

# PGMEC

PROGRAMA FRANCISCO EDUARDO MOURÃO SABOYA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Dissertação de Mestrado

MODELAGEM EM REGIME  
PERMANENTE DE ESCOAMENTOS EM  
DUTOS COM ABERTURA DE COLUNA  
LÍQUIDA

ALEXANDRE HASTENREITER ASSUMPCÃO

DEZEMBRO DE 2009

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**ALEXANDRE HASTENREITER ASSUMPÇÃO**

**MODELAGEM EM REGIME PERMANENTE DE  
ESCOAMENTOS EM DUTOS COM ABERTURA DE  
COLUNA LÍQUIDA**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica  
da UFF como parte dos requisitos para a  
obtenção do título de Mestre em  
Ciências em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Felipe Bastos de Freitas Rachid (TEM/UFF)

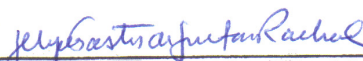
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE  
NITERÓI, 22 DE DEZEMBRO DE 2009

**MODELAGEM EM REGIME PERMANENTE DE  
ESCOAMENTOS EM DUTOS COM ABERTURA DE COLUNA  
LÍQUIDA**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

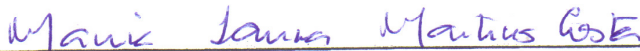
**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Área de concentração Termociências e aprovada em sua forma final pela Banca  
Examinadora formada pelos professores:



---

**Prof. Felipe Bastos de Freitas Rachid (D.Sc.)  
Universidade Federal Fluminense  
(Orientador)**



---

**Prof.ª Maria Laura Martins Costa (D.Sc.)  
Universidade Federal Fluminense**



---

**Prof. Norberto Mangiavacchi (Ph.D.)  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

À minha família.

# Agradecimentos

Aos meus Pais e Familiares que tanto me apoiaram em todos os momentos ao longo desses dois anos de estudo.

Ao Mestre e amigo Prof<sup>o</sup> Felipe Bastos de Freitas Rachid pela orientação, palavras de incentivo e paciência em compreender certas dificuldades de minha parte.

A CAPES, por me conceder uma bolsa de estudo durante esses dois anos de estudo.

Ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal Fluminense que me concedeu a honra de obter o título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Aos amigos do PGMEC, Jorge, Agnaldo, Ivênio, Fernando Luiz, Hildson, Leandro Martins, Guttemberg, João Paulo, Odilon pela ajuda e companheirismo.

Aos amigos Raphael David e Cristiane, pelas memoráveis conversas e situações vividas na UFF nos últimos três anos.

A Todos os amigos e colegas que contribuíram direta ou indiretamente com essa conquista.

# Resumo

Este trabalho apresenta um modelo para descrever o fenômeno de cavitação em escoamentos de líquidos em dutos. Apesar de poder ser aplicado tanto em regime permanente quanto em transiente, as aplicações apresentadas no trabalho são restritas ao escoamento com coluna parcialmente aberta, observado em regimes de escoamento permanente. O escoamento é considerado isotérmico e homogêneo e o fluido é tratado como uma pseudo mistura formada de fases compressíveis (de líquido e de vapor), que coexistem num mesmo ponto material e num mesmo instante de tempo. O modelo é formado pelas equações de balanço de massa para cada uma das fases e uma equação de balanço de quantidade de movimento linear para a mistura como um todo, as quais são escritas num contexto unidimensional. O processo de transformação de fase é adequadamente retratado como um processo irreversível. Os principais grupos adimensionais que intervêm no processo são identificados, e suas influências no processo de abertura de coluna caracterizadas através de simulações numéricas. Os resultados obtidos mostram que o modelo proposto é capaz de descrever de forma fisicamente coerente, tanto a abertura quanto o fechamento da coluna líquida.

Palavras – chaves: Escoamento em coluna aberta, transformação de fase irreversível e cavitação.

# Abstract

This work aims to presenting a mechanical model to describe the cavitating flow in hydraulic pipelines. Although the model is capable to describe the cavitation phenomenon in unsteady as well as in steady states, the applications presented herein are restricted to slack flows, which take place in steady regimes. The flow is assumed to be homogeneous and isothermal. The fluid is treated as a pseudo-mixture, comprising the liquid and the vapor phases. Both phases are assumed to be compressible and to coexist at every material point and time instant. The balance equations of mass for each of the phases are considered in the model, along with only one balance equation of momentum for the mixture as a whole, within an onedimensional context. The phase change transformation is properly accounted for as an irreversible process. The main dimensionless groups are identified and their influence on the slack flow phenomenon quantified by means of numerical simulations. The obtained results show that the model is capable to mimic coherently both the opening as well as the closure of the vapor cavity.

Keywords: Slack flow, irreversible phase change transformation and cavitation



# Sumário

Agradecimentos .....	5
Resumo .....	6
Abstract .....	7
Sumário .....	8
Lista de Figuras .....	10
Lista de Tabelas .....	13
Nomenclatura .....	14
Capítulo 1 – Introdução .....	19
Capítulo 2 – Equações de Balanço .....	33
Capítulo 3 – Equações Constitutivas Clássicas .....	38
3.1. Relação entre Área e Pressão .....	39
3.2. Equações de Estado .....	43
Capítulo 4 – Formulação do Modelo Mecânico .....	50
4.1. Hipóteses Básicas .....	51
4.2. Equações do Modelo .....	52
4.3. Fator de Atrito do Escoamento com Abertura da Coluna .....	55
4.4. Transformação de Fase como Processo Irreversível .....	60
4.5. Condições de Abertura da Coluna Líquida .....	70

Capítulo 5 – Simulação Numérica do Modelo.....	76
5.1. Método Numérico .....	77
5.2. Análise do Modelo .....	79
5.2.1 - Análise de convergência numérica .....	80
5.2.2 – Casos Simulados .....	83
5.3. Análise dos Resultados .....	90
Capítulo 6 – Conclusões e Sugestões .....	106
Apêndice A .....	108
Apêndice B.....	111
Apêndice C.....	116
Referências.....	122

# Lista de Figuras

Figura 1.1 - Linhas piezométricas de escoamentos permanentes em dutos com e sem abertura de coluna líquida. ....	20
Figura 1.2 - Abertura de coluna líquida. ....	22
Figura 2.1 - Trecho de um duto de seção A variável e inclinação $\theta$ . ....	35
Figura 3.1. - Estado plano de tensões na parede do duto. ....	40
Figura 3.2 – Comparação entre as previsões da Equação de Fines & Millero (1973) original (Eq.(3.15)) e aproximada (Eq. (3.16)). ....	46
Figura 3.4 - Comparação entre as equações de Fines & Millero (1973) (Eq. (3.15)), Fines & Millero aproximada (Eq. (3.16)) e a forma linearizada (Eq.(3.18)). ....	48
Figura 3.5 - Erro relativo entre as pressões previstas pela equação de Fines e Millero (1973) original ((Eq. 3.15)) e a forma linearizada ((Eq. 3.18)). ....	49
Figura 4.1 - Seção transversal de uma linha com abertura de coluna líquida. ....	57
Figura 4.2 - Fração volumétrica de vapor como função do ângulo molhado (em $^\circ$ ) ..	59
Figura 4.3 - Fator de atrito como função da fração volumétrica de vapor. ....	59
Figura 4.4 – Diferença de energia livre de Gibbs entre o líquido e o vapor em função da pressão (Eq. (4.35)) para a água a 293K. ....	64
Figura 4.5– Condições de abertura e fechamento da coluna líquida no plano $\alpha P$ . ....	68
Figura 4.6– Casos de abertura e fechamento da coluna líquida. ....	75
Figura 5.1 – Perfil planialtimétrico do duto usado nas três simulações para avaliar a convergência. ....	80
Figura 5.2 - Pressão ao longo do comprimento desenvolvido do duto para três diferentes tamanhos de passo. ....	81

Figura 5.3 - Velocidade do escoamento ao longo do comprimento desenvolvido do duto para três diferentes tamanhos de passo. ....	82
Figura 5.4 - Fração volumétrica de vapor ao longo do comprimento desenvolvido do duto para três diferentes tamanhos de passo. ....	82
Figura 5.5 - Perfis Planialtimétricos do duto: platô, declive intermediário e máximo.	86
Figura 5.6 – Arranjo físico do duto: descida suave, intermediária e vertical. ....	87
Figura 5.7 - Dissipação de energia na região de escoamento em coluna aberta considerando diferentes valores de $H_R$ . ....	92
Figura 5.8 – Pressão versus Fração volumétrica de vapor e fenômeno de Histerese ..	93
Figura 5.9 – Fração volumétrica de vapor em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de $H_R$ . ....	94
Figura 5.10 - Ângulo molhado em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de $H_R$ . ....	94
Figura 5.11 – Número de cavitação em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de $H_R$ . ....	95
Figura 5.12 - Fração volumétrica de vapor em função do comprimento desenvolvido num duto com perfil topográfico plano. ....	96
Figura 5.13 – Número de Mach em função do comprimento desenvolvido num duto com perfil topográfico plano. ....	97
Figura 5.14 - Fração volumétrica de vapor em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de $F_r$ . ....	97
Figura 5.15 - Ângulo molhado em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de $F_r$ . ....	98
Figura 5.16 – Número de cavitação em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de $F_r$ . ....	98

Figura 5.17 – Taxa de dissipação de energia em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de $F_r$ .....	100
Figura 5.18 – Fenômeno de histerese considerando diferentes valores de $F_r$ .....	101
Figura 5.19– Taxa mássica de transformação de fase em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de $F_r$ .....	102
Figura 5.20– Fração volumétrica de vapor em função do comprimento desenvolvido do duto com diferentes diâmetros. ....	103
Figura 5.21 – Ângulo molhado em função do comprimento desenvolvido do duto com diferentes diâmetros. ....	104
Figura 5.22 – Número de cavitação em função do comprimento desenvolvido do duto com diferentes diâmetros. ....	104
Figura 5.23 – Extensão da região de escoamento em coluna parcialmente aberta quando (a) $D_0 = 200$ mm (b) $D_0 = 500$ mm (c) $D_0 = 1000$ mm. ....	105
Figura A.1 – Seção transversal de duto operando em coluna aberta. ....	109

# Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Tabelas de valores dos coeficientes das Eqs. (3.15). .....	45
Tabela 5.1 - Diâmetro, velocidade, ângulo de declive e constante de irreversibilidade usados nas simulações do modelo.....	88
Tabela 5.2 - Valores máximos, mínimos e médios de $F_r$ e $H_R$ .....	89
Tabela 5.3 - Valores de $D_0$ , $v_0$ , $\phi_2$ e $\beta$ usados no cálculo de $F_{r\min}$ , $F_{rinter}$ , $F_{r\max}$ .	89
Tabela 5.4 - Valores de $D_0$ , $v_0$ , $\phi_2$ e $\beta$ usados no cálculo de $H_{R\min}$ , $H_{Rinter}$ , $H_{R\max}$ .....	89
Tabela 5.5 – Casos simulados .....	90
Tabela 5.6 – Condições iniciais de pressão e velocidade em cada caso simulado .....	90
Tabela 5.7 – valores de $P_0$ e $\alpha^*$ para cada diâmetro de duto simulado .....	102

# Nomenclatura

- $a$  Velocidade de propagação sônica isotérmica no fluido
- $a_l$  Velocidade de propagação sônica isotérmica na fase líquida do fluido
- $a_v$  Velocidade de propagação sônica isotérmica na fase de vapor do fluido
- $a_1$  Constantes da Eq (4.44)
- $a_2$  Constantes da Eq (4.44)
- $A_1$  Coeficientes da Eq (3.15)
- $A_2$  Coeficientes da Eq (3.15)
- $A_0$  Área de seção transversal do duto na configuração não-deformada
- $A$  Área de seção transversal do duto na configuração deformada
- $A_l$  Área de seção transversal preenchida pela fase líquida
- $A_v$  Área de seção transversal preenchida pela fase de vapor
- $b$  Constantes da Eq (4.44)
- $B$  Coeficiente da Eq (3.15)
- $C$  Fração Mássica de vapor na mistura
- $C_l$  Calor específico a volume constante da fase líquida
- $C_v$  Calor específico a volume constante da fase de vapor

$d$	Taxa de dissipação de energia associada à transformação de fase
$D_0$	Diâmetro do duto na configuração não-deformada
$D$	Diâmetro do duto na configuração deformada
$e$	Espessura da parede do duto
$E$	Módulo de elasticidade
$f$	Fator de atrito de Darcy – Weisbach
$f_m$	Fator de atrito modificado
$F_S$	Somatório das forças de superfície atuantes sobre o fluido
$F_B$	Somatório das forças de corpo atuantes sobre o fluido
$F_r$	Número de Froude
$g$	Aceleração local do campo gravitacional
$g_l$	Energia livre de Gibbs da fase líquida do fluido
$g_v$	Energia livre de Gibbs da fase de vapor do fluido
$H_m$	Altura piezométrica modificada
$H_R$	Grupo adimensional que representa a razão entre as forças termodinâmicas e as forças de inércia.
$L$	Comprimento total do duto
$M$	Número de Mach
$p$	Perímetro molhado
$P$	Pressão do fluido no interior do duto



$P_0$	Pressão do fluido na entrada do duto
$P_1$	Pressão parcial da fase líquida no interior do duto
$P_{\text{man}}$	Pressão manométrica da fase líquida no interior do duto
$P_v$	Pressão parcial da fase de vapor no interior do duto
$P_{\text{sat}}$	Pressão de saturação do fluido a uma dada temperatura
$R$	Constante particular do vapor d'água
$Re$	Número de Reynolds
$R_h$	Raio hidráulico
$s$	Comprimento desenvolvido do duto
$t$	tempo
$T$	Temperatura do fluido
$v$	Velocidade média do fluido no interior do duto
$v_0$	Velocidade média do fluido na seção de entrada do duto
$v_1$	Velocidade média da fase líquida no interior do duto
$v_v$	Velocidade média da fase de vapor no interior do duto
$v_0$	Coeficiente da Eq. (3.15)
$Z$	Cota topográfica ou Altura estática de uma dada seção do duto
$\alpha$	Fração volumétrica de vapor ou Fração de vazio
$\alpha_0$	Fração volumétrica de vapor ou Fração de vazio na entrada do duto

$\alpha^*$  Fração volumétrica de vapor que caracteriza o fechamento da coluna líquida

$\beta$  Constante de proporcionalidade entre a taxa mássica de transformação de fase e a diferença entre as energias livres de Gibbs das fases

$\gamma$  Ângulo formado pela geratriz da superfície lateral do duto com a horizontal

$\Gamma$  Taxa mássica de transformação de fase

$\rho$  Massa específica do fluido

$\rho_l$  Massa específica da fase líquida do fluido

$\rho_v$  Massa específica fase de vapor do fluido

$\rho_{ls}$  Massa específica do fluido no estado líquido saturado

$\rho_{vs}$  Massa específica do fluido no estado vapor saturado

$\rho_l^0$  Massa específica da fase líquida à pressão absoluta zero

$\theta$  Ângulo de inclinação do duto no arranjo físico real

$\nu$  Coeficiente de Poisson

$\sigma_\theta$  Tensão circunferencial atuante na parede do duto

$\sigma_s$  Tensão longitudinal atuante na parede do duto

$\varepsilon_\theta$  Deformação circunferencial da parede do duto

$\varepsilon_s$  Deformação longitudinal da parede do duto

$\varepsilon$  Rugosidade relativa da parede do duto

$\xi$  Fator de ancoragem do duto

- $\xi_i$  Seção do duto em que a coluna líquida abre
- $\xi_f$  Seção do duto em que a coluna líquida fecha
- $\omega$  Ângulo Molhado
- $\tau$  Tensão de cisalhamento atuante na parede do duto
- $\Psi$  Energia livre de Helmholtz do fluido
- $\Psi_l$  Energia livre de Helmholtz da fase líquida do fluido
- $\Psi_v$  Energia livre de Helmholtz da fase de vapor do fluido
- $\Omega$  Volume de controle delimitado por duas seções arbitrárias do duto

### **Subscritos**

- vs vapor saturado
- ls líquido saturado
- v fase de vapor
- l fase líquida

### **Sobrescritos**

- “ + ” variável adimensionalizada

# Capítulo 1

## Introdução

A transferência de líquidos em dutos é geralmente usada quando se quer transportar grandes volumes de um determinado produto a longas distâncias. Exemplos típicos são os oleodutos e linhas de abastecimento de água tratada.

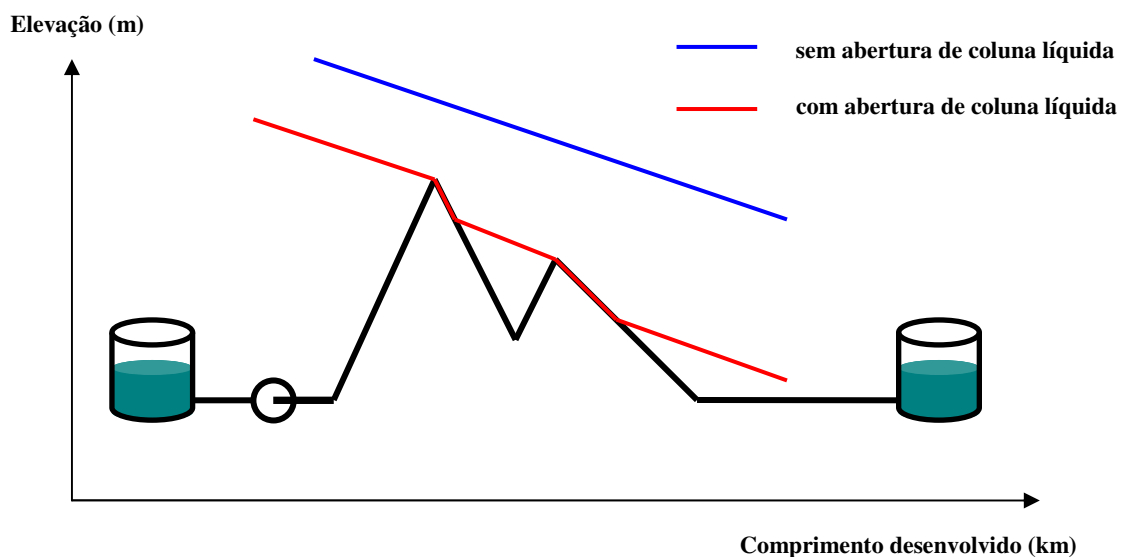
Independente do tipo de líquido transportado em regime permanente, a variação da pressão do fluido é devida às variações topográficas da linha e ao atrito viscoso do fluido. Este último se manifesta de forma distribuída ao longo da linha e de forma localizada em acidentes geométricos como válvulas, reduções, expansões, etc.

Em escoamentos de líquidos, o gradiente de pressão, além de indutor do escoamento, também pode ser o mecanismo de ativação de certos fenômenos físicos como a cavitação, isto é, a transformação de líquido em vapor, a qual tem início quando a pressão do líquido torna-se igual ou inferior a pressão de saturação à temperatura de escoamento.

Em regimes de escoamento permanente, a ocorrência do fenômeno de cavitação dá margem à formação de um padrão de escoamento a duas fases de natureza estratificada, onde o líquido escoava pela geratriz inferior do tubo, enquanto que o vapor se move pela parte superior. Esse padrão de escoamento, denominado na literatura de escoamento com coluna aberta, pode atingir significativas extensões e alterar substancialmente o perfil do gradiente hidráulico da linha.

Em particular, em oleodutos, os quais são obrigados a operar com sistemas de detecção de vazamento por força de lei, a ocorrência de escoamento com coluna aberta faz com que o tempo requerido para se identificar um vazamento aumente significativamente, quando comparado com um vazamento de mesma magnitude na mesma linha operando com a coluna líquida fechada (Nicholas, 1995).

Para melhor caracterizar o fenômeno de cavitação em pauta, a variação da linha piezométrica do fluido ou linha de gradiente hidráulico (HGL – “Hydraulic Grade Line”) ao longo do comprimento desenvolvido do duto é representada graficamente na Fig. 1.1, para o caso de um escoamento em regime permanente, em situações em que se verifica e não se verifica abertura da coluna de líquido.



**Figura 1.1 - Linhas piezométricas de escoamentos permanentes em dutos com e sem abertura de coluna líquida.**

Embora a definição usual de altura piezométrica (H) seja dada pela soma da cota topográfica (z) com a pressão por unidade de peso específico do líquido transportado, é mais conveniente introduzir o conceito de altura piezométrica modificada ( $H_m$ ) para a análise de escoamento com coluna aberta, a qual é definida pela seguinte expressão:

$$H_m = z + \frac{(P - P_{sat})}{\rho g} \quad (1.1)$$

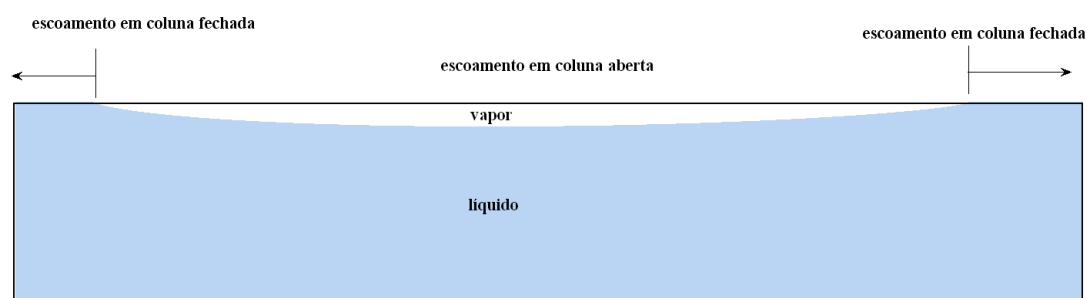
na qual  $P_{sat}$  representa a pressão de saturação do líquido à temperatura de escoamento,  $\rho$  a massa específica do líquido e  $g$  a aceleração local do campo gravitacional.

Num escoamento em regime permanente sem abertura de coluna líquida, a linha piezométrica modificada é caracterizada por uma única reta descendente tal como é mostrado na Fig 1.1.

Entretanto, dependendo das características geométricas do perfil planialtimétrico do duto, a pressão no fluido pode tornar-se igual ou inferior à pressão de saturação do líquido, fazendo-o cavitari. Nessa situação, há formação de vapor que se acumula na geratriz superior do tubo, formando uma grande cavidade e provocando a abertura da coluna líquida, conforme ilustrado na Fig. 1.2. A partir da seção do duto em que ocorre a abertura da coluna líquida até o momento em que esta volta a se fechar, o escoamento se dá em meia cana ou em coluna aberta. Este padrão de escoamento é também conhecido na literatura técnica pelo termo em inglês “slack flow” (Nicholas, 1995).

O perfil planialtimétrico é uma representação no plano z-s (sendo s a coordenada espacial que denota o comprimento desenvolvido do duto medido ao longo de sua linha de centro) da variação da altura topográfica de cada seção do duto em relação a um nível de referência especificado. Assim, quando o perfil piezométrico modificado e o perfil planialtimétrico se interceptam (conforme ilustrado na Fig. 1.1) ,

a pressão dentro do duto torna-se igual à pressão de saturação do líquido e a coluna líquida abre parcialmente.



**Figura 1.2 - Abertura de coluna líquida.**

Apesar de ser um problema de extrema relevância em diferentes aplicações em engenharia, o estudo sistemático da cavitação é relativamente novo. As classificações usualmente adotadas, as abordagens utilizadas e os problemas investigados encontram-se restritos a apenas alguns poucos livros texto (Knapp et al, 1970; Young, 1989; Brennen, 1995 e Michel & Franc, 2004), os quais são utilizados como referência básica atualmente.

A cavitação pode assumir diferentes formas, de acordo com a natureza e o regime de escoamento. Seu surgimento está sempre atrelado à estrutura inicial do escoamento. Entretanto, à medida que se desenvolve, a presença de cavidades de vapor tende a perturbar e alterar substancialmente o padrão de escoamento observado inicialmente. Na literatura básica, as formas de cavitação são geralmente divididas em três grupos de acordo com a natureza das cavidades formadas (Michel & Franc, 2004), a saber: isoladas no leito dos escoamentos, vinculadas às bordas de superfícies sólidas ou associadas à presença de vórtices.

As cavidades formadas no leito de escoamentos surgem em regiões de baixas pressões formadas em regimes permanentes ou transientes, como resultado do crescimento rápido de núcleos diminutos de ar presentes nos líquidos. Elas podem ser carreadas pela corrente principal do escoamento ou permanecerem estacionárias, mas colapsam

subseqüentemente quando adentram em regiões de pressões mais elevadas ou estas são formadas localmente em decorrência do regime transiente. Exemplos típicos dessa forma de cavidade ocorrem em explosões subaquáticas, nos escoamentos transientes em linhas de transporte de líquidos (tais como oleodutos, adutoras e tubulações forçadas de instalações hidrelétricas) e em circuitos hidráulicos de atuadores óleos-dinâmicos.

O padrão de cavidade vinculada às bordas das superfícies sólidas está associado à geometria do corpo sólido em contato com o líquido. Sua formação é devida à curvatura imposta às linhas de corrente do escoamento pela geometria local em regiões de formação de baixa pressão. Exemplos típicos deste padrão de cavidade ocorrem em aerofólios e em lâminas de propulsores (hélices) e de impelidores (bombas e turbinas), como também em acidentes geométricos presentes em tubulações, tais como válvulas, curvas e contrações.

Finalmente, o padrão de cavidade associado à presença de vórtices aparece, como o próprio nome sugere, em regiões de baixa pressão formadas em vórtices de esteiras turbulentas ou em vórtices oriundos das extremidades de aerofólios e impelidores. Enquanto que esses últimos possuem uma forma bem definida e estão associados à existência de vórtices em regimes quase permanentes, os primeiros estão livres no leito do escoamento e seu tempo de vida pode ser curto devido à dissipação viscosa (Michel & Franc, 2004).

A classificação das formas de cavitação apresentadas anteriormente permite enquadrar o problema em pauta na categoria das cavidades em leitos de escoamentos, tipicamente formadas em regimes permanentes. Todavia, é conveniente salientar que historicamente o estudo da cavitação em escoamentos em dutos teve origem no problema de ruptura (ou separação) da coluna líquida (formação de uma cavidade de vapor que ocupa integralmente área de seção reta do duto) (Bergant et al., 2006; Wylie & Streeter, 1993), cujo padrão de cavitação também se enquadra nas cavidades formadas no leito de escoamentos transientes.



Embora contrarie o senso comum de se começar o estudo de um problema do menor para o maior grau de complexidade, a justificativa para se iniciar o estudo da cavitação em escoamentos em dutos em regime transiente está associada à potencialidade dos danos catastróficos causados por ela. A cavidade, ao se colapsar diante da presença de ondas de sobrepressão, dá margem à formação de picos de pressão significativamente elevados, capazes de induzir o rompimento da tubulação. Essa particularidade pode, em parte, justificar a quantidade relativamente pequena de trabalhos em cavitação em regime permanente em dutos observada na busca bibliográfica realizada, quando comparada àqueles dedicados à cavitação em regime transiente.

Dos artigos consultados no levantamento bibliográfico realizado, destaque especial é devotado ao artigo de revisão sobre escoamento transiente com separação de coluna publicado recentemente por Bergant et al. (2006) e, num contexto mais amplo sobre cavitação, ao trabalho de Utturkar et al. (2005). Na revisão histórica apresentada em (Bergant et al., 2006), com cobertura 1930 até meados de 2005, os autores apresentam uma classificação dos modelos existentes segundo a natureza das equações de balanço que os governam. Excetuando-se os modelos baseados em escoamento em canal aberto (Bergant et al, 2006 e referências contidas; Wang et al., 2003) fundamentados na teoria de águas rasas (Whitham, 1999), os modelos podem ser enquadrados em duas categorias, a saber: modelos a dois fluidos e modelos homogêneos.

Escoamentos bifásicos, com um (líquido e vapor, por exemplo) ou dois componentes (líquido e gás, por exemplo), podem exibir diferentes topologias. Uma fase pode encontrar-se dispersa na outra (como em um escoamento em bolhas ou disperso) ou então as fases podem formar duas correntes separadas de escoamento (como no caso do escoamento estratificado ou anular). Estes dois estados assintóticos são referidos na literatura como escoamento homogêneo e escoamento separado e refletem a intensidade do grau de movimento relativo entre as fases. Em escoamentos separados, as fases escoam com velocidades

diferentes. Por outro lado, em escoamentos homogêneos as duas fases estão suficientemente misturadas e a fase dispersa encontra-se em proporções muito menores, de tal forma que não há movimento relativo entre elas (Drew & Passman, 1998; Graham, 1999).

Os modelos mecânicos empregados na descrição de escoamentos bifásicos também aderem à classificação mencionada acima e, por conseguinte, variam de modelos denominados homogêneos a modelos de dois fluidos. Os modelos a dois fluidos (ou múltiplos fluidos quando mais de dois componentes ou mais de duas fases estão presentes) são aqueles em que equações de balanço (de massa, quantidade de movimento linear e energia) são consideradas para cada fase separadamente, permitindo não somente a existência de diferentes velocidades, pressões e temperaturas para cada fase, como também o intercâmbio de massa, quantidade de movimento e energia entre elas. Como modelos que se enquadram nessa classificação, pode-se citar aqueles apresentados nos trabalhos de Saurel & Abgrall (1999), Ahuja et al. (2001) e Venkateswaran et al. (2003).

Essa abordagem permite o tratamento de mecanismos de não equilíbrio tanto mecânico quanto térmico, representando, portanto, o modelo mais geral. Do ponto de vista teórico, eles são mais precisos e adequados em situações em que efeitos cinéticos e termodinâmicos de não equilíbrio tornam-se extremamente significativos. Por outro lado, esses modelos são relativamente complexos, pois requerem a solução simultânea de até sete equações, mesmo no caso de escoamentos unidimensionais. As formas específicas que retratam as taxas de troca e a fricção viscosa entre as fases devem ser postuladas a priori. Essas quantidades são geralmente difíceis de serem obtidas, seja experimentalmente ou analiticamente. Essas desvantagens se sobrepõem às vantagens, desqualificando os modelos a dois fluidos como alternativos à modelagem do fenômeno de cavitação em dutos (Xie et al., 2006).

