



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Instituto Politécnico

Juan Diego Cardoso Brêttas

Geração de meios porosos fractais com uma nova equação do tipo Kozeny-Carman

Nova Friburgo
2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Juan Diego Cardoso Brêttas

Geração de meios porosos fractais com uma nova equação do tipo Kozeny-Carman

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de mestre, ao programa de pós-graduação em Modelagem Computacional do Instituto Politécnico, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Luiz Nelio Henderson Guedes de Oliveira, D.Sc.

Nova Friburgo
2010

Juan Diego Cardoso Brêttas

Geração de meios porosos fractais com uma nova equação do tipo Kozeny-Carman

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de mestre, ao programa de pós-graduação em Modelagem Computacional do Instituto Politécnico, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em 8 de fevereiro de 2010

Banca Examinadora:

Prof. D.Sc. Luiz Nelio Henderson Guedes de Oliveira
(Orientador)
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Prof. D.Sc. Felipe Bastos de Freitas Rachid
Universidade Federal Fluminense

Prof. D.Sc. Maria Laura Martins Costa
Universidade Federal Fluminense

Prof. D.Sc. Marisa Cristina Guimarães Rocha
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Nova Friburgo
2010

DEDICATÓRIA

Dedico exclusivamente ao meu DEUS, o SENHOR dos
Exércitos por me dar condições de realizar este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Senhor DEUS de Israel, pela paciência, amor e misericórdia;

Agradeço à minha Família, especial, a Brenda e a Stephannie;

Agradeço aos colegas de mestrado;

Agradeço à Primeira Igreja Batista de Nova Friburgo;

Agradeço à Igreja Batista Central de Nova Friburgo;

Agradeço ao prof. Nélio Henderson;

Agradeço aos membros da banca examinadora;

Agradeço aos funcionários da biblioteca do IPRJ pela solicitude e competência.

“Quando o SENHOR restaurou a sorte de Sião, ficamos com quem sonha.”

Salmo 126:1.

Filho meu, não rejeites a disciplina do SENHOR, nem te enfades da sua repreensão. Porque o SENHOR repreende a quem ama, assim como o pai ao filho a quem quer bem.

Provérbios 3:11-12.

RESUMO

BRÊTTAS, Juan Diego Cardoso. Geração de meios porosos fractais com uma nova equação do tipo Kozeny-Carman. 2010. 77 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2010.

A relação entre porosidade e permeabilidade desperta o interesse de pesquisadores e engenheiros por causa de suas diversas aplicações. Tais como na utilização de filtros, materiais pouco permeáveis, reservatórios naturais, etc. Ao longo do século XX, diversos trabalhos propondo tal relação foram apresentados na literatura e grande parte desses trabalhos desenvolvem modelos baseados na equação clássica de Kozeny-Carman. Nesta dissertação, propomos um modelo mais robusto que a formulação clássica de Kozeny-Carman, ou seja, que não apresenta as limitações dessa equação clássica. Além disso, um estudo baseado na Teoria dos Meios Fractais indica que o modelo estudado, nesta dissertação, generaliza diversas equações que fornecem a relação entre porosidade e permeabilidade. Por fim, será mostrado que o modelo proposto é capaz de descrever a relação entre porosidade e permeabilidade de diversos materiais porosos de natureza fractal.

Palavras-chave: Kozeny-Carman; Porosidade; Permeabilidade; Meio Fractal.

ABSTRACT

The relationship between porosity and permeability attracts the attention of researchers and engineers because of their various applications. Such as in utilization of filters, waterproof materials, natural reservoirs, for example. Throughout the twentieth century, several works proposed in the literature they study the relation porosity-permeability, and much of this works they develop models based on the classical equation of Kozeny-Carman. In this dissertation, we propose a model more robust than the classical formulation of Kozeny-Carman, ie, that does not have the limitations of the equation classical. Furthermore, a study based on the Theory of the Media Fractals indicates that the model studied in this dissertation provide the relationship between porosity and permeability of several models presented in the literature . Finally, it will shown that the model proposed is able to describe the relationship between porosity and permeability of porous materials of various fractal nature.

Keywords: Kozeny-Carman; Porosity; Permeability; Fractal Media.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Cinco estágios usados na construção de S , Quadrado de Sierpinski.	23
Figura 5.1	Estrutura fractal constituída de esferas num arranjo triangular.	37
Figura 8.1	Ajuste de dados experimentais de amostras consideradas previamente por David (DAVID et al., 1994).	56
Figura 8.2	Ajuste de dados experimentais de amostras consideradas previamente por Rodriguez (RODRIGUEZ et al., 2004).	57
Figura 8.3	Ajuste de dados experimentais de amostras consideradas previamente por Yu e Lee (YU; LEE, 2002).	58
Figura 8.4	Ajuste de dados experimentais de amostras consideradas previamente por Shih e Lee (SHIH; LEE, 1998).	59
Figura 8.5	Campo de permeabilidade heterogêneo do arenito de Adamswiller com porosidade num único intervalo.	63
Figura 8.6	Campo de permeabilidade heterogêneo do arenito de Adamswiller com três camadas distintas.	64

Figura 8.7 Campo de permeabilidade heterogêneo do Arenito de Adamswiller com porosidade suavizada.	65
Figura 8.8 Campo de permeabilidade heterogêneo do arenito de Rothbach com três camadas distintas.	66
Figura 8.9 Campo de permeabilidade heterogêneo do arenito de Rothbach com três camadas distintas.	67
Figura 8.10 Campo de permeabilidade heterogêneo do Arenito de Rothbach com porosidade suavizada.	68

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos romanos

a	Parâmetro
a_{ik}	Número real
A	Área da seção transversal uniforme
A_p	Área da seção transversal aberta
A_s	Área da superfície intersticial
atm	Abreviação para atmosfera(unidade de pressão)
b_{ik}	Número real
B_λ	Conjunto aberto
B_λ	Subconjuntos
$\{B_\lambda\}$	Cobertura
$B(x_i, r_i)$	Bola aberta
$\overline{B(x_i, r_i)}$	Bola fechada
c	Coefficiente de Kozeny
C	Conjunto compacto
C_f	Coefficiente do modelo de Xu e Yu
C_p	Coefficiente fractal
C	Parâmetro empírico
cm	Abreviação para centímetro(unidade de comprimento)
cp	Um centésimo de Poise(unidade de viscosidade)
d	Darcy(unidade de permeabilidade)
d	Diâmetro da partícula
d	Dimensão

D_h	Diâmetro de um tubo capilar tortuoso
D	Dimensão fractal
D_f	Parâmetro fractal
D_p	Expoente fractal
D_Γ	Parâmetro fractal
D_T	Parâmetro
f_i	Volume fracionário da i -ésima fração
f_s	Fator de forma de área
f_v	Fator de forma de volume
I_k	Sequência do conjunto de Cantor
I_k	Sequência por subconjuntos compactos
k	Permeabilidade
L	Comprimento do material poroso
L_h	Comprimento da tortuosidade do tubo capilar
L_t	Comprimento do caminho tortuoso seguido pelo fluido
m	Massa da amostra
m	Número real
M_b	Superfície específica do material poroso
M_p	Área da superfície intersticial
M_v	Área da superfície por unidade de volume do poro
n	Quantidade de tubos capilares tortuosos
n	Parâmetro Empírico
$N(r)$	Número de bolas fechadas
p	Lei de Escala Fractal
P_1	Pressão inicial
P_2	Pressão final
q	Volume do fluido por unidade de tempo
r	Raio dos grãos esféricos do material poroso
r	Raio da bola (aberta ou fechada)

r_i	Raio da bola (aberta ou fechada)
r_i	Raio da esfera
R_h	Raio do tubo hidráulico médio
V_a	Volume do recipiente contendo a amostra
V_b	Volume do recipiente vazio
V_p	Volume do poro efetivo
V_s	Volume do sólido
V_t	Volume total da amostra
x_i	Centro da bola
X	Conjunto Compacto

Símbolos gregos

ϕ	Porosidade
ϕ_0	Porosidade inicial
ϕ_1	Porosidade final
β	Parâmetro empírico
η	Parâmetro da Equação de Kozeny-Carman Generalizada
ξ	Parâmetro da Equação de Kozeny-Carman Generalizada
ζ	Parâmetro da Equação de Kozeny-Carman Generalizada
λ_{max}	Diâmetro máximo do poro
γ	Parâmetro empírico
ρ_B	Densidade da amostra
ρ_s	Densidade do sólido na amostra
τ	Tortuosidade
μ	Viscosidade do fluido
ΔP	Diferença tomada nas extremidades do meio poroso
Ω	Conjunto compacto arbitrário
Γ	Parâmetro de interconectividade

Outros símbolos

∞ Infinito

$\| \ \|$ Norma em \mathbb{R}^n

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	MEIOS FRACTAIS	17
2.1	Conceito de Fractal	17
2.2	Conjunto Compacto	18
2.3	Dimensão Fractal	23
3	MEIOS POROSOS	26
3.1	Material Poroso	26
3.2	Porosidade	26
3.3	Tortuosidade	27
3.4	Permeabilidade	27
3.5	Lei de Darcy	28
4	EQUAÇÃO DE KOZENY-CARMAN	30
5	EQUAÇÃO DE KOZENY-CARMAN GENERALIZADA ..	35
5.1	Referências de Algumas Generalizações	35
5.2	Identificação de Duas Leis de Escala Fractais em Meios Porosos	36
5.3	Dedução da Equação de Kozeny-Carman Generalizada	38
6	GENERALIZANDO OUTRAS FORMULAÇÕES	42

7	O PROBLEMA DE AJUSTE DE PARÂMETROS	47
7.1	Descrição do Problema.....	47
7.2	Algoritmo de Evolução Diferencial	48
7.3	Parâmetros Utilizados	52
8	RESULTADOS	53
8.1	Verificação e Validação.....	53
8.2	Representações Gráficas de Modelos Fractais.....	60
9	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	69
9.1	Conclusões.....	69
9.2	Perspectivas	71
	REFERÊNCIAS	
	ÍNDICE	

1 INTRODUÇÃO

Uma grande variedade de materiais naturais e artificiais podem ser classificados como um meio poroso. Dentre os diversos materiais temos, por exemplo, rochas, fibras naturais e sintéticas, espumas, borracha, arenito, rims, fígado, cerâmica, filtros industriais e domésticos.

A diversidade de meios porosos motiva engenheiros e pesquisadores a investigarem as principais propriedades de tais meios. Por isso, na caracterização e estudo das propriedades de materiais porosos, uma possível relação existente entre a porosidade e a permeabilidade é considerada de grande importância.

A relação entre porosidade e permeabilidade foi estudada inicialmente por Kozeny-Carman (KOZENY, 1927; CARMAN, 1937). Contudo, por causa das suas limitações, muitos modelos tem sido apresentados na literatura com a finalidade de atenuar tais restrições. Das possíveis limitações da equação de Kozeny-Carman (THOMPSON, 1991), podemos citar:

- a. meios porosos cuja área da superfície dos poros é muito pequena, isto é, porosidade baixa;
- b. meios porosos cuja estrutura dos poros não contribui para o fluxo;

- c. quando grandes volumes de fluido atravessam poros pequenos provocam o aumento da porosidade sem aumentar a permeabilidade.

A presente dissertação tem por objetivo desenvolver um modelo que relacione a permeabilidade com a porosidade via a teoria dos meios fractais. O emprego de uma teoria de fractais tem se tornado comum na literatura e tem sido abordada por vários autores que desenvolveram modelos baseados na equação clássica de Kozeny-Carman considerando meios porosos como objetos fractais (MANDELBROT, 1982; SAHIMI, 1995).

A fim de validar o modelo apresentado aqui, mostramos que o mesmo é capaz de descrever a relação entre porosidade e permeabilidade de vários tipos de materiais porosos, cujos dados experimentais estão disponíveis na literatura.

Como veremos, o modelo proposto neste trabalho generaliza vários modelos encontrados na literatura, e por isso o chamaremos de equação de Kozeny-Carman generalizada.

