANUEL ROMERO LUNA

ANÁLISE E DEMONSTRAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO  
ESCOAMENTO BIFÁSICO GÁS-SÓLIDO

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de Transmissão e conversão de Energia.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Carrocci

Guaratinguetá  
2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

L961a	<p>Luna, Carlos Manuel Romero Análise e demonstração do comportamento do escoamento bifásico gás-sólido. / Carlos Manuel Romero Luna – Guaratinguetá : [s.n], 2009. 97f. : il. Bibliografia: f. 73-78</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2009. Orientador: Prof. Dr. Luiz Roberto Carrocci</p> <p>1. Escoamento bifásico I. Título</p> <p style="text-align: right;">CDU 532.546</p>
-------	---

**CARLOS MANUEL ROMERO LUNA**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA”**

**PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA  
ÁREA: TRANSMISSÃO E CONVERSÃO DE ENERGIA**

**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**



**Prof. Dr. Marcelo dos Santos Pereira**  
Coordenador

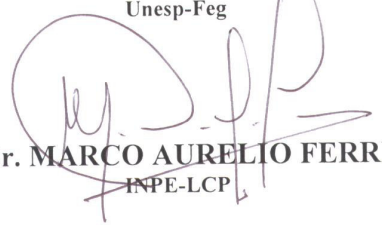
**BANCA EXAMINADORA:**



**Prof. Dr. LUIZ ROBERTO CARROCCI**  
Orientador / Unesp-Feg



**Prof. Dr. MAURICIO ARAUJO ZANARDI**  
Unesp-Feg



**Prof. Dr. MARCO AURELIO FERREIRA**  
INPE-LCP

## **DADOS CURRICULARES**

### **CARLOS MANUEL ROMERO LUNA**

NASCIMENTO	31.10.1983 – HUACHO / LIMA / PERÚ
FILIAÇÃO	Victor Manuel Romero Rodriguez Dora Elena Luna Quiroz
2000/2004	Curso de Graduação em Engenharia Química Universidad Nacional Jose Faustino Sanchez Carrión Facultad de Ingeniería Química, Metalúrgica y Ambiental Huacho - Perú

*Dedico este trabalho, a meus pais,  
Victor Romero e Elena Luna.*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por estar sempre presente em meu caminho. Agradeço pela minha vida, minha inteligência, minha família e meus amigos,

Ao meu orientador, *Prof. Dr. Luiz Roberto Carrocci* que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível,

Um agradecimento a uma pessoa muito especial, a minha namorada *Gretta L.A. Arce Ferrufino* pelo amor, apoio e motivação na conclusão da dissertação,

Às funcionárias da Biblioteca do Campus de Guaratinguetá pela dedicação, presteza e principalmente pela vontade de ajudar,

Aos funcionários da secretaria de pós-graduação *Regina, Elisa, Sidney e Adriano* pela dedicação, alegria e paciência no atendimento,

Ao técnico *Rodolfo dos Santos* pela montagem do aparelho experimental,

Ao pessoal do INPE (Instituto de Pesquisas Espaciais) em especial a *Jose Carlos Andrade e Ely Cortez* pelo apoio no desenvolvimento da parte experimental da dissertação,

E em geral a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente na conclusão desta dissertação.

Este trabalho contou com apoio da Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de Nível Superior – CAPES, através da Bolsa de Estudos Institucional.



“A imaginação é mais importante que o  
conhecimento”

Albert Einstein

**LUNA, C. M. R.** Análise e demonstração do comportamento do escoamento bifásico gás-sólido. Guaratinguetá, 2009. 97f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

## **RESUMO**

O estudo do escoamento bifásico gás-sólido está incluído no assunto referido ao escoamento multifásico. Este tipo de escoamento multifásico é encontrado no transporte pneumático, combustão do carvão, reatores de leito fluidizado e ciclones. O escoamento bifásico gás-sólido é extremamente complicado devido ao grande número de variáveis envolvidas, a interação entre as fases, e a complexa dinâmica que desenvolve durante o processo. Uma das áreas menos entendidas referente ao estudo do escoamento multifásico é a transferência da quantidade de movimento e o acoplamento entre as fases. A proposta desta dissertação é pesquisar aspectos da transferência da quantidade de movimento em um escoamento bifásico gás-sólido vertical descendente sobre a base das equações unidimensionais desenvolvidas para o referido escoamento. Os efeitos dinâmicos entre as fases são analisados considerando um acoplamento unidirecional tendo em conta termos tais como a força de arraste sobre as partículas, a força da gravidade e o atrito partícula-parede. Para a resolução do modelo teórico foi empregado o método Runge-Kutta-Merson. O modelo teórico permite calcular e avaliar a influência das variáveis do escoamento sobre o perfil axial da velocidade média das partículas e também possibilita a determinação de outras variáveis tais como a fração volumétrica de sólidos. Adicionalmente é projetado um sistema de instrumentação para medir a velocidade média das partículas através da medição do tempo médio de trânsito das partículas. Resultado da pesquisa demonstra o complexo comportamento e as dificuldades encontradas no desenvolvimento da instrumentação para esta classe de escoamento.

Palavras chaves: Escoamento bifásico gás-sólido, velocidade média das partículas.

**LUNA, C. M. R.** Analysis and demonstration of the behavior of gas-solid two-phase flow. Guaratinguetá, 2009. 97f. Dissertation (Master in Mechanical Engineering) – Faculty of Engineering, Campus of Guaratinguetá, São Paulo State University.

### **ABSTRACT**

The study of gas-solid two-phase flow is included in a more general subject named as multiphase flow. This kind of multiphase flow is encountered in the pneumatic conveying, combustion of pulverized coal, fluidized bed reactor and cyclones. The gas-solid two-phase flow is extremely complicated because of the large number of variables involved, the interaction between the phases, and complex dynamical developments occurring in the process. One of the least understood areas of multiphase flows is the momentum transfer or the phase coupling. The purpose of this dissertation is to research aspects of momentum exchange on a vertical downward gas-solid flow on the basis of one-dimensional equations developed for gas-solid two-phase flow. The dynamic effects between the two phases are considered by one way coupling taking into account terms such as the drag force on the particles, gravity and the particle-wall frictions. For the solution of theoretical model the Runge-Kutta-Merson method was employed. The theoretical model allows to calculate and to evaluate the influence of the flow variables on the axial profile for the average velocity of particles and also enables the determination of other variables such as the solid hold-up. Also it is designed an experimental system to measure the average velocity of particles by measuring the average time of transit of them. The results show the complex behavior and the difficulties in developing instrumentation for this class of flow.

**Keywords:** Gas-solid two-phase flow, Particle average velocity.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – escoamento bifásico ar-água observado em um tubo de 25.4 mm de diâmetro .....	7
FIGURA 2.2 – Fenômeno da erosão em um tubo de transporte pneumático de partículas em fase diluída .....	13
FIGURA 2.3 – Padrões de escoamento em linhas de transporte pneumático horizontal .....	15
FIGURA 2.4 – Representação esquemática dos diferentes padrões do escoamento correspondente à fluidização gás-sólido .....	16
FIGURA 2.5 – Classificação do transporte pneumático horizontal com diferentes razões de carga.....	24
FIGURA 2.6 – Padrão de escoamento para partículas de polivinil obtida com a técnica de velocimetria por imagem. ....	25
FIGURA 3.1 – Representação esquemática de quatro tipos de acoplamento para a modelagem do escoamento bifásico gás-sólido.....	27
FIGURA 3.2 – Logaritmo do coeficiente de arrasto de uma partícula esférica, ( $C_{DO}$ ), como uma função do logaritmo do número de Reynolds da partícula, ( $Re_p$ ). ....	38
FIGURA 4.1 – Unidade experimental.....	47
FIGURA 4.2 – Sistema de injeção da areia desenvolvido no trabalho .....	48
FIGURA 4.3 – Areia do Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) utilizada no estudo .....	49
FIGURA 4.4 – Representação esquemática do sistema de medição.....	51
FIGURA 4.5 – Estrutura final do sistema de mediação da velocidade média das partículas .....	52
FIGURA 4.6 – Distribuição dos componentes da secção emissora .....	53
FIGURA 4.7 – Detalhe dos feixes produzidos pelo divisor.....	54
FIGURA 4.8 – Detalhe da fixação das fibras ópticas .....	55

FIGURA 4.9 – Comparação de tamanhos entre as fibras ópticas e as partículas de areia .....	55
FIGURA 4.10 – Fototransistor receptor (TIL78) .....	56
FIGURA 4.11 – Posicionamento dos receptores e as adaptações no tubo.....	57
FIGURA 4.12 – Esquema da vista frontal das fibras ópticas atingidas pelos feixes de laser.....	58
FIGURA 4.13 – Gráfico representativo de dois sinais com padrão similar.....	59
FIGURA 5.1 – Perfil axial da velocidade média das partículas em diferentes velocidades superficiais do ar.....	61
FIGURA 5.2 – Comportamento da fração volumétrica das partículas sólidas .....	62
FIGURA 5.3 – Comparação do comportamento de duas partículas com características físicas diferentes .....	63
FIGURA 5.4 – Influencia da carga sobre a velocidade média das partículas.....	64
FIGURA 5.5 – Sinal obtido pela passagem das partículas nos dois sensores.....	65
FIGURA 5.6 – Esquema representativo da distribuição da areia na área transversal da tubulação.....	66
FIGURA 5.7 – Deslocamento do sinal nos dois sensores durante os testes. ....	67
FIGURA 5.8 – Comparação dos dados teóricos e experimentais .....	68

## LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1 – Classificação do escoamento bifásicos baseada pelo número de fases e componentes .....	6
TABELA 2.2 – Classificação do escoamento bifásico baseado na estrutura da interface e a distribuição topográfica.....	11
TABELA 2.3 – Categorização das técnicas de medição com respeito às propriedades da partícula .....	23
TABELA 3.1 – Coeficientes de transferência da quantidade de movimento usados na modelagem fluidodinâmica de sistemas particulados.....	34
TABELA 3.2 – Fator de atrito partícula-parede.....	39
TABELA 4.1 – Características físicas da areia IPT .....	49

---

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

- IPT - Instituto de Pesquisa Tecnológica
- PDA - Phase Doppler Anemometry
- PIV - Particle Imaging Velocity
- LDA - Laser Doppler Anemometry

## LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal do tubo	$m^2$
$C_{D0}$	Coefficiente de arrasto de uma partícula simples	[1]
$D_T$	Diâmetro característico do tubo	$m$
$d_p$	Diâmetro da partícula	$m$
$F_D$	Força de arrasto por unidade de volume	$N/m^3$
$f_p$	Fator de atrito partícula-parede	[1]
$F_{gw}$	Força de atrito entre o gás e a parede por unidade de volume	$N/m^3$
$F_{pw}$	Força de atrito entre as partículas e a parede por unidade de volume	$N/m^3$
g	Aceleração da gravidade	$m/s^2$
L	Separação entre os dois sensores	$m$
$\dot{m}_g$	Vazão mássica do gás	$kg/s$
$\dot{m}_p$	Vazão mássica das partículas	$kg/s$
$m_p$	Massa de uma partícula	$kg$
n	Número de partículas por unidade de volume	$m^{-3}$
$Re_p$	Número de Reynolds da partícula	[1]
$Re_{pt}$	Número de Reynolds da partícula na velocidade terminal	[1]
Stk	Número de Stokes	[1]
$U_e$	Velocidade de escorregamento	$m/s$
$U_g$	Velocidade superficial da fase contínua	$m/s$
$U_p$	Velocidade superficial da partícula	$m/s$
$u_g$	Velocidade do gás	$m/s$
$u_p$	Velocidade das partículas	$m/s$
$u_t$	Velocidade terminal da partícula	$m/s$
$V_{r,s}$	Relação da velocidade terminal (Syamlal e O'Brien)	$m/s$
y	Posição do segundo sensor	$m$
Z	Relação de vazões mássicas das fases	[1]
$\alpha_g$	Fração volumétrica do gás	[1]
$\alpha_p$	Fração volumétrica de partículas sólidas	[1]
$\beta$	Coefficiente de transferência da quantidade de movimento	$kg/m^3 \cdot s$
$\varphi_p$	Esfericidade das partículas	[1]
$\mu_g$	Viscosidade dinâmica do gás	$Ns/m^2$
$\bar{\rho}_g$	Massa específica aparente da fase gasosa	$kg/m^3$
$\bar{\rho}_p$	Massa específica aparente da fase particulada	$kg/m^3$



$\rho_g$	Massa específica do gás	$kg/m^3$
$\rho_p$	Massa específica da partícula	$kg/m^3$
$\rho_m$	Massa específica aparente da mistura	$kg/m^3$
$\tau$	Tempo de trânsito	$s$
$\tau_g$	Tempo de resposta da fase contínua	$s$
$\tau_p$	Tempo de resposta da partícula	$s$
$\delta M_p$	Massa da fase particulada	$kg$
$\delta V$	Volume limitante que assegura um meio estacionário	$m^3$
$\delta V_g$	Volume ocupado pelo gás	$m^3$
$\delta V_p$	Volume ocupado pelas partículas	$m^3$

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 Estado da arte.....	1
1.2 Motivação.....	3
1.3 Objetivos.....	4
1.3.1 Objetivo geral.....	3
1.3.2 Objetivos específicos.....	4
1.4 Delimitação.....	4
1.5 Estrutura da dissertação.....	4
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRAFICA</b> .....	6
2.1Escoamento bifásico.....	6
2.2 Classificação do escoamento bifásico.....	9
2.3 Escoamento bifásico gás-sólido.....	12
2.3.1 Transporte pneumático.....	14
2.3.2 Leitos fluidizados.....	15
2.4 Definições básicas.....	17
2.4.1 Fração volumétrica e massa específica.....	17
2.4.2 Velocidade superficial e velocidade da fase.....	18
2.4.3 Relação de vazões mássicas.....	19
2.4.4 Tempo de resposta.....	19
2.4.5 O número de Stokes.....	21
2.5 Revisão das técnicas de medição para o escoamento bifásico gás-sólido.....	22
<b>3 MODELAGEM DO ESCOAMENTO BIFÁSICO GÁS-SÓLIDO</b> .....	26
3.1 Abordagem euleriana-lagrangeana.....	28
3.2 Abordagem euleriana-euleriana.....	29
3.3 Formulação matemática.....	30
3.1 Força de arraste.....	32

3.1.1 Coeficiente de transferência da quantidade de movimento.....	33
3.1.1.2 Coeficiente de arraste .....	35
3.3.2 Forças de atrito .....	38
3.4 Desenvolvimento do modelo matemático .....	41
3.3.4.1 Condições iniciais e de contorno.....	45
<b>4 DESCRIÇÃO E MONTAGEM DA INSTALAÇÃO EXPERIMENTAL</b> .....	<b>46</b>
4.1 Descrição da unidade experimental.....	46
4.2 O material representativo da fase dispersa .....	49
4.3 Desenvolvimento do sistema de medição da velocidade média das partículas.....	50
<b>5 RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	<b>60</b>
5.1 Modelo unidimensional assumindo um acoplamento unidirecional .....	60
5.2 Comentários dos testes experimentais.....	65
<b>6 CONCLUSÕES</b> .....	<b>70</b>
<b>Sugestões para trabalhos futuros</b> .....	<b>72</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>73</b>
<b>ANEXO</b> .....	<b>79</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Estado da arte

A pesquisa do escoamento bifásico gás-sólido é desenvolvida intensivamente devido a sua presença em diversas áreas tecnológicas, entre elas podemos citar a indústria química, alimentícia, sistemas de conversão de energia, processamento de materiais e sobre tudo na indústria do petróleo e gás (ISHII; HIBIKI, 2006).

O escoamento bifásico gás-sólido é um caso específico dentro do extenso campo do escoamento multifásico e representa um importante tópico de estudo na engenharia, sendo encontrado em diversas operações industriais, dentre os quais se têm os leitos fluidizados, reatores heterogêneos, combustão do carvão, sistemas de controle da poluição por material particulado e o transporte pneumático de partículas. Esta última operação é a mais representativa desta classe de escoamento (OLSZOWSKI; POSPOLITA, 2008).

Apesar do grande interesse industrial envolvido, pode-se considerar que o avanço na compreensão do escoamento bifásico gás-sólido tem sido relativamente lento, devido à complexa interação entre as fases e os diversos fenômenos físicos juntamente com o grande número de variáveis fluidodinâmicas requeridas para a quantificação completa do sistema, tais como a velocidade das fases, fração volumétrica, atrito do gás e das partículas com a parede do tubo entre outras.

Com isso a única abordagem viável capaz de fornecer resultados e conclusões úteis tem sido ao longo dos anos de natureza empírica, com a utilização de correlações baseadas em dados experimentais obtidos em testes de laboratório. Mais recentemente, o rápido aumento do poder computacional, junto com o desenvolvimento de modelos numéricos eficientes permitiu o estudo teórico de problemas anteriormente intratáveis, sem grandes simplificações.

O estudo e desenvolvimento de operações industriais com escoamento bifásico gás-sólido, depende basicamente da formulação matemática utilizada, a qual deve considerar a maioria das propriedades físicas da fase contínua e dispersa, apoiadas principalmente por correlações experimentais para prever algumas variáveis do escoamento. Dessa forma se poderá descrever e prever aproximadamente a fluidodinâmica do escoamento.

O escoamento bifásico gás-sólido envolve uma grande quantidade de variáveis e fenômenos complexos difíceis de analisar e determinar experimentalmente. Uma das variáveis do escoamento bifásico gás-sólido é a velocidade média das partículas. Esta variável pode ser determinada por intermédio de correlações empíricas ou por modelos teóricos desenvolvidos a partir das propriedades físicas da partícula e do fluido para condições específicas do processo. A velocidade média das partículas é importante para entender o comportamento do escoamento e adicionalmente possibilita a determinação de outras variáveis importantes tais como a queda de pressão e a fração volumétrica de partículas sólidas, todas importantes para o projeto de sistemas que trabalham com esta classe de escoamento.

Para o estudo teórico do escoamento bifásico gás-sólido, existem diferentes formulações matemáticas as quais foram desenvolvidas baseadas em duas abordagens, Euleriana-Lagrangeana e Euleriana-Euleriana. Por exemplo, Patankar et al., (2001) apresenta uma simulação numérica Euleriana-Lagrangeana aplicado para escoamentos particulados, onde a fase contínua é tratada com uma abordagem Euleriana e as partículas são tratadas com uma abordagem Lagrangeana. Hudson e Harris (2006) apresentam uma solução numérica das equações governantes para um escoamento bifásico gás-sólido isentrópico. Nesta aproximação as fases são tratadas como um meio “contínuo”, adotando para essa forma uma descrição Euleriana do escoamento.

Por outro lado, a literatura atual apresenta diversas técnicas experimentais, que foram desenvolvidas com a finalidade de obter informação local acerca das variáveis características do escoamento, de forma a possibilitar a descrição completa de seu comportamento.

Dentro de todas as variáveis do escoamento bifásico gás-sólido, a variável mais complicada desse determinar, devido à sua complexa dinâmica, é a velocidade média das partículas. As técnicas desenvolvidas para a medição desta variável são caras e de complexo funcionamento, sendo possível o uso do *Phase Doppler Anemometry* (PDA), do *Laser Doppler Anemometry* (LDA) e da velocimetria por imagens de alta velocidade.

## 1.2 Motivação

A motivação para a realização desta pesquisa foi expandir o conhecimento e a compreensão dos efeitos dinâmicos presentes no escoamento bifásico gás-sólido. Muitos trabalhos experimentais e teóricos foram desenvolvidos com a finalidade de entender as características deste escoamento com o intuito de descrever a física que governa tal fenômeno, mas a contínua acumulação de dados e correlações empíricas são um indicador de que não está disponível uma teoria geral adequada para descrever o escoamento. Além disso, há dificuldade na modelagem devido à diversidade de correlações. Como mencionado anteriormente, as técnicas experimentais para a medição da velocidade das partículas são extremamente caras e complexas, surge então a motivação em projetar e desenvolver um sistema de medição para determinar o valor da velocidade média das partículas no escoamento.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo geral

O objetivo geral da dissertação é analisar e compreender o comportamento do escoamento bifásico gás-sólido por intermédio de um modelo matemático que estimará a velocidade média das partículas, juntamente com o desenvolvimento de um sistema que permita obter dados experimentais sobre esta mesma velocidade.

### 1.3.2 Objetivos específicos

- Realizar uma revisão do estado da arte do escoamento bifásico gás-sólido;
- Avaliar os resultados do modelo matemático comparando com os dados experimentais;
- Verificar a influência de algumas variáveis do escoamento sobre o valor da velocidade média das partículas.

### 1.4 Delimitação

O estudo somente aborda aspectos da transferência da quantidade de movimento considerando um meio isotérmico e sem reação química. Para a realização do experimento, será utilizada uma corrente de ar juntamente com partículas de areia para representar o escoamento bifásico gás-sólido em regime diluído. A areia foi fornecida pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT), apresenta um diâmetro característico de grão dentro da faixa de 150 a 300  $\mu\text{m}$ , dessa forma reduz-se as descontinuidades na resposta dinâmica por parte das partículas. O equipamento experimental desenvolvido abordará especificamente a medição da velocidade média das partículas.

### 1.5 Estrutura da dissertação

**Capítulo 1:** Aborda-se genericamente o estado da arte tecnológica e a delimitação do problema do estudo, apresentando a motivação e o objetivo do estudo.

**Capítulo 2:** O marco teórico fundamental apresenta uma revisão geral sobre aspectos gerais do campo do escoamento bifásico assim como também do escoamento bifásico gás-sólido.

**Capítulo 3:** Neste capítulo é apresentada a formulação matemática utilizada para o desenvolvimento do modelo matemático.

**Capítulo 4:** Descrevem-se os componentes do aparelho experimental e o sistema para a medição da velocidade das partículas.

**Capítulo 5:** São apresentados os resultados obtidos do modelo matemático e os testes experimentais.

**Capítulo 6:** Baseados nos resultados teóricos e experimentais serão apresentados, as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

### 2.1 escoamento bifásico

A palavra fase é uma definição termodinâmica para descrever o estado de agregação da matéria. Assim, um escoamento bifásico é geralmente definido como o fluxo simultâneo de duas fases diferentes, onde desenvolve múltiplas interações na interface, transferindo massa, calor e quantidade de movimento, tendo como conseqüência diversas configurações ou geometrias.