Quando seus movimentos são fortemente acoplados, as fases se movem quase que juntas e compartilham praticamente da mesma temperatura, dando margem à abordagem simplificada denominada modelo homogêneo de equilíbrio (ou simplesmente modelo homogêneo). Essa abordagem representa a mais simples de todas e consiste de um sistema de equações de balanço de massa, quantidade de movimento e energia para a mistura das fases como um todo. Apesar de sua simplicidade, esse modelo tem sido freqüentemente empregado na descrição de diversos problemas de engenharia dentre eles, o de abertura de coluna (regime permanente) e o de separação de coluna (regime transiente).

Dentre os modelos homogêneos destinados à descrição da cavitação em escoamentos em dutos, destacam-se, em ordem cronológica de publicação, os modelos de Wiggert & Sandquist (1979), Nicholas (1995), Kessal & Amaouche (2001), Shu (2003), Freitas Rachid (2003), Liu et al. (2004), Berg et al. (2005) e, finalmente, Xie et al. (2006).

Todos os modelos enumerados acima foram construídos visando-se, fundamentalmente, aplicações em regimes transientes; isto é, o problema de separação de coluna líquida. Entretanto, por incrível que pareça, a maior parte deles é incapaz de descrever o fenômeno de abertura de coluna, típico de regime permanente, como um caso particular. Exceção à regra são os quatro últimos modelos citados no parágrafo anterior, para os quais se apresentará, a seguir, uma descrição sumária identificando suas peculiaridades, vantagens e desvantagens. Essa abordagem possibilitará melhor situar o modelo proposto neste trabalho diante do contexto vigente. Tendo em mente que o foco deste trabalho é a cavitação em regime permanente, os aspectos relativos às técnicas numéricas utilizadas na construção de soluções aproximadas para as equações dos modelos não serão abordados na descrição apresentada a seguir, uma vez que todas se destinam ao escoamento transiente.

Os modelos de Wiggert & Sandquist (1979), Nicholas (1995), Kessal & Amaouche (2001) e Shu (2003) que não conseguem retratar o fenômeno de abertura de coluna em regime permanente, como caso particular do regime transiente, têm um ponto em comum. Partem da mesma premissa amplamente adotada nos modelos de cavitação, segundo a qual o processo de transformação de fase se dá à pressão constante e igual à pressão de saturação. Conforme será comentado mais adiante, essa hipótese equivale a admitir que o processo de mudança de fase se processa de forma reversível, isto é, sem apresentar dissipação de energia. Embora sejam capazes de prever a abertura da coluna, são incapazes de descrever o seu restabelecimento ao padrão de escoamento com coluna cheia.

Dentre esses artigos, o de Nicholas (1995) se destaca por apresentar pela primeira vez (do melhor do nosso conhecimento!) as condições inerentes ao perfil planaltimétrico da linha, necessárias à formação do padrão de escoamento com coluna aberta. O autor mostrou, ainda que usando argumentos sem justificativas plausíveis e coerentes, que os pontos de abertura e fechamento da coluna estavam associados ao perfil topográfico da linha. Mais especificamente, os pontos de abertura estavam condicionados à existência de picos, platôs ou declives da linha, enquanto que o ponto de fechamento é única e exclusivamente aos declives. Além disso, invocando a semelhança existente entre os padrões de escoamento com coluna aberta e em canais aberto, Nicholas (1995) propõe um modelo de fator de fricção modificado para escoamentos com coluna aberta, capaz de reproduzir o fator de fricção clássico de Darcy-Weisbach, na presença de coluna cheia.

Embora os modelos propostos por Freitas Rachid (2003), Liu et al. (2004), Berg et al. (2005) e Xie et al. (2006) estejam capacitados a descrever escoamentos permanentes com coluna aberta, não compartilham, ao contrário do grupo anterior, da mesma hipótese responsável por esse atributo.

Para se livrar da condição de que durante a abertura da coluna a pressão permanecia constante, Liu et al. (2004) utilizaram a expressão da velocidade de propagação de onda em misturas homogêneas de líquido e gás para, sob as hipóteses de ausência de transferência de massa entre as fases e equações constitutivas barotrópicas para o líquido e o vapor, deduzir uma expressão para a pressão na mistura com função da fração volumétrica. Essa estratégia assume explicitamente que o líquido e o vapor, ainda que com pequenas concentrações, coexistem em todo e qualquer ponto material. Uma implicação dessa abordagem é que a fração volumétrica de vapor ( $\alpha$ ) é tal que  $\alpha \in (0,1)$ . Em regiões do escoamento com coluna cheia  $\alpha \rightarrow 0^+$ , mas jamais atinge o valor  $\alpha=0$ . Similarmente, em regiões com separação total da coluna  $\alpha \rightarrow 1^-$ , mas jamais atinge o valor  $\alpha=1$ . Como não há transferência de massa entre as fases, nem tensão interfacial e nem a presença de um gás inerte com o vapor, o líquido e o vapor compartilham não apenas da mesma temperatura como também da mesma pressão e encontram-se sempre em equilíbrio termodinâmico, a pressões relativamente maiores do que a pressão de saturação. Apesar disso, os autores mostram, a partir de comparações com dados experimentais, que o modelo é capaz de prever com significativo grau de exatidão as oscilações da pressão no tempo, a abertura, a evolução e o colapso da cavidade em escoamentos transientes com separação de coluna.

Xie et al. (2006) introduziram um aprimoramento no modelo de Liu et al. (2004) alterando sutilmente a expressão da pressão da mistura em termos da fração volumétrica de vapor. Os autores demonstraram analiticamente que, ao contrário do modelo de Liu et al. (2004), independentemente da razão entre as massas específicas de líquido e vapor saturados, a pressão jamais se tornaria negativa quando a fração volumétrica de vapor se aproximava do valor unitário. Simulações numéricas conduzidas com o modelo proposto, tanto para problemas unidimensionais quanto bidimensionais envolvendo a abertura e o colapso de cavidades em escoamentos transientes,

revelaram boa concordância com outros modelos disponíveis na literatura e com resultados experimentais.

No artigo (Freitas Rachid, 2003) é apresentado um modelo tridimensional geral termodinamicamente consistente para cavitação em escoamentos homogêneos e isotérmicos de fluidos compressíveis. Desenvolvido à luz da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis, a fração volumétrica de vapor ( $\alpha$ ) é considerada uma variável interna e a restrição  $\alpha \in [0,1]$  é tratada como uma propriedade da mistura líquido+vapor. Argumentos de natureza termodinâmica são utilizados para mostrar que a taxa temporal de transferência de massa é proporcional à diferença entre as energias livre de Gibbs (ou potencial eletroquímico num contexto mais genérico) do vapor e do líquido.

Admitindo-se uma relação linear entre essas duas grandezas através de uma constante positiva, demonstra-se, através de uma análise limite, que o processo dinâmico real (irreversível) de mudança de fase pode ser interpretado com um caso intermediário de dois processos físicos distintos reversíveis (que não apresentam dissipação de energia). Um no qual a mudança de fase ocorre à pressão constante (pressão de vapor saturado) e o outro no qual o vapor se expande e se contrai na mistura, sem se transformar em líquido. Embora a dissipação de energia envolvida no processo seja relativamente pequena, sua presença não apenas torna o modelo mais realístico, como também assegura hiperbolicidade das equações da dinâmica dos fluidos, conferindo à velocidade de propagação de onda valores sempre reais, mesmo durante o processo de mudança de fase. Apesar de todo respaldo termodinâmico, o modelo apresenta uma desvantagem quando de sua implementação, quando comparado com os modelos anteriores. O sistema de equações e incógnitas a ser resolvido se altera de ponto para ponto e no tempo, de acordo com a fase presente, isto é, se  $\alpha=0$  (líquido puro),  $\alpha \in (0,1)$  (líquido e vapor) e  $\alpha=1$  (vapor puro).

Visando contornar esta dificuldade, Bert et al. (2005) formularam um modelo de cavitação para escoamentos homogêneos transientes incorporando a presença de um gás inerte em conjunto com vapor, de tal forma que ( $\alpha$ ) passa a representar a fração volumétrica da fase gasosa (vapor e gás), ficando submetida a restrição  $\alpha \in (0,1)$ . Tal como no modelo de Freitas Rachid (2003), a proposição de uma lei de evolução para a taxa de transferência de massa entre o líquido e o vapor é feita com respaldo termodinâmico, assumindo-se, porém, que a transformação de fase se dá de forma isentrópica.

Considerações a parte, a respeito do processo termodinâmico, para impor a condição de transformação de fase isentrópica e a presença do gás inerte, Berg et al. (2005) tiveram que considerar adicionalmente duas equações; a de conservação da massa para o gás e a de conservação de energia para a mistura como um todo. Todavia, como apenas frações mássicas diminutas foram consideradas, a conservação da massa para o gás foi ignorada, rendendo um modelo de quatro equações diferenciais parciais hiperbólicas. Ao contrário dos modelos apresentados anteriormente nos quais a transformação de fase se processa isotermicamente, durante esse processo tanto a pressão quanto a temperatura variam no modelo de Berg et al. (2005), embora as variações dessa última sejam bastante pequenas. Comparações realizadas com dados experimentais e simulações numéricas conduzidas com diferentes esquemas numéricos mostraram ser o modelo capaz de descrever adequadamente o fenômeno de cavitação em escoamentos transientes em tubulações hidráulicas.

Reunindo-se os diferentes aspectos considerados como positivos de cada um dos modelos descritos anteriormente, o presente trabalho tem por objetivo apresentar um modelo para descrever o fenômeno de cavitação em escoamentos homogêneos. Apesar de poder ser aplicado tanto em regime permanente quanto em transiente, as aplicações apresentadas no trabalho são restritas ao escoamento com coluna parcialmente aberta verificados em regimes de escoamento permanente. A transformação de fase é retratada como um processo isotérmico

irreversível, embora seja permitido que o líquido e o vapor coexistam, independentemente dos valores assumidos pela pressão na mistura, para valores diminutos de fração mássica de vapor na mistura. Como consequência, os valores admissíveis para a fração volumétrica de vapor encontram-se situados no intervalo  $\alpha \in (0,1)$ . O fator de fricção modificado proposto por Nicholas (1995) foi também incorporado ao modelo.

O trabalho foi organizado em seis capítulos, incluindo-se essa introdução, para os quais se apresentam, a seguir, breves descrições.

No segundo capítulo são derivadas as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento linear em escoamentos unidimensionais em dutos passíveis de se deformarem como consequência dos severos carregamentos de pressão gerados durante a ocorrência de transientes hidráulicos.

O terceiro capítulo é destinado à apresentação das equações constitutivas clássicas responsáveis pela relação existente entre a área de seção reta do tubo e a variação da pressão e as equações de estado para a fase líquida e a fase vapor. Como hipótese constitutiva, admitiu-se que o material do duto comportava-se de forma elástica e linear e que o líquido e vapor se comportavam como fluidos barotrópicos, ambos expressando relações lineares entre pressão e massa específica.

No quarto capítulo são apresentadas as hipóteses adicionais relativas à composição da mistura e as equações que integram o modelo. Num passo seguinte, as equações constitutivas para o fator de fricção modificado proposto por Nicholas (1995) e a lei de evolução responsável por retratar o processo de mudança de fase de forma irreversível (Freitas Rachid, 2003) (em conjunto com as condições que definem a abertura como também o fechamento da cavidade de vapor) são apresentados. O capítulo é encerrado refazendo-se a dedução apresentada por Nicholas (1995) das condições necessárias a ocorrência de escoamento com coluna aberta, relativas ao perfil topográfico da linha.



No quinto capítulo as equações do modelo são reapresentadas na forma adimensional e são identificados os principais grupos adimensionais responsáveis pela ocorrência do fenômeno em pauta. Por fim, algumas simulações numéricas são apresentadas de forma a ilustrar a capacidade do modelo em retratar coerentemente o processo de abertura e fechamento da coluna líquida em regimes permanentes.

Finalmente, são apresentadas no sexto e último capítulo e as principais conclusões e sugestões para o desenvolvimento de futuros trabalhos.

# Capítulo 2

## Equações de Balanço

A etapa inicial da modelagem de qualquer problema físico é o estabelecimento das equações básicas que o governam, as quais se aplicam independentemente de o meio ser sólido, líquido ou gasoso. Embora existam cinco leis básicas na Mecânica; conservação da massa, conservação da quantidade de movimento linear, conservação da quantidade de movimento angular, conservação da energia (ou 1ª lei da Termodinâmica) e a 2ª lei da Termodinâmica, apenas as duas primeiras leis serão diretamente consideradas na modelagem do problema em apreço.

Considerando-se que os comprimentos dos dutos ( $L$ ) dentro dos quais se verificam os escoamentos em questão são significativamente maiores do que seus diâmetros ( $D$ ), isto é,  $L \gg D$ , é usual adotar-se a hipótese de escoamentos unidimensionais (Streeter & Wylie, 1993). Conforme será visto adiante, esta hipótese simplifica consideravelmente a formulação do problema, pois implica em admitir que o escoamento é uniforme por seção. Como as formas diferenciais das equações de conservação da massa e de quantidade de movimento nesse contexto são relativamente distintas das equações tridimensionais

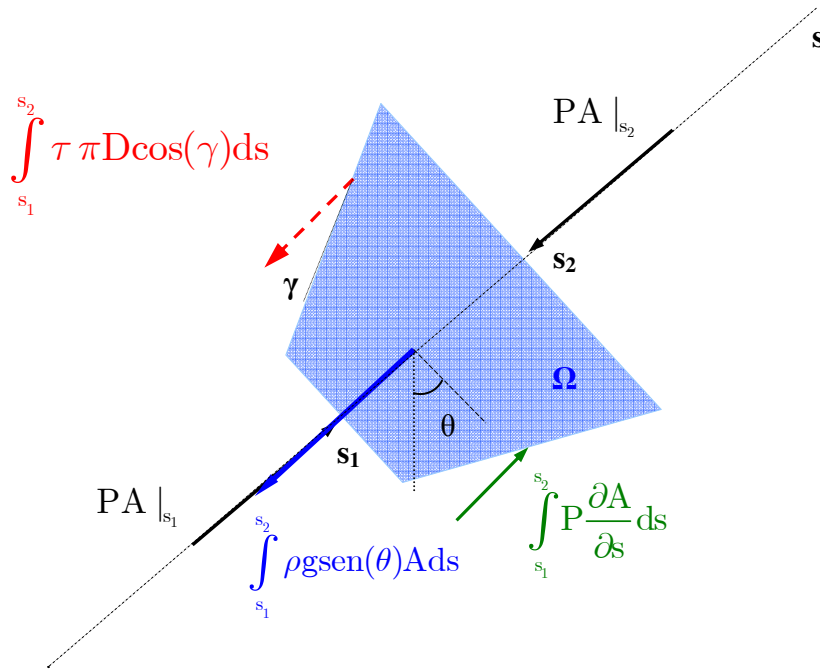
clássicas por apresentarem algumas peculiaridades como, por exemplo, a incorporação da variação da área de seção reta do duto e a descrição da força de atrito viscoso, apresentam-se, a seguir, as deduções dessas equações na forma diferencial em coordenadas eulerianas.

Na análise apresentada a seguir,  $s$  é a variável independente que representa a coordenada axial medida ao longo da linha de centro do tubo, com  $s \in [0, L]$ , sendo  $L$  o comprimento do duto, e  $t \in [0, \infty)$  a variável independente que caracteriza o instante de tempo. Para se obter as equações diferenciais que governam o movimento do líquido no interior do duto, parte-se das formas integrais da conservação da massa e da quantidade de movimento linear aplicadas a um volume de controle ( $\Omega$ ), conforme ilustrado na Fig. 2.1. Esse volume de controle é delimitado pelas seções arbitrárias  $s = s_1$  e  $s = s_2$ , com  $s_1 < s_2$ , e pela superfície lateral do duto conforme mostrado na Fig 2.1. Admite-se que o duto possui área de seção reta transversal  $A$  variável no espaço e no tempo (em decorrência do carregamento de pressão), de tal forma que  $A = \hat{A}(s, t)$ . Além disso, sua linha de centro forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal, conforme ilustrado na Fig.2.1.

Denotando-se por  $\rho = \hat{\rho}(s, t)$  e  $v = \hat{v}(s, t)$  os campos espaciais de massa específica e velocidade, o princípio de conservação da massa pode ser expresso pela seguinte expressão,

$$\frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} \rho A ds + \rho A v \Big|_{s_2} - \rho A v \Big|_{s_1} = 0 \quad (2.1)$$

a qual estabelece que a taxa de variação da massa no interior da região  $\Omega$  acrescida da diferença de fluxo de massa através das superfícies formadas pelas seções  $s = s_1$  e  $s = s_2$  deve ser nula.



**Figura 2.1 - Trecho de um duto de seção  $A$  variável e inclinação  $\theta$ .**

O princípio de conservação da quantidade de movimento linear na direção da linha de centro do duto pode ser expresso, num referencial inercial qualquer, através de:

$$\frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} \rho v A ds + \rho v^2 A|_{s_2} - \rho v^2 A|_{s_1} = F_S + F_B \quad (2.2)$$

A expressão anterior estabelece que a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento linear no interior da região  $\Omega$  acrescida da diferença de fluxo de quantidade de movimento linear devido ao fluxo de massa através das superfícies formadas pelas seções  $s = s_1$  e  $s = s_2$  deve ser igual ao somatório das forças de superfície  $F_S$  e de corpo  $F_B$  que atuam sobre o fluido em  $\Omega$  na direção  $s$ .

Os efeitos viscosos na direção normal são desprezados. Admitindo-se, portanto, como premissa básica que as únicas forças de superfície são devidas a tensão de cisalhamento na parede do duto  $\tau = \hat{\tau}(s, t)$  e a pressão no fluido  $P = \hat{P}(s, t)$ , o somatório dessas forças na direção  $s$  pode ser expresso como (vide Fig. 2.1):

$$F_s = PA \Big|_{s_1} - PA \Big|_{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} P \frac{\partial A}{\partial s} ds - \int_{s_1}^{s_2} \tau \pi D \cos(\gamma) ds \quad (2.3)$$

na qual  $\gamma$  é o ângulo formado pela geratriz da superfície lateral do duto com a horizontal. Admitindo-se que única força de corpo a que o fluido está submetido é devida ao campo gravitacional, então o somatório das forças de corpo na direção  $s$  que atua sobre o fluido na região  $\Omega$  pode ser escrita como (vide Fig. 2.1):

$$F_B = \int_{s_1}^{s_2} \rho g s \text{sen}(\theta) A ds \quad (2.4)$$

Admitindo-se que os campos envolvidos nas expressões anteriores sejam regulares, é possível mostrar que as formas diferenciais dos princípios de conservação da massa e da quantidade de movimento linear se reduzem às seguintes expressões:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v A) = 0 \quad (2.5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right) = - \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\tau \pi D \cos(\gamma)}{A} - \rho g \text{sen}(\theta) \quad (2.6)$$

para todo  $(s, t) \in (0, L) \times (0, \infty)$ .

As Eqs. (2.5) e (2.6) por si só não são suficientes para caracterizar completamente o modelo mecânico do escoamento de um fluido no interior de um duto. Informações adicionais a cerca dos comportamentos dos materiais envolvidos (o fluido e o material do duto), tais como relações entre tensões e deformações e equações de estado são necessárias. Essas equações serão apresentadas no capítulo seguinte, restringindo a análise a dutos que exibem comportamento mecânico elástico-linear e a água como fluido que escoar em seu interior. Conforme será visto mais adiante, admite-se, para a faixa de pressão sob consideração, que o comportamento mecânico da água também pode ser retratado por equações de estado lineares entre pressão e massa específica, tanto para a fase líquida quanto para a fase vapor.

## Capítulo 3

### Equações Constitutivas Clássicas

Conforme mencionado anteriormente, equações constitutivas para o duto e para o fluido são necessárias para completar a formulação do modelo, particularizando os seus comportamentos mecânicos. No presente capítulo, serão apresentadas as relações tensão-deformação para o duto e as equações de estado para o fluido. Sob a hipótese de escoamento isotérmico, admitir-se-á que o duto apresenta comportamento mecânico elástico-linear e o fluido apresenta equações de estado lineares, correlacionando pressão e massa específica, tanto para a fase líquida quanto para a fase vapor.

Com base nas relações tensão-deformação para o duto e na compatibilidade da deformação do duto com a variação da área de escoamento do fluido, deduz-se na seção a seguir, a relação existente entre a área de seção transversal do duto e a pressão no fluido. Embora essa peculiaridade seja relevante apenas em regimes transientes, quando pressões significativamente elevadas são geradas no interior do duto por conta da variação da quantidade de movimento do fluido, considerar-se-á a variação da área de seção transversal do duto na análise apresentada neste trabalho, de forma a assegurar que o modelo

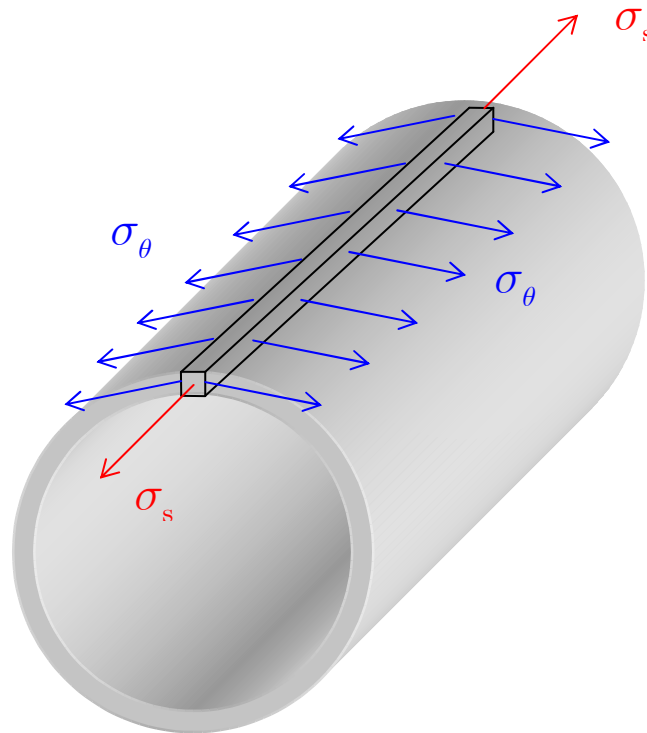
apresentado em regime permanente seja efetivamente um caso particular do caso mais geral em regime transiente.

### 3.1. Relação entre Área e Pressão

O ponto de partida para obtenção da expressão que estabelece a compatibilidade entre os movimentos do duto e do fluido e, por conseguinte, a relação entre a área de seção de transversal do escoamento e a pressão no fluido, é a definição do tipo de seção do duto. Por serem os dutos mais comuns, neste trabalho considerar-se-ão apenas dutos de seção reta circular uniforme, o que equivale a admitir  $\gamma \equiv 0$  para  $s \in [0, L]$  (vide Fig. 2.1).

Os dutos circulares podem ser classificados como tubos de parede fina ou de parede grossa, dependendo da sua razão de aspecto  $D/e$ , sendo  $e$  a espessura de sua parede. Dutos com razão de aspecto muito maior do que 20 são considerados tubos de parede fina. Neste caso, é possível mostrar (Timoshenko & Goodier, 1980) que as tensões radiais podem ser desprezadas, pois são muito menores que as tensões circunferenciais e longitudinais, sendo razoável, portanto, considerar um estado plano de tensões, tal como mostrado na Fig. 3.1





**Figura 3.1. - Estado plano de tensões na parede do duto.**

Considerando que o duto é um tubo de parede fina, está submetido a pequenas deformações e transformações isotérmicas e é constituído por um material elástico, linear e isotrópico, as relações tensão-deformação se resumem a (Timoshenko & Goodier, 1980):

$$\sigma_s = \frac{E(\varepsilon_s + \nu\varepsilon_\theta)}{1 - \nu^2} \quad (3.1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_s)}{1 - \nu^2} \quad (3.2)$$

na qual  $E$  é o módulo de elasticidade (ou de Young) do material do duto;  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material do duto;  $\varepsilon_s$  e  $\varepsilon_\theta$  são as deformações específicas longitudinal e circunferencial, respectivamente; e, finalmente,  $\sigma_s$  e  $\sigma_\theta$  são respectivamente as tensões longitudinais e circunferenciais atuantes.

Desprezando-se a inércia radial do tubo, a tensão circunferencial pode ser expressa em função da pressão (P) e da razão de aspecto  $D_0/e$  do duto através da relação:

$$\sigma_\theta = \frac{PD_0}{2e} \quad (3.3)$$

na qual  $D_0$  é o diâmetro do duto na configuração não-deformada.

Por outro lado, a deformação circunferencial pode ser caracterizada pela expressão:

$$\varepsilon_\theta = \frac{D - D_0}{D_0} = \frac{\Delta D}{D_0} \quad (3.4)$$

na qual  $D$  é o diâmetro do duto na configuração deformada. Da Eq. (3.4), pode-se expressar o diâmetro do duto deformado em termos da deformação circunferencial:

$$D = D_0(1 + \varepsilon_\theta) \quad (3.5)$$

Finalmente, com base na Eq. (3.5), pode-se escrever a área de seção transversal do duto deformado em termos da deformação circunferencial como:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D_0^2}{4} (1 + \varepsilon_\theta)^2 = A_0 (1 + \varepsilon_\theta)^2 \quad (3.6)$$

na qual  $A_0$  é a área de seção transversal do duto não-deformado. Substituindo a Eq. (3.3) na Eq. (3.2), obtém-se a deformação circunferencial em termos da pressão, da razão de aspecto, do módulo de Young e do coeficiente de Poisson do material do duto:

$$\varepsilon_\theta = \frac{PD_0}{2eE} (1 - \nu^2) - \nu \varepsilon_s \quad (3.7)$$

Por outro lado, a Eq. (3.1) permite expressar a deformação axial do duto em termos da tensão axial e da deformação circunferencial:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}(1 - \nu^2) - \nu\varepsilon_\theta \quad (3.8)$$

As Eqs. (3.7) e (3.8) constituem um sistema que pode ser resolvido quando se consideram as formas de ancoragem do duto. Dutos com ancoragem axial não apresentam deformações longitudinais, ou seja:  $\varepsilon_s = 0$ . Nessas condições de ancoragem, resulta da Eq. (3.7) que a deformação circunferencial é dada por:

$$\varepsilon_\theta = \frac{PD_0}{2eE}(1 - \nu^2) \quad (3.9)$$

Por outro lado, dutos com juntas de expansão são livres para se deformar na direção longitudinal. Como consequência, a tensão longitudinal é nula, isto é:  $\sigma_s = 0$ . Nessas condições, a combinação das Eqs. (3.7) e (3.8) permite expressar a deformação circunferencial como:

$$\varepsilon_\theta = \frac{PD_0}{2eE} \quad (3.10)$$

Por fim, as equações (3.9) e (3.10) podem ser escritas numa única equação na seguinte forma:

$$\varepsilon_\theta = \xi \frac{PD_0}{2eE} \quad (3.11)$$

na qual  $\xi$  é o fator de ancoragem do duto. Dessa forma, o fator  $\xi$  assume o valor 1, se o duto apresentar juntas de expansão e assume o valor  $1 - \nu^2$ , caso o duto esteja ancorado axialmente.

Pode-se mostrar, por meio de expansão em série de Taylor em torno de  $\varepsilon_\theta = 0$ , que a Eq. (3.6) pode ser linearizada sem comprometer a exatidão dos valores de A, desde que os valores de  $\varepsilon_\theta$  sejam muito menores do que 1. Dessa forma, à luz da hipótese de pequenas deformações ( $\varepsilon_\theta \ll 1$ ) pode-se escrever:

$$A = A_0(1 + 2\varepsilon_\theta) \quad (3.12)$$

Substituindo a Eq. (3.11) na Eq. (3.12), obtém-se a expressão que permite exprimir a área de seção transversal do duto em termos da pressão no fluido:

$$A = A_0 \left( 1 + \xi \frac{PD_0}{eE} \right) \quad (3.13)$$

### 3.2. Equações de Estado

Conforme será visto adiante no capítulo 4, ocasião em que serão estabelecidas as hipóteses básicas do modelo, o fluido será tratado como uma mistura contínua de fases compressíveis de líquido e de vapor. Assim, para caracterizar o comportamento termodinâmico do fluido faz-se necessário a especificação de equações de estado para cada uma das fases.

O modelo proposto apresentado neste trabalho se aplica a simulações de escoamentos em regime permanente de qualquer substância pura. Entretanto, como nos estudos de casos realizados no capítulo 5 a água será o fluido empregado nas simulações, restringir-se-á a apresentação de equações de estado para a fase líquida e vapor desta substância.

Por simplicidade, admitir-se-á que o vapor d'água se comporta como um gás perfeito e que o líquido também apresenta uma relação linear entre pressão e massa específica. Embora essas hipóteses possam a princípio parecer bastante restritivas, permitem simplificar consideravelmente a formulação do problema sem prejuízo ou limitação dos resultados físicos. Utilizando-se de equações cúbicas de estado tanto para o líquido quanto para o vapor, Assumpção & Freitas Rachid (2008) mostraram que o emprego de equações de estado mais precisas não altera significativamente os resultados referentes às variações da pressão, fração volumétrica de vapor e taxa de dissipação de energia no fenômeno de mudança de fase da água. Com base nesse resultado, postula-se a seguinte equação de estado para o vapor:

$$P_v = \rho_v RT = \rho_v a_v^2 \quad (3.14)$$

Na equação (3.14),  $P_v$  é pressão do vapor,  $\rho_v$  é a massa específica do vapor,  $R$  é a constante do vapor d'água,  $T$  é a temperatura do escoamento e  $a_v$  é a velocidade de propagação sônica isotérmica no vapor d'água.

