

Laboratório Nacional de Computação Científica
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Modelagem Multiescala de Escoamento Multifásico em
Meios Poroelásticos Fraturados**

Por

Riedson Baptista

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**MODELAGEM MULTIESCALA DE ESCOAMENTO
MULTIFÁSICO EM MEIOS POROELÁSTICOS FRATURADOS**

Riedson Baptista

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO
NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUI-
SITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

Prof. Márcio Arab Murad, Ph.D

(Presidente)

Prof. Abimael Fernando Dourado Loula, D.Sc.

Prof. Christian Moyne, Ph.D

Prof. Hélio Pedro Amaral Souto, Ph.D

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL
AGOSTO DE 2007

Baptista, Riedson

B222m Modelagem multiescala de escoamento multifásico em meios poroelásticos fraturados / Riedson Baptista. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2007.

XIII, 74 p. : il.; 29 cm

Orientador: Márcio Arab Murad

Dissertação (M.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2007.

Ciência dos Materiais, Modelagem Multiescala, Homogeneização, Fluxo Bifásico, Poroelasticidade, Dupla Porosidade I. Murad, Márcio Arab. II. LNCC/MCT. III. Título.

CDD 620.116

“Sorte é quando preparação encontra
oportunidades”.

Lair Ribeiro.

À Rita, Eliete e Valéria.

Agradecimentos

Quando alcançamos uma conquista méritos nos são atribuídos. Más nunca estamos sozinho durante o percurso, sempre tem alguém nos ajudando de alguma forma. São a estas pessoas e instituições que dedico esta página compartilhando os méritos obtidos por este trabalho.

Primeiramente agradeço a Deus por tudo. Agradeço as três mulheres mais importantes da minha vida: Rita, Eliete e Valéria. Rita, minha mãe e pai, foi ela que, mesmo com muita dificuldade, conseguiu educar muito bem duas crianças que hoje são homem e mulher formados. Eliete, minha esposa e companheira, a mulher que quer crescer junto comigo. Valéria, a irmã que além de brigar com o irmão o apoia e é sempre referência de dedicação.

Aos companheiros de estudo, desde a graduação aos da sala 1A21, agradeço à: Sérgio Bento, Edinelço, Gerliane, Wagner, Paulo Ferreira, Lessandro, Gyslane, Allan, Cláudia Adams, Carlos Magno, Issac, Paulo C. Ferreira, Marcelo Barros, Demerson, Michael, Rosa Luz, Antônio Boness, Jesus Alexei, Gazoni e Sidarta.

Ao corpo de funcionários do LNCC agradeço às secretárias Ana Néri, Ana Paula e Angela pela eficiência e paciência em nos servir; ao Paulo da gráfica; aos bibliotecários Sérgio e Bárbara e a todos os funcionários da manutenção.

Agradeço ao Professor Christian Moyne pelo apoio concedido em pontos cruciais deste trabalho.

Ao Professor Márcio Arab Murad expresso meu eterno agradecimento por ter me orientado e acreditado que poderíamos concluir um trabalho tão desafiador.

Agradeço ao LNCC e ao CNPq por ter concedido condições física e financeira para a realização da pesquisa.

Resumo da Dissertação apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELAGEM MULTIESCALA DE ESCOAMENTO MULTIFÁSICO EM MEIOS POROELÁSTICOS FRATURADOS

Riedson Baptista

Agosto, 2007

Orientador: Márcio Arab Murad, Ph.D

Neste trabalho propomos um modelo a duas escalas para descrever escoamentos multifásicos em meios poroelásticos fraturados. A derivação do modelo macroscópico é obtida via técnica de homogeneização de estruturas periódicas aplicada ao modelo micromecânico que governa a microestrutura do meio composta por uma matriz poroelástica circundada por uma rede conexa de fraturas preenchidas por dois fluidos Newtonianos imiscíveis incompressíveis, tais como água e óleo. Neste contexto o nosso principal resultado consiste na obtenção de uma hierarquia de modelos macroscópicos com parâmetros efetivos. A teoria constitutiva que rege o comportamento destes parâmetros é construída via resolução dos problemas locais de fechamento que surgem do processo de mudança de escala. Dentre os parâmetros homogeneizados damos ênfase particular à lei constitutiva obtida para o tensor das tensões efetivas. Além do comportamento poroelástico com a deformação do esqueleto poroso, esta exhibe a dependência adicional com as tensões intermoleculares advindas da descontinuidade da saturação entre os sistemas de blocos e fraturas. Resultados computacionais dos problemas de célula locais, obtidos pelo método dos elementos finitos, são explorados na reconstrução das leis constitutivas dos coeficientes homogeneizados.

Abstract of Dissertation presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (M.Sc.)

MULTISCALE MODELING OF MULTI-PHASE FLOW IN FRACTURED POROELASTIC MEDIA

Riedson Baptista

August, 2007.

Advisor: Márcio Arab Murad, Ph.D

In this work we propose a model of two scales to describe the two-phase drainage in fractured poroelasty environment. The derivation of the macroscopic model is obtained through a technique of homogenization of periodic structures applied to the micromechanical model that governs the micro-structure of the environment composed by matrix poroelastic surrounded by a related net of fractures filled out by two Newtonian incompressible immiscible fluids, such as water and oil. In this context, our main result consists of obtaining a hierarchy of macroscopic models with effective parameters. The constituent theory that governs the behavior of these parameters is built through resolution of the local problems of closing that appear of the process of scale change. Among the homogenized parameters we give a particular emphasis to the constituent law obtained for the stress of the effective tensions. Besides the poroelastic behavior with the deformation of the porous skeleton this exhibits the additional dependence with the intermolecular tensions emerging of the discontinuity of the saturation between the systems of blocks and fractures. Numerical simulations of the local cells problems obtained by the method of the finite elements are explored in the reconstruction of the constituent laws of the homogenized coefficients.

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelagem Fenomenológica de Escoamento Bifásico em Meios Poroelásticos	7
2.1	Modelagem de Meios com Porosidade Simples	8
2.1.1	Balanço de Massa	8
2.1.2	Equação de equilíbrio para a mistura	9
2.1.3	Princípio das Tensões Efetivas	10
2.1.4	Lei de Darcy	12
2.1.5	Equação de Estado - Pressão Capilar	13
2.1.6	Problema macroscópico	13
2.2	Modelagem de Meios com Porosidade Dupla	15
3	Modelagem a Duas Escalas de Escoamentos Imiscíveis em Meios Poroelásticos com Dupla Porosidade	17
3.1	Modelo Micromecânico	18
3.2	Processo de Homogeneização	21
3.2.1	Re-escalamento das Equações Microscópicas	24
3.2.2	Expansão Assintótica	27
3.2.3	Variáveis não-oscilatórias	30
3.2.4	Lei de Darcy macroscópica	31
3.2.5	Problema de Fechamento Transiente nos Blocos	32
3.2.6	Balanço de Massa das Fases Fluidas	35

3.2.7	Balanco de Massa para a Porosidade	36
3.2.8	Equação de Equilíbrio Total	36
3.2.9	Resumo do Modelo em Duas Escalas	38
4	Modelos Reduzidos	40
4.1	Caso de Fraturas Totalmente Abertas	41
4.2	Modelo Quase-Estacionário	42
4.3	Aproximação de Richards	47
4.4	Meio Poroso Rígido	49
5	Resultados Numéricos	51
5.1	Formulação Variacional	51
5.2	Aproximação por Elementos Finitos	52
5.3	Simulações Computacionais	54
6	Conclusão	68
	Referências Bibliográficas	70

Lista de Figuras

Figura

2.1	Permeabilidade relativa de um sistema bifásico.	13
2.2	Dependência da pressão capilar com a saturação.	14
3.1	Caracterização das três escalas observacionais em meios porosos fis- surados.	19
3.2	Representação de um meio poroso fraturado com microestrutura periódica.	22
3.3	Célula elementar.	23
3.4	Domínios indexados pelo parâmetro perturbativo.	24
5.1	Geometrias de célula adotadas nas simulações: forma circular, elip- soidal e quártica.	54
5.2	Malhas não uniformes com 20x10 elementos bilineares e $n_f = 0,126$	54
5.3	Domínios Computacionais	55
5.4	Campo de deformação da matriz porosa sob a ação de uma força unitária.	56
5.5	Relações entre Pressão capilar e saturação dada por Udell (1985) nos microporos e fraturas.	57
5.6	Diferença entre as pressões média nas fraturas e blocos γ^0	57
5.7	Dependência da macroporosidade com relação a P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$	58
5.8	Tensão efetiva em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria circular e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$	59

5.9	Tensão efetiva em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria elíptica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,091$	60
5.10	Tensão efetiva em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria quártica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$	61
5.11	Deformação em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria circular e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$	62
5.12	Deformação em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria elíptica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,091$	62
5.13	Deformação em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria quártica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$	63
5.14	Coefficiente de retardamento em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria circular e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$	63
5.15	Coefficiente de retardamento em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria elíptica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,091$	64
5.16	Coefficiente de retardamento em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria quártica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$	64
5.17	Difusividade em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria circular e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$	65
5.18	Difusividade em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria elíptica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,091$	65
5.19	Difusividade em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria quártica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$	66
5.20	Difusividade em função de S_w^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria circular e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$	66
5.21	Difusividade em função de S_w^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria elíptica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,091$	67
5.22	Difusividade em função de S_w^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria quártica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$	67

Lista de Tabelas

Tabela

5.1	Valores adotados nas simulações numéricas	57
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Diversos corpos sólidos, encontrados na natureza ou construídos artificialmente, em sua quase totalidade são caracterizados por descontinuidades em seu interior as quais ocorrem em dimensões e frequências variáveis. Tais descontinuidades dão origem à presença de vazios ou poros, os quais podem estar preenchidos por um ou mais fluidos. Corpos sólidos com essas características são denominados meios porosos. Além de formações geológicas tais como rochas e solos, exemplos canônicos de meios porosos são sistemas biológicos, em particular cartilagens e ossos, e materiais artificiais tais como filtros, cerâmicas, etc. Devido ao vasto leque de aplicações a busca por soluções de problemas acoplados de natureza mecânica, química, física e biológica em meios porosos é genuinamente interdisciplinar e tem motivado pesquisadores de várias áreas do conhecimento, em especial Geomecânica, Ciência de Materiais, Engenharia de Petróleo, Meio Ambiente, Hidrologia, Biomecânica, Engenharia de Alimentos e Acústica.

Além da existência da microporosidade naturalmente originária dos processos de formação do meio geológico, diversos meios porosos tendem a sofrer rachaduras ou fraturas em sua estrutura levando ao surgimento de uma segunda estrutura porosa com propriedades díspares do sistema original. As fraturas, na sua maioria interconectadas, surgem orientadas em pelo menos duas direções subdividindo a formação geológica em blocos geológicos circundados por elas, caracterizando assim a morfologia de um meio poroso fraturado. A presença deste segundo nível de

porosidade inerente às fraturas provoca alterações substanciais na hidrodinâmica e no transporte comparado com o caso de meios ordinários com um único nível de porosidade (Pirson, 1953; Barenblatt *et al*, 1960; Warren & Root, 1963; Douglas & Arbogast, 1990; Zimmerman *et al*, 1993). Em particular, os blocos que contêm a microporosidade desempenham papel de sítios de armazenamento enquanto que, devido à sua maior permeabilidade, o sistema das fraturas constitui caminhos preferenciais para o escoamento. O problema natural que surge em meios com dupla porosidade consiste na derivação de modelos constitutivos que descrevem acuradamente o acoplamento entre as duas hidrodinâmicas e os transportes que ocorrem simultaneamente nos dois sub-sistemas. Classicamente tal acoplamento entre blocos e fraturas é governado por termos de fontes distribuídos no domínio que surgem nas leis de conservação de massa para cada fase. Historicamente modelos linearizados foram propostos para descrever este acoplamento onde o termo de fonte é dado simplesmente pela diferença entre as pressões dos fluidos nas fraturas e nos blocos (Pirson, 1953; Barenblatt *et al*, 1960; Warren & Root, 1963).

Posteriormente, modelos microestruturais para meios com porosidade dupla, postos simultaneamente em duas escalas, foram propostos por Arbogast & Douglas (1988), Douglas & Arbogast (1990), Arbogast (1992) e Zimmerman *et al* (1993). Ao contrário dos modelos linearizados puramente macroscópicos, o cômputo da troca de massa entre blocos e fraturas é feito via resolução dos problemas microscópicos postos no domínio dos blocos. Postulando uma geometria particular para os blocos, o problema é resolvido simultaneamente nas escalas macroscópica e microscópica onde a escala mais fina é explorada para calcular o termo de troca de massa entre os dois sistemas. Os modelos postos simultaneamente em duas escalas representam avanços consideráveis com relação às teorias linearizadas devido à forma mais precisa de representação do termo de troca de massa (Douglas & Arbogast, 1990).

Embora bastante desenvolvidos para meios rígidos, extensões dos modelos microestruturais de dupla porosidade para meios deformáveis encontram-se ainda

em fase de desenvolvimento. Dificuldades adicionais surgem resultantes do acoplamento entre a hidrodinâmica e a poromecânica que governa a evolução dos campos de tensão efetiva e deformação da matriz porosa.

A teoria clássica de poroelasticidade linear foi inicialmente proposta por Terzaghi (1942) para problemas de consolidação unidimensionais em meios porosos compostos por grãos elásticos incompressíveis. Subseqüentemente, Biot (1941) generaliza a teoria para problemas tridimensionais em meios porosos compostos por grãos elásticos compressíveis, incorporando os efeitos distorcionais na teoria de Terzaghi gerado pelas tensões de cisalhamento que atuam no esqueleto poroso. Além da componente desviadora no tensor das tensões efetivas, Biot & Willis (1957) generalizam o princípio de Terzaghi dando origem ao coeficiente de Biot-Willis, o qual descreve a compressibilidade dos grãos que compõem a matriz poroelástica.

A teoria de Biot constitui o pilar da Poromecânica e deu origem ao desenvolvimento de modelos não lineares e ao acoplamento hidromecânico, os quais incorporam efeitos de inelasticidade, grandes deformações e acoplamento eletroquímico em solos argilosos (Chen & Han, 1988). Em particular, para meios fraturados, Wilson & Aifantis (1982) estabelecem a conjunção entre o modelo de Biot e o acoplamento linearizado proposto por Barenblatt *et al* (1960) dando origem à teoria de consolidação de meios com dupla porosidade. Murad *et al* (2001) generalizam os modelos microestruturais propostos por Douglas & Arbogast (1990) e Zimmerman *et al* (1993) para incluir o acoplamento hidro-mecânico. Chamilco (2006) mostra a equivalência entre as equações postas simultaneamente em duas escalas e um modelo constitutivo viscoelástico para as tensões efetivas que exhibe efeitos de memória evanescente. A memória presente na lei constitutiva para as tensões efetivas é advinda da escala de tempo secundária associada à hidrodinâmica que ocorre no nível de porosidade secundário.

Os modelos microestruturais para meios deformáveis descritos acima foram derivados rigorosamente fazendo uso das técnicas de homogeneização de estruturas periódicas aplicadas à descrição micromecânica do meio. Embora consideráveis

avanços tenham sido obtidos no caso de escoamentos monofásicos, um dos grandes desafios que ainda persiste é a derivação precisa de modelos multiescala para escoamentos bifásicos em meios porosos deformáveis fraturados. Em particular, um dos problemas ainda em aberto é a representação precisa do princípio das tensões efetivas de Terzaghi para incorporar os efeitos da pressão capilar.

Historicamente a generalização do princípio das tensões efetivas para meios saturados por dois fluidos tem seguido caminhos tortuosos dando origem a diversas formas para sua interpretação. No caso de meios não saturados onde um dos fluidos é o ar, Bishop (1959) propõe o princípio de Terzaghi capturando indiretamente a importância da sucção no comportamento das tensões efetivas propondo a dependência do coeficiente de Biot-Willis na saturação. Avanços significativos na forma de representação do princípio das tensões efetivas para meios não saturados foram propostos por Fredlund & Morgenstern (1977). Ao contrário de Bishop tais autores postulam dependência constitutiva da deformação do esqueleto poroso em duas variáveis termodinamicamente independentes; a tensão de contato intergranular e a pressão capilar também conhecida como sucção. Posteriormente, Alonso *et al* (1990), Bolzon *et al* (1996) e Santagiuliana & Schrefler (2006) estendem a formulação de teoria de solos não saturados para meios elasto-plásticos. A teoria elasto-plástica proposta por Alonso *et al* (1990) deu origem ao famoso modelo de Barcelona onde a novidade é a dependência da superfície de plastificação com a sucção.

A dependência constitutiva da deformação da matriz porosa em duas variáveis termodinamicamente independentes (tensões intergranulares e sucção) foi validada experimentalmente em Fredlund & Morgenstern (1977), Alonso *et al* (1990) e Fredlund & Rahardjo (1993) e atualmente é bem respaldada e aceita pela comunidade de Geomecânica. Por outro lado, a generalização desta teoria para meios com dupla porosidade permanece um problema ainda em aberto. O objetivo deste trabalho é o de preencher esta lacuna. Para este fim fazemos uso da técnica de homogeneização de estruturas periódicas onde o modelo macroscópico é derivado

rigorosamente via análise assintótica das equações perturbadas postas nas escalas inferiores. Comparando com os modelos puramente macroscópicos a vantagem em utilizar a técnica de homogeneização reside na obtenção rigorosa das equações macroscópicas por propagação da informação proveniente da escala microscópica.

No contexto da modelagem multiescala estabelecemos uma hierarquia de modelos de porosidade dupla que incorporam a hipótese de quase-estacionariedade, onde os blocos estão em equilíbrio termodinâmico com as fraturas, e a aproximação de Richards onde a fase ar encontra-se a pressão atmosférica. Dentre os resultados homogeneizados obtidos damos ênfase particular a forma macroscópica do princípio das tensões efetivas onde mostramos que a disparidade entre as porosidades nos sistemas de blocos e fraturas dá origem a uma nova componente no princípio de Terzaghi fortemente dependente da pressão capilar. No contexto da modelagem multiescala a resposta constitutiva desta componente juntamente com a dos outros parâmetros efetivos é reconstruída via solução numérica dos problemas de célula microscópicos. As formas fracas dos problemas microscópicos são discretizadas pelo método dos elementos finitos e simulações numéricas das leis constitutivas dos parâmetros efetivos são obtidas ilustrando o potencial da modelagem multiescala proposta neste trabalho.

No Capítulo 2 abordamos de forma sucinta a modelagem clássica da poromecânica de meios não saturados (Fredlund & Morgenstern, 1977; Fredlund & Rahardjo, 1993; Alonso *et al.*, 1990; Santagiuliana & Schrefler, 2006; Ghafouri & Lewis, 1996).

No Capítulo 3 fazemos uso da técnica de homogeneização para derivar o modelo a duas escalas para o meio poroelástico fraturado saturado por dois fluidos Newtonianos imiscíveis. Neste contexto discutimos as características do acoplamento entre as escalas envolvidas e em particular as relações de fechamento para os parâmetros efetivos.

No Capítulo 4 definimos uma hierarquia de modelos multiescala fazendo hipóteses simplificadoras no caso geral a fim de reduzir a complexidade dos problemas

de fechamento envolvidos.

No Capítulo 5 apresentamos a simulação numérica dos problemas locais pelo método dos elementos finitos e reconstruímos as equações constitutivas dos parâmetros efetivos do modelo quase-estacionário. Para finalizar, apresentamos conclusões e perspectivas de desenvolvimento futuro.

Capítulo 2

Modelagem Fenomenológica de Escoamento Bifásico em Meios Poroelásticos

Iniciamos nosso trabalho apresentando uma breve revisão dos modelos clássicos de escoamento bifásico em meios poroelásticos lineares com um único nível de porosidade. Em seguida apresentamos as extensões propostas na literatura para meios com porosidade dupla. A modelagem será apresentada na escala de laboratório, onde uma mudança de escala a partir da escala do poro já foi efetuada e as fases fluida e sólida coexistem em cada ponto. As equações governantes são baseadas nas leis de conservação da massa para cada fase combinadas com as equações de momento linear representadas pela Lei de Darcy. O fechamento é estabelecido postulando uma equação de estado que relaciona as pressões nas fases fluidas e que dá origem ao conceito de pressão capilar (Bear, 1972; de Marsily, 1986).

O modelo hidrodinâmico é acoplado com a Poromecânica que governa os campos de deformação e tensão efetiva da matriz porosa. O modelo poromecânico é centrado nas generalizações do princípio das tensões efetivas de Terzaghi proposto originalmente para o escoamento monofásico (Fredlund & Rahardjo, 1993; Alonso *et al.*, 1990; Santagiuliana & Schrefler, 2006).

2.1 Modelagem de Meios com Porosidade Simples

Nesta seção apresentamos o modelo hidro-mecânico para meios com porosidade simples saturados por dois fluidos Newtonianos imiscíveis e incompressíveis. Consideramos Ω um domínio ocupado por um meio poroso homogêneo composto por uma matriz elástica linear constituída por grãos sólidos e incompressíveis saturados por dois fluidos imiscíveis. Efeitos gravitacionais, de inércia e de convecção induzidos pelo deslocamento da fase sólida são desprezados. Consideramos também a ausência de reações químicas e de fontes ou sorvedouros externos. No decorrer deste trabalho fazemos uso dos subíndices $\alpha = s, w, nw$ para representar as fases sólida, aquosa e não-aquosa respectivamente.

2.1.1 Balanço de Massa

Sob as hipóteses de ausência de troca de massa entre as fases e de fontes externas a forma local da conservação de massa para cada fase- α é dada por:

$$\frac{\partial \rho_\alpha^a}{\partial t} + \text{div}(\rho_\alpha^a \mathbf{v}_\alpha) = 0; \quad \alpha = s, w, nw \quad \text{em } \Omega \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{v}_\alpha$ é o campo de velocidade e ρ_α^a a massa específica aparente definida pela razão entre a massa da fase- α , M_α , e o volume total da mistura V_t . A massa específica da fase- α ρ_α é definida pela razão entre M_α e o volume da fase, V_α . Denotando o volume dos poros por V_p e o volume das partículas sólidas por V_s , o volume total da mistura é dado pela soma $V_t = V_p + V_s$. A porosidade é definida pela razão $\phi := V_p/V_t$ e conseqüentemente a fração de volume da fase sólida é dada por $V_s/V_t = 1 - \phi$. Uma vez que os poros são preenchidos pelas duas fases fluidas, temos que $V_p = V_w + V_{nw}$. A razão $s_\alpha = V_\alpha/V_p$ é denominada saturação da fase- α . Por definição $s_w + s_{nw} = 1$. Desta forma valem as relações:

$$\rho_\alpha^a = \frac{M_\alpha}{V_t} = \frac{M_\alpha}{V_\alpha} \frac{V_\alpha}{V_p} \frac{V_p}{V_t} = \rho_\alpha s_\alpha \phi, \quad \alpha = w, nw; \quad (2.2)$$

$$\rho_s^a = \frac{M_s}{V_t} = \frac{M_s}{V_s} \frac{V_s}{V_t} = \rho_s (1 - \phi). \quad (2.3)$$

Pela hipótese de incompressibilidade microscópica das fases, as massas específicas ρ_α são constantes. Usando (2.2) em (2.1) obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_\alpha \phi) + \operatorname{div}(s_\alpha \phi \mathbf{v}_\alpha) = 0; \quad \alpha = w, nw \quad \text{em } \Omega. \quad (2.4)$$

Note que ao contrário de meios rígidos, a porosidade ϕ evolui no tempo e conseqüentemente permanece inserida na derivada temporal do termo de capacitância em (2.4).

Para a fase sólida o campo de deslocamento $\mathbf{u}$ é adotado como variável primária. Desprezando os efeitos convectivos induzidos pela velocidade do sólido, $\mathbf{v}_s$, esta é dada unicamente pela derivada temporal Euleriana do deslocamento, $\mathbf{v}_s = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}$. Assim sob a hipótese de incompressibilidade, a Equação (2.1) juntamente com (2.3) fornece:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}[(1 - \phi)\dot{\mathbf{u}}] = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.5)$$

Para satisfazer o princípio da indiferença material, a velocidade de percolação Darciana de cada fase é definida relativa à velocidade da fase sólida $\dot{\mathbf{u}}$. Em função deste fluxo, a Equação (2.4) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_\alpha \phi) + \operatorname{div} \mathbf{v}_{D\alpha} + \operatorname{div}(s_\alpha \phi \dot{\mathbf{u}}) = 0; \quad \alpha = w, nw \quad \text{em } \Omega \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{v}_{D\alpha} := s_\alpha \phi (\mathbf{v}_\alpha - \dot{\mathbf{u}})$ é a velocidade de percolação de Darcy da fase- α relativa à fase sólida.

2.1.2 Equação de equilíbrio para a mistura

Na ausência de efeitos gravitacionais e de inércia, o tensor total de tensão $\mathbf{T}$ da mistura sólido/fluido satisfaz à equação de equilíbrio:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (2.7)$$

2.1.3 Princípio das Tensões Efetivas

Para o escoamento monofásico em meios poroelásticos lineares microscopicamente incompressíveis Terzaghi (1942) propôs o princípio das tensões efetivas. Tal princípio estabelece que as tensões elásticas que governam a compactação da matriz porosa, denominadas tensões efetivas $\boldsymbol{\sigma}$, são calculadas subtraindo-se a tensão do fluido ($-p\mathbf{I}$) da tensão total da mistura sólido/fluido (Terzaghi, 1942). Temos então:

$$\boldsymbol{\sigma} := \mathbf{T} + p\mathbf{I}. \quad (2.8)$$

Posteriormente, Biot (1955) generaliza o princípio de Terzaghi para três dimensões incluindo também o efeito de compressibilidade dos grãos que compõem a fase sólida. O resultado desta generalização pode ser representado através do princípio das tensões efetivas generalizado (Biot, 1941, 1955),

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T} + \alpha^* p\mathbf{I} \quad (2.9)$$

onde $\alpha^* = 1 - K/K_s$ é denominado de coeficiente de Biot-Willis o qual mede a parcela da pressão do fluido a ser subtraída de $\mathbf{T}$ para obtenção de $\boldsymbol{\sigma}$ e K e K_s os módulos volumétricos de bulk da matriz porosa drenada e não-drenada, respectivamente. Quando o módulo volumétrico dos grãos sólidos que compõem a matriz porosa K_s é muito maior do que o módulo volumétrico da matriz porosa drenada K , o meio é considerado microscopicamente incompressível, $\alpha^* = 1$ e conseqüentemente (2.8) é recuperada a partir de (2.9) (Biot & Willis, 1957).

