



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Frações Contínuas que correspondem a séries de
potências em dois pontos

Manuella Aparecida Felix de Lima

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, São Paulo, Brasil
Telefone: (17) 3221-2444. Fax: (17) 3221-2445

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Frações Contínuas que correspondem a séries de potências
em dois pontos**

Manuella Aparecida Felix de Lima

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual
Paulista "Julio de Mesquita Filho", Campus de São
José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do
título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Eliana Xavier Linhares de
Andrade.

São José do Rio Preto

2010

Lima, Manuella Aparecida Felix de.

Frações Contínuas que correspondem a séries de potências em dois pontos/ Manuella Aparecida Felix de Lima. São José do Rio Preto: [s.n.], 2010.

71 f.: il. ; 30 cm.

Orientadora: Eliana Xavier Linhares de Andrade.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Polinômios ortogonais. 2. Frações contínuas. 3. Séries de potências. 4. Padé, Aproximante de. I. Andrade, Eliana Xavier Linhares de II. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas III. Título.

CDU - 517.587

MANUELLA APARECIDA FELIX DE LIMA

Frações Contínuas que correspondem a séries de potências em dois
pontos

Dissertação apresentada para obtenção do título de
Mestre em Matemática, área de Análise Aplicada,
junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas da Universidade Estadual Paulista "Julio
de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio
Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Eliana Xavier Linhares de Andrade
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Prof^a. Dr^a. Vanessa Avansini Botta Pirani
Professor Assistente Doutor
UNESP - Presidente Prudente

Prof^a. Dr^a. Cleonice Fátima Bracciali
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 19 de Fevereiro de 2010.

Aos meus pais, Helena e Laerci.

Dedico.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que me deu a vida e a oportunidade de conhecer pessoas maravilhosas com as quais muito aprendi.

Um agradecimento mais que especial à Prof^a. Dr^a. Eliana Xavier Linhares de Andrade, pelos incontáveis esforços, carinho e apoio na orientação deste trabalho.

Aos professores de graduação e pós-graduação, em especial à Prof^a. Dr^a. Cleonice Fátima Bracciali e ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, e à Prof^a. Dr^a. Vanessa Avansini Botta Pirani, membro da banca, pelo auxílio e contribuição intelectual.

À minha família, que sempre me apoiou e torceu por mim.

Ao Leandro, pela compreensão, carinho e apoio principalmente nos momentos difíceis.

Ao Coral Ibilce, em especial à querida regente Zuleica e aos amigos coralistas Alexandre, Ana Cláudia, Ana Paula, Andresa, Antoniana, Carolina, Fabíola, Fernanda, Guilherme, Lilian, Marcos, Nara, Paulo, Renato, Rodrigo, Sara, Tati, Zelão e a todos os outros coralistas e ex-coralistas que, mesmo não tendo seus nomes aqui mencionados, sabem que estão guardados no meu coração por proporcionarem os momentos mais felizes e mágicos dos últimos 5 anos.

Aos amigos de graduação Alyne, Ana Cláudia, Ana Paula, Antoniana, Cristiane, Fernanda, Inaiá, Íris, Josy, Juliana, Marcos, Marjory, Renata, Vanessa, Viviane, Wallace, Yen e a todos os outros colegas, pelos 4 anos que passamos juntos, pelos incontáveis dias de estudo na biblioteca, pelas aventuras no bosque e pela amizade.

Aos amigos de pós-graduação Alyne, Cintya, Cristiane, Fábio, Fernando, Heron, José Augusto, Jucilene, Junior, Marcos, Mirela, Regina, Wallace e a todos os outros colegas, pelas risadas, pelas lágrimas, pelo auxílio na dissertação e por tudo que passamos juntos nesses 2 anos.

A todas as pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

À Capes, pelo auxílio financeiro.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar métodos para construir os numeradores e denominadores parciais da fração contínua que corresponde a duas expansões em série de potências de uma função analítica $f(z)$, em $z = 0$ e em $z = \infty$. Além disso, consideramos casos em que há coeficientes nulos nas expansões e, também, quando os coeficientes apresentam simetria. Alguns exemplos numéricos são apresentados para ilustrar dois dos algoritmos estudados, o Q-D e o Q-D modificado.

Palavras-chave: funções analíticas, aproximantes de Padé, frações contínuas, polinômios ortogonais.

Abstract

The main purpose of this work is to study some methods for deriving a continued fraction that corresponds to two series expansions of an analytic function $f(z)$, in $z = 0$ and $z = \infty$ simultaneously. Furthermore we considered the case when there are zero coefficients in the series and also when there is symmetry in the coefficients of the two series. Some examples are given.

Keywords: analytic functions, Padé approximants, continued fractions, orthogonal polynomials.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Aspectos históricos das frações contínuas	3
1.2 Conceitos básicos	7
1.3 Convergência de frações contínuas	10
1.4 Polinômios ortogonais e similares	11
1.4.1 Polinômios ortogonais	12
1.4.2 Polinômios similares aos ortogonais	17
1.4.3 Conexão com frações contínuas	19
1.5 Aproximantes de Padé	20
1.5.1 Conexão com frações contínuas	26
1.5.2 Tabela de Padé de dois pontos	27
2 Frações contínuas que correspondem a expansões em séries de potências em dois pontos	30
2.1 Construção de frações contínuas pelos determinantes de Hankel	32
2.1.1 Caso $i = j = m$	32
2.1.2 Caso $i \neq j$	36
2.2 Construção de frações contínuas pelo algoritmo Q-D	43
2.2.1 Caso em que as séries de potências apresentam coeficientes nulos . .	49
2.3 Séries de potências que apresentam simetrias	52
2.3.1 Caso geral	53
2.3.2 Caso $s = 1$	55
2.3.3 Caso $s = 2$	56

2.3.4	Caso $s = 0$	57
3	Erros nas aproximações e resultados computacionais	59
3.1	Erros nas aproximações	59
3.2	Resultados computacionais	63
3.2.1	A função $F(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$	63
3.2.2	A função $F(z) = \operatorname{arccot}(z)$	64
	Referências Bibliográficas	69

Introdução

As frações contínuas, assim como os aproximantes de Padé, têm vasta aplicação em muitos problemas da Matemática Pura e Ciências Aplicadas. São ferramentas essenciais para a solução de muitos problemas relacionados à aproximação de números irracionais e racionais, aproximação de funções, aplicações na física teórica, solução de equações diofantinas e equações integrais de Volterra não lineares, resolução de problemas de momento, entre outras. Essa grande variedade de aplicações foi a motivação para esse trabalho.

Seja $f(z)$ uma função analítica que possui expansões em séries de potências em $z = 0$ e em $z = \infty$ dadas, respectivamente, por

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots \quad (1)$$

e

$$f(z) = -\frac{a_{-1}}{z} - \frac{a_{-2}}{z^2} - \frac{a_{-3}}{z^3} - \frac{a_{-4}}{z^4} - \dots \quad (2)$$

Suponhamos que $f(z)$ seja aproximada por funções racionais da forma

$$\frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = \frac{\alpha_{m,0} + \alpha_{m,1}z + \dots + \alpha_{m,m-1}z^{m-1}}{1 + \beta_{m,1}z + \dots + \beta_{m,m}z^m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

em que os coeficientes $\alpha_{m,i}$ e $\beta_{m,i+1}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, são independentes de z . Esses $2m$ coeficientes podem ser determinados de tal forma que, quando a função racional em (3) é expandida para $|z|$ pequeno e para $|z|$ grande, haja coincidência com i termos de (1) e j termos de (2), respectivamente, totalizando $i + j = 2m$ termos ao todo.

Assim,

$$f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = O(z^i, z^{-(j+1)}), \quad (4)$$

em que o símbolo no lado direito significa que o lado esquerdo é da ordem de z^i para $|z|$ pequeno e da ordem de $z^{-(j+1)}$ para $|z|$ grande.

Seja a fração contínua

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} + \frac{p_2(z)}{q_2(z)} + \frac{p_3(z)}{q_3(z)} + \dots + \frac{p_m(z)}{q_m(z)} + \dots$$

cujos m -ésimos convergentes são exatamente a função racional $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$. É bem conhecido que os polinômios $P_m(z)$ e $Q_m(z)$ satisfazem as relações de recorrência (ver, por exemplo, Chihara [6])

$$P_{m+1}(z) = q_{m+1}(z)P_m(z) + p_{m+1}(z)P_{m-1}(z)$$

e

$$Q_{m+1}(z) = q_{m+1}(z)Q_m(z) + p_{m+1}(z)Q_{m-1}(z),$$

(5)

para $m = 0, 1, 2, \dots$, com valores iniciais $P_0(z) = 0$, $P_1(z) = p_1(z)$, $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = q_1(z)$.

O principal objetivo deste trabalho é estudar métodos para, a partir dos polinômios $P_m(z)$ e $Q_m(z)$, determinar os elementos da fração contínua correspondente às duas séries (1) e (2). Murphy (1966) mostrou que ela é da forma

$$\frac{n_1}{1 + d_1 z} + \frac{n_2 z}{1 + d_2 z} + \frac{n_3 z}{1 + d_3 z} + \dots + \frac{n_m z}{1 + d_m z} + \dots \quad (6)$$

em que n_m e d_m são constantes independentes de z . Essa fração contínua é chamada M-fração.

Para realizarmos o estudo proposto, organizamos a presente dissertação da seguinte forma.

No Capítulo 1, introduzimos alguns conceitos básicos sobre frações contínuas, polinômios ortogonais e aproximantes de Padé, onde, também, relacionamos tais tópicos. Os conceitos dados neste capítulo são fundamentais para o entendimento e desenvolvimento dos demais capítulos.

No Capítulo 2, apresentamos os métodos para a obtenção da fração contínua correspondente às séries de potências, em $z = 0$ e $z = \infty$, de uma função $f(z)$ dada. Tais métodos são construídos a partir dos determinantes de Hankel e do algoritmo Q-D. Apresentamos, ainda, o caso em que há coeficientes nulos em uma ou em ambas as séries de potências e, também, quando os coeficientes das séries apresentam simetria.

Por fim, no Capítulo 3, fizemos um breve estudo sobre erros nas aproximações por funções racionais, além de dois exemplos computacionais utilizando os algoritmos obtidos no Capítulo 2.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos um estudo sucinto, porém consistente, sobre frações contínuas, polinômios ortogonais e similares e aproximantes de Padé. Sobre frações contínuas, começaremos por uma breve introdução histórica, passando por suas definições e propriedades e, por fim, mostraremos alguns resultados sobre convergência. Quanto aos polinômios ortogonais e similares, daremos suas definições, algumas propriedades e a conexão dos mesmos com frações contínuas. Finalmente, sobre os aproximantes de Padé, apresentamos a definição da tabela de Padé em um ponto, sua conexão com frações contínuas e a definição de tabela de Padé em dois pontos. Embora esses assuntos sejam bem conhecidos, a apresentação é necessária pois fundamentam os próximos capítulos. Muitos textos podem ser utilizados para o estudo de tais tópicos como, por exemplo, [5], [6], [8], [14], [21], [23].

1.1 Aspectos históricos das frações contínuas

Para se fazer matemática, isto é, a fim de compreender e fazer contribuições a esta ciência, é importante estudar sua história. A matemática está sendo construída constantemente através de descobertas. Aqueles que desejam estudar um campo particular da matemática, seja estatística, álgebra abstrata ou frações contínuas, necessitarão primeiramente estudar seu passado. Assim, podem-se fazer melhorias em resultados já obtidos, sem repetí-los.

A origem das frações contínuas é difícil de se precisar. Isto é devido ao fato de que podemos encontrar exemplos dessas frações por toda a matemática nos últimos 2000 anos,

mas seus verdadeiros fundamentos não foram colocados até o final de 1600, início de 1700. Sua origem é tradicionalmente atribuída ao desenvolvimento do Algoritmo de Euclides. O Algoritmo de Euclides, entretanto, é usado para encontrar o máximo divisor comum (mdc) entre dois números. Porém, manipulando algebricamente o algoritmo, pode-se obter a fração contínua simples de um número racional p/q . Há dúvida se Euclides ou seus antecessores usaram realmente este algoritmo dessa maneira. Mas, devido a seu estreito relacionamento com frações contínuas, o Algoritmo de Euclides significou o início de seu desenvolvimento.

Por mais de mil anos, todo trabalho que usava frações contínuas era restrito a exemplos específicos. O matemático indiano *Aryabhata (476-550)* utilizou-as para resolver equações lineares diofantinas. Entretanto, não desenvolveu um método geral; particularmente, usou frações contínuas somente em exemplos específicos. Durante toda a escrita matemática grega e árabe, podemos encontrar exemplos e sinais de frações contínuas. Mas, novamente, seu uso era limitado a aplicações específicas.

Dois cientistas da cidade de Bolonha, Itália, *Rafael Bombelli (1526-1572)* e *Pietro Cataldi (1548-1626)*, contribuíram também neste campo, embora apenas fornecendo mais exemplos. Bombelli expressou a raiz quadrada de 13 como uma fração contínua dada por

$$\sqrt{13} \approx 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}} = \frac{18}{5},$$

que é um caso especial da fórmula

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \dots$$

No século *XVI* já se conhecia a aproximação

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}.$$

Cataldi fez o mesmo para a raiz quadrada de 18:

$$\sqrt{18} \approx 4 \& \frac{2}{8 \& \frac{2}{8 \& \frac{2}{8 \dots}}} = 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \dots}}},$$

que ele abreviou como

$$4 \& \frac{2}{8} \& \frac{2}{8} \& \frac{2}{8} \dots$$

Ambos os matemáticos forneceram somente estes exemplos, mas não foram além.

As frações contínuas transformaram-se num campo de estudos através do trabalho de *John Wallis (1616-1703)*. Em seu livro "*Arithmetica Infinitorum*" (1655), desenvolveu e apresentou a identidade:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 9 \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times 9 \dots}$$

O primeiro presidente da Royal Society of London, *Lord Brouncker (1620-1684)*, transformou esta identidade em

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \dots}}}}}$$

Essa descoberta foi um passo importante na história de $\pi = 3,14159\dots$

Embora Brouncker não tenha enfatizado a fração contínua, Wallis tomou a iniciativa e introduziu as primeiras etapas para generalizar essa teoria.

Em seu livro "*Opera Mathematica*" (1695), Wallis colocou alguns dos fundamentos básicos das frações contínuas. Explicou como calcular o n-ésimo convergente e descobriu algumas das propriedades, agora familiares, dos convergentes. Foi também neste trabalho que o termo "*fração contínua*" foi usado pela primeira vez.

O matemático e astrônomo holandês *Christiaan Huygens (1629-1695)* foi o primeiro a demonstrar uma aplicação prática de frações contínuas. Escreveu um artigo explicando como usar os convergentes de uma fração contínua para encontrar as melhores aproximações racionais para as relações entre as engrenagens. Essas aproximações permitiram-lhe escolher as engrenagens com o número correto de dentes. Seu trabalho foi motivado pelo desejo de construir um planetário mecânico.

Embora Wallis e Huygens trabalhassem com frações contínuas, esse campo de pesquisa só começou a florescer quando *Leonard Euler (1707-1783)*, *Johan Heinrich Lambert (1728-1777)* e *Joseph Louis Lagrange (1736-1813)* abraçaram o tópico.

Muito da teoria moderna foi desenvolvida por Euler em seu trabalho de 1737, "*De Fractionibus Continuis*". Ele mostrou que cada racional pode ser expresso como uma fração contínua simples finita, e forneceu, também, uma expressão para o número e na

forma de fração contínua:

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}$$

ou

$$e = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \dots$$

Usou esta expressão para mostrar que e e e^2 são irracionais. Demonstrou, também, como representar uma série como fração contínua, e vice-versa.

Lambert generalizou o trabalho de Euler sobre o número e . Em 1766, ele mostrou que

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{6}{x + \frac{10}{x + \frac{14}{x + \dots}}}}$$

Em 1768, ele encontrou expansões em frações contínuas para as funções $\log(1+x)$, $\operatorname{arctg}(x)$ e $\operatorname{tg}(x)$. Para $\operatorname{tg}(x)$, ele encontrou

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{3}{x - \frac{5}{x - \frac{7}{x - \dots}}}}$$

e usou essas expressões para mostrar que e^x e $\operatorname{tg}(x)$ são irracionais se x for racional.

Lagrange usou frações contínuas para encontrar o valor de raízes irracionais. Provou também que os números quadráticos irracionais são dados por uma fração contínua periódica.

O século *XIX* provavelmente pode ser considerado como a idade dourada das frações contínuas. Como Claude Brezinski escreveu em "*History of Continued Fractions and Padé Approximants*", "o século dezenove pode ser considerado o período popular das frações contínuas". Foi uma época em que "o assunto era conhecido por todos os

matemáticos". Como consequência, houve uma explosão no crescimento deste campo. A teoria de frações contínuas foi desenvolvida significativamente, especialmente com respeito aos convergentes. Também eram estudadas as frações contínuas com variáveis complexas como termos. Alguns dos matemáticos mais proeminentes que contribuíram para este campo foram *Karl Jacobi (1804-51)*, *Oskar Perron (1880-1975)*, *Charles Hermite (1822-1901)*, *Karl Friedrich Gauss (1777-1855)*, *Augustin Cauchy (1789-1857)* e *Thomas Stieltjes (1856-94)*. No princípio do século XX, a teoria tinha avançado muito além do trabalho inicial de Wallis.

Desde o começo do século XX, o uso das frações contínuas tem aparecido em outros campos. Para dar um exemplo de sua versatilidade, uma publicação recente de *Robert M. Corless* [7] examinou a conexão entre frações contínuas e a teoria do caos. As frações contínuas foram utilizadas, também, em algoritmos para computador calculando aproximações racionais para os números reais, bem como para resolver equações diofantinas.

Este breve resumo do passado das frações contínuas fornece uma visão geral do desenvolvimento deste campo. Embora seu desenvolvimento inicial pareça ter levado um longo tempo, uma vez iniciado, o campo e sua análise cresceram rapidamente. Mesmo hoje, o fato de as frações contínuas ainda estarem sendo usadas significa que o assunto está longe de se esgotar.

1.2 Conceitos básicos

Veremos, nesta seção, os conceitos básicos sobre frações contínuas que serão necessários para o bom entendimento deste trabalho.

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}},$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são sequências de números complexos ou funções complexas simples com $a_n \neq 0$. Uma fração contínua pode, também, ser denotada das seguintes formas:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots \quad (1.1)$$

ou

$$b_0 + K_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right).$$

Outra maneira de definir frações contínuas, segundo Henrici e Pfluger [11], é utilizando transformações lineares fracionais, conhecidas também como transformações de Möbius.

Definição 1.1. *Uma transformação linear fracional (t.l.f.) é definida por*

$$t(w) = \frac{a + cw}{b + dw},$$

onde a, b, c, d e w são números complexos e $ad - bc \neq 0$.

Definição 1.2. *Uma fração contínua é um par ordenado*

$$((\{a_n\}, \{b_n\}), \{f_n\}),$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são seqüências de números complexos ou, ainda, funções complexas simples com $a_n \neq 0$ e $\{f_n\}$ é uma seqüência em $\overline{\mathbb{C}}$, o plano complexo estendido ($\mathbb{C} \cup \infty$), dada por

$$f_n = S_n(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $S_n(w)$, para $n = 1, 2, \dots$, são t.l.f. definidas por

$$S_n(w) = S_{n-1}(s_n(w)), \quad s_n(w) = \frac{a_n}{b_n + w} \quad (1.2)$$

com

$$S_0(w) = s_0(w) \quad e \quad s_0(w) = b_0 + w.$$

Os números a_n e b_n são chamados, respectivamente, n -ésimos numeradores e denominadores parciais. Esses números também são chamados de elementos da fração contínua. O valor

$$f_n = S_n(0) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}}$$

é chamado de n -ésimo convergente ou aproximante da fração contínua. Podemos usar as seguintes notações

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \quad \text{ou} \quad f_n = b_0 + K_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{b_j} \right).$$

Correspondentes a cada fração contínua da forma (1.1), existem seqüências de números ou funções complexas $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ definidas por

$$\begin{bmatrix} A_{-1} \\ B_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = b_n \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} + a_n \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Os números A_n e B_n , $n = 1, 2, \dots$, são chamados de n -ésimos numeradores e denominadores de (1.1), respectivamente (também são chamados de numeradores e denominadores canônicos). O resultado (1.3) é facilmente verificado por indução (veja, por exemplo, Chihara [6]). A importância desses números é mostrada no teorema a seguir.

Teorema 1.1. *Se A_n , B_n e f_n denotam os n -ésimos numerador, denominador e convergente da fração contínua (1.1), respectivamente, e se $\{S_n\}$ é a sequência de t.l.f. (1.2), então*

$$S_n(w) = \frac{A_n + A_{n-1}w}{B_n + B_{n-1}w}, \quad f_n = S_n(0) = \frac{A_n}{B_n} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad e$$

$$f_{n-1} = S_n(\infty) = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Além disso,

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n a_k \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

A última equação pode ser escrita como

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n a_k}{B_{n-1} B_n}. \quad (1.4)$$

Sejam A_n e B_n os numeradores e denominadores de

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}}, \quad (1.5)$$

respectivamente, e C_n e D_n os numeradores e denominadores de

$$d_0 + \frac{c_1}{d_1 + \frac{c_2}{d_2 + \frac{c_3}{d_3 + \dots}}}, \quad (1.6)$$

respectivamente.

Definição 1.3. *A fração contínua (1.6), com*

$$C_k = A_{2k}, \quad D_k = B_{2k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

é chamada contração par (ou parte par) da fração contínua (1.5).

Definição 1.4. *A fração contínua (1.6), com*

$$C_k = A_{2k+1}, \quad D_k = B_{2k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

é chamada contração ímpar (ou parte ímpar) da fração contínua (1.5).

