

Laboratório
Nacional de
Computação
Científica

Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Incompatibilidade Cinemática, Imersão de
Domínios e Modelagem Constitutiva de
Multiescala: Nexo com a Modelagem do Sistema
Cardiovascular**

Por

Pablo Javier Blanco

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

MAIO DE 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

INCOMPATIBILIDADE CINEMÁTICA, IMERSÃO DE DOMÍNIOS E
MODELAGEM CONSTITUTIVA DE MULTIESCALA: NEXO COM A
MODELAGEM DO SISTEMA CARDIOVASCULAR

Pablo Javier Blanco

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DE FORMAÇÃO
DE RECURSOS HUMANOS DO LABORATÓRIO NACIONAL DE COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MODELAGEM COMPUTACIONAL.

DOUTOR EM CIÊNCIAS

Aprovado por:

Prof. Raúl Antonino Feijóo, Sc.D. (PRESIDENTE)

Prof. Alfio Quarteroni, Ph.D.

Prof. Enrique Zuazua Iriondo, Ph.D.

Prof. Claudio Padra, Ph.D.

Prof. Gustavo Carlos Buscaglia, Ph.D.

Prof. Edgardo Omar Taroco Aliano, Sc.D.

Prof. Gustavo Alberto Perla Menzala, Ph.D.

Prof. Abimael Fernando Dourado Loula, Sc.D.

Prof. Jaime Edilberto Muñoz Rivera, Ph.D.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

MAIO DE 2008

Blanco, Pablo Javier

B641i Incompatibilidade cinemática, imersão de domínios e modelagem constitutiva de multiescala: nexa com a modelagem do sistema cardiovascular / Pablo Javier Blanco. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2008.

xxii, 324 p. : il.; 29.7 cm

Orientador: Raúl Antonino Feijóo

Tese (D.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2008.

1. Sistema cardiovascular 2. Modelos matemáticos 3. Incompatibilidade cinemática 4. Modelos multidimensionais 5. Imersão de domínios 6. Interação fluido-estrutura 7. Modelagem constitutiva de multiescala 8. Formulações variacionais avançadas I. Feijóo, Raúl Antonino II. MCT/LNCC III. Título

CDD – 612.118 1

Resumo da tese submetida à Coordenação de Pós-Graduação do Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

INCOMPATIBILIDADE CINEMÁTICA, IMERSÃO DE DOMÍNIOS E MODELAGEM CONSTITUTIVA DE MULTIESCALA: NEXO COM A MODELAGEM DO SISTEMA CARDIOVASCULAR

Pablo Javier Blanco

Maior/2008

Orientador: Raúl Antonino Feijóo, Diretor de Tese

O objetivo do presente trabalho é estabelecer bases teóricas bem fundadas, dentro do contexto variacional, a fim de dar unificação a diversos conceitos que surgem nas seguintes áreas: (i) a modelagem empregando modelos cinematicamente incompatíveis, (ii) a modelagem da interação fluido-estrutura usando métodos de domínios imersos e (iii) a modelagem constitutiva de materiais por meio de técnicas de multiescala. A motivação para abordar cada uma destas problemáticas, e o ponto em comum entre elas, é a modelagem do sistema cardiovascular humano. Portanto, a tese está dividida em três partes.

Em primeiro lugar, estabelecem-se as bases variacionais para abordar de forma sistemática a formulação do problema de acoplamento de modelos que possuem cinemáticas incompatíveis. Esta maneira de tratar o problema permite estender os conceitos de forma direta para lidar com o acoplamento de modelos de diferente dimensão. Logo, estes conceitos são aplicados em duas situações, no acoplamento de modelos estruturais com diferentes cinemáticas subjacentes e, principalmente, no acoplamento de modelos de fluidodinâmica de diferente dimensão visando a modelagem do escoamento do sangue no sistema cardiovascular humano. Diversos exemplos e situações são contemplados neste último caso.

Em segundo lugar, trata-se o problema de interação fluido-estrutura empregando idéias de imersão de domínios. Sempre dentro de um marco variacional claro e construtivo, colocam-se os princípios variacionais que governam a interação de um fluido com sólidos de forma arbitrária e com sólidos que podem ser caracterizados como estruturas delgadas. Assim, por um lado desenvolve-se o denominado método de domínios imersos que generaliza o método de elementos finitos imersos e o método de domínios fictícios. Por outro lado, constrói-se o método de cascas imersas que generaliza o conhecido método de contornos imersos. Apresentam-se também diversos exemplos numéricos de interação entre um fluido e corpos rígidos.

Em terceiro e último lugar, trabalha-se com a modelagem constitutiva empregando técnicas de multiescala, novamente empregando o ferramental variacional. Aqui revisita-se a base teórica existente e realiza-se uma extensão das idéias usando princípios variacionais duais. Além disso, fornecem-se diversas implementações computacionais, as quais são usadas para apresentar dois exemplos, o primeiro na modelagem de materiais porosos e o segundo na modelagem do tecido biológico encontrado na conformação da parede arterial.

Em todos os casos, o objetivo não é só prover uma forma final para a formulação de um problema, mas também desvendar o processo de construção que há por trás dos modelos, mostrando passo a passo as considerações utilizadas assim como as conseqüências de tais hipóteses. Com isto procura-se obter um ganho no entendimento dos conceitos teóricos envolvidos, assim como uma maior facilidade na aplicação destas idéias a novas situações.

Abstract of a thesis submitted to the Postgraduate Department of the National Laboratory for Scientific Computing - LNCC/MCT as a partial fulfilment of the requirements for the degree of Doctor in Sciences (D.Sc.)

KINEMATICAL INCOMPATIBILITY, IMMERSED DOMAINS AND MULTISCALE CONSTITUTIVE MODELING: NEXUS WITH THE MODELING OF THE CARDIOVASCULAR SYSTEM

Pablo Javier Blanco

May/2008

Advisor: Raúl Antonino Feijóo, Thesis Advisor

The aim of the present work is to establish well-founded theoretical bases, within the variational context, with the purpose of providing the unification of several concepts that arise when: (i) modeling by means of kinematically incompatible models, (ii) modeling the fluid–structure interaction problem using immersed domains methods and (iii) modeling the constitutive response of materials via multiscale techniques. The motivation to tackle each one of these problems, and also a situation in which they share points in common, is the modeling of the cardiovascular system. Then, the thesis is divided into three parts.

Firstly, the variational bases to give a systematic approach to the problem of coupling models that possess incompatible kinematics are established. The way in which the problem is formulated allows us to extend the main concepts in a straightforward manner to address the coupling of models with different dimensions. Furthermore, these ideas are applied in two situations, in the coupling of structural models with different underlying kinematics and, primarily, in the coupling of flow models targeting the blood flow simulation in the cardiovascular system. Several examples and situations are covered in this latter case.

Secondly, the attention is directed to the fluid–structure interaction problem when using the concept of immersed domains. Always in a variational setting, the principles that govern the interaction between a fluid and a solid that can be either of arbitrary shape, or a thin structure, are posed. Thus, on one hand the immersed domains method is developed, which generalizes the immersed finite element method and the fictitious domains method. On the other hand, the immersed shell method is developed, which gives a generalization of the well-known immersed boundary method. Here, several numerical examples comprising the interaction of a fluid and a rigid body are presented.

Finally, the problem of the constitutive modeling using multiscale techniques is dealt with, once more, through a variational approach. Here the existing theory is revisited and an extension of the foundations is carried out by employing duality arguments, that is, dual variational principles. Moreover, several computational implementations are given in detail, which are used to present two examples, the first one shows the constitutive modeling of a porous material, and the second one shows the constitutive modeling of a biological tissue as the one found in the conformation of the arterial wall.

In all cases, the goal is not just to provide a final form for the governing variational formulation of a problem, but also to unveil the construction process behind the models, following a step-by-step approach so as to analyze all the considerations used, as well as the outcomes of such hypotheses. This shall help in order to gain insight into the underlying theoretical concepts, and to facilitate the application of these novel ideas to new situations, as well.

Prefácio

A conclusão desta tese representa o fruto de vários anos de trabalho e aprendizado em diversas áreas da ciência, todas elas de índole exata. Desde meus estágios na carreira de Engenharia Eletromecânica, a modelagem computacional me tem chamado poderosamente a atenção. Esta curiosidade não somente tem estado apoiada nos tão diversos e desafiadores problemas que devem ser abordados ao trabalhar na área, mas também na enorme potencialidade que a ciência da modelagem e simulação computacional tem adquirido na atualidade, a tal ponto que os seus resultados influenciam quase de forma direta nossas vidas. A isto deve ser acrescentado o aumento considerável das áreas de atuação nas quais a modelagem computacional tem começado a se fazer presente, trazendo à tona um futuro cada vez mais promissor em termos de resultados com relação às linhas de pesquisa já existentes, às recentes e às que futuramente surgirão.

Na hora dos agradecimentos eu quero dedicar as palavras em ordem cronológica de aparição, indo do contexto profissional ao pessoal. As primeiras palavras são portanto dedicadas a Santiago, quem fora meu mentor durante a carreira de Engenharia. Foi ele quem me iniciou, com muita paciência e absoluta dedicação, na ciência da modelagem computacional, motivando-me a trabalhar na área. Em vistas de meu interesse por continuar no âmbito da pesquisa, Santiago incentivou-me a conhecer o LNCC a fim de desenvolver meus estudos de Doutorado. O LNCC acolheu-me como recém-graduado através de Raúl, meu segundo mentor, e quem me tem impulsado a fazer, a expressar, a projetar, a discutir e a resolver toda classe de problemas e desafios. Ele me tem ensinado, tanto em seus cursos como em discussões pessoais, um conjunto de conhecimentos que não se encontram nos livros. Além do mais, Raúl me tem transmitido algo que considero importantíssimo, que é a forma de entender a pesquisa e, portanto, de trabalhar. Entretanto, não por estarem no contexto profissional Santiago e Raúl são somente colegas de trabalho. Muito pelo contrário, progressivamente eles têm-se transformado em grandes amigos. Trabalhando com Raúl descobri também uma série de pessoas que, se perguntar quem são, ele dirá que constituem o seu grupo de trabalho. E pela forma em que todos se relacionam mais do que uma equipe de trabalho é uma turma de amigos que trabalham juntos. Eles são Edgardo, André, Eduardo, Enzo, Claudio e, desde já, Santiago. Todos eles, ou bem fizeram parte de forma indireta através da minha formação participando de seus cursos (Edgardo, André, Eduardo, Claudio), ou participaram ativamente em trabalhos conjuntos que fazem parte desta tese (Santiago, Eduardo, Enzo). Um aspecto importante de ter estado, e continuar, inserido em um grupo de trabalho assim (parafrazeando a Raúl) é que é possível não só elevar o nível da pesquisa, mas também dispor de um ambiente de trabalho de confiança no qual estar apoiado, aspecto que não é trivial em absoluto. No marco profissional devo agradecer mais uma vez a Raúl por me ter permitido colaborar em um grupo de trabalho como o HeMoLab junto com todas as pessoas ali envolvidas. Estas atividades têm alavancado outras facetas da minha formação fora a parte científica estritamente relacionada aos temas da presente tese. Finalmente quero agradecer ao LNCC

pelo apoio financeiro provido durante estes anos, possibilitando a conclusão em tempo e forma desta tese. Passando aos agradecimentos pessoais, quero mencionar em primeiro lugar à minha família à qual dou todo o crédito na minha formação tanto pessoal como profissional devido ao constante e incondicional apoio. Meus pais, Sara e Carlos, têm sido e continuarão a ser sempre minha inspiração primeira, ao mesmo tempo que depositaram em mim toda a sua confiança e entusiasmo, e por isto agradeço-lhes com todo o coração. Meus irmãos, Vicky, Lau e Nacho, têm sido por sua vez motivadores para levar adiante desafios e realizações dando o seu acompanhamento contínuo, mesmo à distância, nestes anos todos no Brasil. Também não posso esquecer de meus amigos da alma Diego, Gabriel, Maxi, Nico e Seba, que sempre confiaram em mim e me alentaram a cumprir os meus objetivos e realizar os meus sonhos, e que a cada final de ano me recebem da mesma maneira, com um churrasco (que deveria ir em maiúsculas) como se o tempo nunca tivesse passado. A meus amigos argentinos no Brasil, com os quais compartilhamos inúmeros eventos gastronômicos e desportivos em Itaipava, refiro-me ao casal “tandilense” Gia e Nacho, ao casal paulistano–“porteño” Gaby e Seba e ao casal “cordobés” Ale e Seba, pondo ênfase em meus companheiros de estudo Seba e Nacho quem seguiram de perto a realização desta tese. Por último um agradecimento a Leo e à sua família que me receberam de coração aberto aqui no Brasil e que foram transformando-se em pessoas muito especiais para mim.

Finalmente as palavras mais especiais estão dirigidas a minha princesa Maru que é a mulher que amo, com a qual namorei oito anos e dois meses, e com quem casei faz tão só um ano e quatro meses, mas parece que conheço desde sempre. Maru lançou-se junto comigo, largando todo o que tinha, nesta *aventura* de apostar na mudança de país para encarar *algo desconhecido* e construirmos um futuro juntos. Esse futuro que alguma vez imaginávamos já chegou e os seus frutos nos deixam com a sensação de satisfação e realização. Por isto, e pelo de sempre, é que quero oferecer com todo meu coração a ela os frutos deste trabalho que tão de perto e com todo o seu amor tem acompanhado e contribuído.

PABLO JAVIER BLANCO
MAIO 2008, PETRÓPOLIS - RJ

Para Maru

The mere formulation of a problem is far more essential than its solution, which may be merely a matter of mathematical or experimental skills. To raise new questions, new possibilities, to regard old problems from a new angle requires creative imagination and marks real advances in science.

— ALBERT EINSTEIN (1879–1955)

Sumário

Prefácio	ix
Tabela de Símbolos	xix
Introdução	1
Sobre o título da tese	1
Motivação e importância da problemática	1
Escopo da tese e metodologia de trabalho	3
Objetivos e contribuições da tese	3
Estrutura da tese e conteúdos	6
I Modelos Cinematicamente Incompatíveis	9
1 Acoplamento de modelos cinematicamente incompatíveis	11
1.1 Conceitos gerais sobre incompatibilidade cinemática	14
1.1.1 O princípio variacional estendido	14
1.1.2 Sobre a escolha do parâmetro real γ	17
1.2 O problema de transferência de calor	18
1.2.1 Acoplamento 3D–2D	22
1.2.2 Acoplamento 3D–1D	26
1.2.3 Decaimento da energia	30
1.3 O problema de componentes estruturais	31
1.3.1 Acoplamento 3D–2D: casca de Naghdi	36
1.3.2 Acoplamento 3D–2D: casca de Kirchhoff–Love	45
1.3.3 Acoplamento 3D–1D: viga de Bernoulli	54
1.4 Resultados numéricos para o acoplamento de sólidos	59
1.4.1 Aproximação pelo método dos elementos finitos	60
1.4.2 Caso 1: componente estrutural tipo placa engastada	63
1.4.3 Caso 2: componente estrutural geral	65
1.5 O problema de escoamento de fluidos incompressíveis	67
1.5.1 Acoplamento 3D–2D	72
1.5.2 Acoplamento 3D–1D	77
1.6 Comentários finais	83
2 Modelagem do sistema cardiovascular humano	89
2.1 Construção de um modelo acoplado em hemodinâmica	92
2.1.1 Considerações sobre a porção 1D	92
2.1.2 Considerações sobre a porção 3D	94
2.1.3 A escolha do parâmetro γ e o modelo 3D–1D acoplado final	95
2.1.4 Condições de contorno	97
2.2 Discretização do problema acoplado	99
2.2.1 Técnicas de aproximação sobre a região 1D	100

2.2.2	Técnicas de aproximação sobre a região 3D	103
2.2.3	Fechamento do problema de acoplamento 3D–1D aproximado	105
2.2.4	Problema acoplado 3D–1D monolítico	108
2.2.5	Problema acoplado 3D–1D segregado	111
2.3	Resultados numéricos	111
2.3.1	Casos de teste	112
2.3.1.1	Caso A	113
2.3.1.2	Caso B	113
2.3.1.3	Caso C	116
2.3.1.4	Caso D	116
2.3.2	Estudo sobre as reflexões espúrias	116
2.3.3	Aplicação do modelo 3D–1D no sistema arterial	119
2.3.3.1	Simulação do escoamento na artéria aorta abdominal	121
2.3.3.2	Simulação do escoamento na artéria ilíaca	123
2.3.4	Sensibilidade do pulso cardíaco à presença de uma estenose	124
2.3.5	Sensibilidade do escoamento 3D à lei constitutiva do fluido	130
2.3.6	Sensibilidade do escoamento 3D à curva de ejeção cardíaca	132
2.3.7	Influência do comprimento da região 3D no problema acoplado	140
2.3.8	Sensibilidade do pulso cardíaco à presença de um aneurisma	146
2.3.9	Esquema segregado contra esquema monolítico	150
2.4	O sistema HeMoLab	150
2.4.1	Estrutura e principais características do sistema HeMoLab	152
2.4.2	Tecnologias empregadas no sistema HeMoLab	153
2.4.3	O resolvedor numérico	153
2.5	Comentários finais	154

II Modelos para Interação Fluido–Sólido 157

3 Imersão de domínios para interação fluido–sólido 159

3.1	O problema modelo	162
3.1.1	Colocação do problema e notação	162
3.1.2	Comentários adicionais	163
3.2	Métodos clássicos	164
3.2.1	O método dos multiplicadores de Lagrange	165
3.2.2	O método dos multiplicadores de Lagrange generalizado	167
3.2.3	Uma formulação variacional em termos de velocidades	169
3.3	Métodos de sólidos imersos	170
3.3.1	O método de elementos finitos imersos ou do contínuo imerso	170
3.3.2	O método de domínios imersos	173
3.3.3	Equivalência entre as formulações	177
3.3.4	Situações limites das características de compressibilidade	179
3.3.5	O método de domínios imersos para interação fluido–sólido rígido	180
3.4	Métodos de cascas imersas	182
3.4.1	Preliminares	183
3.4.2	O método de cascas imersas geral	186
3.4.3	Em busca do método de contornos imersos	191
3.5	Comentários finais	193

4	Implementação computacional do método de domínios imersos	195
4.1	Linearização do problema fluido–sólido deformável	197
4.1.1	Descrições espacial e material	197
4.1.2	Esquema monolítico	199
4.1.3	Esquema segregado	203
4.2	Linearização do problema fluido–sólido rígido	203
4.2.1	Descrições espacial e material	204
4.2.2	Esquema monolítico	206
4.2.3	Esquema segregado	209
4.3	Casos particulares de comportamentos constitutivos	210
4.3.1	Comportamento constitutivo do fluido	210
4.3.2	Comportamento constitutivo do sólido	211
4.4	Aproximação do problema	213
4.4.1	Discretização temporal e o processo iterativo	214
4.4.2	Aproximação do problema do fluido com restrição	221
4.4.3	Aproximação do problema do sólido deformável	225
4.4.4	Aproximação do problema para sólidos rígidos	225
4.5	Resultados numéricos para casos de fluido–sólido rígido	227
4.5.1	Caso 1: Corpo com velocidade imposta conhecida	228
4.5.2	Caso 2: Esfera caindo por ação da gravidade	230
4.5.3	Caso 3: Esfera em cilindro girando	234
4.5.4	Caso 4: Canal com sistema de válvula	235
4.5.5	Caso 5: Elipse caindo por ação da gravidade	239
4.6	Comentários finais	243
III	Modelos Constitutivos de Multiescala	245
5	Modelos de multiescala nas suas formas primal e dual	247
5.1	Formulação do problema de multiescala primal	249
5.1.1	A teoria constitutiva e suas limitações	249
5.1.2	Conceitos preliminares de multiescala	250
5.1.3	Escolha de restrições cinemáticas e o princípio de Hill–Mandel	251
5.1.4	O problema de multiescala primal geral	253
5.2	Modelos específicos de multiescala primais	255
5.2.1	Modelo de Taylor	255
5.2.2	Modelo de flutuação nula	256
5.2.3	Modelo de flutuação periódica	256
5.2.4	Modelo de mínima restrição cinemática	258
5.3	O operador tangente constitutivo	258
5.4	Conceitos preliminares de dualidade em mecânica	260
5.4.1	Generalidades de uma formulação variacional	261
5.4.2	Formulação primal, ou de equilíbrio	263
5.4.3	Formulação dual, ou de compatibilidade	264
5.5	Formulação do problema de multiescala dual	265
5.5.1	Escolha do sistema de carregamentos e o princípio de Hill–Mandel	266
5.5.2	O problema de multiescala dual geral	268
5.6	Modelos específicos de multiescala duais	268
5.6.1	Modelo dual do modelo de Taylor	269
5.6.2	Modelo dual do modelo de flutuação nula	270
5.6.3	Modelo dual do modelo de flutuação periódica	270
5.6.4	Modelo dual do modelo de mínima restrição cinemática	271

5.7	Comentários finais	272
6	Implementação computacional dos modelos de multiescala	275
6.1	O problema microestrutural	276
6.1.1	Formulação do problema microestrutural	276
6.1.2	Modelos de multiescala primais revisitados	277
6.1.3	Resposta constitutiva na microescala	278
6.1.4	Algoritmo de integração numérica	279
6.2	Aproximação pelo método dos elementos finitos	281
6.2.1	Particularidades da aproximação empregada	281
6.2.2	Modelo discreto de flutuação periódica	283
6.2.3	Modelo discreto de mínima restrição cinemática	284
6.3	Resultados numéricos: O modelo de Gurson	287
6.3.1	Descrição do problema de interesse	288
6.3.2	Superfícies de colapso plástico	290
6.3.3	Mecanismos de colapso plástico	292
6.3.4	Sensibilidade da resposta constitutiva	294
6.4	Resultados numéricos: O modelo de Zulliger	295
6.4.1	Descrição do problema de interesse	295
6.4.2	Recuperação da resposta constitutiva	299
6.4.3	Aplicação a um problema simplificado	300
6.5	Comentários finais	303
	Conclusões	305
	Discussão e comentários gerais	305
	Discussão e comentários particulares	305
	Implicações teórico-práticas e cenário futuro	308
	Referências Bibliográficas	309
	Biografia	321

Tabela de Símbolos

Capítulo 1			
Ω	domínio aberto e acotado em \mathbb{R}^{n_d}	$\nabla(\cdot)$	gradiente espacial com respeito à coordenada espacial \mathbf{x}
Ω_i	partição i do domínio Ω	$\text{div}(\cdot)$	divergente espacial com respeito à coordenada espacial \mathbf{x}
$(\overline{(\cdot)})^\circ$	interior do fecho de (\cdot)	H^p	espaço de funções escalares com derivada até ordem p de quadrado integrável
Γ_a	contorno interno em Ω		
$\partial(\cdot)$	contorno da região (\cdot)		
\mathbf{x}	coordenada espacial		
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$	funções vetoriais	$H^{p/2}$	espaço dos traços das funções em H^p
\mathcal{Q}	espaço de funções vetoriais, cinemática	$[\![\cdot]\!]$	salto na quantidade física sobre um contorno interno
$(\cdot)'$	espaço dual de (\cdot)	$a(\cdot, \cdot)$	forma contínua bilinear
\mathcal{R}	operador genérico de \mathcal{Q} em \mathcal{Q}'	$b(\cdot, \cdot)$	forma contínua bilinear associada a uma restrição
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{Q}' \times \mathcal{Q}}$	operação genérica entre pares de dualidade	$l(\cdot)$	forma contínua linear
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{(\cdot)' \times (\cdot)}$	produto de dualidade em $(\cdot)' \times (\cdot)$	$l_\xi(\cdot), l_{\mathbf{z}}(\cdot)$	formas contínuas lineares derivadas de $l(\cdot)$ e dependentes de ξ ou \mathbf{z}
$\mathcal{U}, \mathcal{U}_d, \dots$	conjuntos de funções vetoriais cinematicamente admissíveis	$\text{Ker}(\cdot)$	núcleo do operador (\cdot)
$\mathcal{V}, \mathcal{V}_d, \dots$	espaços de funções vetoriais cinematicamente admissíveis	\mathcal{B}	operador associado à forma bilinear $b(\cdot, \cdot)$
$\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\cdot)$	traço das funções do espaço (\cdot) sobre Γ_a	\sup, \inf	supremo e ínfimo de uma função no espaço funcional (\cdot)
γ	parâmetro real de uma família de princípios variacionais	$\ \cdot\ _{(\cdot)}$	norma no espaço (\cdot)
\oplus	operação soma direta	\perp	perpendicularidade entre elementos
Γ_D, Γ_N	contornos de Dirichlet e de Neumann	\mathbf{H}^p	espaço de funções vetoriais com derivada até ordem p de quadrado integrável
θ, η, \dots	funções escalares		
\mathbb{R}	espaço dos números reais	$\mathbf{H}^{p/2}$	espaço dos traços das funções em \mathbf{H}^p
\mathbf{K}	tensor de segunda ordem	$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \dots$	funções tensoriais de segunda ordem
$\mathcal{X}, \mathcal{X}_d, \dots$	conjuntos de funções escalares cinematicamente admissíveis	\mathbb{D}	tensor de quarta ordem
$\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_d, \dots$	espaços de funções escalares cinematicamente admissíveis	Σ_o	superfície média de uma casca
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$	derivada parcial com relação ao tempo	H	intervalo representativo da espessura de uma casca
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial z}$	derivada parcial com relação à coordenada z		

\mathbf{x}_o	coordenada definida sobre a superfície média Σ_o	\mathbf{K}, \mathbf{B}	blocos matriciais genéricos no problema discreto
\mathbf{n}	vetor na direção perpendicular ao plano tangente sobre Σ_o	$\mathbf{U}, \mathbf{T}, \mathbf{f}$	vetores genéricos no problema discreto
ξ	coordenada na direção da normal a Σ_o	L^2	espaço de funções escalares de quadrado integrável
$\mathbf{\Pi}_t$	operador projeção sobre Σ_o	Σ	plano de normal \mathbf{e}_z
\mathbf{S}_t	componente no plano tangente sobre Σ_o do tensor \mathbf{S}	ξ	coordenada espacial no plano Σ
$\mathbf{S}_s, \mathbf{S}_s^*$	componentes transversais do tensor \mathbf{S}	$\mathbf{\Pi}_z$	operador projeção sobre Σ
\mathbf{S}_n	componente normal com respeito a Σ_o do tensor \mathbf{S}	$\nabla_\xi(\cdot)$	gradiente espacial com respeito à coordenada ξ
\otimes	operação produto tensorial	$\text{div}_\xi(\cdot)$	divergente espacial com respeito à coordenada ξ
$(\cdot)^T$	operação de transposição	$\frac{D(\cdot)}{Dt}$	derivada material do campo (\cdot)
$(\cdot)^{-1}$	operação de inversão	\mathbf{Y}	coordenada espacial do marco de referência ALE
\mathbf{u}_t	componente no plano tangente sobre Σ_o do vetor \mathbf{u}	Φ	fluxo na quantidade de movimento
\mathbf{u}_n	componente normal com respeito a Σ_o do vetor \mathbf{u}	α	fator de correção do fluxo na quantidade de movimento
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial\xi}$	derivada parcial com relação à coordenada ξ	\mathbf{e}_r	vetor unitário na direção radial
$\nabla_{\mathbf{x}_o}(\cdot)$	gradiente espacial com respeito à coordenada \mathbf{x}_o		
$\text{div}_{\mathbf{x}_o}(\cdot)$	divergente espacial com respeito à coordenada \mathbf{x}_o		
$\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}$	tensor curvatura da superfície média de uma casca		
$\mathbf{\Lambda}$	operador de mapeamento sobre a superfície média Σ_o		
$\det(\cdot)$	determinante do tensor (\cdot)		
$\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	vetores unitários nas direções dos eixos cartesianos y, z		
$(\cdot)^h$	objeto (\cdot) submetido a uma discretização de elementos finitos h		
\mathcal{I}^e	partição de elementos finitos (conjunto de elementos)		
\mathcal{I}^n	partição de elementos finitos (conjunto de nós)		
C^0	espaço de funções contínuas com derivada primeira contínua por partes		
\mathcal{Q}_2^s	família de polinômios de Serendipity de ordem 2 definidos no quadrilátero		
\mathcal{Q}_1	família de polinômios de ordem 1 definidos no quadrilátero		
\mathbb{P}_1	família de polinômios de ordem 1 definidos no segmento		
		f^\pm	velocidades de propagação características
		$\frac{D(\cdot)}{Dt} \Big _{\pm}$	derivada material em relação a f^\pm
		$\frac{\partial(\cdot)}{\partial A}$	derivada parcial com respeito à área A
		$\gamma_{\mathbf{Y}}, \chi_{\mathbf{Y}}$	funções vetoriais
		κ	tensor de quarta ordem
		\mathcal{N}	espaço de funções vetoriais cinematicamente admissíveis
		\mathcal{M}	conjunto de funções vetoriais cinematicamente admissíveis
		R_1, R_2, C	parâmetros do terminal Windkessel
		\mathbf{B}_h	espaço de funções bolha em \mathbb{R}^3
		\mathbb{P}_1	família de polinômios de ordem 1 definidos no tetraedro
		Δt	passo de tempo
		$\Delta \mathbf{x}$	tamanho de elemento característico de uma partição de elementos finitos
		\mathbf{A}, \mathbf{f}	blocos matriciais e vetores genéricos no problema discreto

Capítulo 2

\mathcal{A}, \mathcal{F}	montagem dos blocos matriciais e dos vetores genéricos no problema discreto	$[\cdot]_e$	descrição espacial do campo material (\cdot)
$I_2^{\nabla \mathbf{u}}$	Segundo invariante do tensor $\nabla \mathbf{u}$	$[\cdot]_m$	descrição material do campo espacial (\cdot)
ω	Parâmetro de sub-relaxação	$\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial t^2}$	derivada segunda parcial com relação ao tempo
Capítulo 3			
Ω_f^t, Ω_s^t	domínios ocupados por fluido e sólido no tempo t	\mathcal{G}	forma genérica para problema não linear
Γ_f^t, Γ_s^t	fronteiras dos domínios Ω_f^t, Ω_s^t	\mathcal{DG}	operador tangente consistente de \mathcal{G}
Γ_{fs}^t	fronteira de acoplamento fluido–estrutura	$\frac{d(\cdot)}{d\zeta}$	derivada do campo (\cdot) com respeito ao parâmetro ζ
\mathbf{n}_{fs}	vetor unitário normal à superfície Γ_{fs}^t	$\delta(\cdot)$	incremento na quantidade (\cdot)
\mathbf{X}	coordenada espacial de referência	$(\dot{\cdot})$	derivada material do campo (\cdot)
Ω_s^0	domínio de referência para Ω_s^t	\mathbf{K}, \mathbf{f}	blocos matriciais e vetores genéricos no problema discreto
$\chi(\cdot, t)$	mapeamento entre a configuração atual e a de referência no tempo t	$(\cdot)^P$	valor de predição da quantidade (\cdot)
$\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \dots$	funções vetoriais	\mathbb{I}	tensor identidade de quarta ordem
p	função escalar	I_1, I_2, I_3	invariantes de um tensor
$\hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \dots$	variações cinematicamente admissíveis das funções vetoriais	$\text{tr}(\cdot)$	traço do tensor (\cdot)
\hat{p}	variação cinematicamente admissível da função escalar	Λ	operador projeção entre domínios definidos em malhas de fluido e sólido
\mathcal{P}	espaço L^2	Υ	operador interpolação de quantidades definidas sobre malhas de fluido e sólido
$\boldsymbol{\Lambda}$	espaço $\mathbf{H}^{-1/2}$	\mathbb{Q}_2	família de polinômios de ordem 2 definidos no quadrilátero
$\boldsymbol{\Psi}$	espaço \mathbf{H}^{-1}	$\text{sgn}(\cdot)$	função sinal aplicado à função (\cdot)
$[\mathbb{R}]^{n_d}$	espaço de vetores cujas componentes são números reais	Capítulo 5	
$([\mathbb{R}]^{n_d \times n_d})^a$	espaço de tensores antisimétricos cujas componentes são números reais	\mathcal{F}	operador constitutivo genérico
Σ_o^t	idem a Σ_o do Capítulo 1	$(\cdot)^t$	história da quantidade (\cdot)
$\boldsymbol{\Upsilon}$	idem a $\boldsymbol{\Lambda}$ do Capítulo 1	Ω_μ	domínio da microestrutura
δ	distribuição delta de Dirac	Γ_μ	contorno do domínio Ω_μ
\mathbf{L}^2	espaço de funções vetoriais de quadrado integrável	l_μ, l	comprimentos característicos da micro e da macroestrutura
\mathbf{L}^2	espaço de funções tensoriais de segunda ordem de quadrado integrável	\mathbf{x}	coordenada espacial da macroescala
$\text{curl}(\cdot)$	rotacional com respeito à coordenada espacial \mathbf{x}	\mathbf{y}	coordenada espacial da microescala
Capítulo 4			
$\nabla_{\mathbf{X}}(\cdot)$	gradiente espacial com respeito à coordenada de referência \mathbf{X}	$(\cdot)^s$	parte simétrica do tensor (\cdot)

$\widetilde{(\cdot)}$	componente de flutuação do campo (\cdot)	\mathbf{K}	blocos matriciais genéricos no problema discreto
$\nabla_{\mathbf{y}}(\cdot)$	gradiente espacial com respeito à coordenada da microestrutura \mathbf{y}	$\mathbf{U}, \mathbf{f}, \Theta$	vetores genéricos no problema discreto
$\text{div}_{\mathbf{y}}(\cdot)$	divergente espacial com respeito à coordenada da microestrutura \mathbf{y}	f	fração de vazio
\mathcal{K}_{μ}^m	maior conjunto de funções vectoriais em compliância com o princípio de Hill–Mandel	Ψ_{elas}	função de energia de deformação da elastina
$\widetilde{\mathcal{K}}_{\mu}$	maior espaço de funções vectoriais de flutuação em compliância com o princípio de Hill–Mandel	Ψ_{col}	função de energia de deformação do colágeno
\mathcal{V}_{μ}	espaços de funções vectoriais em compliância com o princípio de Hill–Mandel	(R, Θ, Z)	coordenadas no estado sem carga
Γ_i^+, Γ_i^-	fronteiras com correspondência periódica na microescala	(r, θ, z)	coordenadas no estado com carga inicial
$D\mathcal{F}$	operador tangente constitutivo de \mathcal{F}		
\mathcal{C}	operador abstrato definido pelo problema de multiescala		
$\mathcal{D}(\cdot)$	operador deformação		
\mathcal{D}^*	operador adjunto de \mathcal{D}		
$\mathcal{K}_{\mathbf{u}}$	conjunto de funções cinematicamente admissíveis		
\mathcal{V}	espaço de funções cinematicamente admissíveis		
\mathcal{T}	conjunto de esforços internos estaticamente equilibrados		
\mathcal{S}	espaço de esforços internos auto-equilibrados		
$\mathcal{Z}_{\mathbf{b}} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e}$	conjunto de carregamentos		
\mathcal{V}_{μ}^d	espaço de funções que satisfazem condições de ortogonalidade com os carregamentos		
\mathcal{T}_{μ}^d	conjunto de esforços internos estaticamente equilibrados na microestrutura que satisfazem o princípio de Hill–Mandel		
\mathcal{S}_{μ}^d	espaço de esforços internos auto-equilibrados na microestrutura que satisfazem o princípio de Hill–Mandel		
Capítulo 6			
Φ	função de fluência		
$\dot{\gamma}$	multiplicador plástico		
$\Delta(\cdot)$	incremento na quantidade (\cdot)		

Introdução

Este capítulo introdutório expõe os aspectos gerais da tese. Após uma breve discussão sobre o título da tese, apresenta-se a motivação por trás de um trabalho que possui fortes vínculos com a modelagem do sistema cardiovascular humano. A partir dali determina-se o escopo de tese, e logo depois o objetivo geral e os objetivos particulares. O capítulo finaliza com uma descrição da estrutura da tese.

Sobre o título da tese

O título da tese vincula os três tópicos vindos da área de modelagem computacional que são abordados neste texto, ao mesmo tempo expressa a relação entre estes temas e a principal aplicação para a qual estão orientados. Isto não implica, sob nenhum ponto de vista, que o conteúdo teórico da tese esteja restrito a esta aplicação, sobretudo em função da ampla gama de problemas abordáveis empregando os conceitos aqui tratados.

A motivação principal do trabalho realizado nesta tese, exposta na seção seguinte, está governada pela modelagem e simulação computacional do sistema cardiovascular humano. Esta área combina de forma congruente os três pilares sobre os quais se apoia a presente tese.

Motivação e importância da problemática geral

O emprego de tecnologia na prática médica vem de longa data e tem auxiliado nas mais variadas formas aos avanços na pesquisa em medicina, chegando a produzir um impacto mensurável na qualidade de vida da população. Com esta tecnologia, o profissional da área médica adquire dados de pacientes, realiza análises destes dados, formula hipóteses, as confirma ou as refuta e finalmente extrai conclusões. Embora isto tenha sido habitual nas últimas décadas, atualmente a pesquisa em determinadas áreas da medicina tem dado evidência de estar alterando radicalmente seus paradigmas. Uma prova disto é que ao longo dos últimos anos tem havido uma incipiente tendência, porém cada vez mais crescente, por parte da comunidade científica da modelagem computacional a entregar-se ao trabalho de levar a cabo uma simbiose com o âmbito da medicina. Esta nova inclinação foi resultado do aumento do poder de cálculo dos computadores o que, aliado a modelos cada vez mais complexos tem permitido fornecer um futuro promissor para esta classe de aplicações. Assim sendo, o emprego de modelos computacionais para simular os fenômenos físicos que ocorrem nos diversos sistemas presentes no corpo humano foi o objetivo de diversas pesquisas ao longo do mundo inteiro nos últimos quinze anos. A principal meta tem sido analisar as potencialidades que a modelagem computacional pode fornecer à comunidade médica e ainda avaliar o impacto que conseqüentemente pode provocar na qualidade de vida da população. Em outras palavras, o emprego de modelos governados por leis físicas tem ajudado a projetar um novo horizonte para a medicina, à qual poder-se-ia lhe atribuir o nome de *medicina assistida por computação científica*.

Um vasto leque de novos problemas tem surgido, produto desta rica parceria entre a modelagem computacional e as aplicações em medicina. Em particular as problemáticas comentadas a seguir estão sujeitas aos temas tratados nesta tese.

Um dos primeiros problemas abordados na literatura foi o do escoamento do sangue nas maiores artérias do corpo humano. Numerosos modelos simplificados (modelos 1D) têm sido desenvolvidos a fim de dar respostas quantitativas e qualitativas a perguntas sobre o funcionamento do sistema cardiovascular na escala do sistema completo, aprofundando os conhecimentos sobre os mecanismos que governam a dinâmica deste sistema. Entretanto, a informação de caráter global que estes modelos fornecem não atende às necessidades básicas para estudar comportamentos de caráter local do fluxo sanguíneo em determinadas regiões do sistema. Por isto, com o advento de tecnologias de computadores mais avançadas e com ferramentas de aquisição de dados mais precisas, o emprego de modelos computacionais mais complexos (modelos 3D) passou a ser praxe na pesquisa sobre o estudo de determinadas doenças assim como na pesquisa orientada à planificação de procedimentos cirúrgicos. Diversos trabalhos foram dedicados à análise do escoamento do sangue empregando modelos tridimensionais em geometrias obtidas a partir de imagens médicas. No entanto, cada vez mais perguntas emergiam como resultado do aprofundamento na capacidade descritiva dos modelos. Como conseqüência, surgiu a necessidade de conhecer outros aspectos do sistema cardiovascular. Por exemplo, os mecanismos que determinam a deposição de placas de ateroma, como isto está afetado pela regularidade do escoamento sanguíneo e em que forma os fenômenos da escala global afetam tais fenômenos de caráter local, têm sido um ativo tema de estudo na comunidade científica. Uma última geração de modelos veio recentemente ao encontro das necessidades de análises cada vez mais complexas em hemodinâmica. Neste sentido, os modelos multidimensionais acoplados (modelos 3D-1D) foram criados para fornecer uma representação mais real do sistema arterial, levando em conta a interação entre os fenômenos que ocorrem nas diversas escalas presentes. Isto dá origem a um novo campo de pesquisa que é o do acoplamento de modelos de diferente dimensão, e que desperta interesse em diversos problemas da física e engenharia. A formulação de uma teoria mecânica e matemática consistente, empregando princípios variacionais, que abranja todas as possibilidades para lidar com as incompatibilidades existentes entre estes modelos é um desafio com implicações interessantes nas áreas de mecânica dos fluidos, mecânica dos sólidos e transferência de calor dentre outros, e constitui um dos principais objetivos desta tese, como será comentado mais na frente.

Um outro tópico que aparece em cena com grande relevância é a modelagem do funcionamento da válvula aórtica. Este problema compreende um conjunto de desafios, tanto do ponto de vista da modelagem como da aplicação final, que possuem um caráter altamente complexo. Em particular, esta classe de estudo pode estar orientada a projetar o desenho de válvulas artificiais, otimizando os tempos de análises e experimentação. Para isto têm surgido alguns métodos baseados na superposição de domínios, ou também imersão de domínios, que facilitam a abordagem destes problemas frente ao uso de técnicas clássicas. Este campo de pesquisa, o qual também possui extrema aplicabilidade em qualquer área da engenharia, é recente, encontra-se em pleno desenvolvimento, e possui certas questões que ainda devem ser esclarecidas. Esta clarificação pode ser feita utilizando formulações variacionais e é parte do objetivo principal desta tese como comentado mais na frente.

Em outro âmbito, intimamente ligado aos problemas acima comentados está a modelagem constitutiva dos tecidos biológicos. Sabe-se que o comportamento destes materiais é muito complexo e a modelagem constitutiva empregando técnicas clássicas é uma tarefa árdua. Vinculando isto com o dito anteriormente, pode-se dizer que o emprego de técnicas computacionais para modelar a resposta constitutiva destes materiais não só é importante aos efeitos da modelagem do escoamento do sangue nas artérias, mas também na

modelagem do funcionamento da válvula aórtica. Assim sendo, em função da limitação própria dos modelos constitutivos fenomenológicos, os modelos de multiescala tendem a afirmar-se como as técnicas mais adequadas a fim de representar o comportamento destes materiais. Uma teoria variacional que vise colocar este problema de acoplamento entre escalas permite o completo entendimento das hipóteses existentes por trás desta classe de modelos.

Escopo da tese e metodologia de trabalho

Se bem o denominador comum dos problemas enunciados na seção anterior é a modelagem do sistema cardiovascular humano, a abrangência dos temas tratados aqui vai além desta mera aplicação, possuindo forte inferência em muitos problemas das diversas áreas da física e engenharia. Inúmeras situações são atingidas por estes conceitos e podem ser tratadas empregando as idéias aqui formuladas. Desta forma, embora a aplicação principal seja na modelagem do sistema cardiovascular, alguns dos resultados apresentados escapam a essa problemática, mostrando inclusive a versatilidade dos conceitos desenvolvidos. Neste sentido, o escopo da tese possui uma tendência à análise teórica dos resultados, fornecendo bases claras e derivações sistemáticas na formulação dos problemas tratados. Em determinadas situações apresenta-se a ligação direta com o tratamento computacional necessário para resolver o problema no contexto da aplicação principal para a qual está orientado o texto.

Dado que a tese está escrita dentro de um programa de modelagem computacional o público alvo são os pesquisadores da área da modelagem e simulação computacional. A ênfase da tese está nos aspectos mecânicos das formulações de cada modelo assim como nas hipóteses necessárias na construção destas. Do comentado na seção anterior observa-se então que existe um denominador comum a fim de abordar a construção de modelos matemáticos para atacar os diferentes problemas mencionados. Este ponto em comum é o emprego de princípios variacionais, o qual permite edificar a teoria utilizada mantendo firmes bases mecânicas e matemáticas, facilitando o posterior tratamento aproximado do problema. Por isto, a tese mantém principalmente uma forte inclinação *variacional*, procurando que os tópicos tratados estejam sempre em consonância com princípios bem fundados.

Em função do dito na seção sobre a motivação da problemática geral, vê-se que desenvolver trabalho nas áreas mencionadas requer um alto grau de multidisciplinaridade, aspecto constantemente advogado no Programa de Pós-Graduação em Ciências da Modelagem Computacional do Laboratório Nacional de Computação Científica. Isto deve também ser frisado a fim de contextualizar o trabalho desenvolvido dentro de um programa de formação superior multidisciplinar.

