

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS

MÔNICA ANDRIOLI CARACANHAS

**Interações em Condensados de Bose-Einstein:
Temperatura finita e Gás dipolar**

São Carlos

2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

MÔNICA ANDRIOLI CARACANHAS

**Interações em Condensados de Bose-Einstein:
Temperatura finita e Gás dipolar**

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Programa de Pós-Graduação em
Física do Instituto de Física de São
Carlos da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de mestre em
ciências.

Área de Concentração: Física Básica
Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Sal-
vador Bagnato

São Carlos

2010

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pelo Serviço de Biblioteca e Informação IFSC/USP

Caracanhas, Mônica Andrioli

Interações em condensados de Bose-Einstein: temperatura finita e gás dipolar./Mônica Andrioli Caracanhas; orientador Vanderlei Salvador Bagnato -- São Carlos, 2010.

89 p.

Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Física - Área de concentração: Física Básica) – Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo.

1. Condensado. 2. Temperatura finita. 3. Interações dipolares. I. Título.

*Dedico esta tese a meus pais Rosana e João,
pelos ensinamentos que formaram os alicerces
de minha história.*

Agradecimentos

Minha gratidão aos meus pais, *Rosana* e *João*, pelo incontestável apoio e orientação...

Agradeço ao meu orientador, *Prof. Dr. Vanderlei Salvador Bagnato*, pelos sagazes dizeres que, certamente, foram cruciais para a realização deste projeto e pelas valiosas lições que não são encontradas nos livros...

Agradeço aos meus amigos, cujas presenças, palavras e silêncios vêm me auxiliando nessa longa estrada...

Agradeço aos meus companheiros de grupo, cuja colaboração foi de grande valia para a efetuação deste trabalho.

Meus sinceros agradecimentos às secretárias do grupo, *Isabel* e *Benê*, pela amizade e por todos os auxílios prestados.

Aos membros da Secretaria de Pós-Graduação, *Sílvio* e *Victor*, além das bibliotecárias *Betânia*, *Maria Neusa* e *Ana Mara*, meu reconhecimento e agradecimento pela cordialidade e presteza em solucionarem os meandros burocráticos...

Externo meus agradecimentos à **FAPESP**, *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo*, pelo financiamento deste projeto de Mestrado.

“Try not to become a man of success but rather to become a man of value.”

Albert Einstein

Resumo

CARACANHAS, M. A. **Interações em condensados de Bose-Einstein:** temperatura finita e gás dipolar. 2010. 89 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

Neste trabalho investigamos os efeitos das interações na expansão de um condensado de átomos de Rb . Dois problemas são abordados: o efeito de temperatura finita e as alterações introduzidas pela interação dipolar. No primeiro caso, dados experimentais não puderam ser explicados por meio da aproximação de Thomas-Fermi (TF) no regime de $T = 0$. Num condensado de cerca de $1 - 2 \times 10^5$ átomos condensados, o desvio da aproximação de TF ocorreu pelo fato de termos desconsiderado a interação dos átomos térmicos com os do condensado. Elaboramos um modelo teórico, baseado em modelos existentes de temperatura finita, o qual explicou relativamente bem os nossos resultados experimentais. No segundo problema atacado, foi analisada a variação na expansão do gás condensado quando a interação dipolar é incluída no sistema. Ambos os problemas mostram aspectos importantes da expansão de gases quânticos.

Palavras-chave: *condensado, temperatura finita, interações dipolares.*

Abstract

CARACANHAS, M. A. **Interactions in Bose-Einstein condensates:** finite temperature and dipolar gas. 2010. 89 p. Dissertation (Master) - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

In this study we investigated the effects of interactions on the expansion of a condensate of *Rb* atoms. Two problems are addressed: the effect of finite temperature and the changes introduced by the dipolar interaction. In the first case, experimental data could not be explained by the Thomas-Fermi (TF) approach in the $T = 0$ regime. In a condensate of about $1 - 2 \times 10^5$ condensed atoms, the deviation of TF approach was due to the fact that we disregarded the interaction of thermal atoms those of the condensate. We developed a theoretical model, based on existing models of finite temperature, which explained relatively well our experimental results. In the second problem considered, we analyzed the variation in the expansion of the condensate gas when the dipolar interaction is included in the system. Both problems show important aspects of the expansion of quantum gases.

Keywords: *condensate, finite temperature, dipolar interactions*

Lista de Figuras

Figura 1.1	Expansão da nuvem condensada	33
Figura 1.2	Imagem de absorção obtida após 15 <i>ms</i> de expansão.	33
Figura 2.3	Resultados experimentais para a razão \bar{R}^5/N_0 como função da fração condensada. A linha tracejada mostra as previsões do modelo $T = 0$ para os nossos parâmetros experimentais.	39
Figura 2.4	Nossos resultados experimentais junto com os resultados calculados através do modelo simples descrito no texto.	41
Figura 2.5	Comportamento da função $F(R/\sigma)$ com a razão R/σ entre a dimensão do condensado pela da nuvem térmica.	44
Figura 2.6	Resultados experimentais (pontos) junto com a curva correspondente ao modelo Hartree-Fock Analítico (HFA) (linha cheia) ajustado conforme explicado no texto.	44
Figura 2.7	Simulação numérica: raio da nuvem condensada <i>vs</i> temperatura para cada um dos modelos.	47
Figura 2.8	Simulação numérica: variação do número de átomos condensados com a temperatura	48
Figura 2.9	Simulação numérica: raio da nuvem <i>vs</i> fração condensada para cada um dos modelos	48
Figura 2.10	Simulação numérica: R^5/N_0 <i>in situ vs</i> fração condensada	49
Figura 2.11	Raio da configuração de equilíbrio <i>vs</i> temperatura e comparação entre os valores das curvas normalizadas.	53
Figura 2.12	Variação das dimensões da nuvem condensada com o tempo de expansão. Comparação dos resultados obtidos através do cálculo variacional com aquele em que a dimensão inicial foi determinada com o modelo HFA seguida da expansão hidrodinâmica	53

Figura 2.13	Evolução das dimensões da nuvem condensada liberada de armadilha isotrópica para diferentes valores de temperatura da amostra	54
Figura 2.14	Evolução das dimensões da nuvem condensada liberada de armadilha com simetria axial para diferentes valores de temperatura da amostra e a média geométrica desses resultados.	54
Figura 3.15	Variação do comprimento de espalhamento crítico a_s como função de λ	62
Figura 3.16	Variação das dimensões (u.a. - unidades arbitrárias) da nuvem condensada com a configuração armadilha para o caso com (CI) e sem (SI) as interações dipolares	64
Figura 3.17	Evolução temporal das dimensões da nuvem com interação dipolar considerando termo cinético K	67
Figura 3.18	Evolução temporal das dimensões da nuvem com interação dipolar dentro da aproximação TF	67
Figura 3.19	Evolução temporal das dimensões da nuvem com interação dipolar considerando o termo cinético K	69
Figura 3.20	Evolução temporal das dimensões da nuvem com interação dipolar dentro da aproximação TF.	69
Figura 3.21	Evolução temporal das dimensões da nuvem sem interação dipolar $E_{dd} = 0$ considerando o termo cinético K	70
Figura 3.22	Evolução temporal das dimensões da nuvem sem interação dipolar $E_{dd} = 0$ dentro da aproximação TF.	71
Figura 3.23	Variação dos <i>aspect ratio</i> da nuvem u_r/u_z <i>in situ</i> como função do parâmetro E_{dd} para os casos (1): linha vermelha e (2): linha preta, ambos na aproximação TF	72
Figura 3.24	Variação dos <i>aspect ratio</i> da nuvem u_r/u_z <i>in situ</i> como função do parâmetro E_{dd} para os casos (1): linha vermelha e (2): linha preta, considerando termo cinético K em ambos	72

Figura 3.25	Comparação da variação dos <i>aspect ratio</i> da nuvem u_r/u_z <i>in situ</i> como função do parâmetro E_{dd} para o caso (1) na aproximação TF (em preto) e considerando termo cinético (em vermelho)	73
Figura 3.26	Comparação da variação dos <i>aspect ratio</i> da nuvem u_r/u_z <i>in situ</i> como função do parâmetro E_{dd} para o caso (2) na aproximação TF (em preto) e considerando termo cinético (em vermelho)	73
Figura A.27	Perfil da função fr (expressão acima)	86
Figura A.28	Direção da propagação do feixe de prova no plano xy.	88

Lista de Tabelas

Tabela 3.1	Configurações da armadilha magnética com simetria axial ($\omega_x = \omega_y \equiv \omega_r$) com $\bar{\omega}^3 = \omega_r^2 \omega_z$	63
Tabela 3.2	Parâmetros do experimento	65
Tabela 3.3	Variação do parâmetro E_{dd} com o momento magnético atômico μ .	66
Tabela 3.4	Variação do parâmetro E_{dd} com a variação do comprimento de espalhamento a_s	68

Lista de Siglas

BEC - condensação de Bose-Einstein

GP - teoria de Gross Pitaevskii

GPE - equação de Gross Pitaevskii

HF - Hartree-Fock

HFA - Hartree-Fock Analítico

FHF - Full Hartree-Fock

TF - aproximação de Thomas-Fermi

HFB - Hartree-Fock-Bogoliubov

ZNG - Zaremba-Nikuni-Griffin

RF - radiofrequência

CI - com interação dipolar

SI - sem interação dipolar

K - com termo cinético

Sumário

1	Primeiro Capítulo - Introdução	25
1.1	Condensados de Bose-Einstein	25
1.1.1	Aspectos Gerais	25
1.1.2	Teoria para descrever o Condensado	26
1.2	Expansão do Condensado	28
1.3	Experimentos e Maneiras de Caracterizar o Condensado	31
2	Segundo Capítulo - Desenvolvimento de modelo para correção de-	
	vido à temperatura finita	35
2.1	Modelo de Temperatura Finita	35
2.1.1	Introdução	35
2.1.2	Os dados Experimentais	36
2.1.3	A teoria $T = 0$ e dados experimentais	38
2.1.4	Modelos de Temperatura Finita	40
2.2	Cálculo Numérico Auto-Consistente	46
2.2.1	Full Hartree-Fock (FHF) e Previsões do Modelo HFA	46
2.2.2	Problemas com a Conexão das Teorias: a expansão do condensado	49
2.3	Método Variacional	51
2.3.1	Modelo Variacional para Expansão	52
2.3.2	Resultados Método Variacional	52
2.4	Conclusão e Perspectivas Futuras para análise da temperatura	
	finita	56
3	Terceiro Capítulo - Efeitos das Interações Dipolares	59
3.1	Interações Dipolares	59
3.1.1	Aspectos Gerais	59

3.1.2	Teoria para descrever o Condensado Dipolar	60
3.1.3	Estabilidade do condensado dipolar na armadilha	62
3.1.4	Expansão de um gás dipolar	65
3.1.5	Variando μ com a_s fixado em $100a_0$	66
3.1.6	Variando o comprimento de espalhamento a_s com o momento de dipolo μ fixado em $1\mu_B$	68
3.1.7	Condição de equilíbrio inicial na armadilha	71
3.1.8	Conclusões	74
	Referências	75
	Apêndice A - Método Variacional para expansão dipolar	81
	Apêndice B - Método Variacional para expansão com átomos térmicos	84
	Apêndice C - Expressão para as funções g, f e fr	86
	Apêndice D - Potencial Químico	87
	Apêndice E - Correções na Imagem	88

1 Primeiro Capítulo Introdução

1.1 Condensados de Bose-Einstein

1.1.1 Aspectos Gerais

A condensação de Bose-Einstein (BEC) com átomos frios aprisionados é um tópico de pesquisa que tem despertado interesse de muitas áreas da física (1, 2, 3, 4, 5). Na termodinâmica a BEC é vista como uma transição de fase de um gás para um novo estado da matéria, com contribuição quântica macroscópica para as propriedades globais. Em mecânica quântica, BEC é vista como onda de matéria coerente que advém da superposição de ondas de Broglie, com inúmeras possibilidades de comparação com lasers. Em mecânica estatística, BEC é vista como fenômeno onde células elementares do espaço de fases são ocupadas por mais do que um átomo. Em teoria quântica de campos, BEC é vista como uma quebra espontânea de simetria e, finalmente, em matéria condensada, a condensação de Bose-Einstein tem sido usada para investigação de várias propriedades de transporte.

A verificação experimental da condensação de Bose-Einstein tem sido um longo desejo da física, e de fato sua comprovação promoveu uma enorme impulsão de muitos campos. A superfluidez foi melhor entendida num sistema diluído criando inclusive novas possibilidades de experimentos impossíveis de serem realizados em sistemas convencionais como hélio líquido. Condensados permitiriam a investigação de vórtex quantizados (6), a existência de instabilidades em sistemas atrativos (7, 8, 9), etc. Mais recentemente átomos

condensados foram distribuídos numa rede óptica (10), criando um arranjo, onde o estudo de propriedades de transporte tem sido realizado.

Existe uma área ainda pouco explorada com condensados e que pode propiciar estudos de efeitos ainda não observados. Trata-se do magnetismo com átomos frios. A maioria dos átomos alcalinos pode ser polarizados magneticamente criando um gás de dipolos, que oferecem importantes propriedades a serem estudadas (11, 12).

1.1.2 Teoria para descrever o Condensado

Considerando o formalismo de Heisenberg podemos construir a equação que descreve a evolução do operador de campo:

$$[\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{H}] = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

onde:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{int}$$

$$= \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}, t) \right] \hat{\psi}(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \int \int d^3r d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t) V_{int}(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}', t) \hat{\psi}(\vec{r}, t)$$

Considerando apenas a interação de dois corpos isotrópica e de curto alcance $V_{int}(\vec{r} - \vec{r}') = U_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, válida para regimes diluídos como o nosso (densidade do gás condensado próxima de 10^{13}cm^{-3}), a Eq.1.1 se reduz a:

$$\hat{H}_0 \hat{\psi}(\vec{r}, t) + U_0 \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\vec{r}, t) \quad (1.2)$$

Onde fizemos o uso das relações de comutação bosônicas satisfeitas pelos operadores de campo (13).

Podemos reescrever o operador de campo como sendo um valor médio mais uma flutuação em torno dessa média $\hat{\psi} = \psi + \delta\hat{\psi}$. Essa expansão consiste na aproximação de

Bogoliubov, onde o fato da média do operador de campo ser diferente da nula ($\langle \hat{\psi} \rangle = \psi$) representa a quebra de simetria devido à ocupação macroscópica do estado fundamental. A flutuação $\delta\hat{\psi}$ em torno desse valor médio ψ corresponde ao operador criação de bósons em estados excitados. Substituindo essa expansão na equação original Eq.1.2 e tomando a média sobre o *ensemble* na expressão resultante (considerando que $\langle \delta\hat{\psi} \rangle = 0$ e ocultando a dependência de $\psi(\vec{r}, t) = \psi$ por simplificação) obtemos a Eq.1.3. Nessa equação o termo $|\psi|^2$ representa a densidade de átomos no condensado, enquanto que $\langle \delta\hat{\psi}^\dagger \delta\hat{\psi} \rangle$ corresponde a densidade nos estados excitados e finalmente $\langle \delta\hat{\psi} \delta\hat{\psi} \rangle$ se relaciona a correlação entre pares de átomos, a qual apresenta valor não nulo abaixo da temperatura de transição devido a quebra da simetria de Gauge.

$$H_0\psi + U_0\{|\psi|^2\psi + 2\langle \delta\hat{\psi}^\dagger \delta\hat{\psi} \rangle\psi + \langle \delta\hat{\psi} \delta\hat{\psi} \rangle\psi^* + \langle \delta\hat{\psi}^\dagger \delta\hat{\psi} \delta\hat{\psi} \rangle\} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (1.3)$$

A teoria amplamente empregada para justificar os resultados em experimentos de condensados de Bose-Einstein consiste na teoria de Gross Pitaevskii (GP). A equação em que se baseia essa teoria trata-se da equação de Gross Pitaevskii (GPE). Essa última é obtida de Eq.1.3 considerando nulas as médias da flutuação no lado esquerdo dessa equação, isto é, considerando a totalidade dos átomos no estado condensado. Apesar de descrever razoavelmente bem as observações experimentais, existem vários resultados que não podem ser justificados tendo como base essa aproximação. Verificam-se desvios nas frequências dos modos coletivos do condensado, assim como o amortecimento das oscilações desses modos (13) os quais não podem ser explicados tendo como base esse formalismo. Além desses, os resultados a respeito da dependência do número de átomos no condensado, assim como a variação das dimensões da nuvem, só podem ser explicados se estendermos a teoria para além do regime $T = 0$. Para isso seria necessário considerar mais termos médios na Eq.1.3, os quais permitem estender a teoria para considerar a temperatura finita do sistema. Existe uma diversidade de teorias de temperatura finita que variam de acordo com o nível da aproximação empregada no seu desenvolvimento. Nesse trabalho empregaremos a aproximação mais simples que consiste na teoria de Hartree-Fock (HF) na sua versão semiclássica. Na aproximação de HF considerarmos diferente de zero apenas as médias diagonais $|\psi|^2$ e $\langle \delta\hat{\psi}^\dagger \delta\hat{\psi} \rangle$ obtendo assim a GPE generalizada

(Eq.1.4).

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) + U_0(|\psi(\vec{r}, t)|^2 + 2n_T(\vec{r})) \right] \psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t), \quad (1.4)$$

Na sua versão semiclássica, válida na condição $\hbar\omega < k_B T$, podemos escrever a densidade dos átomos térmicos como sendo a integral no espaço dos *momenta* da função de ocupação multiplicada pela densidade de estados dos níveis excitados.

$$n_T(\vec{r}) = \frac{1}{h^3} \int \frac{1}{e^{\beta(\epsilon(\vec{r})-\mu)} - 1} d^3p \quad \epsilon(\vec{r}) = V(\vec{r}) + 2U_0n_0(\vec{r}) + 2U_0n_T(\vec{r}) \quad (1.5)$$

Considerando o caso estacionário teremos equações acopladas para as densidades térmica-condensada, que deverão ser solucionadas juntamente com a condição de normalização, a qual fixa o número total de átomos, conforme será elucidado adiante.