Ao contrário dos escoamentos monofásicos onde o princípio de Terzaghi é bem estabelecido, extensões diferentes desta decomposição têm sido propostas para escoamentos multifásicos. Dentre as várias formas propostas a mais imediata é simplesmente a de preservar a forma para escoamento monofásico com a pressão p dada pela média das pressões das fases fluidas p_α ($\alpha = w, nw$) ponderada pelas saturações. Para sólidos microscopicamente incompressíveis temos então (Lewis & Schrefler, 1982; Schrefler & Scotta, 2001; Ehlers *et al*, 2004)

$$\boldsymbol{\sigma} := \mathbf{T} + (s_w p_w + s_{nw} p_{nw}) \mathbf{I}. \quad (2.10)$$

Diversas formas alternativas de (2.10) têm sido propostas na literatura para meios não saturados. Bishop (1959) sugere uma decomposição alternativa para a tensão efetiva na forma

$$\boldsymbol{\sigma} := (\mathbf{T} + p_w \mathbf{I}) - \chi(p_a - p_w) \mathbf{I} \quad (2.11)$$

onde $\chi = \chi(s_w)$ e p_a é a pressão do ar. Apesar de muito difundida a tensão efetiva, proposta por Bishop, (2.11) foi posteriormente criticada por muitos autores (Alonso *et al*, 1990; Santagiuliana & Schrefler, 2006) por considerar $\boldsymbol{\sigma}$ função apenas da deformação da matriz porosa. Ao postular dependência única entre a deformação e a tensão efetiva, Bishop negligencia a compactação da rocha induzida pela variação da saturação. Este efeito altera as forças intermoleculares entre as fases que por sua vez induzem à compactação da matriz.

Posteriormente, Fredlund e colaboradores (Fredlund & Morgenstern, 1977; Fredlund & Rahardjo, 1993) propõem uma teoria constitutiva mais realista para descrever a compactação de um meio poroelástico não saturado. Ao contrário do caso monofásico onde a deformação da rocha é governada unicamente pelo estado das tensões efetivas, Fredlund propôs o estado de deformação descrito termodinamicamente por duas variáveis independentes escolhidas entre $(\mathbf{T} + p_w \mathbf{I})$, $(\mathbf{T} + p_a \mathbf{I})$ e $(p_a - p_w) \mathbf{I}$. No caso linearizado a equação constitutiva para as tensões efetivas é dada por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) + \beta(p_a - p_w) \mathbf{I} \quad (2.12)$$

onde $\mathcal{C} = C_{ijkl}$ é o módulo de elasticidade, $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) = \nabla^s \mathbf{u}$, $\beta := \frac{E}{H(1-2\nu)}$, sendo E o módulo de Young, ν o coeficiente de Poisson e H o módulo de elasticidade da estrutura do solo com respeito à mudança em $(p_a - p_w)$.

Ao contrário de Bishop a Equação (2.12) postula uma dependência adicional da tensão efetiva com a pressão capilar definida pela diferença $(p_a - p_w)$. A

idéia de duas variáveis termodinamicamente independentes para meios poroelásticos lineares foi posteriormente estendida para o caso não linear por Alonso *et al* (1990), Cui *et al* (1995), Wheeler & Sivakumar (1995) os quais desenvolveram modelos constitutivos elasto-plásticos não lineares para solos não saturados tomando como variáveis independentes $(\mathbf{T} + p_a \mathbf{I})$ e $(p_a - p_w) \mathbf{I}$. Recentemente outras formas de decomposição foram postuladas substituindo $(\boldsymbol{\sigma} - p_a \mathbf{I})$ por $(\boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I})$ com $p = s_w p_w + s_a p_a$. Esta formulação alternativa permite reproduzir a decomposição para o caso monofásico (2.8) como um caso particular do bifásico.

2.1.4 Lei de Darcy

A percolação dos fluidos é governada pela Lei de Darcy para a velocidade de percolação relativa ao movimento do sólido estendida pelo conceito de permeabilidade relativa (de Marsily, 1986; Bear, 1972). Na ausência de forças de corpo temos

$$\mathbf{v}_{D\alpha} := s_\alpha \phi (\mathbf{v}_\alpha - \dot{\mathbf{u}}) = -\lambda_\alpha(s_w) \nabla p_\alpha; \quad \alpha = w, nw \quad (2.13)$$

onde, $\lambda_\alpha(s_w) = \frac{k k_{r\alpha}(s_w)}{\mu_\alpha}$ é a mobilidade da fase- α , $k = k(\phi)$ a permeabilidade intrínseca do meio poroso, μ_α a viscosidade da fase- α e $k_{r\alpha}(s_w)$ é a permeabilidade relativa a qual descreve a interferência que uma fase exerce sobre o fluxo da outra. Para a permeabilidade intrínseca k é comumente utilizada a relação de Kozeny-Carman (Bear, 1972; Udell, 1985)

$$k = \frac{\phi^3}{180(1 - \phi)^2} d_m^2 \quad (2.14)$$

onde d_m é o diâmetro médio dos poros. A Figura 2.1 ilustra a permeabilidade relativa em função da saturação da água apresentada por de Marsily (1986). Para o fluxo bifásico água/ar Udell (1985) utiliza as relações $k_{rw} = s_w^3$ e $k_{ra} = (1 - s_w)^3$ para as permeabilidades relativas da água e ar respectivamente.

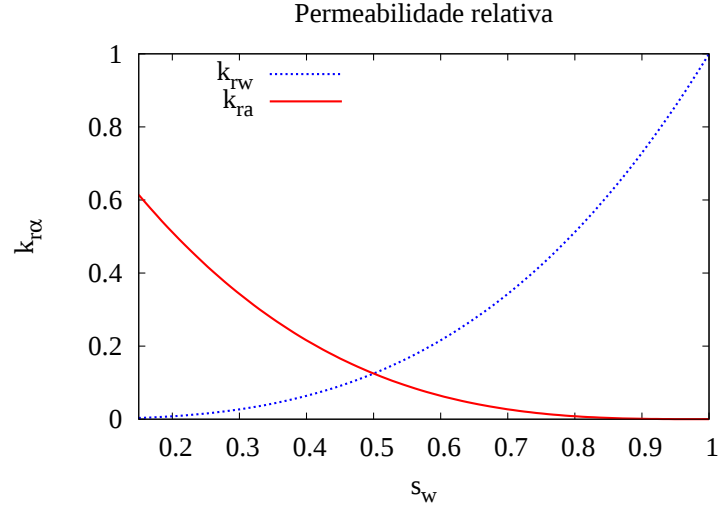


Figura 2.1: Permeabilidade relativa de um sistema bifásico.

2.1.5 Equação de Estado - Pressão Capilar

Para fecharmos o sistema de EDP's que governam o problema fazemos uso da termodinâmica do equilíbrio e postulamos uma equação de estado para a diferença entre as pressões das fases, fisicamente denominada de pressão capilar a qual é dada em função da saturação (Bear, 1972; Udell, 1985; de Marsily, 1986)

$$p_c(s_w) = p_{nw} - p_w. \quad (2.15)$$

A pressão capilar é uma função tipicamente decrescente de s_w como mostra a Figura 2.2 (Udell, 1985). Há que ressaltar que a terminologia empregada para esta grandeza não é universal. Por exemplo, na teoria de meios porosos não-saturados a pressão capilar é freqüentemente denotada por sucção (Bishop, 1959; Fredlund & Morgenstern, 1977; Alonso *et al*, 1990; Fredlund & Rahardjo, 1993; Delwyn *et al*, 1998; Santagiuliana & Schrefler, 2006).

2.1.6 Problema macroscópico

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira regular $\partial\Omega$ de normal unitária orientada externamente $\mathbf{n}$ uma região macroscópica fixa do espaço, ocupada por um meio poroso elástico microscopicamente incompressível, saturado por dois fluidos Newtonianos incompressíveis imiscíveis. Considerando $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$, $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset$

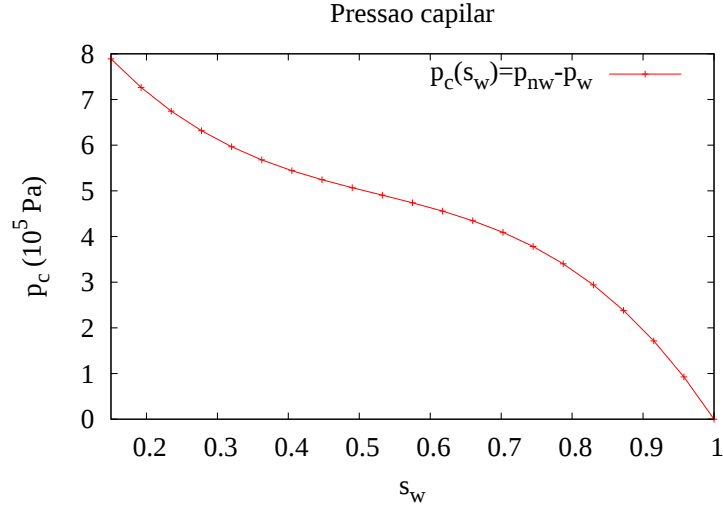


Figura 2.2: Dependência da pressão capilar com a saturação.

com $\partial\Omega_1$ denotando uma subfronteira rígida impermeável e $\partial\Omega_2$ uma interface aberta para a atmosfera sujeita a um carregamento externo $\mathbf{h}$, o problema consiste em:

Dadas as funções $k(\phi)$, $k_{r\alpha}(s_w)$, $p_c(s_w)$, $\beta(s_w)$ e o módulo de elasticidade $\mathcal{C}$ achar os campos $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, p_w, p_{nw}, \mathbf{v}_{Dw}, \mathbf{v}_{Dnw}, s_w, \phi\}$ satisfazendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \boldsymbol{\sigma} - \nabla[s_w p_w + (1 - s_w) p_{nw}] = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta(p_{nw} - p_w) \mathbf{I} \\ \mathbf{v}_{D\alpha} = -\lambda_\alpha(s_w) \nabla p_\alpha; \quad \alpha = w, nw \\ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}((1 - \phi) \dot{\mathbf{u}}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(s_\alpha \phi) + \text{div} \mathbf{v}_{D\alpha} + \text{div}(s_\alpha \phi \dot{\mathbf{u}}) = 0; \quad \alpha = w, nw \\ p_c(s_w) = p_{nw} - p_w \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega \quad (2.16)$$

Sujeito às condições de contorno e iniciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = 0; \quad \mathbf{v}_{D\alpha} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \alpha = w, nw; \quad \text{sobre } \partial\Omega_1 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h}; \quad p_w = 0, \quad \alpha = w, nw; \quad \text{sobre } \partial\Omega_2 \\ s_w = s_{ini}; \quad \phi = \phi_{ini}; \quad \text{div} \mathbf{u} = 0; \quad \text{em } \Omega, \quad t = 0 \end{array} \right.$$

Na teoria de poroelasticidade é suposto que a mistura sólido-fluido responde elasticamente no instante inicial de carregamento. Como o fluido e o sólido que

constitui a matriz são assumidos incompressíveis, a restrição interna $\text{div} \mathbf{u} = 0$ é comumente imposta aos dados iniciais do problema evolutivo (Murad *et al*, 2001).

2.2 Modelagem de Meios com Porosidade Dupla

Ao contrário dos modelos de porosidade dupla para escoamento multifásico em meios rígidos, que já se encontram bem consolidados, a descrição deste fenômeno em meios deformáveis ainda está em fase de desenvolvimento e necessita de aperfeiçoamento. Os modelos propostos na literatura (Elsworth & Bai, 1992; Lewis & Ghafouri, 1997; Pao & Lewis, 2002) fazem uso da hidrodinâmica descrita pelas equações apresentadas na seção anterior em cada subsistema (bloco-fratura) e termos de troca de massa linearizados, baseados na diferença entre as pressões dos fluidos nos dois subsistemas, são postulados. Para meios com porosidade dupla a lei de conservação de massa para a fase- α é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_i s_{\alpha i}) + \phi_i s_{\alpha i} \text{div} \dot{\mathbf{u}} - \text{div} \left(\frac{k_i k_{r\alpha i}}{\mu_{\alpha i}} \nabla p_{\alpha i} \right) + (-1)^i \Gamma_{\alpha i} = 0; \quad \alpha = w, nw$$

onde $i = 1, 2$ representam os subdomínios da matriz porosa e fraturas respectivamente. Sendo $\bar{\gamma}$ um parâmetro geométrico (Warren & Root, 1963), o termo de fonte/sorvedouro de massa devido à troca com o outro subsistema é dado por (Zimmerman *et al*, 1996; Lewis & Ghafouri, 1997; Pao & Lewis, 2002)

$$\Gamma_{\alpha i} = \bar{\gamma} \frac{k_i k_{r\alpha i}}{\mu_{\alpha i}} (p_{\alpha 1} - p_{\alpha 2}).$$

As hidrodinâmicas nos subsistemas são acopladas por uma generalização do princípio das tensões efetivas (2.10). Para meios localmente compressíveis esta extensão é feita postulando a existência de dois coeficientes de Biot-Willis α_1^* e α_2^* associados às pressões médias dos fluidos nos blocos p_1 e fraturas p_2 . Neste contexto a tensão efetiva é definida da forma (Desbarats *et al*, 1999; Pao & Lewis, 2002)

$$\boldsymbol{\sigma} := \mathbf{T} + (\alpha_1^* p_1 + \alpha_2^* p_2) \mathbf{I} \quad (2.17)$$

onde $\alpha_1^* = K/K_f - K/K_m$ e $\alpha_f^* = 1 - K/K_f$ sendo K e K_f os módulos volumétricos de bulk do meio fraturado drenado e não drenado e K_m o módulo da matriz porosa do meio na ausência das fraturas (Pao & Lewis, 2002). Quando as pressões médias dos fluidos nas matrizes e fraturas são iguais ou quando o meio não é fraturado $K_m = K_f$ e conseqüentemente o tensor dado por (2.17) coincide com o proposto por Biot & Willis (1957) dado em (2.9).

Dado o caráter fenomenológico puramente macroscópico que sustenta as generalizações mencionadas acima, resta ainda espaço para o desenvolvimento de novas formulações que possam capturar as correlações existentes entre a descrição dos fenômenos de troca de massa e a decomposição da tensão total com os fenômenos microestruturais. No capítulo a seguir apresentamos os primeiros passos nesta direção.

Capítulo 3

Modelagem a Duas Escalas de Escoamentos Imiscíveis em Meios Poroelásticos com Dupla Porosidade

A modelagem a duas escalas tem por objetivo obter o sistema de equações macroscópicas via propagação da informação constitutiva proveniente da micro-escala, onde ocorrem as flutuações devido à presença das heterogeneidades. A técnica de mudança de escala utilizada neste trabalho consiste em *homogeneizar* estruturas localmente periódicas postulando equações constitutivas na escala microscópica e, fazendo uso da análise assintótica, obter o modelo macroscópico com parâmetros efetivos. Quando comparado com o modelo puramente macroscópico descrito no capítulo anterior, a modelagem multiescala fornece informações adicionais relacionadas com a resposta constitutiva dos parâmetros efetivos, as quais são obtidas por resolução dos problemas locais de fechamento (Sanchez-Palencia, 1980; Auriault, 1990).

Apresentamos a seguir as equações que modelam o acoplamento hidromecânico microscópico entre os sistemas de blocos e fraturas. Na sequência mostramos o desenvolvimento para a derivação do modelo macroscópico de dupla porosidade via perturbação do modelo microscópico e o seu acoplamento com os problemas de célula locais.

3.1 Modelo Micromecânico

Meios porosos fraturados com arranjos localmente periódicos são caracterizados por três escalas naturais (Figura: 3.1). A escala mais fina do problema (microescala) é a escala observacional dos microporos e grãos elásticos incompressíveis residente no interior dos blocos poroelásticos. A escala intermediária, denominada mesoescala, corresponde ao nível de resolução onde os blocos são vistos como um meio contínuo homogêneo acoplado por condição de interface com o sistema de fraturas (Douglas & Arbogast, 1990). Finalmente a macroescala refere-se a resolução onde os dois sistemas aparecem superpostos compondo o meio poroso homogeneizado (Figura: 3.1).

Dada a alta complexidade do problema na microescala onde não conhecemos a posição das interfaces entre os dois fluidos, cujo movimento é governado pelo problema de Stokes, assumimos que uma primeira homogeneização foi efetuada nos microporos conduzindo às leis de Darcy para as velocidades de percolação dos fluidos. No contexto usual da técnica de “up-scaling” para meios com dupla porosidade a homogeneização será tratada da meso para a macroescala. Por conveniência a mesoescala será denominada de microescala a qual corresponde a escala mais fina do processo de homogeneização.

Em princípio consideramos que as fraturas contém detritos sólidos elásticos incompressíveis de tal forma que em cada domínio o modelo microscópico é descrito pela Poromecânica de meios de porosidade simples, porém com parâmetros físicos descontínuos através da interface bloco/fratura. Para cada subsistema o acoplamento hidromecânico é governado pelas equações apresentadas no capítulo anterior, com a exceção da equação constitutiva para a tensão efetiva do sólido que por simplicidade é substituída por uma lei linear que não incorpora os efeitos da pressão capilar.

Seja $\Omega = \Omega_m \cup \Omega_f$ o domínio microscópico composto pela união disjunta de subdomínios ocupados pelos subsistemas de blocos de matriz porosa Ω_m e fraturas Ω_f . Cada subsistema é composto por dois fluidos Newtonianos incompressíveis

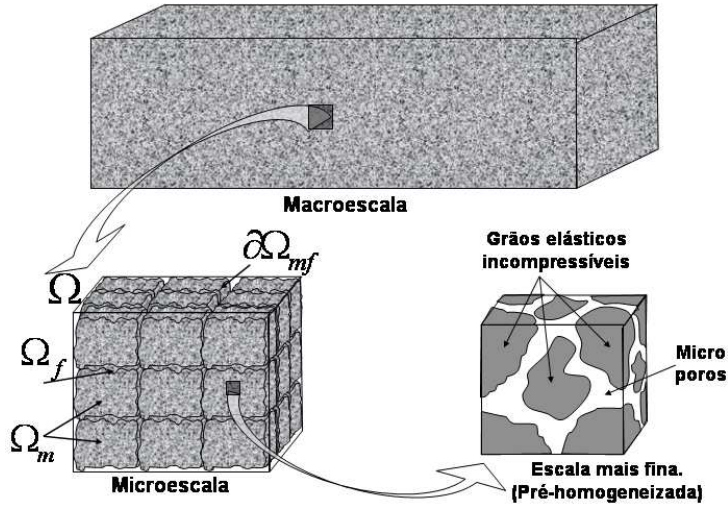


Figura 3.1: Caracterização das três escalas observacionais em meios porosos fissurados.

imiscíveis que coexistem em cada ponto com uma matriz poroelástica formada por grãos elásticos incompressíveis. Nos restringiremos ao caso onde as forças de corpo e de inércia são desprezíveis e a fase sólida sofre pequenas deformações.

Como podemos observar, a fim de manter a periodicidade local requerido para o subsequente processo homogeneização, coordenadas Lagrangeana com origem na fase sólida são mais adequados para esta tarefa. Não obstante assumimos o movimento do sólido muito lento, tais que a derivada material seguindo a velocidade do sólido pode ser identificado com a derivada local de Euler no tempo. Logo, vamos negligenciar a convecção induzida pela velocidade da fase sólida, ou seja, desprezamos os termos envolvendo $\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla$. Sob esta premissa, o balanço de massa para a fase sólida e para as fases fluidas dadas em (2.16) se reduzem à

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi}{\partial t} + (1 - \phi) \operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}}) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t}(s_\alpha \phi) + \operatorname{div} \mathbf{v}_{D\alpha} + s_\alpha \phi \operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Para simplificar a notação, no desenvolvimento a seguir designamos por letras minúsculas e maiúsculas com os índices m e f para as variáveis e parâmetros nas matrizes porosas e fraturas, respectivamente.

De acordo com o modelo (2.16) para sistemas com porosidade simples, assumindo a independência das tensões efetivas microscópicas com a pressão capilar $\boldsymbol{\sigma}_m = \mathcal{C}_m \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_m)$ e adotando as Equações (3.1), em termos das variáveis $(s_w, p_w, p_{nw}, p, \phi, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{Dw}, \mathbf{v}_{Dnw}, \boldsymbol{\sigma}_m)$ as equações governantes do acoplamento hidromecânico nos blocos poroelásticos são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_m - \nabla p = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_m = \mathcal{C}_m \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_m) \\ p = s_w p_w + s_{nw} p_{nw} \\ \mathbf{v}_{D\alpha} = -\lambda_w(s_w) \nabla p_\alpha; \quad \alpha = w, nw \\ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + (1 - \phi) \operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}}_m) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(s_\alpha \phi) + \operatorname{div} \mathbf{v}_{D\alpha} + s_\alpha \phi \operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}}_m) = 0; \quad \alpha = w, nw \\ p_c(s_w) = p_{nw} - p_w \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega_m, \quad t > 0 \quad (3.2)$$

De forma análoga, em termos das variáveis $(S_w, P_w, P_{nw}, P, \Phi, \mathbf{u}_f, \mathbf{V}_{Dw}, \mathbf{V}_{Dnw}, \boldsymbol{\sigma}_f)$ as equações governantes do acoplamento hidromecânico nas fraturas poroelásticas são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f - \nabla P = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_f = \mathcal{C}_f \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_f) \\ P = S_w P_w + S_{nw} P_{nw} \\ \mathbf{V}_{D\alpha} = -\Lambda_\alpha(S_w) \nabla P_\alpha; \quad \alpha = w, nw \\ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (1 - \Phi) \operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}}_f) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(S_\alpha \Phi) + \operatorname{div} \mathbf{V}_{D\alpha} + S_\alpha \Phi \operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}}_f) = 0; \quad \alpha = w, nw \\ P_c(S_w) = P_{nw} - P_w. \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega_f, \quad t > 0 \quad (3.3)$$

Para completar o sistema de equações que governa o problema acoplado na microescala, postulamos condições iniciais e de contorno na interface bloco/fratura Γ_{mf} . Pelas leis de Newton temos continuidade do fluxo de massa, da componente normal do tensor de Cauchy e da pressão, e pela condição de não deslizamento da fase sólida as iterações entre bloco e fraturas são dadas por:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{D\alpha} \cdot \mathbf{n}_m = \mathbf{V}_{D\alpha} \cdot \mathbf{n}_m; & \alpha = w, nw \\ [\boldsymbol{\sigma}_m - p\mathbf{I}] \mathbf{n}_m = [\boldsymbol{\sigma}_f - P\mathbf{I}] \mathbf{n}_m & \text{sobre } \Gamma_{mf} \\ p_\alpha = P_\alpha; & \alpha = w, o \\ \mathbf{u}_m = \mathbf{u}_f \end{cases}$$

onde $\mathbf{n}_m$ é o vetor unitário normal orientado exteriormente a Ω_m .

Finalmente, postulamos condições iniciais do tipo:

$$\begin{cases} S_w = S_{ini}; & \Phi = \Phi_{ini}; & \text{div} \mathbf{u}_f = 0 & \text{em } \Omega_f, & t = 0 \\ s_w = s_{ini}; & \phi = \phi_{ini}; & \text{div} \mathbf{u}_m = 0 & \text{em } \Omega_m, & t = 0. \end{cases}$$

Na próxima seção aplicamos a técnica de mudança de escala ao modelo microscópico objetivando a derivação do modelo homogeneizado de dupla porosidade.

3.2 Processo de Homogeneização

O processo de homogeneização tem por objetivo obter assintoticamente as equações homogeneizadas macroscópicas como limite de uma família de modelos perturbados das equações microscópicas. A técnica consiste em introduzir uma perturbação no modelo microscópico por intermédio de um parâmetro ε que governa o nível de heterogeneidades do meio associado à escala observacional. Ao introduzirmos este parâmetro no modelo microscópico geramos uma seqüência de problemas perturbados indexados por ε . Ao invés de resolver estes problemas intermediários o objetivo é obter o problema limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$. No caso onde o meio poroso apresenta uma separação de escalas bem definida ($\varepsilon \ll 1$), o modelo homogeneizado é bem posto e governado por equações locais (Sanchez-Palencia, 1980).

Para efetuarmos a técnica de mudança de escala idealizamos o meio poroso fraturado de tal forma que este possa ser reproduzido pela replicação periódica de uma célula elementar $\mathbf{Q}$ de comprimento característico microscópico l (Figura: 3.2). Denotando L o comprimento característico do domínio macroscópico Ω e fazendo uso da hipótese de separação de escalas, definimos o parâmetro ε da forma $\varepsilon := l/L \ll 1$.

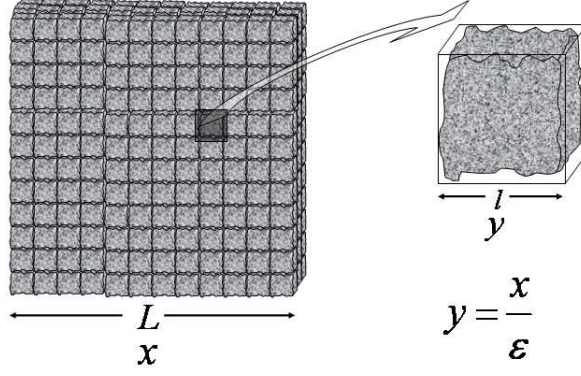


Figura 3.2: Representação de um meio poroso fraturado com microestrutura periódica.