O comportamento da fase líquida é descrito por uma equação de estado linearizada, ajustada a partir da equação de estado de Fine & Millero (1973) retratada pela Eq. (3.15). Essa equação descreve de forma confiável e precisa o comportamento termodinâmico da água líquida para pressões manométricas na faixa de 0 a 1000 bar e temperaturas  $t$  variando de 0 a 100°C (Fine & Millero (1973)).

$$v_1 = v_0 - \frac{v_0 P_{lman}}{B + A_1 P_{lman} + A_2 P_{lman}^2} \quad (3.15)$$

A Eq. (3.15) foi determinada a partir de dados obtidos de medições de velocidade de propagação sônica na água (Fine & Millero (1973)). Nesta equação,  $v_1$  é o volume específico da água em  $\text{cm}^3/\text{g}$ ,  $P_{lman}$  é a pressão manométrica da água líquida em bar,  $v_0$ ,  $B$ ,  $A_1$  e  $A_2$  são parâmetros cujos valores dependem da temperatura ( $t$ ) em graus Celsius ( $t = T - 273.15$ ), os quais são descritos segundo as equações:

$$v_0 = \frac{1 + v_0^{(0)}t}{v_0^{(1)} + v_0^{(2)}t + v_0^{(3)}t^2 + v_0^{(4)}t^3 + v_0^{(5)}t^4 + v_0^{(6)}t^5} \quad (3.15-a)$$

$$B = B_0 + B_1t + B_2t^2 + B_3t^3 + B_4t^4 \quad (3.15-b)$$

$$A_1 = A_1^{(0)} + A_1^{(1)}t + A_1^{(2)}t^2 + A_1^{(3)}t^3 + A_1^{(4)}t^4 \quad (3.15-c)$$

$$A_2 = A_2^{(0)} + A_2^{(1)}t + A_2^{(2)}t^2 + A_2^{(3)}t^3 + A_2^{(4)}t^4 \quad (3.15-d)$$

**Tabela 3.1 – Tabelas de valores dos coeficientes das Eqs. (3.15).**

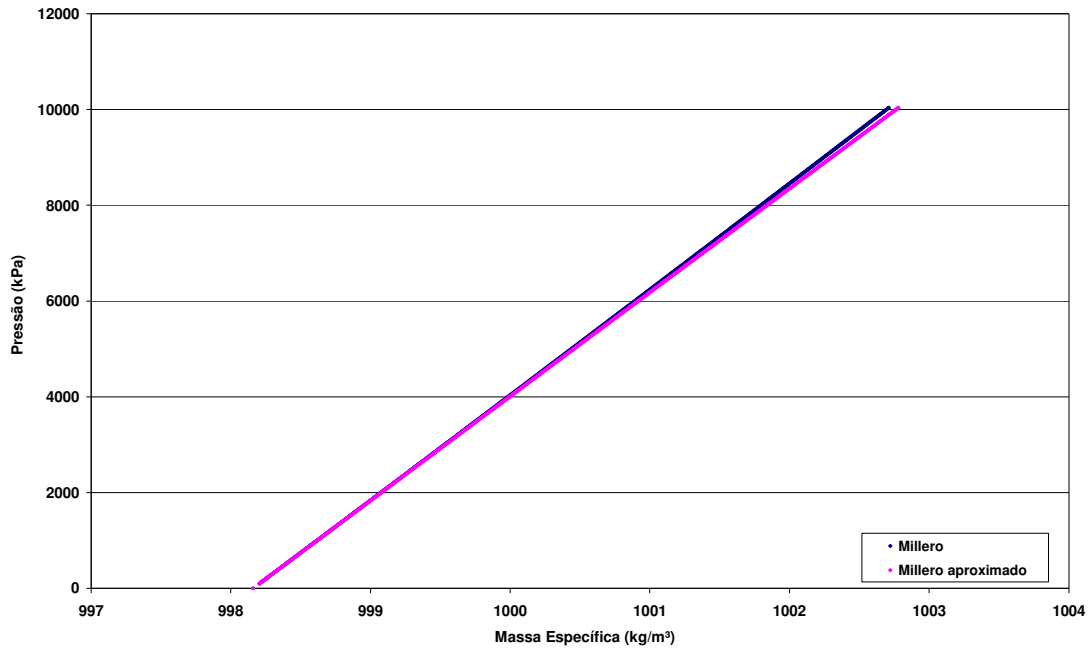
<b>i</b>	$v_0^i$ ( <b>m<sup>3</sup>/kg</b> )	$B_i$ ( <b>bars</b> )	$A_1^{(i)}$	$A_2^{(i)}$
<b>0</b>	$18,159725 \cdot 10^{-3}$	19654,320	3,2891	$6,245 \cdot 10^{-5}$
<b>1</b>	0,9998396	147,037	$-2,3910 \cdot 10^{-3}$	$-3,913 \cdot 10^{-6}$
<b>2</b>	$18,224944 \cdot 10^{-3}$	-2,21554	$2,8446 \cdot 10^{-4}$	$-3,499 \cdot 10^{-8}$
<b>3</b>	$-7,922210 \cdot 10^{-6}$	$1,0478 \cdot 10^{-2}$	$-2,8200 \cdot 10^{-6}$	$7,942 \cdot 10^{-10}$
<b>4</b>	$-55,44846 \cdot 10^{-9}$	$-2,2789 \cdot 10^{-5}$	$8,477 \cdot 10^{-9}$	$-3,299 \cdot 10^{-12}$
<b>5</b>	$149,7562 \cdot 10^{-12}$			
<b>6</b>	$-393,2952 \cdot 10^{-15}$			

Para facilitar a compreensão da linearização da Eq. (3.15), este processo será conduzido em duas etapas distintas. A primeira etapa consiste em desprezar os termos correspondentes aos coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  na Eq. (3.15). Fazendo-se  $A_1=0$  e  $A_2=0$  em (3.15), resulta a seguinte forma aproximada da equação de Fine & Millero (1973):

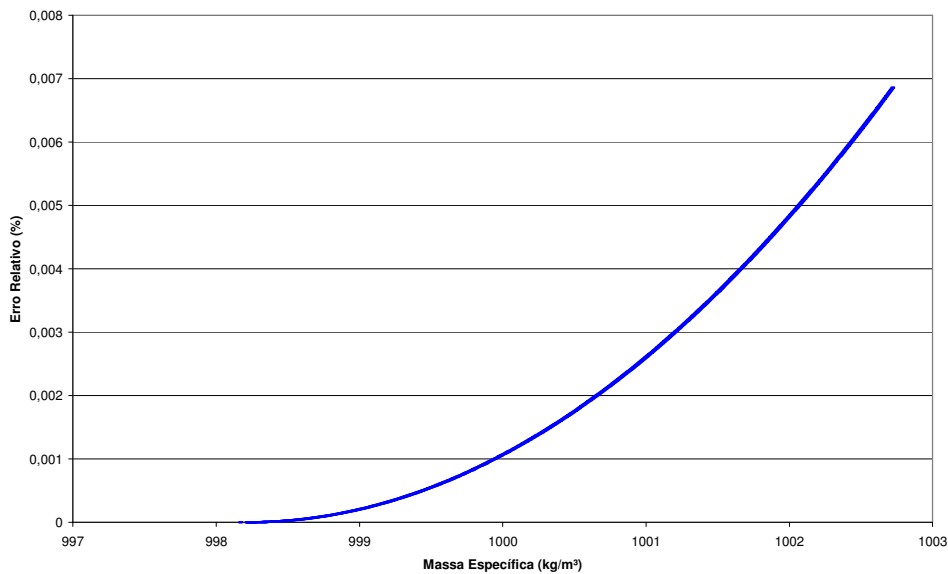
$$v_1 = v_0 - \frac{v_0 P_{lman}}{B} = v_0 \left( 1 - \frac{P_{lman}}{B} \right) \quad (3.16)$$

Comparando-se os resultados previstos pelas Eqs. (3.15) e (3.16) é possível verificar com base no gráfico da Fig. 3.2 que os termos correspondentes aos coeficientes  $A_1$  e  $A_2$  podem ser desprezados sem comprometer significativamente a exatidão da pressão numa faixa de pressão manométrica mais restrita de 0 a 100bar. Essa afirmação é

corroborada visualizando-se o gráfico da Fig. 3.3, o qual apresenta o erro relativo entre as previsões da pressão via Eqs. (3.15) e (3.16) em função da massa específica. Conforme pode ser visto na Fig. 3.3, o erro relativo não ultrapassa a marca de 0,007% na faixa de pressão considerada.



**Figura 3.2 – Comparação entre as previsões da Equação de Fines & Millero (1973) original (Eq.(3.15)) e aproximada (Eq. (3.16)).**



**Figura 3.3 - Erro relativo entre as pressões previstas pela equação de Fines & Millero (1973) original ((Eq. 3.15)) e aproximada ((Eq. 3.16)).**

A segunda etapa do processo consiste em efetivamente linearizar a equação aproximada (3.16). Para isso, é conveniente reescrever a Eq. (3.16) em termos da pressão absoluta da água líquida e de sua massa específica  $\rho_1$ , em vez do volume específico  $v_1$ :

$$P_1 = P_{\text{atm}} + B \left( 1 - \frac{1}{v_0 \rho_1} \right) \quad (3.17)$$

A Eq. (3.17) pode ser linearizada, sem comprometimento da sua exatidão, pela seguinte expressão,

$$P_1 = a_1^2 (\rho_1 - \rho_1^0) \quad (3.18)$$

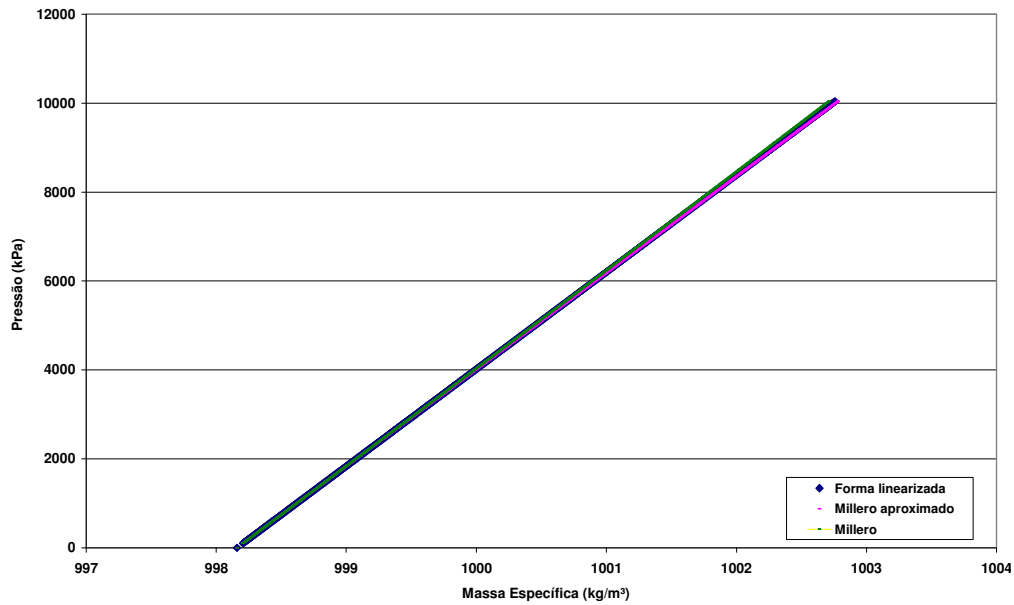
a qual representa uma reta secante que passa pelos pontos  $(P_{\text{sat}}, \rho_{1s})$  e  $(P_0, \rho_1^0)$ , em que  $\rho_{1s}$  é a massa específica da água à pressão de saturação  $P_{\text{sat}}$  a uma determinada temperatura especificada,  $P_0$  é a pressão absoluta nula e  $\rho_1^0$  é a massa específica da água a pressão  $P_0$ . Com base nessa caracterização, pode-se mostrar que o coeficiente angular  $a_1^2$ , que representa o quadrado da velocidade sônica na fase líquida, e o coeficiente linear  $\rho_1^0$ , que representa a massa específica da água líquida à pressão absoluta nula, podem ser calculados com base nas seguintes expressões:

$$a_1^2 = \frac{P_{\text{sat}}}{\rho_{1s} - \rho_1^0} \quad (3.19)$$

$$\rho_{1s} = \frac{1}{v_0 \left[ 1 - \left( \frac{P_{\text{sat}} - P_{\text{atm}}}{B} \right) \right]} \quad (3.20)$$

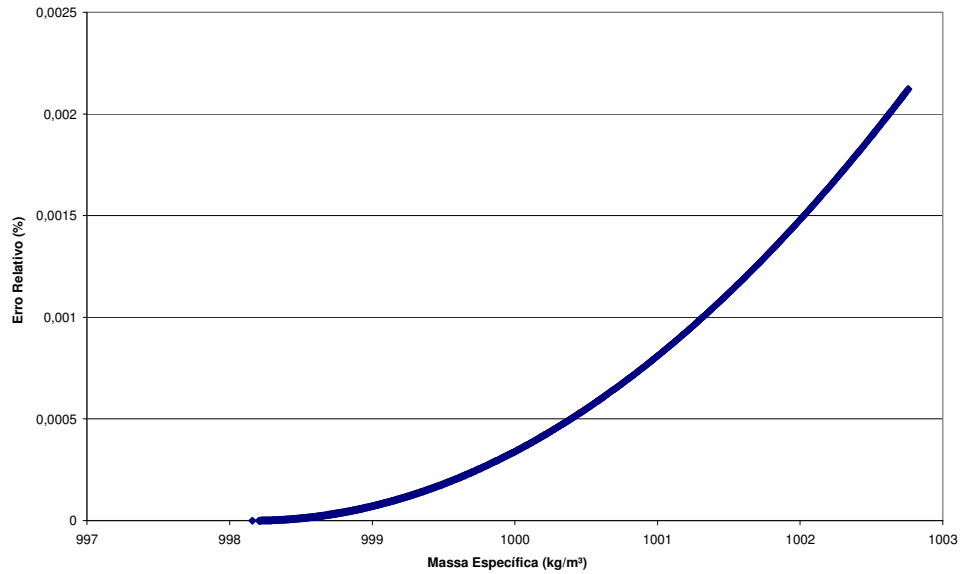
$$\rho_1^0 = \frac{B}{v_0 (B + P_{\text{atm}})} \quad (3.21)$$





**Figura 3.4 - Comparação entre as equações de Fines & Millero (1973) (Eq. (3.15)), Fines & Millero aproximada (Eq. (3.16)) e a forma linearizada (Eq.(3.18)).**

Os gráficos das Figs. 3.4 e 3.5 mostram que a forma linearizada (3.18) pode substituir a equação de estado original (3.15) sem perda de exatidão. Pode-se observar que as curvas de pressão versus massa específica são praticamente coincidentes na Fig. 3.4 e a margem de erro relativo de uma equação para outra não excede a 0,0025% para faixa de pressão manométrica de 0 a 100 bar, conforme ilustrado na Fig. 3.5.



**Figura 3.5 - Erro relativo entre as pressões previstas pela equação de Fines e Millero (1973) original ((Eq. 3.15)) e a forma linearizada ((Eq. 3.18)).**

Comparando-se os gráficos das Figs. 3.3 e 3.5, é possível verificar que a forma linear proposta pela Eq. (3.18) representa na realidade uma aproximação da Eq. (3.15) melhor do que a forma descrita pela Eq. (3.16).

## Capítulo 4

### Formulação do Modelo Mecânico

Nos capítulos 2 e 3 foram apresentadas as equações básicas e constitutivas clássicas. No entanto, em função da complexidade do próprio escoamento e das equações apresentadas, é necessário lançar mão de algumas considerações ou hipóteses básicas adicionais que têm por objetivo tornar o modelo solúvel sem, contudo, comprometer a confiabilidade dos seus resultados.

No presente capítulo, após o estabelecimento de algumas hipóteses adicionais, apresentar-se-ão, a partir das equações básicas e constitutivas clássicas descritas anteriormente, as equações do modelo proposto. Na seqüência, o modelo será consolidado com base na proposição de equações constitutivas não clássicas para a tensão de cisalhamento na parede do duto  $\tau$  e a taxa temporal de transferência de massa  $\Gamma$ . Encerra-se o capítulo com a dedução das condições relativas ao perfil planialtimétrico do duto suscetíveis a ocorrência do fenômeno de abertura de coluna.

## 4.1. Hipóteses Básicas

A primeira hipótese a ser assumida refere-se à natureza do fluido que está escoando através do duto. Admite-se que o fluido é uma mistura contínua de fases compressíveis (líquido e vapor) que coexistem num mesmo ponto material e num mesmo instante de tempo. Com base nessa hipótese, a massa específica do fluido pode ser expressa em termos das massas específicas das fases constituintes, ponderadas pela fração volumétrica de vapor, ou seja:

$$\rho = (1 - \alpha)\rho_l + \alpha\rho_v \quad (4.1)$$

na qual  $\rho_l$  é a massa específica da fase líquida e  $\rho_v$  é a massa específica da fase de vapor. A variável interna,  $\alpha$ , denominada fração volumétrica de vapor ou fração de vazio, é definida como sendo a razão local entre o volume de vapor na mistura e o volume total de mistura. Com base nas considerações anteriores, a fração volumétrica de vapor é tal que  $\alpha \in (0,1)$ .

Na segunda hipótese básica, admite-se que a pseudo-mistura constituída pelas fases líquida e vapor é quase homogênea. Isto equivale a admitir que não há deslizamento significativo entre as fases, ou seja, as velocidades do líquido e do vapor são iguais em todo o domínio:

$$v = v_l = v_v \quad (4.2)$$

Na terceira e última hipótese básica relativa à formulação do modelo, admite-se que os efeitos de tensão interfacial são desprezíveis, o que permite assumir que as pressões das fases líquida e vapor são iguais, ou seja:

$$P_l = P_v = P \quad (4.3)$$

Finalmente, em decorrência da hipótese de escoamento isotérmico em conjunto com hipóteses estabelecidas através das Eqs.

(4.1), (4.2) e (4.3), admite-se que ambas as fases também compartilham da mesma temperatura, eliminando-se a possibilidade de haver troca de calor entre elas. É importante salientar que a hipótese de escoamento isotérmico admite implicitamente troca de calor do fluido com o meio ambiente.

## 4.2. Equações do Modelo

O modelo apresentado neste trabalho tem como objetivo descrever globalmente o escoamento de líquidos em dutos em regime permanente na presença do fenômeno de abertura de coluna. Tratando-se de escoamento em regime permanente, os termos de taxa de variação temporal podem ser eliminados das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento linear, Eqs. (2.3) e (2.4), respectivamente. Neste contexto, a coordenada espacial  $s$  passa a ser a única variável independente, e todas as variáveis dependentes passam a depender única e exclusivamente dela. Dessa forma, as derivadas parciais com relação à coordenada  $s$  podem ser substituídas por derivadas ordinárias. Considerando que os dutos têm seção circular uniforme ( $\gamma \equiv 0$ ), então as Eqs. (2.3) e (2.4) podem ser reescritas na forma:

$$\frac{d}{ds}(\rho v A) = 0 \quad (4.4)$$

$$\rho v \frac{dv}{ds} + \frac{dP}{ds} + \frac{\tau \pi D}{A} + \rho g \sin(\theta) = 0 \quad (4.5)$$

Com base na hipótese expressa na Eq. (4.1), a Eq. (4.4) da conservação da massa pode ser decomposta em duas, cada uma caracterizando o princípio de conservação da massa para cada fase:

$$\frac{d}{ds}[\alpha \rho_v v A] = \Gamma A \quad (4.6)$$

$$\frac{d}{ds}[(1 - \alpha)\rho_1 v A] = -\Gamma A \quad (4.7)$$

O termo de fonte  $\Gamma$  estabelece uma relação de dependência entre o balanço de massa de líquido e de vapor durante o processo de transformação de fase e é, por este motivo, chamado de taxa temporal de transformação de massa entre as fases. Quando  $\Gamma > 0$ , líquido é transformado em vapor. Se  $\Gamma < 0$ , vapor é transformado em líquido. Finalmente, quando  $\Gamma = 0$ , não há transformação de fase e a massa de líquido e de vapor se conservam independentemente.

De posse das equações constitutivas apresentadas no capítulo 3, Eqs. (3.13), (3.14) e (3.18), obtêm-se as seguintes formas expandidas das Eqs. (4.6) e (4.7):

$$-v\rho_1 \frac{d\alpha}{ds} + \left[ \frac{v(1 - \alpha)}{a_1^2} + \frac{(1 - \alpha)\rho_1 v \xi D_0}{eE} \right] \frac{dP}{ds} + (1 - \alpha)\rho_1 \frac{dv}{ds} = -\Gamma \quad (4.8)$$

$$v\rho_v \frac{d\alpha}{ds} + \left[ \frac{v\alpha}{a_v^2} + \frac{\alpha\rho_v v \xi D_0}{eE} \right] \frac{dP}{ds} + \alpha\rho_v \frac{dv}{ds} = \Gamma \quad (4.9)$$

nas quais  $a_1$  e  $a_v$  são as velocidades de propagação sônica isotérmica nas fases líquida e de vapor, respectivamente, definidas pelas expressões:

$$a_1 = \sqrt{\left( \frac{\partial P_1}{\partial \rho_1} \right) \Big|_{T=\text{cte}}} \quad (4.10)$$

$$a_v = \sqrt{\left( \frac{\partial P_v}{\partial \rho_v} \right) \Big|_{T=\text{cte}}} \quad (4.11)$$

As Eqs. (4.5), (4.8) e (4.9) compõem o sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem não-linear que define o modelo de escoamento proposto. É possível mostrar, vide Apêndice B, que este

conjunto de equações pode ser adequadamente manipulado, de forma a se obter as seguintes formas normais:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{\rho v \Gamma \left[ \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_v} \right] - \frac{4\tau}{D_0} - \rho g \text{sen}(\theta)}{1 - M^2 \left[ 1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right]} \quad (4.12)$$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{1}{\rho v} \left( \frac{4\tau}{D_0} + \rho g \text{sen}(\theta) + \frac{dP}{ds} \right) \quad (4.13)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\Gamma}{v \rho_v} + \frac{\alpha}{\rho v^2} \left[ \frac{4\tau}{D_0} + \rho g \text{sen}(\theta) + \left( 1 - M^2 \left( \frac{\rho a^2}{\rho_v a_v^2} + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right) \right) \frac{dP}{ds} \right] \quad (4.14)$$

Nas Eqs. (4.12) e (4.14) aparecem os parâmetros  $a$  e  $M$  que são a velocidade sônica na mistura líquido-vapor e o número de Mach, os quais são expressos respectivamente por:

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\rho_1 a_1^2 \rho_v a_v^2}{(1-\alpha) \rho_v a_v^2 + \alpha \rho_1 a_1^2}} \quad ; \quad M = \frac{v}{a} \quad (4.15)$$

O sistema constituído pelas Eqs. (4.12), (4.13) e (4.14) tem como variáveis pressão  $P$ , velocidade  $v$  e fração volumétrica de vapor  $\alpha$ , todas funções do comprimento desenvolvido do duto, ou seja:  $P = \hat{P}(s)$ ,  $v = \hat{v}(s)$  e  $\alpha = \hat{\alpha}(s)$ .

Uma vez especificados o fluido, o material do duto e sua topografia, os parâmetros  $D_0$ ,  $e$ ,  $g$ ,  $\xi$ ,  $E$ ,  $a_1$ ,  $a_v$  e  $\theta = \hat{\theta}(s)$  são automaticamente pré-definidos. As demais variáveis como  $\rho_1$ ,  $\rho_v$ ,  $\rho$ ,  $a$ ,  $\Gamma$  e  $\tau$  têm seus valores relacionados às variáveis  $P$ ,  $v$  e  $\alpha$  por meio de equações constitutivas. Nas duas seções subseqüentes, serão apresentadas as equações constitutivas para a tensão de cisalhamento

na parede do duto  $\tau$  e a taxa de transferência de massa  $\Gamma$ . Conforme será visto mais adiante, as equações constitutivas propostas para estas variáveis são fundamentais na descrição do fenômeno em pauta, razão pela qual são apresentadas em destaque a seguir.

### 4.3. Fator de Atrito do Escoamento com Abertura da Coluna

Em regime permanente, a tensão cisalhante  $\tau$  na parede do duto decorrente do atrito viscoso pode ser expressa em termos da velocidade e do fator de atrito  $f$  de Darcy-Weisbach de acordo com (Streeter & Wylie, 1993):

$$\tau = f \frac{\rho V^2}{8} \quad (4.16)$$

Nos escoamentos com coluna cheia, o fator de atrito  $f$  pode ser calculado mediante correlações empíricas ou por meio de ábacos ou diagramas como, por exemplo, o diagrama de Moody. Em geral, o fator de atrito é uma função do número de Reynolds do escoamento líquido ( $Re_L$ ) e da rugosidade relativa da parede do duto ( $\varepsilon$ ), isto é

$$f = \hat{f}(Re_L, \varepsilon) \quad (4.17)$$

Quando se trata de escoamentos com coluna aberta, o fator de atrito ( $f_m$ ) não é função apenas do número de Reynolds da mistura líquido - vapor e da rugosidade relativa, mas também da fração volumétrica de vapor ( $\alpha$ ), ou seja:

$$f_m = \tilde{f}(Re, \varepsilon, \alpha) \quad (4.18)$$

É necessário, portanto, buscar uma expressão que permita caracterizar um fator de atrito equivalente ( $f_m$ ) capaz de satisfazer as duas condições de escoamento.



A topologia dos escoamentos em dutos em regime permanente se altera drasticamente quando da abertura da coluna líquida. O campo gravitacional aliado à diferença de massa específica entre o líquido e o vapor induz um escoamento de natureza estratificado. O líquido escoo pela geratriz inferior do duto, enquanto que o vapor migra para uma cavidade que se estabelece na sua parte superior.

Baseando-se nas semelhanças existentes entre as topologias dos escoamentos com abertura de coluna líquida e em canais abertos, Nicholas (1995) propôs uma modificação na equação de Manning para cálculo de perda de carga aplicado a escoamentos em canais abertos. No contexto deste trabalho, a aproximação proposta por Nicholas (1995) em termos da tensão de cisalhamento na parede do duto conduz a:

$$\tau = f \frac{\rho v^2 \left( \frac{D_0}{4} \right)^{1/3}}{8 R_h^{4/3}} \quad (4.19)$$

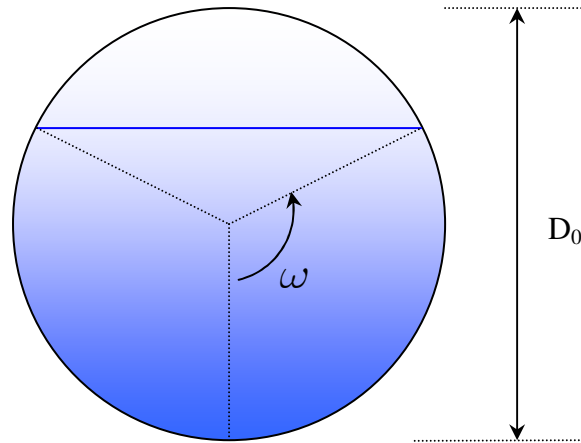
na qual ( $R_h$ ) é o raio hidráulico dado pela razão entre a área de seção transversal ( $A$ ) e o perímetro molhado ( $p$ )

$$R_h = \frac{A}{p} \quad (4.20)$$

A área de seção transversal e o perímetro molhado, por sua vez, podem ser escritos como funções do ângulo molhado ( $\omega$ ). Tomando-se como referência a Fig. 4.1, a qual mostra a seção de transversal de duto com abertura de coluna líquida e o ângulo molhado ( $\omega$ ), é possível escrever:

$$A = \frac{D_0^2}{4} \left( \omega - \frac{\text{sen}(2\omega)}{2} \right) \quad (4.21)$$

$$p = D_0 \omega \quad (4.22)$$



**Figura 4.1 - Seção transversal de uma linha com abertura de coluna líquida.**

Substituindo as Eqs. (4.21) e (4.22) na Eqs. (4.20), obtém-se o raio hidráulico em termos do ângulo molhado ( $\omega$ )

$$R_h = \frac{D_0}{4} \left( 1 - \frac{\text{sen}(2\omega)}{2\omega} \right) \quad (4.23)$$

A equação modificada proposta por Nicholas (1995) permite calcular a perda de carga de um escoamento em qualquer condição: com ou sem abertura de coluna líquida. O fato de a equação estar escrita em termos do raio hidráulico ( $R_h$ ) garante que as duas condições de escoamento sejam atendidas, visto que o raio hidráulico pode ser expresso como uma função do ângulo molhado ( $\omega$ ), com  $\omega \in (0, \pi]$ .

De fato, substituindo-se a Eq. (4.23) na Eq. (4.19), é possível escrever a tensão cisalhante na parede do duto em função de um fator de atrito equivalente ( $f_m$ ), que contempla as duas condições de escoamento (sem e com abertura de coluna):

$$\tau = f_m \frac{\rho V^2}{8} \quad (4.24)$$

onde

$$f_m = \frac{f}{\left(1 - \frac{\text{sen}(2\omega)}{2\omega}\right)^{4/3}} \quad (4.25)$$

A Eq. (4.25) mostra claramente que o fator de atrito equivalente depende do fator de atrito do escoamento sem abertura de coluna líquida e do ângulo molhado. Por outro lado, é possível mostrar (vide Apêndice A) que a seguinte relação entre a fração volumétrica de vapor ( $\alpha$ ) e o ângulo molhado ( $\omega$ ) é válida

$$\alpha = 1 - \frac{\omega}{\pi} + \frac{\text{sen}(2\omega)}{2\pi} \quad (4.26)$$

na qual  $\omega$  é expresso em radianos,  $\omega \in (0, \pi]$ . Assim, com base na inversa da Eq. (4.26), isto é, expressando  $\omega$  como função de  $\alpha$  ( $\omega = \hat{\omega}(\alpha)$ ), pode-se concluir que o fator de atrito equivalente é também uma função da fração volumétrica de vapor.

Com base na Eq. (4.26), observa-se que quando  $\omega \rightarrow 0$ , a fração volumétrica de vapor tende a 1, isto é, há apenas vapor de fluido dentro do duto. Por outro lado, se  $\omega = \pi$ , a fração volumétrica de vapor é nula, mostrando que nessas condições a área de seção transversal do duto está totalmente preenchida pelo líquido.

A Fig. 4.2 apresenta o gráfico da Eq. (4.26) que correlaciona a fração volumétrica de vapor ( $\alpha$ ) com o ângulo molhado ( $\omega$ ). Nesta figura, é possível visualizar a variação da fração volumétrica de vapor com o ângulo molhado quando há abertura de coluna líquida.