Objetivos e contribuições da tese

O objetivo geral desta tese é apresentar bases bem fundadas para diversos problemas para os quais a literatura não tem fornecido idéias claras e acabadas a fim de conseguir um entendimento fechado sobre cada um dos assuntos tratados. Para descrever melhor a natureza desta tese apresenta-se a Figura 1 que mostra as três principais etapas na abordagem de um problema genérico no âmbito da modelagem e simulação computacional.

A primeira etapa compreende a construção dos princípios que governam a física mais relevante do problema. O ponto mais importante aqui é a realização de hipóteses adequadas e o uso de bases bem fundadas para proceder a formular o modelo matemático que descreverá os fenômenos observáveis. A segunda etapa objetiva a análise matemática

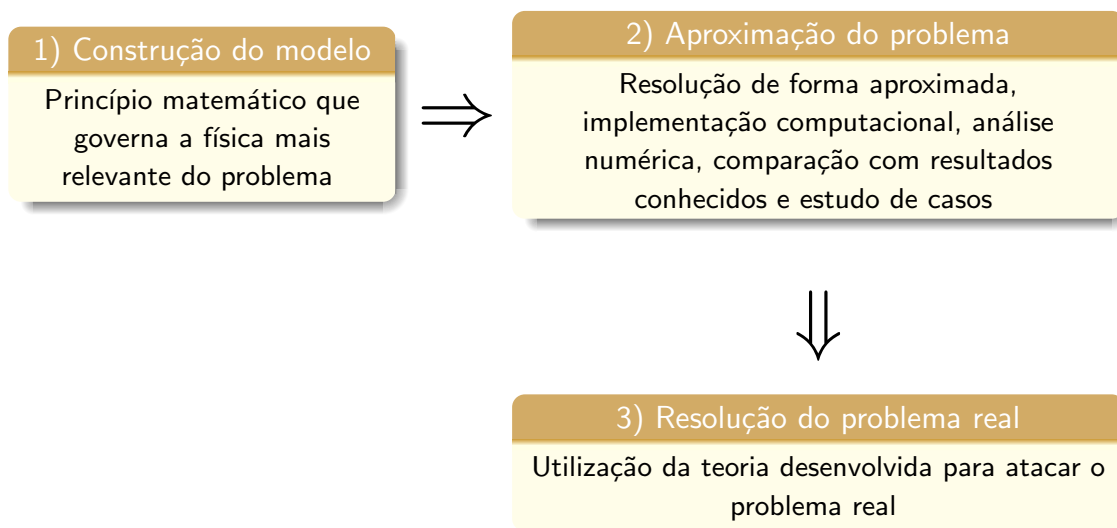


Figura 1: Etapas básicas na abordagem de um problema genérico.

do modelo proposto, incluindo análise numérica, aspectos básicos da implementação computacional assim como análises de casos para testar o funcionamento do modelo proposto. Por último tem-se a etapa na qual passa-se a resolver problemas a grande escala, para o qual os aspectos básicos da implementação computacional devem ser reformulados a fim de fazer viável a aplicação da teoria desenvolvida a problemas da vida real.

Seguindo este diagrama, e o explicado no parágrafo anterior, o objetivo geral desta tese é apresentar contribuições principalmente no primeiro estágio do diagrama, empregando, evidentemente, elementos das outras duas etapas a fim de conseguir mostrar o desempenho dos diversos modelos construídos. Em outras palavras, a ênfase desta tese está colocada na própria construção do modelo físico que governa um dado problema. Para isto apresentam-se conceitos relativamente simples e amplamente conhecidos em outros âmbitos, mas que, quando formulados no contexto adequado, permitem fornecer soluções a diversas questões ainda não resolvidas de forma completa na literatura.

Para passar aos aspectos particulares da tese começa-se dizendo que a mesma está composta por três partes principais. A Figura 2 mostra uma estrutura do presente texto segundo os três tópicos a serem tratados. Cada uma destas problemáticas representa sem dúvida um problema de notável interesse na modelagem computacional, e ao mesmo tempo têm como denominador comum o fato de jogarem um papel fundamental na modelagem do sistema cardiovascular humano.

A primeira parte da tese trata sobre os aqui denominados modelos cinematicamente incompatíveis. Esta denominação abrange situações como a da modelagem do acoplamento de modelos de diferente dimensão. A contribuição desta parte, e o principal objetivo, é fornecer bases teóricas suportadas por princípios variacionais consistentes a fim de formular o acoplamento de modelos que podem ser eventualmente incompatíveis do ponto de vista da *cinemática* que governa cada um deles. Em particular isto é feito para os problemas de transferência de calor, problemas de equilíbrio de sólidos e problemas de escoamento de fluidos incompressíveis. Com isto contribui-se com uma sistematização da análise e abordagem do problema de acoplamento de modelos com diferentes cinemáticas e, em particular, de diferente dimensão, não só alcançando as teorias existentes na literatura, mas também estendendo as possibilidades a respeito do entendimento do problema. Um outro objetivo particular desta parte é apresentar a implementação computacional, e depois a resolução de diversos exemplos de aplicação na área da modelagem do sistema cardiovascular humano.

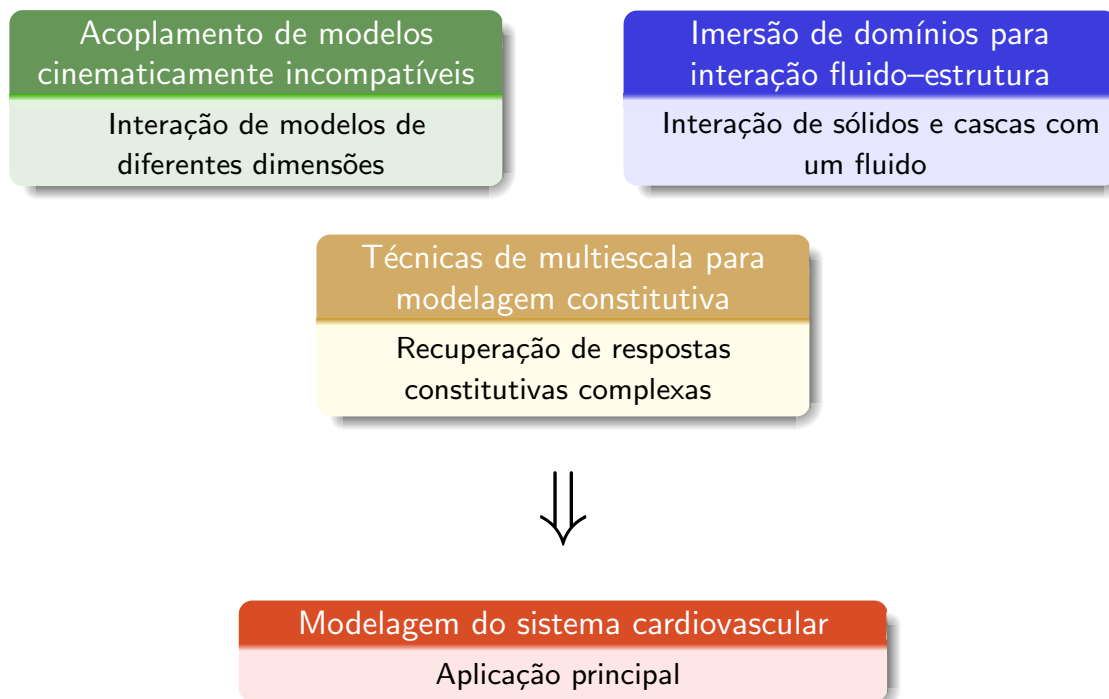


Figura 2: Estrutura da tese.

A segunda parte da tese lida com o problema de acoplamento fluido-sólido empregando conceitos de imersão de domínios. O objetivo particular procurado aqui é, novamente, fornecer bases teóricas firmemente apoiadas sobre princípios variacionais adequados que permitam formular duas classes de problemas. Por um lado, formula-se o problema de acoplamento de um sólido com um fluido. Por outro lado, coloca-se o acoplamento de uma estrutura tipo casca com um fluido. Isto é feito empregando idéias de imersão de domínios e de imersão de contornos respectivamente. Assim sendo, a contribuição desta parte é na generalização das teorias existentes atualmente na literatura, tanto de métodos de contornos imersos como métodos de sólidos imersos, que, ou bem estão restritas a casos particulares, ou diretamente não estão bem formuladas. Outro objetivo, que também constitui uma contribuição, é mostrar como se desenvolve a implementação computacional dos métodos de domínios imersos por meio da obtenção do operador tangente que surge da linearização do problema e, quando possível, apresentar resultados numéricos das capacidades que estas metodologias possuem.

A terceira e última parte da tese tem por objetivo fazer, em primeiro lugar, uma revisão de alguns conceitos recentemente apresentados na literatura concernentes à modelagem constitutiva combinando técnicas de multiescala e princípios variacionais cinemáticos (ou primais). Assim, a contribuição, e o objetivo, desta parte é realizar uma extensão teórica desenvolvendo os correspondentes modelos duais por meio do uso de princípios variacionais complementares. Outro objetivo é realizar a implementação computacional de cada um dos modelos primais existentes, comparando o desempenho que cada um apresenta com resultados da literatura. A metodologia computacional desenvolvida é também contribuição desta tese.

Vale a pena ressaltar que o propósito final da tese não é apresentar uma integração das três partes o que, aliás, constituiria um trabalho de várias teses. Em resumo, o objetivo final, e ao mesmo tempo contribuição principal, é fornecer idéias e conceitos teóricos baseados no emprego de formulações variacionais para abordar cada um dos temas apresentados e, em determinadas ocasiões, dar evidências das capacidades destes conceitos

mediante exemplos numéricos. Isto constitui, sem dúvidas, o primeiro passo para futuras linhas de pesquisa que visem a integração progressiva das áreas aqui tratadas.

Estrutura da tese e conteúdos

A organização da tese segue de perto o esquema da Figura 2 da seção anterior. Assim, há três partes que a conformam. Cada uma das partes compõe-se de dois capítulos. De forma geral, o primeiro capítulo apresenta os conceitos teóricos por trás do assunto a ser tratado nessa parte, enquanto que o segundo capítulo dedica-se à implementação computacional e resultados numéricos de casos vistos no capítulo teórico. Desta forma segue-se o mesmo padrão ao longo de todo o texto. Por sua vez, cada um dos capítulos é iniciado por uma discussão que levanta, por um lado, a motivação e, por outro lado, os pontos mais importantes sobre o assunto exposto. Fornece-se com maior precisão o objetivo particular do capítulo assim como também realiza-se uma resenha bibliográfica com os trabalhos na área mais relevantes do ponto de vista que será atacado o problema. Finalmente esta introdução a cada capítulo é fechada detalhando os trabalhos desenvolvidos decorrentes das contribuições feitas, quando for aplicável. A seguir menciona-se de forma resumida o conteúdo de cada capítulo.

Parte I

Capítulo 1. Este capítulo apresenta as idéias por trás da formulação do problema de acoplamento de modelos com diferentes cinemáticas, e particulariza a formulação para vários problemas de acoplamento de modelos de diferente dimensão em transferência de calor, mecânica dos sólidos e mecânica dos fluidos. Também mostram-se alguns resultados numéricos na área da mecânica dos sólidos.

Capítulo 2. Aqui desenvolve-se a implementação computacional para o acoplamento de modelos 3D e 1D no problema do escoamento de fluidos incompressíveis em domínios deformáveis. Todos os exemplos numéricos objetivam dar uma amostra das potencialidades do emprego de modelos acoplados em hemodinâmica e portanto estão completamente orientados a esta aplicação.

Parte II

Capítulo 3. Neste capítulo faz-se uma recopilación de metodologias clássicas para tratar o problema de interação fluido-estrutura e desenvolvem-se posteriormente os correspondentes princípios baseados em imersão de domínios. Apresentam-se resultados teóricos para o caso de imersão de sólidos de forma arbitrária e de estruturas delgadas tipo casca.

Capítulo 4. Tanto a linearização do problema quanto a implementação computacional do problema de sólidos imersos discutem-se neste capítulo. Apresenta-se também como caso particular o problema envolvendo sólidos rígidos. Mostram-se ainda alguns exemplos numéricos neste último caso para fornecer evidências da potencialidade do método.

Parte III

Capítulo 5. Aqui revisitam-se as idéias de modelagem constitutiva de multiescala empregando conceitos variacionais. Com isto constroem-se diversos modelos para, logo depois, reformular todas as idéias empregando argumentos de dualidade em mecânica e recuperando a forma de cada modelo que fora obtido via a formulação primal.

Capítulo 6. Neste capítulo mostram-se as implementações computacionais de cada modelo de multiescala primal visto no capítulo anterior. Apresentam-se resultados numéricos para materiais porosos com matriz elasto-plástica, comparando o desempenho de cada modelo com resultados da literatura. Também desenvolve-se uma microestrutura cuja resposta no nível do problema macroscópico visa reproduzir os resultados para materiais como os encontrados na modelagem do tecido da parede arterial.

A tese culmina com a seção destinada às conclusões e as referências bibliográficas citadas ao longo de todo o texto.

Parte I

**Modelos Cinematicamente
Incompatíveis**

Capítulo 1

Teoria sobre o acoplamento de modelos cinematicamente incompatíveis

Introdução

Um dos principais objetivos de um modelo é reproduzir os fenômenos físicos que ocorrem em uma situação real da melhor forma possível no sentido dado pelas próprias características e limitações que tal modelo possui. A escolha de um modelo é baseada no objetivo da modelagem do problema, ou seja, é extremamente dependente dos resultados que se desejam obter e das conclusões finais às quais se deseja chegar. Inclusive, é muito comum que no mesmo processo da modelagem um modelo deva ser substituído por um outro mais adequado em prol de capturar os fenômenos de relevância na física do problema.

Para poder analisar na sua totalidade um modelo surge a linguagem matemática. Cada tipo de modelo é caracterizado através de uma formulação matemática subjacente. Esta formulação contextualiza o problema dentro de um marco que permite a sua abordagem de forma axiomática. Conseqüentemente, as diferenças entre os modelos assim como as suas características são manifestadas por meio das formulações matemáticas respectivas, que poderão ser mais ou menos sofisticadas em função dos objetivos da modelagem. Na modelagem de diversos problemas da física é comum deparar com situações nas quais tais problemas podem ser abordados utilizando simultaneamente diferentes modelos. Desta maneira, é possível encontrar situações nas quais as características do problema sejam tais que devam ser considerados diversos modelos funcionando conjuntamente como um único modelo unidade. Nestes casos, o objetivo é que algumas das particularidades do problema sejam capturadas por um tipo de modelo e outras por outro tipo de modelo. A questão é então dispor de uma formulação matemática que englobe ambos os modelos de forma que a interação entre estes não escape à física do problema. Isto refere-se ao correto surgimento das denominadas *condições de acoplamento* entre os modelos.

Uma forma geral e sistemática de construir um modelo com características particulares é alterando a cinemática do mesmo em função das necessidades e requerimentos da modelagem. Assim sendo, quando se fala sobre o interesse em utilizar modelos de características diferentes, agindo conjuntamente, refere-se precisamente de empregar modelos com cinemáticas dissímeis dentro do mesmo problema em estudo. Entretanto, o uso de cinemáticas diferentes supõe a presença de descontinuidades nos campos envolvidos devido à própria natureza de cada modelo. Surge então, o que aqui se denomina, uma incompatibilidade cinemática entre os modelos. A palavra incompatibilidade deve ser entendida no sentido da regularidade dos campos candidatos a solução do problema de acordo com os requerimentos de um dado princípio variacional que o governa. Tal incom-

patibilidade pode emergir nos diversos estágios da modelagem. O exemplo mais claro que nos concerne neste capítulo é aquela incompatibilidade resultante de ter introduzido, como dito acima, hipóteses no problema contínuo sobre o comportamento cinemático de uma parte do modelo. Um outro caso que também poderia ser visto como clássico é aquela incompatibilidade que ocorre somente ao pensar em uma aproximação para o problema, por exemplo, ao empregar discretizações diferentes em diversas partições de um mesmo domínio.

Deixando momentaneamente de lado a discussão sobre o surgimento de incompatibilidades cinemáticas, mas sem afastar-se totalmente, digamos que uma característica importante na hora de realizar a abordagem de um problema é a dimensionalidade dada ao mesmo. Assim, considerar um modelo no qual os fenômenos possuem uma descrição tridimensional resulta sempre mais adequado do que um modelo no qual alguma hipótese simplificativa foi realizada de forma a descrever os fenômenos que se sucedem em duas ou inclusive em uma dimensão. Entretanto, do ponto de vista da modelagem é bem sabido que há situações nas quais estas simplificações trazem notórias vantagens decorrentes da redução do custo na resolução do problema. Considere então que por certos motivos se deseja trabalhar com modelos cujas diferenças estejam nas dimensionalidades outorgadas a cada um. Logo, resulta interessante, do ponto de vista teórico e da aplicação, a colocação do problema quando pensado a partir da utilização destes modelos acoplados operando juntamente. Isto deve ser feito dentro de um contexto no qual seja possível derivar consistentemente os diferentes modelos conseguindo, ao mesmo tempo e de forma natural, as adequadas condições de acoplamento entre eles visando a sua correta interação. As razões para utilizar este tipo de modelos acoplados reside nas necessidades da modelagem, e para cada caso particular deverão ser adequadamente justificadas. A pergunta está em como lidar com modelos de dimensionalidade diferente, e a resposta é discutida no parágrafo subsequente.

Ao longo de toda esta tese o princípio básico a partir do qual se formulam os problemas da mecânica é o princípio variacional. Os princípios variacionais que governam os diversos problemas aqui tratados são bem conhecidos, assim como a sua dependência com a dimensionalidade do problema e as condições que uma função deve satisfazer para que possa ser considerada candidata a solução. No entanto, ainda nada foi desenvolvido objetivando formular, através de um único princípio variacional, um problema utilizando modelos cinematicamente incompatíveis e, em particular, como será visto de diferente dimensionalidade. Este capítulo vem atender este requerimento. Observe que a redução na dimensionalidade de um modelo primal (no sentido da formulação variacional primal, ou cinemática, subjacente) pode ser sempre entendida como simplificações no que se denomina em geral a *cinemática* do modelo. Por cinemática entende-se a característica da qual goza o campo primal com o qual se descrevem os fenômenos no princípio variacional primal. Portanto, o problema de acoplar modelos de diferente dimensionalidade pode ser visto como um caso particular do problema de acoplar modelos cinematicamente incompatíveis. Esta falta de compatibilidade nas cinemáticas acarreta, como dito acima, a presença de descontinuidades nos campos envolvidos, produto de ter violentado a continuidade original dos mesmos. O princípio variacional original já não é válido devido a que os campos não satisfazem as condições de regularidades requeridas e, portanto, faz-se necessário reformular o problema arquitetando um novo princípio variacional estendido que atenda a estas alterações. Diz-se que o princípio variacional estende-se devido a que o mesmo agora deve ser válido para campos que eventualmente podem ser descontínuos. O objetivo de formular este novo princípio variacional é o de derivar, de forma natural a partir da própria formulação, as adequadas condições de acoplamento entre os modelos. Ver-se-á que tais condições surgirão justamente nas denominadas interfaces de acoplamento entre os modelos que é onde a cinemática é efetivamente alterada. Estas condições caracterizarão

às soluções e serão as encarregadas de manter o modelo dentro da física do problema sob análise. Tudo isto será derivado de forma consistente dentro do marco variacional de trabalho sem introduzir nenhum tipo de condição adicional sobre o problema.

Neste capítulo apresentam-se as bases para formular o problema de acoplamento de modelos cinematicamente incompatíveis a partir de um princípio variacional estendido. Isto é levado a cabo para diversos campos da mecânica. Na Seção 1.1 desenvolvem-se as idéias de incompatibilidade cinemática de forma abstrata, deixando a base teórica bem fundada para proceder nos diversos problemas apresentados posteriormente. A Seção 1.2 começa com um caso simples como o problema de transferência de calor para o qual se estuda a existência e unicidade de soluções assim como a propriedade do decaimento da energia. Na Seção 1.3 estudam-se os problemas relacionados à modelagem de componentes estruturais, tais como vigas e cascas, e formula-se o problema de acoplamento entre estes modelos reduzidos e modelos tridimensionais. Enquanto que na Seção 1.4 alguns resultados numéricos são apresentados para o caso desenvolvido na seção anterior. Finalmente na Seção 1.5 analisa-se o problema de escoamento de fluidos e as suas diversas possibilidades, chegando até a formulação de um problema geral em domínios deformáveis que será de interesse no Capítulo 2. Por último, na Seção 1.6 apresentam-se os comentários finais do capítulo salientando alguns aspectos importantes e estendendo a análise além do apresentado nas primeiras seções.

As idéias desenvolvidas neste capítulo constituem parte das contribuições desta tese. Com efeito, este capítulo é a base dos conceitos teóricos apresentados nos trabalhos [18, 20, 21, 155]. Pesquisa parcialmente orientada nesta direção foi levada a cabo nos anos 80 e 90 em trabalhos que abordavam a modelagem da junção entre placas, entre placas e cascas, e entre placas e sólidos elásticos 3D [5, 10, 11, 12, 33]. Ainda nos anos 90 alguns trabalhos empregaram a análise assintótica para realizar a junção entre uma estrutura elástica 3D e um componente de dimensão reduzida [86, 117, 118]. Em todos estes trabalhos o problema é entendido de forma absolutamente diferente a como é enxergado neste capítulo. Com efeito, a abordagem proposta não é axiomática e portanto carece de generalidade. Aqui o problema é tratado de forma bem geral quando pensado na área de sólidos, segundo feito na Seção 1.3, sendo possível ver que dentro desta abordagem geral podem-se incluir os diversos pontos de vista apresentados na literatura. Por outro lado, aplicações no campo da análise de componentes em torção têm sido apresentadas em [13]. Com relação ao tópico tratado na Seção 1.5 alguns trabalhos apresentam idéias relativas ao acoplamento de modelos de diferente dimensionalidade na área de fluidos, porém, a bibliografia é escassa (ver [41, 42, 161]) e, bem como na literatura da área de sólidos, carece da abordagem sistemática que se põe em evidência neste capítulo. O tratamento existente até a atualidade está baseado em condições incorporadas *a priori* a nível do problema diferencial particular, para o qual se precisa de um conhecimento prévio das condições de acoplamento. Uma discussão mais aprofundada apresenta-se na Seção 1.6.

Antes de finalizar é importante mencionar que os conceitos introduzidos aqui são úteis também no contexto de técnicas de decomposição de domínios como uma forma alternativa e interessante de abordar o problema de malhas não compatíveis sobre uma dada superfície (aquela denominada anteriormente como interface de acoplamento). Apesar de que esta situação pressupõe compatibilidade cinemática no nível do contínuo, tal compatibilidade é perdida ao passar ao nível discreto realizando diferentes aproximações nas diferentes partições do domínio original. Assim, a teoria é aplicável também para lidar com sistemas particionados, envolvendo diversas técnicas bem conhecidas como as propostas em [128, 129]. Um comentário análogo é válido para métodos de Galerkin descontínuos, nos quais as incompatibilidades cinemáticas são introduzidas para dar versatilidade à aproximação numérica do problema. Este aspecto é comentado novamente antes de finalizar o capítulo.

1.1 Conceitos gerais sobre incompatibilidade cinemática

Os conceitos apresentados nesta seção são de caráter abstrato e ficarão mais claros nos diversos exemplos colocados ao longo das seções no decorrer deste capítulo. Primeiramente é apresentado um princípio variacional genérico que visa lidar com incompatibilidades cinemáticas no modelo, e logo depois desenvolve-se uma discussão sobre os aspectos mecânicos envolvidos em tal princípio variacional estendido.

1.1.1 O princípio variacional estendido

Considere então um problema cuja física é modelada por meio de um princípio variacional determinado que de forma geral pode ser denominado princípio das potências virtuais. No âmbito dos modelos variacionais cinemáticos, ou equivalentemente primais, a física que o modelo representa está exclusivamente baseada na cinemática que o modelo possui. Esta cinemática determina as particularidades das funções candidatas a solução do problema, por meio da caracterização dos espaços funcionais usados na formulação variacional. Em forma bem genérica o problema variacional pode ser colocado como segue:

Problema 1.1. *Encontre $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ tal que*

$$(\mathcal{R}(\mathbf{u}), \mathbf{v})_{\mathcal{Q}' \times \mathcal{Q}} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (1.1.1)$$

com

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{Q}; \mathbf{u} \text{ satisfaz condições de contorno}\}, \quad (1.1.2)$$

onde \mathcal{V} é o espaço obtido tomando a diferença de elementos em \mathcal{U} , e \mathcal{Q}' é o espaço dual de \mathcal{Q} .

Neste problema, formulado para um campo genérico \mathbf{u} , $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{Q}' \times \mathcal{Q}}$ é uma classe de produto de dualidade que representa o estado de equilíbrio, e que envolve um operador $\mathcal{R}(\cdot) : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}'$ genérico, o qual pode ser dependente do tempo e não linear, enquanto que por outro lado a operação $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{Q}' \times \mathcal{Q}}$ é linear nas variações admissíveis \mathbf{v} . Por último, o índice $\mathcal{Q}' \times \mathcal{Q}$ remarca que a operação está sujeita à regularidade das funções no espaço \mathcal{Q} . Além disso o problema está colocado em um domínio de análise $\Omega \in \mathbb{R}^3$ aberto e limitado, e com contorno Γ regular de modo que os traços das funções estejam bem definidos. Associado ao espaço \mathcal{Q} está o espaço dos traços sobre a fronteira denotado por $\mathcal{T}_\Gamma(\mathcal{Q})$. Suponha agora que o domínio Ω é dividido em duas partes Ω_1 e Ω_2 através de um contorno artificial interno denominado Γ_a regular para que os traços das funções estejam bem definidos também sobre este contorno. Desta forma tem-se que $\Omega = (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})^\circ$ (o interior do fecho da união). Agora as funções são vistas como um par $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, onde cada parte corresponde a um domínio. Como consequência da regularidade das funções em \mathcal{U} , da formulação variacional (1.1.1) conclui-se que sobre tal contorno interno é

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad \text{em } \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}), \quad (1.1.3)$$

ou seja que a igualdade é no sentido dado pelo espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q})$. Suponha agora que se admite que as funções candidatas a solução do problema não satisfazem a condição (1.1.3). Esta situação se dá, por exemplo, quando se lida com formulações de modelos que possuem cinemáticas incompatíveis já que tal incompatibilidade pressupõe a existência de alguma classe de descontinuidade. Logo, o princípio variacional deve ser reformulado de forma a acomodar esta nova situação. Esta necessidade de reformulação implica no que se denomina a extensão do princípio. Assume-se também que $\mathbf{u}_i \in \mathcal{Q}_i$ onde \mathcal{Q}_i é tal que estabelece a regularidade necessária para definir adequadamente as operações $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{Q}' \times \mathcal{Q}_i}$

sobre Ω_i , $i = 1, 2$. Isto dá a entender que existe uma estreita relação através da qual \mathcal{Q}_i , $i = 1, 2$, herda certas propriedades de \mathcal{Q} . De forma geral, o princípio variacional estendido é obtido adicionando no princípio original termos associados às potências virtuais geradas pelas descontinuidades em dualidade com os esforços admissíveis, os quais por sua vez dependem das hipóteses cinemáticas consideradas para cada sub-domínio. Assim sendo, o princípio variacional denominado estendido é, em forma genérica, o seguinte:

Problema 1.2. *Para algum $\gamma \in [0, 1]$ encontre $((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \in \mathcal{U}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ tal que*

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{R}_1(\mathbf{u}_1), \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathcal{Q}'_1 \times \mathcal{Q}_1} + \langle \mathcal{R}_2(\mathbf{u}_2), \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathcal{Q}'_2 \times \mathcal{Q}_2} \\ & + \gamma \langle \mathbf{t}_1, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} + (1 - \gamma) \langle \mathbf{t}_2, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} \\ & + \gamma \langle \mathbf{s}_1, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} + (1 - \gamma) \langle \mathbf{s}_2, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} = 0 \\ & \quad \forall ((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

com $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\mathbf{u}_1 \in \mathcal{Q}_1; \mathbf{u}_1 \text{ satisfaz condições de contorno}\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{u}_2 \in \mathcal{Q}_2; \mathbf{u}_2 \text{ satisfaz condições de contorno}\}, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

e onde \mathcal{V}_d é o espaço obtido tomando a diferença de elementos em \mathcal{U}_d .

Neste problema $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_i)'$ denota o espaço dual que automaticamente será identificado uma vez que for estabelecido \mathcal{Q}_i , $i = 1, 2$. O mesmo acontece com os espaços duais \mathcal{Q}'_i , $i = 1, 2$. No caso geral, a forma dos operadores \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 muda de acordo com as hipóteses cinemáticas adotadas para cada um dos sub-domínios Ω_i , $i = 1, 2$. Observe que \mathbf{t}_i e sua variação admissível \mathbf{s}_i são elementos duais de \mathbf{u}_i , $i = 1, 2$, os quais ficam definidos uma vez providas as características da variável primal.

Para estudar a consistência do Problema 1.2 com respeito ao Problema 1.1 é preciso colocar as condições deste último no primeiro. Ou seja, assuma que \mathcal{Q}_i herda todas as características do espaço \mathcal{Q} quando restrito ao domínio Ω_i , o que se denota por $\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$. Em outras palavras, a cinemática é mantida de forma original, e parcial, sobre cada sub-domínio. Logo, resulta $\mathcal{R}_1(\cdot) = \mathcal{R}_2(\cdot) = \mathcal{R}(\cdot)$, e além do mais

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) &= \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2) = \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}), \\ \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' &= \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' = \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q})'. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Chamando então $\mathbf{t}_\gamma = \gamma \mathbf{t}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{t}_2$, resulta o seguinte problema:

Problema 1.3. *Encontre $((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \mathbf{t}_\gamma) \in \mathcal{U}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q})'$ tal que*

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{R}(\mathbf{u}_1), \mathbf{v}_1 \rangle_{\mathcal{Q}'_{|\Omega_1} \times \mathcal{Q}_{|\Omega_1}} + \langle \mathcal{R}(\mathbf{u}_2), \mathbf{v}_2 \rangle_{\mathcal{Q}'_{|\Omega_2} \times \mathcal{Q}_{|\Omega_2}} \\ & + \langle \mathbf{t}_\gamma, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q})' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q})} + \langle \mathbf{s}_\gamma, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q})' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q})} = 0 \\ & \quad \forall ((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \mathbf{s}_\gamma) \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q})', \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

com $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\mathbf{u}_1 \in \mathcal{Q}_{|\Omega_1}; \mathbf{u}_1 \text{ satisfaz condições de contorno}\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{u}_2 \in \mathcal{Q}_{|\Omega_2}; \mathbf{u}_2 \text{ satisfaz condições de contorno}\}, \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

e onde \mathcal{V}_d é o espaço obtido tomando a diferença de elementos em \mathcal{U}_d .

Aqui fica em evidência que o Problema 1.2 é consistente com o Problema 1.1 já que sob as condições do problema original a formulação variacional (1.1.7) estabelece que

$$\langle \mathbf{s}_\gamma, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q})' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q})} = 0 \quad \forall \mathbf{s}_\gamma \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q})', \quad (1.1.9)$$

e portanto implica que a (1.1.3) é satisfeita. Além do mais, este resultado implica que quando não existem hipóteses cinemáticas adicionais sobre algum dos dois domínios, ou seja quando não há incompatibilidade cinemática sobre a fronteira Γ_a , a solução do problema independe de γ , como esperado. No entanto, é importante salientar que o Problema 1.2 é mais geral já que no mesmo é possível introduzir diferentes cinemáticas dentro do mesmo domínio de análise Ω por meio da especificação arbitrariamente independente de \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 . Considere então o caso no qual alguma restrição foi introduzida em um dos espaços, digamos \mathcal{Q}_1 , de forma que $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}_{|\Omega_1}$ com inclusão estrita. Desta maneira tem-se que sobre Γ_a é $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) \subset \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_{|\Omega_1})$, e automaticamente fica definido o elemento dual \mathbf{t}_1 , e a sua variação admissível, no espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'$. É importante notar que, se bem que não há problema em considerar o produto de dualidade $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}$ posto que ambos os elementos constituem naturalmente um par dual, agora surge uma questão relacionada à forma de considerar o produto $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}$ devido a que estes não são, a priori, elementos duais. De fato, $\mathbf{u}_2|_{\Gamma_a} \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$. Para atender a esta pergunta é preciso lembrar que \mathbf{s}_1 é um elemento tal que produz junto com uma função da forma de \mathbf{u}_1 uma determinada quantidade de potência. Logo, qualquer função que não inclui componentes da forma de \mathbf{u}_1 é ortogonal a \mathbf{s}_1 no sentido dado pela projeção definida pelo produto de dualidade. Isto significa que, sendo \mathbf{u}_2 uma função arbitrária, esta deve poder ser projetada no sentido do produto de dualidade em $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)$ a fim de recuperar a correspondente componente que se assemelha na forma à \mathbf{u}_1 . Para tanto, é necessário colocar $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ tal que inclua as condições de regularidade que caracterizam $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)$. Portanto, em geral escreve-se

$$\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2) = \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) \oplus \mathcal{W}, \quad (1.1.10)$$

onde \mathcal{W} é um espaço geral tal que na decomposição anterior o mesmo seja ortogonal a $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'$ no sentido do produto de dualidade. Assim sendo, é possível escrever

$$\mathbf{u}_2|_{\Gamma_a} = \mathbf{u}_{21} + \mathbf{u}_{2r}, \quad (1.1.11)$$

com $\mathbf{u}_{21} \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)$ e $\mathbf{u}_{2r} \in \mathcal{W}$. Seja \mathcal{S}_1 o funcional linear associado ao elemento \mathbf{s}_1 , isto é $\mathcal{S}_1(\cdot) = \langle \mathbf{s}_1, \cdot \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}$. Então, de acordo com o acima dito, é $\mathbf{u}_{2r} \in \mathcal{W} = \text{Ker}(\mathcal{S}_1)$ (o núcleo do funcional linear), então pode-se afirmar que para uma função qualquer é

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_{21} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}. \quad (1.1.12)$$

Do ponto de vista mecânico, a decomposição (1.1.11) estabelece que as funções da forma de \mathbf{u}_{2r} não produzem potência em dualidade com elementos de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'$. Como consequência disto, a componente \mathbf{u}_{2r} é considerada como uma componente de flutuação que é *invisível* aos efeitos da dualidade segundo dito acima. Com efeito, ver-se-á nos diversos casos que serão analisados que os elementos de \mathcal{W} possuem certas propriedades que estão fortemente relacionadas às características das considerações cinemáticas efetuadas sobre \mathcal{Q}_1 . Dado que é preciso que a decomposição (1.1.11) seja realizável, sob certas hipóteses na cinemática de \mathcal{Q}_1 , a cinemática sobre Ω_2 caracterizada por \mathcal{Q}_2 ver-se-á afetada de forma que $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ possa ser decomposto segundo a (1.1.10). Estas situações ficarão expostas com maior clareza ao utilizar estas idéias nas situações particulares que surgem na área da mecânica dos sólidos.

1.1.2 Sobre a escolha do parâmetro real γ

Conforme visto, a solução do Problema 1.3 independe de γ . Esta questão será estudada com detalhe nos exemplos que serão apresentados nas seções seguintes. Contudo, ao impor hipóteses adicionais sobre uma das cinemáticas, esta independência é perdida. Isto é resultado direto de como são afetados os produtos de dualidade sobre Γ_a quando γ muda de valor. Isto será visto também com detalhe ao se obter as equações de Euler–Lagrange de cada problema tratado. Pode-se ver que o espaço ao qual pertence \mathbf{s}_γ muda de acordo com o valor de $\gamma \in [0, 1]$, o que altera o sentido da continuidade sobre Γ_a das quantidades de interesse no problema. De fato, observe que a partir do problema geral 1.2 decorre que a continuidade é dada, em função de γ , como segue

$$\begin{aligned} \gamma = 1 & \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 & \quad \text{em } \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1), \\ \gamma \neq 1 & \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 & \quad \text{em } \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2), \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

onde por $\gamma \neq 1$ entende-se $\gamma \in [0, 1)$. Neste ponto surgem descontinuidades nos campos envolvidos, já que o sentido de cada identidade na expressão acima é inerente à cinemática adotada sobre cada sub-domínio. Logo, sempre que alguma hipótese cinemática é introduzida, resulta uma situação na qual a continuidade no sentido de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)$ não implica a continuidade no sentido de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$, porque de acordo com a decomposição (1.1.10) a flutuação \mathbf{u}_{2r} pode adquirir valores arbitrários desde que esteja em \mathcal{W} .

No princípio variacional (1.1.4) há um conceito importante que deve ser salientado e enfatizado sobre a escolha do parâmetro real γ , e que de alguma forma foi introduzido nos parágrafos anteriores. Foi dito acima que as condições de acoplamento mudam ao mudar o valor de γ em função de como mudam as condições de continuidade sobre Γ_a . Isto implica que o próprio modelo mecânico (ou modelo físico em geral) muda ao modificar γ . Isto é de fundamental importância para entender bem o papel que este parâmetro tem na formulação variacional. Desta maneira, a escolha do parâmetro γ deve estar baseada exclusivamente em argumentos mecânicos. Além do mais, se as hipóteses cinemáticas estão adequadamente incorporadas no modelo, isto é apoiadas sobre firmes argumentos mecânicos (ou físicos), o resultado final deve ser quase independente da escolha de γ . O essencial a ser resgatado daqui é que γ deve ser escolhido em função do que é desejado que o modelo contínuo represente. Assim, se o que se deseja é que o modelo represente a situação onde o campo é contínuo no sentido do espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)$, então $\gamma = 1$ deverá ser tomado, e se o que se deseja é que o campo seja contínuo no sentido do espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$, deverá ser considerado $\gamma \neq 1$.

Precisa-se dizer também que, ao passar ao problema discreto, são três os modelos que surgem do princípio variacional estendido. Como será visto em alguns exemplos numéricos na Seção 1.4, esses modelos correspondem a $\gamma = 1$, $\gamma \in (0, 1)$ e $\gamma = 0$. Isto será discutido novamente na mencionada seção.

Em cada uma das seções seguintes analisa-se o problema do acoplamento de modelos de distinta dimensionalidade usando recorrentemente as idéias aqui desenvolvidas. Em cada seção constrói-se o Problema 1.2 correspondente para, em seguida, estar em condições de introduzir restrições sobre o espaço \mathcal{Q}_1 que define a cinemática sobre Ω_1 e reduzir a dimensão do modelo para este sub-domínio. Assim, obtêm-se as equações de Euler–Lagrange resultantes e em particular estuda-se como a solução varia em função de γ . Junto a isto vê-se como as descontinuidades dos campos surgem frente à realização das hipóteses cinemáticas e à alteração do parâmetro γ .

1.2 O problema de transferência de calor

Nesta seção apresentam-se os conceitos básicos para formular um princípio variacional estendido seguindo as idéias apresentadas na Seção 1.1. Para isto considere-se um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com contorno $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ (e tal que $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$). O princípio variacional que governa o problema de transferência de calor transiente envolvendo fenômenos difusivos é o seguinte:

Problema 1.4. *Para cada $t \in (0, T)$ encontre $\theta \in \mathcal{X}$ tal que*

$$\int_{\Omega} \left[\rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} \eta - \mathbf{q} \cdot \nabla \eta \right] d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \eta d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_N} \bar{q}_n \eta d\Gamma \quad \forall \eta \in \mathcal{Y}, \quad (1.2.1)$$

com $\theta(0, \mathbf{x}) = 0$ sem perda de generalidade e onde

$$\mathcal{X} = \{ \theta \in H^1(\Omega); \theta|_{\Gamma_D} = \bar{\theta} \}, \quad (1.2.2)$$

com \mathcal{Y} sendo o espaço gerador da variedade linear \mathcal{X} , além disso ρ é a massa específica, C é o calor específico, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\theta)$ é o fluxo de calor difusivo que no caso de um material que segue a lei de Fourier é $\mathbf{q} = -\mathbf{K}\nabla\theta$ sendo \mathbf{K} o tensor de condutividade térmica, f é uma fonte de calor por unidade de volume, \bar{q}_n é um fluxo de calor imposto sobre a fronteira de Neumann Γ_N e $\bar{\theta}$ é uma temperatura imposta sobre a fronteira de Dirichlet Γ_D .

Esta formulação é válida para qualquer material, basta especificar a lei constitutiva indicando o comportamento do fluxo difusivo \mathbf{q} para fechar o problema. No caso de materiais que seguem a lei de Fourier sabe-se que a solução deste problema existe e é única.

Seja agora, assim como na Seção 1.1, um contorno interno artificial Γ_a que permite realizar uma partição do domínio Ω , como mostra a Figura 1.1, como sendo $\Omega = (\Omega_1 \cup \Omega_2)^\circ$, com $\Gamma_a = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ e $\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \setminus \Gamma_a$.

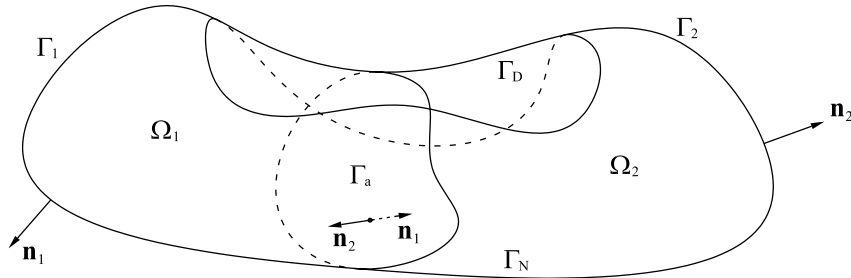


Figura 1.1: Decomposição do domínio Ω .

De acordo com esta decomposição e com a regularidade das funções em \mathcal{X} , tem-se que a solução do Problema 1.4, considerada agora como um par $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ em função da partição feita, satisfaz as seguintes condições sobre o contorno Γ_a

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \text{em } H^{1/2}(\Gamma_a), \quad (1.2.3)$$

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \quad \text{em } H^{-1/2}(\Gamma_a), \quad (1.2.4)$$

onde \mathbf{q}_i é o fluxo difusivo correspondente à partição Ω_i , $i = 1, 2$, sobre o contorno Γ_a cuja normal exterior, vista do domínio Ω_1 , é \mathbf{n}_1 . A (1.2.3) decorre da cinemática do problema posto que provém da definição do conjunto \mathcal{X} , enquanto que a (1.2.4) obtém-se de forma natural da formulação variacional (1.2.1).

De forma a preparar o contexto teórico para o tratamento de cinemáticas não compatíveis considere agora que a função θ pode ser descontínua sobre o contorno Γ_a , ou seja a equação (1.2.3) não é satisfeita a priori. Desta forma é claro que o Problema 1.4 não está bem posto já que a formulação variacional (1.2.1) carece de sentido nesta situação. Isto é devido a que se está buscando uma solução fora do conjunto \mathcal{X} . Conseqüentemente, é preciso escrever um novo princípio variacional de forma a manter relação com a física do problema original, isto é, que a solução do novo problema corresponda à do problema original no sentido dado pelas equações de Euler, e que permita a busca de soluções com a característica anteriormente mencionada. A idéia de estender um princípio variacional é baseada, assim como foi feito no Problema 1.2 da Seção 1.1, na adição de termos no balanço de potências virtuais que representem a potência gerada como dualidade entre as discontinuidades introduzidas e as correspondentes variáveis duais. Assim sendo, o problema variacional estendido é o seguinte:

Problema 1.5. *Para cada $t \in (0, T)$ e para algum $\gamma \in [0, 1]$ encontre $((\theta_1, \theta_2), t_1, t_2) \in \mathcal{X}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ tal que*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \left[\rho C \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \eta_1 - \mathbf{q}_1 \cdot \nabla \eta_1 \right] dx + \int_{\Omega_2} \left[\rho C \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \eta_2 - \mathbf{q}_2 \cdot \nabla \eta_2 \right] dx \\ & + \gamma \langle t_1, (\eta_1 - \eta_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} + (1 - \gamma) \langle t_2, (\eta_1 - \eta_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} \\ & + \gamma \langle s_1, (\theta_1 - \theta_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} + (1 - \gamma) \langle s_2, (\theta_1 - \theta_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} = \\ & \int_{\Omega_1} f \eta_1 dx + \int_{\Omega_2} f \eta_2 dx - \int_{\Gamma_{N_1}} \bar{q}_{n_1} \eta_1 d\Gamma - \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{q}_{n_2} \eta_2 d\Gamma \\ & \forall ((\eta_1, \eta_2), s_1, s_2) \in \mathcal{Y}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \quad (1.2.5) \end{aligned}$$

com $\theta_1(0, \mathbf{x}) = 0$ e $\theta_2(0, \mathbf{x}) = 0$, e onde $\bar{q}_{n_1} = \bar{q}_n|_{\Gamma_{N_1}}$ e $\bar{q}_{n_2} = \bar{q}_n|_{\Gamma_{N_2}}$, além disso é $\mathcal{X}_d = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ com

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \{ \theta_1 \in \mathcal{Q}_1; \theta_1|_{\Gamma_{D_1}} = \bar{\theta}_1 \}, \\ \mathcal{X}_2 &= \{ \theta_2 \in \mathcal{Q}_2; \theta_2|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\theta}_2 \}, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

onde $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}|_{\Gamma_{D_1}}$ e $\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}|_{\Gamma_{D_2}}$, e com $\mathcal{Y}_d = \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2$, sendo \mathcal{Y}_1 e \mathcal{Y}_2 os espaços geradores das variedades lineares \mathcal{X}_1 e \mathcal{X}_2 respectivamente. Os demais elementos são definidos segundo o Problema 1.4.