A Tabela 2.1 apresenta uma classificação do escoamento bifásico considerando o número de fases e componentes. Por exemplo, o escoamento de água pode ser classificado com um escoamento de um componente em fase simples, ou no caso de uma corrente de ar pode ser classificado com um escoamento multicomponente em fase simples. Já uma corrente de ar carregada de partículas líquidas é mais complexa sendo classificado como um escoamento multicomponente e multifásico. (KLEINSTREUER, 2003).

Tabela 2.1 - Classificação do escoamento bifásico baseada pelo número de fases e componentes.

Componente	Fase	
	Simples	Múltiplas
Simples	Escoamento de água ou óleo ou oxigênio.	Escoamento de água e vapor.
Múltiplos	Escoamento de ar ou uma mistura de líquidos.	Escoamento de ar com gotas de água.

Fonte: KLEINSTREUER, 2003.

Dentro da terminologia do escoamento bifásico a fase pode ser classificada como meio “*contínuo*” quando ocupa continuamente as regiões de espaço, podendo ser um escoamento líquido ou gasoso, e classificada como um meio “*disperso*” quando ocupa regiões descontínuas de espaço geralmente conformada por partículas.

Estas partículas podem ser sólidas ou fluidas, sendo que as partículas fluidas quando estão compostas por uma fase gasosa são denominadas bolhas e quando estão compostas por uma fase líquida são denominadas gotas (STADTKE, 2006).

O escoamento bifásico se caracteriza por apresentar uma natureza complexa provocada pela existência de múltiplas interfaces móveis e deformáveis, acompanhadas de significativas descontinuidades nas propriedades dos fluídos e de um complicado campo de escoamento próximo da interface. Tais descontinuidades são estimuladas pelas iterações partícula-partícula e fluído-partícula, excessivas vazões mássicas e pela diferença de velocidades entre as fases. Como exemplo tem-se o escoamento bifásico gás-líquido representado pela mistura ar-água como ilustrado na Figura 2.1.

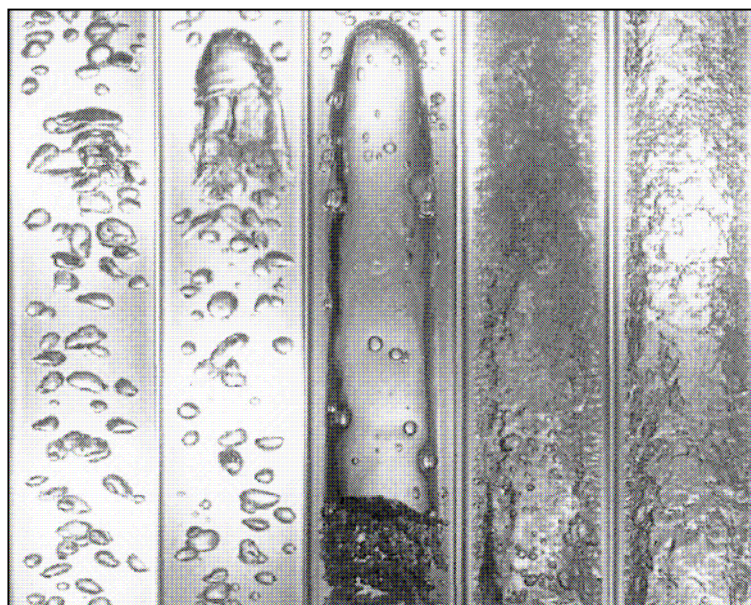


Figura 2.1 - Escoamento bifásico ar-água observado em um tubo de 25.4 mm de diâmetro. Fonte: ISHII; HIBIKI, 2006.

Devido a essa natureza complexa, os problemas de um processo ou sistema que apresentam este classe de escoamento são analisados de forma particular, desenvolvendo correlações e modelos de aplicação para sistemas específicos.

Conseqüentemente, o entendimento do extenso campo da Termofluido-Dinâmica dos escoamentos bifásicos vem sendo desenvolvido lentamente e, ademais, a capacidade de predição ainda não atinge o nível requerido como no caso da análise dos escoamentos de fase simples (BRENNEN, 2005).

Segundo Kreith (1999), todos os problemas presentes no escoamento bifásico têm características próprias que são diferentes das encontradas nos problemas de escoamento de uma fase. A primeira característica é a concentração relativa das diferentes fases sendo esta, usualmente, uma variável de grande importância nos escoamentos bifásicos. A segunda característica é a distribuição espacial das fases na corrente o que afeta fortemente o comportamento do escoamento e, finalmente, as massas específicas das fases que podem variar pela influência da força gravitacional que é da maior importância nos escoamentos bifásicos.

Para compreender e prever o comportamento dos processos e operações que apresentam um escoamento bifásico é importante ter uma disponibilidade de dados experimentais, assim como também o uso de modelos matemáticos com a finalidade de descrever a física do fenômeno, na qual a maioria das variáveis físicas deva ser modelada e formuladas sobre uma base racional apoiada por detalhados experimentos (ISHII; HIBIKI, 2006).

Pelas razões acima, a dinâmica do escoamento bifásico constitui objeto de intenso estudo nas áreas da engenharia, física aplicada e até matemática aplicada. De fato, não há como descrever, de maneira completa, os fenômenos presentes nestes sistemas sem o uso de matemática apurada, associada à percepção prática típica da engenharia (CARTAXO, 2000).

O propósito deste capítulo é descrever de forma sucinta a fenomenologia dos escoamentos bifásicos. Serão descritos a seguir os diferentes tipos de escoamentos bifásicos, classificação e regimes de modo a identificar o âmbito do escoamento gás-sólido, que será o foco do trabalho.

## 2.1 Classificação do escoamento bifásico

Para desenvolver a classificação do escoamento bifásico, primeiramente, é necessário conhecer os termos que são habitualmente utilizados na sua classificação. Um padrão de escoamento indica a distribuição visível ou a estrutura das fases, e um regime de escoamento indica como a distribuição da fase atua sobre a natureza física do sistema e os perfis de velocidades. Portanto diferentes regimes de escoamento indicam a necessidade de diferentes abordagens. Mas no caso de diferentes padrões de escoamento indicam uma visível diferença na estrutura da fase, porém não há necessidade de elaborar uma nova abordagem. Só o padrão do escoamento pode variar com o tempo, especialmente em um escoamento gás-líquido.

Em um escoamento de uma fase somente são considerados dois regimes de escoamento laminar e turbulento (regime transitório menosprezado). Mas no caso de um escoamento bifásico, não só os regimes laminar e turbulento são possíveis, com também o escoamento estratificado, de bolhas, pistonado ou golfado, anular, entre outros. Esses regimes de escoamento bifásico basicamente dependem do tipo do fluido, vazões, direção, forma, tamanho do conduto e a orientação (KLEINSTREUER, 2003).

No estudo do escoamento bifásico basicamente são considerados três estados da matéria sendo: a fase sólida, a fase líquida e a fase gasosa. Ishii e Hibiki (2006) desenvolveram uma classificação baseada na combinação das fases e outra classificação em função da estrutura da interface, com o que, conforme a combinação das fases, tem-se:

- Escoamento gás-líquido;
- Escoamento líquido-sólido;
- Escoamento gás-sólido;
- Escoamento de líquidos imiscíveis.

Da classificação anterior o escoamento de líquidos imiscíveis, geralmente não é considerado como um escoamento completamente bifásico, no entanto, para toda proposta prática, pode ser tratado como uma mistura bifásica.

A segunda classificação está desenvolvida sobre a estrutura da interface e a distribuição topográfica de cada fase (descrição do lugar) é muito mais difícil de analisar dado que continuamente ocorrem mudanças na estrutura da interface.

Na Tabela 2.2 mostra-se a classificação do escoamento bifásico de acordo à estrutura das interfaces em três classes principais: escoamento separado, escoamento misto ou transitório e escoamento disperso.


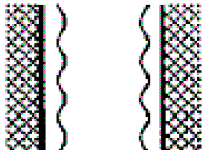
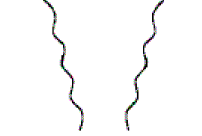
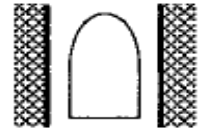
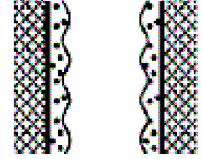
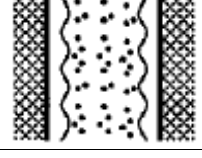
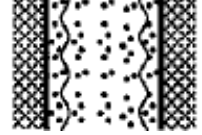
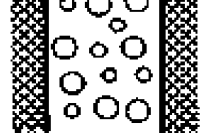
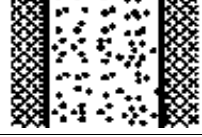
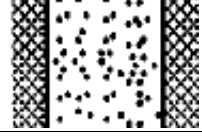
Dependendo do tipo da interface, a classe de escoamentos separados, pode ser dividida em escoamento de camadas, anular e jato, esses dois últimos regimes também são denominados como escoamento quase-axissimétrico.

Na classe de escoamentos transitórios ou mistos, a mudança da estrutura da interface se desenvolve gradualmente, o qual é caracterizado pela presença de ambos o escoamento disperso e separado. Esta transição aparece freqüentemente nas misturas de líquido-vapor representada pela mudança progressiva das fases ao longo de uma tubulação.

Aqui também, é mais conveniente subdividir a classe de escoamentos mistos de acordo com a dispersão da fase. Conseqüentemente, pode-se distinguir quatro regimes, (escoamento pistonado, escoamento anular com bolhas, escoamento anular com gotas e o escoamento anular com gotas e bolhas).

Da Tabela 2.2 a classe de escoamento disperso está caracterizada por apresentar partículas sólidas, gotas ou bolhas de gás imerso no fluído transportador o qual pode ser líquido ou gasoso. Dentro de esta classe identificamos o regime de escoamento particulado a qual abrange o escoamento bifásico gás-sólido.

Tabela 2.2 - Classificação do escoamento bifásico baseado na estrutura da interface e a distribuição topográfica.

Classe o Padrão	Regimes	Geometria	Configuração	Exemplos
Escoamento separado	Escoamento em camada		Película de líquido em gás. Película de gás em líquido.	Condensação de película. Evaporação de película.
	Escoamento anular		Líquido no centro e uma película de gás. Gás no centro e uma película de líquido.	Evaporação de películas. Caldeiros
	Escoamento de jato		Jato líquido em gás ou um jato gasoso em líquido.	Atomização.
Escoamento transitório ou misto	Escoamento pistonado		Gás embolsado no líquido	Formação de golfadas de gás na extração do petróleo.
	Escoamento anular com bolhas		Bolhas de gás escoando dentro de uma camada de líquido com uma corrente de gás no centro.	Evaporação progressiva da água confinada em tubulações de caldeiros.
	Escoamento anular com gotas		Uma corrente de gás transportando gotas, adicionalmente uma camada de líquido escoando na parede do tubo.	
	Escoamento anular com gotas e bolhas		Uma corrente de gás envolvida com gotas e uma película de líquido com bolhas de gás.	
Escoamento disperso	Escoamento de bolhas		Bolhas de gás transportadas por uma corrente de líquido.	Reatores químicos.
	Escoamento de gotas		Gotas de líquido em uma corrente de gás.	Resfriador de spray
	Escoamento particulado		Partículas sólidas carregadas por uma corrente de líquido ou gás.	Transporte de materiais particulados, leitos fluidizados.

Fonte: ISHII; HIBIKI, 2006.

## 2.2 Escoamento bifásico gás-sólido

O escoamento bifásico gás-sólido pode ser definido como o escoamento de partículas sólidas (fase dispersa) carregadas por uma corrente de gás (fase contínua). Envolve uma grande quantidade de variáveis e fenômenos complexos. Dependendo de como as fases interagem, o escoamento bifásico pode ser subdividido em duas categorias as quais estão sujeitas ao tipo e a magnitude das interações entre os elementos constitutivos da fase dispersa e a interação entre a fase dispersa e contínua. Assim, temos um escoamento em fase diluída se a movimentação das partículas é controlada principalmente pela força de arrasto proveniente da corrente gasosa e um escoamento em fase densa se a movimentação é controlada totalmente por colisões entre as partículas.

O escoamento bifásico gás-sólido, provavelmente, caracteriza o maior número de aplicações industriais e ambientais sendo encontrado principalmente em operações de combustão de sólidos (carvão pulverizado), na combustão de propelentes para foguetes e na incineração de resíduos sólidos. Também está presente em operações de separação gás-partícula, representadas pelos ciclones, precipitadores eletrostáticos, deposição gravitacional e operações de filtração.

Como muitas das atuais áreas de pesquisa, o estudo surgiu da necessidade prática de entender o comportamento e os fenômenos que envolvem esta classe de escoamento bifásico. No início, a maior parte das pesquisas esteve direcionada para ao planejamento, avaliação e desenvolvimento de operações tais como o transporte pneumático e os leitos fluidizados (DESAI, 2003; DECKER, 2003).

O comportamento fluidodinâmico do escoamento é determinado pela interação mecânica individual das fases gás e sólida, assim como pelas interações entre as duas fases. O escoamento bifásico gás-sólido apresenta uma diversidade de fenômenos intrínsecos os quais são de considerável interesse para a variedade de processos que envolvem este tipo de escoamento. Os fenômenos mais relevantes são a erosão, o atrito, a propagação da onda de pressão e a interação das partículas com a turbulência.

A erosão mecânica pode causar danos diversos na parede do tubo ou a qualquer parte mecânica em um sistema gás-sólido, por exemplo, é comum a erosão em cotovelos e em linhas de transporte pneumático, como ilustrada a Figura 2.2. O atrito gera partículas finas, que podem alterar as condições do próprio escoamento e chegam a ser uma fonte de emissão de particulados. Entender os modos básicos do desgaste mecânico e o mecanismo de atrito é essencial para o controle do seu comportamento.



Figura 2.2 – Fenômeno da erosão em um tubo de transporte pneumático de partículas em fase diluída.  
Disponível em: <http://www.erpt.org/014Q/rhoe-00.htm>.

O fenômeno de ondas de pressão através de um escoamento gás-sólido está diretamente relacionado ao escoamento em bocais (jato de combustão) e técnicas de medição associadas com ondas acústicas e ondas de choque. Em diversos escoamentos gás-sólido, as partículas se movimentam em uma forte corrente turbulenta de gás.

No escoamento, as partículas são dispersas por intermédio dos vórtices presentes na corrente de gás. As partículas podem aumentar ou reduzir a turbulência do gás afetando o comportamento do escoamento bifásico. Dessa forma, é importante o entendimento da interação vórtice-partícula conhecido como o estudo da modulação da turbulência.



Devido a esses fenômenos intrínsecos, o desenvolvimento da análise para o escoamento bifásico gás-sólido é muito complexo, em parte pela dificuldade em avaliar a resposta dinâmica individual de cada fase e as interações entre elas. Em alguns casos especiais, a mistura entre a corrente de gás e as partículas podem ser tratadas como uma fase simples pseudo-homogênea na qual as propriedades termodinâmicas da mistura podem ser definidas (FAN; ZHU, 2004).

### 2.2.1 Transporte pneumático

O transporte pneumático de partículas é comumente utilizado nas indústrias farmacêutica, de alimentos, de carvão e no processamento de minerais pulverizados. Os sistemas de transporte pneumático podem ser classificados, de acordo com a fração volumétrica de sólidos e outras características do escoamento, como sendo em fase diluída e fase densa.

No escoamento em fase diluída, a movimentação das partículas é orientada pelas forças fluidodinâmicas locais, não têm grande importância os efeitos de colisão de partículas entre si e com a parede. Entretanto, no transporte em fase densa, as colisões partícula-partícula desempenham um papel fundamental, controlando totalmente a movimentação das partículas. Todas estas características têm uma influência nos padrões do escoamento como ilustrado na Figura 2.3.

Quanto ao objeto de estudo, o transporte pneumático em fase diluída é mais simples de ser analisado e modelado. As hipóteses simplificadoras adotadas para seu estudo são: (1) as tensões na fase dispersa são desprezíveis e (2) o acoplamento unidirecional (CARTAXO, 2000).

A primeira hipótese tem impacto imediato nas equações do movimento, pois evita os problemas da modelagem do tensor de tensão para a fase dispersa. A segunda se refere à quantificação exclusiva dos efeitos do fluido sobre as partículas, assumindo, conseqüentemente, que o movimento das partículas não altera significativamente o campo de escoamento. Estas hipóteses no caso de um escoamento em fase densa seriam inviáveis.

Por ultimo, devido à facilidade na montagem e simples estruturas, o transporte pneumático chegou a ser uma aplicação de prova para a análise de modelos computacionais e experimentais dos escoamentos multifásicos (CARTAXO, 2000; DESAI, 2003).

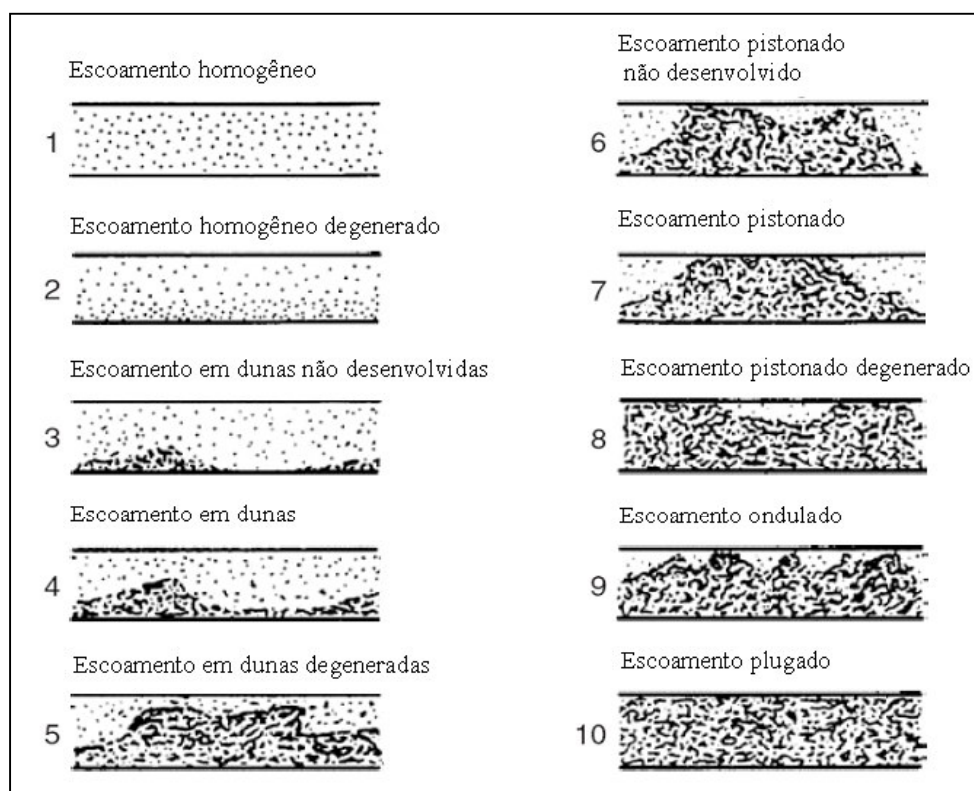


Figura 2.3 – Padrões de escoamento em linhas de transporte pneumático horizontal (From Wen, US Department of Interior, Bureau of Mines, PA, IC 8314, 1959. With permission). Fonte: CROWE, 2006.

### 2.2.2 Leitos fluidizados

Os leitos fluidizados são equipamentos de escoamento gás-sólido com numerosas aplicações importantes tais como o craqueamento catalítico de hidrocarbonetos e na síntese de Fischer-Tropsch para a obtenção de produtos químicos e combustíveis líquidos. Esta operação é um claro exemplo de um escoamento em fase densa, na qual a interação partícula-partícula é o principal fenômeno fluidodinâmico que controla o escoamento.

A Figura 2.4 apresenta a variação do comportamento das partículas sólidas em um leito fluidizado, onde inicialmente estão estacionárias, no entanto, com o incremento da velocidade superficial do gás, as partículas sólidas começam a adquirir uma mobilidade ou “fluidez”.

Devido à contínua movimentação do leito e às intensas interações entre o gás e as partículas, provoca vários fenômenos interessantes. O mais impressionante fenômeno fluidodinâmico do leito fluidizado é a formação da “bolha”, (GIBILARO, 2001).

O bom entendimento da formação das bolhas no leito é necessário para abordar os fenômenos da mistura das partículas sólidas, das transferências de massa e calor, erosão e a suspensão das partículas. Os leitos fluidizados são uma das operações usadas para avaliar modelos eulerianos, ainda que poucos pesquisadores tenham tentado a utilização de métodos lagrangeanos para a modelagem de tais sistemas (DESAI, 2003).

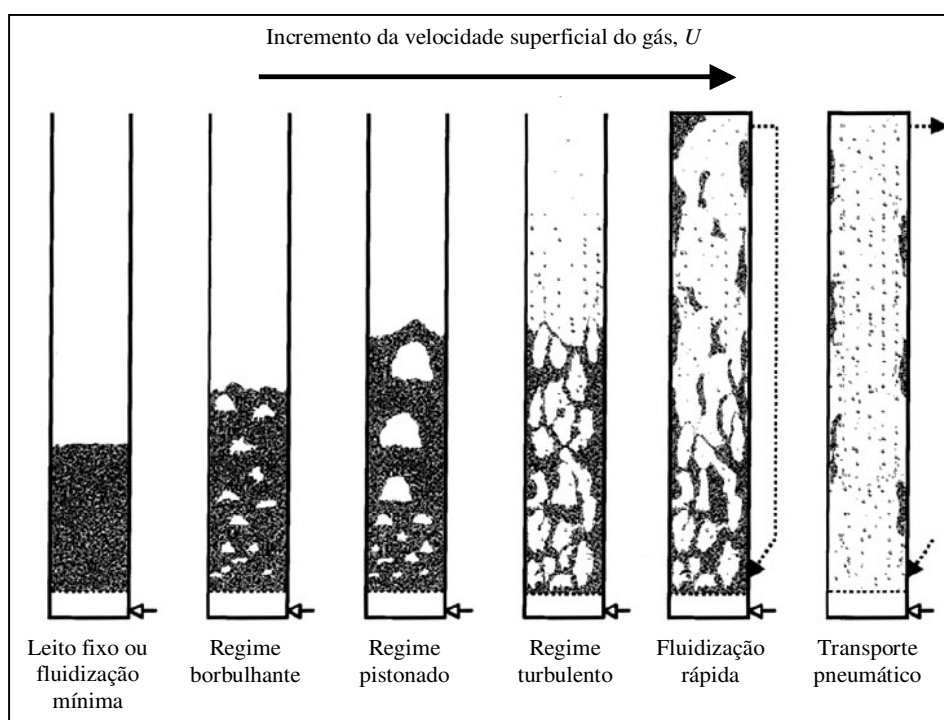


Figura 2.4 – Representação esquemática dos diferentes padrões do escoamento correspondente à fluidização gás-sólido. Fonte: CROWE, 2006.