Caracterizamos a geometria da célula elementar $\mathbf{Q}$ por um bloco de matriz porosa $\mathbf{Q}_m$ e os macro poros na sua vizinhança $\mathbf{Q}_f$. A interface comum entre o bloco e as fraturas é denotada por $\partial\mathbf{Q}_{mf}$ tal como mostrado na Figura 3.3. Note que a conectividade das fases sólida e fluida é requerida para que haja transmissão das tensões efetivas através do contato direto entre os blocos poroelásticos e os escoamentos dos fluidos residentes nos macroporos. Tal propriedade só é satisfeita em três dimensões.

Para cada ε consideramos o domínio perturbado Ω^ε reconstruído pela replicação da microcélula $\mathbf{Q}^\varepsilon$ congruente à célula unitária de referência $\mathbf{Q}$. Da mesma forma, os subdomínios Ω_m^ε e Ω_f^ε juntamente com a interface Γ_{mf}^ε são formados pela união dos domínios de células $\mathbf{Q}_m^\varepsilon$, $\mathbf{Q}_f^\varepsilon$ e as interfaces $\partial\mathbf{Q}_{mf}^\varepsilon$ respectivamente.

A razão $\varepsilon = l/L$ quantifica o “encolhimento” da microestrutura e das heterogeneidades relativas ao tamanho da janela de observação do fenômeno. Para $\varepsilon = 1$ temos o modelo microscópico original. À medida que L aumenta passamos a ter mais células ocupando o domínio de observação, e cada um desses arranjos é ε^3 vezes menor do que o original (Figura: 3.4). O ε -modelo em Ω^ε consiste simplesmente de equações escalonadas no domínio reconstruído pela união das células $\mathbf{Q}^\varepsilon$. O objetivo é obter o limite do problema quando $\varepsilon \rightarrow 0$. A Figura 3.4 ilustra o

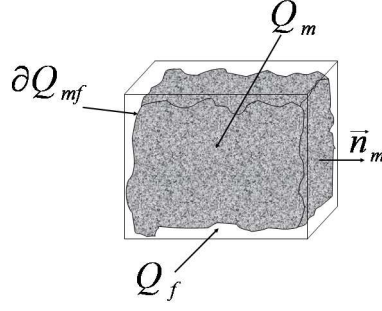


Figura 3.3: Célula elementar.

domínio Ω^ε para vários valores de ε .

Fazendo uso da hipótese de separação de escala ($l/L \ll 1$), introduzimos dois sistemas de coordenadas $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ díspares entre si, de maneira que $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{y}$. A variável $\mathbf{y}$, denominada variável rápida, representa a coordenada espacial microscópica que permite descrever a escala das heterogeneidades do meio. A variável $\mathbf{x}$, denominada variável lenta, descreve o comprimento representativo do comportamento macroscópico do sistema onde suas propriedades variam suavemente. Dada a seqüência de problemas indexados pelo parâmetro ε , cada grandeza física f^ε é tratada da forma $f^\varepsilon = f^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$. No contexto da teoria de homogeneização postulamos a expansão assintótica para f^ε na forma:

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = f^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon f^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \varepsilon^2 f^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \dots \quad (3.4)$$

onde as funções f^i para $i = 1, \dots$, são periódicas na variável $\mathbf{y}$.

Fazendo uso da regra da cadeia e da relação entre as escalas $\mathbf{y} = \varepsilon^{-1} \mathbf{x}$, os operadores diferenciais são representados da forma

$$\nabla = \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y; \quad \text{div} = \text{div}_x + \frac{1}{\varepsilon} \text{div}_y. \quad (3.5)$$

O desenvolvimento assintótico (3.4) juntamente com a representação (3.5) dos operadores diferenciais são introduzidos no problema microscópico e equações nas sucessivas potências de ε são coletadas. Por intermédio do processo assintótico $\varepsilon \rightarrow 0$ as equações macroscópicas são obtidas tomando-se a média volumétrica

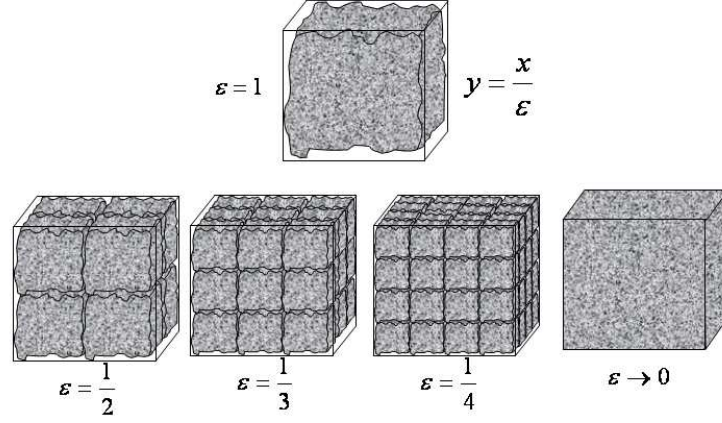


Figura 3.4: Domínios indexados pelo parâmetro perturbativo.

no domínio da célula unitária $\mathbf{Q}$ e a dependência na variável rápida é eliminada. Além da derivação do modelo homogeneizado, problemas locais de fechamento postos em $\mathbf{Q}_m$ e $\mathbf{Q}_f$ são obtidos e suas soluções fornecem as respostas constitutivas dos coeficientes efetivos do modelo macroscópico (Sanchez-Palencia, 1980). Informações contidas nestes problemas locais são de fundamental importância e devem ser exploradas na construção das leis constitutivas macroscópicas.

3.2.1 Re-escalamento das Equações Microscópicas

Para que as equações homogeneizadas representem fielmente a mudança de escala do modelo micromecânico, é necessário que os coeficientes sejam escalonados apropriadamente como função do parâmetro ε (Mei & Auriault, 1989). Para meios com porosidade dupla, o correto re-escalamento das condutividades hidráulicas dos blocos e fissuras é crucial para representar corretamente a disparidade entre as mobilidades $\lambda_\alpha(s_w)$ e $\Lambda_\alpha(S_w)$. Segundo a análise proposta por Douglas & Arbogast (1990), o escalonamento apropriado preserva o fluxo de massa entre o sistema de fraturas e blocos à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$. Este fluxo é dado por,

$$\int_{\partial\Omega_m^\varepsilon} \lambda_\alpha(s_w) \nabla p_\alpha \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{\Omega_m^\varepsilon} \operatorname{div} [\lambda_\alpha(s_w) \nabla p_\alpha] \, dV; \quad \alpha = w, nw.$$

Nosso objetivo é escalonar λ_α de forma que o fluxo não se degenere quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Para este fim aplicamos uma mudança de domínio de integração. Sendo $\mathbf{Q}_m^\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Q}_m$, o fluxo de cada bloco em Ω_m^ε é dado por

$$\int_{\mathbf{Q}_m^\varepsilon} \operatorname{div} [\lambda_\alpha(s_w) \nabla p_\alpha] \, d\omega.$$

Sendo $\omega \in \mathbf{Q}_m^\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Q}_m$ segue que $\omega = \varepsilon \zeta$ com $\zeta \in \mathbf{Q}_m$. Pela regra da cadeia temos $\nabla_\omega = \varepsilon^{-1} \nabla_\zeta$ e $\operatorname{div}_\omega = \varepsilon^{-1} \operatorname{div}_\zeta$. Logo o fluxo calculado na célula de referência $\mathbf{Q}_m$ é dado por

$$\int_{\mathbf{Q}_m} \varepsilon^{-1} \operatorname{div} [\lambda_\alpha(s_w) \varepsilon^{-1} \nabla p_\alpha] \varepsilon^3 \, d\zeta$$

onde ε^3 é o Jacobiano da transformação que mapeia $\mathbf{Q}_m^\varepsilon$ em $\mathbf{Q}_m$. Notando que em Ω_m^ε existe um número de blocos da ordem de ε^{-3} , o fluxo resultante em Ω_m^ε é dado por,

$$\int_{\Omega_m^\varepsilon} \operatorname{div} [\lambda_\alpha(s_w) \nabla p_\alpha] \, d\zeta = \varepsilon^{-3} \int_{\mathbf{Q}_m} \varepsilon^{-1} \operatorname{div} [\lambda_\alpha(s_w) \varepsilon^{-1} \nabla p_\alpha] \varepsilon^3 \, d\omega; \quad \alpha = w, nw.$$

Assim, a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$ o fluxo resultante em Ω_m^ε tende a divergir a menos que $\lambda_\alpha(s_w)$ seja escalonado por ε^2 . Fazendo uso deste argumento a forma reescalorada da lei de Darcy nos blocos para a fase- α é dada por,

$$\mathbf{v}_{D\alpha m} = -\varepsilon^2 \lambda_\alpha(s_w) \nabla p_\alpha; \quad \alpha = w, nw. \quad (3.6)$$

Usando este re-escalonamento em (3.2) e (3.3), as equações perturbadas são reescritas da forma:

Sistema de Blocos

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_m^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_m^\varepsilon = \mathcal{C}_m \mathcal{E}(\mathbf{u}_m^\varepsilon) \\ p^\varepsilon = s_w^\varepsilon p_w^\varepsilon + (1 - s_w^\varepsilon) p_{nw}^\varepsilon \\ \mathbf{v}_{D\alpha}^\varepsilon = -\varepsilon^2 \lambda_\alpha(s_w^\varepsilon) \nabla p_\alpha^\varepsilon; \quad \alpha = w, nw \\ -\frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial t} + (1 - \phi^\varepsilon) \operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}}_m^\varepsilon) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (s_\alpha^\varepsilon \phi^\varepsilon) + \operatorname{div} \mathbf{v}_{D\alpha}^\varepsilon + s_\alpha^\varepsilon \phi^\varepsilon \operatorname{div}(\mathbf{u}_m^\varepsilon) = 0; \quad \alpha = w, nw \\ p_c^\varepsilon(s_w^\varepsilon) = p_{nw}^\varepsilon - p_w^\varepsilon. \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega_m^\varepsilon, \, t > 0 \quad (3.7)$$

Sistema de Fraturas

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f^\varepsilon - \nabla P^\varepsilon = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_f^\varepsilon = \mathcal{C}_f \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_f^\varepsilon) \\ P^\varepsilon = S_w^\varepsilon P_w^\varepsilon + (1 - S_w^\varepsilon) P_{nw}^\varepsilon \\ \mathbf{V}_{D\alpha}^\varepsilon = -\Lambda_\alpha(S_w^\varepsilon) \nabla P_\alpha^\varepsilon; \quad \alpha = w, nw \\ -\frac{\partial \Phi^\varepsilon}{\partial t} + (1 - \Phi^\varepsilon) \operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}}_f^\varepsilon) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(S_\alpha^\varepsilon \Phi^\varepsilon) + \operatorname{div} \mathbf{V}_{D\alpha}^\varepsilon + S_\alpha^\varepsilon \Phi^\varepsilon \operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}}_f^\varepsilon) = 0; \quad \alpha = w, nw \\ P_c^\varepsilon(S_w^\varepsilon) = P_{nw}^\varepsilon - P_w^\varepsilon \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega_f^\varepsilon, \quad t > 0 \quad (3.8)$$

com condições de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{D\alpha}^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_{D\alpha}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}; \quad \alpha = w, o \\ [\boldsymbol{\sigma}_m^\varepsilon - p^\varepsilon \mathbf{I}] \mathbf{n} = [\boldsymbol{\sigma}_f^\varepsilon - P^\varepsilon \mathbf{I}] \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma_{mf}^\varepsilon \\ p_\alpha^\varepsilon = P_\alpha^\varepsilon; \quad \alpha = w, o \\ \mathbf{u}_m^\varepsilon = \mathbf{u}_f^\varepsilon \end{array} \right. \quad (3.9)$$

e condições iniciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_w^\varepsilon = S_{ini}; \quad \Phi^\varepsilon = \Phi_{ini}; \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_f^\varepsilon = 0 \quad \text{em } \Omega_f^\varepsilon; \quad t = 0 \\ s_w^\varepsilon = s_{ini}; \quad \phi^\varepsilon = \phi_{ini}; \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_m^\varepsilon = 0 \quad \text{em } \Omega_m^\varepsilon; \quad t = 0. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Em nosso desenvolvimento subsequente fazemos uso dos clássicos teoremas da média volumétrica (Whitaker, 1999). Sejam f_β^ε e $\mathbf{g}_\beta^\varepsilon$ ($\beta = m, f$), funções escalares e vetoriais definidas em $\mathbf{Q}_\beta^\varepsilon$, com normal unitária exterior $\mathbf{n}_\beta$. Denotando $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}$ a velocidade da interface bloco/fratura em $\partial \mathbf{Q}_{mf}^\varepsilon$, os teoremas da média volumétrica para f_β^ε e $\mathbf{g}_\beta^\varepsilon$ tomam a seguinte forma (Whitaker, 1986, 1999):

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{Q}^\varepsilon|} \int_{\mathbf{Q}_\beta^\varepsilon} \frac{\partial f_\beta^\varepsilon}{\partial t} dy &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|\mathbf{Q}^\varepsilon|} \int_{\mathbf{Q}_\beta^\varepsilon} f_\beta^\varepsilon dy \right) - \frac{1}{|\mathbf{Q}^\varepsilon|} \int_{\partial \mathbf{Q}_{mf}^\varepsilon} f_\beta^\varepsilon \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_\beta dy; \\ \frac{1}{|\mathbf{Q}^\varepsilon|} \int_{\mathbf{Q}_\beta^\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{g}_\beta^\varepsilon dy &= \operatorname{div} \left(\frac{1}{|\mathbf{Q}^\varepsilon|} \int_{\mathbf{Q}_\beta^\varepsilon} \mathbf{g}_\beta^\varepsilon dy \right) + \frac{1}{|\mathbf{Q}^\varepsilon|} \int_{\partial \mathbf{Q}_{mf}^\varepsilon} \mathbf{g}_\beta^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_\beta dy; \quad \beta = m, f. \end{aligned}$$

Denotamos por $\langle \cdot \rangle$ e $\langle \cdot \rangle^\beta$ os operadores média volumétrica e média intrínseca tomadas sobre as células $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}_\beta$ da forma

$$\langle \cdot \rangle := \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\mathbf{Q}_\beta} \cdot dy; \quad \langle \cdot \rangle^\beta := \frac{1}{|\mathbf{Q}_\beta|} \int_{\mathbf{Q}_\beta} \cdot dy; \quad \beta = m, f. \quad (3.11)$$

A fração de volume da fase- β , n_β , é definida pela razão, $n_\beta = \frac{|\mathbf{Q}_\beta|}{|\mathbf{Q}|}$ a qual implica em $n_m + n_f = 1$ e $\langle \cdot \rangle = n_\beta \langle \cdot \rangle^\beta$.

Finalmente, considerando que a razão entre o volume e área da célula periódica é da $\mathcal{O}(\varepsilon^3)/\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, temos que $|\mathbf{Q}^\varepsilon|/|\partial\mathbf{Q}_{m,f}^\varepsilon|$ é de $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Assim, considerando a transformação do domínio de integração para o domínio da célula de referência $\mathbf{Q}$ temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f_\beta^\varepsilon}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial \langle f_\beta^\varepsilon \rangle}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon|\mathbf{Q}|} \int_{\partial\mathbf{Q}_{m,f}} f_\beta^\varepsilon \dot{\mathbf{u}}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_\beta dy; \\ \langle \operatorname{div} \mathbf{g}_\beta^\varepsilon \rangle &= \operatorname{div} \langle \mathbf{g}_\beta^\varepsilon \rangle + \frac{1}{\varepsilon|\mathbf{Q}|} \int_{\partial\mathbf{Q}_{m,f}} \mathbf{g}_\beta^\varepsilon \cdot \mathbf{n}_\beta dy; \quad \beta = m, f. \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.2.2 Expansão Assintótica

O procedimento formal da técnica de homogeneização baseada em expansão assintótica consiste em introduzir a expansão (3.4) juntamente com a representação dos operadores diferenciais (3.5) nas equações re-escaladas (3.7) e (3.8), condições de contorno (3.9) e iniciais (3.10). Em seguida várias equações perturbadas são coletadas nas diversas potências de ε .

Como o problema é genuinamente não linear alguns desenvolvimentos e hipóteses adicionais de regularidade dos coeficientes são necessárias. Sendo $\lambda(s_w^\varepsilon)$ n vezes diferenciável em s_w^0 , denotando $\Delta := \frac{s_w^\varepsilon - s_w^0}{\varepsilon}$ e $\widehat{\lambda}^n(s_w^0) := \frac{\lambda^n(s_w^0)\Delta^n}{n!}$, a expansão em séries de Taylor de λ em torno de $\lambda(s_w^0)$ é dada por

$$\begin{aligned} \lambda(s_w^\varepsilon) &= \lambda(s_w^0 + \varepsilon s_w^1 + \varepsilon^2 s_w^2 + \dots) = \lambda(s_w^0 + \varepsilon(s_w^1 + \varepsilon s_w^2 + \dots)) = \lambda(s_w^0 + \varepsilon\Delta) \\ &= \lambda(s_w^0) + \varepsilon \lambda'(s_w^0)\Delta + \varepsilon^2 \frac{\lambda''(s_w^0)\Delta^2}{2!} + \dots + \varepsilon^n \frac{\lambda^n(s_w^0)\Delta^n}{n!} + r(\varepsilon\Delta) \\ &= \lambda(s_w^0) + \varepsilon \widehat{\lambda}^1(s_w^0) + \varepsilon^2 \widehat{\lambda}^2(s_w^0) + \dots + \varepsilon^n \widehat{\lambda}^n(s_w^0) + r(\varepsilon\Delta) \end{aligned}$$

onde $\lim_{\varepsilon\Delta \rightarrow 0} \frac{r(\varepsilon\Delta)}{(\varepsilon\Delta)^n} = 0$. Desta forma a expansão assintótica das mobilidades são dadas por

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha(s_w^\varepsilon) &= \lambda_\alpha(s_w^0) + \varepsilon \widehat{\lambda}_\alpha^1(s_w^0) + \varepsilon^2 \widehat{\lambda}_\alpha^2(s_w^0) + \dots \\ \Lambda_\alpha(S_w^\varepsilon) &= \Lambda_\alpha(S_w^0) + \varepsilon \widehat{\Lambda}_\alpha^1(S_w^0) + \varepsilon^2 \widehat{\Lambda}_\alpha^2(S_w^0) + \dots\end{aligned}\quad (3.13)$$

Assumindo a validade de (3.13), substituindo os operadores diferenciais (3.5) nos sistemas de equações microscópicas (3.7) e (3.8), nas condições de contorno (3.9) e iniciais (3.10), usando as expansões (3.4) e (3.13) e coletando as sucessivas potências de ε obtemos um sistema recursivo de equações. Para o problema poroelástico nas fraturas temos

$$\operatorname{div}_y \mathbf{V}_{D\alpha}^{-1} = 0; \quad \alpha = w, nw \quad (3.14)$$

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}_f^{-1} = 0 \quad (3.15)$$

$$\operatorname{div}_x \mathbf{V}_{D\alpha}^{-1} + \operatorname{div}_y \mathbf{V}_{D\alpha}^0 + S_\alpha^0 \Phi^0 \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}_f^0) = 0; \quad \alpha = w, nw \quad (3.16)$$

$$\mathbf{V}_{D\alpha}^{-1} = -\Lambda_\alpha(S_w^0) \nabla_y P_\alpha^0; \quad \alpha = w, nw \quad (3.17)$$

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}_f^{-1} + \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}_f^0 - \nabla_y P^0 = 0 \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f^{-1} = \mathcal{C}_f \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}_f^0) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(S_\alpha^0 \Phi^0) + \operatorname{div}_x \mathbf{V}_{D\alpha}^0 + \operatorname{div}_y \mathbf{V}_{D\alpha}^1 + S_\alpha^0 \Phi^0 \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}_f^0) + S_\alpha^0 \Phi^0 \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}_f^1) \\ + (S_\alpha \Phi)^1 \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}_f^0) = 0; \quad \alpha = w, nw\end{aligned} \quad (3.20)$$

$$-\frac{\partial \Phi^0}{\partial t} + (1 - \Phi^0) \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}_f^0) + (1 - \Phi^0) \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}_f^1) + (1 - \Phi^1) \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}_f^0) = 0 \quad (3.21)$$

$$\mathbf{V}_{D\alpha}^0 = -\Lambda_\alpha(S_w^0)(\nabla_x P_\alpha^0 + \nabla_y P_\alpha^1); \quad \alpha = w, nw \quad (3.22)$$

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}_f^0 + \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}_f^1 - \nabla_x P^0 - \nabla_y P^1 = 0 \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f^0 = \mathcal{C}_f [\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}_f^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}_f^1)] \quad (3.24)$$

$$P^0 = S_w^0 P_w^0 + (1 - S_w^0) P_{nw}^0 \quad (3.25)$$

$$P_c^0(S_w^0) = P_{nw}^0 - P_w^0 \quad (3.26)$$

$$\mathbf{V}_{D\alpha}^1 = -\Lambda_\alpha(S_w^0)(\nabla_x P_\alpha^1 + \nabla_y P_\alpha^2) - \widehat{\Lambda}_\alpha^1(S_w^0)(\nabla_x P_\alpha^0 + \nabla_y P_\alpha^1); \quad \alpha = w, nw \quad (3.27)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f^1 = \mathcal{C}_f [\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}_f^1) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}_f^2)] \quad (3.28)$$

$$P^1 = S_w^0 P_w^1 + S_w^1 P_w^0 + (1 - S_w^0) P_{nw}^1 + (1 - S_w^1) P_{nw}^0 \quad (3.29)$$

Para os blocos obtemos,

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}_m^{-1} = 0 \quad (3.30)$$

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}_m^{-1} + \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}_m^0 - \nabla_y p^0 = 0 \quad (3.31)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_m^{-1} = \mathcal{C}_m \boldsymbol{\mathcal{E}}_y(\mathbf{u}_m^0) \quad (3.32)$$

$$\mathbf{v}_{D\alpha}^0 = 0 \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(s_\alpha^0 \phi^0) + \operatorname{div}_y \mathbf{v}_{D\alpha}^1 + s_\alpha^0 \phi^0 \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}_m^0) + s_\alpha^0 \phi^0 \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}_m^1) \\ + (s_\alpha \phi)^1 \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}_m^0) = 0; \quad \alpha = w, nw \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$-\frac{\partial \phi^0}{\partial t} + (1 - \phi^0) \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}_m^0) + (1 - \phi^0) \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}_m^1) + (1 - \phi^1) \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}_m^0) = 0 \quad (3.35)$$

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}_m^0 + \operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}_m^1 - \nabla_x p^0 - \nabla_y p^1 = 0 \quad (3.36)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_m^0 = \mathcal{C}_m [\boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}_m^0) + \boldsymbol{\mathcal{E}}_y(\mathbf{u}_m^1)] \quad (3.37)$$

$$p^0 = s_w^0 p_w^0 + (1 - s_w^0) p_{nw}^0 \quad (3.38)$$

$$p_c^0(s_w^0) = p_{nw}^0 - p_w^0 \quad (3.39)$$

$$\mathbf{v}_{D\alpha}^1 = -\lambda_\alpha(s_w^0) \nabla_y p_\alpha^0; \quad \alpha = w, nw \quad (3.40)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_m^1 = \mathcal{C}_m [\boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}_m^1) + \boldsymbol{\mathcal{E}}_y(\mathbf{u}_m^2)] \quad (3.41)$$

$$p^1 = s_w^0 p_w^1 + s_w^1 p_w^0 + (1 - s_w^0) p_{nw}^1 + (1 - s_w^1) p_{nw}^0 \quad (3.42)$$

As diferentes ordens de perturbação das condições de contorno na interface bloco/fratura são dadas por:

$$\mathbf{V}_{D\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{n}_m = 0; \quad \alpha = w, nw \quad (3.43)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f^{-1} \mathbf{n}_m = \boldsymbol{\sigma}_m^{-1} \mathbf{n}_m \quad (3.44)$$

$$\mathbf{V}_{D\alpha}^0 \cdot \mathbf{n}_m = 0; \quad \alpha = w, nw \quad (3.45)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}_f^0 - P^0 \mathbf{I}] \mathbf{n}_m = [\boldsymbol{\sigma}_m^0 - p^0 \mathbf{I}] \mathbf{n}_m \quad (3.46)$$

$$P_\alpha^0 = p_\alpha^0 \quad (3.47)$$

$$\mathbf{u}_f^0 = \mathbf{u}_m^0 \quad (3.48)$$

$$P_c^0(S_w^0) = p_c^0(s_w^0) \quad (3.49)$$

$$\mathbf{V}_{D\alpha}^1 \cdot \mathbf{n}_m = \mathbf{v}_{D\alpha}^1 \cdot \mathbf{n}_m; \quad \alpha = w, nw \quad (3.50)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}_f^1 - P^1 \mathbf{I}] \mathbf{n}_m = [\boldsymbol{\sigma}_m^1 - p^1 \mathbf{I}] \mathbf{n}_m \quad (3.51)$$

e as condições iniciais:

$$\begin{aligned} S_w^0 &= S_{ini}; \quad \Phi^0 = \Phi_{ini}; \quad \operatorname{div}_x \mathbf{u}_f^0 = \operatorname{div}_y \mathbf{u}_f^1 = 0 \\ s_w^0 &= s_{ini}; \quad \phi^0 = \phi_{ini}; \quad \operatorname{div}_x \mathbf{u}_m^0 = \operatorname{div}_y \mathbf{u}_m^1 = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Finalmente, em $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ os resultados do teorema da média volumétrica em (3.12) são dados por,

$$\left\langle \frac{\partial f_\beta^0}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle f_\beta^0 \rangle}{\partial t} - \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\partial \mathbf{Q}_{mf}} (f_\beta^1 \dot{\mathbf{u}}^0 + f_\beta^0 \dot{\mathbf{u}}^1) \cdot \mathbf{n}_\beta \, dy; \quad (3.53)$$

$$\langle \operatorname{div}_x \mathbf{g}_\beta^0 + \operatorname{div}_y \mathbf{g}_\beta^1 \rangle = \operatorname{div}_x \langle \mathbf{g}_\beta^0 \rangle + \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\partial \mathbf{Q}_{mf}} \mathbf{g}_\beta^1 \cdot \mathbf{n}_\beta \, dy; \quad \beta = m, f. \quad (3.54)$$

Em particular, tomando $\mathbf{g}_\beta = f_\beta \dot{\mathbf{u}}$ vem que $\mathbf{g}_\beta^0 = f_\beta^0 \dot{\mathbf{u}}^0$ e $\mathbf{g}_\beta^1 = f_\beta^1 \dot{\mathbf{u}}^0 + f_\beta^0 \dot{\mathbf{u}}^1$. Assim, somando (3.53) e (3.54) obtemos em $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$

$$\left\langle \frac{\partial f_\beta^0}{\partial t} \right\rangle + \langle \operatorname{div}_x (f_\beta^0 \dot{\mathbf{u}}^0) + \operatorname{div}_y (f_\beta^1 \dot{\mathbf{u}}^0 + f_\beta^0 \dot{\mathbf{u}}^1) \rangle = \frac{\partial \langle f_\beta^0 \rangle}{\partial t} + \operatorname{div}_x \langle f_\beta^0 \dot{\mathbf{u}}^0 \rangle; \quad \beta = m, f. \quad (3.55)$$

3.2.3 Variáveis não-oscilatórias

Coletando as Equações (3.14), (3.17) e as condições de contorno (3.43) obtemos o problema de célula para P_α^0

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_y [\Lambda(S_w^0) \nabla_y P_\alpha^0] &= 0; \quad \text{em } \mathbf{Q}_f \\ [\Lambda(S_w^0) \nabla_y P_\alpha^0] \cdot \mathbf{n} &= 0; \quad \text{sobre } \partial \mathbf{Q}_{mf} \\ P_\alpha^0 &\quad \mathbf{Q} - \text{periódica} \end{aligned} \right\} \alpha = w, nw$$

cuja solução é dada por

$$P_\alpha^0 = P_\alpha^0(\mathbf{x}, t); \quad \alpha = w, nw. \quad (3.56)$$

Usando o resultado acima em (3.26) e assumindo P_c^0 uma função monótona de S_w^0 , de tal forma que a função $P_c^0 = P_c^0(S_w^0)$ admite inversa, obtemos

$$P_c^0 = P_c^0(\mathbf{x}, t) \text{ e } S_w^0 = S_w^0(\mathbf{x}, t). \quad (3.57)$$

Além disso, substituindo (3.56) e (3.57) em (3.25) vem que

$$P^0 = P^0(\mathbf{x}, t). \quad (3.58)$$

Iremos agora obter um resultado semelhante para o deslocamento da matriz porosa. Coletando as Equações (3.15), (3.19), (3.30), (3.32) as condições de contorno (3.44), (3.48) e definindo

$$\mathcal{C} = \begin{cases} \mathcal{C}_m & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_m \\ \mathcal{C}_f & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_f \end{cases} \quad \mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_m & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_m \\ \mathbf{u}_f & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_f \end{cases} \quad (3.59)$$

obtemos o problema de célula

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y[\mathcal{C}\mathcal{E}_y(\mathbf{u}^0)] &= 0 \quad \text{em } \mathbf{Q} \\ \mathbf{u}^0 &\text{ é } \mathbf{Q} - \text{periódico} \end{aligned}$$

cuja solução é dada por

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t) \quad (3.60)$$

o resultado acima mostra que em $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ a fase sólida se desloca com um movimento de corpo rígido no domínio da célula. Logo o conjunto de variáveis não oscilatórias é dado por $\{P_\alpha^0, P_c^0, S_\alpha^0, P^0, \mathbf{u}^0\}$.