Para analisar a consistência do problema estendido assuma que

$$\mathcal{Q}_i = H^1(\Omega_i) \quad i = 1, 2, \quad (1.2.7)$$

e portanto resulta

$$\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_i) = H^{1/2}(\Gamma_a) \quad \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_i)' = H^{-1/2}(\Gamma_a) \quad i = 1, 2. \quad (1.2.8)$$

Assim sendo, as formas dos produtos dualidade são as clássicas

$$\begin{aligned} \langle t_1, (\eta_1 - \eta_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} &= \int_{\Gamma_a} t_1 (\eta_1 - \eta_2) d\Gamma, \\ \langle t_2, (\eta_1 - \eta_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} &= \int_{\Gamma_a} t_2 (\eta_1 - \eta_2) d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Logo, resulta fácil ver que, no sentido das distribuições, as equações de Euler-Lagrange

correspondentes à formulação variacional estendida (1.2.5) são as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho C \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_1 = f & \text{em } \Omega_1, \\ \rho C \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_2 = f & \text{em } \Omega_2, \\ \theta_1 = \bar{\theta}_1 & \text{sobre } \Gamma_{D1}, \\ \theta_2 = \bar{\theta}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D2}, \\ \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \bar{q}_{n1} & \text{sobre } \Gamma_{N1}, \\ \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \bar{q}_{n2} & \text{sobre } \Gamma_{N2}, \\ \gamma(\theta_1 - \theta_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ (1 - \gamma)(\theta_1 - \theta_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \gamma t_1 + (1 - \gamma)t_2 = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \gamma t_1 + (1 - \gamma)t_2 = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 & \text{sobre } \Gamma_a. \end{array} \right. \quad (1.2.10)$$

Observa-se que a solução do problema em termos somente do campo $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ independe do parâmetro real γ , com efeito, das equações (1.2.10) obtém-se o seguinte

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho C \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_1 = f & \text{em } \Omega_1, \\ \rho C \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_2 = f & \text{em } \Omega_2, \\ \theta_1 = \bar{\theta}_1 & \text{sobre } \Gamma_{D1}, \\ \theta_2 = \bar{\theta}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D2}, \\ \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \bar{q}_{n1} & \text{sobre } \Gamma_{N1}, \\ \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \bar{q}_{n2} & \text{sobre } \Gamma_{N2}, \\ \theta_1 = \theta_2 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 & \text{sobre } \Gamma_a, \end{array} \right. \quad (1.2.11)$$

onde tem-se chegado ao resultado de consistência enunciado no Problema 1.3. Lembre-se também que os fluxos difusivos \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 estão relacionados com as funções θ_1 e θ_2 respectivamente através das leis constitutivas. Conclui-se então que a solução do Problema 1.5 satisfaz as mesmas equações de Euler–Lagrange que a solução do Problema 1.4. Com efeito, as duas últimas expressões da (1.2.11) correspondem-se com as (1.2.3)–(1.2.4). Por brevidade apresenta-se o seguinte resultado somente para o problema estacionário:

Proposição 1.1. *O Problema 1.5, com \mathcal{Q}_i segundo a (1.2.7), estacionário e com fluxo difusivo governado pela lei de Fourier, ou seja $\mathbf{q}_i = -\mathbf{K}\nabla\theta_i$ ($i = 1, 2$), possui solução, resultando uma única $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{X}_d$ e uma única combinação $t_\gamma = \gamma t_1 + (1 - \gamma)t_2 \in H_{\llbracket \cdot \rrbracket}^{-1/2}(\Gamma_a)$.*

Prova. *A prova segue a metodologia desenvolvida em [8, 27] para a análise de formulações mistas (ver teorema de Brezzi e lema de Babuška). Observe que o problema pode ser escrito da seguinte forma*

$$a(\theta, \eta) + b(\eta, t_\gamma) = l(\eta) \quad \forall \eta \in \mathcal{Y}_d, \quad (1.2.12)$$

$$b(\theta, s_\gamma) = 0 \quad \forall s_\gamma \in H_{\llbracket \cdot \rrbracket}^{-1/2}(\Gamma_a), \quad (1.2.13)$$

com $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{W}_d \times \mathcal{W}_d \rightarrow \mathbb{R}$, $b(\cdot, \cdot) : \mathcal{W}_d \times H_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a) \rightarrow \mathbb{R}$ e $l(\cdot) : \mathcal{W}_d \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$\begin{aligned} a(\theta, \eta) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{K} \nabla \theta_1 \cdot \nabla \eta_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \mathbf{K} \nabla \theta_2 \cdot \nabla \eta_2 \, d\mathbf{x}, \\ b(\theta, s_\gamma) &= \int_{\Gamma_a} [\gamma s_1 + (1 - \gamma) s_2] (\theta_1 - \theta_2) \, d\Gamma, \\ l(\eta) &= \int_{\Omega_1} f \eta_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} f \eta_2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{N_1}} \bar{q}_{n_1} \eta_1 \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{q}_{n_2} \eta_2 \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

e onde $\mathcal{W}_d = H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ cuja norma vem dada por $\|\theta\|_{\mathcal{W}_d} = \|\theta_1\|_{H^1(\Omega_1)} + \|\theta_2\|_{H^1(\Omega_2)}$. Considere a decomposição $\theta = \mu + \xi$ onde $\xi \in \mathcal{W}_d$ é tal que $\xi_1|_{\Gamma_{D_1}} = \theta_1$, $\xi_1|_{\Gamma_a} = 0$, $\xi_2|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\theta}_2$ e $\xi_2|_{\Gamma_a} = 0$, enquanto que $\mu \in \mathcal{K} \subset \text{Ker}(\mathcal{B})$ sendo \mathcal{B} o operador associado à forma $b(\cdot, \cdot)$ e

$$\mathcal{K} = \{ \mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{W}_d; \mu_1|_{\Gamma_{D_1}} = 0, \mu_2|_{\Gamma_{D_2}} = 0, \mu_1|_{\Gamma_a} = \mu_2|_{\Gamma_a} \}. \quad (1.2.15)$$

Resulta simples mostrar que a forma $a(\cdot, \cdot)$ é bilinear, simétrica, contínua e coerciva em $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ desde que \mathbf{K} seja, para cada ponto do domínio Ω , uma matriz definida positiva, e também que a forma $l(\cdot)$ é linear e contínua em \mathcal{K} . Logo, pelo teorema de Lax–Milgram (ver [50]) segue-se que existe uma única função $\mu \in \mathcal{K} \subset \text{Ker}(\mathcal{B})$ tal que

$$a(\mu, \eta) = l_\xi(\eta) \quad \forall \eta \in \mathcal{K}, \quad (1.2.16)$$

onde $l_\xi(\cdot) = l(\cdot) - a(\xi, \cdot)$. Portanto, a existência e unicidade de $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathcal{X}_d$ segue. Para provar a existência e unicidade da combinação t_γ deve-se recorrer à teoria das formulações mistas. Vejamos que a forma $b(\cdot, \cdot)$ satisfaz uma condição inf–sup para chegar ao resultado buscado. Primeiro define-se o espaço $H_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)$ equipado com a norma

$$\|t_\gamma\|_{H_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)} = \sup_{\substack{[\mu] \in H_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a) \\ [\mu] \neq 0}} \frac{\int_{\Gamma_a} t_\gamma [\mu] \, d\Gamma}{\|[\mu]\|_{H_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)}}, \quad (1.2.17)$$

como o espaço dual de $H_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a)$ que é definido como

$$H_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a) = \{ [\mu] \in H^{1/2}(\Gamma_a); \mu \in \mathcal{W}_d, [\mu] = \mu_1|_{\Gamma_a} - \mu_2|_{\Gamma_a} \}, \quad (1.2.18)$$

e equipado com a norma

$$\|[\mu]\|_{H_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a)} = \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{W}_d \\ [\mu] = \varphi_1|_{\Gamma_a} - \varphi_2|_{\Gamma_a}}} \|\varphi\|_{\mathcal{W}_d}. \quad (1.2.19)$$

Assim sendo, para qualquer $\beta_1 > 1$ pode-se escolher $\psi \in \mathcal{W}_d$ tal que $\psi_1|_{\Gamma_a} - \psi_2|_{\Gamma_a} = [\mu]$ e

$$\|\psi\|_{\mathcal{W}_d} \leq \beta_1 \|[\mu]\|_{H_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a)}. \quad (1.2.20)$$

Logo, da definição (1.2.17) e usando a (1.2.20) tem-se para $\beta_2 > 1$ o seguinte

$$\frac{1}{\beta_2} \|t_\gamma\|_{H_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)} < \sup_{\substack{\llbracket \mu \rrbracket \in H_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a) \\ \llbracket \mu \rrbracket \neq 0}} \frac{\int_{\Gamma_a} t_\gamma \llbracket \mu \rrbracket \, d\Gamma}{\|\llbracket \mu \rrbracket\|_{H_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a)}} \leq \beta_1 \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{W}_d \\ \llbracket \mu \rrbracket = \psi_{1|\Gamma_a} - \psi_{2|\Gamma_a} \\ \psi_{1|\Gamma_a} \neq \psi_{2|\Gamma_a}}} \frac{\int_{\Gamma_a} t_\gamma \llbracket \mu \rrbracket \, d\Gamma}{\|\psi\|_{\mathcal{W}_d}}. \quad (1.2.21)$$

Desta forma existe $\beta_0 = \frac{1}{\beta_1 \beta_2} > 0$ tal que a forma $b(\cdot, \cdot)$ satisfaz a seguinte condição *inf-sup*

$$\beta_0 \leq \inf_{\substack{t_\gamma \in H_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a) \\ t_\gamma \neq 0}} \sup_{\substack{\psi \in \mathcal{W}_d \\ \llbracket \mu \rrbracket = \psi_{1|\Gamma_a} - \psi_{2|\Gamma_a} \\ \psi_{1|\Gamma_a} \neq \psi_{2|\Gamma_a}}} \frac{\int_{\Gamma_a} t_\gamma \llbracket \mu \rrbracket \, d\Gamma}{\|\psi\|_{\mathcal{W}_d} \|t_\gamma\|_{H_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)}}. \quad (1.2.22)$$

Logo, do lema de Babuška [8] segue-se que existe uma única combinação $t_\gamma \in H_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)$. \square

Agora estão todos os elementos dados para formular o problema de acoplamento entre modelos de diversa dimensionalidade. Para levar a cabo isto introduzem-se hipóteses simplificativas de modo que a cinemática que governa o problema sobre um dos domínios seja alterada, obtendo cinemáticas não compatíveis a ambos os lados de Γ_a .

1.2.1 Acoplamento 3D–2D

Seja agora o domínio Ω_1 descrito em coordenadas cilíndricas $\mathbf{x} = (r, \phi, z)$ de acordo com o esquema da Figura 1.2.

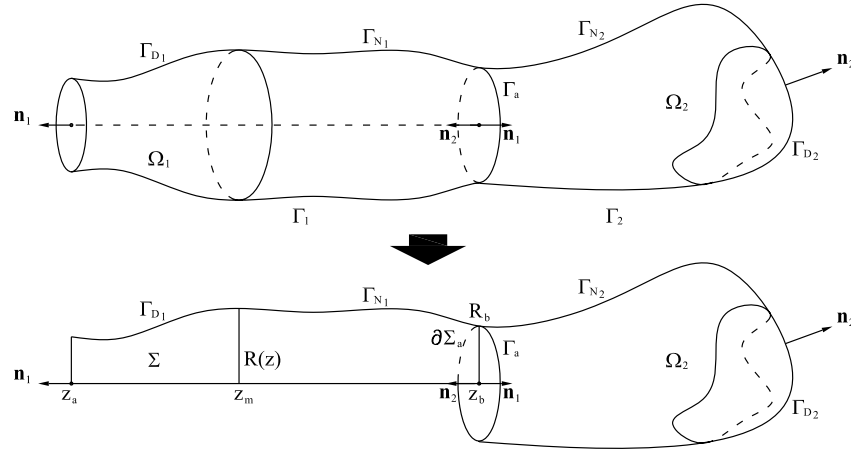


Figura 1.2: Acoplamento de modelos 3D–2D.

Considere que, por alguma razão inerente à modelagem do problema, seja possível assumir que o campo de temperatura nesta parte do domínio toma a seguinte forma

$$\theta_1(t, \mathbf{x}) = \theta_1(t, r, z), \quad (1.2.23)$$

ou seja que os fenômenos podem ser descritos como possuindo simetria de revolução, enquanto que no domínio Ω_2 mantém-se o grau de descrição da cinemática em três dimensões. Considera-se que o contorno Γ_a é tal que a normal \mathbf{n}_1 (vista desde o domínio Ω_1) está na direção da coordenada z . Neste caso escolheu-se acoplar um modelo 3D com um que possui simetria de revolução, mas nada impede considerar o acoplamento com um modelo

onde a hipótese cinemática gera um modelo plano 2D, problema que será tratado mais na frente no contexto da mecânica dos fluidos.

Logo resulta claro que, ao ter introduzido esta hipótese, o campo de temperatura θ sofre uma descontinuidade sobre Γ_a e portanto o Problema 1.4 não está bem posto. Para isto utiliza-se o Problema 1.5 que permite lidar com descontinuidades provenientes, em particular, da introdução desta classe de hipótese. De fato, ao proporcionar esta forma particular ao campo θ_1 se está modificando a cinemática com a qual estão descritos os fenômenos no domínio Ω_1 . Logo, a forma do espaço \mathcal{Q}_1 é a seguinte

$$\mathcal{Q}_1 = H_r^1(\Sigma), \quad (1.2.24)$$

onde Σ é o domínio de análise dado por $\Sigma = \{(z, r) \in \Omega_1; z \in (z_a, z_b); r \in (0, R)\}$, enquanto que o índice r indica que as funções ponderadas pela função $f(r) = 2\pi r$ estão em $H^1(\Sigma)$. Desta forma tem-se

$$\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) = H_r^{1/2}(\partial\Sigma_a) \quad \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' = H_r^{-1/2}(\partial\Sigma_a), \quad (1.2.25)$$

onde $\partial\Sigma_a = \{(z, r) \in \Omega_1; z = z_b; r \in (0, R)\} = (0, R_b)$ (ver Figura 1.2). Em conseqüência, a forma do produto de dualidade resulta

$$\langle s_1, \theta_1 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \int_0^{R_b} s_1 \theta_1 2\pi r \, dr. \quad (1.2.26)$$

Agora a questão é como tratar o produto $\langle s_1, \theta_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}$. De acordo com as idéias desenvolvidas na Seção 1.1, o espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ deve ser definido de forma que a decomposição ortogonal (1.1.10) se mantenha válida. Assim sendo, de acordo com a (1.1.11) resulta

$$\theta_{2|\Gamma_a} = \theta_{21} + \theta_{2r}, \quad (1.2.27)$$

onde θ_{21} possui as características de θ_1 segundo a (1.2.23). Portanto escreve-se

$$\langle s_1, \theta_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \langle s_1, \theta_{21} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \int_0^{R_b} s_1 \theta_{21} 2\pi r \, dr, \quad (1.2.28)$$

devido a que a flutuação θ_{2r} satisfaz

$$\langle s_1, \theta_{2r} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = 0 \quad \forall s_1 \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'. \quad (1.2.29)$$

Logo, é fácil ver que θ_{2r} neste caso deve ser tal que

$$\int_0^{2\pi} \theta_{2r} \, d\phi = 0. \quad (1.2.30)$$

Com esta propriedade pode-se caracterizar θ_{21} como sendo

$$\theta_{21} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_2 \, d\phi. \quad (1.2.31)$$

Então, o espaço \mathcal{Q}_2 pode ser definido como

$$\mathcal{Q}_2 = \{\eta_2 \in H^1(\Omega_2); \eta_{2|\Gamma_a} = \eta_{21} + \eta_{2r}; \eta_{21} \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1); \eta_{2r} \text{ satisfaz (1.2.30)}\}. \quad (1.2.32)$$

De forma análoga, resulta diretamente que o produto de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)}$ é

$$\langle s_2, \theta_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} = \int_{\Gamma_a} s_2 \theta_2 \, d\Gamma. \quad (1.2.33)$$

A fim de reduzir o modelo sobre Ω_1 , as integrais em Ω_1 e em Γ_{N_1} escrevem-se como segue

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} (\cdot) \, d\mathbf{x} &= \int_{z_a}^{z_b} \int_0^R \int_0^{2\pi} (\cdot) r \, d\phi dr dz, \\ \int_{\Gamma_{N_1}} (\cdot) \, d\Gamma &= \int_{z_m}^{z_b} \int_0^{2\pi} (\cdot) R \, d\phi dz.\end{aligned}\tag{1.2.34}$$

Assim sendo, incorporando a forma particular do campo θ_1 dada pela (1.2.23), levando em conta a (1.2.26), sua conseqüência (1.2.28), e a (1.2.33) na formulação variacional (1.2.5), e considerando os seguintes fluxos de calor e carregamentos generalizados

$$\begin{aligned}q_{1r}^\phi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{e}_r \, d\phi & q_{1z}^\phi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{e}_z \, d\phi, \\ f^\phi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \, d\phi & \bar{q}_{n_1}^\phi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{q}_{n_1} \, d\phi,\end{aligned}\tag{1.2.35}$$

resulta o seguinte problema de acoplamento entre um modelo 3D (sobre Ω_2) e um modelo 2D (sobre Ω_1):

Problema 1.6 (Transferência de calor – Acoplamento 3D–2D). *Para cada $t \in (0, T)$ e para algum $\gamma \in [0, 1]$ encontre $((\theta_1, \theta_2), t_1, t_2) \in \mathcal{X}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ tal que*

$$\begin{aligned}& \int_{z_a}^{z_b} \int_0^R 2\pi r \left[\rho C \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \eta_1 - q_{1r}^\phi \frac{\partial \eta_1}{\partial r} - q_{1z}^\phi \frac{\partial \eta_1}{\partial z} \right] dr dz + \int_{\Omega_2} \left[\rho C \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \eta_2 - \mathbf{q}_2 \cdot \nabla \eta_2 \right] d\mathbf{x} \\ & + \int_0^{R_b} r \left(\gamma 2\pi t_1 + (1 - \gamma) \int_0^{2\pi} t_2 \, d\phi \right) (\eta_1 - \eta_{21}) dr - (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} t_2 \eta_{2r} \, d\Gamma \\ & + \gamma \int_0^{R_b} 2\pi r s_1 (\theta_1 - \theta_{21}) dr + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} s_2 (\theta_1 - \theta_2) \, d\Gamma = \\ & \int_{z_a}^{z_b} \int_0^R 2\pi r f^\phi \eta_1 \, dr dz + \int_{\Omega_2} f \eta_2 \, d\mathbf{x} - \int_{z_m}^{z_b} 2\pi R \bar{q}_{n_1}^\phi \eta_1 \, dz - \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{q}_{n_2} \eta_2 \, d\Gamma \\ & \forall ((\eta_1, \eta_2), s_1, s_2) \in \mathcal{Y}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)',\end{aligned}\tag{1.2.36}$$

com $\theta_1(0, r, z) = 0$ e $\theta_2(0, \mathbf{x}) = 0$. Além disso é $\mathcal{X}_d = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ com

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_1 &= \{\theta_1 \in \mathcal{Q}_1; \theta_1|_{\Gamma_{D_1}} = \bar{\theta}_1\}, \\ \mathcal{X}_2 &= \{\theta_2 \in \mathcal{Q}_2; \theta_2|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\theta}_2\},\end{aligned}\tag{1.2.37}$$

com \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 definidos segundo a (1.2.24) e a (1.2.32) respectivamente. Ainda \mathcal{Y}_d é o espaço gerador da variedade linear \mathcal{X}_d . Finalmente $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'$ é dado segundo a (1.2.25), e $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ é o espaço dual de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ com \mathcal{Q}_2 definido pela (1.2.32). Os demais elementos são definidos segundo o Problema 1.5.

Observe que agora o problema sobre Ω_1 fica em termos dos fluxos de calor generalizados q_{1r}^ϕ e q_{1z}^ϕ , assim como do fluxo \mathbf{q}_2 , para os quais é preciso fornecer as correspondentes leis constitutivas como funções de θ_1 e θ_2 respectivamente.

Antes de ir em busca das equações de Euler–Lagrange observe que é conveniente escrever, sem perda de generalidade, a seguinte decomposição do fluxo \mathbf{q}_2 sobre Γ_a

$$\mathbf{q}_2|_{\Gamma_a} = \bar{q}_2 \mathbf{n}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2,\tag{1.2.38}$$

onde \bar{q}_2 e $\tilde{\mathbf{q}}_2$ são escolhidos tais que

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \, d\phi \quad \int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \, d\phi = 0. \quad (1.2.39)$$

Logo, usando recorrentemente a fórmula de Green resulta que, no sentido das distribuições, as equações de Euler–Lagrange correspondentes à formulação variacional (1.2.36) do problema de acoplamento 3D–2D são as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{ll} r\rho C \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(rq_{1r}^\phi) + r \frac{\partial q_{1z}^\phi}{\partial z} = rf^\phi & \text{em } \Sigma, \\ \rho C \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_2 = f & \text{em } \Omega_2, \\ \theta_1 = \bar{\theta}_1 & \text{sobre } \Gamma_{D1}, \\ \theta_2 = \bar{\theta}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D2}, \\ q_{1r}^\phi = \bar{q}_{n_1}^\phi & \text{sobre } \Gamma_{N1}, \\ \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \bar{q}_{n_2} & \text{sobre } \Gamma_{N2}, \\ \gamma(\theta_1 - \theta_{21}) = 0 & \text{sobre } \partial\Sigma_a, \\ (1 - \gamma)(\theta_1 - \theta_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \gamma t_1 + (1 - \gamma) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t_2 \, d\phi = q_{1z}^\phi & \text{sobre } \partial\Sigma_a, \\ \gamma t_1 + (1 - \gamma) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t_2 \, d\phi = \bar{q}_2 & \text{sobre } \partial\Sigma_a, \\ [(1 - \gamma)t_2 - \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{n}_1] \perp \eta_{2r} \quad \forall \eta_{2r} \text{ que satisfaz (1.2.30)} & \text{sobre } \Gamma_a. \end{array} \right. \quad (1.2.40)$$

As cinco últimas expressões acima são interpretadas como as condições de acoplamento que surgem naturalmente da equação variacional (1.2.36). Aqui é importante ressaltar as conseqüências de escolher os valores extremos de γ , já que tal escolha afeta significativamente às condições de acoplamento resultantes. A solução do Problema 1.5 não depender do valor de γ , entretanto, o mesmo não acontece com o Problema 1.6. Isto é, a independência mencionada com relação a γ é perdida ao ter introduzido alguma hipótese sobre a cinemática do campo θ em alguma parte do domínio. Com efeito, segundo as equações de Euler–Lagrange associadas, ao escolher $\gamma = 1$ as condições de acoplamento são as seguintes

$$\theta_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta_2 \, d\phi \quad \text{sobre } \partial\Sigma_a, \quad (1.2.41)$$

$$q_{1z}^\phi = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.2.42)$$

$$t_1 = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \quad \text{sobre } \partial\Sigma_a. \quad (1.2.43)$$

Para obter as expressões (1.2.42) e (1.2.43) foi usado o fato de ser

$$\tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \perp \eta_{2r} \quad \forall \eta_{2r} \text{ que satisfaz (1.2.30)}, \quad (1.2.44)$$

do que se conclui que deve ser $\tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = 0$ e portanto $\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = \bar{q}_2$. Por outro lado, se $\gamma \neq 1$ as condições de acoplamento são dadas por

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.2.45)$$

$$q_{1z}^\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \, d\phi \quad \text{sobre } \partial\Sigma_a, \quad (1.2.46)$$

$$t_2 = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.2.47)$$

sendo que a (1.2.47) é obtida combinando as últimas duas equações vistas na (1.2.40) junto com a decomposição (1.2.38).

O mais importante a ser frisado aqui é que, por um lado, no caso $\gamma = 1$ o campo θ é efetivamente descontínuo sobre Γ_a posto que somente o valor médio (no sentido do ângulo ϕ) mantém-se contínuo (ver a (1.2.41)) e nada impede à flutuação θ_{2r} assumir um valor arbitrário em concordância com a (1.2.30), enquanto que a quantidade que mantém a continuidade sobre Γ_a é o fluxo de calor (ver a (1.2.42)). Por outro lado, para $\gamma \neq 1$ o campo θ é contínuo (ver a (1.2.45)) e por sua vez o fluxo de calor é descontínuo já que somente o seu valor médio (no sentido do ângulo ϕ) é contínuo (ver a (1.2.46)) e nada impede à componente $\tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{n}_1$ assumir um valor arbitrário, porém sempre mantendo a ortogonalidade com as funções da forma de η_{2r} .

Dado que o problema é de fato acoplado estas não constituem condições de contorno para nenhum dos dois modelos. Justamente, em tal caso estas condições são naturalmente obtidas da própria formulação do problema. Apesar disto, é possível dar uma outra interpretação às condições de acoplamento a partir de separar, em algum sentido, ambos problemas analisando as condições, que agora sim são condições de contorno, sobre cada um deles. Para isto assume-se que é possível dividir a resolução do problema acoplado em dois problemas que de forma iterativa vão se aproximando do problema real. Assim, resolve-se primeiro o problema sobre Ω_1 e a seguir o problema sobre Ω_2 (nada impede pensar isto ao contrário). Seja $\gamma = 1$. Então, nesta situação hipotética resolve-se primeiro o problema sobre Ω_1 com condição de contorno em $\partial\Sigma_a$ dada pela (1.2.41) para depois resolver o problema sobre Ω_2 com condição de contorno sobre Γ_a dada pela (1.2.42). Isto permite ver que o problema sobre Ω_1 é um problema de Dirichlet quando pensado com relação à condição sobre a fronteira de acoplamento, ao mesmo tempo que o problema sobre Ω_2 é um problema de Neumann. Para $\gamma \neq 1$ a situação fica invertida. O problema sobre Ω_1 resolve-se utilizando a condição de contorno (1.2.46), resultando em um problema de Neumann, enquanto que sobre Ω_2 o problema possui condição de contorno de Dirichlet dada pela (1.2.45). Existe então uma relação de reciprocidade entre os diferentes valores de γ posto que com a mesma formulação variacional passamos para o domínio Ω_1 (domínio Ω_2) de um problema de Dirichlet (Neumann) a um problema de Neumann (Dirichlet).

1.2.2 Acoplamento 3D–1D

Seja o esquema da Figura 1.3.

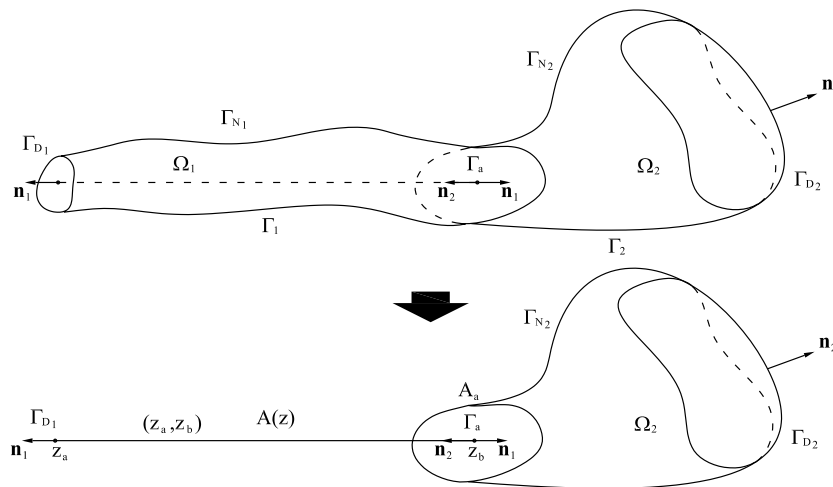


Figura 1.3: Acoplamento de modelos 3D–1D.

Assume-se novamente que, por alguma razão inerente à modelagem do problema, o

campo de temperatura sobre Ω_1 pode ser definido como

$$\theta_1(t, \mathbf{x}) = \theta_1(t, z), \quad (1.2.48)$$

ou seja que os fenômenos podem ser descritos em uma dimensão. No domínio Ω_2 mantém-se a descrição em três dimensões. A hipótese realizada aqui afeta bastante as características do modelo inicial. Por exemplo, as fronteiras de Dirichlet e Neumann já não existem sobre a parte lateral do domínio Ω_1 , mas somente em z_a , ou em tal caso a condição de Neumann na fronteira lateral resulta em uma fonte distribuída no modelo reduzido. Sem perda de generalidade considera-se que z_a é o contorno de Dirichlet Γ_{D1} e que a fronteira lateral possui condição de Neumann. Logo, como consequência da hipótese feita, o campo de temperatura θ sofre uma descontinuidade sobre Γ_a e, portanto, o Problema 1.4 não está bem posto. Novamente recorre-se ao Problema 1.5 já que, assim como no problema de acoplamento 3D-2D, aqui a *cinemática* sobre Ω_1 está sendo alterada suscitando uma descontinuidade sobre Γ_a . Assim, ao considerar a hipótese cinemática (1.2.48), a forma do espaço \mathcal{Q}_1 é a seguinte

$$\mathcal{Q}_1 = H^1((z_a, z_b)). \quad (1.2.49)$$

Logo tem-se

$$\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) = \mathbb{R} \quad \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' = \mathbb{R}. \quad (1.2.50)$$

Portanto resulta

$$\langle s_1, \theta_1 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = (s_1 \theta_1) \Big|_{z_b}. \quad (1.2.51)$$

Novamente, a questão é determinar a forma do produto de dualidade $\langle s_1, \theta_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}$. Das idéias desenvolvidas na Seção 1.1, resulta que o espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ deve ser escrito de modo que a decomposição ortogonal (1.1.10) seja válida. De acordo com a (1.1.11) resulta então

$$\theta_2|_{\Gamma_a} = \theta_{21} + \theta_{2r}, \quad (1.2.52)$$

onde θ_{21} é da forma de θ_1 de acordo com a (1.2.48). Logo, escreve-se

$$\langle s_1, \theta_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \langle s_1, \theta_{21} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = (s_1 \theta_{21}) \Big|_{z_b}, \quad (1.2.53)$$

posto que a flutuação θ_{2r} satisfaz

$$\langle s_1, \theta_{2r} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = 0 \quad \forall s_1 \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'. \quad (1.2.54)$$

Assim, vê-se que θ_{2r} deve ser tal que

$$\int_{\Gamma_a} \theta_{2r} d\Gamma = 0. \quad (1.2.55)$$

A partir daqui θ_{21} resulta caracterizada simplesmente como segue

$$\theta_{21} = \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} \theta_2 d\Gamma, \quad (1.2.56)$$

onde $A_a = |\Gamma_a|$. O espaço \mathcal{Q}_2 é definido como

$$\mathcal{Q}_2 = \{\eta_2 \in H^1(\Omega_2); \eta_2|_{\Gamma_a} = \eta_{21} + \eta_{2r}; \eta_{21} \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1); \eta_{2r} \text{ satisfaz (1.2.55)}\}. \quad (1.2.57)$$

De forma análoga, o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)}$ é o usual

$$\langle s_2, \theta_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} = \int_{\Gamma_a} s_2 \theta_2 \, d\Gamma. \quad (1.2.58)$$

Para reduzir o modelo em Ω_1 , as integrais em Ω_1 e Γ_{N_1} decompõem-se como segue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (\cdot) \, d\mathbf{x} &= \int_{z_a}^{z_b} \int_{\Gamma} (\cdot) \, d\Gamma \, dz, \\ \int_{\Gamma_{N_1}} (\cdot) \, d\Gamma &= \int_{z_a}^{z_b} \int_{\partial\Gamma} (\cdot) \, d\partial\Gamma \, dz. \end{aligned} \quad (1.2.59)$$

Logo, introduzindo a hipótese (1.2.48) junto com as (1.2.51), (1.2.53) e (1.2.58) na formulação variacional (1.2.5), e ainda levando em conta o fluxo de calor e os carregamento generalizados

$$\begin{aligned} q_1^\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma, \\ f^\Gamma &= \int_{\Gamma} f \, d\Gamma - \int_{\partial\Gamma} \bar{q}_{n_1} \, d\partial\Gamma, \end{aligned} \quad (1.2.60)$$

resulta o seguinte problema de acoplamento entre um modelo 3D (sobre Ω_2) e um modelo 1D (sobre Ω_1):

Problema 1.7 (Transferência de calor – Acoplamento 3D–1D). *Para cada $t \in (0, T)$ e para algum $\gamma \in [0, 1]$ encontre $((\theta_1, \theta_2), t_1, t_2) \in \mathcal{X}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ tal que*

$$\begin{aligned} &\int_{z_a}^{z_b} \left[\rho_L C \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \eta_1 - q_1^\Gamma \frac{\partial \eta_1}{\partial z} \right] \, dz + \int_{\Omega_2} \left[\rho C \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \eta_2 - \mathbf{q}_2 \cdot \nabla \eta_2 \right] \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \left(\gamma t_1 + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} t_2 \, d\Gamma \right) (\eta_1 - \eta_{21}) \Big|_{z_b} - (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} t_2 \eta_{2r} \, d\Gamma \\ &\quad + \gamma s_1 (\theta_1 - \theta_{21}) \Big|_{z_b} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} s_2 (\theta_1 - \theta_2) \, d\Gamma = \\ &\quad \int_{z_a}^{z_b} f^\Gamma \eta_1 \, dz + \int_{\Omega_2} f \eta_2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{q}_{n_2} \eta_2 \, d\Gamma \\ &\quad \forall ((\eta_1, \eta_2), s_1, s_2) \in \mathcal{Y}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \end{aligned} \quad (1.2.61)$$

com $\theta_1(0, z) = 0$ e $\theta_2(0, \mathbf{x}) = 0$. Além disso ρ_L é a massa específica por unidade de comprimento, e ainda é $\mathcal{X}_d = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ com

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \{\theta_1 \in \mathcal{Q}_1; \theta_1|_{\Gamma_{D_1}} = \bar{\theta}_1\}, \\ \mathcal{X}_2 &= \{\theta_2 \in \mathcal{Q}_2; \theta_2|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\theta}_2\}, \end{aligned} \quad (1.2.62)$$

com \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 dados pelas (1.2.49) e (1.2.57) respectivamente, e \mathcal{Y}_d é o espaço gerador da variedade linear \mathcal{X}_d . Finalmente $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'$ é como na (1.2.50), e $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ é o espaço dual de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ com \mathcal{Q}_2 definido pela (1.2.57). Os demais elementos são definidos segundo o Problema 1.5.

Para concluir a formulação do problema é preciso fornecer o comportamento constitutivo sobre cada parte do domínio, isto é, as formas funcionais que relacionam os fluxos q_1^Γ e \mathbf{q}_2 com θ_1 e θ_2 respectivamente.

Previamente à obtenção das equações de Euler–Lagrange é conveniente escrever, sem

perda de generalidade, a seguinte decomposição do fluxo \mathbf{q}_2 em Γ_a

$$\mathbf{q}_2|_{\Gamma_a} = \bar{q}_2 \mathbf{n}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2, \quad (1.2.63)$$

onde \bar{q}_2 e $\tilde{\mathbf{q}}_2$ são tais que

$$\bar{q}_2 = \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \, d\Gamma \quad \int_{\Gamma_a} \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \, d\Gamma = 0. \quad (1.2.64)$$

Assim sendo, usando recorrentemente a fórmula de Green é possível obter, no sentido das distribuições, as equações de Euler–Lagrange correspondentes à formulação variacional (1.2.61) do problema de acoplamento 3D–1D

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_L C \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1^\Gamma}{\partial z} = f^\Gamma & \text{em } (z_a, z_b), \\ \rho C \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_2 = f & \text{em } \Omega_2, \\ \theta_1 = \bar{\theta}_1 & \text{em } \{z_a\}, \\ \theta_2 = \bar{\theta}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D2}, \\ \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \bar{q}_{n2} & \text{sobre } \Gamma_{N2}, \\ \gamma(\theta_1 - \theta_{21}) = 0 & \text{em } \{z_b\}, \\ (1 - \gamma)(\theta_1 - \theta_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \gamma t_1 + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} t_2 \, d\Gamma = q_1^\Gamma & \text{em } \{z_b\}, \\ \gamma t_1 + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} t_2 \, d\Gamma = A_a \bar{q}_2 & \text{em } \{z_b\}, \\ [(1 - \gamma)t_2 - \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{n}_1] \perp \eta_{2r} \quad \forall \eta_{2r} \text{ que satisfaz (1.2.55)} & \text{sobre } \Gamma_a. \end{array} \right. \quad (1.2.65)$$

Novamente, as cinco últimas expressões acima identificam-se como as condições naturais de acoplamento resultantes da formulação variacional (1.2.61). Analogamente ao caso de acoplamento 3D–2D é importante ver quais as conseqüências ao escolher o valor de γ . A independência da solução com relação a γ é novamente perdida no Problema 1.7 devido a hipótese introduzida. Logo, ao escolher $\gamma = 1$ as condições de acoplamento resultam

$$\theta_1 = \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} \theta_2 \, d\Gamma \quad \text{em } \{z_b\}, \quad (1.2.66)$$

$$q_1^\Gamma = A_a \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.2.67)$$

$$t_1 = A_a \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \quad \text{em } \{z_b\}. \quad (1.2.68)$$

Deve-se mencionar que para obter as expressões (1.2.67) e (1.2.68) foi preciso utilizar o seguinte fato

$$\tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \perp \eta_{2r} \quad \forall \eta_{2r} \text{ que satisfaz (1.2.55)}, \quad (1.2.69)$$

o que implica que deve ser necessariamente $\tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = 0$, e logo é $\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = \bar{q}_2$. Analogamente, se é $\gamma \neq 1$ obtêm-se as seguintes condições de acoplamento

$$\theta_1 = \theta_2 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.2.70)$$

$$q_1^\Gamma = \int_{\Gamma_a} \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \, d\Gamma \quad \text{em } \{z_b\}, \quad (1.2.71)$$

$$t_2 = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.2.72)$$

onde a (1.2.72) é obtida combinando as últimas duas equações vistas na (1.2.65) com a decomposição (1.2.63).

Logo, a interpretação sobre cada problema pode ser dada de forma completamente análoga ao problema de acoplamento de modelos 3D–2D. Isto é, para $\gamma = 1$ a temperatura é efetivamente um campo descontínuo dado que a flutuação θ_{2r} pode ser arbitrária, enquanto que o fluxo de calor é contínuo, e para $\gamma \neq 1$ a temperatura é um campo contínuo e o fluxo de calor resulta descontínuo dado que a componente $\tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{n}_1$, ortogonal às funções da forma de η_{2r} , pode ser arbitrária. A Tabela 1.1 resume os principais comentários para o problema 3D–1D, incluindo o caso em que o problema acoplado é entendido como segregado em dois sub-problemas, da mesma forma que explicado na parte final da seção anterior.

Valor de γ	Problema segregado em Ω_1	Problema segregado em Ω_2	Quantidade contínua	Quantidade descontínua
{1}	Dirichlet	Neumann	Fluxo de calor (ver (1.2.67))	Temperatura (ver (1.2.66))
[0,1)	Neumann	Dirichlet	Temperatura (ver (1.2.70))	Fluxo de calor (ver (1.2.71))

Tabela 1.1: Interpretações sobre o problema acoplado 3D–1D.

1.2.3 Decaimento da energia

Nesta seção analisa-se o problema de acoplamento 3D–1D para o qual estuda-se a propriedade do decaimento da energia. Para isto considere que as fontes f e f^Γ são nulas e além disso a condição de contorno é puramente de Dirichlet e homogênea, ou seja que $\Gamma_N = \emptyset$, $\Gamma_D = \Gamma$ e que $\bar{\theta}_1$ e $\bar{\theta}_2$ são nulas. A energia para o problema, ou uma quantidade equivalente, pode ser definida como

$$\mathcal{E} = A_m \|\theta_1\|_{L^2((z_a, z_b))}^2 + \|\theta_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2, \quad (1.2.73)$$

onde $A_m = \min_{z \in [z_a, z_b]} \{A(z)\}$.

Proposição 1.2. *Para o Problema 1.7 com condição inicial em $L^2((z_a, z_b)) \times L^2(\Omega_2)$, a energia do sistema definida segundo a (1.2.73) decai exponencialmente para um material cujo comportamento constitutivo segue a lei de Fourier.*

Prova. *Considere $\eta_1 = \theta_1$, $\eta_2 = \theta_2$, $s_1 = t_1$ e $s_2 = t_2$ na formulação variacional (1.2.61). Além disso, sejam θ_1 e θ_2 tais que se satisfaz a (1.2.66) ou a (1.2.70) segundo o valor de γ que se tome. Logo, para um material que segue a lei constitutiva de Fourier resulta*

$$\begin{aligned} & \int_{z_a}^{z_b} \left[\rho_L C \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \theta_1 + k_L \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right] dz + \int_{\Omega_2} \left[\rho C \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \theta_2 + \mathbf{K} \nabla \theta_2 \cdot \nabla \theta_2 \right] dx \\ & + \left(\gamma t_1 + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} t_2 d\Gamma \right) (\theta_1 - \theta_{21}) \Big|_{z_b} - (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} t_2 \theta_{2r} d\Gamma \\ & + \gamma t_1 (\theta_1 - \theta_{21}) \Big|_{z_b} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} t_2 (\theta_1 - \theta_2) d\Gamma = 0, \quad (1.2.74) \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_a}^{z_b} \rho_L C \theta_1^2 dz + \int_{z_a}^{z_b} k_L \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right)^2 dz \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_2} \rho C \theta_2^2 dx + \int_{\Omega_2} \mathbf{K} \nabla \theta_2 \cdot \nabla \theta_2 dx = 0. \quad (1.2.75) \end{aligned}$$

Sabendo que $k_L \geq k_0 > 0$ e $\mathbf{K}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq K_0 > 0$, $\forall \mathbf{u}$, e usando a desigualdade de Poincaré que estabelece que para todas as funções $\lambda_a \in H^1((z_a, z_b))$ e $\lambda_b \in H^1(\Omega_2)$ que se anulam em ao menos uma parte do contorno, existem constantes $C_a > 0$ e $C_b > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \lambda_a}{\partial z} \right\|_{L^2((z_a, z_b))}^2 &\geq C_a \|\lambda_a\|_{L^2((z_a, z_b))}^2, \\ \|\nabla \lambda_b\|_{L^2(\Omega_2)}^2 &\geq C_b \|\lambda_b\|_{L^2(\Omega_2)}^2, \end{aligned} \quad (1.2.76)$$

resulta, sabendo que $\rho_L \geq A_m \rho$ e assumindo que ρ e C são constantes, o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{A_m \rho C}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\theta_1\|_{L^2((z_a, z_b))}^2 + C_a k_0 \|\theta_1\|_{L^2((z_a, z_b))}^2 + \frac{\rho C}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\theta_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + C_b K_0 \|\theta_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \leq \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_a}^{z_b} \rho_L C \theta_1^2 dz + \int_{z_a}^{z_b} k_L \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right)^2 dz \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_2} \rho C \theta_2^2 dx + \int_{\Omega_2} \mathbf{K} \nabla \theta_2 \cdot \nabla \theta_2 dx = 0. \end{aligned} \quad (1.2.77)$$

Rearrmando os termos tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\rho C}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[A_m \|\theta_1\|_{L^2((z_a, z_b))}^2 + \|\theta_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \right] \\ + C_1 \left[A_m \|\theta_1\|_{L^2((z_a, z_b))}^2 + \|\theta_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \right] = \frac{\rho C}{2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + C_1 \mathcal{E} \leq 0, \end{aligned} \quad (1.2.78)$$

onde $C_1 = \min\{\frac{C_a k_0}{A_m}, C_b K_0\}$. Logo, segue-se que

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{2C_1}{\rho C} \mathcal{E} \leq 0, \quad (1.2.79)$$

portanto obtém-se

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) e^{-\frac{2C_1}{\rho C} t}, \quad (1.2.80)$$

com

$$\mathcal{E}(0) = A_m \|\theta_{10}\|_{L^2((z_a, z_b))}^2 + \|\theta_{20}\|_{L^2(\Omega_2)}^2, \quad (1.2.81)$$

onde neste caso as condições iniciais não são nulas mas $\theta_1(0, z) = \theta_{10}(z)$ e $\theta_2(0, \mathbf{x}) = \theta_{20}(\mathbf{x})$. Segue-se então que a energia do sistema acoplado 3D-1D decai exponencialmente. \square

O resultado enunciado acima pode ser estendido para o problema acoplado 3D-2D sem inconvenientes, as idéias a serem aplicadas são as mesmas e por brevidade este resultado não é incluído.