2 MEIOS FRACTAIS

2.1 Conceito de Fractal

Nas últimas décadas, o aspecto de muitos sistemas com importância na ciência e tecnologia tem sido caracterizado usando o conceito de fractal introduzido por Mandelbrot (MANDELBROT, 1982). Este conceito está relacionado com a similaridade entre formas geométricas de alguns conjuntos, quando observados em diferentes escalas. Em outras palavras, tal estrutura geométrica é denominada auto-similar e o conjunto em estudo é chamado de fractal (MANDELBROT, 1982). Por conseguinte, a auto-similaridade e a invariância de escalas de um conjunto fractal implica que as partes desse conjunto são remanescentes do todo (SAHIMI, 1995).

Existem conjuntos que podem ser fractais apenas para um determinado intervalo de valores escalares. Contudo, se um conjunto não é fractal, para qualquer intervalo de valores escalares, então ele é considerado um conjunto euclidiano. Uma linha reta, um quadrado e uma esfera são conjuntos euclidianos.

2.2 Conjunto Compacto

Nesta seção, nosso objetivo é compreender a topologia de um conjunto compacto, por isso, vamos estudá-lo utilizando algumas propriedades clássicas da análise matemática (LIMA, 2006b).

Definição 2.2.1 (Conjunto Compacto) *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito compacto quando for limitado e fechado.*

Com a finalidade de apresentar alguns resultados importantes de conjuntos compactos, são considerados dois teoremas abaixo:

Teorema 2.1 *Uma sequência (x_k) em \mathbb{R}^n converge para todo $a = (a_1, \dots, a_n)$ se, e somente se, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, existe $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$, isto é, cada coordenada de x_k converge para a coordenada correspondente de a .*

Demonstração: Do fato que $|x_{ki} - a_i| \leq |x_k - a|$, então temos $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Também vale a recíproca, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$, garante que dado $\epsilon > 0$, existem k_1, \dots, k_n , naturais, sendo que $k > k_i \Rightarrow |x_{ki} - a_i| < \epsilon$. Considere um $k_0 = \max \{k_1, \dots, k_n\}$. Então $k > k_0 \Rightarrow |x_k - a| = \max \{x_{ki} - a_{ai}\} < \epsilon$. Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$.

Teorema 2.2 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada em \mathbb{R}^n possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Primeiramente, mostraremos o teorema em \mathbb{R} e em seguida estenderemos, por indução, para o \mathbb{R}^n . Assim, considere uma sequência limitada x_k e defina $x_{k1} = x_1$, dessa forma, $x_k \in [a_1, b_1], \forall k$.

Seja $M_1 = \frac{b_1 - a_1}{2}$ o ponto médio entre a_1 e b_1 . Também sabemos que $[a_1, b_1] = [a_1, M_1] \cup [M_1, a_1]$. Assim, podemos afirmar que existe pelo menos um destes intervalos com a propriedade que x_k pertence a ele infinitas vezes. Dentre estes, escolha um intervalo e defina x_{k2} como qualquer elemento da sequência que pertence ao intervalo escolhido, contando que $k_2 > k_1$. Se o intervalo escolhido fica à direita, então defina: $a_2 = M_1$ e $b_2 = b_1$. Caso contrário escolha: $a_2 = a_1$ e $b_2 = M_1$.

Repita o processo descrito, anteriormente, de forma recursiva, para obter uma sequência de intervalos $[a_k, b_k]$ e de pontos x_{kn} . Daí teremos um intervalo $x_{kn} \in [a_k, b_k]$ com

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}, \quad (2.1)$$

ou seja,

$$b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \quad (2.2)$$

onde: $a_k \geq a_{k-1}$ e $b_k \geq b_{k-1}$.

Podemos concluir que a_k é uma sequência crescente e limitada superiormente por b_1 . Portanto, converge para um limite a . Por outro lado, b_k é uma sequência decrescente e limitada inferiormente por a_1 , por isso, também converge para um limite b . Vale observar que a Eq.(2.2) tende a zero, logo $a = b$. Como

$a_k \geq x_{kn} \geq b_k$, do teorema do confronto, segue que x_{kn} converge para o mesmo limite.

Se o resultado vale para \mathbb{R}^m , onde $m = 1$. Então, dada uma sequência em \mathbb{R}^{m+1} , temos que as coordenadas de 1 a m estão no \mathbb{R}^m , portanto existe uma subsequência convergente para estas coordenadas. A $m + 1$ -ésima coordenada desta subsequência está em \mathbb{R} , o que garante que existe uma sub-sub-sequência que converge para esta última coordenada. Agora é fácil ver que esta sub-sub-sequência converge para todas as coordenadas, logo converge em \mathbb{R}^{m+1} . Isto conclui a demonstração.

Devido ao Teorema de Bolzano-Weierstrass, pode-se mostrar que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos $x_k \in X$ possui uma subsequência que converge para um ponto de X . Seguem, as seguintes propriedades:

- i. Se X_1, \dots, X_p são compactos no \mathbb{R}^n então $X_1 \cup \dots \cup X_p$ é compacto.
- ii. A interseção de uma família qualquer de compactos X_λ é um conjunto compacto.
- iii. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são compactos então o produto cartesiano $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é compacto.

Um exemplo clássico de fractal foi estudado por Cantor (CANTOR, 1884). Considere uma sequência I_k formada por subconjuntos compactos do

intervalo $[0, 1]$, dada por:

$$I_0 = [0, 1], \quad (2.3)$$

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad (2.4)$$

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \quad (2.5)$$

etc. Note que I_k é uma união disjunta de 2^k intervalos compactos e qualquer um desses intervalos tem tamanho 3^{-k} . Além disso, I_k é obtido de I_{k-1} com centros em sub-intervalos fechados de comprimento $3^{-(k-1)}$. O conjunto de Cantor é definido por

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \quad (2.6)$$

Como $[a_{ik}, b_{ik}]$ é um intervalo compacto da união disjunta que constitui o conjunto I_k , então podemos mostrar que

$$C \cap [a_{ik}, b_{ik}] = 3^{-k}C + a_{ik}. \quad (2.7)$$

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto de \mathbb{R} com parâmetros $a, q \in \mathbb{R}$. Também definimos um conjunto A' obtido por uma transformação a partir do conjunto A , dada por

$$A' = qA + a = \{qx + a; x \in A\}. \quad (2.8)$$

Desta definição, a saber, a Eq.(2.8), podemos notar que o conjunto descrito pela Eq.(2.7)(um subconjunto compacto de C) é obtido por uma transformação similar do conjunto de Cantor, com parâmetros 3^{-k} e a_{ik} . Este fato indica que C definido na Eq.(2.6) é similar e não varia com mudança de escala. Portanto, observamos

que o conjunto de Cantor é (conforme Mandelbrot) um fractal.

Sierpinski (SIERPINSKI, 1916) mostrou que alguns subconjuntos compactos do \mathbb{R}^2 são análogos ao conjunto de Cantor. Afim de construirmos o quadrado de Sierpinski, denotado aqui por S , considere um quadrado com lado de tamanho unitário

$$S_0 = [0, 1] \times [0, 1]. \quad (2.9)$$

Divida S_0 em nove quadrados pequenos e remova o interior do centro da quadrado para gerar

$$S_1 = S_0 - ((1/3, 2/3) \times (1/3, 2/3)). \quad (2.10)$$

Agora, dividimos cada um dos oito quadrados remanescentes para obter S_2 , e assim por diante. Deste processo, obtemos os conjuntos encaixados

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k \supset \cdots \quad (2.11)$$

O quadrado de Sierpinski é a intersecção de todos os conjuntos desta sequência, isto é,

$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k. \quad (2.12)$$

Dessa forma, o quadrado de Sierpinski também é invariante em relação a escala, ou seja, é um fractal. Além disso, cada S_k é chamado de um estágio, pois compreende uma etapa do processo de construção do quadrado de Sierpinski, conforme podemos observar na figura 5.1:

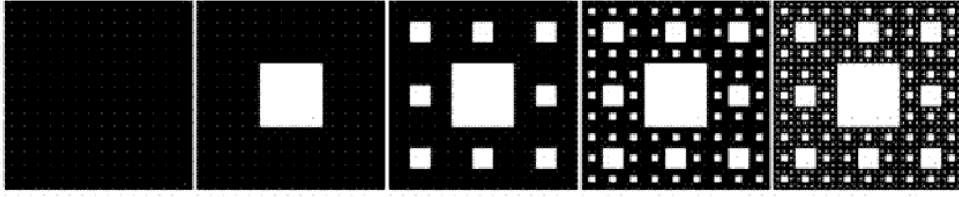


Figura 2.1: Cinco estágios usados na construção de S , Quadrado de Sierpinski.

2.3 Dimensão Fractal

A característica fundamental de um conjunto fractal  sua dimensão fractal, que é definida nesta seção. Aqui, consideramos somente subconjuntos do \mathbb{R}^n .

Uma cobertura $\{B_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  uma família constituída de subconjuntos $B_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\Omega \in \bigcap_{\lambda \in L} B_\lambda$, onde L é um conjunto de ndices. Se L é finito, então $\{B_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é chamado cobertura finita. Uma sub-cobertura  uma sub-família $\{B_\lambda\}_{\lambda \in L'}$, $L' \subset L$, que também  uma cobertura de Ω . Uma cobertura $\{B_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é dita aberta se, $\forall \lambda \in L$, B_λ é um conjunto aberto. O seguinte resultado caracteriza um conjunto compacto do \mathbb{R}^n (LIMA, 2006a).

Proposição(Heine-Borel): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto arbitrário compacto do \mathbb{R}^n . Toda cobertura aberta de Ω possui uma sub-cobertura finita.

No presente trabalho, o conjunto $B(x_i, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_i\| < r_i\}$ denota uma bola aberta de centro em $x_i \in \mathbb{R}^n$ e raio $r_i > 0$. A bola fechada correspondente  denotada por $\overline{B(x_i, r_i)} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_i\| \leq r_i\}$. Aqui, $\| \cdot \|$ representa uma norma em \mathbb{R}^n .

Dado um conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, construiremos uma cober-

tura aberta $\bigcup_{i \in L} B(x_i, r) \supset \Omega$, onde, $\forall i \in L$, $B(x_i, r)$ é uma bola aberta no \mathbb{R}^n . De acordo com a proposição acima, uma subcobertura aberta finita pode ser retirada de $\bigcup_{i \in L} B(x_i, r)$.

Seja $\bigcup_{i=1}^m B(x_i, r)$ esta subcobertura de Ω . Então, existe $\bigcup_{i=1}^m \overline{B(x_i, r)}$, que é uma cobertura finita e fechada de Ω , a união de m bolas fechadas de raio r contendo o compacto Ω .

Consideraremos $r > 0$ suficientemente pequeno e vamos supor que o compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto Euclidiano. Também consideramos que um número real d é a dimensão de Ω , se existe um número $C \in \mathbb{R}$ tal que $N(r)$, o número de bolas fechadas, é suficiente para cobrir Ω , então podemos escrever $N(r)$ da seguinte forma

$$N(r) = C \left(\frac{1}{r} \right)^d. \quad (2.13)$$

Conjuntos Euclidianos tal como linhas retas, quadrados, e esferas tem, respectivamente dimensão $d = 1$, $d = 2$ e $d = 3$. A relação mostrada na Eq.(2.13) é chamada lei de escala. Esta lei pode ser reescrita em uma forma equivalente,

$$d = \frac{\ln N(r) - \ln C}{\ln(1/r)}. \quad (2.14)$$

Desde que $r > 0$ seja suficientemente pequeno, o valor $\ln C$ na Eq.(2.14) pode ser negligenciado. Assim, a Eq.(2.14) é dada por

$$d = \frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)}. \quad (2.15)$$

Agora, segue a importante definição que generaliza a lei de escala fractal mostrada na Eq.(2.15).

Definição(Dimensão Fractal): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto do \mathbb{R}^n e $N(r)$ um número de bolas fechadas de raio r suficientes para cobrir Ω . Se existe um número $D \in \mathbb{R}$ tal que

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)}, \quad (2.16)$$

então D é a dimensão fractal de Ω .

Por exemplo, o conjunto de Cantor e o quadrado de Sierpinski tem dimensão fractal 0,6309 e 1,8928, respectivamente.

Por outro lado, a Eq.(2.16) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$N(r) \sim r^{-D}, \quad (2.17)$$

onde \sim significa uma proporcionalidade assintótica, isto é, válido para um r suficientemente pequeno (SAHIMI, 1995).

