



**Universidade Federal de Alagoas**

**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Hipersuperfícies com Curvatura Média  
Constante e Hiperplanos

Natália Rocha Pinheiro

Rio São Francisco

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Dissertação de Mestrado

# Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante e Hiperplanos

Natália Rocha Pinheiro

Maceió, Brasil  
28 de Janeiro de 2010

NATÁLIA ROCHA PINHEIRO

Hipersuperfícies com Curvatura Média  
Constante e Hiperplanos

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 28 de Janeiro de 2010 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva.

Maceió  
2010

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Lucia Lima do Nascimento**

P654i Pinheiro, Natália Rocha.  
Hipersuperfícies com curvatura média constante e hiperplanos. /Natália Rocha  
Pinheiro, 2010.  
61 f. : il. grafs. e tabs.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.  
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de  
Alagoas. Instituto de Matemática, 2010.

Bibliografia: f. 56-57.  
Índice: f. 61.

1. Geometria diferencial. 2. Laplaciano. 3. Função suporte. 4. Curvatura média.  
5. Hiperplanos. I. Título.

CDU: 514.7

# Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante e Hiperplanos

Natália Rocha Pinheiro

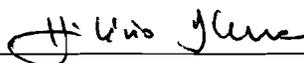
Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 28 de Janeiro de 2010 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:



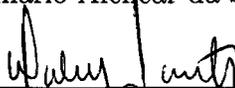
---

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros



---

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva (Orientador)



---

Profa. Dra. Walcy Santos

Aos meus pais Robério e Tuca  
e a minha irmã Talita.

# Agradecimentos

Ao professor Hilário Alencar pela orientação no mestrado, por estar sempre disposto a me ajudar, pela amizade, confiança, por acreditar e contribuir no meu crescimento profissional e pessoal e por ser um exemplo de profissional honesto e competente.

Ao professor Manfredo do Carmo pela grande contribuição à Geometria Diferencial.

Aos meus pais Robério Pinheiro e Tuca Rocha por me apoiarem em todas as minhas decisões, pela força em todos os momentos da minha vida, pelo carinho e por serem exemplo do que é família. A minha irmã e grande amiga Talita Pinheiro pelo companheirismo e pelas boas conversas.

Aos professores Adán Corcho, Amauri Barros e Francisco Barros que sempre tinham uma palavra de estímulo e por contribuírem na minha formação acadêmica.

A estudante de mestrado da UFAL Adina Rocha dos Santos pela ajuda dada neste trabalho.

Aos professores Jorge Costa da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) e Valdenberg Araujo da Universidade Federal de Sergipe (UFS) pelo incentivo ao meu ingresso no mestrado em matemática da UFAL.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq) pela concessão da bolsa.

# Resumo

Nesta dissertação, apresentamos resultados sobre hipersuperfícies cujas geodésicas tangentes omitem um conjunto não-vazio. Tais resultados foram obtidos por Hilário Alencar e Kátia Frensel e publicados no livro *Differential Geometry - A Symposium in Honour of Manfredo do Carmo* em 1991.

Consideramos  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e  $\mathcal{Q}$  o espaço  $(n+1)$ -dimensional simplesmente conexo, completo com curvatura seccional constante igual a  $c$ . Além disso, seja  $x$  uma imersão isométrica de  $M$  em  $\mathcal{Q}$ .

Inicialmente, estendemos para as variedades  $\mathcal{Q}$ ,  $c$  arbitrário, as noções de vetor posição e função suporte conhecidas no espaço Euclidiano de dimensão  $n+1$  e fazemos uma interpretação geométrica desta função suporte nos casos em que  $c = 0$ ,  $c > 0$  e  $c < 0$ , ou seja, no espaço Euclidiano, Esférico e Hiperbólico.

Denotemos por  $W$  o conjunto dos pontos em  $\mathcal{Q}$  que não passam nenhuma hipersuperfície totalmente geodésica tangente a imagem de  $M$  por  $x$ . Usando a função suporte de  $x$ , caracterizamos as imersões para as quais o conjunto  $W$  é não-vazio. Analisamos separadamente as hipersuperfícies completas não-compactas com curvatura média constante bem como as hipersuperfícies compactas com curvatura média constante.

**Palavras Chave:** Laplaciano; Função Suporte; Curvatura Média; Estabilidade; Imersão Isométrica; Hiperplanos; Esfera Geodésica.

# Abstract

In this work, we present results concerning hypersurfaces whose tangent geodesic does not intercept a nonempty special set. These results were obtained by Hilário Alencar and Kátia Frensel in a work which was published in the book *Differential Geometry - A Symposium in Honour of Manfredo do Carmo* in 1991.

Let us consider an isometric immersion  $x$  from  $M$  to  $\mathcal{Q}$  where  $M$  denotes a differentiable manifold of dimension  $n$  as well as  $\mathcal{Q}$  stands for the  $(n + 1)$ -dimensional, space form of constant sectional curvature  $c$ .

Initially, we extend for  $\mathcal{Q}$ ,  $c$  arbitrary, the notions of position vector and support function known in  $(n + 1)$ -dimensional Euclidean space and we present a geometric interpretation of such a support function in the Euclidean, Spherical and Hyperbolic space.

We denote by  $W$  the set of points of  $\mathcal{Q}$  for which does not cross any totally geodesic hypersurface tangent to the image of  $M$  by  $x$ . By using the support function of  $x$ , we characterize the immersions for which the set  $W$  is nonempty. We analyze separately the complete noncompact case as well as the compact case among hypersurfaces with constant mean curvature.

**Keywords:** Laplacian; Support Function; Mean Curvature; Stability; Isometric Immersion; Hyperplanes; Geodesic Sphere.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1	Noções de Geometria Riemanniana . . . . .	8
1.2	Estabilidade . . . . .	20
<b>2</b>	<b>A Função Suporte em Espaços de Curvatura Constante</b>	<b>23</b>
2.1	A Função Suporte em $\mathbb{R}^{n+1}$ . . . . .	24
2.2	A Função Suporte em $\mathbb{S}^{n+1}$ . . . . .	25
2.3	A Função Suporte em $\mathbb{H}^{n+1}$ . . . . .	27
2.4	O Laplaciano da Função Suporte . . . . .	32
2.5	A Fórmula de Minkowski da Função Suporte . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Hipersuperfícies cujas Geodésicas Tangentes omitem um Conjunto Não-Vazio</b>	<b>45</b>
3.1	Hipersuperfícies Completas . . . . .	46
3.2	Hipersuperfícies Compactas . . . . .	52
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>55</b>

# Introdução

Nesta dissertação, apresentaremos resultados sobre hipersuperfícies cujas geodésicas tangentes omitem um conjunto não-vazio, os quais foram obtidos por Hilário Alencar e Kátia Frensel e publicados no livro *Differential Geometry - A Symposium in Honour of Manfredo do Carmo* em 1991.

Consideremos  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante igual a  $c$ ,  $M^n$  uma variedade diferenciável e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica. Para todo ponto  $p \in M^n$ , seja  $(\mathcal{Q}_c^n)_p$  a hipersuperfície totalmente geodésica de  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$  tangente a  $x(M^n)$  em  $x(p)$ .

Denotemos por

$$W = \mathcal{Q}_c^{n+1} - \bigcup_{p \in M} (\mathcal{Q}_c^n)_p$$

o conjunto dos pontos omitidos pelas hipersuperfícies totalmente geodésicas tangentes a  $x(M^n)$ .

Caracterizaremos as hipersuperfícies com curvatura média constante completas não-compactas e hipersuperfícies com curvatura média constante compactas em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$  com condições sobre  $W$ . Em todo o trabalho, as variedades diferenciáveis  $M^n$  são conexas e quando nos referirmos às variedades compactas, estamos supondo que são compactas sem bordo.

Inicialmente, apresentaremos resultados para hipersuperfícies mínimas completas não-compactas de  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ .

O primeiro resultado nesta direção foi provado por Hasanis e Koutroufiotis, a saber:

**Teorema 0.1.** (*Hasanis e Koutroufiotis, ver [10]*) *Se uma imersão isométrica  $x : M^2 \rightarrow \mathcal{Q}_c^3$ ,  $c \geq 0$ , é mínima com  $W$  não-vazio, então  $x$  é totalmente geodésica.*

A demonstração deste teorema usa fortemente a hipótese que  $M$  tem dimensão 2.

O teorema acima não é válido para dimensões maiores. Hilário Alencar, em sua tese de doutorado, ver [1], deu exemplos de hipersuperfícies mínimas não totalmente geodésicas em  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $n \geq 4$ , cujo  $W$  contém um ponto.

Hilário Alencar e Kátia Frensel, ver [3], p. 6, estenderam o Teorema 0.1 assumindo a hipótese adicional que o conjunto  $W$  é aberto.

**Teorema 0.2.** *(Alencar e Frensel, ver [3], p. 6) Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana completa e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica mínima. Se o conjunto  $W$  é aberto e não-vazio, então  $x$  é totalmente geodésica.*

Quando o conjunto  $W$  é somente não-vazio, Alencar e Frensel obtiveram o seguinte resultado para os casos em que  $c \leq 0$ .

**Proposição 0.1.** *(Alencar e Frensel, ver [3], p. 8) Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana completa e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ ,  $c \leq 0$ , uma imersão isométrica mínima. Se  $W$  é não-vazio, então  $x$  é estável.*

Este resultado não é válido para o caso em que  $c > 0$ . As hipersuperfícies totalmente geodésicas de  $\mathbb{S}^{n+1}$  são exemplos de hipersuperfícies mínimas não-estáveis com  $W$  não-vazio.

A recíproca da Proposição 0.1 é falsa. Em [9], p. 57, J. Gomes apresentou exemplos de hipersuperfícies mínimas estáveis em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ ,  $c < 0$ , tais que o conjunto  $W$  é vazio.

No caso em que as hipersuperfícies são compactas em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ , também apresentaremos alguns resultados. Neste caso, caracterizaremos as hipersuperfícies com curvatura média constante.

Um dos primeiros resultados nesta direção foi obtido por Pogorelov no caso em que  $H = 0$ .

**Teorema 0.3.** *(Pogorelov, ver [13]) Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta, orientável e  $x : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  uma imersão isométrica mínima. Se  $W$  é não-vazio, então  $x$  é totalmente geodésica.*

Se restringirmos  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  às imersões isométricas com curvatura média constante não-nula, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 0.4.** *(Alencar e Frensel, ver [3], p. 11) Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta, orientável e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica com curvatura média constante diferente de zero. Então  $W$  é não-vazio se, e somente se,  $x$  é umbílica, isto é,  $x(M^n)$  é uma esfera geodésica em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ .*

Em [5], Barbosa, do Carmo e Eschenburg provaram o seguinte teorema:

**Teorema 0.5.** *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta, orientável e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica com curvatura média constante não-nula. Então  $x$  é estável se, e somente se,  $x$  é umbílica.*

Como consequência deste resultado, Alencar e Frensel obtiveram o seguinte corolário do Teorema 0.4.

**Corolário 0.1.** *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta, orientável e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica com curvatura média constante não-nula. Então  $W$  é não-vazio se, e somente se,  $x$  é estável.*

Este trabalho está dividido em 3 capítulos. No capítulo 1, apresentaremos definições e resultados da Geometria Riemanniana e de Estabilidade que serão necessários para a compreensão dos próximos capítulos. No capítulo 2, estenderemos para as variedade  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ ,  $c$  arbitrário, as noções de vetor posição e função suporte conhecidas em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $c = 0$ . Também neste capítulo, daremos separadamente uma interpretação geométrica da função suporte nos casos em que  $c = 0$ ,  $c > 0$  e  $c < 0$ . No capítulo 3, mostraremos que a função suporte de uma imersão isométrica  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  satisfaz uma equação diferencial e demonstraremos o Teorema 0.2, a Proposição 0.1, o Teorema 0.3 e o Teorema 0.4 enunciados anteriormente.

Recentemente, Hilário Alencar e Márcio Batista, ver [2], generalizaram o Teorema 0.2 e a Proposição 0.1 para hipersuperfícies  $r$ -mínimas em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Iniciaremos a seção 1.1 apresentando os conceitos básicos da Geometria Riemanniana tais como variedades diferenciáveis (imersões e campos de vetores), métricas Riemannianas, conexões Riemannianas, geodésicas e curvatura. Em seguida, introduziremos a segunda forma fundamental associada a uma imersão isométrica. As demonstrações dos resultados podem ser encontradas em [6].

Na seção 1.2 definiremos estabilidade para imersões com curvatura média constante e imersões mínimas.

### 1.1 Noções de Geometria Riemanniana

Denotaremos por  $M^n$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e, para cada  $p \in M$ , indicaremos por  $T_pM$  o espaço tangente a  $M$  em  $p$  e  $TM$  seu fibrado tangente, isto é, a união de todos os espaços tangentes a  $M$ . Variedade diferenciável significará de classe  $C^\infty$ .

Indicaremos por  $\mathcal{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$ , por  $\mathcal{D}(M)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  definidas em  $M$  e por  $\mathcal{F}(M)$  o conjunto das funções em  $M$ .