1.3 O problema de componentes estruturais

Nos problemas de análise de componentes estruturais é bastante comum incorrer em modelos reduzidos aproveitando o fato de uma das dimensões do componente sob estudo, assim como os carregamentos que ele sofre, serem de formas particulares. Desta maneira, modelos estruturais tridimensionais são reduzidos para modelos de cascas ou inclusive de vigas a fim de reduzir o custo computacional e de focar a análise nos fenômenos de maior importância no problema. Entretanto, há situações nas quais os modelos reduzidos destes componentes não representam bem a realidade, seja porque os carregamentos sobre o componente são de natureza mais complexa ou porque a geometria já deixa de representar de fato a tal componente. Além do mais, a situação mais geral é aquela na qual a estrutura

pode misturar regiões que possuem formas arbitrárias com regiões cujas formas que se assemelham a uma casca e/ou viga.

Nas seguintes subseções analisam-se os problemas de acoplamento de modelos de sólido 3D com os modelos de cascas de Naghdi e de Kirchhoff–Love (acoplamento 3D–2D) e com o modelo de viga de Bernoulli (acoplamento 3D–1D). Nos três casos estuda-se somente o problema estático. A extensão para problemas envolvendo dinâmica é bastante direta e é omitida nesta seção por brevidade na apresentação.

Como no problema de transferência de calor, formula-se primeiro o problema geral de acoplamento sem introduzir na formulação nenhuma hipótese cinemática, chegando ao princípio geral correspondente àquele que foi exibido na Seção 1.1. Para isto considere novamente um domínio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com contorno $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ (sendo $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$) segundo mostra a Figura 1.1 já apresentada na seção anterior. O problema de análise estrutural sem fenômenos dinâmicos é o seguinte:

Problema 1.8. *Encontre $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ tal que*

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (1.3.1)$$

onde

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \bar{\mathbf{u}}\}, \quad (1.3.2)$$

com \mathcal{V} sendo o espaço gerador da variedade linear \mathcal{U} , e além disso $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ é o tensor de tensão de Cauchy, \mathbf{f} é uma força por unidade de volume, $\bar{\mathbf{t}}$ é uma tração imposta sobre a fronteira de Neumann Γ_N e $\bar{\mathbf{u}}$ é um deslocamento imposto sobre a fronteira de Dirichlet Γ_D .

Novamente, agora resta especificar o comportamento do material através do tensor de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ para fechar o problema.

Seja o contorno interno Γ_a , segundo mostra a Figura 1.1, que divide o domínio Ω como sendo $\Omega = (\Omega_1 \cup \Omega_2)^\circ$, com $\Gamma_a = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ e $\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \setminus \Gamma_a$, de forma idêntica ao feito na Seção 1.1. Assim sendo, sabe-se que a solução do Problema 1.8, considerada agora como um par $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ em função da partição feita, satisfaz as seguintes condições sobre o contorno Γ_a

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad \text{em } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_a), \quad (1.3.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_1 \quad \text{em } \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_a), \quad (1.3.4)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_i$ é o tensor de tensão correspondente à partição Ω_i , $i = 1, 2$, sobre o contorno Γ_a cuja normal exterior, vista do domínio Ω_1 , é \mathbf{n}_1 . Sob a mesma interpretação que no problema de calor tem-se que a (1.3.3) decorre da cinemática do problema por meio do conjunto \mathcal{U} , enquanto que a (1.3.4) provém de forma natural da formulação variacional (1.3.1).

Agora, o próximo passo é estender o princípio variacional para funções que podem ser descontínuas sobre Γ_a . Isto permite, como será feito mais na frente, efetuar hipóteses cinemáticas sobre uma parte do domínio sem violar a validade do princípio variacional. Então, assumindo que a (1.3.3) não se verifica é preciso reescrever o princípio variacional adicionando termos que envolvam as potências geradas pelas descontinuidades. Estes termos são introduzidos objetivando que as equações de Euler–Lagrange conseqüentes do princípio variacional estendido mantenham estreita relação com o problema original. Esta idéia segue novamente os conceitos genéricos que levaram à introdução do Problema 1.2 da Seção 1.1. Assim sendo, o problema estendido resulta o seguinte:

Problema 1.9. Para algum $\gamma \in [0, 1]$ encontre $((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \in \mathcal{U}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla \mathbf{v}_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} = \\ & \quad \gamma \langle \mathbf{t}_1, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} + (1 - \gamma) \langle \mathbf{t}_2, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} \\ & \quad + \gamma \langle \mathbf{s}_1, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} + (1 - \gamma) \langle \mathbf{s}_2, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} \\ & \quad + \int_{\Omega_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{N_1}} \bar{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \, d\Gamma \\ & \quad \forall ((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

onde $\bar{\mathbf{t}}_1 = \bar{\mathbf{t}}|_{\Gamma_{N_1}}$ e $\bar{\mathbf{t}}_2 = \bar{\mathbf{t}}|_{\Gamma_{N_2}}$ e além disso $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ com

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\mathbf{u}_1 \in \mathcal{Q}_1; \mathbf{u}_1|_{\Gamma_{D_1}} = \bar{\mathbf{u}}_1\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{u}_2 \in \mathcal{Q}_2; \mathbf{u}_2|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\mathbf{u}}_2\}, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\mathbf{u}}|_{\Gamma_{D_1}}$ e $\bar{\mathbf{u}}_2 = \bar{\mathbf{u}}|_{\Gamma_{D_2}}$, e com $\mathcal{V}_d = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ sendo \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 os espaços geradores das variedades lineares \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 . Os outros elementos são definidos segundo o Problema 1.8.

A consistência deste problema estendido segue considerando o seguinte

$$\mathcal{Q}_i = \mathbf{H}^1(\Omega_i) \quad i = 1, 2, \quad (1.3.7)$$

e portanto tem-se

$$\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_i) = \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_a) \quad \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_i)' = \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_a) \quad i = 1, 2. \quad (1.3.8)$$

Então, as formas que assumem os produtos dualidade são as seguintes

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}_1, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} &= \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \, d\Gamma, \\ \langle \mathbf{t}_2, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} &= \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Logo, no sentido das distribuições resulta que as equações de Euler-Lagrange correspondentes à formulação variacional estendida (1.3.5) são as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_1, \\ -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_2, \\ \mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1 & \text{sobre } \Gamma_{D_1}, \\ \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D_2}, \\ \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n}_1 = \bar{\mathbf{t}}_1 & \text{sobre } \Gamma_{N_1}, \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{t}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{N_2}, \\ \gamma(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ (1 - \gamma)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \gamma \mathbf{t}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{t}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n}_1 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \gamma \mathbf{t}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{t}_2 = \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_1 & \text{sobre } \Gamma_a. \end{array} \right. \quad (1.3.10)$$

Assim sendo, segue-se que a solução do problema em termos somente do campo $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$

independe do parâmetro real γ , sendo possível escrever o seguinte

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_1, \\ -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_2, \\ \mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1 & \text{sobre } \Gamma_{D1}, \\ \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D2}, \\ \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n}_1 = \bar{\mathbf{t}}_1 & \text{sobre } \Gamma_{N1}, \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{t}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{N2}, \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{n}_1 = \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_1 & \text{sobre } \Gamma_a, \end{cases} \quad (1.3.11)$$

onde novamente mostra-se a consistência assim como mostrado no Problema 1.3. Conclui-se então que a solução do Problema 1.9 satisfaz as mesmas equações de Euler–Lagrange que a solução do Problema 1.8. Com efeito, as duas últimas expressões da (1.3.11) correspondem-se com as (1.3.3)–(1.3.4). O seguinte resultado é enunciado para o caso de um material elástico em regime de deformações infinitesimais e de resposta linear:

Proposição 1.3. *O Problema 1.9, em regime de deformações infinitesimais e com lei constitutiva correspondente à de um material elástico linear, ou seja $\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i)$ ($i = 1, 2$), sendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ o tensor de deformação e \mathbb{D} o tensor de elasticidade linear de quarta ordem, possui solução, resultando um único $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathcal{U}_d$ e uma única combinação $\mathbf{t}_\gamma = \gamma \mathbf{t}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{t}_2 \in \mathbf{H}_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)$.*

Prova. *A prova é realizada de forma completamente análoga à apresentada no problema de transferência de calor, seguindo os passos usados em [8, 27] para o tratamento de formulações mistas. Assim, observe que o problema pode ser escrito como segue*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, \mathbf{t}_\gamma) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_d, \quad (1.3.12)$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{s}_\gamma) = 0 \quad \forall \mathbf{s}_\gamma \in \mathbf{H}_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a), \quad (1.3.13)$$

com $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{W}_d \times \mathcal{W}_d \rightarrow \mathbb{R}$, $b(\cdot, \cdot) : \mathcal{W}_d \times \mathbf{H}_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a) \rightarrow \mathbb{R}$ e $l(\cdot) : \mathcal{W}_d \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_1} \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2) \, d\mathbf{x}, \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{s}_\gamma) &= \int_{\Gamma_a} [\gamma \mathbf{s}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{s}_2] \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, d\Gamma, \\ l(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{N1}} \bar{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{N2}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

e onde $\mathcal{W}_d = \mathbf{H}^1(\Omega_1) \times \mathbf{H}^1(\Omega_2)$ cuja norma vem dada por $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{W}_d} = \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_1)} + \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_2)}$. Seja a decomposição $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ onde $\mathbf{z} \in \mathcal{W}_d$ é tal que $\mathbf{z}_1|_{\Gamma_{D1}} = \bar{\mathbf{u}}_1$, $\mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} = 0$, $\mathbf{z}_2|_{\Gamma_{D2}} = \bar{\mathbf{u}}_2$ e $\mathbf{z}_2|_{\Gamma_a} = 0$, enquanto que $\mathbf{w} \in \mathcal{K} \subset \operatorname{Ker}(\mathcal{B})$ sendo \mathcal{B} o operador associado à forma $b(\cdot, \cdot)$ e

$$\mathcal{K} = \{ \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathcal{W}_d; \mathbf{w}_1|_{\Gamma_{D1}} = 0, \mathbf{w}_2|_{\Gamma_{D2}} = 0, \mathbf{w}_1|_{\Gamma_a} = \mathbf{w}_2|_{\Gamma_a} \}. \quad (1.3.15)$$

Analogamente ao caso do problema de calor, resulta simples mostrar que a forma $a(\cdot, \cdot)$ é bilinear, simétrica, contínua e coerciva em $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ desde que \mathbb{D} seja um tensor de quarta ordem tal que $\mathbb{D}\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} > 0$, para todo tensor de segunda ordem \mathbf{S} , e também que a forma $l(\cdot)$ é linear e contínua em \mathcal{K} . Logo, usando o teorema de Lax–Milgram (ver [50]) segue-se

que existe uma única função $\mathbf{w} \in \mathcal{K} \subset \text{Ker}(\mathcal{B})$ tal que

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = l_{\mathbf{z}}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}, \quad (1.3.16)$$

onde $l_{\mathbf{z}}(\cdot) = l(\cdot) - a(\mathbf{z}, \cdot)$. Portanto, a existência e unicidade de $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathcal{U}_d$ segue. Para provar a existência e unicidade da combinação \mathbf{t}_γ deve-se recorrer novamente à teoria das formulações mistas. Neste caso a forma $b(\cdot, \cdot)$ deve satisfazer uma condição inf-sup para chegar ao resultado buscado. Define-se então o espaço $\mathbf{H}_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)$ equipado com a norma

$$\|\mathbf{t}_\gamma\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)} = \sup_{\substack{[\mathbf{w}] \in \mathbf{H}_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a) \\ [\mathbf{w}] \neq 0}} \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_\gamma \cdot [\mathbf{w}] \, d\Gamma}{\|[\mathbf{w}]\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a)}}, \quad (1.3.17)$$

como o espaço dual de $\mathbf{H}_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a)$ que é definido como

$$\mathbf{H}_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a) = \{[\mathbf{w}] \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_a); \mathbf{w} \in \mathcal{W}_d, [\mathbf{w}] = \mathbf{w}_1|_{\Gamma_a} - \mathbf{w}_2|_{\Gamma_a}\}, \quad (1.3.18)$$

e equipado com a norma

$$\|[\mathbf{w}]\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a)} = \inf_{\substack{\mathbf{y} \in \mathcal{W}_d \\ [\mathbf{w}] = \mathbf{y}_1|_{\Gamma_a} - \mathbf{y}_2|_{\Gamma_a}}} \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{W}_d}. \quad (1.3.19)$$

Assim sendo, para qualquer $\beta_1 > 1$ pode-se escolher $\mathbf{z} \in \mathcal{W}_d$ tal que $\mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} - \mathbf{z}_2|_{\Gamma_a} = [\mathbf{w}]$ e

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{W}_d} \leq \beta_1 \|[\mathbf{w}]\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a)}. \quad (1.3.20)$$

Logo, utilizando a definição (1.3.17) junto com a expressão (1.3.20) resulta para $\beta_2 > 1$ o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_2} \|\mathbf{t}_\gamma\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)} &< \sup_{\substack{[\mathbf{w}] \in \mathbf{H}_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a) \\ [\mathbf{w}] \neq 0}} \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_\gamma \cdot [\mathbf{w}] \, d\Gamma}{\|[\mathbf{w}]\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]}^{1/2}(\Gamma_a)}} \\ &\leq \beta_1 \sup_{\substack{\mathbf{z} \in \mathcal{W}_d \\ [\mathbf{w}] = \mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} - \mathbf{z}_2|_{\Gamma_a} \\ \mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} \neq \mathbf{z}_2|_{\Gamma_a}}} \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_\gamma \cdot [\mathbf{w}] \, d\Gamma}{\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{W}_d}}. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Portanto, segue-se que existe $\beta_0 = \frac{1}{\beta_1 \beta_2} > 0$ tal que a forma $b(\cdot, \cdot)$ satisfaz a seguinte condição inf-sup

$$\beta_0 \leq \inf_{\substack{[\mathbf{t}_\gamma] \in \mathbf{H}_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a) \\ [\mathbf{t}_\gamma] \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{z} \in \mathcal{W}_d \\ [\mathbf{w}] = \mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} - \mathbf{z}_2|_{\Gamma_a} \\ \mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} \neq \mathbf{z}_2|_{\Gamma_a}}} \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_\gamma \cdot [\mathbf{w}] \, d\Gamma}{\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{W}_d} \|[\mathbf{t}_\gamma]\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)}}. \quad (1.3.22)$$

Logo, do lema de Babuška [8] existe uma única combinação $\mathbf{t}_\gamma \in \mathbf{H}_{[\cdot]}^{-1/2}(\Gamma_a)$. \square

Neste ponto têm-se apresentado os elementos para abordar o problema de acoplamento entre modelos de diversa dimensionalidade no contexto da mecânica dos sólidos.

Logo, o acoplamento entre modelos de estruturas tridimensionais e cascas ou vigas decorre diretamente do Problema 1.9, para o qual é preciso introduzir as correspondentes hipóteses cinemáticas.

1.3.1 Acoplamento 3D–2D: casca de Naghdi

O acoplamento entre um modelo de sólido tridimensional e um componente com as características de uma casca resulta da maior importância em diversas aplicações. Em geral, muitos componentes não podem ser considerados inteiramente como cascas. Assim, se bem determinadas regiões poderiam ser simplificadas a um modelo de casca, outras requerem da descrição completa que um modelo 3D pode dar. Isto motiva a utilização de modelos acoplados 3D–2D segundo as idéias introduzidas neste capítulo. Trabalhar com uma formulação variacional para a análise do problema acoplado permite entender quais as condições de acoplamento entre os domínios, quaisquer que forem as hipóteses cinemáticas introduzidas na obtenção do modelo de casca. Para o problema tratado nesta seção utiliza-se o esquema da Figura 1.4.

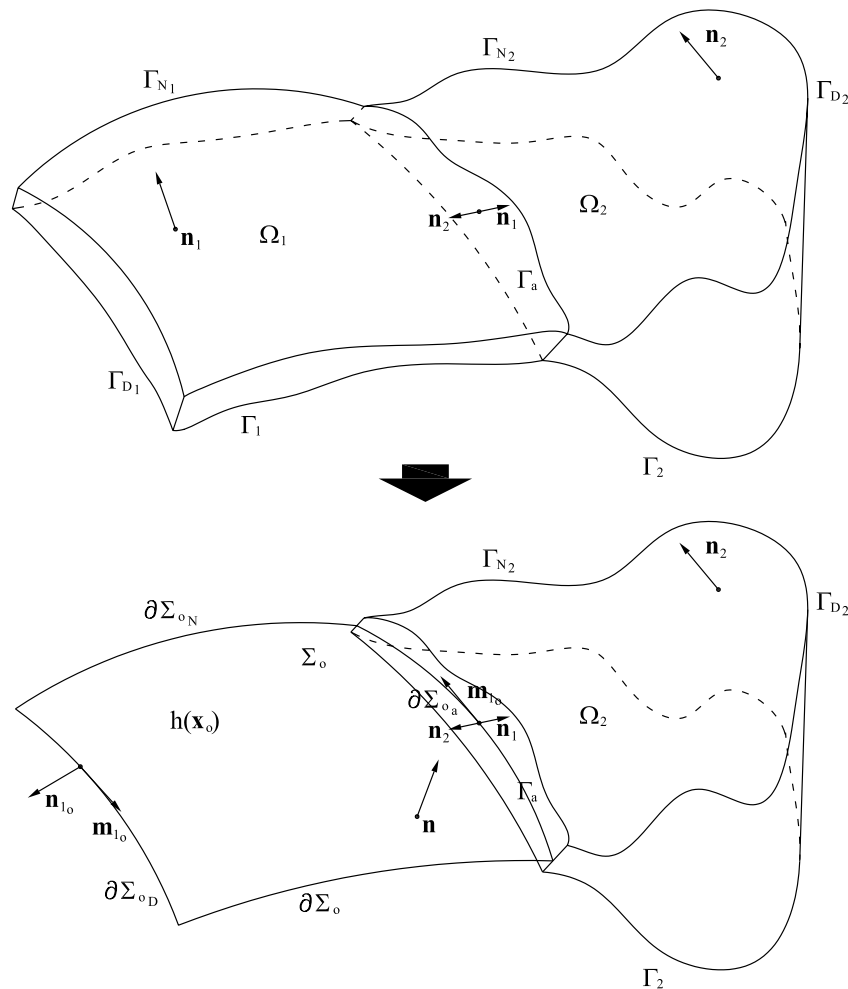


Figura 1.4: Acoplamento de modelos 3D–2D.

Vê-se que uma parte do domínio Ω_2 possui forma arbitrária. Nesta parte do domínio a cinemática utilizada é completa. Por outro lado, a parte do domínio Ω_1 possui uma forma muito particular, que permite analisar o componente como sendo uma casca. Assim, sobre esta parte do domínio utiliza-se a decomposição dos campos e das operações envolvidas

em termos das coordenadas sobre a superfície média da casca e da coordenada normal. Uma rápida revisão disto é dada a seguir.

Na análise de cascas é conveniente escrever o domínio Ω_1 como sendo o seguinte conjunto

$$\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \xi \mathbf{n}, \mathbf{x}_o \in \Sigma_o, \xi \in H\}, \quad (1.3.23)$$

onde Σ_o é a denominada superfície média através da qual se define o vetor normal $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$ sobre o qual se identifica a espessura da casca $h = h(\mathbf{x}_o)$ definida pelo comprimento do intervalo $H = (-\frac{h(\mathbf{x}_o)}{2}, \frac{h(\mathbf{x}_o)}{2})$. O domínio Ω_1 é limitado pelas superfícies superior Σ^+ e inferior Σ^- , e pela lateral Γ_L . Em particular identifica-se a superfície lateral de acoplamento Γ_a . Com esta descrição, e assumindo que a casca não contém arestas nem pontos angulosos, pode-se definir uma única normal e um único plano tangente sobre cada ponto $\mathbf{x}_o \in \Sigma_o$. Além disso, considera-se que a casca é fina o suficiente (em função do raio de curvatura) a fim de que o mapeamento $\mathbf{x} \leftrightarrow (\mathbf{x}_o, \xi)$ esteja univocamente determinado.

Para expressar de forma conveniente o princípio da potência virtual, neste caso, introduzem-se as decomposições dos tensores $\boldsymbol{\sigma}_1$ e $\nabla \mathbf{v}_1$ em termos das componentes no plano tangente e na direção da normal. Logo, dado o operador projeção sobre o plano tangente $\mathbf{\Pi}_t(\mathbf{x}_o) = \mathbf{I} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$, para um tensor \mathbf{S} simétrico tem-se a seguinte decomposição

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_t + \mathbf{S}_s \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{S}_s + S_n(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (1.3.24)$$

onde $\mathbf{S}_t = \mathbf{\Pi}_t \mathbf{S} \mathbf{\Pi}_t$ (tensor), $\mathbf{S}_s = \mathbf{\Pi}_t \mathbf{S} \mathbf{n}$ (vetor) e $S_n = (\mathbf{S} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$ (escalar), sendo ainda uma decomposição ortogonal. Por outro lado, utilizando identidades básicas de análise diferencial é possível mostrar a seguinte decomposição ortogonal em termos do plano tangente e da normal para o gradiente de um campo vetorial $\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + v_n \mathbf{n}$ (com componentes no plano tangente \mathbf{v}_t e na direção da normal $v_n \mathbf{n}$)

$$\nabla \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v})_t + (\nabla \mathbf{v})_s \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes (\nabla \mathbf{v})_s^* + (\nabla \mathbf{v})_n(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (1.3.25)$$

onde

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{v})_t &= \mathbf{\Pi}_t (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_t) \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Pi}_t + v_n (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{\Pi}_t, \\ (\nabla \mathbf{v})_s &= \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \xi}, \\ (\nabla \mathbf{v})_s^* &= \mathbf{\Pi}_t \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_o} v_n - \mathbf{\Pi}_t \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{v}_t, \\ (\nabla \mathbf{v})_n &= \frac{\partial v_n}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (1.3.26)$$

com $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{I} + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}$ que é um operador invertível, onde $\nabla_{\mathbf{x}_o}(\cdot)$ denota o gradiente na variável \mathbf{x}_o sobre o plano tangente e $\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}$ é o tensor curvatura da superfície Σ_o . Para formular o problema sobre Ω_1 observe que a seguinte forma de escrever as integrais será útil

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (\cdot) d\mathbf{x} &= \int_{\Sigma_o} \int_H (\cdot) \det \boldsymbol{\Lambda} d\xi d\Sigma_o, \\ \int_{\Sigma^+} (\cdot) d\Gamma &= \int_{\Sigma_o} (\cdot) \det \boldsymbol{\Lambda}^+ d\Sigma_o, \\ \int_{\Sigma^-} (\cdot) d\Gamma &= \int_{\Sigma_o} (\cdot) \det \boldsymbol{\Lambda}^- d\Sigma_o, \\ \int_{\Gamma_{LN}} (\cdot) d\Gamma &= \int_{\partial \Sigma_{oN}} \int_H (\cdot) [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi d\partial \Sigma_o, \\ \int_{\Gamma_a} (\cdot) d\Gamma &= \int_{\partial \Sigma_{oa}} \int_H (\cdot) [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi d\partial \Sigma_o, \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

com $\mathbf{m}_{1o} = \mathbf{n} \times \mathbf{n}_{1o}$ o vetor unitário tangente a Σ_o sobre $\partial\Sigma_o$, sendo \mathbf{n} o correspondente vetor normal e \mathbf{n}_{1o} o vetor normal exterior ao contorno lateral Γ_L .

O modelo de casca aqui tratado constrói-se então considerando que a cinemática sobre Ω_1 é restrita à seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_{1t}(\mathbf{x}_o, \xi) + \mathbf{u}_{1n}(\mathbf{x}_o), \\ \mathbf{u}_{1t}(\mathbf{x}_o, \xi) &= \mathbf{u}_{1t}^o(\mathbf{x}_o) + \xi \boldsymbol{\omega}_{1t}(\mathbf{x}_o), \\ \mathbf{u}_{1n}(\mathbf{x}_o) &= u_{1n}(\mathbf{x}_o) \mathbf{n}(\mathbf{x}_o),\end{aligned}\tag{1.3.28}$$

onde \mathbf{u}_{1t} é um vetor sobre o plano tangente à superfície média e \mathbf{u}_{1n} é normal a tal plano tangente. Neste caso as fibras normais permanecem retas após a deformação e mantêm o seu comprimento. Este modelo conhece-se como modelo de Naghdi [115, 116]. Cabe mencionar que outros modelos, como o de Kirchhoff–Love que será tratado na Seção 1.3.2, podem ser igualmente analisados, e constituem casos particulares do aqui apresentado. Por último note que a análise de placas fica automaticamente incluída no que segue.

Da hipótese cinemática (1.3.28) segue que \mathbf{u}_1 está caracterizado por três elementos $(\mathbf{u}_{1t}^o, \boldsymbol{\omega}_{1t}, u_{1n}) \in \mathcal{Q}_1$ onde

$$\mathcal{Q}_1 = \mathbf{H}^1(\Sigma_o) \times \mathbf{H}^1(\Sigma_o) \times H^1(\Sigma_o),\tag{1.3.29}$$

do que se obtém

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) &= \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Sigma_{oa}) \times \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Sigma_{oa}) \times H^{1/2}(\partial\Sigma_{oa}), \\ \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' &= \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Sigma_{oa}) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Sigma_{oa}) \times H^{-1/2}(\partial\Sigma_{oa}).\end{aligned}\tag{1.3.30}$$

Assim sendo, o produto de dualidade neste caso fica definido como segue

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} &= \langle (\mathbf{s}_{1t}^o, \boldsymbol{\nu}_{1t}, s_{1n}), (\mathbf{u}_{1t}^o, \boldsymbol{\omega}_{1t}, u_{1n}) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \\ &= \int_{\partial\Sigma_{oa}} [\mathbf{s}_{1t}^o \cdot \mathbf{u}_{1t}^o + \boldsymbol{\nu}_{1t} \cdot \boldsymbol{\omega}_{1t} + s_{1n} u_{1n}] d\partial\Sigma_o.\end{aligned}\tag{1.3.31}$$

Mais uma vez deve-se estabelecer como proceder com a expressão do produto de dualidade $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}$. Dos conceitos introduzidos na Seção 1.1, segue-se que o espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ deve ser tal que a decomposição ortogonal (1.1.10) permaneça válida. Logo, em função da (1.1.11) resulta que

$$\mathbf{u}_{2|\Gamma_a} = \mathbf{u}_{21} + \mathbf{u}_{2r},\tag{1.3.32}$$

onde \mathbf{u}_{21} é da forma de \mathbf{u}_1 de acordo com a (1.3.28), ou seja que

$$\mathbf{u}_{21}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{2t}^o(\mathbf{x}_o) + \xi \boldsymbol{\omega}_{2t}^o(\mathbf{x}_o) + u_{2n}^o(\mathbf{x}_o) \mathbf{n}(\mathbf{x}_o),\tag{1.3.33}$$

onde novamente foi usada a decomposição nas componentes no plano tangente e na direção da normal. Logo, o produto de dualidade buscado escreve-se como segue

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} &= \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_{21} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \\ &= \langle (\mathbf{s}_{1t}^o, \boldsymbol{\nu}_{1t}, s_{1n}), (\mathbf{u}_{2t}^o, \boldsymbol{\omega}_{2t}^o, u_{2n}^o) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \\ &= \int_{\partial\Sigma_{oa}} [\mathbf{s}_{1t}^o \cdot \mathbf{u}_{2t}^o + \boldsymbol{\nu}_{1t} \cdot \boldsymbol{\omega}_{2t}^o + s_{1n} u_{2n}^o] d\partial\Sigma_o,\end{aligned}\tag{1.3.34}$$

devido a que a flutuação \mathbf{u}_{2r} satisfaz

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_{2r} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = 0 \quad \forall \mathbf{s}_1 \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'.\tag{1.3.35}$$

Desta condição vê-se que \mathbf{u}_{2r} está caracterizada como

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_t \int_H \mathbf{u}_{2r} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi &= 0, \\ \mathbf{\Pi}_t \int_H \frac{\partial \mathbf{u}_{2r}}{\partial \xi} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi &= 0, \\ \int_H \mathbf{u}_{2r} \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

Como resultado disto obtém-se que as componentes de \mathbf{u}_{21} satisfazem o seguinte

$$\begin{aligned} H_{\xi^0} \mathbf{u}_{2t}^o + H_{\xi^1} \boldsymbol{\omega}_{2t}^o &= \mathbf{\Pi}_t \int_H \mathbf{u}_2 [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\ H_{\xi^0} \boldsymbol{\omega}_{2t}^o &= \mathbf{\Pi}_t \int_H \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\ H_{\xi^0} u_{2n}^o &= \int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

onde $H_{\xi^i} = \int_H \xi^i [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi$. Finalmente, da (1.3.37) \mathbf{u}_{21} pode ser explicitamente expressa como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{2t}^o &= \frac{1}{H_{\xi^0}} \mathbf{\Pi}_t \int_H \left(\mathbf{u}_2 - \frac{H_{\xi^1}}{H_{\xi^0}} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} \right) [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\ \boldsymbol{\omega}_{2t}^o &= \frac{1}{H_{\xi^0}} \mathbf{\Pi}_t \int_H \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\ u_{2n}^o &= \frac{1}{H_{\xi^0}} \int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi. \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

Agora é possível definir o espaço \mathcal{Q}_2 como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_2 &= \{ \mathbf{v}_2 \in \mathbf{H}^1(\Omega_2); \mathbf{v}_{2|\Gamma_a} = \mathbf{v}_{2t}^o + \xi \boldsymbol{\varphi}_{2t}^o + v_{2n}^o \mathbf{n} + \mathbf{v}_{2r}; \\ &\quad (\mathbf{v}_{2t}^o, \boldsymbol{\varphi}_{2t}^o, v_{2n}^o) \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1); \mathbf{v}_{2r} \text{ satisfaz (1.3.36)} \}. \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

Em contrapartida, o produto de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)}$ é o habitual, isto é,

$$\langle \mathbf{s}_2, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} = \int_{\Gamma_a} \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Gamma. \quad (1.3.40)$$

Dado que neste caso é preciso realizar um trabalho um pouco mais árduo para chegar na forma final do problema acoplado, o procedimento é realizado em diversos passos. Primeiramente, empregando a decomposição em termos de componentes tangencial e normal com respeito à superfície média a formulação variacional (1.3.5) junto com as integrais segundo a (1.3.27), porém sem explicitar a forma dos produtos de dualidade e sem intro-

duzir a hipótese (1.3.28), resulta

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_o} \int_H \left[\boldsymbol{\sigma}_{1t} \cdot (\boldsymbol{\Pi}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_{1t} + v_{1n} \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \boldsymbol{\Lambda}^{-1} + \boldsymbol{\sigma}_{1s} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{1t}}{\partial \xi} - \boldsymbol{\Lambda}^{-1} ((\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{v}_{1t} - \nabla_{\mathbf{x}_o} v_{1n}) \right) \right. \\
& \quad \left. + \sigma_{1n} \frac{\partial v_{1n}}{\partial \xi} \right] \det \boldsymbol{\Lambda} \, d\xi d\Sigma_o + \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} = \\
& \quad \gamma \langle \mathbf{t}_1, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} + (1 - \gamma) \langle \mathbf{t}_2, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} \\
& + \gamma \langle \mathbf{s}_1, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} + (1 - \gamma) \langle \mathbf{s}_2, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} \\
& \quad + \int_{\Sigma_o} \int_H [\mathbf{f}_t \cdot \mathbf{v}_{1t} + f_n v_{1n}] \det \boldsymbol{\Lambda} \, d\xi d\Sigma_o + \int_{\Omega_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} \\
& \quad + \int_{\Sigma_o} \left[\bar{\mathbf{t}}_{1t}^+ \cdot \mathbf{v}_{1t}^+ + \bar{t}_{1n}^+ v_{1n}^+ \right] \det \boldsymbol{\Lambda}^+ \, d\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\Sigma_o} \left[\bar{\mathbf{t}}_{1t}^- \cdot \mathbf{v}_{1t}^- + \bar{t}_{1n}^- v_{1n}^- \right] \det \boldsymbol{\Lambda}^- \, d\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\Sigma_{oN}} \int_H [\bar{\mathbf{t}}_{1t} \cdot \mathbf{v}_{1t} + \bar{t}_{1n} v_{1n}] [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} \, d\xi d\partial\Sigma_o + \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \, d\Gamma \\
& \quad \forall ((\mathbf{v}_{1t}, v_{1n}, \mathbf{v}_2), \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \quad (1.3.41)
\end{aligned}$$

onde usou-se o fato de ser $\mathbf{f} = \mathbf{f}_t + f_n \mathbf{n}$ em Ω_1 , $\bar{\mathbf{t}}_1 = \bar{\mathbf{t}}_{1t}^+ + \bar{t}_{1n}^+ \mathbf{n}$ em Σ^+ , $\bar{\mathbf{t}}_1 = \bar{\mathbf{t}}_{1t}^- + \bar{t}_{1n}^- \mathbf{n}$ em Σ^- e $\bar{\mathbf{t}}_1 = \bar{\mathbf{t}}_{1t} + \bar{t}_{1n} \mathbf{n}$ em Γ_{LN} . O índice \pm indica que a quantidade é avaliada em $\xi = \pm \frac{h}{2}$. Além disso, considerou-se que as fronteiras Σ^+ e Σ^- são de Neumann, caso contrário não seria possível efetuar a redução do modelo da forma em que será feito. Por último, Γ_{LN} é também fronteira de Neumann de forma que $\Gamma_{N_1} = \Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \Gamma_{LN}$. Lembre-se que $\boldsymbol{\sigma}_{1t}$ é um tensor, $\boldsymbol{\sigma}_{1s}$ é um vetor e σ_{1n} é um escalar.

O próximo passo consiste em introduzir as hipóteses cinemáticas (1.3.28) conjuntamente com o produto de dualidade definido pela (1.3.31), a (1.3.34), e também o produto de dualidade (1.3.40). Logo, pondo tudo isto dentro da formulação variacional (1.3.41)

obtem-se, depois de um pouco de trabalho, o seguinte

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_o} \int_H [\boldsymbol{\sigma}_{1t} \cdot (\boldsymbol{\Pi}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_{1t}^o + \xi \boldsymbol{\Pi}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \boldsymbol{\varphi}_{1t} + v_{1n} \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \\
& \quad + \boldsymbol{\sigma}_{1s} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{-1} (\boldsymbol{\varphi}_{1t} - (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{v}_{1t}^o + \nabla_{\mathbf{x}_o} v_{1n})] \det \boldsymbol{\Lambda} \, d\xi \, d\Sigma_o + \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} = \\
& \quad \gamma \int_{\partial\Sigma_{o_a}} [\mathbf{t}_{1t}^o \cdot (\mathbf{v}_{1t}^o - \mathbf{v}_{2t}^o) + \boldsymbol{\mu}_{1t} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{1t} - \boldsymbol{\varphi}_{2t}^o) + t_{1n} (v_{1n} - v_{2n}^o)] \, d\partial\Sigma_o \\
& \quad + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot ((\mathbf{v}_{1t}^o + \xi \boldsymbol{\varphi}_{1t} + v_{1n} \mathbf{n}) - (\mathbf{v}_{2t}^o + \xi \boldsymbol{\varphi}_{2t}^o + v_{2n}^o \mathbf{n} + \mathbf{v}_{2r})) \, d\Gamma \\
& \quad + \gamma \int_{\partial\Sigma_{o_a}} \mathbf{s}_{1t}^o \cdot (\mathbf{u}_{1t}^o - \mathbf{u}_{2t}^o) \, d\partial\Sigma_o + \gamma \int_{\partial\Sigma_{o_a}} \boldsymbol{\nu}_{1t} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{1t} - \boldsymbol{\omega}_{2t}^o) \, d\partial\Sigma_o \\
& \quad + \gamma \int_{\partial\Sigma_{o_a}} s_{1n} (u_{1n} - u_{2n}^o) \, d\partial\Sigma_o + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{s}_2 \cdot ((\mathbf{u}_{1t}^o + \xi \boldsymbol{\omega}_{1t} + u_{1n} \mathbf{n}) - \mathbf{u}_2) \, d\Gamma \\
& \quad + \int_{\Sigma_o} \int_H [\mathbf{f}_t \cdot \mathbf{v}_{1t}^o + \mathbf{f}_t \cdot \xi \boldsymbol{\varphi}_{1t} + f_n v_{1n}] \det \boldsymbol{\Lambda} \, d\xi \, d\Sigma_o + \int_{\Omega_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} \\
& \quad + \int_{\Sigma_o} \left[\bar{\mathbf{t}}_{1t}^+ \cdot \mathbf{v}_{1t}^o + \bar{\mathbf{t}}_{1t}^+ \cdot \frac{h}{2} \boldsymbol{\varphi}_{1t} + \bar{t}_{1n}^+ v_{1n} \right] \det \boldsymbol{\Lambda}^+ \, d\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\Sigma_o} \left[\bar{\mathbf{t}}_{1t}^- \cdot \mathbf{v}_{1t}^o - \bar{\mathbf{t}}_{1t}^- \cdot \frac{h}{2} \boldsymbol{\varphi}_{1t} + \bar{t}_{1n}^- v_{1n} \right] \det \boldsymbol{\Lambda}^- \, d\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\partial\Sigma_{oN}} \int_H [\bar{\mathbf{t}}_{1t} \cdot \mathbf{v}_{1t}^o + \bar{\mathbf{t}}_{1t} \cdot \xi \boldsymbol{\varphi}_{1t} + \bar{t}_{1n} v_{1n}] [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} \, d\xi \, d\partial\Sigma_o + \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \, d\Gamma \\
& \quad \forall ((\mathbf{v}_{1t}^o, \boldsymbol{\varphi}_{1t}, v_{1n}, \mathbf{v}_2), (\mathbf{s}_{1t}^o, \boldsymbol{\nu}_{1t}, s_{1n}), \mathbf{s}_2) \in \mathbf{V}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \quad (1.3.42)
\end{aligned}$$

onde os espaços \mathbf{V}_d , $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'$ e $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ são especificados mais na frente. Agora, como é usual ao trabalhar na teoria de cascas, para reduzir o modelo devem-se definir os seguintes esforços e carregamentos generalizados

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{1t}^H &= \int_H \boldsymbol{\sigma}_{1t} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \det \boldsymbol{\Lambda} \, d\xi, \\
\mathbf{M}_{1t}^H &= \int_H \boldsymbol{\sigma}_{1t} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \xi \det \boldsymbol{\Lambda} \, d\xi, \\
\mathbf{Q}_{1t}^H &= \int_H \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{1s} \det \boldsymbol{\Lambda} \, d\xi, \\
\mathbf{f}_t^H &= \int_H \mathbf{f}_t \det \boldsymbol{\Lambda} \, d\xi + \bar{\mathbf{t}}_{1t}^+ \det \boldsymbol{\Lambda}^+ + \bar{\mathbf{t}}_{1t}^- \det \boldsymbol{\Lambda}^-, \\
f_n^H &= \int_H f_n \det \boldsymbol{\Lambda} \, d\xi + \bar{t}_{1n}^+ \det \boldsymbol{\Lambda}^+ + \bar{t}_{1n}^- \det \boldsymbol{\Lambda}^-, \\
\mathbf{m}_t^H &= \int_H \mathbf{f}_t \xi \det \boldsymbol{\Lambda} \, d\xi + \frac{h}{2} (\bar{\mathbf{t}}_{1t}^+ \det \boldsymbol{\Lambda}^+ - \bar{\mathbf{t}}_{1t}^- \det \boldsymbol{\Lambda}^-), \\
\bar{\mathbf{t}}_{1t}^H &= \int_H \bar{\mathbf{t}}_{1t} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} \, d\xi, \\
\bar{t}_{1n}^H &= \int_H \bar{t}_{1n} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} \, d\xi, \\
\bar{\mathbf{m}}_{1t}^H &= \int_H \bar{\mathbf{t}}_{1t} \xi [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} \, d\xi.
\end{aligned} \tag{1.3.43}$$

Colocando estas definições na expressão (1.3.42), chega-se ao problema de acoplamento entre um modelo de sólido 3D e um modelo de casca 2D sob hipóteses de Naghdi:

Problema 1.10 (Mecânica dos sólidos – Acoplamento 3D–2D – Casca de Naghdi). *Para algum $\gamma \in [0, 1]$ encontre $((\mathbf{u}_{1t}^o, \boldsymbol{\omega}_{1t}, u_{1n}, \mathbf{u}_2), (\mathbf{t}_{1t}^o, \boldsymbol{\mu}_{1t}, t_{1n}), \mathbf{t}_2) \in \mathcal{U}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ tal que*

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_o} [\mathbf{N}_{1t}^H \cdot (\boldsymbol{\Pi}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_{1t}^o + v_{1n} \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) + \mathbf{M}_{1t}^H \cdot \boldsymbol{\Pi}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \boldsymbol{\varphi}_{1t} \\
& \quad + \mathbf{Q}_{1t}^H \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{1t} - (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{v}_{1t}^o + \nabla_{\mathbf{x}_o} v_{1n})] d\Sigma_o + \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_2 d\mathbf{x} = \\
& \quad \int_{\partial\Sigma_{oa}} \left(\gamma \mathbf{t}_{1t}^o + (1 - \gamma) \boldsymbol{\Pi}_t \int_H \mathbf{t}_2 [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \cdot (\mathbf{v}_{1t}^o - \mathbf{v}_{2t}^o) d\partial\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\partial\Sigma_{oa}} \left(\gamma \boldsymbol{\mu}_{1t} + (1 - \gamma) \boldsymbol{\Pi}_t \int_H \mathbf{t}_2 \xi [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \cdot (\boldsymbol{\varphi}_{1t} - \boldsymbol{\varphi}_{2t}^o) d\partial\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\partial\Sigma_{oa}} \left(\gamma t_{1n} + (1 - \gamma) \int_H \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) (v_{1n} - v_{2n}^o) d\partial\Sigma_o \\
& \quad \quad \quad - (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{v}_{2r} d\Gamma \\
& \quad \quad \quad + \gamma \int_{\partial\Sigma_{oa}} \mathbf{s}_{1t}^o \cdot (\mathbf{u}_{1t}^o - \mathbf{u}_{2t}^o) d\partial\Sigma_o + \gamma \int_{\partial\Sigma_{oa}} \boldsymbol{\nu}_{1t} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{1t} - \boldsymbol{\omega}_{2t}^o) d\partial\Sigma_o \\
& \quad \quad \quad + \gamma \int_{\partial\Sigma_{oa}} s_{1n} (u_{1n} - u_{2n}^o) d\partial\Sigma_o + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{s}_2 \cdot ((\mathbf{u}_{1t}^o + \xi \boldsymbol{\omega}_{1t} + u_{1n} \mathbf{n}) - \mathbf{u}_2) d\Gamma \\
& \quad \quad \quad + \int_{\Sigma_o} [\mathbf{f}_t^H \cdot \mathbf{v}_{1t}^o + \mathbf{m}_t^H \cdot \boldsymbol{\varphi}_{1t} + f_n^H v_{1n}] d\Sigma_o + \int_{\Omega_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 d\mathbf{x} \\
& \quad \quad \quad + \int_{\partial\Sigma_{oN}} [\bar{\mathbf{t}}_{1t}^H \cdot \mathbf{v}_{1t}^o + \bar{\mathbf{m}}_{1t}^H \cdot \boldsymbol{\varphi}_{1t} + \bar{t}_{1n}^H v_{1n}] d\partial\Sigma_o + \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 d\Gamma \\
& \quad \quad \quad \forall ((\mathbf{v}_{1t}^o, \boldsymbol{\varphi}_{1t}, v_{1n}, \mathbf{v}_2), (\mathbf{s}_{1t}^o, \boldsymbol{\nu}_{1t}, s_{1n}), \mathbf{s}_2) \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \quad (1.3.44)
\end{aligned}$$

onde é $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ com

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1 &= \{(\mathbf{u}_{1t}^o, \boldsymbol{\omega}_{1t}, u_{1n}) \in \mathcal{Q}_1; (\mathbf{u}_{1t}^o, \boldsymbol{\omega}_{1t}, u_{1n})|_{\Gamma_{D_1}} = (\bar{\mathbf{u}}_{1t}^o, \bar{\boldsymbol{\omega}}_{1t}, \bar{u}_{1n})\}, \\
\mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{u}_2 \in \mathcal{Q}_2; \mathbf{u}_2|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\mathbf{u}}_2\},
\end{aligned} \quad (1.3.45)$$

com \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 dados pelas (1.3.29) e (1.3.39) respectivamente. Além disso, \mathcal{V}_d é o espaço associado à variedade linear \mathcal{U}_d . Finalmente $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'$ é dado pela (1.3.30), enquanto que $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ é o espaço dual de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ com \mathcal{Q}_2 dado pela (1.3.39). Todos os outros elementos são definidos como no Problema 1.9.