3 MEIOS POROSOS

3.1 Material Poroso

Um sólido que contém espaços vazios interligados, distribuídos de forma regular ou aleatória, é considerado um material poroso ou também chamado de meio poroso (COLLINS, 1961). Portanto, um meio poroso é dividido em duas partes: uma parte sólida, também chamada de matriz porosa, e outra que contém os espaços vazios chamada de poros (BEAR, 1972).

A escala relacionada com as dimensões dos poros é conhecida como escala microscópica, já a escala referente ao observador é chamada de macroscópica, tal escala se encontra na ordem de centímetros, metros ou até quilômetros. Qualquer propriedade do meio poroso medida na escala macroscópica é chamada de propriedade macroscópica.

3.2 Porosidade

A porosidade, denotada por ϕ , é definida como a razão do volume dos espaços vazios, V_s , de um meio poroso, pelo seu volume total, V_t . Observe que $\phi \in [0, 1]$ (BEAR, 1972). Dessa forma, trata-se de uma propriedade macroscópica.

Em meios porosos, a porosidade é uma propriedade muito importante pois por meio dela é possível entender a estrutura interna de um material poroso, e assim definir a forma com a qual esse material será utilizado ou explorado. O fato de através dos poros ocorrer a transferência de sólidos, líquidos, gases e atividade biológica, justifica o estudo dessa propriedade.

Pode-se considerar dois tipos de poros, um que forma uma fase contínua com o meio poroso, chamado interconectado e outro chamado de não interconectado ou isolado. Os poros isolados não podem contribuir para o transporte de massa através do meio poroso. Por isso, iremos restringir este estudo a meios porosos com poros interconectados.

3.3 Tortuosidade

A tortuosidade é uma propriedade definida pela razão entre o comprimento do caminho tortuoso seguido pelo fluido L_t e o comprimento do meio poroso L . Tal propriedade será denotada por $\tau = L_t/L$, também vale lembrar que a tortuosidade é uma propriedade macroscópica.

3.4 Permeabilidade

A permeabilidade é uma propriedade macroscópica que caracteriza a facilidade com que os fluidos podem escoar através do material poroso (BEAR, 1972). Segundo Dullien (DULLIEN, 1991), permeabilidade é a condutividade

de um meio poroso com respeito a percolação por um fluido Newtoniano. Tal propriedade foi descoberta experimentalmente por Darcy (DARCY, 1856), onde é mostrado que a permeabilidade é um parâmetro correlacionado com as propriedades do escoamento de um fluido.

3.5 Lei de Darcy

A equação que define a permeabilidade em termos de quantidades mensuráveis é chamada lei de Darcy (DARCY, 1856), a qual, para um escoamento na direção horizontal, pode ser enunciada como segue: considere um escoamento horizontal de um fluido com massa específica constante realizado em uma amostra de um material poroso de comprimento L na direção do escoamento, possuindo a área da seção transversal uniforme igual a A . Assim, a permeabilidade do material, denotada por k , é dada por

$$k = \frac{qL\mu}{A(\Delta P)} \quad (3.1)$$

onde q é o volume do fluido que atravessa a seção transversal de área A por unidade de tempo, $q = \frac{V}{\Delta t}$, $\Delta P = P_f - P_i$ é a diferença de pressão tomada nas extremidades da amostra do meio poroso (sendo P_i a pressão tomada de entrada do fluido e P_f a pressão tomada na saída) e μ é a viscosidade do fluido.

Da Eq.(3.1) pode-se notar que a permeabilidade possui dimensão de comprimento ao quadrado. Além disso, a unidade geralmente usada para medir a permeabilidade é o darcy, d , que é definido em função da Eq.(3.1), como segue: para

um material de 1 darcy de permeabilidade, uma diferença de pressão de $1atm$ deve produzir uma vazão igual a $1cm^3/s$ de um fluido com $1cp$ de viscosidade em uma amostra com formato com lados de $1cm$. Isto é,

$$darcy = \frac{(1cm^3/s) \cdot (1cp)}{(1cm^2) \cdot (1atm/cm)}. \quad (3.2)$$

4 EQUAÇÃO DE KOZENY-CARMAN

No processo de caracterização de materiais porosos, o qual é de interesse de pesquisadores e engenheiros, a propriedade de maior importância é a relação dada entre a porosidade e a permeabilidade. Apesar de existir métodos experimentais para o estudo de escoamento em uma amostra porosa, sabe-se que muitos deles podem danificar a amostra, principalmente se a amostra (em questão) apresenta uma estrutura frágil. Por meio de um modelo é possível realizar simulações de escoamentos em meios porosos sem causar qualquer dano a amostra. Assim, podemos compreender a importância de uma formulação que forneça uma relação dada por:

$$k = F(\phi), \quad (4.1)$$

onde F é uma função apropriada.

Um modelo muito conhecido que descreve a relação indicada na Eq.(4.1) foi concebido por Kozeny e Carman (KOZENY, 1927; CARMAN, 1937), a partir da analogia existente entre escoamentos em meios porosos e escoamentos através de um feixe de tubos capilares.

Na analogia de Kozeny e Carman, o volume poroso é descrito em termos do volume total dos tubos capilares. Assim, considera-se que o meio poroso é

constituído de n tubos capilares tortuosos de diâmetro D_h e o comprimento da tortuosidade dos tubos denotado por L_h (BEAR, 1972). Sabendo que a porosidade tem seu valor estimado em fração do volume total, o volume poroso pode ser expresso por

$$V_p = V_t \phi. \quad (4.2)$$

A Eq.(4.2) pode ser reescrita em termos dos n tubos capilares

$$V_p = n \frac{\pi D_h^2}{4} L_h. \quad (4.3)$$

Nesta analogia, a área da superfície intersticial total, denotada por M_p , é representada em termos da superfície intersticial total formada pelos n tubos capilares,

$$M_p = n \pi D_h L_h. \quad (4.4)$$

Note que ao compararmos Eq.(4.3) com Eq.(4.4), a área da superfície intersticial total também pode ser expressa por

$$n \pi D_h L_h = \frac{4 V_t \phi}{D_h}, \quad (4.5)$$

ou ainda,

$$M_p = \frac{4 V_t \phi}{D_h}, \quad (4.6)$$

ao igualarmos a Eq.(4.5) com Eq.(4.4), obtemos o diâmetro do tubo capilar tortuoso na forma

$$D_h = \frac{4 \phi}{M_b}, \quad (4.7)$$

onde $M_b = M_p/V_t$ denota a área da superfície intersticial total por unidade de

volume total denominada de superfície específica do material poroso.

Seja M_g a área da superfície intersticial total por unidade da matriz sólida expressa por

$$M_b = M_g(1 - \phi), \quad (4.8)$$

das equações (4.7) e (4.8), o diâmetro dos tubos capilares assume a seguinte forma

$$D_h = \frac{4}{M_g} \left(\frac{\phi}{1 - \phi} \right). \quad (4.9)$$

Também supomos que o material poroso possui grãos com formato esférico de raio denotado por r . Com esta hipótese, a área da superfície intersticial total por unidade de matriz sólida é expressa por

$$M_g = \frac{\pi D_r^2}{(1/6)\pi D_r^3}, \quad (4.10)$$

ao simplificarmos a Eq.(4.10) temos

$$M_g = \frac{6}{r}. \quad (4.11)$$

Por hipótese, consideraremos que o escoamento através do meio poroso é laminar em regime permanente e ocorre no feixe dos tubos capilares, dessa forma, sua vazão satisfaz a lei de Hagen-Poiseuille dada por

$$q = n \frac{\pi D_h^4}{128\mu} \frac{\Delta P}{L_h}, \quad (4.12)$$

para mais detalhes, veja, por exemplo, Whitaker (WHITAKER, 1981). Devido a vazão q satisfazer tanto a lei de Darcy, pois trata-se um escoamento em meios

porosos, quanto a lei de Hagen-Poiseuille, pela hipótese do modelo, podemos igualar as equações (3.1) e (4.12) obtendo

$$\frac{A}{n\pi D_h^2} k \frac{L_h}{L} = \frac{D_h^2}{128}. \quad (4.13)$$

A área da seção transversal do material poroso aberta para o escoamento, A_p , está relacionada com a área da seção transversal pela seguinte expressão,

$$A_p = A\phi, \quad (4.14)$$

ou ainda,

$$A_p = n\pi \frac{D_h^2}{4} \quad (4.15)$$

Das Eqs.(4.14) e (4.15), a seguinte relação é obtida

$$\frac{A}{n\pi D_h^2} = \frac{1}{4\phi}. \quad (4.16)$$

Ao aplicarmos a Eq.(4.16) e a definição de tortuosidade mostrada na Eq.(4.13), o diâmetro do tubo capilar pode ser escrito da seguinte forma

$$D_h = 4\sqrt{2\tau} \sqrt{\frac{k}{\phi}}. \quad (4.17)$$

E finalmente, a partir das Eqs.(4.9) e (4.17), obtemos a equação de Kozeny-Carman na forma proposta por Amaefule (AMAEFULE et al., 1993),

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{2\tau} M_g} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right), \quad (4.18)$$

afim de obtermos a equação de Kozeny-Carman em função do raio dos grãos

esféricos do material poroso e de sua tortuosidade, vamos substituir a Eq.(4.11) na Eq.(4.18). Assim, a equação de Kozeny-Carman pode ser expressa da seguinte maneira

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \frac{r}{6\sqrt{2\tau}} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right). \quad (4.19)$$

Em seguida, a Eq.(4.19) é reescrita tendo somente a porosidade e o coeficiente de Kozeny, c , do lado direito da equação,

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = c \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right), \quad (4.20)$$

onde

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\tau}M_g} = \frac{r}{6\sqrt{2\tau}} > 0. \quad (4.21)$$

Note que o modelo de Kozeny e Carman não é adequado para modelar um meio poroso impermeável, visto que o parâmetro definido na Eq.(4.21) nunca assume um valor nulo.

5 EQUAÇÃO DE KOZENY-CARMAN GENERALIZADA

5.1 Referências de Algumas Generalizações

Uma grande variedade de materiais naturais e artificiais podem ser classificados como meios porosos. Em virtude disso, engenheiros e pesquisadores que trabalham com a caracterização de meios porosos investigam a existência da relação entre porosidade e permeabilidade de determinados tipos de materiais. Contudo, em vista de sua limitação prática, a equação de Kozeny-Carman tem sido frequentemente modificada. Das várias versões recentes encontradas na literatura podemos citar os trabalhos de Bourbié (BOURBIÉ et al., 1987), Koponen (KOPONEN et al., 1997), Mavko (MAVKO; NUR, 1997), Shih (SHIH; LEE, 1998), Bayles (BAYLES et al., 1989), Panda (PANDA; LAKE, 1994), Pape (PAPE et al., 2000), Rodriguez (RODRIGUEZ et al., 2004), Costa (COSTA, 2006), Xu (XU; YU, 2008), Yu (YU; LEE, 2002) e Henderson (HENDERSON, 2009).

5.2 Identificação de Duas Leis de Escala Fractais em Meios Porosos

Em general, uma propriedade geométrica p de um sistema fractal admite uma lei de escala fractal como mostrado na Eq.(2.17), dada, por exemplo, por

$$p = C_p \delta^{-D_p}, \quad (5.1)$$

onde C_p e D_p são chamados coeficiente fractal e expoente fractal de p , respectivamente. Aqui, como uma proposta prática, dado um sistema fractal, admitiremos que uma correlação $p = C_p \delta$ é uma lei de escala fractal da propriedade p se $\delta < 1$.

No modelo de Kozeny (KOZENY, 1927) em que o meio poroso é tratado como um feixe de tubos capilares a permeabilidade é expressa por

$$k = \frac{c_0 \phi^3}{M_b^2} \quad (5.2)$$

onde M_b é a superfície específica do material poroso, k denota a permeabilidade, ϕ denota a porosidade e c_0 é um parâmetro chamado de coeficiente de Kozeny, tal parâmetro varia de acordo com a forma geométrica dos canais no pacote (BEAR, 1972), que inclusive inclui algumas notas históricas.