1.2 Expansão do Condensado

Todas as informações a respeito da nuvem condensada são obtidas através do diagnóstico óptico. Aproveitando o fato de termos uma amostra de átomos diluída, podemos utilizar as técnicas de espalhamento. As duas técnicas mais importantes para observação do condensado se baseiam em imagens *in situ* e em tempo de voo (14). Em ambos os casos obtemos imagens as quais refletem a distribuição de densidade dos átomos aprisionados na armadilha ou em expansão livre. Devido a limitações técnicas empregamos as imagens em tempo de voo em nossos experimentos. Dessa maneira necessitamos de um modelo de expansão para recuperar o perfil de densidade da nuvem condensada na armadilha magnética.

O modelo de expansão comumente utilizado baseia-se nas teorias hidrodinâmicas para o condensado. Essa última pode ser derivada diretamente da teoria de GP, substituindo na GPE a expressão para o campo clássico do condensado reescrita como um módulo e uma

fase $\psi(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \exp(i\phi(\vec{r}, t))$. Separando as partes reais e imaginárias e considerando a relação entre velocidade e fase do condensado $\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\vec{r}, t)$ além da relação entre o módulo e a densidade da nuvem $n(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)^2$ obteremos então duas equações para o problema: a equação de Euler (Eq.1.6) e a de Difusão (Eq.1.7), onde a fase e o módulo da função de onda foram reescritas em termos da densidade e da velocidade.

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi + \left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2 \sqrt{n}}{2m \sqrt{n}} + \frac{1}{2} m v^2 + V + U_0 n \right] = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (\vec{v} n) = 0 \quad (1.7)$$

Assumindo uma função teste para o perfil de densidade do condensado $n_0(\vec{r}, t) = n_0(t) (1 - \sum_{i=x,y,z} \frac{r_i^2}{R_i(t)^2})$, podemos substituí-lo nas equações hidrodinâmicas juntamente com a dependência para velocidade $\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} (\alpha_x(t) r_x, \alpha_y(t) r_y, \alpha_z(t) r_z)$ a fim de obter equações de segunda ordem envolvendo os raios R_i da nuvem condensada (por simplificação de notação inibiremos a dependência temporal dos parâmetros nas equações que seguem). A equação da continuidade juntamente com a condição de normalização fornece a relação $\alpha_i = \frac{\dot{R}_i}{R_i}$. A equação de Euler fornecerá então a equação para evolução do raio para cada direção ortogonal:

$$\ddot{R}_i = -\omega_i^2 R_i + \frac{15N\hbar^2 a}{m^2} \frac{1}{R_i \prod_{j=x,y,z} R_j} \quad (1.8)$$

Na Eq.1.8 o termo da interação depende do número de átomos condensados. É importante ressaltar que nessa aproximação com a função teste assumimos que o perfil de densidade é mantido na expansão, sendo reescalado no tempo através de R_i . Para obter os valores iniciais dos raios da nuvem condensada $R_i(0)$ substituímos $\ddot{R}_i = 0$ nas equações acima. Podemos então parametrizar as equações acopladas em termos desses raios $R_i(t) = b_i(t) R_i(0)$ além de $\tau = \omega_i t$ obtendo equações adimensionais para o fator $b_i(t)$, o qual dependerá da anisotropia da armadilha ($\lambda = \omega_z / \omega_\rho$) e de τ . Assumindo uma armadilha com simetria cilíndrica ($\omega_x = \omega_y = \omega_\rho$) e $\tau = \omega_\rho t$, teremos que resolver o sistema acoplado:

$$\ddot{b}_z = -\lambda^2 b_z + \frac{\lambda^2}{b_z^2 b_\rho^2} \quad e \quad \ddot{b}_\rho = -b_\rho + \frac{1}{b_z b_\rho^3} \quad (1.9)$$

Para uma armadilha extremamente anisotrópica ($\lambda \ll 1$) obtemos uma solução analítica

para o sistema acima:

$$b_z(\tau) = 1 + \lambda^2 [\tau \arctan \tau - \ln \sqrt{(1 + \tau^2)}] \quad b_\rho(\tau) = \sqrt{(1 + \tau^2)} \quad (1.10)$$

Dessa forma, dado o tempo de expansão e o raio da imagem de absorção, estima-se o raio *in situ* pela determinação desse fator multiplicativo (Eq.1.10).

Quanto à nuvem térmica, a ela é dado um tratamento semiclássico. Considera-se inicialmente a distribuição de Bose-Einstein para ocupação dos estados térmicos f_k multiplicada pela densidade de cada estado $|\phi_k(\vec{r})|^2$ (Eq.1.11).

$$n_T(\vec{r}) = \sum_k |\phi_k(\vec{r})|^2 f_k \quad (1.11)$$

Ao invés de somarmos nos estados discretos podemos utilizar a aproximação semiclássica (válida para $\varepsilon \gg \hbar w$) e assim integrar sobre o espaço de fase a função distribuição semiclássica.

$$n_T(\vec{r}) = \frac{1}{h^3} \int d^3p \frac{1}{\exp(\beta(\varepsilon(\vec{r}, \vec{p}) - \mu)) - 1} \quad (1.12)$$

$$\varepsilon(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (1.13)$$

Assim, realizando a integral no espaço dos *momenta* teremos para esse caso de gás ideal confinado:

$$n_T(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2}(\exp(-\beta(V(\vec{r}) - \mu))) \quad (1.14)$$

Obtemos então uma expressão para a densidade da nuvem térmica, a qual apresenta dependência com a função de Bose, cujo argumento consiste de uma exponencial que depende do potencial da armadilha além da temperatura.

Na expansão balística da nuvem térmica consideramos a evolução temporal da função distribuição: $n_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = n_{\vec{p}}(\vec{r} - \vec{p} t/m)$. Teremos então, após a integração no espaço dos momenta (Eq.1.5), a expressão para a evolução temporal da densidade da nuvem térmica (Eq.1.15).

$$n_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2}(\exp(-\beta(\tilde{V}(\vec{r}, t) - \mu))) \prod_{j=x,y,z} \frac{1}{\sqrt{(1 + w_j^2 t^2)}} \quad (1.15)$$

$$\tilde{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} m \sum_{j=x,y,z} \frac{w_j^2}{(1 + w_j^2 t^2)} r_j^2 \quad (1.16)$$

Vale fazer um parêntese nessa etapa e descrever algumas diferenças entre o perfil de densidade do gás térmico ideal e o de um condensado sem interação, descrito pela gaussiana do estado fundamental do oscilador. Esse último apresenta distribuição no espaço dos *momenta* bem mais estreita que a dispersão da distribuição da nuvem térmica. Sendo assim, o formato final da nuvem após a expansão (valores assintóticos) dependerá da configuração inicial da armadilha. Já no caso térmico essa dependência não se mostrará nos valores assintóticos, os quais serão isotrópicos. Considerando o condensado sem as interações, o fator que modifica o perfil de densidade do estado fundamental com a expansão é aquele o qual representa a dispersão quântica de um pacote Gaussiano devido ao princípio de incerteza de Heisenberg. A dependência do perfil do condensado com a armadilha modifica-se quando adicionamos a interação de dois corpos, a qual influenciará na energia de expansão da nuvem. Nesse caso teremos uma das assinaturas da nuvem condensada que corresponde a inversão do *aspect ratio* (razão entre as dimensões ortogonais da nuvem) durante a expansão livre (Fig.1.1) (15, 16). Para os átomos térmicos, por outro lado, mesmo com as interações continuam tendo a expansão isotrópica como boa aproximação.

1.3 Experimentos e Maneiras de Caracterizar o Condensado

Nessa seção visamos detalhar como as informações a respeito das dimensões e número de átomos condensados são extraídas de nossas imagens de absorção Fig.1.2, utilizando as expressões para o perfil de densidade explorados na seção anterior. Para temperaturas maiores que a crítica da condensação ($T > T_c$), temos a Eq.1.14 para o perfil de densidade da nuvem. Para $T = 0$ a densidade da nuvem atômica é descrita através do perfil

corespondente à função teste da seção anterior. No nosso caso, porém, estamos em um regime intermediário ($0 < T < T_c$) onde o perfil de densidade da nuvem parcialmente condensada pode ser descrito pela soma dessas duas contribuições:

$$\eta(x, y, z) = \tilde{n}_0 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2 + z^2}{R_z^2}, 0 \right) + \tilde{n}_T e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2}} \quad (1.17)$$

A notação $(\alpha(x, y, z), 0)$ no primeiro termo da equação 1.17 substitui a função de Heaviside e implica que esse termo é nulo a partir dos pontos onde $\alpha(x, y, z) = 0$. A imagem de absorção corresponderá à integral da expressão acima ao longo da direção do feixe de prova. Teremos que ajustar a essa imagem um perfil bimodal, cujos parâmetros estarão relacionados com as dimensões (R_i, σ) e valores de pico $(\tilde{n}_0, \tilde{n}_T)$ da densidade acima. O número total de átomos em ambas as nuvens, condensada e térmica, são obtidos através da integração espacial do perfil da 1.17, a qual fornecerá as expressões: $N_0 = 8\pi/15 \tilde{n}_0 R_x R_z^2$ e $N_T = 2\pi \tilde{n}'_T \sigma^2$ a partir das quais nós calculamos N_0/N . A fração condensada medida está relacionada com a temperatura aproximadamente pela equação:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \quad (1.18)$$

Apesar da densidade da nuvem térmica depender da função de Bose, nas equações acima restringimos o perfil ao primeiro termo dessa função. O decaimento do perfil térmico continua sendo bem descrito pela exponencial desse termo, a qual depende do parâmetro ajustável σ . Dessa forma podemos extrair a temperatura também através do ajuste das asas da gaussiana térmica (essa distribuição distinta do perfil da densidade das nuvens é uma das vantagens dos gases de Bose aprisionados, tornando possível diferenciá-las).

Uma observação deve ser feita a respeito do fato de nossas imagens corresponderem a uma nuvem condensada expandida. Assim para recuperarmos as dimensões *in situ* adotamos uma teoria de expansão simplificada (expansão balística) que não necessariamente corresponde as condições reais, à medida que despreza possíveis efeitos das colisões nos instantes iniciais (que poderiam trazer assimetrias na expansão) além de efeitos de campos remanescentes após o desligamento da armadilha.

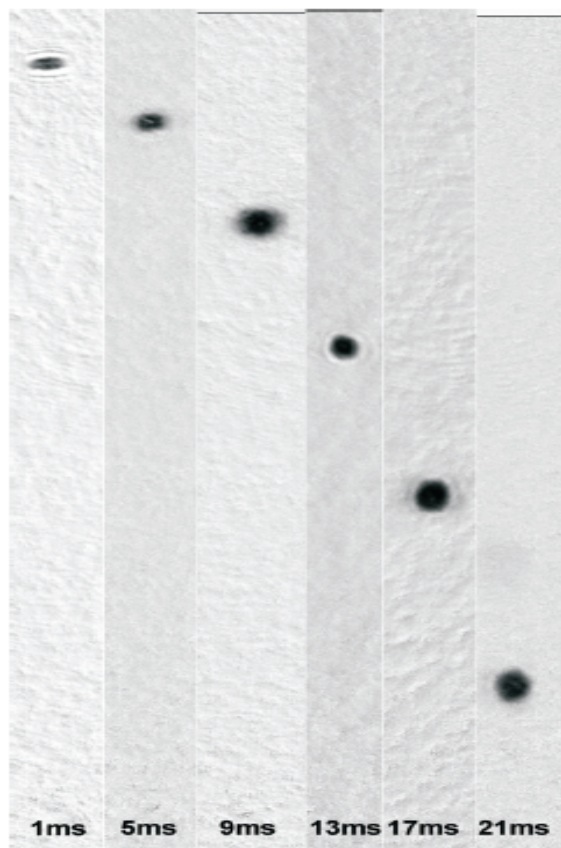


Figura 1.1 – Expansão da nuvem condensada

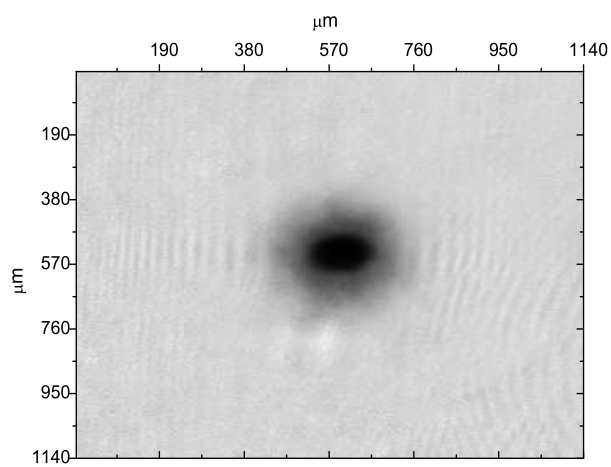


Figura 1.2 – Imagem de absorção obtida após 15 *ms* de expansão.

2 Segundo Capítulo

Desenvolvimento de modelo para correção devido à temperatura finita (17)

2.1 Modelo de Temperatura Finita

O primeiro problema abordado foi justificar os resultados experimentais referentes a medida das dimensões da nuvem condensada em diferentes temperaturas. Os dados experimentais não puderam ser explicados por meio da aproximação Thomas Fermi (TF) da GPE, equação que se aplica para o regime de $T = 0$. Apesar de TF valer relativamente bem para nossa amostra de aproximadamente $1 - 2 \times 10^5$ átomos condensados, o problema deve-se ao fato de termos desconsiderado a interação dos átomos térmicos com os do condensado, a qual atribuímos ser a responsável pelo comportamento dos dados experimentais, principalmente nas proximidades da temperatura crítica (T_c). Elaboramos um modelo teórico, baseado em modelos existentes de temperatura finita, o qual explicou relativamente bem os nossos resultados experimentais. A seguir temos um detalhamento maior do trabalho desenvolvido.

2.1.1 Introdução

A grande maioria dos experimentos envolvendo condensados de Bose-Einstein baseia-se na teoria de GP (13, 15, 18), a qual consiste em uma aproximação de campo médio

que considera todos os átomos no estado condensado. O operador de campo é aproximado por um campo clássico (quebra da simetria de Gauge) o qual descreve a nuvem do condensado a $T = 0$. Apesar dessa teoria funcionar razoavelmente bem para descrever muitos dos resultados experimentais (13,15), verificam-se desvios nas frequências dos modos coletivos do condensado, assim como o amortecimento das oscilações desses modos os quais não podem ser explicados tendo como base esse formalismo. Além disso, resultados experimentais a respeito da dependência com a temperatura do número de átomos no condensado, assim como a variação das dimensões da nuvem condensada só podem ser explicados com a extensão dessa teoria para além do regime $T = 0$. Isso pode ser feito através da aproximação de Bogoliubov (18,19), teoria microscópica na qual o operador de campo é constituído por um campo clássico, associado aos átomos do condensado, além de um operador criação de bósons em estados excitados. A partir dessa etapa, diversas teorias de campo médio surgem de acordo com a aproximação utilizada no desenvolvimento da equação de Heisenberg que descreve a evolução do operador de campo (19). Dentre essas teorias temos a de HF na sua versão semi-clássica. Considerando a situação estacionária para HF, obtemos um sistema auto-consistente constituído pelas densidades da nuvem térmica e condensada. Tendo como base essa teoria de temperatura finita, objetivamos explicar os desvios nos dados experimentais do parâmetro R^5/N_0 , o qual é relevante dentro da teoria TF para $T = 0$. Utilizamos aproximações dentro do formalismo de HF que nos permitiu dar um tratamento analítico para o problema em questão.

2.1.2 Os dados Experimentais

Os detalhes experimentais estão bem descritos pela referência (16). Começamos com um condensado de ^{87}Rb com 5×10^8 átomos no estado hiperfino $|22\rangle$ em uma armadilha magnética do tipo QUIC (*Quadrupole and Ioffe Configuration*). O potencial da armadilha é harmônico com frequências $\omega_x = 2\pi \times 23 \text{ Hz}$ e $\omega_y = \omega_z = 2\pi \times 211 \text{ Hz}$. Usamos a

evaporação de radiofrequência (RF) para obter a degenerescência quântica. O ajuste no valor final da RF desse processo permite o controle da temperatura e conseqüentemente da fração de átomos no condensado. As imagens são realizadas através da técnica de absorção na qual um feixe de prova incide sobre a amostra condensada durante a expansão livre da nuvem. O tempo de voo, intervalo que vai desde o instante em que a armadilha é desligada até o laser de prova ser aplicado à amostra, foi de 15 *ms*. A imagem adquirida é então processada através de um ajuste bimodal da distribuição de densidade da nuvem (Eq.2.19), cuja expressão advém da integração do perfil bimodal (Eq.1.17) ao longo do eixo do feixe de laser.

$$I(x, z) = \int \eta(x, y, z) dy = \frac{4}{3} \tilde{n}_0 R_x^2 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{z^2}{R_z^2}, 0 \right)^{3/2} + \tilde{n}'_T e^{-\frac{x^2+z^2}{2\sigma^2}} \quad (2.19)$$

O parâmetro σ corresponde à largura da gaussiana térmica, \tilde{n}_0 e \tilde{n}'_T correspondem respectivamente aos picos de densidade do condensado e nuvem térmica enquanto que R_i ($i=x,y,z$) corresponde ao raio da nuvem condensada.

Duas observações devem ser feitas a respeito da nossa imagem de absorção. A primeira delas refere-se ao ângulo de incidência de 45° graus que o feixe de prova faz em relação ao eixo de simetria da amostra condensada, conforme esquematizado na figura A.28. Isso faz com que tenhamos que assumir uma correção adicional nas dimensões extraídas, a qual possibilitou obtermos os valores corretos para o limite assintótico correspondente à constante TF (vide apêndice E). A outra observação trata-se do fato de nossas imagens corresponderem à nuvem condensada expandida, enquanto que a teoria desenvolvida no trabalho prevê as dimensões *in situ*. Para considerarmos a conexão com os resultados experimentais utilizamos uma teoria de expansão comumente empregada pela comunidade científica (20). Trata-se de uma teoria que se baseia no tratamento hidrodinâmico da GPE (Eq.1.6 e Eq.1.7). Nela considera-se que, durante a expansão, a densidade da nuvem condensada mantém seu perfil parabólico. Assim a cada instante o raio da nuvem é reescalado por um fator que só depende do tempo de expansão e dos parâmetros da armadilha magnética (Eq.1.10). O emprego dessa teoria de expansão, desenvolvida inicialmente para tratar do caso $T = 0$, deveu-se ao fato de não termos um sistema fechado de equações quando empregamos a aproximação HF para descrever a dinâmica das nuvens (19). A

validade para o emprego dessa teoria de expansão será esclarecida adiante.