**Definição 1.1.1.** *Sejam  $M^n$  e  $N^k$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é uma imersão, se  $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  é injetiva para todo  $p \in M$ .*

**Observação 1.1.1.** *Seja  $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$  uma imersão. O conjunto  $x(M) \subset N$  é denominado uma *hipersuperfície* de  $N^{n+1}$ .*

Um *campo de vetores*  $v : M \rightarrow TM$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p \in M$  associa um vetor  $v(p) \in T_pM$ .

Considerando uma parametrização  $y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e um campo de vetores  $\frac{\partial}{\partial y_i} : y(U) \rightarrow TU$ , podemos escrever, para cada  $p \in y(U)$ ,

$$v(p) = \sum_{i=1}^n a_i(y^{-1}(p)) \frac{\partial}{\partial y_i}(p),$$

onde cada  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função em  $U$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i}(p) \right\}, i = 1, \dots, n$ , é a base de vetores tangentes a  $M$  em  $p$  associada a  $y$ .

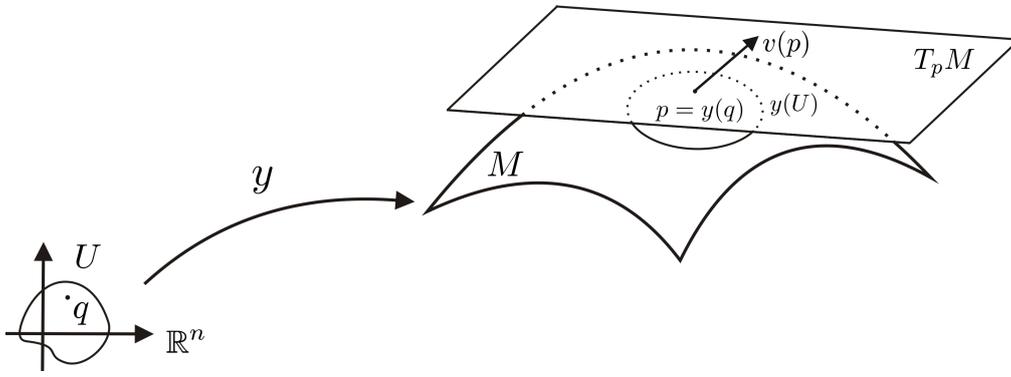


Figura 1.1: Campo de vetores

Escrevendo  $f$  ao invés de  $f \circ y$ , podemos também pensar em um campo de vetores como uma aplicação  $v : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  definida da forma

$$(vf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(y^{-1}(p)) \frac{\partial}{\partial y_i} f(p).$$

**Definição 1.1.2.** Uma métrica Riemanniana em  $M$  é uma correspondência que associa a cada  $p \in M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  em  $T_pM$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido:

Se  $y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $y(x_1, \dots, x_n) = \bar{p} \in y(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial y_i}(\bar{p}) = dy(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}(\bar{p}), \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{p}) \right\rangle_{\bar{p}} = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

é uma função diferenciável em  $U$ .

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que, para todo par  $X$  e  $Y$  de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança  $V$  de  $M$ , a função  $\langle X, Y \rangle$  é diferenciável em  $V$ .

As funções  $g_{ij}$  são chamadas *expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas*  $y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ . Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*.

**Exemplo 1.1.1** (Variedades Imersas). Seja  $x : M^n \rightarrow N^{n+m}$  uma imersão. Se  $N$  tem uma estrutura Riemanniana,  $x$  induz uma estrutura Riemanniana em  $M$  por  $\langle u, v \rangle_p = \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle_{x(p)}$ ,  $u, v \in T_p M$ . Como  $dx_p$  é injetiva,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  é positivo definido. As demais condições da definição de métrica Riemanniana são facilmente verificadas. A métrica de  $M$  é chamada *métrica induzida* por  $x$ . Neste caso, dizemos que  $x$  é uma *imersão isométrica*.

Agora definiremos conexão afim.

**Definição 1.1.3.** Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz às seguintes propriedades:

- (i)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ,
- (ii)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,
- (iii)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ ,
- (iv)  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  (conexão simétrica),

onde  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ,  $f, g \in \mathcal{D}(M)$  e  $[X, Y]$  é o colchete dos campos  $X$  e  $Y$ , ou seja, é o campo de vetores dado por  $[X, Y] = XY - YX$ .

**Proposição 1.1.1.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo de vetores  $V$  ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  um outro campo de vetores  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $c$ , denominado derivada covariante de  $V$  ao longo de  $c$ , tal que:

$$(i) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt};$$

- (ii)  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ , onde  $V$  é um campo de vetores ao longo de  $c$  e  $f$  é uma função diferenciável em  $I$ ;
- (iii) se  $V$  é induzido por um campo de vetores  $Y \in \mathcal{X}(M)$ , isto é,  $V(t) = Y(c(t))$ , então  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$ .

**Definição 1.1.4.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$  e uma métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . A conexão é dita compatível com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  quando, para toda curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  e quaisquer pares de campos de vetores paralelos  $P$  e  $P'$  ao longo de  $c$  (isto é,  $\frac{DP}{dt} = \frac{DP'}{dt} = 0, \forall t \in I$ ), tivermos  $\langle P, P' \rangle$  igual a uma constante.

**Proposição 1.1.2.** Uma conexão  $\nabla$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é compatível com a métrica se, e só se,

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

**Teorema 1.1.1.** (Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  tal que:

- (i)  $\nabla$  é simétrica;
- (ii)  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana.

**Observação 1.1.2.** A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de  $M$ .

No que se segue,  $M$  será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana.

**Definição 1.1.5.** Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica em  $t_0 \in I$ , se  $\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$  no ponto  $t_0$ . Se  $\gamma$  é uma geodésica em  $t$ , para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica.

**Proposição 1.1.3.** Dado  $p \in M$ , existem uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$ , um número  $\varepsilon > 0$  e uma aplicação  $C^\infty$

$$\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M,$$

$\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_q M, |w| < \varepsilon\}$ , tal que  $t \rightarrow \gamma(t, q, w)$ ,  $t \in (-2, 2)$ , é a única geodésica de  $M$  que no instante  $t = 0$  passa por  $q$  com velocidade  $w$ , para cada  $q \in V$  e cada  $w \in T_q M$ , com  $|w| < \varepsilon$ .

Esta proposição nos permite introduzir o conceito de aplicação exponencial da seguinte maneira:

Sejam  $p \in M$  e  $\mathcal{U} \subset TM$  um aberto dado pela proposição acima. Então a aplicação  $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$  dada por

$$\exp(q, u) = \gamma(1, q, u) = \gamma\left(|u|, q, \frac{u}{|u|}\right), \quad (q, u) \in \mathcal{U},$$

é chamada a *aplicação exponencial* em  $\mathcal{U}$ .

Geometricamente,  $\exp_q(u)$  é o ponto de  $M$  obtido percorrendo um comprimento igual a  $|u|$ , a partir de  $q$ , sobre a geodésica que passa por  $q$  com velocidade igual a  $\frac{u}{|u|}$ .

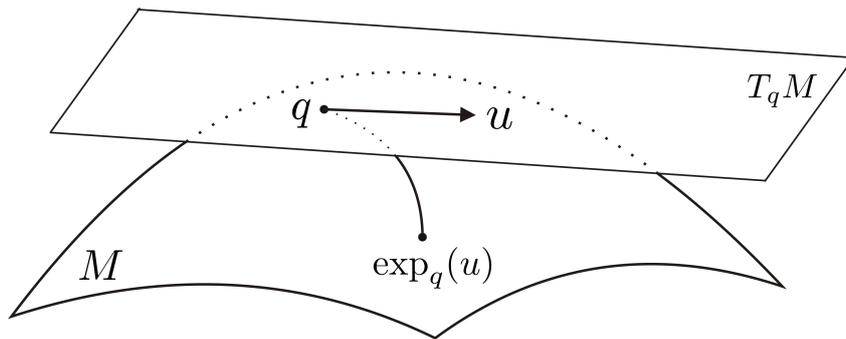


Figura 1.2: Aplicação exponencial

**Definição 1.1.6.** *Uma variedade Riemanniana  $M$  é (geodesicamente) completa se para todo  $p \in M$ , a aplicação exponencial,  $\exp_p$ , está definida para todo  $v \in T_p M$ , isto é, se as geodésicas  $\gamma(t)$  que partem de  $p$  estão definidas para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Definição 1.1.7.** *Um segmento de geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é chamado minimizante se  $l(\gamma) \leq l(c)$ , onde  $l(\cdot)$  indica o comprimento de uma curva e  $c$  é qualquer curva diferenciável por partes ligando  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ .*

**Definição 1.1.8.** (Referencial Geodésico) *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  e  $p \in M$ . Considere uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  e  $n$  campos de vetores  $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{X}(U)$ , ortonormais em cada ponto de  $U$  tal que, em  $p$ ,  $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$ . Um tal conjunto  $\{e_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de campos de vetores é chamado um referencial (local) geodésico em  $p$ .*

Seja  $M$  uma variedade. Sejam  $X \in \mathcal{X}(M)$  e  $f \in \mathcal{D}(M)$ . Definimos a *divergência* de  $X$  como a função

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &: M \rightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}(Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)), \quad p \in M, \end{aligned}$$

onde  $\operatorname{tr}(Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p))$  é o traço da aplicação linear  $Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)$ ,  $p \in M$ .

O *gradiente* de  $f$  é o campo vetorial  $\operatorname{grad} f$  em  $M$  definido por

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in M, \quad v \in T_p M.$$

**Afirmção 1.1.** *Consideremos  $\{e_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , um referencial geodésico em  $p \in M$ . Temos que*

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i(p)$$

e

$$\operatorname{div} X(p) = \sum_{i=1}^n e_i(f_i)(p), \quad \text{onde } X = \sum_{i=1}^n f_i e_i.$$

*Demonstração.* De fato, como  $\{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$  é uma base de  $T_p M$ , segue-se que

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) e_i(p).$$

Daí,  $a_i(p) = \langle \operatorname{grad} f(p), e_i(p) \rangle$ . Mas, por definição,

$$\langle \operatorname{grad} f(p), e_i(p) \rangle = df_p(e_i(p)) = e_i(p)(f).$$

Logo,

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i(p).$$

Agora, se  $T_X : T_p M \rightarrow T_p M$  é dado por  $T_X(Y(p)) = \nabla_Y X(p)$ , então

$$T_X(e_i(p)) = \nabla_{e_i} X(p)$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_{e_i} \left( \sum_{j=1}^n f_j e_j \right) (p) \\
&= \sum_{j=1}^n (e_i(p)(f_j) e_j + f_j \nabla_{e_i} e_j(p)) \\
&= \sum_{j=1}^n e_i(p)(f_j) e_j.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr} (T_X) = \sum_{i=1}^n e_i(p) f_i = \sum_{i=1}^n e_i(f_i)(p).$$

□

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. O operador  $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ , dado por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f), \quad f \in \mathcal{D}(M),$$

é denominado operador *Laplaciano* de  $M$ .

**Afirmção 1.2.** *Considerando um referencial geodésico  $\{e_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , em  $p \in M$ , temos que*

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f))(p).$$

*Demonstração.* Com efeito,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\
&= \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left\langle \nabla_{e_j} \left( \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i \right), e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_j} (e_i(f) e_i), e_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle e_j(e_i(f)) e_i + e_i(f) \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle.
\end{aligned}$$

Em  $p$ , usando o fato que  $\{e_i\}$  é um referencial geodésico, temos

$$\Delta f(p) = \sum_{i,j=1}^n \langle e_j(e_i(f))e_i, e_j \rangle (p) = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f))(p).$$

□

**Definição 1.1.9.** A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  uma aplicação

$$R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

Outra maneira de olhar a Definição 1.1.9 é considerar um sistema de coordenadas  $\{x_i\}$  em torno de  $p \in M$ . Como  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$ , obtemos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

isto é, a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante.

Intimamente relacionado com o operador curvatura está a curvatura seccional (ou Riemanniana), que passamos a definir.

Seja  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bidimensional do espaço tangente  $T_p M$  e sejam  $x, y \in \sigma$  dois vetores linearmente independentes.

**Definição 1.1.10.** Dado  $p \in M$ , seja  $\{x, y\}$  uma base qualquer de  $\sigma$ . O número real

$$K(p, \sigma) = K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

é chamado curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$ .

**Corolário 1.1.1.** Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$ ,  $p$  um ponto de  $M$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$ . Escreva  $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$ ,  $i, j, k, l = 1, \dots, n$ . Então  $K(p, \sigma) = K_0 = \text{constante}$  para todo  $\sigma \subset T_p M$  se, e somente se,

$$R_{ijkl} = K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}),$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j, \\ 0 & , \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Em outras palavras,  $K(p, \sigma) = K_0$  para todo  $\sigma \in T_p M$  se, e só se,  $R_{ijij} = -R_{ijji} = K_0$  para todo  $i \neq j$ , e  $R_{ijkl} = 0$  nos outros casos.

Algumas combinações das curvaturas seccionais aparecem com tanta frequência que elas merecem nomes.

Sejam  $p \in M$  e  $x = z_n$  um vetor unitário em  $T_p M$ . Tomemos uma base ortonormal  $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$  do hiperplano de  $T_p M$  ortogonal a  $x$  e consideremos as seguintes médias:

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K(x, z_i)$$

e

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Ric}_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle.$$

$\text{Ric}_p(x)$  é chamada a *curvatura de Ricci* no ponto  $p$  na direção  $x$  e  $K(p)$  é a *curvatura escalar* (ou média) em  $p$ .