## 2.3 Definições básicas do escoamento bifásico gás-sólido

Nesta seção são introduzidas algumas definições básicas que são utilizadas na análise dos escoamentos bifásicos gás-sólido. Por conveniência, a fase dispersa é representada por subscritos “p” e os subscritos “g” são usados para designar à fase contínua. (KLEINSTREUER, 2003; CROWE, 2006).

### 2.3.1 Fração volumétrica e massa específica

A fração volumétrica de partículas sólidas é definida como:

$$\alpha_p = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V^0} \frac{\delta V_p}{\delta V} \quad (2.1)$$

onde  $\delta V_p$  é o volume da fase dispersa no volume  $\delta V^0$  é o volume limitante que garante uma média estacionária. Analogamente, para a fase gasosa tem-se:

$$\alpha_g = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V^0} \frac{\delta V_g}{\delta V} \quad (2.2)$$

Por definição a soma das frações volumétricas é unitária. Assim:

$$\alpha_p + \alpha_g = 1 \quad (2.3)$$

A massa específica aparente da fase particulada é a massa das partículas por unidade de volume da mistura, em termos de limite é definida como:

$$\bar{\rho}_p = \lim_{\delta V \rightarrow \delta V^0} \frac{\delta m_p}{\delta V} \quad (2.4)$$

$$\bar{\rho}_p = \alpha_p \cdot \rho_p \quad (2.5)$$

$$\bar{\rho}_p = (1 - \alpha_g) \cdot \rho_p \quad (2.6)$$

Se “n” representa o número de partículas por unidade de volume então:

$$\bar{\rho}_p = n \cdot m_p \quad (2.7)$$

Por seu turno, a massa específica aparente da fase gasosa é:

$$\bar{\rho}_g = \alpha_g \cdot \rho_g \quad (2.8)$$

A partir das definições anteriores tem-se que a massa especificada mistura  $\rho_m$ , é dada por:

$$\bar{\rho}_p + \bar{\rho}_g = \rho_m \quad (2.9)$$

Ou ainda:

$$\rho_m = \bar{\rho}_p + \bar{\rho}_g = (1 - \alpha_g) \cdot \bar{\rho}_p + \alpha_g \cdot \rho_g \quad (2.10)$$

### 2.3.2 Velocidade superficial e velocidade da fase

Para os escoamentos bifásicos ou multifásicos confinados em tubos, a velocidade superficial de cada fase é a vazão mássica daquela fase dividida pela área do tubo e a massa específica do material. Em outras palavras, a velocidade superficial de uma fase é definida como a velocidade da fase se o tubo estivesse vazio.

A velocidade superficial e a velocidade da fase estão relacionadas pela fração volumétrica da fase. Assim a velocidade superficial para a fase dispersa é:

$$U_p = \frac{\dot{m}_p}{\rho_p \cdot A} \quad (2.11)$$

$$U_p = \alpha_p \cdot u_p \quad (2.12)$$

Da mesma forma, a velocidade superficial da fase contínua é dada por:

$$U_g = \frac{\dot{m}_g}{\rho_g \cdot A} \quad (2.13)$$

$$U_g = \alpha_g \cdot u_g \quad (2.14)$$

### 2.3.3 Relação de vazões mássicas

A relação de vazões mássicas das fases é a proporção entre a vazão mássica das partículas sobre a vazão mássica de gás. Quase sempre, este termo é usado para denotar concentração de partículas no escoamento.

$$Z = \frac{\dot{m}_p}{\dot{m}_g} \quad (2.15)$$

### 2.3.4 Tempo de resposta

O tempo de resposta da quantidade de movimento refere-se ao tempo requerido por uma partícula responder a qualquer mudança ou alteração na velocidade do escoamento.

Esta variável é importante para o estabelecimento de parâmetros adimensionais que caracterizam o escoamento tais como o número de Stokes. A equação do movimento para uma partícula usando o coeficiente de arrasto pode ser expressa como:

$$m_p \frac{du_p}{dt} = 3 \pi \mu_g d_p f (u_g - u_p) \quad (2.16)$$

A equação (2.17) representa o fator de arrasto,  $f$ , definido como o produto do coeficiente de arrasto de uma partícula simples,  $C_{DO}$ , na região de Stokes e o número de Reynolds da partícula sendo:

$$f = \frac{C_{DO} \cdot Re_p}{24} \quad (2.17)$$

Para um escoamento em regime de Stokes, o fator de arrasto apresenta um valor próximo à unidade. Assumindo uma partícula esférica com uma massa específica,  $\rho_p$  e dividindo pela massa de uma partícula,  $m_p$ , a equação (2.16) tem-se:

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{18 \mu_g}{d_p^2 \rho_p} f (u_g - u_p) \quad (2.18)$$

Por sua vez a equação (2.18) pode ser escrita como:

$$\frac{du_p}{dt} = \frac{f}{\tau_p} (u_g - u_p) \quad (2.19)$$

onde,  $\tau_p$ , é tempo de resposta da partícula sendo:

$$\tau_p = \frac{\rho_p \cdot d_p^2}{18\mu_g} \quad (2.20)$$

### 2.3.5 O número de Stokes

O número de *Stokes* é um número adimensional importante na descrição fluidodinâmica do escoamento de partículas, definido como a proporção do tempo de resposta da quantidade de movimento da partícula e o tempo característico do movimento do fluído ( $\tau_g$ ), neste caso uma corrente gasosa. O último é resultado da proporção entre a dimensão característica do tubo (diâmetro interno) e a velocidade superficial da fase gasosa representada pela seguinte equação:

$$\tau_g = \frac{D_T}{U_g} \quad (2.21)$$

$$Stk = \frac{\tau_p}{\tau_g} \quad (2.22)$$

Da combinação das equações (2.20); (2.21) e (2.22) vem:

$$Stk = \frac{\rho_p \cdot d_p^2 \cdot U_g}{18 \cdot \mu_g \cdot D_T} \quad (2.23)$$

Para um dado regime de escoamento, um número de Stokes menor que a unidade ( $Stk < 1$ ), implica que os efeitos de inércia são pequenos, tal que a escala de tempo associada com a inércia da partícula é muito menor que a escala de tempo associada com a vazão do fluído.



Ademais as partículas respondem rapidamente a qualquer modificação no movimento do fluido e uma velocidade de equilíbrio muito próxima existe entre as duas fases. Isto está associado principalmente ao escoamento diluído de partículas. No caso de um número de Stokes maior da unidade ( $Stk > 1$ ), a partícula quase tem uma dinâmica independente, e demora em responder qualquer mudança na velocidade da fase contínua sendo que esta afeta ligeiramente a velocidade da partícula.

#### 2.4 Revisão das técnicas de medição para o escoamento bifásico gás-sólido

No estudo do comportamento do escoamento bifásico gás-sólido é comum a determinação de variáveis específicas tais como a velocidade média das partículas, queda de pressão do sistema, distribuição das fases, fração volumétrica e vazão mássica, as quais são necessárias para caracterizar o comportamento global e o padrão do escoamento. Com isto pode-se obter informação local acerca das propriedades características em tais escoamentos.

Todas essas variáveis são importantes no projeto, simulação e desenvolvimento de sistemas, principalmente, no transporte pneumático, leitos fluidizados borbulhante, leitos fluidizados circulantes e em outras operações com características similares. Os resultados destas medições são empregados para melhorar a economia da operação, mantendo as margens de segurança e estabilidade do processo (LECH, 2001; FUCHS et al., 2006).

Na caracterização do escoamento muitas técnicas experimentais foram desenvolvidas para analisar e determinar as propriedades do escoamento bifásico gás-sólido ou para qualquer escoamento que apresente uma fase particulada. Essas técnicas estão classificadas em dois grupos de acordo com as suas capacidades e sobre a maneira de como é obtida a informação da variável.

A Tabela 2.3 apresenta uma classificação geral das técnicas de medição para sistemas particulados. O primeiro grupo denominado métodos de amostragem ou técnicas intrusivas, são principalmente aplicados na determinação da forma, tamanho e áreas superficiais das partículas sólidas.

Atualmente são utilizadas em diversos processos industriais e sobre tudo nas indústrias de tecnologia dos pós, onde essas técnicas buscam uma caracterização detalhada das partículas em diferentes etapas para o controle da qualidade do processo.

Tabela 2.3 - Categorização das técnicas de medição com respeito às propriedades da partícula.

Propriedade da partícula	Técnicas de amostragem	Técnicas em tempo real	
		Técnicas integrais	Técnicas de medição local
Tamanho	Peneiração Princípio Coulter Sedimentação	Difração do laser	Dispersão de luz Anemômetro de Fases Doppler
Fração volumétrica	Amostragem Isocinética	Difração do laser Absorção de luz	Amostragem isocinética Sonda de fibra óptica Dispersão de luz Anemômetro de Fases Doppler
Velocidade	A medição direta da velocidade não é possível	Técnica de correlação	Sonda de fibra óptica Anemômetro de Fases Doppler Anemômetro Laser Doppler Velocimetria por imagem da partícula Velocimetria pela trajetória da partícula

Fonte: CROWE; SOMMERFELD; TSUJI, 1998.

As técnicas em tempo real, também conhecida como técnicas não intrusivas, são aquelas que podem ser aplicadas diretamente no processo para analisar as propriedades da fase contínua e dispersa. Geralmente esses métodos podem ser aplicados na maioria de casos de sistemas bifásicos dispersos com uma fração volumétrica de partículas relativamente baixa, determinando assim as propriedades locais em um sistema com uma resolução espacial que depende da técnica de medição aplicada (CROWE; SOMMERFELD; TSUJI, 1998).

Existem outras técnicas inovadoras do tipo não intrusivas como a *Electrical Tomography Capacitance* (ETC). No escoamento bifásico gás-sólido esta técnica é utilizada principalmente para a visualização e determinação da fração volumétrica das partículas na área transversal do tubo, dessa forma possibilita a determinação indireta da velocidade média das partículas no transporte pneumático e em leitos fluidizados.

Pode-se afirmar que a determinação da velocidade da partícula é a tecnologia mais complicada já que é feita por intermédio de equipamentos complexos e caros, tais como o Anemômetro de Fases Doppler e a velocimetria por imagens. A aplicação desses métodos varia de acordo com o tipo de escoamento bifásico particulado e também depende do padrão de escoamento que se desenvolve.

Para entender a dificuldade na determinação da velocidade da partícula, apresenta-se na Figura 2.5 os padrões para o transporte pneumático horizontal, classificados em sistemas com escoamento em linhas de corrente (“*Stream-Flow*”), sistemas de duas fases, (“*Two-Phase*”), e sistemas de fluxo pistonado (“*Slug-Flow*”) (DECKER, 2003).

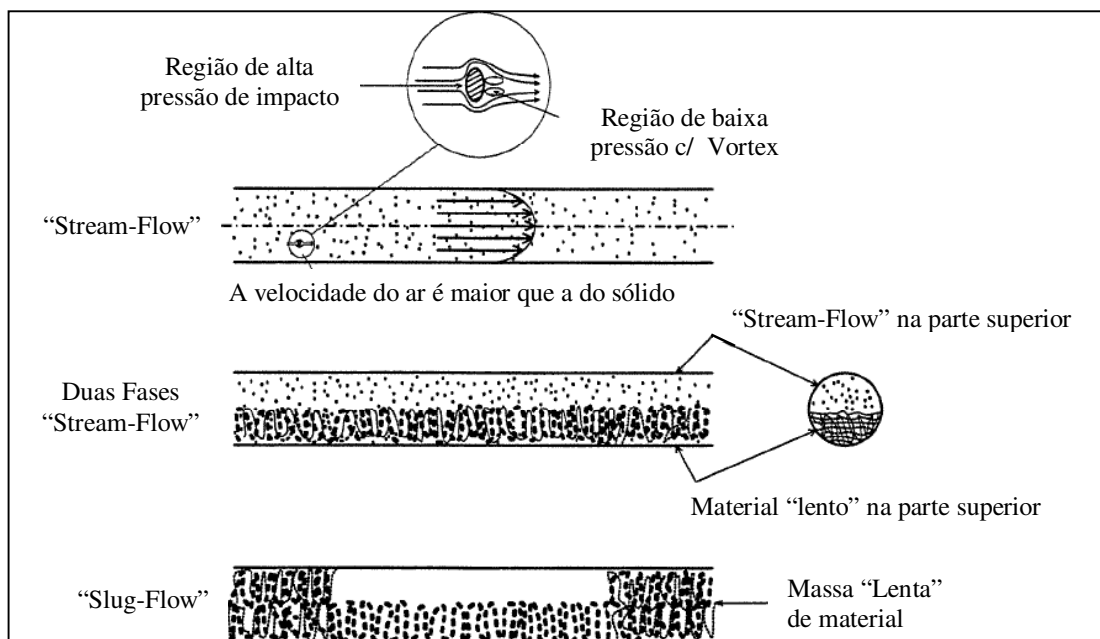
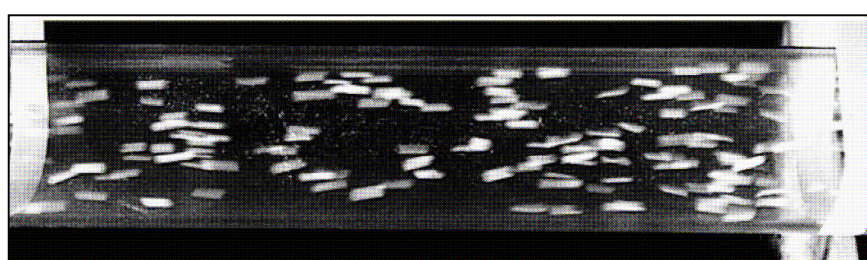


Figura 2.5 – Classificação do transporte pneumático horizontal com diferentes razões de carga. Fonte: DECKER, 2003.

Da Figura 2.5, pode-se observar que dependendo do padrão do escoamento a magnitude da velocidade da partícula muda continuamente influenciada pela quantidade de partículas e pela velocidade do fluido transportador. A Figura 2.6 apresenta a técnica de medição mais apropriada para determinar a velocidade média das partículas é por intermédio da velocimetria por imagem, aplicada por HUI; TOMITA, (2000) também para a determinação da fração volumétrica das partículas de polivinil em um transporte pneumático.



← **Direção do escoamento**

Figura 2.6 - Padrão de escoamento para partículas de polivinil obtida com a técnica de velocimetria por imagem.

Fonte: HUI; TOMITA, 2000.

### 3 MODELAGEM DO ESCOAMENTO BIFÁSICO GÁS-SÓLIDO

A literatura apresenta diversos modelos fluidodinâmicos os quais descrevem o comportamento do escoamento bifásico gás-sólido. Esses modelos estão baseados sobre correlações empíricas, simulações e teorias. Os ensaios experimentais utilizando unidades em escala piloto ainda permanecem como a metodologia mais confiável para a análise, descrição e o projeto de sistemas que apresentam um escoamento bifásico gás-sólido.

“Talvez o limite ou restrição mais importante para a modelagem é que cada material possui a sua própria característica de escoamento, fazendo que o projeto de sistemas de gás-sólido seja uma arte mais que uma ciência” (CABREJOS, 1994).

Segundo Crowe (2006), um importante conceito dentro da modelagem matemática é o acoplamento, resultado da interação entre as fases dispersa e contínua devido à transferência de massa, calor e quantidade de movimento. Quando um escoamento bifásico gás-sólido apresenta uma quantidade mínima de partículas, é assumido que o campo de escoamento do gás não é perturbado significativamente pelas partículas, enquanto que as trajetórias das partículas são guiadas exclusivamente pelo movimento do gás através da força de arraste. A Figura 3.1 (a) representa este tipo de interação entre as duas fases, no qual as partículas sólidas percebem a presença do fluido sem causar-lhe algum efeito dinâmico, é chamado de acoplamento unidirecional.

Em contraste, quando o número de partículas é suficientemente grande, a fase dispersa pode alterar sensivelmente o campo do escoamento do fluido, sendo por vezes necessário considerar a fração volumétrica de partículas no modelo dinâmico, nesta situação, tem-se um acoplamento bidirecional. A Figura 3.1 (b) apresenta este acoplamento onde as duas fases do sistema são mutuamente influenciadas em função das suas interações dinâmicas.

Adicionalmente existem outras duas categorias, onde a movimentação das partículas é produzida pelas interações entre o fluido-partícula-partícula e partícula-partícula. Estas são aplicadas mais para escoamentos em transição e em fase densa.

A Figura 3.1 (c) representa a interação fluído-partícula-partícula, a qual pode ser considerado para o estado de transição de um escoamento de fase diluída a fase densa, Neste caso o fluído transportador interage com as partículas, estas também começam a perturbar o campo do escoamento de outra.

A Figura 3.1 (d) representa a interação partícula-partícula, aqui a movimentação é produzida por intermédio de interações de colisão e contato entre as partículas, aqui particularmente pode ser considerado um escoamento denso.

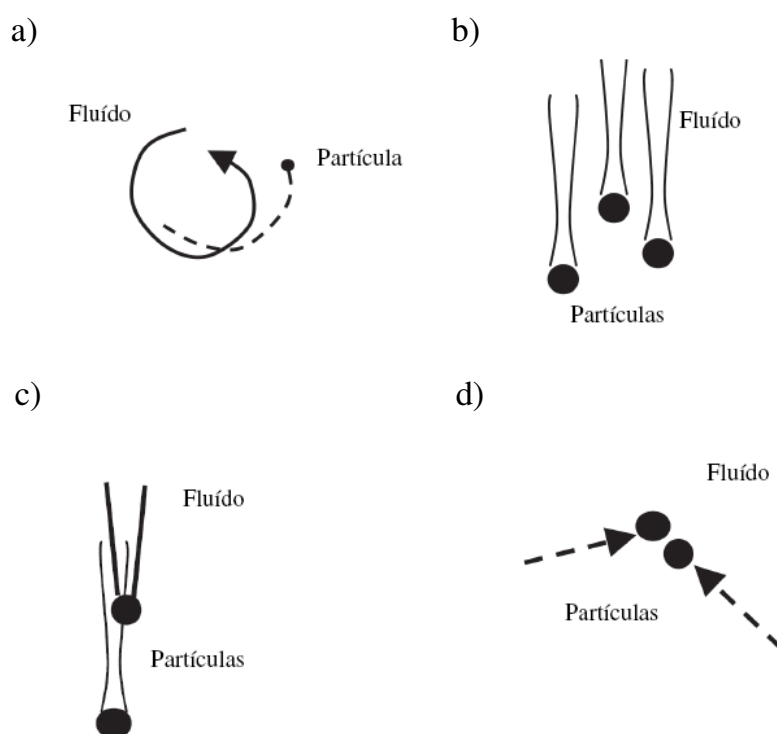


Figura 3.1 – Representação esquemática de quatro tipos de acoplamento para a modelagem do escoamento bifásico gás-sólido. Modificada de CROWE, 2006.

De acordo com Crowe (2006), existe uma variedade de descrições e tratamentos utilizados na modelagem do escoamento bifásico, a escolha da abordagem numérica apropriada depende basicamente do tipo de acoplamento entre as partículas sólidas e o fluído. Como já mencionado, basicamente existem duas abordagens utilizadas na representação matemática do escoamento bifásico gás-sólido: a abordagem Euleriana-Lagrangeana e a abordagem Euleriana-Euleriana, descritas a continuação:

### 3.1 Abordagem euleriana-lagrangeana

Na abordagem euleriana-lagrangeana a fase gasosa é modelada pelas equações clássicas de conservação da mecânica do contínuo e as partículas sólidas tratadas pela mecânica clássica do corpo sólido. Nesta abordagem calcula-se a trajetória e o movimento individual de cada partícula por intermédio da segunda lei do movimento de Newton, considerando os efeitos das colisões interpartículas, as forças presentes na interface entre o fluido e as partículas sólidas e o efeito de forças exercidas por campos externos (PATANKAR; JOSEPH, 2001; DECKER, 2003).

As vantagens desta abordagem é que relaciona informação exata concernente à trajetória das partículas, a qual exhibe uma visão da natureza física do comportamento no escoamento.

Outra vantagem é possibilidade para variar facilmente as propriedades físicas associada com a partícula, tais como tamanho, forma e massa específica. No caso das partículas apresentarem uma distribuição de tamanhos esta abordagem pode empregar uma representação estatística para incorporar esta característica (CURTIS; WACHEM, 2004; CROWE, 2006).

Para obter resultados compatíveis com a realidade é necessário descrever a trajetória de um grande número de partículas sólidas, o que requer tempos computacionais extremamente elevados. Adicionalmente, devido ao incremento no número de partículas sólidas, provoca-se um acoplamento bidirecional no escoamento, conduzindo a uma aproximação iterativa para determinar o efeito das partículas sólidas sobre a velocidade do gás, e o efeito resultante da velocidade do gás sobre as partículas sólidas, exigindo dessa forma um tempo computacional adicional. Como resultado, esta abordagem está limitada a escoamentos extremamente diluídos (MALLO, 1997; DECKER, 2003).

### 3.2 Abordagem euleriana-euleriana

A idéia geral da abordagem euleriana-euleriana é tratar o gás e às partículas sólidas como duas fases contínuas interagindo ao longo do escoamento, e conseqüentemente a construção das equações do balanço integral da continuidade, quantidade de movimento e energia para as duas fases. Nesta abordagem as partículas sólidas são modeladas usando a mecânica do contínuo, considerado que todas são idênticas com um diâmetro e uma massa específica representativa.

Visto que a aproximação do contínuo para a fase sólida não tem uma equação de estado e a falta de variáveis, tais como a tensão normal e a viscosidade, certamente algumas suposições são requeridas para obter o balanço da quantidade de movimento para a fase sólida (TAGHIPOUR; ELLIS; WONG, 2005).

Dessa forma, os modelos baseados na abordagem euleriana-euleriana são mais sofisticados porque utilizam os conceitos da teoria cinética dos materiais granulares para representar o comportamento da fase sólida associada com as interações interpartículas, isto possibilita a hipótese de escoamento viscoso para a fase sólida, com a finalidade de descrever os principais efeitos e fenômenos encontrados nos processos industriais (DECKER, 2003; HUDSON; HARRIS, 2006).

