



Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Sobre a existência de Função de Lyapunov

Eder Flavio Prado

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto

Fevereiro - 2010

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

EDER FLÁVIO PRADO

Existência da Função de Lyapunov

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Matemática junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita
Professor Doutor
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof^a. Dr^a. Isabel Lugão Rios
Professor Doutor
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
Professor Doutor
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 19 de fevereiro de 2010

Aos meus pais,
Antonio e Lis,
a minha querida esposa
Giovana.
dedico.

Agradecimentos

A Deus, pois sem ele nada teria.

A toda minha família, principalmente a minha esposa, Giovana, que passou por todas as dificuldades até chegar a esse momento, aos meus pais, Antonio e Lis, por nunca deixarem de acreditar em mim, a minha irmã, Eliana, que colaborou com minha formação pessoal e acadêmica.

Obrigado, Prof. Dr. Vanderlei, pela orientação, paciência e amizade durante este período, por toda a ajuda dada e pelos conhecimentos transmitidos.

Aos professores do Departamento de Matemática do Ibilce, em especial ao professor Dr. Claudio pela ajuda nas horas difíceis, pela compreensão e simpatia.

Aos amigos da minha turma de pós-graduação pela ajuda e pela amizade, sempre gratuita.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

“Não se pode ensinar nada a um homem; pode-se apenas ajudá-lo a encontrar a resposta dentro dele mesmo”

(Galileu Galilei)

Resumo

Neste trabalho vamos estudar equações diferenciais ordinárias e analisar seu comportamento ao longo de suas trajetórias, com o principal objetivo de encontrar, caso possível, uma função de Lyapunov apropriada para o sistema, isto é, dar condição suficiente e necessária para a existência dessa função.

Palavras chave: Equações diferenciais, Estabilidade segundo Lyapunov, Campo Linear, Função de Lyapunov, autovetores e autovalores, Conjugação.

Abstract

In this work we study ordinary differential equations and analyze the behavior along of trajectories. The main goal is to find Lyapunov functions for the system when possible; i e, we want to find necessary and sufficient conditions for the existence of those functions.

Keywords: Differential Equation, Stability in the sense of Lyapunov, Linear System, Lyapunov function, eigenvalues and eigenvectors, Conjugacy.

Sumário

Introdução	9
Preliminares	10
1 Estabilidade Segundo Lyapunov	12
1.1 Pontos de Equilíbrio	12
1.2 Função de Lyapunov	14
2 Campos Lineares	23
2.1 Fluxo de um Campo Linear	23
2.2 Matrizes Conjugadas	26
2.3 Estabilidade Local	28
2.4 Método de Massera	37
3 Conjugação de Fluxos	42
3.1 Conjugação Local	42
3.2 Teorema de Grobman-Hartman	43
Apêndice	51
Prova do Teorema de Grobman-Hartman	51
Bibliografia	61
Índice Remissivo	62

Introdução

Sabemos que a existência de uma função de Lyapunov nos diz muito sobre o comportamento da solução de um sistema, ela nos permite saber se o sistema é instável, estável e assintoticamente estável.

O principal objetivo desse trabalho é mostrar a existência de uma função de Lyapunov para sistemas estáveis e assintoticamente estáveis, quando possível.

Esse trabalho está dividido em 5 partes, na primeira parte apresentamos alguns conceitos básicos de EDO.

No Capítulo 1 definimos pontos estáveis segundo Lyapunov e demonstramos dois teoremas devidos a ele, que mostram condições suficientes para que um sistema seja estável ou assintoticamente estável, com alguns exemplos.

No Capítulo 2 trabalhamos com sistemas lineares, usando os conceitos de autovalores e autovetores explicitamos a solução (fluxo) de um campo linear, definimos com isso uma candidata a função de Lyapunov para sistemas lineares assintoticamente estáveis ainda nesse capítulo apresentamos um método para demonstrar a existência de uma função de Lyapunov desenvolvido por José L. Massera que mostra a existência dessa função para sistemas assintoticamente estáveis quando lineares, periódicos e autônomos.

No Capítulo 3 trabalhamos com conjugação entre campos e enunciamos o Teorema de Grobman-Hartman que junto com o Teorema 3.5 nos dão ferramentas necessárias para encontrar uma função de Lyapunov para sistemas com parte linear hiperbólica (derivada sem autovalores com parte real nula).

Por fim temos o apêndice é todo dedicado a prova do Teorema de Grobman-Hartman.

Preliminares

Vamos considerar, nessa seção, um campo de vetores definido em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 0.1. *Seja X um campo de vetores. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio (ou singularidade) se $X(x_0) = 0$. Dizemos que um ponto q é regular se $X(q) \neq 0$.*

Como $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetores podemos associá-lo a uma equação diferencial,

$$\dot{x}(t) = X(x(t))$$

sujeita a uma condição inicial $x(t_0) = x_0$ para $t \in I \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \Omega$, onde cada ponto da imagem de X define um vetor que é o vetor velocidade de qualquer solução que passe pelo ponto. Em termos mais precisos, as soluções da equação diferencial associada ao campo de vetores em Ω são denominadas curvas integrais do campo X (veja figura 1).

A equação diferencial $\dot{x}(t) = X(x(t))$ independe do tempo t , essa equação diferencial é chamada equação diferencial autônoma. Quando a equação diferencial depende do tempo t , isto é, $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ com $X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dizemos que a equação diferencial é não-autônoma.

Fixemos um ponto $(t_0, x_0) \in U$ onde $U \subset \mathbb{R} \times \Omega$ e uma solução $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, se $x(t_0) = x_0$, dizemos que essa solução satisfaz a condição inicial, assim definimos unicamente uma aplicação $\phi(t, x) = x(t)$ onde $t \in I \subset \mathbb{R}$ e $x(t) \in \Omega$, onde $x(t)$ é solução de $\dot{x}(t) = X(x(t))$ com $x(t_0) = x_0$,

$$\phi : U \subset \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

denominada *fluxo* do campo de vetores X em Ω .

A existência dessa solução x é garantida pela continuidade de X , a unicidade de solução satisfazendo uma condição inicial dada é garantida pela continuidade da derivada.

Consideremos o campo X sempre de classe C^1 , ou seja, derivável e com derivada contínua, implicando assim unicidade das soluções.

A derivada parcial temporal do fluxo (derivada com relação a variável t) é uma aplicação

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = X(\phi(t, x)).$$

De fato, tomando a trajetória $x(t)$ de X e derivando $\phi(t, x) = x(t)$ parcialmente em relação a t temos que, $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = \dot{x}(t) = X(x(t)) = X(\phi(t, x))$.

Desse modo o fluxo de um campo nos dá uma informação global do comportamento de todas as trajetórias do campo.

Considerando $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio do campo X , ou seja, $X(x_0) = 0$ pela unicidade de solução temos que $\phi_t(x_0) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde ϕ_t é o fluxo associado ao campo X . Notemos então que o ponto de equilíbrio $x_0 \in \Omega$ de X , é um *ponto fixo* para o fluxo do campo.

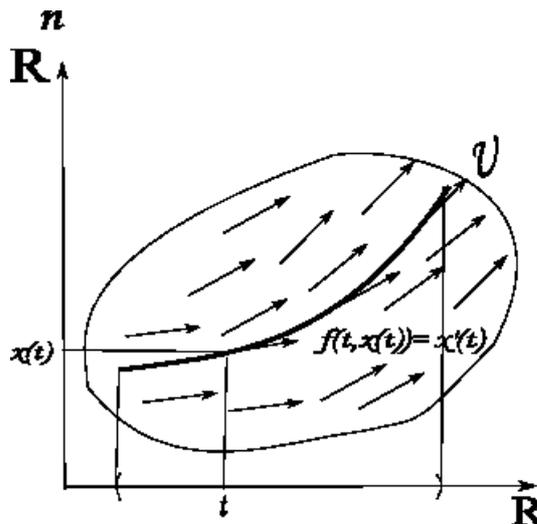


Figura 1: Campo de Vetores

Capítulo 1

Estabilidade Segundo Lyapunov

1.1 Pontos de Equilíbrio

A ideia de estabilidade de um sistema mecânico é diretamente relacionada à de energia, um sistema pode conservar energia ao longo do tempo, pode dissipar ou até mesmo expandir essa energia ao longo do tempo.

Trabalharemos neste capítulo com duas definições de estabilidade, essas definições na verdade são generalizações feitas por Lyapunov das situações acima apresentadas, são válidas tanto para sistemas mecânicos como para sistemas puramente matemáticos.

Definição 1.1. *Seja x_0 um ponto de equilíbrio de um campo $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio estável para X se, para qualquer vizinhança $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , existe uma vizinhança $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0 , tal que $W \subseteq \Omega \cap U$ e $\phi_t(x) \in U$, para todo $x \in W$ e $t \geq 0$.*

Analiticamente, o ponto de equilíbrio x_0 de X é estável se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ então $\|\phi_t(x) - x_0\| < \epsilon$ para qualquer $t \geq 0$.

Se além disso tivermos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0$$

para todo $x \in W$, dizemos que x_0 é *assintoticamente estável*, podemos também definir da seguinte forma, se existe $\delta > 0$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ então $\|\phi_t(x) - x_0\| \rightarrow 0$ para todo $t \rightarrow +\infty$.

Dizemos que um ponto de equilíbrio é *instável* se o ponto não é estável.

Exemplo: Encontramos no pêndulo dois pontos de equilíbrio onde um deles é instável e o outro dependendo da situação estável ou assintoticamente estável. No Capítulo 3 esse exemplo será feito analiticamente.

Consideremos um pêndulo simples, mas sujeito a uma força de atrito. Seja θ o ângulo entre a barra l do pêndulo e o eixo vertical, conforme a figura.

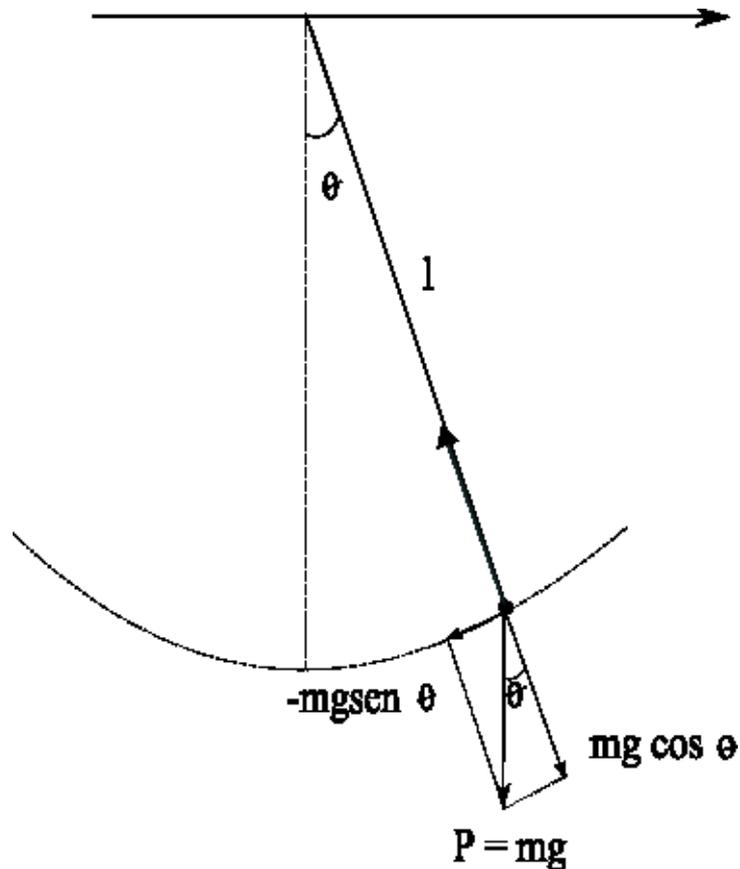


Figura 1.1: Pêndulo

Se o pêndulo for ligeiramente afastado do seu estado inicial $\theta = 0$ e se existir uma força de atrito no sistema, observa-se que a amplitude de seu movimento diminui até retornar a seu estado inicial ($\theta = 0$), com isso vemos que $\theta = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, pois a partir de qualquer condição inicial suficientemente próxima de $\theta = 0$ a solução tende ao ponto ($\theta = 0$) com o passar do tempo.

Existe outro ponto de equilíbrio no pêndulo, $\theta = \pi$, que representa o pêndulo parado de “ponta-cabeça”. Esse ponto é classificado como ponto de equilíbrio instável, pois uma pequena perturbação leva o pêndulo a se afastar de tal ponto e não mais voltar a ele.

Podemos observar que o ponto de equilíbrio $\theta = 0$ é localmente assintoticamente estável, pois nem todas as trajetórias no espaço de fase convergem para ele, basta tomarmos $\theta = \pi$ como condição inicial do pêndulo, que permanecerá aí para sempre, se não houver perturbação.

Agora consideremos um pêndulo simples sem atrito. Nesse obtemos o ponto de equilíbrio estável. Se não há atrito, a energia fornecida é preservada e portanto quando o pêndulo é ligeiramente afastado do ponto de equilíbrio $\theta = 0$, ele permanece oscilando em torno desse ponto indefinidamente. Assim, para $t \rightarrow \infty$ o pêndulo, em média, nem se afasta, nem se aproxima de tal ponto.

Observação 1.1.1. *Quando o ponto de equilíbrio é único e é assintoticamente estável, tal ponto é, na verdade, globalmente assintoticamente estável.*

1.2 Função de Lyapunov

Da teoria clássica da mecânica sabe-se que um sistema vibratório é estável se sua energia total (uma função positiva) for continuamente decrescente (derivada em relação ao tempo negativa) até que um ponto de equilíbrio seja alcançado.

Lyapunov generalizou esse conceito: se um sistema possuir um estado de equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada transferida no interior do domínio de atração decai à medida que o tempo cresce até que finalmente assume seu valor mínimo no estado de equilíbrio. Não há uma forma simples de definir energia total para sistemas puramente matemáticos, Lyapunov porém também generalizou o conceito de função

energia introduzindo a *função de Lyapunov*.

Por simplicidade, suponhamos sempre que o ponto de equilíbrio é $x_0 = 0$ pois a translação espacial não afeta as soluções.

Definição 1.2. Uma função contínua $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ onde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança de um ponto de equilíbrio é uma função de Lyapunov para um campo de vetores $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ em $x_0 = 0$ se:

- $V(0) = 0$, com $V(x) > 0$ para qualquer $x \in U \setminus \{0\}$.
- $V(\phi(t_1, x)) \geq V(\phi(t_2, x))$, para todo $x \in \Omega$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\phi(t_1, x), \phi(t_2, x) \in U$, isto é, a função V é decrescente ao longo das soluções.