Teorema 1.2. *A parte par de (1.5) existe se, e somente se, $b_{2k} \neq 0$ para $k = 1, 2, 3, \dots$, e é dada por*

$$b_0 + \frac{b_2 a_1}{b_2 b_1 + a_2} - \frac{a_2 a_3 b_4 / b_2}{b_3 b_4 + a_3 b_4 / b_2} - \frac{a_4 a_5 b_6 / b_4}{a_6 + b_5 b_6 + a_5 b_6 / b_4} - \dots$$

Teorema 1.3. *A parte ímpar de (1.5) existe se, e somente se, $b_{2k+1} \neq 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots$, e é dada por*

$$\frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 b_3 / b_1}{b_1 (a_3 + b_2 b_3) + a_2 b_3} - \frac{a_3 a_4 b_5 b_1 / b_3}{a_5 + b_4 b_5 + a_4 b_5 / b_3} \\ - \frac{a_5 a_6 b_7 / b_5}{a_7 + b_6 b_7 + a_6 b_7 / b_5} - \frac{a_7 a_8 b_9 / b_7}{a_9 + b_8 b_9 + a_8 b_9 / b_7} - \dots$$

1.3 Convergência de frações contínuas

Nesta seção, trataremos da convergência de frações contínuas. Daremos sua definição e um resultado importante.

Definição 1.5. *Convergência clássica de uma fração contínua da forma (1.5) para um número $f \in \mathbb{C}$ significa a convergência da sequência de convergentes $\{f_n\}$ para f e, neste caso, o valor da fração contínua é o limite da sequência $\{f_n\}$. Então, podemos escrever*

$$f = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots$$

Como existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano complexo estendido e a esfera de Riemann, aceitamos também o conceito de convergência para o infinito. Assim, dizemos que uma fração contínua diverge se a sequência $\{f_n\}$ converge para mais de um valor ou quando não converge para nenhum valor.

Teorema 1.4. *Se $a_{n+1} > 0$ e $b_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, então os convergentes de ordem par, f_{2n} , da fração contínua (1.5) formam uma sequência numérica crescente, enquanto que os convergentes de ordem ímpar, f_{2n+1} , formam uma sequência decrescente e todo convergente de ordem par é menor do que qualquer convergente de ordem ímpar. Além disso, cada convergente f_n , $n \geq 2$, está entre os convergentes f_{n-1} e f_{n-2} . Os termos da sequência $\{f_n\}$ satisfazem*

$$f_0 < f_2 < f_4 < \dots < f_{2n} < \dots < f_{2n+1} < \dots < f_5 < f_3 < f_1. \quad (1.7)$$

Demonstração: De (1.3) e (1.4), encontramos que

$$f_n - f_{n-2} = \frac{b_n(-1)^n \prod_{k=1}^{n-1} a_k}{B_n B_{n-2}}, \quad n \geq 2. \quad (1.8)$$

Desta equação, obtemos

$$f_{2n} - f_{2n-2} = \frac{b_{2n}(-1)^{2n} \prod_{k=1}^{2n-1} a_k}{B_{2n} B_{2n-2}} > 0 \implies f_{2n-2} < f_{2n}, \quad (1.9)$$

e

$$f_{2n+1} - f_{2n-1} = \frac{b_{2n+1}(-1)^{2n+1} \prod_{k=1}^{2n} a_k}{B_{2n+1} B_{2n-1}} < 0 \implies f_{2n+1} < f_{2n-1}. \quad (1.10)$$

Além disso, de (1.4), temos

$$f_{2n} - f_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n} a_k}{B_{2n} B_{2n-1}} < 0 \implies f_{2n} < f_{2n-1}, \quad (1.11)$$

e

$$f_{2n+1} - f_{2n} = \frac{(-1)^{2n} \prod_{k=1}^{2n+1} a_k}{B_{2n+1} B_{2n}} > 0 \implies f_{2n} < f_{2n+1}. \quad (1.12)$$

De (1.9) e (1.10) concluímos que $\{f_{2n}\}$ é uma sequência crescente e que $\{f_{2n+1}\}$ é uma sequência decrescente. De (1.9), (1.12) e (1.10) podemos escrever

$$f_{2n-2} < f_{2n} < f_{2n+1} < f_{2n-1}. \quad (1.13)$$

Portanto, f_n está entre f_{n-1} e f_{n-2} . Em (1.13), fazendo

- $n = 1$, obtemos $f_0 < f_2 < f_3 < f_1$.
- $n = 2$, temos $f_2 < f_4 < f_5 < f_3$. Portanto, $f_0 < f_2 < f_4 < f_5 < f_3 < f_1$.
- $n = 3$, obtemos $f_4 < f_6 < f_7 < f_5$. Logo, $f_0 < f_2 < f_4 < f_6 < f_7 < f_5 < f_3 < f_1$.

Continuando desta forma, obtemos

$$f_0 < f_2 < \cdots < f_{2n-2} < f_{2n} < \cdots < f_{2n+1} < f_{2n-1} < \cdots < f_3 < f_1,$$

concluindo, assim, a demonstração do teorema. ■

1.4 Polinômios ortogonais e similares

Faremos, nesta seção, um breve estudo sobre os polinômios ortogonais e os similares aos ortogonais e suas conexões com as frações contínuas. Para maiores detalhes veja [4], [6], [8], [21].

Definição 1.6. *Seja ϕ uma função real, não decrescente, definida em $[a, b]$. Um ponto $\xi \in [a, b]$ é chamado de ponto de aumento de ϕ se $\phi(\xi + \varepsilon) - \phi(\xi - \varepsilon) > 0$, para todo $\varepsilon > 0$.*

Seja $\phi(x)$ uma função real, não decrescente e com infinitos pontos de aumento em um intervalo (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Se os momentos

$$\mu_m^\phi = \int_a^b x^m d\phi(x)$$

existem para $m = 0, 1, 2, \dots$, $d\phi(x)$ é chamada uma distribuição em (a, b) . Se os momentos existem para todo m inteiro, $d\phi(x)$ é uma distribuição forte. Se, além disso, $(a, b) \subset (0, \infty)$, $d\phi(x)$ é uma distribuição forte de Stieltjes.

Definição 1.7. *Os determinantes definidos por*

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.14)$$

são chamados determinantes de Hankel, onde $H_{-1}^{(m)} = 0$ e $H_0^{(m)} = 1$.

Esses determinantes possuem a importante propriedade dada abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [10]:

$$(H_n^{(m)})^2 - H_n^{(m-1)} H_n^{(m+1)} + H_{n+1}^{(m-1)} H_{n-1}^{(m+1)} = 0, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 1. \quad (1.15)$$

1.4.1 Polinômios ortogonais

Entre os polinômios que satisfazem uma relação de recorrência de três termos, estão os polinômios ortogonais. As aplicações desses polinômios na Análise Aplicada são muitas e novas aplicações surgem a cada dia.

Definição 1.8. *Uma sequência $\{P_n^\phi(x)\}_{n=0}^\infty$ de polinômios ortogonais relativamente a uma distribuição $d\phi(x)$ em um intervalo (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$, pode ser definida por*

(i) $P_n^\phi(x)$ é um polinômio de grau exatamente n , $n \geq 0$,

(ii) $\langle x^m, P_n^\phi(x) \rangle = \int_a^b x^m P_n^\phi(x) d\phi(x) = 0$, $m = 0, 1, \dots, n-1$.

A existência dessa sequência de polinômios depende da condição

$$H_n^{(0)} \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Do item (i) da definição anterior, temos que $\{P_0^\phi(x), P_1^\phi(x), \dots, P_n^\phi(x)\}$ é um conjunto linearmente independente, portanto, formam uma base para \mathbb{P}_n , o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq n$.

Os polinômios ortogonais possuem muitas propriedades interessantes. Vejamos algumas delas.

Teorema 1.5 (Relação de recorrência de três termos). *Seja $\{P_n^\phi(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à distribuição $d\phi(x)$. Então,*

$$P_{n+1}^\phi(x) = (\gamma_{n+1}^\phi x - \beta_{n+1}^\phi)P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi P_{n-1}^\phi(x), \quad n \geq 0, \quad (1.16)$$

com $P_0^\phi(x) = 1$, $P_{-1}^\phi(x) = 0$, $\alpha_{n+1}^\phi, \beta_n^\phi, \gamma_n^\phi \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}^\phi &= \frac{a_{n+1, n+1}}{a_{n, n}} \neq 0, & \beta_{n+1}^\phi &= \gamma_{n+1}^\phi \frac{\langle xP_n^\phi, P_n^\phi \rangle}{\langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle}, & n \geq 0 \\ e \quad \alpha_{n+1}^\phi &= \frac{\gamma_{n+1}^\phi}{\gamma_n^\phi} \frac{\langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle}{\langle P_{n-1}^\phi, P_{n-1}^\phi \rangle} \neq 0 & n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Demonstração: Usaremos a notação $P_n^\phi(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i$, $a_{n,n} \neq 0$.

Como $xP_n^\phi(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, podemos escrever

$$xP_n^\phi(x) = \sum_{i=0}^{n+1} b_i P_i^\phi(x).$$

Igualando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$a_{n,n} = b_{n+1} a_{n+1, n+1}.$$

Logo,

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1, n+1}} \neq 0.$$

Porém, das relações de ortogonalidade,

$$\langle xP_n^\phi, P_j^\phi \rangle = \int_a^b P_n^\phi(x) x P_j^\phi(x) d\phi(x) = 0 \quad \text{para } 0 \leq j \leq n-2.$$

Assim,

$$\langle xP_n^\phi, P_j^\phi \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \langle P_i^\phi, P_j^\phi \rangle = b_j \langle P_j^\phi, P_j^\phi \rangle = 0 \Rightarrow b_j = 0 \quad \text{para } 0 \leq j \leq n-2.$$

Logo,

$$xP_n^\phi(x) = b_{n+1}P_{n+1}^\phi(x) + b_nP_n^\phi(x) + b_{n-1}P_{n-1}^\phi(x),$$

que pode ser escrito como

$$P_{n+1}^\phi(x) = (\gamma_{n+1}^\phi x - \beta_{n+1}^\phi)P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi P_{n-1}^\phi(x), \quad (1.18)$$

com

$$\gamma_{n+1}^\phi = \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}, \quad \beta_{n+1}^\phi = \frac{b_n}{b_{n+1}} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^\phi = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}.$$

Calculemos, agora, os valores de α_{n+1}^ϕ e β_{n+1}^ϕ . De (1.18), obtemos

$$0 = \langle P_{n+1}^\phi, P_n^\phi \rangle = \gamma_{n+1}^\phi \langle xP_n^\phi, P_n^\phi \rangle - \beta_{n+1}^\phi \langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle - \alpha_{n+1}^\phi \langle P_{n-1}^\phi, P_n^\phi \rangle.$$

Daí,

$$\beta_{n+1}^\phi = \gamma_{n+1}^\phi \frac{\langle xP_n^\phi, P_n^\phi \rangle}{\langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle}.$$

Analogamente,

$$0 = \langle P_{n+1}^\phi, P_{n-1}^\phi \rangle = \gamma_{n+1}^\phi \langle xP_n^\phi, P_{n-1}^\phi \rangle - \beta_{n+1}^\phi \langle P_n^\phi, P_{n-1}^\phi \rangle - \alpha_{n+1}^\phi \langle P_{n-1}^\phi, P_{n-1}^\phi \rangle.$$

Logo,

$$\alpha_{n+1}^\phi = \gamma_{n+1}^\phi \frac{\langle xP_n^\phi, P_{n-1}^\phi \rangle}{\langle P_{n-1}^\phi, P_{n-1}^\phi \rangle}.$$

Mas, como

$$P_n^\phi(x) = (\gamma_n^\phi x - \beta_n^\phi)P_{n-1}^\phi(x) - \alpha_n^\phi P_{n-2}^\phi(x),$$

obtemos

$$xP_{n-1}^\phi(x) = \frac{1}{\gamma_n^\phi} P_n^\phi(x) + \frac{\beta_n^\phi}{\gamma_n^\phi} P_{n-1}^\phi(x) + \frac{\alpha_n^\phi}{\gamma_n^\phi} P_{n-2}^\phi(x).$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle xP_n^\phi, P_{n-1}^\phi \rangle &= \int_a^b P_n^\phi(x) x P_{n-1}^\phi(x) d\phi(x) \\ &= \frac{1}{\gamma_n^\phi} \int_a^b P_n^\phi(x) P_{n-1}^\phi(x) d\phi(x) + \frac{\beta_n^\phi}{\gamma_n^\phi} \int_a^b P_n^\phi(x) P_{n-1}^\phi(x) d\phi(x) \\ &\quad + \frac{\alpha_n^\phi}{\gamma_n^\phi} \int_a^b P_n^\phi(x) P_{n-2}^\phi(x) d\phi(x) = \frac{1}{\gamma_n^\phi} \langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha_{n+1}^\phi = \frac{\gamma_{n+1}^\phi}{\gamma_n^\phi} \frac{\langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle}{\langle P_{n-1}^\phi, P_{n-1}^\phi \rangle}.$$

■

Para construirmos a sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{\hat{P}_n^\phi(x)\}_{n=0}^\infty$ com relação à distribuição $d\phi(x)$, basta dividirmos cada polinômio pelo correspondente coeficiente do termo de maior grau, ou seja,

$$\hat{P}_n^\phi(x) = \frac{P_n^\phi(x)}{a_{n,n}}, \quad n \geq 1.$$

Dividindo a relação de recorrência (1.16) por $a_{n+1,n+1}$ e fazendo os ajustes necessários, obtemos

$$\hat{P}_{n+1}^\phi(x) = (x - \hat{\beta}_{n+1}^\phi) \hat{P}_n^\phi(x) - \hat{\alpha}_{n+1}^\phi \hat{P}_{n-1}^\phi(x), \quad n \geq 0, \quad (1.19)$$

onde

$$\hat{\beta}_{n+1}^\phi = \frac{\langle x \hat{P}_n^\phi, \hat{P}_n^\phi \rangle}{\langle \hat{P}_n^\phi, \hat{P}_n^\phi \rangle}, \quad \hat{\alpha}_{n+1}^\phi = \frac{\langle \hat{P}_n^\phi, \hat{P}_n^\phi \rangle}{\langle \hat{P}_{n-1}^\phi, \hat{P}_{n-1}^\phi \rangle}, \quad (1.20)$$

com $\hat{P}_0^\phi(x) = 1$ e $\hat{P}_1^\phi(x) = x - \hat{\beta}_1^\phi$.

Teorema 1.6. *Seja $P_n^\phi(x)$, $n \geq 1$, uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à distribuição $d\phi(x)$. Então, as raízes de $P_n^\phi(x)$ são reais, distintas e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração: Suponhamos que $P_n^\phi(x)$ não mude de sinal em (a, b) . Então, $P_n^\phi(x) \geq 0$ (ou $P_n^\phi(x) \leq 0$), mas não identicamente nulo, em (a, b) . Logo, $\int_a^b P_n^\phi(x) d\phi(x) > 0$ (ou $\int_a^b P_n^\phi(x) d\phi(x) < 0$), o que contradiz a propriedade de ortogonalidade dos polinômios P_n , pois

$$\int_a^b P_n^\phi(x) w(x) dx = \int_a^b x^0 P_n^\phi(x) d\phi(x) = 0. \quad (1.21)$$

Assim, $P_n^\phi(x)$ deve mudar de sinal em (a, b) pelo menos uma vez. Logo, existe pelo menos uma raiz real de $P_n^\phi(x)$ de multiplicidade ímpar em (a, b) .

Suponhamos que $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,r}$ ($r < n$) sejam as raízes distintas de multiplicidade ímpar de $P_n^\phi(x)$ em (a, b) . Então,

$$P_n^\phi(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,r}) Q_{n-r}(x) = q_r(x) Q_{n-r}(x),$$

onde $Q_{n-r}(x)$ é um polinômio de grau $(n-r)$ que tem somente raízes complexas ou raízes de multiplicidade par em (a, b) ou raízes fora de (a, b) . Logo, $Q_{n-r}(x)$ não muda de sinal em (a, b) . Porém, pela relação de ortogonalidade,

$$\int_a^b q_r(x) P_n^\phi(x) d\phi(x) = 0. \quad (1.22)$$

Mas,

$$\int_a^b q_r(x) P_n^\phi(x) d\phi(x) = \int_a^b q_r^2(x) Q_{n-r}(x) d\phi(x) \neq 0. \quad (1.23)$$

Por (1.22) e (1.23) temos um absurdo. Assim, $P_n^\phi(x)$ tem $r \geq n$ raízes de multiplicidade ímpar em (a, b) . Mas, como $P_n^\phi(x)$ é um polinômio de grau n , então $r = n$. Deste modo, $P_n^\phi(x)$ tem n raízes de multiplicidade ímpar em (a, b) , da seguinte forma

$$P_n^\phi(x) = (x - x_{n,1})^{i_1} (x - x_{n,2})^{i_2} \dots (x - x_{n,n})^{i_n}.$$

Como i_1, i_2, \dots, i_n são potências positivas e ímpares e $i_1 + i_2 + \dots + i_n = n$, temos que $i_1 = i_2 = \dots = i_n = 1$. ■

Outra propriedade muito interessante é a do entrelaçamento dos zeros, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em Chihara [6].

Teorema 1.7. *Seja $\{P_j^\phi(x)\}_{j=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau $n-1$, $P_{n-1}^\phi(x)$, existe somente um zero de $P_n^\phi(x)$.*

Podemos definir uma segunda sequência de polinômios, $\{Q_n^\phi(x)\}_{n=0}^\infty$, do seguinte modo:

$$Q_n^\phi(x) = \int_a^b \frac{P_n^\phi(x) - P_n^\phi(y)}{x - y} d\phi(y), \quad n \geq 0.$$

Esses são os polinômios associados que aparecem na teoria dos polinômios ortogonais. Podemos mostrar que esses polinômios satisfazem a mesma relação de recorrência dos polinômios ortogonais, mas com condições iniciais diferentes, ou seja,

$$Q_{n+1}^\phi(x) = (\gamma_{n+1}^\phi x - \beta_{n+1}^\phi) Q_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi Q_{n-1}^\phi(x),$$

para $n \geq 1$, com as condições iniciais $Q_0^\phi(x) = 0$, $Q_1^\phi(x) = \gamma_1^\phi \mu_0^\phi$. Logo, $Q_{n+1}^\phi(x)$ tem grau n , $n \geq 0$.

É claro que os polinômios associados aos polinômios ortogonais mônicos $\hat{P}_n^\phi(x)$ satisfazem a mesma relação de recorrência dos mônicos,

$$\hat{Q}_{n+1}^\phi(x) = (x - \hat{\beta}_{n+1}^\phi)\hat{Q}_n^\phi(x) - \hat{\alpha}_{n+1}^\phi\hat{Q}_{n-1}^\phi(x), \quad (1.24)$$

com as condições iniciais $\hat{Q}_0^\phi(x) = 0$, $\hat{Q}_1^\phi(x) = \mu_0^\phi$. Portanto, não são mônicos e todos têm o coeficiente do termo de maior grau igual a μ_0^ϕ .

1.4.2 Polinômios similares aos ortogonais

A introdução do problema forte de momento, veja [13], abriu caminho para o estudo de polinômios que apresentam propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais. Este problema pode ser expresso por:

Dada uma sequência $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^\infty$ de números reais, sob que condições existe uma medida não negativa $d\psi(t)$ tal que

$$\mu_m = \mu_m^\psi = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots?$$

Jones, Thron e Waadeland [13] resolveram este problema quando $(a, b) \subset (0, \infty)$. Sri Ranga [20], usando conceitos de frações contínuas, resolveu o problema forte de momento de Hamburger, isto é, quando $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Vamos, aqui, definir uma sequência de polinômios similares aos ortogonais ou, simplesmente, polinômios similares, $\{B_n^\psi(z)\}_{n=0}^\infty$, por

(i) $B_n^\psi(z)$ é um polinômio mônico de grau exatamente n , $n \geq 0$,

(ii) $\int_a^b z^{-n+m} B_n^\psi(z) d\psi(z) = 0$, $m = 0, 1, \dots, n-1$,

onde $d\psi(z)$ é uma distribuição forte de Stieltjes em (a, b) .

Uma condição necessária e suficiente para a existência dessa sequência de polinômios é que os determinantes de Hankel definidos por (1.14) satisfaçam

$$H_n^{(m)} \neq 0, \quad n \geq 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Na verdade, podemos demonstrar que, para uma distribuição forte de Stieltjes, $H_n^{(m)} > 0$, $n \geq 0$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Esses polinômios satisfazem, por exemplo, a relação de recorrência de três termos

$$B_{n+1}^\psi(z) = (z - \beta_{n+1}^\psi)B_n^\psi(z) - \alpha_{n+1}^\psi z B_{n-2}^\psi(z), \quad n \geq 0, \quad (1.25)$$

com $B_{-1}^\psi(z) = 0$ e $B_0^\psi(z) = 1$. Os coeficientes β_n^ψ e α_{n+1}^ψ , $n \geq 1$, podem ser dados em termos dos determinantes de Hankel por

$$\alpha_{n+1}^\psi = \frac{H_{n+1}^{(-n)} H_{n-1}^{(-n+1)}}{H_n^{(-n)} H_n^{(-n+1)}} \quad \text{e} \quad \beta_n^\psi = \frac{H_n^{(-n-1)} H_{n-1}^{(-n-1)}}{H_{n-1}^{(-n)} H_n^{(-n-2)}} \quad n \geq 1. \quad (1.26)$$

Do mesmo modo que fizemos para os polinômios ortogonais, podemos definir os polinômios associados de grau $n - 1$ por

$$A_n^\psi(z) = \int_a^b \frac{B_n^\psi(t) - B_n^\psi(z)}{t - z} d\psi(t), \quad n \geq 0, \quad (1.27)$$

com $A_0^\psi(z) = 0$ e $A_1^\psi(z) = \mu_0^\psi$.