2.1.3 A teoria $T = 0$ e dados experimentais

Temos a seguir uma breve descrição do modelo TF para $T = 0$ além da previsão desse modelo para os resultados experimentais. Um condensado de Bose-Einstein a temperatura zero é descrito pela função de onda de partícula única ψ a qual satisfaz a GPE:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) + U_0 |\psi(\vec{r})|^2 \right] \psi(\vec{r}) = \mu \psi(\vec{r}), \quad (2.20)$$

com:

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}, \quad (2.21)$$

onde $V(\vec{r})$ corresponde ao potencial da armadilha e μ ao potencial químico. Para nuvens extensas e densas o termo cinético da Eq.2.20 pode ser desprezado frente aos demais, reduzindo a última a uma equação algébrica, da qual o perfil de densidade da nuvem condensada é facilmente extraído (Eq.2.22).

$$n_0(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2 = \frac{\mu - V(\vec{r})}{U_0}. \quad (2.22)$$

Considerando um potencial harmônico isotrópico $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, temos que a densidade corresponde a uma parábola invertida, em cujos limites R vale a relação:

$$\mu = V(R) \quad (2.23)$$

Impondo a condição de normalização (Eq.2.24) encontramos a expressão para o potencial químico, a qual, associada à condição de contorno (Eq.2.23), permite expressarmos o parâmetro R^5/N_0 (Eq.2.25), que será o alvo de investigação desse trabalho.

$$\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} = \int n_0(\vec{r}) d^3\vec{r} = N_0, \quad (2.24)$$

$$\frac{R^5}{N_0} = \frac{15}{4\pi} \frac{U_0}{m\omega^2} = \mathcal{C} \quad (2.25)$$

Para o caso particular da teoria TF, esse último corresponde a uma constante que só depende dos parâmetros atômicos e dos da armadilha. De acordo com o modelo de expansão (20), após um intervalo de tempo t , essa constante apresentará o seguinte valor:

$$\mathcal{C}_{TOF} = \left([1 + \lambda^2(\tau \arctan \tau - \ln \sqrt{1 + \tau^2})] \sqrt{1 + \tau^2} \right)^{5/3} \mathcal{C} \quad (2.26)$$

onde a anisotropia da armadilha é definida pelo parâmetro $\lambda = \omega_x/\omega_z$ e τ está relacionado ao tempo de expansão através de $\tau = t\omega_z$. Na expressão 2.25 para \mathcal{C} substituímos ω por $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_z^2)^{1/3}$ a fim de compararmos as previsões do modelo TF com os nossos resultados experimentais.

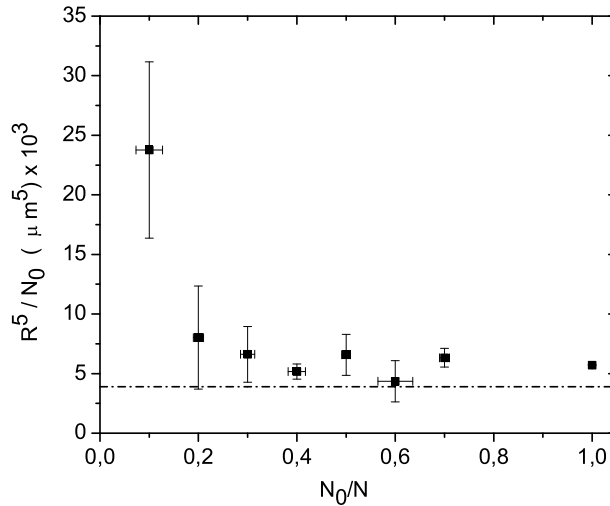


Figura 2.3 – Resultados experimentais para a razão \bar{R}^5/N_0 como função da fração condensada. A linha tracejada mostra as previsões do modelo $T = 0$ para os nossos parâmetros experimentais.

O gráfico (Fig.2.3) corresponde à dependência da quantidade \bar{R}^5/N_0 com a fração de átomos condensados ($\bar{R} = (R_\rho^2 R_z)^{1/3}$). Vemos que os dados mostram a tendência para a constante TF a medida que N_0/N se aproxima de 1 com T tendendo a zero. Porém se afasta gradativamente desta a medida que nos aproximamos da temperatura crítica. Esse último fato nos fez associar a influência dos átomos da nuvem térmica sobre os do condensado como o fator responsável pelo desvio nos dados experimentais.

2.1.4 Modelos de Temperatura Finita

Partimos então para o desenvolvimento de modelos para incluir a influência dos átomos térmicos. Inicialmente adicionamos um potencial repulsivo referente à nuvem térmica na GPE. Em seguida, tendo como base as teorias de temperatura finita, partimos para o desenvolvimento de um modelo que superasse as deficiências do primeiro.

Modelo Simples : extensão de Thomas – Fermi

Para considerar a interação dos átomos térmicos com os átomos do condensado incluímos na GPE um potencial proporcional a densidade dos átomos térmicos $2U_0n_T(\vec{r})$. Nesse último consideramos espalhamento por onda-s, já que ainda estamos em um regime de baixa temperatura. O fator dois advém do termo de troca, o qual deve ser considerado pelo fato de termos mais de um estado quântico disponível.

$$n_0(\vec{r}) + 2n_T(\vec{r}) = \frac{\mu - V(\vec{r})}{U_0} \quad (2.27)$$

Utilizando novamente a aproximação TF, isto é, desprezado o termo cinético, obtemos a Eq. 2.27, que foi integrada em todo espaço. A relação obtida foi arranjada para expressarmos o parâmetro R^5/N_0 como função da fração de átomos condensados:

$$\frac{R^5}{N_0} = \mathcal{C} \left(\frac{2}{N_0/N} - 1 \right) \quad (2.28)$$

Já da Eq.2.28 vemos que esse parâmetro tende para a constante apropriada quando N_0/N tende a unidade, além de aumentar com a diminuição dessa fração. Na (Fig.2.4) temos a previsão desse modelo juntamente com os resultados experimentais.

Conforme se observa na Fig.2.4, o modelo superestimou a curva experimental. Dentre as razões para a discordância podemos destacar o fato de que todos os átomos da nuvem

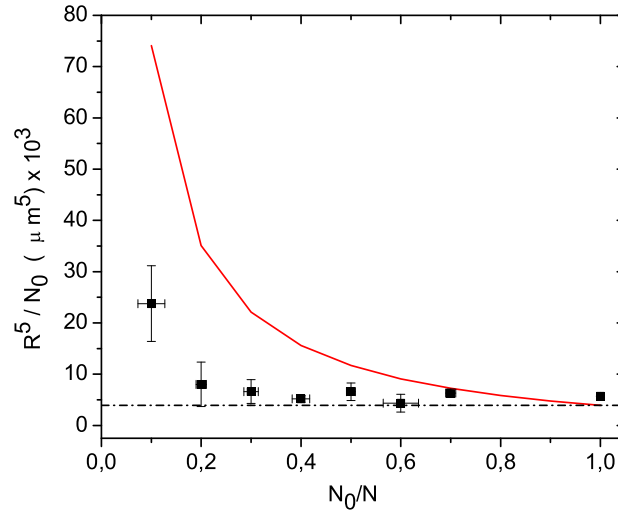


Figura 2.4 – Nossos resultados experimentais junto com os resultados calculados através do modelo simples descrito no texto.

térmica foram incluídos nesse potencial repulsivo. Porém a nuvem térmica é mais extensa que a do condensado na armadilha, de forma que não serão todos os átomos térmicos que deverão fazer parte desse potencial. Além disso, nessas considerações incluímos a influência dos átomos térmicos sobre os do condensado, porém a recíproca não foi estabelecida. Na próxima seção desenvolveremos um modelo em que consideramos a influência mútua entre as nuvens térmica e condensada.

Modelo Hartree-Fock Analítico (HFA)

A influência mútua entre as nuvens é considerada no modelo HF de temperatura finita (18,19). Conforme ressaltado na introdução, iremos nos basear na sua versão semiclassical ($k_B T > \hbar\omega$). Sendo assim as densidades da nuvem térmica e condensada são obtidas pela resolução do sistema autoconsistente:

$$n_0(\vec{r}) = \frac{\mu - V(\vec{r}) - 2U_0 n_T(\vec{r})}{U_0} \Theta(\mu - V(\vec{r}) - 2U_0 n_T(\vec{r})) \quad (2.29)$$

$$n_T(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left(e^{-\frac{V(\vec{r}) + 2U_0 n_T(\vec{r}) + 2U_0 n_0(\vec{r}) - \mu}{k_B T}} \right) \quad (2.30)$$

onde n_0 e n_T correspondem à distribuição de densidade das nuvens térmica e condensada, Θ é a função de Heaviside, $\lambda_T = \sqrt{\hbar^2/2\pi m k_B T}$ o comprimento de onda de de Broglie e $g_{3/2}$ a função de Bose:

$$g_{3/2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}} \quad (2.31)$$

Os átomos térmicos estão sujeitos a um potencial efetivo dado por:

$$V_{eff}(\vec{r}) = V(\vec{r}) + 2U_0 n_T(\vec{r}) + 2U_0 n_0(\vec{r}) \quad (2.32)$$

Juntamente com a condição de normalização Eq.2.33, esse sistema só poderá ser resolvido numericamente.

$$\int [n_0(\vec{r}) + n_T(\vec{r})] d^3\vec{r} = N \quad (2.33)$$

Com o intuito de continuar a dar um tratamento analítico ao problema consideramos algumas simplificações nessa teoria. A primeira delas consistiu em desprezarmos a interação entre átomos térmicos, dada a sua baixa densidade. Porém mantivemos o termo do potencial repulsivo do condensado no potencial efetivo dado pela Eq.2.32. O próximo passo foi assumir a existência de um balanço quantitativo entre o potencial químico e esse potencial repulsivo devido ao condensado, mantido na equação do potencial efetivo ($2U_0 n_0(\vec{r}) \sim \mu$). Fisicamente esse procedimento equivale a aproximar o perfil do condensado por uma distribuição homogênea. Adotando essas aproximações obtemos uma expressão simplificada para Eq.2.30:

$$n_T(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2}(e^{-V(\vec{r})/k_B T}) \quad (2.34)$$

Adotando novamente um potencial harmônico isotrópico, a integração das equações (2.29) e (2.34), juntamente com a condição de conservação do número nos permite determinar o potencial químico:

$$\mu = \frac{3}{4\pi} \left[\frac{NU_0}{R^3} + \frac{2\pi}{5} m\omega^2 R^2 - \frac{U_0(c_0 f(R/\sigma) + c_1) T^3}{R^3} \right], \quad (2.35)$$

onde:

$$c_0 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{k_B}{\hbar\omega} \right)^3, \quad c_1 = \zeta(3) \left(\frac{k_B}{\hbar\omega} \right)^3, \quad e \quad \sigma = \sqrt{\frac{2k_B T}{m\omega^2}} \quad (2.36)$$

e a função Zeta de Riemann $\zeta(3) = 1.202$. Essa expressão contém o termo correspondente a $T = 0$ juntamente com a correção devido a temperatura finita, a qual depende da fração de átomos condensados através de T , além da razão entre as dimensões das nuvens condensada e térmica R/σ por meio de $f(R/\sigma)$.

Para determinar R faremos o uso das condições de contorno:

$$n_0(R) = 0 \implies \mu - V(R) - 2U_0 n_T(R) = 0 \quad (2.37)$$

Teremos então:

$$R^5 = \frac{15}{4\pi} \frac{U_0}{m\omega^2} [N - (c_0 f(R/\sigma) + c_1 + c_2 g(R/\sigma)) T^3] \quad (2.38)$$

com:

$$c_2 = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{k_B}{\hbar\omega} \right)^3 \quad (2.39)$$

Usando a expressão para gases ideais aprisionados que relaciona a temperatura com a fração de átomos condensados (21), a Eq.2.38 pode ser reescrita:

$$\frac{R^5}{N_0} = \frac{15}{4\pi} \frac{U_0}{m\omega^2} \frac{1}{r} \left[1 - \frac{F(R/\sigma)}{N} \left(\frac{k_B}{\hbar\omega} \right)^3 (1-r) T_c^3 \right] \quad (2.40)$$

com $r = N_0/N$. Substituindo o valor da temperatura crítica (T_c) pelo valor previsto para gases ideais aprisionados teremos:

$$\frac{R^5}{N_0} \approx \frac{15}{4\pi} \frac{U_0}{m\omega^2} \frac{1}{r} [1 - 0.83 F(R/\sigma)(1-r)] \quad (2.41)$$

A expressão Eq.2.41 pode ser escrita de maneira simplificada:

$$\frac{R^5}{N_0} = \frac{P_1}{r} [1 + P_2(1-r)] \quad (2.42)$$

com $P_1 = C_{TOF}$ e $P_2 = -0.83 F(R/\sigma)$. Novamente para $T = 0$ a Eq.2.41 corresponde exatamente ao parâmetro TF. A correção para $T \neq 0$ é similar a da Eq.2.35, com a adição da $g(R/\sigma)$. Combinamos esses termos em $F(R/\sigma) = c_0 f(R/\sigma) + c_1 + c_2 g(R/\sigma)$, cuja dependência em um amplo intervalo da razão R/σ é mostrado (Fig.2.5).

A Eq.2.42 foi utilizada para ajustar os pontos experimentais. Apesar do modelo ser desenvolvido para prever as dimensões da nuvem *in situ*, ele também é aplicável para a nuvem expandida. A informação devido à expansão está contida no parâmetro P_1 , o

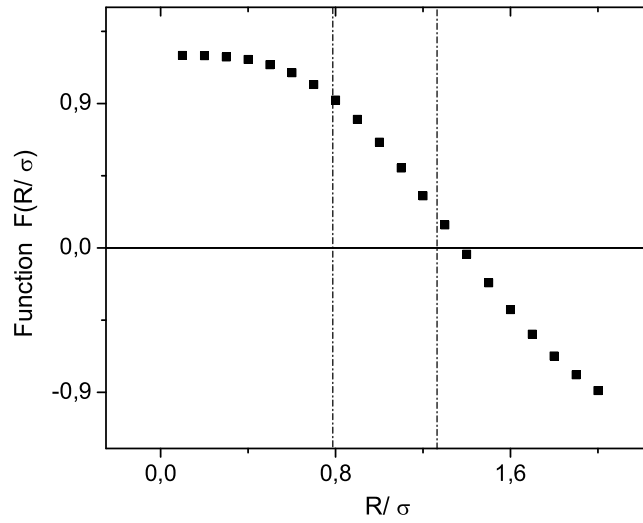


Figura 2.5 – Comportamento da função $F(R/\sigma)$ com a razão R/σ entre a dimensão do condensado pela da nuvem térmica.

qual é proporcional a constante \mathcal{C} , de acordo com o modelo de expansão desenvolvido nas referências (20,14). Na Fig.2.6 temos os resultados experimentais juntamente com as previsões do modelo. Nesse caso $P_1 = 3900$ e $P_2 = -0.49 \pm 0.05$. O parâmetro P_1 foi

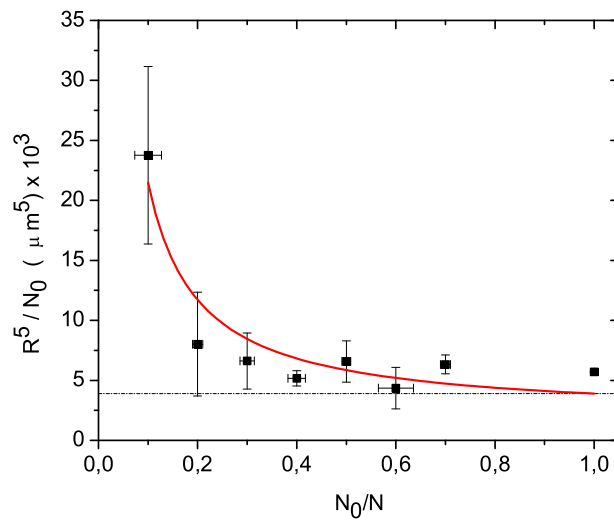


Figura 2.6 – Resultados experimentais (pontos) junto com a curva correspondente ao modelo Hartree-Fock Analítico (HFA) (linha cheia) ajustado conforme explicado no texto.

fixado no valor assintótico \mathcal{C}_{TOF} obtido por meio da Eq.2.26 enquanto que P_2 foi obtido pelo ajuste dos dados usando o método dos mínimos quadrados. O valor desse último

parâmetro, porém, pode também ser justificado. Para obter P_2 é necessário calcular a amplitude $F(\bar{R}/\sigma)$ para \bar{R}/σ *in situ*. Usando os dados experimentais e o fato de que $\sigma_{in\ situ} = \sigma_{TOF}/t_{TOF}\bar{\omega}$ (14), o valor de $\sigma_{in\ situ}$ é determinado para situação desejada. Também para $\bar{R}_{in\ situ}$ o modelo de expansão (14) foi aplicado, possibilitando extraí-lo das imagens expandidas. Considerando separadamente os resultados para as direções x e z , obtivemos $[\bar{R}/\sigma]_{in\ situ}$ dentro do intervalo $[0.8, 1.2]$. Este intervalo é mostrado entre as linhas tracejadas na Fig.2.5. Nesse intervalo o valor médio da função $F(\bar{R}/\sigma)$ é 0.6. Este valor, juntamente com a definição para P_2 , leva a $P_2 \sim -0.5$, que está relativamente próximo do melhor ajuste com os pontos experimentais.

A explicação para a concordância do modelo em ambos os regimes de temperatura, próximo e distante de T_c , se deve ao fato da equivalência assumida entre μ e o potencial repulsivo ser válida não só para a região longe de T_c , onde a aproximação de campo homogêneo devido ao condensado é mais razoável, mas também para região próxima a T_c , já que nesse ponto a densidade do condensado é muito baixa permitindo que ambos, o potencial químico e potencial repulsivo, possam ser desconsiderados. Essa aproximação transforma o sistema dado pelas equações Eq.2.29 e Eq.2.30 em um sistema solúvel analiticamente. Porém deve-se ressaltar que com as simplificações adotadas obtivemos um perfil gaussiano para a nuvem térmica. Quando consideramos o tratamento numérico do sistema autoconsistente, porém, observa-se a existência de picos no perfil dos térmicos na região das bordas do condensado (19, 22). Porém essa modificação na densidade tende a ser menos significativa quando tratamos de nuvens maiores e mais densas.