Observe que o problema está corretamente fechado ao estabelecer o comportamento constitutivo, isto é, uma vez que sejam dados \mathbf{N}_{1t}^H , \mathbf{M}_{1t}^H e \mathbf{Q}_{1t}^H como funções de \mathbf{u}_{1t}^o , $\boldsymbol{\omega}_{1t}$ e u_{1n} , e uma vez dado o tensor $\boldsymbol{\sigma}_2$ como função de \mathbf{u}_2 .

Vale a pena comentar que o Problema 1.10 demanda mais regularidade sobre as funções em Ω_2 de forma a ter a quantidade $\boldsymbol{\Pi}_t \int_H \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Sigma_{oa})$ bem definida. Este fato é uma consequência direta da cinemática escolhida sobre Ω_1 , onde esta regularidade está intrinsecamente assumida na expressão (1.3.28). Em contrapartida, o espaço dual $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ é maior que o clássico $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_a)$ pelas mesmas razões acima comentadas. Aqui põe-se em evidência como as considerações tomadas sobre uma porção do domínio Ω afetam o problema sobre a porção complementar do mesmo.

Antes de proceder a obter as equações de Euler–Lagrange convém escrever, sem perda de generalidade, o tensor $\boldsymbol{\sigma}_2$ sobre Γ_a como segue

$$\boldsymbol{\sigma}_2|_{\Gamma_a} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2, \quad (1.3.46)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_2$ e $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2$ são tais que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}_t \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} &= \frac{1}{H_{\xi^0}} \boldsymbol{\Pi}_t \int_H \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{H_{\xi^0}} \int_H \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\ \boldsymbol{\Pi}_t \int_H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi &= 0, \\ \int_H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.47)$$

Logo, empregando a fórmula de Green, vê-se que no sentido das distribuições as equações de Euler–Lagrange correspondentes ao problema variacional (1.3.44) são as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{N}_{1t}^H - (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{Q}_{1t}^H = \mathbf{f}_t^H & \text{em } \Sigma_o, \\ -\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{M}_{1t}^H + \mathbf{Q}_{1t}^H = \mathbf{m}_t^H & \text{em } \Sigma_o, \\ -\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{Q}_{1t}^H + \mathbf{N}_{1t}^H \cdot \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n} = f_n^H & \text{em } \Sigma_o, \\ -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_2, \\ \mathbf{u}_{1t}^o = \bar{\mathbf{u}}_{1t}^o & \text{sobre } \partial\Sigma_{oD}, \\ \boldsymbol{\omega}_{1t} = \bar{\boldsymbol{\omega}}_{1t} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oD}, \\ u_{1n} = \bar{u}_{1n} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oD}, \\ \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D2}, \\ \mathbf{N}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} = \bar{\mathbf{t}}_{1t}^H & \text{sobre } \partial\Sigma_{oN}, \\ \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} = \bar{\mathbf{m}}_{1t}^H & \text{sobre } \partial\Sigma_{oN}, \\ \mathbf{Q}_{1t}^H \cdot \mathbf{n}_{1o} = \bar{t}_{1n}^H & \text{sobre } \partial\Sigma_{oN}, \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{t}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{N2}, \\ \gamma(\mathbf{u}_{1t}^o - \mathbf{u}_{2t}^o) = 0 & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\ \gamma(\boldsymbol{\omega}_{1t} - \boldsymbol{\omega}_{2t}^o) = 0 & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\ \gamma(u_{1n} - u_{2n}^o) = 0 & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\ (1 - \gamma)((\mathbf{u}_{1t}^o + \xi \boldsymbol{\omega}_{1t} + u_{1n} \mathbf{n}) - \mathbf{u}_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \gamma \mathbf{t}_{1t}^o + (1 - \gamma) \boldsymbol{\Pi}_t \int_H \mathbf{t}_2 [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = \mathbf{N}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\ \gamma \boldsymbol{\mu}_{1t} + (1 - \gamma) \boldsymbol{\Pi}_t \int_H \mathbf{t}_2 \xi [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\ \gamma t_{1n} + (1 - \gamma) \int_H \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = \mathbf{Q}_{1t}^H \cdot \mathbf{n}_{1o} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\ \gamma \mathbf{t}_{1t}^o + (1 - \gamma) \boldsymbol{\Pi}_t \int_H \mathbf{t}_2 [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = H_{\xi^0} \boldsymbol{\Pi}_t \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\ \gamma \boldsymbol{\mu}_{1t} + (1 - \gamma) \boldsymbol{\Pi}_t \int_H \mathbf{t}_2 \xi [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = H_{\xi^1} \boldsymbol{\Pi}_t \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\ \quad \quad \quad + \boldsymbol{\Pi}_t \int_H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \xi [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\ \gamma t_{1n} + (1 - \gamma) \int_H \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = H_{\xi^0} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\ \left[(1 - \gamma) \mathbf{t}_2 - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \right] \perp \mathbf{v}_{2r} \quad \forall \mathbf{v}_{2r} \text{ que satisfaz (1.3.36)} & \text{sobre } \Gamma_a, \end{array} \right. \quad (1.3.48)$$

onde foi considerado, sem perda de generalidade, que sobre $\partial\Sigma_{oD}$ foram impostas condições de Dirichlet para os três campos envolvidos no modelo de casca.

Aqui, as últimas onze expressões acima compreendem as condições de acoplamento dadas naturalmente pela formulação variacional (1.3.44). As equações de Euler–Lagrange

põem em evidência que a equivalência com respeito ao parâmetro real γ perde-se. De fato, escolhendo $\gamma = 1$ obtém-se o seguinte conjunto de condições de acoplamento

$$\mathbf{u}_{1t}^o = \frac{1}{H_{\xi^0}} \mathbf{\Pi}_t \int_H \left(\mathbf{u}_2 - \frac{H_{\xi^1}}{H_{\xi^0}} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} \right) [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.49)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{1t} = \frac{1}{H_{\xi^0}} \mathbf{\Pi}_t \int_H \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.50)$$

$$u_{1n} = \frac{1}{H_{\xi^0}} \int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.51)$$

$$\mathbf{N}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} = H_{\xi^0} \mathbf{\Pi}_t \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.52)$$

$$\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} = H_{\xi^1} \mathbf{\Pi}_t \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.53)$$

$$\mathbf{Q}_{1t}^H \cdot \mathbf{n}_{1o} = H_{\xi^0} \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.54)$$

$$\mathbf{t}_{1t}^o = \mathbf{N}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.55)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{1t} = \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.56)$$

$$t_{1n} = \mathbf{Q}_{1t}^H \cdot \mathbf{n}_{1o} \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.57)$$

onde, o fato de ser

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \perp \mathbf{v}_{2r} \quad \forall \mathbf{v}_{2r} \text{ que satisfaz (1.3.36)} \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.58)$$

implica que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o}$ é o elemento nulo, e portanto $\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o}$, permitindo obter as expressões (1.3.52), (1.3.53) e (1.3.54), que estabelecem que a tração sobre Γ_a fica exclusivamente definida por $\mathbf{N}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o}$, $\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o}$ e $\mathbf{Q}_{1t}^H \cdot \mathbf{n}_{1o}$. Reciprocamente, considerar $\gamma \neq 1$ leva ao seguinte conjunto de condições de acoplamento

$$\mathbf{u}_{1t}^o + \xi \boldsymbol{\omega}_{1t} + u_{1n} \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.59)$$

$$\mathbf{N}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} = \mathbf{\Pi}_t \int_H \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.60)$$

$$\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} = \mathbf{\Pi}_t \int_H \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \xi [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.61)$$

$$\mathbf{Q}_{1t}^H \cdot \mathbf{n}_{1o} = \int_H \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.62)$$

$$\mathbf{t}_2 = \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \quad \text{sobre } \Gamma_a. \quad (1.3.63)$$

Observe que a expressão (1.3.63) é obtida combinando as últimas quatro equações vistas na (1.3.48) e a decomposição dada pela (1.3.46).

Das equações (1.3.49), (1.3.50) e (1.3.59) fica em evidência a necessidade por regularidade adicional do campo \mathbf{u}_2 independentemente do valor de γ . Em particular, as expressões (1.3.49), (1.3.50) e (1.3.51) estabelecem que

$$\mathbf{u}_{2t}^o = \mathbf{u}_{1t}^o, \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.64)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{2t}^o = \boldsymbol{\omega}_{1t} \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.65)$$

$$u_{2n}^o = u_{1n} \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.66)$$

$$\mathbf{u}_{2r} \text{ é arbitrária, porém satisfaz (1.3.36)} \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.67)$$

enquanto que a (1.3.59) implica que

$$\mathbf{u}_{2t}^o = \mathbf{u}_{1t}^o, \quad \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \quad (1.3.68)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{2t}^o = \boldsymbol{\omega}_{1t} \quad \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \quad (1.3.69)$$

$$u_{2n}^o = u_{1n} \quad \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \quad (1.3.70)$$

$$\mathbf{u}_{2r} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_a. \quad (1.3.71)$$

A combinação de (1.3.49), (1.3.50) e (1.3.51) (situação $\gamma = 1$) determina que o campo de deslocamentos é descontínuo devido a que não se impõe nenhuma condição sobre a componente \mathbf{u}_{2r} , e portanto nada impede que esta assuma um valor arbitrário desde que satisfaça a (1.3.36), como indicado pela (1.3.67). Contrariamente, a expressão (1.3.59) (situação $\gamma \neq 1$) determina que o campo de deslocamentos é contínuo pois impõe-se que $\mathbf{u}_{2r} = 0$ de acordo com a (1.3.71).

Raciocinando de forma análoga, mas focando a atenção nas variáveis duais, vê-se que para $\gamma = 1$ o conjunto de equações (1.3.52), (1.3.53) e (1.3.54) implica a continuidade da tração, enquanto que a mesma resulta descontínua para $\gamma \neq 1$ como indicado pelas (1.3.60), (1.3.61) e (1.3.62). Isto é por causa da existência de uma componente da tração, isto é $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o}$, ortogonal às funções da forma de \mathbf{v}_{2r} no sentido do produto de dualidade. Logo, nada impede que esta componente tome um valor arbitrário.

Da mesma forma que foi feito para o problema de transferência de calor, para interpretar as características do problema acoplado em cada um dos casos considerados acima construiu-se a Tabela 1.2 que resume a interpretação de cada um dos sub-problemas do modelo 3D–2D quando o mesmo é considerado segregado, mostrando o estado das quantidades envolvidas em cada caso.

Valor de γ	Problema segregado em Ω_1	Problema segregado em Ω_2	Quantidade contínua	Quantidade descontínua
{1}	Dirichlet	Neumann	Tração (ver (1.3.52)–(1.3.53)–(1.3.54))	Deslocamento (ver (1.3.49)–(1.3.50)–(1.3.51))
[0,1)	Neumann	Dirichlet	Deslocamento (ver (1.3.59))	Tração (ver (1.3.60)–(1.3.61)–(1.3.62))

Tabela 1.2: Interpretações sobre o problema acoplado 3D–2D (casca de Naghdi).

1.3.2 Acoplamento 3D–2D: casca de Kirchhoff–Love

A problemática abordada nesta seção não deixa de ser, segundo dito anteriormente, um caso particular do problema tratado na seção anterior. No entanto, devido a certas particularidades resulta de interesse formular o problema de acoplamento entre um sólido 3D e uma casca sob hipóteses de Kirchhoff–Love. O esquema utilizado aqui é idêntico ao da Figura 1.4. Porém, neste caso é preciso identificar as esquinas sobre o contorno da casca, para o qual utiliza-se a Figura 1.5 onde tais pontos foram identificados junto com uma orientação correspondente. Dada a similaridade em vários aspectos com o problema da seção anterior aqui avança-se mais rápido, utilizando de forma natural o ferramental usado para escrever o problema em termos das componentes tangencial e normal na casca.

O modelo de casca de Kirchhoff–Love desenvolve-se a partir de considerar no modelo de Naghdi que a rotação, anteriormente denominada $\boldsymbol{\omega}_{1t}$, agora adquire a seguinte forma particular

$$\boldsymbol{\omega}_{1t} = (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{u}_{1t}^o - \nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n}, \quad (1.3.72)$$

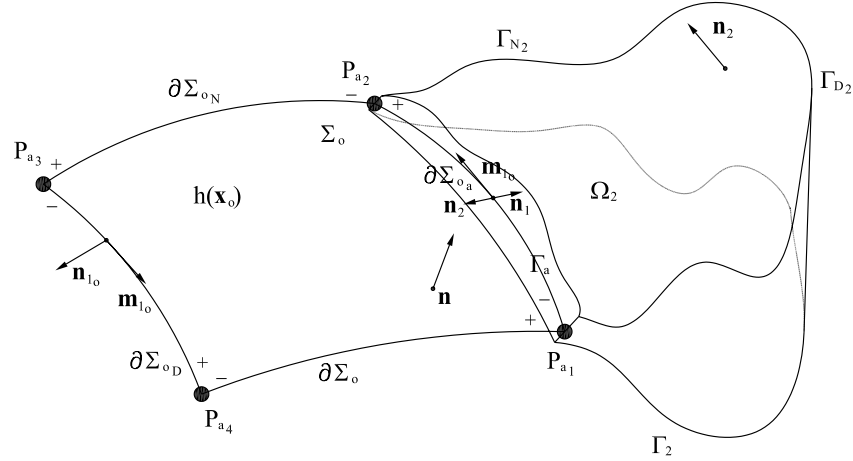


Figura 1.5: Acoplamento de modelos 3D-2D.

resultando portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_{1t}(\mathbf{x}_o, \xi) + \mathbf{u}_{1n}(\mathbf{x}_o), \\ \mathbf{u}_{1t}(\mathbf{x}_o, \xi) &= \mathbf{u}_{1t}^o(\mathbf{x}_o) + \xi((\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n})(\mathbf{x}_o) \mathbf{u}_{1t}^o(\mathbf{x}_o) - (\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n})(\mathbf{x}_o)), \\ \mathbf{u}_{1n}(\mathbf{x}_o) &= u_{1n}(\mathbf{x}_o) \mathbf{n}(\mathbf{x}_o). \end{aligned} \quad (1.3.73)$$

Desta forma, os esforços de corte passam a possuir natureza reativa produto de ter eliminado a possibilidade de rotação independente das fibras. De (1.3.73), e adiantando o que será visto posteriormente no princípio da potência virtual, segue que \mathbf{u}_1 está caracterizado agora por dois elementos $(\mathbf{u}_{1t}^o, u_{1n}) \in \mathcal{Q}_1$ onde

$$\mathcal{Q}_1 = \mathbf{H}^1(\Sigma_o) \times H^2(\Sigma_o). \quad (1.3.74)$$

Considera-se que \mathcal{N}_p é o conjunto de pontos angulosos presentes na estrutura ao longo do contorno, e que o número de elementos em \mathcal{N}_p é n_p . Além disso, considere que n_{ap} é o número de pontos angulosos sobre a fronteira $\partial\Sigma_{oa}$ os quais estão agrupados no conjunto $\mathcal{N}_{ap} \subset \mathcal{N}_p$ (no caso da Figura 1.5 é $n_p = 4$ e $n_{ap} = 2$). Assim sendo, para este caso particular resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) &= \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Sigma_{oa}) \times H^{1/2}(\partial\Sigma_{oa}) \times H^{3/2}(\partial\Sigma_{oa}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' &= \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Sigma_{oa}) \times H^{-1/2}(\partial\Sigma_{oa}) \times H^{-3/2}(\partial\Sigma_{oa}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.3.75)$$

Logo, o produto de dualidade fica caracterizado como segue

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} &= \\ \langle (\mathbf{s}_{1t}^o, s_{1n}, \nu_{1n}, b_{1n}^1, b_{1n}^2), (\mathbf{u}_{1t}^o, u_{1n}, (\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n}) \cdot \mathbf{n}_{1o}, u_{1n}|_{P_{a_1}}, u_{1n}|_{P_{a_2}}) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} &= \\ \int_{\partial\Sigma_{oa}} [\mathbf{s}_{1t}^o \cdot \mathbf{u}_{1t}^o + s_{1n} u_{1n} + \nu_{1n} (\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n}) \cdot \mathbf{n}_o] d\partial\Sigma_o & \\ + (b_{1n}^1 u_{1n}) \Big|_{P_{a_1}} + (b_{1n}^2 u_{1n}) \Big|_{P_{a_2}}. & \quad (1.3.76) \end{aligned}$$

Aqui identificam-se, além dos elementos duais já vistos na seção anterior, os esforços b_{1n}^1 e b_{1n}^2 que surgem nos pontos angulosos P_{a_1} e P_{a_2} em dualidade com o valor dos deslocamentos $u_{1n}|_{P_{a_1}}$ e $u_{1n}|_{P_{a_2}}$, respectivamente. Por sua vez, agora o momento ν_{1n} é o elemento dual da derivada normal $\frac{\partial \mathbf{x}_o u_{1n}}{\partial \mathbf{x}_o \mathbf{n}_{1o}} = (\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n}) \cdot \mathbf{n}_{1o}$ sobre $\partial\Sigma_{oa}$. O seguinte passo

é então estabelecer a forma do produto de dualidade $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}$ de acordo com os conceitos da Seção 1.1. Assim sendo, é preciso que o espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ seja tal que a decomposição ortogonal (1.1.10) permaneça válida. Portanto, a partir da (1.1.11) obtém-se que

$$\mathbf{u}_2|_{\Gamma_a} = \mathbf{u}_{21} + \mathbf{u}_{2r}, \quad (1.3.77)$$

onde \mathbf{u}_{21} é da forma de \mathbf{u}_1 de acordo com a (1.3.73). Então o produto de dualidade escreve-se como segue

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} &= \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_{21} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \\ &= \langle (\mathbf{s}_{1t}^o, s_{1n}, \nu_{1n}, b_{1n}^1, b_{1n}^2), (\mathbf{u}_{2t}^o, u_{2n}^o, (\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{2n}^o) \cdot \mathbf{n}_{1o}, u_{2n}^o|_{P_{a1}}, u_{2n}^o|_{P_{a2}}) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \\ &= \int_{\partial \Sigma_{oa}} [\mathbf{s}_{1t}^o \cdot \mathbf{u}_{2t}^o + s_{1n} u_{2n}^o + \nu_{1n} (\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{2n}^o) \cdot \mathbf{n}_{1o}] d\partial \Sigma_o \\ &\quad + (b_{1n}^1 u_{2n}^o) \Big|_{P_{a1}} + (b_{1n}^2 u_{2n}^o) \Big|_{P_{a2}}, \quad (1.3.78) \end{aligned}$$

posto que aqui a flutuação \mathbf{u}_{2r} satisfaz

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_{2r} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = 0 \quad \forall \mathbf{s}_1 \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'. \quad (1.3.79)$$

Tendo em vista isto segue-se que \mathbf{u}_{2r} é tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_t \int_H \mathbf{u}_{2r} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi &= 0, \\ \int_H \mathbf{u}_{2r} \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi &= 0, \\ \mathbf{\Pi}_t \int_H \frac{\partial \mathbf{u}_{2r}}{\partial \xi} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi &= 0, \\ \left(\int_H \mathbf{u}_{2r} \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \Big|_{P_{a1}} &= 0, \\ \left(\int_H \mathbf{u}_{2r} \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \Big|_{P_{a2}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.80)$$

Logo, as componentes de \mathbf{u}_{21} são tais que

$$\begin{aligned} (H_{\xi^0} \mathbf{I} + H_{\xi^1} \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{u}_{2t}^o - H_{\xi^1} \nabla_{\mathbf{x}_o} u_{2n}^o &= \mathbf{\Pi}_t \int_H \mathbf{u}_2 [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\ H_{\xi^0} u_{2n}^o &= \int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\ H_{\xi^0} (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{u}_{2t}^o - H_{\xi^0} (\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{2n}^o) \cdot \mathbf{n}_{1o} &= \mathbf{\Pi}_t \int_H \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\ H_{\xi^0|P_{a1}} u_{2n}^o|_{P_{a1}} &= \left(\int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \Big|_{P_{a1}}, \\ H_{\xi^0|P_{a2}} u_{2n}^o|_{P_{a2}} &= \left(\int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \Big|_{P_{a2}}. \end{aligned} \quad (1.3.81)$$

Da (1.3.81) tem-se que a \mathbf{u}_{21} é tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{2t}^o &= \frac{1}{H_{\xi^0}} \mathbf{\Pi}_t \int_H \left(\mathbf{u}_2 - \frac{H_{\xi^1}}{H_{\xi^0}} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} \right) [\mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\
u_{2n}^o &= \frac{1}{H_{\xi^0}} \int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\
(\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{2n}^o) \cdot \mathbf{n}_{1o} &= \frac{1}{H_{\xi^0}} \mathbf{\Pi}_t \int_H \left[\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n} \left(\mathbf{u}_2 - \frac{H_{\xi^1}}{H_{\xi^0}} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} \right] \cdot \mathbf{n}_{1o} [\mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\
u_{2n|P_{a1}}^o &= \frac{1}{H_{\xi^0|P_{a1}}} \left(\int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \Big|_{P_{a1}}, \\
u_{2n|P_{a2}}^o &= \frac{1}{H_{\xi^0|P_{a2}}} \left(\int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \Big|_{P_{a2}}.
\end{aligned} \tag{1.3.82}$$

Então, o espaço \mathcal{Q}_2 é definido como

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_2 &= \{ \mathbf{v}_2 \in \mathbf{H}^1(\Omega_2); \mathbf{v}_2|_{\Gamma_a} = \mathbf{v}_{2t}^o + \xi((\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{v}_{2t}^o - \nabla_{\mathbf{x}_o} v_{2n}^o) + v_{2n}^o \mathbf{n} + \mathbf{v}_{2r}; \\
&\quad (\mathbf{v}_{2t}^o, v_{2n}^o, (\nabla_{\mathbf{x}_o} v_{2n}^o) \cdot \mathbf{n}_{1o}, v_{2n|P_{a1}}^o, v_{2n|P_{a2}}^o) \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1); \mathbf{v}_{2r} \text{ satisfaz (1.3.80)} \}. \tag{1.3.83}
\end{aligned}$$

Por outro lado, o produto de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)}$ é

$$\langle \mathbf{s}_2, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} = \int_{\Gamma_a} \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{u}_2 d\Gamma. \tag{1.3.84}$$

A forma de trabalhar com o problema é muito similar à empregada na seção anterior, portanto alguns passos são omitidos. Com efeito, introduz-se a hipótese (1.3.73), junto com todo o ferramental para trabalhar em termos de componentes tangencial e normal, na formulação variacional (1.3.5). Em seguida, definem-se os seguintes carregamentos generalizados

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_t^H &= \int_H \mathbf{\Lambda} \mathbf{f}_t \det \mathbf{\Lambda} d\xi + \mathbf{\Lambda}^+ \bar{\mathbf{t}}_{1t}^+ \det \mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^- \bar{\mathbf{t}}_{1t}^- \det \mathbf{\Lambda}^-, \\
f_n^H &= \int_H f_n \det \mathbf{\Lambda} d\xi + \bar{t}_{1n}^+ \det \mathbf{\Lambda}^+ + \bar{t}_{1n}^- \det \mathbf{\Lambda}^- \\
&\quad + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \left[\int_H \mathbf{f}_t \xi \det \mathbf{\Lambda} d\xi + \frac{h}{2} (\bar{\mathbf{t}}_{1t}^+ \det \mathbf{\Lambda}^+ - \bar{\mathbf{t}}_{1t}^- \det \mathbf{\Lambda}^-) \right], \\
\bar{\mathbf{t}}_{1t}^H &= \int_H \mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{t}}_{1t} [\mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\
\bar{t}_{1n}^H &= \int_H \bar{t}_{1n} [\mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \\
&\quad + \int_H \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} (\bar{\mathbf{t}}_{1t} \cdot \mathbf{m}_{1o} [\mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2}) \cdot \mathbf{m}_{1o} d\xi + \bar{f}_{1n}^H, \\
\bar{f}_{1n}^H &= - \left[\int_H \mathbf{f}_t \xi \det \mathbf{\Lambda} d\xi + \frac{h}{2} (\bar{\mathbf{t}}_{1t}^+ \det \mathbf{\Lambda}^+ - \bar{\mathbf{t}}_{1t}^- \det \mathbf{\Lambda}^-) \right] \cdot \mathbf{n}_{1o}, \\
m_n^j &= - \left[\int_H \bar{\mathbf{t}}_{1t} \cdot \mathbf{m}_{1o} \xi [\mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right] \Big|_{P_{aj}} \quad j = 1, \dots, n_p, \\
\bar{m}_{1n}^H &= - \int_H \bar{\mathbf{t}}_{1t} \cdot \mathbf{n}_{1o} \xi [\mathbf{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi,
\end{aligned} \tag{1.3.85}$$

onde $[[\cdot]] = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$. Assim sendo, chega-se ao problema de acoplamento entre um modelo de sólido 3D e um modelo de casca 2D sob hipóteses de Kirchhoff–Love:

Problema 1.11 (Mecânica dos sólidos – Acoplamento 3D–2D – Casca de Kirchhoff–Love). *Para algum $\gamma \in [0, 1]$ encontre $((\mathbf{u}_{1t}^o, u_{1n}, \mathbf{u}_2), (\mathbf{t}_{1t}^o, t_{1n}, \mu_{1n}, c_{1n}^1, c_{1n}^2), \mathbf{t}_2) \in \mathcal{U}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ tal que*

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma_o} [\mathbf{N}_{1t}^H \cdot (\mathbf{\Pi}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_{1t}^o + v_{1n} \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) + \mathbf{M}_{1t}^H \cdot \mathbf{\Pi}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} ((\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{v}_{1t}^o - \nabla_{\mathbf{x}_o} v_{1n})] d\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_2 d\mathbf{x} = \\
& \int_{\partial\Sigma_{oa}} \left(\gamma \mathbf{t}_{1t}^o + (1 - \gamma) \int_H \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{\Pi}_t \mathbf{t}_2 [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \cdot (\mathbf{v}_{1t}^o - \mathbf{v}_{2t}^o) d\partial\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\partial\Sigma_{oa}} \left(\gamma t_{1n} + (1 - \gamma) \int_H \left[\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} (\mathbf{\Pi}_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_{1o} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2}) \cdot \mathbf{m}_{1o} \right] d\xi \right) (v_{1n} - v_{2n}^o) d\partial\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\partial\Sigma_{oa}} \left(\gamma \mu_{1n} + (1 - \gamma) \int_H (-1) \mathbf{\Pi}_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}_{1o} \xi [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \\
& \quad \quad \quad ((\nabla_{\mathbf{x}_o} v_{1n}) \cdot \mathbf{n}_{1o} - (\nabla_{\mathbf{x}_o} v_{2n}^o) \cdot \mathbf{n}_{1o}) d\partial\Sigma_o \\
& \quad + \left(\left(\gamma c_{1n}^1 + (1 - \gamma) \int_H \mathbf{\Pi}_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_{1o} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) (v_{1n} - v_{2n}^o) \right) \Big|_{P_{a1}} \\
& \quad + \left(\left(\gamma c_{1n}^2 + (1 - \gamma) \int_H (-1) \mathbf{\Pi}_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_{1o} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) (v_{1n} - v_{2n}^o) \right) \Big|_{P_{a2}} \\
& \quad \quad \quad - (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{v}_{2r} d\Gamma \\
& \quad + \gamma \int_{\partial\Sigma_{oa}} \mathbf{s}_{1t}^o \cdot (\mathbf{u}_{1t}^o - \mathbf{u}_{2t}^o) d\partial\Sigma_o + \gamma \int_{\partial\Sigma_{oa}} s_{1n} (u_{1n} - u_{2n}^o) d\partial\Sigma_o \\
& \quad + \gamma \int_{\partial\Sigma_{oa}} \nu_{1n} ((\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n}) \cdot \mathbf{n}_{1o} - (\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{2n}^o) \cdot \mathbf{n}_{1o}) d\partial\Sigma_o \\
& \quad \quad + \gamma (b_{1n}^1 (u_{1n} - u_{2n}^o)) \Big|_{P_{a1}} + \gamma (b_{1n}^2 (u_{1n} - u_{2n}^o)) \Big|_{P_{a2}} \\
& \quad + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{s}_2 \cdot ((\mathbf{u}_{1t}^o + \xi ((\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{u}_{1t}^o - \nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n}) + u_{1n} \mathbf{n}) - \mathbf{u}_2) d\Gamma \\
& \quad + \int_{\Sigma_o} [\mathbf{f}_t^H \cdot \mathbf{v}_{1t}^o + f_n^H v_{1n}] d\Sigma_o + \int_{\Omega_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{n_p} (m_n^j v_{1n}) \Big|_{P_{aj}} + \int_{\partial\Sigma_{oa}} \bar{f}_{1n}^H v_{1n} d\partial\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\partial\Sigma_{oN}} \left[\bar{\mathbf{t}}_{1t}^H \cdot \mathbf{v}_{1t}^o + \bar{t}_{1n}^H v_{1n} + \bar{m}_{1n}^H (\nabla_{\mathbf{x}_o} v_{1n}) \cdot \mathbf{n}_{1o} \right] d\partial\Sigma_o + \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 d\Gamma \\
& \quad \forall ((\mathbf{v}_{1t}^o, v_{1n}, \mathbf{v}_2), (\mathbf{s}_{1t}^o, s_{1n}, \nu_{1n}, b_{1n}^1, b_{1n}^2), \mathbf{s}_2) \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \quad (1.3.86)
\end{aligned}$$

onde é $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ com

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1 &= \{(\mathbf{u}_{1t}^o, u_{1n}) \in \mathcal{Q}_1; (\mathbf{u}_{1t}^o, u_{1n}, (\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n}) \cdot \mathbf{n}_{1o}) \Big|_{\Gamma_{D_1}} = (\bar{\mathbf{u}}_{1t}^o, \bar{u}_{1n}, \bar{\alpha}_{1n})\}, \\
\mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{u}_2 \in \mathcal{Q}_2; \mathbf{u}_2 \Big|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\mathbf{u}}_2\},
\end{aligned} \quad (1.3.87)$$

sendo que aqui não se têm considerado condições de tipo Dirichlet sobre nenhum dos pontos angulosos. Os espaços \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 são dados pelas (1.3.74) e (1.3.83) correspondentemente.

Como sempre, \mathbf{V}_d é o espaço obtido como diferença de elementos de \mathbf{U}_d . Também $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathbf{Q}_1)'$ é dado pela (1.3.75), enquanto que $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathbf{Q}_2)'$ é o espaço dual de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathbf{Q}_2)$ com \mathbf{Q}_2 dado pela (1.3.83). Os demais elementos são definidos como no Problema 1.9.

Note que mesmo nos pontos P_{a1} e P_{a2} aparecem esforços generalizados m_n^1 e m_n^2 devido à generalidade do carregamento. Algo similar ocorre com o termo sobre $\partial\Sigma_{oa}$ que depende do esforço generalizado \bar{f}_{1n}^H . Além disso, o problema está fechado ao fornecer o comportamento constitutivo para \mathbf{N}_{1t}^H e \mathbf{M}_{1t}^H como funções de \mathbf{u}_{1t}^o e u_{1n} , e uma vez dado o tensor $\boldsymbol{\sigma}_2$ como função de \mathbf{u}_2 .

Como na seção anterior, o Problema 1.11 demanda mais regularidade sobre as funções em Ω_2 de forma que os produtos de dualidade possam ser efetuados. Isto é, como explicado antes, resultado da cinemática escolhida sobre Ω_1 , onde a regularidade é inerente à expressão (1.3.73). Neste caso a exigência sobre a regularidade de \mathbf{u}_2 é maior que no problema de cascas de Naghdi. Analogamente, o espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathbf{Q}_2)'$ é ainda maior que o correspondente ao mencionado problema de Naghdi pois a regularidade do campo de deslocamentos sobre Γ_a é maior.

Como feito anteriormente, antes de buscar as equações de Euler–Lagrange convém escrever o tensor $\boldsymbol{\sigma}_2$ sobre Γ_a segundo (1.3.46), e que se repete aqui por conveniência

$$\boldsymbol{\sigma}_{2|\Gamma_a} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2, \quad (1.3.88)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_2$ e $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2$ são tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_t \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} &= \frac{1}{H_{\xi^0}} \mathbf{\Pi}_t \int_H \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{H_{\xi^0}} \int_H \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi, \\ \mathbf{\Pi}_t \int_H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi &= 0, \\ \int_H \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} [\boldsymbol{\Lambda}^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.89)$$

Empregando a fórmula de Green de forma recorrente segue-se que, no sentido das distribuições, as equações de Euler–Lagrange correspondentes ao problema variacional (1.3.86) são as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{N}_{1t}^H - (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{M}_{1t}^H = \mathbf{f}_t^H & \text{em } \Sigma_o, \\ -\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{M}_{1t}^H + (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{N}_{1t}^H = f_n^H & \text{em } \Sigma_o, \\ -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_2, \\ \mathbf{u}_{1t}^o = \bar{\mathbf{u}}_{1t}^o & \text{sobre } \partial\Sigma_{oD}, \\ u_{1n} = \bar{u}_{1n} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oD}, \\ \nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n} \cdot \mathbf{n}_{1o} = \bar{\alpha}_{1n} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oD}, \\ \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D2}, \\ (\mathbf{N}_{1t}^H + (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{M}_{1t}^H) \mathbf{n}_{1o} = \bar{\mathbf{t}}_{1t}^H & \text{sobre } \partial\Sigma_{oN}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{M}_{1t}^H \cdot \mathbf{n}_{1o} + \nabla_{\mathbf{x}_o} (\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}) \cdot \mathbf{m}_{1o} = \bar{t}_{1n}^H & \text{sobre } \partial\Sigma_{oN}, \\ \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n}_{1o} = -\bar{m}_{1n}^H & \text{sobre } \partial\Sigma_{oN}, \\ \llbracket \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \rrbracket = m_n^3 & \text{em } P_{a3}, \\ \llbracket \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \rrbracket = m_n^4 & \text{em } P_{a4}, \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{t}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{N2}, \end{array} \right. \quad (1.3.90a)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\gamma(\mathbf{u}_{1t}^o - \mathbf{u}_{2t}^o) = 0 & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\
\gamma(u_{1n} - u_{2n}^o) = 0 & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\
\gamma((\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n}) \cdot \mathbf{n}_{1o} - (\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{2n}^o) \cdot \mathbf{n}_{1o}) = 0 & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\
\gamma(u_{1n} - u_{2n}^o) = 0 & \text{em } P_{a1}, \\
\gamma(u_{1n} - u_{2n}^o) = 0 & \text{em } P_{a2}, \\
(1 - \gamma)((\mathbf{u}_{1t}^o + \xi((\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n})\mathbf{u}_{1t}^o - \nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n}) + u_{1n}\mathbf{n}) - \mathbf{u}_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\
\gamma\mathbf{t}_{1t}^o + (1 - \gamma) \int_H \Lambda \Pi_t \mathbf{t}_2 [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = \\
\quad (\mathbf{N}_{1t}^H + (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n})\mathbf{M}_{1t}^H)\mathbf{n}_{1o} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\
\gamma t_{1n} + (1 - \gamma) \int_H \left[\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} \right. \\
\quad \left. + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} (\Pi_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2}) \cdot \mathbf{m}_{1o} \right] d\xi = \\
\quad -\bar{f}_{1n}^H + \text{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{M}_{1t}^H \cdot \mathbf{n}_{1o} + \nabla_{\mathbf{x}_o} (\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}) \cdot \mathbf{m}_{1o} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\
\gamma \mu_{1n} + (1 - \gamma) \int_H (-1) \Pi_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}_{1o} \xi [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = \\
\quad -\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n}_{1o} & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\
\gamma c_{1n}^1 + (1 - \gamma) \int_H \Pi_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = \\
\quad \llbracket \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \rrbracket - m_n^1 & \text{em } P_{a1}, \\
\gamma c_{1n}^2 + (1 - \gamma) \int_H (-1) \Pi_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = \\
\quad \llbracket \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \rrbracket - m_n^2 & \text{em } P_{a2}, \quad (1.3.90b) \\
\gamma \mathbf{t}_{1t}^o + (1 - \gamma) \int_H \Lambda \Pi_t \mathbf{t}_2 [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = \\
\quad (H_{\xi^0} \mathbf{I} + H_{\xi^1} \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \Pi_t \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \\
\quad + (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \int_H \Pi_t \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \xi [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\
\gamma t_{1n} + (1 - \gamma) \int_H \left[\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} \right. \\
\quad \left. + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} (\Pi_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2}) \cdot \mathbf{m}_{1o} \right] d\xi = \\
\quad H_{\xi^0} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} \\
\quad + \int_H \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} (\Pi_t (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2) \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2}) \cdot \mathbf{m}_{1o} d\xi & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\
\gamma \mu_{1n} + (1 - \gamma) \int_H (-1) \Pi_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}_{1o} \xi [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = \\
\quad -H_{\xi^1} \Pi_t \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n}_{1o} - \int_H \Pi_t \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n}_{1o} \xi [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi & \text{sobre } \partial\Sigma_{oa}, \\
\gamma c_{1n}^1 + (1 - \gamma) \int_H \Pi_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = \\
\quad -H_{\xi^1} \Pi_t \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} - \int_H \Pi_t \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \xi [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi & \text{em } P_{a1}, \\
\gamma c_{1n}^2 + (1 - \gamma) \int_H (-1) \Pi_t \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{m}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi = \\
\quad H_{\xi^1} \Pi_t \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} + \int_H \Pi_t \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \xi [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi & \text{em } P_{a2}, \\
\left[(1 - \gamma) \mathbf{t}_2 - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \right] \perp \mathbf{v}_{2r} \quad \forall \mathbf{v}_{2r} \text{ que satisfaz (1.3.80)} & \text{sobre } \Gamma_a,
\end{array} \right.$$

onde novamente foi considerado que sobre $\partial\Sigma_{oD}$ foram impostas condições de Dirichlet para os campos envolvidos no modelo de casca. O conjunto de equações (1.3.90b) (as dezessete expressões) são as condições de acoplamento dadas pela formulação variacional

(1.3.86) de forma natural. Neste problema, quando $\gamma = 1$ obtêm-se as seguintes condições de acoplamento

$$\mathbf{u}_{1t}^o = \frac{1}{H_{\xi^0}} \mathbf{\Pi}_t \int_H \left(\mathbf{u}_2 - \frac{H_{\xi^1}}{H_{\xi^0}} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} \right) [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.91)$$

$$u_{1n} = \frac{1}{H_{\xi^0}} \int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.92)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n}) \cdot \mathbf{n}_{1o} &= \frac{1}{H_{\xi^0}} \mathbf{\Pi}_t \int_H \left[\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n} \left(\mathbf{u}_2 - \frac{H_{\xi^1}}{H_{\xi^0}} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \xi} \right] \cdot \mathbf{n}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \end{aligned} \quad (1.3.93)$$

$$u_{1n}|_{P_{a1}} = \frac{1}{H_{\xi^0}|_{P_{a1}}} \left(\int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \Big|_{P_{a1}} \quad \text{em } P_{a1}, \quad (1.3.94)$$

$$u_{1n}|_{P_{a2}} = \frac{1}{H_{\xi^0}|_{P_{a2}}} \left(\int_H \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \right) \Big|_{P_{a2}} \quad \text{em } P_{a2}, \quad (1.3.95)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}_{1t}^H + (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{M}_{1t}^H) \mathbf{n}_{1o} &= (H_{\xi^0} \mathbf{I} + H_{\xi^1} \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{\Pi}_t \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.96) \\ &\quad - \bar{f}_{1n}^H + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{M}_{1t}^H \cdot \mathbf{n}_{1o} + \nabla_{\mathbf{x}_o} (\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}) \cdot \mathbf{m}_{1o} = \\ &\quad H_{\xi^0} \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

$$+ \int_H \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} (\mathbf{\Pi}_t \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2}) \cdot \mathbf{m}_{1o} d\xi \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.97)$$

$$\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n}_{1o} = H_{\xi^1} \mathbf{\Pi}_t \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n}_{1o} \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.98)$$

$$\llbracket \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \rrbracket - m_n^1 = -H_{\xi^1} \mathbf{\Pi}_t \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \quad \text{em } P_{a1}, \quad (1.3.99)$$

$$\llbracket \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \rrbracket - m_n^2 = H_{\xi^1} \mathbf{\Pi}_t \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \quad \text{em } P_{a2}, \quad (1.3.100)$$

$$\mathbf{t}_{1t}^o = (\mathbf{N}_{1t}^H + (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{M}_{1t}^H) \mathbf{n}_{1o} \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.101)$$

$$t_{1n} = -\bar{f}_{1n}^H + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{M}_{1t}^H \cdot \mathbf{n}_{1o} + \nabla_{\mathbf{x}_o} (\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}) \cdot \mathbf{m}_{1o} \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.102)$$

$$\mu_{1n} = -\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n}_{1o} \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.103)$$

$$c_{1n}^1 = \llbracket \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \rrbracket - m_n^1 \quad \text{em } P_{a1}, \quad (1.3.104)$$

$$c_{1n}^2 = \llbracket \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \rrbracket - m_n^2 \quad \text{em } P_{a2}, \quad (1.3.105)$$

onde, o fato de ser

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o} \perp \mathbf{v}_{2r} \quad \forall \mathbf{v}_{2r} \text{ que satisfaz (1.3.80)} \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.106)$$

implica que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o}$ é o elemento nulo em Γ_a e em P_{a1} e P_{a2} , e portanto $\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{n}_{1o}$.