Definição 1.3. Uma função contínua $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ onde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança de um ponto de equilíbrio é uma função de Lyapunov estrita para um campo de vetores $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ em $x_0 = 0$ se:

- $V(0) = 0$, com $V(x) > 0$ para qualquer $x \in U \setminus \{0\}$.
- $V(\phi(t_1, x)) > V(\phi(t_2, x))$, para todo $x \in \Omega$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tais que $t_1 < t_2$ e $\phi(t_1, x), \phi(t_2, x) \in U$, isto é, a função V é estritamente decrescente ao longo das soluções.

Seja $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em torno de $x_0 = 0$ um ponto de equilíbrio. Se V satisfaz a 1ª condição da Definição 1.2, e além disso V é uma função diferenciável com

$$(V \circ x)'(t) \leq 0$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ tal que $x(t) \in U$, então V é uma função de Lyapunov.

Nas mesmas condições acima se ocorrer que

$$(V \circ x)'(t) < 0$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ tal que $x(t) \in U$ então V é uma função de Lyapunov estrita.

Essas condições envolvem o conhecimento de $x(t)$. No entanto, lembrando que o fluxo $\phi_t(x)$ de X satisfaz a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x) = X(\phi_t(x))$$

do campo de vetores X , do cálculo usando a regra da cadeia temos que:

$$(V \circ x)'(t) = \frac{d}{dt}V(\phi_t(x)) = DV(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \langle \nabla V(\phi_t(x)), X(\phi_t(x)) \rangle$$

Isso mostra que não precisamos ter conhecimento das soluções explícitas $x(t)$ de $\dot{x} = X(x)$, para verificar se V , quando for uma função diferenciável, é uma função de Lyapunov (estrita) para tanto bastará apenas conferir se: $V(0) = 0$, com $V(x) > 0$ para qualquer $x \in U \setminus \{0\}$ e

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), X(\phi_t(x)) \rangle \leq 0 \quad (\langle \nabla V(x), X(\phi_t(x)) \rangle < 0)$$

Note que, \langle, \rangle representa o produto interno euclidiano, ∇V o vetor gradiente de V e DV a derivada de V .

Exemplos:

1) Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_2(x_3 - 1) \\ x'_2 = -x_1(x_3 - 1) \\ x'_3 = -x_3 \end{cases}$$

que é associada ao campo $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2x_3 - 2x_2, x_1 - x_1x_3, -x_3)$.

Temos em $(0, 0, 0)$ um ponto de equilíbrio, pois $f(0, 0, 0) = 0$.

Consideremos a função $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$, temos claramente que

- $V(0, 0, 0) = 0$ e $V(x_1, x_2, x_3) > 0$ para cada $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$
- é uma função diferenciável e

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x_1, x_2, x_3), f(x_1, x_2, x_3) \rangle &= \langle (2x_1, 4x_2, 2x_3), (2x_2x_3 - 2x_2, x_1 - x_1x_3, -x_3) \rangle \\ &= 2x_1(2x_2x_3 - 2x_2) + 4x_2(x_1 - x_1x_3) - 2x_3x_3 = -2x_3^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Logo V é uma função de Lyapunov para o sistema.

2) Consideremos a seguinte equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x - y - y^3 \end{cases}$$

que é associada ao campo $X(x, y) = (-y - x^3, x - y - y^3)$.

Temos que em $(0,0)$ um ponto de equilíbrio, pois $X(0,0) = 0$.

Se tomarmos a função $V(x, y) = x^2 + y^2$, onde V associa cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ao quadrado de sua norma, temos que:

- $V(0,0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$
- V é claramente uma função diferenciável

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x, y), X(x, y) \rangle &= \langle (2x, 2y), (-y - x^3, x - y - y^3) \rangle \\ &= -2xy - 2x^4 + 2xy - 2y^2 - 2y^4 = -2x^4 - 2y^2 - 2y^4 \end{aligned}$$

Vemos que, para qualquer vizinhança U de $(0,0)$ e qualquer $(x, y) \in U \setminus \{(0,0)\}$ temos que

$$-2x^4 - 2y^2 - 2y^4 < 0$$

Logo V é uma função de Lyapunov estrita.

A existência de uma função de Lyapunov para um sistema nos dá informações importantes a respeito da estabilidade, da estabilidade assintótica ou da instabilidade de um estado de equilíbrio sem requerer diretamente a obtenção da solução (isso vale tanto para sistemas lineares quanto para sistemas não-lineares). Lyapunov mostrou os seguintes teoremas.

Teorema 1.1 (Lyapunov I). *Seja X um campo de vetores com $X(0) = 0$. Se existe uma função de Lyapunov $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida em torno do ponto de equilíbrio então 0 é estável.*

Demonstração. Consideremos $\epsilon > 0$ e suponhamos que $\overline{B}(0, \epsilon) \subset U$. Seja $m = \min\{V(x) : \|x\| = \epsilon\}$ que existe pois V é contínua e $\partial \overline{B}$ é compacta. Além disso $m > 0$. Por outro

lado como $V(0) = 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\| < \delta$ então $V(x) < m$. Seja então x tal que $\|x\| < \delta$ provemos que $\|\phi_t(x)\| < \epsilon$ para qualquer $t \geq 0$.

Para obter a contradição suponhamos que $\|\phi_t(x)\| \geq \epsilon$ para algum $t \geq 0$. Seja $t_0 = \min\{s \in [0, t]; \|\phi_s(x)\| \geq \epsilon\}$. Temos então que $V(\phi_{t_0}) \geq m$. Por outro lado como V é decrescente por hipótese

$$V(\phi_{t_0}(x)) - V(\phi_0(x)) \leq 0$$

e portanto

$$V(\phi_{t_0}(x)) \leq V(\phi_0(x)) = V(x) < m$$

o que é uma contradição. □

Observação 1.2.1. *No teorema anterior por simplicidade tomamos 0 como ponto de equilíbrio, ressaltamos que 0 é um vetor n -dimensional, de acordo com o campo.*

O teorema acima é de grande utilidade prática para se reconhecer sistemas estáveis sem a necessidade de se conhecer explicitamente suas soluções.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplos:

1) Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen}x \end{cases}$$

que é associada ao campo $X(x, y) = (y, -\operatorname{sen}x)$ temos em $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio pois, $X(0, 0) = (0, -\operatorname{sen}0) = (0, 0)$.

Se tomarmos

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x$$

em torno de $(0, 0)$ temos que

- $V(0, 0) = 0$ e $V > 0$ para qualquer vizinhança suficientemente pequena da origem $((x, y) \neq (2\pi r, 0)$ para $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).
- V é diferenciável e $\nabla V(x, y) = (\operatorname{sen}x, y)$ logo

$$\dot{V}(x, y) = \langle (\text{sen}x, y), (y, -\text{sen}x) \rangle = \text{sen}xy - y\text{sen}x = 0$$

e portanto $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável.

2) Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

que é associada ao campo linear $X(x, y) = (y, -x - 2y)$ temos em $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio pois, $X(0, 0) = (0, -0 - 2 \cdot 0) = (0, 0)$.

Se tomarmos

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

em torno de $(0, 0)$ temos que

- $V(0, 0) = 0$ e $V > 0$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$
- V é diferenciável e

$$\dot{V}(x, y) = \langle (2x, 2y), (y, -x - 2y) \rangle = 2xy - 2xy - 4y^2 = -4y^2 \leq 0$$

e portanto $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável.

3) Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = 2yx - x^3 \\ y' = -x^2 \end{cases}$$

que é associada ao campo $X(x, y) = (2yx - x^3, -x^2)$ temos em $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio pois, $X(0, 0) = (2 \cdot 0 \cdot 0 - 0^3, -0^2) = (0, 0)$.

Se tomarmos $V(x, y) = x^2 + 2y^2$ em torno de $(0, 0)$ temos que

- $V(0, 0) = 0$ e $V > 0$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$
- V é diferenciável e

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= \langle \nabla V(x), X(\phi_t(x)) \rangle = \langle (2x, 4y), (2yx - x^3, -x^2) \rangle \\ &= 4x^2y - 2x^4 - 4x^2y = -2x^4 \leq 0\end{aligned}$$

e portanto $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio estável.

Antes de enunciarmos o próximo teorema vamos definir conjuntos necessários para a sua demonstração.

Definição 1.4. *Seja um campo $X : \Omega \rightarrow \Omega$ e $x \in \Omega$, definimos o conjunto ω -limite de x como:*

$$\omega(x, X) = \{y \in \Omega : \exists n_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } \phi_{n_k}(x) \rightarrow y\}$$

Analogamente definimos como α -limite de x como:

$$\alpha(x, X) = \{y \in \Omega : \exists n_k \rightarrow -\infty \text{ tal que } \phi_{n_k}(x) \rightarrow y\}$$

Teorema 1.2 (Lyapunov II). *Seja X um campo de vetores com $X(0) = 0$. Se existe uma função de Lyapunov estrita $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida em torno do ponto de equilíbrio então 0 é assintoticamente estável.*

Demonstração: Pelo teorema anterior temos que 0 é um ponto de equilíbrio estável. Logo dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que se $\|x\| < \delta$ então $\|\phi_t(x)\| < \epsilon$. Provemos que se $\|x\| < \delta$ então $\phi_t(x) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Sabemos que $V(x) > 0$ e $V(\phi_t(x))$ é estritamente decrescente por hipótese. Logo existe $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi_t(x)) = a \geq 0$. Seja $y \in \omega(x) \subset \bar{B}(x, \epsilon)$ (isso pela estabilidade de 0). Logo $V(\phi_t(y)) = \lim_{t_k \rightarrow \infty} V(\phi_t(\phi_{t_k}(x))) = \lim_{t_k \rightarrow \infty} V(\phi_{t+t_k}(x)) = a \geq 0$ e portanto V é constante ao longo da trajetória de y e a única possibilidade é que $a = 0$ e portanto $y = 0$.

□

Exemplos:

1) Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = x(x^2 + y^2 - 1) - y \\ y' = y(x^2 + y^2 - 1) + x \end{cases}$$

que é associada ao campo $X(x, y) = (x(x^2 + y^2 - 1) - y, y(x^2 + y^2 - 1) + x)$ temos em $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio pois, $X(0, 0) = (0, 0)$.

Se tomarmos $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ em torno de $(0, 0)$ temos que

- $V(0, 0) = 0$ e $V > 0$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$
- V é diferenciável e

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= \langle \nabla V(x, y), X(x, y) \rangle = \langle (x, y), (x^3 + xy^2 - x - y, yx^2 + y^3 - y + x) \rangle \\ &= x^4 - x^2 + x^2y^2 - xy + x^2y^2 + y^4 - y^2 + xy = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - x^2 - y^2 \\ &= (x^2 + y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 1)\end{aligned}$$

Temos que V será definida negativa somente no interior círculo unitário

$$x^2 + y^2 < 1 \Rightarrow \dot{V} < 0$$

e portanto para uma vizinhança W da origem (interior do círculo unitário), temos que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

2) Consideremos a equação diferencial em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = +x - y^3 \end{cases}$$

que é associada ao campo $X(x, y) = (-y - x^3, x - y^3)$ temos em $(0, 0)$ um ponto de equilíbrio pois, $X(0, 0) = (-0 - 0^3, 0 - 0^3) = (0, 0)$.

Se tomarmos $V(x, y) = x^2 + y^2$ em torno de $(0, 0)$ temos que

- $V(0, 0) = 0$ e $V > 0$ para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$
- V é diferenciável e

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= \langle (2x, 2y), (-y - x^3, x - y^3) \rangle \\ &= -2xy - 2x^4 + 2yx - 2y^4 = -2x^4 - 2y^4 < 0\end{aligned}$$

para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ e portanto $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Observação 1.2.2. *Note que no Exemplo 1 temos que o ponto de equilíbrio não é globalmente assintoticamente estável como no Exemplo 2, pois em 1 temos que definir uma vizinhança onde $\dot{V} < 0$ mas em 2 não há restrição para essa vizinhança.*

A condição do Teorema 1.2 na realidade é uma condição necessária em alguns casos particulares e esse fato será o foco do nosso estudo, vamos dar condições para que a estabilidade assintótica garanta a existência de uma (ou mais) função de Lyapunov para o campo.

Capítulo 2

Campos Lineares

2.1 Fluxo de um Campo Linear

Estudaremos primeiramente a estabilidade para campos lineares, nesse capítulo consideremos $A \in M(n)$ (conjunto das matrizes quadradas de ordem $n \times n$) associada ao campo $\dot{x} = Ax$, nosso objetivo principal é relacionar a matriz A com as trajetórias do campo linear.

Para o caso $n = 1$ temos que $x(t) = ke^{at}$ é solução para $\dot{x}(t) = ax(t)$ para condição inicial $x(0) = k$, de fato derivando $x(t)$ temos

$$\dot{x}(t) = ake^{at} = ax(t)$$

Queremos estender esse conceito para $n > 1$, onde a equação $\dot{x} = Ax$ tem como solução $x(t) = e^{tA}x_0$.

Usando a expansão em série de Taylor temos que

$$e^a = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} a^j$$

observamos que para estender o conceito a uma exponencial de uma matriz, precisamos de séries convergentes de matrizes, para convergência de matrizes, precisamos de normas no espaço de matrizes.

Para nosso estudo usaremos a *norma do operador* definida por

$$\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = \sup_{|x|=1} |Ax|$$

para $A \in M(n)$ e onde $|\cdot|$ é a norma euclidiana.

Podemos definir a matriz exponencial de uma matriz $A \in M(n)$ por

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{j!}A^j + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j.$$

No caso $n = 1$ temos convergência para a série de Taylor mas será que para matriz exponencial temos essa convergência?

No caso geral, tomando a norma do operador de $M(n)$, obtemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{j!}A^j \right\| = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A\|^j = e^{\|A\|}$$

onde fizemos uso da propriedade fundamental da norma $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, para tanto basta tomar $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^{m+1} = A^m A$. Fazendo por indução temos que

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m.$$

A série que define a exponencial é, portanto, absolutamente convergente e assim também é convergente.