O fato de não utilizarmos imagens *in situ* da nuvem condensada fez com que necessássemos de um modelo adicional de expansão para que pudéssemos fazer a conexão entre os resultados experimentais e as previsões do modelo desenvolvido. A justificativa para o uso desse modelo de expansão se baseia no fato de considerarmos que a maior influência da interação mútua ocorre na armadilha. Assim a explicação para o desvio nos resultados experimentais seria dada por um modelo que explicasse a configuração *in situ*. Entretanto não desconsideramos a importância do desenvolvimento de modelos que incluam a interação mútua mesmo durante a expansão das nuvens. Porém acreditamos que

esse deva ser um efeito secundário nos resultados experimentais obtidos.

2.2 Cálculo Numérico Auto-Consistente

2.2.1 Full Hartree-Fock (FHF) e Previsões do Modelo HFA

Inicialmente com as equações do nosso modelo (Eq.2.29 e Eq.2.34), calculamos numericamente a variação das dimensões e número de átomos da nuvem condensada devido a temperatura. Na etapa anterior utilizamos o valor experimental médio da razão entre as dimensões das nuvens térmica e condensada para que pudéssemos determinar a relação R^5/N_0 diretamente das equações do modelo. Para o caso da simulação numérica, porém, começamos com $T = 0$, fixando um valor inicial para o número total de átomos e calculando o correspondente raio TF. Partindo desse valor inicial para o raio, incrementamos o valor da temperatura, calculamos σ (Eq.2.36) e utilizamos a expressão Eq.2.38 para determinarmos o valor do raio, o qual será recalculado até a convergência ser atingida. O raio inicial da próxima etapa, a qual se inicia com um novo valor de temperatura, consiste no valor final calculado na anterior. Os resultados obtidos para o raio do condensado para diferentes valores de temperatura encontra-se a seguir (Fig.2.7), assim como o respectivo raio TF calculado através do número total de átomos condensados correspondente a cada temperatura. Vale lembrar que no modelo HFA desenvolvido a variação de N_0/N com T obedece a equação para gases ideais aprisionados, conforme foi confirmado na simulação (Fig.2.8).

Da mesma forma resolvemos numericamente o sistema acoplado de equações (Eq.2.29 e Eq.2.30). Iniciamos em $T = 0$ assumindo um perfil TF para a nuvem condensada,

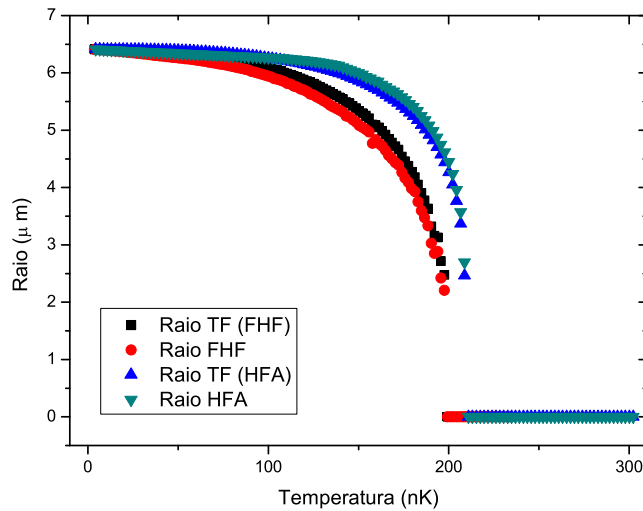


Figura 2.7 – Simulação numérica: raio da nuvem condensada *vs* temperatura para cada um dos modelos.

dado um número total fixo de átomos. Partindo desse valor inicial, a cada etapa em que incrementamos o valor da temperatura, recalculamos as densidades térmicas e condensada. O perfil de densidade do próximo ciclo corresponde ao valor final do ciclo anterior, e a condição para o término de um ciclo se atrela a convergência no valor do potencial químico. Os resultados desse cálculo para R *vs* T , com a aproximação TF respectiva, além de N_0 *vs* T encontram-se respectivamente na Fig.2.7 e Fig.2.8.

Vemos que em ambos os casos as previsões do FHF encontram-se abaixo do valor previsto por nosso modelo, isto é, obtivemos no FHF um valor menor para o raio que se atrela ao fato da depleção do condensado ser maior para uma dada temperatura. No modelo HFA desenvolvido temos uma depleção que assume valor intermediário entre aquela correspondente ao caso de um gás de Bose interagente homogêneo e aquela de um gás interagente aprisionado, na situação onde temos pouca sobreposição entre as nuvens térmica e condensada. No primeiro caso, dada certa $T < T_c$, a depleção menor do condensado em relação ao caso ideal se deve ao fato da interação térmico-condensado ser bastante intensa. Como o termo de troca magnifica essas interação de contato em relação ao caso da interação entre átomos do estado fundamental, é energeticamente favorável que ocorra a depleção da ocupação dos estados excitados. Já para o caso aprisionado onde temos a nuvem térmica com extensão maior, e portanto bem mais diluída quando comparada

ao condensado, as interações térmico-condensado são bem menos frequentes quando comparadas as que ocorrem entre os átomos condensados, sendo energeticamente favorável para os átomos ocuparem os primeiros estados excitados do sistema. A seguir (Fig.2.10)

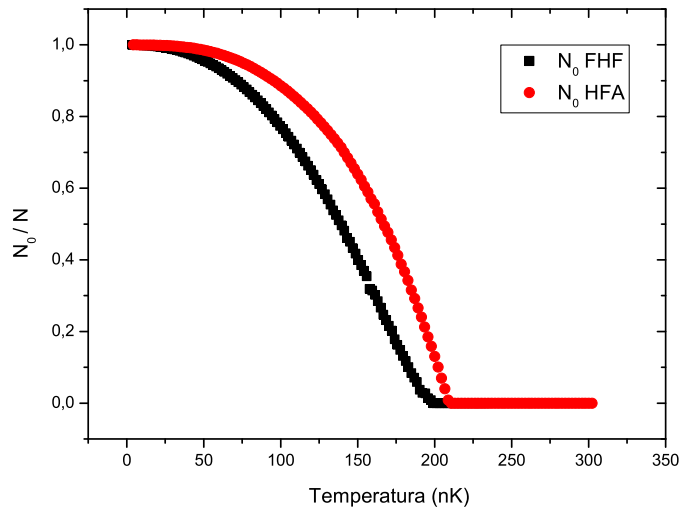


Figura 2.8 – Simulação numérica: variação do número de átomos condensados com a temperatura

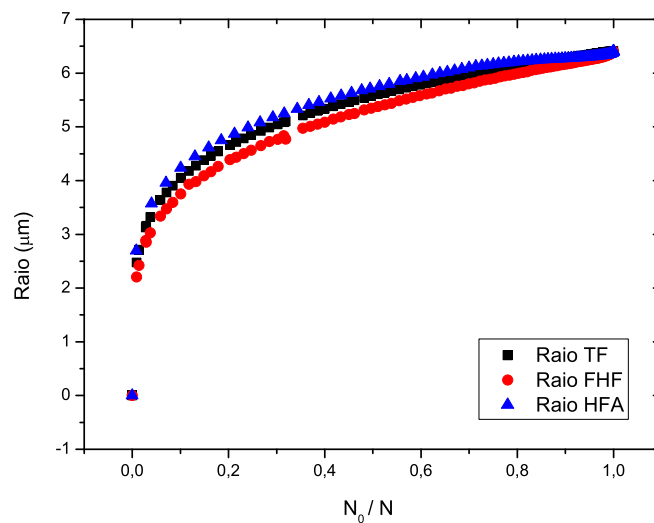


Figura 2.9 – Simulação numérica: raio da nuvem *vs* fração condensada para cada um dos modelos

temos a previsão para o valor *in situ* de R^5/N_0 *vs* N_0/N para o modelo desenvolvido além das previsões TF e do FHF.

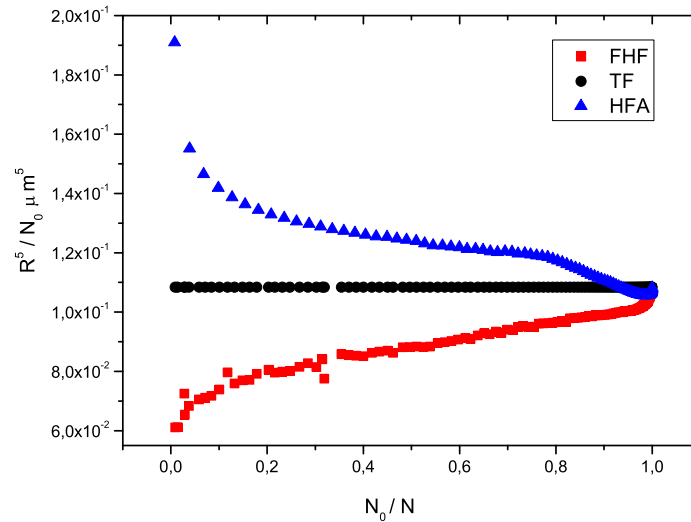


Figura 2.10 – Simulação numérica: R^5/N_0 *in situ* vs fração condensada

Podemos concluir que, diferentemente do que ocorreu quando tentamos justificar os resultados experimentais com a utilização do nosso modelo, não conseguiríamos explicá-los utilizando o FHF associado ao modelo de expansão empregado (20) anteriormente, o qual simplesmente deslocaria as curvas por um valor constante, independentemente da temperatura.

2.2.2 Problemas com a Conexão das Teorias: a expansão do condensado

Nosso modelo se baseou na aproximação semiclássica da teoria de HF para prever a condição das nuvens *in situ*. Para fazer a conexão com os experimentos utilizamos uma teoria hidrodinâmica de expansão que utiliza a configuração inicial para prever as dimensões da nuvem condensada expandida, as quais diferenciam-se da inicial por um fator multiplicativo que evolui segundo equações hidrodinâmicas. Para nuvem térmica utilizamos a expansão balística. Dessa forma desconsideramos as interações mútuas na

expansão das nuvens, a quais evoluíram independentemente dada a condição inicial de equilíbrio, essa sim estabelecida considerando essas interações.

Na literatura (23), porém, ressalta-se a necessidade de levar em conta a influência dos átomos térmicos na expansão. Estima-se (23) que a nuvem térmica “comprimiria” a condensada *in situ*, tendo como base o perfil de densidade obtido através do cálculo numérico do FHF. A presença de “ombros” no perfil da nuvem térmica próximo as bordas do condensado seria responsável por essa compressão, a qual aumentaria a energia de interação repulsiva no condensado, refletindo em uma maior velocidade de expansão. Essa seria uma possível explicação para o resultado experimental do aumento da razão R^5/N_0 com a aproximação de T_c .

Muitos autores já resolveram o sistema acoplado do FHF (24, 25, 22) e fizeram previsões com essa teoria, comparando os seus resultados com modelos de gás ideal e semi-interagente (24) (o qual considera apenas a influência dos átomos condensados nos térmicos através do deslocamento do potencial químico - o perfil do condensado permanecendo o TF do caso do gás térmico ideal). Dentre os resultados previstos por esses autores estão a fração de átomos no condensado como função da temperatura, largura quadrática média (*r.m.s.*) tanto da nuvem condensada quanto da térmica, energia de expansão da nuvem térmica além de algumas propriedades termodinâmicas do sistema (24, 25). Porém o grande problema consiste na conexão desses cálculos teóricos com os resultados experimentais, os quais baseiam-se, em sua grande maioria, na análise das imagens de absorção da nuvem condensada expandida. Como a aproximação de HF não descreve a dinâmica das duas nuvens, o método empregado pelos autores para caracterizar a expansão térmica e condensada consiste nos métodos convencionais empregados por nós nesse trabalho. Dessa forma uma teoria alternativa à FHF deveria ser desenvolvida para possibilitar a comparação com os dados experimentais.

Conforme observado nos resultados da seção anterior, se empregarmos as previsões do modelo FHF associadas ao modelo de expansão utilizado por nós nesse trabalho, não conseguiríamos justificar os nossos resultados experimentais. Dessa forma nos encontramos no seguinte impasse: ou a HF não está correta ou o modelo de expansão comumente

empregado pela comunidade científica não seria apropriado para descrever a dinâmica da nuvem parcialmente condensada. Nesse ponto vale ressaltar que, segundo alguns autores, o modelo HF apresenta séria inconsistência devido ao fato de nessa aproximação desprezarmos a densidade anômala. Essa última estaria relacionada a quebra da simetria original do sistema devido a ocorrência da condensação (26), sendo inclusive uma forma alternativa de representar esse processo.

Na próxima etapa consideraremos um cálculo variacional, baseado ainda nas aproximações adotadas no nosso modelo, mas que inclua a influência os átomos térmicos também durante a expansão.

Finalmente exploraremos alguns aspectos de modelos alternativos ao HF e a teoria de expansão hidrodinâmica, os quais visamos empregar futuramente para reinterpretarmos os nossos resultados experimentais.

2.3 Método Variacional

Conforme elucidado na seção anterior, em nosso modelo utilizamos uma teoria de temperatura finita, que considera a interação mútua das nuvens durante o estabelecimento da configuração na armadilha, associada a uma teoria de temperatura zero, que despreza essa interação na expansão. Uma das formas encontradas para considerar a interação em ambos os casos foi através de um cálculo variacional, tendo como base algumas das aproximações feitas no nosso modelo inicial.

Começamos determinando a densidade Lagrangiana do sistema (Eq.A.62), onde a expressão para o potencial repulsivo dos térmicos foi adicionada. Para o cálculo da configuração de equilíbrio e expansão do condensado utilizamos as equações de Euler que regem a evolução das dimensões da nuvem (Eq.A.64 e Eq.A.65), deduzidas a partir da minimização da Lagrangiana. Os átomos térmicos foram tratados de maneira independente

na expansão, apesar de termos incluído sua influência sobre a expansão do condensado.

2.3.1 Modelo Variacional para Expansão

Resumidamente, no método variacional substituímos na expressão da densidade Lagrangiana do sistema (Eq.A.62) uma função de onda teste (Eq.A.48), a qual representa o condensado. A expressão que utilizamos para essa função é gaussiana, com diversos parâmetros. Vale lembrar que a densidade Lagrangiana, quando integrada no tempo e espaço, nos fornece a Ação (Eq.A.49), grandeza que quando minimizada com respeito a função de onda ψ nos leva a equação de GPE generalizada, o qual rege a evolução da função de onda ψ do estado fundamental. Para maiores esclarecimentos sobre o método e as equações derivadas com a utilização dele vide os apêndices A e B. Realizamos então uma série de simulações numéricas com base nas equações encontradas (Eq.A.64 e Eq.A.65). Inicialmente resolvemos o sistema sem átomos térmicos (caso C). Depois os incluímos apenas na condição inicial (caso B). Finalmente colocamos os térmicos influenciando também na expansão do condensado (caso A).

2.3.2 Resultados Método Variacional

Na configuração de equilíbrio a contribuição dos térmicos foi aumentar as dimensões da nuvem condensada, resultado previsto também por nosso modelo HFA (Fig.2.11). Uma pequena diferença nos valores absolutos dos raios do variacional em relação aos raios previstos no HFA se deve ao fato de termos utilizado uma função teste gaussiana no

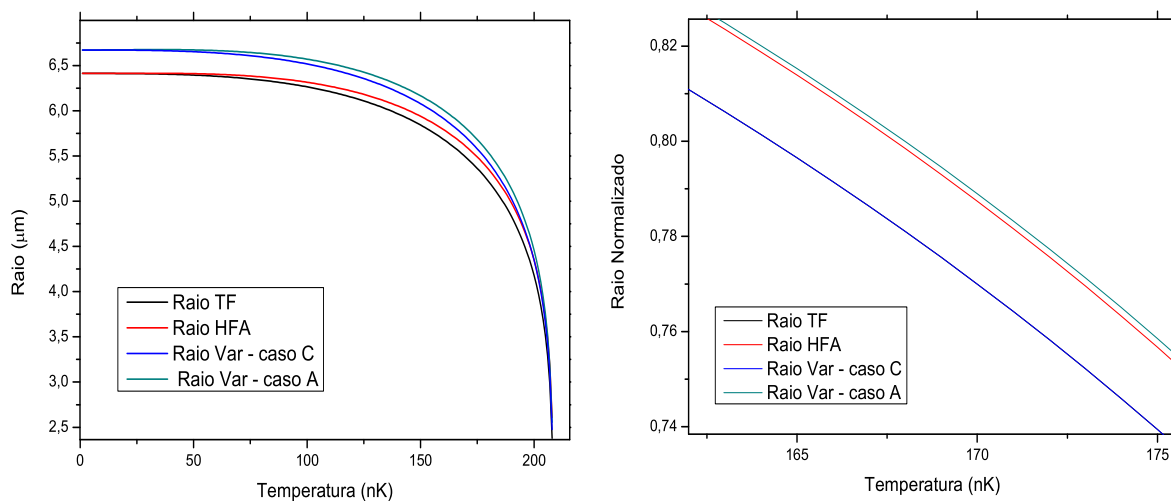


Figura 2.11 – Raio da configuração de equilíbrio *vs* temperatura e comparação entre os valores das curvas normalizadas.

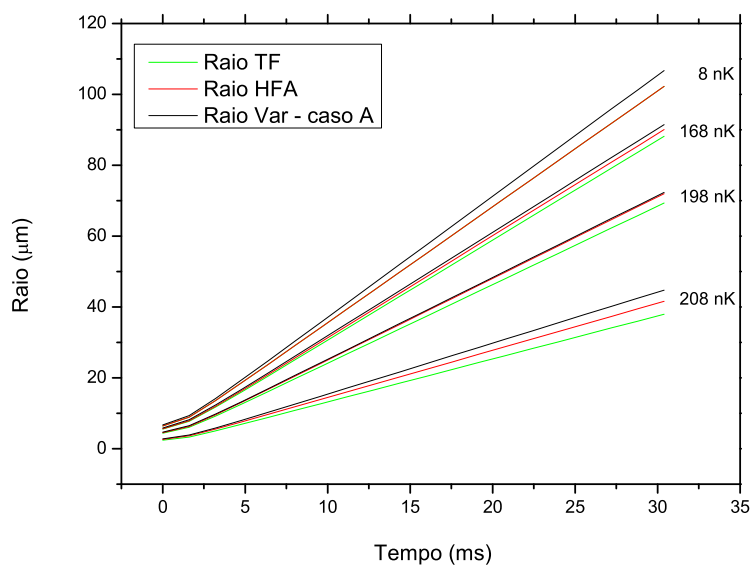


Figura 2.12 – Variação das dimensões da nuvem condensada com o tempo de expansão. Comparação dos resultados obtidos através do cálculo variacional com aquele em que a dimensão inicial foi determinada com o modelo HFA seguida da expansão hidrodinâmica

primeiro caso. Para converter a largura quadrática média em raio utilizamos o fator de conversão (equações A.59 , A.60 e A.61). Como no método variacional consideramos o termo cinético, esse poderá ser a causa de termos esse ligeiro deslocamento em relação aos resultado do modelo, no qual empregamos a aproximação TF.