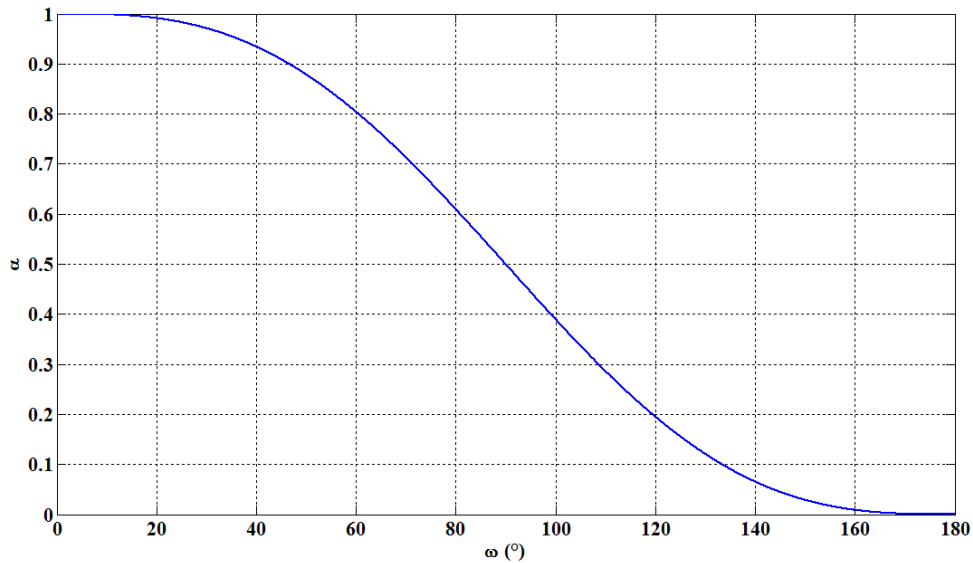


Figura 4.2 - Fração volumétrica de vapor como função do ângulo molhado (em  $^\circ$ ).

Para se ter uma idéia da influência da abertura da coluna líquida no fator de atrito do escoamento, apresenta-se na Fig. 4.3 o comportamento da razão entre os fatores de atrito modificado e clássico em relação à fração volumétrica de vapor num escoamento com abertura de coluna líquida, dado pela Eq. (4.25). Num primeiro momento, isto é, até frações volumétricas da ordem de 50%, o fator de atrito decresce levemente. Porém, com o aumento da cavidade de vapor, a partir de  $\alpha = 0.5$ , há um aumento expressivo do fator de atrito do escoamento. Isto mostra que, num trecho de duto com abertura de coluna líquida, o fator de atrito pode aumentar substancialmente.

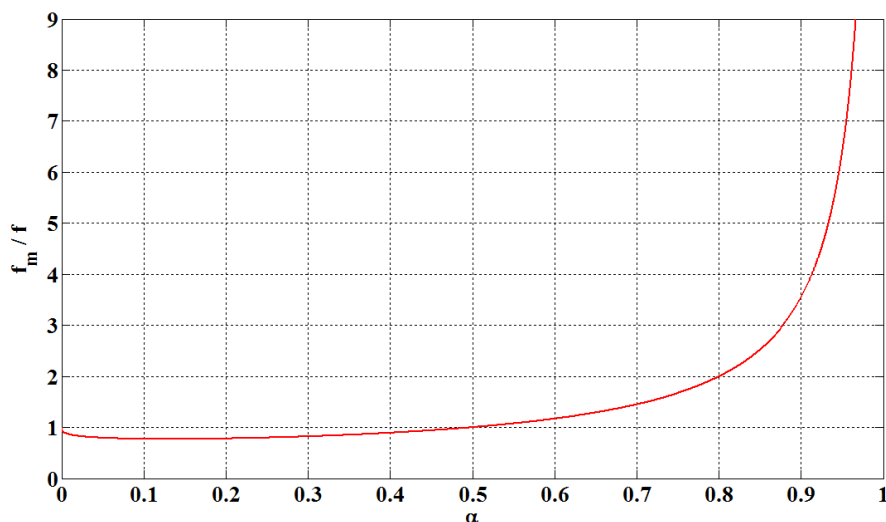


Figura 4.3 - Fator de atrito como função da fração volumétrica de vapor.

#### **4.4. Transformação de Fase como Processo Irreversível**

A abertura de coluna líquida em regime de escoamento permanente é um tema específico do estudo de escoamentos de líquidos em dutos e está inserido num contexto muito mais abrangente envolvendo o fenômeno de cavitação. A cavitação é a transformação de fase do estado líquido para o vapor e, diferentemente do fenômeno de ebulição, tem início quando a pressão no líquido atinge a pressão de saturação à temperatura do escoamento.

Embora diferentes modelos tenham sido propostos na literatura para descrever o fenômeno de cavitação no escoamento de líquidos, a grande maioria apresenta uma característica comum sob o ponto de vista termodinâmico. Os modelos clássicos de cavitação consideram que a transformação de fase de líquido para vapor e vice-versa ocorre à pressão constante e igual à pressão de saturação do líquido à temperatura do escoamento (Nicholas, 1995; Kessal & Amaouche, 2000; Shu, 2003). Ao admitir tal fato, a transformação de fase é tratada como um processo reversível, isto é, um processo durante o qual não se verifica dissipação de energia (Freitas Rachid, 2003).

Embora a hipótese de processo reversível seja adequada na modelagem de certos problemas, principalmente aqueles de natureza quase-estática, pode não ser em outros, até mesmo quando a dissipação é de pequena magnitude. Um exemplo típico é o da cavitação. Se considerada como processo reversível (isto é, se a pressão for admitida como sendo constante durante a mudança de fase) em escoamentos transientes homogêneos de um único constituinte, a velocidade de propagação de onda no meio salta localmente de forma abrupta de um valor finito (a velocidade de propagação de onda no líquido) para zero, dando margem à existência de uma singularidade. Além de não ser fisicamente razoável, essa peculiaridade inviabiliza completamente a obtenção de soluções aproximadas das equações da dinâmica dos fluidos quando do emprego de técnicas numéricas, por mais robustas que sejam.

Visando não somente retratar o problema físico de forma mais realística como também contornar a dificuldade apontada no parágrafo precedente, Freitas Rachid (2003) propõe um modelo termodinamicamente consistente de cavitação em escoamentos isotérmicos de líquidos compressíveis no qual tal fenômeno é tratado como um processo de transformação de fase irreversível. Sob a hipótese de escoamento homogêneo de substâncias puras, demonstra-se analiticamente, explorando-se de forma consistente desigualdade de Clausius-Duhem com a técnica dos multiplicadores de Lagrange, que a força termodinâmica associada à taxa de transferência de massa  $\Gamma$  no fenômeno de cavitação é a diferença de energia livre de Gibbs  $g_l - g_v$  (ou potencial eletroquímico num contexto mais amplo) entre o líquido e vapor.

Com base nesse resultado (diga-se de passagem conhecido da termodinâmica clássica) e admitindo-se uma relação linear entre  $\Gamma$  e  $g_l - g_v$  na forma  $\Gamma = \beta(g_l - g_v)$  (sendo  $\beta$  uma constante positiva), o autor mostrou, à luz da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis, que a cavitação de natureza irreversível podia ser vista como um caso intermediário delimitado por duas situações físicas reversíveis. Variando-se parametricamente o coeficiente  $\beta$ , verificou-se que para  $\beta \geq 10^{-6} \text{ kg}^2 / \text{m}^3 \text{Js}$ , a mudança de fase ocorria como um processo reversível (sem dissipação de energia), com a pressão do fluido permanecendo praticamente constante e igual à pressão de saturação. Por outro lado, para  $\beta \leq 10^{-12} \text{ kg}^2 / \text{m}^3 \text{Js}$  não havia transformação de fase ( $\Gamma = 0$ ), mas a pressão oscilava sem dissipar energia (reversivelmente), de forma a acomodar a expansão e contração das bolhas de vapor na mistura. Finalmente, valores de  $\beta$  intermediários da ordem de  $10^{-8} \text{ kg}^2 / \text{m}^3 \text{Js}$  conferiam à transformação de fase um caráter irreversível, com a pressão não mais permanecendo constante, mas oscilando em torno da pressão de saturação.

Por simplicidade, a análise reportada no artigo de Freitas Rachid (2003) foi conduzida considerando-se equações de estado

lineares, tanto para a fase líquida quanto para a fase vapor. Com o intuito verificar se essa simplificação poderia ter influenciado os resultados obtidos, Assumpção & Freitas Rachid (2008) refizeram a análise descrita naquele trabalho, considerando, porém, uma equação de estado cúbica. Como independentemente dos valores atribuídos ao coeficiente  $\beta$ , as pressões não se afastam consideravelmente da pressão de saturação e, nas vizinhanças das condições de líquido e vapor saturado, as equações lineares constituíam boas aproximações da equação cúbica, verificou-se que a adoção destas em substituição às lineares praticamente não alterava os resultados.

As energias livres de Gibbs das fases são obtidas a partir de outro potencial termodinâmico chamado energia livre de Helmholtz  $\Psi$ . Partindo da premissa de que a mistura líquido-vapor pode ser tratada como um pseudo fluido cujas propriedades refletem na média o comportamento das fases isoladamente, a seguinte forma da energia livre de Helmholtz para a mistura é postulada (Freitas Rachid, 2003; Assumpção & Freitas Rachid (2008)):

$$\Psi = \hat{\Psi}(\rho_1, \rho_v, \alpha, T) = (1 - \alpha)\rho_1\Psi_1(\rho_1, T) + \alpha\rho_v\Psi_v(\rho_v, T) \quad (4.27)$$

na qual as variáveis termodinâmicas que definem o estado local do fluido são as massas específicas das fases líquida  $\rho_1$  e de vapor  $\rho_v$ , a fração volumétrica de vapor  $\alpha$  e a temperatura absoluta  $T$ .

Para compor a energia livre de Helmholtz da mistura, é preciso definir as energias livres de Helmholtz específicas das fases isoladamente  $\Psi_1$  e  $\Psi_v$ , as quais podem ser obtidas a partir da integração das equações de estado, uma vez que:

$$P_1 = \rho_1^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho_1} \quad (4.28)$$

$$P_v = \rho_v^2 \frac{\partial \Psi_v}{\partial \rho_v} \quad (4.29)$$

Com base nas formas específicas das equações de estado (3.14) e (3.18), as energias livres específicas do líquido e do vapor podem ser obtidas integrando-se as equações (4.28) e (4.29):

$$\Psi_1 = a_1^2 \ln(\rho_1) + \frac{a_1^2 \rho_1^0}{\rho_1} - C_1 T \ln(T) \quad (4.30)$$

$$\Psi_v = a_v^2 \ln(\rho_v) - C_v T \ln(T) + L \quad (4.31)$$

Nas equações acima, os termos  $-C_1 T \ln(T)$  e  $-C_v T \ln(T) + L$  são as constantes de integração das Eqs. (4.28) e (4.29), os quais são funções da temperatura  $T$ . Esses termos são clássicos e representam a parte calórica das equações fundamentais de estado  $\Psi_1$  e  $\Psi_v$ , respectivamente (Freiras Rachid, 2003). As funções  $C_1 = \hat{C}_1(T)$  e  $C_v = \hat{C}_v(T)$  são, respectivamente, os calores específicos a volume constante das fases líquida e de vapor, enquanto que  $L = \hat{L}(T)$  é o calor latente associado à transformação de fase.

Uma vez completamente definida a energia livre de Helmholtz da mistura com base nas Eqs. (4.27), (4.30) e (4.31), as energias livres de Gibbs das fases podem ser calculadas através das relações termodinâmicas (Freitas Rachid, 2003):

$$g_1 = \frac{1}{1-\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_1} = \Psi_1 + \rho_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho_1} \quad (4.32)$$

$$g_v = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_v} = \Psi_v + \rho_v \frac{\partial \Psi_v}{\partial \rho_v} \quad (4.33)$$

e sua diferença  $g_1 - g_v$  computada como:

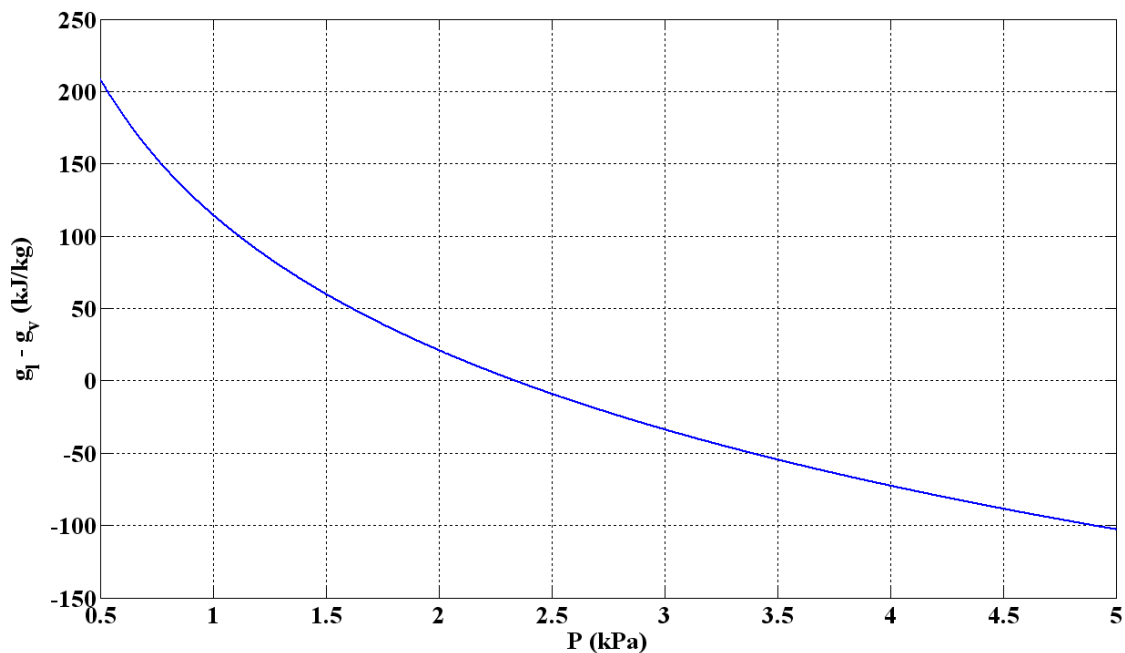
$$g_1 - g_v = a_1^2 \ln(\rho_1) + \frac{a_1^2 \rho_1^0}{\rho_1} + \frac{P_1}{\rho_1} - C_1 T \ln(T) - a_v^2 \ln(\rho_v) - \frac{P_v}{\rho_v} + C_v T \ln(T) - L \quad (4.34)$$



Nas situações de equilíbrio entre o vapor e o líquido (Freitas Rachid 2003; Assumpção & Freitas Rachid, 2008), a diferença de energia livre de Gibbs deve ser nula, uma vez que não há mudança de fase. Essa condição, aliada àquela expressa na Eq. (4.3), permite identificar uma pressão de saturação  $P_{\text{sat}}$  para cada temperatura  $T$ , isto é,  $P_{\text{sat}} = \hat{P}_{\text{sat}}(T)$ . Com base nesses fatos e levando-se em conta as equações de estado Eqs. (3.14) e (3.18), a Eq. (4.34) pode ser reescrita na forma:

$$g_l - g_v = a_1^2 \ln \left( \frac{P + a_1^2 \rho_1^0}{P_{\text{sat}} + a_1^2 \rho_1^0} \right) + a_v^2 \ln \left( \frac{P_{\text{sat}}}{P} \right) + a_1^2 a_1^2 \rho_1^0 \left( \frac{1}{P_{\text{sat}} + a_1^2 \rho_1^0} - \frac{1}{P + a_1^2 \rho_1^0} \right) \quad (4.35)$$

A expressão anterior mostra que para transformações de fase isotérmicas a diferença de energia livre de Gibbs é função apenas da pressão  $P$ .



**Figura 4.4 – Diferença de energia livre de Gibbs entre o líquido e o vapor em função da pressão (Eq. (4.35) para a água a 293K.**

A Fig. 4.4 apresenta o gráfico de  $g_l - g_v$  em função da pressão  $P$  para a água a temperatura de 293 K. Como se pode observar na Fig. 4.4, a diferença de energia livre de Gibbs é nula somente quando a

pressão é igual à pressão de saturação, a qual é igual a 2,34 kPa para a temperatura de 293 K.

Com base nos resultados anteriormente descritos e levando-se em consideração a hipótese adotada para composição do pseudo fluido ( $\alpha \in (0,1)$ ), uma equação constitutiva para a taxa mássica de transformação de fase é postulada com base na condição:

$$\Gamma = \begin{cases} 0, & \text{se } P > P_{\text{sat}} \text{ e } \alpha < \alpha^* \\ \beta(g_l - g_v), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.36)$$

na qual  $P_{\text{sat}}$  é a pressão de saturação do líquido à temperatura correspondente  $T$ ,  $\beta$  é uma constante material positiva e  $\alpha^*$  é um valor limite de fração volumétrica de vapor abaixo do qual, a pressões maiores do que a pressão de saturação, admite-se a existência conjunta de líquido e vapor sem transferência de massa entre as fases. Conforme será visto mais adiante, a condição apresentada na Eq. (4.36) estabelece implicitamente as condições necessárias para a abertura da coluna líquida como também para o seu fechamento.

Ao contrário do que ocorre nos modelos apresentados em (Freitas Rachid 2003; Assumpção & Freitas Rachid, 2008) nos quais se admite a existência de líquido puro  $\alpha = 0$  ou vapor puro  $\alpha = 1$ , no modelo proposto neste trabalho o líquido e o vapor coexistem em todo e qualquer ponto do domínio em decorrência da hipótese de que  $\alpha \in (0,1)$ . Embora à luz da condição descrita pela Eq. (4.36) essa hipótese não seja estritamente coerente sob o ponto de vista termodinâmico, pois se admite a existência de equilíbrio termodinâmico ( $\Gamma = 0$ , com  $P_l = P_v = P$  e  $T_l = T_v = T$ ) com  $P \neq P_{\text{sat}}$ , ela permite que se resolva sempre um mesmo sistema de equações (as Eqs. (4.12), (4.13) e (4.14)) para um mesmo conjunto de variáveis dependentes (as variáveis  $P$ ,  $v$  e  $\alpha$ ), qualquer que seja o valor assumido por  $\alpha$ . Esse fato simplifica consideravelmente a implementação do modelo em termos computacionais, sem prejuízo das suas previsões.

Se do ponto de vista de modelagem a manutenção de um mesmo conjunto de equações e incógnitas durante toda a simulação do problema constitui uma grande vantagem em termos práticos, o preço que se paga por isso é a necessidade de se estabelecer coerentemente o valor de  $\alpha^*$  na Eq. (4.36). Essa tarefa será conduzida a seguir.

A combinação das Eqs. (4.4) e (4.6) permite inferir que, em regiões do escoamento onde não há transferência de massa entre a fase líquida e vapor ( $\Gamma = 0$ ), a fração mássica de vapor na mistura é uma constante, ou seja:

$$\frac{\alpha\rho_v}{\rho} = C = \text{constante} \quad (4.37)$$

Se se admite que o valor da constante  $C$  é o mesmo para toda e qualquer região do duto antes da primeira abertura de coluna, então a constante  $C$  fica univocamente determinada com base em  $\alpha_0 = \alpha(s=0)$  e  $P_0 = P(s=0)$  da condição inicial. De fato, invocando-se as Eqs. (3.14), (3.18), (4.1) e (4.3), a Eq. (4.37) permite calcular a constante  $C$  em termos de  $\alpha_0$  e  $P_0$  como:

$$C = \frac{\alpha_0(P_0/a_v^2)}{\alpha_0(P_0/a_v^2) + (1 - \alpha_0)[(P_0/a_1^2) + \rho_1^0]} \quad (4.38)$$

Com base na Eq. (4.38), a Eq. (4.37) pode ser utilizada para expressar  $\alpha$  em termos de  $P$ , nas regiões onde não há abertura de coluna ( $\Gamma = 0$ ):

$$\alpha = \hat{\alpha}(P) = \frac{a_1 P + b}{a_2 P + b} \quad (4.39)$$

na qual  $a_1, a_2$  e  $b$  são constantes positivas (com  $a_2 > a_1$ ) dadas por:

$$a_1 = C a_v^2 \quad ; \quad a_2 = C a_v^2 + (1 - C) a_1^2 \quad ; \quad b = C \rho_1^0 a_v^2 a_1^2 \quad (4.40)$$

Notando, a partir das Eqs. (4.39) e (4.40), que  $\hat{\alpha}(P)$  é um função estritamente decrescente da pressão  $P$ , pois

$$\frac{d\hat{\alpha}}{dP} = -\frac{(a_2 - a_1)b}{(a_2P + b)^2} < 0 \quad (4.41)$$

e que além disso,

$$\lim_{P \rightarrow 0} \hat{\alpha}(P) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{P \rightarrow \infty} \hat{\alpha}(P) = \alpha_{\min} = \frac{a_1}{a_2} > 0 \quad (4.42)$$

então, se a condição inicial  $\alpha_0 = \alpha(s=0)$  for tal que,

$$\alpha_0 = \alpha(s=0) > \alpha_{\min} \quad (4.43)$$

a constante  $\alpha^*$  fica univocamente determinada, e de forma consistente, a partir da Eq. (4.39) como:

$$\alpha^* = \hat{\alpha}(P_{\text{sat}}) = \frac{a_1 P_{\text{sat}} + b}{a_2 P_{\text{sat}} + b} \quad (4.44)$$

Como a especificação da condição inicial em termos da pressão sempre obedece à condição  $0 < P_{\text{sat}} < P_0 < \infty$  (a pressão do pseudo fluido na entrada do duto é sempre maior do que sua pressão de saturação), a desigualdade (4.43) é suficiente para assegurar que  $\alpha^* > \alpha_0$ . É conveniente notar que nas regiões onde ( $\Gamma = 0$ ), a Eq. (4.39) mostra que o vapor se expande (a fração volumétrica de vapor aumenta) no pseudo fluido quando a pressão diminui. Alternativamente, o vapor se contrai (a fração volumétrica de vapor diminui) no pseudo fluido quando a pressão no pseudo fluido aumenta.

Com base nas considerações anteriores, é possível verificar que a condição  $P > P_{\text{sat}}$  e  $\alpha < \alpha^*$  apresentada na Eq. (4.36) estabelece coerentemente as condições necessárias para a abertura da coluna

líquida como também para o seu fechamento e sua permanência no status de coluna fechada.

De fato, com base na Eq.(4.44), pode-se perceber a partir da Eq. (4.36) que o parâmetro  $\alpha^*$  representa a fração volumétrica máxima experimentada pelo pseudo fluido na iminência de ter início o processo de abertura de coluna, isto é a mudança de fase de líquido para vapor. Além disso, admitindo-se que os campos  $P = \hat{P}(s)$ ,  $v = \hat{v}(s)$  e  $\alpha = \hat{\alpha}(s)$  são todos contínuos, quando  $P < P_{\text{sat}}$  e  $\alpha > \alpha^*$  (vide Eq.(4.39)) ,  $\Gamma > 0$  (vide Eqs. (4.35) e (4.36)), caracterizando a abertura da coluna de líquido. Quando  $\alpha < \alpha^*$  e  $P \geq P_{\text{sat}}$ ,  $\Gamma = 0$ , (vide Eqs. (4.35) e (4.36)) caracterizando o fechamento da coluna líquida, conforme mostra a Fig. 4.5.

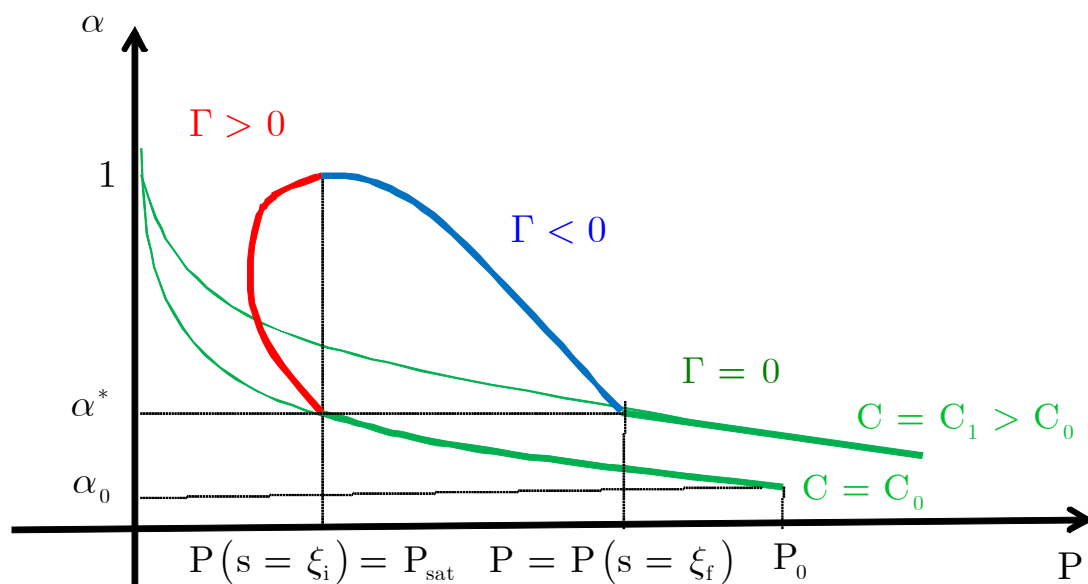


Figura 4.5- Condições de abertura e fechamento da coluna líquida no plano  $\alpha P$ .

É possível mostrar teoricamente que após a primeira cavidade ter sido fechada, a fração mássica de vapor no fluido a jusante assume um valor ligeiramente maior do que aquele que havia a montante de sua abertura. Em outras palavras, nem todo vapor formado durante a abertura da cavidade se transformou integralmente em líquido após seu fechamento.

Desta forma, uma vez fechada a coluna líquida, o valor de  $\alpha^*$  é recalculado, seguindo-se a mesma estratégia descrita anteriormente. Isto é, um novo valor da fração mássica de vapor ( $C$ ) é calculado com base na Eq. (4.38), utilizando-se no lugar de  $\alpha_0$  e  $P_0$ , os valores de  $\alpha$  e  $P$  após o fechamento da coluna. Com base neste novo valor de  $C$ , um novo valor de  $\alpha^*$  é recalculado a partir da Eq. (4.44), e assim por diante.

Nas simulações numéricas conduzidas com o modelo, foi verificado que a diferença observada entre a fração mássica a montante e a jusante é da ordem  $10^{-10}$ . A ordem de grandeza desse valor está de em conformidade com os resultados reportados no artigo (Freitas Rachid, 2003), no qual simulações numéricas transientes da expansão e contração de cavidades da foram realizadas com o mesmo modelo de cavitação. Como a diferença observada entre as frações mássicas antes e após a cavitação é muito pequena, a atualização do valor de  $\alpha^*$  segundo a descrição apresentada no parágrafo precedente é praticamente indiferente.

Uma alternativa à condição apresentada na condição definida pela Eq. (4.36) seria admitir, como hipótese constitutiva, que o valor da constante ( $C$ ) inicialmente calculado é o mesmo para toda e qualquer região do duto (isto é,  $\forall s \in [0, L]$ ) onde não se verifica transferência de massa entre as fases ( $\Gamma = 0$ ). Neste caso, a condição de fechamento da coluna seria substituída pela condição  $C \leq C_0$  (sendo  $C_0$  a fração mássica de vapor computada inicialmente), assegurando que todo vapor formado na abertura da coluna transformou-se integralmente em líquido após seu fechamento. De fato essa possibilidade foi implementada e testada. Todavia, não apresentou bons resultados, pois a coluna de vapor dificilmente se fechava.

Finalmente, é conveniente ressaltar que como os valores tipicamente atribuídos a  $\alpha_0$  são muito pequenos (aproximadamente da ordem de  $10^{-8}$ ), os valores resultantes para  $\alpha^*$  serão também bastante

pequenos, não importando o quão pequena seja a pressão de saturação  $P_{\text{sat}}$ . Esse fato assegura que as previsões obtidas com o modelo proposto estarão sempre muito próximas daquelas em que a condição de coluna cheia (líquido puro sem mudança de fase) é retratada por  $\alpha = 0$  ao invés de  $\alpha < \alpha^*$ .

Para completar a caracterização do modelo proposto, é oportuno mencionar que a taxa de dissipação,  $d$ , associada ao mecanismo de transformação de fase em pauta é dado no contexto do modelo proposto pela seguinte expressão (Freitas Rachid, 2003):

$$d = \begin{cases} 0, & \text{se } P > P_{\text{sat}} \text{ e } \alpha < \alpha^* \\ \beta(g_l - g_v)^2, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.45)$$

#### 4.5. Condições de Abertura da Coluna Líquida

A ocorrência do fenômeno de abertura de coluna líquida em dutos operando em regime permanente está associada às condições geométricas da linha (Nicholas (1995)). A análise apresentada a seguir tem por objetivo mostrar que a coluna líquida abre quando o perfil topográfico do duto é um pico ou um platô ou um declive e fecha somente num declive. Para tal, invocam-se as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento linear, Eqs. (4.4) e (4.5).

Embora condições corretas tenham sido deduzidas através de uma demonstração conduzida por Nicholas (1995) repleta de falhas e equívocos no estabelecimento das premissas básicas, ela é refeita neste trabalho com muito mais critério sem, entretanto, apelar demasiadamente para o aspecto formal matemático.

Na Eq. (4.5), o termo  $\sin(\theta)$  pode ser substituído por  $dz/ds$  onde  $z = \hat{z}(s)$  é a altura ou cota topográfica do duto ao longo do comprimento desenvolvido  $s$  do duto. A derivada  $dz/ds$  representa a

inclinação da elevação do duto que pode ser ascendente ( $dz/ds > 0$ ), descendente ( $dz/ds < 0$ ) ou horizontal ( $dz/ds = 0$ ).

Para identificar os pontos da linha suscetíveis à ocorrência do fenômeno em pauta, assume-se que os campos espaciais de massa específica e de velocidade  $v(s)$  são funções de classe  $C^k$ , com  $k \geq 1$ , enquanto que os campos de pressão  $P(s)$ , de área de seção reta  $A(s)$  e de cota topográfica  $z(s)$  são funções de classe  $C^k$ , com  $k = 0$ . Ou seja, todos esses campos são funções contínuas de  $s$ . As derivadas espaciais  $d\rho/ds$  e  $dv/ds$  são funções contínuas, embora as derivadas,  $dP/ds$ ,  $dA/ds$  e  $dz/ds$  possam admitir descontinuidades em alguns pontos  $\xi \in (0, L)$  da linha. Essa escolha é feita de forma a assegurar coerência matemática dos espaços de funções em que as Eqs (4.4) e (4.5) são definidas, levando-se em conta que  $dz/ds$  é necessariamente uma função de classe  $C^k$ , com  $k \geq 0$ . Na análise apresentada a seguir, admite-se, por simplicidade mas sem perda de generalidade, que  $\alpha \in [0, 1]$ , ou seja, a condição de coluna fechada é caracterizada por  $\alpha = 0$ . Admite-se também que a área de seção transversal é constante e o líquido incompressível.