3.2.4 Lei de Darcy macroscópica

Para derivar a lei de Darcy macroscópica para o movimento dos fluidos nas fraturas consideramos o problema de fechamento para P_α^1 com $\alpha = w, nw$. Coletando as Equações (3.16) com as condições de contorno (3.45), juntamente com (3.56), (3.57), (3.60), o problema de célula para o campo de pressão $P_\alpha^1 = P_\alpha^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ é dado por,

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{yy} P_\alpha^1 &= 0; & \text{em } \mathbf{Q}_f \\ (\nabla_y P_\alpha^1) \cdot \mathbf{n} &= -(\nabla_x P_\alpha^0) \cdot \mathbf{n}; & \text{sobre } \partial \mathbf{Q}_{mf} \end{aligned} \right\} \alpha = w, nw \quad (3.61)$$

O problema de Neumann linear para P_α^1 é clássico e pode ser resolvido pelo princípio da superposição (Evans, 1998). Denotando $\{\mathbf{e}_i\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$ e $\Psi_i = \Psi_i(\mathbf{y})$ ($i = 1, 2, 3$) a função característica solução do problema de célula,

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{yy} \Psi_i &= 0 & \text{em } \mathbf{Q}_f \\ (\nabla_y \Psi_i) \cdot \mathbf{n} &= -\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} & \text{sobre } \partial \mathbf{Q}_{mf} \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

pelo princípio da superposição para problemas lineares as soluções de (3.62) e (3.61) satisfazem,

$$P_\alpha^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{\Psi}(\mathbf{y}) \cdot \nabla_x P_\alpha^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + g(\mathbf{x}, t) \quad (3.63)$$

onde, $\mathbf{\Psi}(\mathbf{y}) = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$.

Usando o resultado acima em (3.22) e tomando a média volumétrica obtemos a lei de Darcy macroscópica para a fase- α ,

$$\bar{\mathbf{V}}_{D\alpha} := \langle \mathbf{V}_{D\alpha}^0 \rangle = -\Lambda_\alpha^{eft}(S_w^0) \nabla_x P_\alpha^0; \quad \alpha = w, nw \quad (3.64)$$

com a mobilidade efetiva macroscópica definida por

$$\Lambda_\alpha^{eft}(S_w^0) := \langle \Lambda_\alpha[\mathbf{I} + \nabla_y \mathbf{\Psi}(\mathbf{y})] \rangle. \quad (3.65)$$

É importante ressaltar que $\Lambda_\alpha^{eft}(S_w^0)$ incorpora a permeabilidade microscópica das fraturas e também reflete a geometria do sistema de fraturas através da função característica $\mathbf{\Psi}$.

3.2.5 Problema de Fechamento Transiente nos Blocos

Enunciamos agora o problema microscópico que resulta para o cômputo das variáveis locais $(\mathbf{u}^1, s^0, \phi^0, p^0)$. A solução deste sistema de equações, representado por um problema de fechamento transiente em $\mathbf{Q}$, será utilizada posteriormente na solução do problema macroscópico.

Coletando as Equações (3.18), (3.31), (3.58) e (3.60) obtemos,

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}_f^0 = 0 \quad \text{em } \mathbf{Q}_f \quad (3.66)$$

$$\operatorname{div}_y \boldsymbol{\sigma}_m^0 - \nabla_y p^0 = 0 \quad \text{em } \mathbf{Q}_m. \quad (3.67)$$

Com o objetivo de representar o problema acima no domínio da célula $\mathbf{Q}$, ao invés dos subdomínios $\mathbf{Q}_m$ e $\mathbf{Q}_f$, procedemos por estender por continuidade a saturação e a pressão do fluido nos blocos para o domínio das fraturas $\mathbf{Q}_f$

$$s_w^{*0} := \begin{cases} (p_c^0)^{-1} \circ P_c^0(S_w^0) & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_f \\ s_w^0 & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_m \end{cases} \quad p_\alpha^{*0} := \begin{cases} P_\alpha^0 & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_f \\ p_\alpha^0 & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_m. \end{cases} \quad (3.68)$$

Recapitulando as Equações (3.24), (3.37), (3.38) e o resultado (3.60) e utilizando as definições (3.59) e (3.68), à partir de (3.66) e (3.67), a equação de equilíbrio microscópica para a mistura bloco/fratura em $\mathbf{Q}$ é dada por,

$$\operatorname{div}_y [\mathcal{C}(y) \boldsymbol{\mathcal{E}}_y(\mathbf{u}^1)] - \nabla_y [s_w^{*0} p_w^{*0} + (1 - s_w^{*0}) p_{nw}^{*0}] = 0 \quad \text{em } \mathbf{Q}. \quad (3.69)$$

Pelas definições em (3.68) podemos observar que a pressão média definida por $p^{*0} := s_w^{*0} p_w^{*0} + (1 - s_w^{*0}) p_{nw}^{*0}$, recupera a forma (3.38) e satisfaz a equação de equilíbrio (3.67) em $\mathbf{Q}_m$. Além disso como a restrição de p^{*0} a $\mathbf{Q}_f$ é não oscilatória, temos que $\nabla_y p^{*0} = 0$ e conseqüentemente a equação de equilíbrio (3.66) é satisfeita para $\mathbf{y} \in \mathbf{Q}_f$.

Para representar os balanços de massa de forma unificada na célula $\mathbf{Q}$, definimos a extensão da porosidade e a função indicatriz θ da forma:

$$\phi^{*0} := \begin{cases} \Phi^0 & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_f \\ \phi^0 & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_m \end{cases} \quad \theta := \begin{cases} 0 & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_f \\ 1 & \text{para } \mathbf{y} \in \mathbf{Q}_m. \end{cases} \quad (3.70)$$

Fazendo uso das definições acima, as extensões das equações de continuidade mi-

croscópica (3.21), (3.34) e (3.35) para o domínio $\mathbf{Q}$ são dadas por

$$\begin{aligned} \theta \left[\frac{\partial}{\partial t}(s_\alpha^{*0} \phi^{*0}) + s_\alpha^{*0} \phi^{*0} \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + s_\alpha^{*0} \phi^{*0} \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}^1) \right] &= \operatorname{div}_y[\lambda_\alpha(s_w^{*0}) \nabla_y p_\alpha^{*0}]; \quad \alpha = w, nw \\ - \frac{\partial \phi^{*0}}{\partial t} + \operatorname{div}_x[(1 - \phi^{*0}) \dot{\mathbf{u}}^0] + \operatorname{div}_y[(1 - \phi^{*0}) \dot{\mathbf{u}}^1] &= 0 \end{aligned} \quad \text{em } \mathbf{Q}_m. \quad (3.71)$$

Usando a definição (3.68) em (3.39) definimos a pressão capilar, estendida para toda a célula $\mathbf{Q}$, na forma

$$p_c^{*0} := p_{nw}^{*0} - p_w^{*0}. \quad (3.72)$$

As Equações (3.69), (3.71) e (3.72) compõem o problema poroelástico transiente nas variáveis $\{\mathbf{u}^1, s_w^{*0}, p_\alpha^{*0}, \phi^{*0}\}$ posto no domínio da célula $\mathbf{Q}$. Coletando estes resultados temos

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y(\mathcal{C}(y) \mathcal{E}_y(\mathbf{u}^1)) - \nabla_y(s_w^{*0} p_w^{*0} + (1 - s_w^{*0}) p_{nw}^{*0}) = 0 \\ \theta \left(\frac{\partial}{\partial t}[s_\alpha^{*0} \phi^{*0}] + s_\alpha^{*0} \phi^{*0} \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + s_\alpha^{*0} \phi^{*0} \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}^1) \right) = \operatorname{div}_y(\lambda_\alpha(s_w^{*0}) \nabla_y p_\alpha^{*0}) \\ - \frac{\partial \phi^{*0}}{\partial t} + (1 - \phi^{*0}) \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + (1 - \phi^{*0}) \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}^1) = 0 \\ p_c^{*0} = p_{nw}^{*0} - p_w^{*0} \end{cases} \quad \text{em } \mathbf{Q}, \quad t > 0 \quad (3.73)$$

sujeito às condições de periodicidade e iniciais,

$$\phi^{*0} = \phi_{ini}, \quad s^{*0} = s_{ini} \quad \text{e} \quad \operatorname{div}_y \mathbf{u}^1 = 0 \quad \text{em } \mathbf{Q}_m, \quad t = 0. \quad (3.74)$$

A principal diferença entre a natureza do fechamento (3.73) em meios de porosidade dupla comparado com os respectivos problemas em sistemas de porosidade simples é o seu caráter transiente. Tal fato torna a representação da solução mais complexa devido ao surgimento de uma segunda escala de tempo inerente a hidrodinâmica na porosidade secundária ϕ^0 dos blocos. Tal comportamento do sistema governado por duas escala de tempo conduz a equações efetivas integrodiferenciais (Chamilco, 2006; Murad *et al*, 2001).

3.2.6 Balanço de Massa das Fases Fluidas

Iremos agora obter o balanço de massa macroscópico para as fases fluidas. Tomando a média volumétrica nas Equações (3.20), (3.34) e fazendo uso de (3.55) obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle S_\alpha^0 \Phi^0 \rangle + \operatorname{div}_x \langle \mathbf{V}_{D\alpha f}^0 \rangle + \langle S_\alpha^0 \Phi^0 \rangle \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}_f^0) = - \langle \operatorname{div}_y \mathbf{v}_{D\alpha f}^1 \rangle \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle s_\alpha^0 \phi^0 \rangle + \langle s_\alpha^0 \phi^0 \rangle \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}_m^0) = \langle \operatorname{div}_y [\lambda_\alpha(s^0) \nabla_y p_\alpha^0] \rangle. \quad (3.76)$$

Usando o teorema de Gauss, a hipótese de periodicidade, continuidade da velocidade de Darcy em $\partial \mathbf{Q}_{mf}$ (3.50) e a Equação (3.76), o termo do lado direito da Equação (3.75) pode ser reescrito da forma,

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div}_y \mathbf{v}_{D\alpha f}^1 \rangle &= \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\mathbf{Q}_f} \operatorname{div}_y \mathbf{v}_{D\alpha f}^1 \, dy \\ &\stackrel{Gauss}{=} \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\partial \mathbf{Q}_{mf}} \mathbf{v}_{D\alpha f}^1 \cdot \mathbf{n}_f \, dy + \overbrace{\frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\partial \mathbf{Q}} \mathbf{v}_{D\alpha f}^1 \cdot \mathbf{n} \, dy}^{=0: \text{ periodicidade}} \\ &\stackrel{(3.50)}{=} - \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\partial \mathbf{Q}_{mf}} (\lambda_\alpha(s_w^0) \nabla_y p_\alpha^0) \cdot \mathbf{n}_f \, dy = \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\partial \mathbf{Q}_{mf}} (\lambda_\alpha(s_w^0) \nabla_y p_\alpha^0) \cdot \mathbf{n}_m \, dy \\ &\stackrel{Gauss}{=} \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\mathbf{Q}_m} \operatorname{div}_y [\lambda_\alpha(s_w^0) \nabla_y p_\alpha^0] \, dy = \langle \operatorname{div}_y [\lambda_\alpha(s^0) \nabla_y p_\alpha^0] \rangle \\ &\stackrel{(3.76)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \langle s_\alpha^0 \phi^0 \rangle + \langle s_\alpha^0 \phi^0 \rangle \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}_m^0). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Usando (3.77) em (3.75), lembrando que $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)$ e $S_\alpha^0 = S_\alpha^0(\mathbf{x}, t)$, e definindo a fração de volume total da fase fluida como,

$$\Theta_\alpha^0 := \langle \phi^0 s_\alpha^0 \rangle + \langle \Phi^0 \rangle S_\alpha^0; \quad \alpha = w, nw \quad (3.78)$$

a equação que modela a conservação de massa na escala macroscópica é dada por,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \Phi^0 \rangle S_\alpha^0) + \operatorname{div}_x \langle \mathbf{V}_{D\alpha f}^0 \rangle + \Theta_\alpha^0 \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) = - \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi^0 s_\alpha^0 \rangle; \quad \alpha = w, nw. \quad (3.79)$$

O resultado acima mostra uma equação de transporte macrocópica para a saturação nas fraturas, com um termo de fonte que governa a troca de massa com o

sistema dos blocos poroelásticos dada pela evolução temporal e da fração de volume da fase- α nos blocos. A computação deste termo requer um procedimento de “downscaling” e está diretamente relacionada com o perfil da saturação nos blocos, o qual é regido pelo problema de fechamento transiente (3.73).

3.2.7 Balanço de Massa para a Porosidade

Para derivarmos o balanço de massa para a porosidade tomamos a média volumétrica em (3.21) e usamos (3.55) para obter

$$-\frac{\partial \langle \Phi^0 \rangle}{\partial t} + \langle 1 - \Phi^0 \rangle \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + \langle \operatorname{div}_y \dot{\mathbf{u}}_f^1 \rangle = 0. \quad (3.80)$$

Aplicando um desenvolvimento análogo ao usado na derivação de (3.77) vem que $\langle \operatorname{div}_y \dot{\mathbf{u}}_f^1 \rangle = -\langle \operatorname{div}_y \dot{\mathbf{u}}_m^1 \rangle$. Logo podemos reescrever a equação acima na forma,

$$-\frac{\partial \langle \Phi^0 \rangle}{\partial t} + \langle 1 - \Phi^0 \rangle \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) - \langle \operatorname{div}_y \dot{\mathbf{u}}_m^1 \rangle = 0. \quad (3.81)$$

3.2.8 Equação de Equilíbrio Total

Para finalizar o modelo em duas escalas derivamos a equação de equilíbrio global para a mistura. Tomando a média volumétrica em (3.23) e (3.36), usando a condição de contorno (3.51) e fazendo uso de argumentos análogos aos utilizados em (3.77) obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x \langle \boldsymbol{\sigma}_f^0 - P^0 \mathbf{I} \rangle &= -\langle \operatorname{div}_y (\boldsymbol{\sigma}_f^1 - P^1 \mathbf{I}) \rangle = -\frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\mathbf{Q}_f} \operatorname{div}_y (\boldsymbol{\sigma}_f^1 - P^1 \mathbf{I}) \, dy \\ &= -\frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\partial \mathbf{Q}_{mf}} (\boldsymbol{\sigma}_f^1 - P^1 \mathbf{I}) \mathbf{n}_f \, dy = -\frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\partial \mathbf{Q}_{mf}} (\boldsymbol{\sigma}_m^1 - p^1 \mathbf{I}) \mathbf{n}_f \, dy \\ &= \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\partial \mathbf{Q}_{mf}} (\boldsymbol{\sigma}_m^1 - p^1 \mathbf{I}) \mathbf{n}_m \, dy = \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\mathbf{Q}_m} \operatorname{div}_y (\boldsymbol{\sigma}_m^1 - p^1 \mathbf{I}) \, dy \\ &= \langle \operatorname{div}_y (\boldsymbol{\sigma}_m^1 - p^1 \mathbf{I}) \rangle = -\operatorname{div}_x \langle \boldsymbol{\sigma}_m^0 - p^0 \mathbf{I} \rangle. \end{aligned}$$

Usando (3.58) no resultado acima e lembrando que $n_f = 1 - n_l$ vem que

$$\operatorname{div}_x [\langle \boldsymbol{\sigma}_m^0 \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_f^0 \rangle + (n_m P^0 - \langle p^0 \rangle) \mathbf{I}] - \nabla_x P^0 = 0. \quad (3.82)$$

Definindo o excesso da pressão média da fase fluida nas fraturas relativa aos blocos na forma

$$\gamma^0 := P^0 - p^0. \quad (3.83)$$

Tomando a média volumétrica na equação acima, obtemos

$$\langle \gamma^0 \rangle = \frac{1}{|\mathbf{Q}|} \int_{\mathbf{Q}_m} (P^0 - p^0) dy = n_m P^0 - \langle p^0 \rangle.$$

Substituindo o resultado acima em (3.82) e definindo o tensor das tensões efetivas macroscópicas da forma,

$$\boldsymbol{\sigma}^{eft} := \langle \boldsymbol{\sigma}_m^0 \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_f^0 \rangle + \langle \gamma^0 \rangle \mathbf{I}, \quad (3.84)$$

a equação de equilíbrio para o meio homogeneizado é dada por

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}^{eft} - \nabla_x P^0 = 0. \quad (3.85)$$

A decomposição acima exhibe a mesma forma proposta por Terzaghi, com a pressão do poro, no caso monofásico, substituída pela pressão média ponderada pela saturação das fases P^0 . A novidade da formulação derivada neste trabalho é a equação constitutiva (3.84) para a tensão efetiva de meios poroelásticos fraturados saturados por dois fluidos imiscíveis. Embora tenham sido negligenciados neste trabalho os efeitos provocados pela pressão capilar nas tensões do sólido na microescala, o processo de homogeneização conduz ao surgimento de um termo físico-químico que é advindo da descontinuidade da pressão média entre blocos e fissuras $\gamma^0 = P^0 - p^0$. Esta componente produz efeitos análogos àqueles provocados pela pressão capilar na equação constitutiva para a tensão efetiva em meios com porosidade simples (Fredlund & Morgenstern, 1977; Fredlund & Rahardjo, 1993). O efeito intermolecular advindo da descontinuidade da pressão média tende a comprimir os blocos drenando os fluidos residentes nos microporos produzindo compactação na matriz porosa induzindo a tensão efetiva macroscópica. Ao conhecimento dos autores deste trabalho, este efeito intermolecular, inerente a meios com porosidade dupla, não foi ainda reportado na literatura e necessita investiga-

ção experimental para a sua validação.

3.2.9 Resumo do Modelo em Duas Escalas

Seja Ω o domínio na escala macroscópica ocupado pelo meio poroso composto pela mistura blocos e fraturas. Estamos agora em posição de enunciar o modelo posto simultaneamente em duas escalas.

Sejam $\mathcal{C}$ o módulo de elasticidade da matriz porosa, Ψ a função característica e Θ_α^0 a fração de volume total da fase fluida- α dados por (3.59), (3.62) e (3.78) respectivamente. Sendo $\{\Lambda_\alpha^{eft}, P_c^0\}$ e $\{\lambda_\alpha^0, p_c^0\}$ funções das saturações S_w^0 e s_w^0 respectivamente, o modelo em duas escalas consiste em achar os campos $\{\boldsymbol{\sigma}^{eft}, \mathbf{u}^0, P_w^0, P_{nw}^0, \bar{\mathbf{V}}_{Dw}, \bar{\mathbf{V}}_{Dnw}, S_w^0\}$ funções de $(\mathbf{x}, t)$ e $\{\mathbf{u}^1, p_w^{*0}, p_{nw}^{*0}, \mathbf{v}_{Dw}^1, \mathbf{v}_{Dnw}^1, s_w^{*0}, \phi^{*0}\}$ funções de $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}_x \boldsymbol{\sigma}^{eft} - \nabla_x [S_w^0 P_w^0 + (1 - S_w^0) P_{nw}^0] = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{eft} = \langle \mathcal{C}_m [\boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\mathcal{E}}_y(\mathbf{u}_m^1)] \rangle + \langle \mathcal{C}_f [\boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\mathcal{E}}_y(\mathbf{u}_f^1)] \rangle + \langle \gamma^0 \rangle \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{V}}_{D\alpha} = -\Lambda_\alpha^{eft}(S_w^0) \nabla_x P_\alpha^0; \quad \alpha = w, nw \quad \text{em } \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\langle \Phi^0 \rangle S_\alpha^0) + \text{div}_x \bar{\mathbf{V}}_{D\alpha} + \Theta_\alpha^0 \text{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) = -\frac{\partial}{\partial t} \langle \phi^0 s_\alpha^0 \rangle; \quad \alpha = w, nw \\ P_c^0(S_w^0) = P_{nw}^0 - P_w^0 \end{array} \right. \quad (3.86)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}_y(\mathcal{C}(y) \boldsymbol{\mathcal{E}}_y(\mathbf{u}^1)) - \nabla_y (s_w^{*0} p_w^{*0} + (1 - s_w^{*0}) p_{nw}^{*0}) = 0 \\ \mathbf{v}_{D\alpha}^1 = -\lambda_\alpha(s_w^{*0}) \nabla_y p_\alpha^{*0}; \quad \alpha = w, nw \\ -\frac{\partial \phi^{*0}}{\partial t} + (1 - \phi^{*0}) \text{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + (1 - \phi^{*0}) \text{div}_y(\dot{\mathbf{u}}^1) = 0 \quad \text{em } \mathbf{Q}, t > 0 \\ \theta \left(\frac{\partial}{\partial t} [s_\alpha^{*0} \phi^{*0}] + s_\alpha^{*0} \phi^{*0} \text{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + s_\alpha^{*0} \phi^{*0} \text{div}_y(\dot{\mathbf{u}}^1) \right) = -\text{div}_y \mathbf{v}_{D\alpha}^1; \quad \alpha = w, nw \\ p_c^{*0} = p_{nw}^{*0} - p_w^{*0} \end{array} \right. \quad (3.87)$$

onde $S_{nw}^0 = 1 - S_w^0$, $\langle \gamma^0 \rangle = \langle S_w^0 P_w^0 + (1 - S_w^0) P_{nw}^0 \rangle - \langle s_w^0 p_w^0 + (1 - s_w^0) p_{nw}^0 \rangle$ e $s_{nw}^0 = 1 - s_w^0$. Periodicidade em $\partial \mathbf{Q}$ e dados iniciais são expressos na forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_w^0 = S_{ini}; \quad \text{div}_x \mathbf{u}^0 = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad t = 0 \\ s_w^{*0} = s_{ini}^*; \quad \phi^{*0} = \phi_{ini}^*; \quad \text{div}_y \mathbf{u}^1 = 0 \quad \text{em } \mathbf{Q}, \quad t = 0. \end{array} \right.$$

Os sistemas de equações macroscópico (3.86) e microscópico (3.87) transferem informação entre si e necessitam ser resolvidos simultaneamente. A solução de (3.87) permite o cômputo das funções $\phi^{*0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ e $s_{\alpha}^{*0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$. As restrições destas funções no domínio dos blocos (ϕ^0, s_{α}^0) são utilizadas para o cálculo do termo de fonte na equação de transporte homogeneizada.

A resolução simultânea dos sistemas (3.86) e (3.87) demanda um custo computacional elevado. Usualmente este procedimento requer a geração de submalhas em cada bloco que por sua vez transfere informação para os nós (ou ponto de Gauss) da malha associada ao problema macroscópico (Murad *et al*, 2001). Uma alternativa é fazer uso de computação paralela onde a resolução das equações microscópicas são distribuídas entre os processadores.