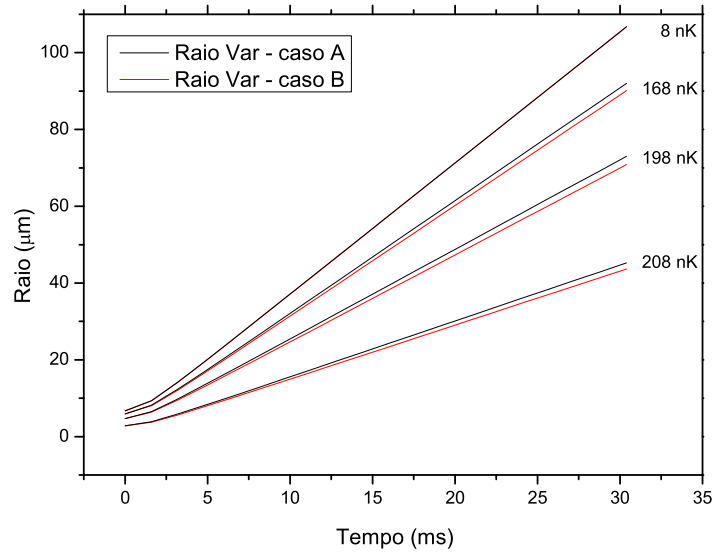


Figura 2.13 – Evolução das dimensões da nuvem condensada liberada de armadilha isotrópica para diferentes valores de temperatura da amostra

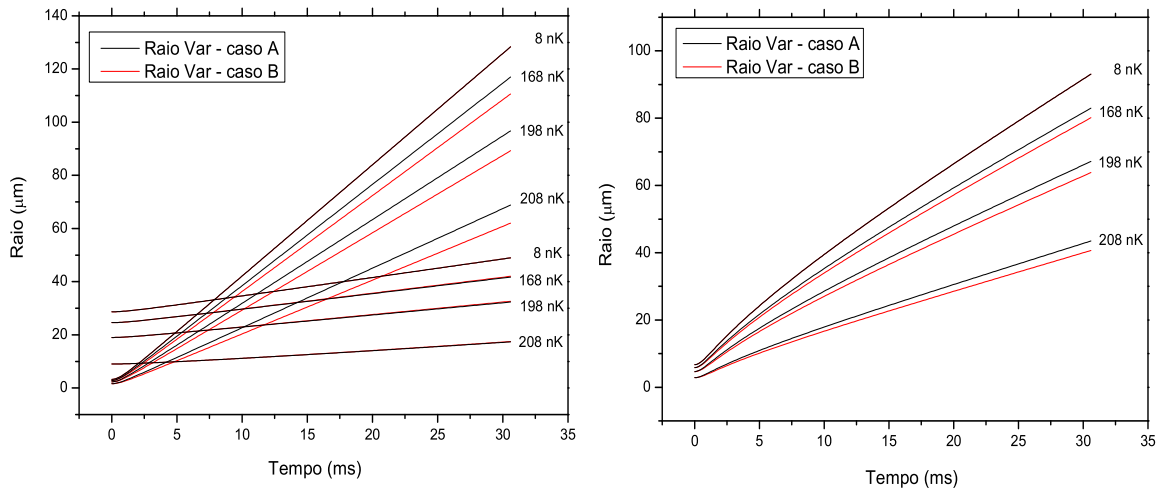


Figura 2.14 – Evolução das dimensões da nuvem condensada liberada de armadilha com simetria axial para diferentes valores de temperatura da amostra e a média geométrica desses resultados.

Realizamos também (Fig.2.12) a comparação entre a expansão com o método variacional, onde consideramos os térmicos na condição inicial e na expansão, com aquela obtida com a condição inicial prevista por nosso modelo associada a expansão hidrodinâmica. Essa análise foi repetida para diversas temperaturas. Vemos que ocorreu maior discordância entre esses resultados quando comparamos as regiões extremas de temperatura. A explicação pode ser dada com base na função teste gaussiana assumida no

método variacional, a qual não seria adequada para descrever o condensado em temperaturas mais baixas. Já para temperaturas próximas à crítica, a aproximação TF é que não seria adequada. Para os regimes de temperatura intermediários vemos que as previsões dos dois modelos para descrever a influência dos térmicos coincide razoavelmente, nos permitindo concluir que, desde que corrigíssemos a condição inicial, as aproximações realizadas no modelo são boas.

Uma observação que pode ser feita com respeito aos resultados mostrados corresponde a expansão menos acelerada da nuvem condensada com o aumento da temperatura. Uma possível explicação seria a de que o fator determinante na expansão seria a energia da interação repulsiva entre os átomos do condensado. Assim, devido a depleção do condensado com o aumento da temperatura, essa energia disponível para expansão seria drasticamente reduzida.

Analisamos então os resultados do método variacional (Fig.2.13) nas situações A e B descritas anteriormente. Comparando as situações com térmicos na condição inicial (casos A e B), vemos que quando colocamos a interação também durante a expansão as dimensões da nuvem condensada apresentam um ligeiro aumento em relação ao caso sem essa interação. Concluimos que esse potencial repulsivo dos térmicos contribui para expansão mais acelerada da nuvem condensada.

Em (Fig.2.14) temos a análise feita considerando a simetria axial da armadilha e tratando separadamente cada direção. Esse tratamento individualizado para cada direção é possível de ser feito através desse método variacional. No modelo HFA desenvolvido, porém, não conseguimos individualizar as direções, motivo pelo qual tratamos a situação isotrópica e comparamos com a média geométrica dos resultados experimentais. Esse tratamento variacional axial permite confirmar a validade do emprego da comparação entre média geométrica e condensado isotrópico além de analisar como o as interações com os térmicos se modifica com o grau de confinamento da armadilha. Verificamos que na direção radial (mais confinada) obtivemos comportamento semelhante ao caso isotrópico. Para a direção axial, porém, praticamente não houve distinção entre as curvas correspondentes aos resultados do caso A e B. Devido ao fato da nuvem térmica estar mais estendida

nessa direção menos confinante, o contato com a parte condensada na armadilha é menor e a influencia dos átomos térmicos na condição inicial e expansão fica drasticamente reduzida. Vale ressaltar que quando tomamos a média geométrica desses resultados, para cada uma das temperaturas, o comportamento final das curvas se assemelha ao caso do condensado isotrópico considerado anteriormente (Fig.2.14), à medida que prevalece a influencia dos térmicos na direção radial.

2.4 Conclusão e Perspectivas Futuras para análise da temperatura finita

De acordo com a teoria de TF ($T = 0$), o valor para a razão R^5/N_0 deveria ser uma constante. Nos experimentos, porém, observamos desvios dessa constante próximo de T_c , que nos levou a associá-los aos átomos térmicos. Para contabilizar esse efeito, um potencial repulsivo foi adicionado na expressão para densidade TF, o qual superestimou o efeito da nuvem térmica. Partimos então para um modelo mais elaborado de temperatura finita, adotando algumas simplificações para continuar com o tratamento analítico. Os resultados experimentais foram previstos por esse modelo com acordo razoável. Assumimos que os efeitos da nuvem térmica seriam importantes durante o estabelecimento da condição de equilíbrio inicial na armadilha. Durante a expansão, porém, devido a diluição da densidade das nuvens, a essas foi dado um tratamento independente: a nuvem térmica expandindo balisticamente e a do condensado segundo equações baseadas num tratamento hidrodinâmico.

As aproximações envolvidas na derivação da HF a tornam incapaz de descrever a dinâmica das nuvens. Para a nuvem condensada a GPE generalizada segundo HF (Eq.1.4) consiste apenas no acréscimo de um campo médio referente ao potencial dos átomos da

nuvem térmica. Quando empregarmos HF para descrever a dinâmica dos átomos térmicos, porém, obtemos como solução uma nuvem térmica estacionária. A impossibilidade de se obter um sistema fechado de equações é que torna essa teoria incompleta para evoluir temporalmente as nuvens térmica e condensada.

Uma alternativa para descrever a dinâmica das nuvens seria utilizar o formalismo desenvolvido por Zaremba, Nikuni and Griffin (ZNG) (27). A ZNG consiste em uma aproximação de campo médio que vai além de HF e que vem sendo empregada para descrever a dinâmica do sistema nuvem térmica-condensada. Nela o condensado continua sendo descrito pela GPE generalizada, porém com a inclusão adicional de um termo dissipativo. A nuvem térmica é descrita por uma equação derivada da cinética dos gases (equação de Boltzmann) adaptada para esse regime de temperatura abaixo da crítica.

Diferentemente da aproximação de HF, a ZNG possibilita a ocorrência de flutuações nas densidades térmica e condensada, isto é, as transições dos átomos entre esses dois estados, além daquelas entre os estados excitados da nuvem térmica. Esse formalismo vem sendo empregado para descrever a dinâmica de vários tipos de excitações (28,29,30), fornecendo um acordo razoável com os resultados experimentais. Essas excitações, porém, correspondem a pequenos desvios na situação de equilíbrio do condensado *in situ*. A ZNG ainda não foi empregada para descrever a expansão das nuvens, processo no qual teríamos uma brusca mudança entre uma situação de equilíbrio termodinâmico, com elevada taxa de colisões atômicas, para uma em que essas últimas cessariam quase que totalmente.

Nesse trabalho empregamos a aproximação de campo médio denominada HF para tentar descrever nosso sistema condensado. Alguns autores porém, ressaltam problemas nesse formalismo e apontam uma teoria alternativa, o modelo Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) (19, 31, 32, 33), adaptada para descrever os gases aprisionados. Conforme elucidado anteriormente, não conseguimos descrever a dinâmica do nosso sistema através do formalismo de HF. Além disso, existe uma inconsistência nesse formalismo com respeito a quebra de simetria que ocorre quando temos a ocupação macroscópica da fase condensada. A chamada densidade anômala, a qual é desprezada no HF, está relacionada ao aparecimento da fase condensada, sendo imprescindível para caracterizar o sistema a tem-

peraturas abaixo da de transição. A teoria de HFB consiste ainda em uma aproximação de campo médio, porém inclui a densidade anômala como uma variável adicional a ser tratada no problema. Uma possibilidade seria reinterpretar nossos resultados experimentais com base nessa nova teoria, a qual apresenta-se mais completa do que a teoria de HF. As previsões da HFB para as dimensões do condensado *in situ* serviriam inclusive para determinarmos a validade do emprego das teorias de expansão hidrodinâmicas para tratar esse problema de temperatura finita.

3 Terceiro Capítulo

Efeitos das Interações Dipolares

3.1 Interações Dipolares

3.1.1 Aspectos Gerais

As interações dipolares sempre despertaram muito interesse pelo seu caráter anisotrópico e de longo alcance. Estudos experimentais dessas interações são bem conhecidos para o caso de moléculas polares (34). No caso de condensados de átomos alcalinos, porém, a interação de van de Waals, de curto alcance e isotrópica, é o mecanismo de interação dominante. A baixas temperaturas esta interação pode ser descrita por um potencial de contato cujo único parâmetro significativo corresponde a seção de choque de espalhamento por onda-s.

Muitos fenômenos interessantes baseados nas interações de contato vêm sendo estudados. Utilizando a chamada ressonância de Feshbach, BEC moleculares vêm sendo realizados, assim como a transição de um BEC molecular para um gás de Fermi degenerado (35,36) e até mesmo a superfluidez vem sendo observada em um gás Fermi fortemente interagente (37). Considerando as curvas do potencial de espalhamento dos diferentes estados moleculares de átomos em colisão, a ressonância de Feshbach ocorre com o deslocamento da posição relativa dessas curvas devido a campos externos (geralmente magnéticos). Nesses valores de campo, o processo de espalhamento entre as partículas é ressonantemente aumentado, levando a modificações do espalhamento por onda-s.

Diferentemente do que ocorre com as interações de contato, a interação dipolo-dipolo

é de longo alcance e anisotrópica. Nos últimos anos, especialmente no contexto de gases quânticos degenerados, as interações dipolo-dipolo vêm despertando profundo interesse (11). Motivados pelo trabalho teórico, muitos dos esforços experimentais foram concentrados para a realização de gases quânticos degenerados com uma forte, ou até mesmo dominante, interação dipolar. A maioria dos experimentos lidam com moléculas polares, já que essas possuem um grande momento dipolar elétrico e, conseqüentemente, uma forte interação dipolo-dipolo.

Embora muito progresso tenha sido alcançado (38), ainda não foi possível alcançar a degenerescência quântica no gás de moléculas polares. Outra possibilidade seria usar átomos com momentos magnéticos maiores, como o cromo (^{52}Cr). No estado eletrônico fundamental, os átomos de cromo têm momentos magnéticos da ordem de $6\mu_B$, que é cerca de 6 vezes maior que o dos átomos alcalinos. Isso faz com que as interações magnéticas no cromo sejam comparáveis às interações de contato e possível de ser observada nos experimentos. Por exemplo, foi previsto que a expansão de um BEC de átomos de cromo deve depender da orientação dos momentos magnéticos (39). Outros fenômenos dipolares discutidos são a dependência da estabilidade e formato do BEC dipolar com o formato da armadilha e a orientação dos momentos de dipolo (12, 40, 41, 42), e até mesmo a possibilidade de novas transições de fase quântica (43).

A recente e bem sucedida realização do BEC de átomos de cromo (44, 45) possibilitou o acesso a uma nova completa classe de experimentos baseadas nas interações dipolo-dipolo.

3.1.2 Teoria para descrever o Condensado Dipolar

Considerando um gás de Bose diluído a baixa temperatura, podemos utilizar a aproximação de Born até primeira ordem para tratar as interações entre os átomos. Obtemos então uma expressão para a interação efetiva entre duas partículas (Eq.3.43), onde m

corresponde a massa atômica, a_s ao comprimento de espalhamento e δ denota a função delta de Dirac.

$$U_{contato}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.43)$$

Como a própria equação demonstra, trata-se de uma interação de curto alcance e isotrópica, pois independe do momento das partículas envolvidas. A consideração dessas interações é crucial para a descrição das propriedades da nuvem condensada, tais como a expansão livre e os modos de oscilação da nuvem na armadilha. O potencial advindo dessa interação para um gás de Bose aprisionado é dado pela Eq.3.44.

$$V_{contato}(\vec{r}) = \int U_{contato}(\vec{r} - \vec{r}') n_0(\vec{r}') d^3 r' = gn_0(\vec{r}) \quad (3.44)$$

Dada a sua dependência com a densidade da nuvem n_0 , esse potencial associa-se diretamente à configuração da armadilha.

Além dessa interação de “contato”, uma importante interação a ser considerada entre os átomos do condensado consiste nas interações dipolares. Trata-se da interação dipolo-dipolo entre os momentos de dipolo magnético μ associados ao elétron de valência dos átomos alcalinos. Essa última possui propriedades ainda mais interessantes do que a primeira, já que é de longo alcance e anisotrópica. Sendo assim seus efeitos tendem a enriquecer ainda mais a física do sistema. De acordo com Eq.3.45, a interação entre dois dipolos passa de atrativa para repulsiva dependendo do ângulo formado entre a direção do campo polarizador \hat{e} e o vetor da distância relativa entre os dipolos $(\vec{r} - \vec{r}')$.

$$U_{dd}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left(1 - \frac{3(\hat{e} \cdot (\vec{r} - \vec{r}'))^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) \quad (3.45)$$

Para obter o potencial dipolar, integramos essa interação entre pares sobre toda extensão da nuvem (Eq.3.46).

$$V_{dd}(\vec{r}) = \int U_{dd}(\vec{r} - \vec{r}') n_0(\vec{r}') d^3 r' \quad (3.46)$$

Utilizando teoria de perturbação, isto é, substituindo na integral (Eq.3.46) o perfil de densidade n_0 correspondente a nuvem sem as interações dipolares na aproximação TF, podemos determinar aproximadamente o formato desse potencial (46), o qual apresentará seus mínimos na direção do campo polarizador e máximos na direção perpendicular a ele.

O perfil desse potencial nos permite explicar o alargamento do condensado dipolar na direção de polarização, resultado contra-intuitivo se nos basearmos apenas nas regiões de atração e repulsão advindas da interação entre dois dipolos.

3.1.3 Estabilidade do condensado dipolar na armadilha

Nesta etapa foi considerado um gás dipolar de ^{87}Rb polarizado em uma armadilha magnética com simetria cilíndrica (campo de polarização na direção axial). Para uma dada configuração de frequências da armadilha magnética, o comprimento de espalhamento atômico original foi reduzido até o seu valor crítico. Esse último corresponde ao valor limite de a_s o qual possibilita uma nuvem estável na armadilha. A seguir (Fig.3.15) temos a representação desse valor crítico do comprimento de espalhamento como função da assimetria (λ) da armadilha magnética. Esses cálculos foram feitos com base no método

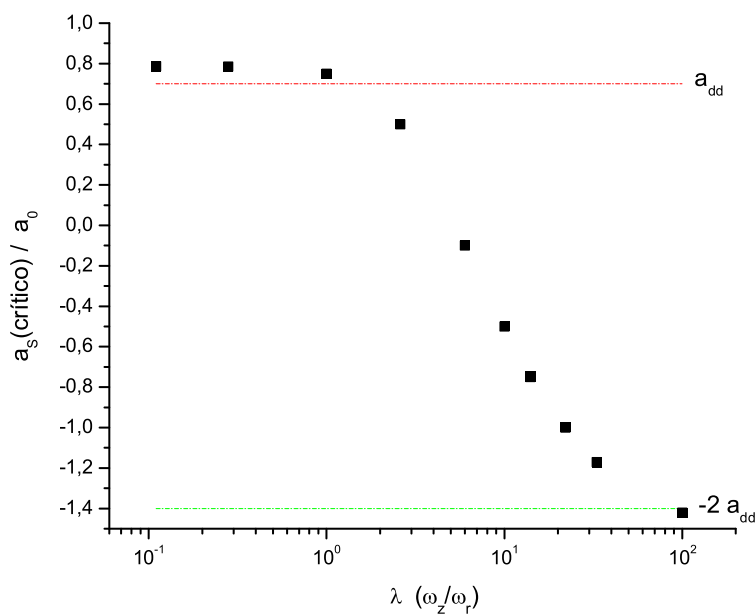


Figura 3.15 – Variação do comprimento de espalhamento crítico a_s como função de λ

variacional desenvolvido por (47) (vide o apêndice A para maior esclarecimento sobre esse método), considerando a solução do sistema de equações correspondentes à condição inicial das larguras da nuvem quando em equilíbrio na armadilha. Os valores assintóticos da

Tabela 3.1 – Configurações da armadilha magnética com simetria axial ($\omega_x = \omega_y \equiv \omega_r$) com $\bar{\omega}^3 = \omega_r^2 \omega_z$

TRAP	ω_r	ω_z	$\bar{\omega}$	$\lambda(\omega_z/\omega_r)$
1	1300	140	620	0.11
2	890	250	580	0.28
3	480	480	480	1.00
4	530	1400	730	2.60
5	400	2400	730	6.00
6	330	3400	720	10.00
7	280	4000	680	14.00
8	200	4400	560	22.00
9	150	5000	480	33.00
10	100	10000	460	100.00

curva correspondem aos previstos pelas teorias dipolares, os quais coincidem com $-2 a_{dd}$ e a_{dd} (onde $a_{dd} = \mu_0 \mu^2 m / 12 \pi \hbar^2$) quando passamos de uma armadilha de configuração *oblate* ($\lambda > 1$) para uma *prolate* ($\lambda < 1$). Esses valores podem ser extraídos quando consideramos o balanço entre as energias de interação dipolar e de contato (calculadas também através do método variacional (46)) como fator determinante da configuração da nuvem. Essa aproximação é válida para o regime de nuvens densas e extensas, onde essas interações são mais importantes, já que dependem do número de átomos da nuvem condensada.