A vantagem desta abordagem é a praticidade na simulação de processos com um número grande de partículas. Aqui, o tempo computacional é menor de modo que o modelo pode ser aplicado tanto para escoamentos diluídos como para densos (CURTIS; WACHEM, 2004). A desvantagem é que exige um número adicional de equações de transferência e constitutivas, empíricas ou semi-empíricas, para o fechamento do modelo matemático que expressa o fenômeno físico.

Finalizando, vale dizer que muitos autores vêm utilizando a abordagem euleriana-euleriana na modelagem do escoamento bifásico gás-sólido, com o objetivo de determinar e prever as principais características fenomenológicas do escoamento observado na prática.



### 3.3 Formulação matemática

Uma das formulações matemáticas utilizadas para o estudo do escoamento bifásico gás-sólido é o modelo unidimensional em regime permanente de Capes e Nakamura (1973). Esta formulação foi desenvolvida para o estudo do transporte pneumático vertical ascendente assumindo uma distribuição de tamanho de partículas uniforme e considerando um sistema isotérmico (GIDASPOW, 1979).

O modelo é basicamente composto de duas equações da continuidade para os constituintes e de duas equações da quantidade de movimento, que por sua vez envolvem um conjunto de variáveis tais como: a velocidade das partículas sólidas e do gás, frações volumétricas das fases entre outras. Para descrever as formulações, foi considerado inicialmente o modelo de escoamento homogêneo e de seção constante. As equações que descrevem este modelo estão disponíveis na literatura, sendo utilizadas por diversos autores em diversos trabalhos envolvendo sistemas de secagem, transporte pneumático vertical e leitos fluidizados circulantes (DZIDO; PALICA; RACZEK, 2002; BALASUBRAMANIAN et al., 2007; CHAOUKI; GUY; MABROUK, 2007). Isto pressupõe a validade do modelo e a sua aplicação na modelagem fluidodinâmica do escoamento bifásico gás-sólido em fase diluída.

A partir da hipótese de regime permanente unidimensional, tem-se que a equação da continuidade para o gás e para as partículas sólidas são, respectivamente:

$$\frac{d(\rho_g \cdot \alpha_g \cdot u_g)}{dz} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{d(\rho_p \cdot \alpha_p \cdot u_p)}{dz} = 0 \quad (3.2)$$

Por seu turno, as equações de conservação da quantidade de movimento para o gás e para as partículas sólidas são:

$$\rho_g \frac{d}{dz} \left( \alpha_g \cdot u_g^2 \right) = \alpha_g \left( -\frac{dp}{dz} \right) - (\alpha_g \cdot \rho_g \cdot g) - F_D - F_{gw} \quad (3.3)$$

$$\rho_p \frac{d}{dz} \left[ (1 - \alpha_g) \cdot u_p^2 \right] = (1 - \alpha_g) \cdot \left( -\frac{dp}{dz} \right) - [\rho_p \cdot (1 - \alpha_g) \cdot g] + F_D - F_{pw} \quad (3.4)$$

onde:

$\frac{dp}{dz}$  : Gradiente de pressão por unidade de comprimento [N/m<sup>3</sup>]

$F_D$  : Força de arraste [N/m<sup>3</sup>]

$F_{gw}$  : Força do atrito gás-parede [N/m<sup>3</sup>]

$F_{pw}$  : Força de atrito partículas-parede [N/m<sup>3</sup>]

$g$  : Aceleração da gravidade [m/s<sup>2</sup>]

A componente do lado esquerdo das equações (3.3) e (3.4) representa a força de inércia da fase e os quatro componentes mostrados no lado direito representam a queda de pressão, o efeito da força da gravidade, a força de arraste e a força de atrito da fase com a parede do tubo, respectivamente.

Provavelmente a aproximação unidimensional seja a mais apropriada para escoamentos verticais que para horizontais, devido à segregação e sedimentação que apresentam os escoamentos horizontais em baixas velocidades de ar. Assumir a hipóteses de escoamento isotérmico é uma boa aproximação para escoamentos dispersos devido às baixas taxas de calor geradas pelo atrito entre as partículas e a parede interna do tubo.

Segundo Kuipers (1997), o modelo unidimensional de Capes Nakamura (1973) despreza a existência de grupos de partículas, segregação lateral de sólidos e escoamento descendente perto da parede do tubo, o que limita a aplicabilidade a sistemas diluídos ( $\alpha_p < 0,04$ ). Para desenvolver a modelagem matemática precisam ser definidas as forças de arraste e atrito no escoamento.

### 3.3.1 Força de arraste

Em um escoamento bifásico gás-sólido, a velocidade média das partículas geralmente é menor que a velocidade da corrente de gás, a diferença entre as velocidades é conhecida como a velocidade de escorregamento. Esta velocidade expressa a interação entre o gás e as partículas, sendo importante para o aprofundamento da compreensão da fluidodinâmica do escoamento.

Segundo Zhu et al., (1995), o valor da velocidade de escorregamento depende da direção do escoamento, assim a equação (3.5) descreve a velocidade de escorregamento para um escoamento vertical ascendente, onde a velocidade do gás é maior que a velocidade das partículas. A equação (3.6) representa a velocidade de escorregamento em um escoamento vertical descende no equilíbrio, onde a força da gravidade tem um efeito importante sobre a velocidade das partículas, sendo que em um determinado ponto do escoamento esta chega a ter um valor superior à velocidade do gás:

$$U_e = (u_g - u_p); \text{ Escoamento ascendente} \quad (3.5)$$

$$U_e = (u_p - u_g); \text{ Escoamento descendente} \quad (3.6)$$

A força de arraste é uma das forças que dominam a movimentação das partículas devido à transferência da quantidade de movimento na interface das fases ao longo do escoamento.

Exercida sobre uma partícula imersa em um fluido em movimento é causada por dois mecanismos distintos, o primeiro é devido à tensão cisalhante viscosa na superfície conhecido como fricção por contato. O segundo é devido à distribuição de pressão que envolve o corpo, conhecida como arraste de forma (DECKER, 2003).

Segundo Taghipour; Ellis; Wong, (2005), a força de arraste sobre uma simples esfera em um fluido foi estudada e empiricamente correlacionada para uma ampla faixa de números de Reynolds, no entanto quando uma partícula se movimenta em uma mistura bifásica dispersa o arraste é afetado pela presença de outras partículas.

A equação (3.7) é a representação matemática da força de arraste por unidade de volume para um escoamento bifásico gás-sólido, manifestado pelo produto de um coeficiente de transferência da quantidade de movimento e a velocidade de escorregamento entre as duas fases.

$$F_D = \beta \cdot U_e \quad (3.7)$$

### 3.3.1.1 Coeficiente de transferência da quantidade de movimento

O coeficiente de transferência de movimento é uma correlação semi-empírica que representa a transferência da quantidade de movimento de uma força fluidodinâmica atuando sobre a superfície da partícula. Este coeficiente considera os efeitos das interações partícula-partícula por intermédio da fração volumétrica de partículas sólidas em sua expressão matemática. Dessa forma, é considerada a complexa e a sutil influência sobre a força de arraste que afeta a dinâmica das partículas (ZHONGHUA; MUJUMDAR, 2008).

A Tabela 3.1 apresenta uma lista em ordem cronológica dos coeficientes de transferência de momento mais usados na descrição fluidodinâmica de sistemas particulados encontrados na literatura.

Tabela 3.1 - Coeficientes de transferência da quantidade de movimento usados na modelagem fluidodinâmica de sistemas particulados.

Autor(es)	Coeficiente de transferência da quantidade de movimento
Ergun (1952)	$\beta = 150 \frac{\alpha_p^2}{\alpha_g} \frac{\mu_g}{(d_p \phi_s)^2} + 1,75 \frac{\rho_g \cdot \alpha_p \cdot  u_g - u_p }{d_p \phi_s}$
Wen e Yu (1966)	$\beta = \frac{3}{4} \cdot C_{D0} \cdot \frac{\alpha_p \cdot \alpha_g \cdot  u_g - u_p  \cdot \rho_g}{d_p}$
Gibilaro et al., (1985)	$\beta = \left( \frac{17,3}{Re} + 0,336 \right) \frac{\alpha_p \cdot \rho_g \cdot  u_g - u_p }{d_p} \alpha_g^{-2,8}$
Syamlal e O'Brien (1989)	$\beta = \frac{3}{4} \cdot \frac{\alpha_p \cdot \alpha_g \cdot \rho_g}{V_{r,s}^2 \cdot d_p} C_{D0} \cdot \left( \frac{Re_p}{v_{r,s}} \right) \cdot  u_g - u_p $ $C_{D0} = \left( 0,63 + \frac{4,8}{\sqrt{Re_p/V_{r,s}}} \right)^2$ $V_{r,s} = 0,5 \cdot \left( A - 0,06 Re_p + \sqrt{(0,06 \cdot Re_p)^2 + 0,12 \cdot Re_p \cdot (2 \cdot B - A) + A^2} \right)$ <p style="text-align: center;"> <math>A = \alpha_g^{4,14}, B = 0,8 \alpha_g^{1,28}</math> para <math>\alpha_g \leq 0,85</math>  <math>A = \alpha_g^{4,14}, B = \alpha_g^{2,65}</math> para <math>\alpha_g &gt; 0,85</math> </p>
Di Felice (1994)	$\beta = \frac{3}{4} \cdot C_{D0} \cdot \rho_g \cdot \alpha_p \cdot \alpha_g^2 \cdot \frac{ u_g - u_p }{d_p} \cdot \alpha_g^{-\eta}$ $\eta = 3,7 - 0,65 \exp \left( - \frac{(1,5 - \log Re_p)^2}{2} \right)$

Fonte: TAGHIPOUR; ELLIS; WONG, 2005; CHAOUKI; GUY; MABROUK, 2007.

Da Tabela 3.1, o coeficiente proposto por Ergun (1952) é aplicado para escoamentos com  $\alpha_g < 0,8$  e o coeficiente proposto por Wen e Yu (1966) para o caso de  $\alpha_g > 0,8$ . Em contraste, o coeficiente desenvolvido por Gibilaro et al., (1985), derivado da correlação de Ergun (1952), pode ser aplicado para toda faixa de frações de sólidos, sendo recomendado para escoamentos em leitos fluidizados. O coeficiente de Syamlal e O'Brien (1989), sugere um modelo alternativo, baseado na relação da velocidade terminal de um sistema multi-partículas para uma única partícula isolada ( $V_{r,s}$ ). O coeficiente de Di Felice (1994) muito similar ao do Wen e Yu (1996) apresenta um fator de correção ( $\alpha_g^{-\eta}$ ), que considera os efeitos da presença de outras partículas no escoamento. O expoente ( $\eta$ ) é um coeficiente empírico, que depende do número de Reynolds da partícula (REESE; ZHANG, 2003). As correlações de arraste derivam de considerações empíricas, quase sempre relações que dependem de uns poucos fatores incluindo o diâmetro e a massa específica da partícula, a fração volumétrica, o número de Reynolds e a velocidade de escorregamento (DESAI, 2003).

Na maioria das correlações para o coeficiente de transferência da quantidade movimento, aparece o coeficiente de arraste,  $C_{DO}$ , que será abordado na seção subsequente.

### 3.1.1.2 Coeficiente de arraste

O coeficiente de arraste é uma quantidade adimensional desenvolvida a partir de dados experimentais usada para corrigir o arraste ou a resistência de um objeto ao escoamento de um fluido. Este coeficiente é uma função do número de Reynolds da partícula é aplicado na equação teórica da força de arraste. Os modelos de coeficiente de arraste para partículas individuais podem ser correlacionados para diferentes intervalos do número de Reynolds da partícula, definido como:

$$Re_p = \frac{\rho_g (u_g - u_p) d_p}{\mu_g} \quad (3.8)$$

a) Região de Stokes ( $0 < Re_p < 0,2$ )

Quando o  $Re_p$  tende a zero, o arraste das partículas esféricas é devido inteiramente à fricção por contato.

$$C_{DO} = \frac{24}{Re_p} \quad (3.9)$$

b) Região viscosa ( $0,2 < Re_p \leq 1000$ )

Nesta região, os arrastes por contato e de forma, são importantes. O coeficiente de arraste diminui uniformemente com o aumento do número de Reynolds. Muitas equações empíricas foram propostas para estimar o valor do coeficiente de arraste nesta região, tais como a expressão de Schiller e Nauman (1935), Ihme et al., (1972) e por ultimo Ishii e Zuber (1979) (DECKER, 2003), a saber:

$$C_{DO} = \frac{24}{Re_p} (1 + 0,15Re_p^{0,687}) \quad (3.10)$$

$$C_{DO} = \frac{24}{Re_p} + 5,48Re_p^{-0,573} + 0,36 \quad (3.11)$$

$$C_{DO} = \frac{24}{Re_p} (1 + 0,1Re_p^{0,75}) \quad (3.12)$$

c) Região turbulenta ( $Re_p > 500$  a  $1000$ )

A região turbulenta ou também região de Newton é dominada pelo arraste de forma, e o coeficiente de arraste não depende do número de Reynolds da partícula, sendo:

$$C_{DO} = 0,44 \quad (3.13)$$

d) Todas as regiões ( $0 \leq Re_p \leq \infty$ )

Uma predição do coeficiente de arraste a partir de dados experimentais é realizada para os vários regimes de escoamento, a partir da correlação de Coelho e Massarani (1996).

Esta correlação abrange todos os valores de Reynolds para a partícula, e leva em consideração possíveis descontinuidades provocadas pela mudança do regime de escoamento devido ao aumento da velocidade axial. Um exemplo dessa descontinuidade seria uma mudança relacionada ao tratamento do coeficiente de arraste ao passar de uma região de Stokes para uma região viscosa, a correlação proposta por COELHO e MASSARANI (1996) para o cálculo do coeficiente de arraste é:

$$C_{DO} = \left[ \left( \frac{24}{K_1 Re_p} \right)^{0,85} + K_2^{0,85} \right]^{1,18} \quad (3.14)$$

onde,  $K_1$  e  $K_2$  são constantes do modelo que dependem da esfericidade das partículas,  $\varphi_p$ :

$$K_1 = 0,843 \cdot \log_{10} \left( \frac{\varphi_p}{0,065} \right)^{0,85} \quad (3.15)$$

$$K_2 = 5.31 - 4.88 \varphi_p \quad (3.16)$$



Decker (2003) avaliou a correlação proposta por COELHO e MASSARINI (1996), a qual abrange todos os valores de Reynolds para a partícula, evitando possíveis descontinuidades provocadas pela mudança do regime de escoamento devido ao aumento da velocidade axial obtendo assim uma boa aproximação (DECKER, 2003). A Figura 3.2 representa graficamente o comportamento do coeficiente de arrasto como uma função do número de Reynolds para uma partícula esférica, na qual são identificados as regiões de Stokes, viscoso e turbulento.

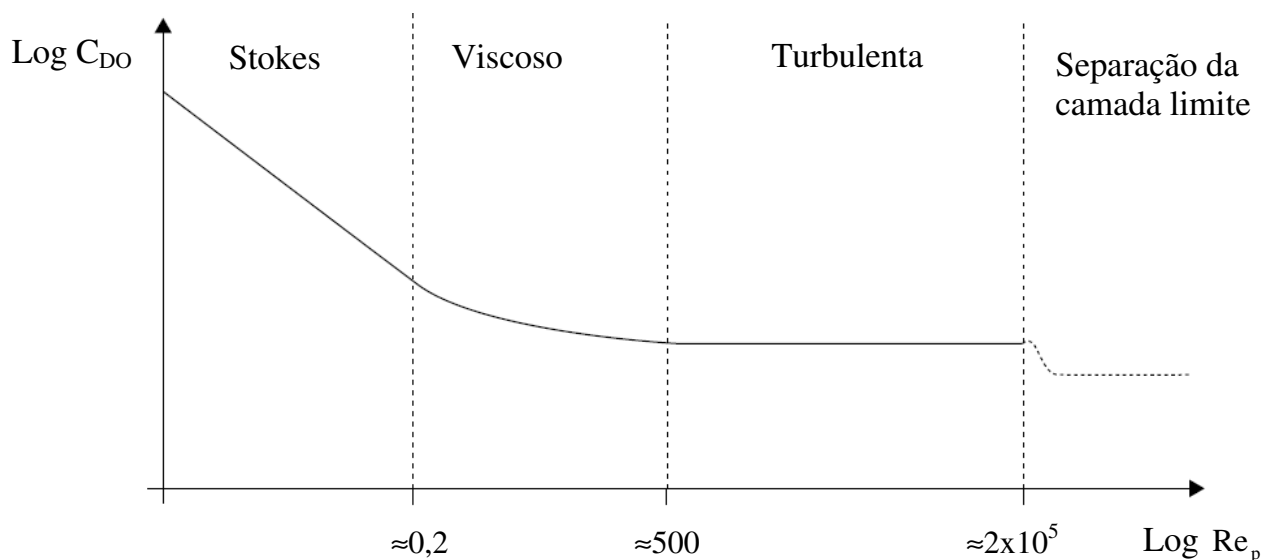


Figura 3.2 – Logaritmo do coeficiente de arrasto de uma partícula esférica, ( $C_{D0}$ ), como uma função do logaritmo do número de Reynolds da partícula, ( $Re_p$ ). Fonte: KLINZING, 1989.

### 3.3.2 Forças de atrito

A força de atrito é uma força natural que atua apenas quando um objeto está em contato com outros corpos e sofre a ação de uma força que tende a colocá-lo em movimento, ela sempre é contrária ao movimento do escoamento. Para determinar a contribuição da força de atrito no escoamento bifásico gás-sólido, tem-se que avaliar separadamente os efeitos da interação partícula-parede e gás-parede por intermédio de duas equações tipo Fanning.

A equação (3.17) é comumente usada para avaliar a contribuição do atrito partícula-parede no modelo unidimensional de Capes e Nakamura (1973) na modelagem do escoamento bifásico gás-sólido.

$$F_{pw} = f_p \frac{2 \cdot \rho_p (1 - \alpha_g) \cdot u_p^2}{D_T} \quad (3.17)$$

onde  $f_p$  é o fator de atrito partícula-parede.

A literatura apresenta um grande número de correlações propostas com a finalidade de prever o fator de atrito entre a partícula e a parede. A Tabela 3.2 apresenta algumas destas expressões (MABROUK, 2008).

Tabela 3.2 Fator de atrito partícula-parede.

Autor(es)	Correlação	Propriedade da partícula	
		$d_p$ [ $\mu\text{m}$ ]	$\rho_p$ [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
Sarma e Narasiga (1959)	$f_p = 0,5 \left( \frac{m_g}{m_p} \right) (1 - \alpha_g) \left( \frac{U_t}{U_g} \right) \left( \frac{D}{d_p} \right)$	26-392	893,7-3118
Stemerding (1962)	$f_p = 0,003$	65	1600
Garić et al., (1995)	$f_p = 0,0017 \frac{\alpha_p \cdot U_t}{\alpha_g^4 \cdot u_g} \left[ \frac{\alpha_p U_t}{u_g - u_p} \right]^{-1,5}$	1,2E3-2,9E3	2507-2641
Lech (2001)	$f_p = 0,0108 + 0,066 \frac{\dot{m}_p}{u_p \cdot A \cdot \rho_p}$	80-3E3	958-2650

Fonte: MABROUK, 2008.

Segundo Mabrouk (2008), fisicamente o fator de atrito partícula-parede não é uma constante. Esta variável muda ao longo do escoamento, começando de um valor grande na zona de alimentação devido ao número de partículas e decresce gradualmente a um valor quase constante no equilíbrio. Tais mudanças influenciam o perfil axial da velocidade média das partículas. Da mesma forma, o fator de atrito partícula-parede aumenta proporcionalmente com a rugosidade superficial do tubo e diminui conforme se incrementa a velocidade média das partículas.

No caso da corrente de gás a equação (3.18) é comumente usada para avaliar a força de atrito gás-parede:

$$F_{\text{gw}} = f_g \frac{2 \cdot \rho_g \cdot \alpha_g \cdot u_g^2}{D_T} \quad (3.18)$$

O fator de atrito,  $f_g$ , na equação anterior depende do número de Reynolds da corrente gasosa, a saber:

$$f_g = \frac{16}{\text{Re}} \quad \text{Re} < 2100 \quad (3.19)$$

$$f_g = \frac{0,079}{\text{Re}^{0,25}} \quad 4000 < \text{Re} < 100000 \quad (3.20)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_g \cdot u_{\text{ag}} \cdot D_T}{\mu_{\text{og}}} \quad (3.21)$$

### 3.4 Desenvolvimento do modelo matemático

A base teórica é o modelo unidimensional do escoamento bifásico em regime permanente de Capes e Nakamura (1973) descrito na seção (3.3), na qual a movimentação das partículas está determinada pela transferência da quantidade de movimento da fase contínua à fase dispersa por intermédio da interação mecânica das fases ao longo do escoamento.

Com o intuito principal de analisar o comportamento do escoamento, o modelo determinará o perfil axial da velocidade média das partículas, baixo o conceito de um acoplamento unidirecional. Dessa forma, o modelo constitui-se na resolução da equação de conservação da quantidade de movimento das partículas sólidas.

Para isso considerou-se um escoamento bifásico gás-sólido diluído ( $\alpha_g > 0,8$ ), contendo partículas esféricas de diâmetro constante assumindo uma fase contínua ideal, dentro de um tubo de área de seção transversal constante na direção vertical descendente. Nesta orientação o escoamento apresenta estabilidade dinâmica como consequência da força da gravidade. A gravidade influi na estrutura de um escoamento vertical descendente, de forma que as partículas não apresentam uma apreciável migração radial, dessa forma a formulação matemática unidimensional adotada no trabalho conseguirá descrever satisfatoriamente o comportamento em cada ponto axial do escoamento.

O trabalho de Jin e Wei, (1970), apresenta uma formulação matemática que incorpora uma regra de sinais para o termo da força de arraste com a finalidade de conseguir uma descrição racional da fluidodinâmica do escoamento. Deste modo, a expressão para a força de arraste na equação da quantidade de movimento para a fase gás é escrita  $\mp F_D$  e para a fase sólida  $\pm F_D$ .

Os sinais nas duas expressões para a força de arraste definem o comportamento na zona de aceleração e no equilíbrio, na qual a velocidade de escorregamento tem um valor superior a zero. A troca de sinais é efetuada quando a velocidade média das partículas consegue atingir o mesmo valor da velocidade do ar.