Considere, por simplicidade, um duto operando com uma única região com coluna aberta, sendo o escoamento no sentido crescente da coordenada  $s$ . Seja  $(\xi_i, \xi_f) \subset (0, L)$ , com  $\xi_i < \xi_f$ , a região na qual  $s = \xi_i$  é a seção do duto na qual a coluna líquida abre e  $s = \xi_f$  representa a seção na qual a coluna líquida fecha e se restabelece o escoamento em coluna cheia.

Quando a coluna líquida abre, a pressão cai abaixo da pressão de vapor do fluido por conta do aumento da perda de carga na região de coluna aberta. Entretanto, para simplificar a análise, suponha que a pressão permaneça constante e igual à pressão de saturação (processo reversível). Considerando que  $s = \xi_i^-$  e  $s = \xi_i^+$  são duas seções localizadas, respectivamente, imediatamente a montante e a jusante da



seção  $s = \xi_i$ , as seguintes relações envolvendo o gradiente de pressão podem ser estabelecidas:

$$\left. \frac{dP}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} \leq 0 \qquad \left. \frac{dP}{ds} \right|_{s=\xi_i^+} = 0 \qquad (4.46)$$

Por analogia, outras duas relações semelhantes podem ser obtidas considerando duas seções  $s = \xi_f^-$  e  $s = \xi_f^+$  localizadas respectivamente imediatamente a montante e a jusante da seção  $s = \xi_f$ , isto é, no momento em que a coluna líquida fecha:

$$\left. \frac{dP}{ds} \right|_{s=\xi_f^-} = 0 \qquad \left. \frac{dP}{ds} \right|_{s=\xi_f^+} \geq 0 \qquad (4.47)$$

Como  $\rho_l > \rho_v$  e as frações volumétricas de vapor satisfazem as desigualdades  $0 = \alpha(s < \xi_i - \delta) < \alpha(s = \xi_i + \delta)$  e  $\alpha(s = \xi_f - \delta) > \alpha(s > \xi_f + \delta) = 0$ , com  $0 < \delta \ll 1$ , então com base em (4.1) é possível inferir que:

$$\rho_l = \rho(s < \xi_i - \delta) > \rho(s = \xi_i + \delta) \qquad (4.48)$$

$$\rho(s = \xi_f - \delta) < \rho(s > \xi_f + \delta) = \rho_l \qquad (4.49)$$

Todavia, como o líquido é praticamente incompressível,  $\rho_l$  é para todos os efeitos constante. Com base nas desigualdades (4.48) e (4.49) e levando-se em consideração que  $\rho$  é uma função de classe  $C^k$ , com  $k \geq 1$ , pode-se escrever:

$$\left. \frac{d\rho}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} = 0 \qquad \left. \frac{d\rho}{ds} \right|_{s=\xi_i^+} = 0 \qquad (4.50)$$

$$\left. \frac{d\rho}{ds} \right|_{s=\xi_f^-} \leq 0 \qquad \left. \frac{d\rho}{ds} \right|_{s=\xi_f^+} = 0 \qquad (4.51)$$

Utilizando as expressões (4.50 e 4.51) na equação (4.4), quando escrita para os pontos à esquerda ( $s = \xi_i^-$  e  $s = \xi_f^-$ ) e à direita ( $s = \xi_i^+$  e  $s = \xi_f^+$ ) de  $s = \xi_i$  e de  $s = \xi_f$ , as seguintes relações acerca dos gradientes

espaçiais de velocidade nas vizinhanças dos pontos  $s = \xi_i$  e  $s = \xi_f$ , que delimitam a região de escoamento com coluna aberta podem ser estabelecidas:

$$\left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} = 0 \qquad \qquad \qquad \left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=\xi_i^+} = 0 \qquad (4.52)$$

$$\left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=\xi_f^-} = 0 \qquad \qquad \qquad \left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=\xi_f^+} = 0 \qquad (4.53)$$

Escrevendo-se a equação (4.5) da conservação da quantidade de movimento linear para  $s = \xi_i^+$ ,

$$\begin{aligned} \rho(s = \xi_i^+)v(s = \xi_i^+) \left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=\xi_i^+} + \left. \frac{dP}{ds} \right|_{s=\xi_i^+} + \frac{f(s = \xi_i^+)\rho(s = \xi_i^+)v(s = \xi_i^+)v(s = \xi_i^+)}{2D} \\ + \rho(s = \xi_i^+)g \left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=\xi_i^+} = 0 \end{aligned} \qquad (4.54)$$

e na seqüência, utilizando-se as relações (4.46) e (4.52) são utilizadas em conjunto com o fato de que  $v(s = \xi_i^+) > 0$ ,  $\rho(s = \xi_i^+) > 0$  e  $f(s = \xi_i^+) > 0$ , pode-se, finalmente, escrever uma outra condição associada ao início da região com coluna aberta,

$$\left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=\xi_i^+} < 0 \qquad (4.55)$$

De forma semelhante, quando a equação (4.5) é escrita para  $s = \xi_i^-$ ,

$$\begin{aligned} \rho(s = \xi_i^-)v(s = \xi_i^-) \left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} + \left. \frac{dP}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} + \frac{f(s = \xi_i^-)\rho(s = \xi_i^-)v(s = \xi_i^-)v(s = \xi_i^-)}{2D} \\ + \rho(s = \xi_i^-)g \left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} = 0 \end{aligned}$$

$$(4.56)$$

e, em seguida, as relações (4.51) e (4.56) em conjunto com o fato de que  $v(s = \xi_i^-) > 0$ ,  $\rho(s = \xi_i^-) > 0$  e  $f(s = \xi_i^-) > 0$ , pode-se, finalmente, escrever uma outra condição associada ao início da região com coluna aberta,

$$\left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} < 0 \quad \left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} = 0 \quad \left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} > 0 \quad (4.57)$$

A desigualdade (4.55) em conjunto com (4.57) mostra que o início da região de escoamento com coluna aberta ocorrerá sempre numa posição de descida da linha ( $\left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} < 0$ ), ou em pico ( $\left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} > 0$ ) ou, senão, num platô ( $\left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=\xi_i^-} = 0$ ).

Similarmente, escrevendo-se a equação (4.5) da conservação da quantidade de movimento linear para  $s = \xi_f^+$ ,

$$\begin{aligned} \rho(s = \xi_f^+) v(s = \xi_f^+) \left. \frac{dv}{ds} \right|_{s=\xi_f^+} + \left. \frac{dP}{ds} \right|_{s=\xi_f^+} + \frac{f(s = \xi_f^+) \rho(s = \xi_f^+) v(s = \xi_f^+) v(s = \xi_f^+)}{2D} \\ + \rho(s = \xi_f^+) g \left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=\xi_f^+} = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

e, na seqüência, utilizando-se as relações (4.41) e (4.48) em conjunto com o fato de que  $v(s = \xi_f^+) > 0$ ,  $\rho(s = \xi_f^+) > 0$  e  $f(s = \xi_f^+) > 0$ , pode-se, finalmente, escrever uma outra condição associada ao final da região com coluna aberta,

$$\left. \frac{dz}{ds} \right|_{s=\xi_f^+} < 0 \quad (4.59)$$

De forma semelhante, quando a equação (4.5) é escrita para  $s = \xi_f^-$

$$\rho(s = \xi_f^-) v(s = \xi_f^-) \frac{dv}{ds} \Big|_{s=\xi_f^-} + \frac{dP}{ds} \Big|_{s=\xi_f^-} + \frac{f(s = \xi_f^-) \rho(s = \xi_f^-) v(s = \xi_f^-) v(s = \xi_f^-)}{2D} + \rho(s = \xi_f^-) g \frac{dz}{ds} \Big|_{s=\xi_f^-} = 0 \quad (4.60)$$

e, em seguida, a relação (4.58) é utilizada em conjunto com o fato de que  $v(s = \xi_f^-) > 0$  e  $f(s = \xi_f^-) > 0$ , pode-se, finalmente, escrever uma outra condição associada ao final da região com coluna aberta,

$$\frac{dz}{ds} \Big|_{s=\xi_f^-} < 0 \quad (4.61)$$

A desigualdade (4.59) em conjunto com (4.61) mostra que o final da região de escoamento com coluna aberta ocorrerá sempre em declive da linha, uma vez que os gradientes de elevação à esquerda ( $dz/ds|_{s=\xi_f^-}$ ) e à direita ( $dz/ds|_{s=\xi_f^+}$ ) são ambos negativos.

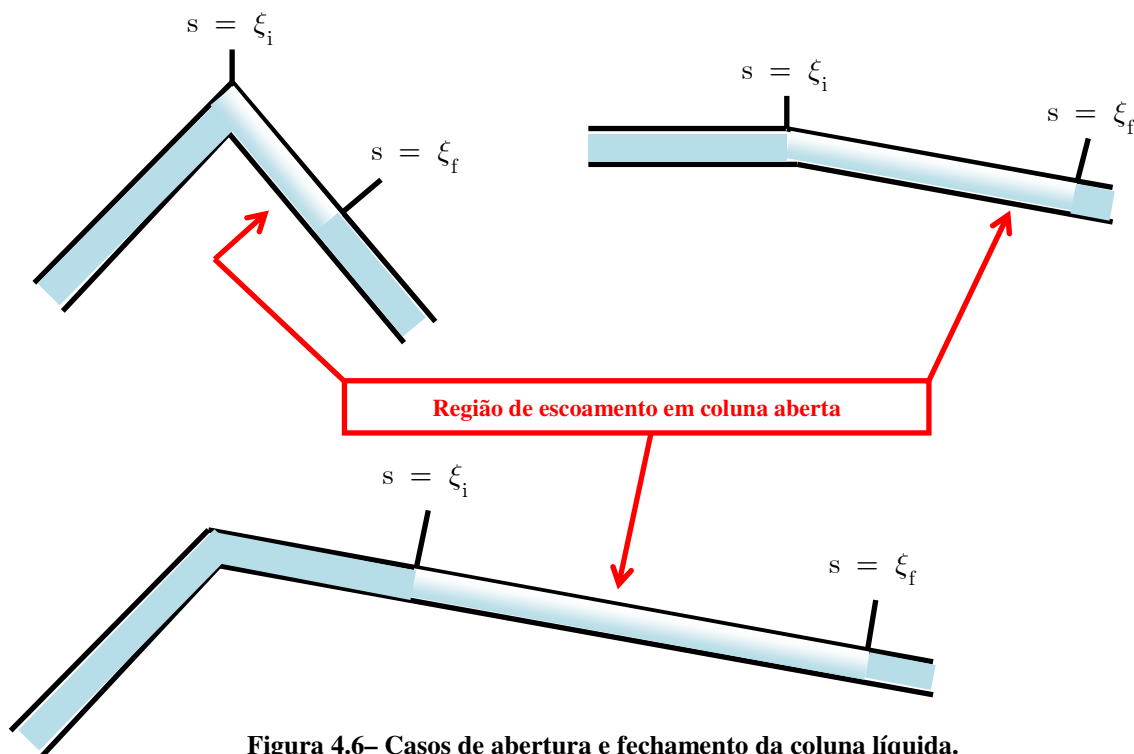


Figura 4.6– Casos de abertura e fechamento da coluna líquida.

# Capítulo 5

## Simulação Numérica

No capítulo 4, além de serem estabelecidas as hipóteses básicas e apresentada a teoria termodinâmica utilizada para retratar o mecanismo de transformação de fase como um processo irreversível, foram deduzidas as três equações que descrevem o modelo proposto, Eqs. (4.12), (4.13) e (4.14).

Essas equações formam um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-lineares, em termos das variáveis dependentes  $P = \hat{P}(s)$ ,  $v = \hat{v}(s)$ ,  $\alpha = \hat{\alpha}(s)$ . Neste capítulo, será apresentado em linhas gerais o método numérico usado na obtenção da aproximação numérica da solução do sistema de EDOs que define o modelo.

Será apresentada, também, a estratégia adotada para avaliar a capacidade de o modelo prever o fenômeno de abertura de coluna líquida e os resultados numéricos gerados em cada caso estudado.

## 5.1. Método Numérico

O sistema de EDOs formado pelas Eqs. (4.12), (4.13) e (4.14) pode ser escrito na forma vetorial e o problema a ele associado descrito em termos de um problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{U}}{ds} = \mathbf{F} \\ \mathbf{U}(s=0) = [P_0 \ v_0 \ \alpha_0]^T \end{cases}, \quad 0 < s < L \quad (5.1)$$

no qual  $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}(s, \mathbf{U})$  dada por

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\rho v \Gamma \left[ \frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right] - \frac{4\tau}{D_0} - \rho g \sin(\theta)}{1 - M^2 \left[ 1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right]} \\ -\frac{1}{\rho v} \left( \frac{4\tau}{D_0} + \rho g \sin(\theta) + \frac{\rho v \Gamma \left[ \frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right] - \frac{4\tau}{D_0} - \rho g \sin(\theta)}{1 - M^2 \left[ 1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right]} \right) \\ \left. \frac{\Gamma}{v \rho_v} + \frac{\alpha}{\rho v^2} \left( \frac{4\tau}{D_0} + \rho g \sin(\theta) + \left( 1 - M^2 \left( \frac{\rho a^2}{\rho_v a_v^2} + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right) \right) \left( \frac{\rho v \Gamma \left[ \frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right] - \frac{4\tau}{D_0} - \rho g \sin(\theta)}{1 - M^2 \left[ 1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right]} \right) \right) \right\} \quad (5.2)$$

$\mathbf{U} = [P \ v \ \alpha]^T$  e  $\mathbf{U}(s=0) = [P_0 \ v_0 \ \alpha_0]^T$  são as condições de pressão, velocidade e fração volumétrica de vapor na seção de entrada do duto, ou seja, as condições iniciais do problema.

Existe uma gama de métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial do tipo (5.1). Entretanto, em alguns casos, deve-se ter cautela na escolha da metodologia numérica mais adequada. No caso específico, o sistema formado pelas Eqs. (5.1) e (5.2) é rígido.

Na solução de um problema de valor inicial formado por um conjunto de EDOs rígidas, métodos explícitos requerem passos de integração muito pequenos, de acordo com os critérios de estabilidade pertinentes. Por conseguinte, a solução do sistema torna-se muito longa ou imprecisa em função do aumento dos erros de arredondamento associado ao uso de passos de integração muito pequenos. Por outro lado, métodos implícitos são incondicionalmente estáveis, sendo assim preferidos para resolver problemas de valor inicial desse tipo (Gilat & Subramanian, 2008).

O modelo mecânico definido pelas Eqs. (5.1) e (5.2) foi programado e resolvido usando um algoritmo desenvolvido em ambiente Matlab.

O algoritmo encontra-se descrito no apêndice C deste trabalho. No corpo do algoritmo, foi usada uma função residente, disponível na biblioteca de funções otimizadas do Matlab, chamada ODE 15s, que utiliza o método de Gear para resolver equações e sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem rígidos. Para maiores informações sobre a função ODE 15s, recomenda-se a leitura de Shampine et al (1997) e Shampine et al (1999).

O método de Gear é um método implícito, multipasso, de ordem variável (1<sup>a</sup> a 5<sup>a</sup> ordem), adaptativo, próprio para resolver problemas de valor inicial envolvendo EDOs, inclusive rígidos.

## 5.2. Análise do Modelo

Para avaliar a capacidade de predição e a convergência numérica da solução aproximada do modelo proposto com base no método Gear, apresenta-se, abaixo, a seguinte situação teste.

Considere um duto de diâmetro  $D_0$  e comprimento total  $L = 150$  m, através do qual escoa água a uma temperatura de  $20^\circ$  C. A esta temperatura, os valores de  $P_{\text{sat}}$ ,  $\rho_1^0$ ,  $a_1$  e  $a_v$  são 2.34 kPa, 998.154 kg/m<sup>3</sup>, 1477 m/s e 361 m/s, respectivamente. A tubulação é construída em aço ( $E = 207$  GPa e  $\nu = 0,27$ ) e apresenta juntas de expansão, o que possibilita deformações na direção longitudinal. Neste caso, portanto, atribui-se o valor 1 ao fator de ancoragem  $\xi$  na Eq. (3.13).

As condições do escoamento na entrada do duto ( $s = 0$  m) são conhecidas e dadas por

$$\underline{U}(s = 0) = [P_0 \ v_0 \ \alpha_0]^T \quad (5.3)$$

Seus valores específicos serão definidos convenientemente nos itens seguintes, já que cada caso estudado apresentará uma condição inicial particular.

O diâmetro  $D_0$  e o perfil planialtimétrico do duto serão também apresentados no momento mais apropriado, pois esses parâmetros tal como as condições iniciais do problema, variarão de caso para caso.



### 5.2.1 - Análise de convergência numérica

Para analisar convergência numérica da solução aproximada do modelo proposto com base no método Gear, simulou-se um escoamento em coluna aberta numa tubulação de diâmetro  $D_0 = 200$  mm cujo perfil planialtimétrico está representado na Fig 5.1. Neste perfil, os ângulos de subida e de declive são respectivamente  $\phi_1 = 45^\circ$  e  $\phi_2 = 1,2^\circ$  relativos à horizontal.

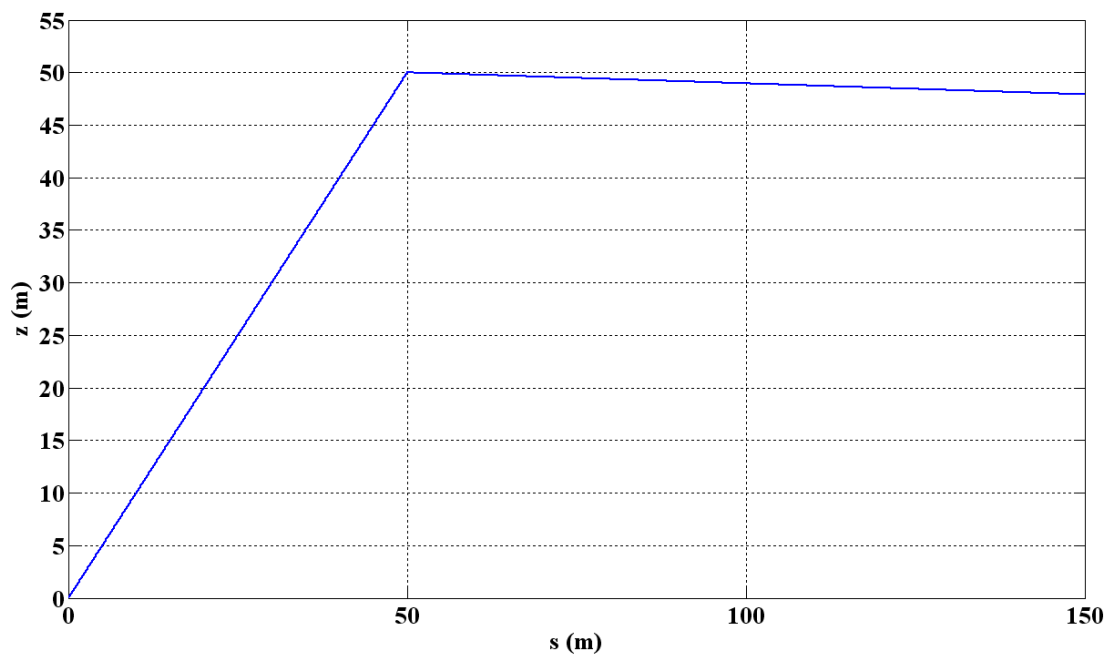


Figura 5.1 – Perfil planialtimétrico do duto usado nas três simulações para avaliar a convergência

As condições iniciais na entrada da tubulação são dadas por

$$\underline{U}(s = 0) = \left[ 501,68 \text{ kPa} \quad 2 \text{ m/s} \quad 10^{-8} \right]^T \quad (5.4)$$

De posse dessas condições e da Eq. (4.44), pode-se calcular o valor  $\alpha^* = 2,14 \cdot 10^{-6}$ .

Quanto ao valor de  $\beta$ , o valor utilizado nas simulações corresponde àquele que retrata a mudança de fase como um processo irreversível (Freitas Rachid, 2003; Assumpção & Freitas Rachid, 2008). Mostrar-se-á na seção seguinte que este valor de  $\beta$  é o que melhor prediz o fenômeno de abertura de coluna líquida.

Nessas condições, o modelo foi testado para os seguintes valores de tamanho de passo máximo:  $h_{\max} = 10^{-3}$  m,  $h_{\max} = 10^{-4}$  m e  $h_{\max} = 10^{-5}$  m. As Figs 5.2, 5.3 e 5.4 são gráficos que mostram a variação da pressão do fluido, da velocidade do escoamento e da fração volumétrica de vapor ao longo do comprimento desenvolvido do duto.

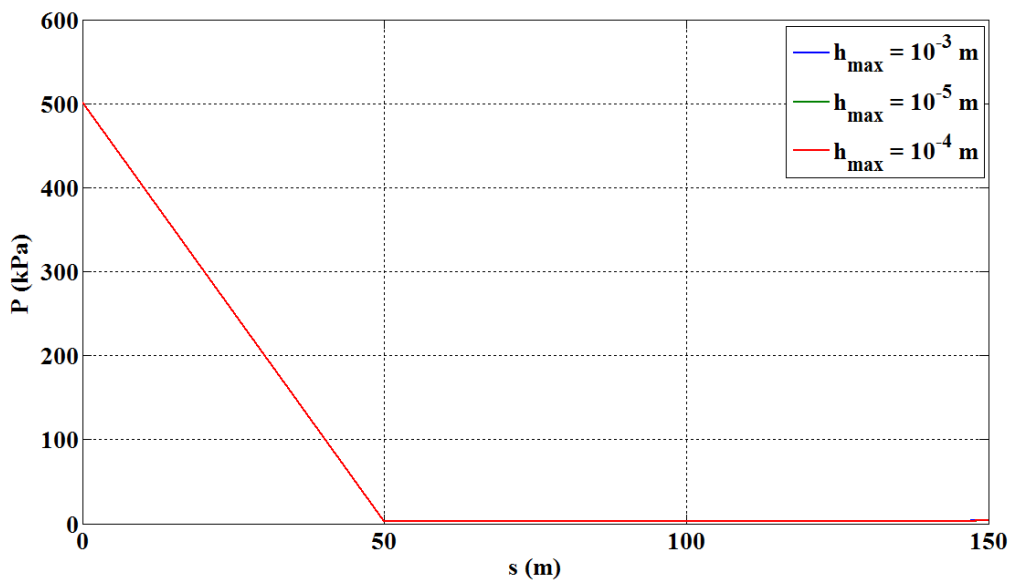


Figura 5.2 - Pressão ao longo do comprimento desenvolvido do duto para três diferentes tamanhos de passo.

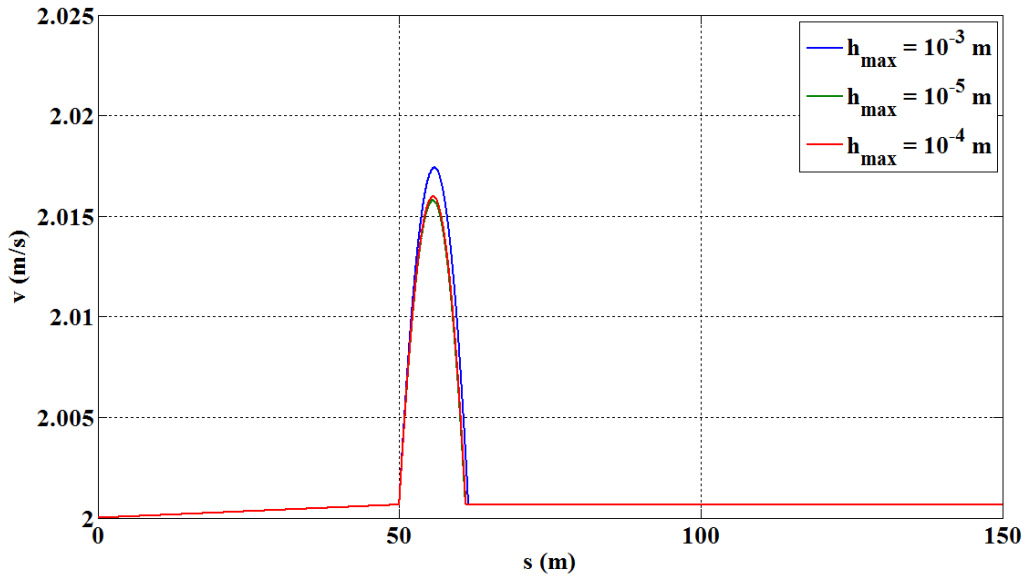


Figura 5.3 - Velocidade do escoamento ao longo do comprimento desenvolvido do duto para três diferentes tamanhos de passo.

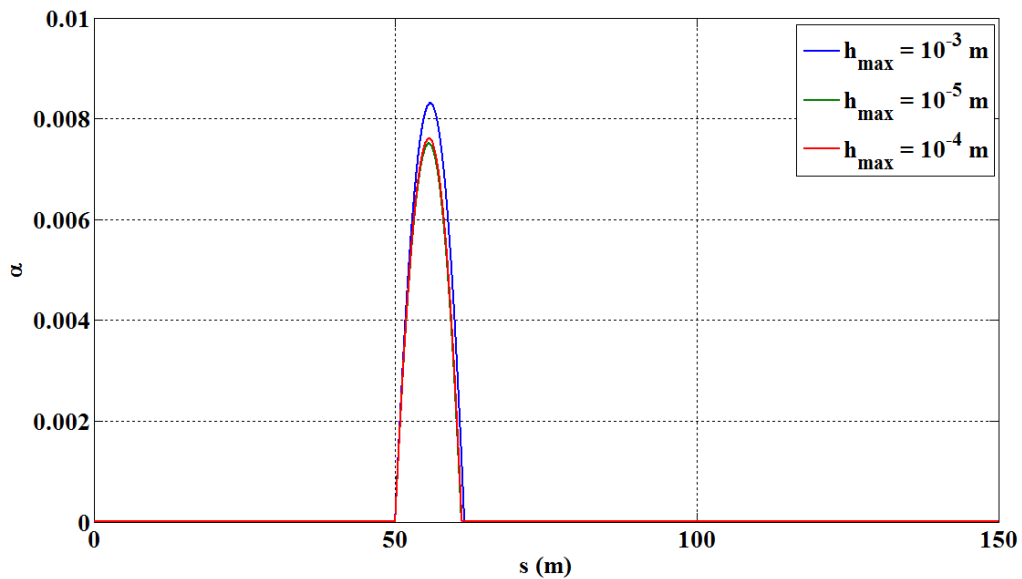


Figura 5.4 - Fração volumétrica de vapor ao longo do comprimento desenvolvido do duto para três diferentes tamanhos de passo.

Como pode ser observado nos gráficos das Figs. 5.2, 5.3 e 5.4 as soluções numéricas convergem satisfatoriamente usando um tamanho de passo máximo de  $10^{-4}$  m. Dessa forma, todos os resultados numéricos exibidos a partir de então serão compilados pelo modelo usando esse tamanho de passo máximo.

## 5.2.2 – Casos Simulados

Para avaliar de forma sistemática a influência dos vários parâmetros na modelagem do fenômeno de abertura de coluna líquida, as equações do modelo proposto, Eqs. (5.1) e (5.2), são apresentadas, a seguir, na forma adimensional. Definindo-se as seguintes variáveis adimensionais,

$$P^+ = \frac{P - P_{\text{sat}}}{\frac{1}{2} \rho_{\text{ls}} v_0^2} \quad (5.5)$$

$$s^+ = \frac{s}{D_0} \quad (5.6)$$

$$v^+ = \frac{v}{v_0} \quad (5.7)$$

nas quais  $D_0$  é o diâmetro do duto,  $v_0$  a velocidade na entrada do duto,  $P_{\text{sat}}$  a pressão de saturação do líquido à temperatura de escoamento e  $\rho_{\text{ls}}$  sua massa específica nesta pressão, o sistema definido pelas Eqs. (5.1) e (5.2) pode ser reescrito na forma adimensional como:

$$\frac{dP^+}{ds^+} = \frac{-\frac{\rho(\rho_1 - \rho_v)}{\rho_l \rho_v} \Gamma^+ H_R v^+ - f (v^+)^2 - \frac{\rho}{\rho_{\text{ls}}} \frac{\text{sen}(\theta)}{\tilde{F}_r^2}}{1 - M^2 \left[ 1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right]} \quad (5.8)$$

$$\frac{dv^+}{ds^+} = -\frac{f v^+}{2} - \frac{\text{sen}(\theta)}{2v^+ \tilde{F}_r^2} - \frac{1}{2v^+} \frac{dP^+}{ds^+} \quad (5.9)$$

$$\frac{d\alpha}{ds^+} = \frac{\rho_{\text{ls}} \Gamma^+ H_R}{\rho_v 2v^+} + \frac{f \alpha}{2} + \frac{\alpha}{2v^{+2}} \left[ \frac{\text{sen}(\theta)}{\tilde{F}_r^2} + \left( 1 - M^2 \left( \frac{\rho a^2}{\rho_v a_v^2} + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right) \right) \frac{dP^+}{ds^+} \right] \quad (5.10)$$

nas quais o termo  $\Gamma^+$  representa a taxa de transferência de massa adimensional entre as fases,

$$\Gamma^+ = \begin{cases} 0, & \text{se } P^+ > 0 \text{ e } \alpha < \alpha^* \\ \frac{(g_l - g_v)}{(g_l - g_v)_{\text{ref}}}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.11)$$

Quatro grupos adimensionais conhecidos da Mecânica dos Fluidos estão presentes nas equações adimensionais. Além do número de Reynolds  $R_e$ , presente no cálculo do fator de atrito  $f$  e do número de cavitação representado pela variável adimensional  $P^+$ , figura no sistema de equações definido pelas Eqs. (5.8), (5.9) e (5.10) o número de Mach  $M$  (que caracteriza a razão entre as forças de inércia e compressibilidade) e o número de Froude  $\tilde{F}_r$  (que caracteriza a razão entre forças de inércia e gravitacional), os quais são expressos, respectivamente por:

$$M = \frac{v}{a} \quad (5.12)$$

$$\tilde{F}_r = \frac{v_0}{\sqrt{2D_0g}} \quad (5.13)$$

Para caracterizar a ação das forças de caráter termodinâmico associadas à mudança de fase, define-se o seguinte grupo adimensional:

$$H_R = \frac{2D_0\beta(g_l - g_v)_{\text{ref}}}{\rho_{ls}v_0} \quad (5.14)$$

na qual o termo  $(g_l - g_v)_{\text{ref}}$  representa o valor absoluto da diferença de energia livre de Gibbs, calculada com base numa pressão igual a duas vezes o valor da pressão de saturação do líquido à temperatura de escoamento. O número  $H_R$  pode ser interpretado como sendo a razão entre as referidas forças de caráter termodinâmico e as de inércia que atuam sobre o fluido.