A variação do a_s crítico com λ não seria esperada caso não tivéssemos a interação dipolar. A condição de estabilidade do condensado com as interações dipolares depende fortemente da sua distribuição de densidade e, conseqüentemente, da configuração da armadilha magnética. Essa dependência com a armadilha é reduzida para o caso do con-

densado com interação de contato apenas: para a_s positivo, o condensado é sempre estável, independentemente da assimetria da armadilha, enquanto que, no regime de a_s negativo, o fator principal na determinação da estabilidade da nuvem corresponde ao número de átomos no condensado.

Semelhantemente ao caso dos valores assintóticos da Fig.3.15, a estabilidade do condensado dipolar aprisionado se associa ao balanço entre as energias de interação envolvidas. Devido à anisotropia da interação dipolar podemos ter diferentes valores da energia advinda dessa interação dependendo do formato da nuvem polarizada. Considerando a direção de polarização dos dipolos, caso a nuvem seja *prolate* teremos a prevalência da atração. Desta forma a_s positivo (potencial de contato repulsivo) seria necessária para contrabalançá-la. Por outro lado quando temos uma nuvem *oblate*, a força repulsiva dos dipolos pode inclusive vir a estabilizar o potencial atrativo de uma nuvem com a_s negativo. Conforme se observa na curva de a_s crítico, para o caso da armadilha *oblate*,

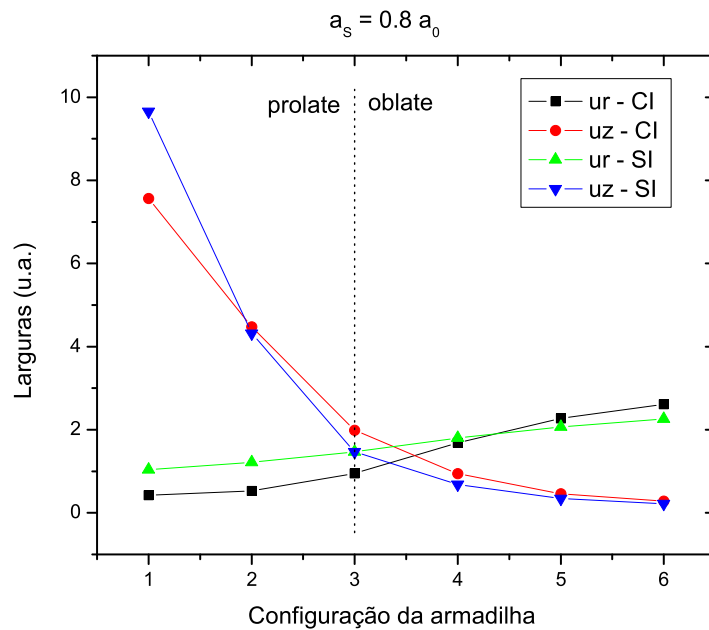


Figura 3.16 – Variação das dimensões (u.a. - unidades arbitrárias) da nuvem condensada com a configuração armadilha para o caso com (CI) e sem (SI) as interações dipolares

valores menores para o comprimento de espalhamento ainda garantem a estabilidade do condensado dipolar na armadilha (para uma armadilha extremamente *oblate* a_s pode assumir o valor mínimo de $-2 a_{dd}$).

Na Fig.3.16 encontram-se os valores das larguras *in situ* versus a configuração da armadilha (Tabela 3.1) para o caso com e sem as interações dipolares, com o comprimento de espalhamento fixado em $0.8a_0$ ($a_s = a_{dd}$), valor mínimo que estabilizará o condensado independentemente da configuração da armadilha). Verifica-se que a condição de nuvem isotrópica (larguras iguais em ambas as direções) para o caso do condensado dipolar foi atingida com $\lambda > 1$, isto é, para armadilha ligeiramente *oblate*. Isso comprova o fato do potencial dipolar alongar a nuvem na direção da polarização, sendo necessária uma armadilha *oblate* para contrabalancear essa deformação.

3.1.4 Expansão de um gás dipolar

Nosso objetivo consiste na determinação dos efeitos das interações dipolares, abrangendo também a verificação das possibilidades de se observar esses efeitos nos experimentos envolvendo átomos de ^{87}Rb . Por isso realizamos um estudo dessas influências durante a expansão do condensado, após ser liberado da armadilha magnética. A seguir temos os dados referentes as condições do experimento:

Tabela 3.2 – Parâmetros do experimento

^{87}Rb	N	$m(\text{Kg})$	$\omega_r(\text{Hz})$	$\omega_z(\text{Hz})$	μ	E_{dd}
	1.0×10^5	1.443161×10^{-25}	$2\pi \times 207$	$2\pi \times 23$	$\approx 1\mu_B$	0.007

O parâmetro E_{dd} ($= \mu_0\mu^2m/12\pi\hbar^2a_s$) indica a relevância das interações dipolares já que consiste basicamente da razão entre a magnitude dessa interação (Eq.3.45) pela de contato (Eq.3.43). Recentemente foram realizados experimentos o quais demonstraram efeitos das interações dipolares na expansão de condensados de ^{52}Cr (44,45), cujo momento de dipolo é da ordem de $6\mu_B$. Nesses experimentos a interação dipolar é cerca de 36 vezes maior que a do caso de átomos de ^{87}Rb , cujo momento de dipolo é aproximadamente $1\mu_B$. O valor de E_{dd} para o cromo é aproximadamente $E_{dd} \approx 0.16$, enquanto que para o rubídio

$E_{dd} \approx 0.007$. As influências das interações dipolares sobre tempo de inversão e *aspect ratio* assintótico da nuvem do condensado de átomos de ^{87}Rb são ínfimas, tornando crítica a possibilidade de observação experimental.

Recentemente vêm sendo adotadas técnicas como a da ressonância de Feshbach (18), a qual permite a magnificação da interação dipolar em relação a de contato por meio da redução do comprimento de espalhamento. Tendo como base a possibilidade de realização dessa técnica, procuramos magnificar os efeitos dipolares (E_{dd}) através da modificação dos parâmetros atômicos em duas situações distintas, as quais serão descritas a seguir.

Novamente a técnica variacional foi empregada para analisarmos a influência das interações magnéticas na expansão do condensado de ^{87}Rb . Partindo da condição inicial de equilíbrio na armadilha, determinada como na seção anterior, as equações de evolução das larguras da nuvem puderam então ser resolvidas numericamente (para melhores esclarecimentos sobre o método vide o apêndice A).

3.1.5 Variando μ com a_s fixado em $100a_0$

Nesse caso as interações dipolares foram magnificadas com a incrementação do momento dipolar atômico (Tabela 3.3).

Tabela 3.3 – Variação do parâmetro E_{dd} com o momento magnético atômico μ

$\mu(\mu_B)$	E_{dd}
1	0.00786
3	0.07074
5	0.19650
10	0.7860

Os resultados obtidos para a evolução das dimensões da nuvem encontram-se na Fig.3.17.

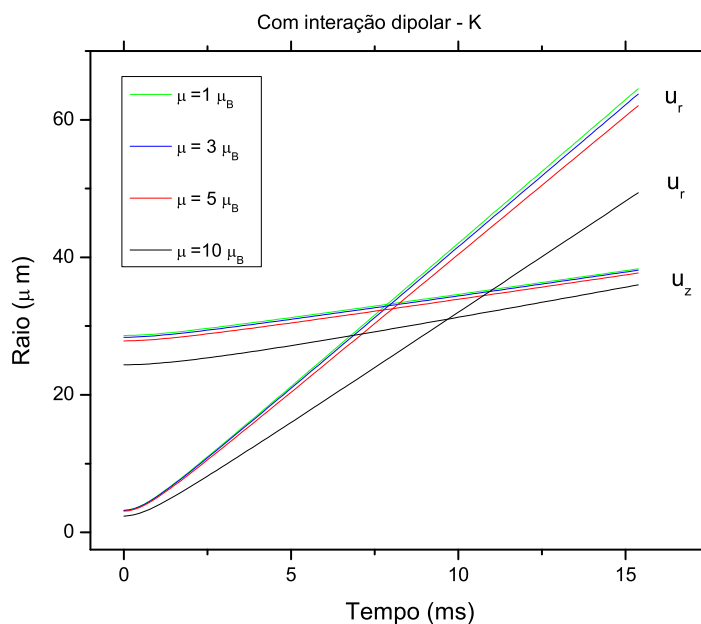


Figura 3.17 – Evolução temporal das dimensões da nuvem com interação dipolar considerando termo cinético K

Conforme mostrado em experimentos recentes envolvendo a expansão de condensado dipolares (46,45), obtivemos um alongamento da nuvem ao longo da direção de polarização, responsável pelo aumento no tempo de inversão do *aspect ratio*. Verifica-se também,

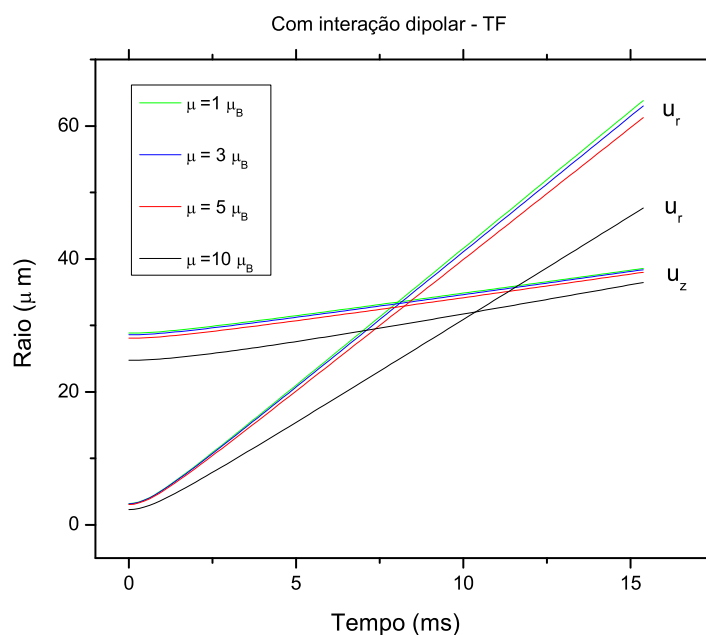


Figura 3.18 – Evolução temporal das dimensões da nuvem com interação dipolar dentro da aproximação TF

através da inclinação da curva, uma aparente desaceleração da expansão ao longo da direção r , além da aceleração na direção do campo polarizador, resultado que pode ser justificado com base no potencial dipolar.

Apesar de apresentarem uma ligeira redução, as larguras da nuvem continuam próximas as originais do caso ($\mu = 1\mu_B$) de forma que a aproximação de TF continua sendo razoável. Na Fig.3.18, onde os cálculos foram refeitos considerando essa aproximação, não observamos variações significativas em relação aos resultados do primeiro cálculo, onde o termo de pressão quântica foi considerado.

3.1.6 Variando o comprimento de espalhamento a_s com o momento de dipolo μ fixado em $1\mu_B$

A magnificação da interação dipolar frente à de contato foi realizada através da diminuição da última por meio da redução do comprimento de espalhamento a_s (Tabela 3.4).

Tabela 3.4 – Variação do parâmetro E_{dd} com a variação do comprimento de espalhamento a_s

$a_s(a_0)$	E_{dd}
100	0.00786
11	0.07146
4	0.19650
1	0.78602

Esse procedimento pode ser realizado experimentalmente através da utilização de campos magnéticos uniformes na chamada técnica de ressonância de Feshbach. Para esse caso verificamos um comportamento oposto do tempo de inversão com o aumento das interações dipolares (Fig.3.19), ou seja, obtivemos a redução desse intervalo com o aumento de E_{dd} .

A justificativa para esse fato tornou-se clara quando recalculamos a evolução da nuvem

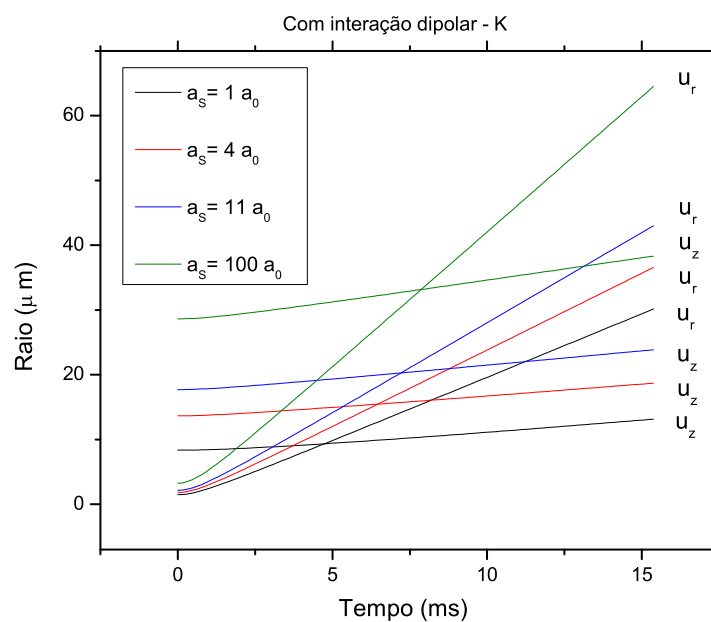


Figura 3.19 – Evolução temporal das dimensões da nuvem com interação dipolar considerando o termo cinético K.

com a utilização da aproximação TF (Fig.3.20). Nesse último caso os resultados previs-

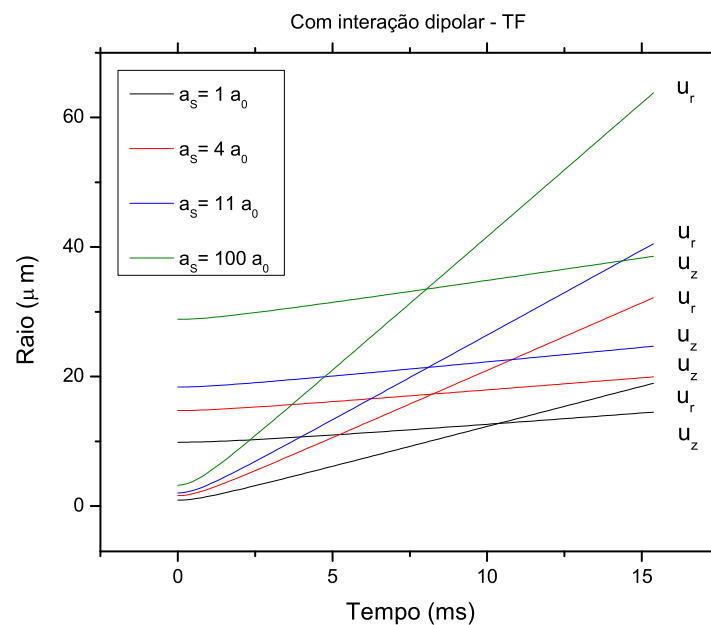


Figura 3.20 – Evolução temporal das dimensões da nuvem com interação dipolar dentro da aproximação TF.

tos se assemelharam aos esperados devido aos efeitos das interações dipolares, conforme

obtidos na seção anterior. Ao diminuirmos a_s , porém, as dimensões da nuvem apresentaram uma drástica redução, de forma a tornar inválido o emprego da aproximação TF. Os efeitos da pressão quântica se manifestam mais intensamente em uma nuvem mais

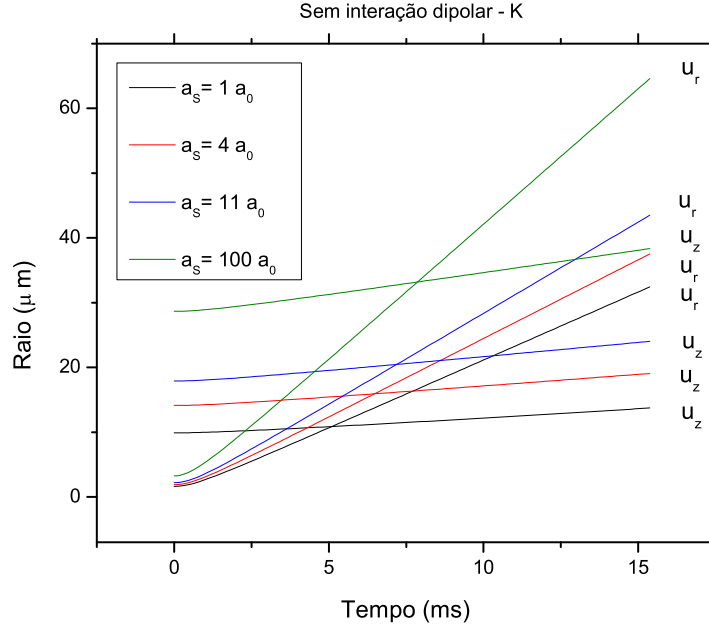


Figura 3.21 – Evolução temporal das dimensões da nuvem sem interação dipolar $E_{dd} = 0$ considerando o termo cinético K.

localizada, não podendo serem negligenciados. Quando consideramos apenas o termo cinético, sem as interações dipolares (Fig.3.21), vemos que o termo de pressão quântica tem maior contribuição no deslocamento do tempo de inversão. O termo cinético influencia principalmente o comportamento da direção mais confinada (r), provocando uma maior aceleração desta quando comparado ao regime sem essa interação. Esse parece ser o principal fator responsável pela diminuição do tempo de inversão.