Neste ponto do escoamento a influência da força de arrasto na dinâmica das partículas é reduzida, mas as partículas continuam acelerando devido à força da gravidade até atingir um estado de equilíbrio dinâmico, na qual as partículas conseguem escoar mais rápido que a corrente de ar mantendo uma velocidade constante ao longo do escoamento, similar ao escoamento de partículas em um fluido estagnado (BERRUTI, et al., 1994).

Esta regra de sinais será incorporada na modelagem matemática do trabalho, já que o modelo de Capes e Nakamura (1973) foi desenvolvido para o estudo de um escoamento vertical ascendente, onde a velocidade de escorregamento é superior à velocidade média das partículas em cada ponto axial do escoamento, neste caso a troca de sinais na expressão para a força de arraste é desnecessária.

Para a resolução da equação de conservação da transferência da quantidade de movimento para as partículas sólidas também é adotada uma condição hipotética do trabalho de Decker (2003), que se refere à ausência de forças de pressão atuantes na fase dispersa. Conforme Gidaspow (1994), as forças de pressão resultam única e exclusivamente da fase contínua. Esta hipótese também será considerada no desenvolvimento do modelo matemático, de forma que o termo de pressão da equação (3.4) não é considerado:

$$\rho_p \frac{d}{dz} \left[ (1 - \alpha_g) \cdot u_p^2 \right] = \pm F_D - F_{pw} + [\rho_p \cdot (1 - \alpha_g) \cdot g] \quad (3.18)$$

A equação (3.18) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem composta pelos termos da força de inércia, arraste, atrito partícula-parede do tubo e a gravidade. Como visto nas secções anteriores, as forças de arrasto e atrito são altamente dependentes de correlações empíricas as quais quantificam a ação de cada força no escoamento.

Para determinar a força de arraste, deve-se selecionar um coeficiente de transferência da quantidade de movimento. Nesta dissertação usa-se o modelo de Wen e Yu (1966) da Tabela 3.1, adequado para a quantificação da força de arraste em um escoamento bifásico gás-sólido em fase diluída (GIDASPOW, 1994).

A combinação da expressão de Wen e Yu com a equação (3.7), para a força de arraste origina a seguinte expressão:

$$F_D = \frac{3}{4} \cdot C_D \cdot \frac{\alpha_p \cdot \alpha_g \cdot |u_g - u_p| \cdot \rho_g}{d_p} (u_g - u_p) \quad (3.19)$$

Na equação (3.19), precisa ainda ser definido o coeficiente de arraste. A seleção do coeficiente de arraste é extremamente importante para o modelo matemático. A utilização do coeficiente de arraste depende basicamente do valor do número de Reynolds da partícula definido pela velocidade superficial do gás. O coeficiente de arrasto selecionado é dado pela equação (3.9), de Schiller e Nauman (1935) para região viscosa ( $0,2 < Re_p \leq 1000$ ).

A substituição da equação (3.9) na equação (3.19) completa o modelo para expressar a força de arraste por unidade de volume atuante no escoamento:

$$F_D = \frac{3}{4} \cdot \left[ \frac{24}{Re_p} \left( 1 + 0,15 Re_p^{0,687} \right) \right] \cdot \frac{\alpha_p \cdot \alpha_g \cdot |u_g - u_p| \cdot \rho_g}{d_p} (u_g - u_p) \quad (3.20)$$

Para determinar a força de atrito no escoamento, primeiro definimos o fator de atrito partícula-parede da Tabela 3.2. É recomendável selecionar uma correlação a qual possua parâmetros físicos, tais como o diâmetro e a massa específica, similar do material que será considerado como fase dispersa. Nesta dissertação será empregada a correlação de Lech, (2001) por cumprir esta condição. Agrupando a expressão da força de atrito entre as partículas e a parede, equação (3.17) e a equação do fator de atrito de Lech (2001), têm-se:

$$F_{pw} = \left( 0,0108 + 0,066 \frac{\dot{m}_p}{u_p \cdot A \cdot \rho_p} \right) \cdot \frac{2 \cdot \rho_p (1 - \alpha_g) \cdot u_p^2}{D_T} \quad (3.21)$$

As equações (3.20) e (3.21) são combinadas com a equação (3.18), resultando em:

$$\rho_p \frac{d}{dz} \left[ (1 - \alpha_g) \cdot u_p^2 \right] = \pm \frac{3}{4} \cdot \left[ \frac{24}{\text{Re}_p} \left( 1 + 0,15 \text{Re}_p^{0,687} \right) \right] \cdot \frac{\alpha_p \cdot \alpha_g \cdot |u_g - u_p| \cdot \rho_g}{d_p} (u_g - u_p) - \left( 0,0108 + 0,066 \frac{\dot{m}_p}{u_p \cdot A \cdot \rho_p} \right) \cdot \frac{2 \cdot \rho_p (1 - \alpha_g) \cdot u_p^2}{D_T} + [\rho_p \cdot (1 - \alpha_g) \cdot g] \quad (3.22)$$

Substituindo a equação (3.8) do número de Reynolds da partícula na equação (3.22), e reduzindo alguns termos tem-se:

$$\frac{du_p}{dz} = \pm \frac{1}{\tau_p} \cdot \frac{(u_g - u_p)}{u_p} \cdot (\alpha_g) \cdot \left\{ 1 + 0,15 \cdot B \cdot (u_g - u_p)^{0,687} \right\} - \left( 0,0108 + 0,066 \frac{\dot{m}_p}{u_p \cdot A \cdot \rho_p} \right) \cdot \frac{2 \cdot u_p}{D_T} + \frac{g}{u_p} \quad (3.23)$$

onde:

$$B = \left( \frac{\rho_g \cdot d_p}{\mu_g} \right)^{0,687}$$

A equação (3.23) é uma expressão característica dos problemas de valor inicial para equações diferenciais ordinárias, a qual representa o comportamento da velocidade média das partículas na componente axial em função das principais variáveis do escoamento.

Liu e Pan (1989) sugerem para a resolução das equações do balanço da quantidade de movimento do escoamento bifásico gás-sólido, a utilização de métodos numéricos como técnica mais conveniente. Para a resolução numérica da equação (3.23) propõe-se o uso do método Runge-Kutta-Merson. Este método é derivado do método Runge-Kutta original de quarta ordem, com a vantagem de possibilitar a estimação do erro de truncamento local, mediante duas avaliações de quarta e quinta ordem, o algoritmo do método encontra-se no ANEXO.

#### 3.4.1 Condições iniciais e de contorno

Os valores das condições iniciais são dados pelas características da parte experimental, assim quando,  $Z = 0$ , (ponto de inserção das partículas) o valor de  $(u_g)$ , e considerado igual ao valor da velocidade superficial do ar,  $(U_g)$ , obtida pela medição da vazão de ar proveniente do compressor, no calculo este valor é mantido constante pelo conceito de acoplamento unidirecional e mantido na faixa de 2 m/s até 7 m/s.

No caso de velocidade da partícula,  $(u_p)$ , o valor inicial para o modelo é equivalente ao valor da velocidade de inserção no ensaio experimental, assim, pode-se estimar aplicando o conceito da velocidade superficial,  $(U_p)$ , e conhecendo a vazão mássica, a massa específica e o diâmetro do tubo de alimentação. No trabalho resulto um valor aproximado de 0,156 m/s como velocidade de inserção das partículas.



## 4 DESCRIÇÃO E MONTAGEM DA INSTALAÇÃO EXPERIMENTAL

Para a montagem do equipamento considerou-se a observação de Zhu, et al., (2008): um escoamento gás-sólido descendente na mesma direção da força da gravidade, apresenta um perfil de velocidades radiais e concentração de sólidos mais uniformes.

Muito diferente, em um escoamento horizontal apresentaria descontinuidades devido a uma redução da força de arraste que produziria a formação de um leito de partículas na tubulação. No caso de um escoamento vertical ascendente, ter-se-ia uma redução na velocidade das partículas e um refluxo descendente na parede do tubo, isto devido à ação contrária da força da gravidade.

### 4.1 Descrição da unidade experimental

A Figura 4.1 é uma foto de parte do aparelho construído composto por linha de alimentação de ar proveniente do compressor, sistema de alimentação de partículas, tubulação do escoamento, sistema para a medição da velocidade média das partículas, fonte de alimentação para os sensores e um filtro para a recuperação da areia.

Para o experimento foi selecionado um ventilador radial que fornece a vazão necessária para transportar as partículas de areia a uma pressão ligeiramente superior à pressão atmosférica. Isso com a finalidade de evitar o refluxo do ar pelo tubo de inserção das partículas, evitando assim retardos na alimentação das partículas.

Na construção do aparelho considerou-se utilizar uma tubulação de PVC rígido com a finalidade de reduzir a interação entre o ar e a rugosidade interna da tubulação. As dimensões do tubo no aparelho têm 0,05 m de diâmetro interno e 1,20 m de comprimento do ponto de alimentação das partículas até o cotovelo na parte inferior do aparelho.

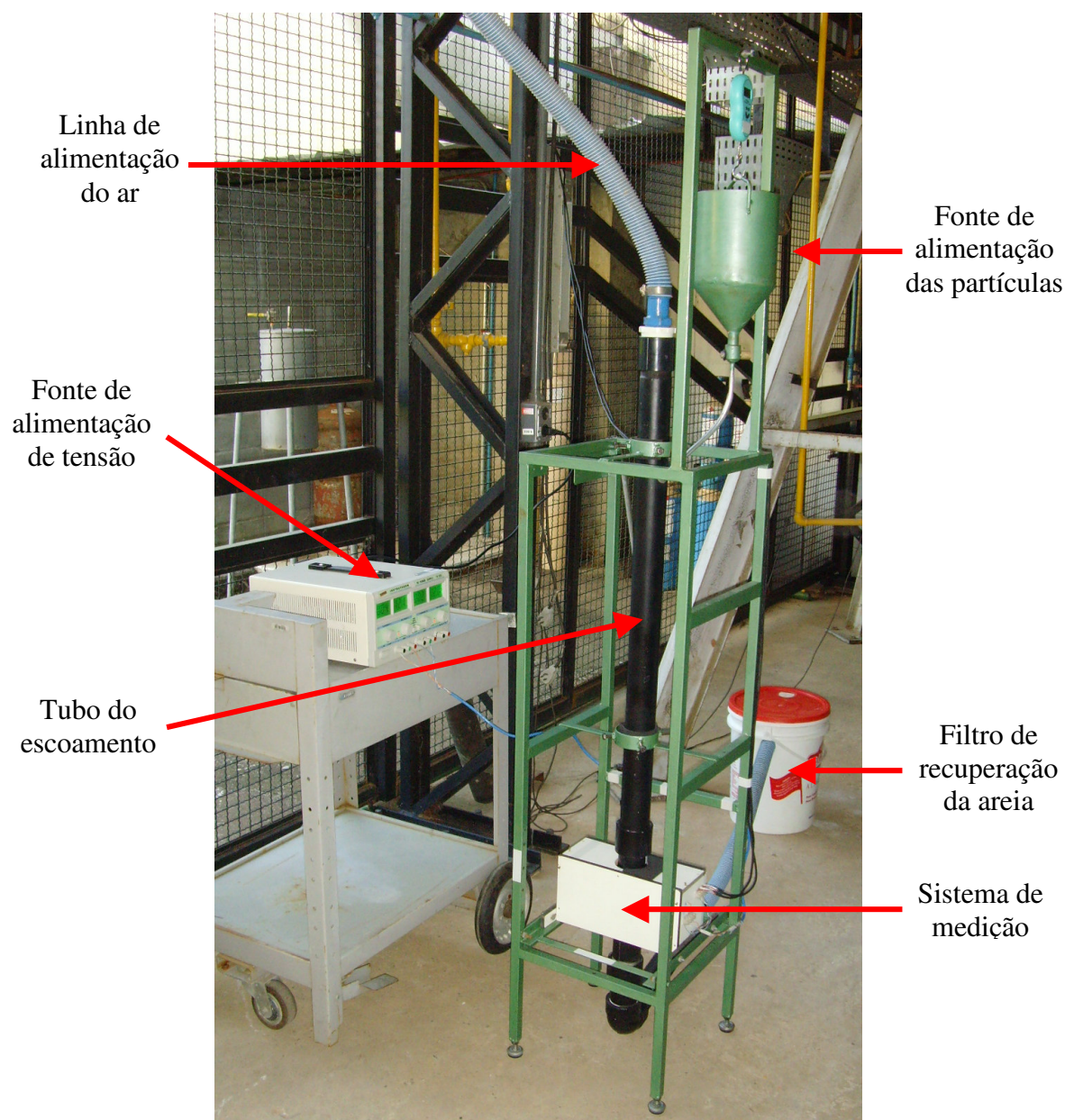


Figura 4.1 – Unidade experimental

O diâmetro do tubo selecionado é o mesmo daquele utilizado no trabalho de Herbert, (1997) que utilizou uma tubulação de acrílico das mesmas dimensões no estudo da fluidodinâmica de leitos fluidizados circulantes, e também do trabalho de Lech, (2001) que usa uma tubulação, com esse mesmo diâmetro interno, na determinação do coeficiente de atrito para um escoamento bifásico gás-sólido diluído. A maioria dos trabalhos experimentais nesta área apresenta tubulações com diâmetros internos na faixa de 0,0225 a 0,192 m.

A alimentação das partículas de areia é realizada por intermédio de um tubo inserido no extremo superior do tubo do escoamento. Para uma alimentação constante das partículas foi projetado um recipiente de armazenamento de areia. A Figura 4.2 apresenta um esquema do sistema de alimentação, onde o recipiente contendo as partículas de areia é colocado suspenso em uma balança de mola.

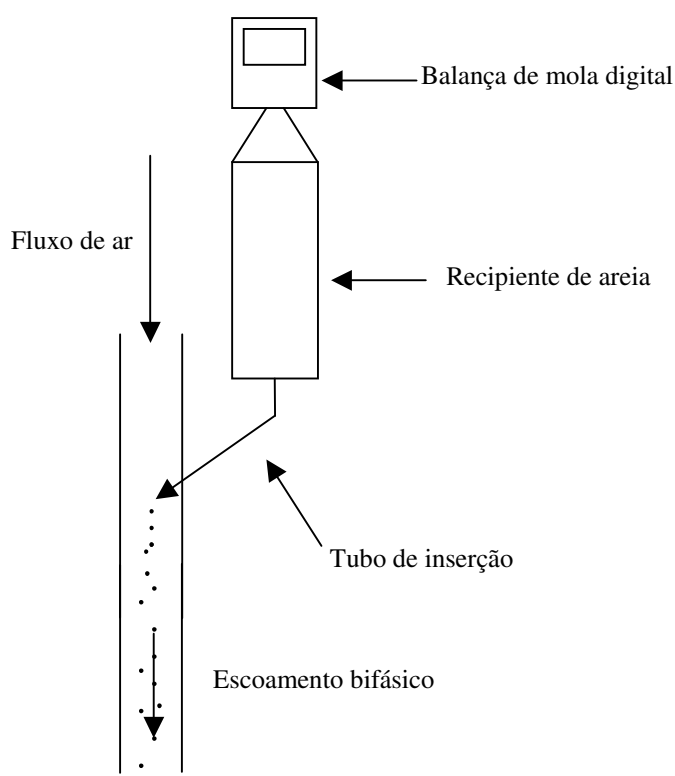


Figura 4.2.– Sistema de injeção da areia desenvolvido no trabalho.

A função da balança é registrar a quantidade de partículas alimentada e em conjunto com o tempo determinar a vazão aproximada. Testes prévios foram realizados no sistema de alimentação com a finalidade de encontrar a vazão mássica. Como resultado encontrou-se que a máxima vazão mássica de partículas sólidas atingida aproximadamente é de 0,005 kg /s.

Para a recuperação da areia foi montado um filtro que está conformado por uma sacola de tela. A sacola é conectada a uma extensão do tubo do escoamento e adicionalmente é colocada em um recipiente para dar uma segurança na recuperação da areia.

## 4.2 O material da fase dispersa

Uma etapa importante no desenvolvimento do trabalho foi a seleção das partículas sólidas utilizada como fase dispersa no escoamento. A escolha recaiu sobre um tipo de areia que apresentaria uma granulometria controlada, com a finalidade de manter um sistema particulado homogêneo. Dessa forma, assegura-se o desenvolvimento de um escoamento completamente bifásico, isto por sua vez garante que todas as partículas apresentem respostas dinâmicas semelhantes.

Nas experiências utilizou-se uma areia fina fornecida pelo Instituto de Pesquisas Tecnológicas, IPT, Figura 4.3. Na Tabela 4.1 apresentam-se as principais características físicas do material.

Tabela 4.1 – Características físicas da areia IPT

Material	Massa específica (kg/m <sup>3</sup> )	Diâmetro (μm)
Areia (IPT)	2540	150 – 300

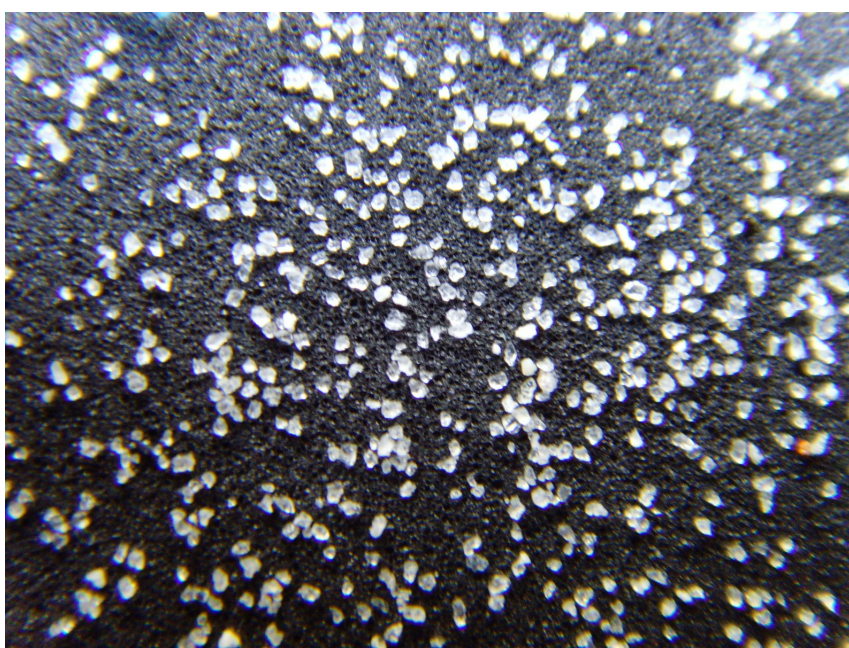


Figura 4.3 – Areia do Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT) utilizada no estudo.

### 4.3 Desenvolvimento do sistema de medição da velocidade média das partículas

Na década de 1980, as técnicas de medição experimental para escoamentos dispersos, tiveram muitos progressos importantes devido ao contínuo desenvolvimento da tecnologia laser. Essas técnicas são o *Phase Doppler Anemometry* (PDA), *Laser Doppler Anemometry* (LDA) e a *Particle Image Velocimetry* (PIV), as quais estão baseadas sobre uma análise óptica que utiliza os princípios físicos tais como, espalhamento, atenuação e difração como resultado da interação da luz com as partículas sólidas. Essas técnicas são usadas para medir a velocidade, fração volumétrica e tamanho das partículas no intuito de descrever o comportamento do escoamento. A maioria destas caracteriza-se por ser de custo elevado e por ter algumas limitações na medição, uma das limitações é a sua utilização, normalmente, em sistemas diluídos em que a fração volumétrica de sólidos venha a ser menor do que 0,015 (CROWE, SOMMERFELD, TSUJI, 1998).

Trabalhos de Klinzing, (1989) e Cabrejos, (1994) confirmam que a velocidade média das partículas é a variável do escoamento bifásico gás-sólido mais difícil de determinar experimentalmente, uma revisão mais detalhada sobre estes aspectos podem ser encontrado em Soo, (1999).

Com o intuito de medir a velocidade média das partículas, desenvolveu-se um sistema de medição experimental, baseado no princípio físico de atenuação de um feixe de luz de laser produzida pela passagem das partículas (BECK, 1981; CROWE; SOMMERFELD; TSUJI, 1998).

O princípio físico de atenuação é próprio da análise óptica de escoamentos dispersos utilizado principalmente na determinação da fração volumétrica de sólidos, mas neste caso o utilizaremos para determinar a velocidade. A idéia fundamental para o desenvolvimento do sistema experimental é captar o sinal produzido pela passagem das partículas com o uso de dois feixes de laser e de dois sensores sensíveis à luz, os quais registraram as pulsações geradas. Os sensores devem ser montados de forma idêntica e separados por uma distancia conhecida. A Figura 4.4 é uma representação esquemática do princípio de medição do sistema experimental.

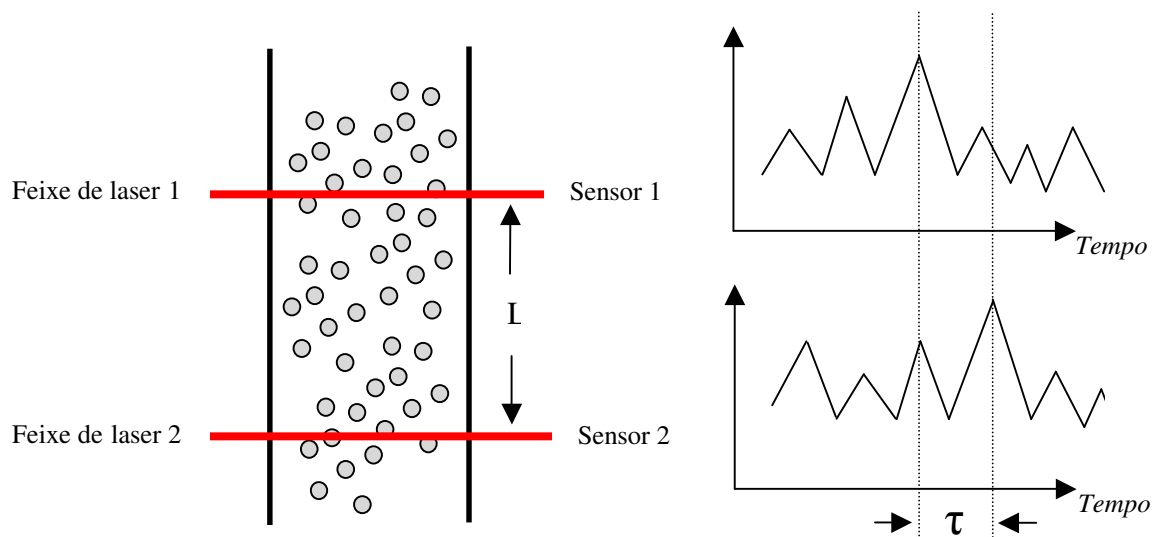


Figura 4.4 – Representação esquemática do sistema de medição

Com a distância ( $L$ ) entre os dois sensores, é necessária a determinação do tempo médio de transito ( $\tau$ ) em que uma pulsação é detectada pelos dois sensores, dessa forma é determinada a velocidade média das partículas. A equação (4.1) representa a relação da distancia entre os sensores e o tempo médio de transito.

$$u_p = \frac{L}{\tau} \quad (4.1)$$

onde:

$L$  : Separação entre os dois sensores [m]

$\tau$  : Tempo médio de transito [s]

A Figura 4.5 exhibe a configuração final do sistema de medição experimental desenvolvido para a determinação da velocidade média das partículas. O sistema esta composto de uma secção emissora conformado pelo diodo laser e o divisor de feixe e a secção receptora composta pelas fibras ópticas receptoras, os fototransistores juntamente com o circuito.