No capítulo seguinte adotamos algumas hipóteses simplificadoras para viabilizar a resolução numérica do modelo multiescala.

Capítulo 4

Modelos Reduzidos

Devido ao alto grau de dificuldade de resolução do problema posto simultaneamente em duas escalas de tempo, associadas à evolução dos sistemas de blocos e fissuras, apresentamos neste capítulo uma seqüência de versões reduzidas do modelo multiescala, cujo tratamento computacional apresenta considerável redução de complexidade.

Inicialmente consideramos o caso onde as fraturas estão totalmente abertas ou seja $\Phi^0 = 1$. Fazendo uso desta hipótese não há necessidade de postularmos as extensões (3.68) e (3.70) para $\{s_w^{*0}, \phi^{*0}\}$ para o domínio das fraturas e conseqüentemente reduzimos substancialmente o número de incógnitas. Além desta simplificação na hipótese de fraturas abertas, o problema de fechamento (3.73) para $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ fica posto somente no domínio dos blocos. Na seqüência apresentamos uma hierarquia de modelos simplificados. Adotando a hipótese de quase-estacionariedade, a escala de tempo característica dos efeitos transientes nos blocos é assumida muito menor do que a das fraturas. Nesta aproximação a evolução dos blocos é regida por uma seqüência de estados estacionários em equilíbrio termodinâmico com as fraturas. Em seguida consideramos a aproximação de Richards onde a fase não molhante é o ar que se encontra à pressão atmosférica constante. Neste caso, a pressão capilar é comumente denominada sucção e constitui a única força motriz para o movimento da fase aquosa (Alonso *et al*, 1990; Delwyn *et al*, 1998; Santagiuliana & Schrefler, 2006). Finalmente, reproduzimos

os modelos de meios porosos rígidos.

4.1 Caso de Fraturas Totalmente Abertas

Consideramos a ausência de detritos sólidos nas fraturas de tal forma que estas estão totalmente abertas com $\Phi^0 = 1$ e $\langle \Phi^0 \rangle = \frac{|\mathbf{Q}_f|}{|\mathbf{Q}|} = n_f$. Levando esta hipótese à Equação (3.81) obtemos

$$-\frac{\partial n_f}{\partial t} - \langle \operatorname{div}_y \mathbf{u}^1 \rangle = 0.$$

Integrando no tempo e usando as condições iniciais $n_f(t = 0) = \bar{n}_f$ e $\operatorname{div}_y \mathbf{u}^1(t = 0) = 0$, a equação para a macro porosidade toma a forma

$$n_f = \bar{n}_f - \langle \operatorname{div}_y \mathbf{u}^1 \rangle. \quad (4.1)$$

Na ausência de detritos nas fraturas a poroelasticidade neste sistema é inexistente o que implica em $\mathcal{C}^f = 0$ e usando (3.24), $\boldsymbol{\sigma}^f = 0$. Usando esta simplificação em (3.84) e (3.46) vem que,

$$\boldsymbol{\sigma}^{eft} = \langle \boldsymbol{\sigma}_m^0 \rangle + \langle \gamma^0 \rangle \mathbf{I} \text{ em } \Omega \quad (4.2)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}_m^0 - p^0 \mathbf{I}] \mathbf{n}_m = -P^0 \mathbf{n}_m \text{ sobre } \partial \mathbf{Q}_{mf}. \quad (4.3)$$

Sob as hipóteses anteriores o problema em duas escalas (3.86) é reduzido à seguinte forma:

Sejam $\{\mathcal{C}, \Psi, \Theta_\alpha^0, \Lambda_\alpha^{eft}, P_c^0, \lambda_\alpha^0, p_c^0\}$ definidos tal como em (3.86). O modelo em duas escalas consiste em achar os campos $\{\boldsymbol{\sigma}^{eft}, \mathbf{u}^0, P_w^0, P_{nw}^0, \bar{\mathbf{V}}_{Dw}, \bar{\mathbf{V}}_{Dnw}, S_w^0, n_f\}$ funções de $(\mathbf{x}, t)$ e $\{\mathbf{u}^1, p_w^0, p_{nw}^0, \mathbf{v}_w^1, \mathbf{v}_{nw}^1, s_w^0, \phi^0\}$ funções de $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}^{eft} - \nabla_x [S_w^0 P_w^0 + (1 - S_w^0) P_{nw}^0] = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{eft} = \langle \mathcal{C}[\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0) + \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}^1)] \rangle + \langle \gamma^0 \rangle \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{V}}_{D\alpha} = -\Lambda_\alpha^{eft}(S_w^0) \nabla_x P_\alpha^0; \quad \alpha = w, nw; \\ \frac{\partial}{\partial t}(n_f S_\alpha^0) + \operatorname{div}_x \bar{\mathbf{V}}_{D\alpha} + \Theta_\alpha^0 \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) = -\frac{\partial}{\partial t}[(1 - n_f) \langle \phi^0 s_\alpha^0 \rangle^m]; \quad \alpha = w, nw \\ n_f = \bar{n}_f - \langle \operatorname{div}_y \mathbf{u}^1 \rangle \\ P_c^0(S_w^0) = P_{nw}^0 - P_w^0 \end{array} \right. \text{ em } \Omega, \quad t > 0 \quad (4.4)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_y(\mathcal{C}(y)\boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}^1)) - \nabla_y(s_w^0 p_w^0 + (1 - s_w^0)p_{nw}^0) = 0 \\ \mathbf{v}_{D\alpha}^1 = -\lambda_w(s_w^0)\nabla_y p_w^0; \quad \alpha = w, nw \quad \text{em } \mathbf{Q}_m, \quad t > 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}[s_\alpha^0 \phi^0] + \operatorname{div}_y \mathbf{v}_{D\alpha}^1 + s_\alpha^0 \phi^0 \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + s_\alpha^0 \phi^0 \operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}^1) = 0; \quad \alpha = w, nw \\ -\frac{\partial \phi^0}{\partial t} + (1 - \phi^0)\operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + (1 - \phi^0)\operatorname{div}_y(\dot{\mathbf{u}}^1) = 0 \\ p_c^0(s_w^0) = p_{nw}^0 - p_w^0 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

onde $S_{nw}^0 = 1 - S_w^0$, $s_{nw}^0 = 1 - s_w^0$ e $\langle \gamma^0 \rangle = \langle S_w^0 P_w^0 + (1 - S_w^0)P_{nw}^0 \rangle - \langle s_w^0 p_w^0 + (1 - s_w^0)p_{nw}^0 \rangle$.

Condições de contorno na interface bloco/fratura são expressas na forma

$$\left\{ \begin{array}{l} p_\alpha^0 = P_\alpha^0; \\ [\mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{u}^1)] \mathbf{n} = -[\mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0) + \gamma^0] \mathbf{n}; \quad \text{sobre } \partial \mathbf{Q}_{mf} \end{array} \right. \quad (4.6)$$

e os dados iniciais por

$$\left\{ \begin{array}{l} S_w^0 = S_{ini}; \quad n_f = \bar{n}_f; \quad \operatorname{div}_x \mathbf{u}^0 = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad t = 0 \\ s_w^0 = s_{ini}; \quad \phi^0 = \phi_{ini}; \quad \operatorname{div}_y \mathbf{u}^1 = 0 \quad \text{em } \mathbf{Q}_m, \quad t = 0 \end{array} \right.$$

juntamente com condições de contorno macroscópicas. É importante ressaltar que no caso de fraturas totalmente abertas, os problemas de fechamento transiente são postos somente no domínio dos blocos fazendo com que as extensões (3.59), (3.68) e (3.70) não sejam mais necessárias. Como o problema de fechamento (4.5) permanece de natureza transiente, o modelo posto em duas escalas espaciais continua regido por duas escalas de tempo distintas associadas aos fenômenos transientes na micro e macro escalas. Com o objetivo de reduzir esta complexidade, na seção seguinte fazemos a hipótese de quase-estacionariedade objetivando parametrizar o problema por uma única escala de tempo.

4.2 Modelo Quase-Estacionário

Nesta seção discutimos uma versão simplificada do modelo de porosidade dupla, a qual é derivada assumindo que os processos termodinâmicos nos blocos ocorrem em uma escala de tempo muito mais rápida quando comparada com a

escala associada à hidrodinâmica nas fraturas. Nesta aproximação os fenômenos transientes são assumidos extremamente rápidos dentro dos blocos de modo que o estado de equilíbrio termodinâmico é alcançado instantaneamente. Sob este cenário de equilíbrio local as variações temporais dentro dos blocos são negligenciadas e conseqüentemente a segunda e terceira equações do problema de célula (4.5) conduzem a uma equação de Poisson homogênea na variável p_α^0 . Juntamente com a condição de contorno (4.6a) obtemos o problema de Dirichlet

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{yy} p_\alpha^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= 0; & \text{em } \mathbf{Q}_m \\ p_\alpha^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= P_\alpha^0(\mathbf{x}, t); & \text{sobre } \partial \mathbf{Q}_{mf} \end{aligned} \right\} \alpha = w, nw$$

cuja solução é dada por

$$p_\alpha^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = P_\alpha^0(\mathbf{x}, t); \quad \alpha = w, nw \quad \text{em } \mathbf{Q}_m. \quad (4.7)$$

Usando o resultado acima na definição de pressão capilar temos que $p_c^0(s_w^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)) = P_c^0(S_w^0(\mathbf{x}, t))$. Recordando que p_c^0 é monótona decrescente em s_w^0 decorre que esta possui uma função inversa $(p_c^0)^{-1}$ e conseqüentemente a saturação nos blocos é dada em função de $S_w^0(\mathbf{x}, t)$ da forma

$$s_w^0(\mathbf{x}, t) = (p_c^0)^{-1} \circ P_c^0(S_w^0(\mathbf{x}, t)) \quad \text{em } \mathbf{Q}_m. \quad (4.8)$$

Notando que $p_{nw}^0 = p_c^0 + p_w^0$, $P_{nw}^0 = P_c^0 + P_w^0$, usando (4.7) e (4.8) em (3.83) podemos verificar que sob a hipótese de quase-estacionariedade a diferença entre as pressões médias das fraturas e blocos é dada por

$$\begin{aligned} \gamma^0(\mathbf{x}, t) &= P^0 - p^0 = S_w^0 P_w^0 + (1 - S_w^0) P_{nw}^0 - s_w^0 p_w^0 - (1 - s_w^0) p_{nw}^0 \\ &= S_w^0 P_w^0 + (1 - S_w^0)(P_c^0 + P_w^0) - s_w^0 p_w^0 - (1 - s_w^0)(p_c^0 + p_w^0) \\ &= s_w^0 p_c^0 - S_w^0 P_c^0 = [(p_c^0)^{-1} \circ P_c^0(S_w^0) - S_w^0] P_c^0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Combinando (4.7) e (4.8) temos que $\nabla_y[s_w^0 p_w^0 - (1 - s_w^0) p_{nw}^0] = 0$. Usando este fato em (3.69) e o resultado acima na condição de contorno (4.3) obtemos o problema de fechamento para $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ dado por

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y [\mathcal{C}\mathcal{E}_y(\mathbf{u}^1)] = 0 & \text{em } \mathbf{Q}_m \\ [\mathcal{C}\mathcal{E}_y(\mathbf{u}^1)] \mathbf{n} = -[\mathcal{C}\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0) + \gamma^0 \mathbf{I}] \mathbf{n} & \text{sobre } \partial\mathbf{Q}_{mf}. \end{cases} \quad (4.10)$$

O problema acima exhibe a mesma forma do obtido por Auriault (1990) na derivação da teoria de poroelasticidade de meios com porosidade simples, saturados por uma única fase fluida, onde a função γ^0 é substituída pela pressão do poro $P_0(\mathbf{x}, t)$. Podemos interpretar a ação do salto da pressão média γ^0 de forma a exercer uma compressão sobre os blocos poroelásticos causando a compactação destes.

Para resolvermos o problema de fechamento (4.10) definimos as componentes vetoriais $\xi^{lm}(\mathbf{y})$ do tensor de terceira ordem ξ e o vetor η como soluções dos problemas canônicos:

$$\begin{array}{l|l} \operatorname{div}_y [\mathcal{C}\mathcal{E}_y(\xi_{lm})] = 0 & \text{em } \mathbf{Q}_m \\ [\mathcal{C}\mathcal{E}_y(\xi_{lm})] \mathbf{n} = -[\mathcal{C}(\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m)] \mathbf{n} & \text{sobre } \partial\mathbf{Q}_{mf} \end{array} \quad \begin{array}{l} \operatorname{div}_y [\mathcal{C}\mathcal{E}_y(\eta)] = 0 \quad \text{em } \mathbf{Q}_m \\ [\mathcal{C}\mathcal{E}_y(\eta)] \mathbf{n} = -\mathbf{I} \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\mathbf{Q}_{mf} \end{array} \quad (4.11)$$

onde $\otimes$ denota produto tensorial. Explorando a linearidade entre os problemas (4.10) e (4.11), $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ é dado por

$$\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \xi(\mathbf{y})\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)) + \eta(\mathbf{y})\gamma^0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t). \quad (4.12)$$

Usando o fechamento estacionário acima em (4.2) segue que

$$\begin{aligned} \sigma^{eft} &= \langle \sigma_m^0 \rangle + \langle \gamma^0 \rangle \mathbf{I} = \langle \mathcal{C}[\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0) + \mathcal{E}_y(\mathbf{u}^1)] \rangle + \langle \gamma^0 \rangle \mathbf{I} \\ &= \langle \mathcal{C}[\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0) + \mathcal{E}_y(\xi)\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0) + \mathcal{E}_y(\eta)\gamma^0] \rangle + \langle \gamma^0 \rangle \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Como $\gamma^0 = \gamma^0(\mathbf{x}, t)$ temos que $\langle \gamma^0 \rangle = (1 - n_f)\gamma^0$ o que implica em

$$\sigma^{eft} = \mathcal{C}^{eft}\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0) + [\mathbf{I} - \alpha]\gamma^0 \quad (4.13)$$

onde $\mathcal{C}^{eft}$ é o módulo de elasticidade efetivo e α é o tensor de Biot-Willis (Auriault, 1990) definidos por,

$$\mathcal{C}^{eft} := \langle \mathcal{C}(\mathbf{y})[\mathbf{II} + \mathcal{E}_y(\xi)] \rangle, \quad \alpha := n_f \mathbf{I} - \langle \mathcal{C}\mathcal{E}_y(\eta) \rangle. \quad (4.14)$$

É importante ressaltar que as relações de fechamento (4.14) são as mesmas obtidas por Auriault (1990) para meios poroelásticos com porosidade simples.

Definindo a tensão total por

$$\mathbf{T}^0 := \boldsymbol{\sigma}^{eft} - P^0 \mathbf{I} \quad (4.15)$$

a equação de equilíbrio para a mistura sólido fluído (3.85) é dada por,

$$\operatorname{div}_x \mathbf{T}^0 = 0. \quad (4.16)$$

A decomposição de Terzaghi (4.15) juntamente com a equação constitutiva (4.13) caracteriza o princípio das tensões efetivas no presente contexto. Em particular a Equação (4.13) sugere a incorporação do termo adicional $([\mathbf{I} - \boldsymbol{\alpha}]\gamma^0)$ advindo da descontinuidade das pressões médias na interface blocos e fissuras, a qual é gerada pela disparidade entre as micro e macro porosidades.

Em termos da tensão total $\mathbf{T}^0$, a Equação (4.15) pode ser reescrita da forma

$$\mathbf{T}^0 + P^0 \mathbf{I} = \boldsymbol{\mathcal{C}}^{eft} \boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}^0) + [\mathbf{I} - \boldsymbol{\alpha}]\gamma^0.$$

Este resultado possui extrema importância. Ele mostra que a disparidade entre as porosidades das fraturas e blocos acarreta num efeito de compactação da matriz porosa devido ao desbalanceamento das forças intermoleculares, o qual é capturado pela dependência constitutiva adicional das tensões efetivas. Este comportamento adicional não foi reportado na literatura e pode dar origem a uma nova forma de abordar a poromecânica de meios fraturados não saturados.

O fechamento estacionário para $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ dado por (4.12) também possui conseqüências na forma dos balanços de massa para as porosidades. Usando (4.12) em (4.1) a equação para a macro porosidade pode ser reescrita na forma

$$n_f = \bar{n}_f - \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}^0) - \vartheta \gamma^0 \quad (4.17)$$

onde

$$\boldsymbol{\beta} := \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{\xi} \rangle, \quad \vartheta := \langle \operatorname{div}_y \boldsymbol{\eta} \rangle. \quad (4.18)$$

Integrando a equação da continuidade de massa para a fase sólida dos blocos em (4.5) podemos obter, de forma análoga à Equação (4.1), a equação algébrica para a microporosidade

$$\langle \phi^0 \rangle = \bar{n}_l + \beta : \boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}^0) + \vartheta \gamma^0 - \langle 1 - \phi_{ini} \rangle \exp(-\text{div}_x \mathbf{u}^0) \quad (4.19)$$

onde $\bar{n}_l = 1 - \bar{n}_f$ é a fração de volume inicial de matriz porosa.

De (4.8) temos que $\langle \phi^0 s^0 \rangle^m = \langle \phi^0 \rangle^m s^0$. Usando este resultado na equação de transporte em (4.4) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(R_\alpha^0 S_\alpha^0) + R_\alpha^0 S_\alpha^0 \text{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + \text{div}_x \bar{\mathbf{V}}_{D\alpha} = 0; \quad \alpha = w, nw \quad (4.20)$$

onde R_α^0 é o coeficiente de retardamento do fluxo da fase- α definido por,

$$R_\alpha^0(\boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}^0), S_w^0) := n_f + (1 - n_f) \langle \phi^0 \rangle^m \frac{s_\alpha^0}{S_\alpha^0}; \quad \alpha = w, nw. \quad (4.21)$$

A equação constitutiva acima fornece uma importante informação sobre a natureza do processo de adsorção nos blocos devido às forças intermoleculares. Na ausência do salto abrupto entre ϕ^0 e n_f temos que $s_w^0 = S_w^0$ e conseqüentemente o coeficiente de retardamento reduz-se ao caso clássico para o escoamento monofásico, dado por $R_\alpha^0 = n_f + (1 - n_f)\phi^0$. No caso bifásico, onde $s_w^0 > S_w^0$, o papel das forças intermoleculares é o de aumentar a adsorção nos blocos.

As Equações (4.20) e (4.16), juntamente com a equação de estado para a pressão capilar, compõem o modelo macroscópico quase-estacionário.

Sejam $\{\boldsymbol{\mathcal{C}}, \boldsymbol{\Psi}, \Theta_\alpha^0, \Lambda_\alpha^{eft}, P_c^0\}$ definidos tal como em (3.86) e sejam $\{R_\alpha^0, \boldsymbol{\mathcal{C}}^{eft}, \boldsymbol{\alpha}\}$ o novo conjunto de coeficientes efetivos definidos pelos problemas de fechamento estacionários (4.21) e (4.14). O problema macroscópico consiste em achar os campos $\{\boldsymbol{\sigma}^{eft}, \bar{\mathbf{V}}_{Dw}, \bar{\mathbf{V}}_{Dnw}, \mathbf{u}^0, P_w^0, P_{nw}^0, S_w^0\}$ funções de $(\mathbf{x}, t)$ satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}^{eft} - \nabla_x [S_w^0 P_w^0 - (1 - S_w^0) P_{nw}^0] = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{eft} = \boldsymbol{\mathcal{C}}^{eft} \boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}^0) + (\mathbf{I} - \boldsymbol{\alpha}) [(p_c^0)^{-1} \circ P_c^0(S_w^0) - S_w^0] P_c^0(S_w^0) \\ \bar{\mathbf{V}}_{D\alpha} = -\Lambda_\alpha^{eft}(S_w^0) \nabla_x P_\alpha^0; \quad \alpha = w, nw \\ \frac{\partial}{\partial t} (R_\alpha^0 S_\alpha^0) + R_\alpha^0 S_\alpha^0 \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + \operatorname{div}_x \bar{\mathbf{V}}_{D\alpha} = 0; \quad \alpha = w, nw \\ P_c^0(S_w^0) = P_{nw}^0 - P_w^0. \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega. \quad (4.22)$$

A hipótese de estacionariedade conduz aos problemas de fechamentos elípticos locais (4.10) e (4.11), que não necessitam ser resolvidos simultaneamente com o problema posto na macro escala. Tais problemas de célula podem ser explorados separadamente para construir as leis constitutivas dos parâmetros macroscópicos $\{R_\alpha^0, \boldsymbol{\mathcal{C}}^{eft}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \vartheta\}$, facilitando de forma significativa a resolução do problema posto em duas escalas.

4.3 Aproximação de Richards

A aproximação de Richards descreve o fluxo bifásico água e ar em geologias rasas de tal forma que a fase ar encontra-se a pressão atmosférica constante. Inicialmente, apresentamos a formulação da equação de Richards para meios poroelásticos nas variáveis $\{\boldsymbol{\sigma}^{eft}, \mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{V}}_{Dw}, P_w^0\}$. Em seguida eliminamos a pressão da água em função da saturação e apresentamos a segunda formulação da aproximação de Richards em termos das variáveis $\{\boldsymbol{\sigma}^{eft}, \mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{V}}_{Dw}, S_w^0\}$.

Considerando a pressão atmosférica constante e por conveniência tomada igual a zero, a pressão capilar é dada por $P_c^0(S_w^0) = -P_w^0$. Como esta admite uma função inversa $\mathcal{F} = (P_c^0)^{-1}$, a saturação macroscópica pode ser representada diretamente em função da pressão da fase água por

$$S_w^0 = \mathcal{F}(P_w^0). \quad (4.23)$$

No contexto desta aproximação a saturação nos blocos (4.8) pode ser reescrita da forma $s_w^0 = \mathcal{G}(P_w^0)$ onde $\mathcal{G} = (p_w^0)^{-1}$ e, conseqüentemente, a diferença entre as pressões médias (4.9) pode ser representada em função da pressão da água

$$\gamma^0 = -[\mathcal{G}(P_w^0) - \mathcal{F}(P_w^0)] P_w^0.$$

Usando (4.23) e definindo $\mathcal{F}' := \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P_w^0}$, o gradiente da pressão média nas fraturas pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned}\nabla_x P^0 &= \nabla_x (S_w^0 P_w^0) = \nabla_x (\mathcal{F} P_w^0) = \mathcal{F} \nabla_x P_w^0 + P_w^0 \nabla_x \mathcal{F} \\ &= \mathcal{F} \nabla_x P_w^0 + P_w^0 \mathcal{F}' \nabla_x P_w^0 = (\mathcal{F} + P_w^0 \mathcal{F}') \nabla_x P_w^0.\end{aligned}$$

Substituindo as relações acima em (4.22) podemos formular o problema de Richards:

Sejam $\{\mathcal{C}^{eft}, \Lambda_w^{eft}, R_w^0, \alpha\}$ o conjunto de coeficientes definidos no problema (4.22). Dadas as funções $\mathcal{F}(P_w^0)$ e $\mathcal{G}(P_w^0)$ o problema consiste em achar os campos $\{\sigma^{eft}, \mathbf{u}^0, \bar{\mathbf{V}}_{Dw}, P_w^0\}$ satisfazendo

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \sigma^{eft} - (\mathcal{F} + P_w^0 \mathcal{F}') \nabla_x P_w^0 = 0 \\ \sigma^{eft} = \mathcal{C}^{eft} \mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0) - (\mathbf{I} - \alpha) [\mathcal{F} - \mathcal{G}] P_w^0 \\ \bar{\mathbf{V}}_{Dw} = -\Lambda_w^{eft} \nabla_x P_w^0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (R_w^0 \mathcal{F}) + R_w^0 \mathcal{F} \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) + \operatorname{div}_x \bar{\mathbf{V}}_{Dw} = 0 \end{cases} \quad \text{em } \Omega. \quad (4.24)$$

A equação de Richards pode ser alternativamente formulada considerando a saturação S_w^0 como variável primária. Neste contexto, consideramos a função $P_w^0 = -P_c(S_w^0)$ e definimos as funções

$$\begin{aligned}f_S(S_w^0) &:= P_w^{0'} = -\frac{\partial P_c^0}{\partial S_w^0}; \quad g_S(S_w^0) := S_w^0 P_w^{0'} + P_w^0; \\ D(S_w^0) &:= \Lambda_w^{eft}(S_w^0) f_S\end{aligned} \quad (4.25)$$

onde a última função D é conhecida como sendo a difusividade hidráulica. Substituindo as relações acima em (4.22) a aproximação de Richards formulada em termos da saturação é dada por:

Sejam $\{\mathcal{C}^{eft}, R_w^0, \alpha\}$ as mesmas variáveis que aparecem no problema (4.22). Dada as funções $P_c^0(S_w^0)$ e $D(S_w^0)$, o problema consiste em achar os campos $\{\sigma^{eft}, \mathbf{u}^0, S_w^0\}$ satisfazendo

$$\begin{cases} \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}^{eft} + g_S \nabla_x S_w^0 = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^{eft} = \boldsymbol{\mathcal{C}}^{eft} \boldsymbol{\mathcal{E}}_x(\mathbf{u}^0) + (\mathbf{I} - \boldsymbol{\alpha}) [(p_c^0)^{-1} \circ P_c^0(S_w^0) - S_w^0] P_c^0(S_w^0) \\ \frac{\partial}{\partial t} (R_w^0 S_w^0) + R_w^0 S_w^0 \operatorname{div}_x(\dot{\mathbf{u}}^0) - \operatorname{div}_x (D(S_w^0) \nabla_x S_w^0) = 0. \end{cases} \quad \text{em } \Omega \quad (4.26)$$

As representações (4.24) e (4.26) fornecem uma descrição precisa da equação de Richards em meios poroelásticos com dupla porosidade. Os problemas de fechamento advindos da modelagem em duas escalas podem ser explorados na reconstrução das leis constitutivas dos coeficientes efetivos. Ao conhecimento dos autores esta representação da equação de Richards apresenta aspectos inovadores e não foi ainda proposta na literatura.

4.4 Meio Poroso Rígido

A seguir, mostramos que os bem estabelecidos modelos de porosidade dupla em meios rígidos, discutidos em Douglas & Arbogast (1990), podem ser reproduzidos naturalmente como casos particulares do modelo poroelástico (4.22).