É fácil ver que o coeficiente do termo de maior grau desses polinômios é μ_0^ψ . Como

$$B_n^\psi(t) - B_n^\psi(z) = (t^n - z^n) + b_{n,n-1}(t^{n-1} - z^{n-1}) + \cdots + b_{n,1}(t - z),$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{B_n^\psi(t) - B_n^\psi(z)}{t - z} &= \sum_{j=0}^{n-1} t^{n-1-j} z^j + b_{n,n-1} \sum_{j=0}^{n-2} t^{n-2-j} z^j + \cdots + b_{n,2}(t + z) + b_{n,1} \\ &= z^{n-1} + (t + b_{n,n-1})z^{n-2} + \cdots + (t^{n-2} + b_{n,n-1}t^{n-3} + \cdots + b_{n,2})z \\ &\quad + (t^{n-1} + b_{n,n-1}t^{n-2} + \cdots + b_{n,1}). \end{aligned}$$

Portanto, integrando ambos os lados no intervalo (a, b) relativamente à distribuição ψ , obtemos

$$\begin{aligned} A_n^\psi(z) &= \mu_0^\psi z^{n-1} + (\mu_1^\psi + b_{n,n-1}\mu_0^\psi)z^{n-2} + \cdots + (\mu_{n-2}^\psi + b_{n,n-1}\mu_{n-3}^\psi + \cdots + b_{n,2}\mu_0^\psi)z \\ &\quad + (\mu_{n-1}^\psi + b_{n,n-1}\mu_{n-2}^\psi + \cdots + b_{n,1}\mu_0^\psi). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Os polinômios $A_n(z)$ também satisfazem a mesma relação de recorrência dos polinômios similares, ou seja,

$$A_{n+1}^\psi(z) = (z - \beta_{n+1}^\psi)A_n^\psi(z) - \alpha_{n+1}^\psi z A_{n-1}^\psi(z), \quad n \geq 1, \quad (1.29)$$

com as condições iniciais $A_0^\psi(z) = 0$, $A_1^\psi(z) = \mu_0^\psi$.

Além disso, o quociente $\frac{A_n^\psi(z)}{B_n^\psi(z)}$ satisfaz

$$\frac{A_n^\psi(z)}{B_n^\psi(z)} = \begin{cases} \frac{\mu_0^\psi}{z} + \frac{\mu_1^\psi}{z^2} + \cdots + \frac{\mu_{n-1}^\psi}{z^n} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \\ -\mu_{-1}^\psi - \mu_{-2}^\psi z - \cdots - \mu_{-n}^\psi z^{n-1} + O(z^n). \end{cases} \quad (1.30)$$

De fato, fazendo a divisão de $A_n^\psi(z)$, dado em (1.28), por $B_n^\psi(z)$ encontramos

$$\frac{A_n^\psi(z)}{B_n^\psi(z)} = \frac{\mu_0^\psi}{z} + \frac{\mu_1^\psi}{z^2} + \cdots + \frac{\mu_{n-1}^\psi}{z^n} + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

Para a segunda série, sabendo que

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t\left(1-\frac{z}{t}\right)} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{t^n} + \frac{z^n}{t^{n+1}} + \cdots, \quad (1.31)$$

obtemos

$$\int_a^b \frac{1}{t\left(1-\frac{z}{t}\right)} d\psi(t) = \mu_{-1}^\psi + \mu_{-2}^\psi z + \cdots + \mu_{-n}^\psi z^{n-1} + \mu_{-n-1}^\psi z^n + \cdots. \quad (1.32)$$

De (1.31) e da definição de polinômios similares, temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{B_n^\psi(t)}{t\left(1-\frac{z}{t}\right)} d\psi(t) &= \int_a^b B_n^\psi(t) \left[\frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{t^n} + \frac{z^n}{t^{n+1}} + \cdots \right] d\psi(t) \\ &= \int_a^b B_n^\psi(t) \left[\frac{z^n}{t^{n+1}} + \frac{z^{n+1}}{t^{n+2}} + \cdots \right] d\psi(t) = O(z^n). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Logo, como

$$\frac{A_n^\psi(z)}{B_n^\psi(z)} = \frac{1}{B_n^\psi(z)} \int_a^b \frac{B_n^\psi(t)}{t\left(1-\frac{z}{t}\right)} d\psi(t) - \int_a^b \frac{1}{t\left(1-\frac{z}{t}\right)} d\psi(t),$$

de (1.32) e (1.33), obtemos que

$$\frac{A_n^\psi(z)}{B_n^\psi(z)} = -\mu_{-1}^\psi - \mu_{-2}^\psi z - \cdots - \mu_{-n}^\psi z^{n-1} + O(z^n).$$

Veja Andrade [3] e Ranga [20] para outras propriedades sobre esses polinômios.

1.4.3 Conexão com frações contínuas

Faremos, agora, a associação dos polinômios ortogonais e similares aos ortogonais com as frações contínuas. As fórmulas de Wallis (1.3) levam-nos diretamente a isso. Se, em (1.1), tomarmos

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \mu_0^\phi \neq 0, \quad a_{n+1} = -\hat{\alpha}_{n+1}^\phi \neq 0, \quad b_n = x - \hat{\beta}_n^\phi, \quad n \geq 1,$$

obtemos a fração contínua

$$\frac{\mu_0^\phi}{x - \hat{\beta}_1^\phi} - \frac{\hat{\alpha}_2^\phi}{x - \hat{\beta}_2^\phi} - \frac{\hat{\alpha}_3^\phi}{x - \hat{\beta}_3^\phi} - \dots - \frac{\hat{\alpha}_n^\phi}{x - \hat{\beta}_n^\phi} - \dots, \quad (1.34)$$

cujo n -ésimo denominador parcial, B_n , é o polinômio ortogonal $\hat{P}_n^\phi(x)$ que satisfaz a relação de recorrência (1.19). A fração contínua (1.34) é conhecida como fração contínua do tipo Jacobi ou, simplesmente, J-fração, devido à sua relação com certos tipos de matrizes conhecidas por matrizes de Jacobi, cujos autovalores são os zeros dos polinômios ortogonais a elas associados.

Retornando às fórmulas de Wallis, vemos que $A_n = \hat{Q}_n^\phi(x)$, e, então, satisfazem a relação de recorrência (1.24). Observe, também, que o n -ésimo convergente é a razão entre o polinômio associado de grau $n - 1$ e o ortogonal de grau n .

Vamos obter, agora, a conexão entre os polinômios similares e frações contínuas. Retornemos às fórmulas de Wallis. Tomando, em (1.1),

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \mu_0^\psi \neq 0, \quad a_{n+1} = -\alpha_{n+1}^\psi z \neq 0, \quad b_n = z - \beta_n^\psi, \quad n \geq 1,$$

obtemos a fração contínua,

$$\frac{\mu_0^\psi}{z - \beta_1^\psi} - \frac{\alpha_2^\psi z}{z - \beta_2^\psi} - \frac{\alpha_3^\psi z}{z - \beta_3^\psi} - \dots - \frac{\alpha_n^\psi z}{z - \beta_n^\psi} - \dots, \quad (1.35)$$

conhecida como T-fração, cuja forma geral será definida mais adiante.

Observe que os n -ésimos numerador e denominador parciais são, respectivamente, o polinômio associado de grau $n - 1$, $A_n^\psi(z)$, e o polinômio similar de grau n , $B_n^\psi(z)$. Portanto, satisfazem as relações de recorrência (1.29) e (1.25).

Conhecendo-se, pois, as relações de recorrência dos polinômios ortogonais ou similares, é possível construir as correspondentes frações contínuas a partir dos coeficientes dessas relações.

1.5 Aproximantes de Padé

A classe \mathcal{P} das séries de potências formais sobre \mathbb{C} consiste de todas as expressões da forma

$$C(z) \equiv c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \equiv \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$$

com coeficientes $c_m \in \mathbb{C}$.

Se $\frac{u}{v}$ e $\frac{u'}{v'}$ são duas formas de Padé do tipo (m, n) para $C(z)$, então

$$Cv - u = O(z^{m+n+1}), \quad Cv' - u' = O(z^{m+n+1}) \quad \text{e}$$

$$uv' - u'v = (Cv' - u')v - (Cv - u)v' = O(z^{m+n+1}).$$

O lado esquerdo é um polinômio de grau no máximo $m + n$ e o lado direito é uma série de potências começando com a potência $z^{m+n+k+1}$, $k \geq 0$. Portanto, ambos os lados se anulam e as funções racionais determinadas por $\frac{u}{v}$ e $\frac{u'}{v'}$ são idênticas. Isso completa a demonstração. ■

Definição 1.9. A função racional unicamente determinada $R_{mn}(z) = \frac{P_{mn}(z)}{Q_{mn}(z)}$ é chamada fração de Padé do tipo (m, n) para $C(z)$.

Definição 1.10. A tabela de Padé (estendida) para $C(z)$ é definida por:

$$\begin{array}{cccccc} R_{00} & R_{01} & R_{02} & R_{03} & \cdots \\ R_{10} & R_{11} & R_{12} & R_{13} & \cdots \\ R_{20} & R_{21} & R_{22} & R_{23} & \cdots \\ R_{30} & R_{31} & R_{32} & R_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad (1.37)$$

A primeira coluna desta tabela contém as somas parciais $C_m(z) = \sum_{k=0}^m c_k z^k$ de $C(z)$. Também associadas com $C(z)$ estão as matrizes

$$C_{mn} = \begin{pmatrix} c_m & c_{m-1} & \cdots & c_{m-n+2} & c_{m-n+1} \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m-n+3} & c_{m-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{m+n-2} & c_{m+n-3} & \cdots & c_m & c_{m-1} \\ c_{m+n-1} & c_{m+n-2} & \cdots & c_{m+1} & c_m \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Definição 1.11. Seja $c_{mn} = \det C_{mn}$, $c_{m0} = 1$. A c -tabela (estendida) para $C(z)$ é definida por:

$$\begin{array}{cccccc} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & \cdots \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Evidentemente $c_{m0} = 1$, $c_{m1} = c_m$, $c_{0n} = c_0^n$.

Frações de Padé iguais ocorrem em blocos quadrados na tabela de Padé. A c-tabela tem uma estrutura de blocos correspondente, com grupos de determinantes c_{ij} ocorrendo em blocos quadrados maximais da forma:

$$\begin{array}{c}
 n \\
 | \\
 m - * \quad * \quad * \quad \dots \quad * \\
 * \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\
 * \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\
 * \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\
 * \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{k+1}
 \end{array}
 \left.
 \vphantom{\begin{array}{c} n \\ | \\ m - * \quad * \quad * \quad \dots \quad * \\ * \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ * \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ * \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ * \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{k+1} \end{array}}
 \right\} k+1, \quad * \neq 0.$$

O próximo resultado é uma extensão de um teorema de Padé. Ele caracteriza as formas de Padé do tipo (i, j) para $C(z)$ e dá uma fórmula para os postos dos sistemas lineares S_{ij} e S_{ij}^v .

Teorema 1.9. *Seja $\frac{P(z)}{Q(z)}$ uma fração de Padé para a série de potências $C(z) \in \mathcal{P}$, $c_0 \neq 0$. Sejam m e n os graus de P e Q , respectivamente, e suponha que a série de potências $C(z)Q(z) - P(z)$ comece exatamente com a potência $z^{m+n+k+1}$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) $k \geq 0$;

(b) $R_{\mu\nu}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ se, e somente se,

$$m \leq \mu \leq m+k \quad e \quad n \leq \nu \leq n+k. \quad (1.38)$$

Se (μ, ν) satisfaz (1.38), então:

(c) $\frac{u(z)}{v(z)}$ é uma forma de Padé do tipo (μ, ν) para $C(z)$ se, e somente se,

$$u(z) = z^{\lambda_{\mu\nu}} d(z) P(z), \quad v(z) = z^{\lambda_{\mu\nu}} d(z) Q(z),$$

com $\lambda_{\mu\nu} = \max\{0, (\mu - m) + (\nu - n) - k\}$ e $d(z) \neq 0$ de grau no máximo

$$\chi_{\mu\nu} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - \max \left\{ \left| \mu - m - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right|, \left| \nu - n - \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \right| \right\}, & k < \infty, \\ \min \{ \mu - m, \nu - n \}, & k = \infty. \end{cases}$$

$$(d) \mu + \nu - \text{posto}(S_{\mu\nu}) = \nu - \text{posto}(S_{\mu\nu}^v) = \chi_{\mu\nu}.$$

(e)

$$c_{\mu n} \neq 0, \quad m \leq \mu \leq m + k,$$

$$c_{m\nu} \neq 0, \quad n \leq \nu \leq n + k,$$

$$c_{\mu\nu} = 0, \quad m < \mu \leq m + k \quad e \quad n < \nu \leq n + k.$$

Demonstração: Sejam $\frac{u(z)}{v(z)}$ uma forma de Padé do tipo (μ, ν) e $R_{\mu\nu}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Então,

$$\text{grau}(u) \leq \mu, \quad \text{grau}(v) \leq \nu, \quad C(z)v(z) - u(z) = O(z^{\mu+\nu+1}). \quad (1.39)$$

Desde que $c_0 \neq 0$ e $(u_0, \dots, u_m, v_0, \dots, v_n)^T \neq 0$, segue, da forma de $S_{\mu\nu}$, que $v \neq 0$ e $u \neq 0$. Colocando em evidência o máximo divisor comum entre u e v , obtemos

$$\begin{aligned} u(z) &= z^\lambda(d_0 + d_1z + \dots + d_\chi z^\chi)P(z) \\ v(z) &= z^\lambda(d_0 + d_1z + \dots + d_\chi z^\chi)Q(z) \end{aligned} \quad (1.40)$$

com $d_0 d_\chi \neq 0$. Então, de (1.39),

$$C(z)[z^\lambda(d_0 + d_1z + \dots + d_\chi z^\chi)Q(z)] - z^\lambda(d_0 + d_1z + \dots + d_\chi z^\chi)P(z) = O(z^{\mu+\nu+1}).$$

Logo,

$$z^\lambda(d_0 + d_1z + \dots + d_\chi z^\chi)[C(z)Q(z) - P(z)] = O(z^{\mu+\nu+1})$$

e, assim,

$$z^\lambda [C(z)Q(z) - P(z)] = O(z^{\mu+\nu+1}). \quad (1.41)$$

Como λ e χ são graus de polinômios, então

$$\lambda \geq 0 \quad e \quad \chi \geq 0. \quad (1.42)$$

De (1.39) e (1.40), segue que

$$\chi + \lambda + m \leq \mu \quad e \quad \chi + \lambda + n \leq \nu. \quad (1.43)$$

Por hipótese, a série $C(z)Q(z) - P(z)$ começa exatamente na potência $z^{m+n+k+1}$. Logo, de (1.41),

$$\mu + \nu \leq m + n + k + \lambda. \quad (1.44)$$

As desigualdades (1.42), (1.43) e (1.44) são equivalentes a

$$\begin{aligned} \chi &\geq 0, \\ \lambda &\geq \max\{0, (\mu - m) + (\nu - n) - k\}, \\ \chi + \lambda &\leq \min\{\mu - m, \nu - n\}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Reciprocamente, sejam os inteiros μ e ν tais que existem inteiros χ e λ satisfazendo (1.45). Para $d(z) = d_0 + d_1z + \dots + d_\chi z^\chi \neq 0$ arbitrário, definimos u e v por (1.40). Então, (1.39) vale em razão das desigualdades (1.45), $\frac{u}{v}$ é uma forma de Padé do tipo (μ, ν) e $R_{\mu\nu} = \frac{P}{Q}$.

Desde que $\frac{P}{Q}$ é uma fração de Padé para $C(z)$, existem inteiros χ, λ, μ e ν satisfazendo (1.45). Então,

$$k \geq \underbrace{(\mu - m)}_{\geq \chi + \lambda} + \underbrace{(\nu - n)}_{\geq \chi + \lambda} - \lambda \geq 2\chi + 2\lambda - \lambda = 2\chi + \lambda \geq 0,$$

o que demonstra (a).

Além disso, $R_{\mu\nu} = \frac{P}{Q}$ se, e somente se, existe uma solução (χ, λ) de (1.45). Isto é possível se, e somente se,

$$\max\{0, (\mu - m) + (\nu - n) - k\} \leq \lambda \leq \min\{\mu - m, \nu - n\} - \chi \leq \min\{\mu - m, \nu - n\}.$$

Isto é, se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu - m &\quad \text{e} \quad (\mu - m) + (\nu - n) - k \leq \nu - n \Rightarrow m \leq \mu \leq m + k, \\ 0 \leq \nu - n &\quad \text{e} \quad (\mu - m) + (\nu - n) - k \leq \mu - m \Rightarrow n \leq \nu \leq n + k, \end{aligned} \quad (1.46)$$

ou seja, (1.38) vale, provando, assim, (b).

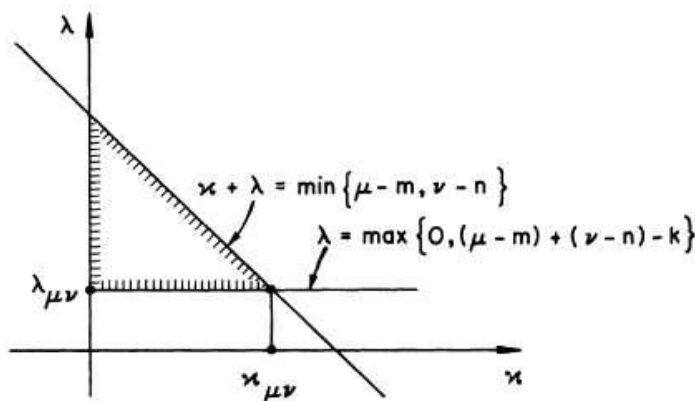


Figura 1.1: Região factível para encontrar $\chi_{\mu\nu}$ e $\lambda_{\mu\nu}$.

A forma de Padé mais geral do tipo (μ, ν) é obtida quando λ é minimizado e χ é maximizado, sujeitos às desigualdades (1.45). Cálculos simples de otimização mostram que os valores ótimos são $\lambda = \lambda_{\mu\nu}$ e $\chi = \chi_{\mu\nu}$ (veja a Figura 1.1). Isto prova (c). Isso significa que o grau do polinômio $d(z)$ na forma de Padé mais geral do tipo (μ, ν) é $\chi_{\mu\nu}$.

A afirmação (d) segue uma vez que as soluções gerais de $S_{\mu\nu}$ e $S_{\mu\nu}^v$ contêm $\chi_{\mu\nu} + 1$ parâmetros.

Agora, $c_{\mu\nu} = 0$ se, e somente se, $S_{\mu\nu}^v$ tem uma solução não trivial com $v_0 = 0$. Mas, segue de (1.45) que

$$\chi_{\mu\nu} + \lambda_{\mu\nu} = \min\{\mu - m, \nu - n\},$$

e $\lambda_{\mu\nu}$ é o inteiro maximal λ para o qual $v(z) = O(z^\lambda)$ em alguma forma de Padé do tipo (μ, ν) . Logo, $c_{\mu\nu} = 0$ se, e somente se, $\lambda_{\mu\nu} > 0$ e, portanto, $\min\{\mu - m, \nu - n\} > 0$. Ou seja,

$$\mu - m > 0 \Rightarrow \mu > m \quad \text{e} \quad \nu - n > 0 \Rightarrow \nu > n.$$

Isto, junto com (1.46), prova (e), completando a demonstração do teorema. ■

Os blocos quadrados descritos no teorema anterior, R-bloco e c-bloco, são chamados de blocos de ordem k .

Definição 1.12. *A fração de Padé R_{mn} é normal se o R-bloco que a contém é de ordem $k = 0$, isto é, R_{mn} ocorre apenas uma vez na tabela de Padé.*

Definição 1.13. *A série de potências $C(z)$ é normal se todas as suas frações de Padé são normais. Isto é, não há duas frações de Padé iguais.*

Corolário 1.1. *Uma fração de Padé R_{mn} é normal se, e somente se, os determinantes*

$$c_{mn}, c_{m,n+1}, c_{m+1,n} \text{ e } c_{m+1,n+1}$$

não se anulam. A série de potências $C(z)$ é normal se, e somente se,

$$c_{mn} \neq 0, \quad m \geq 0, \quad n \geq 0.$$

Em particular, os coeficientes $c_{m1} = c_m$, $m \geq 0$, não devem se anular.

1.5.1 Conexão com frações contínuas

O resultado abaixo nos mostra como as séries de potências, ou os aproximantes de Padé, estão relacionadas a frações contínuas, conhecidas como C-frações.

Definição 1.14. *Uma C-fração é uma fração contínua da forma*

$$c_0 + \frac{a_1 z^{i_1}}{1} + \frac{a_2 z^{i_2}}{1} + \frac{a_3 z^{i_3}}{1} + \dots$$

com $c_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ e $i_n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

A fração contínua

$$\frac{c_0}{1 + \frac{a_1 z^{i_1}}{1} + \frac{a_2 z^{i_2}}{1} + \frac{a_3 z^{i_3}}{1} + \dots}$$

também é chamada C-fração.

Teorema 1.10. *Seja*

$$1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (1.47)$$

uma série de potências formal tal que seus aproximantes de Padé

$$R_{00}(z), R_{10}(z), R_{11}(z), R_{21}(z), R_{22}(z), R_{32}(z), \dots$$

são normais. Então, à série de potências (1.47), corresponde uma C-fração regular

$$1 + \frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \frac{a_3 z}{1} + \dots + \frac{a_n z}{1} + \dots, \quad (1.48)$$

cujos aproximantes C_n satisfazem

$$C_{2m} = R_{mm}, \quad C_{2m+1} = R_{m+1,m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.49)$$

Para a demonstração referimo-nos a Jones e Thron [12], pág. 191. Vale, também, a recíproca desse resultado.

Podemos observar que aproximantes consecutivos C_n e C_{n+1} da C-fração formam “degraus” na tabela de Padé (1.37) da série (1.47).

1.5.2 Tabela de Padé de dois pontos

A tabela de Padé usual interpola apenas uma série de potências formal em um ponto, normalmente $z = 0$, e está relacionada a frações contínuas do tipo C-fração regular.