Todos os componentes foram colocados dentro de uma caixa para evitar a interferência da luz externa, além disso, o interior da caixa foi pintado de negro com a finalidade reduzir o espalhamento de qualquer luz refletida por parte das partículas. O ponto de medição está a uma distância aproximada de 85 cm considerando desde o ponto de injeção das partículas.

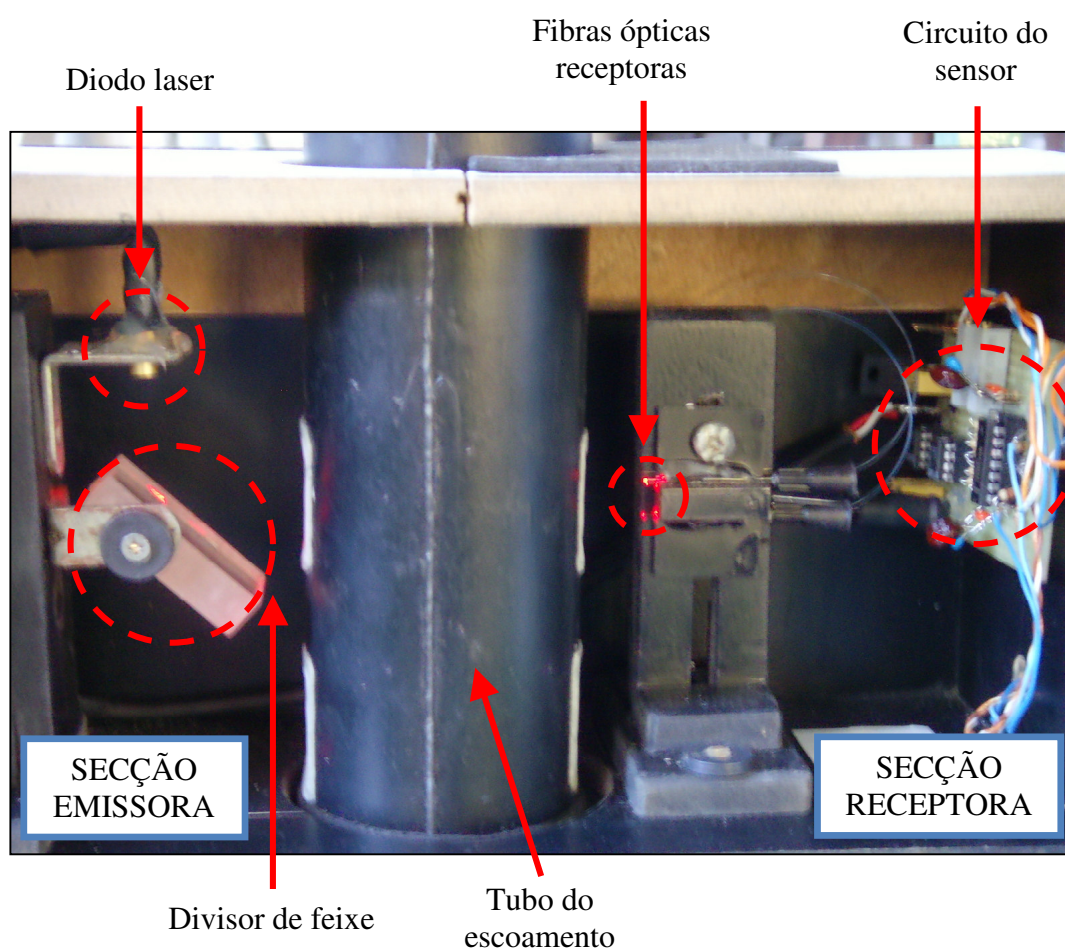


Figura 4.5 – Estrutura final do sistema de medição da velocidade média das partículas

A Figura 4.6 apresenta a distribuição dos componentes da secção emissora. A secção emissora de luz é composta por um diodo laser de aproximadamente 5 mW de potencia e um comprimento de onda de 660 nm. A utilização deste diodo laser deve-se à facilidade de aquisição e também porque se constitui em uma fonte de luz intensa, colimada e monocromática, sendo muitas vezes usado em diversas bancadas experimentais em estudos de óptica (CATELI e VIZENCI, 2002).

O diodo laser é colocado e fixado em um suporte de modo que o feixe permaneça em uma direção vertical descendente, nessa posição a luz emitida pelo diodo laser atravessa um divisor de feixe, produzindo dois feixes paralelos horizontais de mesma intensidade.

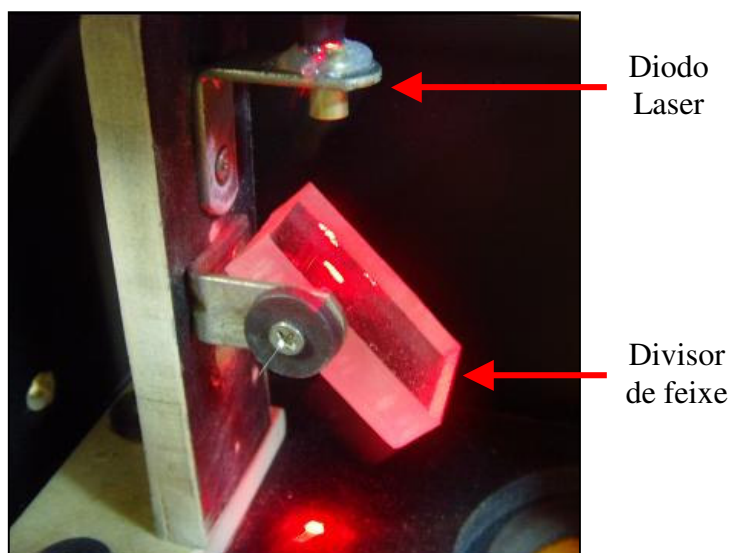


Figura 4.6 - Distribuição dos componentes da secção emissora.

Como divisor de feixe utilizou-se uma placa de acrílico de 4 cm de largura e 5 cm de comprimento e 10 mm de espessura, a distância entre os dois feixes horizontais produzidos depende da espessura da placa. Assim a Figura 4.7 apresenta a formação dos feixes produzidos pelo divisor, sendo a distância entre os feixes de 8,5 mm.

A finalidade de produzir dois feixes de laser da mesma fonte de luz é para padronizar e garantir que qualquer influência externa ou ruído sobre o laser diodo seja facilmente identificada e não seja confundida como uma pulsação por parte das partículas.

Segundo Cabrejos (1994), para a determinação experimental da velocidade média das partículas pelo cálculo do tempo médio de trânsito, a distância entre os sensores não deve ser muito grande, dessa forma é garantida a leitura de dois sinais idênticos.



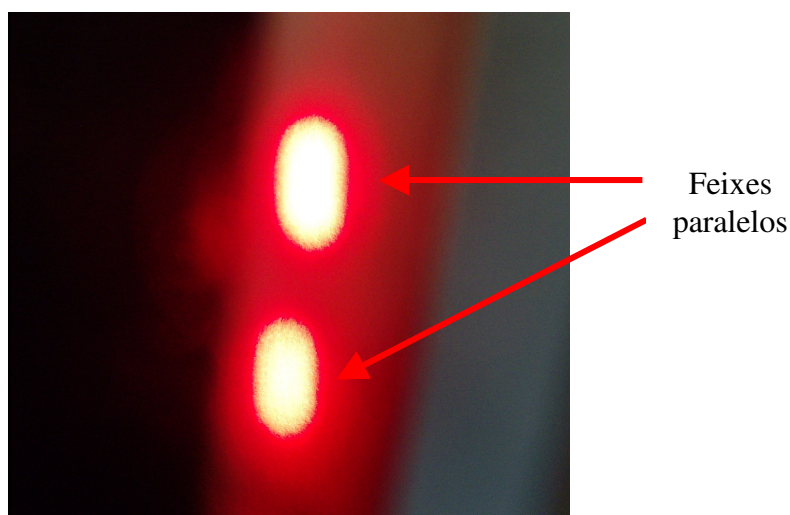


Figura 4.7 – Detalhe dos feixes produzidos pelo divisor.

Para a recepção da luz procedente do laser são empregadas duas fibras ópticas, colocadas em paralelo a uma distância equivalente à dos feixes. A função da fibra óptica é captar e transportar a luz emitida pelo laser a um fototransistor, o qual tem como função registrar qualquer variação na intensidade do feixe devido à passagem das partículas. As fibras ópticas utilizadas no trabalho são do tipo multi-modo de cor azul de 400  $\mu\text{m}$  diâmetro aproximado, que se caracteriza por não sofrer interferência da luz externa do ambiente que chega lateralmente e por ser imune à interferência estática devida às fontes de ruído, constituindo-se dessa forma no tipo de fibra ideal para o trabalho. Para que esta classe de fibra consiga captar e transmitir a luz é necessário que o feixe de laser atinja perfeitamente uma das pontas da fibra. O outro extremo da fibra é colocado em contato com os fototransistor sendo que eles foram encapsulados ou cobertos para evitar a detecção da luz externa devido à difração e o espalhamento.

A Figura 4.8 expõe as fibras ópticas montadas dentro de duas agulhas hipodérmicas de aço, posicionadas na direção dos feixes, em um suporte com a finalidade de assegurar a estabilidade dos receptores tendo uma separação de 8,5 mm.

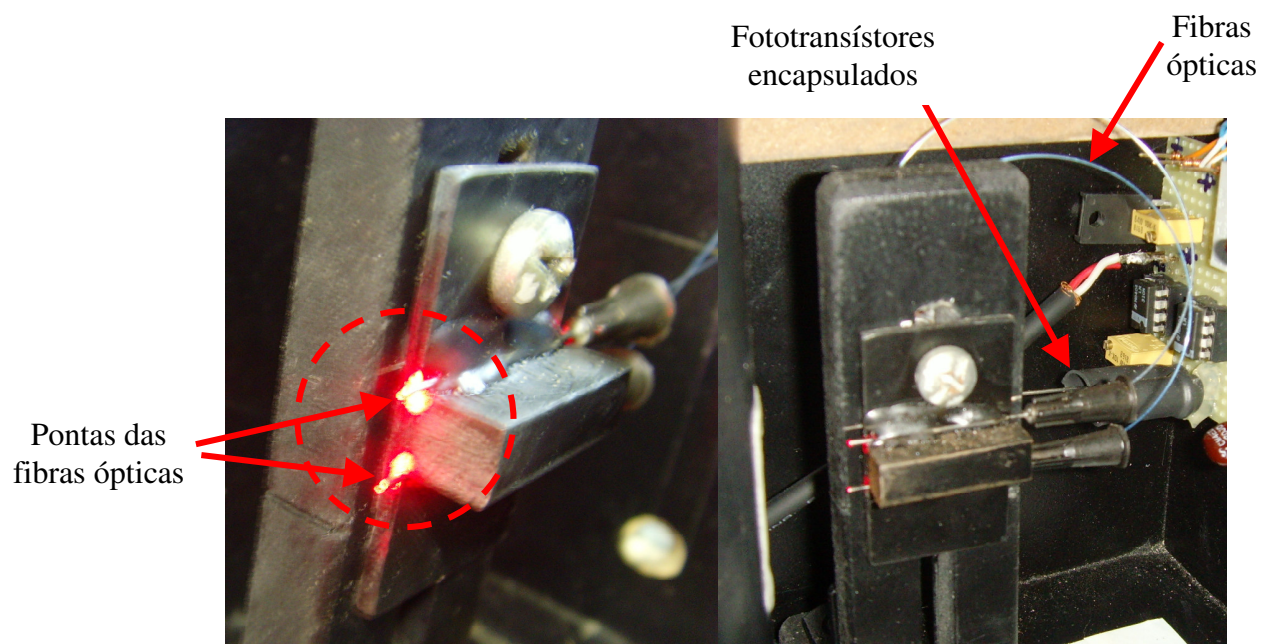


Figura 4.8 – Detalhe da fixação das fibras ópticas

Para ter uma idéia da fibra óptica a Figura 4.9 apresenta uma comparação entre as dimensões das partículas (diâmetro entre 150 – 300  $\mu\text{m}$ ) e as fibras ópticas receptoras (400  $\mu\text{m}$  aprox.).

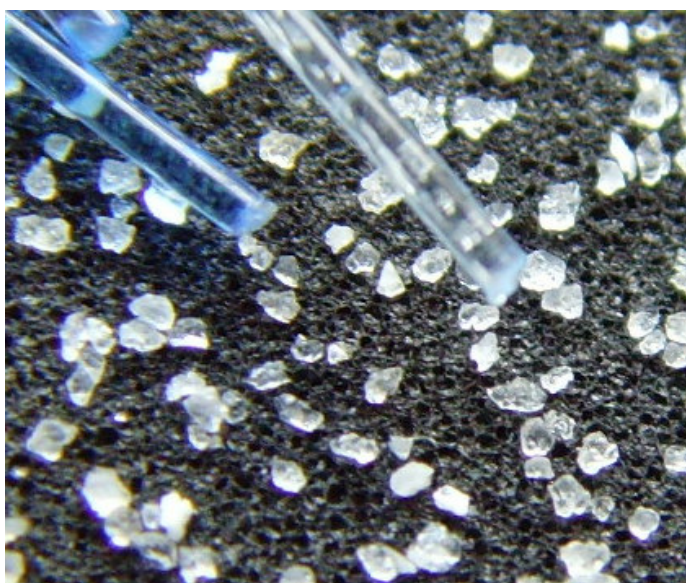


Figura 4.9 – Comparação de tamanhos entre as fibras ópticas e as partículas de areia.

Na Figura 4.10 exibe-se o sensor usado no trabalho, que é um fototransísttor ou fotodiodo receptor (TIL78) que se mostrou adequado devido a sua sensibilidade e velocidade de resposta a qualquer variação da luz (aproximadamente de 5 nanosegundos). Outros sensores de luz, tal como o LDR (*light dependent resistor*) tem uma velocidade de resposta de 0,5 segundos. A seguir apresentamos algumas características e especificações técnicas do fototransísttor são apresentadas abaixo:

- Comprimento de onda da luz para ganho máximo: 890 nm
- Corrente máxima causada pela luz 28,5  $\mu\text{A}$
- Corrente mínima (ausência de luz) igual a 60 nA
- Ângulo de aceitação de luz:  $\pm 60^\circ$



Figura 4.10 – Fototransísttor receptor (TIL78)

A Figura 4.11 apresenta o ponto do tubo de escoamento fizeram-se duas aberturas laterais paralelas ao eixo onde foram colocadas e fixadas as placas de vidro de 4 mm, mantendo a direção do emissor e o receptor. Dessa forma possibilitamos a passagem do feixe de laser através do centro da área transversal do escoamento.

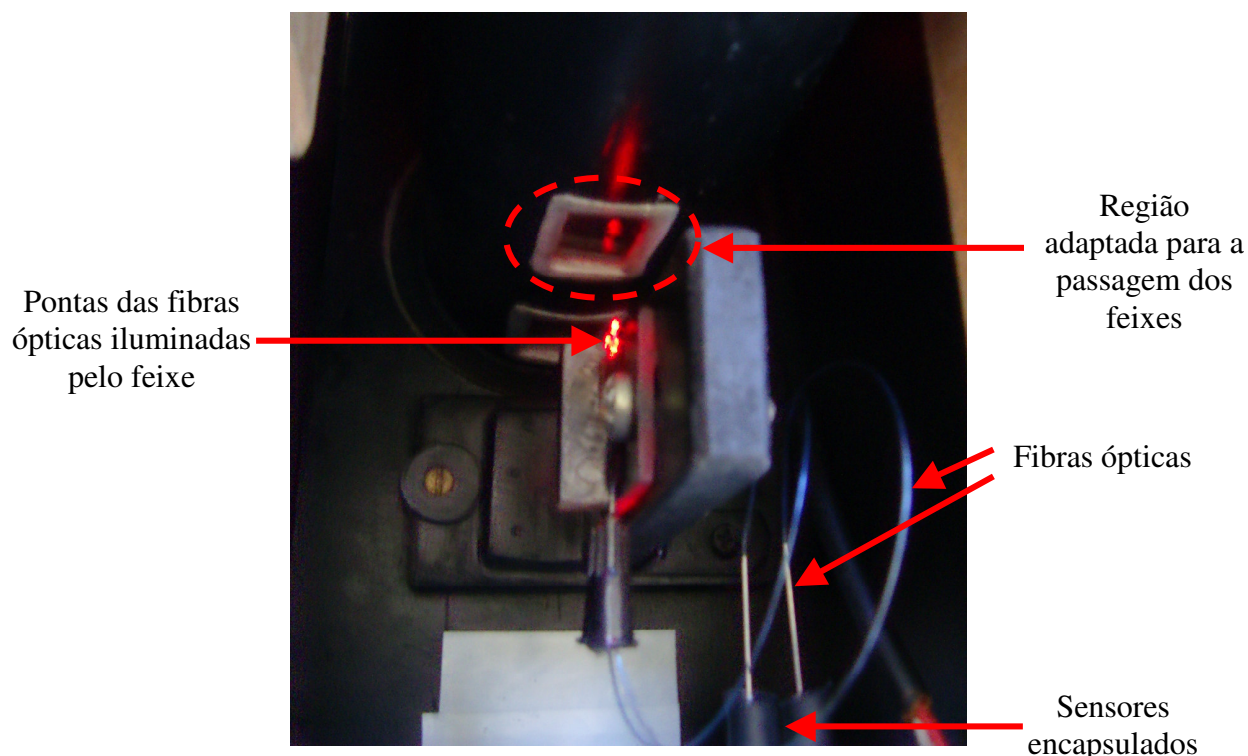


Figura 4.11 – Posicionamento dos receptores e as adaptações no tubo.

Para a aquisição, visualização e suporte à interpretação das medidas efetuadas, foi utilizado o LabVIEW (*Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench*), um software da National Instruments Corporation, que permite a simulação de equipamentos virtuais por meio da geração de um ambiente gráfico para o desenvolvimento de sistemas de aquisição de sinais, análise de medidas, e apresentação de dados.

O sistema utilizado para a aquisição tem uma velocidade de amostragem de 100 kS (kiloamostras) isto é 100 000 amostras por segundo. O tempo de aquisição de dados foi de 5 segundos.

A Figura 4.12 é uma representação esquemática da vista frontal das fibras ópticas atingidas pelos feixes de laser. Devido à sua reduzida área transversal muito próxima do tamanho das partículas, as fibras ópticas permitem realizar uma detecção seletiva de qualquer distúrbio produzido pela passagem da partícula, chegando a detectar a passagem individual de uma partícula.

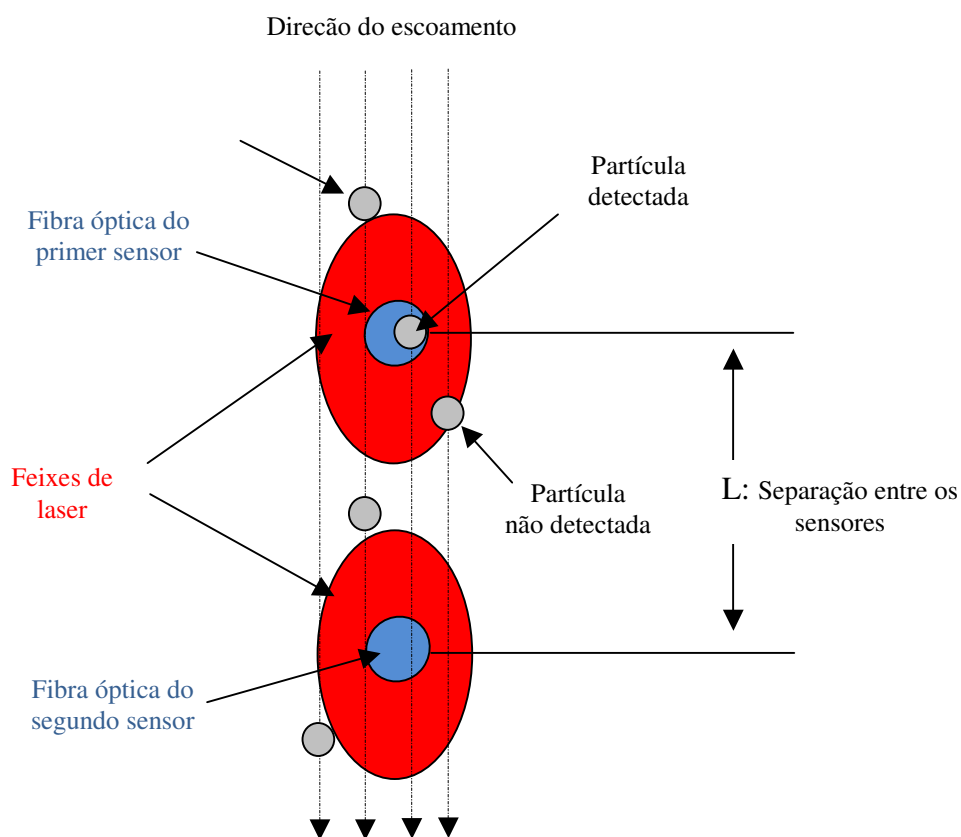


Figura 4.12 – Esquema da vista frontal das fibras ópticas atingidas pelos feixes de laser

A pequena distância entre os receptores foi determinada prevendo a inerente migração radial da partícula, dessa forma garante que a partícula atravesse os feixes e sejam captadas pelos sensores.