**Exemplo 1.1.2.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana conexa de dimensão  $n$  com curvatura seccional constante igual a  $c$ . Então

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K(x, z_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} c = c.$$

Consideremos uma imersão isométrica  $x : M^n \rightarrow N^{n+m=k}$  de uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$  em uma variedade Riemanniana  $N$  de dimensão igual a  $k = n + m$ . Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão  $x$ . Para isto, introduziremos a seguinte definição:

Seja  $\bar{\nabla}$  a conexão Riemanniana de  $N$ . Se  $X$  e  $Y$  são campos locais de vetores em  $M$  e  $\bar{X}, \bar{Y}$  são extensões locais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, a  $N$ , definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T,$$

onde o expoente  $T$  indica a componente tangente do vetor  $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$ .

No que se segue, indicaremos por  $\mathcal{X}(U)^\perp$  os campos diferenciáveis em  $U$  de vetores normais a  $f(U) \approx U$ .

**Definição 1.1.11.** A aplicação  $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$  definida por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X \overline{Y})^\perp$$

é a segunda forma fundamental de  $x$ .

$B$  é um campo local em  $N$  normal a  $M$  e não depende das extensões  $\overline{X}$ ,  $\overline{Y}$ . Com efeito, se  $\overline{X}_1$  é uma outra extensão de  $X$ , temos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1} \overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X} - \overline{X}_1} \overline{Y},$$

que se anula em  $M$ , pois  $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$  em  $M$ . Além disso, se  $\overline{Y}_1$  é uma outra extensão de  $Y$ ,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} (\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois  $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$  ao longo de uma trajetória de  $X$ .

Portanto  $B(X, Y)$  está bem definida.

**Proposição 1.1.4.** A aplicação  $B$  é bilinear e simétrica.

*Demonstração.* Sejam  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(U)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(U)$  e indicaremos por  $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}, \overline{f}, \overline{g}$  as extensões de  $X, Y, Z, f, g$ , respectivamente, a  $\overline{U}$ .

Inicialmente mostraremos que  $B$  é uma aplicação bilinear. De fato, usando as propriedades de linearidade das conexões  $\nabla$  e  $\overline{\nabla}$  e como  $f = \overline{f}$ ,  $g = \overline{g}$  e  $\overline{X}(\overline{g}) = X(g)$  em  $M$ , temos:

$$\begin{aligned} B(X + Z, Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{X} + \overline{Z}} \overline{Y} - \nabla_{X+Z} Y \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y + \overline{\nabla}_{\overline{Z}} \overline{Y} - \nabla_Z Y \\ &= B(X, Y) + B(Z, Y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(X, Y + Z) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}} (\overline{Y} + \overline{Z}) - \nabla_X (Y + Z) \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y + \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Z} - \nabla_X Z \\ &= B(X, Y) + B(X, Z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(fX, Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{f}\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_{fX} Y \\ &= \overline{f} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - f \nabla_X Y \\ &= f B(X, Y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(X, gY) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{g}\bar{Y}) - \nabla_X(gY) \\
&= \bar{g}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - g\nabla_X Y + \bar{X}(\bar{g})\bar{Y} - X(g)Y \\
&= gB(X, Y).
\end{aligned}$$

Portanto,  $B$  é uma aplicação bilinear.

Finalmente, como  $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$  em  $M$ ,  $B$  é uma aplicação simétrica. Com efeito,

$$\begin{aligned}
B(X, Y) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y \\
&= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - [\bar{X}, \bar{Y}] - \nabla_X Y + [X, Y] \\
&= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X}) - \nabla_X Y + (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} - \nabla_Y X \\
&= B(Y, X).
\end{aligned}$$

□

**Observação 1.1.3.** Como  $B$  é uma aplicação bilinear, podemos associá-la a uma aplicação linear auto-adjunta  $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  dada por

$$\langle S_\eta(X), Y \rangle_{T_p M} = \langle B(X, Y), \eta \rangle_{T_{x(p)} N},$$

onde  $\eta \in (TM)^\perp$ .

Podemos escrever esta aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante da seguinte maneira:

$$S_\eta(X) = -(\bar{\nabla}_X \eta)^T.$$

Aqui estamos identificando  $\eta$  com a extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ .

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle S_\eta(X), Y \rangle_{T_p M} &= \langle B(X, Y), \eta \rangle_{T_{x(p)} N} \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y, \eta \rangle_{T_{x(p)} N} \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \eta \rangle_{T_{x(p)} N} \\
&= -\langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \eta \rangle_{T_{x(p)} N} \\
&= \langle -\bar{\nabla}_{\bar{X}} \eta, \bar{Y} \rangle_{T_{x(p)} N} \\
&= \left\langle -(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \eta)^T, \bar{Y} \right\rangle_{T_{x(p)} N}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\langle S_\eta(X) - (\bar{\nabla}_X \eta)^T, Y \right\rangle_{T_p M} = 0$$

e, portanto,

$$S_\eta(X) = -(\bar{\nabla}_X \eta)^T.$$

Agora consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, isto é,  $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ . Definimos a *curvatura média*  $H$  de  $x$  por

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}(S_\eta),$$

onde  $\text{tr}(S_\eta)$  é o traço da matriz da aplicação  $S_\eta$ . Além disso,

$$\|B\|^2 = \text{tr}(S_\eta(S_\eta)^t),$$

onde  $(S_\eta)^t$  representa a transposta de  $(S_\eta)$ , é uma norma para a segunda forma fundamental de  $x$ .

Sejam  $p \in M$  e  $\eta$  o vetor normal unitário a  $x$ . Como  $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_p M$  com valores próprios reais  $k_1, \dots, k_n$ , respectivamente, isto é,  $S_\eta(e_i) = k_i e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Vamos supor que  $M$  e  $N$  são ambas orientáveis e estão orientadas e seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base na orientação de  $M$ . Escolhemos  $\eta$  de modo que  $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$  seja uma base na orientação de  $N$ . Neste caso, denominamos os  $e_i$  as *direções principais* e os  $k_i$  as *curvaturas principais* de  $x$ .

Daí, a matriz da aplicação na base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é dada por

$$S_\eta = \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}.$$

Logo, reescrevendo  $H$  e  $\|B\|^2$  em termos das curvaturas principais, obtemos

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}(S_\eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \quad \text{e} \quad \|B\|^2 = \text{tr}(S_\eta(S_\eta)^t) = \text{tr}((S_\eta)^2) = \sum_{i=1}^n k_i^2.$$

**Definição 1.1.12.** Uma imersão  $x : M^n \rightarrow N^{n+m=k}$  é geodésica em  $p \in M$ , se para todo  $\eta \in (T_p M)^\perp$  a segunda forma fundamental  $B$  é identicamente nula em  $p$ . A imersão  $x$  é totalmente geodésica, se ela é geodésica para todo  $p \in M$ .

**Proposição 1.1.5.** Uma imersão  $x : M \rightarrow N$  é geodésica em  $p \in M$  se, e só se, toda geodésica  $\gamma$  de  $M$  partindo de  $p$  é geodésica de  $N$  em  $p$ .

**Definição 1.1.13.** Uma imersão  $x : M \rightarrow N$  é mínima, se para todo  $p \in M$  e todo  $\eta \in (T_p M)^\perp$  tem-se que  $\text{tr}(S_\eta) = 0$ .

**Definição 1.1.14.** Seja  $N^{n+1}$  uma variedade com uma métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e seja  $\nabla$  a sua conexão Riemanniana. Dizemos que uma imersão  $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$  é (totalmente) umbílica se, para todo  $p \in M$ , a segunda forma fundamental  $B$  de  $x$  em  $p$  satisfaz

$$\langle B(X, Y), \eta \rangle (p) = \lambda(p) \langle X, Y \rangle, \quad \lambda(p) \in \mathbb{R},$$

para todo  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  e todo campo unitário  $\eta$  normal a  $x(M)$ .

## 1.2 Estabilidade

Nesta seção, consideremos uma imersão  $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$  de uma variedade diferenciável orientada e conexa em uma variedade Riemanniana orientada. Seja  $D \subset M$  um domínio relativamente compacto com bordo  $\partial D$  suave e denotemos por  $\bar{D}$  o fecho de  $D$ . Escolhemos a orientação de  $M$  compatível com a orientação de  $N$ .

**Definição 1.2.1.** Uma variação de  $x$  em  $D$  é uma função diferenciável  $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \bar{D} \rightarrow N$  tal que, para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,

$$\begin{aligned} X_t & : \bar{D} \rightarrow N \\ p & \mapsto X(t, p) \end{aligned}$$

é uma imersão com  $X_0 = x$ .

Dizemos que uma variação  $X_t$  fixa o bordo  $\partial D$ , se

$$X_t|_{\partial D} = x|_{\partial D},$$

para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

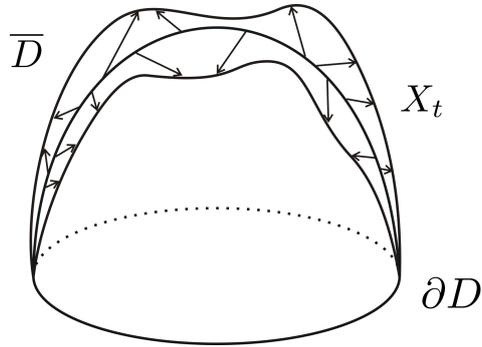


Figura 1.3: Variação que fixa o bordo.

Nesta dissertação só trataremos das variações que fixam o bordo.

Definimos a *função área*  $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$A_D(t) = \int_D dM_t,$$

onde  $dM_t$  é o elemento volume de  $M$  na métrica induzida por  $X_t$ , e a *função volume*  $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$V(t) = \int_{[0,t] \times D} X^* dN.$$

Dado  $p \in \bar{D}$ , seja  $W(p) = \frac{\partial X}{\partial t} \Big|_{t=0}$  a variação do campo vetorial de  $X$ .

Uma variação é *normal*, se  $W$  é paralelo a  $\eta$ . Dizemos que uma variação *preserva volume* se  $V(t) = V(0)$ , para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

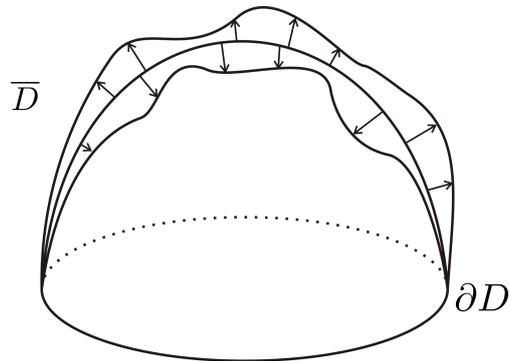


Figura 1.4: Variação normal.

Vamos definir estabilidade para imersões com curvatura média constante.

**Definição 1.2.2.** *Sejam  $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$  uma imersão com curvatura média constante e  $D \subset M$  um domínio relativamente compacto com bordo  $\partial D$  suave. A restrição  $x|_D$  é estável, se  $A''(0) \geq 0$  para toda variação que preserva volume. Dizemos que  $x$  é estável se, para qualquer  $D$ ,  $x|_D$  é estável.*

Seja  $\tilde{\mathcal{F}}$  o conjunto das funções diferenciáveis  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f|_{\partial M} = 0$  e  $\int_M f dM = 0$ . A seguinte proposição é um importante resultado para saber se uma imersão é estável.

**Proposição 1.2.1.** *Seja  $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$  uma imersão com curvatura média constante. A imersão  $x$  é estável se, e somente se,*

$$\int_M (-f \Delta f - (\text{Ric}(\eta) + \|B\|^2) f^2) dA \geq 0,$$

para toda  $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ . Aqui  $\Delta$  é o Laplaciano da métrica induzida e  $\text{Ric}(\eta)$  é a curvatura de Ricci de  $N$  na direção  $\eta$ .

Quando a imersão  $x$  é mínima, temos a seguinte definição para estabilidade:

**Definição 1.2.3.** *Sejam  $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$  uma imersão mínima e  $D \subset M$  um domínio relativamente compacto com bordo  $\partial D$  suave. A restrição  $x|_D$  é estável, se  $A''(0) \geq 0$  para toda variação. Dizemos que  $x$  é estável se, para qualquer  $D$ ,  $x|_D$  é estável.*

Uma proposição análoga à Proposição 1.2.1 para imersões mínimas é a seguinte:

**Proposição 1.2.2.** *Seja  $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$  uma imersão mínima. A imersão  $x$  é estável se, e somente se,*

$$\int_M (-f \Delta f - (\text{Ric}(\eta) + \|B\|^2) f^2) dA \geq 0.$$

Aqui  $\Delta$  é o Laplaciano da métrica induzida e  $\text{Ric}(\eta)$  é a curvatura de Ricci de  $N$  na direção  $\eta$ .

Observamos que para o caso em que  $x$  é mínima, a proposição acima não precisa da hipótese que  $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ .

## Capítulo 2

# A Função Suporte em Espaços de Curvatura Constante

Seja  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante igual a  $c$ . Neste capítulo, estenderemos para as variedades  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ ,  $c$  arbitrário, as noções de função suporte e vetor posição já conhecidas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e daremos uma interpretação geométrica da função suporte.