Por outro lado, para $\gamma \neq 1$ resulta o seguinte conjunto de condições de acoplamento

$$\mathbf{u}_{1t}^o + \xi((\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{u}_{1t}^o - \nabla_{\mathbf{x}_o} u_{1n}) + u_{1n} \mathbf{n} = \mathbf{u}_2 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.107)$$

$$(\mathbf{N}_{1t}^H + (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{M}_{1t}^H) \mathbf{n}_{1o} = \int_H \Lambda \Pi_t \sigma_2 \mathbf{n}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.108)$$

$$\begin{aligned} & - \bar{f}_{1n}^H + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{M}_{1t}^H \cdot \mathbf{n}_{1o} + \nabla_{\mathbf{x}_o} (\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}) \cdot \mathbf{m}_{1o} = \\ & \int_H \sigma_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \\ & + \int_H \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} (\Pi_t \sigma_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2}) \cdot \mathbf{m}_{1o} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.109) \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n}_{1o} = \int_H \Pi_t \sigma_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{n}_{1o} \xi [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{sobre } \partial \Sigma_{oa}, \quad (1.3.110)$$

$$\begin{aligned} & \llbracket \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \rrbracket - m_n^1 = \\ & - \int_H \Pi_t \sigma_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \xi [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{em } P_{a1}, \quad (1.3.111) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \llbracket \mathbf{M}_{1t}^H \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \rrbracket - m_n^2 = \\ & \int_H \Pi_t \sigma_2 \mathbf{n}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o} \xi [\Lambda^2 \mathbf{m}_{1o} \cdot \mathbf{m}_{1o}]^{1/2} d\xi \quad \text{em } P_{a2}, \quad (1.3.112) \end{aligned}$$

$$\mathbf{t}_2 = \sigma_2 \mathbf{n}_{1o} \quad \text{sobre } \Gamma_a. \quad (1.3.113)$$

O conjunto de expressões (1.3.91)–(1.3.95) (para $\gamma = 1$) determina que o campo de deslocamentos é descontínuo. Com efeito, nada se diz a respeito da componente \mathbf{u}_{2r} , e portanto nada impede a esta de assumir um valor arbitrário desde que satisfaça (1.3.80). Contrariamente, a expressão (1.3.107) (para $\gamma \neq 1$) implica que o campo de deslocamentos é contínuo posto que se impõe $\mathbf{u}_{2r} = 0$. Analogamente, vê-se que para $\gamma = 1$ o conjunto de equações (1.3.96)–(1.3.100) determina a continuidade da tração, enquanto que, por outro lado, a mesma resulta descontínua para $\gamma \neq 1$ segundo indicado nas (1.3.108)–(1.3.112). Isto é devido a que a componente $\tilde{\sigma}_2 \mathbf{n}_{1o}$ é ortogonal às funções da forma de \mathbf{v}_{2r} no sentido do produto de dualidade. Entretanto, nada impede que a mesma assuma um valor arbitrário.

Como feito para os problemas vistos até aqui, para encontrar uma outra forma de interpretar as particularidades do problema acoplado em cada uma das situações acima tratadas construiu-se a Tabela 1.3 que faz um resumo da análise de cada um dos sub-problemas do modelo 3D–2D ao considerá-lo segregado.

Valor de γ	Problema segregado em Ω_1	Problema segregado em Ω_2	Quantidade contínua	Quantidade descontínua
{1}	Dirichlet	Neumann	Tração (ver (1.3.96)–(1.3.97)–(1.3.98)– (1.3.99)–(1.3.100))	Deslocamento (ver (1.3.91)–(1.3.92)–(1.3.93)– (1.3.94)–(1.3.95))
[0,1)	Neumann	Dirichlet	Deslocamento (ver (1.3.107))	Tração (ver (1.3.108)–(1.3.109)–(1.3.110)– (1.3.111)–(1.3.112))

Tabela 1.3: Interpretações sobre o problema acoplado 3D–2D (casca de Kirchhoff–Love).

Antes de finalizar a seção observe que a placa de Kirchhoff–Love pode automaticamente ser obtida fazendo $\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n} = 0$ no Problema 1.11. Porém, por brevidade isto não é desenvolvido.

1.3.3 Acoplamento 3D–1D: viga de Bernoulli

O acoplamento de um sólido tridimensional com um componente estrutural de tipo viga não representa maiores complicações além das já examinadas no caso de cascas. Entretanto, é interessante obter a formulação variacional para o problema acoplado assim como as condições de acoplamento que se derivam utilizando as idéias deste capítulo. Para este problema utiliza-se o esquema mostrado na Figura 1.6 onde um componente estrutural possui duas partes com características destacáveis.

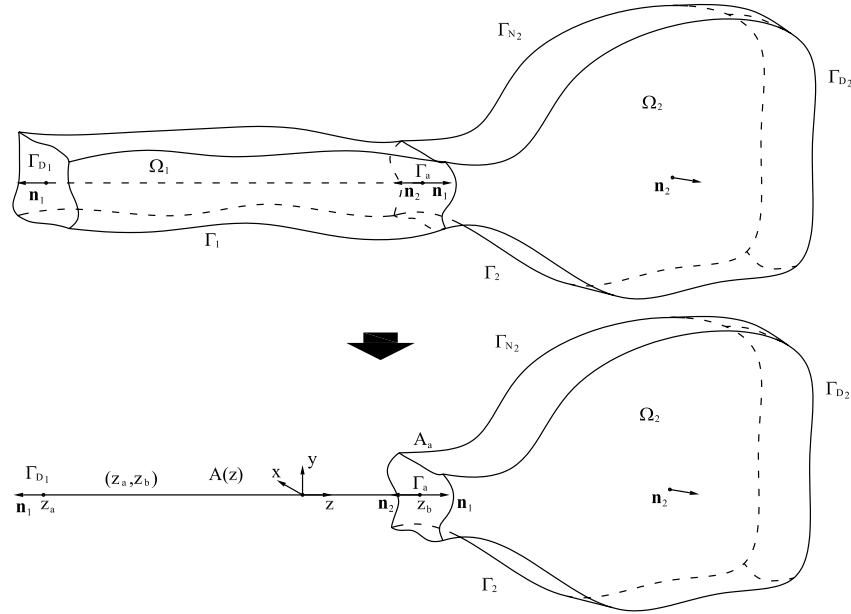


Figura 1.6: Acoplamento de modelos 3D–1D.

Enquanto a parte do componente denominada Ω_2 tem forma arbitrária, a parte indicada como Ω_1 tem uma das suas dimensões muito maior do que as outras duas, portanto, representá-lo como se fosse uma viga de seção transversal arbitrária pode resultar em um bom modelo. O modelo 1D aqui considerado é a viga de Bernoulli, e constrói-se a partir de assumir que a cinemática do problema sobre Ω_1 é da seguinte forma

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = u_{1y}(z)\mathbf{e}_y - y\frac{\partial u_{1y}}{\partial z}(z)\mathbf{e}_z, \quad (1.3.114)$$

implicando que as seções transversais permanecem ortogonais após a deformação, e que as fibras normais não mudam o seu tamanho. Esta viga está limitada na sua deflexão ao plano y – z . Sobre Ω_2 considera-se a descrição cinemática completa. Sem perda de generalidade, o contorno correspondente a $\{z_a\}$ é um contorno de Dirichlet, enquanto que o contorno lateral de Ω_1 é uma fronteira de Neumann de forma a poder reduzir o modelo. Por último considera-se que a fronteira Γ_a é tal que a normal \mathbf{n}_1 (vista desde o domínio Ω_1) está na direção da coordenada z . Logo, devido a que se têm cinemáticas não compatíveis a ambos os lados de Γ_a emprega-se o princípio variacional exposto no Problema 1.9. Como resultado da cinemática (1.3.114) obtém-se que a forma do espaço \mathcal{Q}_1 é a seguinte

$$\mathcal{Q}_1 = H^2((z_a, z_b)), \quad (1.3.115)$$

do que se obtém

$$\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' = \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (1.3.116)$$

Logo, o produto de dualidade com esta cinemática resulta

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \left\langle (s_{1y}, \nu_{1x}), \left(u_{1y}, \frac{\partial u_{1y}}{\partial z} \right) \right\rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \left. (s_{1y} u_{1y}) \right|_{z_b} + \left. \left(\nu_{1x} \frac{\partial u_{1y}}{\partial z} \right) \right|_{z_b}. \quad (1.3.117)$$

Resta agora especificar a forma do produto de dualidade $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}$. Do visto na Seção 1.1 o espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ deve ser tal que a decomposição ortogonal (1.1.10) seja válida. Logo, de acordo com a (1.1.11) resulta

$$\mathbf{u}_2|_{\Gamma_a} = \mathbf{u}_{21} + \mathbf{u}_{2r}, \quad (1.3.118)$$

onde \mathbf{u}_{21} é da forma de \mathbf{u}_1 de acordo com a (1.3.114), ou seja

$$\mathbf{u}_{21}(\mathbf{x}) = u_{2y}^o \mathbf{e}_y - y \frac{\partial u_{2y}^o}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (1.3.119)$$

Logo tem-se

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_{21} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \left\langle (s_{1y}, \nu_{1x}), \left(u_{2y}^o, \frac{\partial u_{2y}^o}{\partial z} \right) \right\rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \left. (s_{1y} u_{2y}^o) \right|_{z_b} + \left. \left(\nu_{1x} \frac{\partial u_{2y}^o}{\partial z} \right) \right|_{z_b}, \quad (1.3.120)$$

pois a flutuação \mathbf{u}_{2r} é tal que

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_{2r} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = 0 \quad \forall \mathbf{s}_1 \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'. \quad (1.3.121)$$

Daqui é possível ver que \mathbf{u}_{2r} é tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_a} \mathbf{u}_{2r} \cdot \mathbf{e}_y \, d\Gamma &= 0, \\ \int_{\Gamma_a} \frac{\partial \mathbf{u}_{2r}}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.122)$$

e portanto é possível caracterizar \mathbf{u}_{21} em termos de u_{2y}^o e $\frac{\partial u_{2y}^o}{\partial z}$ simplesmente como

$$\begin{aligned} u_{2y}^o &= \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_y \, d\Gamma, \\ \frac{\partial u_{2y}^o}{\partial z} &= \frac{1}{A_o} \int_{\Gamma_a} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (1.3.123)$$

onde $A_a = |\Gamma_a|$. Logo, o espaço \mathcal{Q}_2 é

$$\mathcal{Q}_2 = \left\{ \mathbf{v}_2 \in \mathbf{H}^1(\Omega_2); \mathbf{v}_2|_{\Gamma_a} = v_{2y}^o \mathbf{e}_y - y \frac{\partial v_{2y}^o}{\partial z} \mathbf{e}_z + \mathbf{v}_{2r}; \left(v_{2y}^o, \frac{\partial v_{2y}^o}{\partial z} \right) \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1); \mathbf{v}_{2r} \text{ satisfaz (1.3.122)} \right\}. \quad (1.3.124)$$

E analogamente

$$\langle \mathbf{s}_2, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} = \int_{\Gamma_a} \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \, d\Gamma. \quad (1.3.125)$$

Para reduzir o modelo em Ω_1 realiza-se a seguinte decomposição das integrais

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (\cdot) \, d\mathbf{x} &= \int_{z_a}^{z_b} \int_{\Gamma} (\cdot) \, d\Gamma \, dz, \\ \int_{\Gamma_{N_1}} (\cdot) \, d\Gamma &= \int_{z_a}^{z_b} \int_{\partial\Gamma} (\cdot) \, d\partial\Gamma \, dz. \end{aligned} \quad (1.3.126)$$

Assim sendo, introduzindo a hipótese cinemática (1.3.114) junto com a (1.3.117), a (1.3.120) e a (1.3.125) na formulação variacional (1.3.5), e ainda considerando os seguintes esforço e carregamentos generalizados

$$\begin{aligned} M_1^\Gamma &= \int_{\Gamma} [\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)](-y) \, d\Gamma, \\ f_y^\Gamma &= \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_y \, d\Gamma, \\ \bar{t}_{1y}^{\partial\Gamma} &= \int_{\partial\Gamma} \bar{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{e}_y \, d\partial\Gamma, \end{aligned} \quad (1.3.127)$$

resulta o seguinte problema de acoplamento entre um modelo 3D e um modelo 1D:

Problema 1.12 (Mecânica dos sólidos – Acoplamento 3D–1D – Viga de Bernoulli). *Para algum $\gamma \in [0, 1]$ encontre $((u_{1y}, \mathbf{u}_2), (t_{1y}, \mu_{1x}), \mathbf{t}_2) \in \mathcal{U}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{z_a}^{z_b} M_1^\Gamma \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial z^2} \, dz + \int_{\Omega_2} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} &= \\ & \left(\gamma t_{1y} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_y \, d\Gamma \right) (v_{1y} - v_{2y}^o) \Big|_{z_b} \\ & + \left(\gamma \mu_{1x} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} [\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_z](-y) \, d\Gamma \right) \left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial z} - \frac{\partial v_{2y}^o}{\partial z} \right) \Big|_{z_b} \\ & - (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{v}_{2r} \, d\Gamma + \gamma s_{1y} (u_{1y} - u_{2y}^o) \Big|_{z_b} + \gamma \nu_{1x} \left(\frac{\partial u_{1y}}{\partial z} - \frac{\partial u_{2y}^o}{\partial z} \right) \Big|_{z_b} \\ & + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{s}_2 \cdot \left(u_{1y} \mathbf{e}_y - y \frac{\partial u_{1y}}{\partial z} \mathbf{e}_z - \mathbf{u}_2 \right) \, d\Gamma \\ & + \int_{z_a}^{z_b} f_y^\Gamma v_{1y} \, dz + \int_{\Omega_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} + \int_{z_a}^{z_b} \bar{t}_{1y}^{\partial\Gamma} v_{1y} \, dz + \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \, d\Gamma \\ & \forall ((v_{1y}, \mathbf{v}_2), (s_{1y}, \nu_{1x}), \mathbf{s}_2) \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \end{aligned} \quad (1.3.128)$$

onde é $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ com

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \left\{ u_{1y} \in \mathcal{Q}_1; \left(u_{1y}, \frac{\partial u_{1y}}{\partial z} \right) \Big|_{z_a} = (\bar{u}_{1y}, \bar{\alpha}_{1y}) \right\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{ \mathbf{u}_2 \in \mathcal{Q}_2; \mathbf{u}_2|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\mathbf{u}}_2 \}, \end{aligned} \quad (1.3.129)$$

sendo que \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 estão dados pelas (1.3.115) e (1.3.124) respectivamente. Por outro lado, \mathcal{V}_d é o espaço obtido por diferença de elementos em \mathcal{U}_d . Finalmente $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'$ é dado pela (1.3.116), e $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ é o espaço dual de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ com \mathcal{Q}_2 dado pela (1.3.124). O resto dos elementos define-se como no Problema 1.9.

Para fechar o problema deve ser provida a lei constitutiva que relaciona o esforço generalizado M_1^Γ com u_{1y} assim como também a que relaciona o tensor $\boldsymbol{\sigma}_2$ com \mathbf{u}_2 .

É importante salientar aqui que, analogamente ao caso de cascas, é necessária uma maior regularidade sobre as funções definidas em Ω_2 , resultado que é devido à hipótese cinemática considerada sobre Ω_1 .

Previamente a obter as equações de Euler-Lagrange é conveniente empregar uma decomposição do tensor $\boldsymbol{\sigma}_2$ sobre Γ_a similar à mostrada em (1.3.46). Neste caso tal decomposição toma a seguinte forma

$$\boldsymbol{\sigma}_2|_{\Gamma_a} = \bar{\sigma}_{2yz}(\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y) + \bar{\sigma}_{2zz}(\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2, \quad (1.3.130)$$

onde aqui $\bar{\sigma}_{2yz}$, $\bar{\sigma}_{2zz}$ e $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2$ são tais que

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{2yz} &= \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y \, d\Gamma, \\ \bar{\sigma}_{2zz} &= \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma, \\ \int_{\Gamma_a} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y \, d\Gamma &= 0, \\ \int_{\Gamma_a} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.131)$$

Portanto, usando a fórmula de Green segue-se que, no sentido das distribuições, as equações de Euler-Lagrange obtidas da formulação variacional (1.3.128) são

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 M_1^\Gamma}{\partial z^2} = f_y^\Gamma + \bar{t}_{1y}^\Gamma & \text{em } (z_a, z_b), \\ -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_2, \\ u_{1y} = \bar{u}_{1y} & \text{em } \{z_a\}, \\ \frac{\partial u_{1y}}{\partial z} = \bar{\alpha}_{1y} & \text{em } \{z_a\}, \\ \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D2}, \\ \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{t}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{N2}, \\ \gamma(u_{1y} - u_{2y}^o) = 0 & \text{em } \{z_b\}, \\ \gamma \left(\frac{\partial u_{1y}}{\partial z} - \frac{\partial u_{2y}^o}{\partial z} \right) = 0 & \text{em } \{z_b\}, \\ (1 - \gamma) \left(u_{1y} \mathbf{e}_y - y \frac{\partial u_{1y}}{\partial z} \mathbf{e}_z - \mathbf{u}_2 \right) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \gamma t_{1y} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_y \, d\Gamma = -\frac{\partial M_1^\Gamma}{\partial z} & \text{em } \{z_b\}, \\ \gamma \mu_{1x} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} [\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_z](-y) \, d\Gamma = M_1^\Gamma & \text{em } \{z_b\}, \\ \gamma t_{1y} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_y \, d\Gamma = A_a \bar{\sigma}_{2yz} & \text{em } \{z_b\}, \\ \gamma \mu_{1x} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} [\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_z](-y) \, d\Gamma = I_y^- \bar{\sigma}_{2zz} & \\ & + \int_{\Gamma_a} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z(-y) \, d\Gamma \quad \text{em } \{z_b\}, \\ [(1 - \gamma)\mathbf{t}_2 - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{e}_z] \perp \mathbf{v}_{2r} \quad \forall \mathbf{v}_{2r} \text{ que satisfaz (1.3.122)} & \text{sobre } \Gamma_a, \end{array} \right. \quad (1.3.132)$$

onde $I_y^- = \int_{\Gamma_a} (-y) \, d\Gamma$. Aqui, as últimas oito equações compreendem as condições de acoplamento fornecidas de forma natural pela formulação variacional (1.3.128). Mais

uma vez, a equivalência com relação a γ é perdida no Problema 1.12 devido à hipótese cinemática introduzida. Escolhendo $\gamma = 1$ obtêm-se as seguintes condições de acoplamento

$$u_{1y} = \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_y \, d\Gamma \quad \text{em } \{z_b\}, \quad (1.3.133)$$

$$\frac{\partial u_{1y}}{\partial z} = \frac{1}{A_o} \int_{\Gamma_a} \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial y} \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma \quad \text{em } \{z_b\}, \quad (1.3.134)$$

$$-\frac{\partial M_1^\Gamma}{\partial z} = A_a \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.135)$$

$$M_1^\Gamma = I_y^- \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.136)$$

$$t_{1y} = -\frac{\partial M_1^\Gamma}{\partial z} \quad \text{em } \{z_b\}, \quad (1.3.137)$$

$$\mu_{1x} = M_1^\Gamma \quad \text{em } \{z_b\}. \quad (1.3.138)$$

Para chegar às expressões (1.3.135) e (1.3.136) foi usado o fato de ser

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{e}_z \perp \mathbf{v}_{2r} \quad \forall \mathbf{v}_{2r} \text{ que satisfaz (1.3.122)} \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.139)$$

o que, por sua vez, implica que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{e}_z$ é o elemento nulo, resultando portanto $\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{e}_z = \bar{\sigma}_{2yz} \mathbf{e}_y + \bar{\sigma}_{2zz} \mathbf{e}_z$. De forma recíproca, pondo $\gamma \neq 1$ obtêm-se as seguintes condições de acoplamento

$$u_{1y} \mathbf{e}_y - y \frac{\partial u_{1y}}{\partial z} \mathbf{e}_z = \mathbf{u}_2 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.3.140)$$

$$-\frac{\partial M_1^\Gamma}{\partial z} = \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y \, d\Gamma \quad \text{em } \{z_b\}, \quad (1.3.141)$$

$$M_1^\Gamma = \int_{\Gamma_a} \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z (-y) \, d\Gamma \quad \text{em } \{z_b\}, \quad (1.3.142)$$

$$\mathbf{t}_2 = \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{e}_z \quad \text{sobre } \Gamma_a. \quad (1.3.143)$$

Neste caso, a expressão (1.3.143) é obtida combinando as últimas três equações vistas na (1.3.132) juntamente com a decomposição (1.3.130).

Vê-se que para $\gamma = 1$ o campo de deslocamentos é descontínuo devido a que \mathbf{v}_{2r} pode assumir qualquer valor, sempre satisfazendo a (1.3.122), enquanto que a tração é contínua. Para $\gamma \neq 1$ a situação é contrária posto que o campo de deslocamentos é de fato contínuo e a tração é descontínua devido à presença da componente $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \mathbf{e}_z$, a qual não está impedida de ser arbitrária.

A interpretação sobre cada problema pode ser dada de forma completamente análoga ao problema de acoplamento de modelos de sólidos 3D com cascas. A Tabela 1.4 resume estas interpretações para o problema 3D–1D mostrando o estado das quantidades envolvidas em cada caso, assim como também a forma de entender o acoplamento no contexto de um esquema no qual ambos os problemas foram segregados.

Valor de γ	Problema segregado em Ω_1	Problema segregado em Ω_2	Quantidade contínua	Quantidade descontínua
{1}	Dirichlet	Neumann	Tração (ver (1.3.135)–(1.3.136))	Deslocamento (ver (1.3.133)–(1.3.134))
[0,1]	Neumann	Dirichlet	Deslocamento (ver (1.3.140))	Tração (ver (1.3.141)–(1.3.142))

Tabela 1.4: Interpretações sobre o problema acoplado 3D–1D.

1.4 Resultados numéricos para o acoplamento de sólidos

Nesta seção apresentam-se alguns exemplos numéricos concernentes ao problema acoplado 3D–2D desenvolvido na Seção 1.3.1. O principal objetivo desta parte do capítulo é avaliar numericamente o desempenho do modelo mecânico 3D–2D frente aos resultados dados pelos modelos clássicos 3D e 2D puros. Nesta abordagem numérica, o Problema 1.10 é simplificado, sobre o domínio Ω_1 , a um problema de placa 2D tomando a curvatura da casca nula, ou seja $\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n} = 0$. Outra hipótese adicional é a de trabalhar dentro da faixa de deformações infinitesimais, sendo possível assumir que a configuração do domínio permanece invariante. A resposta constitutiva do material empregado na análise é linear e elástica. Ambos os casos, o sólido 3D e a placa 2D são providos então com adequadas expressões constitutivas para materiais isotrópicos, cujos parâmetros materiais (módulo de Young e coeficiente de Poisson) são

$$\begin{aligned} E &= 2.1 \cdot 10^6, \\ \nu &= 0.3, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

onde E é uma quantidade não dimensional. Como enfatizado nas seções prévias, a formulação variacional para o problema acoplado independe do comportamento do material e, neste sentido, extensões para considerar não linearidades materiais podem ser derivadas de forma análoga. A aproximação do problema acoplado 3D–2D é realizada através do método dos elementos finitos e as principais características são detalhadas na primeira parte desta seção. Finalmente, analisam-se dois exemplos particulares e apresentam-se alguns testes comparativos.

Viu-se que a formulação variacional contínua dá lugar a dois modelos mecânicos, um para $\gamma = 1$ e outro para $\gamma \neq 1$. As conseqüências destas duas possibilidades têm sido analisadas de forma exaustiva nas seções prévias. No entanto, quando se deseja realizar uma aproximação do problema, uma possibilidade adicional surge, passando a ser, ao todo, três modelos mecânicos discretos. Chama-se de \mathcal{Q}_i^h e \mathcal{T}_i^h aos espaços de dimensão finita correspondentes a \mathcal{Q}_i e a $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_i)$, $i = 1, 2$, do Problema 1.10. Portanto, as aproximações são denotadas por \mathbf{u}_i^h e \mathbf{t}_i^h , $i = 1, 2$. Contrariamente ao que ocorria no problema contínuo, no problema discreto a inclusão $\mathcal{T}_1^h \subset \mathcal{T}_2^h$ não se satisfaz (lembre que no caso contínuo é $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2) = \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) \oplus \mathcal{W}$, e portanto $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) \subset \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$). Devido a isto, na formulação discreta é necessário identificar entre $\gamma = 0$ e $\gamma \in (0, 1)$ em lugar de $\gamma \in [0, 1)$. Aqui tem-se utilizado a notação \mathcal{T}_i^h para expressar a contrapartida, em dimensão finita, do espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_i)$, $i = 1, 2$, e em uma abordagem conforme do método dos elementos finitos, como a usada aqui, vale a inclusão estrita $\mathcal{T}_i^h \subset \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_i)$. Em geral, e também em particular na presente seção, o espaço \mathcal{T}_i^h é diferente de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_i^h)$, $i = 1, 2$. Assim, os três modelos diferentes na versão discreta do problema acoplado correspondem, agora, aos seguintes modelos mecânicos discretos

- $\gamma = 1$: este caso é idêntico ao do problema contínuo, lembrando que a condição de continuidade é dada em um sentido mais fraco, devido a que é

$$\mathbf{u}_1^h = \mathbf{u}_2^h \quad \text{em } \mathcal{T}_1^h; \tag{1.4.2}$$

- $\gamma = 0$: este caso difere do caso do problema contínuo $\gamma \neq 1$ pois agora a condição de continuidade estabelece que

$$\mathbf{u}_1^h = \mathbf{u}_2^h \quad \text{em } \mathcal{T}_2^h; \tag{1.4.3}$$

- $\gamma \in (0, 1)$: este caso é o mais próximo à condição $\gamma \neq 1$ vista no problema contínuo

já que a mesma impõe o seguinte

$$\mathbf{u}_1^h = \mathbf{u}_2^h \quad \text{em } \mathcal{T}_1^h \cup \mathcal{T}_2^h. \quad (1.4.4)$$

1.4.1 Aproximação pelo método dos elementos finitos

Esta seção compreende a aproximação de elementos finitos do problema envolvendo o acoplamento entre um sólido 3D elástico linear e uma placa 2D de Naghdi elástica e linear. A seção finaliza com a definição dos espaços de aproximação empregados na abordagem discreta e com o sistema final de equações a ser resolvido.

A aproximação do problema acoplado envolve a aproximação do sub-sistema 3D sobre Ω_2 e do sub-sistema 2D sobre Ω_1 . Como sistemas separados, os sub-problemas 3D e 2D podem sofrer os já conhecidos inconvenientes presentes no nível do problema discreto se os esquemas numéricos não são adequadamente escolhidos. Por exemplo, pode-se citar o fenômeno de instabilidade numérica que surge no sub-sistema 3D para materiais incompressíveis quando usado um esquema de Galerkin clássico com interpolação linear para os campos de deslocamento e pressão (em uma formulação mista), assim como também o fenômeno de trancamento da solução que tem lugar no problema da placa quando a espessura vai para zero e utiliza-se uma aproximação clássica de tipo Galerkin com interpolação linear para o deslocamento e para a rotação. Neste sentido, é estritamente necessário arquitetar uma aproximação numérica tal que o sistema discreto final não sofra esta classe de problemas.

Considere-se um problema no qual, aos efeitos de simplificar a apresentação do sistema final de equações, há somente uma interface de acoplamento denominada Γ_a . A Tabela 1.5 introduz a notação usada para descrever os elementos envolvidos no problema discreto. Ali, as diferentes malhas empregadas para obter a solução aproximada são descritas. Com respeito a isto, \mathcal{I}_{3D}^e e \mathcal{I}_{2D}^e são as partições de elementos finitos correspondentes aos domínios 3D e 2D. O número de nós por elemento também é dado em cada caso. Além disso, $\mathcal{I}_{\Gamma_a}^e$ e $\mathcal{I}_{\partial\Sigma_{oa}}^e$ significam as malhas de elementos finitos que jazem sobre a fronteira de acoplamento $\Gamma_a \equiv \partial\Sigma_{oa}$, onde, apesar de usar a relação de equivalência que é um abuso de notação, remarca-se a diferença entre o contorno de acoplamento quando visto desde Ω_2 e quando visto desde Ω_1 respectivamente.

<i>Detalhe</i>	<i>Nós</i>		<i>Elementos</i>		
	<i>Conjunto</i>	<i>Cardinal</i>	<i>Conjunto</i>	<i>Cardinal</i>	<i>Nós por elemento</i>
Domínio Σ_o (2D)	\mathcal{I}_{2D}^n	n_{2D}^{q-l}	\mathcal{I}_{2D}^e	e_{2D}	8-4 ($q-l$)
Domínio Ω_2 (3D)	\mathcal{I}_{3D}^n	n_{3D}	\mathcal{I}_{3D}^e	e_{3D}	20
Contorno $\partial\Sigma_{oa}$ (2D)	$\mathcal{I}_{\partial\Sigma_{oa}}^n$	$n_{\partial\Sigma_{oa}}^{l-c}$	$\mathcal{I}_{\partial\Sigma_{oa}}^e$	$e_{\partial\Sigma_{oa}}$	2-1 ($l-c$)
Contorno Γ_a (3D)	$\mathcal{I}_{\Gamma_a}^n$	n_{Γ_a}	$\mathcal{I}_{\Gamma_a}^e$	e_{Γ_a}	4

Tabela 1.5: Descrição dos elementos usados no problema discreto 3D-2D.

Em função da informação provida na Tabela 1.5, para discretizar os domínios 3D e 2D emprega-se o elemento hexaedro de 20 nós e o elemento quadrilátero de 8 nós. Também, $\mathcal{I}_{\Gamma_a}^e$ é discretizado com elementos quadriláteros de 4 nós, enquanto que $\mathcal{I}_{\partial\Sigma_{oa}}^e$ conforma-se por elementos de linha de 2 nós. Os índices q e l denotam as duas diferentes interpolações presentes no elemento quadrilátero (correspondentes a 8 e 4 nós respectivamente) para os diferentes campos no problema da placa, enquanto que os índices l e c fazem o mesmo para o elemento de linha (neste caso correspondem a 2 nós e a 1 nó). Isto será clarificado no que segue ao fornecer os espaços de interpolação de cada incógnita de forma explícita. Ainda, n_{2D}^q (n_{2D}^l) indica o número de nós na malha de elementos finitos para o domínio 2D associado às funções de interpolação quadráticas (lineares), n_{3D} é o número de nós na malha de elementos finitos do domínio 3D, $n_{\partial\Sigma_{oa}}^l$ ($n_{\partial\Sigma_{oa}}^c$) é o número de nós associado à interpolação linear (constante) das variáveis duais sobre $\partial\Sigma_{oa}$, e n_{Γ_a} é o número de nós

onde as variáveis duais sobre Γ_a são aproximadas.

As incógnitas aqui resultam $\mathbf{u}_1^h = \mathbf{u}_{1t}^{h^o} + \xi \boldsymbol{\omega}_{1t}^h + u_{1n}^h \mathbf{n} \in \mathcal{Q}_1^h$, onde \mathcal{Q}_1^h está caracterizado por $\mathcal{Q}_{1\mathbf{u}_t^o}^h \times \mathcal{Q}_{1\boldsymbol{\omega}_t}^h \times \mathcal{Q}_{1u_n}^h$, $\mathbf{u}_2^h \in \mathcal{Q}_2^h$, $\mathbf{t}_1^h = (\mathbf{t}_{1t}^h, \boldsymbol{\mu}_{1t}^h, t_{1n}^h) \in \mathcal{T}_1^h = \mathcal{T}_{1\mathbf{t}_t}^h \times \mathcal{T}_{1\boldsymbol{\mu}_t}^h \times \mathcal{T}_{1t_n}^h$ e $\mathbf{t}_2^h \in \mathcal{T}_2^h$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{1\mathbf{u}_t^o}^h &= [U_1^h]^2 + \text{condições de contorno eventuais,} \\ \mathcal{Q}_{1\boldsymbol{\omega}_t}^h &= [W_1^h]^2 + \text{condições de contorno eventuais,} \\ \mathcal{Q}_{1u_n}^h &= U_1^h + \text{condições de contorno eventuais,} \\ \mathcal{Q}_2^h &= [U_2^h]^3 + \text{condições de contorno eventuais,} \\ \mathcal{T}_{1\mathbf{t}_t}^h &= [T_1^h]^2, \\ \mathcal{T}_{1\boldsymbol{\mu}_t}^h &= [M_1^h]^2, \\ \mathcal{T}_{1t_n}^h &= T_1^h, \\ \mathcal{T}_2^h &= [T_2^h]^3, \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

com

$$\begin{aligned} U_1^h &= \{\phi_1 \in C^0(\overline{\Sigma_o}); \phi_1|_{e_{2D}} \in \mathbb{Q}_2^s, \forall e_{2D} \in \mathcal{I}_{2D}^e\}, \\ W_1^h &= \{\psi_1 \in C^0(\overline{\Sigma_o}); \psi_1|_{e_{2D}} \in \mathbb{Q}_1, \forall e_{2D} \in \mathcal{I}_{2D}^e\}, \\ U_2^h &= \{\phi_2 \in C^0(\overline{\Omega_2}); \phi_2|_{e_{3D}} \in \mathbb{Q}_2^s, \forall e_{3D} \in \mathcal{I}_{3D}^e\}, \\ T_1^h &= \{\tau_1 \in C^0(\overline{\partial\Sigma_{oa}}); \tau_1|_{e_{\partial\Sigma_{oa}}} \in \mathbb{P}_1, \forall e_{\partial\Sigma_{oa}} \in \mathcal{I}_{\partial\Sigma_{oa}}^e\}, \\ M_1^h &= \{v_1 \in C^0(\overline{\partial\Sigma_{oa}}); v_1|_{e_{\partial\Sigma_{oa}}} \in \mathbb{R}, \forall e_{\partial\Sigma_{oa}} \in \mathcal{I}_{\partial\Sigma_{oa}}^e\}, \\ T_2^h &= \{\tau_2 \in C^0(\overline{\Gamma_a}); \tau_2|_{e_{\Gamma_a}} \in \mathbb{Q}_1, \forall e_{\Gamma_a} \in \mathcal{I}_{\Gamma_a}^e\}, \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

onde \mathbb{Q}_2^s é o espaço de polinômios de serendipity de grau 2 definido correspondentemente no quadrilátero 2D e no hexaedro 3D, \mathbb{Q}_1 é o espaço usual de polinômios de grau 1 definido no quadrilátero 2D, \mathbb{P}_1 é o espaço de polinômios lineares definidos no segmento de linha e \mathbb{R} são os números reais.

Com respeito ao dito na Seção 1.3.1 sobre o aumento da regularidade das funções sobre o domínio Ω_2 produto da cinemática escolhida sobre Ω_1 , veja que a aproximação de elementos finitos escolhida satisfaz as condições de regularidade requeridas pela formulação variacional (1.3.44) através da definição do espaço \mathcal{Q}_2 dado na (1.3.39).

Observe que as aproximações sobre Ω_2 e sobre Σ_o são totalmente independentes entre si. No entanto, é bastante direto inferir que as propriedades de convergência do problema acoplado dependem da quantidade $C_1 h_{3D}^k + C_2 h_{2D}^l$ (C_1 e C_2 constantes reais positivas dependentes da solução, e k e l inteiros positivos). Assim, é razoável usar uma família de elementos com propriedades de aproximação similares, ou seja $k = l$.

Com o esquema de discretização acima introduzido, o sistema final de equações lineares a ser resolvido é dado por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{2D} & \tilde{\mathbf{K}}_{2D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{K}}_{2D}^T & \mathbf{K}_{2D} & 0 & 0 & \gamma \mathbf{B}_{11} & (1-\gamma) \mathbf{B}_{12} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{3D} & \tilde{\mathbf{K}}_{3D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{K}}_{3D}^T & \mathbf{K}_{3D} & -\gamma \mathbf{B}_{21} & -(1-\gamma) \mathbf{B}_{22} \\ 0 & \gamma \mathbf{B}_{11}^T & 0 & -\gamma \mathbf{B}_{21}^T & 0 & 0 \\ 0 & (1-\gamma) \mathbf{B}_{12}^T & 0 & -(1-\gamma) \mathbf{B}_{22}^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_{1|\partial\Sigma_{oa}} \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_{2|\Gamma_a} \\ \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4.7}$$

onde \mathbf{U}_1 e \mathbf{T}_1 agrupam as incógnitas correspondentes a $(\mathbf{u}_{1t}^{h^o}, \boldsymbol{\omega}_{1t}^h, u_{1n}^h)$ e $(\mathbf{t}_{1t}^h, \boldsymbol{\mu}_{1t}^h, t_{1n}^h)$ res-

pectivamente, enquanto que aquelas incógnitas correspondentes aos nós sobre as fronteiras de acoplamento têm sido identificadas, como variáveis separadas, por $\mathbf{U}_{1|\partial\Sigma_{oa}}$ e $\mathbf{U}_{2|\Gamma_a}$, de forma a pôr em evidência o acoplamento efetivo entre graus de liberdade 3D e 2D. Dentro da estrutura do sistema de equações lineares, os blocos matriciais \mathbf{B}_{ij} , $i, j = 1, 2$, são os que realizam o acoplamento na formulação. Assim, quando $\gamma = 0$, ou $\gamma = 1$ o sistema é condensado, e o número de incógnitas reduzido.

Do sistema final de equações lineares (1.4.7) é importante comentar novamente o que foi dito a respeito dos três possíveis modelos no problema discreto. De fato, as características do sistema mudam quando $\gamma = 0$, $\gamma = 1$ ou $\gamma \in (0, 1)$, sendo essas as únicas três possibilidades existentes. O último caso é considerado como único pois qualquer valor $\gamma \in (0, 1)$ produz uma solução equivalente.

Veja que é possível pensar em segregar o sistema (1.4.7) resolvendo de forma iterativa os sub-problemas 2D e 3D. Isto é de utilidade em problemas com muitos graus de liberdade nos quais as matrizes \mathbf{B}_{ij} implicam em um sistema altamente acoplado. Para a abordagem segregada recorre-se ao comentário feito na Seção 1.3.1 de forma a reescrever o problema acoplado em um contexto de sub-problemas de Dirichlet e de Neumann. Isto estabelece outras formas de entender o papel jogado por γ , como fora extensivamente comentado na última parte da Seção 1.3.1.

A fim de simplificar a implementação computacional, nos exemplos que serão apresentados nas seções que seguem, as malhas 2D e 3D empregadas para cada partição dos domínios Σ_o e Ω_2 são tais que existe uma correspondência entre os nós pertencentes à malha 3D e aqueles que pertencem à malha 2D. Um exemplo desta classe de malhas sob correspondência entre os nós é mostrada na Figura 1.7. Além de cada partição, mostra-se a disposição escolhida para cada um dos graus de liberdade presentes na formulação, incluindo às variáveis duais sobre a fronteira de acoplamento.

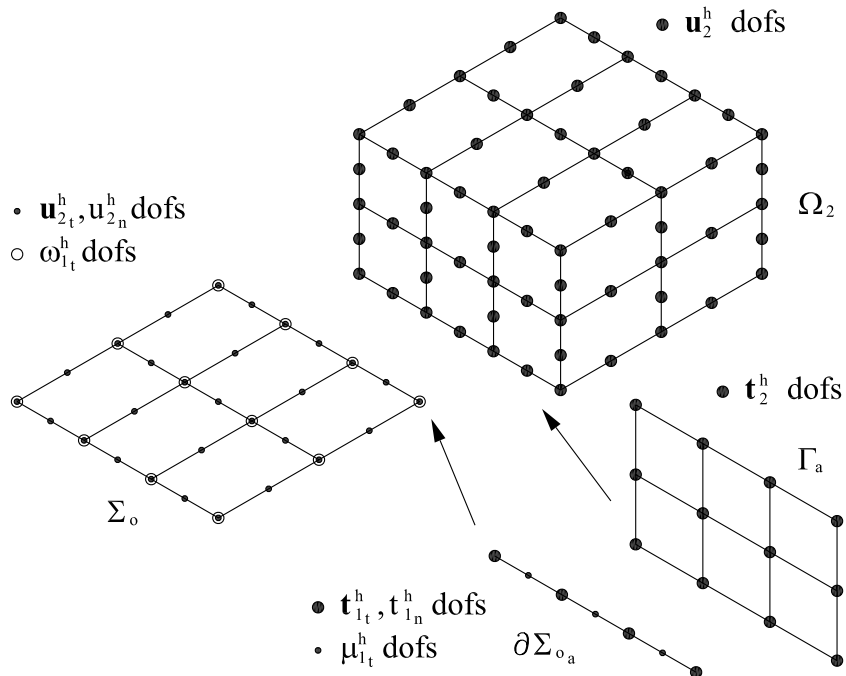


Figura 1.7: Exemplo de uma malha simples usada em um problema 3D–2D acoplado.

Objetivando identificar os elementos referidos na Tabela 1.5, no exemplo da Figura 1.7

tem-se

$$\begin{array}{lll}
 e_{2D} = 6 & n_{2D}^q = 29 & n_{2D}^l = 12, \\
 e_{3D} = 12 & n_{3D} = 111, & \\
 e_{\partial\Sigma_{o_a}} = 3 & n_{\partial\Sigma_{o_a}}^l = 4 & n_{\partial\Sigma_{o_a}}^c = 3, \\
 e_{\Gamma_a} = 6 & n_{\Gamma_a} = 12. &
 \end{array}$$

Além disso, da mesma figura é possível identificar as quatro partições \mathcal{I}_{2D}^e , \mathcal{I}_{3D}^e , $\mathcal{I}_{\partial\Sigma_{o_a}}^e$ e $\mathcal{I}_{\Gamma_a}^e$, junto com os elementos vinculados a cada uma destas.

1.4.2 Caso 1: componente estrutural tipo placa engastada

Este exemplo simples mostra a forma na qual o modelo acoplado se desempenha em comparação com os correspondentes modelos 3D e 2D puros. Trata-se de um componente estrutural que se assemelha a uma placa como mostra a Figura 1.8. A estrutura está engastada sobre o lado esquerdo, enquanto que um carregamento distribuído por unidade de área f é aplicado na direção vertical sobre o lado direito como mostrado na figura. As dimensões são $L = 4$, $R = 1.5$ e $h = 0.2$, e a força por unidade de área é $f = 1$.

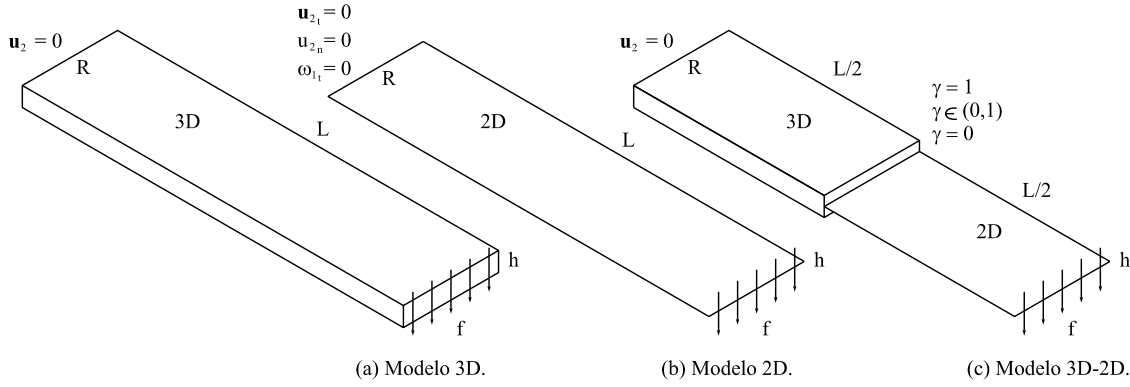


Figura 1.8: Componente estrutural engastado tipo placa.

Os números cardinais apresentados na Tabela 1.5, e relacionados à Figura 1.8(c), são os seguintes

$$\begin{array}{lll}
 e_{2D} = 200 & n_{2D}^q = 661 & n_{2D}^l = 231, \\
 e_{3D} = 400 & n_{3D} = 2445, & \\
 e_{\partial\Sigma_{o_a}} = 10 & n_{\partial\Sigma_{o_a}}^l = 11 & n_{\partial\Sigma_{o_a}}^c = 10, \\
 e_{\Gamma_a} = 20 & n_{\Gamma_a} = 33. &
 \end{array}$$

Além do mais, a partir destes dados é fácil inferir sobre as características das malhas para os casos 3D e 2D dados nas Figuras 1.8(a) e 1.8(b), respectivamente, já que a ordem do tamanho dos elementos é a mesma.

Como dito previamente, a situação da Figura 1.8 é primeiramente resolvida com um modelo puramente 3D e a seguir com um modelo puramente 2D de placa de Naghdi. Portanto, o objetivo é comparar os resultados destes dois casos com a solução computada com o modelo acoplado. Isto é feito para cada um dos modelos mecânicos discretos obtidos para $\gamma = 1$, $\gamma \in (0, 1)$ e $\gamma = 0$. Em particular para o segundo modelo considera-se $\gamma = 0.5$.