Lasa; Nova; Krol (2004) desenvolveram um trabalho experimental para determinar a velocidade média das partículas em um escoamento vertical descendente baseado em medições com sondas de fibras ópticas. A distância entre as sondas foi aproximadamente de 6,05 mm muito próxima da distância neste trabalho.

A Figura 4.13 apresenta as pulsações geradas pela passagem das partículas obtida de um teste preliminar, na qual se observam dois sinais com um padrão similar de comportamento, duas pulsações para cada sinal. Pode-se notar que o segundo sinal apresenta um deslocamento o qual pode ser relacionado com o tempo de trânsito médio da partícula.

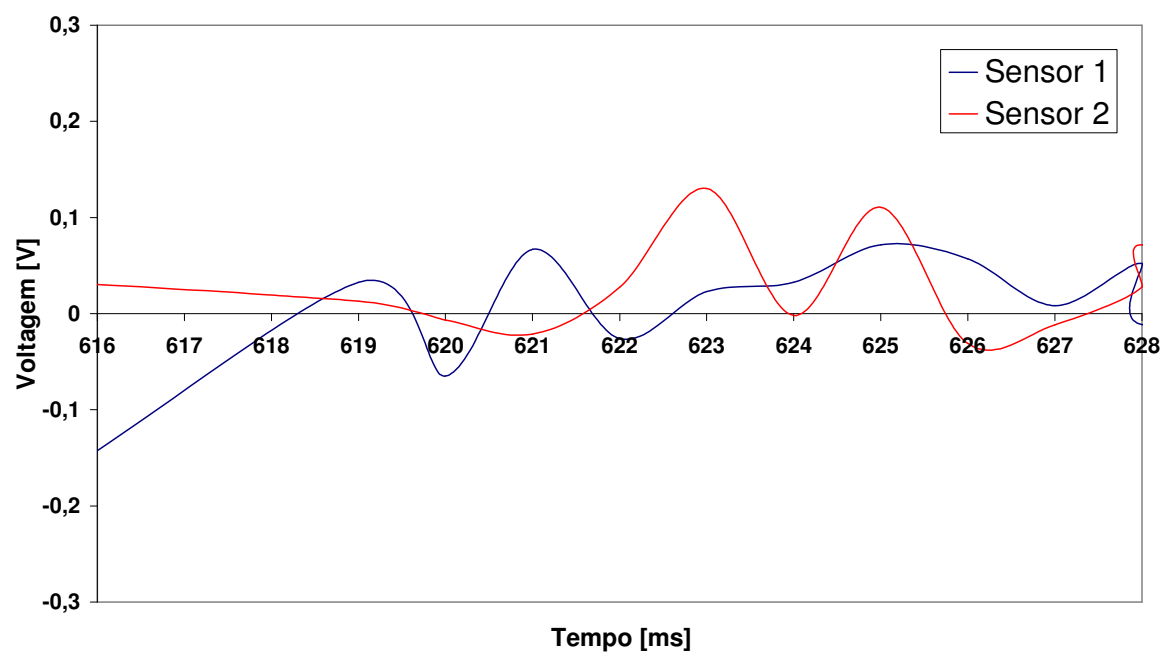


Figura 4.13 – Gráfico representativo de dois sinais com padrão similar

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os cálculos foram efetuados tomando as propriedades da areia selecionada para os experimentos, aspectos da geometria do aparelho e considerando as propriedades do ar em condições ambientais. Cabe assinalar que as partículas foram consideradas perfeitamente esféricas.

### 5.1 Modelo unidimensional assumindo um acoplamento unidirecional

A Figura 5.1 apresenta o comportamento dinâmico das partículas em cada ponto axial do escoamento assumindo o conceito de um acoplamento unidirecional, em diferentes velocidades superficiais do ar mantendo uma vazão de partículas constante (0,005 kg/s).

Pode-se notar que a velocidade média das partículas é muito sensível a qualquer modificação na velocidade superficial do gás. A uma baixa velocidade do ar é observado que existe um ponto de interseção (*triângulo vermelho*) entre o perfil axial da velocidade média das partículas e a velocidade superficial do gás. Neste ponto do escoamento a aceleração da partícula tem uma diminuição gradual, devido à redução da força de arraste do ar, já que as partículas atingiram uma velocidade equivalente à velocidade do ar. Após o ponto de interseção, a dinâmica das partículas prossegue devido à ação da força de gravidade, a qual atua constantemente na direção do escoamento fazendo com que as partículas continuem acelerando atingindo um valor superior à velocidade do ar até chegar a um estado de equilíbrio. Os resultados obtidos concordam com a descrição feita por Zhu, et al., (1995) que descrevem a fluidodinâmica de um escoamento vertical descendente.

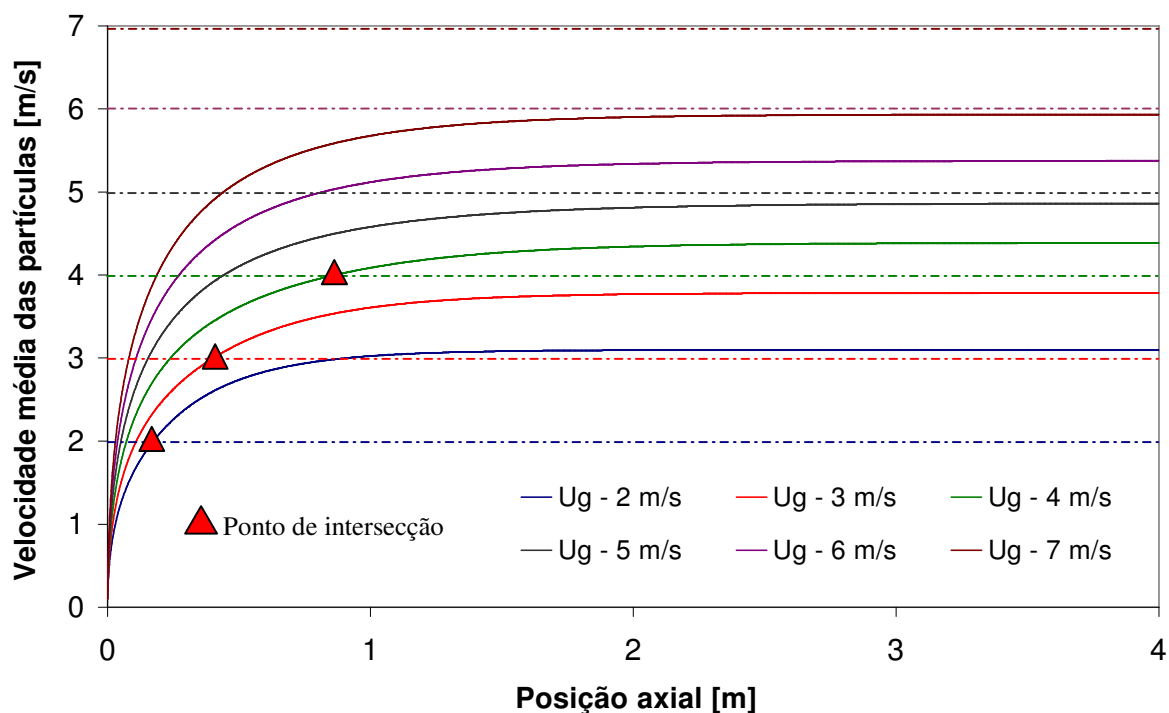


Figura 5.1 – Perfil axial da velocidade média das partículas a diferentes velocidades superficiais do ar.

Como dito anteriormente a determinação de uma variável do escoamento permite a determinação de outra, assim a Figura 5.2 apresenta a fração volumétrica de partículas sólidas em cada ponto axial do escoamento, calculada por intermédio da equação da continuidade da para as partículas sólidas, Equação (3.2).

Pode-se notar que esta variável diminui conforme se incrementa a velocidade superficial do ar, comparando as variações da fração volumétrica não são tão significativas comparando-as com a variação do valor da velocidade média pela muda na vazão do ar injetado.

Fisicamente a redução da fração volumétrica de partículas sólidas em cada caso representa uma diluição do escoamento devido ao aumento da vazão volumétrica do ar transportador no escoamento. Ao contrario um incremento da fração volumétrica pode acontecer quando se aumenta a vazão mássica de partículas sólidas mantendo uma vazão de ar constante.



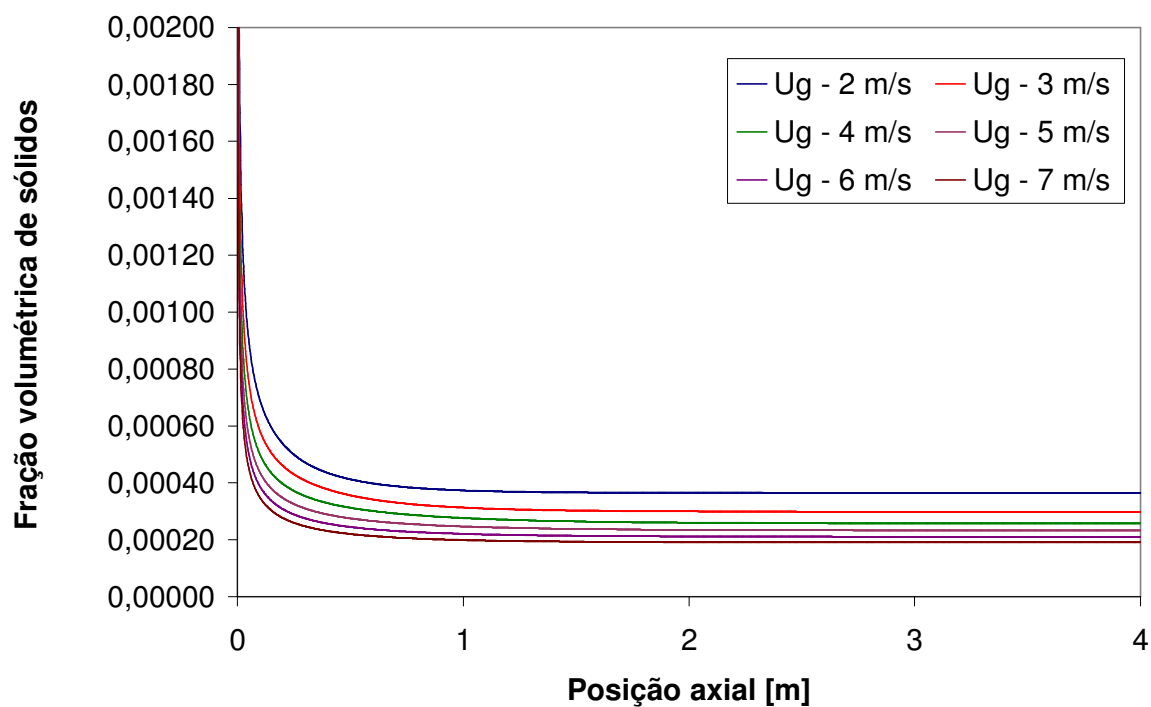


Figura 5.2 – Comportamento da fração volumétrica das partículas sólidas.

Com a finalidade de testar o modelo numérico mostra-se na Figura 5.3 o resultado de uma comparação dinâmica de duas partículas de características físicas diferentes. As partículas usadas foram catalisador de FCC de  $67\mu\text{m}$  de diâmetro e de massa específica de  $1500\text{ kg/m}^3$  do trabalho de Bolkan, et al., (2003) e a areia utilizada no trabalho, sendo  $225\mu\text{m}$  de diâmetro médio e de massa específica de  $2540\text{ kg/m}^3$ .

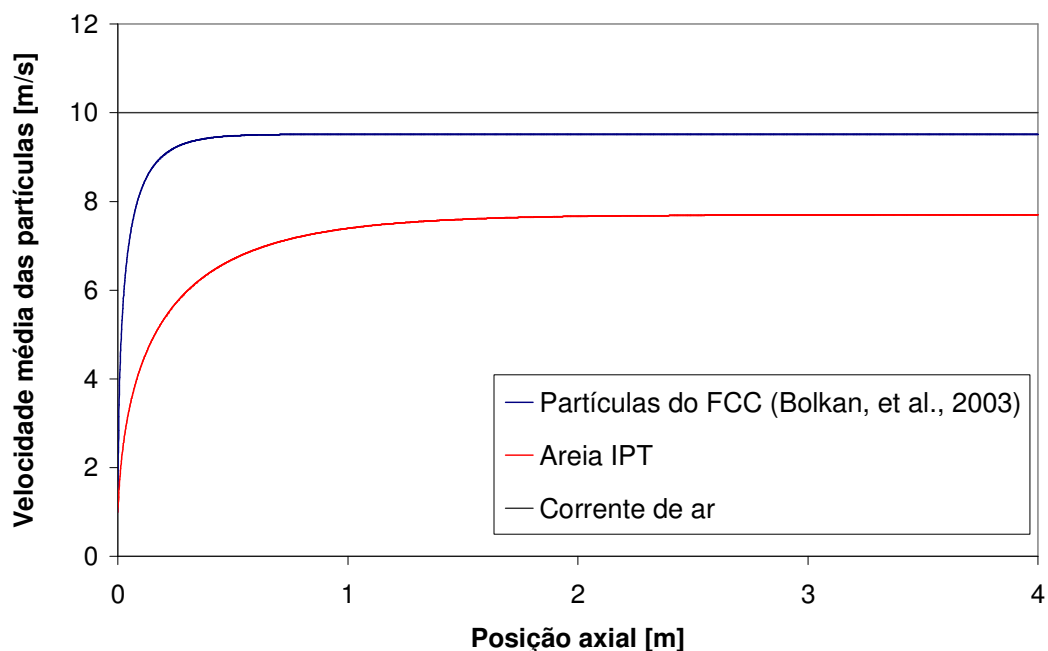


Figura 5.3 - Comparação do comportamento de duas partículas com características físicas diferentes.

Considerando uma velocidade de 10 m/s observamos que as partículas do FCC atingem rapidamente uma velocidade próxima à velocidade da corrente de ar. No caso da areia, o valor atingido é algo inferior. Além disso, nota-se um retardo um tempo adicional até atingir uma velocidade estável. Pode-se afirmar que as características físicas da partícula têm um grande impacto no comportamento dinâmico do escoamento.

Também foi analisada a influência da carga de sólidos sobre a velocidade média das partículas. Para isso desenvolveu-se um cálculo considerando uma velocidade superficial do ar constante no valor de 10 m/s. Da Figura 5.4 encontrou-se que a velocidade das partículas não tem uma variação considerável em relação à carga de sólidos. Essa leve redução pode-se relacionar com a força da gravidade já que o efeito dela é igual em todos os corpos. Além disso, fisicamente a redução pode ser atribuída a um aumento no atrito partícula-parede.

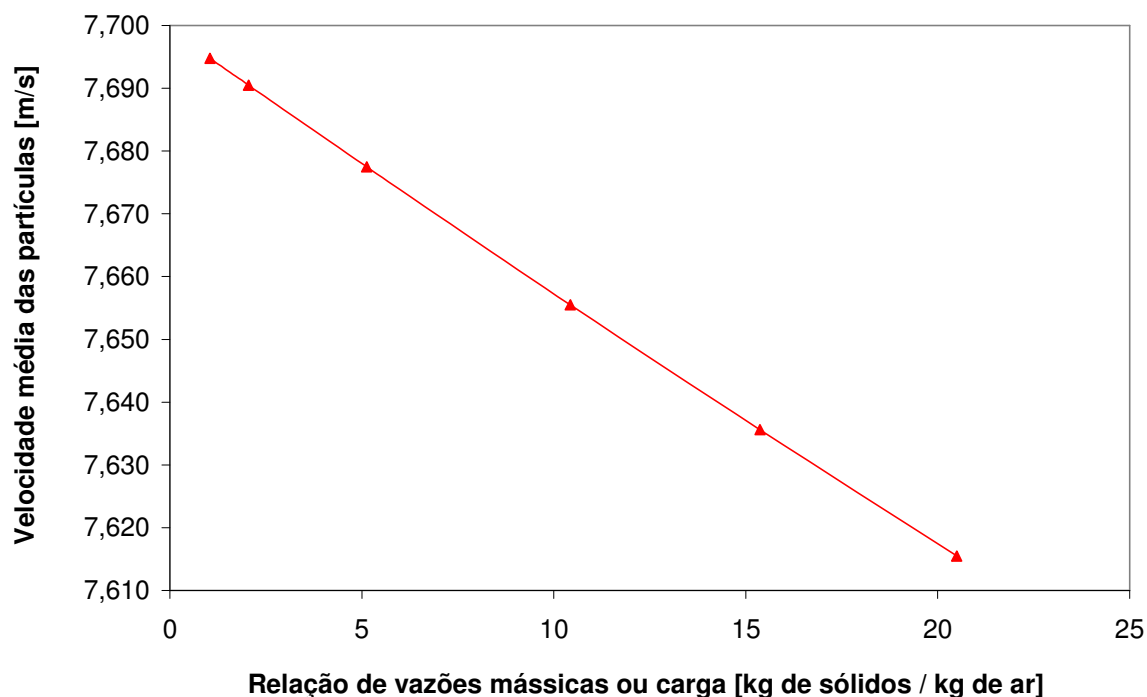


Figura 5.4 – Influencia da carga sobre a velocidade média das partículas.

Os resultados apresentados são provenientes da resolução numérica da equação (3.28) para o modelo com acoplamento unidirecional pelo método Runge-Kutta-Merson. O tamanho de passo para a solução numérica das equações foi de 0,001 e então a resolução numérica desenvolvida representa a dinâmica das partículas a cada milímetro. A convergência do método numérico utilizado esta na ordem de ( $10^{-11}$ ), garantindo o cálculo. A resolução dinâmica foi montada em uma planilha do MICROSOFT-EXCEL, o que facilita a troca de variáveis e permite visualização do cálculo. O único inconveniente é o tamanho do arquivo, muito pesado devido ao número de iterações, para se ter uma idéia disto são realizadas 20000 iterações para cada cálculo.

Na resolução numérica foi notado que no ponto de interseção entre o perfil axial da velocidade média das partículas e a velocidade superficial do ar a força de arraste não tem nenhuma influência na dinâmica das partículas, porque as partículas em média atingiram uma velocidade equivalente à velocidade do ar. Neste ponto a expressão para a força de arraste tem um valor numérico equivalente a zero.

## 5.2 Comentários dos testes experimentais

Para a determinação experimental da velocidade média das partículas no escoamento bifásico gás-sólido, uma série de testes foram desenvolvidos em uma faixa de velocidade superficial do ar entre 2 a 5 m/s e uma alimentação constante de partículas de areia aproximadamente de 0,005 kg/s.

Mantendo uma baixa velocidade superficial do ar se produz uma redução dos efeitos da turbulência da corrente do ar sobre a dinâmica das partículas, dessa forma, reduz-se alguma influência ou dificuldade no processo de medição (LASA; NOVA; KROL, 2004).

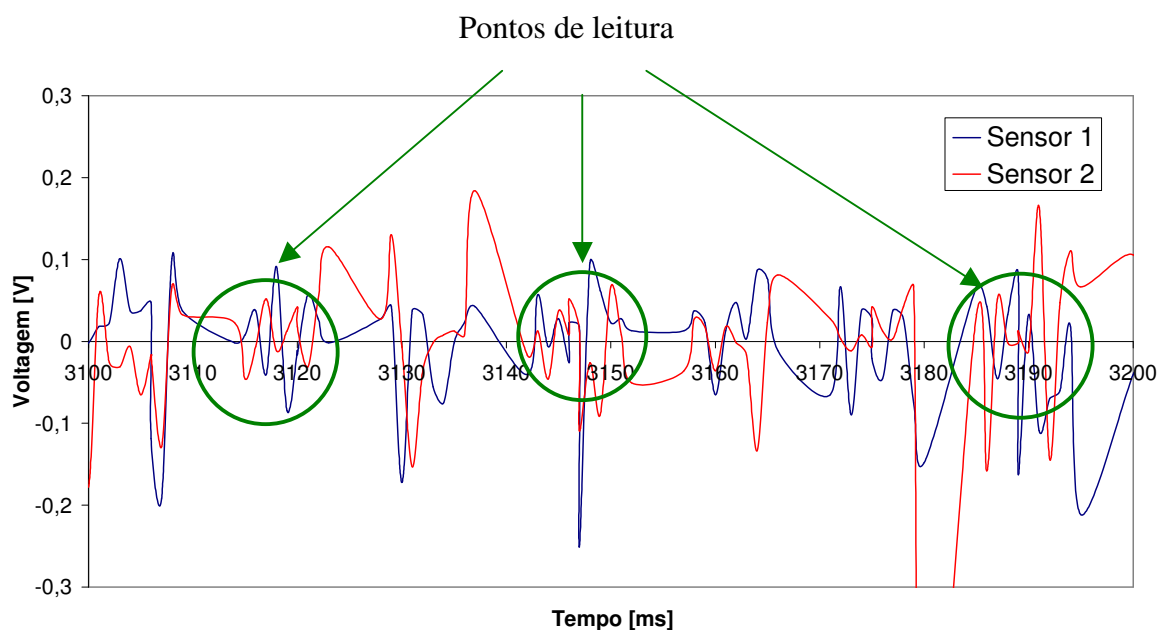


Figura 5.5 – Sinal obtido pela passagem das partículas nos dois sensores.

A Figura 5.5 apresenta dois espectros gerados pela passagem das partículas através dos feixes de laser. Os espectros de cor azul e vermelha indicam as perturbações no sensor (1) e no sensor (2) respectivamente. Estas perturbações exibem um padrão muito aleatório, característico da medição de partículas no escoamento bifásico gás-sólido (CABREJOS, 1994; LASA; NOVA; KROL, 2004).

Os círculos da cor verde distinguem os pontos de leitura e comparação dos sinais, utilizados para determinação do tempo médio de trânsito. O sistema de medição não efetua uma medição da velocidade individual e sim oferece um valor integral, pois o feixe atravessa toda a área do escoamento. Assim o sistema experimental desenvolvido pode ser classificado como uma técnica integral de medição da velocidade.

A Figura 5.6 é um esquema representativo da distribuição das partículas de areia na área transversal da tubulação, na qual podem escoar dispersas ou formando grupos. O agrupamento de partículas é um fenômeno característico do escoamento bifásico gás-sólido, que pode ser atribuído à distribuição de tamanhos própria das partículas e como resultado da instabilidade produzida pela diferença de velocidades entre o ar e as partículas. Quando esses grupos de partículas atravessam os feixes de laser geralmente provocam grandes picos de diferente magnitude no espectro dos sinais.