Vimos que, neste caso, os aproximantes formam “degraus” na tabela de Padé.

As T-frações

$$\frac{z}{1 + d_1 z} + \frac{z}{1 + d_2 z} + \frac{z}{1 + d_3 z} + \dots + \frac{z}{1 + d_n z} + \dots, \quad (1.50)$$

introduzidas em 1948 por Thron [22] e minuciosamente estudadas por ele, têm uma estrutura simples e também correspondem a séries de potências. Entretanto, nenhum dos aproximantes estão na tabela de Padé (exceto o caso $d_n = 0$ para todo n). Muito mais tarde descobriu-se que, além da correspondência com a série de potências

$$c_0 + c_1z + c_3z^2 - \dots + c_kz^{k-1} + \dots, \quad (\text{correspondência em } 0), \quad (1.51)$$

a T-fração geral

$$c_0 + \frac{F_1z}{1 + G_1z} + \frac{F_2z}{1 + G_2z} + \frac{F_3z}{1 + G_3z} + \dots + \frac{F_nz}{1 + G_nz} + \dots, \quad F_n \neq 0, \quad (1.52)$$

corresponde, também, à série de potências

$$\frac{c_0^*}{z} + \frac{c_1^*}{z^2} + \frac{c_2^*}{z^3} + \dots + \frac{c_k^*}{z^{k+1}} + \dots \quad (\text{correspondência no } \infty), \quad (1.53)$$

se $G_n \neq 0$ para todo n . Sob determinadas condições sobre os coeficientes, também vale a recíproca, isto é, para cada par de séries de potências (1.51) e (1.53) corresponde uma T-fração geral (1.52). A interpolação fornecida pela T-fração geral é dividida entre interpolação em 0 e ∞ .

A *tabela de Padé de dois pontos* (em 0 e ∞) é construída a partir de um par de séries (1.51) e (1.53) de maneira semelhante ao caso de apenas um ponto. Nesta tabela, encontram-se os aproximantes da T-fração geral (1.52). Esta surpreendente propriedade das T-frações gerais (a de corresponderem a duas séries de potências simultaneamente, uma em $z = 0$ e uma em $z = \infty$) foi primeiramente observada por McCabe e Murphy [17]. Eles chamaram sua fração contínua de M-fração, dada por

$$\frac{n_1}{1 + d_1z} + \frac{n_2z}{1 + d_2z} + \frac{n_3z}{1 + d_3z} + \dots + \frac{n_mz}{1 + d_mz} + \dots \quad (1.54)$$

Mas, M-frações são, essencialmente, T-frações.

Denotemos por $F(z)$ e $F^*(z)$ as duas séries (1.51) e (1.53), respectivamente. Então, o aproximante de Padé de dois pontos $\frac{p_{m,n}(z)}{q_{m,n}(z)}$ de (F, F^*) é obtido de modo a *ajustar*, simultaneamente, um determinado número de termos (os primeiros) de cada série. Isto pode ser feito de diversas maneiras. Podemos exigir, por exemplo, que

$$p_{m,n}(z)F(z) - q_{m,n}(z) = O(z^{(m+n+1)/2}) \quad \text{e} \quad p_{m,n}(z)F^*(z) - q_{m,n}(z) = O\left(\frac{1}{z^{(m+n+3)/2}}\right)$$

se $m + n + 1$ é par.

Logo, podemos escrever

$$\frac{q_{m,n}(z)}{p_{m,n}(z)} = \begin{cases} c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots + c_{(m+n-1)/2} z^{(m+n-1)/2} + O(z^{(m+n+1)/2}), \\ \frac{c_0^*}{z} + \frac{c_1^*}{z^2} + \cdots + \frac{c_{(m+n+1)/2}^*}{z^{(m+n+1)/2}} + O(z^{-(m+n+3)/2}). \end{cases}$$

Analogamente para o caso $m + n + 1$ ímpar.

No próximo capítulo, veremos mais detalhes sobre a tabela de Padé de dois pontos. Veja, por exemplo, [15] para uma definição mais precisa e propriedades sobre essa tabela.

Capítulo 2

Frações contínuas que correspondem a expansões em séries de potências em dois pontos

Neste capítulo, baseado nos artigos [1], [2], [9], [16] e [17], apresentamos os métodos, construídos a partir dos determinantes de Hankel e do algoritmo Q-D, para a obtenção da fração contínua correspondente às séries de potências, em $z = 0$ e $z = \infty$, de uma função $f(z)$ dada. Apresentamos, ainda, o caso em que há coeficientes nulos em uma ou em ambas as séries de potências e, também, quando os coeficientes das séries apresentam simetria.

Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada analítica em U se, para todo ponto $z_0 \in U$ existe uma vizinhança $V_{z_0} \subset U$ tal que $f(z)$ pode ser expressa como uma série de potências de centro z_0 para todo $z \in V_{z_0}$.

Seja $f(z)$ uma função analítica que possui expansões em séries de potências em $z = 0$ e em $z = \infty$. Resultados análogos podem ser obtidos para dois pontos finitos aplicando-se uma transformação bilinear à variável z .

Assim, consideremos o caso em que, para $|z|$ pequeno, temos

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots \quad (2.1)$$

e, para $|z|$ grande,

$$f(z) = -\frac{a_{-1}}{z} - \frac{a_{-2}}{z^2} - \frac{a_{-3}}{z^3} - \frac{a_{-4}}{z^4} - \dots \quad (2.2)$$

Suponhamos que $a_0, a_1 \neq 0$ e explicaremos a razão desta restrição mais adiante.

Os coeficientes a_i , $i \in \mathbb{Z}$, podem ser complexos, mas para muitas aplicações os tomamos reais. A razão para a notação em (2.2) ficará clara posteriormente.

Suponhamos, ainda, que $f(z)$ seja injetora e que não tenha singularidades no eixo real positivo, salvo, possivelmente, em $z = 0$ e $z = \infty$. Os sinais de igual em (2.1) e em (2.2) não são estritamente necessários, as expansões podem ser consideradas como em caráter assintótico, valendo para alguns intervalos de valores de $\arg z$ que contêm $\arg z = 0$.

Aproximemos $f(z)$ por funções racionais da forma

$$\frac{\alpha_{m,0} + \alpha_{m,1}z + \cdots + \alpha_{m,m-1}z^{m-1}}{1 + \beta_{m,1}z + \cdots + \beta_{m,m}z^m} := f_{i,j}(z), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

em que os coeficientes $\alpha_{m,i}$ e $\beta_{m,i+1}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, são independentes de z . Esses $2m$ coeficientes podem ser escolhidos de tal forma que, quando a função racional em (2.3) é expandida para $|z|$ pequeno e para $|z|$ grande, haja coincidência com i termos de (2.1) e j termos de (2.2), totalizando $i + j = 2m$ termos ao todo. Portanto, esta é a razão de denotarmos a aproximação por $f_{i,j}(z)$.

Assim,

$$f(z) - f_{i,j}(z) = O(z^i, z^{-(j+1)}), \quad (2.4)$$

em que o símbolo no lado direito significa que o lado esquerdo é da ordem de z^i para $|z|$ pequeno e da ordem de $z^{-(j+1)}$ para $|z|$ grande.

Seja a fração contínua

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} + \cdots + \frac{p_m}{q_m} + \cdots$$

com m -ésimo convergente $\frac{P_m}{Q_m}$, em que P_m e Q_m satisfazem as relações de recorrência

$$P_{m+1} = q_{m+1}P_m + p_{m+1}P_{m-1} \quad \text{e} \quad Q_{m+1} = q_{m+1}Q_m + p_{m+1}Q_{m-1}, \quad (2.5)$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$, com valores iniciais $P_0 = 0$, $P_1 = p_1$, $Q_0 = 1$ e $Q_1 = q_1$.

Definindo $\Delta_{r,s}$ por

$$\Delta_{r,s} := P_r Q_s - P_s Q_r,$$

de (2.5) encontramos que

$$p_{m+1} = -\frac{\Delta_{m,m+1}}{\Delta_{m-1,m}} \quad \text{e} \quad q_{m+1} = \frac{\Delta_{m-1,m+1}}{\Delta_{m-1,m}}, \quad (2.6)$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$. Tomando $P_m(z)$ e $Q_m(z)$ das formas

$$P_m(z) = \alpha_{m,0} + \alpha_{m,1}z + \cdots + \alpha_{m,m-1}z^{m-1} \quad \text{e} \quad Q_m(z) = 1 + \beta_{m,1}z + \cdots + \beta_{m,m}z^m,$$

temos

$$f_{i,j}(z) \equiv \frac{P_m(z)}{Q_m(z)}, \quad i + j = 2m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Assim, a partir dos polinômios $P_m(z)$ e $Q_m(z)$ podemos determinar os elementos da fração contínua. Como já mencionamos, Murphy, em (1966), mostrou que a fração contínua desejada é da forma

$$\frac{n_1}{1 + d_1 z} + \frac{n_2 z}{1 + d_2 z} + \frac{n_3 z}{1 + d_3 z} + \dots + \frac{n_m z}{1 + d_m z} + \dots \quad (2.7)$$

em que n_m e d_m são constantes independentes de z . De fato, mostraremos que as frações contínuas são dessa forma. Vamos supor que $n_m, m \geq 1$, sejam não nulos, mas que $d_m, m \geq 1$, podem ser iguais a zero.

2.1 Construção de frações contínuas pelos determinantes de Hankel

2.1.1 Caso $i = j = m$

Consideremos a sequência de funções racionais

$$f_{1,1}, f_{2,2}, f_{3,3}, \dots, f_{m,m}, \dots,$$

que aproximam $f(z)$.

Temos, de (2.4), que

$$f_{m,m}(z) - f(z) = O(z^m, z^{-(m+1)}) \quad (2.8)$$

e, também, que

$$\frac{\Delta_{m,m+1}(z)}{Q_m(z)Q_{m+1}(z)} = f_{m,m}(z) - f_{m+1,m+1}(z) = \left(\frac{P_m(z)}{Q_m(z)} - f(z) \right) - \left(\frac{P_{m+1}(z)}{Q_{m+1}(z)} - f(z) \right).$$

Os termos entre parênteses são, respectivamente, de ordens $O(z^m, z^{-(m+1)})$ e $O(z^{m+1}, z^{-(m+2)})$. Logo,

$$P_m(z) - Q_m(z)f(z) = O(z^m, z^{-1}) \quad \text{e} \quad P_{m+1}(z) - Q_{m+1}(z)f(z) = O(z^{m+1}, z^{-1})$$

e, então,

$$\begin{aligned} \Delta_{m,m+1}(z) &= Q_{m+1}(z)[P_m(z) - Q_m(z)f(z)] - Q_m(z)[P_{m+1}(z) - Q_{m+1}(z)f(z)] \\ &= O(z^m, z^m), \end{aligned}$$

uma vez que a primeira parcela é de ordem $O(z^m, z^m)$ e a segunda, de ordem $O(z^{m+1}, z^{m-1})$.

Portanto, como $\Delta_{m,m+1}(z)$ é um polinômio de grau no máximo $2m$, ele terá um único termo em z^m . Esse termo é facilmente determinado considerando-se o termo em z^m de $Q_{m+1}(z) \{P_m(z) - Q_m(z)f(z)\}$, isto é, de

$$-Q_m(z)f(z) = -(1 + \beta_{m,1}z + \dots + \beta_{m,m}z^m)(a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots).$$

Portanto,

$$\Delta_{m,m+1}(z) = \delta_m z^m, \quad (2.9)$$

com

$$\delta_m = -(a_m + a_{m-1}\beta_{m,1} + \dots + a_0\beta_{m,m}). \quad (2.10)$$

Usando as expansões (2.1) e (2.2) para $f(z)$ junto com (2.8), obtemos as $2m$ equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{m,0} = a_0 \\ \alpha_{m,1} = a_1 + a_0\beta_{m,1} \\ \alpha_{m,2} = a_2 + a_1\beta_{m,1} + a_0\beta_{m,2} \\ \vdots \\ \alpha_{m,m-1} = a_{m-1} + a_{m-2}\beta_{m,1} + \dots + a_0\beta_{m,m-1} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha_{m,m-1} = a_{-1}\beta_{m,m} \\ -\alpha_{m,m-2} = a_{-2}\beta_{m,m} + a_{-1}\beta_{m,m-1} \\ -\alpha_{m,m-3} = a_{-3}\beta_{m,m} + a_{-2}\beta_{m,m-1} + a_{-1}\beta_{m,m-2} \\ \vdots \\ -\alpha_{m,0} = a_{-m}\beta_{m,m} + a_{-m+1}\beta_{m,m-1} + \dots + a_{-1}\beta_{m,1} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Substituindo os valores dos $\alpha_{m,i}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, dados em (2.11), em (2.12), chegamos ao sistema linear de m equações com $m+1$ incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_{-1}\beta_{m,1} + a_{-2}\beta_{m,2} + \dots + a_{-m}\beta_{m,m} = 0 \\ a_1 + a_0\beta_{m,1} + a_{-1}\beta_{m,2} + \dots + a_{-m+1}\beta_{m,m} = 0 \\ a_2 + a_1\beta_{m,1} + a_0\beta_{m,2} + \dots + a_{-m+2}\beta_{m,m} = 0 \\ \vdots \\ a_{m-1} + a_{m-2}\beta_{m,1} + a_{m-3}\beta_{m,2} + \dots + a_{-1}\beta_{m,m} = 0 \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Sejam os determinantes $D_{r,s}$ definidos por:

$$D_{r,s} := \begin{vmatrix} a_r & a_{r+1} & \cdots & a_{r+s} \\ a_{r-1} & a_r & \cdots & a_{r+s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-s} & a_{r-s+1} & \cdots & a_r \end{vmatrix}$$

para $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $s = 0, 1, 2, \dots$ e $D_{r,s} \equiv 1$ para $s < 0$. Note que estes determinantes são bastante similares aos determinantes de Hankel definidos no Capítulo 1. Na verdade, a relação entre os determinantes é a seguinte:

$$D_{r,s} = (-1)^{\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor} H_{s+1}^{(r-s)}. \quad (2.14)$$

Portanto, a diferença, se houver, é apenas no sinal.

Acrescentando a equação (2.10) ao sistema (2.13), obtemos

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-m} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{-m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & a_{-1} \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{m,1} \\ \vdots \\ \beta_{m,m-1} \\ \beta_{m,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\delta_m \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema linear acima pela regra de Cramer, pelo Teorema de Laplace encontramos $\delta_m = (-1)^{m+1} \frac{D_{0,m}}{D_{-1,m-1}}$ e, assim, de (2.9),

$$\Delta_{m,m+1}(z) = (-1)^{m+1} \frac{D_{0,m}}{D_{-1,m-1}} z^m.$$

Temos, ainda, que $\Delta_{m,m+2}(z)$ é um polinômio de grau no máximo $2m + 1$ e que

$$\frac{\Delta_{m,m+2}(z)}{Q_m(z)Q_{m+2}(z)} = f_{m,m}(z) - f_{m+2,m+2}(z) = \left(\frac{P_m(z)}{Q_m(z)} - f(z) \right) - \left(\frac{P_{m+2}(z)}{Q_{m+2}(z)} - f(z) \right).$$

Como, na equação anterior, o primeiro termo entre parênteses é de ordem $O(z^m, z^{-(m+1)})$ e o segundo de ordem $O(z^{m+2}, z^{-(m+3)})$, então,

$$P_m(z) - Q_m(z)f(z) = O(z^m, z^{-1}) \quad \text{e} \quad P_{m+2}(z) - Q_{m+2}(z)f(z) = O(z^{m+2}, z^{-1}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta_{m,m+2}(z) &= Q_{m+2}(z) [P_m(z) - Q_m(z)f(z)] - Q_m(z) [P_{m+2}(z) - Q_{m+2}(z)f(z)] \\ &= O(z^m, z^{m+1}), \end{aligned}$$

uma vez que a primeira parcela é $O(z^m, z^{m+1})$ e a segunda de $O(z^{m+2}, z^{m-1})$.

Portanto, $\Delta_{m,m+2}$ consiste de apenas dois termos e é da forma $\delta_m z^m + \delta_{m+1} z^{m+1}$, onde os δ_k , $k = m, m+1$, são constantes. Claramente $\delta_m z^m$ é exatamente $\Delta_{m,m+1}$ e o outro termo é calculado considerando-se o termo em z^{m+1} de $Q_{m+2}(z) \{P_m(z) - Q_m(z)f(z)\}$ para $|z|$ grande, ou seja, o termo em z^{m+1} de

$$\begin{aligned} & (1 + \beta_{m+2,1}z + \dots + \beta_{m+2,m+2}z^{m+2}) \left\{ [(\alpha_{m,0} + a_{-1}\alpha_{m,1} + \dots + a_{-m}\beta_{m,m}) \right. \\ & + (\alpha_{m,1} + a_{-1}\beta_{m,2} + \dots + a_{-(m-1)}\beta_{m,m})z + \dots + (\alpha_{m,m-1} + a_{-1}\beta_{m,m})z^{m-1}] \\ & \left. + (a_{-1} + a_{-2}\beta_{m,1} + \dots + a_{-(m+1)}\beta_{m,m})z^{-1} + O(z^{-2}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Lembrando que $P_m(z) - Q_m(z)f(z) = O(z^{-1})$ para $|z|$ grande, então o termo entre colchetes na expressão (2.15) é nulo.

Portanto, o termo em z^{m+1} de $\Delta_{m,m+2}(z)$ é da forma

$$\beta_{m+2,m+2}C_m z^{m+1},$$

onde

$$C_m = a_{-1} + a_{-2}\beta_{m,1} + \dots + a_{-(m+1)}\beta_{m,m}.$$

Agora, usando a equação acima e (2.13), obtemos o sistema linear

$$\begin{pmatrix} a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots & a_{-m-1} \\ a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{-m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-2} & a_{m-3} & a_{m-4} & \cdots & a_{-2} \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & a_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{m,1} \\ \vdots \\ \beta_{m,m-1} \\ \beta_{m,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Novamente, usando Cramer e Laplace, obtemos

$$C_m = \frac{D_{-1,m}}{D_{-1,m-1}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Resolvendo, agora, (2.16) para $\beta_{m,m}$ e substituindo o valor de C_m , encontramos

$$\beta_{m,m} = (-1)^m \frac{D_{0,m-1}}{D_{-1,m-1}} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Assim, temos

$$\Delta_{m,m+2}(z) = \Delta_{m,m+1}(z) + (-1)^m \frac{D_{-1,m}D_{0,m+1}}{D_{-1,m-1}D_{-1,m+1}} z^{m+1}.$$

Portanto, de (2.6), obtemos

$$p_{m+1} = \frac{D_{0,m}D_{-1,m-2}}{D_{-1,m-1}D_{0,m-1}}z \quad \text{e} \quad q_{m+1} = 1 - \frac{D_{0,m}D_{-1,m-1}}{D_{-1,m}D_{0,m-1}}z,$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$

Para $m = 0$ encontramos que a fórmula ainda vale, desde que p_1 é independente de z . Assim, a fração contínua (2.7), que tem convergentes $f_{1,1}(z), f_{2,2}(z), f_{3,3}(z), \dots$, tem coeficientes

$$n_m = \frac{D_{0,m-1}D_{-1,m-3}}{D_{-1,m-2}D_{0,m-2}} \quad \text{e} \quad d_m = -\frac{D_{0,m-1}D_{-1,m-2}}{D_{-1,m-1}D_{0,m-2}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

2.1.2 Caso $i \neq j$

No caso em que $i \neq j$, podemos construir a fração contínua usando praticamente o mesmo método anterior, ainda que pequenas diferenças ocorram. Como, nas aproximações pelas funções racionais, apenas um número par de parâmetros está disponível, vamos considerar as aproximações da forma $f_{m+2r,m}(z)$, $r = 0, 1, 2, \dots$. Para obter uma fração contínua cujos elementos podem ser expressos de maneira simples, para $r = 1, 2, 3, \dots$, tomamos, primeiramente, a sequência

$$f_{1,1}(z), f_{2,2}(z), \dots, f_{m,m}(z), f_{m+1,m-1}(z), f_{m+2,m}(z), \dots, f_{m+2r-1,m-1}(z), f_{m+2r,m}(z), \dots \quad (2.18)$$

Essa sequência de funções racionais são os sucessivos convergentes da fração contínua

$$\frac{n_1}{1+d_1z} + \frac{n_2z}{1+d_2} + \frac{n_3z}{1+d_3z} + \dots + \frac{n_mz}{1+d_mz} + \frac{n_{m+1}z}{1} + \frac{n_{m+2}z}{1} + \dots \quad (2.19)$$

De fato, n_r e d_r , $r = 1, 2, \dots, m$, são dados por (2.17) e para calcular os demais coeficientes n_r , d_r , $r \geq m+1$, notemos que

$$f_{m+2r-2,m}(z) = \frac{P_{m+2r-2}(z)}{Q_{m+2r-2}(z)} \Rightarrow i+j = 2m+2r-2 = 2(m+r-1),$$

ou seja, P_{m+2r-2} tem grau $m+r-2$ e Q_{m+2r-2} tem grau $m+r-1$. Da mesma forma,

$$f_{m+2r-1,m-1}(z) = \frac{P_{m+2r-1}(z)}{Q_{m+2r-1}(z)} \Rightarrow i+j = 2m+2r-2 = 2(m+r-1),$$

ou seja, P_{m+2r-1} tem grau $m+r-2$ e Q_{m+2r-1} tem grau $m+r-1$. Lembremos que

$$\begin{aligned} f_{m+2r,m}(z) - f(z) &= O(z^{m+2r}, z^{-(m+1)}), \\ f_{m+2r-1,m-1}(z) - f(z) &= O(z^{m+2r-1}, z^{-m}), \\ f_{m+2r-2,m}(z) - f(z) &= O(z^{m+2r-2}, z^{-(m+1)}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Acrescentando (2.23) a (2.24), obtemos

$$\begin{pmatrix} a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} & \cdots & a_{-m} \\ a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & a_{-m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m+2r-3} & a_{m+2r-4} & a_{m+2r-5} & \cdots & a_{r-2} \\ a_{m+2r-2} & a_{m+2r-3} & a_{m+2r-4} & \cdots & a_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{m+2r-2,1} \\ \vdots \\ \beta_{m+2r-2,m+r-2} \\ \beta_{m+2r-2,m+r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\delta_{m+2r-2} \end{pmatrix}.$$

Por Cramer e Laplace, encontramos

$$\Delta_{m+2r-2,m+2r}(z) = (-1)^{m+r+1} \frac{D_{r-1,m+r-1}}{D_{r-2,m+r-2}} z^{m+2r-2}.$$

Fazendo os mesmos cálculos para $\Delta_{m+2r-3,m+2r-1}(z)$, obtemos

$$\Delta_{m+2r-3,m+2r-1}(z) = (-1)^{m+r} \frac{D_{r-1,m+r-2}}{D_{r-2,m+r-3}} z^{m+2r-3}.$$

Portanto, de (2.6),

$$\begin{aligned} p_{m+2r-1} &= -\frac{\Delta_{m+2r-2,m+2r-1}}{\Delta_{m+2r-3,m+2r-2}} = \frac{D_{r-1,m+r-1} D_{r-2,m+r-3}}{D_{r-2,m+r-2} D_{r-1,m+r-2}} z, \\ q_{m+2r-1} &= \frac{\Delta_{m+2r-3,m+2r-1}}{\Delta_{m+2r-3,m+2r-2}} = 1, \end{aligned} \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

e

$$\begin{aligned} p_{m+2r} &= -\frac{\Delta_{m+2r-1,m+2r}}{\Delta_{m+2r-2,m+2r-1}} = -\frac{D_{r,m+r-1} D_{r-2,m+r-2}}{D_{r-1,m+r-2} D_{r-1,m+r-1}} z, \\ q_{m+2r} &= \frac{\Delta_{m+2r-2,m+2r}}{\Delta_{m+2r-2,m+2r-1}} = 1, \end{aligned} \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} n_{m+2r-1} &= \frac{D_{r-1,m+r-1} D_{r-2,m+r-3}}{D_{r-2,m+r-2} D_{r-1,m+r-2}}, \quad d_{m+2r-1} = 0, \\ n_{m+2r} &= -\frac{D_{r,m+r-1} D_{r-2,m+r-2}}{D_{r-1,m+r-2} D_{r-1,m+r-1}}, \quad d_{m+2r} = 0, \end{aligned} \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

Um caso particular de (2.19) é obtido quando $m = 0$. Exceto para um múltiplo de z , encontramos a fração contínua que corresponde a (2.1) apenas. As equações (2.25) tornam-se as expressões convencionais para os coeficientes dessa fração contínua.