Considerando-se que o mecanismo de ativação do processo de mudança de fase é essencialmente devido à pressão (mais especificamente quando a pressão torna-se igual ou inferior à pressão de saturação) e que, com base na análise conduzida na seção 4.5, a condição necessária à abertura da coluna está vinculada a existência de um pico ou platô no perfil planaltimétrico, uma análise preliminar da Eq. (5.8) permite identificar alguns aspectos fundamentais relevantes.

Antes de tudo, é conveniente notar que o domínio de validade do modelo restringe-se a situações em que:

$$M < \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE}}} \quad (5.15)$$

A condução de diferentes simulações, nas quais valores tipicamente presentes nos escoamentos em dutos (tais como as velocidades de escoamento, os diâmetros, os módulos de elasticidade dos materiais dos dutos entre outros parâmetros físicos) foram adotados, demonstrou que a condição (5.15) fica longe de ser violada.

Como as frações volumétricas observadas durante a abertura da coluna dificilmente excedem a  $10^{-3}$ , a velocidade de onda na mistura  $a$  (vide Eq. (4.15)) torna-se apenas ligeiramente menor do que a velocidade de propagação de onda no líquido  $a_1$ . Por outro lado, como  $M \ll 1$  para escoamentos de líquidos em geral, pode-se concluir que a influência do número de Mach no problema em apreço não é relevante.

O numerador do membro direito da Eq. (5.8) revela a presença de três termos, a saber: o primeiro está associado à força termodinâmica responsável pela transformação de fase, o segundo refere-se à força de atrito no tubo  $e$ , finalmente, o terceiro retrata a força do campo gravitacional. O segundo termo é sempre positivo e, portanto, atua sempre no sentido de promover a queda da pressão ao longo do comprimento do duto. Já o primeiro e o terceiro termos podem ser

negativos, nulos ou positivos, de acordo com os sinais de  $\Gamma^+$  e  $\text{sen}(\theta)$ , respectivamente.

Sabendo que na iminência de abertura da coluna (isto é, quando  $P \rightarrow P_{\text{sat}}^-$ ),  $\Gamma^+ = 0$  e  $\text{sen}(\theta) > 0$ , é fácil perceber que a abertura mais pronunciada (gradiente de pressão mais negativo) ocorrerá quando a inclinação ascendente do duto for a maior possível, isto é,  $(\theta = \pi/2)$ . Esse fato permite balizar a escolha do perfil planialtimétrico do duto com base no qual as simulações numéricas serão conduzidas. Com o intuito de reduzir o número de perfis a serem analisados, restringido a análise às situações mais favoráveis a abertura da coluna, considerar-se-ão perfis em que o duto sempre sobe na vertical, mas desce com três inclinações diferentes, conforme ilustrado na Fig. 5.5. Conforme será visto mais adiante, os arranjos adotados permitirão analisar as duas situações limites relativas à formação de uma cavidade; a de menor e a de maior extensão, as quais ocorrerão quando trecho descendente for vertical e um platô, respectivamente. Além dos perfis representados na Fig 5.5, é realizada também uma simulação usando um perfil planialtimétrico plano.

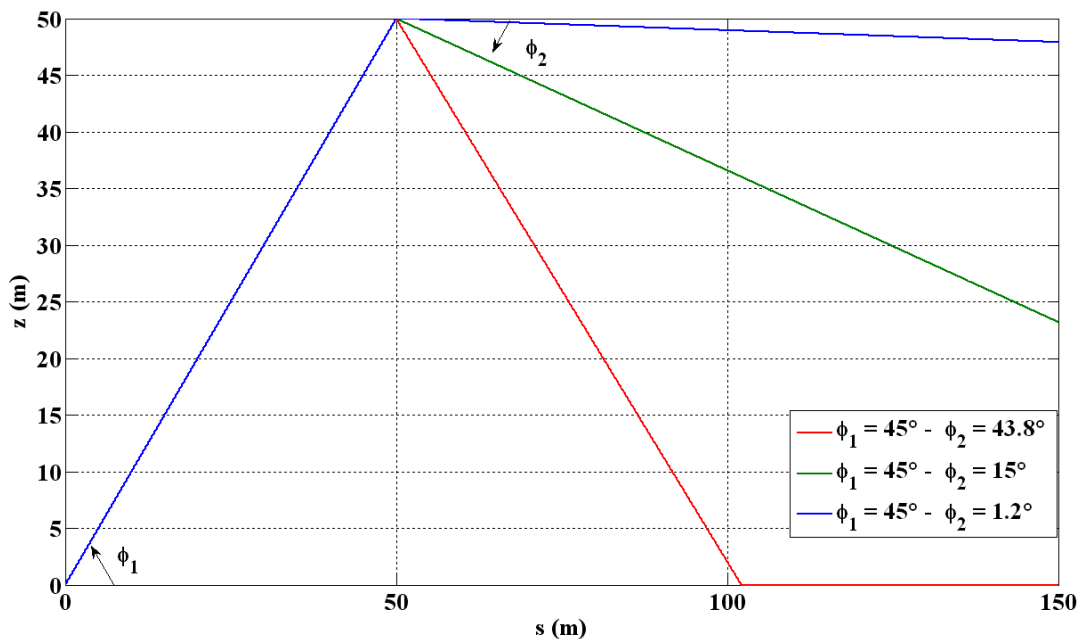


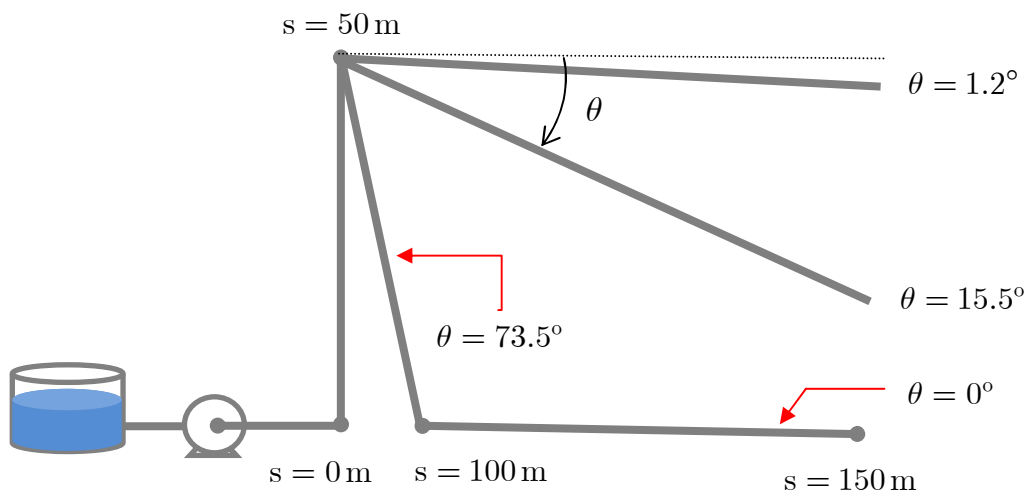
Figura 5.5 - Perfis Planialtimétricos do duto: platô, declive intermediário e máximo.

A Fig.5.5 apresenta os perfis planialtimétricos que serão usados na análise apresentada a seguir. As equações que os representam podem ser condensadas na seguinte forma:

$$z = \begin{cases} \operatorname{tg}(\phi_1)s, & 0 \leq s \leq 50 \\ 50\operatorname{tg}(\phi_1) + \operatorname{tg}(\phi_2)(50 - s), & 50 < s \leq 150 \end{cases} \quad (5.16)$$

onde  $\phi_1$  é o ângulo de subida do perfil no plano z-s,  $-45^\circ \leq \phi_1 \leq 45^\circ$ , e  $\phi_2$  é o ângulo de declive medido também no plano z-s,  $0 \leq \phi_2 \leq 45^\circ$ . Com a equação do perfil planialtimétrico, pode-se calcular o gradiente de elevação  $dz/ds$  da linha que, por sua vez, está relacionado à inclinação real do duto em seu arranjo físico (Fig 5.6) através da relação:

$$\frac{dz}{ds} = \operatorname{sen}(\theta) \quad (5.17)$$



**Figura 5.6 – Arranjo físico do duto: descida suave, intermediária e vertical.**

Como a análise conduzida a seguir será focada no arranjo de perfis ilustrado na Fig. 5.5, torna-se conveniente re-definir o número de Froude (apresentado na Eq.(5.13)), de forma a incorporar o gradiente de elevação do trecho descendente da linha,



$$F_r = \frac{v_0}{\sqrt{2D_0g|\sin(\theta_2)|}} \quad (5.18)$$

O novo número de Froude  $F_r$  continua expressando a razão entre as forças de inércia e de gravidade, retratando, porém, diferentes intensidades do campo gravitacional no trecho de descida do duto de acordo com a magnitude do termo  $|\sin(\theta_2)|$ .

Para analisar sistematicamente a influência de cada grupo adimensional no fenômeno de abertura de coluna líquida, sem, entretanto, incorrer na possibilidade de se atribuir valores irrealistas a esses adimensionais, três valores distintos típicos de diâmetro, de velocidade na entrada do duto, de ângulo de declive do perfil planialtimétrico e da constante  $\beta$  serão considerados. A Tabela 5.1 apresenta os valores dos referidos parâmetros

**Tabela 5.1 - Diâmetro, velocidade, ângulo de declive e constante de irreversibilidade usados nas simulações do modelo.**

$D_0$ (mm)	$v_0$ (m/s)	$\phi_2$	$\beta$ ( $\text{kg}^2/\text{m}^3 \text{Js}$ )
200	1,0	1,2°	$10^{-15}$
500	1,5	15°	$10^{-12}$
1000	2,0	45°	$10^{-08}$

Combinando convenientemente os valores da Tabela 5.1, obtêm-se três valores para cada grupo adimensional citado anteriormente, sendo que dois deles são extremos. A Tabela 5.2 apresenta os valores máximo, mínimo e intermediário para os seguintes grupos adimensionais:  $F_r$ ,

**Tabela 5.2 - Valores máximos, mínimos e médios de  $F_r$  e  $H_R$**

	$F_r$	$H_R$
<b>Mínimo</b>	0,226	$2,0 \cdot 10^{-14}$
<b>Intermediário</b>	0,925	$7,0 \cdot 10^{-11}$
<b>Máximo</b>	6,98	$2,0 \cdot 10^{-6}$

Cada valor de  $F_r$  e  $H_R$  apresentado na Tabela 5.2 corresponde a uma simulação. As Tabelas 5.3, 5.4 e 5.5 apresentam os valores que compõem o conjunto de dados de entrada para cada valor de  $F_r$  e  $H_R$  simulado. A Tabela 5.6 apresenta o valor de cada grupo adimensional em cada caso simulado.

**Tabela 5.3 - Valores de  $D_0$ ,  $v_0$ ,  $\phi_2$  e  $\beta$  usados no cálculo de  $F_{r\min}$ ,  $F_{r\text{inter}}$ ,  $F_{r\max}$**

	$D_0$ (mm)	$v_0$ (m/s)	$\phi_2$	$\beta$ ( $\text{kg}^2/\text{m}^3 \text{ Js}$ )
$F_{r\min}$	1000	1,0	$45^\circ$	$10^{-8}$
$F_{r\text{inter}}$	500	1,5	$15^\circ$	$10^{-8}$
$F_{r\max}$	200	2,0	$1,2^\circ$	$10^{-8}$

**Tabela 5.4 - Valores de  $D_0$ ,  $v_0$ ,  $\phi_2$  e  $\beta$  usados no cálculo de  $H_{R\min}$ ,  $H_{R\text{inter}}$ ,  $H_{R\max}$**

	$D_0$ (mm)	$v_0$ (m/s)	$\phi_2$	$\beta$ ( $\text{kg}^2/\text{m}^3 \text{ Js}$ )
$H_{R\min}$	200	2,0	$1,2^\circ$	$10^{-15}$
$H_{R\text{inter}}$	500	1,5	$1,2^\circ$	$10^{-12}$
$H_{R\max}$	1000	1,0	$1,2^\circ$	$10^{-8}$

**Tabela 5.5 – Casos simulados**

Casos simulados	Adimensionais correspondentes	
	$F_r$	$H_R$
$F_{r\min}$	0,226	$2,0 \cdot 10^{-6}$
$F_{r\text{inter}}$	0,925	$7,0 \cdot 10^{-7}$
$F_{r\max}$	6,98	$8,0 \cdot 10^{-7}$
$H_{R\min}$	6,98	$2,0 \cdot 10^{-14}$
$H_{R\text{inter}}$	3,30	$7,0 \cdot 10^{-11}$
$H_{R\max}$	1,56	$2,0 \cdot 10^{-6}$

### 5.3. Análise dos Resultados

São apresentados nesta seção os resultados numéricos finais de cada caso compilado no modelo proposto. Em todos os casos, a fração volumétrica de vapor na entrada do duto é  $\alpha_0 = 10^{-8}$  (Wylie & Streeter, 1993). As demais condições iniciais e o valor de  $\alpha^*$  são dados conforme a tabela 5.6.

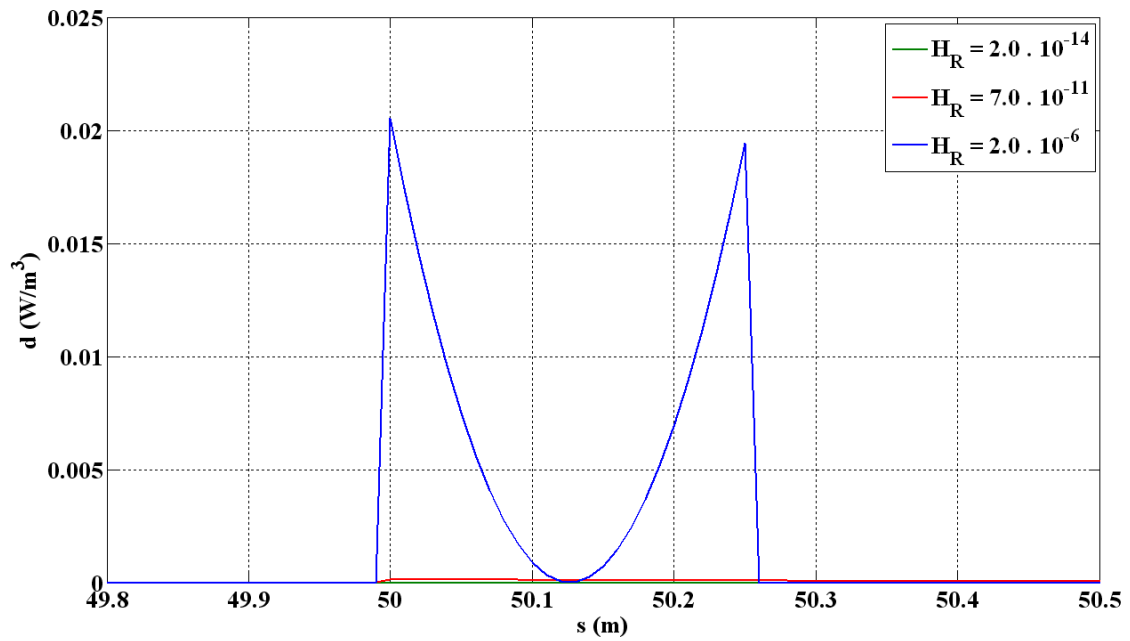
**Tabela 5.6 – Condições iniciais de pressão e velocidade em cada caso simulado**

	$P_0$ (kPa)	$v_0$ (m/s)	$\alpha^*$
$F_{r\min} = 0,226$	492,6	1,0	$2,10 \cdot 10^{-6}$
$F_{r\text{med}} = 0,925$	494,07	1,5	$2,11 \cdot 10^{-6}$
$F_{r\max} = 6,98$	501,68	2,0	$2,14 \cdot 10^{-6}$
$H_{R\min} = 2,0 \cdot 10^{-14}$	503,50	2,0	$2,15 \cdot 10^{-6}$
$H_{R\text{med}} = 7,0 \cdot 10^{-11}$	494,00	1,5	$2,11 \cdot 10^{-6}$
$H_{R\max} = 2,0 \cdot 10^{-6}$	492,45	1,0	$2,10 \cdot 10^{-6}$
Perfil Plano	8,96	1,0	$4,21 \cdot 10^{-8}$

Na análise aqui conduzida sobre o fenômeno de abertura de coluna líquida em escoamentos de fluidos compressíveis, dois grupos adimensionais têm papel crucial: o número de Froude  $F_r$  e o grupo adimensional  $H_R$ .

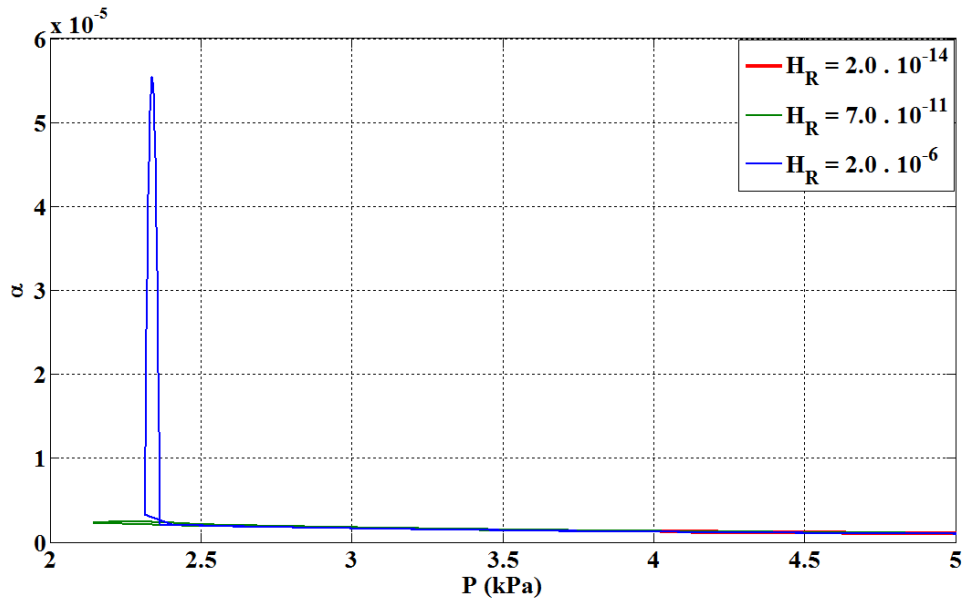
Pela definição expressa na Eq. (5.14), o número adimensional  $H_R$  é uma função de vários parâmetros dentre os quais a constante de proporcionalidade entre a taxa mássica de transformação de fase e a diferença de energias livres de Gibbs  $\beta$ .

A constante  $\beta$  é um parâmetro preponderante no cálculo do valor do número adimensional  $H_R$  e apresenta um significado físico importante dentro da descrição do processo de transformação de fase. Valores de  $\beta$  relativamente elevados (por volta de  $10^{-8} \text{ kg}^2/\text{m}^3 \text{ Js}$ ) retratam mudanças de fase irreversíveis, enquanto que valores de  $\beta$  menores ( $\beta \leq 10^{-12} \text{ kg}^2/\text{m}^3 \text{ Js}$ ) caracterizam mudanças de fase reversíveis com pressão oscilando em torno da pressão de saturação (Freitas Rachid, 2003; Assumpção & Freitas Rachid, 2008). Dessa forma, pode-se inferir que valores de  $H_R$  elevados caracterizam processos de transformação de fase irreversíveis e que, portanto, dissipam energia. A Fig 5.7 mostra os gráficos de dissipação de energia para cada  $H_R$  simulado.



**Figura 5.7 - Dissipação de energia na região de escoamento em coluna aberta considerando diferentes valores de  $H_R$ .**

Na Fig 5.8 são apresentados os gráficos pressão  $P$  versus fração volumétrica de vapor  $\alpha$ . Pode-se observar que o fenômeno de histerese presente em qualquer mecanismo físico irreversível está associado ao maior valor de  $H_R$ .



**Figura 5.8 – Pressão versus Fração volumétrica de vapor e fenômeno de Histerese .**

Pode-se observar também nas Figs 5.9, 5.10 e 5.11 que os fenômenos de abertura e fechamento de coluna líquida são mais bem retratados quando a mudança de fase se dá irreversivelmente. No caso com maior  $H_R$ , as seções de abertura e fechamento da coluna líquida podem ser claramente identificadas, o que não ocorre nos demais casos (em particular,  $H_R = 7.0 \cdot 10^{-11}$ ) nos quais só é possível identificar a seção de abertura da coluna.

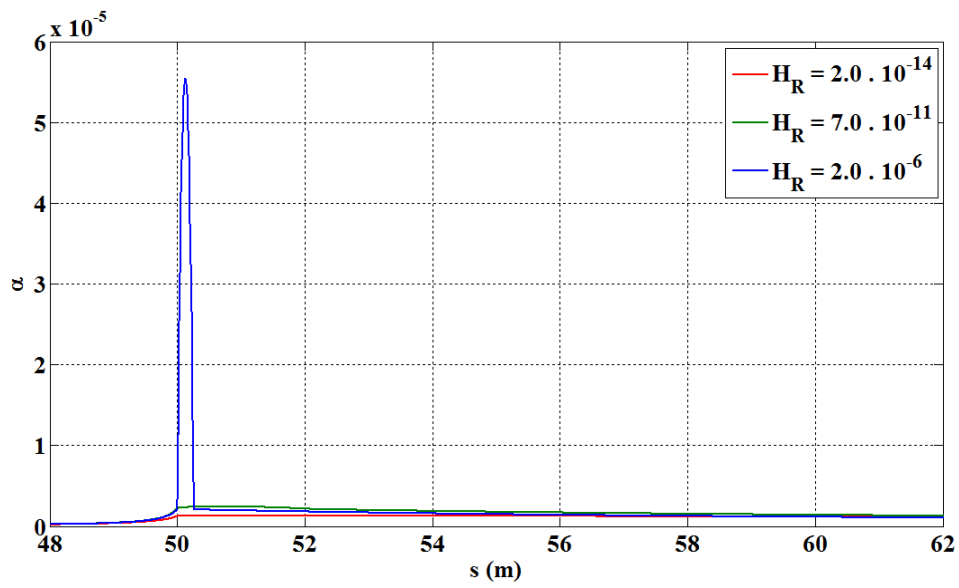


Figura 5.9 – Fração volumétrica de vapor em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de  $H_R$ .

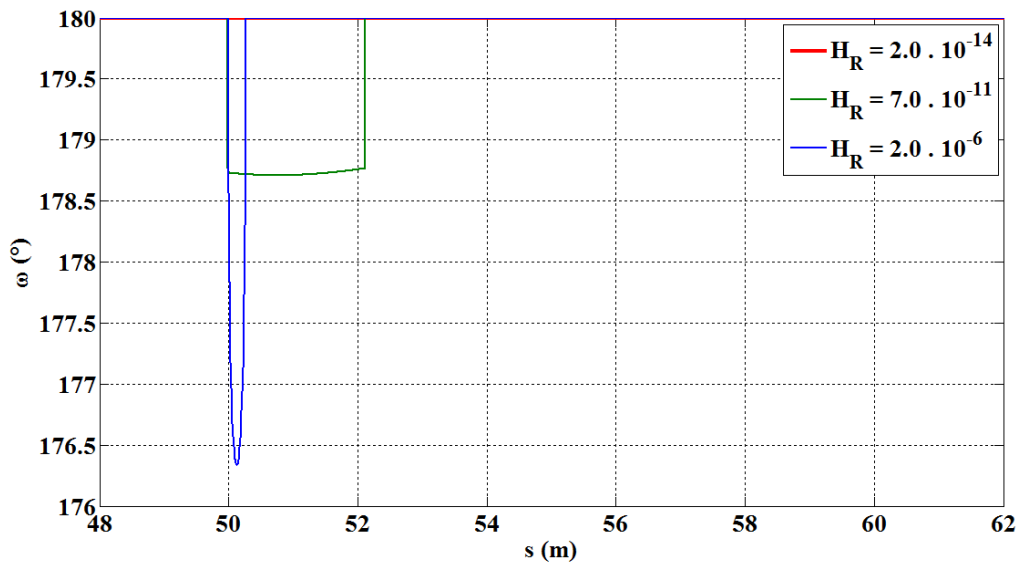
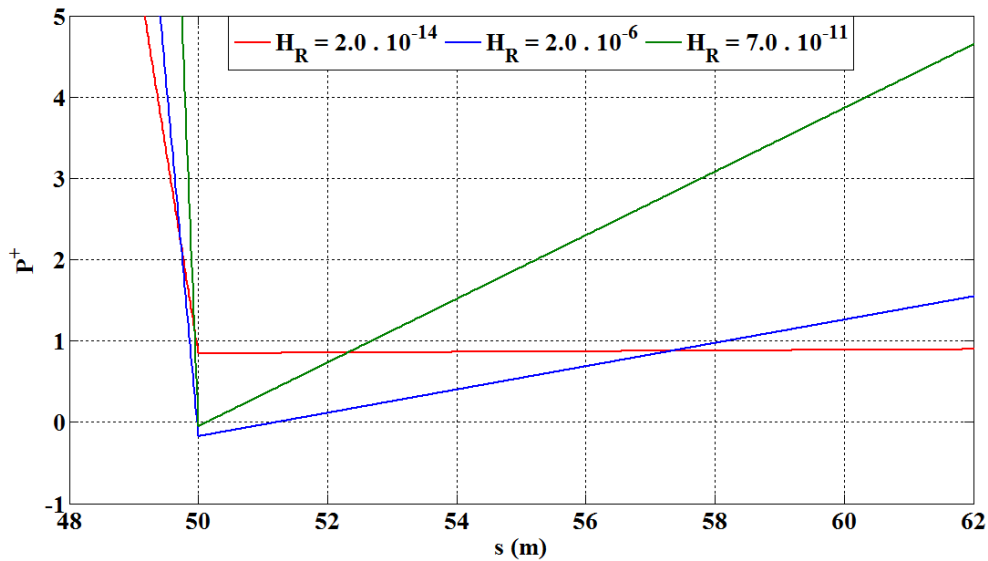


Figura 5.10 - Ângulo molhado em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de  $H_R$ .



**Figura 5.11 – Número de cavitação em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de  $H_R$ .**

Voltando a definição expressa na Eq. (5.14), o número adimensional  $H_R$  pode ser considerado uma razão entre a força termodinâmica associada à transformação de fase e a força de inércia. Quanto maior  $H_R$ , maior é a influência da força termodinâmica no gradiente de pressão.

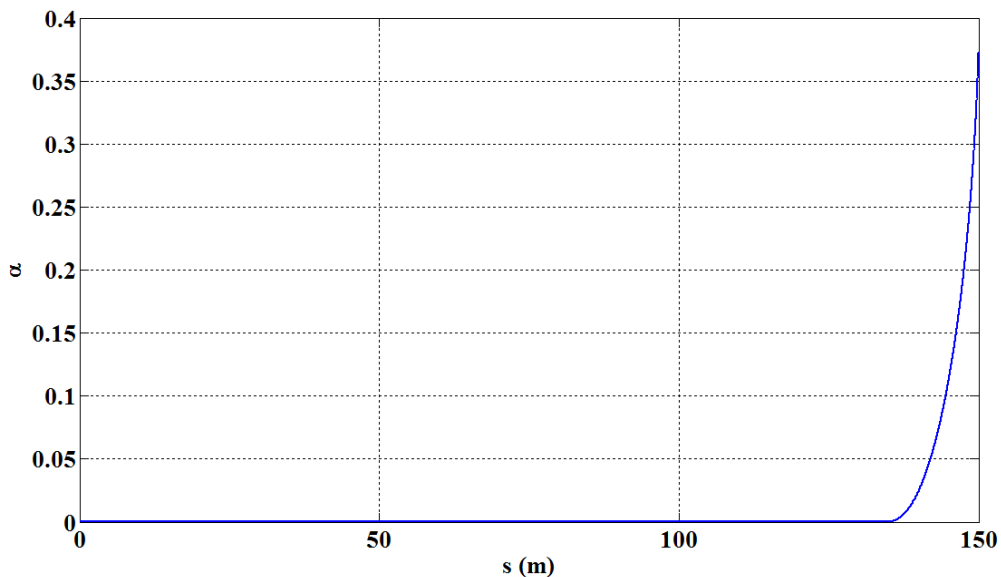
A atuação da força termodinâmica no gradiente de pressão pode ser explicada reportando-se a Eq. (5.8). A maneira como ela atua sobre o gradiente de pressão depende do sinal de  $\Gamma^+$ . Quando  $\Gamma^+ > 0$ , isto é, líquido está se transformando em vapor, a força termodinâmica atua no sentido de abrir a coluna. Por outro lado, quando  $\Gamma^+ < 0$ , com vapor se transformando em líquido, ela atua de forma a fechar a coluna.

Logo após a seção  $s = \xi_i$ , a coluna líquida começa a abrir por conta da ação das forças termodinâmica e de atrito, isto é,  $\Gamma^+ > 0$ . Entretanto, conforme análise feita na seção 4.5, a seção do duto em que ocorre abertura da coluna líquida se dá numa posição de descida, ou em um pico ou no final de um platô. Nesses três casos, a força gravitacional atua no sentido de fechar a coluna líquida tornando o gradiente de pressão positivo.



Como a ordem de grandeza da força gravitacional é bem maior que a da força termodinâmica, a pressão pára de diminuir e começa a aumentar numa dada seção do duto  $s = \xi_m$ , tal  $\xi_m \in (\xi_i, \xi_f)$ . A partir de então, o vapor gerado com vaporização devido à queda de pressão começa a retornar ao estado líquido, ou seja,  $\Gamma^+ < 0$ . Nessas condições, a força termodinâmica passa a atuar de forma a fechar a coluna líquida e restabelecer o regime de escoamento em coluna cheia na seção  $s = \xi_f$ .