Lema 2.1.1. $A \in M(n)$ com a norma do operador temos que:

i) $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$

ii) $\|e^A - I - A\| \leq \|A\|^2 e^{\|A\|}$

Demonstração: i) ok

$$ii) \quad \|e^A - I - A\| = \left\| I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots - I - A \right\| =$$

$$\left\| \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots \right\| = \|A^2 \left(\frac{1}{2!}I + \frac{1}{3!}A + \dots + \frac{1}{n!}A^{n-2} + \dots \right)\| \leq$$

$$\|A^2\| \cdot \left(\left\| \frac{1}{2!}I + \frac{1}{3!}A + \dots + \frac{1}{n!}A^{n-2} + \dots \right\| \right) \leq \|A\|^2 \cdot \left(\frac{1}{2!}\|I\| + \frac{1}{3!}\|A\| + \dots + \frac{1}{n!}\|A^{n-2}\| \right)$$

$$+ \dots) \leq \|A\|^2 \cdot \left(\|I\| + \|A\| + \dots + \frac{1}{n!} \|A^{n-2}\| + \dots \right) \leq \|A\|^2 e^{\|A\|}$$

□

Proposição 2.1. *Dados uma matriz $A \in M(n)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, os caminhos $t \rightarrow e^{tA}$ em $M(n)$ e $t \rightarrow e^{tA}x_0$ em \mathbb{R}^n são deriváveis e*

$$\frac{\partial e^{tA}}{\partial t} = Ae^{tA} \in M(n), \quad \frac{\partial e^{tA}x_0}{\partial t} = Ae^{tA}x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Demonstração: Dados $A \in M(n)$ e $t \in \mathbb{R}$, temos que $\|tA\| = |t|\|A\|$ obtemos então pelo lema anterior

$$\left\| \frac{1}{t}(e^{tA} - I) - A \right\| = \frac{1}{|t|} \|e^{tA} - I - tA\| \leq \frac{1}{|t|} \|tA\|^2 e^{\|tA\|} = |t| \|A\|^2 e^{|t|\|A\|} \leq |t| \|A\|^2 e^{\|A\|}$$

para $|t| < 1$. Escrevendo $X(t) = e^{tA}$, temos que $X(0) = e^0 = I$ e temos que $X'(0) = A$, de fato

$$\left\| \frac{X(t) - X(0)}{t} - A \right\| \leq |t| \|A\|^2 e^{\|A\|} \rightarrow 0$$

para $t \rightarrow 0$.

Afirmamos que $X(t+u) = X(t)X(u) \in M(n)$ para quaisquer $t, u \in \mathbb{R}$. Antes de provar essa afirmação, mostraremos que X é derivável e $X'(t) = X'(0)X(t) = AX(t)$, de fato

$$\begin{aligned} \left\| \frac{X(t+u) - X(t)}{u} - X'(0).X(t) \right\| &= \left\| \frac{X(t).X(u) - X(t)}{u} - X'(0).X(t) \right\| = \\ &= \left\| X(t). \underbrace{\frac{X(u) - X(0)}{u}}_{X'(0)} - X'(0).X(t) \right\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

para $u \rightarrow 0$ e para cada $t \in \mathbb{R}$. Além disso, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, podemos aplicar todas essas matrizes em x_0 para concluir que $x(t) = X(t)x_0 = e^{tA}x_0$ é derivável em \mathbb{R} e $\dot{x}(t) = Ax(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Provemos agora a primeira afirmação. Fixemos $t, u \in \mathbb{R}$ dado $j \in \mathbb{N}$ temos, pela lei do binômio

$$\frac{1}{j!}(t+u)^j = \frac{1}{j!} \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} t^m u^{j-m} = \sum_{m=0}^j \frac{t^m}{m!} \cdot \frac{u^{j-m}}{(j-m)!} = \sum_{r+s=j} \frac{t^r}{r!} \cdot \frac{u^s}{s!}$$

portanto

$$\frac{1}{j!}(tA + uA)^j = \frac{1}{j!}(t + u)^j A^j = \left[\sum_{r+s=j} \frac{t^r u^s}{r! s!} \right] A^j = \sum_{r+s=j} \frac{t^r}{r!} A^r \frac{u^s}{s!} A^s$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}(tA + uA)^j = \sum_{j=0}^n \sum_{r+s=j} \frac{1}{r!} t^r A^r \frac{1}{s!} u^s A^s = \left(\sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} (tA)^r \right) \cdot \left(\sum_{s=0}^n \frac{1}{s!} (uA)^s \right)$$

Passando ao limite $n \rightarrow +\infty$ resulta

$$e^{tA+uA} = e^{tA} e^{uA}$$

e portanto

$$X(t + u) = e^{(t+u)A} = e^{tA+uA} = e^{tA} e^{uA} = X(t)X(u)$$

□

2.2 Matrizes Conjugadas

Definição 2.1. *Sejam $A, B \in M(n)$ dizemos que as matrizes são conjugadas, se existe uma matriz não singular $Q \in M(n)$ tal que $AQ = QB$, ou seja, tal que $A = QBQ^{-1}$.*

Teorema 2.1. *Se $A, B, Q \in M(n)$ são tais que $AQ = QB$ então $e^A Q = Q e^B$, ou seja, se as matrizes A, B são conjugadas então e^A e e^B também são e além disso a matriz que as conjuga é a mesma que conjuga A e B .*

Demonstração: Como $AQ = QB$ segue $A^2Q = AAQ = AQB = QBB = QB^2$, por indução, $A^jQ = QB^j$, para $j \in \mathbb{N}$.

Assim

$$\begin{aligned} e^A Q &= \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} A^j \right) Q = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} A^j Q = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} Q B^j \\ &= Q \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} B^j \right) = Q e^B \Rightarrow e^A Q = Q e^B \Rightarrow e^A = Q e^B Q^{-1} = e^{QBQ^{-1}}. \end{aligned}$$

□

A afirmação provada na Proposição 2.1 poderia ser omitida naquele momento pois decorre imediatamente do seguinte corolário.

Corolário 2.2.1. *Dadas matrizes A e $B \in M(n)$, temos:*

1. se $AB = BA$ então $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$
2. a matriz e^A sempre é invertível, com $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

Demonstração: Como $AB = BA$, então $B(tA) = (tA)B$ e pelo teorema anterior temos $Be^{tA} = e^{tA}B$. Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ definimos $x(t) = e^{tA}e^{tB}x_0$, derivando

$$\dot{x}(t) = Ae^{tA}e^{tB}x_0 + e^{tA}Be^{tB}x_0 = Ae^{tA}e^{tB}x_0 + Be^{tA}e^{tB}x_0 = (A+B)e^{tA}e^{tB}x_0 = (A+B)x(t).$$

Mostrando assim que $x(t)$ é solução de $\dot{x} = (A+B)x$ com condição inicial $x(0) = x_0$. Mas $t \rightarrow e^{t(A+B)}x_0$ é a única solução de $\dot{x} = (A+B)x$ com $x(0) = x_0$, decorre que $x(t) = e^{t(A+B)}x_0 = e^{tA}e^{tB}x_0$, como isso vale para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ temos a igualdade, para $t = 1$ tem-se o resultado.

Em particular como $A - A = 0$ e $e^0 = I$, decorre que $e^{-A}e^A = I = e^Ae^{-A}$ logo $e^{-A} = (e^A)^{-1}$

□

Proposição 2.2. *Seja $A \in M(n)$ e seja ϕ_t o fluxo associado $\dot{x} = Ax$. Então ϕ_t é linear.*

Demonstração: Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$, como $x(t) = e^{tA}x_0$ define a única solução de $\dot{x} = Ax$ com condição inicial $x(0) = x_0$ e $\phi_t(x) = x(t)$ então

$$\phi_t(ax + y) = (ax + y)(t) = e^{tA}(ax_0 + y_0) = ax(t) + y(t) = a\phi_t(x) + \phi_t(y)$$

□

Observação 2.2.1. *Se ϕ_t é o fluxo de $\dot{x} = Ax$ então $\psi_t = \phi_{-t}$ é o fluxo de $\dot{x} = -Ax$*

2.3 Estabilidade Local

Consideremos $M \in M(n)$ uma matriz simétrica e seja a forma quadrática $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x) = \langle Mx, x \rangle$ e vejamos quem é \dot{V} com respeito ao campo Ax .

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \langle M\dot{x}, x \rangle + \langle Mx, \dot{x} \rangle = \langle MAx, x \rangle + \langle Mx, Ax \rangle \\ &= \langle MAx, x \rangle + \langle A^t Mx, x \rangle = \langle (MA + A^t M)x, x \rangle\end{aligned}$$

Definição 2.2. Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva em uma vizinhança $B(0, \rho)$ da origem, se para qualquer $x \in B(0, \rho)$, $V(x) \geq 0$ e $V(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Definição 2.3. Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-positiva em uma vizinhança $B(0, \rho)$ da origem, se para qualquer $x \in B(0, \rho)$, $V(x) \geq 0$ e $V(x) = 0 \nRightarrow x = 0$

Definição 2.4. Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é negativa em uma vizinhança $B(0, \rho)$ da origem, se $-V$ é definida positiva.

Definição 2.5. Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-negativa em uma vizinhança $B(0, \rho)$ da origem, se $-V$ é semi-definida positiva.

Se tivermos $\rho = \infty$ e se V é positiva dizemos que V é *definida positiva globalmente*.

Por analogia as outras definições temos, *semi-positiva globalmente*, *semi-negativa globalmente* e *negativa globalmente*.

Denotaremos por S o espaço das matrizes simétricas $n \times n$.

Lema 2.3.1. Seja A uma matriz invertível tal que todos seus autovalores tenham parte real negativa. Então a transformação linear $L_A : S \rightarrow S$ definida como

$$L_A(M) = MA + A^t M$$

é um isomorfismo.

Demonstração: Mostremos que $\text{Ker}(L_A) = \{0\}$. De fato, seja M tal que $MA + A^t M = 0$, logo $MA = -A^t M$, observemos que se v é um autovetor generalizado de A associado a

$\lambda = a + bi$ com $a < 0$ temos que $(a + bi)Mv = MAV = -A^tMv$ e portanto $A^tMv = -(a + bi)Mv$. Se $Mv \neq 0$ então Mv é um autovetor de A^t associado a $-(a + bi)$. Mas os autovalores de A e A^t são iguais e como A só tem autovalores com parte real negativa chegamos a um absurdo, pois $-(a + bi)$ teria parte real positiva. Portanto $Mv = 0$. Como

$$MA = -A^tM \Rightarrow MA^2 = MAA = -A^t(MA) = -A^t(-A^tM) = (-1)^2(A^t)^2M$$

por indução temos que $MA^q = (-1)^q(A^t)^qM$ e portanto

$$\begin{aligned} M(A - (a + bi)I)^2 &= M(A - (a + bi)I)(A - (a + bi)I) = \\ MA^2 - 2MA(a + bi)I + M((a + bi)I)^2 &= (-1)^2(A^t)^2M - 2(-A^t(a + bi)IM) + ((a + bi)I)^2M = \\ (-1)^2((A^t)^2 + 2A^t(a + bi)I + ((a + bi)I)^2)M &= (-1)^2(A + (a + bi)I)^2M \end{aligned}$$

novamente por indução temos que

$$M(A - (a + bi)I)^k = (-1)^k(A^t + (a + bi)I)^kM.$$

Seja \mathcal{B} uma base de Jordan de A e seja $v \in \mathcal{B}$.

Resulta que existe um autovalor generalizado $(a + bi)$ de A e $k \geq 1$ tal que $(A - (a + bi)I)^k v = 0$, logo

$$0 = M(A - (a + bi)I)^k v = (-1)^k(A^t + (a + bi)I)^k Mv.$$

Se $Mv \neq 0$ concluiríamos que $-(a + bi)$ seria um autovalor de A^t (e consequentemente de A) com parte real positiva o que é absurdo. Logo $Mv = 0$ para qualquer $v \in \mathcal{B}$ e portanto, como \mathcal{B} é base, $M = 0$.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, concluimos a sobrejetividade.

A transformação linear é homeomorfismo pois

$$L_A(M_1 + M_2) = (M_1 + M_2)A + A^t(M_1 + M_2) =$$

$$M_1A + A^tM_1 + M_2A + A^tM_2 = L_A(M_1) + L_A(M_2).$$

□

Definição 2.6. Uma matriz $A \in M(n)$ é definida positiva se a forma quadrática associada $V(x) = \langle Ax, x \rangle$ é definida positiva onde $x \in \mathbb{R}^n$.

Analogamente definimos A semi-definida positiva, definida negativa e semi-definida negativa.

Lema 2.3.2. Seja A com todos seus autovalores com parte real negativa e seja N uma matriz simétrica definida negativa. Então $M = L_A^{-1}(N)$ é definida positiva.

Demonstração: Observemos que $A \rightarrow L_A$ e $A \rightarrow L_A^{-1}$ são transformações lineares. Por outro lado se $L_A(M) = N$ com N definida negativa então 0 não é autovalor de M , caso contrário, se $Mv = 0$ então

$$0 = 2\langle Mv, Av \rangle = \langle (MA + A^tM)v, v \rangle = \langle Nv, v \rangle < 0.$$

Notemos também $L_{-I}(N) = -NI - IN = -2N$ é definida positiva já que N é definida negativa.

Fixemos N definida negativa seja $A_s, s \in [0, 1]$ uma isotopia tal que $A_0 = -I, A_1 = A$ e A_s sempre tem seus autovalores com parte real negativa. Seja $L_s = L_{A_s}$ e $M_s = L_s^{-1}(N)$. Logo M_s depende continuamente de s , M_s não tem autovalor 0 para todo $s \in [0, 1]$ e M_0 é definida positiva. Concluimos que $M_1 = L_A^{-1}(N)$ é definida positiva pois tem seus autovalores positivos. □

Teorema 2.2. Seja A com autovalores com parte real negativa. Então 0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de $\dot{x} = Ax$

Demonstração: Tomemos uma matriz $N \in S$ definida negativa pelo Lema 2.3.1, existe uma matriz $M \in S$ tal que $L_A(M) = N$, além disso pelo Lema 2.3.2, M é definida positiva.

Seja a forma quadrática definida positiva $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x) = \langle Mx, x \rangle$ (pois M é definida positiva). Derivando V temos;

$$\dot{V}(x) = \langle M\dot{x}, x \rangle + \langle Mx, \dot{x} \rangle = \langle MAx, x \rangle + \langle Mx, Ax \rangle = \langle (MA + A^tM)x, x \rangle = \langle Nx, x \rangle$$

que é definida negativa, pois N é definida negativa.

Portanto V é uma função de Lyapunov estrita, diferenciável definida em torno do ponto de equilíbrio e portanto pelo Teorema 1.2, o ponto 0 é assintoticamente estável. \square

Exemplo: Consideremos a seguinte equação diferencial linear em \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -3x - 3y \end{cases}$$

que é associada ao campo $X(x, y) = (x + 2y, -3x - 3y)$.

Então o ponto de equilíbrio $(0, 0)$ é assintoticamente estável já que os autovalores de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

tem parte real negativa.

De fato,

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 3 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 3)$$

Os autovalores são -1 e -3 .