Observando a curva referente à $a_s = 1a_0$ em duas situações com a pressão quântica (com e sem a interação dipolar), temos que o tempo de inversão daquela com interação dipolar é ainda menor do que no caso sem essa interação. Concluimos que a interação dipolar contribui indiretamente para magnificar os efeitos da pressão quântica, à medida que contribui para a redução das dimensões da nuvem condensada na direção perpendicular ao campo polarizador.

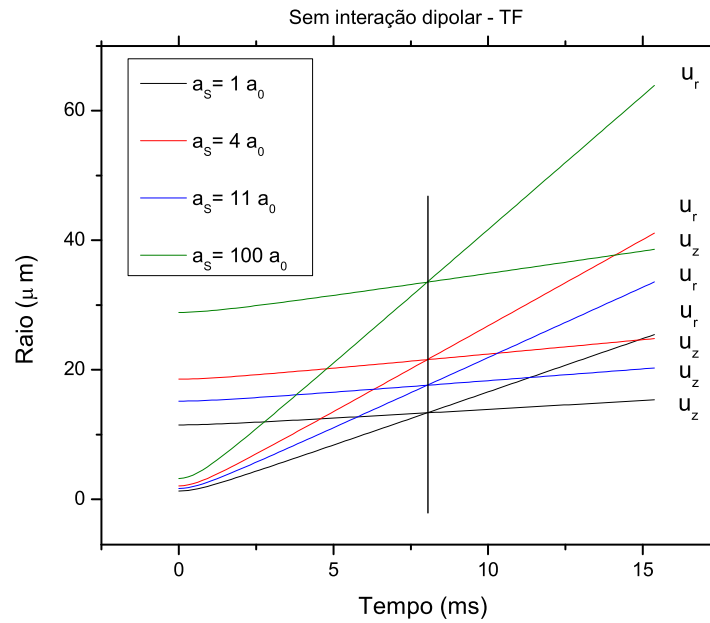


Figura 3.22 – Evolução temporal das dimensões da nuvem sem interação dipolar $E_{dd} = 0$ dentro da aproximação TF.

3.1.7 Condição de equilíbrio inicial na armadilha

Tendo como base as equações de evolução das larguras obtidas com o método variacional, visamos analisar com maior detalhe a configuração de equilíbrio de um gás dipolar na armadilha magnética. As dimensões da nuvem na armadilha correspondem à condição inicial para a expansão utilizada na etapa anterior. Determinamos essa configuração de equilíbrio em dois regimes distintos; em um deles a contribuição da pressão quântica foi considerada, enquanto que no outro, o qual corresponde à aproximação TF, negligenciamos essa contribuição. As duas situações em que esses regimes foram testados corresponderam novamente aos casos 1 e 2, isto é, a magnificação da interação dipolar respectivamente pelo aumento gradativo do momento de dipolo ou através da redução do comprimento de espalhamento. A seguir temos os gráficos representando o *aspect ratio* da nuvem condensada como função do parâmetro E_{dd} em ambos os casos, nos dois regimes considerados (Fig.3.23 e Fig.3.24). No regime TF ambos os casos apresentaram comportamento semelhante, indicando a prevalência das interações dipolares na determinação das

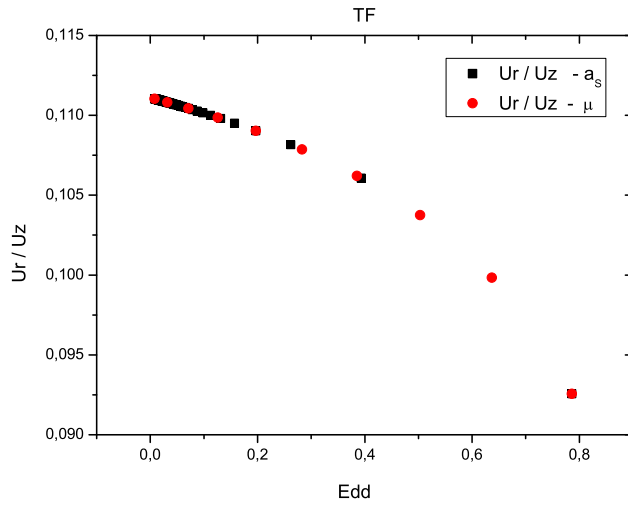


Figura 3.23 – Variação dos *aspect ratio* da nuvem u_r/u_z *in situ* como função do parâmetro E_{dd} para os casos (1): linha vermelha e (2): linha preta, ambos na aproximação TF

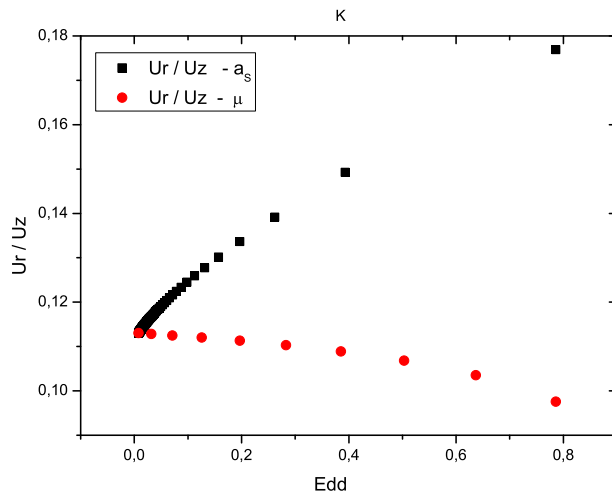


Figura 3.24 – Variação dos *aspect ratio* da nuvem u_r/u_z *in situ* como função do parâmetro E_{dd} para os casos (1): linha vermelha e (2): linha preta, considerando termo cinético K em ambos

propriedades físicas do sistema. Quando comparamos esses casos no regime com termo cinético, porém, vemos que o *aspect ratio* do caso 2 passa agora a ser fortemente influenciado pelo termo de pressão quântica. No caso 1 obtivemos apenas um ligeiro aumento do valor absoluto da razão u_r/u_z , (conforme mostrado pela Fig.3.25), o qual deveu-se ao fato da direção mais confinada (direção r) ter suas dimensões mais fortemente expandidas devido ao termo da pressão quântica. Ainda nesse caso, a nuvem apresenta pequena redução de volume com o aumento do momento de dipolo, de forma que TF consiste em

uma boa aproximação.

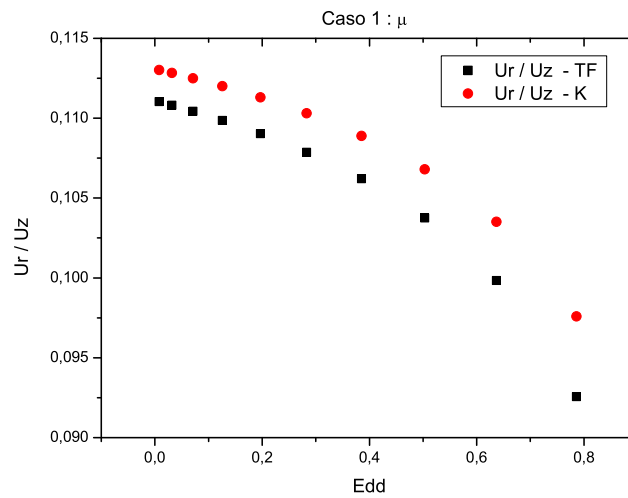


Figura 3.25 – Comparação da variação dos *aspect ratio* da nuvem u_r/u_z *in situ* como função do parâmetro E_{dd} para o caso (1) na aproximação TF (em preto) e considerando termo cinético (em vermelho)

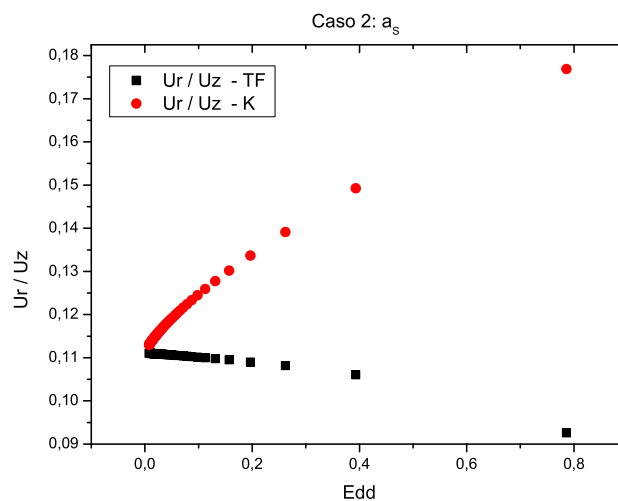


Figura 3.26 – Comparação da variação dos *aspect ratio* da nuvem u_r/u_z *in situ* como função do parâmetro E_{dd} para o caso (2) na aproximação TF (em preto) e considerando termo cinético (em vermelho)

Diferentemente do que ocorre em 1, no caso 2, devido à drástica redução das dimensões da nuvem com a redução do comprimento de espalhamento, o termo de pressão quântica passa a ter mais relevância a ponto de dominar a resposta do sistema (Fig.3.26).

3.1.8 Conclusões

No caso 1 (variando μ com a_s fixo) o tempo de inversão aumentou gradativamente com E_{dd} . Esse resultado é esperado segundo as teorias a respeito dos condensados dipolares. O *aspect ratio* da nuvem u_r/u_z antes e após a expansão decai com o aumento de E_{dd} devido a natureza do potencial dipolar, o qual favorece o alongamento da nuvem na direção do campo magnético de polarização. No caso 2 (variando a_s com μ fixo) observamos discrepâncias em relação aos resultados esperados, as quais podem ser atribuídas a pressão quântica, responsável pelo alargamento da distribuição de velocidade no espaço dos *momenta*. A interação dipolar favorece indiretamente essa pressão quântica à medida que contribui na redução das dimensões radiais da nuvem *in situ*. A tentativa de magnificar E_{dd} por meio da redução de a_s não foi bem sucedida à medida que efeitos adicionais de interação acabam surgindo.

Em princípio só o caso 2 consiste em um procedimento experimental viável para a magnificação da interação dipolar. O caso 1 foi realizado para esclarecer a discrepância no resultado de 2 com relação aos resultados previstos na literatura.

O próximo passo seria realizamos um estudo da melhor configuração da armadilha magnética para se observar os efeitos dipolares durante a expansão. Essa otimização por meio da configuração inicial da armadilha é uma alternativa mais viável de se realizar do que a ressonância de Feshbach, considerando nosso estágio atual do aparato experimental.

REFERÊNCIAS

- 1 DEMLER, E.; HANKE, W.; ZHANG, S. Theory of antiferromagnetism and superconductivity. *Review of Modern Physics*, v. 76, n. 3, p. 909–974, 2004.
- 2 SACHDEV, S. Order and quantum phase transitions in the cuprate superconductors. *Review of Modern Physics*, v. 75, n. 3, p. 913–932, 2002.
- 3 MODUGNO, G.; FERLAINO, F.; HEIDEMANN, R.; ROATI, G.; INGUSCIO, M. Production of a fermi gas of atoms in an optical lattice. *Physical Review A*, Woodbury, v. 68, n. 1, p. 011601–1–011601–4, Jul 2003.
- 4 KÖHL, M.; MORITZ, H.; STÖFERLE, T.; GÜNTER, K.; ESSLINGER, T. Fermionic atoms in a three dimensional optical lattice: Observing fermi surfaces, dynamics, and interactions. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 94, n. 8, p. 080403–1–080403–4, Mar 2005.
- 5 CHIN, J.K., E. A. Superfluidity of ultracold fermions in an optical lattice. *Nature*, London, v. 443, n. 7114, p. 961–964, 2006.
- 6 FETTER, A.; SVIDZINSKY, A. Vortices in a trapped dilute bose-einstein condensate. *Journal of Physics*, v. 13, n. 12, p. R135–R194, Feb 2001.
- 7 SACKETT, C. A.; STOOF, H. T. C.; HULET, R. G. Growth and collapse of a bose-einstein condensate with attractive interactions. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 80, n. 10, p. 2031–2034, Mar 1998.
- 8 UEDA, M.; LEGGETT, A. J. Macroscopic quantum tunneling of a bose-einstein condensate with attractive interaction. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 80, n. 8, p. 1576–1579, Feb 1998.
- 9 KAGAN, Y.; SURKOV, E. L.; SHLYAPNIKOV, G. V. Evolution and global collapse of trapped bose condensates under variations of the scattering length. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 79, n. 14, p. 2604–2607, Oct 1997.

10 JAKSCH, D.; BRUDER, C.; CIRAC, J. I.; GARDINER, C. W.; ZOLLER, P. Cold bosonic atoms in optical lattices. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 81, n. 15, p. 3108–3111, Oct 1998.

11 BARANOV, M.; L. DOBREK, AND K. GORAL, A. L. S.; LEWENSTEIN, M. Ultracold dipolar gases - a challenge for experiments and theory. *Physica Scripta*, Stockholm, v. T102, p. 74–81, 2002.

12 GÓRAL, K.; PFAU, T. Bose-einstein condensation with magnetic dipole-dipole forces. *Physical Review A*, Woodbury, v. 61, n. 5, p. 051601–1–051601–4, Mar 2000.

13 PITAEVSKII, L.; STRINGARI, S. *Bose-einstein condensation*. Oxford; Clarendon Press: , 2003.

14 KETTERLE, W.; DURFEE, D. S.; STAMPER-KURN, D. M. Making, probing and understanding bose-einstein condensates. Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, 1999.

15 DALFOVO, F.; GIORGINI, S.; PITAEVSKII, L. P.; STRINGARI, S. Theory of bose-einstein condensation in trapped gases. *Review of Modern Physics*, v. 71, n. 3, p. 463–512, Apr 1999.

16 HENN, E.; SEMAN, J.; SECO, G.; OLIMPIO, E.; CASTILHO, P.; ROATI, G.; MAGALHAES, D.; MAGALHAES, K.; BAGNATO, V. Bose-einstein condensation in 87rb-characterization of the brazilian experiment. *Brazilian Journal of Physics*, São Paulo, v. 38, p. 279–286, Jun 2008.

17 CARACANHAS, M.; SEMAN, J.; RAMOS, E.; HENN, E.; MAGALHAES, K.; HELMERSON, K.; BAGNATO, V. Finite temperature correction to the thomas-fermi approximation for a bose-einstein condensate comparison between theory and experiment. *Journal of Physics B*, Bristol, v. 42, n. 14, p. 145304–1–145304–8, Jul 2009.

18 PETHICK, C.; SMITH, H. *Bose-einstein condensation in dilute gases*. 2. ed. Cambridge, UK; Cambridge University Press: , 2008.

19 PROUKAKIS, N. P.; JACKSON, B. Finite-temperature models of bose-einstein condensation. *Journal of Physics B*, Bristol, v. 41, n. 3, p. 203002–1–203002–66, Oct 2008.

20 CASTIN, Y.; DUM, R. Bose-einstein condensates in time dependent traps. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 77, n. 27, p. 5315–5319, Dec 1996.

21 BAGNATO, V.; PRITCHARD, D. E.; KLEPPNER, D. Bose-einstein condensation in an external potential. *Physical Review A*, Woodbury, v. 35, n. 10, p. 4354–1–4354–4, May 1987.

22 HUTCHINSON, D. A. W.; ZAREMBA, E.; GRIFFIN, A. Finite temperature excitations of a trapped bose gas. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 78, n. 10, p. 1842–1845, Mar 1997.

23 ZAWADA, M.; ABDOUL, R.; CHWEDENCZUK, J.; GARTMAN, R.; SZCZEPKOWSKI, J.; TRACEWSKI, L.; WITKOWSKI, M.; GAWLIK, W. Free-fall expansion of finite-temperature bose-einstein condensed gas in the non thomas-fermi regime. *Journal of Physics B*, Bristol, v. 41, n. 24, p. 241001–1–241001–4, 2008.

24 GERBIER, F.; THYWISSEN, J. H.; RICHARD, S.; HUGBART, M.; BOUYER, P.; ASPECT, A. Experimental study of the thermodynamics of an interacting trapped bose-einstein condensed gas. *Physical Review A*, Woodbury, v. 70, n. 1, p. 013607–1–013607–10, Jul 2004.

25 GIORGINI, S.; PITAEVSKII, L. P.; STRINGARI, S. Thermodynamic of a trapped bose-condensed gas. *Journal of Low Temperature Physics*, v. 109, n. 1-2, p. 309–355, Oct 1997.

26 YUKALOV, V. Bose-einstein condensation and gauge symmetry breaking. *Laser Physics Letters*, v. 4, n. 9, p. 632–647, 2007.

27 E. ZAREMBA, T. N.; GRIFFIN, A. Dynamics of trapped bose gases at finite temperatures. *Journal of Low Temperature Physics*, v. 116, n. 1-2, p. 1–147, Jul 1999.

28 JACKSON, B.; ZAREMBA, E. Finite-temperature simulations of the scissors mode in bose-einstein condensed gases. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 87, n. 10, p. 100404-1-100404-4, Aug 2001.

29 JACKSON, B.; ZAREMBA, E. Modeling bose-einstein condensed gases at finite temperatures with n-body simulations. *Physical Review A*, Woodbury, v. 66, n. 3, p. 033606-1-033606-18, Sep 2002.

30 JACKSON, B.; ZAREMBA, E. Accidental suppression of landau damping of the transverse breathing mode in elongated bose-einstein condensates. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 89, n. 15, p. 150402-1-150402-4, Sep 2002.

31 GRIFFIN, A. Conserving and gapless approximations for an inhomogeneous bose gas at finite temperatures. *Physical Review B*, v. 53, n. 14, p. 9341-9347, Apr 1996.

32 V.I.YUKALOV; E.P.YUKALOVA. Bose-einstein-condensed gases with arbitrary strong interactions. *Physical Review A*, Woodbury, v. 74, n. 6, p. 063623-1-063623-9, Dec 2006.