Antes de mostrar os resultados obtidos considerando diferentes números de Froude, são apresentados nas Figs 5.12 e 5.13 os gráficos da fração volumétrica de vapor e do Número de Mach,  $M$ , em função do comprimento desenvolvido num duto com perfil topográfico plano.



**Figura 5.12 - Fração volumétrica de vapor em função do comprimento desenvolvido num duto com perfil topográfico plano.**

Por conta de um aumento expressivo na fração volumétrica de vapor, o número de Mach aumenta significativamente, conforme mostra Fig 5.13. Mesmo assim, conforme registrado anteriormente, a condição estabelecida em Eq. (5.15) fica longe de ser violada.

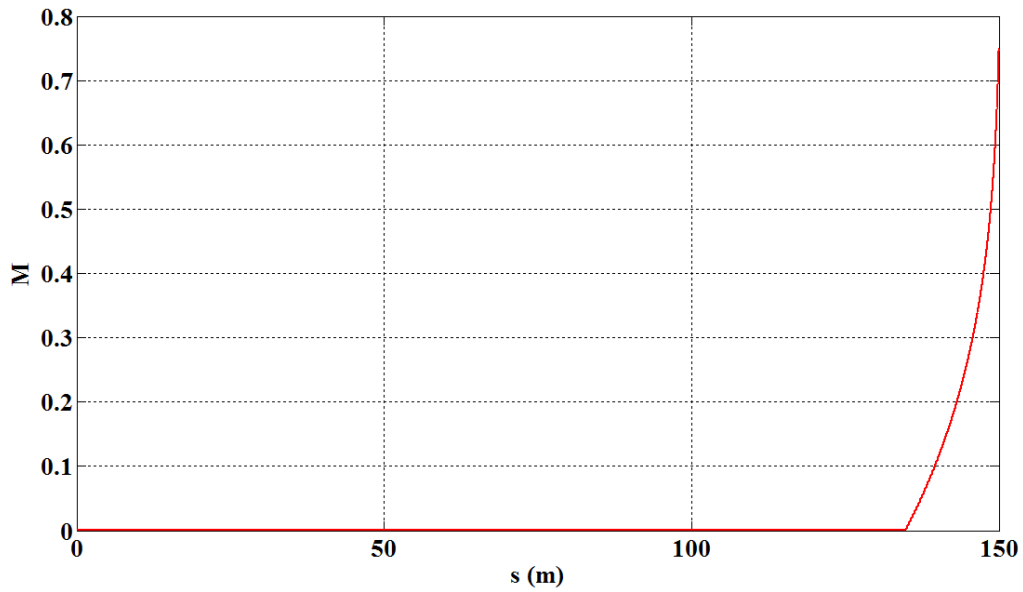


Figura 5.13 – Número de Mach em função do comprimento desenvolvido num duto com perfil topográfico plano.

O comprimento da região de escoamento em coluna aberta é controlado pelo número de Froude. As Figs 5.14, 5.15 e 5.16 mostram que, para números de Froude pequenos, o comprimento da região de escoamento em coluna aberta é maior.

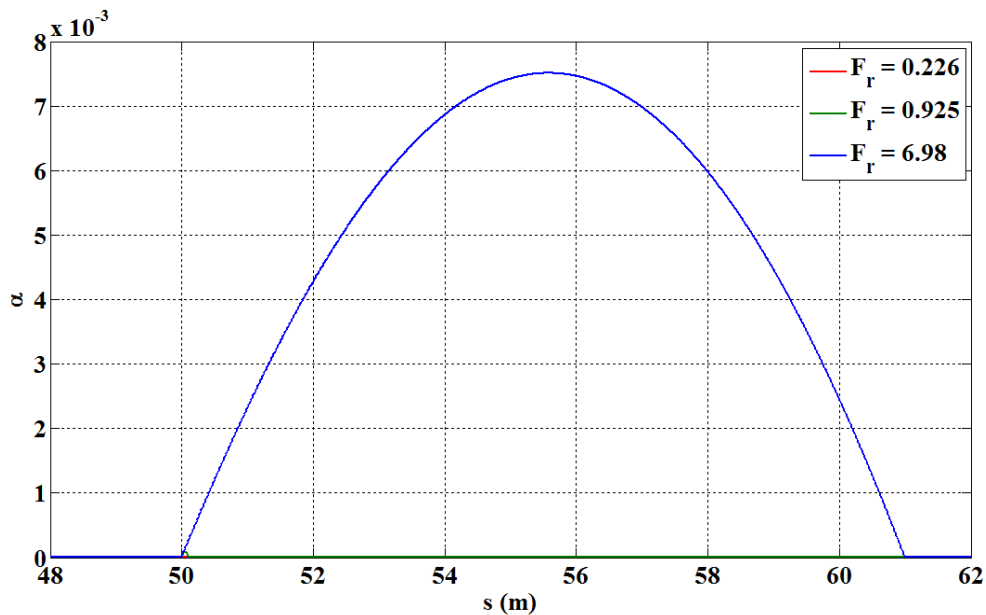


Figura 5.14 - Fração volumétrica de vapor em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de  $F_r$ .

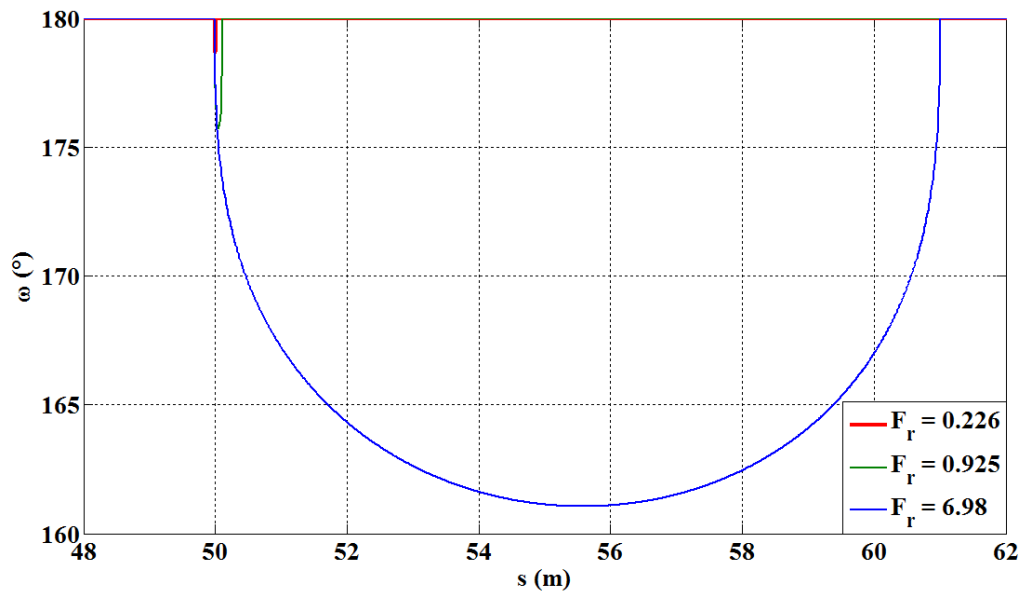


Figura 5.15 - Ângulo molhado em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de  $F_r$ .

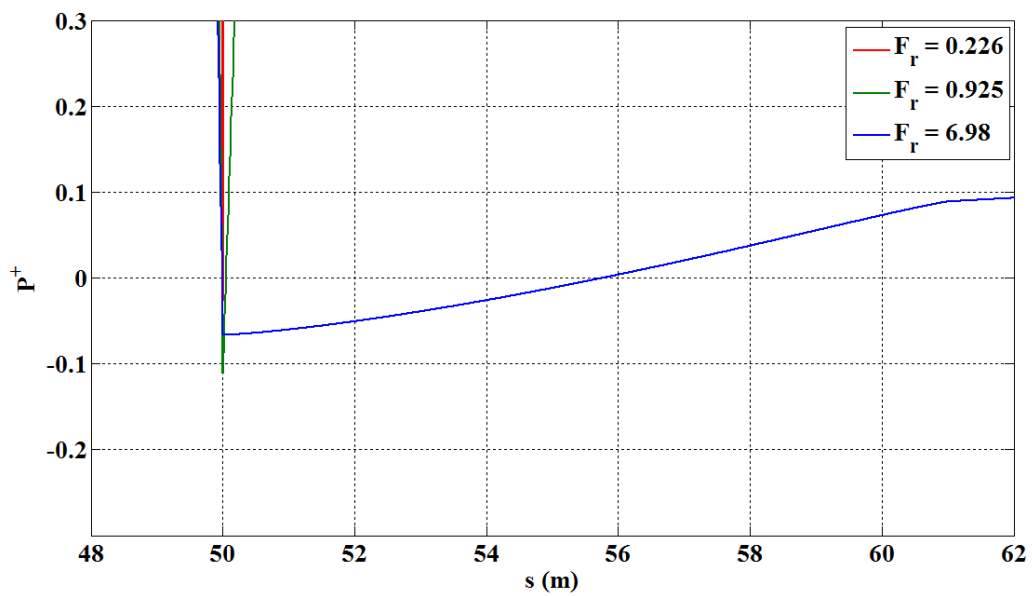


Figura 5.16 – Número de cavitação em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de  $F_r$ .

Para explicar tal resultado, é preciso mais uma vez reportar à Eq (5.8) e à definição de Número de Froude expressa na Eq. (5.18). Com base na Eq. (5.18), o número de Froude pode ser considerado como uma razão entre as forças de inércia e devido ao campo gravitacional. Assim, considerando em conjunto as Eqs. (5.8) e (5.18), quanto maior o número de Froude, menor é a influência da força devido ao campo gravitacional no gradiente de pressão.

A influência da força gravitacional no gradiente de pressão depende do sinal do gradiente de elevação da linha. Como a seção do duto em que ocorre abertura da coluna líquida se dá numa posição de descida, ou em um pico ou no final de um platô, o gradiente de elevação da linha é sempre negativo nesses casos e, pela Eq. (5.8), a força devido ao campo gravitacional sempre atuará no sentido de tornar o gradiente de pressão positivo e de fechar a coluna.

O comprimento da região de escoamento em coluna aberta depende da magnitude do número de Froude. Grandes extensões de escoamento em coluna aberta estão associadas a números de Froude elevados. Isto porque nesse caso a ordem de grandeza da força gravitacional se equipara à ordem de grandeza da força termodinâmica e da força de atrito. Da seção  $s = \xi_i$  até  $s = \xi_m$  (seção a partir da qual a pressão começa a aumentar), as forças termodinâmica e de atrito atuam no sentido de abrir a coluna e a força gravitacional, de fechar. A partir da seção  $s = \xi_m$  até  $s = \xi_f$ , a força termodinâmica, em função dos motivos já mencionados anteriormente, passa a atuar no sentido de tornar o gradiente de pressão mais positivo e fechar a coluna líquida. Nos casos em que o número de Froude é pequeno, a ordem de grandeza da força gravitacional é muito maior do que a das demais, de forma que a coluna fecha logo após ter sido aberta.

As Figs 5.17 e 5.18 mostram os gráficos de dissipação de energia e de histerese em cada  $F_r$ . Embora em todos os casos a mudança de fase seja retratada como um processo irreversível (ou seja, com  $\beta = 10^{-8} \text{ kg}^2/\text{m}^3 \text{ J s}$ ), as quantidades de energia dissipada durante o processo de transformação de fase são diferentes.

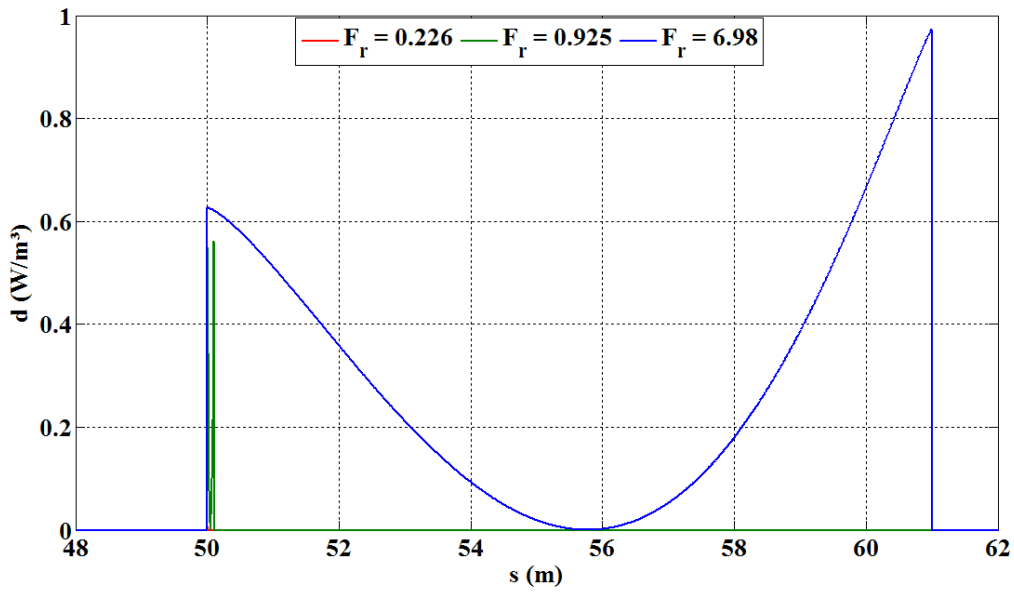


Figura 5.17 – Taxa de dissipação de energia em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de  $F_r$ .

O caso que exibe maior  $F_r$  apresenta maior dissipação de energia na região de escoamento em coluna aberta. Nos demais casos, há também dissipação de energia, porém em menor magnitude porque, logo após a sua abertura, o regime de escoamento em coluna cheia é restabelecido.

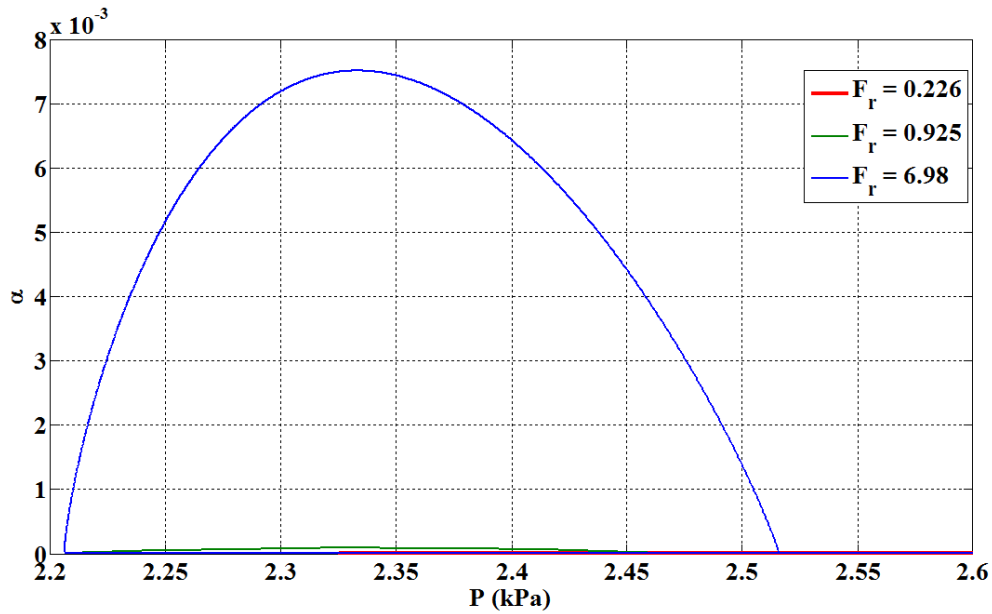


Figura 5.18 – Fenômeno de histerese considerando diferentes valores de  $F_r$ .

Na Fig 5.19, a taxa mássica de transformação de fase na região de escoamento em coluna aberta é representada graficamente para cada  $F_r$ . As magnitudes de  $\Gamma$  nos dois casos com os maiores  $F_r$  são bem próximas. A diferença é que, no caso com maior  $F_r$ , a taxa com que líquido se transforma em vapor e vapor se transforma em líquido varia mais suavemente comparada aos outros casos.

Pode-se observar também que o gráfico de  $\Gamma$  em função de  $s$  na região de escoamento em coluna aberta não é simétrico, mostrando que nem toda massa de vapor gerada durante o processo de abertura da coluna líquida retorna ao seu estado original de líquido durante e após o fechamento da coluna.

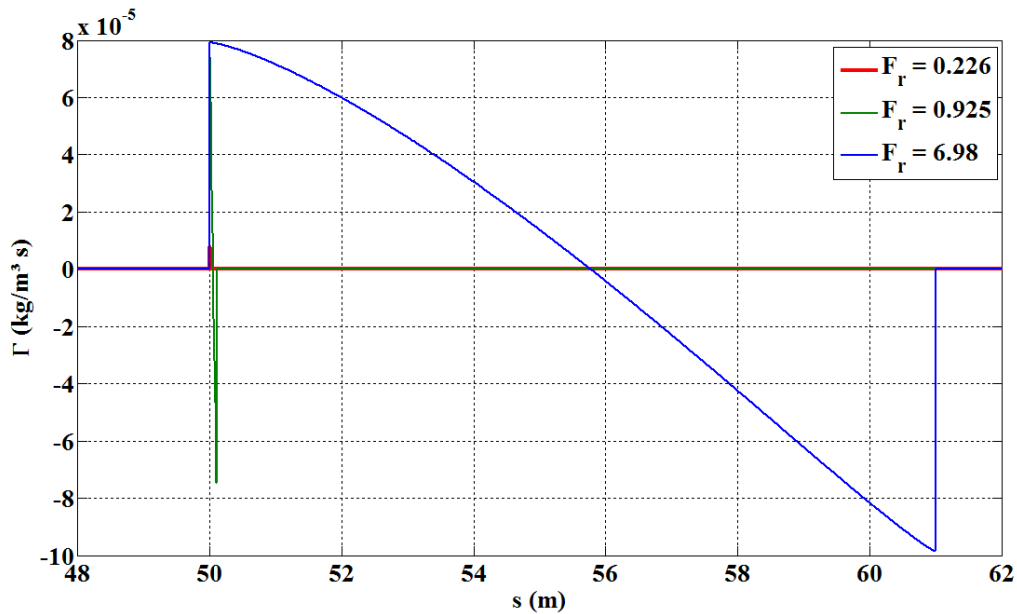


Figura 5.19– Taxa mássica de transformação de fase em função do comprimento desenvolvido do duto considerando diferentes valores de  $F_r$ .

Apesar de as seis simulações anteriores mostrarem a relação dos números adimensionais  $F_r$  e  $H_R$  com o fenômeno da abertura de coluna, a relação do diâmetro da tubulação com o referido fenômeno ainda não ficou bem clara. Nesse aspecto, são apresentadas mais três simulações nas quais todas as outras variáveis são fixas ( $v_0 = 2 \text{ m/s}$ ,  $\phi_2 = 1,2^\circ$  e  $\beta = 10^{-8} \text{ kg}^2/\text{m}^3\text{Js}$ ) e varia-se apenas o diâmetro da tubulação. A idéia é, a partir do caso de maior abertura de coluna ( $F_{r_{\max}}$ ), variar o diâmetro do duto ( $D_0 = 200\text{mm}$ ,  $D_0 = 500 \text{ mm}$  e  $D_0 = 1000\text{m}$ ) e verificar o seu efeito no comprimento da região de escoamento em coluna aberta. A tabela 5.7 apresenta os valores de  $\alpha^*$  e  $P_0$  para cada diâmetro.

Tabela 5.7 – valores de  $P_0$  e  $\alpha^*$  para cada diâmetro de duto simulado

$D_0$ (mm)	$P_0$ (kPa)	$\alpha^*$
200	501,68	$2,144 \cdot 10^{-6}$
500	495,78	$2,119 \cdot 10^{-6}$
1000	493,82	$2,110 \cdot 10^{-6}$

Pode-se observar com base nas Figs 5.20, 5.21 e 5.22 que o comprimento da região de escoamento em coluna aberta aumenta com a diminuição do diâmetro da tubulação. A explicação para tal comportamento está no fato de o volume de vapor gerado ser o mesmo nas três tubulações. Dessa forma, para um mesmo volume de vapor gerado, à medida que o diâmetro aumenta, o comprimento da região de escoamento em coluna aberta diminui.

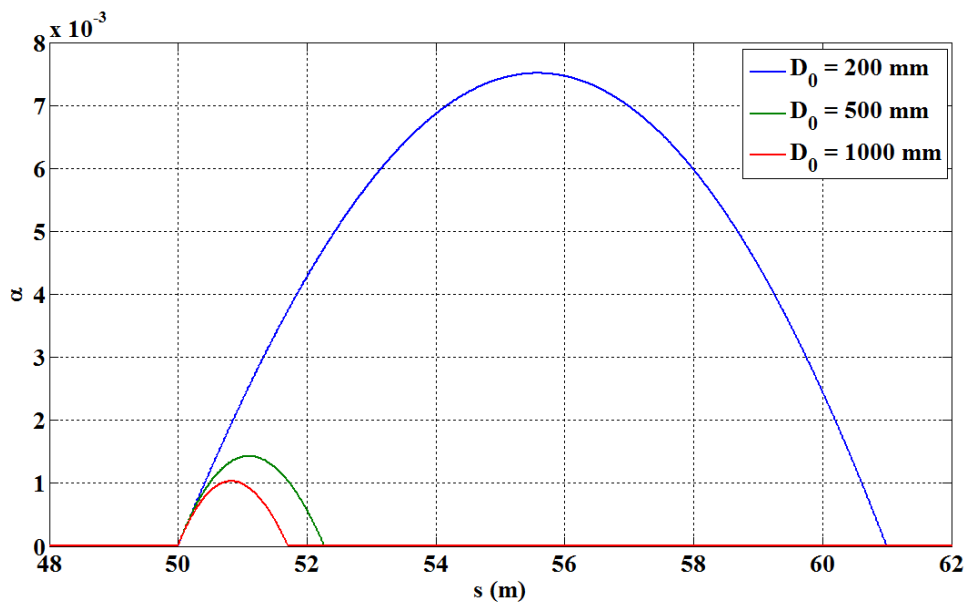


Figura 5.20– Fração volumétrica de vapor em função do comprimento desenvolvido do duto com diferentes diâmetros.



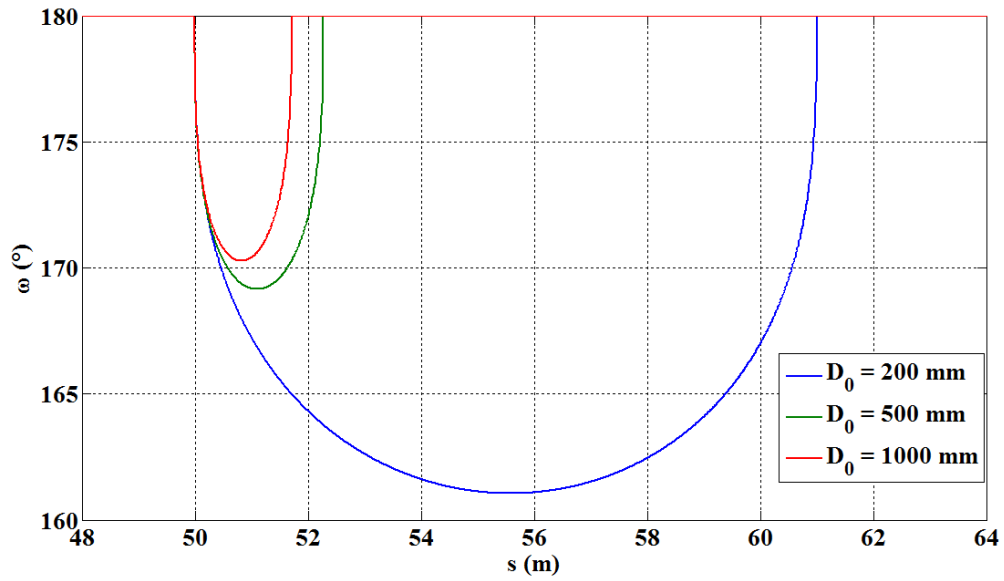


Figura 5.21 – Ângulo molhado em função do comprimento desenvolvido do duto com diferentes diâmetros.

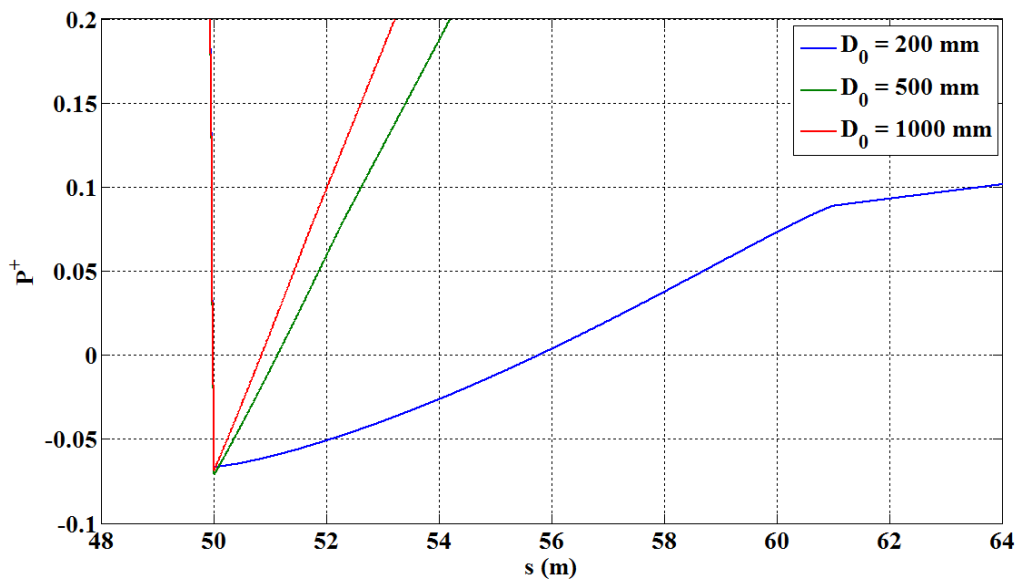
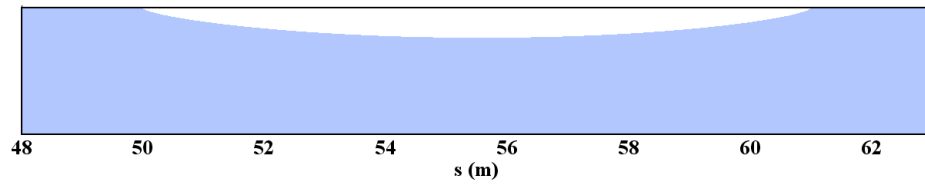
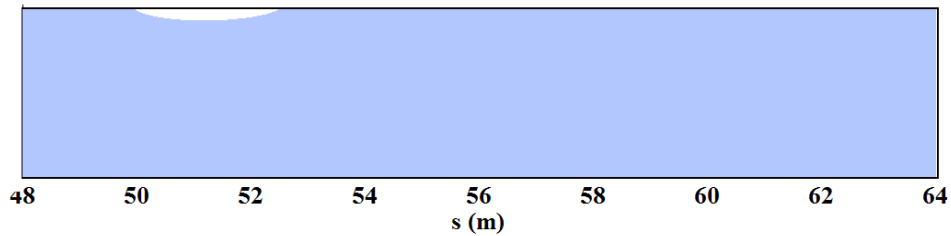


Figura 5.22 – Número de cavitação em função do comprimento desenvolvido do duto com diferentes diâmetros.

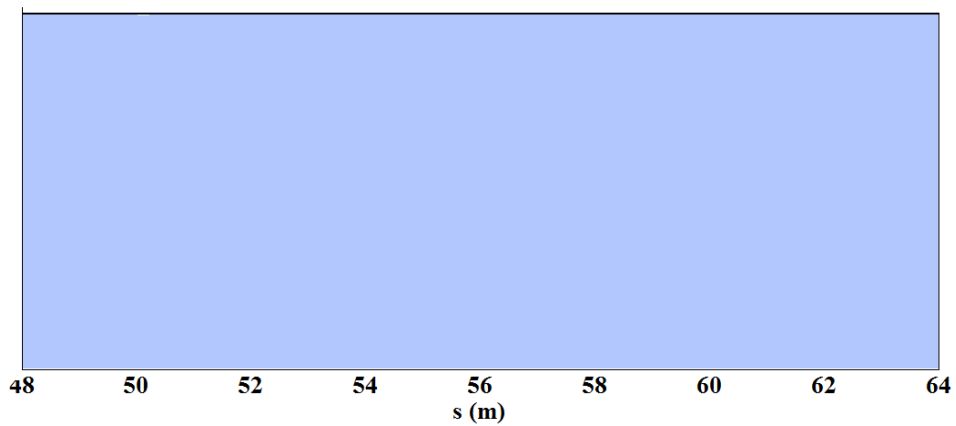
A Fig 5.23 mostra a extensão da região de escoamento em coluna aberta em três trechos de tubulação de diâmetros 200 mm, 500 mm e 1000 mm.



(a)



(b)



(c)

**Figura 5.23 – Extensão da região de escoamento em coluna parcialmente aberta quando (a)  $D_0 = 200$  mm (b)  $D_0 = 500$  mm (c)  $D_0 = 1000$  mm.**

# Capítulo 6

## Conclusões e Sugestões

O presente trabalho apresenta um modelo para descrever o fenômeno de cavitação em escoamentos de líquidos em dutos. Apesar de poder ser aplicado tanto em regime permanente quanto em transiente, as aplicações apresentadas no trabalho são restritas ao escoamento com coluna parcialmente aberta, observado em regimes de escoamento permanente. O escoamento é considerado isotérmico e homogêneo e o fluido é tratado como uma pseudo mistura formada de fases compressíveis (de líquido e de vapor), que coexistem num mesmo ponto material e num mesmo instante de tempo.

O modelo é formado pelas equações de balanço de massa para cada uma das fases e uma equação de balanço de quantidade de movimento linear, as quais são escritas num contexto unidimensional. O processo de transformação de fase é adequadamente retratado como um processo irreversível.