Considerando a aproximação $f_{m+2r,m}$, podemos, também, tomar a sequência

$$f_{1,0}(z), f_{2,0}(z), f_{3,0}(z), \dots, f_{2r,0}(z), f_{2r+1,1}(z), \dots, f_{2r+m,m}(z), \dots$$

Vamos mostrar que essa sequência nos leva à fração contínua

$$\frac{n_1}{1} + \frac{n_2 z}{1} + \frac{n_3 z}{1} + \dots + \frac{n_{2r} z}{1} + \frac{n_{2r+1} z}{1 + d_{2r+1} z} + \dots + \frac{n_{2r+m} z}{1 + d_{2r+m} z} + \dots \quad (2.26)$$

Assim como para (2.18), usando o mesmo raciocínio encontramos que

$$n_{2r+m} = \frac{D_{r,r+m-1} D_{r-1,r+m-3}}{D_{r-1,r+m-2} D_{r,r+m-2}} \quad \text{e} \quad d_{2r+m} = -\frac{D_{r,r+m-1} D_{r-1,r+m-2}}{D_{r-1,r+m-1} D_{r,r+m-2}},$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$

Agora, vamos calcular os coeficientes n_m e d_m , $m = 1, 2, \dots, 2r$. Observando o comportamento dos graus dos polinômios P_{2s} , P_{2s-1} , Q_{2s} e Q_{2s-1} , $s = 1, 2, \dots, r$, encontramos que P_{2s} , P_{2s-1} e Q_{2s-1} têm graus $s - 1$ e que Q_{2s} tem grau s .

Note que não utilizaremos a série para $|z|$ grande, pois temos $j = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} f_{2s,0}(z) - f(z) &= O(z^{2s}), \\ f_{2s-1,0}(z) - f(z) &= O(z^{2s-1}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$f_{2s-3,0}(z) - f(z) = O(z^{2s-3}). \quad (2.28)$$

Como $\Delta_{2s-1,2s}(z)$ tem grau $2s - 1$, então

$$\frac{\Delta_{2s-1,2s}(z)}{Q_{2s-1}(z)Q_{2s}(z)} = f_{2s-1,0}(z) - f_{2s,0}(z) = \underbrace{\left(\frac{P_{2s-1}(z)}{Q_{2s-1}(z)} - f(z) \right)}_{O(z^{2s-1})} - \underbrace{\left(\frac{P_{2s}(z)}{Q_{2s}(z)} - f(z) \right)}_{O(z^{2s})}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_{2s-1,2s}(z) &= Q_{2s}(z) [P_{2s-1}(z) - Q_{2s-1}(z)f(z)] - Q_{2s-1}(z) [P_{2s}(z) - Q_{2s}(z)f(z)] \\ &= O(z^{2s-1}). \end{aligned}$$

Portanto, $\Delta_{2s-1,2s}$ consiste de apenas um termo em z^{2s-1} , que é calculado considerando-se o termo em z^{2s-1} de $Q_{2s}(z) \{P_{2s-1}(z) - Q_{2s-1}(z)f(z)\}$, isto é, de $-Q_{2s-1}(z)f(z)$. Encontramos, então, $\Delta_{2s-1,2s}(z) = \delta_{2s-1} z^{2s-1}$, com

$$-\delta_{2s-1} = a_{2s-1} + a_{2s-2}\beta_{2s-1,1} + \dots + a_{s+1}\beta_{2s-1,s-2}. \quad (2.29)$$

De (2.27) e (2.29), obtemos

$$\begin{pmatrix} a_s & a_{s-1} & a_{s-2} & \cdots & a_1 \\ a_{s+1} & a_s & a_{s-1} & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2s-2} & a_{2s-3} & a_{2s-4} & \cdots & a_{s-1} \\ a_{2s-1} & a_{2s-2} & a_{2s-3} & \cdots & a_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{2s-1,1} \\ \vdots \\ \beta_{2s-1,s-2} \\ \beta_{2s-1,s-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\delta_{2s-1} \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema usando Cramer e Laplace, encontramos

$$\Delta_{2s-1,2s}(z) = (-1)^{s+1} \frac{D_{s,s-1}}{D_{s-1,s-2}} z^{2s-1}.$$

Fazendo os mesmos cálculos para $\Delta_{2s-2,2s-1}(z)$, obtemos

$$\Delta_{2s-2,2s-1}(z) = (-1)^{s+1} \frac{D_{s-1,s-1}}{D_{s-2,s-2}} z^{2s-2}.$$

Temos, ainda, que $\Delta_{2s-3,2s-1}(z)$ tem grau $2s - 3$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{2s-3,2s-1}(z)}{Q_{2s-3}(z)Q_{2s-1}(z)} &= f_{2s-3,0}(z) - f_{2s-1,0}(z) \\ &= \underbrace{\left(\frac{P_{2s-3}(z)}{Q_{2s-3}(z)} - f(z) \right)}_{O(z^{2s-3})} - \underbrace{\left(\frac{P_{2s-1}(z)}{Q_{2s-1}(z)} - f(z) \right)}_{O(z^{2s-1})}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_{2s-3,2s-1}(z) &= Q_{2s-1}(z) [P_{2s-3}(z) - Q_{2s-3}(z)f(z)] - Q_{2s-3}(z) [P_{2s-1}(z) - Q_{2s-1}(z)f(z)] \\ &= O(z^{2s-3}). \end{aligned}$$

Portanto, $\Delta_{2s-3,2s-1}$ consiste de apenas um termo em z^{2s-3} , que é facilmente calculado considerando-se o termo em z^{2s-3} de $-Q_{2s-3}(z)f(z)$. Encontramos, então,

$$\Delta_{2s-3,2s-1}(z) + \{a_{2s-3} + a_{2s-4}\beta_{2s-3,1} + \cdots + a_{s-1}\beta_{2s-3,s-2}\} z^{2s-3} = 0.$$

Seja

$$-\delta_{2s-3} = a_{2s-3} + a_{2s-4}\beta_{2s-3,1} + \cdots + a_{s-1}\beta_{2s-3,s-2}. \quad (2.30)$$

De (2.28) e (2.30), obtemos

$$\begin{pmatrix} a_{s-1} & a_{s-2} & a_{s-3} & \cdots & a_1 \\ a_s & a_{s-1} & a_{s-2} & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2s-4} & a_{2s-5} & a_{2s-6} & \cdots & a_{s-2} \\ a_{2s-3} & a_{2s-4} & a_{2s-5} & \cdots & a_{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_{2s-3,1} \\ \vdots \\ \beta_{2s-3,s-3} \\ \beta_{2s-3,s-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\delta_{2s-3} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\Delta_{2s-3,2s-1}(z) = (-1)^s \frac{D_{s-1,s-2}}{D_{s-2,s-3}} z^{2s-3}.$$

Fazendo os mesmos cálculos para $\Delta_{2s-2,2s}(z)$, encontramos

$$\Delta_{2s-2,2s}(z) = (-1)^{s+1} \frac{D_{s-1,s-1}}{D_{s-2,s-2}} z^{2s-2}.$$

Portanto, de (2.6),

$$p_{2s-1} = -\frac{\Delta_{2s-2,2s-1}}{\Delta_{2s-3,2s-2}} = \frac{D_{s-1,s-1}D_{s-2,s-3}}{D_{s-2,s-2}D_{s-1,s-2}}z,$$

$$q_{2s-1} = \frac{\Delta_{2s-3,2s-1}}{\Delta_{2s-3,2s-2}} = 1$$

e

$$p_{2s} = -\frac{\Delta_{2s-1,2s}}{\Delta_{2s-2,2s-1}} = -\frac{D_{s,s-1}D_{s-2,s-2}}{D_{s-1,s-2}D_{s-1,s-1}}z,$$

$$q_{2s} = \frac{\Delta_{2s-2,2s}}{\Delta_{2s-2,2s-1}} = 1,$$

para $s = 1, 2, \dots, r$. Ou seja,

$$n_{2s-1} = \frac{D_{s-1,s-1}D_{s-2,s-3}}{D_{s-2,s-2}D_{s-1,s-2}}, \quad d_{2s-1} = 0,$$

$$n_{2s} = -\frac{D_{s,s-1}D_{s-2,s-2}}{D_{s-1,s-2}D_{s-1,s-1}}, \quad d_{2s} = 0,$$

$s = 1, 2, \dots, r.$

Assumindo que a expansão (2.1) é conhecida, a fração contínua (2.19) é útil quando apenas um número finito de termos de (2.2) está disponível ou é facilmente determinado, ou se há uma boa razão para se usar apenas um número finito de termos, como no caso em que a série é assintótica.

O resultado (2.26) pode ser útil quando a_0 ou a_{-1} é zero. Até aqui assumimos que ambos são não nulos. Assim, $n_1 = a_0$ e $d_1 = -a_0/a_{-1}$ são não nulos. Se essa condição não é satisfeita, pequenas modificações podem ser feitas. Por exemplo, se $a_0 = 0$, mas $a_1, a_2 \neq 0$, podemos considerar a função $g(z) = \{f(z) - a_1z\}/z^2$. As expansões para $g(z)$ para $|z|$ pequeno e para $|z|$ grande possuem termos líderes a_2 e $-a_1/z$, respectivamente. Podemos, então, proceder da mesma forma que para $g(z)$. Por outro lado, podemos formar uma fração contínua da forma (2.26) para a função $f(z)/z$ no caso em que $a_0 = 0$, mas $a_1, a_2 \neq 0$. Assim, temos

$$\frac{n_1}{1} + \frac{n_2z}{1} + \frac{n_3z}{1+d_3z} + \frac{n_4z}{1+d_4z} + \dots$$

onde os dois primeiros termos da série

$$\frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2z + a_3z^2 + a_4z^3 + \dots$$

são ajustados antes de qualquer termo de

$$\frac{f(z)}{z} = -\left\{\frac{a_{-1}}{z^2} + \frac{a_{-2}}{z^3} + \frac{a_{-3}}{z^4} + \dots\right\}.$$

2.2 Construção de frações contínuas pelo algoritmo Q-D

Uma das muitas aplicações em Análise Numérica do algoritmo Q-D de Rutishauser [19], é transformar uma única expansão em série de potências na fração contínua correspondente. Mesmo no caso em que as frações contínuas correspondem a séries de potências em dois pontos, podemos construir um algoritmo, que é essencialmente o Algoritmo Q-D.

Começamos supondo que, em (2.1) e (2.2), $a_r \neq 0$, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e definindo

$$\begin{aligned} f^{(r)}(z) &:= \frac{f(z) - (a_0 + a_1 z + \dots + a_{r-1} z^{r-1})}{z^r}, \\ f^{(-r)}(z) &:= \left[f(z) + \left(\frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_{-r}}{z^r} \right) \right] z^r, \end{aligned} \quad (2.31)$$

para $r = 1, 2, 3, \dots$, onde $f^{(0)}(z) \equiv f(z)$.

Temos que $f^{(r)}(z)$ possui as expansões

$$\begin{aligned} f^{(r)}(z) &= a_r + a_{r+1}z + a_{r+2}z^2 + a_{r+3}z^3 + \dots, & |z| \text{ pequeno,} \\ f^{(r)}(z) &= - \left\{ \frac{a_{r-1}}{z} + \frac{a_{r-2}}{z^2} + \frac{a_{r-3}}{z^3} + \frac{a_{r-4}}{z^4} + \dots \right\}, & |z| \text{ grande,} \end{aligned}$$

e que $f^{(-r)}(z)$ possui as expansões

$$\begin{aligned} f^{(-r)}(z) &= a_{-r} + a_{-r+1}z + a_{-r+2}z^2 + a_{-r+3}z^3 + \dots, & |z| \text{ pequeno,} \\ f^{(-r)}(z) &= - \left\{ \frac{a_{-r-1}}{z} + \frac{a_{-r-2}}{z^2} + \frac{a_{-r-3}}{z^3} + \frac{a_{-r-4}}{z^4} + \dots \right\}, & |z| \text{ grande,} \end{aligned}$$

para $r = 1, 2, 3, \dots$.

Assim, $f^{(r)}(z)$, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, corresponde à fração contínua

$$\frac{a_r}{1 + d_1^{(r)} z} + \frac{n_2^{(r)} z}{1 + d_2^{(r)} z} + \frac{n_3^{(r)} z}{1 + d_3^{(r)} z} + \frac{n_4^{(r)} z}{1 + d_4^{(r)} z} + \dots \quad (2.32)$$

Agora, a fração contínua (2.32) pode ser considerada como a parte par (Teorema 1.2) de

$$\frac{a_r}{1 +} \frac{d_1^{(r)} z}{1 -} \frac{l_2^{(r)}}{1 +} \frac{m_2^{(r)} z}{1 -} \frac{l_3^{(r)}}{1 +} \frac{m_3^{(r)} z}{1 -} \dots, \quad (2.33)$$

onde

$$l_i^{(r)} = \frac{n_i^{(r)}}{n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)}} \quad \text{e} \quad m_i^{(r)} = \frac{d_i^{(r)} d_{i-1}^{(r)}}{n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)}},$$

para $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e $i = 2, 3, 4, \dots$

A parte ímpar (Teorema 1.3), de (2.33) é dada por

$$a_r - \frac{a_r d_1^{(r)} z}{1 - l_2^{(r)} + d_1^{(r)} z} + \frac{l_2^{(r)} m_2^{(r)} z}{1 - l_3^{(r)} + m_2^{(r)} z} + \frac{l_3^{(r)} m_3^{(r)} z}{1 - l_4^{(r)} + m_3^{(r)} z} + \dots \quad (2.34)$$

Sejam $\frac{P_m^{(r)}(z)}{Q_m^{(r)}(z)}$, $\frac{R_m^{(r)}(z)}{S_m^{(r)}(z)}$ e $\frac{U_m^{(r)}(z)}{V_m^{(r)}(z)}$ os m -ésimos convergentes das frações contínuas (2.32), (2.33) e (2.34), respectivamente.

Temos que $R_{2m+2}^{(r)}(z)$ e $S_{2m+1}^{(r)}(z)$ têm grau m , $R_{2m+1}^{(r)}(z)$ tem grau $m-1$ e $S_{2m+2}^{(r)}(z)$ tem grau $m+1$. Assim, por (1.4),

$$\frac{R_{2m+2}^{(r)}(z)}{S_{2m+2}^{(r)}(z)} - \frac{R_{2m+1}^{(r)}(z)}{S_{2m+1}^{(r)}(z)} = \frac{\gamma_{m+1} z^{m+1}}{S_{2m+2}^{(r)}(z) S_{2m+1}^{(r)}(z)} = O(z^{m+1}, z^{-m}),$$

onde γ_{m+1} é o produto dos numeradores parciais de (2.33).

Portanto, devemos ter

$$\left(\frac{R_{2m+2}^{(r)}(z)}{S_{2m+2}^{(r)}(z)} - f^{(r)}(z) \right) - \left(\frac{R_{2m+1}^{(r)}(z)}{S_{2m+1}^{(r)}(z)} - f^{(r)}(z) \right) = O(z^{m+1}, z^{-m}). \quad (2.35)$$

Como $\frac{R_{2m+2}^{(r)}(z)}{S_{2m+2}^{(r)}(z)} = \frac{P_{m+1}^{(r)}(z)}{Q_{m+1}^{(r)}(z)}$, então

$$\left(\frac{R_{2m+2}^{(r)}(z)}{S_{2m+2}^{(r)}(z)} - f^{(r)}(z) \right) = O(z^{m+1}, z^{-m-2}).$$

Assim, de (2.35),

$$\left(\frac{R_{2m+1}^{(r)}(z)}{S_{2m+1}^{(r)}(z)} - f^{(r)}(z) \right) = O(z^{m+1}, z^{-m}).$$

Logo, como $\frac{R_{2m+1}^{(r)}(z)}{S_{2m+1}^{(r)}(z)} = \frac{U_m^{(r)}(z)}{V_m^{(r)}(z)}$, obtemos

$$\frac{\frac{U_m^{(r)}(z)}{V_m^{(r)}(z)} - a_r}{z} - \frac{f^{(r)}(z) - a_r}{z} = O(z^m, z^{-m-1}). \quad (2.36)$$

Portanto, de (2.34) e (2.36), temos que $\frac{f^{(r)}(z) - a_r}{z}$ gera a fração contínua

$$- \frac{a_r d_1^{(r)}}{1 - l_2^{(r)} + d_1^{(r)} z} + \frac{l_2^{(r)} m_2^{(r)} z}{1 - l_3^{(r)} + m_2^{(r)} z} + \frac{l_3^{(r)} m_3^{(r)} z}{1 - l_4^{(r)} + m_3^{(r)} z} + \dots \quad (2.37)$$

Dividindo o numerador e o denominador do primeiro quociente parcial da fração contínua (2.37) por $(1 - l_2^{(r)})$, o numerador e o denominador do segundo quociente parcial por $(1 - l_3^{(r)})$ e, assim, sucessivamente, obtemos a fração contínua equivalente

$$\frac{-a_r d_1^{(r)} / (1 - l_2^{(r)})}{1 + d_1^{(r)} z / (1 - l_2^{(r)})} + \frac{l_2^{(r)} m_2^{(r)} z / [(1 - l_2^{(r)})(1 - l_3^{(r)})]}{1 + m_2^{(r)} z / (1 - l_3^{(r)})} + \frac{l_3^{(r)} m_3^{(r)} z / [(1 - l_3^{(r)})(1 - l_4^{(r)})]}{1 + m_3^{(r)} z / (1 - l_4^{(r)})} + \dots \quad (2.38)$$

Mas, como $\frac{f^{(r)}(z) - a_r}{z} = f^{(r+1)}(z)$, de (2.32) ela gera a fração contínua

$$\frac{a_{r+1}}{1 + d_1^{(r+1)} z} + \frac{n_2^{(r+1)} z}{1 + d_2^{(r+1)} z} + \frac{n_3^{(r+1)} z}{1 + d_3^{(r+1)} z} + \frac{n_4^{(r+1)} z}{1 + d_4^{(r+1)} z} + \dots \quad (2.39)$$

Comparando (2.38) e (2.39), para $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, obtemos

$$d_1^{(r+1)} z = \frac{d_1^{(r)} z}{1 - l_2^{(r)}} \Rightarrow d_1^{(r+1)} = \frac{d_1^{(r)}}{1 - \frac{n_2^{(r)}}{n_2^{(r)} + d_1^{(r)}}} \Rightarrow d_1^{(r+1)} = n_2^{(r)} + d_1^{(r)}.$$

Então,

$$a_{r+1} = -\frac{a_r d_1^{(r)}}{1 - l_2^{(r)}} \Rightarrow a_{r+1} = -a_r (n_2^{(r)} + d_1^{(r)}) \Rightarrow d_1^{(r+1)} = -\frac{a_{r+1}}{a_r}, \quad (2.40)$$

para $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Temos, ainda, que

$$\begin{aligned} \frac{l_i^{(r)}}{1 - l_i^{(r)}} &= \frac{n_i^{(r)}}{n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)}} \frac{1}{1 - n_i^{(r)} / (n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)})} \\ &= \frac{n_i^{(r)}}{n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)}} \frac{1}{d_{i-1}^{(r)} / (n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)})} = \frac{n_i^{(r)}}{d_{i-1}^{(r)}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{m_i^{(r)}}{1 - l_{i+1}^{(r)}} &= \frac{d_i^{(r)} d_{i-1}^{(r)}}{n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)}} \frac{1}{1 - n_{i+1}^{(r)} / (n_{i+1}^{(r)} + d_i^{(r)})} \\ &= \frac{d_i^{(r)} d_{i-1}^{(r)}}{n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)}} \frac{1}{d_i^{(r)} / (n_{i+1}^{(r)} + d_i^{(r)})} = d_{i-1}^{(r)} \frac{n_{i+1}^{(r)} + d_i^{(r)}}{n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$n_i^{(r+1)} = \frac{l_i^{(r)} m_i^{(r)}}{(1 - l_i^{(r)})(1 - l_{i+1}^{(r)})} = \frac{n_i^{(r)}}{d_{i-1}^{(r)}} d_{i-1}^{(r)} \frac{n_{i+1}^{(r)} + d_i^{(r)}}{n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)}}, \quad (2.41)$$

$$d_i^{(r+1)} = \frac{m_i^{(r)}}{1 - l_{i+1}^{(r)}} = d_{i-1}^{(r)} \frac{n_{i+1}^{(r)} + d_i^{(r)}}{n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)}}, \quad (2.42)$$

para $i = 2, 3, \dots$ e $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Substituindo (2.42) em (2.41), obtemos

$$n_i^{(r+1)} = \frac{n_i^{(r)}}{d_{i-1}^{(r)}} d_i^{(r+1)} \Rightarrow n_i^{(r+1)} d_{i-1}^{(r)} = n_i^{(r)} d_i^{(r+1)}.$$

Agora, somando (2.41) e (2.42), encontramos

$$n_i^{(r+1)} + d_i^{(r+1)} = \left(n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)} \right) \left(\frac{n_{i+1}^{(r)} + d_i^{(r)}}{n_i^{(r)} + d_{i-1}^{(r)}} \right) \Rightarrow n_i^{(r+1)} + d_i^{(r+1)} = n_{i+1}^{(r)} + d_i^{(r)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} n_{i+1}^{(r+1)} \times d_i^{(r)} &= n_{i+1}^{(r)} \times d_{i+1}^{(r+1)} \\ n_i^{(r+1)} + d_i^{(r+1)} &= n_{i+1}^{(r)} + d_i^{(r)} \end{aligned}, \quad (2.43)$$

para $i = 2, 3, \dots$ e $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Então, se definirmos $n_1^{(r)} \equiv 0$ e calcularmos $d_1^{(r)}$ por (2.40), as equações em (2.43) podem ser usadas para calcularmos $n_i^{(r)}$ e $d_i^{(r)}$, para $i = 2, 3, \dots$ e $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. As regras de formulação seguem a característica padrão do algoritmo Q-D.