A Eq.(5.2) mostra que a permeabilidade depende de $\frac{1}{M_b}$, desde que o sistema fractal possua propriedades como na Eq.(5.1). Caso o sistema possua esta propriedade, dado um meio poroso fractal, é razoável imaginar a existência de uma lei de escalas fractal para o parâmetro $\frac{1}{M_b}$. Bear (BEAR, 1972) mostra

que independente do arranjo de meios porosos constituídos de esferas, temos

$$\frac{1}{M_b} = \frac{1}{3 \sum_{i=1}^n f_i / r_i} (1 - \phi)^{-1} \quad (5.3)$$

onde f_i é a fração do volume de i -ésima fração de esferas, isto é,

$$f_i = \frac{\frac{4}{3}\pi r_i^3 n_i}{\sum_{i=1}^n \frac{4}{3}\pi r_i^3 n_i} \quad (5.4)$$

onde n_i identifica o número de esferas de raio r_i . Para ilustrar meios porosos constituídos de esferas, considerado a priori por Bear (BEAR, 1972), veja a figura abaixo:

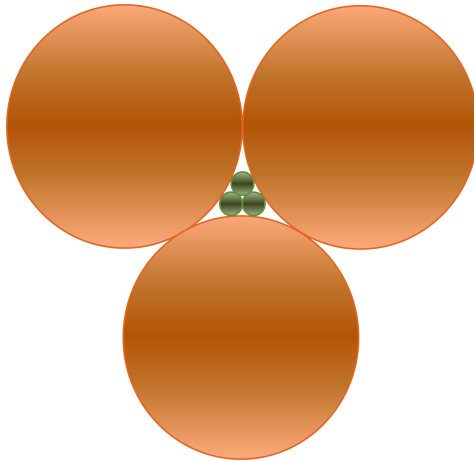


Figura 5.1: Estrutura fractal constituída de esferas num arranjo triangular.

Ao generalizarmos a Eq.(5.3), podemos considerar a existência do meio poroso fractal onde a propriedade M_b admite uma lei de escala fractal dada por

$$\frac{1}{M_b} = C_{1/M_b} (1 - \phi)^{-D_{1/M_b}} . \quad (5.5)$$

Na Eq.(5.5), $C_{1/M_b} > 0$ e $D_{1/M_b} \geq 0$ são o coeficiente fractal e o expoente fractal

de $1/M_b$, respectivamente.

Por outro lado, investigações tem mostrado que a tortuosidade τ de alguns meios porosos admite um modelo bem definido. No caso de pacotes de grãos aleatórios de porosidade $\phi > 0,2$, Liu e Masliyah (LIU; MASLIYAH, 1996a, 1996b) recomendam

$$\tau = \phi^{-0,5} \quad (5.6)$$

No caso de meios porosos de porosidade $\phi < 0,45$, esses autores recomendam $1/\tau = 1,61\phi^{1,15}$. Esta correlação pode ser escrita explicitando a tortuosidade

$$\tau = \frac{1}{1,61}\phi^{-1,15}. \quad (5.7)$$

Portanto, para um meio poroso, é razoável assumir uma lei de escalas fractal como segue:

$$\tau = C_\tau \phi^{-D_\tau}, \quad (5.8)$$

onde $C_\tau \geq 0$ e $D_\tau \geq 0$ são o coeficiente fractal e expoente fractal de τ , respectivamente.

5.3 Dedução da Equação de Kozeny-Carman Generalizada

Agora, vamos apresentar uma dedução do modelo proposto aqui, o qual generaliza a equação de Kozeny-Carman. Como hipóteses básicas, consideramos que o material poroso fractal satisfaz as seguintes hipóteses:

1. A superfície específica admite uma lei de escala fractal, como indicada na Eq.(5.5);
2. A tortuosidade admite uma lei de escala fractal, como indicada na Eq.(5.8);
3. O meio poroso pode ser modelado como um pacote de n -tubos capilares não necessariamente de secção circular transversal. Como sugerido por Carman (CARMAN, 1937), o escoamento neste pacote de tubos hidráulicos é descrito por uma extensão da lei de Hagen-Poiseuille,

$$q = n f_v \frac{R_h^4}{\mu} \frac{\Delta P}{L_h} \quad (5.9)$$

onde R_h e L_h denota o raio e o comprimento do raio hidráulico médio(L_h é uma média do raio dos n -tubos capilares), e f_v é um fator de forma do volume. Se $f_v = \frac{16\pi}{128}$, recuperamos a clássica equação Hagen-Poiseuille para um pacote de tubos circulares.

4. O meio poroso admite um raio hidráulico dado por

$$R_h = \frac{\phi}{M_b}, \quad (5.10)$$

vale lembrar que M_b tem dimensão de área.

Utilizando as hipóteses estabelecidas acima, em seguida passaremos à dedução proposta neste trabalho. Das Eqs. (3.1) e (5.9) temos

$$\frac{A}{R_h^2} k\tau = n f_v R_h^2, \quad (5.11)$$

onde $\tau \equiv \frac{L_h}{L}$ é a tortuosidade do tubo hidráulico médio. Seja $A\phi$ a área da secção transversal do meio poroso aberta para o escoamento. Aqui, consideraremos,

$$A\phi = n f_s R_h^2, \quad (5.12)$$

onde f_s é o fator de forma da área. No caso de tubos circulares, por exemplo, temos simplesmente $f_s = \pi$.

A Eq.(5.12) pode ser reescrita como

$$\frac{A}{R_h^2} = \frac{n f_s}{\phi}, \quad (5.13)$$

mais ainda, das Eqs. (5.11) e (5.13) temos

$$R_h = f \sqrt{\tau} \sqrt{\frac{k}{\phi}}, \quad (5.14)$$

onde $f = \sqrt{\frac{f_s}{f_v}}$.

Desde que a hipótese (4) seja satisfeita, isto é, o raio hidráulico seja dado pela Eq.(5.10). Então a Eq.(5.14) passa a assumir a seguinte forma

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \frac{\phi}{f} \frac{1}{M_b} \sqrt{\frac{1}{\tau}} \quad (5.15)$$

Pelas hipóteses consideradas nas Eqs.(5.5) e (5.8), a Eq.(5.15) torna-se

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \frac{C_\tau^{-1/2} C_{1/M_b}}{f} \frac{\phi^{(D_\tau+2)/2}}{(1-\phi)^{D_{1/M_b}}}. \quad (5.16)$$

Finalmente, obtemos a equação de Kozeny-Carman generalizada a três parâmetros, dada por

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \xi \frac{\phi^{(\zeta+2)/2}}{(1-\phi)^\eta}, \quad (5.17)$$

onde $\zeta = D_\tau \geq 0$, $\eta = D_{1/M_b} > 0$ e $\xi = \left(C_\tau^{-1/2} \frac{C_{1/M_b}}{f} \right) \geq 0$.

6 GENERALIZANDO OUTRAS FORMULAÇÕES

A seguir, mostraremos que a equação de Kozeny-Carman generalizada à três parâmetros descrita no capítulo anterior, Eq.(5.17), é capaz de generalizar outras correlações existentes na literatura.

Seja c o coeficiente de Kozeny-Carman indicado na Eq.(4.20), tomando $\xi = c$, $\zeta = 0$, e $\eta = 1$ na Eq.(5.17) obtemos a equação de Kozeny-Carman clássica $\sqrt{\frac{k}{\phi}} = c \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right)$.

Da observação de que a área da secção transversal do meio poroso é fractal (BAYLES et al., 1989), propõem uma equação dada por

$$k = C \frac{\phi^{2+m}}{(1-\phi)^2}, \quad (6.1)$$

onde C é um fator semelhante ao coeficiente de Kozeny-Carman e $1 < m < 4$ é o chamado expoente de Archie (COSTA, 2006). Esta equação pode ser reescrita sob a forma

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \sqrt{C} \frac{\phi^{(1+m)/2}}{(1-\phi)}. \quad (6.2)$$

Considerando na Eq.(5.17) os valores $\xi = \sqrt{C}$, $\zeta = m - 1$ e $\eta = 1$, recuperamos a equação obtida por Bayles (BAYLES et al., 1989). Vale ressaltar

que, neste caso, $0 < \zeta < 3$.

Pape (PAPE et al., 2000) deduz uma equação para arenito. A equação obtida por esses autores assume a forma:

$$k = \frac{\phi r^2}{8\Gamma^2} \left(\frac{2\phi}{3\Gamma^2(1-\phi)} \right)^{\frac{2}{D-1}}. \quad (6.3)$$

Na Eq.(6.3), r é o raio dos grãos, D é uma dimensão fractal, e Γ o parâmetro que representa a interconectividade dos poros. A Eq.(6.3) pode ser reescrita sob a forma

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \frac{r}{2\sqrt{2}\Gamma} \left(\frac{2}{3r^2} \right)^{\frac{1}{D-1}} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right)^{\frac{1}{D-1}}, \quad (6.4)$$

para $1 < D \leq 2$, podemos atribuir à Eq.(5.17) $\zeta = \frac{[2(2-D)]}{(D-1)}$, $\eta = \frac{1}{D-1}$ e $\xi = \left[\frac{r}{2\sqrt{2}\Gamma} \right] \left(\frac{2}{3r^2} \right)^{\frac{1}{D-1}}$. Portanto, com os parâmetros apresentados, usando a equação generalizada Eq.(5.17) obtemos o modelo desenvolvido por Pape (PAPE et al., 2000) mostrado na Eq.(6.4), com $1 < D \leq 2$.

Civan (CIVAN, 2001) deduziu a seguinte equação para meios porosos fractais:

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \gamma \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right)^{\beta}, \quad (6.5)$$

onde γ e β são parâmetros empíricos. Tomando $\xi = \gamma$, $\eta = \beta$ e $\zeta = 2(\beta - 1)$ na Eq.(5.17), notemos que a equação de Civan é um caso particular da equação de Kozeny-Carman generalizada a três parâmetros, Eq.(5.17), onde $\beta \geq 1$.

Um modelo que fornece a relação porosidade-permeabilidade de fibras naturais e de vidro pode ser encontrado nos trabalho de Shih (SHIH; LEE, 1998)

e Rodriguez (RODRIGUEZ et al., 2004), tal modelo é expresso por

$$k = \frac{\phi^{n+1}}{C(1-\phi)^n}, \quad (6.6)$$

aqui, n e C são parâmetros empíricos. A Eq.(6.7) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{C} \left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)^{n/2}}. \quad (6.7)$$

Considerando na Eq.(5.17) $\xi = \frac{1}{\sqrt{C}}$, $\zeta = n - 2$ e $\eta = \frac{n}{2}$, recuperamos a equação obtida por Shih (SHIH; LEE, 1998) e Rodriguez (RODRIGUEZ et al., 2004), para $n \geq 2$.

Costa (COSTA, 2006) utiliza uma equação para meios porosos fractais dada por

$$k = c_0 \frac{\phi^m}{(1-\phi)}, \quad (6.8)$$

onde c_0 é um parâmetro semelhante ao coeficiente de Kozeny-Carman e $1 < m < 4$ é o expoente de Archie. Esta equação tem uma forma equivalente dada por

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \sqrt{c_0} \frac{\phi^{\frac{m-1}{2}}}{(1-\phi)^{1/2}}. \quad (6.9)$$

Então, tomando $\xi = \sqrt{c_0}$, $\eta = 1/2$ e $\zeta = m - 3$, podemos mostrar que a Eq.(6.9) é um caso particular da Eq.(5.17), onde $3 \leq m < 4$.

Usando geometria fractal, Xu e Yu (XU; YU, 2008) desenvolvem um modelo para meios porosos no qual k e ϕ obedecem a relação

$$k = C_f \lambda_{max}^2 \left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)^{\frac{1+D_f}{2}}. \quad (6.10)$$

Na Eq.(6.10), o coeficiente C_f é dado por

$$C_f = \frac{(\pi D_f)^{\frac{1-D_T}{2}} [4(2-D_f)]^{\frac{1+D_T}{2}}}{128(3+D_T-D_f)}, \quad (6.11)$$

onde D_f e D_T são parâmetros fractais, e λ_{max} é o diâmetro máximo do poro, que pode ser expresso como uma função de diâmetro da partícula d e da porosidade, como segue:

$$\lambda_{max} = d \sqrt{\frac{\phi}{1-\phi}}. \quad (6.12)$$

Considerando $C_f \geq 0$, e combinando as Eqs.(6.10) e (6.12), obtemos

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = d \sqrt{C_f} \frac{\phi^{\frac{D_T+1}{4}}}{(1-\phi)^{\frac{D_T+3}{4}}}. \quad (6.13)$$

Ao atribuímos à Eq.(5.17) os valores $\xi = d\sqrt{C_f}$, $\eta = \frac{D_T+3}{4}$ e $\zeta = \frac{D_T-3}{2}$, recuperamos a forma desenvolvida por Xu (XU; YU, 2008), para $D_T \geq 3$.