Os principais grupos adimensionais que intervêm no processo são o número de Froude  $F_r$  e o número adimensional  $H_R$ , que pode ser definido como uma razão entre a força termodinâmica e a força de inércia. Suas influências no processo de abertura de coluna são caracterizadas através de simulações numéricas.

A influência da força termodinâmica associada ao processo de transformação de fase sobre o gradiente de pressão é maior ou menor de acordo com a magnitude do número adimensional  $H_R$ . Quanto maior  $H_R$ , maior a influência da força termodinâmica no gradiente de pressão. Pode-se observar a partir dos resultados obtidos pelo modelo que os maiores  $H_R$  retratam o fenômeno de abertura e fechamento de coluna líquida de uma forma mais realística. Isto mostra que a caracterização da transformação de fase como um processo irreversível permite que o problema em questão seja modelado de uma forma mais coerente com a realidade física no qual está inserido.

O comprimento da região de escoamento em coluna aberta depende da magnitude do número de Froude. Grandes extensões de escoamento em coluna aberta estão associadas a números de Froude elevados. Por outro lado, baixos números de Froude acarretam em pequenos ou quase inexistentes comprimentos de região de escoamento em coluna aberta.

O diâmetro da tubulação também tem influência no fenômeno de abertura da coluna líquida. Tubulações de diâmetros relativamente pequenos são mais susceptíveis à ocorrência de abertura de coluna líquida.

Os resultados obtidos mostram que o modelo proposto é capaz de descrever de forma fisicamente coerente, tanto a abertura quanto o fechamento da coluna líquida. Entretanto, neste trabalho, não se esgotaram as possibilidades de aplicação deste modelo. Apesar de este trabalho apresentar apenas casos de modelagem em regime permanente, o uso do modelo pode ser extrapolado para modelagem de escoamento em regime transiente.

# Apêndice A

No cálculo da perda de carga no trecho da linha com abertura de coluna líquida, há necessidade de se expressar o ângulo molhado  $\omega$  como uma função da fração volumétrica de vapor  $\alpha$ . Este apêndice mostra como foi deduzida a Eq. (4.26) que relaciona as duas grandezas citadas anteriormente.

Por definição, a fração volumétrica de vapor é dada pela razão entre o volume de vapor e o volume total de fluido. Considerando uma seção do duto, a fração volumétrica de vapor pode ser calculada através da expressão:

$$\alpha = \frac{A_v}{A} = \frac{A_v}{A_l + A_v} \quad (\text{A.1})$$

A Fig A.1 mostra área de seção transversal de um duto com separação de coluna líquida. É possível distinguir quais são as áreas preenchidas pela fase líquida e de vapor.

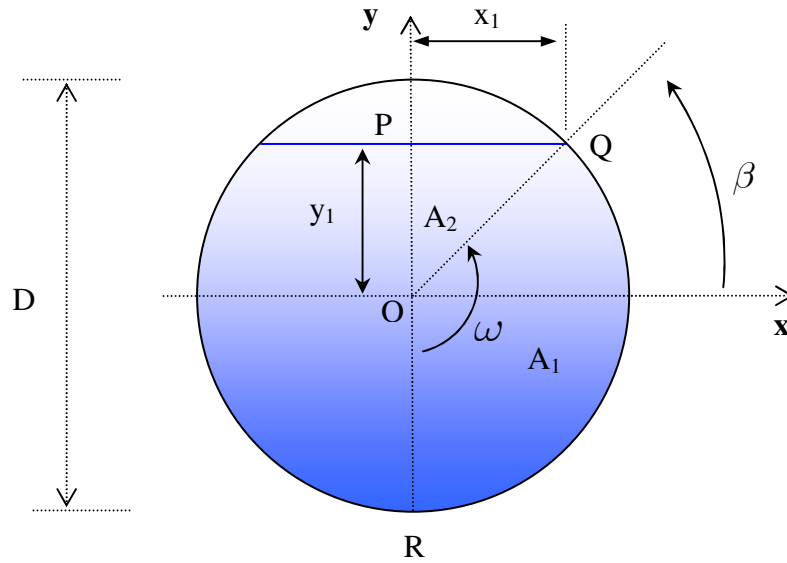


Figura A.1 – Seção transversal de duto operando em coluna aberta.

A área  $A_1$  preenchida pela fase líquida é igual ao dobro da soma entre áreas  $A_1$  e  $A_2$  que correspondem respectivamente à área do setor circular QRO e à área do triângulo retângulo OPQ. Assim:

$$A_1 = \frac{1}{2} r^2 \omega \quad (\text{A.2})$$

$$A_2 = \frac{x_1 y_1}{2} = \frac{r^2 \sin(\beta) \cos(\beta)}{2} \quad (\text{A.3})$$

Como  $\beta = \omega - \frac{\pi}{2}$ , a Eq (A.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$A_2 = \frac{1}{2} r^2 \sin\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} r^2 \sin(2\omega - \pi) \quad (\text{A.4})$$

Pela formula de seno de diferença de ângulos, obtém-se:

$$A_2 = \frac{r^2 \sin(2\omega)}{4} \quad (\text{A.5})$$

Por fim, a área  $A_1$  preenchida pela fase líquida é calculada em função do ângulo molhado através da expressão

$$A_1 = 2(A_1 + A_2) = r^2 \left( \omega - \frac{\text{sen}(2\omega)}{2} \right) \quad (\text{A.6})$$

Conhecendo a área de seção transversal total e a área  $A_1$ , pode-se calcular a área  $A_v$  preenchida pela fase de vapor pela fórmula:

$$A_v = r^2 \left( \pi - \omega + \frac{\text{sen}(2\omega)}{2} \right) \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a Eq (A.7) na Eq. (A.1), obtém-se uma equação que permite relacionar a fração volumétrica de vapor ao ângulo molhado.

$$\alpha = 1 - \frac{\omega}{\pi} + \frac{\text{sen}(2\omega)}{2\pi} \quad (\text{A.8})$$

## Apêndice B

As Eqs. (4.5), (4.8) e (4.9) compõem o sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem não linear que caracteriza a modelagem desenvolvida neste trabalho. Esse tipo de sistema pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\underline{\underline{G}}(s, \underline{y}) \frac{d\underline{y}}{ds} = \underline{F}(s, \underline{y}) \quad (\text{B.1})$$

onde  $\underline{y} = [P \quad v \quad \alpha]^T$ ,  $\frac{d\underline{y}}{ds} = \left[ \frac{dP}{ds} \quad \frac{dv}{ds} \quad \frac{d\alpha}{ds} \right]^T$ ,

$$\underline{F}(s, \underline{y}) = \left[ -\Gamma \quad \Gamma \quad -\frac{\tau \pi D}{A} - \rho g \sin(\theta) \right]^T \quad (\text{B.2})$$

$$\underline{\underline{G}}(s, \underline{y}) = \begin{bmatrix} \frac{v(1-\alpha)}{a_1^2} + \frac{(1-\alpha)\rho_1 v \xi D_0}{eE} & (1-\alpha)\rho_1 & -v\rho_1 \\ \frac{v\alpha}{a_v^2} + \frac{\alpha\rho_v v \xi D_0}{eE} & \alpha\rho_v & v\rho_v \\ 1 & \rho v & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$



Com o método de Gauss, é possível resolver o sistema (B.1) nas derivadas  $dP/ds$ ,  $dv/ds$  e  $d\alpha/ds$ , obtendo-se assim a forma normal do sistema. Para tal, o método lança mão de operações elementares entre as linhas da matriz ampliada do sistema ( $\underline{\underline{H}}$ )

$$\underline{\underline{H}} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{v(1-\alpha)}{a_1^2} + \frac{(1-\alpha)\rho_1 v \xi D_0}{eE} & (1-\alpha)\rho_1 & -v\rho_1 & -\Gamma \\ \frac{v\alpha}{a_v^2} + \frac{\alpha\rho_v v \xi D_0}{eE} & \alpha\rho_v & v\rho_v & \Gamma \\ 1 & \rho v & 0 & -\frac{4\tau}{D_0} - \rho g \text{sen}(\theta) \end{array} \right]$$

de maneira que a submatriz ( $\underline{\underline{G}}$ ) se torne a matriz identidade. A seguir, é apresentada a seqüência de operações elementares aplicadas que possibilitam a dedução das Eqs. (4.12), (4.13) e (4.14).

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{v(1-\alpha)}{a_1^2} + \frac{(1-\alpha)\rho_1 v \xi D_0}{eE} & (1-\alpha)\rho_1 & -v\rho_1 & -\Gamma \\ \frac{v\alpha}{a_v^2} + \frac{\alpha\rho_v v \xi D_0}{eE} & \alpha\rho_v & v\rho_v & \Gamma \\ 1 & \rho v & 0 & -\frac{4\tau}{D_0} - \rho g \text{sen}(\theta) \end{array} \right]$$

$$L_1^N = L_1/v\rho_1 \quad \downarrow \quad L_2^N = L_2/v\rho_v$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{(1-\alpha)}{\rho_1 a_1^2} + \frac{(1-\alpha)\xi D_0}{eE} & \frac{(1-\alpha)}{v} & -1 & -\frac{\Gamma}{v\rho_1} \\ \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\alpha\xi D_0}{eE} & \frac{\alpha}{v} & 1 & \frac{\Gamma}{v\rho_v} \\ 1 & \rho v & 0 & -\frac{4\tau}{D_0} - \rho g \text{sen}(\theta) \end{array} \right]$$

$$\downarrow \quad L_1^N = L_1 + L_2$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{(1-\alpha)}{\rho_1 a_1^2} + \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\xi D_0}{eE} & \frac{1}{v} & 0 & \frac{\Gamma}{v} \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_1} \right) \\ \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\alpha \xi D_0}{eE} & \frac{\alpha}{v} & 1 & \frac{\Gamma}{v \rho_v} \\ 1 & \rho v & 0 & -\frac{4\tau}{D_0} - \rho \text{gsen}(\theta) \end{array} \right]$$

$$\downarrow \frac{1}{\rho a^2} = \frac{(1-\alpha)}{\rho_1 a_1^2} + \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\rho a^2} + \frac{\xi D_0}{eE} & \frac{1}{v} & 0 & \frac{\Gamma}{v} \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_1} \right) \\ \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\alpha \xi D_0}{eE} & \frac{\alpha}{v} & 1 & \frac{\Gamma}{v \rho_v} \\ 1 & \rho v & 0 & -\frac{4\tau}{D_0} - \rho \text{gsen}(\theta) \end{array} \right]$$

$$\downarrow L_1^N = L_3 - \rho v^2 L_1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 - M^2 \left( 1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right) & 0 & 0 & \Gamma \rho v \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_v} \right) - \frac{4\tau}{D_0} - \rho \text{gsen}(\theta) \\ \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\alpha \xi D_0}{eE} & \frac{\alpha}{v} & 1 & \frac{\Gamma}{v \rho_v} \\ 1 & \rho v & 0 & -\frac{4\tau}{D_0} - \rho \text{gsen}(\theta) \end{array} \right]$$

$$\downarrow L_3^N = L_2 - \frac{\alpha}{\rho v^2} L_3$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 - M^2 \left( 1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right) & 0 & 0 & \Gamma \rho v \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_v} \right) - \frac{4\tau}{D_0} - \rho \text{gsen}(\theta) \\ \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\alpha \xi D_0}{eE} & \frac{\alpha}{v} & 1 & \frac{\Gamma}{v \rho_v} \\ \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\alpha \xi D_0}{eE} - \frac{\alpha}{\rho v^2} & 0 & 1 & \frac{\Gamma}{v \rho_v} + \frac{\alpha}{\rho v^2} \left[ \frac{4\tau}{D_0} + \rho \text{gsen}(\theta) \right] \end{array} \right]$$

$$\downarrow L_2^N = L_2 - L_3$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 - M^2 \left( 1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right) & 0 & 0 & \Gamma \rho v \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_v} \right) - \frac{4\tau}{D_0} - \rho \text{gsen}(\theta) \\ \frac{\alpha}{\rho v^2} & \frac{\alpha}{v} & 0 & -\frac{\alpha}{\rho v^2} \left[ \frac{4\tau}{D_0} + \rho \text{gsen}(\theta) \right] \\ \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\alpha \xi D_0}{eE} - \frac{\alpha}{\rho v^2} & 0 & 1 & \frac{\Gamma}{v \rho_v} + \frac{\alpha}{\rho v^2} \left[ \frac{4\tau}{D_0} + \rho \text{gsen}(\theta) \right] \end{array} \right]$$

$$L_1^N = \frac{L_1}{1 - M^2 \left( 1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right)} \quad \downarrow \quad L_2^N = -\frac{\rho v^2}{\alpha} L_2$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ -1 & -\rho v & 0 & \frac{4\tau}{D_0} + \rho \text{gsen}(\theta) \\ \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\alpha \xi D_0}{eE} - \frac{\alpha}{\rho v^2} & 0 & 1 & \frac{\Gamma}{v \rho_v} + \frac{\alpha}{\rho v^2} \left[ \frac{4\tau}{D_0} + \rho \text{gsen}(\theta) \right] \end{array} \right]$$

$$\downarrow \quad L_2^N = L_2 + L_1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & -\rho v & 0 & \frac{4\tau}{D_0} + \rho \text{gsen}(\theta) + \lambda \\ \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\alpha \xi D_0}{eE} - \frac{\alpha}{\rho v^2} & 0 & 1 & \frac{\Gamma}{v \rho_v} + \frac{\alpha}{\rho v^2} \left[ \frac{4\tau}{D_0} + \rho \text{gsen}(\theta) \right] \end{array} \right]$$

$$L_3^N = -L_3 / \rho v \quad \downarrow \quad L_3^N = L_3 - \left[ \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\alpha \xi D_0}{eE} - \frac{\alpha}{\rho v^2} \right] L_1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\rho v} \left[ \frac{4\tau}{D_0} + \rho \text{gsen}(\theta) + \lambda \right] \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\Gamma}{v \rho_v} + \frac{\alpha}{\rho v^2} \left[ \frac{4\tau}{D_0} + \rho \text{gsen}(\theta) \right] + \left[ \frac{\alpha}{\rho_v a_v^2} + \frac{\alpha \xi D_0}{eE} - \frac{\alpha}{\rho v^2} \right] \lambda \end{array} \right]$$

na qual

$$\lambda = \frac{\Gamma\rho v \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_v} \right) - \frac{4\tau}{D_0} - \rho g \text{sen}(\theta)}{1 - M^2 \left( 1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right)} \quad (\text{B.4})$$

Assim:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{\Gamma\rho v \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_v} \right) - \frac{4\tau}{D_0} - \rho g \text{sen}(\theta)}{1 - M^2 \left( 1 + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right)} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{1}{\rho v} \left[ \frac{4\tau}{D_0} + \rho g \text{sen}(\theta) + \frac{dP}{ds} \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\Gamma}{v\rho_v} + \frac{\alpha}{\rho v^2} \left[ \frac{4\tau}{D_0} + \rho g \text{sen}(\theta) + \left( 1 - M^2 \left( \frac{\rho a^2}{\rho_v a_v^2} + \frac{\xi D_0 \rho a^2}{eE} \right) \right) \frac{dP}{ds} \right] \quad (\text{B.7})$$

# Apêndice C

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%           Modelagem em regime permanente de escoamento em uma adutora
%           com abertura de coluna líquida
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%           autor: Alexandre Hastenreiter Assumpção
%           Método numérico: Gear
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Condições Iniciais
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
format long eng
so=0;
sf=150;
ds=0.01;
s=so:ds:sf;
N=((sf-so)/ds)+1;
xo=1e-08; % fração volumétrica de vapor na entrada do duto
Po=496.5*10^3; % pressão média na entrada do duto em Pa
Vo=5e-01; % velocidade média na entrada do duto em m/s
xa=4*10^(-5);
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Características do escoamento
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
t=20; % temperatura em °C
T=t+273.15; % temperatura em K
Ps=0.002339*10^6; % pressão de saturação correspondente a temperatura
T
vf=0.0010018; % volume específico da água saturada
vg=57.79; % volume específico do vapor d'água saturado a pressão ps
em m³/kg
rovs=1/vg; % massa específica do vapor d'água saturado a pressão ps
em kg/m³
f=0.02; % fator de atrito de Darcy
%
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%características do duto
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
D=25.4*10^(-3); % diâmetro do duto não-deformado em m
Ro=D/2; % raio do duto não deformado em m
Ao=pi*Ro^2; % área de seção transversal do duto não deformado em m^2
E=207*10^9; % Módulo de Young do material da parede do duto em GPa
e=5.0e-03; % espessura da parede do duto em m
ni=5.0e-01; %coeficiente de Poisson
escolha=1;
if escolha==1
    ks=1;
else
    ks=1-ni^2;
end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Parametros das equações de estado
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
[B]=paramB(t);
[vo]=paramvo(t);
R=461.5; %constante particular do gás ou vapor (neste caso, vapor
d`água) em J/kg K
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%outros parametros
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
g=9.81; % aceleração da gravidade em m/s^2
betaa=1.0e-8;
Patm=1.0e+05; % pressão atmosférica local em Pa
gamaang=0;
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Perfil Planialtimétrico
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
angg1=45;
angg2=1;
s1=50;
[z, s2, dzds]=PF2(s, N, s1, angg1, angg2);
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Método de Gear
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%Integração do sistema de EDOS desde s = so até s = sf
%
yo=[Po;Vo;xo];
options=odeset('BDF','on','MaxStep',1e-05);
[s,y]=ode15s(@EDOS,s,yo,options,xo,xa,Po,Vo,t,T,Ps,vf,vg,rovs,D,Ro,E,
e,ks,B,vo,R,g,betaa,Patm,gamaang,Ao,so,f,dzds,s1,s2);
%
%Os vetores s e y são respectivamente a posição de cada seção do duto
e a
%solução do sistema de EDOS
%
[G,ro,H,Hm,M,a,al,av,rol,rov,W]=Head(s,y,z,B,vo,g,R,T,Ps,Patm,t,betaa
,rovs,Ro,e,ks,E,xo,N,f,D,gamaang,Ao,dzds,xa);
%

```

```

%Gráficos Pressão x comprimento desenvolvido, velocidade x
comprimento
%desenvolvido e fração volumétrica de vapor x comprimento
desenvolvido
%
P=y(:,1)/1000;
figure,plot(s,P)
xlabel('s (m)')
ylabel('P (kPa)')
figure,plot(s,y(:,2))
xlabel('s (m)')
ylabel('v (m/s)')
figure,plot(s,y(:,3))
xlabel('s (m)')
ylabel('\alpha')
figure,plot(s,H)
xlabel('s (m)')
ylabel('H (m)')
figure,plot(s,z)
xlabel('s (m)')
ylabel('z (m)')
figure,plot(s,W)
xlabel('s (m)')
ylabel('\omega (°)')
figure,plot(s,z,s,Hm)
xlabel('s (m)')
ylabel('elevação(m)')

```

```

function dyds=EDOS(s,y,xo,xa,Po,Vo,t,T,Ps,vf,vg,rovs,D,Ro,E,e,ks,B,vo,
R,g,betaa,Patm,gamaang,Ao,so,f,dzds,s1,s2)
%
format long eng
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%equação de estado - fase líquida
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
rolzero=B/(vo*(B+Patm));
rols=1/(vo*(1-((Ps-Patm)/B)));
al=sqrt(Ps/(rols-rolzero));
rol=rolzero+(y(1)/al^2);
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%equação de estado - fase de vapor
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
av=sqrt(R*T);
rov=y(1)/av^2;
%
if s >= 0 & s <= s1
    steta=dzds(1);
end
if s > s1 & s <= s2
    steta=dzds(2);
end
if s > s2 & s <= 150
    steta=dzds(3);
end
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%equações do modelo
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
ro=(1-y(3))*rol+y(3)*rov;
a=sqrt((rol*al^2*rov*av^2)*(ro*((1-y(3))*rov*av^2)+(y(3)*rol*al^2)))^(-1));
A=Ao*(1+(2*ks*y(1)*Ro*(e*E)^(-1)));
M=y(2)/a;
Mm=sqrt(M^2*(1+(2*ks*Ao*Ro*ro*a^2)/(e*E*A)));
if y(3) < 0
    error('A fração volumétrica de vapor não pode ser menor que 0')
end
if y(3) > 1
    error('A fração volumétrica de vapor não pode exceder o valor 1')
end
if Mm == 1
    error('O número de Mach modificado não pode ser exceder o valor 1')
end
if y(1)>Ps && y(3)<=xa
    G=0;
    fe=f;
else
    G=betaa*((al^2*(log(rol/rols)))+(al^2*rolzero*((1/rol)-(1/rols)))+(y(1)/rol)+(av^2*log(rovs/rov))-(y(1)/rov)+(Ps*((1/rovs)-(1/rols))));
    w=fzero(@(w)1-(w/pi)+(sin(2*w)/(2*pi))-y(3),[0 pi]);
    r=(1-sin(2*w)/(2*w))^(-4/3);
    fe=r*f;
end
end

```



```

Tau=(fe*ro*y(2)^2)/8;
dyds(1,1)=((ro*y(2)*G)*((rov-rol)/(rol*rov))-
(Tau*pi*D*cos(gamaang)/(A))-ro*g*steta)/(1-
(M^2*(1+(2*ks*Ao*Ro*ro*a^2)/(e*E*A))));
dyds(2,1)=(-
1/(ro*y(2)))*((Tau*pi*D*cos(gamaang)/(A))+ro*g*steta+dyds(1,1));
dyds(3,1)=(G/(y(2)*rov))+y(3)/(ro*y(2)^2))*((Tau*pi*D*(A^(-
1))*cos(gamaang))+ro*g*steta)+(1-
M^2*((ro*a^2)/(rov*av^2))+((2*ks*Ao*Ro*ro*a^2)/(E*e*A)))*dyds(1,1)
);
end

```

```

function[B]=paramB(t)
%
format long e
Bo=19654.320;
B1=147.037;
B2=-2.21554;
B3=1.0478*10^(-2);
B4=-2.2789*10^(-5);
B=Bo+B1.*t+B2.*t^2+B3.*t^3+B4.*t.^4;
B=B*10^5;
end

```

```

function[vo]=paramvo(t)
%
format long e
voo=18.159725*10^(-3);
vo1=0.9998396;
vo2=18.224944*10^(-3);
vo3=-7.922210*10^(-6);
vo4=-55.44846*10^(-9);
vo5=149.7562*10^(-12);
vo6=-393.2952*10^(-15);
vo=(1+voo.*t).*(vo1+vo2.*t+vo3.*t.^2+vo4.*t.^3+vo5.*t.^4+vo6.*t.^6).^
(-1);
vo=vo/1000;
end

```

```

function [z,s2,dzds]=PF2(s,N,s1,angg1,angg2);

```

```

s2=100;
ang1=(pi/180)*angg1;
ang2=(pi/180)*angg2;
for i=1:1:N
    if s(i)>0 & s(i)<=s1
        z(i)=tan(ang1)*s(i);
        dzds(1)=tan(ang1);
    end
    if s(i)>s1 & s(i)<=s2
        z(i)=50*tan(ang1)+(tan(ang2))*(50-s(i));
        dzds(2)=-tan(ang2);
    end
    if s(i)>s2 & s(i)<=150
        z(i)=50*tan(ang1)+(tan(ang2))*(50-s(i));
        dzds(3)=-tan(ang2);
    end
end
end
z=z';
end

```

```

function [G, ro, H, Hm, M, a, al, av, rol, rov, W]=Head(s, y, z, B, vo, g, R, T, Ps, Patm
, t, betaa, rovs, Ro, e, ks, E, xo, N, f, D, gamaang, Ao, dzds, xa)
%
format long eng
rolzero=B.*(vo.*(B+Patm)).^(-1);
rols=(vo.*(1-((Ps-Patm)./B))).^(-1);
al=sqrt(Ps.*(rols-rolzero).^(-1));
rol=rolzero+(y(:,1).*al.^(-2));
av=sqrt(R.*T);
rov=y(:,1).*av.^(-2);
ro=(1-y(:,3)).*rol+y(:,3).*rov;
H=z(:,1)+(y(:,1)./(rol.*g));
Hm=z(:,1)+((y(:,1)-Ps)./(rol.*g));
a=sqrt((rol.*al.^2.*rov.*av.^2).*(ro.*((1-
y(:,3)).*rov.*av.^2)+(y(:,3).*rol.*al.^2))).^(-1));
M=y(:,2).*a.^(-1);
A=Ao.*(1+(2.*ks.*y(:,1).*Ro.*(e.*E)^(-1)));
for i=1:1:N
    if y(i,1)>Ps && y(i,3)<= xa
        G(i)=0;
        W(i)=180;
        fe=f;
    else

G(i)=betaa.*((al.^2.*(log(rol(i)./rols)))+(al.^2.*rolzero.*(1./rol(i)
))- (1./rols)))+(y(i,1)./rol(i))-(av.^2*log(rov(i)./rovs))-
(y(i,1)./rov(i))+(Ps.*((1./rovs)-(1./rols))));
        w=fzero(@(w)1-(w/pi)+(sin(2*w)/(2*pi))-y(i,3), [0 pi]);
        r=(1-sin(2.*w)./(2.*w)).^(-4/3);
        fe=r.*f;
        W(i)=(180*w)/pi;
    end
end
end
end

```

# Referências

Ahuja, V.; Hosangadi, A., Arunajatesan, S. *Simulation of cavitation flows using hybrid unstructured meshes*. J Fluid Eng 2001; 123: 331 – 40

Arndt, R. E. A. *Cavitation in Fluid Machinery and Hydraulic Structures*. Ann. Rev. Fluid Mech. 1981. 13:273 – 328

Assumpção, A. H. & Rachid, F. B. F. *Hysteresis Loops in Isothermal Cavitation*, 12th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences, November 10 – 14, 2008, Belo Horizonte – MG.

Bergant, A., Simpson, A.R., Tijsseling, A.S.; *Water Hammer with column separation: a historical review*, Journal of fluids and structures 22 (2006) 135 – 171.

Berger, M. S. *Nonlinearity and Functional Analysis*. Academic Press. London

Brennen, C.E.,1995. *Cavitation and Bubble Dynamics*. Oxford University Press, Oxford.

Chaudry, M. H. *Applied Hydraulic Transients*. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 2ª edição, 1987.

Drew, D. A.; Passman, S. L. *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer, 1998.

Fine, R. A. & Millero, F. J. *Compressibility of water as function of temperature and pressure*. Journal of Chemical Physics, vol 59 N°10, 1973.

Freitas Rachid, F. B. *A thermodynamically consistent model for cavitating flows of compressible fluids*, International Journal of Non-Linear Mechanics 38 (2003) 1007 – 101.

Freitas Rachid, F. B. *Continuum thermo-mechanical model for homogeneous liquid-gas flows with internal surface tension effects*, Mechanics Research Communications 33 (2006) 337 – 351.

Gilat, A.; Subramaniam, V. *Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB*. Tradução Alberto Resende de Conti. – Porto Alegre: Bookman 2008.

Graham, B. W. *One dimensional Two Phase Flow*. Mc Graw Hill, New York.

Kessal, M. & Amaouche, M. *Numerical Simulation of Transient vaporous and gaseous cavitation in pipelines*. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, vol 11 N° 2, 2001, pp.121 – 137.

Knapp, R.; Darly, W.; Hamitt, F. *Cavitation*. MC Graw Hill (1970) 578p.

Liu, T. G.; Khoo, B. C.; Xie, W. F. *Isentropic one fluid modeling of unsteady cavitating flow*. J Comp Phys 2004; 201: 80 – 108

Masella, J. M.; Tran, Q. H., Ferre, D.& Pauchon, C. *Transient Simulation of two- phase flows in pipes*. Reveu de L’Institut Français Du Petrole, vol 53, N°6, 1998

Mathews, J. H., Fink, K. D. *Numerical Methods using MATLAB*. Third edition. Prentice Hall 1999.

Michel, J. M.; Franc, J. P.; *Fundamentals of Cavitation*. Grenoble Science. Universite Joseph Fourier, 2004.

Nicholas, R. E., *Simulation of slack flow: a tutorial*, PSIG – October 19 – 25, 1995.

Saurel, R., Petitpas, F. & Abgrael, R. *Modelling phase transition in metastable liquids: application to cavitating and flashing flows*. J. Fluid Mech. (2008), vol607, pp. 313 – 350.

Shampine, L. F. & Reichelt, Mark W. The Matlab ODE suite. Vol 18, N° 1, pp. 1-22, January 1997, SIAM J. Sci.Comput.

Shampine, L.F., Reichelt, M. W. & Kierzenka, J. A. *Solving Index-1 DAEs in MATLAB and Simulink*. Vol 41, N° 3, pp. 528-552, SIAM, 1999.

Shu, J. *Modelling vaporous cavitation on fluid transient*. International Journal of Pressure Vessels and Piping 80 (2003) 187 - 195

Tullis, J. P., *Hydraulics of pipelines: Pumps, Valves, Cavitation, Transients* – John Wylie & Sons, 1989.

Utturkar, Y.; Wu, J.; Wang, G. and Shyy, W.; *Progress in Aerospace Science*, 41 (2005) 558-608

Venkateswaran, S.; Lindau, J. W.; Kunz, R. F.; Merkle, C.L. *Computation of multiphase mixture flows with compressible effects*. J Comp Phys 2003; 180: 54 -77.

Ventikos, Y. and Tzabiras, G. *A Numerical Methods for the Simulation of steady and unsteady cavitating flows*. Computers & Fluids 29 (2000) 63 – 88.

Vortmann, C.; Schnerr, G. H.; Seelecke, S.; *Thermodynamic modeling and simulation of cavitating nozzle flow*. International Journal Heat and Fluid Flow 24 (2003) 774 – 783

Wang, J.S.; Locher, F. A.; *Verification of modeling water column separation*. In: Proceedings of the international meeting on hydraulic transient with water column separation. 9<sup>th</sup> Round Table of the IAHR Group, Valencia, Spain, pp. 343 – 354.

Wiggert, D. C.; Sandquist, M. J. *The effect of gaseous cavitation on fluids transients*. Trans ASME, J Fluids Engng 1979; 101 (1); 79 -86

Wylie, E. B. & Streeter, V. L. *Fluid Transients in Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Xie, W. F., Liu, T. G., Khoo, B. C.. *Application of a one-fluid model for large scale homogeneous unsteady cavitation: The modified Schmidt model*. Computers&Fluids 35 (2006) 1177 – 1192.

Young, F. R. *Cavitation*. Mc Graw Hill Book Company, 1989.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)