Referimo-nos à tabela abaixo como tabela $n-d$.

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0	$d_1^{(-4)}$	$n_2^{(-4)}$	$d_2^{(-4)}$	$n_3^{(-4)}$	$d_3^{(-4)}$	$n_4^{(-4)}$	$d_4^{(-4)}$	\dots
0	$d_1^{(-3)}$	$n_2^{(-3)}$	$d_2^{(-3)}$	$n_3^{(-3)}$	$d_3^{(-3)}$	$n_4^{(-3)}$	$d_4^{(-3)}$	\dots
0	$d_1^{(-2)}$	$n_2^{(-2)}$	$d_2^{(-2)}$	$n_3^{(-2)}$	$d_3^{(-2)}$	$n_4^{(-2)}$	$d_4^{(-2)}$	\dots
0	$d_1^{(-1)}$	$n_2^{(-1)}$	$d_2^{(-1)}$	$n_3^{(-1)}$	$d_3^{(-1)}$	$n_4^{(-1)}$	$d_4^{(-1)}$	\dots
0	$d_1^{(0)}$	$n_2^{(0)}$	$d_2^{(0)}$	$n_3^{(0)}$	$d_3^{(0)}$	$n_4^{(0)}$	$d_4^{(0)}$	\dots
0	$d_1^{(1)}$	$n_2^{(1)}$	$d_2^{(1)}$	$n_3^{(1)}$	$d_3^{(1)}$	$n_4^{(1)}$	$d_4^{(1)}$	\dots
0	$d_1^{(2)}$	$n_2^{(2)}$	$d_2^{(2)}$	$n_3^{(2)}$	$d_3^{(2)}$	$n_4^{(2)}$	$d_4^{(2)}$	\dots
0	$d_1^{(3)}$	$n_2^{(3)}$	$d_2^{(3)}$	$n_3^{(3)}$	$d_3^{(3)}$	$n_4^{(3)}$	$d_4^{(3)}$	\dots
0	$d_1^{(4)}$	$n_2^{(4)}$	$d_2^{(4)}$	$n_3^{(4)}$	$d_3^{(4)}$	$n_4^{(4)}$	$d_4^{(4)}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

O bloco interno mostra como os n e d subsequentes são calculados a partir de $n_1^{(r)}$ e $d_1^{(r)}$. A fração contínua que ajusta um número igual de termos de (2.1) e (2.2) é, então,

$$\frac{a_0}{1 + d_1^{(0)} z} + \frac{n_2^{(0)} z}{1 + d_2^{(0)} z} + \frac{n_3^{(0)} z}{1 + d_3^{(0)} z} + \dots \quad (2.44)$$

e seus coeficientes estão na linha central da tabela $n-d$. Por exemplo, dados os quatro primeiros termos de (2.1) e (2.2), isto é, a_r , para $r = -4, -3, \dots, 3$, calculamos os coeficientes que estão no bloco externo na tabela $n-d$. Esses coeficientes incluem os quatro primeiros quocientes parciais da fração contínua (2.44).

É fácil ver que podemos obter as frações contínuas correspondentes a todas as funções $f^{(r)}(z)$ que possuem as séries

$$a_r + a_{r+1}z + a_{r+2}z^2 + a_{r+3}z^3 + \dots, \quad |z| \text{ pequeno} \quad (2.45)$$

e

$$-\frac{a_{r-1}}{z} - \frac{a_{r-2}}{z^2} - \frac{a_{r-3}}{z^3} - \frac{a_{r-4}}{z^4} - \dots, \quad |z| \text{ grande}, \quad (2.46)$$

que geram a fração contínua

$$\frac{a_r}{1 + d_1^{(r)}z} + \frac{n_2^{(r)}z}{1 + d_2^{(r)}z} + \frac{n_3^{(r)}z}{1 + d_3^{(r)}z} + \frac{n_4^{(r)}z}{1 + d_4^{(r)}z} + \dots \quad (2.47)$$

Além disso, desde que em (2.43) as equações são lineares, os elementos da tabela $n-d$ podem ser gerados a partir de condições iniciais diferentes das dadas em (2.40). Por exemplo, se $f(z)$ possui apenas uma expansão em séries de potências, digamos (2.1), podemos construir (na nossa notação) a fração contínua correspondente

$$\frac{a_0}{1} + \frac{n_2^{(0)}z}{1} + \frac{n_3^{(0)}z}{1} + \dots$$

Esse problema é resolvido, convencionalmente, pela aplicação direta do algoritmo Q-D. Aqui, o problema pode ser resolvido se tomarmos

$$d_1^{(r)} = -\frac{a_r}{a_{r-1}}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e} \quad d_i^{(0)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Então, a equação (2.43) permite que os elementos da tabela $n-d$ sejam completados da maneira usual na linha $n^{(0)} - d^{(0)}$ e abaixo dela. Se necessário, os elementos das linhas abaixo da linha $n^{(0)} - d^{(0)}$ podem ser obtidos isolando-se $n_{i+1}^{(r)}$ e $d_i^{(r)}$ na primeira equação de (2.43) e substituindo-os na segunda. Obtemos, então,

$$\begin{aligned} \left(n_{i+1}^{(r+1)} + d_{i+1}^{(r+1)} \right) d_i^{(r)} &= \left(n_i^{(r+1)} + d_i^{(r+1)} \right) d_{i+1}^{(r+1)}, \\ \left(n_{i+1}^{(r+1)} + d_{i+1}^{(r+1)} \right) n_{i+1}^{(r)} &= \left(n_i^{(r+1)} + d_i^{(r+1)} \right) n_{i+1}^{(r+1)}. \end{aligned}$$

Podemos, também, usar (2.43) para construir a fração contínua que ajusta um número finito de termos de, digamos, (2.2) e todos os termos de (2.1). Nesse problema,

conhecemos a_r para $r = -m, -(m-1), -(m-2), \dots$, e fazemos

$$\begin{aligned} d_1^{(r)} &= -\frac{a_r}{a_{r-1}}, & r &= -(m-1), -(m-2), \dots \\ d_i^{(0)} &= 0, & i &= (m+1), (m+2), \dots \end{aligned}$$

Na fração contínua resultante, o $(m+2r)$ -ésimo convergente é $f_{m+2r,m}$ e o $(m+2r+1)$ -ésimo convergente é $f_{m+2r+1,m-1}$ como em (2.19).

Com condições iniciais adequadas, a fração contínua (2.26), e outras, pode ser gerada pela tabela n - d .

Podemos relacionar o algoritmo (2.43) aos resultados das seções anteriores, como mostraremos a seguir.

Na forma de determinante, vemos, de (2.7), que

$$n_i^{(r)} = \frac{D_{r,i-1}D_{r-1,i-3}}{D_{r-1,i-2}D_{r,i-2}} \quad \text{e} \quad d_i^{(r)} = -\frac{D_{r,i-1}D_{r-1,i-2}}{D_{r-1,i-1}D_{r,i-2}},$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$ e $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Substituindo esses resultados na segunda equação de (2.43) e reorganizando, obtemos

$$\frac{D_{r,i-2}D_{r,i} - D_{r,i-1}^2}{D_{r-1,i-1}D_{r+1,i-1}} = \frac{D_{r,i-1}D_{r,i-3}}{D_{r-1,i-2}D_{r+1,i-2}}, \quad (2.48)$$

para $i = 2, 3, 4, \dots$ e $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Agora, de (1.15) e (2.14) temos

$$D_{r,i-1}^2 - D_{r-1,i-1}D_{r+1,i-1} - D_{r,i}D_{r,i-2} = 0$$

e, então, substituindo em (2.48), obtemos

$$\frac{D_{r-1,i-1}D_{r+1,i-1}}{D_{r-1,i-1}D_{r+1,i-1}} = \frac{D_{r-1,i-2}D_{r+1,i-2}}{D_{r-1,i-2}D_{r+1,i-2}}$$

e a identidade está estabelecida.

Substituindo os determinantes na primeira equação de (2.43), facilmente a reduzimos à identidade.

Para o caso particular $i = 1$, temos

$$n_1^{(r)} = D_{r,0} = a_r \quad \text{e} \quad d_1^{(r)} = -\frac{D_{r,0}}{D_{r-1,0}} = -\frac{a_r}{a_{r-1}}.$$

Então, demonstramos a conexão entre o algoritmo (2.43) e os resultados de determinantes da seção anterior.

2.2.1 Caso em que as séries de potências apresentam coeficientes nulos

Na tabela n - d , os elementos que são afetados pelo coeficiente a_1 estão no interior do bloco na tabela abaixo:

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
0	$d_1^{(-3)}$	$n_2^{(-3)}$	$d_2^{(-3)}$	$n_3^{(-3)}$	$d_3^{(-3)}$	\dots
0	$d_1^{(-2)}$	$n_2^{(-2)}$	$d_2^{(-2)}$	$n_3^{(-2)}$	$d_3^{(-2)}$	\dots
0	$d_1^{(-1)}$	$n_2^{(-1)}$	$d_2^{(-1)}$	$n_3^{(-1)}$	$d_3^{(-1)}$	\dots
0	$d_1^{(0)}$	$n_2^{(0)}$	$d_2^{(0)}$	$n_3^{(0)}$	$d_3^{(0)}$	\dots
0	$d_1^{(1)}$	$n_2^{(1)}$	$d_2^{(1)}$	$n_3^{(1)}$	$d_3^{(1)}$	\dots
0	$d_1^{(2)}$	$n_2^{(2)}$	$d_2^{(2)}$	$n_3^{(2)}$	$d_3^{(2)}$	\dots
0	$d_1^{(3)}$	$n_2^{(3)}$	$d_2^{(3)}$	$n_3^{(3)}$	$d_3^{(3)}$	\dots
0	$d_1^{(4)}$	$n_2^{(4)}$	$d_2^{(4)}$	$n_3^{(4)}$	$d_3^{(4)}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Se $a_1 = 0$ e todos os outros coeficientes das séries são não nulos, temos $d_1^{(1)} = 0$ e $d_1^{(2)} = \infty$. Para calcular os elementos subsequentes da tabela, escolhemos, por exemplo, $a_1 = \varepsilon$ e fazemos $\varepsilon \rightarrow 0$ nos elementos afetados. Os resultados são:

$$\begin{array}{cccccc}
 & n_2^{(0)} = -d_1^{(0)} & & n_3^{(0)} = -d_2^{(0)} & & \\
 d_1^{(1)} = 0 & n_2^{(1)} = \pm\infty & d_2^{(1)} = \pm\infty & n_3^{(1)} = d_1^{(3)} & & \\
 d_1^{(2)} = \pm\infty & n_2^{(2)} = \pm\infty & d_2^{(2)} = 0 & n_3^{(2)} = 0 & d_3^{(2)} = \frac{-a_2/a_0}{n_3^{(1)}} & (2.49) \\
 & & d_2^{(3)} = -n_2^{(3)} & & d_3^{(3)} = -n_3^{(3)} &
 \end{array}$$

Todos os outros elementos podem ser calculados da maneira usual.

Se a fração contínua é construída diretamente das séries (2.1) e (2.2) usando determinantes, as condições $a_1 = 0$ e $a_k \neq 0$, para $k = 0, -1, \pm 2, \pm 3, \dots$, não trazem nenhuma dificuldade. O problema ocorre na construção da fração contínua pelo algoritmo Q-D, como mostra (2.49).

É claro que, de (2.49), coeficientes nulos fazem com que os cálculos dos elementos da tabela sejam muito trabalhosos e é certamente mais fácil, por motivos numéricos, modificar $f(z)$.

Se alguns dos coeficientes, que não sejam a_0 ou a_{-1} , nas expansões (2.1) e (2.2) de $f(z)$ são nulos, consideramos a função

$$g(z) := f(z) - \frac{K}{1+z}, \quad (2.50)$$

onde a constante K é escolhida de tal forma que os coeficientes das expansões em série de potências correspondentes a $g(z)$ não sejam nulos, ou seja, possam ser calculados a partir do algoritmo Q-D da maneira usual. A fração contínua para $f(z)$ pode então ser expressa como a soma das frações contínuas de $g(z)$ e da função racional $\frac{K}{1+z}$. Para construir a fração contínua para $f(z)$ da forma (2.7), procedemos como segue.

Suponha que a fração contínua para $f(z)$ seja

$$\frac{n_1}{1+d_1z} + \frac{n_2z}{1+d_2z} + \dots + \frac{n_mz}{1+d_mz} + \dots, \quad (2.51)$$

com convergentes $\frac{N_m}{D_m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, e que a fração contínua para $g(z)$ seja

$$\frac{p_1}{1+q_1z} + \frac{p_2z}{1+q_2z} + \dots + \frac{p_mz}{1+q_mz} + \dots, \quad (2.52)$$

com convergentes $\frac{P_m}{Q_m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$.

Os polinômios N_m e P_m são de grau $m - 1$ em z e D_m e Q_m de grau m em z .

Definimos

$$\begin{aligned} \alpha_m &:= p_1 p_2 \dots p_m, & \gamma_m &:= n_1 n_2 \dots n_m, \\ \beta_m &:= q_1 q_2 \dots q_m, & \delta_m &:= d_1 d_2 \dots d_m \end{aligned} \quad (2.53)$$

e λ_m e μ_m os coeficientes de z nos polinômios Q_m e D_m , respectivamente. Ou seja, temos que Q_{m+1} e D_{m+1} são das formas

$$\begin{aligned} Q_{m+1}(z) &= 1 + \lambda_{m+1}z + \dots + \beta_{m+1}z^{m+1}, \\ D_{m+1}(z) &= 1 + \mu_{m+1}z + \dots + \delta_{m+1}z^{m+1}, \end{aligned} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.54)$$

Das relações de recorrência (2.5), temos

$$\begin{aligned} Q_{m+1}(z) &= (1 + q_{m+1}z)Q_m(z) + p_{m+1}zQ_{m-1}(z) \\ &= (1 + q_{m+1}z)[1 + \lambda_m z + \dots + \beta_m z^m] + p_{m+1}z[1 + \lambda_{m-1}z + \dots + \beta_{m-1}z^{m-1}], \\ D_{m+1}(z) &= (1 + d_{m+1}z)D_m(z) + n_{m+1}zD_{m-1}(z) \\ &= (1 + d_{m+1}z)[1 + \mu_m z + \dots + \delta_m z^m] + n_{m+1}z[1 + \mu_{m-1}z + \dots + \delta_{m-1}z^{m-1}], \end{aligned}$$

para $m = 0, 1, 2, \dots$

Comparando os coeficientes de z em (2.54) e nas equações acima, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= q_1, & \lambda_{m+1} &= \lambda_m + q_{m+1} + p_{m+1}, & m &= 1, 2, 3, \dots \\ \mu_1 &= d_1, & \mu_{m+1} &= \mu_m + d_{m+1} + n_{m+1},\end{aligned}\quad (2.55)$$

Suponha, ainda, que todos os p_m e q_m , $m = 1, 2, 3, \dots$, em (2.52), sejam conhecidos e que os n_m e d_m , $m = 1, 2, 3, \dots$, em (2.51), sejam escolhidos tais que

$$\frac{P_m}{Q_m} + \frac{K}{1+z} - \frac{N_m}{D_m} = O(z^m, z^{-(m+1)}),$$

ou seja,

$$\frac{(1+z)[P_m D_m - N_m Q_m] + K Q_m D_m}{(1+z)Q_m D_m} = O(z^m, z^{-(m+1)}).$$

O numerador no lado esquerdo da equação acima é de grau $2m$ e o denominador, de grau $2m+1$. Portanto, para que o lado direito seja válido, o numerador do lado esquerdo deve ter um único termo em z^m , que chamaremos $C_m z^m$, onde C_m é uma constante que depende de m mas não de z . Então,

$$(1+z)[P_m D_m - N_m Q_m] + K Q_m D_m = C_m z^m,$$

ou seja,

$$(1+z) \left[\frac{P_m}{Q_m} - \frac{N_m}{D_m} \right] + K = \frac{C_m z^m}{Q_m D_m}. \quad (2.56)$$

Fazendo $m = m+1$ na equação acima, obtemos

$$(1+z) \left[\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} - \frac{N_{m+1}}{D_{m+1}} \right] + K = \frac{C_{m+1} z^{m+1}}{Q_{m+1} D_{m+1}}. \quad (2.57)$$

Agora, subtraindo (2.56) de (2.57), encontramos

$$(1+z) \left[\left(\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} - \frac{P_m}{Q_m} \right) - \left(\frac{N_{m+1}}{D_{m+1}} - \frac{N_m}{D_m} \right) \right] = \frac{C_{m+1} z^{m+1}}{Q_{m+1} Q_m} - \frac{C_m z^m}{Q_m D_m}. \quad (2.58)$$

Usando (2.58) e as equações

$$\begin{aligned}\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}} - \frac{P_m}{Q_m} &= \frac{(-1)^m \alpha_{m+1} z^m}{Q_{m+1} Q_m}, \\ \frac{N_{m+1}}{D_{m+1}} - \frac{N_m}{D_m} &= \frac{(-1)^m \gamma_{m+1} z^m}{D_{m+1} D_m},\end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{C_{m+1} z}{Q_{m+1} D_{m+1}} = \frac{C_m}{Q_m D_m} + (-1)^m (1+z) \left[\frac{\alpha_{m+1}}{Q_m Q_{m+1}} - \frac{\gamma_{m+1}}{D_m D_{m+1}} \right],$$

ou seja,

$$zC_{m+1}Q_mD_m = C_mQ_{m+1}D_{m+1} + (-1)^m(1+z)[\alpha_{m+1}D_mD_{m+1} - \gamma_{m+1}Q_mQ_{m+1}]. \quad (2.59)$$

O primeiro membro da equação acima é um polinômio de grau $2m+1$ sem o termo independente. O coeficiente de z^{2m+2} no lado direito deve, portanto, se anular. Assim,

$$C_m\beta_{m+1}\delta_{m+1} + (-1)^m[\alpha_{m+1}\delta_m\delta_{m+1} - \gamma_{m+1}\beta_m\beta_{m+1}] = 0. \quad (2.60)$$

Analogamente, o termo independente do segundo membro de (2.59) é zero. Logo,

$$C_m + (-1)^m[\alpha_{m+1} - \gamma_{m+1}] = 0 \Rightarrow C_m = (-1)^m[\gamma_{m+1} - \alpha_{m+1}]. \quad (2.61)$$

Agora, igualando os coeficientes de z em (2.59), encontramos

$$C_{m+1} = C_m[\lambda_{m+1} + \mu_{m+1}] + (-1)^m\{\alpha_{m+1}[1 + \mu_m + \mu_{m+1}] - \gamma_{m+1}[1 + \lambda_m + \lambda_{m+1}]\}. \quad (2.62)$$

Substituindo a expressão de C_m de (2.61) em (2.60), obtemos

$$\gamma_{m+1} - \alpha_{m+1} = \frac{\gamma_{m+1}\beta_m}{\delta_{m+1}} - \frac{\alpha_{m+1}\delta_m}{\beta_{m+1}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.63)$$

Novamente, substituindo C_m e C_{m+1} em (2.62) e, depois, fazendo $m = m - 1$, encontramos

$$\gamma_{m+1} - \alpha_{m+1} = \gamma_m[1 + \lambda_{m-1} - \mu_m] - \alpha_m[1 + \mu_{m-1} - \lambda_m], \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.64)$$

As equações (2.53), (2.55), (2.63) e (2.64) e os valores iniciais n_1 e d_1 , dados por

$$n_1 = p_1 + K, \quad \text{e} \quad d_1 = \frac{n_1q_1}{p_1 + q_1K},$$

são suficientes para determinar os coeficientes n e d subsequentes.