Seja  $S_c$  a solução da equação diferencial ordinária  $y'' + cy = 0$  com condições iniciais  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 1$ . Então

$$S_c(r) = \begin{cases} r & , \text{ se } c = 0, \\ \frac{\text{sen}(\sqrt{c} r)}{\sqrt{c}} & , \text{ se } c > 0, \\ \frac{\text{senh}(\sqrt{-c} r)}{\sqrt{-c}} & , \text{ se } c < 0. \end{cases}$$

Consideremos a função  $r(\cdot) = d(\cdot, p_0)$ , onde  $d$  é a função distância geodésica em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$  e  $p_0 \in \mathcal{Q}_c^{n+1}$ , e denotemos por  $\text{grad} r$  o gradiente em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$  da função  $r$ .

**Definição 2.0.4.** *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana orientada de dimensão  $n$  e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica. Dado  $p_0 \in \mathcal{Q}_c^{n+1}$ , o campo de vetores*

$$X(p) = S_c(r) \text{grad} r(p)$$

em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$  é chamado de vetor posição com origem em  $p_0$ .

A função  $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(p) = \langle X(p), \eta(p) \rangle$$

é denominada a função suporte da imersão  $x$ .

Aqui  $\eta$  é o vetor normal unitário à imersão  $x$  e identificamos  $x(p)$  com  $p$ .

## 2.1 A Função Suporte em $\mathbb{R}^{n+1}$

Seja  $(\mathcal{Q}_0^n)_p$  o hiperplano tangente a  $x(M^n)$  em  $p \in M$ . Então a distância do ponto  $p_0$  a  $(\mathcal{Q}_0^n)_p$  é dada por  $g(p)$ .

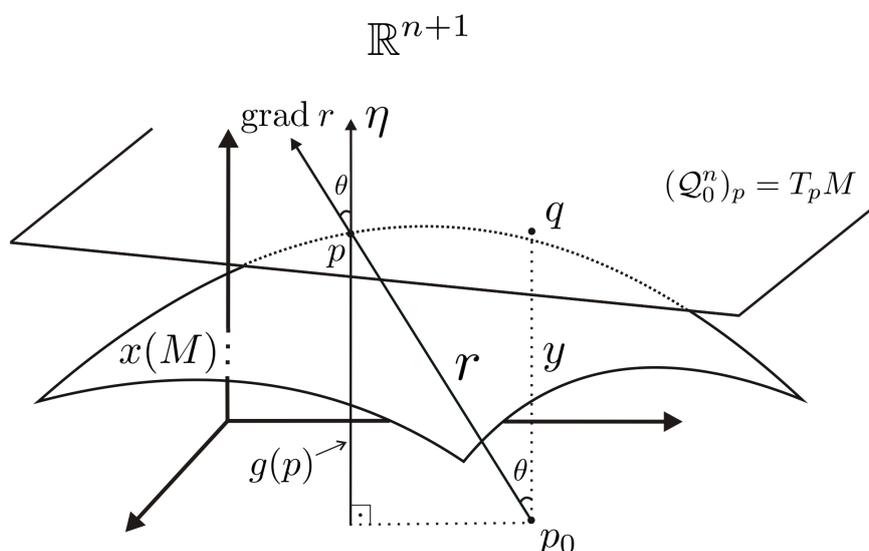


Figura 2.1: Espaço Euclidiano

Com efeito, o cosseno do ângulo entre os vetores  $\text{grad } r(p)$  e  $\eta(p)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \text{grad } r(p), \eta(p) \rangle}{|\text{grad } r(p)| |\eta(p)|} = \frac{1}{r(p)} \langle X(p), \eta(p) \rangle = \frac{1}{|X(p)|} \langle X(p), \eta(p) \rangle.$$

Agora seja  $y$  a distância de  $p_0$  a  $(\mathcal{Q}_0^n)_p$  e seja  $q$  o pé da perpendicular baixada de  $p_0$  a  $(\mathcal{Q}_0^n)_p$ . No triângulo  $p_0qp$ , temos que

$$y = |X(p)| \cos \theta = |X(p)| \frac{1}{|X(p)|} \langle X(p), \eta(p) \rangle = \langle X(p), \eta(p) \rangle = g(p).$$

Isto conclui a afirmação.

A definição do vetor posição dada, ver Definição 2.0.4, no caso Euclidiano é bastante natural. De fato, escrevendo  $p = (x_1, \dots, x_{n+1})$  e  $p_0 = (x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)$ , temos que

$$r(p) = d(p, p_0) = |X(p)| = |p - p_0| = \left( \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - x_i^0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{grad } r(p) &= \frac{1}{|X(p)|} (x_1 - x_1^0, \dots, x_{n+1} - x_{n+1}^0) \\ &= \frac{1}{|X(p)|} \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - x_i^0) e_i \\ &= \frac{1}{|X(p)|} X(p) \\ &= \frac{1}{r} X(p), \end{aligned}$$

ou seja,

$$X(p) = r \text{ grad } r(p).$$

## 2.2 A Função Suporte em $\mathbb{S}^{n+1}$

No caso em que  $c > 0$ , vamos supor, sem perda de generalidade, que  $c = 1$  e, portanto,  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$  é a esfera unitária  $\mathbb{S}^{n+1}$  em  $\mathbb{R}^{n+2}$ .

Neste caso, para qualquer ponto  $p_0 \in \mathbb{S}^{n+1}$ , a função distância geodésica  $r(\cdot) = d(\cdot, p_0)$ , dada pelo comprimento da geodésica minimizante, é diferenciável em  $\mathbb{S}^{n+1} - \{p_0, -p_0\}$ .

Logo, o vetor posição com origem em  $p_0$  dado por

$$X(p) = \text{sen } r \text{ grad } r(p)$$

só é diferenciável em  $\mathbb{S}^{n+1} - \{p_0, -p_0\}$ .

Isto implica que a função suporte  $g = \langle X, \eta \rangle$  é diferenciável somente em  $x(M^n) \subseteq \mathbb{S}^{n+1} - \{p_0, -p_0\}$ .

Seja  $(\mathcal{Q}_1^n)_p$  a hipersuperfície totalmente geodésica tangente a  $x(M^n)$  em  $p \in M$ . Então a distância Euclidiana do ponto  $p_0$  ao hiperplano que contém  $(\mathcal{Q}_1^n)_p$  é dada por  $|g(p)|$ .

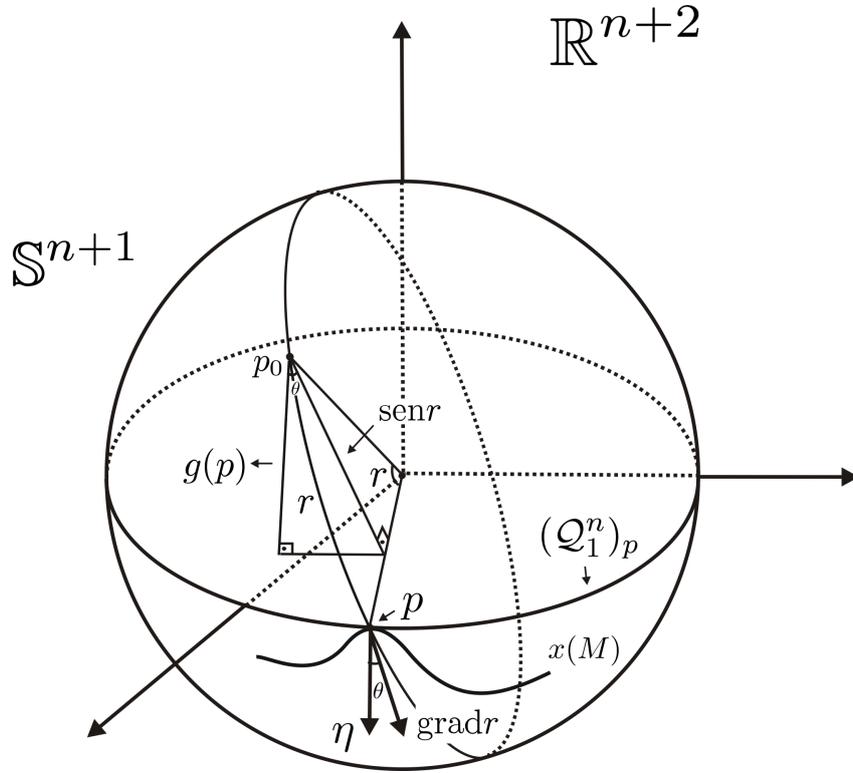


Figura 2.2: Espaço Esférico

De fato, como a esfera é unitária e  $r = d(p, p_0)$ , obtemos que  $\angle(p, p_0) = r$ .

Visto que  $\text{grad } r(p)$  é o vetor velocidade da geodésica que parte de  $p_0$ , então  $\text{grad } r(p)$  é ortogonal a  $p$ . Logo, podemos decompor  $p_0$  da seguinte forma:

$$p_0 = \cos r(p)p - \text{sen } r(p)\text{grad } r(p). \quad (2.1)$$

Isto mostra que a definição de vetor posição dada anteriormente também é natural em  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

Observando que  $\langle p, \eta(p) \rangle = 0$ , obtemos

$$\langle p_0, \eta(p) \rangle = -\text{sen } r(p) \langle \text{grad } r(p), \eta(p) \rangle = -g(p).$$

Logo

$$|g(p)| = |\langle p_0, \eta(p) \rangle|.$$

## 2.3 A Função Suporte em $\mathbb{H}^{n+1}$

No caso em que  $c < 0$ , vamos utilizar o modelo do hiperbolóide para o espaço hiperbólico. Para isto, consideremos no espaço vetorial  $\mathbb{R}^{n+2}$  a métrica pseudo-Riemanniana  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  definida por

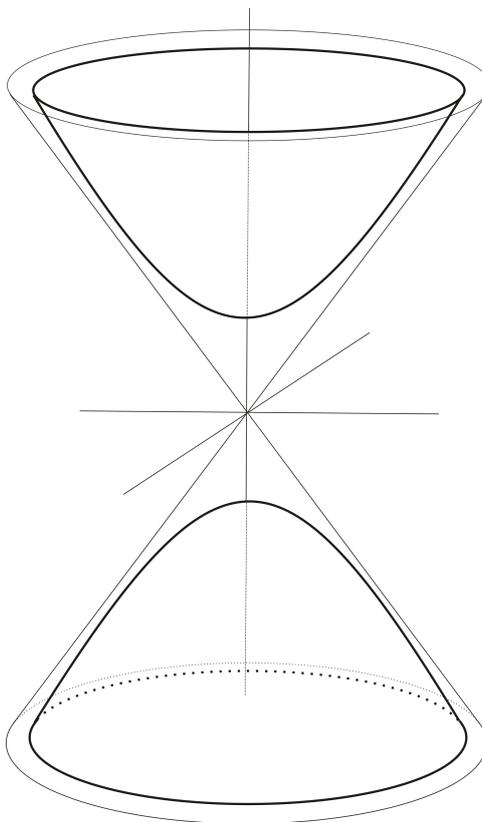
$$\langle\langle v, w \rangle\rangle = v_1 w_1 + \dots + v_{n+1} w_{n+1} - v_{n+2} w_{n+2},$$

onde  $v = (v_1, \dots, v_{n+2})$  e  $w = (w_1, \dots, w_{n+2})$  são vetores em  $\mathbb{R}^{n+2}$ .

O produto interno definido acima é chamado *produto interno de Lorentz* e  $(\mathbb{R}^{n+2}, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$  é chamado *espaço de Lorentz* e indicamos este espaço por  $\mathbb{L}^{n+2}$ .

Consideremos a hipersuperfície de  $\mathbb{L}^{n+2}$  dada por

$$\tilde{\mathbb{H}}^{n+1}(c) = \left\{ v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle\langle v, v \rangle\rangle = -\frac{1}{c^2} \right\}.$$



Como  $\tilde{\mathbb{H}}^{n+1}(c)$  possui duas componentes conexas, vamos escolher a componente conexa tal que  $v_{n+2} > 0$ , isto é,

$$\mathbb{H}^{n+1}(c) = \left\{ v \in \mathbb{L}^{n+2}; v_{n+2} > 0 \text{ e } \langle\langle v, v \rangle\rangle = -\frac{1}{c^2} \right\}.$$

A métrica induzida pelo produto de Lorentz em  $\mathbb{H}^{n+1}(c)$  é Riemanniana. Além disso, a curvatura seccional de  $\mathbb{H}^{n+1}(c)$  é igual a  $c$ .

Visto que  $\mathbb{H}^{n+1}(c)$  é simplesmente conexa, pois é homeomorfa a  $\mathbb{R}^{n+1}$ , segue-se que  $\mathbb{H}^{n+1}(c)$  é um modelo para o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}(c)$  chamado *modelo de Lorentz* ou *modelo do hiperbolóide*.

As geodésicas neste modelo são interseções de  $\mathbb{H}^{n+1}$  com hiperplanos que passam pela origem de  $\mathbb{R}^{n+2}$ , ver [14], p. 70, corolário 4.