Fazendo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = 0$, $\Phi^0 = 1$ e $\frac{\partial n_f}{\partial t} = \frac{\partial \phi^0}{\partial t} = 0$ em (3.79) e (3.34) obtemos

$$\begin{aligned} n_f \frac{\partial S_\alpha^0}{\partial t} - \operatorname{div}_x [\Lambda_\alpha^{eft}(S_w^0) \nabla_x P_\alpha^0] &= -\phi^0 \frac{\partial \langle s_\alpha^0 \rangle}{\partial t}; \quad \alpha = w, nw \\ P_c^0(S_w^0) &= P_{nw}^0 - P_w^0 \\ \phi^0 \frac{\partial s_\alpha^0}{\partial t} - \operatorname{div}_y [\lambda_\alpha(s_w^0) \nabla_y p_\alpha^0] &= 0; \quad \alpha = w, nw \\ p_c^0(s_w^0) &= p_{nw}^0 - p_w^0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

As equações acima reproduzem exatamente o modelo proposto por Douglas & Arbogast (1990) para fluxo multifásico em meios porosos rígidos fraturados. Sob hipótese de quase-estacionariedade, fazendo uso de argumentos análogos aos da seção anterior a forma reduzida de (4.27) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (R_\alpha^0 S_\alpha^0) - \operatorname{div}_x [\Lambda_\alpha^{eft}(S_w^0) \nabla_x P_\alpha^0] &= 0; \quad \alpha = w, nw \\ P_c^0(S_w^0) &= P_{nw}^0 - P_w^0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

com R_α^0 dado por (4.21). O modelo quase-estacionário acima reproduz exatamente o proposto por Douglas *et al* (1991) para meios rígidos.

De forma análoga ao caso poroelástico, a hipótese de quase-estacionariedade conduz a um problema posto nas variáveis macroscópicas $\{P_{nw}^0, P_w^0, S_w^0\}$ com leis constitutivas para $(R_\alpha^0, \Lambda_\alpha^{eft})$ dadas por (4.21) e (3.65).

Finalmente, para derivarmos a aproximação de Richards para meios rígidos fazemos uso da definição para da difusividade dada pela Equação (4.25). Conseqüentemente na representação em termos da saturação, a Equação (4.28) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t}(R_w^0 S_w^0) - \operatorname{div}_x[D(S_w^0)\nabla_x S_w^0] = 0$$

e para a representação em termos da pressão da água P_w^0 ,

$$\frac{\partial}{\partial t}(R_w^0 \mathcal{F}) - \operatorname{div}_x(\Lambda_\alpha^{eft} \nabla_x P_w^0) = 0$$

com $\mathcal{F}$ dada por (4.23).

O presente capítulo apresentou uma hierarquia de modelos para escoamentos bifásicos em meios poroelásticos fraturados. As hipóteses de escala de tempo e sua influência sobre a forma das equações efetivas e sobre a estacionariedade dos problemas de célula são resultados inovadores que podem ser explorados futuramente na construção de modelos mais realísticos.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Neste capítulo ilustramos numericamente a forma das equações constitutivas para o coeficiente de retardamento, difusividade hidráulica da equação de Richards e tensor das tensões efetivas obtidas via resolução dos problemas de fechamento (4.21), (4.25) e (4.13). A resolução do problema demanda o conhecimento das funções características $\{\Psi, \xi, \eta\}$ que dependem da geometria da célula utilizada. Para o cômputo destas funções consideramos a formulação variacional e a aproximação por elementos finitos para os problemas de célula (3.62) e (4.11).

5.1 Formulação Variacional

Apresentamos aqui a formulação fraca dos problemas lineares (3.62) e (4.11) na escala local. Iniciamos apresentando as notações e definições necessárias. Recapitulando a notação $\mathbf{Q}_\beta(\beta = m, f)$, para a célula periódica denotamos por $L^2(\mathbf{Q}_\beta)$ o espaço das funções de quadrado integrável munido do produto interno:

$$(f, g) \equiv \int_{\mathbf{Q}_\beta} fg \, dy \quad \forall f, g \in L^2(\mathbf{Q}_\beta); \quad \beta = m, f. \quad (5.1)$$

Adotando a nomenclatura usual, introduzimos o espaço de Sobolev:

$$H^1(\mathbf{Q}_\beta) \equiv \{f \in L^2(\mathbf{Q}_\beta), \nabla_y f \in (L^2(\mathbf{Q}_\beta))^3\} \quad \beta = m, f \quad (5.2)$$

e definimos os espaços das funções admissíveis

$$W \equiv \{w \in H^1(\mathbf{Q}_f), (w, 1) = 0, w \text{ é } \mathbf{Q} - \text{periódica}\} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{W} \equiv \{w \in (H^1(\mathbf{Q}_m))^3, (w, 1) = 0, w \text{ é } \mathbf{Q} - \text{periódica}\}. \quad (5.4)$$

No desenvolvimento a seguir fazemos uso da notação

$$(f, g)_{\partial\mathbf{Q}_{mf}} \equiv \int_{\partial\mathbf{Q}_{mf}} fg \, dA. \quad (5.5)$$

As aproximações dos problemas lineares (3.62) e (4.11) para $\{\Psi, \xi, \eta\}$ são exaustivamente discutidas na literatura e não apresentam dificuldades (Hughes, 1987; Brezzi & Fortin, 1991). Denotando $\mathbf{e}_i$ a base ortonormal definida em (3.62) enunciamos a formulação variacional do problema (3.62) para Ψ_i da forma:

Problema 1 : Achar $\Psi_i \in W$ ($i = 1, 2, 3$) tal que:

$$(\nabla_y \Psi_i, \nabla_y w) = -(\mathbf{w} \mathbf{e}_i, \mathbf{n})_{\partial\mathbf{Q}_{mf}} \quad \forall w \in W. \quad (5.6)$$

A formulação variacional do problema (4.11a) para ξ_{lm} é dada por

Problema 2 : Achar $\xi_{lm} \in \mathbf{W}$ tal que:

$$(\mathcal{CE}_y(\xi_{lm}), \mathcal{E}_y(w)) = -(\mathcal{C} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m \mathbf{n}, w)_{\partial\mathbf{Q}_{mf}} \quad \forall w \in \mathbf{W}. \quad (5.7)$$

Finalmente a formulação fraca do problema (4.11b) para η consiste em

Problema 3 : Achar $\eta \in \mathbf{W}$ tal que:

$$(\mathcal{CE}_y(\eta), \mathcal{E}_y(w)) = -(\mathbf{n}, w)_{\partial\mathbf{Q}_{mf}} \quad \forall w \in \mathbf{W}. \quad (5.8)$$

5.2 Aproximação por Elementos Finitos

Para apresentar a formulação discreta dos problemas variacionais (5.7) e (5.8), consideramos $\mathbf{Q}_m$ um domínio poligonal discretizado por uma malha de N_e elementos $\mathbf{Q}_m^e$ tais que:

$$\overline{\mathbf{Q}}_m = \bigcup_{e=1}^{N_e} \overline{\mathbf{Q}}_m^e \quad \text{e} \quad \bigcap_{e=1}^{N_e} \overline{\mathbf{Q}}_m^e = \emptyset \quad (5.9)$$

onde $\emptyset$ denota o conjunto vazio, $\overline{\mathbf{Q}}_m^e$ e $\mathbf{Q}_m^e$ o fecho e o interior de um elemento em $\mathbf{Q}_m$ respectivamente. Seja h o parâmetro da malha definido por

$$h = \max h_e, \quad 1 \leq e \leq N_e, \quad \text{com } h_e = \text{diâmetro } \mathbf{Q}_m^e \quad (5.10)$$

e seja $S_h^k \subset H^1(\mathbf{Q}_m)$ o espaço das funções polinomiais de elementos finitos Lagrangeanos de classe C^0 de grau k . Definimos o subespaço de aproximação de dimensão finita de $\mathbf{W}$ da forma:

$$\mathbf{W}^h = (S_h^k)^3 \bigcap \mathbf{W}. \quad (5.11)$$

A aproximação por elementos finitos de (5.7) e (5.8) conduz aos seguintes problemas discretos:

Problema 4 : Achar $\xi_{lm}^h \in \mathbf{W}^h$ tal que:

$$(\mathcal{CE}_y(\xi_{lm}^h), \mathcal{E}_y(\mathbf{w}^h)) = -(\mathcal{C}\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m \mathbf{n}, \mathbf{w}^h)_{\partial \mathbf{Q}_{mf}} \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathbf{W}^h. \quad (5.12)$$

Problema 5 : Achar $\eta^h \in \mathbf{W}^h$ tal que:

$$(\mathcal{CE}_y(\eta^h), \mathcal{E}_y(\mathbf{w}^h)) = -(\mathbf{n}, \mathbf{w}^h)_{\partial \mathbf{Q}_{mf}} \quad \forall \mathbf{w}^h \in \mathbf{W}^h. \quad (5.13)$$

A análise de existência, unicidade, estabilidade e convergência dos problemas (5.12) e (5.13) já é bem estabelecida e amplamente discutida na literatura (Brezzi & Fortin, 1991). Calculadas as funções características estas são inseridas nas representações macroscópicas para o tensor das tensões (4.13), coeficiente de retardamento (4.21) e difusividade do fluxo (4.25). Após esta computação as equações constitutivas são representadas em função das deformações macroscópicas $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$ e da pressão capilar P_c^0 , adotadas como variáveis termodinamicamente independentes. A seguir, apresentamos as simulações computacionais e a reconstrução das equações constitutivas.

5.3 Simulações Computacionais

As geometrias de célula adotadas nas simulações são apresentadas nas Figura 5.1. É importante ressaltar que geometrias com conectividade das fases sólida e fluidas só são possíveis em três dimensões.

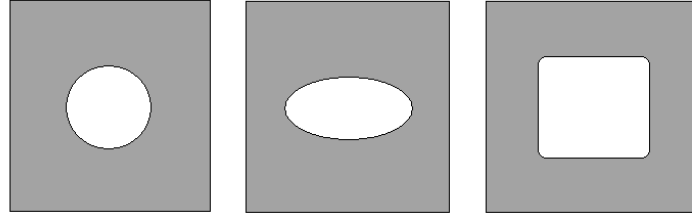


Figura 5.1: Geometrias de célula adotadas nas simulações: forma circular, elipsoidal e quártica.

Explorando simetria tomamos os domínios computacionais correspondendo a um quarto da célula. Tais domínios com suas respectivas malhas de elementos finitos bilineares são ilustrados na Figura 5.2. Em nossos experimentos utilizamos malhas não uniformes com 20x10 elementos bilineares. Obregon (2003) mostra que o refinamento da malha tem pouca influência nos resultados obtidos para a função η .

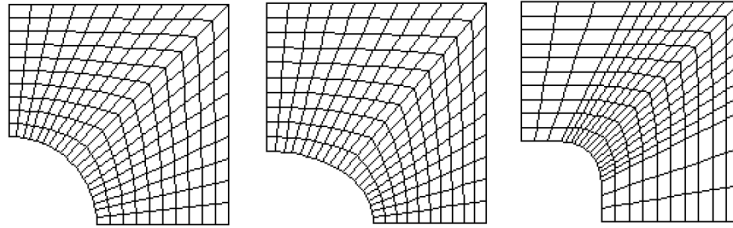


Figura 5.2: Malhas não uniformes com 20x10 elementos bilineares e $n_f = 0, 126$.

Denotamos por $\{x, y\}$ as coordenadas retangulares e por $\{\eta_x, \eta_y\}$ as componentes cartesianas do campo de deslocamento $\boldsymbol{\eta}$ solução do problema de célula (4.11). Explorando as condições de periodicidade e simetria as condições de contorno para as três geometrias são expressas por (ver Figura 5.3):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta_y = 0 & \text{se } \begin{array}{ll} 1/2 - r_x \leq x \leq 1/2 & \text{e } y = 0 \\ 0 \leq x \leq 1/2 & \text{e } y = l \end{array} \\ \eta_x = 0 & \text{se } \begin{array}{ll} 1/2 - r_y \leq y \leq 1/2 & \text{e } y = 0 \\ 0 \leq y \leq 1/2 & \text{e } y = l \end{array} \\ \mathcal{CE}(\eta)\mathbf{n} = -\mathbf{In} & \text{sobre } \partial Q_{mf} \end{array} \right. \quad (5.14)$$

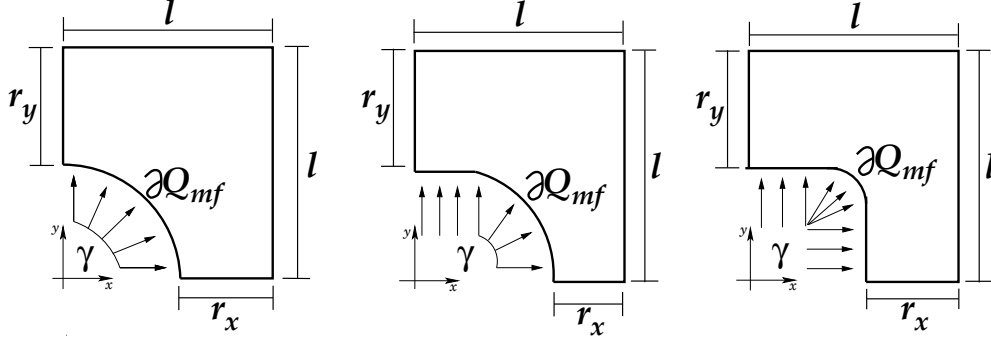


Figura 5.3: Domínios Computacionais

Nos experimentos numéricos subseqüentes consideramos a hipótese de estado plano de deformação e isotropia do sólido que compõe a matriz porosa. Desta forma o tensor de elasticidade $\mathcal{C}$ é dado por

$$\mathcal{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

onde E e ν denotam o módulo de Young e o coeficiente de Poisson do sólido que compõem a matriz porosa.

As Figuras (5.4(a)) e (5.4(b)) ilustram o campo de deformação da matriz porosa induzido por uma carga unitária.

O cômputo das equações constitutivas para $\{\sigma^{eft}, R_w^0, \Lambda_w^{eft}\}$ via solução de (4.11) requer o conhecimento da equação de estado $P_c^0 = P_c^0(S_w^0)$. Esta relação é usualmente dada pela função de Leverett (1941)

$$J(S) = \frac{P_c(S)}{\sigma} \sqrt{\frac{K}{\phi}} \quad (5.15)$$

onde K é a permeabilidade intrínseca, σ é a tensão superficial e ϕ é a porosidade do meio. Udell (1985) postula a seguinte correlação para da função de Leverett

$$J(S) = 1,417(1 - S^*) - 2,120(1 - S^*)^2 + 1,263(1 - S^*)^3 \quad (5.16)$$

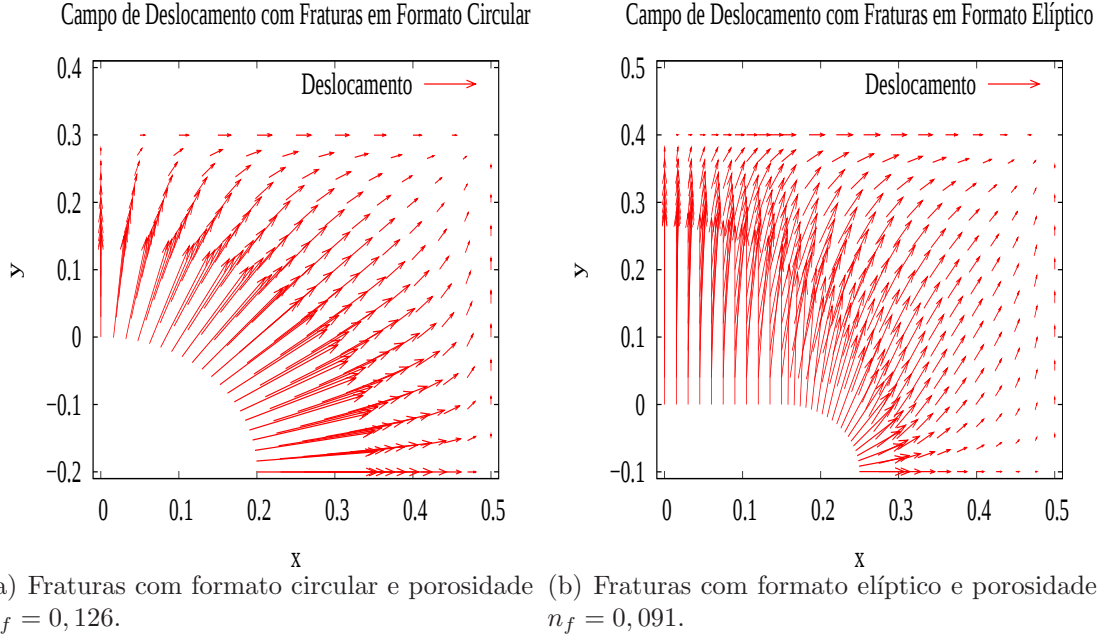


Figura 5.4: Campo de deformação da matriz porosa sob a ação de uma força unitária.

onde $S^* := \frac{S - S_{irr}}{1 - S_{irr}}$ com S_{irr} sendo a saturação irreduzível. Substituindo (5.16) em (5.15) obtemos a expressão para a pressão capilar

$$P_c(S) = \sigma \sqrt{\frac{\phi}{K}} [1,417(1 - S^*) - 2,120(1 - S^*)^2 + 1,263(1 - S^*)^3]. \quad (5.17)$$

Para a permeabilidade intrínseca $K = K(\phi)$ adotamos a lei de Kozeny-Carman (2.14).

A Tabela 5.1 ilustra os valores utilizados nas simulações. As relações entre a pressão capilar e a saturação nos micro e macroporos são mostradas na Figura 5.5(a). Devido ao fato do diâmetro médio dos microporos ser bem menor do que o das fraturas, os meniscos são bem mais acentuados nos microporos. Para uma saturação fixa S_w^0 temos $p_c^0 > P_c^0$ tal como ilustrado na Figura 5.5(a). As funções inversas são representadas na Figura 5.5(b). Podemos observar o decréscimo mais abrupto da saturação nos macroporos com o acréscimo da pressão capilar.

Sob a hipótese de quase-estacionariedade $p_c^0 = P_c^0$ e à medida que P_c^0 aumenta e S_w^0 diminui a disparidade entre as saturações nos micro e macroporos também aumenta (Figura: 5.5(b)) levando a um acréscimo da diferença entre as pressões

Tabela 5.1: Valores adotados nas simulações numéricas

tensão superficial	$\sigma = 0.07 N/m$	saturação irreduzível	$S_{irr} = 0,15$
micro porosidade	$\phi = 0,4$	macro porosidade	$n_f = 0,126$
diâmetro dos microporos	$d_{micro} = 1 \mu m$	diâmetro dos macroporos	$d_{macro} = 10 \mu m$
módulo de Young	$E = 10 MPa$	coeficiente de Poisson	$\nu = 0$
viscosidade da água	$\mu_w = 1,003 \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$		

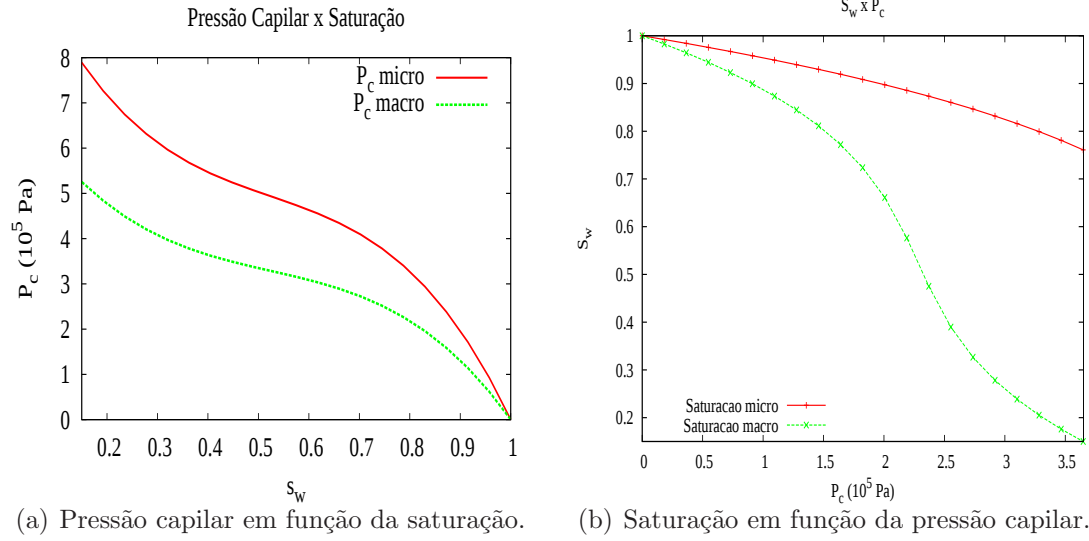


Figura 5.5: Relações entre Pressão capilar e saturação dada por Udell (1985) nos microporos e fraturas.

médias nos blocos e fraturas (4.9), como mostram as Figuras 5.6(a) e 5.6(b). Tal

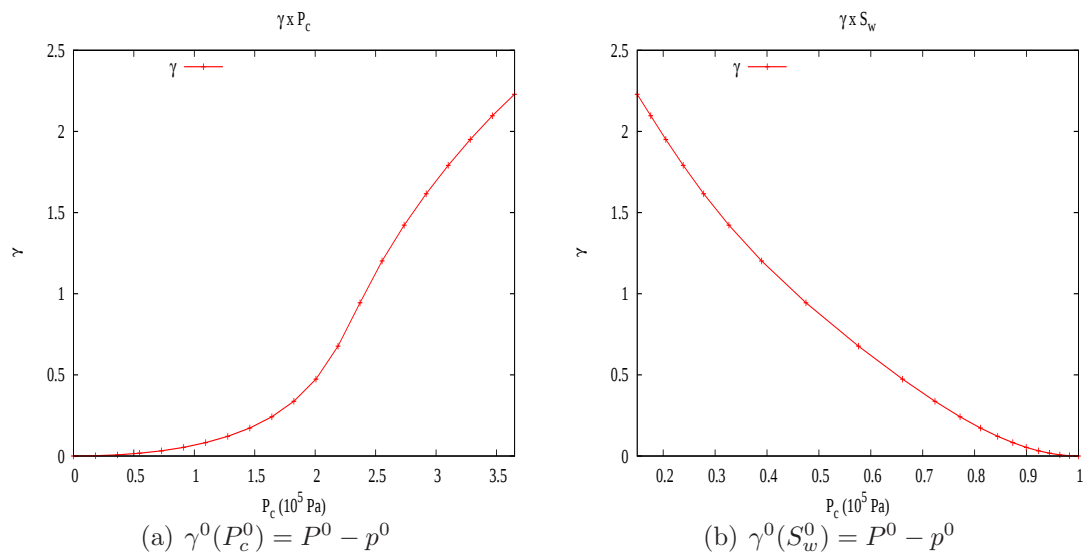


Figura 5.6: Diferença entre as pressões média nas fraturas e blocos γ^0 .

como já havíamos comentado anteriormente, a diferença entre as pressões médias das fraturas e blocos γ^0 atua de maneira compressiva provocando uma compactação da matriz porosa.

A Figura 5.7 ilustra a dependência da macroporosidade n_f com a pressão capilar. Para uma deformação fixa prescrita ao extrairmos a água, de tal forma que P_c^0 aumenta, o efeito de compressão dos blocos devido a γ^0 tende a magnificar levando ao aumento da macroporosidade.

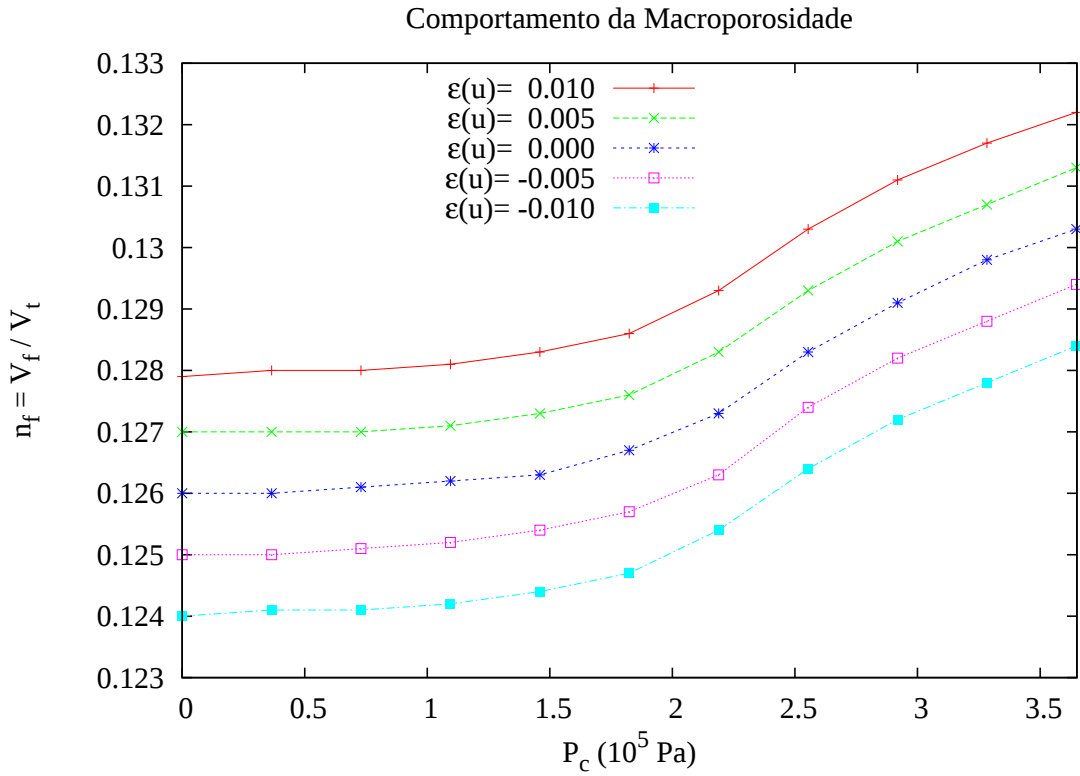


Figura 5.7: Dependência da macroporosidade com relação a P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$

As figuras seguintes ilustram a resposta constitutiva das tensões efetivas via resolução da Equação (4.13). Dado que $\boldsymbol{\alpha} = (n_f \mathbf{I} - \langle \mathcal{C} \mathcal{E}(\boldsymbol{\eta}) \rangle)$, $\mathcal{C}^{eft} = (1 - n_f) \mathcal{C}^m$ e $n_f = n_f(\mathcal{E}(\mathbf{u}^0), P_c^0)$, o tensor das tensões efetivas exibe dependência não linear nas variáveis macroscópicas $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$ e P_c^0 . As Figuras 5.8, 5.9 e 5.10 mostram a componente volumétrica das tensões efetivas $\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}^{eft}$ como função de $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$ e P_c^0 para as três geometrias de célula adotadas. Podemos observar que a geometria dos poros praticamente não exerce influência significativa sobre os resultados. Analisando a influência da pressão capilar sobre as tensões efetivas podemos obser-

var que para um dado estado de deformação fixo (Figura: 5.8) as tensões tendem a aumentar (caminho AB) com P_c^0 . Durante o processo de extração de água a matriz porosa tende a contrair acarretando tensões de tração para manter a deformação fixa. Para P_c^0 fixo ao comprimirmos a matriz as tensões efetivas crescem negativamente (caminho BC) o que é esperado para um material elástico.