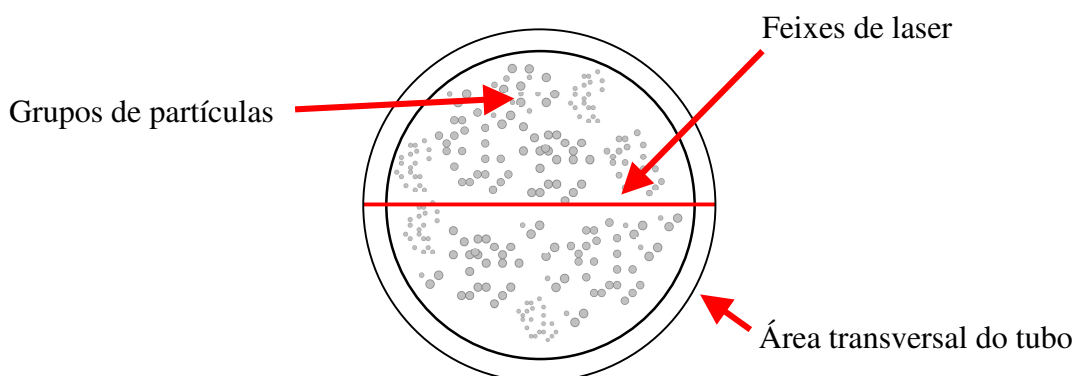


Figura 5.6 – Esquema representativo da distribuição da areia na área transversal da tubulação.

A Figura 5.7 é uma ampliação dos pontos de leitura da Figura 5.5, na qual exibe o padrão do sinal no ponto de leitura, claramente pode-se observar que o padrão do sinal detectado no primeiro sensor (linha azul) tem uma similitude com o segundo (linha vermelha), mas sempre com um leve deslocamento. Nesta situação, pode ser estimado o tempo de transito médio de um grupo de partículas identificando e relacionando os picos dos sinais.

Na Figura 5.7 os picos marcados com círculos da cor verde identificam as duas pulsações geradas quando as partículas atravessam os dois feixes, do mesmo modo que os picos marcados com círculos de cor laranja, o deslocamento das pulsações permite efetuar o cálculo do tempo médio de trânsito entre os dois pulsos.

Alem disso, os sinais apresentam pulsações de diferente magnitude, isso pode ser a diversos fatores tais como características da fibra, a instalação e fixação dos componentes, vibração produzida pela alimentação de ar e a distância entre os sensores.

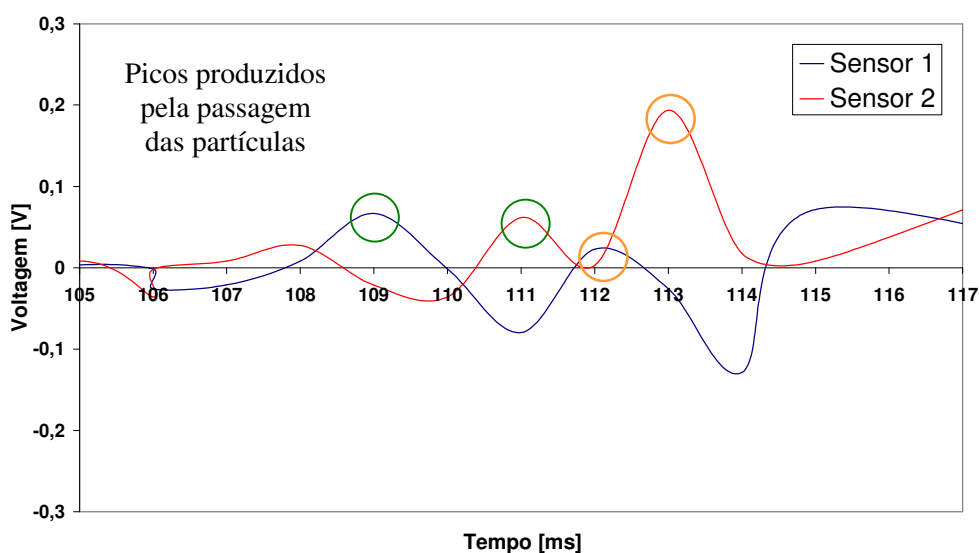


Figura 5.7 – Deslocamento do sinal nos dois sensores durante os testes.

Como dito, o tempo de aquisição de dados foi de 5 segundos, para o cálculo do tempo médio de trânsito foi realizada uma análise no intervalo de 1 segundo, equivalente a 1000 amostras ou pulsações.

Em baixas velocidades superficiais do ar, aproximadamente entre 2 e 2,8 m/s, facilmente podem ser localizadas as zonas na qual pode ser efetuada a leitura dos sinais, mas quando a velocidade superficial do ar é aumentada até uma faixa entre 3 e 4 m/s, ocorre uma série de problemas com o sistema de aquisição de dados.

As partículas começam a escoar mais rápido fazendo que o sistema não consiga registrar essas variações já que a frequência dos eventos é superior a de aquisição. O registro de dados, neste caso, é um sinal incoerente e difícil de analisar.

Esse problema pode ser atribuído à velocidade de aquisição do sistema. Isto pode ser corroborado pelo trabalho de Liu; Grace; Bi, (2003) que recomenda a frequência mínima de amostragem de 171 kHz como necessária para um erro na medição de aproximadamente 15%.

Como as características do sistema de aquisição de dados é de 100 kHz, conclui-se que ele é inadequado para vazões altas de ar. Por último, a Figura 5.8 apresenta uma comparação entre os resultados teóricos e experimentais obtidos no trabalho para uma velocidade superficial do ar aproximadamente de 2 m/s e uma alimentação constante de partículas de areia equivalente a 0,005 kg/s.

A resolução do modelo unidimensional permitiu traçar o perfil axial da velocidade média das partículas por unidade de comprimento. Conhecendo a distância entre o ponto de inserção das partículas de areia até o ponto de medição, 85 cm, da Figura 5.8 pode-se identificar o ponto axial onde o valor teórico da velocidade média das partículas é equivalente a 3.0 m/s.

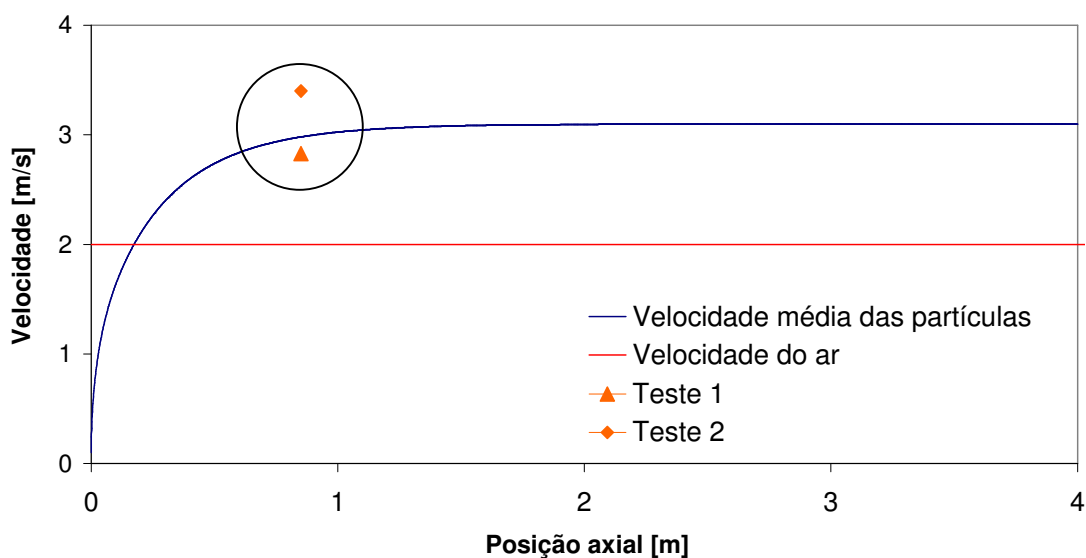


Figura 5.8 – Comparação dos dados teóricos e experimentais.

Nas mesmas condições de velocidade superficial de ar e de alimentação de partículas de areia, dois testes foram realizados. Da análise dos sinais obtidos resultaram os valores da velocidade média das partículas equivalente a 2.83 e 3.4 m/s estão muito próximos do valor teórico calculado.

A diferença entre os valores experimentais pode estar relacionada a diversos fatores, por exemplo, conforme os testes são desenvolvidos a corrente de ar proveniente do soprador é aquecida chegando a ter valores entre 30 e 50 °C, isso tem uma influência no valor da massa específica do ar. A forma da partícula não foi considerada. Outro fator é a umidade relativa do ambiente que promove a formação de grupos de partículas.

Ainda que limitados, os resultados teóricos e experimentais demonstram a capacidade do modelo e do sistema de medição experimental para baixas velocidades superficiais do ar.



## 6 CONCLUSÕES

- A análise e a compreensão do comportamento físico do escoamento bifásico gás-sólido é de vital importância na otimização de processos, na segurança e no projeto dos equipamentos envolvidos com esta classe de escoamento. Uma forma muito útil de compreender o comportamento é determinando a velocidade média das partículas.
- O modelo é unidimensional apesar de ser básico é útil para estimar a velocidade média das partículas em estudos preliminares do escoamento bifásico gás-sólido vertical.
- As correlações empíricas para o coeficiente de arraste usado na modelagem matemática têm uma limitação, quando a velocidade média das partículas atinge o valor da velocidade do gás. Com a finalidade de oferecer uma estabilidade numérica da correlação de arraste, a inclusão da regra de sinais possibilitou a resolução numérica dos modelos matemáticos. Dessa forma obtiveram-se resultados coerentes com a física do escoamento. Cabe repetir que essa regra somente é aplicável para escoamentos verticais descendentes.
- Com os resultados obtidos do modelo matemático chegou-se à conclusão que o limite ou restrição mais importante para a modelagem do escoamento gás-sólido é que cada material tem a sua própria característica de escoamento, e também a necessidade do uso de correlações empíricas para representar as forças atuantes no escoamento.
- O ponto de medição para a velocidade média das partículas está a 85 cm do ponto de inserção das partículas, portanto a diferença entre os resultados experimentais deve-se a que o ponto de medição encontra-se em uma zona de aceleração na qual ainda os efeitos da corrente de ar têm uma influência constante sobre as partículas de areia.

- A precisão da leitura do sistema de medição experimental pode ser melhorada diminuindo a distância entre os feixes de laser. Dessa forma pode-se reduzir as variações na medição devido à migração radial das partículas quando a velocidade do ar aumenta, de modo que as partículas atravessem os dois feixes de laser.
- Para desenvolver a instrumentação é necessário que o sistema de aquisição de dados possua uma taxa de aquisição superior a 150 kS (150 000 amostras por segundo).
- O aparelho montado para os testes experimentais mostrou-se muito didático para aulas de escoamento bifásico gás-sólido. Embora o sistema de medição experimental da velocidade média das partículas esteja concluído, não deixa de ser um protótipo, portanto poderá estar sujeito a aperfeiçoamento para um melhor desempenho. Além disso este trabalho contribui com o objetivo de melhorar as condições do Laboratório de Mecânica dos Flúidos da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá – UNESP.

**Sugestões para trabalhos futuros:**

1. Desenvolver uma modelagem com um acoplamento bidirecional para o escoamento, visando a influencia das partículas sobre o campo de velocidades do ar.
2. Avaliar experimentalmente a influência do diâmetro, a forma e a massa específica sobre o valor da velocidade média das partículas em escoamentos descendentes.
3. Projetar uma bancada experimental com uma tubulação equivalente a 4 metros com a finalidade de analisar o perfil de velocidade axial das partículas em diversos pontos do escoamento
4. Avaliar o desempenho do sistema de medição experimental, para um escoamento vertical ascendente.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BALASUBRAMANIAN, N.; SARAVANAN, B.; SRINIVASAKANNAN, C.;  
Drying Kinetics in a vertical gas-solid systems. **Chemical Engineering Technology**, v. 30, p 176-183. 2007.
2. BECK, M. Correlation in instruments: cross correlation flow meters.  
**Instrument Science and Technology**, v. 14, p.7-10. 1981.
3. BERRUTI, F.; PUGSLEY, T. S.; BOLKAN-KENNY, Y. G. Computer  
Simulation of the Performance of Fluid Catalytic Cracking Risers and Downers.  
**Ind. Eng. Chem. Res** v. 33, p. 3043-3052. 1994
4. BOLSCHI, R. Injeção de partículas de fcc usando injetores gás-sólido tipo  
venturi. Faculdade de Engenharia Mecânica – Universidade de Campinas –  
UNICAMP. Tese (Mestrado em Engenharia Química), UNICAMP 2006.
5. BRENNEN, C. Fundamentals of Multiphase Flows. California Institute of  
Technology. Pasadena, California. Cambridge University Press. 2005.
6. CABREJOS, F. Experimental investigation on the fully developed pipe flow of  
dilute gas-solid suspensions. Faculty Mechanical Engineering. University of  
Pittsburgh. Thesis (Doctor of Philosophy) 1994.
7. CAPES, C. E.; NAKAMURA, K. Vertical Pneumatic Conveying: An  
experimental study with particles in the intermediate and turbulent flow  
regimes. **The Canadian Journal of Chemical Engineering**, v. 51, p. 31-38.  
1973.

8. CARTAXO, S. J. M. Simulação orientada a objeto do transporte. Faculdade de Engenharia Química – Universidade de Campinas – UNICAMP. Tese (Doutorado em Engenharia Química), UNICAMP 2000.
9. CATELI, F.; VIZENCI, S. Laboratório caseiro: transformando um laser de diodo para experimentos de óptica física. Depto de Física e Química Universidade de Caxias do Sul \_Caxias do Sul RS, Cad. Brás. Ens. Fís., v. 19, n.3: p.393-406, dez. 2002.
10. CHAOUKI, J.; GUY, C.; MABROUK, R. Effective drag coefficient investigation in the acceleration zone of an upward gas-solid flow”. **Chemical Engineering Science**, v.62, p318-327. 2007.
11. CROWE, C. Multiphase flow handbook. Published by CRC Press. 2006.
12. CROWE, C.; SOMMERFELD, M.; TSUJI, Y. Multiphase flows with droplets and particles handbook. Published by CRC Press. 1998.
13. CURTIS, S. J.; WACHEM B. V. Modeling particle-laden flows: a research outlook. **AIChE Journal**, v. 50, p 2638-2645. 2004.
14. DECKER K. R. Modelagem e Simulação Tridimensional Transiente do Escoamento Gás-Sólido. Faculdade de Engenharia Química – Universidade de Campinas – UNICAMP. Tese (Mestrado em Engenharia Química), UNICAMP 2003.
15. DESAI, N. Investigations in gas-solid multiphase flows. Faculty of North Carolina State University. Tese (Phd in Mechanical Engineering). Carolina. 120 p. 2003.

16. DZIDO, G.; PALICA, M.; RACZEK, J. Investigations of the acceleration region in the vertical pneumatic conveying. **Powder Technology**, v. 127, p. 99-106. 2002.
17. FAN, LIANG-SHIH; ZHU, CHAO “Principles of Gas Solid Flows” Cambridge Séries in Chemical Engineering; 1998; Páginas (244-258). Disponível: <<http://books.google.com/books?id=Ly8vbaPPtesC&printsec=frontcover&dq=principles+gas+solid+flows&sig=ACfU3U0VNjh-NPJHOIXSz1G4hWv5G-yABA#PPA217,M1>>, Acesso: 12 de Julho de 2008.
18. FUCHS, A.; ZANGL, H.; WYPYCH, P. Signal modeling and algorithms for parameter estimation in pneumatic conveying. **Powder Technology**, v. 173, p. 126-139. 2006.
19. GIBILARO, L. Fluidization-Dynamics. University of L’Aquila. Italy. 2001.
20. GIDASPOW, D.; ARASTOPOUR, H. Vertical pneumatic conveying using four hydrodynamics models. **Ind. Eng. Chem. Fundamen.** v. 18, p. 123-130. 1979.
21. GRBAVČIĆ, Ž.; GARIĆ, R.; JOVANOVIĆ, S.; ROŽIĆ, L. Hydrodynamic modeling of vertical accelerating gas – solid flow. **Powder Technology**, v. 92, p. 155-161. 1997.
22. HERBERT, P. M. Hydrodynamics study of a downflow circulating fluidized bed. Faculty of Graduate Studies-The University of Western Ontario. Thesis (Doctor of Philosophy). 1997.
23. HUDSON, J.; HARRIS, D. A high-resolution scheme for eulerian gas-solid two-phase isentropic flow. **Journal of Computational Physics**, v. 216, p. 494-525. 2006.

24. HUI, L.; TOMITA, Y. Particle velocity and concentration characteristics in a horizontal dilute swirling flow pneumatic conveying. **Powder Technology**, v. 107, p. 144-152. 2000.
25. ISHI, M.; HIBIKI, T. Thermo-Fluid Dynamics Of Two-Phase Flow. Springer. USA. 2006.
26. JIN, Y.; WEI, F. Multi-Phase Chemical Reaction Engineering and Technology (Part 1). 1970. Disponível em: <<http://books.google.com/books?id=eqpn0aRb728C&pg=PA310&dq=downer,+riser&lr>> Acesso: 10 de Dezembro de 2008.
27. KLEINSTREUER, C. **Two-Phase Flow, Theory and Applications**. Published by Taylor & Francis. USA. 2003., Páginas (69-124). Disponível: <[http://books.google.com/books?id=QASkr55dXMEC&pg=PP1&dq=clement+kleinstreuer&sig=ACfU3U2-8M\\_Qa7-z-JXrJVbhBltdCABmfg](http://books.google.com/books?id=QASkr55dXMEC&pg=PP1&dq=clement+kleinstreuer&sig=ACfU3U2-8M_Qa7-z-JXrJVbhBltdCABmfg)> Acesso: 22 de Março de 2008.
28. KLINZING, G. E. Gas-Solid Transport. McGraw-Hill Book Company. USA. 1989.
29. KREITH, F. "Mechanics Engineering Handbook "; CRC Press. 1999.
30. KUIPERS, J. A .M.; NIEUWLAND, J. J.; DELNOIJ, E. VAN SWAAIJ, W. P. M. An engineering model for dilute riser flow. **Powder Technology**, v. 90, p. 115-123. 1997.
31. LASA, H.; NOVA, S.; KROL, S.; Particle velocity and particle clustering in down-flow reactors. **Powder Technology**, v.148, p. 172-185. 2004.

32. LECH, M. Mass flow rate measurement in vertical pneumatic conveying of solid. **Powder Technology**, v. 114, p. 55-58. 2001.
33. LI, H.; TOMITA, Y. Particle velocity and concentration characteristics in a horizontal dilute swirling flow pneumatic conveying. **Powder Technology**, v.107, p. 144-152. 2000.
34. LIU, J.; GRACE, J.; BI, X.; Novel multifunctional optical-fiber probe: I. Development and validation. **AIChE Journal**, v. 49, p. 1405-1420.
35. LIU, C.; PAN, Y. Numerical Solutions for One-Dimensional, Gas-Solid, Two-Phase Flows of Sparse Phase in Vertical Circular Pipe. Marine Engineering Department, Dalian Marine University, presented no Multiphase Flow and Heat Transfer: Second International Symposium. 1989.
36. MABROUK, R.; CHAOUKI, J.; GUY, C. Wall surface effects on particle-wall friction factor in upward gas-solid flows. **Powder Technology**, v. 186, p. 80-88. 2008.
37. MALLO, T. Heat transfer rate prediction in dilute and dense gas-solid flow Faculty Chemical Engineering. Carnegie Mellon University. Thesis (Doctor of Philosophy) 1997.
38. OLSZOWSKI, T.; POSPOLITA, J. Experimental assessment of application of gravimetric measurements for pneumatic conveying in horizontal pipelines, **Engineering and Processing**, v. 47, p. 649-654. 2008.
39. PAIXÃO, A. Modelagem do transporte pneumático vertical em fase diluída: aplicações em transferência de calor e secagem. Faculdade de Engenharia Química – Universidade de Campinas – UNICAMP. Tese (Doutorado em Engenharia Química), UNICAMP 1995.



40. PATANKAR, N.; JOSEPH, D. Modeling and numerical simulation of particulate flows by the Eulerian-Lagrangian approach. **International Journal of Multiphase Flow**, v. 27, p. 1659-1684. 2001.
41. REESE, J.; ZHANG, Y., The drag force in two-fluid models of gas-solids flows, **Chemical Engineering Science**, v. 58, p. 1641-1644, 2003.
42. STADTKE, H. Gas dynamic Aspects of Two-Phase Flow – Hyperbolicity, Wave Propagation Phenomena, and Related Numerical Methods. Published by Wiley-VCH. USA. 2006.
43. SOO, S. Instrumentation for Fluid-Particle Flow. Published by William Andrew INC. 1999.
44. TAGHIPOUR, F.; ELLIS, N.; WONG, C. Experimental and computational study of gas-solid fluidized bed hydrodynamics. **Chemical Engineering Science**, v. 60. p. 6857-6867. 2005.
45. ZHONGHUA, W., MUJUMDAR, A. CFD modeling of the gas-particle flow behavior in spouted beds. **Powder Technology**, v. 183 p. 260-272. 2008.
46. ZHU, J., YU, Z., JIN, Y., GRACE, J., ISSANGYA, A. Cocurrent Downflow circulating fluidized bed (downer) reactors – A state of the art review. **The Canadian Journal of Chemical Engineering**, v. 73 p.662-667. 1995.
47. ZHU, J. Friction between gas–solid flow and circulating fluidized bed downer wall. **Powder Technology**, v.142 p. 318-326, 2008.

## ANEXO

Algoritmo para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias pelo método  
Runge-Kutta-Merson

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{3}h; y_i + \frac{1}{3}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{3}h; y_i + \frac{1}{6}k_1h - \frac{3}{6}k_2h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h; y_i + \frac{1}{8}k_1h - \frac{3}{8}k_2h\right)$$

$$k_5 = f\left(x_i + h; y_i + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3h + 2k_4h\right)$$

$$y_{i+1}^1 = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_2 + 2k_4\right)h$$

$$y_{i+1}^2 = y_i + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5\right)h$$

onde:

$h$ : Tamanho de passagem definido para as iterações.

$R = 0,2 \left( y_{i+1}^1 - y_{i+1}^2 \right)$ , serve como uma estimativa do erro de truncamento ( $R$ ) dessa forma permite a correção automática do tamanho de passo usado na integração.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)