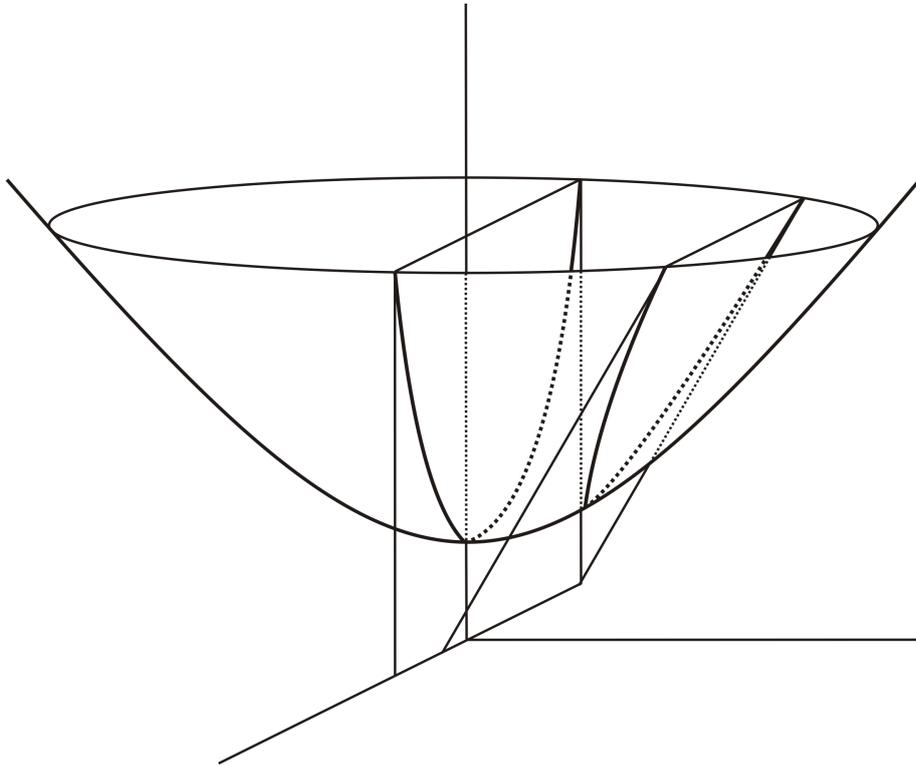


Figura 2.3: Geodésicas do espaço hiperbólico

Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $c = -1$  e  $p_0 = e_{n+2} = (0, \dots, 0, 1)$ .

Seja  $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$  a hipersuperfície totalmente geodésica tangente a  $x(M^n)$  em  $p \in M$ .

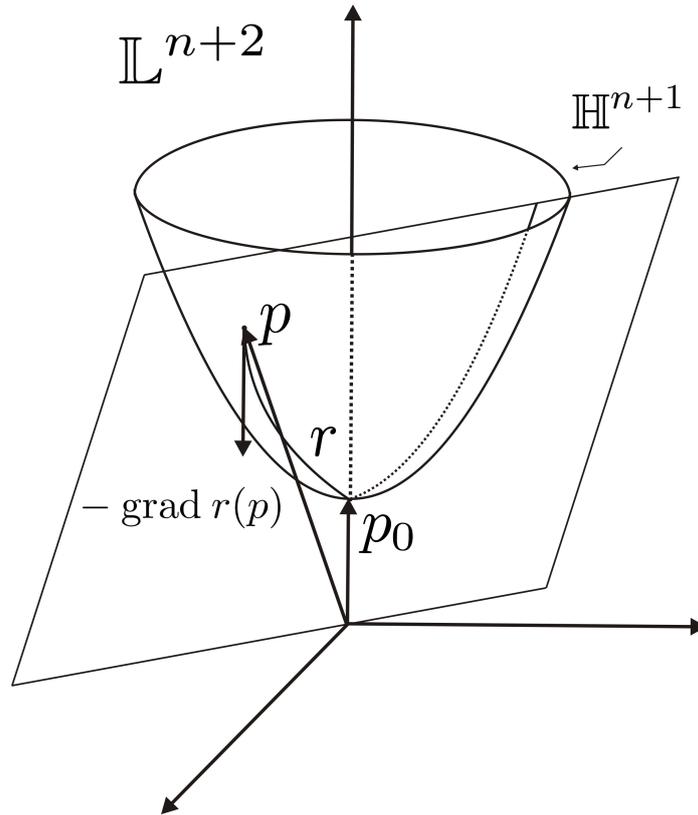
Neste caso, a distância Euclidiana de  $p_0$  ao hiperplano que passa pela origem de  $\mathbb{R}^{n+2}$  e contém  $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$  é dada por

$$\frac{|g(p)|}{\sqrt{1 + 2g(p)^2}}. \quad (2.2)$$

De fato, os vetores  $p_0$ ,  $p$  e  $-\text{grad } r(p)$  estão num mesmo plano e não são colineares, então podemos escrever  $p_0$  como combinação linear dos outros dois vetores, isto é,

$$p_0 = \alpha p - \beta \text{grad } r(p) \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

ver figura abaixo.



Observemos que, como  $\langle \text{grad } r(p), p \rangle = 0$ ,

$$-1 = \|p_0\|^2 = \alpha^2 \|p\|^2 + \beta^2 \|\text{grad } r(p)\|^2 = -\alpha^2 + \beta^2.$$

Logo,  $\alpha = \cosh r(p)$  e  $\beta = \sinh r(p)$  e, portanto,

$$p_0 = \cosh r(p)p - \sinh r(p)\text{grad } r(p). \quad (2.3)$$

Como  $\cosh r(p)p - p_0 = X(p)$ , obtemos que a definição de vetor posição, neste caso, também é natural.

Seja  $\eta(p)$  o vetor normal a  $M$  em  $p$ . Como  $\langle\langle p, \eta \rangle\rangle = 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle\langle p_0, \eta(p) \rangle\rangle &= \cosh r(p) \langle\langle p, \eta(p) \rangle\rangle - \sinh r(p) \langle\langle \text{grad } r(p), \eta(p) \rangle\rangle \\ &= - \langle\langle \sinh r(p)\text{grad } r(p), \eta(p) \rangle\rangle \\ &= - \langle\langle X(p), \eta(p) \rangle\rangle \\ &= -g(p). \end{aligned}$$

Escrevendo  $\eta(p) = (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, \eta_{n+2})$ , vemos que

$$\begin{aligned} \langle\langle p_0, \eta(p) \rangle\rangle &= \langle\langle (0, \dots, 0, 1), (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}) \rangle\rangle \\ &= 0 \cdot \eta_1 + \dots + 0 \cdot \eta_{n+1} - 1 \cdot \eta_{n+2} \\ &= -\eta_{n+2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle p_0, \eta(p) \rangle &= \langle (0, \dots, 0, 1), (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}) \rangle \\ &= 0 \cdot \eta_1 + \dots + 0 \cdot \eta_{n+1} + 1 \cdot \eta_{n+2} \\ &= \eta_{n+2}, \end{aligned}$$

onde  $\langle , \rangle$  é o produto interno usual de  $\mathbb{R}^{n+2}$ .

Como  $\langle\langle \eta, \eta \rangle\rangle = 1$ ,  $\langle\langle p, \eta(p) \rangle\rangle = 0$  e  $\langle\langle v, \eta(p) \rangle\rangle = 0$ , para qualquer vetor  $v$  tangente a  $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$ , temos que

$$\bar{\eta}(p) = \frac{(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, -\eta_{n+2})}{\sqrt{1 + 2\eta_{n+2}^2}}$$

é um vetor unitário em  $\mathbb{R}^{n+2}$  perpendicular ao hiperplano que passa pela origem de  $\mathbb{R}^{n+2}$  e contém  $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$ .



$$\begin{aligned}
\langle \bar{\eta}(p), p \rangle &= \left\langle \frac{(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, -\eta_{n+2})}{\sqrt{1 + 2\eta_{n+2}^2}}, (x_1, \dots, x_{n+2}) \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\eta_{n+2}^2}} (\eta_1 x_1 + \dots + \eta_{n+1} x_{n+1} - \eta_{n+2} x_{n+2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\eta_{n+2}^2}} \langle \eta(p), p \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, a distância Euclidiana de  $p_0$  a este hiperplano é dada por

$$|\langle p_0, \bar{\eta}(p) \rangle| = \left| \frac{-\eta_{n+2}}{\sqrt{1 + 2\eta_{n+2}^2}} \right| = \frac{|g(p)|}{\sqrt{1 + 2g(p)^2}}.$$

## 2.4 O Laplaciano da Função Suporte

Nesta seção consideremos uma variedade Riemanniana orientada  $M^n$  e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica com curvatura média constante  $H$ . Seja  $\theta_c = S'_c$ . Mostraremos que a função suporte  $g$  da imersão  $x$  satisfaz

$$\Delta g = -\|B\|^2 g - nH\theta_c,$$

onde  $\Delta$  é o Laplaciano em  $M^n$ .

Antes de provarmos o resultado acima, necessitaremos de três lemas, a saber:

**Lema 2.4.1.** *Sejam  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica com curvatura média constante  $H$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial geodésico em  $p \in M^n$ . Então*

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle (p) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Além disso,

$$\sum_{i=1}^n \langle X, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle (p) = -\|B\|^2 g(p),$$

onde  $X$  é o vetor posição com origem em  $p_0 \in \mathcal{Q}_c^{n+1}$ .

*Demonstração.* Como  $\langle \eta, e_k \rangle = 0$ , temos que

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle = -\langle \eta, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle.$$

Derivando a equação acima, obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle - \langle \eta, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle. \quad (2.4)$$

Como  $\langle \eta, \eta \rangle = 1$ , segue-se que  $\langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \eta \rangle = 0$ . Isto significa que  $\bar{\nabla}_{e_i} \eta$  é tangente a  $M^n$ .

Visto que  $\bar{\nabla}_{e_i} \eta$  é tangente a  $M^n$  e  $(\bar{\nabla}_{e_i} e_k(p))^T = 0$ , pois o referencial é geodésico, temos que a equação (2.4) se reduz a seguinte equação:

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle (p) = -\langle \eta, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle (p) = -\langle \eta, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle (p). \quad (2.5)$$

A última igualdade segue do fato que a conexão de uma variedade Riemanniana é simétrica.

Como  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$  possui curvatura seccional constante e igual a  $c$ , então

$$R_{ikik} = \langle R(e_i, e_k)e_i, e_k \rangle = K(e_i, e_k) = c.$$

Assim,

$$R_{ikik}e_k = R(e_i, e_k)e_i = ce_k.$$

Por outro lado,

$$R(e_i, e_k)e_i = \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i + \bar{\nabla}_{[e_i, e_k]} e_i = \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i.$$

Logo,

$$\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i = \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i - ce_k. \quad (2.6)$$

Usando (2.5) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle (p) &= -\sum_{i=1}^n \langle \eta, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle (p) \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle \eta, \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i - ce_k \rangle (p) \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle \eta, \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle (p) \\ &= -\left\langle \eta, \bar{\nabla}_{e_k} \left( \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right) \right\rangle (p). \end{aligned}$$

Como  $\left\langle \eta, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle = nH$  é constante, vemos que

$$\left\langle \bar{\nabla}_{e_k} \eta, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle = - \left\langle \eta, \bar{\nabla}_{e_k} \left( \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right) \right\rangle,$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle (p) &= \left\langle \bar{\nabla}_{e_k} \eta, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle (p) \\ &= \left\langle (\bar{\nabla}_{e_k} \eta)^T + (\bar{\nabla}_{e_k} \eta)^N, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle (p) \\ &= \left\langle (\bar{\nabla}_{e_k} \eta)^T, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle (p) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova da primeira afirmação.

Agora como  $\bar{\nabla}_{e_i} \eta$  é tangente a  $M^n$ , podemos reescrevê-lo da forma

$$\bar{\nabla}_{e_i} \eta = \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_j \rangle e_j.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \eta \rangle &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_j \rangle e_j, \sum_{k=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle e_k \right\rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j,k=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_j \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle \langle e_j, e_k \rangle \right) \quad (2.7) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_j \rangle^2 \\ &= - \|B\|^2. \end{aligned}$$

Escrevendo

$$X = \langle X, \eta \rangle \eta + \sum_{k=1}^n \langle X, e_k \rangle e_k$$

e usando (2.7) e a primeira parte deste lema, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle X, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle (p) &= \sum_{i=1}^n \left\langle \langle X, \eta \rangle \eta + \sum_{k=1}^n \langle X, e_k \rangle e_k, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta \right\rangle (p) \\ &= \langle X, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \eta \rangle (p) \\ &= -\|B\|^2 g. \end{aligned}$$

□

Utilizaremos a proposição abaixo para demonstrarmos os lemas 2.4.2 e 2.4.3.

**Proposição 2.4.1.** *Se  $V$  e  $W$  são campos de vetores diferenciáveis em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ , então*

$$\langle \bar{\nabla}_V \text{grad } r, W \rangle = \frac{\theta_c}{S_c} (\langle V, W \rangle - \langle \text{grad } r, V \rangle \langle \text{grad } r, W \rangle), \quad (2.8)$$

onde  $r$  é a função distância geodésica em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ .