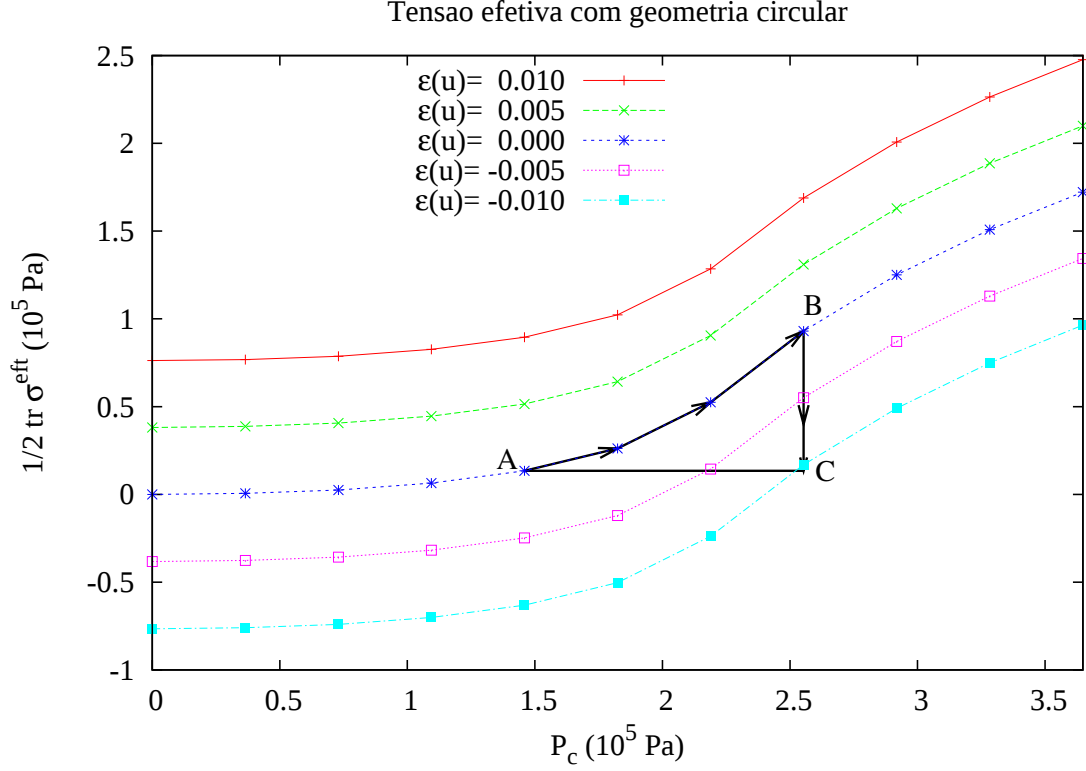


Figura 5.8: Tensão efetiva em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria circular e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$.

As Figuras 5.11, 5.12 e 5.13 mostram a dependência da deformação volumétrica com a pressão capilar P_c^0 e com a tensão de contato $\mathbf{T} - P^0$ para as três geometrias de célula adotadas. Em particular, durante o processo de extração de água, caracterizado pelo aumento de P_c^0 , a matriz porosa tende a contrair de forma não linear. Tal fato ratifica os resultados obtidos por Fredlund & Rahardjo (1993).

As Figuras 5.14, 5.15 e 5.16 mostram a resposta constitutiva do coeficiente de retardamento do fluxo R_α^0 dado por (4.21). À medida que extraímos água o meio poroso tende a aumentar a capacidade de reter o fluxo de água na porosidade

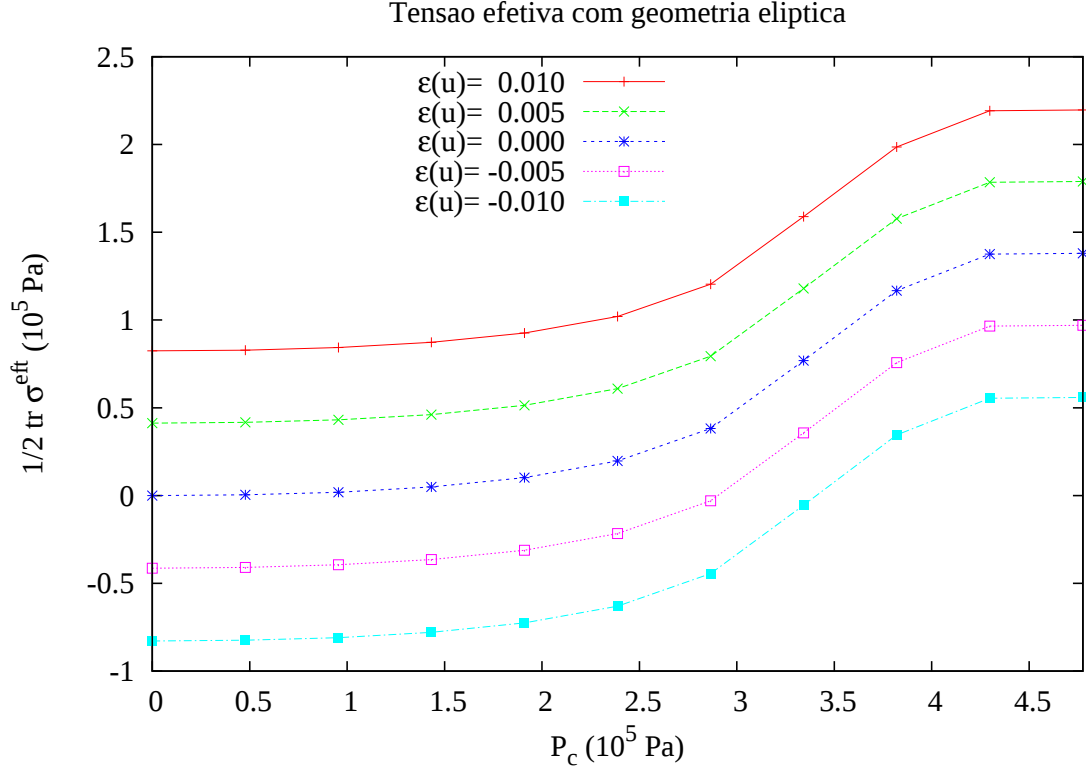


Figura 5.9: Tensão efetiva em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria elíptica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,091$.

secundária dos blocos. Podemos ainda observar que este retardamento é mais sensível com relação à variação da pressão capilar do que com relação as tensões intergranulares. Isto se dá devido ao fato das tensões intergranulares influenciar o coeficiente de retardamento apenas através da variação da macroporosidade n_f enquanto que a pressão capilar também influencia o retardamento do fluxo através do coeficiente de partição $K_d := \langle \phi^0 \rangle^m \frac{S_w^0}{S_w^0}$.

Finalmente as Figuras 5.17, 5.18 e 5.19 apresentam o comportamento da difusividade hidráulica da equação de Richards para as três geometrias consideradas. Observamos que à medida que extraímos a água o termo de difusividade tende a diminuir dificultando o movimento desta no meio poroso. Essa diminuição na difusividade é fortemente influenciada pela permeabilidade relativa a qual é dada por $K_{rw}(S_w^0) = (S_w^0)^3$ (Udell, 1985). Observamos que a deformação macroscópica tende a diminuir a sua influência sobre a difusividade quando a saturação tende a atingir o estágio irreduzível $S_{irr}^0 = 0,15$. Isto se dá pelo fato da difusividade ser for-

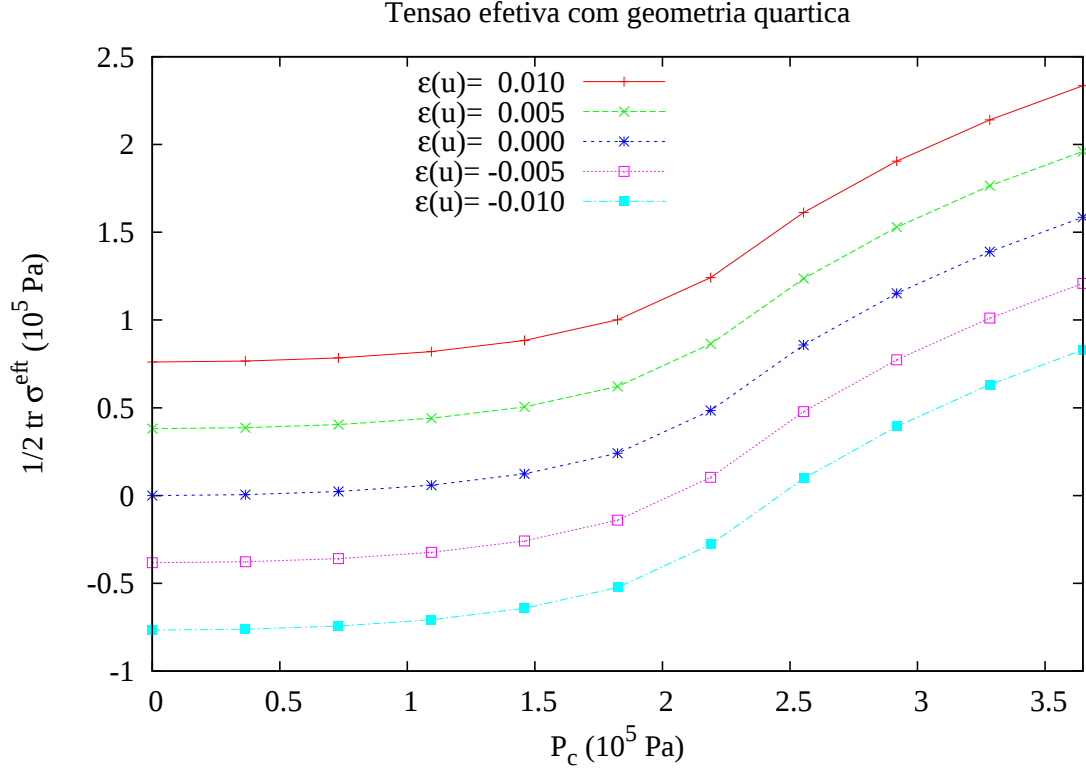


Figura 5.10: Tensão efetiva em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria quártica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$.

temente influenciada pelo grau de saturação de forma altamente não linear típico da equação de Richards. Quando reduzimos a saturação de forma que a fase água torna-se praticamente descontínua a difusividade tende a atingir valores próximos de zero. Nesta condição a variação do tamanho dos poros devido à deformação macroscópica não é suficiente para aumentar a difusividade. As Figuras 5.20, 5.21 e 5.22 mostram a dependência da difusividade com S_w^0 . A medida que S_w^0 e n_f aumentam, D tende também a aumentar de forma não linear.

Deformacao macroscopica com geometria circular

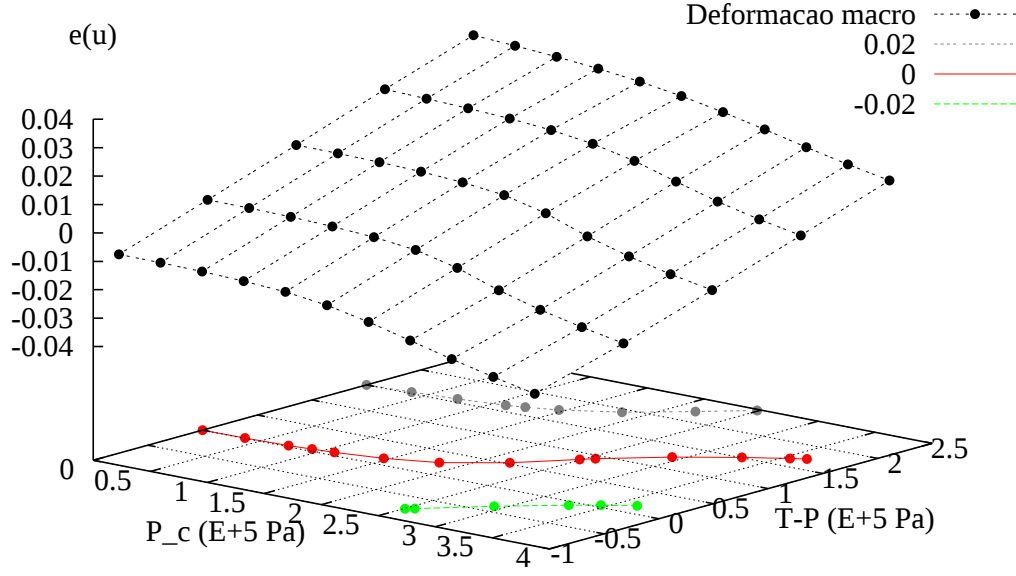


Figura 5.11: Deformação em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria circular e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$.

Deformacao macroscopica com geometria eliptica

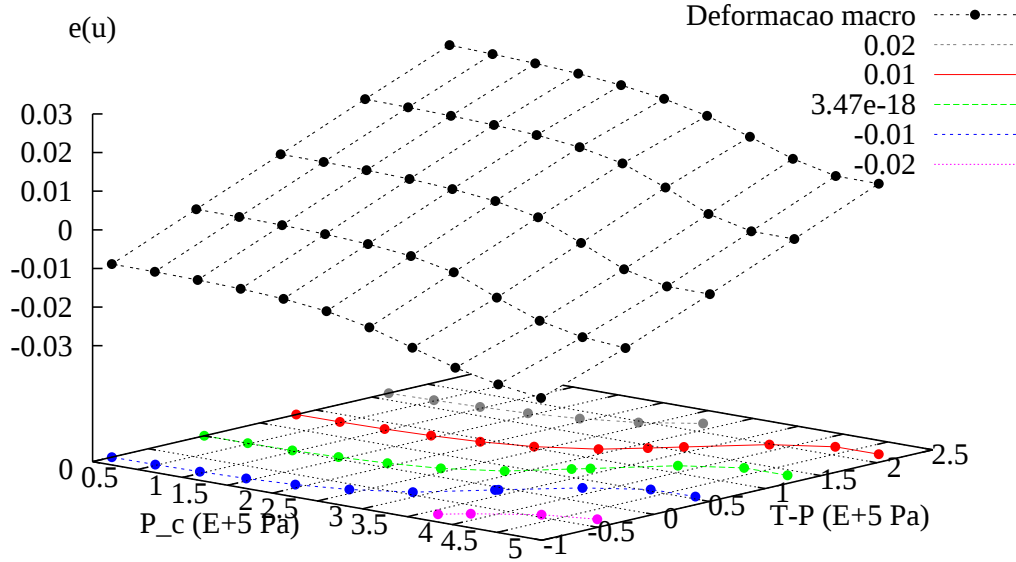


Figura 5.12: Deformação em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria elíptica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,091$.

Deformacao macroscopica com geometria quartica

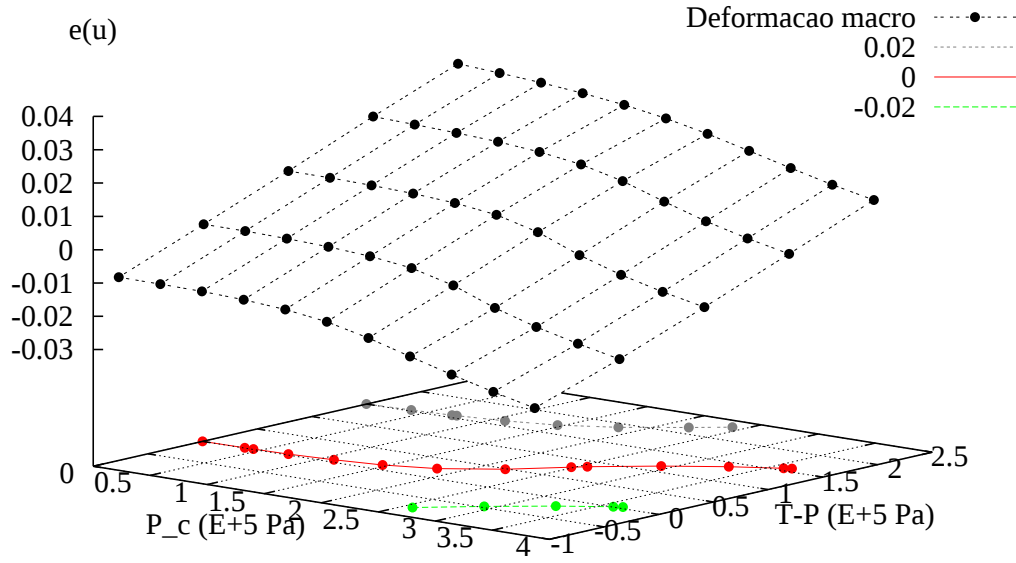


Figura 5.13: Deformação em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria quártica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0,126$.

Coeficiente de retardamento com geometria circular

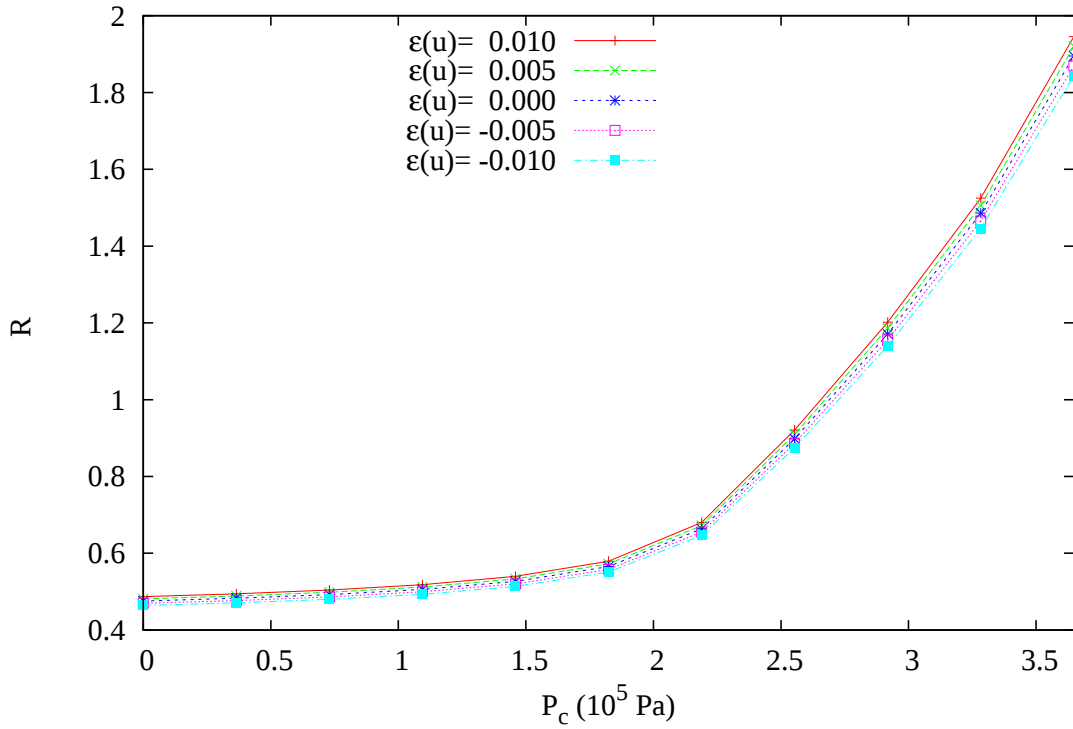


Figura 5.14: Coeficiente de retardamento em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria circular e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0.126$.

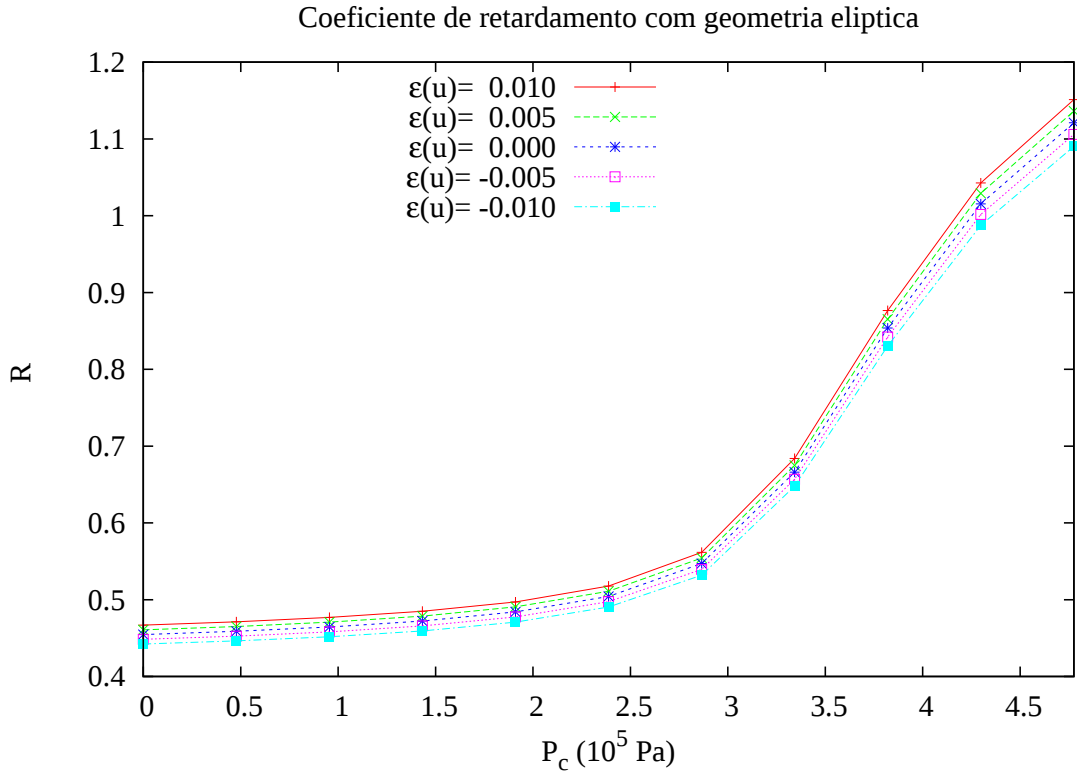


Figura 5.15: Coeficiente de retardamento em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria elíptica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0.091$.

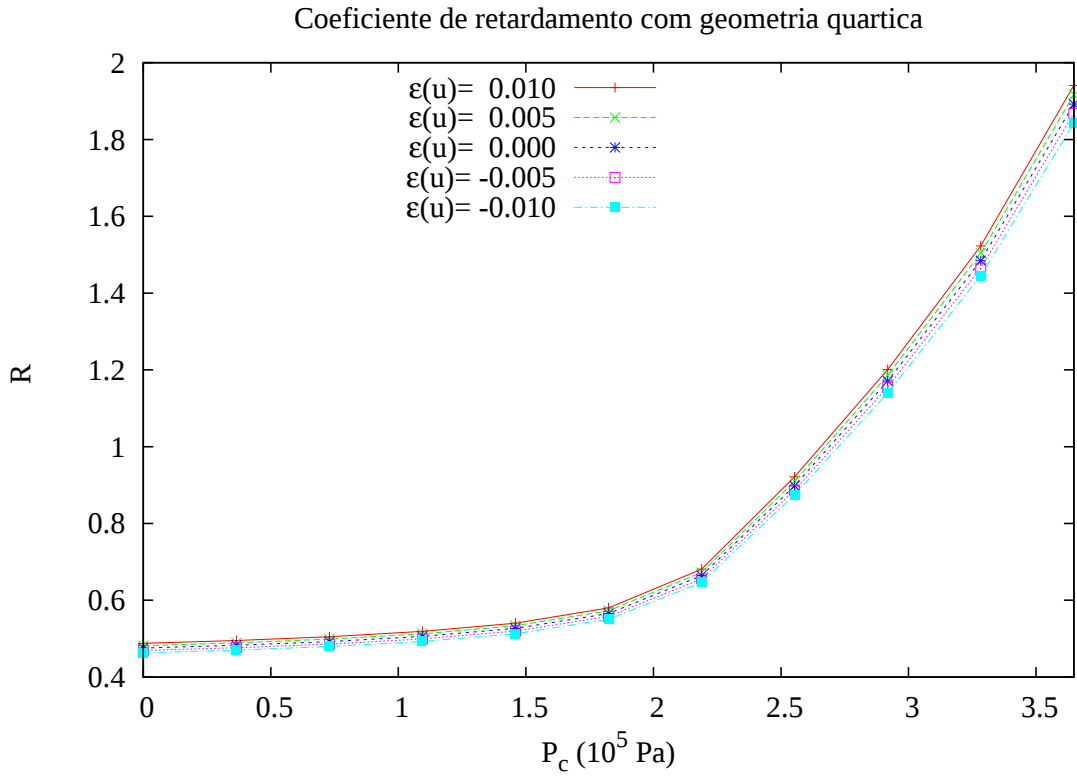


Figura 5.16: Coeficiente de retardamento em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria quártica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0.126$.