Uma pergunta quase que imediata é “Sempre poderemos definir a função V do teorema acima?”. Existe apenas uma restrição na hora de definir V , os autovalores do campo linear A tem que ter parte real negativa. Com foco em nosso objetivo de encontrar uma recíproca para o Teorema 1.2, temos condições de enunciar para um caso particular uma recíproca desse teorema, quando temos que a equação diferencial está associada a um campo linear.

Teorema 2.3. *Seja A um campo linear se 0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável então existe uma função de Lyapunov estrita definida em torno de 0 .*

Demonstração: A prova desse fato será vinculada diretamente a proposição a seguir, antes porém algumas definições.

Definição 2.7. *Seja $0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio de campo linear A , dizemos que 0 é um poço para A se, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, vale*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = 0.$$

Definição 2.8. *Seja $A \in M(n)$ dizemos que A é um atrator hiperbólico se todos os autovalores de A tem parte real negativa.*

Proposição 2.3. *A origem de um campo linear $A \in M(n)$ é um poço se, e somente se, o campo A é um atrator.*

Demonstração: (\Rightarrow) Como a origem é um poço então 0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Suponhamos que exista um autovalor de A com parte real positiva ou nula, seja λ esse autovalor associado ao autovetor $v \in \mathbb{R}^n$.

Temos para $\lambda \in \mathbb{R}$ que $\dot{x}(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução de $\dot{x} = Ax$ pois derivando tem-se:

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}\lambda v = e^{\lambda t}Av = Ax(t).$$

Mas para essa solução, como $\lambda > 0$ e $v \neq 0$, resulta

$$\|\phi_t(x)\| = \|x(t)\| = \|e^{t\lambda}v\| = e^{t\lambda}\|v\| \geq \|v\| > 0$$

para $t \geq 0$ e portanto $x(t)$ não tende a 0 o que é absurdo pelo equilíbrio assintoticamente estável.

Se $\lambda = a + bi$ com $b \neq 0$ e $a > 0$ um autovalor complexo associado ao autovetor $w = u + vi$ onde $u, v \in \mathbb{R}^n$ e são (LI) linearmente independentes (basta lembrar que $\{w, \bar{w}\}$ são LI e $u = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$ e $v = \frac{1}{2i}(w - \bar{w})$) e sendo a solução do sistema dada por $x(t) = e^{ta}[\cos(bt)u + \text{sen}(bt)v]$ temos que a combinação linear $\cos(bt)u + \text{sen}(bt)v$ descreve uma elipse no plano uv e, portanto, $\|x(t)\| = \|e^{ta}[\cos(bt)u + \text{sen}(bt)v]\| = e^{ta} \cdot \|[\cos(bt)u + \text{sen}(bt)v]\| \rightarrow 0$ e novamente a solução $x(t)$ não tende a zero, o que é absurdo.

Finalmente se $\lambda = 0 + bi$ com $b \neq 0$ a situação é semelhante com a descrita acima, a solução $\|x(t)\| = \|e^{t0}[\cos(bt)u + \text{sen}(bt)v]\| = \|[\cos(bt)u + \text{sen}(bt)v]\|$ descreve uma elipse ou uma circunferência, e novamente a solução não tende a zero, que é absurdo.

(\Leftarrow) É consequência imediata do Teorema 2.2.

□

A proposição anterior nos diz que se o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável teremos que os autovalores do campo linear terão parte real negativa, podendo assim ser definida uma V como na demonstração do Teorema 2.2, completando assim a demonstração do Teorema 2.3.

□

O corolário a seguir mostra a relação direta que existe entre os autovalores do campo e sua estabilidade.

Corolário 2.3.1. *Para cada matriz $A \in M(n)$, existe $\lambda > 0$ suficientemente grande tal que,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi_t(x) = 0$$

onde ψ_t é o fluxo associado $\dot{x} = (A - \lambda I)x$.

Demonstração: Pela proposição anterior é suficiente provar que $A - \lambda I$ é um atrator. No espaço $M(n)$ temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} (sA - I) = -I$$

onde o único autovalor de $-I \in M(n)$ é -1 . É possível mostrar que os autovalores dependem continuamente das entradas da matriz (ver [3], p.232 ou [4] p.58) de modo que podemos escolher $s_0 > 0$ tal que a matriz $sA - I$ tem todos autovalores com parte real $< -\frac{1}{2}$ para cada $0 < s \leq s_0$. Observe γ é um autovalor de $sA - I$ se, e somente se, $\lambda\gamma$ é um autovalor de $\lambda(sA - I)$. Assim, para cada $\lambda \geq \frac{1}{s_0}$ temos $0 < \frac{1}{\lambda} = s \leq s_0$ e concluímos que todos os autovalores de $A - \lambda I = \lambda(\frac{1}{\lambda}A - I) = \lambda(sA - I)$ tem parte real menor do que $-\frac{1}{2s_0}$ e, portanto, $A - \lambda I$ é um atrator.

□

A equivalência do conceito topológico de poço com o conceito algébrico de atrator conduz a versão analítica desse comportamento de um campo linear. Dizemos que o fluxo de A é *contrativo* se existem constantes $C > 0$ e $a > 0$ tais que

$$\|\phi_t(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\|$$

para qualquer $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Teorema 2.4. *Seja A tal que todos seus autovalores tem parte real negativa e seja ϕ_t o fluxo de $\dot{x} = Ax$. Então ϕ_t é contrativo.*

Demonstração: Seja $V(x) = \langle Mx, x \rangle$ uma função de Lyapunov associada a A . Como ϕ_t é linear e V é quadrática temos que

$$V(\phi_t(x)) = b^2 V(\phi_t(\frac{x}{b}))$$

para qualquer $b \in \mathbb{R} \setminus 0$. Seja $\mathcal{E} = \{x : V(x) = 1\}$. Como $V(\phi_t(x))$ é estritamente decrescente, pois $\dot{V} < 0$, temos que existe $0 < \lambda < 1$ tal que para qualquer $x \in \mathcal{E}$, então $V(\phi_1(x)) < \lambda$, se $V(x) = \langle Mx, x \rangle = b$ então $\frac{V(x)}{b} = \langle M\frac{x}{b}, \frac{x}{b} \rangle = V(\frac{x}{\sqrt{b}}) = 1$, logo $V(\phi_1(x)) = b.V(\phi_1(\frac{x}{\sqrt{b}})) < V(\phi_1(x)) < \lambda V(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Logo para $n > 0$ temos que $V(\phi_n(x)) < \lambda^n V(x)$.

Para $t \geq 0$ escrevemos $t = n + r$ com $0 \leq r < 1$, logo $V(\phi_t(x)) = V(\phi_n(\phi_r(x))) < \lambda^n V(\phi_r(x)) < \lambda^n V(x) < \lambda^t \frac{1}{\lambda} V(x)$.

Como V é quadrática definida positiva, existem d e D positivos tais que

$$d\|x\|^2 \leq V(x) \leq D\|x\|^2.$$

Portanto

$$d\|\phi_t(x)\|^2 \leq V(\phi_t(x)) < \lambda^t \frac{D}{\lambda} \|x\|^2$$

Fazendo $C = \sqrt{\frac{D}{\lambda d}}$ e $-a = \frac{1}{2} \ln \lambda$ temos

$$\|\phi_t(x)\|^2 < \lambda^t \frac{D}{\lambda d} \|x\|^2 \Rightarrow \|\phi_t(x)\| < \sqrt{\lambda^t \frac{D}{\lambda d}} \|x\| \Rightarrow \|\phi_t(x)\| < \lambda^{\frac{t}{2}} \sqrt{\frac{D}{\lambda d}} \|x\| = e^{-at} C \|x\|$$

concluindo assim o resultado. □

Corolário 2.3.2. *Seja A e ϕ_t como no teorema anterior. Então existem C_1 e $a > 0$ tais que*

$$\|\phi_{-t}(x)\| \geq C_1 e^{at} \|x\|$$

para qualquer $t \geq 0$.

Demonstração:

$$\|x\| = \|\phi_t(\phi_{-t}(x))\| < Ce^{-at}\|\phi_{-t}(x)\|$$

e portanto $\|\phi_{-t}(x)\| > \frac{1}{C}e^{at}\|x\|$ fazendo $C_1 = \frac{1}{C}$ temos o resultado. □

Corolário 2.3.3. *Sejam A , ϕ_t como no teorema anterior e seja V uma forma quadrática associada a $\dot{x} = Ax$. Então se $x \neq 0$,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\phi_t(x)) = 0 \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} V(\phi_t(x)) = \infty$$

O próximo corolário mostra a condição contrária da apresentada até aqui, com ele podemos concluir a instabilidade de um ponto de equilíbrio.

Corolário 2.3.4. *Seja B uma matriz tal que todos seus autovalores tem parte real positiva e seja ϕ_t o fluxo de $\dot{x} = Bx$. Então existe $C, C_1 > 0$ e $a > 0$ tais que se $x \neq 0$ então*

$$\|\phi_{-t}(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\| \quad ; \quad \|\phi_t(x)\| \geq C_1e^{at}\|x\|$$

para qualquer $t \geq 0$.

Observação 2.3.1. *Seja B uma matriz como no corolário acima e uma função quadrática V associada a $\dot{x} = Bx$. Então, se $x \neq 0$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi_t(x)) = \infty \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} V(\phi_t(x)) = 0.$$

Ainda usando campo lineares temos um resultado não tão forte quanto o apresentado no Teorema 2.3 mas que dá uma recíproca do Teorema 1.1 (Lyapunov I), ou seja, uma recíproca para a estabilidade simples.

Teorema 2.5. *Seja A uma matriz real sem autovalores com parte real positiva e tal que a forma canônica de Jordan da matriz A não tem parte nilpotente, então existe uma função de Lyapunov em torno da singularidade do campo.*

Demonstração: Existe uma matriz real invertível C , tal que $C^{-1}AC = D$ (A e D são matrizes conjugadas), pelo Teorema da Decomposição de Jordan temos que D é soma direta de três tipos de matrizes:

- a) p matrizes L_1, \dots, L_p correspondendo aos autovalores de A que são zero. $L_h = 0$
- b) q matrizes M_1, \dots, M_q de ordem 2, que corresponde cada par de autovalores conjugados imaginários puros.

$$M_h = \begin{pmatrix} 0 & p_h \\ -p_h & 0 \end{pmatrix}$$

- c) uma matriz N de ordem $r = n - p - 2q$, correspondendo aos autovalores com parte real negativa.

Tomemos a soma direta da seguinte maneira:

$$D = \begin{bmatrix} L_{p \times p} & 0 & 0 \\ 0 & M_{2q \times 2q} & 0 \\ 0 & 0 & N_{r \times r} \end{bmatrix}$$

Seja P uma matriz da seguinte forma

$$P = \begin{pmatrix} L_{p \times p} & 0 \\ 0 & M_{2q \times 2q} \end{pmatrix}$$

Seja y um vetor do \mathbb{R}^n tendo componentes reais (y_1, y_2, \dots, y_n) denotemos por u o vetor coluna $(y_1, y_2, \dots, y_{p+2q})$ e por v o vetor coluna $(y_{p+2q+1}, y_{p+2q+2}, \dots, y_n)$.

Temos que pelo Teorema 2.3 existe uma forma definida positiva $W_2(v)$, pois todos os autovalores de N tem parte real negativa e além disso $\dot{W}_2(v) = \langle \nabla W_2(v), Nv \rangle$ é definida negativa (onde \langle, \rangle e ∇W_2 representam o produto interno e o gradiente de W_2 respectivamente).

Seja

$$W_1(u) = y_1^{2m} + \dots + y_p^{2m} + (y_{p+1}^2 + y_{p+2}^2)^m + \dots + (y_{p+2q-1}^2 + y_{p+2q}^2)^m$$

temos que $W_1(u)$ é claramente definida positiva e $W_1(u) = \langle \nabla W_1(u), Pu \rangle = 0$ pois:

$$\begin{aligned} \nabla W_1(u) = & (2my_1^{2m-1}, \dots, 2my_p^{2m-1}, m(y_{p+1}^2 + y_{p+2}^2)^{m-1}2y_{p+1}, \dots \\ & \dots, m(y_{p+2q-1}^2 + y_{p+2q}^2)^{m-1}2y_{p+2q}) \end{aligned}$$

$$P(u) = (0_1, \dots, 0_p, p_1y_{p+2}, -p_1y_{p+1}, p_2y_{p+4}, -p_2y_{p+3}, \dots, p_{2q}y_{p+2q}, -p_{2q}y_{p+2q-1})$$

Um cálculo simples leva ao resultado.

Definiremos agora uma função $W(y) = W_1(u) + W_2(v)$ que é definida positiva e diferenciável, pois W_1 e W_2 são positivas e diferenciáveis

$$\dot{W}(y) = \langle \nabla W(y), Dy \rangle = \langle \nabla W_1(u), Pu \rangle + \langle \nabla W_2(v), Nv \rangle \leq 0$$

Finalmente a forma definida por $V(x) = W(y) = W(C^{-1}x)$, onde $x = Cy$, é definida positiva, contínua e $\dot{V} \leq 0$ pois

$$\dot{V}(x) = \dot{W}(y)$$

Logo V é uma função de Lyapunov para o campo linear A .

□

2.4 Método de Massera

O mesmo resultado do Teorema 2.3 foi provado por José L. Massera em 1949 só que usando um método diferente e bem construtivo, usando esse mesmo método ele provou que a estabilidade assintótica implica também a existência de uma função de Lyapunov não só para sistemas lineares mas também para sistemas periódicos e autônomos, a demonstração desses referidos teoremas consiste essencialmente no seguinte lema.

Lema 2.4.1. *Dada uma função $\epsilon(t) > 0$ definida para $t \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = 0$ e uma função $M(t)$, positiva, contínua e não decrescente para $t \geq 0$, existe uma função $G(\eta)$ definida para $\eta \geq 0$, positiva, contínua e crescente com derivada contínua e crescente, $G(0) = G'(0) = 0$, tal que, para algum $\lambda > 0$ fixo e alguma função $\epsilon^*(t)$ que satisfaz a desigualdade $0 < \epsilon^*(t) \leq \lambda \cdot \epsilon(t)$, as integrais*

$$\int_0^{+\infty} G[\epsilon^*(t)] dt, \quad \int_0^{+\infty} G'[\epsilon^*(t)] \cdot M(t) dt$$

convergem uniformemente em ϵ^ . (G não depende de λ)*

Demonstração: Consideremos a sequência $t_n, n = 1, 2, 3, \dots, t_1 \geq 1, t_{n+1} \geq t_n + 1 \Rightarrow t_{n+1} - t_n \geq 1$ tal que se $t_n \leq t$ então $\epsilon(t) \leq \frac{1}{(n+1)^2}$.