*Demonstração.* Inicialmente provaremos a proposição para o caso em que  $c = 0$ . Sejam  $V$  e  $W$  campos de vetores em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $r : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  a função distância geodésica, a qual é dada por

$$r(p) = d(p, p_0) = |p - p_0|,$$

$p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Como  $r^2 = |p - p_0|^2 = \langle p - p_0, p - p_0 \rangle$ , temos que

$$W(r^2) = 2 \langle W, p - p_0 \rangle = 2r \langle \text{grad } r, W \rangle,$$

isto é

$$\langle W, p - p_0 \rangle = r \langle \text{grad } r, W \rangle.$$

Aplicando o campo  $V$  a equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_V W, p - p_0 \rangle + \langle W, V \rangle &= \langle \text{grad } r, V \rangle \langle \text{grad } r, W \rangle \\ &\quad + r (\langle \nabla_V \text{grad } r, W \rangle \\ &\quad + \langle \text{grad } r, \nabla_V W \rangle). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Visto que  $r \operatorname{grad} r = p - p_0$ , podemos escrever (2.9) da forma

$$\begin{aligned} \langle \nabla_V W, p - p_0 \rangle + \langle W, V \rangle &= \langle \operatorname{grad} r, V \rangle \langle \operatorname{grad} r, W \rangle \\ &\quad + r \langle \nabla_V \operatorname{grad} r, W \rangle + \langle p - p_0, \nabla_V W \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle \nabla_V \operatorname{grad} r, W \rangle = \frac{1}{r} (\langle V, W \rangle - \langle \operatorname{grad} r, V \rangle \langle \operatorname{grad} r, W \rangle).$$

Visto que  $S_c = r$  e  $\theta_c = 1$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , concluímos o resultado.

No caso em que  $c = 1$ , consideremos  $V$  e  $W$  campos de vetores diferenciáveis em  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

Aplicando o campo  $V$  na equação (2.1), apresentada na seção 2 do capítulo 2, vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= -\operatorname{sen} r(p) \langle \operatorname{grad} r(p), V \rangle p + \cos r(p) V \\ &\quad - \cos r(p) \langle \operatorname{grad} r(p), V \rangle \operatorname{grad} r(p) \\ &\quad - \operatorname{sen} r(p) \nabla_V \operatorname{grad} r(p), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla_V \operatorname{grad} r(p) &= -\langle \operatorname{grad} r(p), V \rangle p \\ &\quad + \frac{\cos r(p)}{\operatorname{sen} r(p)} (V - \langle \operatorname{grad} r(p), V \rangle \operatorname{grad} r(p)). \end{aligned}$$

Como  $\langle p, W \rangle = 0$ , temos que

$$\langle \nabla_V \operatorname{grad} r(p), W \rangle = \frac{\cos r(p)}{\operatorname{sen} r(p)} (\langle V, W \rangle - \langle \operatorname{grad} r(p), V \rangle \langle \operatorname{grad} r(p), W \rangle).$$

Visto que, em  $\mathbb{S}^{n+1}$ ,  $S_c = \operatorname{sen} r(p)$  e  $\theta_c = \cos r(p)$ , concluímos o resultado.

Finalmente, provaremos a proposição para o caso em que  $c = -1$ . Consideremos  $V$  e  $W$  campos de vetores diferenciáveis em  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

Aplicando o campo  $V$  na equação (2.3), apresentada na seção 3 do capítulo 2, vemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \sinh r(p) \langle \text{grad } r(p), V \rangle p + \cosh r(p) V \\
&\quad - \cosh r(p) \langle \text{grad } r(p), V \rangle \text{grad } r(p) \\
&\quad - \sinh r(p) \nabla_V \text{grad } r(p),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\nabla_V \text{grad } r(p) &= \langle \text{grad } r(p), V \rangle p \\
&\quad + \frac{\cosh r(p)}{\sinh r(p)} (V - \langle \text{grad } r(p), V \rangle \text{grad } r(p)),
\end{aligned}$$

portanto, como  $\langle p, W \rangle = 0$ ,

$$\langle \nabla_V \text{grad } r(p), W \rangle = \frac{\cosh r(p)}{\sinh r(p)} (\langle V, W \rangle - \langle \text{grad } r(p), V \rangle \langle \text{grad } r(p), W \rangle).$$

Como  $S_c = \sinh r(p)$  e  $\theta_c = \cosh r(p)$ , concluímos a demonstração.  $\square$

**Lema 2.4.2.** *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana orientada e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica. Consideremos  $\{e_1, \dots, e_n\}$  campos de vetores ortonormais definidos numa vizinhança de  $p \in M$ . Então*

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle (p) = -nH\theta_c,$$

onde  $H$  é a curvatura média de  $x$ .

*Demonstração.* Como  $X = S_c \text{grad } r$  e  $\theta_c = S'_c$ , temos que

$$\bar{\nabla}_{e_i} X = \bar{\nabla}_{e_i} (S_c \text{grad } r) = \theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \text{grad } r + S_c \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r. \quad (2.10)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle &= \langle \theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \text{grad } r + S_c \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle \\
&= \theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle \\
&\quad + S_c \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle.
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Fazendo  $V = e_i$  e  $W = \bar{\nabla}_{e_i} \eta$  em (2.8), obtemos que

$$S_c \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle = \theta_c \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle - \theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle.$$

Substituindo a igualdade acima em (2.11), vem que

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle = \theta_c \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle = \theta_c \sum_{i=1}^n \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle = -nH\theta_c.$$

□

**Lema 2.4.3.** *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana orientada e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica. Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial geodésico em  $p \in M^n$ . Então*

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle (p) = nH\theta_c(p),$$

onde  $H$  é a curvatura média de  $x$ .

*Demonstração.* Usando (2.10) e observando que  $\theta'_c = -cS_c$ , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X &= -cS_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 \text{grad } r + \theta_c \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, e_i \rangle \text{grad } r \\ &+ \theta_c \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \text{grad } r + 2\theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r \\ &+ S_c \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle (p) &= -cS_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 \langle \text{grad } r, \eta \rangle (p) \\ &+ \theta_c \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \eta \rangle (p) \\ &+ \theta_c \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \langle \text{grad } r, \eta \rangle (p) \\ &+ 2\theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle (p) \\ &+ S_c \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle (p). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle &= -cS_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 \\
&+ \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, e_i \rangle \\
&+ \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \quad (2.12) \\
&+ 2\theta_c \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle \\
&+ S_c \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Vamos reescrever cada termo de (2.12) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
-cS_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 &= -c \langle X, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 \\
&= -cg \sum_{i=1}^n \langle \langle \text{grad } r, e_i \rangle e_i, \langle \text{grad } r, e_i \rangle e_i \rangle \\
&= -cg \left| \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle e_i \right|^2 \\
&= -cg |(\text{grad } r)^T|^2, \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, e_i \rangle &= \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \frac{\theta_c}{S_c} (1 - \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2) \\
&= \frac{\theta_c^2}{S_c^2} g \sum_{i=1}^n (1 - \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2) \\
&= \frac{\theta_c^2}{S_c^2} gn - \frac{\theta_c^2}{S_c^2} g |(\text{grad } r)^T|^2, \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle &= \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \left\langle \text{grad } r, \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \right\rangle \\
&= \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \left\langle \text{grad } r, \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, \eta \rangle \eta \right\rangle \\
&= \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \left\langle \text{grad } r, - \sum_{i=1}^n \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle \eta \right\rangle \\
&= \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \langle \text{grad } r, nH\eta \rangle \\
&= nH\theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle^2,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle \frac{\theta_c}{S_c} (- \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \eta \rangle) \\
&= - \frac{\theta_c}{S_c} \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 \\
&= - \frac{\theta_c}{S_c^2} g |(\text{grad } r)^T|^2,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

onde  $(\text{grad } r)^T$  indica a projeção de  $\text{grad } r$  em  $TM$ .

Usaremos (2.8) para reescrever o último termo de (2.12), isto é,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle &= \sum_{i=1}^n (e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n e_i \left( - \frac{\theta_c}{S_c} \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \eta \rangle \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\theta_c}{S_c} \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle + nH \frac{\theta_c}{S_c}.
\end{aligned}$$

Como  $\theta_c^2 + cS_c^2 = 1$  e  $|\text{grad } r| = 1$ , obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle (p) &= \frac{1}{s_c^2} \langle \text{grad } r, \eta \rangle \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 \\
&\quad - \frac{\theta_c^2}{S_c^3} \left( n - \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 \right) g \\
&\quad - \frac{\theta_c}{S_c} nH \left( 1 - \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 \right) \\
&\quad + \frac{\theta_c^2}{S_c^3} \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 g + nH \frac{\theta_c}{S_c}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Substituindo (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) e (2.17) em (2.12), vem que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle &= -cg \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 - 3 \frac{\theta_c^2}{S_c^2} g \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 + n \frac{\theta_c^2}{S_c^2} g \\
&\quad + nH\theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle^2 + \frac{1}{S_c^2} g \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 \\
&\quad - \frac{\theta_c^2}{S_c^2} \left( n - \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 \right) g - nH\theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle^2 \\
&\quad + \frac{\theta_c^2}{S_c^2} \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 g + nH\theta_c,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle = \frac{-cS_c^2 - \theta_c^2}{S_c^2} \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 g + \frac{1}{S_c^2} \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 g + nH\theta_c.$$

Então  $\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle (p) = nH\theta_c(p)$ , pois  $\theta_c^2 + cS_c^2 = 1$ .  $\square$

O próximo resultado será crucial nas demonstrações dos teoremas do capítulo 3.

**Proposição 2.4.2.** (Alencar e Frensel, ver [3], p. 4) *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana orientada e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}^{n+1}$  uma imersão isométrica com curvatura média constante  $H$ . Então*

$$\Delta g = - \|B\|^2 g - nH\theta_c,$$

onde  $\Delta$  é o Laplaciano em  $M^n$ .

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial geodésico em  $p \in M^n$ . Vimos que o Laplaciano de uma função  $f$  neste referencial é dado por

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n e_i e_i f(p).$$

Logo, a função suporte  $g = \langle X, \eta \rangle$  satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta g(p) &= \sum_{i=1}^n e_i e_i \langle X, \eta \rangle (p) = \sum_{i=1}^n e_i (\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle) (p) \\ &= \sum_{i=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle + 2 \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle) (p). \end{aligned}$$

Usando os Lemas 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3, temos que

$$\Delta g(p) = (nH\theta_c - 2nH\theta_c - \|B\|^2 g) (p) = -\|B\|^2 g(p) - nH\theta_c(p).$$

□

O caso em que  $c = 0$  da proposição acima já tinha sido provado, ver, por exemplo, [4] p. 348.

## 2.5 A Fórmula de Minkowski da Função Suporte

A seguinte proposição é uma generalização da igualdade de Minkowski em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $c = 0$  e  $\theta_c = 1$ .

**Proposição 2.5.1.** (*Heintze, ver [11], p. 397*) *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta e seja  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica. Então*

$$\int_M H g dA = - \int_M \theta_c dA, \quad (2.18)$$

onde  $H$  é a curvatura média de  $x$ .

*Demonstração.* Sejam  $X$  o vetor posição com origem em  $p_0$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial geodésico em  $p \in M^n$ . Denotemos por  $X^T$  e  $X^N$  as componentes tangente e normal, respectivamente, do vetor  $X$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle X^N, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle &= \langle X - X^T, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^T + (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle \\
&= \langle X - X^T, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle \\
&= \langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle - \langle X^T, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle \\
&= \langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle.
\end{aligned}$$

Visto que  $\langle X^N, e_i \rangle = 0$ , obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} X^N, e_i \rangle = -\langle X^N, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = -\langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle.$$

Dessa forma, o divergente do campo  $X^T$  é dado por

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X^T &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^T, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle.
\end{aligned}$$

Mostraremos que  $\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle = n\theta_c$  e  $\sum_{i=1}^n \langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle = nHg$ . De fato, usando (2.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} (S_c \operatorname{grad} r(p)), e_i \rangle \\
&= \theta_c \sum_{i=1}^n \langle \operatorname{grad} r(p), e_i \rangle^2 + S_c \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \operatorname{grad} r(p), e_i \rangle \\
&= \theta_c \sum_{i=1}^n \langle \operatorname{grad} r(p), e_i \rangle^2 + \theta_c \sum_{i=1}^n (1 - \langle \operatorname{grad} r(p), e_i \rangle^2) \\
&= n\theta_c.
\end{aligned}$$

Como  $\sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, \eta \rangle \eta = nH\eta$ , segue-se que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle X, (\nabla_{e_i} e_i)^N \rangle &= \left\langle X, \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} e_i)^N \right\rangle = \langle X, nH\eta \rangle \\ &= nH \langle X, \eta \rangle = nHg. \end{aligned}$$

Portanto, o divergente da componente tangente de  $X$  é dado por

$$\operatorname{div} X^T = n\theta_c + nHg.$$

Usando o Teorema de Stokes e o fato de  $M^n$  ser uma variedade compacta sem bordo, obtemos

$$\int_M Hg dA = - \int_M \theta_c dA.$$

□

**Observação 2.5.1.** *Na verdade Heintze (ver [11], p. 397) prova esta proposição para imersões cujos espaços ambientes possuem curvaturas seccionais limitadas superiormente por uma constante. Neste caso, o resultado obtido é uma desigualdade tipo Minkowski.*

## Capítulo 3

# Hipersuperfícies cujas Geodésicas Tangentes omitem um Conjunto Não-Vazio

Sejam  $M^n$  uma variedade diferenciável e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica. Para todo ponto  $p \in M^n$ , seja  $(\mathcal{Q}_c^n)_p$  a hipersuperfície totalmente geodésica de  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$  tangente a  $x(M^n)$  em  $x(p)$ .