Bourbié (BOURBIÉ et al., 1987) propos uma equação apropriada para porosidade de baixo valor dada por

$$k = C\phi^n d^2. \quad (6.14)$$

Esta correlação também pode ser escrita por

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = d\sqrt{C}\phi^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \quad (6.15)$$

Sabendo que $\phi \in (0, 1)$, note que a série de potência $\sum_{s=0}^{+\infty} \phi^s$ converge e além disso temos:

$$\frac{1}{1-\phi} = 1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots. \quad (6.16)$$

Da Eq.(6.16) e da equação de Kozeny-Carman generalizada, Eq.(5.17), segue que

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \xi \phi^{(\zeta+2)/2} (1 + \phi + \phi^2 + \phi^3 + \dots)^\eta. \quad (6.17)$$

Ao considerarmos η e/ou ϕ suficientemente pequeno, obtemos a aproximação

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \xi \phi^{(\zeta+2)/2}. \quad (6.18)$$

Neste caso, considerando na Eq.(6.18) os valores $\xi = \sqrt{Cd}$ e $\zeta = n - 3$, obtemos a equação proposta por Bourbié (BOURBIÉ et al., 1987), mostrada na Eq.(6.15), para $n \geq 3$.

A Eq.(6.16) também descreve uma lei de potência que pode ser escrita como uma soma finita:

$$\sqrt{\frac{k}{\phi}} = \xi \phi^{(\zeta+2)/2} (1 + \phi^2 + \phi^3 + \dots + \phi^s)^\eta, \quad (6.19)$$

para algum inteiro $s \geq 0$, para mais detalhes sobre esse tipo de modelo, veja Henderson (HENDERSON, 2009).

7 O PROBLEMA DE AJUSTE DE PARÂMETROS

7.1 Descrição do Problema

O modelo que generaliza a equação de Kozeny-Carman, Eq.(5.17), fornece uma relação existente entre porosidade e permeabilidade de diversos tipos de materiais porosos, contudo, na prática é necessário estimar os valores dos três parâmetros que o modelo apresenta: ζ , η e ξ . Vale lembrar que $\xi = \left(C_\tau^{-1/2} \frac{C_{1/M_b}}{f} \right) \geq 0$, possui um significado físico na teoria de meio porosos fractais, da mesma forma que $\eta = D_{1/M_b} > 0$ e $\zeta = D_\tau \geq 0$.

O valor dos três parâmetros, ζ , η e ξ , da equação de Kozeny-Carman generalizada varia de acordo com o tipo de amostra porosa. Assim, a partir de alguns valores medidos de porosidade e permeabilidade de uma determinada amostra podemos estimar o valor dos parâmetros para a amostra em questão. Dessa maneira, é possível obter uma função do tipo $k(\phi)$ que corresponde a equação de Kozeny-Carman generalizada para um dado material.

A estimativa de parâmetros do modelo que pretendemos verificar e validar foi realizada utilizando uma estratégia de otimização via metaheurística. O algoritmo de otimização global escolhido para a obtenção dos parâmetros foi o

algoritmo de evolução diferencial (STORN; PRICE, 1997). Vale ressaltar que não é nossa intenção utilizar métodos de otimização mais sofisticados para a obtenção dos parâmetros ζ , η e ξ , pois a Equação de Kozeny-Carman generalizada modela facilmente a relação porosidade e permeabilidade de meios porosos de natureza fractal, como veremos no próximo capítulo.

7.2 Algoritmo de Evolução Diferencial

O algoritmo de Evolução Diferencial (DE) é um método direto de busca de pontos extremantes, sendo que, em seu processo de busca ocorre uma mutação, cruzamento e o processo de seleção de indivíduos ao longo de várias gerações, isto é, ao longo de várias iterações. Por isso, o algoritmo de Evolução Diferencial é considerado uma metaheurística ou, mais propriamente, um algoritmo do tipo evolucionário. Originalmente, o algoritmo DE foi desenvolvido para problemas de otimização global, por exemplo, como o problema abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } f = f(x) \\ x \in [a, b]^3 \subset \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

No problema de otimização, consideramos $f(x) = \sum_{i=1}^{np} [k(x, \phi_i) - \bar{k}(\phi_i)]^2$, onde $k(x, \phi_i)$ é a equação de Kozeny-Carman generalizada, Eq.(5.17), np é a quantidade de pontos experimentais, e $\bar{k}(\phi_i)$ são os dados experimentais obtidos a partir de materiais porosos. Os dados experimentais em questão, são informações de porosidade e permeabilidade, sendo que, para cada valor de porosidade existe

um valor para a permeabilidade da amostra porosa.

A seguir, trataremos das principais etapas do DE. Primeiramente, considere que uma população (com np indivíduos) é escolhida de forma aleatória. Em seguida, dentro de um loop, o processo iterativo é iniciado até que o critério de parada seja satisfeito.

Uma vez inicializado, o DE promove a mutação e recombina a população para gerar uma nova população, cuja quantidade de indivíduos é np . Na m -ésima mutação (veja o passo *c2* do algoritmo abaixo), o vetor de indivíduos mutantes é gerado para cada indivíduo i como segue

$$y_i = x_{r_1}^m + F \cdot (x_{r_2}^m - x_{r_3}^m), \quad (7.1)$$

onde r_1 , r_2 e r_3 são números inteiros gerados randomicamente, sendo 1, 2, 3 diferentes para cada índice i . Mais ainda, F é um fator de escala, geralmente um parâmetro entre $(0, 1)$, que controla a taxa na qual a população evolui. O primeiro vetor x_{r_1} é conhecido como vetor base.

Na mutação, o vetor base é alterado pela adição da diferença ponderada dos outros vetores com índices r_2 e r_3 , que fornece a direção de procura, este é o passo *c2* (veja o algoritmo abaixo).

Depois da etapa da mutação, passo *c3*, ocorre a troca por alguns dos indivíduos gerados, y_i , no passo anterior. Nessa etapa, o componente j do vetor

z_i é encontrado a partir de x_i e y_i de acordo com a regra abaixo:

$$z_{i,j} = \begin{cases} y_{i,j}, & \text{se } (rand(j)[0, 1] \leq CR) \text{ ou } j = rand(i)\{1, \dots, np\} \\ x_{i,j}^m, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $rand(j)[0, 1]$ é a j -ésima avaliação do número randômico gerado em $[0, 1]$, $CR \in [0, 1]$ é chamado de constante de cruzamento, que controla a quantidade de indivíduos que são copiados do vetor teste, z_i , e $rand(i)\{1, \dots, np\}$ é uma escolha aleatória em $\{1, \dots, np\}$. Note que a alternativa $j = rand(i)\{1, \dots, np\}$ assegura que ao menos uma componente receberá um elemento da mutação. Se $z_i \notin [a, b]$, então consideraremos $f(z_i) = f_{big}$, onde $f_{big} > 0$ é uma constante, suficientemente grande.

O passo d , no algoritmo DE, define a população da próxima geração da seguinte maneira: se o vetor z_i fornece um valor da função objetivo menor que x_i^m , então x_i^{m+1} passa a ser z_i . Caso contrário, o valor de x_i^m será mantido.

O parâmetro F pode ser visto como o tamanho do passo usado para produzir os mutantes y_i . Além disso, o parâmetro CR determina a probabilidade com que um indivíduo mutante é aceito. Por exemplo, se $CR \approx 1$, então o algoritmo DE modifica a população em cada iteração, independente da escolha do valor de F . Segue abaixo, o algoritmo Evolução Diferencial:

Algoritmo (DE)

Passo 1. Gera a população inicial: $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{np}^0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$

Passo 2. Avalie $f_i^0 = f(x_i^0), \forall i = 1, 2, \dots, np$

Passo 3. De $m = 0$ até m_{max} , faça

a. Determina $f_{best} = \min_{1 \leq i \leq np} \{f_i^{(m)}\}$ e $x_{best} = \operatorname{argmin}_{1 \leq i \leq np} \{f(x_i^m)\}$

b. Se $(f_{best} \leq \varepsilon)$ então o x_{best} foi encontrado. Senão vá para a etapa c

c. De $i = 1$ até np , faça

c1. Seleção de $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$ em $\{1, 2, \dots, np\}$

c2. (Mutação) Selecciona $y_i = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}$:

$$y_i = x_{r_1}^{(m)} + F \cdot (x_{r_2}^m - x_{r_3}^m)$$

c3. (Cruzamento) Gera o vetor teste $z_i = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}$:

De $j = 1$ até np , faça

$$z_{i,j} = \begin{cases} y_{i,j}, & \text{se } (\operatorname{rand}(j)[0,1] \leq CR) \text{ ou } j = \operatorname{rand}(i)\{1, \dots, np\} \\ x_{i,j}^m, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Fim do item (c3)

Fim do item (c)

d. (Seleção) De $i = 1$ até np , faça

Avalie $f(z_i)$ Se $(f(z_i) < f(x_i^m))$ então defina $x_i^{m+1} = z_i$ e $f_i^{m+1} = f(z_i)$.

Senão, defina $x_i^{m+1} = x_i^m$ e $f_i^{m+1} = f_i^m$

Fim do item (d)

Fim do Passo 3

Fim do Algoritmo

7.3 Parâmetros Utilizados

Na execução do algoritmo de evolução diferencial, o fator de escala foi de 0,5, isto é, $F = 0,5$, dessa forma o algoritmo avança 50% na direção de busca. O que proporciona a geração da população de mutantes mais cuidadosa, sem tornar a busca lenta. Se o fator de escala for alto, por exemplo, $F = 0,8$, o algoritmo pode realizar muitas execuções até encontrar o mínimo da função objetivo.

Com relação a constante de cruzamento, nos primeiros testes utilizou-se $CR = 0,9$. Contudo, verificou-se que ao longo das gerações a alta dinâmica do cruzamento provoca uma população composta apenas por mutantes. Caso, a constante de cruzamento seja baixa, por exemplo, $CR = 0,2$, ao longo das gerações a dinâmica do código dependerá somente do gerador randômico. O que não é desejado, principalmente se, em algum momento, a direção de busca estiver correta. A fim de minimizar a função objetivo do problema proposto, é necessário um equilíbrio entre o gerador randômico e a direção de busca, por meio de vários testes a constante de cruzamento escolhida foi de 60%, isto é, $CR = 0,6$. O critério de parada adotado foi de $\varepsilon < 10^{-5}$.

A quantidade de indivíduos np varia de acordo com a quantidade de pontos $(\phi, k(\phi))$ fornecidos em cada amostra, e os indivíduos estão entre $a = 0$ e $b = 10$. Os indivíduos são os possíveis valores de ζ, η e ξ , apresentados na Eq.(5.17), f_{best} é o valor para $k(\phi)$ com menor resíduo. O valor de f_{best} é gerado por x_{best} que são os parâmetros ζ, η e ξ que desejamos estimar.

8 RESULTADOS

Neste capítulo, mostramos que a equação de Kozeny-Carman generalizada, Eq.(5.17), é capaz de descrever a relação entre porosidade e permeabilidade a partir de dados experimentais de diferentes materiais porosos de natureza fractal.

8.1 Verificação e Validação

A variação da permeabilidade durante a compactação de arenito sob a pressão foi estudada por David (DAVID et al., 1994) . Em várias amostras, estes pesquisadores observam a existência de uma pressão crítica, que determina, essencialmente, quando inicia o colapso de poros e esmagamento de grãos.

A Fig.8.1 mostra que a equação de Kozeny-Carman generalizada, Eq.(5.17), é capaz de ajustar diferentes relações entre porosidade e permeabilidade em arenito sobre a pressão crítica do processo de compactação estudado por David (DAVID et al., 1994).

Na Fig.8.1 três tipos amostras de arenito são testadas: arenito de Rothback, arenito de Berea, arenito de Adamswiller. Utilizou-se uma amostra do arenito de Rothback abaixo da pressão crítica de compactação e o arenito de Adamswiler com uma amostra acima da pressão crítica de compactação. A equa-

ção de Kozeny-Carman foi validada com amostras de arenito de Berea acima e abaixo da pressão crítica de compactação, sendo que a equação clássica de Kozeny-Carman não reproduz a relação porosidade-permeabilidade do arenito de Berea acima da pressão crítica de compactação.