2.3 Séries de potências que apresentam simetrias

Nesta seção, considerando as duas expansões em série de potências (2.1) e (2.2), veremos alguns resultados sobre frações contínuas quando os coeficientes das correspondentes séries satisfazem relações da forma

$$a_k = \pm a_{-k-s}, \quad (2.65)$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$ e $s = 0, 1, 2, \dots$. Veremos, também, que alguns resultados são gerais, mas existe uma acentuada diferença entre os casos $s \geq 3$ e $s = 0, 1$ ou 2 , e esses últimos dependem do sinal que tomamos em (2.65).

2.3.1 Caso geral

Teorema 2.1. *Se, nas expansões em série de potências (2.1) e (2.2), os coeficientes satisfazem*

$$a_k = a_{-k-s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, s \geq 3, \quad (2.66)$$

então, os coeficientes da tabela $n - d$ satisfazem

$$d_m^{(r)} = \frac{1}{d_m^{(-r-s+1)}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, r$$

e

$$n_m^{(r)} = \frac{n_m^{(-r-s+1)}}{d_m^{(-r-s+1)} d_{m-1}^{(-r-s+1)}}, \quad m = 2, 3, \dots, r+1. \quad (2.67)$$

Demonstração: Se substituirmos z por $1/z$ nas séries (2.45) e (2.46) e na fração contínua (2.47), e, em seguida, dividirmos por z , encontramos, respectivamente,

$$-a_{r-1} - a_{r-2}z - a_{r-3}z^2 - a_{r-4}z^3 - \dots - a_1z^{r-2} - a_0z^{r-1} - a_{-1}z^r - \dots, \quad (2.68)$$

$$\frac{a_r}{z} + \frac{a_{r+1}}{z^2} + \frac{a_{r+2}}{z^3} + \frac{a_{r+3}}{z^4} + \dots + \frac{a_{2r-3}}{z^{r-2}} + \frac{a_{2r-2}}{z^{r-1}} + \frac{a_{2r-1}}{z^r} + \dots \quad (2.69)$$

e

$$\frac{a_r/z}{1 + d_1^{(r)}/z} + \frac{n_2^{(r)}/z}{1 + d_2^{(r)}/z} + \frac{n_3^{(r)}/z}{1 + d_3^{(r)}/z} + \frac{n_4^{(r)}/z}{1 + d_4^{(r)}/z} + \dots$$

A fração contínua acima também pode ser escrita como

$$\frac{a_r}{z + d_1^{(r)}} + \frac{n_2^{(r)}z}{z + d_2^{(r)}} + \frac{n_3^{(r)}z}{z + d_3^{(r)}} + \frac{n_4^{(r)}z}{z + d_4^{(r)}} + \dots$$

Após algumas manipulações simples, chegamos à seguinte fração contínua equivalente

$$\frac{a_r/d_1^{(r)}}{1 + \frac{1}{d_1^{(r)}}z} + \frac{\left(n_2^{(r)}z\right) / \left(d_1^{(r)}d_2^{(r)}\right)}{1 + \frac{1}{d_2^{(r)}}z} + \frac{\left(n_3^{(r)}z\right) / \left(d_2^{(r)}d_3^{(r)}\right)}{1 + \frac{1}{d_3^{(r)}}z} + \dots, \quad (2.70)$$

correspondente às séries (2.68) e (2.69).

Considerando a relação (2.66), encontramos que as séries (2.68) e (2.69) tornam-se, respectivamente,

$$-a_{-r-s+1} - a_{-r-s+2}z - a_{-r-s+3}z^2 - \dots - a_{-s-1}z^{r-2} - a_{-s}z^{r-1} - a_{-1}z^r - \dots \quad (2.71)$$

e

$$\frac{a_{-r-s}}{z} + \frac{a_{-r-s-1}}{z^2} + \frac{a_{-r-s-2}}{z^3} + \dots + \frac{a_{-2r-s+3}}{z^{r-2}} + \frac{a_{-2r-s+2}}{z^{r-1}} + \frac{a_{-2r-s+1}}{z^r} + \dots \quad (2.72)$$

Os primeiros r termos de (2.71) são os mesmos r termos da série

$$-a_{-r-s+1} - a_{-r-s+2}z - a_{-r-s+3}z^2 - \cdots - a_{-s-1}z^{r-2} - a_{-s}z^{r-1} - a_{-s+1}z^r - \cdots. \quad (2.73)$$

e a fração contínua que corresponde a (2.73) e (2.72) é dada por

$$\frac{-a_{-r-s+1}}{1 + d_1^{(-r-s+1)}z} + \frac{n_2^{(-r-s+1)z}}{1 + d_2^{(-r-s+1)}z} + \frac{n_3^{(-r-s+1)z}}{1 + d_3^{(-r-s+1)}z} + \frac{n_4^{(-r-s+1)z}}{1 + d_4^{(-r-s+1)}z} + \cdots. \quad (2.74)$$

Os primeiros r quocientes parciais dessa fração contínua devem ser idênticos aos primeiros r quocientes parciais de (2.70). Logo,

$$d_m^{(-r-s+1)} = \frac{1}{d_m^{(r)}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, r \quad (2.75)$$

e

$$n_m^{(-r-s+1)} = \frac{n_m^{(r)}}{d_m^{(r)} d_{m-1}^{(r)}}, \quad m = 2, 3, \dots, r. \quad (2.76)$$

A relação (2.67) também vale para $m = r + 1$ pela seguinte razão. O coeficiente $n_{r+1}^{(r)}$ pode ser expresso, usando-se a segunda relação em (2.43), por

$$n_{r+1}^{(-r-s+1)} = n_r^{(-r-s+2)} + d_r^{(-r-s+2)} - d_r^{(-r-s+1)}.$$

Agora, observe que as três parcelas que aparecem do lado direito estão todas na parte da tabela $n - d$ em que (2.75) e (2.76) valem. Logo,

$$n_{r+1}^{(-r-s+1)} = \frac{n_r^{(r-1)}}{d_r^{(r-1)} d_{r-1}^{(r-1)}} + \frac{1}{d_r^{(r-1)}} - \frac{1}{d_r^{(r)}}$$

ou, usando-se agora a primeira relação em (2.43),

$$n_{r+1}^{(-r-s+1)} = \frac{n_r^{(r)}}{d_r^{(r)} d_r^{(r-1)}} + \frac{1}{d_r^{(r-1)}} - \frac{1}{d_r^{(r)}}.$$

Aplicando-se novamente a primeira regra de (2.43), e novamente a segunda, obtemos

$$n_{r+1}^{(r)} = \frac{n_{r+1}^{(-r-s+1)}}{d_r^{(-r-s+1)} d_{r+1}^{(-r-s+1)}}. \quad (2.77)$$

Observe que, enquanto (2.67) é uma relação recíproca (do mesmo modo que (2.75) claramente também o é), a relação

$$n_{r+1}^{(-r-s+1)} = \frac{n_{r+1}^{(r)}}{d_r^{(r)} d_{r+1}^{(r)}}, \quad n = 2, 3, \dots, r,$$

não é a recíproca de (2.77). Podemos mostrar isto matematicamente. Porém, o seguinte argumento também demonstra este fato.

Se a relação dada acima e (2.77) fossem relações recíprocas, devido à função que os numeradores parciais exercem na correspondência da fração contínua com as duas séries, isto implicaria que os $(r + 1)$ -ésimos termos de (2.72) e (2.73) seriam necessariamente idênticos, e eles não o são. Isto conclui a prova do teorema. ■

As relações (2.67), (2.75) e (2.77) também valem se os coeficientes das séries de potências satisfazem $a_k = -a_{-k-s}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, com o caso $s = 2$ incluído. A demonstração é análoga à que acabamos de mostrar para o caso $a_k = a_{-k-s}$, $s \geq 3$.

Os coeficientes que estão relacionados por (2.75) e (2.67) são aqueles localizados na parte da tabela $n - d$ acima da linha superior e abaixo da linha inferior, formando degraus, como mostramos a seguir.

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$d_1^{(-s-2)}$	$n_2^{(-s-2)}$	$d_2^{(-s-2)}$	$n_3^{(-s-2)}$	$d_3^{(-s-2)}$	$n_4^{(-s-2)}$	$d_4^{(-s-2)}$	\dots
$d_1^{(-s-1)}$	$n_2^{(-s-1)}$	$d_2^{(-s-1)}$	$n_3^{(-s-1)}$	$d_3^{(-s-1)}$	$n_4^{(-s-1)}$	$d_4^{(-s-1)}$	\dots
$d_1^{(-s)}$	$n_2^{(-s)}$	$d_2^{(-s)}$	$n_3^{(-s)}$	$d_3^{(-s)}$	$n_4^{(-s)}$	$d_4^{(-s)}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$d_1^{(-1)}$	$n_2^{(-1)}$	$d_2^{(-1)}$	$n_3^{(-1)}$	$d_3^{(-1)}$	$n_4^{(-1)}$	$d_4^{(-1)}$	\dots
$d_1^{(0)}$	$n_2^{(0)}$	$d_2^{(0)}$	$n_3^{(0)}$	$d_3^{(0)}$	$n_4^{(0)}$	$d_4^{(0)}$	\dots
$d_1^{(1)}$	$n_2^{(1)}$	$d_2^{(1)}$	$n_3^{(1)}$	$d_3^{(1)}$	$n_4^{(1)}$	$d_4^{(1)}$	\dots
$d_1^{(2)}$	$n_2^{(2)}$	$d_2^{(2)}$	$n_3^{(2)}$	$d_3^{(2)}$	$n_4^{(2)}$	$d_4^{(2)}$	\dots
$d_1^{(3)}$	$n_2^{(3)}$	$d_2^{(3)}$	$n_3^{(3)}$	$d_3^{(3)}$	$n_4^{(3)}$	$d_4^{(3)}$	\dots
$d_1^{(4)}$	$n_2^{(4)}$	$d_2^{(4)}$	$n_3^{(4)}$	$d_3^{(4)}$	$n_4^{(4)}$	$d_4^{(4)}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

2.3.2 Caso $s = 1$

No caso $s = 1$, temos $a_k = \pm a_{-k-1}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Tomando o sinal positivo, as séries (2.71) e (2.73) são idênticas. Portanto, temos o resultado:

Teorema 2.2. *Se os coeficientes das séries de potências (2.1) e (2.2) satisfazem*

$a_k = a_{-k-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, então, os coeficientes da tabela $n-d$ satisfazem as relações

$$d_m^{(-r)} = \frac{1}{d_m^{(r)}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad e \quad n_m^{(-r)} = \frac{n_m^{(r)}}{d_m^{(r)} d_{m-1}^{(r)}}, \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (2.78)$$

para $r = 0, 1, 2, \dots$.

Esse resultado também vale para $a_k = -a_{-k-1}$.

Assim, os elementos abaixo da linha inferior relacionam-se com os elementos acima da linha superior da tabela $n - d$ abaixo.

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$d_1^{(-4)}$	$n_2^{(-4)}$	$d_2^{(-4)}$	$n_3^{(-4)}$	$d_3^{(-4)}$	$n_4^{(-4)}$	$d_4^{(-4)}$	\dots
$d_1^{(-3)}$	$n_2^{(-3)}$	$d_2^{(-3)}$	$n_3^{(-3)}$	$d_3^{(-3)}$	$n_4^{(-3)}$	$d_4^{(-3)}$	\dots
$d_1^{(-2)}$	$n_2^{(-2)}$	$d_2^{(-2)}$	$n_3^{(-2)}$	$d_3^{(-2)}$	$n_4^{(-2)}$	$d_4^{(-2)}$	\dots
$d_1^{(-1)}$	$n_2^{(-1)}$	$d_2^{(-1)}$	$n_3^{(-1)}$	$d_3^{(-1)}$	$n_4^{(-1)}$	$d_4^{(-1)}$	\dots
$d_1^{(0)}$	$n_2^{(0)}$	$d_2^{(0)}$	$n_3^{(0)}$	$d_3^{(0)}$	$n_4^{(0)}$	$d_4^{(0)}$	\dots
$d_1^{(1)}$	$n_2^{(1)}$	$d_2^{(1)}$	$n_3^{(1)}$	$d_3^{(1)}$	$n_4^{(1)}$	$d_4^{(1)}$	\dots
$d_1^{(2)}$	$n_2^{(2)}$	$d_2^{(2)}$	$n_3^{(2)}$	$d_3^{(2)}$	$n_4^{(2)}$	$d_4^{(2)}$	\dots
$d_1^{(3)}$	$n_2^{(3)}$	$d_2^{(3)}$	$n_3^{(3)}$	$d_3^{(3)}$	$n_4^{(3)}$	$d_4^{(3)}$	\dots
$d_1^{(4)}$	$n_2^{(4)}$	$d_2^{(4)}$	$n_3^{(4)}$	$d_3^{(4)}$	$n_4^{(4)}$	$d_4^{(4)}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

2.3.3 Caso $s = 2$

Para $s = 2$, temos $a_k = \pm a_{-k-2}$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Se tomarmos o sinal positivo, observe que as séries (2.71) e (2.73) são idênticas. Logo,

$$d_m^{(-r-1)} = \frac{1}{d_m^{(r)}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad e \quad n_m^{(-r-1)} = \frac{n_m^{(r)}}{d_m^{(r)} d_{m-1}^{(r)}}, \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

para $r = 0, 1, 2, \dots$.

Neste caso, a tabela $n - d$ fica de tal forma que os elementos abaixo da linha estão relacionados com os que estão acima da linha.

O caso $a_{-k-1} = -a_{k+1}$ já foi analisado juntamente com o caso geral $s \geq 3$.

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$d_1^{(-4)}$	$n_2^{(-4)}$	$d_2^{(-4)}$	$n_3^{(-4)}$	$d_3^{(-4)}$	$n_4^{(-4)}$	$d_4^{(-4)}$	\dots
$d_1^{(-3)}$	$n_2^{(-3)}$	$d_2^{(-3)}$	$n_3^{(-3)}$	$d_3^{(-3)}$	$n_4^{(-3)}$	$d_4^{(-3)}$	\dots
$d_1^{(-2)}$	$n_2^{(-2)}$	$d_2^{(-2)}$	$n_3^{(-2)}$	$d_3^{(-2)}$	$n_4^{(-2)}$	$d_4^{(-2)}$	\dots
$d_1^{(-1)}$	$n_2^{(-1)}$	$d_2^{(-1)}$	$n_3^{(-1)}$	$d_3^{(-1)}$	$n_4^{(-1)}$	$d_4^{(-1)}$	\dots
$d_1^{(0)}$	$n_2^{(0)}$	$d_2^{(0)}$	$n_3^{(0)}$	$d_3^{(0)}$	$n_4^{(0)}$	$d_4^{(0)}$	\dots
$d_1^{(1)}$	$n_2^{(1)}$	$d_2^{(1)}$	$n_3^{(1)}$	$d_3^{(1)}$	$n_4^{(1)}$	$d_4^{(1)}$	\dots
$d_1^{(2)}$	$n_2^{(2)}$	$d_2^{(2)}$	$n_3^{(2)}$	$d_3^{(2)}$	$n_4^{(2)}$	$d_4^{(2)}$	\dots
$d_1^{(3)}$	$n_2^{(3)}$	$d_2^{(3)}$	$n_3^{(3)}$	$d_3^{(3)}$	$n_4^{(3)}$	$d_4^{(3)}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

2.3.4 Caso $s = 0$

Finalmente, para $s = 0$, temos $a_k = \pm a_{-k}$. Se tomamos o sinal positivo, as séries (2.71) e (2.73) são idênticas. Assim,

$$d_m^{(-r+1)} = \frac{1}{d_m^{(r)}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e} \quad n_m^{(-r+1)} = \frac{n_m^{(r)}}{d_m^{(r)} d_{m-1}^{(r)}}, \quad m = 2, 3, 4, \dots$$

para $r = 0, 1, 2, \dots$

Para este caso, os elementos abaixo da linha, na tabela $n - d$, relacionam-se com os que estão acima, como mostrado abaixo.

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$d_1^{(-3)}$	$n_2^{(-3)}$	$d_2^{(-3)}$	$n_3^{(-3)}$	$d_3^{(-3)}$	$n_4^{(-3)}$	$d_4^{(-3)}$	\dots
$d_1^{(-2)}$	$n_2^{(-2)}$	$d_2^{(-2)}$	$n_3^{(-2)}$	$d_3^{(-2)}$	$n_4^{(-2)}$	$d_4^{(-2)}$	\dots
$d_1^{(-1)}$	$n_2^{(-1)}$	$d_2^{(-1)}$	$n_3^{(-1)}$	$d_3^{(-1)}$	$n_4^{(-1)}$	$d_4^{(-1)}$	\dots
$d_1^{(0)}$	$n_2^{(0)}$	$d_2^{(0)}$	$n_3^{(0)}$	$d_3^{(0)}$	$n_4^{(0)}$	$d_4^{(0)}$	\dots
$d_1^{(1)}$	$n_2^{(1)}$	$d_2^{(1)}$	$n_3^{(1)}$	$d_3^{(1)}$	$n_4^{(1)}$	$d_4^{(1)}$	\dots
$d_1^{(2)}$	$n_2^{(2)}$	$d_2^{(2)}$	$n_3^{(2)}$	$d_3^{(2)}$	$n_4^{(2)}$	$d_4^{(2)}$	\dots
$d_1^{(3)}$	$n_2^{(3)}$	$d_2^{(3)}$	$n_3^{(3)}$	$d_3^{(3)}$	$n_4^{(3)}$	$d_4^{(3)}$	\dots
$d_1^{(4)}$	$n_2^{(4)}$	$d_2^{(4)}$	$n_3^{(4)}$	$d_3^{(4)}$	$n_4^{(4)}$	$d_4^{(4)}$	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Agora, se tomamos o sinal negativo, ou seja, $a_k = -a_{-k}$, temos que $a_0 = -a_0$ o

Capítulo 3

Erros nas aproximações e resultados computacionais

Neste capítulo, faremos, primeiramente, um breve estudo sobre erros nas aproximações por funções racionais. Em seguida, daremos alguns exemplos usando os algoritmos Q-D e modificado construídos no Capítulo 2. A utilização do método do determinante não é viável, pois seu esforço computacional é muito superior ao do algoritmo Q-D, por exemplo. Por isso, não faremos exemplos utilizando esse método.

3.1 Erros nas aproximações

Desde que a função racional $f_{m,m}(z)$ aproxima m termos de (2.1) e de (2.2), os termos em z^m e em $z^{-(m+1)}$ são os mesmos para $f(z) - f_{m,m}(z)$ e $f_{m+1,m+1}(z) - f_{m,m}(z)$.

Para a fração contínua correspondente a $f(z)$

$$\frac{n_1}{1 + d_1 z} + \frac{n_2 z}{1 + d_2 z} + \dots + \frac{n_m z}{1 + d_m z} + \dots, \quad (3.1)$$

com convergentes $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$, temos

$$f_{m,m}(z) = \frac{P_m(z)}{Q_m(z)}, \quad \Delta_{m+1,m}(z) = (-1)^m n_1 n_2 \dots n_{m+1} z^m$$

e

$$Q_m(z) = 1 + \dots + (d_1 d_2 \dots d_m) z^m.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_{m+1,m+1}(z) - f_{m,m}(z) &= \frac{\Delta_{m+1,m}(z)}{Q_m(z)Q_{m+1}(z)} \\ &= \frac{(-1)^m n_1 n_2 \dots n_{m+1} z^m}{1 + \dots + (d_1 d_2 \dots d_m)^2 d_{m+1} z^{2m+1}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Então, para $|z|$ pequeno e $|z|$ grande, temos, respectivamente,

$$\begin{cases} |f(z) - f_{m,m}(z)| = |n_1 n_2 \dots n_{m+1}| |z|^m \{1 + O(|z|)\}, \\ |f(z) - f_{m,m}(z)| = \left| \frac{n_1 n_2 \dots n_{m+1}}{(d_1 d_2 \dots d_m)^2 d_{m+1}} \right| \frac{1}{|z|^{m+1}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right\}, \end{cases} \quad (3.3)$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$

Escrevendo (3.3) em função dos determinantes de Hankel, obtemos, respectivamente,

$$\begin{cases} |f(z) - f_{m,m}(z)| = \left| \frac{D_{0,m}}{D_{-1,m-1}} \right| |z|^m \{1 + O(|z|)\}, \\ |f(z) - f_{m,m}(z)| = \left| \frac{D_{-1,m}}{D_{0,m-1}} \right| \frac{1}{|z|^{m+1}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right\}, \end{cases} \quad (3.4)$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$

Os próximos resultados tratam de limites de erros no eixo real positivo.

Se todos os coeficientes de $Q_m(z)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, são positivos, então, $f(z)$ não tem singularidades para $z \geq 0$. Os coeficientes de $Q_m(z)$ podem ser todos positivos sob várias condições suficientes. Entretanto, nos restringiremos aos seguintes casos:

$$\begin{cases} \text{(i)} & d_i > 0 & \text{e} & n_{i+1} > 0, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \text{(ii)} & d_i > 0 & \text{e} & d_{i+1} + n_{i+1} \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \text{(iii)} & d_i > 0 & \text{e} & d_i + n_{i+1} \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (3.5)$$

para $m = 1, 2, 3, \dots$

O caso (i) é evidente e os casos (ii) e (iii) podem ser verificados por indução, utilizando-se (2.5) para $Q_m(z)$.