Denotemos por

$$W = \mathcal{Q}_c^{n+1} - \bigcup_{p \in M} (\mathcal{Q}_c^n)_p$$

o conjunto dos pontos omitidos pelas hipersuperfícies totalmente geodésicas tangentes a  $x(M^n)$ .

**Exemplo 3.0.1.** Hiperbolóide de uma folha em  $\mathbb{R}^3$ .

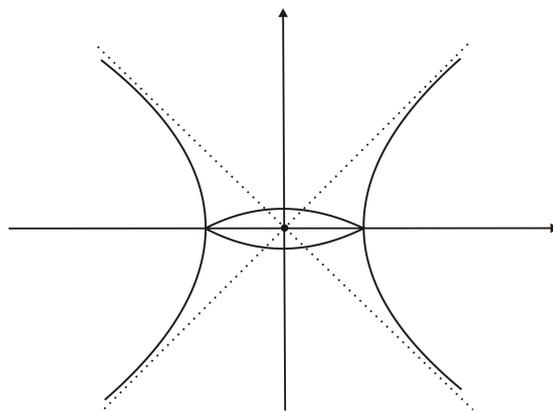


Figura 3.1:  $W = \{0\}$ .

**Exemplo 3.0.2.** Esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$ .

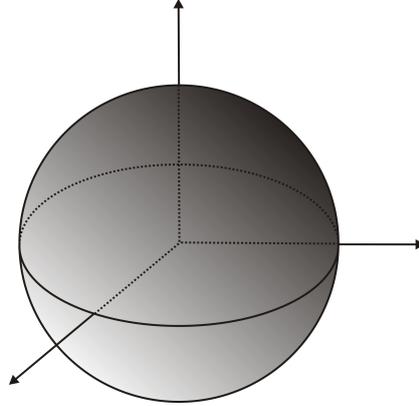


Figura 3.2:  $W = \{p \in \mathbb{R}^3; \|p\| < 1\}$ .

Neste capítulo, estudaremos as imersões para as quais o conjunto  $W$  é não-vazio. Analisaremos separadamente as hipersuperfícies completas não-compactas e as hipersuperfícies compactas.

### 3.1 Hipersuperfícies Completas

Nesta seção estabeleceremos resultados que caracterizam as hipersuperfícies completas cujo  $W$  é aberto e não-vazio. Além disso, apresentaremos uma relação entre  $W$  e a estabilidade de uma imersão mínima. Os resultados destas seção foram obtidos por Hilário Alencar e Kátia Frensel, ver [3].

**Teorema 3.1.1.** (Alencar e Frensel, ver [3], p. 6) *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana completa e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica mínima. Se o conjunto  $W$  é aberto e não-vazio, então  $x$  é totalmente geodésica.*

*Demonstração.* Dado  $p_0 \in W$ , seja  $X$  o vetor posição com origem em  $p_0$ . Como  $W$  é não-vazio, existe  $p_0 \in W$  tal que

$$g(p) = \langle X(p), \eta(p) \rangle \neq 0$$

para qualquer  $p \in M$ .

Seja  $d = \inf \{g(p); p \in M\}$ . Suponhamos que este ínfimo é atingido, isto é, existe um ponto  $p \in M$  tal que  $g(p) = d$ . Usando a Proposição 2.4.1 com  $H = 0$ , segue-se que

$$\Delta g + \|B\|^2 g = 0. \tag{3.1}$$

Portanto, usando o *Princípio do Máximo*, ver [8], p. 6, vemos que  $g$  é constante e igual a  $d$ . Logo  $\|B\| \equiv 0$ , isto é,  $x$  é totalmente geodésica.

Para concluirmos a demonstração, basta provarmos que existe um ponto  $p \in M$  tal que  $g(p) = d$ . Para isto, consideremos uma seqüência de pontos  $\{p_k\}_{k>0}$  em  $M$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(p_k) = d.$$

Trataremos separadamente os casos em que  $c = 0$ ,  $c > 0$  e  $c < 0$  e, além disso, vamos admitir, sem perda de generalidade, que  $c = 1$  e  $c = -1$  quando, respectivamente,  $c > 0$  e  $c < 0$ .

(i) Suponhamos que  $c = 0$ .

Para cada ponto  $p_k$  em  $M$ , consideremos o ponto  $q_k$ , interseção de  $T_{p_k}M$  com a reta perpendicular a  $T_{p_k}M$  que passa por  $p_0 \in W$ .

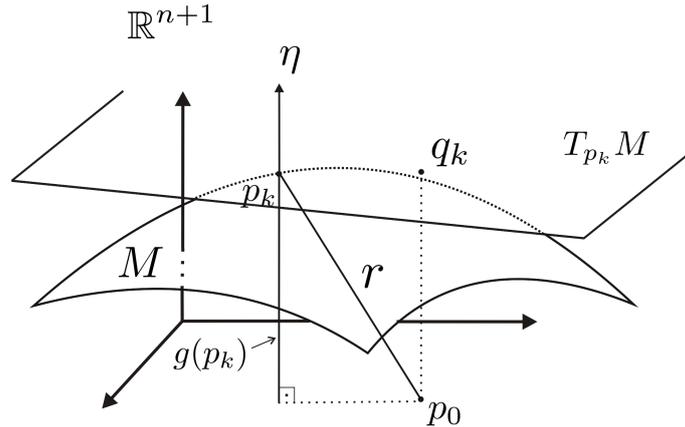


Figura 3.3: Caso  $c = 0$ .

Como  $d(q_k, p_0) = g(p_k)$ , ver seção 1 do capítulo 2, é uma seqüência limitada, então  $\{q_k\}$  também é limitada. Por Bolzano-Weierstrass,  $\{q_k\}$  possui uma subseqüência  $\{q_{k_j}\}$  que converge para algum  $q \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Visto que  $q$  é o limite de uma seqüência  $\{q_{k_j}\}$  em  $T_{p_k}M$  e  $\bigcup_{p \in M} T_pM$  é fechado em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , pois  $W = \mathbb{R}^{n+1} - \bigcup_{p \in M} T_pM$  é aberto, segue-se que  $q \in T_pM$ , para algum ponto  $p \in M$ .

Como  $d(p_0, q) = d$  e  $d \leq d(p_0, T_pM) \leq d(p_0, q) = d$ , então

$$g(p) = d(p_0, T_pM) = d.$$

(ii) Agora vamos provar o teorema para o caso em que  $c = 1$ .

Para cada ponto  $p_k \in M$ , seja  $s_k$  a projeção ortogonal de  $p_0$  ao hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+2}$  que contém  $(\mathcal{Q}_1^n)_{p_k}$  e seja  $q_k$  a interseção de  $(\mathcal{Q}_1^n)_{p_k}$  com a reta que passa pela origem e pelo ponto  $s_k$ .

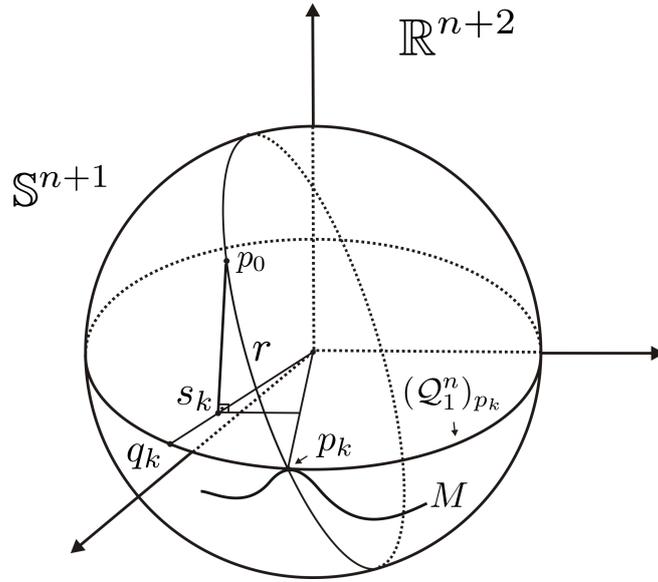


Figura 3.4: Caso  $c = 1$ .

Para todo  $k$ ,

$$q_k \in \mathcal{Q}_c^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1} \text{ e } s_k \in \mathbb{B}^{n+2} = \{p \in \mathbb{R}^{n+2}; \|p\| < 1\}.$$

Logo, existe uma subsequência  $\{k_j\}$  tal que  $\{q_{k_j}\}$  converge para um ponto  $q \in \mathbb{S}^{n+1}$  e  $\{s_{k_j}\}$  converge para um ponto  $s \in \overline{\mathbb{B}^{n+2}}$ .

Temos que  $\bigcup_{p \in M} (\mathcal{Q}_1^n)_p$  é fechado em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , pois  $W$  é aberto, então  $q \in (\mathcal{Q}_1^n)_p$  para algum  $p \in M$ . Além disso, como  $s_k$  e  $q_k$  são colineares para todo  $k$ , segue-se que  $s$  e  $q$  são colineares. Logo,  $s$  pertence ao hiperplano  $L_p$  de  $\mathbb{R}^{n+2}$  que contém  $(\mathcal{Q}_1^n)_p$ .

Como  $g(p_k) = d(s_k, p_0)$  e

$$d \leq g(p) = d(p_0, L_p) \leq d(p_0, s) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(s_k, p_0) = d,$$

então  $g(p) = d$ .

(iii) Para provarmos o teorema no caso em que  $c = -1$ , utilizaremos o modelo do hiperbolóide visto no Capítulo 2. Definiremos o ponto  $s_k$  de forma análoga ao caso anterior.

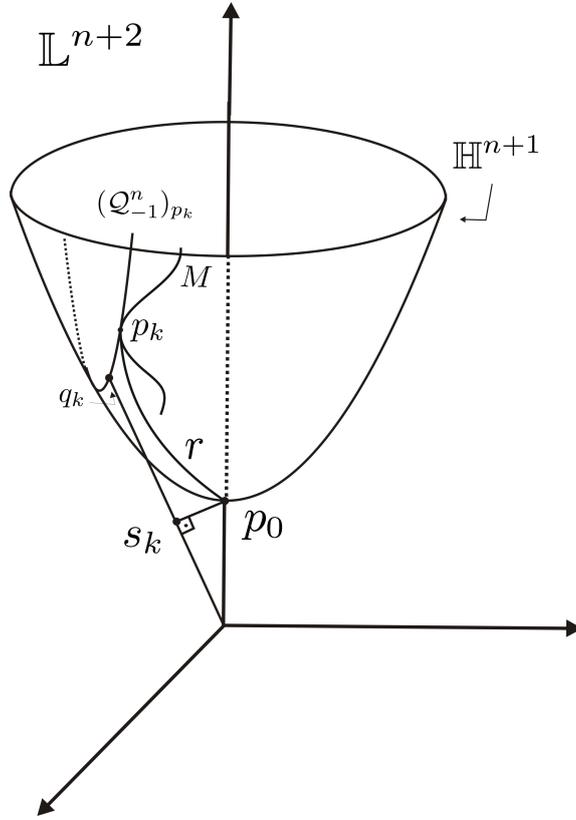


Figura 3.5: Caso  $c = -1$ .

Usando (2.2), temos que a distância Euclidiana de  $p_0$  ao hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+2}$  que passa pela origem e contém  $(Q_{-1}^n)_{p_k}$  é dada por

$$\|s_k - p_0\| = \frac{g(p_k)}{\sqrt{1 + 2g(p_k)^2}},$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana.

**Afirmção 3.1.**  $\langle\langle s_k, s_k \rangle\rangle < 0$ , onde  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  é o produto interno de Lorentz.

*Demonstração.* Com efeito, suponhamos que  $\langle\langle s_k, s_k \rangle\rangle \geq 0$ . Escrevemos  $s_k = (s_{k_1}, \dots, s_{k_{n+2}})$ .

Assim,  $s_{k_1}^2 + \dots + s_{k_{n+1}}^2 - s_{k_{n+2}}^2 \geq 0$ . Logo,

$$s_{k_1}^2 + \dots + s_{k_{n+1}}^2 \geq s_{k_{n+2}}^2. \quad (3.2)$$

Como  $s_k$  e  $s_k - p_0$  são perpendiculares, temos que

$$\langle s_k, s_k - p_0 \rangle = 0.$$

Daí,

$$\langle s_k, s_k \rangle = \langle s_k, p_0 \rangle = (s_{k_1}, \dots, s_{k_{n+2}}) \cdot (0, \dots, 0, 1) = s_{k_{n+2}}.$$

Portanto, usando (3.2), vem que

$$s_{k_{n+2}} = \langle s_k, s_k \rangle = s_{k_1}^2 + \dots + s_{k_{n+1}}^2 + s_{k_{n+2}}^2 \geq 2s_{k_{n+2}}^2,$$

ou seja,

$$s_{k_{n+2}} \leq \frac{1}{2}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \|s_k - p_0\|^2 &= \langle s_k - p_0, s_k - p_0 \rangle \\ &= \langle s_k, s_k - p_0 \rangle - \langle p_0, s_k - p_0 \rangle \\ &= -\langle p_0, s_k \rangle + \langle p_0, p_0 \rangle \\ &= -s_{n+2} + 1 \\ &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo,  $\frac{g(p_k)^2}{1 + 2g(p_k)^2} \geq \frac{1}{2}$ . Isto contradiz o fato de  $\frac{g(p_k)^2}{1 + 2g(p_k)^2} < \frac{1}{2}$ , para qualquer  $g(p_k)$ . E a igualdade só seria válida se, e somente se,  $g(p_k) \equiv 0$ . Logo,  $\langle\langle s_k, s_k \rangle\rangle < 0$ .  $\square$

Seja  $\lambda_k > 0$  tal que

$$\lambda_k^2 \langle\langle s_k, s_k \rangle\rangle = -1$$

e seja  $q_k = \lambda_k s_k$  a interseção de  $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_{p_k}$  com a reta que passa pela origem e por  $s_k$ .