Rodriguez (RODRIGUEZ et al., 2004) apresenta diversos tipos de dados experimentais como, por exemplo, fibra de vidro OCFM8610, fibras de sisal e fibra de vidro unidimensional CoFAB-A0108. A partir dos resultados gerados com nosso ajuste de dados, notamos que a equação de Kozeny-Carman generalizada reproduz a relação entre porosidade e permeabilidade dos dados experimentais de Rodriguez, como pode ser visto na Fig.8.2. Também, vale ressaltar que o modelo apresentado nesta dissertação descreve de perfeitamente a relação porosidade-permeabilidade da fibra de vidro unidimensional CoFAB-A0108 e nas outras fibras o erro é insignificante.

Os resultados obtidos da equação de Kozeny-Carman generalizada com dados experimentais (YU; LEE, 2002), são apresentados na Fig.8.3. Três tipos de fibras são consideradas: fibra bidirecional, fibra de tecido 4-harness e fibra de tecido liso. Novamente, notamos que a equação proposta é capaz de descrever tais dados experimentais. Note a precisão com que a equação de Kozeny-Carman generalizada descreve a relação porosidade-permeabilidade da fibra de tecido 4-harness e da fibra de tecido liso.

Shih e Lee (SHIH; LEE, 1998) também investigaram três tipos de fibras:

fibra para tapete plano, fibra U750 e fibra bidirecional (tapete). Conforme pode ser visto na Fig.8.4, a equação de Kozeny-Carman generalizada reproduz os dados experimentais de Shih e Lee, com boa concordância, em especial, a relação entre porosidade e permabilidade da fibra de tapete entrelaçado plano é perfeitamente descrita pelo modelo proposto nesta dissertação.

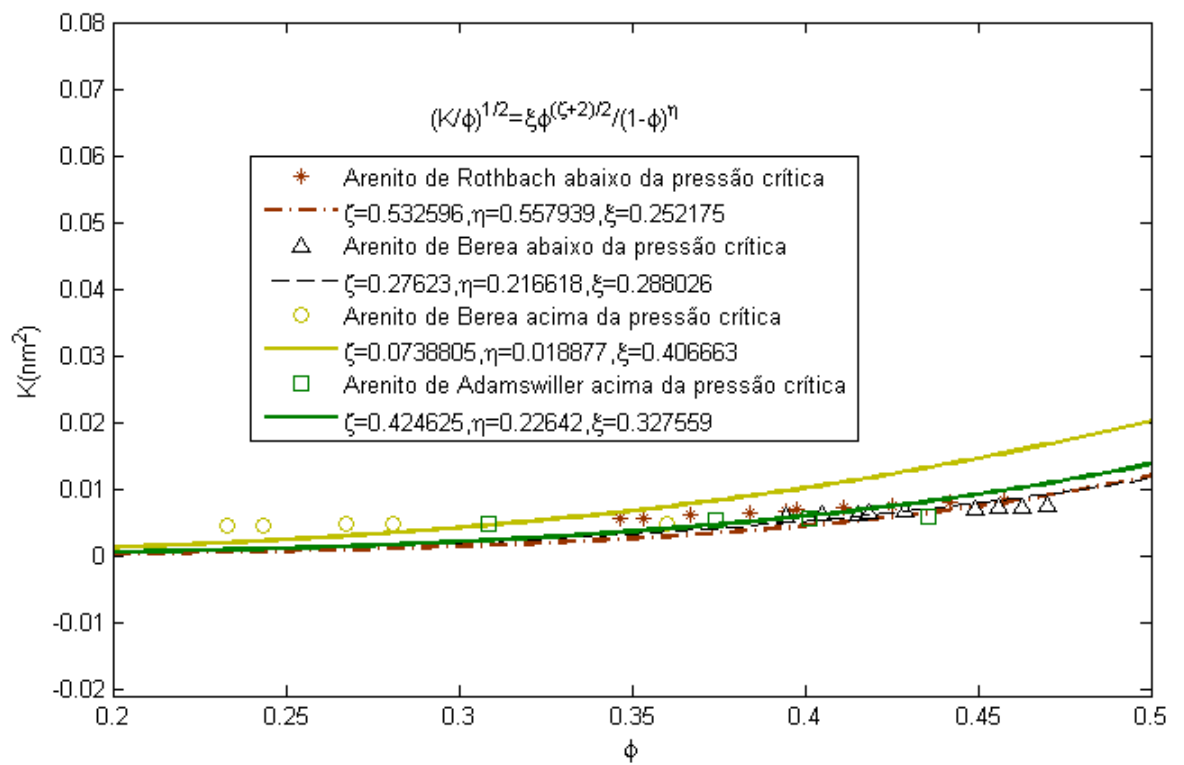


Figura 8.1: Ajuste de dados experimentais de amostras consideradas previamente por David (DAVID et al., 1994).

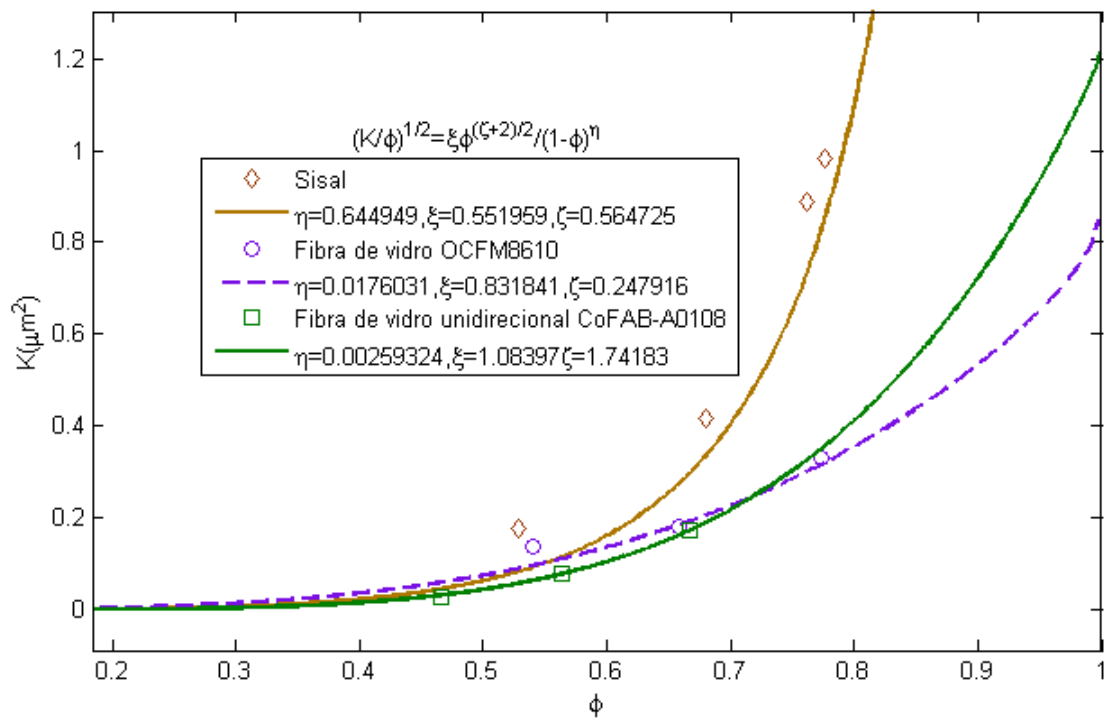


Figura 8.2: Ajuste de dados experimentais de amostras consideradas previamente por Rodriguez (RODRIGUEZ et al., 2004).

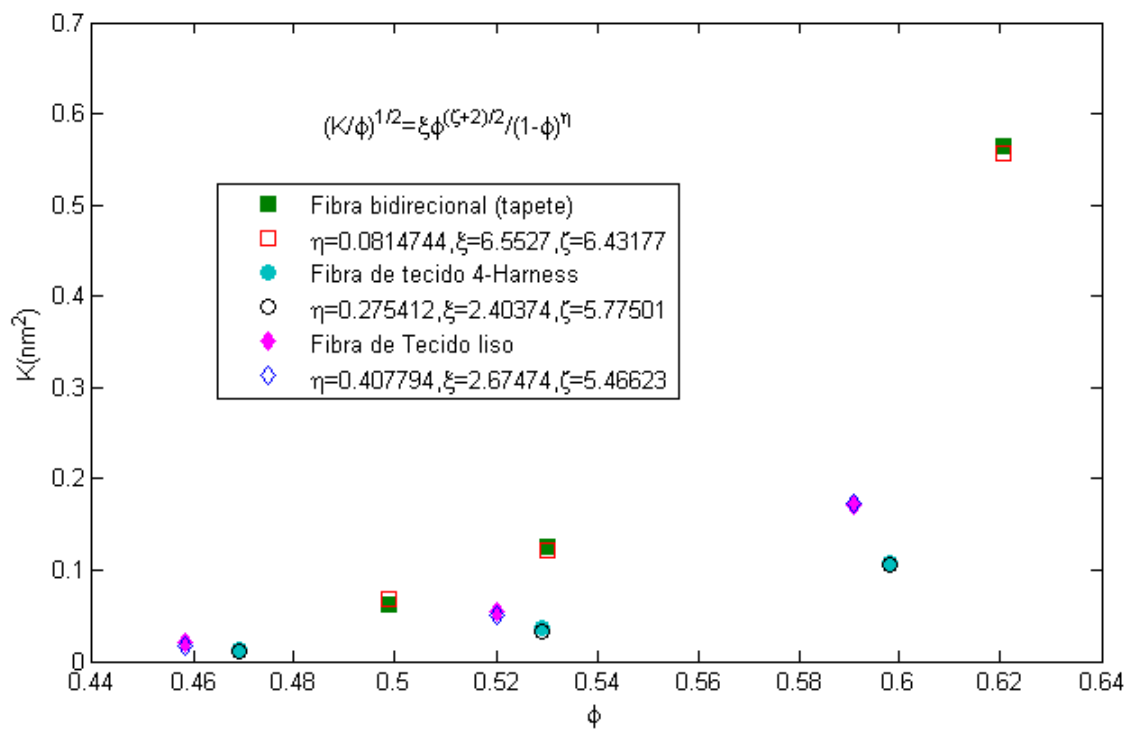


Figura 8.3: Ajuste de dados experimentais de amostras consideradas previamente por Yu e Lee (YU; LEE, 2002).

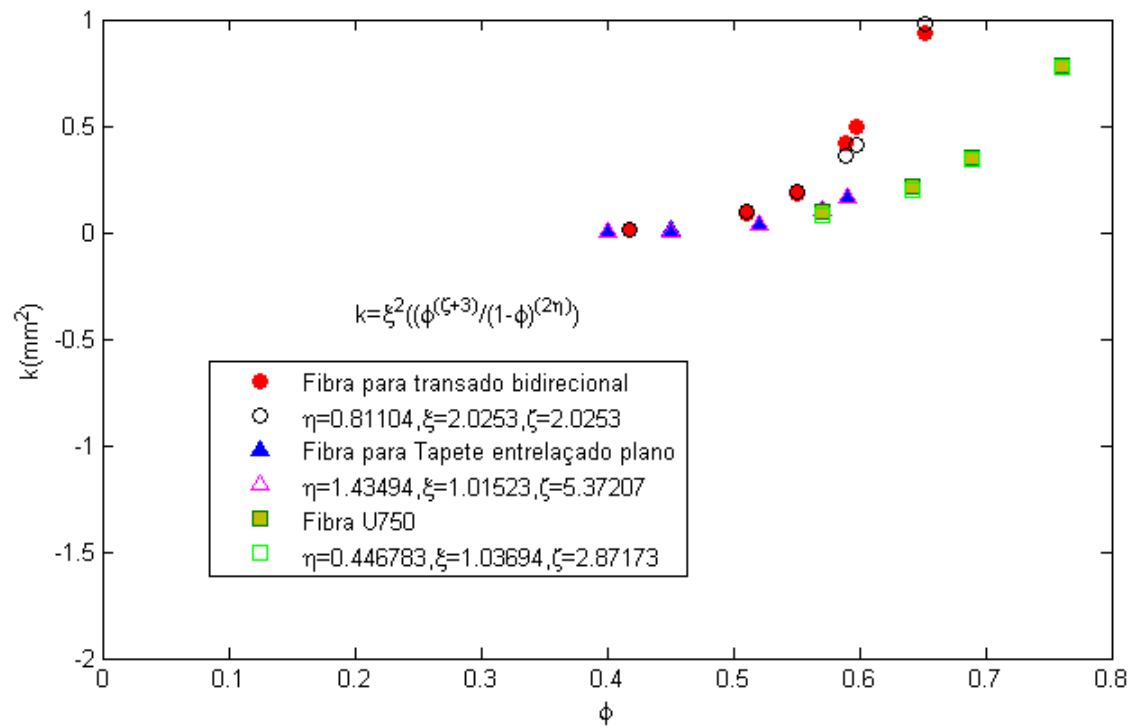


Figura 8.4: Ajuste de dados experimentais de amostras consideradas previamente por Shih e Lee(SHIH; LEE, 1998).