Se as condições do caso (i) valem para a fração contínua (3.1), então, fazendo uso do Teorema 1.4, para $z > 0$ temos que convergentes sucessivos caem em lados opostos de $f(z)$, isto é,

$$\left| f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} \right| < \left| \frac{P_{m+1}(z)}{Q_{m+1}(z)} - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} \right|.$$

Logo,

$$|f(z) - f_{m,m}(z)| < \left| \frac{n_1 n_2 \dots n_{m+1} z^m}{Q_m(z) Q_{m+1}(z)} \right|. \quad (3.6)$$

Para encontrarmos resultados correspondentes para os casos (ii) e (iii), iniciamos com a fração contínua

$$R_m(z) = \frac{n_{m+1}z}{1 + d_{m+1}z} + \frac{n_{m+2}z}{1 + d_{m+2}z} + \frac{n_{m+3}z}{1 + d_{m+3}z} + \dots \quad (3.7)$$

Observe que quando $z \rightarrow \infty$, $R_m(z) \rightarrow \frac{n_{m+1}}{d_{m+1}}$, enquanto que, quando $z \rightarrow 0$, $R_m(z) \rightarrow n_{m+1}z$.

Definindo $\bar{P}_m(z)$ e $\bar{Q}_m(z)$ por

$$\begin{aligned} \bar{P}_m(z) &= d_{m+1}P_m(z) + n_{m+1}P_{m-1}(z), \\ \bar{Q}_m(z) &= d_{m+1}Q_m(z) + n_{m+1}Q_{m-1}(z) = \frac{Q_{m+1}(z) - Q_m(z)}{z}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

se as condições do caso (ii) são satisfeitas e $z > 0$, então $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ e $\frac{\bar{P}_m(z)}{\bar{Q}_m(z)}$ caem em lados opostos de $f(z)$. De fato,

$$\begin{aligned} f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} &= \frac{P_m(z) + R_m(z)P_{m-1}(z)}{Q_m(z) + R_m(z)Q_{m-1}(z)} - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} \\ &= \frac{(-1)^m n_1 n_2 \dots n_m R_m(z) z^{m-1}}{Q_m(z)(Q_m(z) + R_m(z)Q_{m-1}(z))} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$f(z) - \frac{\bar{P}_m(z)}{\bar{Q}_m(z)} = \frac{(-1)^m (d_{m+1}R_m(z) - n_{m+1}) n_1 n_2 \dots n_m z^{m-1}}{\bar{Q}_m(z)(Q_m(z) + R_m(z)Q_{m-1}(z))}.$$

Mostremos que $(n_{m+1} - d_{m+1}R_m(z))$ e $R_m(z)$ têm o mesmo sinal para $z > 0$.

Na forma de fração contínua,

$$n_{m+1} - d_{m+1}R_m(z) = n_{m+1} \left[1 - \frac{d_{m+1}z}{1 + d_{m+1}z} + \frac{n_{m+2}z}{1 + d_{m+2}z} + \dots \right].$$

Se a fração contínua entre colchetes tem convergentes $\frac{U_r(z)}{V_r(z)}$, $r = 1, 2, 3, \dots$, com $U_1(z) = d_{m+1}z$ e $V_1(z) = 1 + d_{m+1}z$, então, sob as condições (ii), todos os coeficientes de $V_r(z)$ são positivos e podemos mostrar, por indução, que $V_r(z) - U_r(z) \geq 1$, $r = 1, 2, 3, \dots$.

Então, temos

$$1 - \frac{U_r(z)}{V_r(z)} = \frac{V_r(z) - U_r(z)}{V_r(z)} \geq \frac{1}{V_r(z)} \geq 0.$$

Portanto, $(n_{m+1} - d_{m+1}R_m(z))$ e $R_m(z)$ têm o mesmo sinal, sendo determinado pelo sinal de n_{m+1} . Consequentemente, $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ e $\frac{\bar{P}_m(z)}{\bar{Q}_m(z)}$ caem em lados opostos de $f(z)$.

Usando (3.8), chegamos ao seguinte resultado:

$$|f(z) - f_{m,m}(z)| < \left| \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} - \frac{\bar{P}_m(z)}{\bar{Q}_m(z)} \right| = \frac{|n_1 n_2 \dots n_{m+1}| z^m}{Q_m(z)(Q_{m+1}(z) - Q_m(z))}. \quad (3.9)$$

Para o caso (iii), definimos $P_m^*(z)$ e $Q_m^*(z)$ por

$$\begin{aligned} P_m^*(z) &= P_m(z) + n_{m+1}zP_{m-1}(z), \\ Q_m^*(z) &= Q_m(z) + n_{m+1}zQ_{m-1}(z) = Q_{m+1}(z) - d_{m+1}zQ_{m-1}(z). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Mostremos que, para $z > 0$, se as condições (iii) são válidas, $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ e $\frac{P_m^*(z)}{Q_m^*(z)}$ caem em lados opostos de $f(z)$.

Observe que

$$f(z) - \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} = \frac{(-1)^m n_1 n_2 \dots n_m R_m(z) z^{m-1}}{Q_m(z)(Q_m(z) + R_m(z)Q_{m-1}(z))}$$

e

$$f(z) - \frac{P_m^*(z)}{Q_m^*(z)} = \frac{(-1)^m (n_{m+1}z - R_m(z)) n_1 n_2 \dots n_m z^{m-1}}{Q_m^*(z)(Q_m(z) + R_m(z)Q_{m-1}(z))}.$$

Mostremos que $(R_m(z) - n_{m+1}z)$ e $R_m(z)$ têm o mesmo sinal para $z > 0$.

Na forma de fração contínua,

$$R_m(z) - n_{m+1}z = n_{m+1}z \left[1 - \frac{1}{1 + d_{m+1}z} + \frac{n_{m+2}z}{1 + d_{m+2}z} + \dots \right].$$

Suponhamos que a fração contínua entre colchetes tenha convergentes $\frac{U_r(z)}{V_r(z)}$, $r = 1, 2, 3, \dots$, com $U_1(z) = 1$, e $V_1(z) = 1 + d_{m+1}z$. Então, sob as condições (iii), todos os coeficientes de $V_r(z)$ são positivos e, por indução, mostra-se facilmente que $V_r(z) - U_r(z) \geq 0$, $r = 1, 2, 3, \dots$

Assim,

$$1 - \frac{U_r(z)}{V_r(z)} = \frac{V_r(z) - U_r(z)}{V_r(z)} \geq 0.$$

Portanto, $\text{ sinal}(R_m(z) - n_{m+1}z) = \text{ sinal}(R_m(z))$, sendo determinado pelo sinal de n_{m+1} .

Consequentemente, $\frac{P_m(z)}{Q_m(z)}$ e $\frac{P_m^*(z)}{Q_m^*(z)}$ caem em lados opostos de $f(z)$.

De (3.10), obtemos

$$|f(z) - f_{m,m}(z)| < \left| \frac{P_m(z)}{Q_m(z)} - \frac{P_m^*(z)}{Q_m^*(z)} \right| = \frac{|n_1 n_2 \dots n_{m+1}| z^m}{Q_m(z)(Q_{m+1}(z) - d_{m+1}zQ_m(z))}. \quad (3.11)$$

Para frações contínuas nas quais $Q_m(z) > 0$ para $z \geq 0$, $|f_{m+1,m+1}(z) - f_{m,m}(z)|$ tem um único máximo para $z \geq 0$. Isto é mostrado facilmente calculando-se a derivada de

$|f_{m+1,m+1}(z) - f_{m,m}(z)|$ e verificando-se que a mesma possui uma única raiz para $z > 0$. Assim, pelo comportamento de $|f_{m+1,m+1}(z) - f_{m,m}(z)|$, dada em (3.2), vemos que essa raiz é um ponto de máximo. Uma estimativa grosseira da posição desse máximo pode ser encontrada igualando-se os termos líderes em (3.3). Isso nos dá

$$z_{\max} \approx [(d_1 d_2 \dots d_m)^2 d_{m+1}]^{-\frac{1}{(2m+1)}}, \quad (3.12)$$

ou, em termos dos determinantes de Hankel,

$$z_{\max} \approx \left[\frac{D_{-1,m} D_{-1,m-1}}{D_{0,m} D_{0,m-1}} \right]^{-\frac{1}{(2m+1)}}.$$

Portanto, basta substituir a expressão de $z = z_{\max}$, dada em (3.12), nas equações (3.6), (3.9) e (3.11) para uma estimativa do erro para os casos (i), (ii) e (iii), respectivamente.

3.2 Resultados computacionais

Para calcular as séries de potências das funções consideradas nos exemplos a seguir, usamos o software Maple 9.01 e para calcular os coeficientes das frações contínuas correspondentes usamos os algoritmos das Tabelas 3.1 e 3.2, apresentados ao final desta seção, que foram programados na linguagem C++, através do software Dev-C++, versão 4.9.9.2.

3.2.1 A função $F(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

Para esta função, as duas expansões em série de potências são dadas por

$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{3z^4}{8} - \frac{5z^6}{16} + \dots \quad |z| < 1 \quad (3.13)$$

$$\text{e} \quad \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{3}{8z^5} - \frac{5}{16z^7} + \dots \quad |z| > 1. \quad (3.14)$$

Neste exemplo, há coeficientes nulos em ambas as expansões em séries de potências e, portanto, o algoritmo Q-D não pode ser usado para se obter a fração contínua correspondente. Embora possa ser obtida facilmente por outros meios, usaremos esta função para ilustrar o algoritmo modificado. Fazendo $K = 2$, obtemos as expansões em série da função $\frac{2}{1+z}$:

$$2 - 2z + 2z^2 - 2z^3 + 2z^4 - \dots \quad (3.15)$$

$$e \quad \frac{2}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^3} - \frac{2}{z^4} + \frac{2}{z^5} - \dots \quad (3.16)$$

Subtraindo, agora, (3.16) e (3.15), respectivamente, das séries (3.14) e (3.13) acima, obtemos

$$-1 + 2z - \frac{5z^2}{2} + 2z^3 - \frac{13z^4}{8} + \dots$$

$$e \quad -\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{5}{2z^3} + \frac{2}{z^4} - \frac{13}{8z^5} + \dots,$$

que são as expansões desejadas, já que não há coeficientes nulos.

Observe que os coeficientes das duas séries de potências anteriores satisfazem a simetria

$$a_k = -a_{-k-1}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Logo, as séries são, respectivamente, das seguintes formas

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_kz^{k-1} + \dots$$

$$e \quad \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \frac{a_3}{z^4} + \dots + \frac{a_{k+1}}{z^k} + \dots$$

Como consequência desta simetria, quando usamos o algoritmo Q-D, somente metade dos elementos $n_m^{(r)}$ e $d_m^{(r)}$ precisam ser calculados. Isto, porque sabemos que

$$d_m^{(-r)} = \frac{1}{d_m^{(r)}}, \quad n_m^{(-r)} = \frac{n_m^{(r)}}{d_m^{(r)}d_{m-1}^{(r)}}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

A fração contínua para $F(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ é, então, obtida pelo algoritmo da seção anterior e é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{1+z} - \frac{z}{1+z} - \frac{z/2}{1+z} - \frac{z/2}{1+z} - \frac{z/2}{1+z} - \dots$$

Esta fração contínua pode ser obtida por outros meios, veja Murphy [18], onde ela e algumas aplicações são discutidas.

3.2.2 A função $F(z) = \operatorname{arccot}(z)$

A função $\operatorname{arccot}(z)$ ($\cot^{-1}(z)$) tem as seguintes expansões em série de potências:

$$\frac{\pi}{2} - z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + \dots + (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1} + \dots, \quad |z| < 1$$

$$e \quad \frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} - \frac{1}{7z^7} + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)z^{2k+1}} + \dots, \quad |z| > 1.$$

Como no exemplo anterior, essas duas séries apresentam coeficientes nulos e a fração contínua da forma (2.7) pode ser obtida pelo algoritmo Q-D modificado dado na seção 3.2. Neste exemplo, também poderemos explorar, a nosso favor, a simetria parcial entre os coeficientes das duas expansões em série da função modificada

$$\operatorname{arccot}(z) - \frac{2}{1+z},$$

que são dadas por

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) + z - 2z^2 + \frac{7}{3}z^3 - 2z^4 + \frac{9}{5}z^5 - \dots, \quad |z| \text{ pequeno}$$

$$\text{e} \quad -\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{7}{3z^3} + \frac{2}{z^4} - \frac{9}{5z^5} + \dots, \quad |z| \text{ grande.}$$

Essas duas séries são das formas

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_kz^k + \dots, \quad |z| \text{ pequeno}$$

$$\text{e} \quad -\frac{a_1}{z} - \frac{a_2}{z^2} - \frac{a_3}{z^3} - \frac{a_4}{z^4} - \dots - \frac{a_k}{z^k} - \dots, \quad |z| \text{ grande.}$$

Isto é, $a_k = a_{-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Como consequência, os elementos gerados pelo algoritmo Q-D para tais séries satisfazem

$$d_m^{(-r+1)} = \frac{1}{d_m^{(r)}}, \quad n_m^{(-r+1)} = \frac{n_m^{(r)}}{d_{m-1}^{(r)}d_m^{(r)}}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.17)$$

como vimos no capítulo anterior.

O algoritmo Q-D, abreviado pelo uso de (3.17), pode agora ser usado para obtermos a fração contínua para a função $\operatorname{arccot}(z) - \frac{2}{1+z}$. A fração contínua para $\operatorname{arccot}(z)$ é, então, obtida e a seguir fornecemos os coeficientes dos quinze primeiros convergentes.

$n_1 = 1.570796327$	$d_1 = 1.570796327$
$n_2 = -0.934176555$	$d_2 = 0.934176555$
$n_3 = -0.500334866$	$d_3 = 0.979385145$
$n_4 = -0.505199059$	$d_4 = 0.992512632$
$n_5 = -0.504693027$	$d_5 = 0.996725225$
$n_6 = -0.503610742$	$d_6 = 0.998311260$
$n_7 = -0.502739742$	$d_7 = 0.999014570$
$n_8 = -0.502115085$	$d_8 = 0.999369715$
$n_9 = -0.501666392$	$d_9 = 0.999552489$
$n_{10} = -0.501312305$	$d_{10} = 0.999555814$
$n_{11} = -0.500871053$	$d_{11} = 0.998912939$
$n_{12} = -0.499463639$	$d_{12} = 0.994692227$
$n_{13} = -0.492031395$	$d_{13} = 0.970028800$
$n_{14} = -0.449072022$	$d_{14} = 0.837467321$
$n_{15} = -0.196185109$	$d_{15} = 0.291647825$

Apresentaremos, agora, os algoritmos construídos no Capítulo 2 e utilizados neste capítulo para os exemplos computacionais. O primeiro é o algoritmo Q-D, usado para calcular os numeradores e denominadores parciais da fração contínua correspondente à função $f(z)$, que não contém coeficientes nulos. Quando há coeficientes nulos em uma ou ambas as séries da função $f(z)$, usamos o algoritmo Q-D para calcular os elementos da fração contínua correspondente à função modificada $g(z) = f(z) - \frac{K}{1+z}$, que não possui coeficientes nulos e, usando esses elementos, através do algoritmo modificado encontramos os numeradores e denominadores parciais da fração contínua correspondente à função $f(z)$.

Tabela 3.1: Algoritmo Q-D

<p>Início</p> <p>1. Leitura do número de convergentes parciais da FC que serão calculados Leia (m)</p> <p>2. Leitura dos coeficientes das séries de potências Para $i = -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m - 1$ faça Leia (a_i)</p> <p>3. Cálculo de $d_1^{(r)}$ e $n_1^{(r)}$ Para $r = -m + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m - 1$ faça $d_1^{(r)} = -\frac{a_r}{a_{r-1}}$ $n_1^{(r)} = 0$</p> <p>4. Cálculo de $n_i^{(r)}$ e $d_i^{(r)}$ Para $i = 2, 3, \dots, m$ faça Para $r = -m + i - 1, \dots, m - i$ faça $n_i^{(r)} = n_{i-1}^{(r+1)} + d_{i-1}^{(r+1)} - d_{i-1}^{(r)}$ $d_i^{(r+1)} = \frac{n_i^{(r+1)} \times d_{i-1}^{(r)}}{n_i^{(r)}}$</p> <p>Fim</p>

Tabela 3.2: Algoritmo Modificado

<p>Início</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Leitura do número de convergentes parciais da FC que serão calculados</i> Leia (m) 2. <i>Leitura do número K adequado</i> Leia (K) 3. <i>Leitura dos coeficientes da fração contínua de $g(z)$</i> Para $i = 1, 2, \dots, m$ faça Leia (p_i, q_i) 4. <i>Cálculo dos coeficientes da fração contínua de $f(z)$</i> $\alpha_0 = 1$ $\beta_0 = 1$ Para $i = 1, 2, \dots, m$ faça $\alpha_i = \alpha_{i-1}p_i$ $\beta_i = \beta_{i-1}q_i$ $\lambda_0 = 0$ $\lambda_1 = q_1$ $\mu_0 = 0$ $\mu_1 = d_1$ $n_1 = p_1 + K$ $d_1 = \frac{n_1q_1}{p_1 + q_1K}$ $y_1 = n_1$ $\delta_1 = d_1$ Para $i = 1, 2, \dots, m$ faça $y_{i+1} = \alpha_{i+1} + y_i(1 + \lambda_{i-1} - \mu_i) - \alpha_i(1 + \mu_{i-1} - \lambda_i)$ $\delta_{i+1} = \frac{y_{i+1}\beta_i}{y_{i+1} - \alpha_{i+1} + \frac{\alpha_{i+1}\delta_i}{\beta_{i+1}}}$ $n_{i+1} = \frac{y_{i+1}}{y_i}$ $d_{i+1} = \frac{\delta_{i+1}}{\delta_i}$ $\lambda_{i+1} = \lambda_i + q_{i+1} + p_{i+1}$ $\mu_{i+1} = \mu_i + d_{i+1} + n_{i+1}$ <p>Fim</p>
--

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, E. X. L.; McCABE, J. H.; SRI RANGA, A. The Q-D Algorithm for Transforming Series Expansions into a Corresponding Continued Fraction: An Extension to Cope with Zero Coefficients. **J. Comput. Appl. Math.**, v. 156, n. 2, p. 487-497, Jul. 2003.
- [2] ANDRADE, E. X. L.; McCABE, J. H. Some Consequences of Symmetry in the Coefficients of Two Series when Constructing Continued Fractions that Correspond to the Two Series. **Commun. Anal. Theory Contin. Fract.**, v. 10, p. 5-12, 2002.
- [3] ANDRADE, E. X. L. **Sobre Polinômios Similares aos Ortogonais Associados a uma Classe Especial de Distribuição**. Tese (Doutorado) - IMECC, UNICAMP, Campinas, 1995.
- [4] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F. **Polinômios Ortogonais e Similares: Propriedades e Aplicações**. Apostila Versão 2.4, 2008.
- [5] BREZINSKI, C. **History of Continued Fractions and Padé Approximants**. Springer, 1991.
- [6] CHIHARA, T. S. **An Introduction to Orthogonal Polynomials, Mathematics and its Applications Series**. New York: Gordon and Breach, 1978.
- [7] CORLESS, R. M. Continued Fractions and Chaos. **Am. Math. Mon.**, v. 99, n. 3, p. 203-215, Mar. 1992.
- [8] FREUD, G. **Orthogonal Polynomials**. New York: Pregamon Press, 1971.
- [9] GRAGG, W. B. The Padé Table and its Relation to Certain Algorithms in Numerical Analysis. **SIAM Rev.**, v. 14, n. 1, p. 1-62, Jan. 1972.

- [10] HENRICI, P. **Applied and Computational Complex Analysis Vol. 1**. New York: John Wiley and Sons, 1974.
- [11] HENRICI, P.; PFLÜGER, P. Truncation error estimates for Stieltjes fractions. **Numer. Math.**, v. 9, n. 2, p. 120-138, Dec. 1966.
- [12] JONES, W. B.; THRON, W. J. **Continued Fractions: Analytic Theory and Applications**, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1980.
- [13] JONES, W. B.; THRON, W. J.; WAADELAND, H. A Strong Stieltjes Moment Problem. **Trans. Am. Math. Soc.**, v. 261, n. 2, p. 503-528, Oct. 1980.
- [14] LORENTZEN, L.; WAADELAND, H. **Continued Fractions with Applications**, North-Holland, 1992.
- [15] MAGNUS, A. On the Structure of the Two-Point Padé Table. **Lect. Notes Math.**, v. 932, p. 176-193, 1982.
- [16] McCABE, J. H.; MURPHY, J. A. Continued Fractions which Correspond to Power Series Expansions at Two Points. **Technical Report n° 36**, Department of Mathematics, Brunel University, 1973.
- [17] McCABE, J. H.; MURPHY, J. A. Continued Fractions which Correspond to Power Series Expansions at Two Points. **J. Inst. Math. Appl.**, v. 17, n. 2, p. 233-247, 1976.
- [18] MURPHY, J. A. Certain Rational Function Approximations to $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$. **IMA J. Appl. Math.**, v. 7, n. 2, p. 138-150, 1971.
- [19] RUTISHAUSER, H. Der Quotienten-Differenzen Algorithmus. **Z.A.M.P.**, v. 5, n. 3, p. 233-251, May. 1954.
- [20] SRI RANGA, A. **Continued Fractions with Correspond to Two Series Expansions and the Strong Hamburger Moment Problem**. Tese (Doutorado), University of St Andrews, St Andrews, Escócia, 1984.
- [21] SZEGÖ, G. **Orthogonal Polynomials**, American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 23, Providence, RI, USA, 1975.

-
- [22] THRON, W. J. Some Properties of Continued Fraction $1 + d_0z + K_{n=1}^{\infty}(z/(1 + d_nz))$.
Bull. Amer. Math. Soc., v. 54, n. 2, p. 206-218, 1948.
- [23] WALL, H. S. **Analytic Theory of Continued Fractions**, American Mathematical Society, 1948.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 09 de Março de 2010.

Manuella Aparecida Felix de Lima

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)