Temos que  $\{s_k\}_{k \geq 0}$  é uma seqüência limitada. Passando a uma subseqüência se necessário, existe um ponto  $s$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s.$$

Podemos provar, como acima, que  $\langle\langle s, s \rangle\rangle < 0$ , pois  $s$  e  $s - p_0$  são perpendiculares e  $\|s - p_0\|^2 = \frac{d^2}{1 + 2d^2}$ .

Como a seqüência  $\left\{ -\frac{1}{\langle\langle s_k, s_k \rangle\rangle} \right\}_{k > 0}$  é limitada inferiormente por uma constante positiva e  $\|q_k\|^2 = -\frac{\|s_k\|^2}{\langle\langle s_k, s_k \rangle\rangle}$ , vemos que a seqüência  $\{q_k\}_{k > 0}$  é limitada.

Seja  $\{q_{k_j}\}_{k_j}$  uma subsequência que converge para um ponto  $q \in \mathbb{H}^{n+1}$ . Como  $\cup_{p \in M} (\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$  é fechado, pois seu complementar  $W$  é aberto, e  $q_k \in (\mathcal{Q}_{-1}^n)_{p_k}$ , para todo  $k$ , temos que  $q \in (\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$ , para algum  $p \in M$ . Além disso, como  $s$  e  $q$  são colineares, segue que  $s$  pertence ao hiperplano  $L_p$  de  $\mathbb{R}^{n+2}$  que contém  $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$ .

Logo,  $g(p) = d$ . De fato,

$$\frac{g(p)}{\sqrt{1 + 2g(p)^2}} = d(p_0, L_p) \leq \|s - p_0\| = \frac{d}{1 + 2d^2},$$

onde  $d(p_0, L_p)$  é a distância Euclidiana de  $p_0$  a  $L_p$ .  $\square$

Quando o conjunto  $W$  é não-vazio e não possui a condição de ser aberto, obtemos o seguinte resultado para os casos em que  $c \leq 0$ .

**Proposição 3.1.1.** *(Alencar e Frensel, ver [3], p. 8) Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana completa e seja  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ ,  $c \leq 0$ , uma imersão isométrica mínima. Se  $W$  é não-vazio, então  $x$  é estável.*

*Demonstração.* Sejam  $p_0 \in W$  e  $X$  o vetor posição com origem em  $p_0$ . Como  $p_0 \in W$ , podemos escolher uma orientação  $\eta$  em  $M$  de modo que a função suporte  $g = \langle X, \eta \rangle$  seja positiva.

Como  $x$  é mínima, usando a Proposição 2.4.1, temos que

$$\Delta g + \|B\|^2 g = 0.$$

Em [7], Teorema 1, Fischer Colbrie e Schoen provaram que um operador do tipo  $\Delta + q$ , onde  $q : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável, é positivo definido se, e só se, existe uma função diferenciável positiva  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Delta f + qf = 0$ . Como  $g = \langle X, \eta \rangle$  é positiva e  $\Delta g + \|B\|^2 g = 0$ , o operador  $\Delta + \|B\|^2$  é positivo definido, isto é,

$$\int_M (-f\Delta f - \|B\|^2 f^2) dA = \langle -(\Delta + \|B\|^2) f, f \rangle > 0,$$

para toda função  $f : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Então, se  $c \leq 0$ ,

$$\int_M (-f\Delta f - (nc + \|B\|^2) f^2) dA > 0,$$

para toda função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de suporte compacto não-nula em  $M^n$ .

Como a curvatura de Ricci de  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$  é  $nc$ , obtemos que

$$\int_M (-f\Delta f - (Ric(\eta) + \|B\|^2) f^2) dA > 0.$$

Usando a Proposição 1.2.2, temos que  $x$  é estável.  $\square$

**Observação 3.1.1.** A proposição acima não vale para  $c > 0$ . Hasanis e Koutroufiotis provaram em [10], Corolário 2, que se  $M^2$  é uma superfície completa e  $x : M^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$  é uma imersão isométrica mínima com  $W$  não-vazio, então  $x$  é totalmente geodésica e  $x$  é um mergulho. Em particular,  $M^2$  é compacta e  $x$  não é estável.

**Observação 3.1.2.** Em [9], p. 57, J. Gomes deu exemplos de hipersuperfícies mínimas estáveis em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ ,  $c < 0$ , que não são totalmente geodésicas. Para estas hipersuperfícies,  $W$  é vazio. Logo, a recíproca da proposição acima não é válida.

## 3.2 Hipersuperfícies Compactas

O próximo resultado, sobre imersões mínimas em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , foi obtido por Pogorelov, ver [13]. Daremos uma demonstração diferente da prova original, usando as técnicas de Alencar e Frensel, ver [3].

**Teorema 3.2.1.** (Pogorelov, ver [13]) *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta, orientável e  $x : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  uma imersão isométrica mínima. Se  $W$  é não-vazio, então  $x$  é totalmente geodésica.*

*Demonstração.* Sejam  $p_0 \in W$  e  $X$  o vetor posição com origem em  $p_0$ . Logo, usando a Proposição 2.4.1 com  $H = 0$  e o Teorema de Stokes para uma hipersuperfície compacta sem bordo, obtemos

$$0 = \int_M \Delta g dA = - \int_M \|B\|^2 g dA.$$

Agora como  $W$  é não-vazio, existe  $p_0 \in W$  tal que

$$g(p) = \langle X(p), \eta(p) \rangle \neq 0$$

para qualquer  $p \in M$ . Então temos que  $\|B\| \equiv 0$ , ou seja,  $x$  é totalmente geodésica.  $\square$

Alencar e Frensel provaram que nas condições do Teorema 3.2.1 com  $H$  diferente de zero obtemos que  $M^n$  é isométrica a uma esfera geodésica.

Para provarmos este resultado, precisaremos do seguinte:

**Lema 3.2.1.** (Fórmula de Newton) *Sejam  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação linear e  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  sua matriz associada a um par de bases qualquer de  $\mathbb{R}^n$ . Então*

$$\|A\|^2(p) \geq \frac{1}{n} (\text{tr} A)^2.$$

*Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $A = \alpha I$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* É claro que

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \geq \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_{ii} \right)^2 = \frac{1}{n} (\text{tr}A)^2.$$

Além disso, a igualdade na primeira desigualdade ocorre se, e somente se,  $a_{ij} = 0$ , para  $i \neq j$ . Na segunda desigualdade, desigualdade entre as médias aritmética e quadrática, obtém-se a igualdade se, e somente se,  $a_{11} = \dots = a_{nn}$ .  $\square$

**Teorema 3.2.2.** (Alencar e Frensel, ver [3], p. 11) *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta, orientável e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica com curvatura média constante não-nula  $H$ . Então  $W$  é não-vazio se, e somente se,  $x$  é umbílica, isto é,  $x(M^n)$  é uma esfera geodésica em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $p_0 \in W$  e  $X$  o vetor posição com origem em  $p_0$ . Como  $W$  é não-vazio, existe  $p_0 \in W$  tal que

$$g(p) = \langle X(p), \eta(p) \rangle \neq 0$$

para qualquer  $p \in M$ .

Assim, usando a Proposição 2.4.2 e o Teorema de Stokes para uma hipersuperfície compacta sem bordo, obtemos

$$0 = \int_M \Delta g dA = - \int_M (\|B\|^2 g + nH\theta_c) dA.$$

Logo,  $\int_M \|B\|^2 g dA = - \int_M nH\theta_c dA$ . Mas, por (2.18), temos que

$$\int_M \|B\|^2 g dA = - \int_M nH\theta_c dA = \int_M nH^2 g dA,$$

isto é,

$$\int_M (\|B\|^2 - nH^2) g dA = 0.$$

Usando o Lema 3.2.1 e o fato de  $g$  ser não-nula, temos que  $\|B\|^2 = nH^2$ , ou seja, a imersão  $x$  é umbílica.

Se  $x(M^n)$  é uma esfera geodésica em  $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ , então é claro que  $W$  é não-vazio.  $\square$

**Observação 3.2.1.** São conhecidos exemplos de toros não mergulhados em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média constante, ver Wente [15], e de imersões  $x : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ ,  $c \leq 0$ , com curvatura média constante não umbílicas, ver Gomes [9] e Hsiang [12]. Em todos estes exemplos o conjunto  $W$  é vazio.

Em [5], Barbosa, do Carmo e Eschenburg provaram o seguinte resultado:

*Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta, orientável e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica com curvatura média constante não-nula. Então  $x$  é estável se, e só se,  $x$  é umbílica.*

Como consequência deste resultado, obtemos o seguinte corolário do Teorema 3.2.2:

**Corolário 3.2.1.** *Sejam  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta, orientável e  $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$  uma imersão isométrica com curvatura média constante não-nula. Então  $W$  é não-vazio se, e somente se,  $x$  é estável.*

# Referências Bibliográficas

- [1] Alencar, H. *Hipersuperfícies Mínimas de  $\mathbb{R}^{2m}$  invariantes*. Tese de Doutorado (IMPA), 1988.
- [2] Alencar, H. e Batista, M. *Hypersurfaces with higher order mean curvature vanishes*. Preprint, (2010).
- [3] Alencar, H. e Frensel, K. *Hypersurfaces whose tangent geodesic omit a nonempty set*. Differential Geometry-A Symposium in Honour of Manfredo do Carmo. Logman Scientific & Technical, New York, p. 1-13, 1991.
- [4] Barbosa, J. L. e do Carmo, M. P. *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*. Mathematische Zeitschrift, v. 185, p. 339-353, 1984.
- [5] Barbosa, J. L.; do Carmo, M. P. e Eschenburg, J. *Stability of hypersurfaces of Riemannian manifolds with constant mean curvature*. Mathematische Zeitschrift, v. 197, p. 123-138, 1988.
- [6] do Carmo, M. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, 4ª Edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [7] Fischer Colbrie, D. e Schoen, R. *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature*. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 33, p. 199-211, 1980.
- [8] Frensel, K. *O Princípio da Tangência e Aplicações*. Dissertação de Mestrado (IMPA), 1983.
- [9] Gomes, J. M. *Sobre hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço hiperbólico*. Tese de Doutorado (IMPA), 1984.
- [10] Hasanis, T. e Koutroufiotis, D. *A property of complete minimal surfaces*. Transaction of the American Mathematical Society, v. 281, p. 833-843, 1984.

- [11] Heintze, E. *Extrinsic upper bounds for  $\lambda_1$* . *Mathematische Annalen*, v. 280, p. 389-402, 1988.
- [12] Hsiang, W. Y.; Teng, Z. H. e Yu, W. C. *New examples of constant mean curvature immersions of  $(2k-1)$ -spheres into Euclidean  $2k$ -space*. *Annals of Mathematics*, v. 117, p. 609-625, 1983.
- [13] Pogorelov, A.V. *On minimal hypersurfaces in spherical space*. *Soviet Mathematics Doklady*, v. 13, p. 291-292, 1972.
- [14] Ratcliffe, J. G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics 149, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [15] Wente, H. C. *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 121, p. 193-243, number 1, 1986.

# Índice Remissivo

- Aplicação exponencial, 12
- Campo de vetores, 8, 9
  - paralelos, 11
- Colchete, 10
- Conexão
  - afim, 10
  - compatível com a métrica, 11
  - de Levi-Civita, 11
  - Riemanniana, 11
  - simétrica, 10
- Curvatura, 15
  - de Ricci, 16
  - escalar, 16
  - média, 19
  - seccional, 15
- Curvaturas principais, 19
- Derivada covariante, 10
- Direções principais, 19
- Divergência, 13
- Espaço de Lorentz, 27
- Fórmula
  - de Minkowski, 42
  - de Newton, 52
- Função
  - área, 21
  - suporte, 24
  - volume, 21
- Geodésica, 11
  - minimizante, 12
- Gradiente, 13
- Hipersuperfície, 8
- Imersão, 8
  - estável, 22
  - geodésica, 20
  - isométrica, 10
  - mínima, 20
  - totalmente geodésica, 20
  - umbílica, 20
- Laplaciano, 14
  - da Função Suporte, 32
- Métrica
  - induzida, 10
  - Riemanniana, 9
- Norma da segunda forma fundamental, 19
- Princípio do Máximo, 47
- Produto interno de Lorentz, 27
- Referencial geodésico, 12
- Segunda forma fundamental, 17
- Variação
  - da imersão, 20
  - normal, 21
  - que fixa o bordo, 20
  - que preserva volume, 21
- Variedade
  - completa, 12
  - Riemanniana, 10
- Vetor posição, 23

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)