8.2 Representações Gráficas de Modelos Fractais

Com interesse de ilustrar uma aplicação, usando a equação de Kozeny-Carman generalizada, foram gerados os campos de permeabilidade de alguns materiais porosos heterogêneos bidimensionais de natureza fractal. Tal aplicação é utilizada na caracterização de materiais porosos retangulares.

Consideramos a relação entre porosidade e permeabilidade fornecida pela Eq.(5.17), isto é, $k = \xi^2 \frac{\phi^{\zeta+3}}{(1-\phi)^{2\eta}}$, para algum ξ, ζ , e η conhecido a priori. Em seguida, obtemos a permeabilidade a partir de valores de ϕ gerados randomicamente em um dado intervalo $[\phi_0, \phi_1]$, sendo que $[\phi_0, \phi_1] \subset (0, 1)$.

Uma grade regular foi construída para representar um material poroso no plano bidimensional, com a porosidade ϕ gerada randomicamente em cada bloco da grade. Assim, usando a equação de Kozeny-Carman generalizada, este procedimento fornece campos de permeabilidade heterogêneos em função de um campo de porosidade randômico num dado intervalo.

Aqui, usado a Equação de Kozeny-Carman generalizada obtemos o campo de permeabilidade heterogêneo a partir da porosidade para o arenito de Adamswiller e para o arenito de Rothbach, onde consideramos três casos distintos que podem ser encontrados na natureza:

1. porosidade variando numa determinada (única) faixa de valores;
2. porosidade diminuindo de forma gradual;

3. porosidade variando em intervalos específicos em cada parte da amostra.

Os resultados das nossas ilustrações são mostrados nas figuras, 8.5, 8.6 e 8.7, onde utilizamos os dados experimentais da amostra do arenito de Adamswiller. Para a amostra do arenito de Rothbach as representações gráficas de modelos fractais podem ser visualizadas nas figuras 8.8, 8.9 e 8.10.

Nas Figuras 8.5 e 8.8 o campo de permeabilidade heterogêneo, mostrado em $nm^2 \times 10$, com 200×200 blocos onde ϕ é um valor randômico em um intervalo que varia de 0,2 a 0,35, para todos os blocos da grade. A fim de tornar a variação da porosidade suave, utilizou-se uma combinação convexa (IZMAILOV; SOLODOV, 2005) dada por $\phi = 0.35(1 - rand) + 0.2rand$, onde $rand$ é valor randômico no intervalo $[0,1]$. O campo de permeabilidade para o arenito de Adamswiller e Rothbach foi gerado com os parâmetros ξ, ζ e η mostrados na Fig.8.1.

Na Figuras 8.6 e 8.9, a permeabilidade é exibida camada por camada, cada camada horizontal tem 150×450 blocos, sendo que a grade completa é formada por 450×450 blocos. Na primeira camada a porosidade, ϕ , foi gerada randomicamente entre 0,4 e 0,5, utilizou-se uma combinação convexa (IZMAILOV; SOLODOV, 2005) dada por $\phi = 0.5(1 - rand) + 0.4rand$, onde $rand$ é valor randômico no intervalo $[0,1]$. Na segunda camada, ϕ foi gerado randomicamente entre 0,3 e 0,4, utilizou-se uma combinação convexa dada por $\phi = 0.4(1 - rand) + 0.3rand$, onde $rand$ é valor randômico no intervalo $[0,1]$. Na terceira camada a porosidade

foi gerada randomicamente no intervalo de 0,2 à 0,3, foi utilizada uma combinação convexa dada por $\phi = 0.4(1 - rand) + 0.2rand$, onde $rand$ é valor randômico no intervalo $[0,1]$. O campo de permeabilidade para o arenito de Adamswiller e Rothbach foi gerado com os parâmetros ξ, ζ e η mostrados na Fig.8.1.

Na Fig.8.7 e 8.10 o campo de permeabilidade é gerado, numa grade de 500×500 blocos, utilizando uma função para controlar o intervalo da porosidade na combinação convexa dada por $m(i + 1) = m(i) - ((0,5 - 0,2)/500)$ onde i é um índice que varia de 1 a 500 e $m(1) = 0,5$. Então, a porosidade varia a partir da seguinte combinação convexa $\phi = (1 - rand) * m(i) + rand * 0.2$ e $rand$ é valor randômico no intervalo $[0,1]$. Dessa forma, o intervalo da combinação convexa diminui gradativamente na medida que i se aproxima de 500, provocando uma suavização na porosidade e, conseqüentemente, na permeabilidade. O campo de permeabilidade para o arenito de Adamswiller e Rothbach foi gerado com os parâmetros ξ, ζ e η mostrados na Fig.8.1.

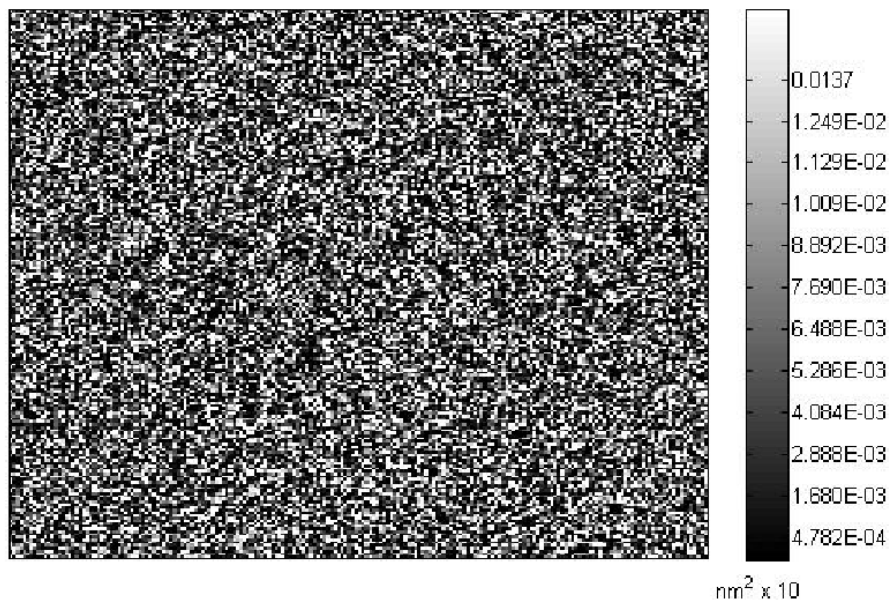


Figura 8.5: Campo de permeabilidade heterogêneo do arenito de Adamswiller com porosidade num único intervalo.

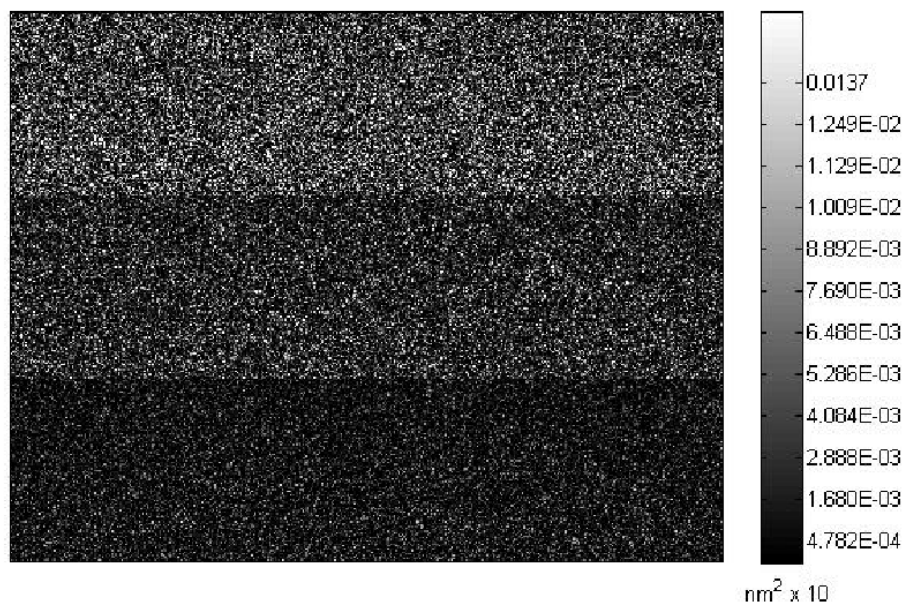


Figura 8.6: Campo de permeabilidade heterogêneo do arenito de Adamswiller com três camadas distintas.

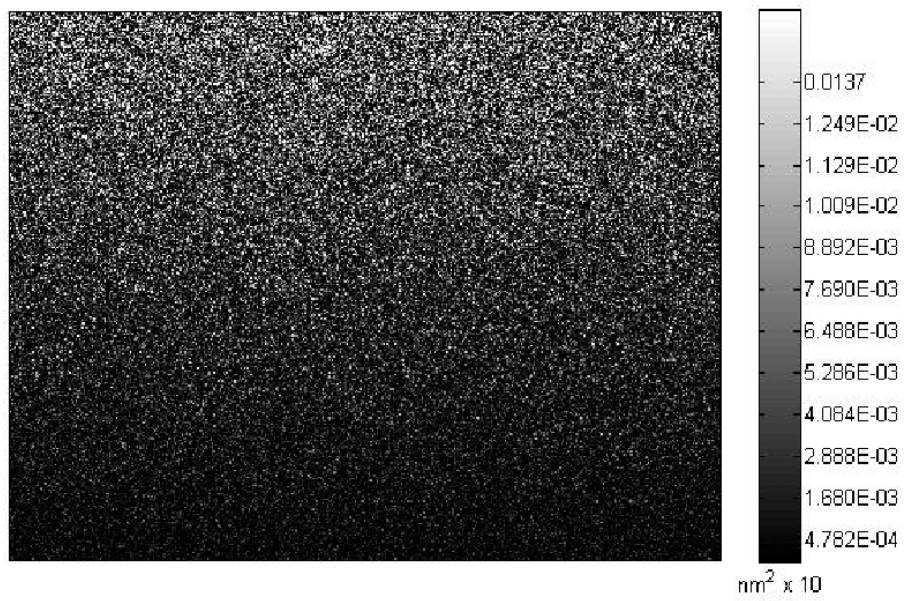


Figura 8.7: Campo de permeabilidade heterogêneo do Arenito de Adamswiller com porosidade suavizada.

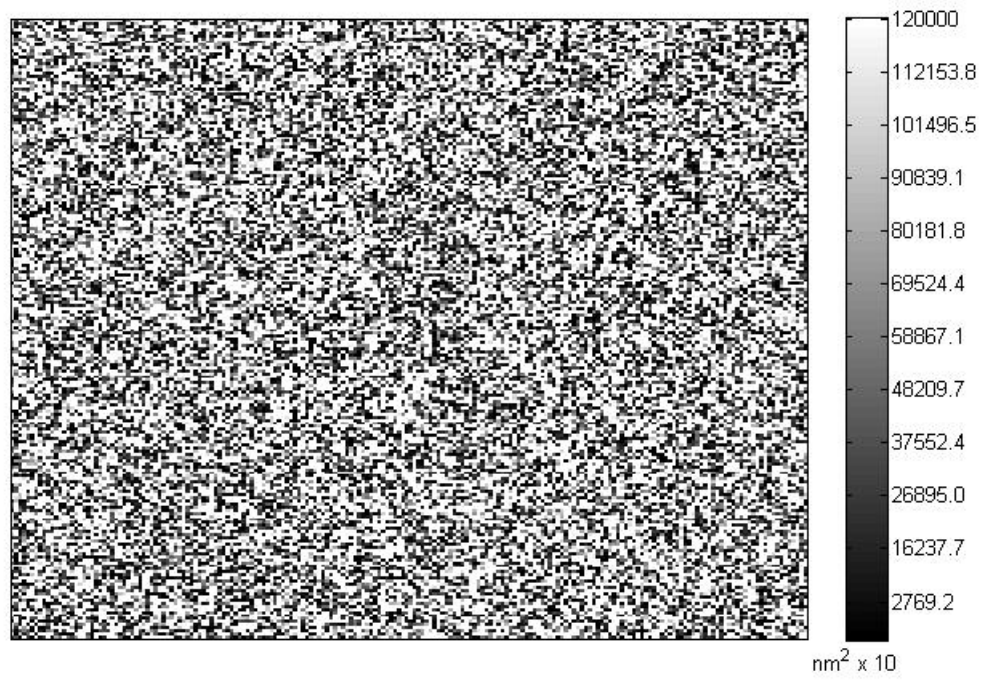


Figura 8.8: Campo de permeabilidade heterogêneo do arenito de Rothbach com três camadas distintas.