Definimos $\eta(t_n) = \frac{1}{n}$, $\eta(t)$ linear entre t_n e t_{n+1} e $\eta(t) = (\frac{t_1}{t})^p$ para $0 < t < t_1$, onde p é escolhido grande o suficiente que

$$\lim_{t \rightarrow t_1^+} \eta'(t) > \lim_{t \rightarrow t_1^-} \eta'(t)$$

Seja $\lambda > 0$. Temos que, se $t_n < t < t_{n+1}$ então $\lambda\epsilon(t) \leq \frac{\lambda}{(n+1)^2}$ e $\eta(t) \geq \frac{1}{n+1}$ (pois $\eta(t_n) \geq \eta(t) \geq \eta(t_{n+1})$), logo $\lambda\epsilon(t) \leq \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{\lambda}{(n+1)} \leq \eta(t) \cdot \frac{\lambda}{n+1} \leq \eta(t)$ sempre que $n \geq [\lambda]$ (parte inteira de λ). Chamaremos de t_N onde $N = [\lambda]$

Seja $t(\eta)$ a função inversa de $\eta(t)$. Definimos

$$G(\eta) = \int_0^\eta \frac{e^{-t(s)}}{M[t(s)]} ds,$$

que é claramente contínua, crescente e com derivada contínua.

Para $t_N \leq t$ definimos $\epsilon^*(t) = \lambda\epsilon(t)$ temos $0 \leq \epsilon^*(t) \leq \eta(t)$ com isso,

$$G'[\epsilon^*(t)] = \frac{e^{-t[\epsilon^*(t)]}}{M[t(\epsilon^*(t))]} \leq \frac{e^{-t}}{M[t]}.$$

A desigualdade vem do fato de t ser decrescente $t[\epsilon^*(t)] \geq t[\eta(t)]$ e as funções exponencial e M serem crescentes. (Lembre que $t[\eta(t)] \geq t$).

Para 2ª integral temos

$$\int_0^{+\infty} G'[\epsilon^*(t)] M[t] dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{M[t]} \cdot M[t] dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt,$$

que é uniformemente convergente.

Para concluir a prova temos que mostrar que

$$\int_0^{+\infty} G[\epsilon^*(t)] dt = \int_{t_N}^{+\infty} \int_0^{\epsilon^*(t)} \frac{e^{-t[s]}}{M[t(s)]} ds dt,$$

converge uniformemente.

Pelo Teorema de Mudança de Variável temos

$$\int_{t_N}^{+\infty} \int_{\eta(0)}^{\eta(\epsilon^*(t))} |\eta'(\epsilon^*(t))| \frac{e^{-s}}{M(s)} ds dt,$$

isso é possível mesmo com a descontinuidade da função η' .

Como η é tomada linear no intervalo aberto (t_n, t_{n+1}) temos que para qualquer $t \in (t_n, t_{n+1})$

$$|\eta'(t)| = \left| \frac{\eta(t_{n+1}) - \eta(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \right| \leq \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right|$$

$$= \left| \frac{n - n - 1}{n(n+1)} \right| = \left| \frac{-1}{n(n+1)} \right| < 1$$

logo, tem-se que $|\eta'| < 1$ e com isso a integral dupla é majorada por

$$\int_{t_N}^{+\infty} \int_{+\infty}^t \frac{e^{-s}}{M(s)} ds dt$$

que é uniformemente convergente.

□

Teorema 2.6. *Seja A um campo linear se 0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável então existe uma função $V : W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $V > 0$ para qualquer $x \in W \setminus \{0\}$, $V(0) = 0$ e $\dot{V} < 0$ para $x \neq 0$, isto é, existe uma função de Lyapunov em uma vizinhança W do ponto de equilíbrio.*

Demonstração: Seja $\dot{x} = Ax$, pela estabilidade assintótica todos os autovalores de A tem parte real negativa (Proposição 2.3). Uma solução do campo linear é da forma $x(t) = e^{tA}x_0$ onde $x(0) = x_0$.

Tomemos $B(t) = e^{tA}$ pelo Corolário 2.2.1, B é invertível ($B^{-1}(t) = e^{-tA}$).

$$\epsilon(t) = \sup_{\|u\|=1} \left\{ \frac{1}{\|B^{-1}(t) \cdot u\|^2} \right\}$$

onde $u \in \mathbb{R}^n$, temos $\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = 0$ e além disso satisfaz a desigualdade $\epsilon(t) \cdot \|B^{-1}(t)x\|^2 \geq \|x\|^2$, pois

$$\epsilon(t) \cdot \|B^{-1}(t)x\|^2 \geq \frac{1}{\|B^{-1}(t) \left(\frac{x}{\|x\|} \right)\|^2} \cdot \|B^{-1}(t)x\|^2 \cdot \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} = \|x\|^2$$

o que prova a desigualdade.

Seja $G(\eta)$ a função associada pelo lema anterior à função $\epsilon(t)$ e $M(t) = 1$.

Definiremos

$$\dot{V}(x(t)) = -G[\epsilon(t) \cdot \|B^{-1}(t)x(t)\|^2]$$

como $G(\eta)$ é crescente temos $\dot{V}(x(t)) \leq -G(\|x\|^2)$, logo \dot{V} é definida negativa.

Consideremos \dot{V} como a derivada total $\frac{dV}{dt}$ de V até agora desconhecida.

Pelo Teorema do Fundamental do Cálculo, para $x(0) = x_0$ um valor inicial,

$$V(x(t)) - V(x_0) = \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds = - \int_0^t G[\epsilon(s) \cdot \|B^{-1}(s)x(s)\|^2] ds$$

usando $x(t) = B(t)x_0$ então $B^{-1}(t)x(t) = x_0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$ definiremos

$$V(x_0) = 2 \int_0^{+\infty} G[\epsilon(t) \cdot \|x_0\|^2] dt.$$

Em uma vizinhança próxima da origem temos que $\|x_0\|^2 \leq \lambda$. Aplicando o lema anterior para $\epsilon^*(t) = \epsilon(t) \cdot \|x_0\|^2 \leq \lambda \cdot \epsilon(t)$, temos convergência uniforme em ϵ^* das integrais

$$\int_0^{+\infty} G[\epsilon^*(t)] dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} G'[\epsilon^*(t)] M(t) dt.$$

O mesmo vale para a seguinte integral

$$\frac{d}{dx_0} V(x_0) = 2 \int_0^{+\infty} G'[\epsilon(t) \cdot \|x_0\|^2] \cdot \epsilon(t) \cdot \frac{\partial \|x_0\|^2}{\partial x_0} dt,$$

pois os fatores $\epsilon(t) \cdot \frac{\partial \|x_0\|^2}{\partial x_0}$ são limitados. Logo $V(x_0)$ é contínua com derivada contínua, e portanto $V(x(t))$ tem essas mesmas propriedades e além disso é definida positiva

$$V(x(t)) = 2 \int_0^{+\infty} G[\epsilon(t) \cdot \|x_0\|^2] dt - \int_0^t G[\epsilon(s) \cdot \|x_0\|^2] ds \geq 0.$$

Portanto V é uma função de Lyapunov estrita para o campo linear $\dot{x} = Ax$

□

Usando esse mesmo método Massera provou o seguinte teorema para sistemas autônomos e periódicos. Dizemos que um sistema não-autônomo $\dot{x} = X(t, x)$, onde $X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, é periódico se existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $X(t + T, x) = X(t, x)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.7. *Se o sistema é periódico ou autônomo, e 0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável então existe uma função de Lyapunov definida em uma vizinhança do ponto de equilíbrio.*

Demonstração: Definiremos $\epsilon(t) = \sup\{\|\phi_t(x)\|\}$ para $\|x\| < \delta_0$ e $0 \leq t \leq t_n$ pela estabilidade assintótica temos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = 0$ e $\epsilon(t) > 0$, tomemos a função $M(t)$ sendo uma majorante das seguintes derivadas,

$$\frac{\partial \|\phi_t(x)\|}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial \|\phi_t(x)\|}{\partial t}.$$

O domínio $\|x\| \leq \delta_0, 0 \leq t \leq t_n$, é um conjunto compacto, logo $M(t)$ existe e podemos assumir que ela é contínua e não decrescente.

Seja G a função definida pelo lema em relação a $\epsilon(t)$ e $M(t)$, definimos

$$V(x(t)) = \int_t^{\infty} G[\|\phi_s(x)\|] ds$$

isto é, a integral de G tomada ao longo das curvas partindo de $\phi_t(x)$ ao longo de $\phi_s(x)$, com $s \rightarrow \infty$.

Tomemos $0 < \epsilon^*(t) = \|\phi_t(x)\| \leq \epsilon(t)$ nesse caso δ que aparece no lema é simplesmente a função constante 1.

Pelo lema temos que

$$V(x(t)) = \int_0^{\infty} G[\epsilon^*(t)] dt$$

converge uniformemente em $\epsilon^*(t)$, isto é, ao longo das curvas para $\|x\| < \delta_0, 0 \leq t \leq t_n$.

Como temos que o sistema é periódico, sem perda da generalidade suporemos que o período é t_n . Seja $[t_n]$ a parte inteira de t_n para todo $t \geq t_n$ temos $t' = t - [t_n]$, então

$$\|\phi_t(x)\| = \|\phi_{t'}(x)\| \Rightarrow \epsilon^*(t) = \epsilon^*(t') \Rightarrow G[\epsilon^*(t)] = G[\epsilon^*(t')]$$

temos com isso que V converge uniformemente para $\|x\| < \delta_0, t \geq 0$.

Derivando em relação a x a integral acima

$$\frac{d}{dx} \int_t^{+\infty} G[\|\phi_s(x)\|] ds = \int_t^{+\infty} G'[\|\phi_s(x)\|] \cdot \frac{\partial \|\phi_s(x)\|}{\partial x} ds \leq \int_t^{+\infty} G'[\|\phi_s(x)\|] \cdot M(s) ds$$

que pelo lema anterior converge uniformemente, logo V é contínua com derivada contínua.

Fixando uma trajetória temos que

$$\frac{d}{dt} \int_t^{+\infty} G[\|\phi_s(x)\|] ds = \int_t^{+\infty} G'[\|\phi_s(x)\|] \cdot \frac{\partial \|\phi_s(x)\|}{\partial s} ds \leq \int_t^{+\infty} G'[\|\phi_s(x)\|] \cdot M(s) dt,$$

assumindo que $M(s) = M$ constante temos que

$$\frac{d}{dt} \int_t^{+\infty} G[\|\phi_s(x)\|] ds = \dot{V}(x(t)) = -M \cdot G[\|\phi_t(x)\|] < 0$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Portanto V é uma função de Lyapunov estrita para o sistema.

□

Capítulo 3

Conjugação de Fluxos

Neste capítulo consideremos o campo de vetores $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ não linear.

3.1 Conjugação Local

Definição 3.1. Dizemos que dois campos f_1, f_2 são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo $g : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ tal que $\psi_t \circ g = g \circ \phi_t$, para qualquer $x \in \Omega_1$, onde ϕ_t e ψ_t são os fluxos de f_1 e f_2 respectivamente.

Observação 3.1.1. O homeomorfismo g definido anteriormente é chamado de conjugação topológica.

Campos lineares podem ser classificados de acordo com o seu índice de estabilidade (índice de Morse), isto é, a dimensão do auto espaço generalizado relativo aos autovetores com parte real negativa.

Definição 3.2. Dizemos que um campo linear $\dot{x} = Ax$ é hiperbólico se A não tem autovalores com parte real nula.

Veremos que campos lineares hiperbólicos em espaços com mesma dimensão são topologicamente conjugados se, e somente se, tem o mesmo índice de estabilidade.

Muitas vezes não é possível encontrar uma mudança de coordenadas conveniente para todo o retrato de fase de um campo, mas as vezes é possível definir essa mudança em algumas sub-regiões, vejamos:

Definição 3.3. Dizemos que o campo f_1 em x_1 é localmente topologicamente conjugado ao campo f_2 em x_2 se existem vizinhanças U_1 de x_1 em Ω_1 e U_2 de x_2 em Ω_2 e um homeomorfismo $g : U_1 \rightarrow U_2$ tal que $g(x_1) = x_2$ e

$$\psi_t \circ g(x) = g \circ \phi_t(x)$$

para qualquer $x \in U_1$, onde ϕ_t e ψ_t são os fluxos de f_1 e f_2 respectivamente.

O homeomorfismo descrito acima é uma conjugação local entre os fluxos. Temos que a conjugação \sim é uma relação de equivalência entre fluxos, de fato

1. $\phi_t \sim \phi_t$, pois id conjuga os campos $\phi_t \circ id(x) = id \circ \phi_t(x)$
2. $\phi_t \sim \psi_t \Rightarrow \psi_t \sim \phi_t$, pois $\phi_t \circ g(x) = g \circ \psi_t(x)$, logo g^{-1} é homeomorfismo que conjuga ψ_t e ϕ_t . ($\psi_t \circ g^{-1}(x) = g^{-1} \circ \phi_t(x)$)
3. $\phi_t \sim \psi_t$ e $\psi_t \sim \varphi_t \Rightarrow \phi_t \sim \varphi_t$, pois $\phi_t \circ g(x) = g \circ \psi_t(x) \Rightarrow g^{-1} \circ \phi_t \circ g(x) = \psi_t(x)$ e como $\psi_t \circ h(x) = h \circ \varphi_t(x)$ tem-se $g^{-1} \circ \phi_t \circ g \circ h(x) = h \circ \varphi_t(x) \Rightarrow \phi_t \circ (g \circ h)(x) = (g \circ h) \circ \varphi_t(x)$ como g e h são homeomorfismo então $g \circ h$ também é um homeomorfismo que conjuga ϕ_t e φ_t .

Dois fluxos conjugados, do ponto de vista topológico, são iguais a menos de uma mudança de coordenadas, com isso uma conjugação (local ou global) mantém as propriedades dinâmicas dos dois campos, levando trajetórias em trajetórias e preservando o aspecto do retrato de fase.

3.2 Teorema de Grobman-Hartman

Agora vamos pela aproximação linear estender alguns resultados provados anteriormente sobre condições necessárias e suficientes para a existência de uma função de Lyapunov.