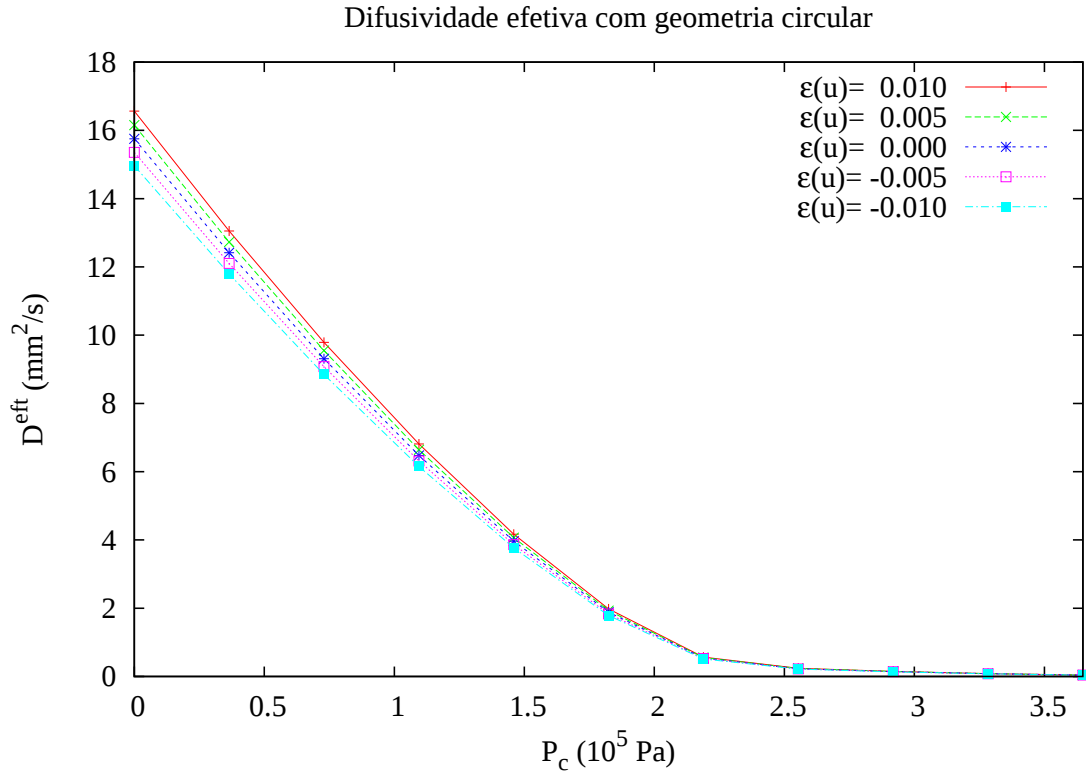


Figura 5.17: Difusividade em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria circular e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0.126$.

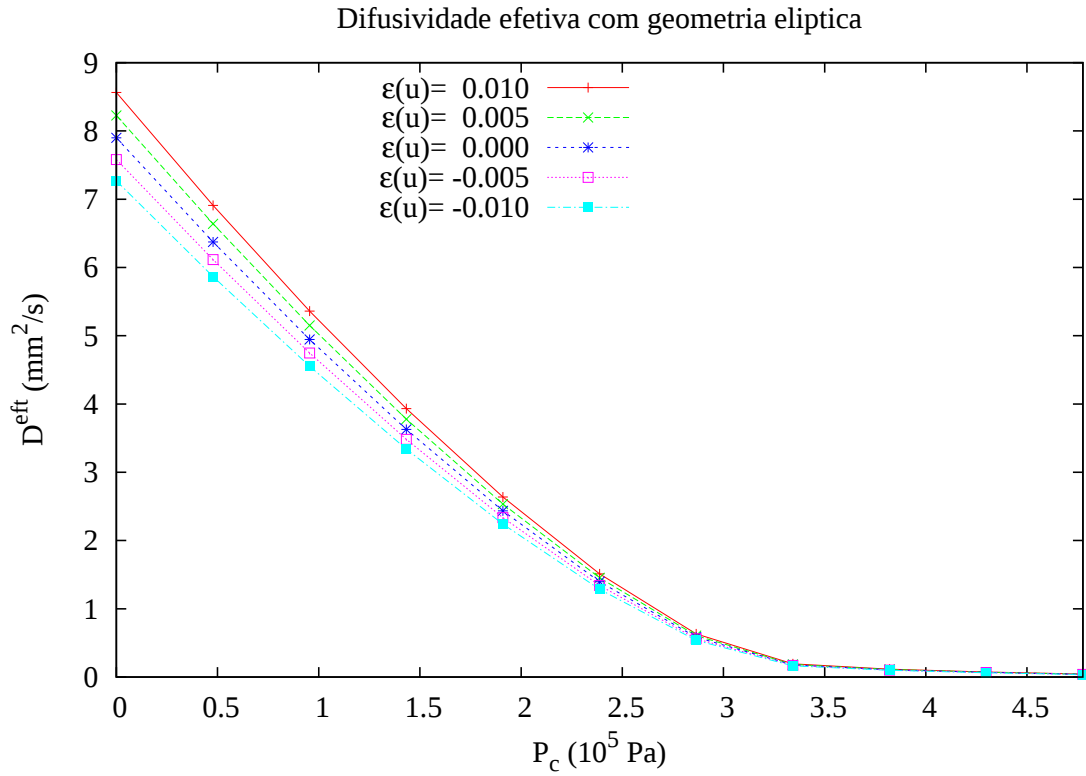


Figura 5.18: Difusividade em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria elíptica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0.091$.

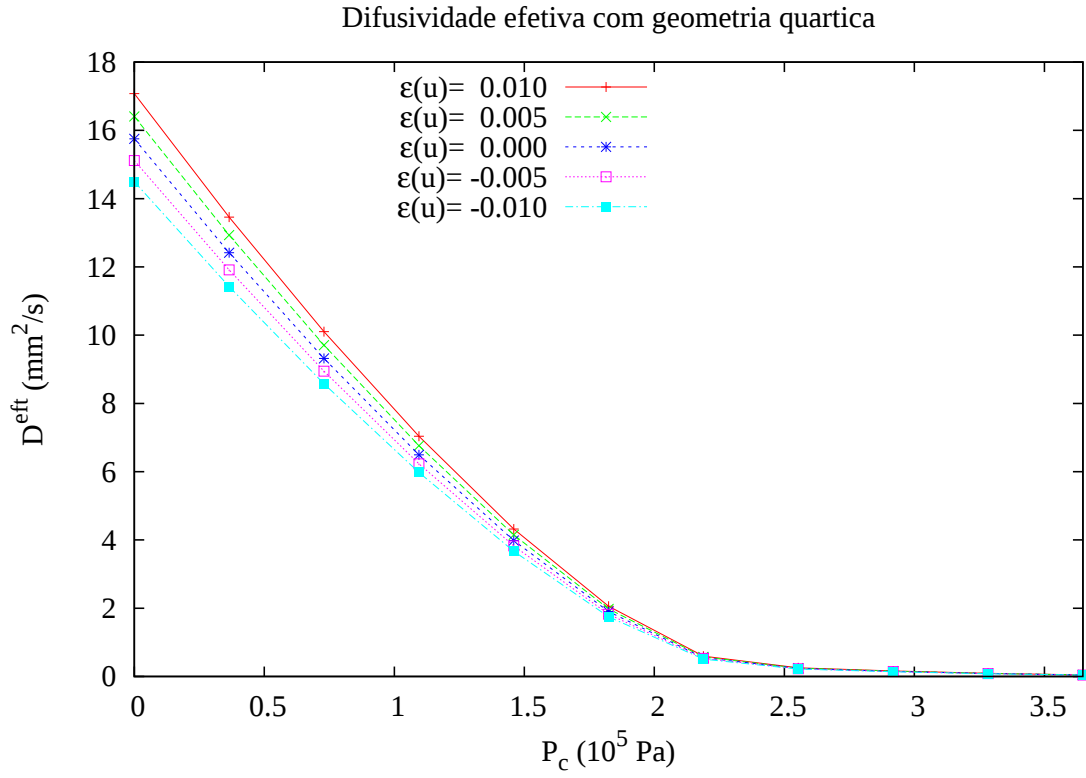


Figura 5.19: Difusividade em função de P_c^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria quártica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0.126$.

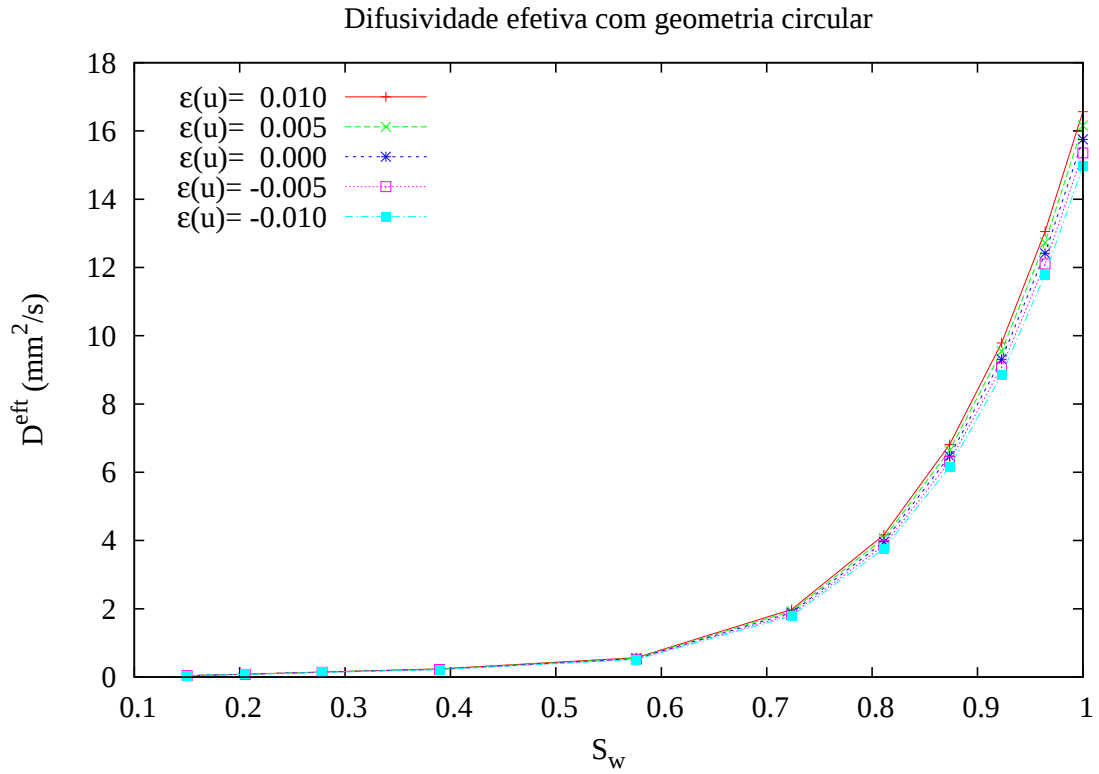


Figura 5.20: Difusividade em função de S_w^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria circular e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0.126$.

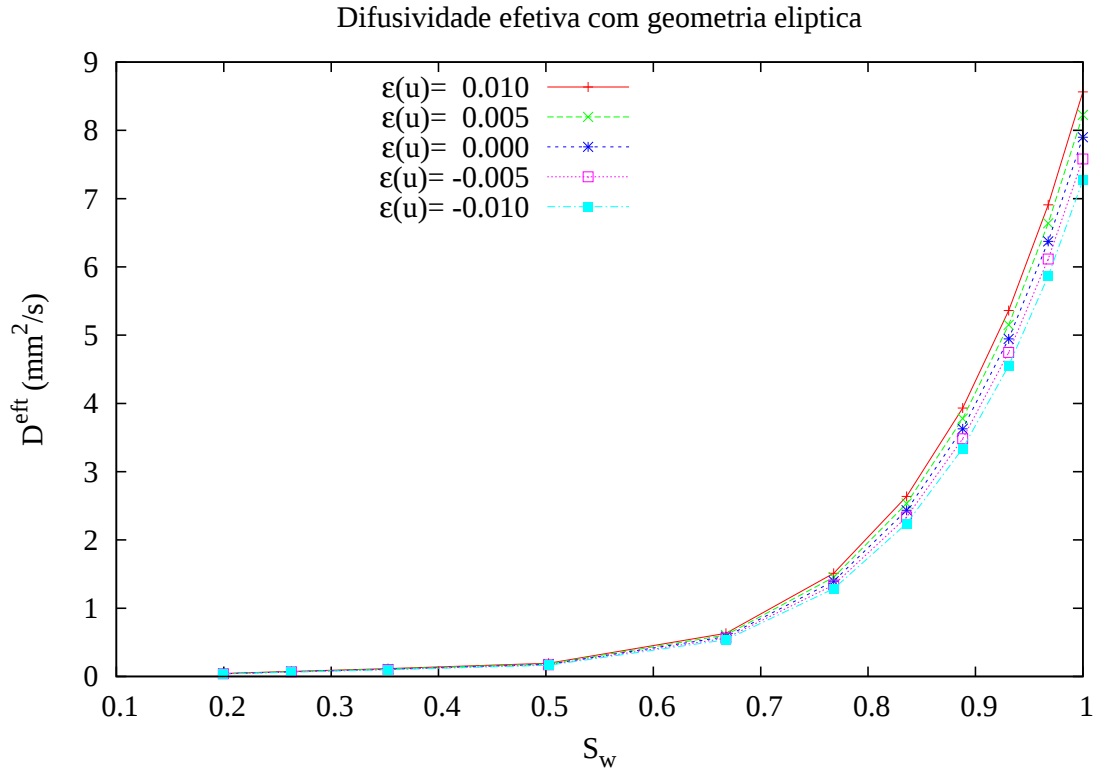


Figura 5.21: Difusividade em função de S_w^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria elíptica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0.091$.

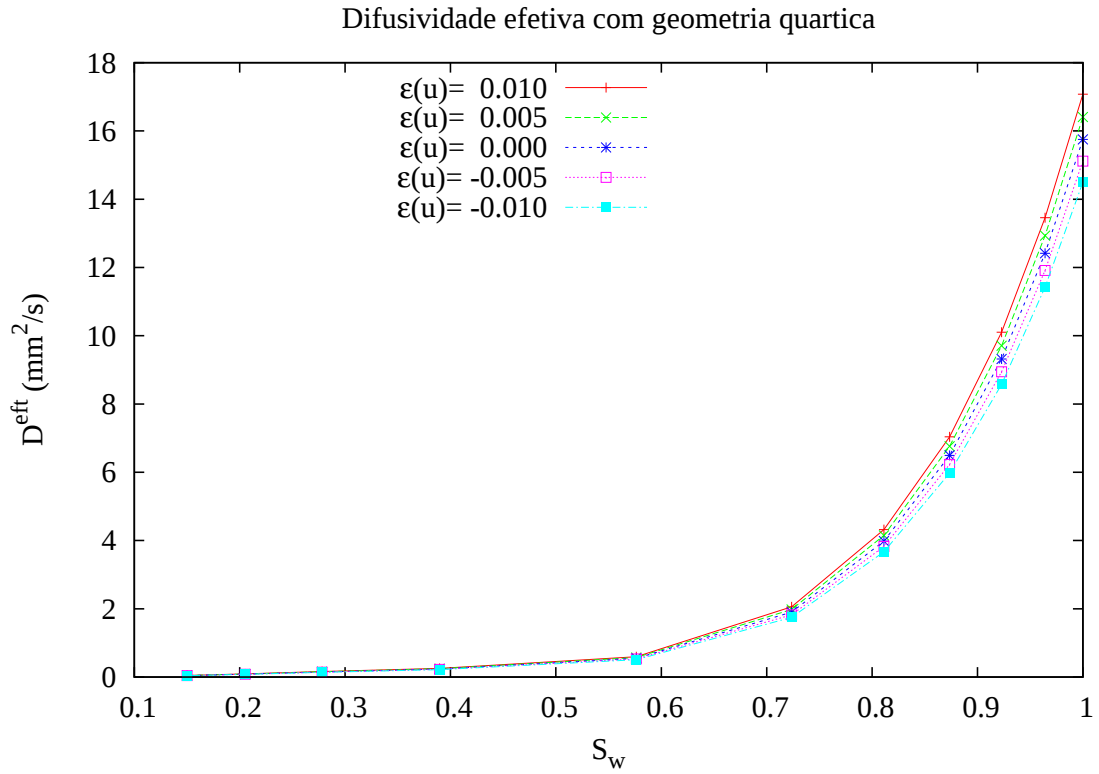


Figura 5.22: Difusividade em função de S_w^0 e $\mathcal{E}_x(\mathbf{u}^0)$: Geometria quártica e porosidade inicial $\bar{n}_f = 0.126$.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho propusemos um modelo a duas escalas para descrever o comportamento de meios poroelásticos fraturados saturados por dois fluidos Newtonianos imiscíveis tais como água e óleo. No contexto da modelagem proposta as equações macroscópicas foram derivadas pela homogeneização do modelo micro-mecânico. O processo de homogeneização conduziu a uma hierarquia de modelos macroscópicos com equações constitutivas dos parâmetros efetivos, dotadas de informação proveniente da micro escala através das soluções de problemas postos no domínio da célula periódica.

Resolvendo numericamente os problemas de célula foram reconstruídas três equações constitutivas para o coeficiente de retardamento do fluxo, a difusividade que surge na aproximação de Richards e o tensor das tensões efetivas. No modelo termodinâmico reconstruído as equações efetivas surgem descritas por duas variáveis independentes, as quais nas representações propostas tomamos como a deformação macroscópica da matriz porosa $\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0)$ e a pressão capilar P_c^0 . Na aproximação de Richards, onde a fase ar encontra-se a pressão atmosférica, a saturação é eliminada em função da pressão da fase aquosa P_w^0 conduzindo à formulação alternativa em termos de $\{\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0), P_w^0\}$. Neste contexto apresentamos também a representação alternativa da equação de Richards em termos do par $\{\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u}^0), S_w^0\}$. Resolvendo os problemas locais pelo métodos dos elementos finitos reconstruímos numericamente as leis constitutivas dos coeficientes efetivos.

Dentre os resultados homogeneizados obtidos ressaltamos a lei constitutiva para a tensão efetiva macroscópica. Além da dependência linear na deformação da matriz porosa, mostramos que a descontinuidade da porosidade e da saturação entre blocos e fraturas conduz a uma dependência adicional na saturação. Tal evidência necessita de uma validação experimental, mas claramente apresenta uma física inovadora que pode ser futuramente mais elaborada para melhor descrição de escoamentos bifásicos em meios poroelásticos fissurados.

Como trabalhos futuros, propomos inicialmente uma simulação do modelo macroscópico aplicado ao problema de extração de água em aquíferos rasos, de forma que as leis constitutivas obtidas sejam utilizadas. Para o doutorado, propomos a aplicação desta teoria em meios com dois níveis de porosidade não saturados, que exibem propriedades de inchamentos na presença de soluções eletrolíticas tais como as argilas, cartilagem e materiais poliméricos.

Referências Bibliográficas

- Alonso, E. E., Gens, A., Josa, A., 1990. A constitutive model for partially saturated soils. *Geotechnique* 40, 405–430.
- Arbogast, T., 1992. A simplified dual-porosity model for two-phase flow. *Computational Methods in Water Resources IX* 2, 419–426.
- Arbogast, T., Douglas, J. J., 1988. *Modeling of naturally fractured reservoirs by formal homogenization techniques*. Tech. Rep. 81, Institute for Mathematics and its Applications at the University of Minnesota.
- Auriault, J. L., 1990. Behaviour of Porous Saturated Deformable Media. *Geomaterials: Constitutive Equations and Modeling*, 311–328.
- Barenblatt, G. I., Zheltov, I. P., Kochina, I. N., 1960. Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks [strata]. *Prikl. Mat. Mekh* 24, 852–864.
- Bear, J., 1972. *Dynamics of fluids in porous media*. American Elsevier Environmental Science Series.
- Biot, M., 1955. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic soil. *J. Appl. Phys* 26, 182–185.
- Biot, M., Willis, D. G., 1957. The elastic coefficients of the theory of consolidation. *J. Appl. Mech.* 79, 594–601.
- Biot, M. A., February 1941. General Theory of Three-Dimensional Consolidation. *Journal of Applied Physics* 12, 155–164.

- Bishop, A. W., 1959. The Principle of Effective Stress. *Teknisk Ukeblad* 106(39), 859–863.
- Bolzon, G., Schrefler, B. A., Zienkiewicz, O. C., 1996. Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states. *Géotechnique* 46, 279–289.
- Brezzi, F., Fortin, M., 1991. *Mixed and hybrid finite element methods*. New York Springer-Verlag.
- Chamilco, G. E. I., Abril 2006. *Modelagem Computacional Micromecânica em Poroviscoelasticidade*. Ph.D. thesis, LNCC/MCT, Petrópolis R.J. Brasil.
- Chen, W., Han, D. J., 1988. *Plasticity for Structural Engineers*. Springer-Verlag New York.
- Cui, Y. J., Delage, P., Sultain, N., 1995. An elasto-plastic model for compacted soil. *Proc. 1st. Int. Conf. on Unsaturated Soils* 3, 703–709.
- de Marsily, G., 1986. *Quantitative hidrogeology*. Academic Press.
- Delwyn, T. T., Fredlund, G., Krahn, J., 1998. A Numerical study of coupled consolidation in unsaturated soil. *Can. Geotech. J.* 35, 926–937.
- Desbarats, A. J., Boyle, D. R., Stapinsky, M., Robin, M. J. L., 1999. A dual-porosity model for water level response to atmospheric loading in wells tapping fractured rock aquifers. *Water Resources Research* 35, 1495–1505.
- Douglas, J. J., Arbogast, T., 1990. "Dual Porosity Models for Flow in Naturally Fractured Reservoirs". In: *Dynamics of Fluids in Hierarchical Porous Media*. Chapter 7, Academic Press Limited.
- Douglas, J. J., Paes-Leme, P. J., Hensley, J. L., October 1991. A limit form of the equations for immiscible displacement in a fractured reservoir. *Transport in Porous Media* 6, 549–565.

- Ehlers, W., Graf, T., Ammann, M., 2004. Deformation and localization analysis of partially saturated soil. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 193, 2885–2910.
- Elsworth, D., Bai, M., 1992. Flow-deformation response of dual-porosity media. *Journal of Geotechnical Engineering* 118, 107–124.
- Evans, L. C., 1998. *Partial Difrential Equations*. American Mathematical Society.
- Fredlund, D. G., Morgenstern, N. R., May 1977. Stress State Variables for Unsaturated Soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 103, 447–466.
- Fredlund, D. G., Rahardjo, H., 1993. *Soil mechanics for unsaturated soils*. Jhon Wiley e Sons INC.
- Ghafouri, R. R., Lewis, R. W., 1996. A Finite Element Double Porosity Model for Heterogeneous Deformable Porous Media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 20, 831–844.
- Hughes, J. R. T., 1987. *The Finite Element Method*. Prentice-Hall.
- Leverett, M., 1941. Capillary behavior in porous solids. *AIME Transactions* 142, 152–169.
- Lewis, R. W., Ghafouri, H. R., 1997. A novel finite element double porosity model for multiphase flow through deformable fractured porous media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 21, 789–816.
- Lewis, R. W., Schrefler, B. A., 1982. A finite element simulation of the subsidence of gas reservoirs undergoing a water drive. *Finite Element in Fluids* 4, 179–199.
- Mei, C. C., Auriault, J.-L., Dez. 1989. Mechanics of Heterogeneous Porous Media With Several Spatial Scales. *Royal Society of London Proceedings Series A* 426, 391–423.

- Murad, M. A., Guerreiro, J. N., Loula, A. F. D., 2001. Micromechanical computational modeling of secondary cons. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 190, 1985–2016.
- Obregon, J. A. L., Dezebrom 2003. *Modelagem Computacional Micromecânica de Poroplasticidade*. Ph.D. thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro R.J. Brasil.
- Pao, W. K. S., Lewis, R. W., 2002. Tree-dimensional finite element simulation of three-phase flow in a deforming fissured reservoir. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 191, 2631–2659.
- Pirson, S. J., 1953. Performance of Fractured Oil Reservoirs. *Bull. Am. Assoc. PetCoussy.1995.MPCrol. Geologists* 37, 232–244.
- Sanchez-Palencia, E., 1980. *Nom-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- Santagiuliana, R., Schrefler, B. A., 2006. Enhancing the Bolzon-Schrefler-Zienkiewics. *Transport in Porous Media* 65, 1–30.
- Schrefler, B. A., Scotta, R., 2001. A fully coupled dynamic model for two-phase flow in deformable porous media. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 3223–3246.
- Terzaghi, K., 1942. Theoretical Soil Mechanics. *John Wiley and Sons*.
- Udell, K. S., Fev. 1985. Heat transfer in porous media considering phase change and capillarity - The heat pipe effect. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 28, 485–495.
- Warren, J. E., Root, P. J., 1963. The Behaviour of Naturally Fractured Reservoirs. *Soc. Petrol. Eng. J.* 3, 245–255.
- Wheeler, S. J., Sivakumar, V., 1995. An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soil. *Geotechnique* 45, 35–53.

- Whitaker, S., 1986. Flow in porous media III: Deformable Media. *Transport in Porous Media* 1, 127–154.
- Whitaker, S., 1999. "The Method of Volume Averaging". In: *Theory and Applications of Transport in Porous Media*. Kluwer Academic publishers.
- Wilson, R. K., Aifantis, E. C., 1982. On the theory of consolidation with double porosity. *Int. J. Engng Sci.* 20, 1009–10035.
- Zimmerman, R. W., Chen, G., Hadgu, T., Bodvarsson, G. S., Jul. 1993. A numerical dual-porosity model with semianalytical treatment of fracture/matrix flow. *Water Resources Research* 29, 2127–2138.
- Zimmerman, R. W., Hadgu, T., Bodvarsson, G. S., 1996. A new lumped-parameter model for flow in unsaturated dual-porosity media. *Advances in Water Resources* 19, 317–327.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)