Na Seção 1.1.2 foi explicado que a escolha do parâmetro γ tem que estar baseada em argumentos mecânicos, e não no desempenho numérico do problema aproximado. No entanto, é evidente que um dos três modelos terá um comportamento mais favorável que

os outros dois. Logo, e devido a que o modelo 3D completo se assemelha com uma placa, espera-se que $\gamma = 0$ seja a melhor opção para o modelo acoplado em função da proximidade da solução com respeito à do modelo 3D puro. Contudo, o modelo com melhor desempenho pode variar de um problema para outro.

A Figura 1.9 mostra o deslocamento da estrutura amplificado em um fator de 200. Dado que as diferenças entre os diversos modelos 3D–2D, isto é para os diferentes valores de γ , é negligível, aqui apresenta-se somente o resultado para $\gamma = 1$. Estritamente, existem diferenças entre as soluções dos modelos discretos 3D–2D. Na Tabela 1.6 mostram-se, para todos os casos estudados, dois valores que medem o deslocamento máximo vertical δ_{\max} em $x = L$ e o deslocamento em $x = \frac{L}{2}$, chamado δ_{mid} . No modelo 3D puro δ_{\max} é medido como o máximo deslocamento do plano correspondente à superfície média.

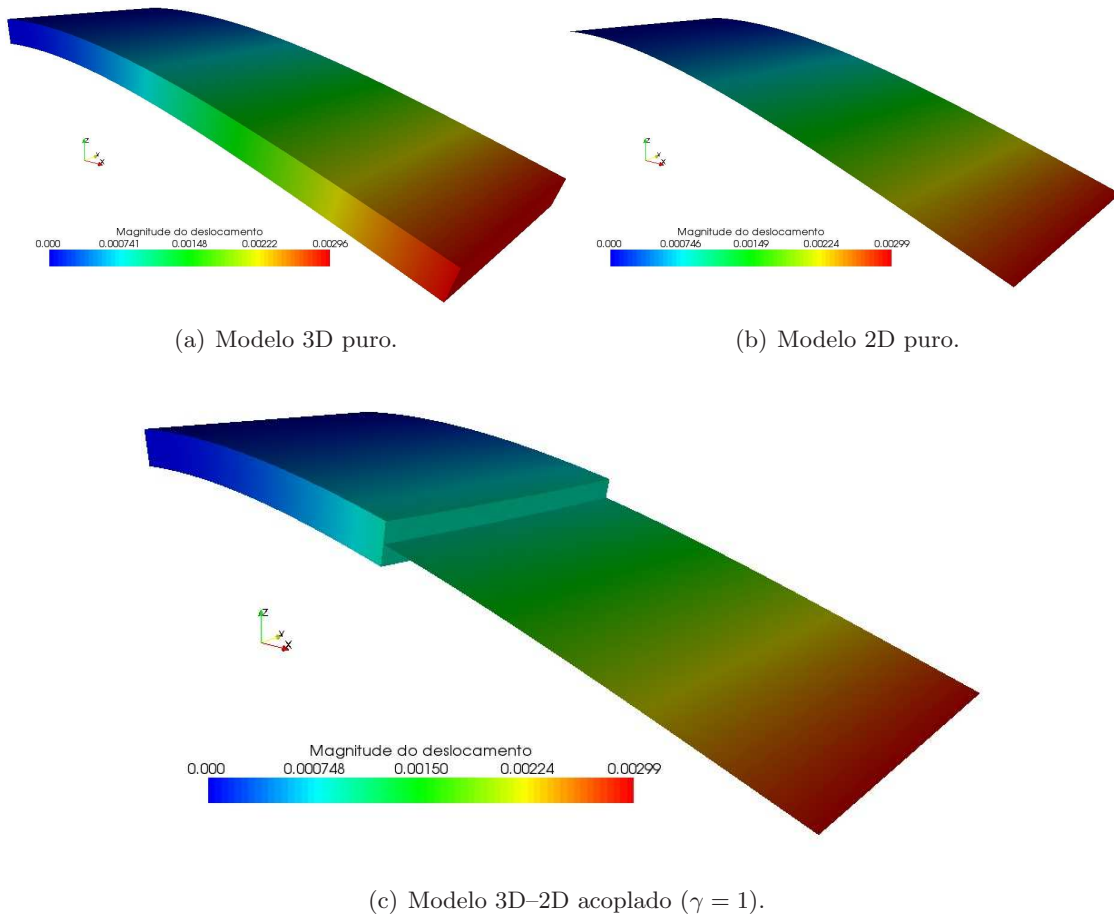


Figura 1.9: Deslocamento amplificado para todos os casos estudados.

<i>Modelo</i>	$\delta_{\max}(x = L)$	$\delta_{\text{mid}}(x = \frac{L}{2})$
3D	$2.96096 \cdot 10^{-3}$	$9.21048 \cdot 10^{-4}$
2D	$2.98507 \cdot 10^{-3}$	$9.31694 \cdot 10^{-4}$
3D – 2D	$\gamma = 1$	$2.98915 \cdot 10^{-3}$
	$\gamma = 0$	$2.95300 \cdot 10^{-3}$
	$\gamma = 0.5$	$2.90633 \cdot 10^{-3}$

Tabela 1.6: Deslocamentos em $x = L$ e em $x = \frac{L}{2}$ para todos os casos estudados.

Observe que, dentre os três valores de γ , o modelo para $\gamma = 0.5$ fornece a estrutura mais rígida, seguida por $\gamma = 0$, e logo por $\gamma = 1$. Isto pode ser facilmente explicado pelo aumento no número de restrições entre ambos os sub-sistemas. Ao comparar o valor de

δ_{\max} em $x = L$, $\gamma = 0$ dá o resultado mais próximo ao caso puramente 3D, o qual pode ser considerado como o mais realista. Por sua vez, o modelo para $\gamma = 1$ fornece uma situação mais próxima ao modelo puramente 2D. Esta tendência permanece ao comparar o deslocamento vertical δ_{mid} em $x = \frac{L}{2}$.

Vale a pena salientar que como resultado do acoplamento entre a porção 2D da estrutura com a região 3D, o último transfere ao primeiro um pequeno fenômeno de deslocamento de membrana, o qual não está presente no modelo puramente 2D. Na Figura 1.10 compara-se a componente x do deslocamento de membrana (na direção longitudinal da placa), sobre a fronteira de acoplamento Γ_a , para o modelo 3D e para os modelos 3D–2D com $\gamma = 1$ e $\gamma = 0$. Na parte direita da figura calcula-se a diferença entre o deslocamento na direção x do modelo 3D com cada um dos modelos 3D–2D mostrados. O deslocamento na direção x mostra-se em $(x, y) = (\frac{L}{2}, \frac{R}{2})$, com $z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$. Desta maneira, o eixo vertical pode ser considerado como uma fibra ortogonal à superfície média, enquanto que o eixo horizontal mostra a diferença no efeito de membrana com respeito à escolha de γ . Mais uma vez veja que para $\gamma = 0$ obtém-se um resultado mais similar àquele dado pelo modelo 3D puro, de acordo com as conclusões resgatadas da Tabela 1.6, enquanto que para $\gamma = 1$ o desvio é mais apreciável.

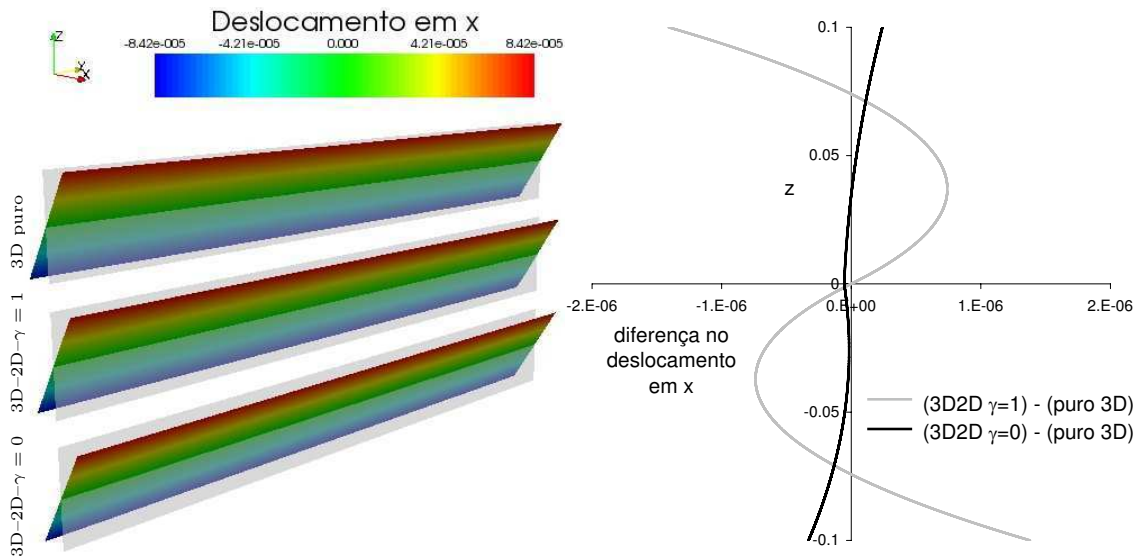


Figura 1.10: Deslocamento de membrana na direção x em $(x, y) = (\frac{L}{2}, \frac{R}{2})$. De acima para abaixo: modelo 3D, modelo 3D–2D para $\gamma = 1$ e modelo 3D–2D para $\gamma = 0$.

Como última conclusão, do exemplo ilustrado aqui, segue-se que o problema é praticamente independente de γ . Em qualquer caso, é importante frisar mais uma vez que a escolha do parâmetro γ tem que estar comandada por considerações mecânicas, pois diferentes valores de γ impactam de forma direta na concepção do modelo mecânico.

1.4.3 Caso 2: componente estrutural geral

Este exemplo visa mostrar a que pode ser considerada uma situação de interesse prático desta classe de modelos acoplados. O principal objetivo é mostrar as vantagens que há ao usar modelos acoplados em lugar de um modelo de sólido 3D completo devido ao grande problema que resultaria se o domínio completo fosse discretizado usando elementos 3D. Neste sentido, o exemplo é meramente ilustrativo. O componente estrutural analisado aqui é mostrado na Figura 1.11, e é mais similar ao componente geral da Figura 1.4, na qual há uma porção do domínio factível de ser reduzida a uma teoria bidimensional, caindo desta maneira no marco teórico proposto aqui.

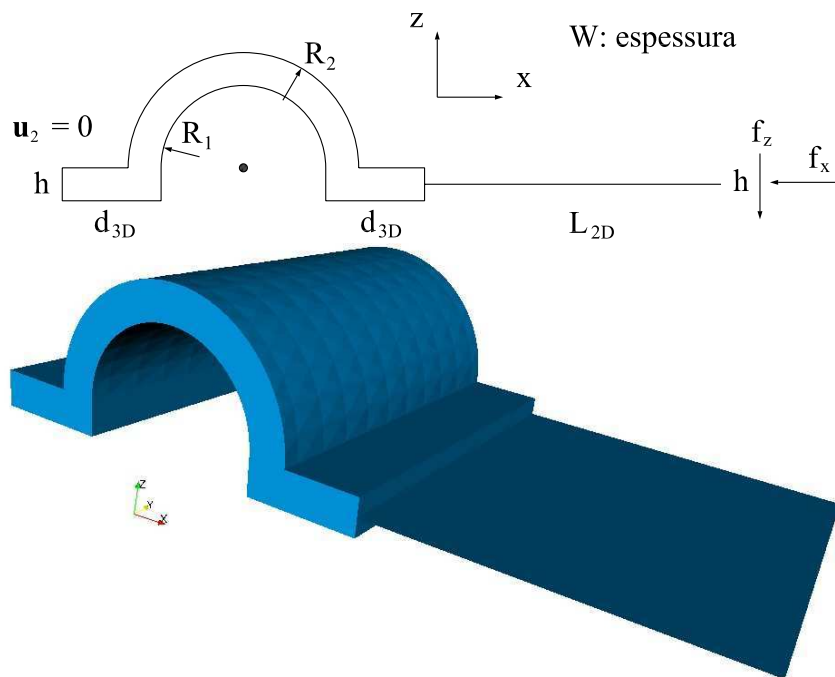


Figura 1.11: Componente estrutural geral como modelo 3D-2D acoplado.

Neste problema, o componente estrutural está engastado sobre o lado esquerdo, enquanto que há uma carga por unidade de área combinada $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ aplicada na parte do componente que pode ser considerado como uma placa (sobre o extremo direito do domínio). Dado que se toma $f_x = 2.5$, $f_y = 0$ e $f_z = 1$, os efeitos de membrana e flexão são significativos no problema. As dimensões na Figura 1.11 são $W = 2$, $L_{2D} = 1.8$, $d_{3D} = 0.6$, $h = 0.2$, $R_1 = 0.5$ e $R_2 = 0.7$.

Na Figura 1.12 apresentam-se sobrepostas as configurações original (com uma parcial transparência) e deformada (amplificada por um fator de 100) para $\gamma = 1$. Mais uma vez, as diferenças na solução são da ordem de 2% entre os modelos para diferentes valores de γ .

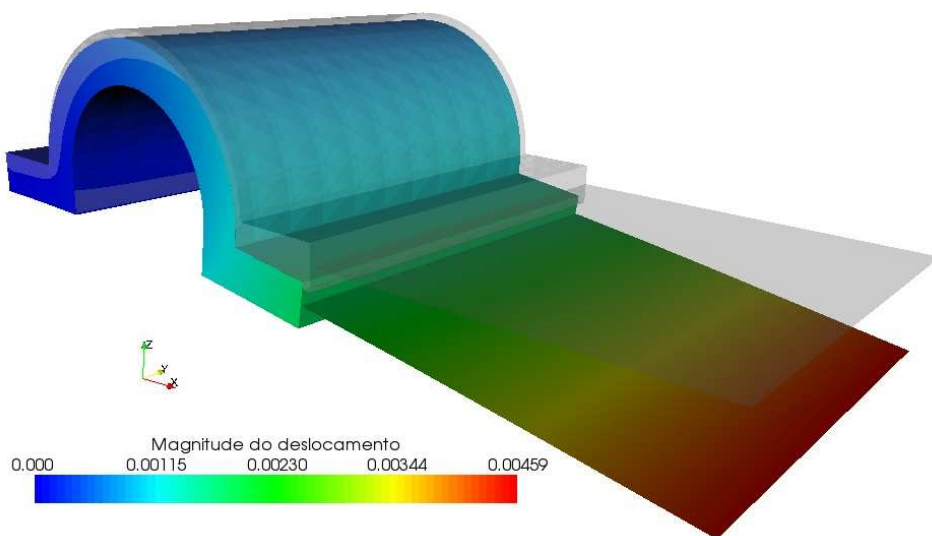


Figura 1.12: Deslocamento da estrutura amplificado 100 vezes.

A Figura 1.13 mostra um detalhe da solução obtida sobre a região 3D. Enquanto a Figura 1.13(a) apresenta a magnitude do vetor de deslocamento, na Figura 1.13(b) mostram-se diversas iso-superfícies correspondentes ao campo escalar dado pela magnitude do deslocamento junto com os vetores subjacentes sobre essas localizações. Ali, os vetores estão sem escala associada para apreciar o comportamento da solução.

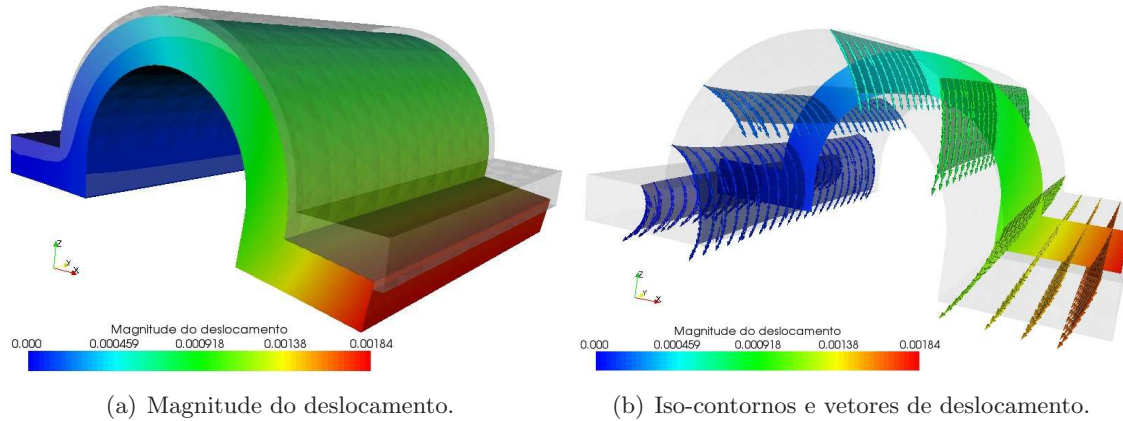


Figura 1.13: Detalhe da magnitude do deslocamento na região 3D.

Finalmente, vale a pena dizer que se este problema fosse resolvido usando um modelo completo de sólido 3D, o número total de incógnitas subiria até 31047, enquanto que para $\gamma = 0$ este número é 22405 e para $\gamma = 1$ é 22293. Neste exemplo isto representa uma redução de 30% no número de incógnitas. Isto, em conjunção com o que foi mostrado no primeiro exemplo, provê evidências sobre a conveniência da utilização dos modelos cinematicamente incompatíveis apresentados aqui.

Desta classe de exemplos numéricos é possível avaliar o desempenho do sistema acoplado, assim como prover evidência numérica das principais características do sistema mecânico discreto. O desempenho tem-se mostrado promissor devido a que tem sido capaz de reproduzir a solução alcançada com o modelo de sólido puramente 3D para os diferentes valores de γ . Entre os modelos discretos que surgem para os diferentes valores de γ aquele obtido com $\gamma = 0$ apresentou melhores resultados em comparação com o modelo 3D puro com respeito à rigidez do sistema completo. Além disso, deve ser dito mais uma vez que a escolha de γ não segue nenhum argumento numérico pois as suas conseqüências são originadas a partir da origem da formulação no nível do contínuo. Isto é, na seleção do parâmetro γ é imperativo levar em conta considerações mecânicas.

1.5 O problema de escoamento de fluidos incompressíveis

Ao modelar o escoamento de um fluido incompressível é bastante comum a utilização de modelos reduzidos em duas dimensões, os quais podem inclusive ser modelos reduzidos devido à existência de simetria de revolução em torno de algum eixo. Já a utilização de modelos reduzidos 1D não é comum posto que tal redução produz modelos tão simples que a sua modelagem faz-se desnecessária. Isto no caso de domínios fixos. Ao passar para a análise transiente em domínios que sofrem deformação, a modelagem unidimensional apresenta características muito interessantes. A sua aplicação é principalmente na modelagem de grandes sistemas tubulares de circulação, onde a propagação de ondas é um fenômeno dominante. Um claro exemplo disto encontra-se na modelagem do sistema cardiovascular humano que, como dito, foi o que motivou o desenvolvimento teórico aqui exposto. Esta última aplicação em particular aborda-se de forma exaustiva no Capítulo 2. Todos os casos analisados nesta seção são restritos a fluidos incompressíveis, porém, nada

impede reformular os problemas para fluidos compressíveis.

Nas subseções seguintes apresentam-se os problemas de acoplamento de modelos 3D com modelos reduzidos a duas dimensões e também com modelos 1D incluindo o caso com deformação do domínio. Isto é feito utilizando exatamente as mesmas idéias que as usadas nas seções anteriores, e que estão baseadas nos conceitos mostrados na Seção 1.1. Uma alternativa análoga à apresentada na Seção 1.2.1 para o caso de um escoamento com simetria de revolução é igualmente viável. Se bem que nesta primeira parte apresenta-se o problema para o caso de escoamento de Stokes estacionário, na Seção 1.5.1 estende-se para o problema de Navier–Stokes estacionário enquanto que na Seção 1.5.2 faz-se mais uma extensão para o problema transiente em domínios deformáveis.

Considere primeiro um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com contorno $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ (sendo $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$) como o da Figura 1.1 da Seção 1.2. O problema de escoamento de Stokes estacionário e incompressível é o seguinte:

Problema 1.13. *Encontre $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{U} \times L^2(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} [-p \operatorname{div} \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}_D \cdot \nabla \mathbf{v}] \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (1.5.1a)$$

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (1.5.1b)$$

onde

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \bar{\mathbf{u}}\}, \quad (1.5.2)$$

sendo \mathcal{V} o espaço gerador da variedade linear \mathcal{U} , além disso $\boldsymbol{\sigma}_D = \boldsymbol{\sigma}_D(\mathbf{u})$ é a componente desviadora do tensor de tensão $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_D$, \mathbf{f} é uma força por unidade de volume, $\bar{\mathbf{t}}$ é uma tração imposta sobre a fronteira de Neumann Γ_N e $\bar{\mathbf{u}}$ é uma velocidade imposta sobre a fronteira de Dirichlet Γ_D .

Neste problema deve ser especificado o comportamento do fluido através do tensor desviador $\boldsymbol{\sigma}_D$ de forma a fechar o problema.

Como na Seção 1.1, introduz-se agora o contorno interno Γ_a , como mostrado na Figura 1.1, que divide o domínio Ω como $\Omega = (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})^\circ$, com $\Gamma_a = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ e $\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \setminus \Gamma_a$. Logo, a solução do Problema 1.13, considerada como um par $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, $p = (p_1, p_2)$, de acordo com as duas partições do domínio, satisfaz as seguintes condições sobre Γ_a

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad \text{em } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_a), \quad (1.5.3)$$

$$(-p_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D1}) \mathbf{n}_1 = (-p_2\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D2}) \mathbf{n}_1 \quad \text{em } \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_a), \quad (1.5.4)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{D_i}$ é a componente desviadora do tensor de tensão correspondente à partição Ω_i , $i = 1, 2$, sobre o contorno Γ_a , cuja normal exterior vista do domínio Ω_1 é \mathbf{n}_1 . Aqui, a (1.5.3) decorre da cinemática do problema segundo a definição do conjunto \mathcal{U} , enquanto que a (1.5.4) obtém-se de forma natural da formulação variacional (1.5.1).

Seguindo os mesmos passos que na Seção 1.1 formula-se o problema geral de acoplamento sem introduzir na formulação nenhuma hipótese, o que corresponde ao Problema 1.2. Este princípio estendido, como é já bem sabido neste ponto, admite a existência de duas cinemáticas possivelmente não compatíveis, ou seja, é factível que a solução sofra uma descontinuidade sobre Γ_a . Desta maneira será possível introduzir as hipóteses cinemáticas sobre uma parte do domínio mantendo a validade do princípio variacional. Logo, incluindo os termos que envolvem as potências geradas pelas descontinuidades introduzidas, resulta o seguinte:

Problema 1.14. Para algum $\gamma \in [0, 1]$ encontre $((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), (p_1, p_2), \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \in \mathcal{U}_d \times \mathcal{P}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} [-p_1 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{D1} \cdot \nabla \mathbf{v}_1] \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} [-p_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{D2} \cdot \nabla \mathbf{v}_2] \, d\mathbf{x} = \\ & \quad \gamma \langle \mathbf{t}_1, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} + (1 - \gamma) \langle \mathbf{t}_2, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} \\ & \quad + \gamma \langle \mathbf{s}_1, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} + (1 - \gamma) \langle \mathbf{s}_2, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} \\ & \quad + \int_{\Omega_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{N1}} \bar{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{N2}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \, d\Gamma \\ & \quad \forall ((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \end{aligned} \quad (1.5.5a)$$

$$\int_{\Omega_1} q_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} q_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall (q_1, q_2) \in \mathcal{P}_d, \quad (1.5.5b)$$

onde $\bar{\mathbf{t}}_1 = \bar{\mathbf{t}}|_{\Gamma_{N1}}$ e $\bar{\mathbf{t}}_2 = \bar{\mathbf{t}}|_{\Gamma_{N2}}$ e além disso $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ e $\mathcal{P}_d = L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2)$ com

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\mathbf{u}_1 \in \mathcal{Q}_1; \mathbf{u}_1|_{\Gamma_{D1}} = \bar{\mathbf{u}}_1\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{u}_2 \in \mathcal{Q}_2; \mathbf{u}_2|_{\Gamma_{D2}} = \bar{\mathbf{u}}_2\}, \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

onde $\bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\mathbf{u}}|_{\Gamma_{D1}}$ e $\bar{\mathbf{u}}_2 = \bar{\mathbf{u}}|_{\Gamma_{D2}}$, com $\mathcal{V}_d = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ sendo \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 os espaços geradores das variedades lineares \mathcal{U}_1 e \mathcal{U}_2 . Os outros elementos são definidos segundo o Problema 1.13.

Para estudar a consistência neste caso é necessário considerar que

$$\mathcal{Q}_i = \mathbf{H}^1(\Omega_i) \quad i = 1, 2, \quad (1.5.7)$$

e portanto tem-se

$$\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_i) = \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_a) \quad \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_i)' = \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_a) \quad i = 1, 2, \quad (1.5.8)$$

da mesma forma que ocorria com o problema na seção anterior na mecânica dos sólidos. Portanto, as formas que assumem os produtos dualidade são as seguintes

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{t}_1, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} &= \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \, d\Gamma, \\ \langle \mathbf{t}_2, (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} &= \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Logo, no sentido das distribuições resulta que as equações de Euler-Lagrange correspon-

dentos à formulação variacional estendida (1.5.5) são

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla p_1 - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{D1} = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_1, \\ \nabla p_2 - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{D2} = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 & \text{em } \Omega_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 & \text{em } \Omega_2, \\ \mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1 & \text{sobre } \Gamma_{D1}, \\ \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D2}, \\ (-p_1 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D1}) \mathbf{n}_1 = \bar{\mathbf{t}}_1 & \text{sobre } \Gamma_{N1}, \\ (-p_2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D2}) \mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{t}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{N2}, \\ \gamma(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ (1 - \gamma)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \gamma \mathbf{t}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{t}_2 = (-p_1 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D1}) \mathbf{n}_1 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \gamma \mathbf{t}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{t}_2 = (-p_2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D2}) \mathbf{n}_1 & \text{sobre } \Gamma_a. \end{array} \right. \quad (1.5.10)$$

Portanto, a solução do problema em termos somente dos campos $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ e $p = (p_1, p_2)$ independe do parâmetro real γ , posto que se pode escrever

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla p_1 - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{D1} = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_1, \\ \nabla p_2 - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{D2} = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 & \text{em } \Omega_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 & \text{em } \Omega_2, \\ \mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1 & \text{sobre } \Gamma_{D1}, \\ \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D2}, \\ (-p_1 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D1}) \mathbf{n}_1 = \bar{\mathbf{t}}_1 & \text{sobre } \Gamma_{N1}, \\ (-p_2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D2}) \mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{t}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{N2}, \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ (-p_1 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D1}) \mathbf{n}_1 = (-p_2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D2}) \mathbf{n}_1 & \text{sobre } \Gamma_a, \end{array} \right. \quad (1.5.11)$$

e mais uma vez é possível mostrar a consistência do problema estendido, como feito com o Problema 1.3. Logo, a solução do Problema 1.14 satisfaz as mesmas equações de Euler–Lagrange que a solução do Problema 1.13. De fato, as duas últimas expressões da (1.5.11) são as (1.5.3) e (1.5.4), respectivamente. O seguinte resultado é enunciado para o caso de um fluido Newtoniano:

Proposição 1.4. *O Problema 1.14 com comportamento constitutivo Newtoniano, ou seja $\boldsymbol{\sigma}_{D_i} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i)$ ($i = 1, 2$), sendo $\boldsymbol{\varepsilon}$ o tensor taxa de deformação e $\mu > 0$, possui solução, resultando um único par $(\mathbf{u}, p) = ((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), (p_1, p_2)) \in \mathcal{U}_d \times \mathcal{P}_d$ e uma única combinação $\mathbf{t}_\gamma = \gamma \mathbf{t}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{t}_2 \in \mathbf{H}_{\llbracket \cdot \rrbracket \operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma_a)$.*

Prova. *A prova é realizada de forma similar às apresentadas nos casos anteriores, isto é, seguindo a linha de trabalho de [8, 27]. O problema pode ser escrito da seguinte forma*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b_p(\mathbf{v}, p) - b_t(\mathbf{v}, \mathbf{t}_\gamma) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_d, \quad (1.5.12)$$

$$b_t(\mathbf{u}, \mathbf{s}_\gamma) = 0 \quad \forall \mathbf{s}_\gamma \in \mathbf{H}_{\llbracket \cdot \rrbracket \operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma_a), \quad (1.5.13)$$

$$b_p(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}_d, \quad (1.5.14)$$

com $a(\cdot, \cdot) : \mathcal{W}_d \times \mathcal{W}_d \rightarrow \mathbb{R}$, $b_t(\cdot, \cdot) : \mathcal{W}_d \times \mathbf{H}_{\llbracket \cdot \rrbracket \operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma_a) \rightarrow \mathbb{R}$, $b_p(\cdot, \cdot) : \mathcal{W}_d \times \mathcal{P}_d \rightarrow \mathbb{R}$ e

$l(\cdot) : \mathcal{W}_d \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_1} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2) \, d\mathbf{x}, \\ b_t(\mathbf{u}, \mathbf{s}_\gamma) &= \int_{\Gamma_a} [\gamma \mathbf{s}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{s}_2] \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \, d\Gamma, \\ b_p(\mathbf{u}, q) &= \int_{\Omega_1} q_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} q_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 \, d\mathbf{x}, \\ l(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega_1} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{N_1}} \bar{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

e onde $\mathcal{W}_d = \mathbf{H}^1(\Omega_1) \times \mathbf{H}^1(\Omega_2)$ cuja norma vem dada por $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{W}_d} = \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_1)} + \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_2)}$. Seja a decomposição $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ onde $\mathbf{z} \in \mathcal{W}_d$ é tal que $\mathbf{z}_1|_{\Gamma_{D_1}} = \bar{\mathbf{u}}_1$, $\mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} = 0$, $\mathbf{z}_2|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\mathbf{u}}_2$ e $\mathbf{z}_2|_{\Gamma_a} = 0$. Por outro lado, tem-se $\mathbf{w} \in \mathcal{K}_{t-p} = \mathcal{K}_t \cap \mathcal{K}_p$, com $\mathcal{K}_t \subset \operatorname{Ker}(\mathcal{B}_t)$ e $\mathcal{K}_p = \operatorname{Ker}(\mathcal{B}_p)$, sendo \mathcal{B}_t e \mathcal{B}_p os operadores associados às formas $b_t(\cdot, \cdot)$ e $b_p(\cdot, \cdot)$ respectivamente, e além disso

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t &= \{ \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathcal{W}_d; \mathbf{w}_1|_{\Gamma_{D_1}} = 0, \mathbf{w}_2|_{\Gamma_{D_2}} = 0, \mathbf{w}_1|_{\Gamma_a} = \mathbf{w}_2|_{\Gamma_a} \}, \\ \mathcal{K}_p &= \{ \mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \in \mathcal{W}_d; \operatorname{div} \mathbf{w}_1 = 0, \operatorname{div} \mathbf{w}_2 = 0 \}. \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

Por um lado, resulta simples mostrar que a forma $a(\cdot, \cdot)$ é bilinear, simétrica, contínua e coerciva em $\mathcal{K}_{t-p} \times \mathcal{K}_{t-p}$, usando a desigualdade de Korn (ver [26]) e o fato de ser $\mu > 0$, e também que a forma $l(\cdot)$ é linear e contínua em \mathcal{K}_{t-p} . Logo, usando o teorema de Lax–Milgram (ver [50]) segue-se que existe um único elemento $\mathbf{w} \in \mathcal{K}_{t-p} \subset \operatorname{Ker}(\mathcal{B}_t) \cap \operatorname{Ker}(\mathcal{B}_p)$ tal que

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = l_{\mathbf{z}}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{K}_{t-p}, \quad (1.5.17)$$

onde $l_{\mathbf{z}}(\cdot) = l(\cdot) - a(\mathbf{z}, \cdot)$. Portanto, a existência e unicidade de $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathcal{U}_d$ segue. Para provar a existência e unicidade da combinação \mathbf{t}_γ e da pressão $p = (p_1, p_2)$ deve-se recorrer à teoria das formulações mistas. Neste caso as formas $b_t(\cdot, \cdot)$ e $b_p(\cdot, \cdot)$ devem satisfazer condições de tipo inf–sup para provar o resultado. Define-se então o espaço $\mathbf{H}_{[\cdot]_{\operatorname{div}}}^{-1/2}(\Gamma_a)$ equipado com a norma

$$\|\mathbf{t}_\gamma\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]_{\operatorname{div}}}^{-1/2}(\Gamma_a)} = \sup_{\substack{[\mathbf{w}] \in \mathbf{H}_{[\cdot]_{\operatorname{div}}}^{1/2}(\Gamma_a) \\ [\mathbf{w}] \neq 0}} \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_\gamma \cdot [\mathbf{w}] \, d\Gamma}{\|[\mathbf{w}]\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]_{\operatorname{div}}}^{1/2}(\Gamma_a)}}, \quad (1.5.18)$$

como o espaço dual de $\mathbf{H}_{[\cdot]_{\operatorname{div}}}^{1/2}(\Gamma_a)$ que é definido como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{[\cdot]_{\operatorname{div}}}^{1/2}(\Gamma_a) &= \{ [\mathbf{w}] \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_a); \mathbf{w} \in \mathcal{W}_d, [\mathbf{w}] = \mathbf{w}_1|_{\Gamma_a} - \mathbf{w}_2|_{\Gamma_a}, \\ &\quad \operatorname{div} \mathbf{w}_1 = 0, \operatorname{div} \mathbf{w}_2 = 0 \}, \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

e equipado com a norma

$$\|[\mathbf{w}]\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]_{\operatorname{div}}}^{1/2}(\Gamma_a)} = \inf_{[\mathbf{w}] = \mathbf{y}_1|_{\Gamma_a} - \mathbf{y}_2|_{\Gamma_a}} \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{W}_d}. \quad (1.5.20)$$

Logo, para qualquer $\beta_1 > 1$ pode-se escolher $\mathbf{z} \in \mathcal{K}_p$ tal que $\mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} - \mathbf{z}_2|_{\Gamma_a} = \llbracket \mathbf{w} \rrbracket$ e

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{W}_d} \leq \beta_1 \|\llbracket \mathbf{w} \rrbracket\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]_{\text{div}}}^{1/2}(\Gamma_a)}. \quad (1.5.21)$$

Usando a definição (1.5.18) e a expressão (1.5.21) tem-se para $\beta_2 > 1$ o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_2} \|\mathbf{t}_\gamma\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]_{\text{div}}}^{-1/2}(\Gamma_a)} &< \sup_{\substack{\llbracket \mathbf{w} \rrbracket \in \mathbf{H}_{[\cdot]_{\text{div}}}^{1/2}(\Gamma_a) \\ \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \neq 0}} \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_\gamma \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \, d\Gamma}{\|\llbracket \mathbf{w} \rrbracket\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]_{\text{div}}}^{1/2}(\Gamma_a)}} \\ &\leq \beta_1 \sup_{\substack{\mathbf{z} \in \mathcal{K}_p \\ \llbracket \mathbf{w} \rrbracket = \mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} - \mathbf{z}_2|_{\Gamma_a} \\ \mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} \neq \mathbf{z}_2|_{\Gamma_a}}} \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_\gamma \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \, d\Gamma}{\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{W}_d}}. \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

Logo, tem-se que existe $\beta_0 = \frac{1}{\beta_1 \beta_2} > 0$ tal que a forma $b_t(\cdot, \cdot)$ satisfaz a seguinte condição inf-sup

$$\beta_0 \leq \inf_{\substack{\mathbf{t}_\gamma \in \mathbf{H}_{[\cdot]_{\text{div}}}^{-1/2}(\Gamma_a) \\ \mathbf{t}_\gamma \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{z} \in \mathcal{K}_p \\ \llbracket \mathbf{w} \rrbracket = \mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} - \mathbf{z}_2|_{\Gamma_a} \\ \mathbf{z}_1|_{\Gamma_a} \neq \mathbf{z}_2|_{\Gamma_a}}} \frac{\int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_\gamma \cdot \llbracket \mathbf{w} \rrbracket \, d\Gamma}{\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{W}_d} \|\mathbf{t}_\gamma\|_{\mathbf{H}_{[\cdot]_{\text{div}}}^{-1/2}(\Gamma_a)}}. \quad (1.5.23)$$

Portanto, existe uma única combinação $\mathbf{t}_\gamma \in \mathbf{H}_{[\cdot]_{\text{div}}}^{-1/2}(\Gamma_a)$. A existência de $p = (p_1, p_2) \in \mathcal{P}_d$ segue-se do fato da forma $b_p(\cdot, \cdot)$ satisfazer a correspondente condição inf-sup que envolve a existência de $\beta_{q_i} > 0$ tal que

$$\beta_{q_i} \leq \inf_{\substack{q_i \in L^2(\Omega_i) \\ q_i \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{v}_i \in \mathbf{H}^1(\Omega_i) \\ \mathbf{v}_i \neq 0}} \frac{\int_{\Omega_i} q_i \operatorname{div} \mathbf{v}_i \, dx}{\|q_i\|_{L^2(\Omega_i)} \|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)}} \quad i = 1, 2, \quad (1.5.24)$$

ver [153] ou [50]. Assim sendo, o resultado fica provado devido a que o mesmo continua valendo para o par $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{K}_t \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$, só que neste caso existe $\beta_q > 0$ tal que

$$\beta_q \leq \inf_{\substack{q \in L^2(\Omega) \\ q \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}, \quad (1.5.25)$$

e o resultado segue do lema de Babuška [8]. \square

Finalmente resta explicitar as hipóteses cinemáticas visando a redução de uma parte do domínio no Problema 1.14, chegando assim no problema de acoplamento entre modelos de diversa dimensionalidade.

1.5.1 Acoplamento 3D–2D

Para o problema de acoplamento 3D–2D considera-se o domínio de análise segundo mostrado na Figura 1.14.

Assume-se então que é possível realizar a seguinte consideração

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1(\boldsymbol{\xi}) = u_{1x}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_x + u_{1y}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_y, \quad (1.5.26)$$

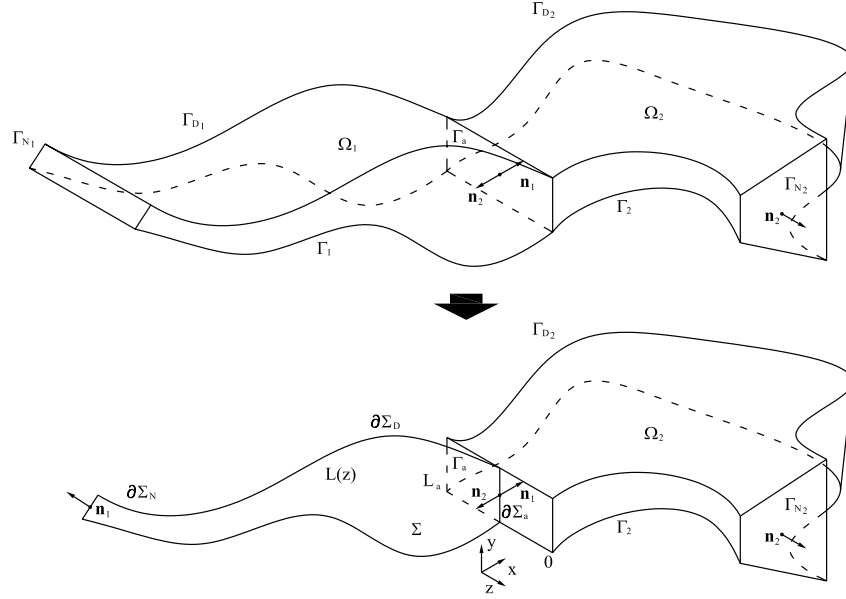


Figura 1.14: Acoplamento de modelos 3D–2D.

onde $\xi = (x, y)$, isto é, a cinemática sobre Ω_1 foi reduzida a duas dimensões sobre o plano Σ (ver Figura 1.14), enquanto que sobre Ω_2 continua-se tendo em consideração uma cinemática completa. Sobre Σ define-se a profundidade do domínio Ω_1 como $L = L(z)$, e é em geral arbitrária. Como conseqüência da hipótese (1.5.26) resulta

$$p_1(\mathbf{x}) = p_1(\xi). \tag{1.5.27}$$

Sem perda de generalidade considera-se que as fronteiras superior e inferior do domínio Σ são de Dirichlet, ao igual que todas as fronteiras, exceto a de saída do domínio Ω_2 (aquela onde está indicada a normal \mathbf{n}_2 na Figura 1.14). Logo, a situação corresponderia à de uma espécie de canal de condução de fluxo com a entrada/saída sobre a esquerda da figura e a saída/entrada sobre a direita.

Sob a mesma óptica das seções anteriores, vê-se que o Problema 1.13 não está bem posto, e por esta razão recorre-se ao Problema 1.14 visando trabalhar com um campo de velocidade que possui uma descontinuidade em Γ_a . Neste caso realiza-se a extensão da formulação da seção anterior para tratar o problema de Navier–Stokes estacionário. De acordo com a cinemática (1.5.26) tem-se que o espaço \mathcal{Q}_1 vem dado por

$$\mathcal{Q}_1 = \mathbf{H}^1(\Sigma), \tag{1.5.28}$$

e logo resulta

$$\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) = \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Sigma_a) \quad \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' = \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Sigma_a). \tag{1.5.29}$$

Como conseqüência, o produto de dualidade fica definido como segue

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \int_{\partial\Sigma_a} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \, d\partial\Sigma. \tag{1.5.30}$$

Agora procura-se determinar a forma do produto de dualidade $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}$. Das idéias apresentadas na Seção 1.1 segue-se que o espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ deve estar definido de tal forma que a decomposição ortogonal (1.1.10) seja válida. Assim, da (1.1.11) resulta que

$$\mathbf{u}_2|_{\Gamma_a} = \mathbf{u}_{21} + \mathbf{u}_{2r}, \tag{1.5.31}$$

onde \mathbf{u}_{21} é da forma de \mathbf{u}_1 de acordo com a (1.5.26), ou seja que

$$\mathbf{u}_{21}(\mathbf{x}) = u_{2x}^o(\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_x + u_{2y}^o(\boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_y. \quad (1.5.32)$$

Logo, resulta que o produto de dualidade se escreve como segue

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_{21} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \int_{\partial\Sigma_a} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{u}_{21} \, d\partial\Sigma, \quad (1.5.33)$$

pois a flutuação \mathbf{u}_{2r} é tal que

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_{2r} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = 0 \quad \forall \mathbf{s}_1 \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'. \quad (1.5.34)$$

Portanto, obtém-se que \mathbf{u}_{2r} é caracterizada como segue

$$\mathbf{\Pi}_z \int_0^{L_a} \mathbf{u}_{2r} \, dz = 0, \quad (1.5.35)$$

onde $\mathbf{\Pi}_z = \mathbf{I} - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z$ é o operador projeção sobre o plano Σ . Segue-se então que \mathbf{u}_{21} satisfaz o seguinte

$$\mathbf{u}_{21} = \frac{1}{L_a} \mathbf{\Pi}_z \int_0^{L_a} \mathbf{u}_2 \, dz. \quad (1.5.36)$$

O espaço \mathcal{Q}_2 expressa-se como segue

$$\mathcal{Q}_2 = \{\mathbf{v}_2 \in \mathbf{H}^1(\Omega_2); \mathbf{v}_2|_{\Gamma_a} = \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{2r}; \mathbf{v}_{21} \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1); \mathbf{v}_{2r} \text{ satisfaz (1.5.35)}\}. \quad (1.5.37)$$

Finalmente, o produto de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)}$ é

$$\langle \mathbf{s}_2, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} = \int_{\Gamma_a} \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \, d\Gamma. \quad (1.5.38)$$

Para reduzir o modelo sobre Ω_1 , as integrais sobre Ω_1 e Γ_{N_1} decompõem-se como segue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (\cdot) \, d\mathbf{x} &= \int_{\Sigma} \int_0^L (\cdot) \, dz d\boldsymbol{\xi}, \\ \int_{\Gamma_{N_1}} (\cdot) \, d\Gamma &= \int_{\partial\Sigma_N} \int_0^L (\cdot) \, dz d\partial\Sigma. \end{aligned} \quad (1.5.39)$$

Sejam então os seguintes esforço e carregamentos generalizados

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{D_1}^L &= \mathbf{\Pi}_z \int_0^L \boldsymbol{\sigma}_{D_1} \, dz, \\ \mathbf{f}^L &= \mathbf{\Pi}_z \int_0^L \mathbf{f} \, dz, \\ \bar{\mathbf{t}}_1^L &= \mathbf{\Pi}_z \int_0^L \bar{\mathbf{t}}_1 \, dz. \end{aligned} \quad (1.5.40)$$

Incorporando a cinemática definida pela (1.5.26) e sua conseqüência (1.5.27), juntamente com a (1.5.30), a (1.5.33) e a (1.5.38), obtém-se o seguinte problema de acoplamento entre um modelo 3D e um modelo 2D:

Problema 1.15 (Mecânica dos fluidos – Acoplamento 3D–2D). *Para algum $\gamma \in [0, 1]$*

encontre $((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2), (p_1, p_2), \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) \in \mathcal{U}_d \times \mathcal{P}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} [\rho_A (\nabla_{\xi} \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 - L p_1 \operatorname{div}_{\xi} \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{D_1}^L \cdot \nabla_{\xi} \mathbf{v}_1] d\xi \\ & \quad + \int_{\Omega_2} [\rho (\nabla \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - p_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{D_2} \cdot \nabla \mathbf{v}_2] dx = \\ & \int_{\partial \Sigma_a} \left(\gamma \mathbf{t}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{\Pi}_z \int_0^{L_a} \mathbf{t}_2 dz \right) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{21}) d\partial \Sigma - (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{v}_{2r} d\Gamma \\ & \quad + \gamma \int_{\partial \Sigma_a} \mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{21}) d\partial \Sigma + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) d\Gamma \\ & \quad + \int_{\Sigma} \mathbf{f}^L \cdot \mathbf{v}_1 d\xi + \int_{\Omega_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 dx + \int_{\partial \Sigma_N} \bar{\mathbf{t}}_1^L \cdot \mathbf{v}_1 d\partial \Sigma + \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 d\Gamma \\ & \quad \forall ((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \quad (1.5.41a) \end{aligned}$$

$$\int_{\Sigma} L q_1 \operatorname{div}_{\xi} \mathbf{u}_1 d\xi + \int_{\Omega_2} q_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 dx = 0 \quad \forall (q_1, q_2) \in \mathcal{P}_d, \quad (1.5.41b)$$

onde ρ_A é a massa específica por unidade de área, e onde $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ e $\mathcal{P}_d = L^2(\Sigma) \times L^2(\Omega_2)$ com

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\mathbf{u}_1 \in \mathcal{Q}_1; \mathbf{u}_1|_{\Gamma_{D_1}} = \bar{\mathbf{u}}_1\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{u}_2 \in \mathcal{Q}_2; \mathbf{u}_2|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\mathbf{u}}_2\}, \end{aligned} \quad (1.5.42)$$

com \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 dados pelas (1.5.28) e (1.5.37) respectivamente, e \mathcal{V}_d é o espaço gerador da variedade linear \mathcal{U}_d . Por último $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'$ é dado pela (1.5.29), enquanto que $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ é o espaço dual de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$, com \mathcal{Q}_2 dado pela (1.5.37). Os demais elementos são definidos segundo o Problema 1.14.