Teorema 3.1. *Seja $A \in M(n)$ tal que todos seus autovalores tenham parte real negativa. Então os fluxos de $\dot{x} = Ax$ e $\dot{x} = -x$ são conjugados.*

Demonstração: Denotaremos por ϕ_t o fluxo de $\dot{x} = Ax$ e por ψ_t o fluxo de $\dot{x} = -x$. Observemos que se $x \neq 0$ então existe $t = t(x)$ tal que $\|\psi_t(x)\| = 1$, isto é, a trajetória de x corta a esfera unitária \mathbb{S}^n em um único ponto ($\psi_t(x) = e^{-t}x \Rightarrow \|\psi_t(x)\| = \frac{\|x\|}{|e^t|}$ logo para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe um único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\|x\| = |e^t|$). Seja $N = MA + A^tM$ uma matriz definida negativa. Definimos $V(x) = \langle Mx, x \rangle$, com M definida positiva, a função de Lyapunov associada a $\dot{x} = Ax$. Se $x \neq 0$ então existe um único $t = t(x)$ tal que $V(\phi_t(x)) = 1$, isto é, a trajetória de x corta o elipsóide $\mathcal{E} = \{x : \langle Mx, x \rangle = 1\}$ em um único ponto (O Corolário 2.3.3 mostra a existência desse $t = t(x)$ e como $V(\phi_t(x))$ é estritamente decrescente temos que $t = t(x)$ é único).

Seja $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{E}$ um homeomorfismo qualquer. Definiremos uma conjugação $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ entre ϕ_t e ψ_t . Se $x \neq 0$ seja t_x tal que $\psi_{t_x}(x) \in \mathbb{S}^n$ e definimos

$$H(x) = \phi_{-t_x} \circ h \circ \psi_{t_x}.$$

Definindo $H(0) = 0$ temos que H é um homeomorfismo que conjuga os fluxos, de fato, para cada $\psi_t(x)$ existe um único $t_{\psi(x)} = t_x$ tal que $\psi_{t_x+t}(x) \in \mathbb{S}^n$, logo, fazendo a composição por ϕ_{t_x} a esquerda e por ψ_{-t_x} a direita temos que,

$$\phi_{t_x} \circ \phi_{-t_x} \circ h \circ \psi_{t_x+t} \circ \psi_{-t_x} = \phi_{t_x} \circ \phi_{t-t_x} \circ h \circ \psi_{t_x} \circ \psi_{-t_x} \Rightarrow h \circ \psi_t = \phi_t \circ h$$

A função H é contínua em 0 pois, considerando uma sequência $x_n \rightarrow 0$ então $t_{x_n} \rightarrow +\infty$, logo $H(x_n) = \phi_{-t_{x_n}} \circ h \circ \psi_{t_{x_n}}(x_n)$, fazendo $h \circ \psi_{t_{x_n}}(x_n) = y_n \in \mathcal{E}$, então $\lim_{x_n \rightarrow 0} H(x_n) = \lim_{t_{x_n} \rightarrow +\infty} \phi_{t_{x_n}}(y_n) = 0$, isso pela estabilidade assintótica.

□

Corolário 3.2.1. *Sejam A e B matrizes com todos os valores próprios com parte real negativa, então os fluxos $\dot{x} = Ax$ e $\dot{x} = Bx$ são conjugados.*

A classificação dos subespaços de um campo linear de acordo com os seus autovalores, é possível desde que eliminemos os casos degenerados, ou seja, campos com autovalores com parte real nula.

Teorema 3.2. *Seja $\dot{x} = Ax$ um campo linear hiperbólico (sem autovalores com parte real nula) e seja ϕ_t o fluxo correspondente. Então existem subespaços E^s e E^u e constantes $C > 0$ e $a > 0$ tais que*

1. $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$
2. $\phi_t(E^s) = E^s$ e $\phi_t(E^u) = E^u$ para todo $t \in \mathbb{R}$
3. Se $x \in E^s$ então $\|\phi_t(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\|$ para $t \geq 0$
4. Se $x \in E^u$ então $\|\phi_{-t}(x)\| \leq Ce^{-at}\|x\|$ para $t \geq 0$

Demonstração: Como todos os valores de A tem parte real não nula então cada autovalor é associado a um autovetor que gera um subespaço do \mathbb{R}^n (pois $A \in M(n)$) que é invariante pela ação de A e além disso o somatório da dimensão de cada subespaço é n , tomando E^s a soma de todos os subespaços generalizados de A associados aos autovalores com parte real negativa e E^u a soma de todos os autovalores com parte real positiva, temos que:

- a) $\dim(E^s) + \dim(E^u) = n$ 1) ok
- b) pela invariância dos subespaços 2) ok
- c) definindo $A^s = A|_{E^s}$ temos um campo linear com todos os autovalores com parte real negativa e pelo Teorema 2.4 segue 3) ok
- d) definindo $A^u = A|_{E^u}$ o resultado segue pelo Corolário 2.3.4 4) ok

□

Teorema 3.3. *Sejam $\dot{x} = Ax$ e $\dot{x} = Bx$ dois campos hiperbólicos que tem o mesmo índice de estabilidade e sejam ϕ_t e ψ_t os respectivos fluxos. Então ϕ_t e ψ_t são conjugados.*

Demonstração: Sejam E_A^s e E_B^s os subespaços estáveis de ϕ_t e ψ_t respectivamente. Como $\dim(E_A^s) = \dim(E_B^s)$ concluímos que $\phi_t^s = \phi_t|_{E_A^s}$ e $\psi_t^s = \psi_t|_{E_B^s}$ são conjugados por $h^s : E_A^s \rightarrow E_B^s$ com base no Corolário 3.2.1.

Analogamente $\phi_t^u = \phi_t|_{E_A^u}$ e $\psi_t^u = \psi_t|_{E_B^u}$ são conjugados por $h^u : E_A^u \rightarrow E_B^u$. Basta ver que $(\phi_t^u)^{-1}$ tem o mesmo comportamento de ϕ_t^s , isso pelo item 4 do teorema anterior.

Definindo $h : \mathbb{R}^n = E_A^s \oplus E_A^u \rightarrow \mathbb{R}^n = E_B^s \oplus E_B^u$ por $h = h^s \oplus h^u$ temos que h é uma conjugação (isso pela linearidade dos fluxos).

□

Os subespaços E^s e E^u são chamados de *subespaço estável* e *subespaço instável* respectivamente.

Diremos que a origem é um *atrator* se $E^s = \mathbb{R}^n$, *repulsor* se $E^u = \mathbb{R}^n$ e *sela* nos demais casos.

Definição 3.4. *Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo C^1 e seja x_0 um ponto de equilíbrio. Dizemos que x_0 é um ponto de equilíbrio hiperbólico se $\dot{x} = DF_{x_0}$ é um campo linear hiperbólico.*

Teorema 3.4 (Grobman-Hartman). *Seja $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo C^1 e seja x_0 uma singularidade hiperbólica com $A = DF_{x_0}$. Então os fluxos de $\dot{x} = F(x)$ e o fluxo de $\dot{x} = Ax$ são localmente conjugados, isto é, existe $U(x_0), V(0)$ e $h : U \rightarrow V$ homeomorfismo tal que*

$$h \circ \phi_t^F = \phi_t^A \circ h$$

A demonstração do Teorema de Grobman-Hartman é dada no apêndice desse trabalho.

Obteremos agora resultados sobre o ponto de equilíbrio x_0 de uma equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ a partir da aproximação linear no ponto.

Teorema 3.5. *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo e x_0 uma singularidade, isto é, $f(x_0) = 0$. Seja $A = Df_{x_0}$. Então, se todos os autovalores de A tem parte real negativa, x_0 é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de $\dot{x} = f(x)$.*

Demonstração: Suponhamos sem perda da generalidade que $x_0 = 0$. O campo f pode ser escrito da seguinte forma

$$f(x) = f(0) + Df_{x_0}(x) + R(x)$$

onde

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0$$

ou $f(x) = Ax + R(x)$

Mostremos que a função de Lyapunov de $\dot{x} = Ax$ também será uma função de Lyapunov para $\dot{x} = f(x)$. Consideremos uma matriz simétrica definida negativa $N = MA + A^t M$ onde M é uma matriz simétrica definida positiva e definimos $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $V(x) = \langle Mx, x \rangle$.

Como N é definida negativa existe $a > 0$ tal que $\langle Nx, x \rangle \leq -a\|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Seja $\eta > 0$ tal que $2\|M\|\eta < a$.

Existe $\epsilon > 0$ tal que se $\|x\| < \epsilon$ então

$$\frac{\|R(x)\|}{\|x\|} < \eta$$

Veremos que \dot{V} para o campo f é negativa em $B(0, \epsilon)$ com o qual aplicando o Teorema 1.2 concluímos o resultado.

Suporemos que $0 \neq \|x\| < \epsilon$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \langle M\dot{x}, x \rangle + \langle Mx, \dot{x} \rangle = \langle Mf(x), x \rangle + \langle Mx, f(x) \rangle \\ &= \langle M(Ax + R(x)), x \rangle + \langle Mx, (Ax + R(x)) \rangle \\ &= \langle MAx, x \rangle + \langle MR(x), x \rangle + \langle Mx, Ax \rangle + \langle Mx, R(x) \rangle \\ &= \langle (MA + A^tM)x, x \rangle + 2\langle MR(x), x \rangle \\ &\leq -a\|x\|^2 + 2\|M\|\|R(x)\|\|x\| \\ &= \|x\|^2(-a + 2\|M\|\frac{\|R(x)\|}{\|x\|}) < \|x\|^2(-a + 2\|M\|\eta) < 0 \end{aligned}$$

□

Exemplo:

1) No começo desse trabalho já demos como exemplo de alguns pontos singulares no pêndulo de haste rígida (ver Figura 1.1). Vamos descrever a posição da partícula em coordenadas polares, pela mudança de coordenadas temos que $(x_1, x_2) = r(\cos \theta, \text{sen} \theta)$, temos que $r(t) = l$, teremos com isso somente a variação angular θ . Tomaremos a posição do pêndulo em repouso como $\theta = 0$.

Além da ação da gravidade, consideremos que haja alguma força de atrito atuando no sistema, pela segunda Lei de Newton, temos a descrição do sistema da seguinte maneira:

$$\theta'' + k\theta' + g\text{sen}\theta = 0$$

$$\begin{cases} \theta' = w \\ w' = -kw - g\sin\theta \end{cases}$$

No sistema tomamos $m = l = 1$, g como a constante gravitacional e $k \geq 0$ o coeficiente de atrito.

Iremos analisar a parte linear desse sistema acima, já sabemos que quando há ação do atrito a posição inicial $\theta = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, para qualquer condição inicial “próxima” de $\theta = 0$.

Seja $f(\theta, w) = (w, -kw - g\sin\theta)$ o campo associado ao sistema acima, temos que

$$A = Df_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -k \end{bmatrix}$$

Os autovalores de A tem parte real negativa, de fato:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ g & \lambda + k \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda k + g = 0$$

logo,

$$\left(\lambda + \frac{k}{2}\right)^2 = -g + \frac{k^2}{4} \Rightarrow \lambda = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{-g + \frac{k^2}{4}}$$

Considerando que $k \leq 1$ temos que A tem parte real negativa, como já era esperado.

Vamos definir uma função de Lyapunov apropriada para o sistema.

Seja N uma matriz 2×2 definida da seguinte maneira,

$$N = \begin{bmatrix} -2g & 2g \\ 2g & -2g \end{bmatrix}$$

Temos N definida negativa e sabemos que M é uma matriz simétrica, com isso

$$\begin{aligned} N = MA + A^t M &\Rightarrow \begin{bmatrix} -2g & 2g \\ 2g & -2g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g & -k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} -2bg & a - bk - gc \\ a - bk - gc & 2(b - ck) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2g & 2g \\ 2g & -2g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema 3×3 , pela simetria, temos

$$\begin{cases} -2bg = -2g \Rightarrow b = 1 \\ 2(b - ck) = -2g \Rightarrow 1 - ck = -g \Rightarrow c = \frac{g+1}{k} \\ a - bk - gc = 2g \Rightarrow a = k + 2g + \frac{g^2+g}{k} \end{cases}$$

Por simplicidade faremos

$$M = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

onde $a = k + 2g + \frac{g^2+g}{k} > 1$ e $c = \frac{g+1}{k} > 1$, e temos M definida positiva.

Definiremos V da seguinte maneira:

$$V(\theta, w) = \langle M(\theta, w), (\theta, w) \rangle = \langle (a\theta + w, \theta + cw), (\theta, w) \rangle = a\theta^2 + 2\theta w + cw^2$$

Como $ac > 1$ completando quadrados temos que $V(\theta, w) = (\sqrt{a}\theta + \frac{w}{\sqrt{a}})^2 + \frac{(ac-1)}{a}w^2$, logo $V(\theta, w) > 0$ e $V(\theta, w) = 0 \Leftrightarrow (\theta, w) = 0$.

Como o sistema não é linear temos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \langle \nabla V, f \rangle = \langle (2a\theta + 2w, 2\theta + 2cw), (w, -kw - g\text{sen}\theta) \rangle \\ &= 2a\theta w + 2w^2 - 2\theta kw - 2\theta g\text{sen}\theta - 2cw^2k - 2cw g\text{sen}\theta \\ &= w^2(2 - 2kc) + \theta w(2a - 2k) - 2g\text{sen}\theta(\theta + cw) \end{aligned}$$

Tomando os valores de a e c encontrados no sistema acima, teremos

$$2 - 2kc = 2 - 2k \cdot \underbrace{\frac{g+1}{k}}_c = 2 - 2g - 2 = -2g$$

e

$$2a - 2k = 2k + 4g + 2 \cdot \frac{g^2+g}{k} - 2k = 4g + 2 \cdot \frac{g^2+g}{k}$$

Fazendo $\text{sen}\theta \leq (1 + \epsilon)\theta$ onde θ é suficientemente pequeno e $\epsilon > 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\theta, w) &\leq -2gw^2 + \theta w(4g + 2 \frac{g^2+g}{k}) - 2g\theta(\theta + \frac{g+1}{k}w) - \epsilon(\theta + cw) \\ &= -2gw^2 + 4\theta w g + 2\theta w \frac{g^2+g}{k} - 2g\theta^2 - 2\theta w \frac{g^2+g}{k} - \epsilon(\theta + cw) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2gw^2 + 4\theta wg - 2\theta^2 g - \epsilon(\theta + cw) = -2g(w^2 - 2\theta w + \theta^2) - \epsilon(\theta + cw) \\
&= -2g(w - \theta)^2 - \epsilon(\theta + cw)
\end{aligned}$$

tomando $\epsilon = \frac{1}{(\theta+cw)}$, logo \dot{V} é definida negativa e V é uma função de Lyapunov para o sistema.

Notemos que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ a aproximação não é boa, esse ponto é um ponto de equilíbrio instável do sistema.