33 YUKALOV, V. Particle fluctuations in nonuniform and trapped bose gases. *Laser Physics Letters*, v. 6, n. 9, p. 688-695, 2009.

34 ZWIERLEIN, M. W.; STAN, C. A.; SCHUNCK, C. H.; RAUPACH, S. M. F.; KERMAN, A. J.; KETTERLE, W. Condensation of pairs of fermionic atoms near a feshbach resonance. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 92, n. 12, p. 120403-1-120403-4, Mar 2004.

35 BARTENSTEIN, M.; ALTMEYER, A.; RIEDL, S.; JOCHIM, S.; CHIN, C.; DEN-SCHLAG, J. H.; GRIMM, R. Crossover from a molecular bose-einstein condensate to a degenerate fermi gas. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 92, n. 12, p. 120401-1-120401-4, Mar 2004.

36 PARTRIDGE, G. B.; STRECKER, K. E.; KAMAR, R. I.; JACK, M. W.; HULET, R. G. Molecular probe of pairing in the bec-bcs crossover. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 95, n. 2, p. 020404-1-020404-4, Jul 2005.

- 37 ZWIERLEIN, M.; J. R. ABO-SHAEER, A. A. S.; SCHUNCK, C. H.; KETTERLE, W. Vortices and superfluidity in a strongly interacting fermi gas. *Nature*, London, v. 435, n. 7045, p. 1047–1051, 2005.
- 38 DOYLE, J.; FRIEDRICH, B.; KREMS, R. Quo vadis, cold molecules? *The European Physical Journal D*, v. 31, n. 2, p. 149–164, 2004.
- 39 GIOVANAZZI, S.; GORLITZ, A.; PFAU, T. Ballistic expansion of a dipolar condensate. *Journal of Optics B*, v. 5, n. 2, p. S208–S211, 2003.
- 40 YI, S.; YOU, L. Trapped atomic condensates with anisotropic interactions. *Physical Review A*, Woodbury, v. 61, n. 4, p. 041604–1–041604–4, Mar 2000.
- 41 SANTOS, L.; SHLYAPNIKOV, G. V.; ZOLLER, P.; LEWENSTEIN, M. Bose-einstein condensation in trapped dipolar gases. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 85, n. 9, p. 1791–1794, Aug 2000.
- 42 EBERLEIN, C.; GIOVANAZZI, S.; DUNCAN, H. J. Exact solution of the thomas-fermi equation for a trapped bose-einstein condensate with dipole-dipole interactions. *Physical Review A*, Woodbury, v. 71, n. 3, p. 033618–1–033618–12, Mar 2005.
- 43 GÓRAL, K.; SANTOS, L.; LEWENSTEIN, M. Quantum phases of dipolar bosons in optical lattices. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 88, n. 17, p. 170406–1–170406–4, Apr 2002.
- 44 GRIESMAIER, A.; WERNER, J.; HENSLER, S.; STUHLER, J.; PFAU, T. Bose-einstein condensation of chromium. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 94, n. 16, p. 160401–1–160401–4, Apr 2005.
- 45 STUHLER, J.; GRIESMAIER, A.; KOCH, T.; FATTORI, M.; PFAU, T.; GIOVANAZZI, S.; PEDRI, P.; SANTOS, L. Observation of dipole-dipole interaction in a degenerate quantum gas. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 95, n. 15, p. 150406–1–150406–4, Oct 2005.
- 46 GIOVANAZZI, S.; PEDRI, P.; SANTOS, L.; GRIESMAIER, A.; FATTORI, M.; KOCH, T.; STUHLER, J.; PFAU, T. Expansion dynamics of a dipolar bose-einstein condensate. *Physical Review A*, Woodbury, v. 74, n. 1, p. 013621–1–013621–10, 2006.

47 YI, S.; YOU, L. Expansion of a dipolar condensate. *Physical Review A*, Woodbury, v. 67, n. 4, p. 045601-1-045601-4, Apr 2003.

48 PÉREZ-GARCIA, V. M.; MICHINEL, H.; CIRAC, J. I.; LEWENSTEIN, M.; ZOLLER, P. Low energy excitations of a bose-einstein condensate- a time-dependent variational analysis. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 77, n. 27, p. 5320-5323, Dec 1996.

49 YI, S.; YOU, L. Trapped condensates of atoms with dipole interactions. *Physical Review A*, Woodbury, v. 63, n. 5, p. 053607-1-053607-14, Apr 2001.

Apêndice A Método Variacional para expansão dipolar (47, 48)

Para os cálculos da expansão e configuração de equilíbrio do condensado dipolar utilizamos as equações que regem a evolução das dimensões da nuvem (Eq.A.53 e Eq.A.54), deduzidas por meio do uso do método variacional. Esse método consiste em substituímos na expressão da densidade Lagrangiana do sistema (Eq.A.47) uma função de onda teste (Eq.A.48), a qual representa o condensado. A expressão que utilizamos para essa função é gaussiana, com o parâmetro $w_\eta(t)$ referente a sua largura, além de uma fase $\beta_\eta(t)$ e a constante de normalização $A(t)$.

$$\ell = \frac{i\hbar}{2} \left(\psi(\vec{r}) \frac{\partial \psi(\vec{r})^*}{\partial t} - \psi(\vec{r})^* \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial t} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\vec{r})|^2 \quad (\text{A.47})$$

$$\begin{aligned} &+ V(\vec{r}) |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{2\pi a_s \hbar^2}{m} |\psi(\vec{r})|^4 \\ &+ \frac{\mu_0 \mu^2}{8\pi} |\psi(\vec{r})|^2 \int d^3 r' \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} |\psi(\vec{r}')|^2 \\ \psi(x, y, z, t) &= A(t) \prod_{\eta=x,y,z} e^{-\frac{\eta^2}{2w_\eta^2(t)}} e^{-i\eta^2 \beta_\eta(t)} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Vale lembrar que a densidade Lagrangiana integrada no tempo e espaço nos fornece a Ação (Eq.A.49), grandeza que quando minimizada com respeito a função de onda ψ nos leva a GPE, o qual rege a evolução da função de onda ψ do estado fundamental.

$$S = \int \ell d^3 r dt \quad (\text{A.49})$$

Integrando a Eq.A.47 em todo o espaço, obteremos então a Lagrangiana do sistema como função dos parâmetros $q_j = \{A(t), \beta_\eta(t), w_\eta(t)\}$ da função teste.

$$L = \langle \ell \rangle = \int \ell d^3 r \quad (\text{A.50})$$

Derivamos então as equações de Euler-Lagrange para cada um desses parâmetros (Eq.A.51).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (\text{A.51})$$

$$|A(t)|^2 = \frac{N}{\pi^{3/2} w_x(t) w_y(t) w_z(t)} \quad (\text{A.52})$$

Esse processo de minimização nos fornecerá um sistema de equações (uma para cada parâmetro) o qual, juntamente com a condição de normalização (Eq.A.52) pode ser resolvido para que obtenhamos as equações diferenciais de segunda ordem correspondentes as larguras w_r e w_z . Em sua forma adimensional, obtidas através da mudança de variável: $w_\eta = l u_\eta$ com $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_r}}$ e $\tau = \omega_r t$ seguida da divisão por $\hbar\omega_r$, essas equações são dadas pela Eq.A.53 e Eq.A.54.

$$\ddot{u}_r + u_r = \frac{1}{u_r^3} + \frac{1}{u_r^3 u_z} \sqrt{\frac{2}{\pi}} N \left[\frac{a_s}{l} - \frac{\mu^2 \mu_0}{3\hbar\omega_r l^3} f(k) \right] \quad (\text{A.53})$$

$$\ddot{u}_z + \lambda^2 u_z = \frac{1}{u_z^3} + \frac{1}{u_r^2 u_z^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} N \left[\frac{a_s}{l} - \frac{\mu^2 \mu_0}{3\hbar\omega_r l^3} g(k) \right] \quad (\text{A.54})$$

onde:

$$k = \frac{u_r}{u_z} \quad (\text{A.55})$$

e as funções que surgem da integração da interação dipolar:

$$f(k) = [-4k^4 - 7k^2 + 2 + 9k^4 H(k)]/2(k^2 - 1)^2 \quad (\text{A.56})$$

$$g(k) = [-2k^4 + 10k^2 + 1 + 9k^2 H(k)]/(k^2 - 1)^2 \quad (\text{A.57})$$

com:

$$H(k) = \tanh^{-1} \sqrt{1 - k^2} / \sqrt{1 - k^2} \quad (\text{A.58})$$

A solução desse sistema acoplado para cada instante de tempo t nos fornece a evolução do condensado dipolar. Para o cálculo da condição inicial de equilíbrio adotamos $\ddot{u}_\eta = 0$ nas equações acima. Com essas larguras iniciais $u_\eta(0)$ associadas a condição estacionária $\dot{u}_\eta(0) = 0$ podemos obter a solução completa do sistema. A técnica numérica empregada para resolução foi o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Os programas foram feitos utilizando os softwares *Matlab* e *Maple*.

Vale ressaltar que o termo cinético corresponde ao primeiro termo do segundo membro das equações A.53 e A.54. Na aproximação TF, válida para o regime em que $\frac{N a_s}{l} \gg 1$, esse termo cinético é desprezado.

Podemos ainda relacionar as larguras com o raio do condensado:

$$\sqrt{\langle \eta^2 \rangle} = \frac{R_\eta}{\sqrt{7}} \quad (\text{A.59})$$

$$w_\eta = \sqrt{2 \langle \eta^2 \rangle} \quad (\text{A.60})$$

$$w_\eta = \sqrt{\frac{2}{7}} R_\eta \quad (\text{A.61})$$

Apêndice B Método Variacional para expansão com átomos térmicos

Novamente empregaremos o método variacional para poder incluir a influência dos átomos térmicos na expansão do condensado. Para a densidade Lagrangiana do sistema teremos a expressão (Eq.A.62):

$$\begin{aligned} \ell = & \frac{i\hbar}{2} \left(\psi(\vec{r}) \frac{\partial \psi(\vec{r})^*}{\partial t} - \psi(\vec{r})^* \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial t} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\vec{r})|^2 \\ & + V(\vec{r}) |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{2\pi a_s \hbar^2}{m} |\psi(\vec{r})|^4 + \frac{8\pi a_s \hbar^2}{m} n_T(\vec{r}) |\psi(\vec{r})|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

com:

$$n_T(\vec{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2}(z) \quad z = e^{-\beta V(\vec{r})} \quad (\text{A.63})$$

$$g_{3/2}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{nz^2}{2\delta_z^2}} e^{-\frac{nr^2}{2\delta_r^2}}}{n^{3/2}}$$

$$\delta_\eta = \sqrt{\frac{k_B T}{m\omega_\eta^2}}$$

Substituímos novamente uma função de onda teste (Eq.A.48) e derivamos então as equações de Lagrange para cada um dos parâmetros. Obtemos as equações diferenciais de segunda ordem para as larguras w_r e w_z em sua forma adimensional (Eq.A.64 e Eq.A.65), obtidas através da mudança de variável: $w_\eta = l_r u_\eta$ com $l_r = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_r}}$, $\delta_\eta = l_r s_\eta$ e $\tau = \omega_r t$ seguida da divisão por $\hbar\omega_r$:

$$\ddot{u}_r + u_r = \frac{1}{u_r^3} + \frac{1}{u_r^3 u_z} \sqrt{\frac{2}{\pi}} N \left(\frac{a_s}{l} \right) + C_r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} u_r \frac{1}{(2s_r^2 + nu_r^2)^2 (2s_z^2 + nu_z^2)^{1/2}} \quad (\text{A.64})$$

$$\ddot{u}_z + \lambda^2 u_z = \frac{1}{u_z^3} + \frac{1}{u_r^2 u_z^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} N \left(\frac{a_s}{l} \right) + C_z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} u_z \frac{1}{(2s_r^2 + nu_r^2) (2s_z^2 + nu_z^2)^{3/2}} \quad (\text{A.65})$$

onde:

$$C_z = 16 \cdot 2^{3/2} \pi \left(\frac{a_s}{l_r} \right) \left(\frac{\bar{\delta}}{\lambda_T} \right)^3 \quad C_r = 2C_z \quad (\text{A.66})$$

Considerando uma dinâmica balística para a nuvem térmica, devemos incluir a evolução temporal dos parâmetros:

$$C_\eta(\tau) = \frac{C_\eta(0)}{\prod_\eta \sqrt{(1 + \lambda_\eta^2 \tau^2)}} \quad s_\eta(\tau) = s_\eta(0) \sqrt{1 + \lambda_\eta^2 \tau^2} \quad \lambda_z = \frac{\omega_z}{\omega_r} \quad \lambda_r = 1 \quad (\text{A.67})$$

A solução numérica desse sistema acoplado para cada instante de tempo t , dadas as condições iniciais do problema, nos fornece a evolução das dimensões do condensado.

Apêndice C Expressão para as funções g , f e fr

$$g(R/\sigma) = \left(\frac{R}{\sigma}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n(\frac{R}{\sigma})^2}}{n^{3/2}} \quad (\text{A.68})$$

$$f(R/\sigma) = \left(\frac{R}{\sigma}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n(\frac{R}{\sigma})^2}}{n^{5/2}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{erf}(n^{1/2}\frac{R}{\sigma})}{n^3} \quad (\text{A.69})$$

$$fr(R/\sigma) = c_0 f(R/\sigma) + c_1 \quad (\text{A.70})$$

A variação da função fr com o parâmetro R/σ é mostrada na figura A.27:

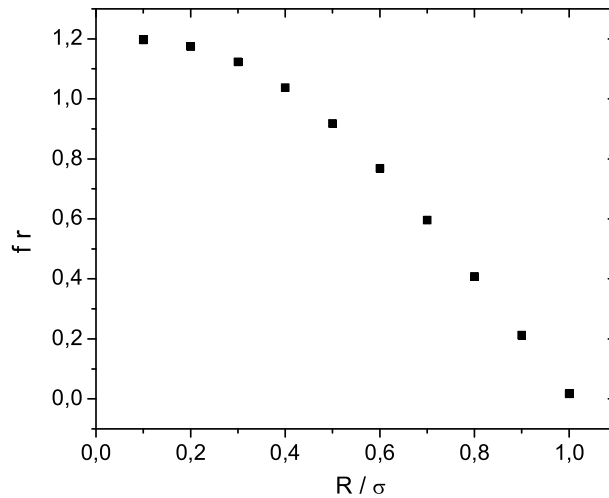


Figura A.27 – Perfil da função fr (expressão acima)

Apêndice D Potencial Químico

Usando a relação $R = \sqrt{2\mu/m\omega^2}$ podemos reescrever o potencial químico da seguinte maneira:

$$\mu = \left\{ \frac{15}{8\pi} \left(\frac{m\omega^2}{2} \right)^{3/2} N U_0 [1 - (c_1 + c_0 f(R/\sigma)) T^3] \right\}^{2/5} \quad (\text{A.71})$$

Com a expressão para um gás ideal aprisionado (48, 49) relacionando a temperatura com a fração de átomos condensados e com a definição do potencial de químico para $T = 0$, $\mu(0)$, podemos escrever a equação A.71:

$$\mu = \mu(0) [1 - 0.83 f_r(R/\sigma)]^{2/5} \quad (\text{A.72})$$

De acordo com o perfil de f_r , vemos que os valores extremos de μ reproduzem o comportamento esperado para o potencial químico de um gás de Bose interagente (18).

Apêndice E Correções na Imagem

Determinaremos como as dimensões extraídas da imagem de absorção são modificadas considerando a direção do nosso feixe de prova, conforme ilustrado na Fig.A.28. Considerando o perfil bimodal da densidade:

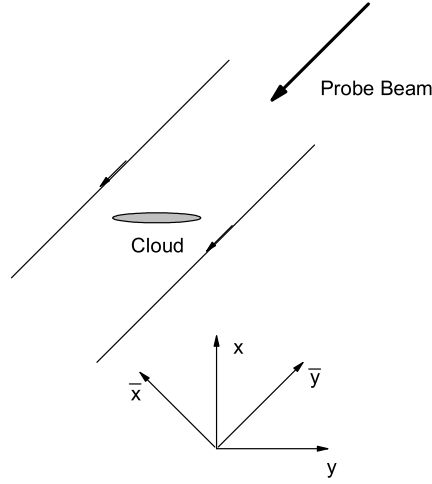


Figura A.28 – Direção da propagação do feixe de prova no plano xy .

$$\eta(x, y, z) = \tilde{n}_0 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2 + z^2}{R_z^2}, 0 \right) + \tilde{n}_T e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.73})$$

Como o eixo de propagação do feixe da imagem não coincide com o eixo principal da nuvem, não poderemos usar a expressão acima integrada ao longo de y . Ao invés disso, rodamos o eixo coordenado de 45° , passando do sistema (x, y, z) original para um novo sistema (\bar{x}, \bar{y}, z) (Eq.A.74). A distribuição térmica não muda à medida que a nuvem térmica é isotrópica (mesmo σ para cada direção) para os tempos de expansão utilizados. Realizamos então a integração ao longo de \bar{y} , obtendo a expressão $I(x, z)$ (Eq.A.75) para imagem de absorção.

$$\eta(\bar{x}, \bar{y}, z) = \tilde{n}_0 \left(1 - \frac{1/2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{R_x^2} - \frac{1/2(\bar{y}^2 - \bar{x}^2) + z^2}{R_z^2}, 0 \right) + \tilde{n}_T e^{-\frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + z^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{A.74})$$

$$I(x, z) = \int \eta(\bar{x}, \bar{y}, z) d\bar{y} = \frac{4}{3} \tilde{n}_0 d \left(1 - \frac{x^2}{f^2} - \frac{z^2}{R_z^2}, 0 \right)^{3/2} + \tilde{n}'_T e^{-\frac{x^2 + z^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{A.75})$$

onde:

$$d = \frac{\sqrt{2}R_x R_z}{\sqrt{R_x^2 + R_z^2}} \quad (\text{A.76})$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{R_x^2 + R_z^2}, \quad (\text{A.77})$$

que nos leva a uma correção para o raio na direção menos confinada. Não necessitamos fazer a correção em N_0 à medida que, se utilizarmos a expressão da densidade de pico extraída da Eq.A.75 e em seguida multiplicarmos pelos raios não corrigidos teremos a mesma expressão para N_0 . Essas correções foram necessárias para que pudéssemos relacionar os dados experimentais com o valor teórico para o fator R^5/N_0 no limite TF, atingido para maiores frações condensadas.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)