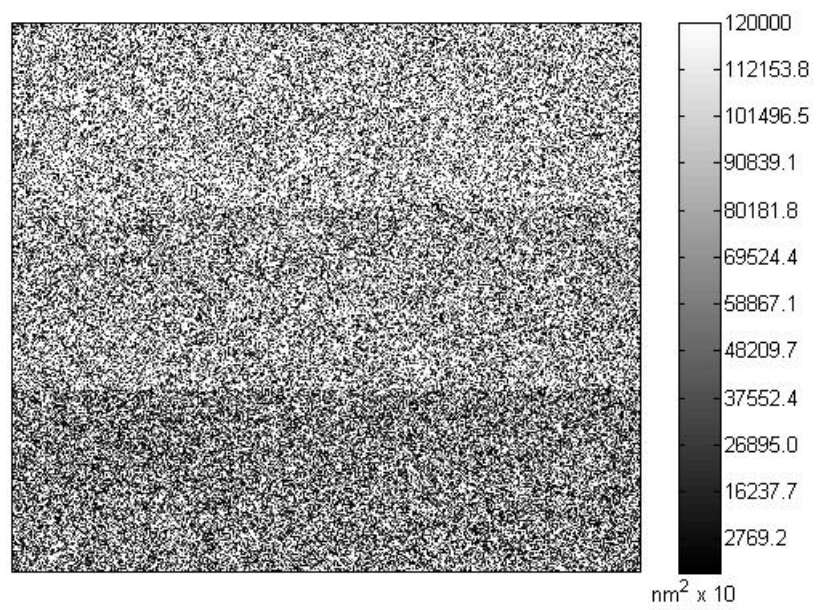


Figura 8.9: Campo de permeabilidade heterogêneo do arenito de Rothbach com três camadas distintas.

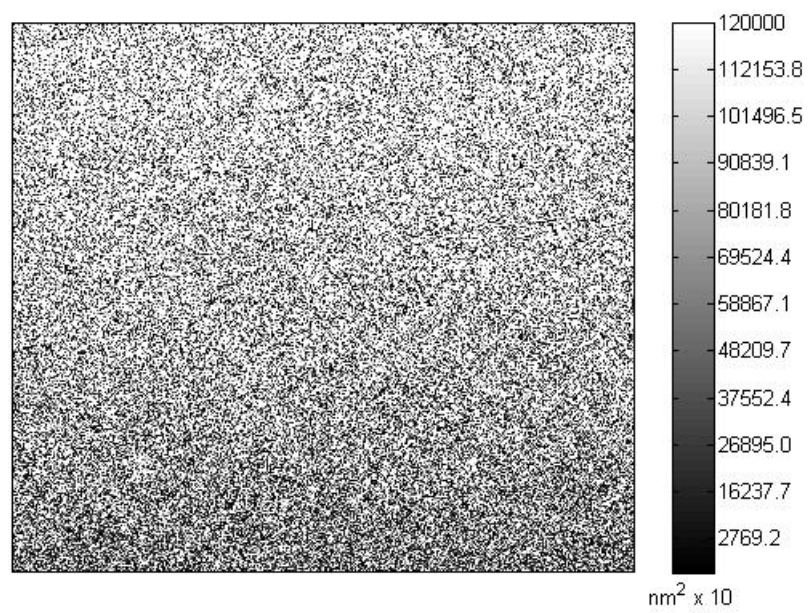


Figura 8.10: Campo de permeabilidade heterogêneo do Arenito de Rothbach com porosidade suavizada.

9 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

9.1 Conclusões

Na presente dissertação, modelos anteriores baseados na equação clássica de Kozeny-Carman foram generalizados usando uma nova equação de Kozeny-Carman à três parâmetros. O presente estudo também mostrou que uma tal generalização da Equação de Kozeny-Carman pode ser deduzida observando a estrutura fractal relacionada com a superfície específica e a tortuosidade de meios porosos.

Como foi observado, resultados numéricos obtidos da estimativa de parâmetros a partir de dados experimentais mostram que a equação proposta descreve bem a relação entre porosidade e permeabilidade dos seguintes materiais testados:

- arenito de Berea, independente da pressão crítica de compactação, veja Fig.8.1;
- arenito de Rothbach, abaixo da pressão crítica de compactação, veja Fig.8.1;
- arenito de Adamswiller, acima da pressão crítica de compactação, veja Fig.8.1;

- sisal, veja Fig.8.2;
- fibra de vidro OCFM8610, veja Fig.8.2;
- fibra de vidro unidirecional CoFAB-A01108, veja Fig.8.2;
- fibra bidirecional (tapete), veja Fig.8.3;
- fibra de tecido 4-Harness, veja Fig.8.3;
- fibra de tecido liso, veja Fig.8.3;
- fibra para transado bidirecional, veja Fig.8.4;
- fibra para tapete entrelaçado plano, veja Fig.8.4;
- fibra U750, veja Fig.8.4.

Portanto, em vista dos resultados obtidos neste trabalho, a equação de Kozeny-Carman generalizada é uma boa alternativa dentre os diversos modelos apresentados na literatura, principalmente devido a sua flexibilidade com relação a tortuosidade do material. Por isso, pode ser aplicada a diferentes tipos de materiais. Visto que muitos dos modelos na literatura dependem especificamente da tortuosidade do material empregado, a generalização proposta aqui é, sem dúvida, uma alternativa viável.

9.2 Perspectivas

Por meio dos cálculos computacionais realizados nesta dissertação, observamos a possibilidade da aplicação da equação proposta para meios porosos altamente tortuosos.

A equação de Kozeny-Carman generalizada também pode ser utilizada em simulações numéricas de escoamentos em meios porosos, por ser um modelo que fornece com relativa simplicidade e precisão o campo de permeabilidade de um material poroso, em função de ϕ .

REFERÊNCIAS

- AMAEFULE, J. O. et al. Enhanced reservoir description: Using core and log data to identify hydraulic (flow) units and predict permeability in uncored intervals/wells. In: *SPE ANNUAL TECHNICAL CONFERENCE AND EXHIBITION*, 68., Houston, 1993. *Proceedings...* [S.l.]: SPE 26436, 1993. p. 205–220.
- BAYLES, G.; KLINZING, G.; CHIANG, S. Fractal mathematics applied to flow in porous systems. *Part. Part. Syst. Char.*, v. 6, p. 168–175, 1989.
- BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. New York: Dover, 1972.
- BOURBIÉ, T.; COUSS, O.; ZINSZNERM, B. *Acoustic of porous media*. Paris: Educ. Technol, 1987.
- CANTOR, G. De la puissance des ensembles parfaits de points. *Acta Mathematica*, v. 4, p. 381–392, 1884.
- CARMAN, P. C. Fluid flow through granular beds. *Trans. Inst. Chem. Eng.*, v. 15, p. 150–167, 1937.
- CIVAN, F. Scale effect on porosity and permeability: Kinetics, model and correlation. *AIChE J.*, v. 47, p. 271–287, 2001.
- COLLINS, R. E. *Flow of fluids through porous materials*. New Jersey: Van Nostrand-Reinhold, 1961.
- COSTA, A. Permeability-porosity relationship: A reexamination of the kozeny-carman equation based onn fractal pore-space geometry assumption. *Geophys. Res. Lett.*, v. 33, p. L02318, 2006.
- DARCY, H. Les fontaines publiques de la ville de dijon. *Paris:Dalmont*, 1856.
- DAVID, C. et al. Laboratory measurements of compaction induced permeability change in porous rocks. implications for the generation an maintenance of pore pressure excess in the crust. *Pure and Appl. Geophys.*, v. 143, p. 425–456, 1994.
- DULLIEN, F. A. L. *Fluid transport and pore structure*. 2nd. ed. London: Academic Press Limited, 1991.
- HENDERSON, N. Author's response to letter of prof. civan. *Chemical Engineering Science*, v. 64, p. 2277–2278, 2009.

- IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. *Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e da dualidade*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- KOPONEN, A.; KATAJA, M.; TIMONEN, J. Permeability and effective porosity of porous media. *Phys. Rev. E.*, v. 56, p. 3319–3325, 1997.
- KOZENY, J. Ueber kapillare leitung des wassers im boden. *Stizungsber Akad Wiss Wien*, v. 136, p. 271–306, 1927.
- LIMA, E. L. *Curso de análise volume 1*. 8nd. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- LIMA, E. L. *Curso de análise volume 2*. 8nd. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- LIU, S.; MASLIYAH, J. Single fluid flow in porous media. *Chem. Eng. Comm.*, 1996.
- LIU, S.; MASLIYAH, J. Steady developing laminar flow helical pipes with finite pitch. *Computational Fluid Dynamics*, 1996.
- MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. San Francisco: W. H. Freeman, 1982.
- MAVKO, G.; NUR, A. The effect of a percolation threshold in the kozeny-carman relation. *Geophysics*, v. 62, p. 1480–1482, 1997.
- PANDA, M. N.; LAKE, L. W. Estimation of single-phase permeability from parameters of particle-size distribution. *AAPG Bull.*, v. 78, p. 1028–1039, 1994.
- PAPE, H.; CLAUSER, C.; IFFLAND, J. Variation of permeability with porosity in sandstone diagenesis interpreted with a fractal pore space model. *Pure Appl. Geophys.*, v. 157, p. 603–619, 2000.
- RODRIGUEZ, E.; GIACOMELLI, F.; VÁZQUEZ, A. Permeability-porosity relationship in rtm for different fiberglass and natural reinforcements. *J. Compos. Mater.*, v. 38, p. 259–268, 2004.
- SAHIMI, M. *Flow and transport in porous media and fractured rock*. New York: VCH, 1995.
- SHIH, C. H.; LEE, J. Effect of fiber architecture on permeability in liquid composite molding. *Polym. Compos.*, v. 19, p. 629–639, 1998.
- SIERPINSKI, W. On a cantor curve which contains a bijective and continuous image of any given curve(in russian). *Mat. Sb.*, v. 30, p. 267–287, 1916.
- STORN, R. M.; PRICE, K. V. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization. *J. Global Optim.*, v. 11, p. 341, 1997.
- THOMPSON, A. H. Fractals in rock physics. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, v. 19, p. 237–62, 1991.

WHITAKER, S. *Introduction to fluid mechanics*. Florida: Krieger Publishing, 1981.

XU, P.; YU, B. Developing a new form of permeability and kozeny-carman constant for homogeneous porous media by means of fractal geometry. *Advances in Water Resources*, v. 31, p. 74–81, 2008.

YU, B.; LEE, J. A fractal in-plane permeability model for fabrics. *Polym. Compos.*, v. 23, p. 201–221, 2002.

ÍNDICE

Algoritmo de Evolução Diferencial, 48

Conceito de Fractal, 17

Conjunto Compacto, 18

Dedução da Equação de Kozeny-Carman

 Generalizada, 38

Descrição do Problema, 47

Dimensão Fractal, 23

Identificação de Duas Leis de Escala

 Fractais em Meios Porosos, 36

Lei de Darcy, 28

Material Poroso, 26

Parâmetros Utilizados, 52

Permeabilidade, 27

Porosidade, 26

Referências de Algumas Generaliza-
ções, 35

Representações Gráficas de Modelos

 Fractais, 60

Tortuosidade, 27

Verificação e Validação, 53

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)