Temos as ferramentas necessárias para provarmos um teorema mais geral que o provado no Capítulo 3, Teorema 2.3. Embora o resultado seja mais geral que anterior ainda é restrito, pois não consideraremos os casos onde a parte linear do campo tenha autovalores com parte real nula, usando o teorema de Grobman-Hartman e o Teorema 3.5 temos o seguinte resultado.

Teorema 3.6. *Seja $\dot{x} = f(x)$ uma equação diferencial onde $f(x)$ é um campo não linear de classe C^1 e x_0 um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e $DF_{x_0} = A$ um campo hiperbólico. Então existe uma função $V : U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ onde U é uma vizinhança de x_0 , $V(x) \geq 0$, contínua e $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ com $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq x_0$, isto é, existe uma função de Lyapunov estrita para o campo f .*

Demonstração: Temos pelo Teorema de Grobman-Hartman que f e A são conjugados e pela estabilidade assintótica todos os autovalores de A tem parte real negativa (Proposição 2.3). Logo podemos definir pelo Teorema 2.3 uma função de Lyapunov para o campo linear A e que pela demonstração do Teorema 3.5 a função de Lyapunov para o campo não linear f será definida de maneira análoga, isto é, seja N uma matriz simétrica qualquer definida negativa, tem-se que a função de Lyapunov para f é dada por

$V(x) = \langle Mx, x \rangle$ com $V \geq 0, V(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$, onde $N = MA + A^tM$ e M é definida positiva.

□

Apêndice

Prova do Teorema de Grobman-Hartman

Uma sequência de pontos no \mathbb{R}^n é dita ser *Cauchy* se existe $\epsilon > 0$ e $N > 0$ tal que $\|x_n - x_{n+p}\| < \epsilon$ para quaisquer $n \geq N$ e $p \in \mathbb{N}$.

Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ para $n \geq 1$ é dita *lipschitziana* se existe $\lambda > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$$

λ é denominada *constante de Lipschitz (Lip)*.

Nas mesmas condições acima se $\lambda < 1$ dizemos que a aplicação é uma *contração*.

Usaremos novamente a norma do operador definida anteriormente como

$$\|A\| = \sup_{|v|=1} |Av|$$

onde A é uma aplicação linear $A : \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$ com \mathbb{E}_1 e \mathbb{E}_2 dois *espaços de Banach* (espaço vetorial normado completo).

A aplicação linear é dita *limitada* se $\|A\|$ é finita. Seja $\mathbf{L}(\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2)$ o conjunto das aplicações lineares limitadas em \mathbb{E}_1 e \mathbb{E}_2 com a norma do operador. Definiremos também a *norma do mínimo* como

$$m(A) = \inf_{\|v\|=1} |Av|.$$

Se A é invertível, então $m(A) = \|A^{-1}\|^{-1}$.

Introduziremos alguns espaços de funções necessários para a prova do Teorema de Grobman-Hartman.

Seja

$$C^0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que } f \text{ é contínua}\}.$$

$$C^1(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que } f \text{ é diferenciável e } Df \in C^0(\mathbb{R}^n)\}.$$

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita *limitada* se existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Seja $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas aplicações contínuas e limitadas de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n (por simplicidade $C_b^0(\mathbb{R}^n)$).

Esse conjunto $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Banach se colocarmos nele a seguinte norma

$$\|f_1 - f_2\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f_1(x) - f_2(x)|.$$

Seja $C_b^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $g \in C^1 \cap C_b^0(\mathbb{R}^n)$ e existe $C > 0$ tal que $\|Dg_a\| \leq C$ (C independe de a , isto é, o limite é uniforme).

Lema 3.2.1. *Dados dois números $0 < a < b$, existe uma função β de classe C^∞ em \mathbb{R}^n tal que $0 \leq \beta(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e*

$$\beta(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } \|x\| \leq a \\ 0 & \text{para } \|x\| \geq b \end{cases}$$

Demonstração: Definiremos uma função de variável real,

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Temos que $\alpha(x) \in C^\infty$.

Para $a < b$, seja $\gamma(x) = \alpha(x - a) \cdot \alpha(b - x)$. Então $\gamma(x) \geq 0$ e é zero exatamente no intervalo aberto (a, b) . Novamente $\gamma(x)$ é C^∞ .

Agora, se definimos

$$\delta(x) = \frac{\int_x^b \gamma(s) ds}{\int_a^b \gamma(s) ds},$$

então $0 \leq \delta(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \leq a \\ 0 & \text{para } x \geq b \end{cases}$$

Este δ é quase a função desejada na reta real. Finalmente, defina $\beta(x)$ em \mathbb{R}^n por $\beta(x) = \delta(\|x\|)$. Essa função tem todas as propriedades requeridas.

□

Teorema 3.7. *Seja $A \in M(n)$ uma aplicação linear hiperbólica invertível. Existe um $\epsilon > 0$ tal que se $g \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$ com $Lip(g) < \epsilon$, então $f = A + g$ é topologicamente conjugada a A por $h = id + v$ com $v \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$ e além disso essa conjugação é única ao longo $id + k$ com $k \in C_b^0(\mathbb{R}^n)$.*

Motivação e esboço da prova: Formalmente conjugação pode ser provada pelo Teorema da Função Implícita. Para $g \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$ nós queremos encontrar um homeomorfismo $id + v$ que conjuga $A + g$ com A , isto é,

$$(A + g) \circ (id + v) = (id + v) \circ A \Rightarrow (A + g) \circ (id + v) \circ A^{-1} = id + v \Rightarrow$$

$$0 = (id + v) - (A + g) \circ (id + v) \circ A^{-1} \Rightarrow 0 = v - A \circ v \circ A^{-1} - g \circ (id + v) \circ A^{-1}$$

Definimos $\Psi : C_b^1(\mathbb{R}^n) \times C_b^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$ por

$$\Psi(g, v) = v - A \circ v \circ A^{-1} - g \circ (id + v) \circ A^{-1}$$

Dado g queremos encontrar v_g tal que $\Psi(g, v_g) = 0$. Como $\Psi(0, id) = id - A \circ id \circ A^{-1} = 0$, então podemos o Teorema da Função Implícita em pontos próximos de $(0, id) \in C_b^1(\mathbb{R}^n) \times C_b^0(\mathbb{R}^n)$ para encontrar v_g com $\Psi(g, v_g) = 0$.

Pode-se provar que $\Psi \in C^1$ e a derivada parcial com respeito a segunda variável é

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial v} \right)_{(0, id)} \hat{v} = \hat{v} - A \circ \hat{v} \circ A^{-1} \equiv (id - \tilde{A})\hat{v} \equiv \mathcal{L}(\hat{v})$$

onde $\tilde{A}\hat{v} = A \circ \hat{v} \circ A^{-1}$. Se provarmos Ψ é uma aplicação de classe C^1 ($\Psi \in C^1$) com derivada parcial \mathcal{L} e que \mathcal{L} é um isomorfismo, então o Teorema da Função Implícita mostra que podemos encontrar $v = v_g$ em função de g tal que $\Psi(g, v_g) \equiv 0$. Provando assim o teorema.

Em vez de verificar que $\Psi \in C^1$ com derivada parcial \mathcal{L} , verificaremos que \mathcal{L} é um isomorfismo e imitando a prova do Teorema da Função Implícita, o problema de encontrar

um zero de Ψ é substituído pelo problema de encontrar um ponto fixo de uma função $\Theta : C_b^1(\mathbb{R}^n) \times C_b^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\Theta(g, v) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}(v) - \Psi(g, v)\}.$$

(A função g é limitada logo Θ toma valores em $C_b^0(\mathbb{R}^n)$). Antes de mostrar que \mathcal{L} é um isomorfismo, provaremos que se $\|\mathcal{L}\|Lip(g) < 1$ então $\Theta(g, \cdot)$ é uma contração em $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ com um único ponto fixo v_g . Sendo $f = A + g$ e $h_f = id + v_g$, segue que $h_f = f \circ h_f \circ A^{-1}$, provaremos também que h_f é injetora e sobrejetora logo h_f é uma conjugação de A com f . Esses fatos serão mostrados em uma sequência de lemas a seguir.

Antes de iniciamos a prova, uma definição, seja uma matriz A hiperbólica, então definiremos dois subespaços invariantes pela ação de A como:

$$\mathbb{D}^s = \{v^s : v^s \text{ é um autovetor generalizado para um autovalor } \lambda_s \text{ de } A \text{ com } |\lambda_s| < 1\},$$

$$\mathbb{D}^u = \{v^u : v^u \text{ é um autovetor generalizado para um autovalor } \lambda_u \text{ de } A \text{ com } |\lambda_u| > 1\}$$

$$\text{Então como antes temos } \mathbb{R}^n = \mathbb{D}^u \oplus \mathbb{D}^s.$$

Usaremos essa decomposição para decompor o espaço de funções contínuas e limitadas, $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{D}^u) \oplus C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{D}^s)$. Colocando normas em \mathbb{D}^u e \mathbb{D}^s tal que a aplicação linear A é uma contração e uma extensão de dois subespaços : $\|(A|_{\mathbb{D}^u})^{-1}\| \leq a < 1$ e $\|(A|_{\mathbb{D}^s})\| \leq a < 1$. Em \mathbb{R}^n , colocando a norma do máximo em \mathbb{D}^s e \mathbb{D}^u : se $v = v^u + v^s$ com $v^\sigma \in \mathbb{D}^\sigma$ para $\sigma = u, s$, então

$$|v| \equiv \max\{|v^u|, |v^s|\}.$$

Seja

$$\tilde{A}v = A \circ v \circ A^{-1}$$

uma aplicação em $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ como antes e

$$\mathcal{L}(v) = (id - \tilde{A})(v) = v - A \circ v \circ A^{-1}.$$

Para $\sigma = u, s$, temos também $\tilde{A}^\sigma = A|_{C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{D}^\sigma)}$ e $\mathcal{L}^\sigma = \mathcal{L}|_{C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{D}^\sigma)}$. Como usamos a norma induzida pela norma do máximo em \mathbb{R}^n , $\|\mathcal{L}\| = \max\{\|\mathcal{L}\|^u, \|\mathcal{L}\|^s\}$. A primeira parte nos dá alguns resultados de aplicações lineares no espaço de Banach, usamos esses resultados em \tilde{A}^σ para provar que \mathcal{L} é um isomorfismo.

Lema 3.2.2. *Seja \mathbb{D} um espaço de Banach e $G, B \in \mathbf{L}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$.*

a) *Se $\|G\| \leq a < 1$ então $id - G$ é um isomorfismo e $\|(id - G)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$.*

De fato, a inversa $(id - G)^{-1}$ pode ser representada pela série $\sum_{j=0}^{\infty} G^j$.

b) *Se B é um isomorfismo com $\|B^{-1}\| \leq a < 1$ então $B - id$ é um isomorfismo com*

$\|(B - id)^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$. Novamente, essa inversa, $(B - id)^{-1}$, pode ser representada pela série $\sum_{j=0}^{\infty} B^{-j}$.

Demonstração: Para provar a), dado y queremos encontrar x tal que $x - Gx = y$, ou $y + Gx = x$. Podemos encontrar esse x como um ponto fixo de uma aplicação u . Seja $u : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ dada por $u(x, y) = y + Gx$.

Então

$$u(x_1, y) - u(x_2, y) = G(x_1 - x_2),$$

logo

$$|u(x_1, y) - u(x_2, y)| \leq a|x_1 - x_2|.$$

Assim para y fixado, $u(\cdot, y)$ é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo, existe um único ponto fixo $x_y, x_y = u(x_y, y) = y + G(x_y)$, deste modo $y = (id - G)x_y$. A existência de x_y , mostra que $id - G$ é sobrejetora. A unicidade mostra que $id - G$ é injetora. Para obter o limite da inversa, note que $x = (id - G)^{-1}y$, então $x - Gx = y$ e

$$\begin{aligned} |x - Gx| = |y| &\Rightarrow |x| - |Gx| \leq |y| \Rightarrow |x| - a|x| \leq |y| \\ \Rightarrow |x| = |(id - G)^{-1}y| &\leq \frac{|y|}{1-a} \Rightarrow \frac{\|(id - G)^{-1}\| \cdot |y|}{|y|} \leq \frac{1}{1-a}. \end{aligned}$$

Logo $(id - G)^{-1}$ é uma aplicação linear limitada, pois $\|(id - G)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-a}$.

Contudo pela convergência da série pode-se mostrar que

$$(id - G) \circ \sum_{j=0}^{\infty} G^j = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} G^j - \sum_{j=1}^{\infty} G^j}_{id} = \sum_{j=0}^{\infty} G^j \circ (id - G)$$

Para provar b), temos por a) que $id - B^{-1}$ é um isomorfismo. Desde $B - id = B \circ (id - B^{-1})$ temos que $B - id$ é um isomorfismo (por hipótese B é um isomorfismo). A inversa é $(B - id)^{-1} = (id - B^{-1})^{-1} \circ B^{-1}$ logo $\|(B - id)^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$.

Como antes temos que

$$(B - id) \circ \sum_{j=1}^{\infty} B^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} B^{-j} - \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} B^{-j}}_{id} = \sum_{j=1}^{\infty} B^{-j} \circ (B - id)$$

O que completa a prova do lema. □

Prova do Teorema 3.7. Queremos mostrar que cada $\mathcal{L}^\sigma = id - \tilde{A}^\sigma$ é invertível. Escrevendo $C_b^0(\mathbb{D}^\sigma)$ para $C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{D}^\sigma)$, a norma de \tilde{A}^σ é dada como segue

$$\|\tilde{A}^\sigma\| = \sup_{v \in C_b^0(\mathbb{D}^\sigma) \setminus \{0\}} \frac{\|\tilde{A}^\sigma v\|_0}{\|v\|_0}.$$

Então para $v \in C_b^0(\mathbb{D}^s)$,

$$\|\tilde{A}v\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |Av \circ A^{-1}x| = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |Av(y)| \leq a\|v\|_0.$$

Como $\|\tilde{A}^s\| \leq a$, e pelo lema anterior parte a), $\mathcal{L}^s = id - \tilde{A}^s$ é invertível com $\|\mathcal{L}\| \leq \frac{1}{(1-a)}$. Um cálculo similar tem-se $\|(\tilde{A}^u)^{-1}\| \leq a$, e pelo lema anterior parte b), $\mathcal{L}^u = id - \tilde{A}^u$ é invertível com $\|(\mathcal{L}^u)^{-1}\| \leq \frac{a}{(1-a)}$. Pelo fato da norma no \mathbb{R}^n ser o máximo das normas de \mathbb{D}^u e \mathbb{D}^s , temos ainda $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{1}{(1-a)}$.

Temos a aplicação $\Psi(g, v) = v - \tilde{A}(v) - g \circ (id + v) \circ A^{-1}$ e em $(0, id)$ a “linearização”, $\mathcal{L} = v - \tilde{A}(v)$. Imitando a prova do Teorema da Função Implícita,

$$\begin{aligned} \Theta(g, v) &= \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}v - \Psi(g, v)\} = \mathcal{L}^{-1}\{v - \tilde{A}(v) - v + \tilde{A}(v) + g \circ (id + v) \circ A^{-1}\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{g \circ (id + v) \circ A^{-1}\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|\Theta(g, v_1) - \Theta(g, v_2)\|_0 &\leq \|\mathcal{L}^{-1}\| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g \circ (id + v_1) \circ A^{-1}x - g \circ (id + v_2) \circ A^{-1}x| \\ &\leq \frac{1}{(1-a)} Lip(g) \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |v_1(y) - v_2(y)| \leq \frac{1}{(1-a)} Lip(g) \|v_1 - v_2\|_0. \end{aligned}$$

Para um g fixado com $\frac{1}{(1-a)} Lip(g) < 1$, $\Theta(g, \cdot)$ é uma contração em $C_b^0(\mathbb{R}^n)$. Como $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo, existe um único ponto fixo v_g com $\Theta(g, v_g) = v_g$.

Um cálculo direto mostra que isso é equivalente a $\Psi(g, v_g) = 0$. Sendo $f = A + g$ e $h_f = id + v_g$, o fato de $\Psi(g, v_g) = 0$ implica que $h_f = (A + g) \circ h_f \circ A^{-1} = f \circ h_f \circ A^{-1}$ ou de forma equivalente $h_f \circ A = f \circ h_f$. Falta mostrar que $h = h_f$ é um isomorfismo. Antes porém provaremos que $f = A + g$ é um difeomorfismo.

Lema 3.2.3. *A aplicação f é bijetora, logo é um difeomorfismo.*

Demonstração: Assuma que $f(x) = f(y)$. Então $0 = f(x) - f(y) = A(x - y) + g(x) - g(y)$. Portanto

$$\begin{aligned} 0 = |f(x) - f(y)| &= |A(x - y) + g(x) - g(y)| \geq m(A)|x - y| - Lip(g)|x - y| \\ &\geq \underbrace{(m(A) - Lip(g))}_{>0} |x - y| \end{aligned}$$

logo $x - y = 0 \Rightarrow x = y$. Portanto f é injetora. A aplicação f é sobrejetora pois ela tem uma distância limitada de uma aplicação linear A que é injetora e sobrejetora. ($f = A + g$ e $g \in C_b^0$)

□

Lema 3.2.4. *A aplicação $h = h_f$ é injetora.*

Demonstração: Se $h(x) = h(y)$, então $h \circ Ax = f \circ h(x) = f \circ h(y) = h \circ Ay$. Por indução, $h(A^n x) = h(A^n y)$ para $n \geq 0$. Usando o fato que f é invertível e $f^{-1} \circ h = h \circ A^{-1}$, mostramos também que $h(A^n x) = h(A^n y)$ para $n \leq 0$, logo vale para todo $n \in \mathbb{Z}$. Escrevendo $x = x^u + x^s$ e $y = y^u + y^s$ com $x^u, y^u \in \mathbb{D}^u$ e $x^s, y^s \in \mathbb{D}^s$. Se $x \neq y$ então ou $x^u \neq y^u$ ou $x^s \neq y^s$. Se $x^u \neq y^u$ então $|A^j x^u - A^j y^u| \geq a^{-j} |x^u - y^u|$. Portanto tomando $j \geq 0$ com $|A^j x^u - A^j y^u| \geq 3 \|h - id\|_0 > 0$. (Se $h = id$ então h é homeomorfismo e prova termina). Sendo $x_j = A^j x$ e $y_j = A^j y$, $h(x_j) = h(y_j) = x_j - y_j + (h - id)(x_j) - (h - id)(y_j)$, então $0 = |h(x_j) - h(y_j)| \geq |x_j^u - y_j^u| + |(h - id)(x_j)| - |(h - id)(y_j)| \geq \|h - id\|_0 > 0$. Essa contradição mostra que é impossível termos $x^u \neq y^u$. Similarmente usando iteradas negativas prova-se que $x^s = y^s$. Isso completa a prova que h é injetora.

□

Lema 3.2.5. *A aplicação $h = h_f$ é sobrejetora, logo é um isomorfismo e \mathbb{R}^n .*

Demonstração: A prova que h é sobrejetora usa o fato que h tem uma distância limitada da identidade: seja $b = \|h - id\|_0$. Note que para $x \in \overline{B}(0, r)$ (fecho da bola de centro 0 e raio r), $|h(x)| \leq |h(x) - x| + |x| \leq b + r$, então $h(\overline{B}(0, r)) \subset \overline{B}(0, r + b)$. Similarmente para $x \in \mathbb{S}(r)$ (esfera de raio r), $|h(x)| \geq |x| - |h(x) - x| \geq r - b$, então $h(\mathbb{S}(r)) \subset \overline{B}(0, r) \setminus B(0, r - b)$.

Como h é injetora, pelo Teorema da Invariância do Domínio de Brouwer implica que h leva conjuntos abertos em conjuntos abertos; em particular, a imagem $h(B(0, r))$ são abertos. Tomando a união, $h(\mathbb{R}^n)$ é aberto.

Por outro lado, mostraremos que imagem de $h(\mathbb{R}^n)$ é fechado. Assuma que $z_0 \in \overline{h(\mathbb{R}^n)}$. Existe um $x_j \in \mathbb{R}^n$ com $h(x_j)$ convergindo para z_0 . Pelo fato de $h(x_j)$ ser limitado com $|h(x_j)| \leq |z_0| + 1 \equiv R$, desde que $R \geq |h(x_j)| \geq |x_j| - b$, temos que $|x_j| \leq R + b$, isto é, os x_j são limitados. Pelo fato de $\overline{B}(0, R + b)$ ser compacto, existe uma subsequência x_{j_i} , que converge para um ponto $x_0 \in \overline{B}(0, R + b)$. Pela continuidade de h , $h(x_0) = z_0$. Portanto z_0 pertence a imagem de h , e $\overline{h(\mathbb{R}^n)} = h(\mathbb{R}^n)$.

Com isso temos que $h(\mathbb{R}^n)$ é um conjunto aberto e fechado em \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^n é conexo, isto implica que $h(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, provando assim que h é sobrejetora.

Em dimensão finita temos que uma bijeção contínua é um homeomorfismo. Mostraremos que h^{-1} é contínua. Assuma y_n é uma sequência de pontos contidos em algum $\overline{B}(0, R)$ convergindo para y_∞ . Pelos mesmos argumentos, existem x_n e x_∞ em $\overline{B}(0, R + b)$ tal que $h(x_n) = y_n$ e $h(x_\infty) = y_\infty$. Logo $h^{-1}(y_n) = x_n, h^{-1}(y_\infty) = x_\infty \in \overline{B}(0, R + b)$. Assuma que x_n não converge para x_∞ . Então existe uma subsequência x_{n_j} convergindo para $p \neq x_\infty$. Por continuidade de h ,

$$h(p) = \lim_{j \rightarrow \infty} h(x_{n_j}) = y_\infty = h(x_\infty).$$

Isso contradiz o fato de h é injetora. Portanto $h^{-1}(y_n)$ converge para $h^{-1}(y_\infty)$, provando que h^{-1} é contínua.

□

Isso completa a prova do Teorema 3.7.

□

Proposição 3.1. *Seja U_0 uma vizinhança aberta da origem em \mathbb{R}^n . Seja $f : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$*

um difeomorfismo de classe C^r para $r \geq 1$ com $f(0) = 0$ e $A = Df_0$. Então dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança menor $U \subset U_0$ de 0 e uma extensão $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r com $\bar{f}|_U = f|_U$, $(\bar{f} - A) \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$ e $Lip(\bar{f} - A) \leq \epsilon$.

Demonstração. :Seja β é a função definida no lema anterior onde $a = 1$ e $b = 2$ e seja $C = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\beta'(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Dado $\epsilon > 0$, tome $r > 0$ suficientemente pequeno que

$$\|Df_x - A\| < \frac{\epsilon}{2C + 1}$$

quando $\|x\| \leq 2r$. (Isso é possível pois Df é contínua e $A = Df_0$).

Defina

$$\bar{f}(x) = Ax + \beta\left(\frac{\|x\|}{r}\right) \cdot (f(x) - Ax)$$

Temos que $\|x\| \leq r$ tem-se $\bar{f} = f$ e $\|x\| \geq 2r$ tem-se $\bar{f} = A$. Note que $\bar{f} \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$, falta mostrar que $\bar{f} - A$ é uma função lipschitziana com $Lip(\bar{f} - A) \leq \epsilon$, de fato assumindo que $\|x\|, \|y\| \leq 2r$ e usando o Teorema do Valor Médio.

$$\begin{aligned} \|(\bar{f}(x) - Ax) - (\bar{f}(y) - Ay)\| &= \|(\bar{f}(x) - \bar{f}(y)) - (Ax - Ay)\| = \\ & \left\| \beta\left(\frac{\|x\|}{r}\right)(f(x) - Ax) - \beta\left(\frac{\|y\|}{r}\right)(f(y) - Ay) \right\| = \\ & \left\| \beta\left(\frac{\|x\|}{r}\right)[(f(x) - Ax) - (f(y) - Ay)] + \left[\beta\left(\frac{\|x\|}{r}\right) - \beta\left(\frac{\|y\|}{r}\right)\right] \cdot (f(y) - Ay) \right\| \leq \\ & \beta\left(\frac{\|x\|}{r}\right) \cdot \|f(x) - Ax - (f(y) - Ay)\| + \left| \beta\left(\frac{\|x\|}{r}\right) - \beta\left(\frac{\|y\|}{r}\right) \right| \|f(y) - Ay\| \leq \\ & 1 \cdot \|Df - A\| \cdot \|x - y\| + \left| \beta'\left(\frac{\|z\|}{r}\right) \right| \cdot \frac{\|x\| - \|y\|}{r} \cdot \|Df - A\| \cdot \|y\| \leq \\ & \frac{\epsilon}{2C + 1} \cdot \|x - y\| + \frac{C}{r} \cdot \frac{\epsilon}{2C + 1} \cdot \|y\| \cdot (\|x\| - \|y\|) \leq \epsilon \|x - y\| \cdot \left(\frac{1}{2C + 1} + \frac{C}{2C + 1} \cdot \frac{\|y\|}{r} \right) \\ & \leq \epsilon \|x - y\| \end{aligned}$$

O que completa a demonstração da proposição. □

Demonstração do Teorema de Grobman-Hartman. Consideremos a equação diferencial de classe C^1

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

com um ponto de equilíbrio hiperbólico na origem do campo. Seja $A = Df_0$, temos que para pontos próximos da origem $f(x) \simeq Ax$.

Nosso objetivo é encontrar uma extensão \bar{f} de f onde $\bar{f} = f$ em uma vizinhança da origem e $\bar{f} = A$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Seja ψ_t o fluxo associado a equação diferencial

$$\dot{x} = \bar{f}(x) \tag{2}$$

e e^{tA} o fluxo associado a

$$\dot{x} = Ax \tag{3}$$

Consideremos agora $g(x) = \varphi_1(x) - e^{tA}$, onde φ_1 é o fluxo associado a $\dot{x} = \bar{f}(x)$ e e^A é o fluxo associado a $\dot{x} = Ax$, temos que $g(x) = 0$ se $\|x\| \geq 2r$ e que $g \in C^1$. Se aplicarmos a Fórmula de Variação de Parâmetros para a equação (2) reescrita como

$$\dot{x} = Ax + (\bar{f}(x) - Ax) \tag{4}$$

encontramos

$$g(x) = \int_0^1 e^{(1-s)A} [\bar{f}(\varphi_s(x)) - A\varphi_s(x)] ds$$

então

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\| &\leq \int_0^1 \|e^{(1-s)A}\| \cdot \|\bar{f}(\varphi_s(x)) - A\varphi_s(x) - (\bar{f}(\varphi_s(y)) - A\varphi_s(y))\| ds \leq \\ &\epsilon \int_0^1 \|e^{(1-s)A}\| \cdot \|\varphi_s(x) - \varphi_s(y)\| ds \end{aligned}$$

pela dependência contínua da condição inicial, logo com $\epsilon \rightarrow 0$, podemos tomar $g(x)$ e $g(y)$ tão próxima quanto quisermos logo em uma vizinhança da origem $\bar{f} = f$.

□

Referências Bibliográficas

- [1] C. I. Doering e A. O. Lopes. *Equações Diferenciais Ordinárias* 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA,2007.
- [2] E. L. Lima. *Curso de Análise, Volume 1*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA,1976.
- [3] J. L. Massera. *On Liapounoff's Conditions of Stability*. Annals of Mathematics, 50 (1949), 705-721.
- [4] J. L. Massera. *Contributions to stability theory*. Annals of Mathematics, 64 (1956), 182-206.
- [5] W.Melo e J. Palis Jr. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos* Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA,1978.
- [6] L. H. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. 2.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
- [7] M. Sambarino *Introducción a los Sistemas Dinámicos*; monografía.

Índice Remissivo

- α -limite, 20
- ω -limite, 20
- Regular*, 10

- Aplicação Limitada*, 51
- Atrator Hiperbólico*, 32
- Autovalor*, 28

- Campo de Vetores*, 10, 11
- Constante de Lipschitz*, 51
- Contração*, 51
- Contrativo*, 33

- Equação diferencial*, 10
- Equação diferencial autônoma*, 10
- Equação diferencial não-autônoma*, 10
- Equilíbrio assintótico*, 12
- Equilíbrio estável*, 12
- Equilíbrio instável*, 13
- Espaço de Banach*, 51

- Fluxo*, 10
- Forma Quadrática*, 28
- Função de Lyapunov*, 15
- Função Negativa*, 28
- Função Positiva*, 28
- Função Semi Negativa*, 28
- Função Semi-Positiva*, 28

- Matriz conjugada*, 26
- Matriz Exponencial*, 24
- Matriz Simétrica*, 28
- Matrizes Conjugadas*, 26

- Norama do Mínimo*, 51
- Norma do Operador*, 23

- Pêndulo*, 13
- Poço*, 31
- Ponto de equilíbrio*, 10
- Ponto fixo*, 11
- Propriedade Fundamental da Norma*, 24

- Série de Taylor*, 23
- Sequência de Cauchy*, 51

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)