Assim como em todos os casos analisados até aqui, é preciso indicar quais as leis constitutivas correspondentes para o tensor de tensão generalizado $\boldsymbol{\sigma}_{D_1}^L$ em função do campo de velocidade \mathbf{u}_1 , e para $\boldsymbol{\sigma}_{D_2}$ em função de \mathbf{u}_2 .

Para obter as equações de Euler–Lagrange primeiramente escreve-se o tensor $\boldsymbol{\sigma}_{D_2}$ e a pressão p_2 , ambos sobre Γ_a , de forma conveniente como segue

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{D_2|_{\Gamma_a}} &= \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{D_2} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{D_2}, \\ p_2|_{\Gamma_a} &= \bar{p}_2 + \tilde{p}_2, \end{aligned} \quad (1.5.43)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{D_2}$, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{D_2}$, \bar{p}_2 e \tilde{p}_2 são tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_z \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{D_2} \mathbf{n}_1 &= \frac{1}{L_a} \mathbf{\Pi}_z \int_0^{L_a} \boldsymbol{\sigma}_{D_2} \mathbf{n}_1 dz, \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{D_2} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_z &= 0, \\ \mathbf{\Pi}_z \int_0^{L_a} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{D_2} \mathbf{n}_1 dz &= 0, \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{D_2} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_z &= \boldsymbol{\sigma}_{D_2} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_z, \\ \int_0^{L_a} p_2 dz &= L_a \bar{p}_2, \\ \int_0^{L_a} \tilde{p}_2 dz &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.44)$$

Logo, usando a fórmula de Green obtém-se que, no sentido das distribuições, as equações

de Euler–Lagrange correspondentes à formulação variacional (1.5.41) são as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_A(\nabla_{\xi} \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 + L \nabla_{\xi} p_1 - \operatorname{div}_{\xi} \boldsymbol{\sigma}_{D_1}^L = \mathbf{f}^L & \text{em } \Sigma, \\ \rho(\nabla \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 + \nabla p_2 - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{D_2} = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_2, \\ \operatorname{div}_{\xi} \mathbf{u}_1 = 0 & \text{em } \Sigma, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 & \text{em } \Omega_2, \\ \mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1 & \text{sobre } \partial \Sigma_D, \\ \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D_2}, \\ (-L p_1 \mathbf{I}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{D_1}^L) \mathbf{n}_1 = \bar{\mathbf{t}}_1^L & \text{sobre } \partial \Sigma_N, \\ (-p_2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D_2}) \mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{t}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{N_2}, \\ \gamma(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{21}) = 0 & \text{sobre } \partial \Sigma_a, \\ (1 - \gamma)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\ \gamma \mathbf{t}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{\Pi}_z \int_0^{L_a} \mathbf{t}_2 \, dz = (-L_a p_1 \mathbf{I}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{D_1}^L) \mathbf{n}_1 & \text{sobre } \partial \Sigma_a, \\ \gamma \mathbf{t}_1 + (1 - \gamma) \mathbf{\Pi}_z \int_0^{L_a} \mathbf{t}_2 \, dz = L_a (-\bar{p}_2 \mathbf{I}_2 + \mathbf{\Pi}_z \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{D_2}) \mathbf{n}_1 & \text{sobre } \partial \Sigma_a, \\ [(1 - \gamma) \mathbf{t}_2 - (-\bar{p}_2 \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{2D}) \mathbf{n}_1] \perp \mathbf{v}_{2r} \quad \forall \mathbf{v}_{2r} \text{ que satisfaz (1.5.35)} & \text{sobre } \Gamma_a, \end{array} \right. \quad (1.5.45)$$

onde \mathbf{I}_2 é o tensor identidade em duas dimensões. Além disso, a normal \mathbf{n}_1 , quando vista desde Ω_1 , é um vetor de duas componentes, enquanto que possui três componentes (satisfazendo $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_z = 0$) quando vista desde Ω_2 . Assim sendo, as últimas cinco expressões constituem as condições naturais de acoplamento resultantes da formulação variacional (1.5.41). Em particular, escolhendo $\gamma = 1$ obtém-se o seguinte

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{L_a} \mathbf{\Pi}_z \int_0^{L_a} \mathbf{u}_2 \, dz \quad \text{sobre } \partial \Sigma_a, \quad (1.5.46)$$

$$(-L_a p_1 \mathbf{I}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{D_1}^L) \mathbf{n}_1 = L_a (-p_2 \mathbf{I}_2 + \mathbf{\Pi}_z \boldsymbol{\sigma}_{D_2}) \mathbf{n}_1 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.5.47)$$

$$0 = \boldsymbol{\sigma}_{D_2} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_z \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.5.48)$$

$$\mathbf{t}_1 = (-L_a p_1 \mathbf{I}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{D_1}^L) \mathbf{n}_1 \quad \text{sobre } \partial \Sigma_a. \quad (1.5.49)$$

Na obtenção das expressões (1.5.47) e (1.5.48) usou-se o fato de ser

$$(-\bar{p}_2 \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{2D}) \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{v}_{2r} \quad \forall \mathbf{v}_{2r} \text{ que satisfaz (1.5.35)}, \quad (1.5.50)$$

o que permite inferir que $-\bar{p}_2 \mathbf{n}_1 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{2D} \mathbf{n}_1$ é o elemento nulo, resultando $-p_2 \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{D_2} \mathbf{n}_1 = -\bar{p}_2 \mathbf{n}_1 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{D_2} \mathbf{n}_1$. Por outro lado, para $\gamma \neq 1$ as condições de acoplamento resultam

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.5.51)$$

$$(-L_a p_1 \mathbf{I}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{D_1}^L) \mathbf{n}_1 = \mathbf{\Pi}_z \int_0^{L_a} (-p_2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D_2}) \mathbf{n}_1 \, dz \quad \text{sobre } \partial \Sigma_a, \quad (1.5.52)$$

$$\mathbf{t}_2 = (-p_2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D_2}) \mathbf{n}_1 \quad \text{sobre } \Gamma_a. \quad (1.5.53)$$

Neste caso, a expressão (1.5.52) obtém-se fazendo uso das últimas três equações vistas na (1.5.45) em combinação com as decomposições (1.5.43).

Na Tabela 1.7 apresentam-se as interpretações para cada caso em função do estado das quantidades envolvidas. Exatamente os mesmos comentários que aqueles realizados em seções anteriores podem ser feitos com respeito à continuidade/descontinuidade dos campos de interesse. De fato, aqui também há componentes da tração e da velocidade que não são enxergadas em determinadas situações devido a que satisfazem certas condições

de ortogonalidade.

Valor de γ	Problema segregado em Ω_1	Problema segregado em Ω_2	Quantidade contínua	Quantidade descontínua
{1}	Dirichlet	Neumann	Tração (ver (1.5.47)–(1.5.48))	Velocidade (ver (1.5.46))
[0,1)	Neumann	Dirichlet	Velocidade (ver (1.5.51))	Tração (ver (1.5.52))

Tabela 1.7: Interpretações sobre o problema acoplado 3D–2D.

Vale a pena mencionar que ter considerado o termo de convecção das acelerações não altera o tratamento do problema, e por conseguinte as condições de acoplamento resultantes são idênticas ao caso de Stokes. No entanto, outros aspectos devem ser levados em consideração com relação a outras quantidades não explicitadas nesta seção. Uma discussão sobre isto é levada a cabo na Seção 1.6.

1.5.2 Acoplamento 3D–1D

O problema escolhido neste caso resulta mais geral do que o analisado nas seções anteriores. Dois elementos são acrescentados para a análise do escoamento de fluidos incompressíveis usando modelos 1D: (i) o escoamento é transiente e (ii) o domínio de análise sofre deformação. Logo, é possível enquadrar aqui problemas como o encontrado na modelagem do sistema cardiovascular humano, no qual o caráter transiente dos fenômenos é evidente devido à pulsação constante do coração, enquanto que os principais segmentos arteriais são modelados mediante modelos 1D deformáveis. Também considera-se que os fenômenos convectivos não são desprezíveis neste caso. Para realizar a análise, em princípio, assume-se que a deformação do domínio é conhecida e, além disso, que há aderência do fluido ao contorno lateral $\Gamma_L = \Gamma_{L1} \cup \Gamma_{L2}$. Esta condição é representada, por simplicidade na apresentação da redução do modelo, através do correspondente vetor tração que faz com que o equilíbrio em condição de aderência seja atingido. Além disso, a decomposição dos contornos de cada um dos domínios resulta $\Gamma_1 = \Gamma_a \cup \Gamma_{L1} \cup \Gamma_{D1}$ e $\Gamma_2 = \Gamma_a \cup \Gamma_{L2} \cup \Gamma_{D2}$.

Considere o esquema mostrado na Figura 1.15.

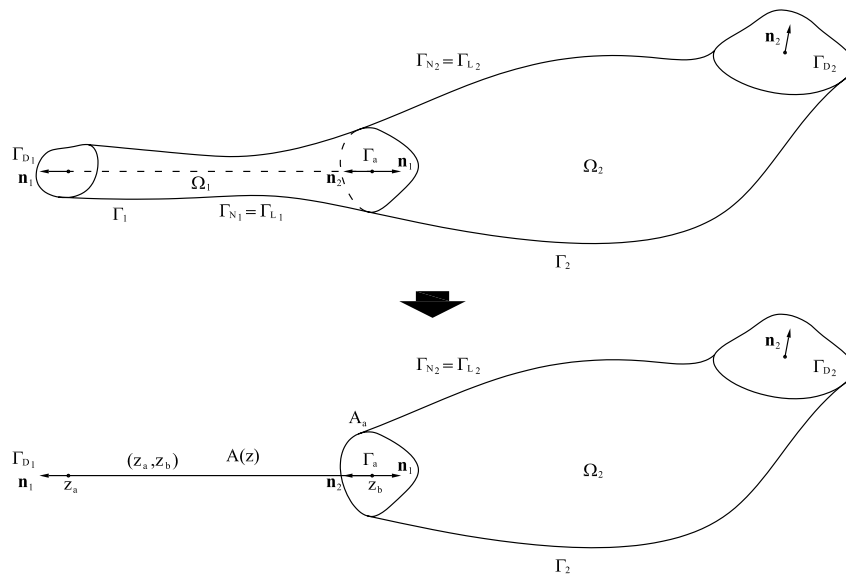


Figura 1.15: Acoplamento de modelos 3D–1D.

Suponha que seja possível realizar a seguinte suposição sobre o campo de velocidade em Ω_1

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = u_{1z}(z)\mathbf{e}_z, \quad (1.5.54)$$

enquanto que sobre Ω_2 o campo de velocidade mantém a descrição 3D. Dado que o domínio se deforma, sobre Γ_{L1} conhece-se como a área transversal A varia com o tempo, enquanto que sobre Γ_{L2} conhece-se a posição da configuração deformada também ao longo do tempo. Segundo mencionado, neste caso conhece-se o vetor tração que dá a condição de aderência sobre Γ_{L2} . Usando a (1.5.54) não é difícil ver que

$$p_1(\mathbf{x}) = p_1(z). \quad (1.5.55)$$

Considerando a hipótese cinemática (1.5.54) resulta que a forma do espaço \mathcal{Q}_1 é

$$\mathcal{Q}_1 = H^1((z_a, z_b)), \quad (1.5.56)$$

e portanto tem-se

$$\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) = \mathbb{R} \quad \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' = \mathbb{R}. \quad (1.5.57)$$

Logo resulta

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = (s_{1z}u_{1z}) \Big|_{z_b}. \quad (1.5.58)$$

Para determinar a forma do produto de dualidade $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}$ observe que, do dito na Seção 1.1, o espaço $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ deve ser tal que a decomposição ortogonal (1.1.10) se mantenha válida. Logo, em função da (1.1.11) resulta

$$\mathbf{u}_{2|\Gamma_a} = \mathbf{u}_{21} + \mathbf{u}_{2r}, \quad (1.5.59)$$

onde \mathbf{u}_{21} é da forma de \mathbf{u}_1 segundo a (1.5.54), isto é

$$\mathbf{u}_{21}(\mathbf{x}) = u_{2z}^o(z)\mathbf{e}_z. \quad (1.5.60)$$

Assim sendo, obtém-se

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_{21} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = (s_{1z}u_{2z}^o) \Big|_{z_b}, \quad (1.5.61)$$

devido a que a flutuação \mathbf{u}_{2r} é tal que

$$\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{u}_{2r} \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)} = 0 \quad \forall \mathbf{s}_1 \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'. \quad (1.5.62)$$

Como resultado disto segue-se que \mathbf{u}_{2r} é tal que

$$\int_{\Gamma_a} \mathbf{u}_{2r} \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma = 0, \quad (1.5.63)$$

com o qual é possível caracterizar \mathbf{u}_{21} , através de u_{2z}^o , como segue

$$u_{2z}^o = \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma, \quad (1.5.64)$$

onde $A_a = |\Gamma_a|$. Por outro lado, o espaço \mathcal{Q}_2 resulta

$$\mathcal{Q}_2 = \{\mathbf{v}_2 \in \mathbf{H}^1(\Omega_2); \mathbf{v}_{2|\Gamma_a} = v_{2z}^o\mathbf{e}_z + \mathbf{v}_{2r}; v_{2z}^o \in \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1); \mathbf{v}_{2r} \text{ satisfaz (1.5.63)}\}. \quad (1.5.65)$$

E analogamente

$$\langle \mathbf{s}_2, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)} = \int_{\Gamma_a} \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \, d\Gamma. \quad (1.5.66)$$

No momento de efetuar a redução do modelo as integrais em Ω_1 são decompostas como segue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (\cdot) \, d\mathbf{x} &= \int_{z_a}^{z_b} \int_{\Gamma} (\cdot) \, d\Gamma \, dz, \\ \int_{\Gamma_{L_1}} (\cdot) \, d\Gamma &= \int_{z_a}^{z_b} \int_{\partial\Gamma} (\cdot) \, d\partial\Gamma \, dz. \end{aligned} \quad (1.5.67)$$

Assim sendo, introduzindo a (1.5.54) e a (1.5.55) na versão generalizada (para o caso de Navier–Stokes transiente) da formulação variacional (1.5.5), levando em conta a (1.5.58), a (1.5.61) e a (1.5.66), e ainda definindo os seguintes esforço e carregamentos generalizados

$$\begin{aligned} \sigma_{D_1}^{\Gamma}{}_{zz} &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_{D_1} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma, \\ f_z^{\Gamma} &= \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma, \\ \bar{t}_{1z}^{\partial\Gamma} &= \int_{\partial\Gamma} \bar{\mathbf{t}}_1 \cdot \mathbf{e}_z \, d\partial\Gamma, \end{aligned} \quad (1.5.68)$$

resulta o seguinte problema de acoplamento entre um modelo 3D e um modelo 1D:

Problema 1.16 (Mecânica dos fluidos – Acoplamento 3D–1D). *Para cada $t \in (0, T)$ e para algum $\gamma \in [0, 1]$ encontre $((u_{1z}, \mathbf{u}_2), (p_1, p_2), t_{1z}, \mathbf{t}_2) \in \mathcal{U}_d \times \mathcal{P}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ tal que*

$$\begin{aligned} &\int_{z_a}^{z_b} \left[A\rho \frac{\partial u_{1z}}{\partial t} v_{1z} + A\rho u_{1z} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} v_{1z} - Ap_1 \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} + \sigma_{D_1}^{\Gamma}{}_{zz} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right] dz \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \left[\rho \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \rho(\nabla \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - p_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{D_2} \cdot \nabla \mathbf{v}_2 \right] d\mathbf{x} = \\ &\quad \left(\gamma t_{1z} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma \right) (v_{1z} - v_{2z}^o) \Big|_{z_b} - (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{v}_{2r} \, d\Gamma \\ &\quad + \gamma s_{1z} (u_{1z} - u_{2z}^o) \Big|_{z_b} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{s}_2 \cdot (u_{1z} \mathbf{e}_z - \mathbf{u}_2) \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{z_a}^{z_b} f_z^{\Gamma} v_{1z} \, dz + \int_{\Omega_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{x} + \int_{z_a}^{z_b} \bar{t}_{1z}^{\partial\Gamma} v_{1z} \, dz + \int_{\Gamma_{N_2}} \bar{\mathbf{t}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \, d\Gamma \\ &\quad \forall ((v_{1z}, \mathbf{v}_2), s_{1z}, \mathbf{s}_2) \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)', \end{aligned} \quad (1.5.69a)$$

$$\int_{z_a}^{z_b} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (A u_{1z}) \right] q_1 \, dz + \int_{\Omega_2} q_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall (q_1, q_2) \in \mathcal{P}_d, \quad (1.5.69b)$$

com $u_{1z}(0, z) = 0$, $\mathbf{u}_2(0, \mathbf{x}) = 0$ por simplicidade, e $\bar{\mathbf{t}}_2 = \bar{\mathbf{t}}_{\Gamma_{L_2}}$. Aqui tem-se considerado que em Ω_1 a deformação do domínio ocorre somente na direção perpendicular à direção do escoamento \mathbf{e}_z . Além disso é $\mathcal{U}_d = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ e $\mathcal{P}_d = L^2((z_a, z_b)) \times L^2(\Omega_2)$ com

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{u_{1z} \in \mathcal{Q}_1; u_{1z}|_{\Gamma_{D_1}} = \bar{u}_{1z}\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{u}_2 \in \mathcal{Q}_2; \mathbf{u}_2|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\mathbf{u}}_2\}, \end{aligned} \quad (1.5.70)$$

onde $\Gamma_{D_1} = \{z_a\}$, e com \mathcal{Q}_1 e \mathcal{Q}_2 dados por (1.5.56) e (1.5.65) respectivamente, enquanto

que \mathcal{V}_d é o espaço gerador da variedade linear \mathcal{U}_d . Também $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'$ é dado pela (1.5.57), e $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ é o espaço dual de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ com \mathcal{Q}_2 dado pela (1.5.65). Por outra parte, lembre-se que a área A deve ser fornecida em (z_a, z_b) ao longo do tempo assim como o vetor tração $\bar{\mathbf{t}}_2$, o qual deve ser aplicado sobre a configuração deformada do domínio Ω_2 (que também deve ser fornecida). Finalmente, por simples inspeção do princípio variacional que governa o problema sem hipóteses cinemáticas, pode-se ver facilmente o seguinte

$$\bar{\mathbf{t}}_{1z}^{\partial\Gamma} = p_1 \frac{\partial A}{\partial z} + \int_{\partial\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_{D1} \cdot (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{n}_w) d\partial\Gamma = p_1 \frac{\partial A}{\partial z} + t_D^w, \quad (1.5.71)$$

onde definiu-se o seguinte esforço generalizado

$$t_D^w = \int_{\partial\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_{D1} \mathbf{n}_w \cdot \mathbf{e}_z d\partial\Gamma, \quad (1.5.72)$$

com \mathbf{n}_w a normal exterior ao contorno lateral Γ_{L1} sobre a curva $\partial\Gamma$. Os demais elementos estão definidos no Problema 1.14.

Algumas observações devem ser feitas com respeito a este problema, e em função da possibilidade do domínio sofrer deformação. Em primeiro lugar, as derivadas temporais na expressão (1.5.69a) são avaliadas de forma totalmente Euleriana. Objetivando formular o problema em função de um outro sistema de referência, introduz-se usualmente a formulação Arbitrariamente Lagrangiana–Euleriana (ALE) [75]. Com esta descrição, a derivada total de um campo de velocidade \mathbf{u} é

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{Y}} + (\nabla\mathbf{u})(\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (1.5.73)$$

onde \mathbf{w} é a velocidade do marco de referência com respeito ao qual estão definidas as coordenadas \mathbf{Y} . Logo, empregando a descrição ALE resulta

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}_1}{Dt} &= \left(\frac{\partial u_{1z}}{\partial t} + u_{1z} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z = \left(\frac{\partial u_{1z}}{\partial t} \Big|_z + (u_{1z} - w_{1z}) \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z, \\ \frac{D\mathbf{u}_2}{Dt} &= \frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial t} + (\nabla\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial t} \Big|_{\mathbf{Y}} + (\nabla\mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_2), \end{aligned} \quad (1.5.74)$$

onde \mathbf{w}_2 é a velocidade de deformação do domínio Ω_2 , w_{1z} é a componente na direção \mathbf{e}_z da velocidade de deformação do domínio Ω_1 , isto é $w_{1z} = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{e}_z$, e z indica a coordenada a respeito da qual se deve considerar a derivada temporal (que é a coordenada axial do modelo). Entretanto, assumindo que o movimento do contorno lateral é na direção ortogonal ao campo de velocidade \mathbf{u}_1 então obtém-se que

$$\frac{D\mathbf{u}_1}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}_1}{\partial t} + (\nabla\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \left(\frac{\partial u_{1z}}{\partial t} + u_{1z} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z = \left(\frac{\partial u_{1z}}{\partial t} \Big|_z + u_{1z} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z. \quad (1.5.75)$$

Este tema aborda-se novamente no Capítulo 2 ao utilizar este tipo de modelo em uma aplicação específica. Para uma discussão detalhada sobre a utilização da formulação ALE tanto nas suas formas conservativa e não conservativa veja [125].

Por outro lado, a (1.5.69b) pôde ser escrita na forma apresentada ao ter reescrito a

conservação da massa na seguinte forma conservativa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \rho q_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \, d\mathbf{x} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_1} \rho q_1 \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\Omega_1} \rho (\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1) \cdot \nabla q_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \rho (\mathbf{u}_1 - \mathbf{w}_1) \cdot \mathbf{n}_1 q_1 \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (1.5.76)$$

Logo, introduzindo aqui a (1.5.54) e a (1.5.55), utilizando a fórmula de Green, e sabendo que a deformação é perpendicular à direção \mathbf{e}_z resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \rho q_1 \operatorname{div} \mathbf{u}_1 \, d\mathbf{x} &= \int_{z_a}^{z_b} \rho q_1 \frac{\partial A}{\partial t} \, dz - \int_{z_a}^{z_b} \rho A (u_{1z} - w_{1z}) \frac{\partial q_1}{\partial z} \, dz \\ &\quad + \rho A (u_{1z} - w_{1z}) q_1 \Big|_{z_a} - \rho A (u_{1z} - w_{1z}) q_1 \Big|_{z_a} + \int_{\Gamma_{L_1}} \rho (u_{1z} \mathbf{e}_z - \mathbf{w}_1) \cdot \mathbf{n}_1 q_1 \, d\Gamma = \\ &\quad \int_{z_a}^{z_b} \rho \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (A (u_{1z} - w_{1z})) \right] q_1 \, dz = \int_{z_a}^{z_b} \rho \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (A u_{1z}) \right] q_1 \, dz. \end{aligned} \quad (1.5.77)$$

Antes de apresentar as equações de Euler–Lagrange vale a pena mencionar que o problema fica fechado ao fornecer as leis constitutivas que estabelecem as formas funcionais para $\sigma_{D_1}^\Gamma$, t_D^w e σ_{D_2} em função dos campos de velocidade u_{1z} e \mathbf{u}_2 correspondentemente.

Como feito anteriormente, convém decompor o tensor σ_{D_2} e a pressão p_2 sobre Γ_a como segue

$$\begin{aligned} \sigma_{D_2|_{\Gamma_a}} &= \bar{\sigma}_{D_2zz} (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + \tilde{\sigma}_{D_2}, \\ p_{2|_{\Gamma_a}} &= \bar{p}_2 + \tilde{p}_2, \end{aligned} \quad (1.5.78)$$

onde $\bar{\sigma}_{D_2zz}$, $\tilde{\sigma}_{D_2}$, \bar{p}_2 e \tilde{p}_2 são tais que

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{D_2zz} &= \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} \sigma_{D_2} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma, \\ \int_{\Gamma_a} \tilde{\sigma}_{D_2} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma &= 0, \\ \bar{p}_2 &= \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} p_2 \, d\Gamma, \\ \int_{\Gamma_a} \tilde{p}_2 \, d\Gamma &= 0. \end{aligned} \quad (1.5.79)$$

Logo, utilizando a fórmula de Green, segue-se que, no sentido das distribuições, as equações de Euler–Lagrange correspondentes à formulação variacional (1.5.69) escritas em forma

totalmente Euleriana são as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \rho A \frac{\partial u_{1z}}{\partial t} + \rho A u_{1z} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} + A \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{D1zz}^\Gamma) - t_D^w = f_z^\Gamma & \text{em } (z_a, z_b), \\
 \rho \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 + \nabla p_2 - \text{div } \boldsymbol{\sigma}_{D2} = \mathbf{f} & \text{em } \Omega_2, \\
 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (A u_{1z}) = 0 & \text{em } (z_a, z_b), \\
 \text{div } \mathbf{u}_2 = 0 & \text{em } \Omega_2, \\
 u_{1z} = \bar{u}_{1z} & \text{em } \{z_a\}, \\
 \mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 & \text{sobre } \Gamma_{D2}, \\
 \bar{\mathbf{t}}_2 = (-p_2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D2}) \mathbf{n}_2 & \text{sobre } \Gamma_{N2}, \\
 \gamma (u_{1z} - u_{2z}^o) = 0 & \text{em } \{z_b\}, \\
 (1 - \gamma) (u_{1z} \mathbf{e}_z - \mathbf{u}_2) = 0 & \text{sobre } \Gamma_a, \\
 \gamma t_{1z} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma = -A_a p_1 + \sigma_{D1zz}^\Gamma & \text{em } \{z_b\}, \\
 \gamma t_{1z} + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_a} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma = A_a (-\bar{p}_2 + \bar{\sigma}_{D2zz}) & \text{em } \{z_b\}, \\
 [(1 - \gamma) \mathbf{t}_2 - (-\bar{p}_2 \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{D2}) \mathbf{e}_z] \perp \mathbf{v}_{2r} \quad \forall \mathbf{v}_{2r} \text{ que satisfaz (1.5.63)} & \text{sobre } \Gamma_a.
 \end{array} \right. \quad (1.5.80)$$

Aqui, as últimas cinco expressões são as condições naturais de acoplamento que decorrem da formulação (1.5.69). Em particular, escolhendo $\gamma = 1$ resulta

$$u_{1z} = \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma \quad \text{em } \{z_b\}, \quad (1.5.81)$$

$$(-A_a p_1 + \sigma_{D1zz}^\Gamma) \mathbf{e}_z = A_a (-p_2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D2}) \mathbf{e}_z \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.5.82)$$

$$t_{1z} = -A_a p_1 + \sigma_{D1zz}^\Gamma \quad \text{em } \{z_b\}. \quad (1.5.83)$$

Para chegar a obter a expressão (1.5.82) foi usado o fato de ser

$$-\bar{p}_2 \mathbf{e}_z + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{D2} \mathbf{e}_z \perp \mathbf{v}_{2r} \quad \forall \mathbf{v}_{2r} \text{ que satisfaz (1.5.63)}, \quad (1.5.84)$$

que implica que $-\bar{p}_2 \mathbf{e}_z + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{D2} \mathbf{e}_z$ é o elemento nulo e portanto tem-se $-p_2 \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\sigma}_{D2} \mathbf{e}_z = -\bar{p}_2 \mathbf{e}_z + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{D2zz} \mathbf{e}_z$. Por outro lado, ao tomar $\gamma \neq 1$ obtém-se

$$u_{1z} \mathbf{e}_z = \mathbf{u}_2 \quad \text{sobre } \Gamma_a, \quad (1.5.85)$$

$$-A_a p_1 + \sigma_{D1zz}^\Gamma = \int_{\Gamma_a} (-p_2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D2}) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \, d\Gamma \quad \text{em } \{z_b\}, \quad (1.5.86)$$

$$\mathbf{t}_2 = (-p_2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{D2}) \mathbf{e}_z \quad \text{sobre } \Gamma_a. \quad (1.5.87)$$

Neste caso a (1.5.87) segue de combinar as últimas três equações de Euler–Lagrange vistas na (1.5.80) e as decomposições apresentadas em (1.5.78).

Neste problema, para $\gamma = 1$ a velocidade é de fato um campo descontínuo posto que a flutuação \mathbf{u}_{2r} não está impedida de assumir um valor arbitrário que satisfaça a (1.5.63). Isto é posto que, como nas seções anteriores, esta componente não produz potência em dualidade com os carregamentos admissíveis que provêm do domínio Ω_1 sobre Γ_a . Entretanto, para $\gamma = 1$ a tração é um campo contínuo sobre Γ_a . Contrariamente, para $\gamma \neq 1$ o campo de velocidade é contínuo, enquanto que a tração vira um campo descontínuo devido a que há uma componente da mesma que não é enxergada pelo problema sobre o domínio Ω_1 .

A Tabela 1.8 põe em evidência as características da formulação em função do valor de γ escolhido, apresentando o estado das quantidades envolvidas no problema. Mais uma

vez, nesta tabela são analisadas as situações nas quais o problema se considera de alguma forma segregado em dois sub-problemas.

Valor de γ	Problema segregado em Ω_1	Problema segregado em Ω_2	Quantidade contínua	Quantidade descontínua
{1}	Dirichlet	Neumann	Tração (ver (1.5.82))	Velocidade (ver (1.5.81))
[0,1)	Neumann	Dirichlet	Velocidade (ver (1.5.85))	Tração (ver (1.5.86))

Tabela 1.8: Interpretações sobre o problema acoplado 3D–1D.

Note que o vetor tração $\bar{\mathbf{t}}_2$, que é tal que o equilíbrio é alcançado mantendo aderência na parede Γ_{L2} , poderia ser efetivamente substituído pela própria condição de aderência $\mathbf{u}_2|_{\Gamma_{L2}} = \bar{\mathbf{u}}_2|_{\Gamma_{L2}}$, a qual deveria ser fornecida na configuração deformada.

1.6 Comentários finais

As idéias desenvolvidas neste capítulo permitem lidar com o acoplamento de modelos que possuem cinemáticas diferentes, e portanto incompatíveis. Em particular, estes conceitos são apropriados para tratar o acoplamento de modelos de diversa dimensionalidade de forma sistemática e consistente, a partir de hipóteses cinemáticas adequadas segundo requerido pela modelagem. Isto é possível devido a que a redução da dimensão em uma porção de um domínio de análise é entendida como a coexistência de cinemáticas não compatíveis sobre a fronteira de acoplamento.

Além dos temas expostos, algumas outras observações podem ser acrescentadas. Para começar note que outras possibilidades poderiam ter sido consideradas, como serem os casos de acoplamento 2D–1D para os problemas apresentados nas Seções 1.2 e 1.5. Estas situações são casos particulares e podem ser derivados sem problema utilizando as idéias apresentadas aqui. Inclusive, no problema de transferência de calor poderiam ter sido incluídos os fenômenos de convecção e reação. Entretanto, o seu desenvolvimento não apresenta dificuldades e ainda resulta em um esquema de acoplamento idêntico ao obtido na Seção 1.2. Por outro lado, o fato do problema ser transiente, estacionário, ou inclusive não linear não afeta às condições de acoplamento. Com efeito, não resulta difícil estender os resultados enunciados nas Proposições 1.1, 1.3 e 1.4 para os respectivos casos transientes. Estas condições também não dependem em absoluto do comportamento constitutivo do material em questão, o qual pode ser diferente a ambos os lados do contorno artificial Γ_a . Isto permite lidar com situações interessantes como a que será apresentada no Capítulo 2 ao modelar o escoamento do sangue considerando-o não Newtoniano no domínio Ω_2 e Newtoniano em Ω_1 . No entanto, cabe mencionar que as leis constitutivas, sobretudo nos casos vistos na Seção 1.3, devem possuir certas características relacionadas com o que se entende como restrições internas do material, mas isto não escapa à teoria constitutiva clássica e por isto é omitido aqui. Por último, é importante dizer que tais condições de acoplamento também não dependem das possíveis não linearidades geométricas no caso de grandes deslocamentos e/ou grandes deformações no problema de acoplamento de modelos de sólidos.

Com o intuito de revisitar alguns conceitos importantes que se têm desprendido ao longo das seções apresentadas, analisa-se rapidamente o que há por trás das diferentes situações estabelecidas por γ . Primeiro cabe dizer que, afinal de contas, o papel que o valor de γ joga está exclusivamente associado ao sentido no qual se pretende que as discontinuidades introduzidas afetem o problema de acordo com o estabelecido pela (1.1.13), e estas são considerações de índole mecânica (ou física), segundo dito na

Seção 1.1. O importante é ter conhecimento de como o modelo mecânico contínuo é alterado ao mudar o valor de γ . Com efeito, para $\gamma = 1$ somente os termos da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)}$ estão presentes, e portanto os campos primais satisfazem condições de continuidade no sentido dado pela cinemática provida a Ω_1 . Neste caso, a flutuação do campo que provém de Ω_2 é livre de adqüirir qualquer valor sempre que for ortogonal aos esforços compatíveis com a cinemática do domínio Ω_1 , os quais estão em $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1)'$, isto é, sempre que estiver em \mathcal{W} (ver (1.1.10)). De maneira contrária, quando $\gamma \neq 1$ os termos da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)' \times \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)}$ são dominantes. Logo, os campos primais satisfazem neste caso condições de continuidade no sentido dado pela cinemática completa que possui Ω_2 (nos problemas aqui tratados Ω_2 sempre possuiu a cinemática completa, porém nada impediria que isto não fosse assim). Deste modo, a flutuação do campo que provém de Ω_2 é forçada a ser nula, posto que este é o único elemento em \mathcal{W} que é ortogonal aos esforços compatíveis com a cinemática completa do domínio Ω_2 , os quais estão em $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$. Disto infere-se para $\gamma \neq 1$ a continuidade do campo primal de forma estrita no sentido de $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$.

Por outro lado, a realização de hipóteses cinemáticas sobre uma parte do domínio envolvendo certa regularidade acaba afetando à regularidade da cinemática sobre a parte complementar. Isto é assim a fim de ter o problema bem posto no sentido e poder efetuar a paridade requerida pelos produtos de dualidade que surgem na interface de acoplamento. Vê-se que o espaço dos traços $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ depende fortemente da forma que adotam as funções sobre o domínio no qual se consideram hipóteses cinemáticas. Com efeito, a expressão (1.1.10) implica que a inclusão $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_1) \subset \mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)$ é estrita, provocando que as funções do domínio Ω_2 tenham uma regularidade adicional. Além disso, como corolário obtém-se que o espaço dual $\mathcal{T}_{\Gamma_a}(\mathcal{Q}_2)'$ é maior à medida que a regularidade exigida sobre as funções em Ω_1 aumenta, o que é conseqüência direta da definição de par de dualidade. Este fato ficou em evidência no caso de acoplamento de sólidos 3D com cascas e com vigas. Particularmente, estas situações são mais ricas do ponto de vista teórico já que envolvem estas conseqüências que não seriam percebidas, por exemplo, nos problemas de transferência de calor nem do escoamento de fluidos aqui tratados.

Uma questão importante é o que acontece com outras quantidades físicas, que poderiam ser de interesse no problema, ao introduzir as descontinuidades por meio da realização de hipóteses sobre as cinemáticas que governam os fenômenos a ambos os lados de Γ_a . Só para citar um exemplo, considere o problema do escoamento de fluidos. Nestes casos uma quantidade de interesse é o fluxo da quantidade de movimento que, para uma superfície arbitrária Γ com normal exterior \mathbf{n} , é dado por

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 d\Gamma. \quad (1.6.1)$$

Seja o Problema 1.16 com $\gamma = 1$. O fluxo na quantidade de movimento através da fronteira de acoplamento Γ_a vem dado por

$$\begin{aligned} \Phi^{1D} &= \frac{1}{2} \rho (u_{1z})^2 A_a, \\ \Phi^{3D} &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_a} \rho (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_1)^2 d\Gamma, \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

quando vista desde os domínios 1D e 3D, respectivamente. É evidente que esta quantidade física não se conserva no problema acoplado com $\gamma = 1$, o que, por outro lado, não acaba sendo tão surpreendente. De fato, ao introduzir uma hipótese como a (1.5.54) o que se está fazendo é violentando a continuidade do campo de velocidade neste caso de $\gamma = 1$. Logo, não se pode esperar que se conservem as quantidades associadas com tal campo. Desta maneira, é comum observar na literatura (ver [76, 135]) que nestas situações sejam

incorporados coeficientes *ad hoc* do tipo

$$\alpha = \frac{\Phi^{3D}}{\Phi^{1D}} = \frac{1}{A_a} \int_{\Gamma_a} \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_1}{u_{1z}} \right)^2 d\Gamma, \quad (1.6.3)$$

nos termos relativos às acelerações convectivas com o intuito de forçar a continuidade desta quantidade.

Passando a outro âmbito, as aplicações que se podem mencionar dentro da área de modelos acoplados são bem variadas. Em geral pode-se dizer que este tipo de modelos atende com sucesso àquelas situações nas quais resulta de um alto custo computacional abordar o problema real utilizando modelos tridimensionais completos. Desta forma, a decisão passa a ser reduzir o domínio de análise. Entretanto, em geral ocorre que esta redução introduz fronteiras artificiais dentro do domínio, fronteiras nas quais as condições de contorno não são conhecidas. Assim sendo, e dado que o mais provável é que se conheçam as condições de contorno em um lugar mais distante (até o qual não se pode estender o modelo tridimensional devido ao elevado custo computacional), podem ser utilizados os modelos reduzidos para *levar* (no sentido de *transportar a informação*) tal condição de contorno remota até a fronteira artificial do modelo mais detalhado. Este caso ocorre com frequência em hemodinâmica, onde o isolamento de um domínio 3D para análise de escoamentos complexos introduz as mencionadas fronteiras artificiais com condições de contorno desconhecidas, enquanto que do que se tem informação é, por exemplo, da curva de ejeção cardíaca e das condições de contorno nos leitos periféricos (sendo estas as condições de contorno distantes).

O contexto teórico no qual se estabeleceu a teoria do acoplamento de modelos de diversa dimensionalidade é original e constitui parte da contribuição desta tese. Poucos trabalhos têm-se aprofundado nesta problemática, e somente para alguns problemas particulares. Em [41, 42] o problema é abordado *ad hoc*, introduzindo equações de acoplamento ao nível do problema diferencial baseadas na continuidade de quantidades, algo que *a priori* resulta *razoável* formular, e para o qual é preciso um mínimo de conhecimento sobre a mecânica do problema. No caso do problema de fluidos este conhecimento não resulta excessivo. Entretanto, segundo viu-se na Seção 1.3, às vezes o problema pode ser mais complicado, e pode-se incorrer em erros devido a um esquema de acoplamento mal formulado. Eis uma das principais motivações para a apresentação do marco teórico formulado neste capítulo.

Com relação ao estudo de existência e unicidade das soluções dos problemas, viu-se que as Proposições 1.1, 1.3 e 1.4 respondem a esta pergunta no caso geral sem ter introduzido hipóteses sobre as respectivas cinemáticas. Logo, os resultados enunciados constituem as bases que permitem afirmar que os problemas de acoplamento estão bem postos, ou seja, estão corretamente formulados no sentido do fechamento do problema. Convém esclarecer isto já que as condições de acoplamento são incógnitas que ficam inseridas dentro do próprio problema. Este ponto vem a colação do que se menciona em [42, 161] e da forma em que são entendidos os problemas de acoplamento nestes trabalhos. Nas citadas referências o estudo é focado sobre um problema 3D formulado com o que se denominam condições de contorno deficitárias, ou seja, condições de contorno baseadas em quantidades médias (ver também [65] para uma primeira exposição do problema). Somente para citar um exemplo simples considere o problema de calor 3D e suponha que somente conhece-se sobre uma parte da fronteira o valor médio da temperatura. Resulta óbvio então que o problema está mal posto. Para evitar este tipo de inconvenientes utiliza-se a teoria dos multiplicadores de Lagrange para impor a restrição sobre o valor médio da temperatura. Desta maneira obtém-se uma formulação para o problema com condições de contorno deficitárias. Uma vez formulado este problema com condições deficitárias a teoria é formalmente estendida ao problema acoplado, onde agora o valor médio provém

de resolver um modelo reduzido 1D. Resulta evidente então a grande diferença existente entre as perspectivas utilizadas e na forma de entender o problema. De fato, observe que as hipóteses cinemáticas realizadas poderiam ser bem mais gerais. Tome por exemplo a (1.5.54) e considere que em vez de tal cinemática utiliza-se a seguinte

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = u_{1z}(z)\mathbf{e}_z + u_{1r}(z)\mathbf{e}_r. \quad (1.6.4)$$

Com esta simples consideração o problema sobre Ω_1 muda radicalmente. Com efeito, já não é possível afirmar que $p_1 = p_1(z)$, e integrar na área objetivando reduzir o modelo resulta uma tarefa mais complexa. Da mesma forma, qualquer outra cinemática pode ser considerada sempre que tal hipótese estiver bem fundada. Outro exemplo é assumir que o perfil de velocidade não é plano segundo viu-se, mas que possui uma forma determinada, por exemplo um perfil caracterizado por uma função h como se mostra na seguinte expressão

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = h(x, y)u_{1z}(z)\mathbf{e}_z. \quad (1.6.5)$$

Neste caso h é uma função somente das coordenadas que estão sobre os planos transversais, e que em particular pode ser escolhida, sem perda de generalidade, tal que $\int_{\Gamma} h \, d\Gamma = 1$. A formulação agora envolve coeficientes concernentes a h , suas derivadas e integrais. Desta forma, o balanço da quantidade de movimento (neste caso de problema de fluidos) vê-se modificado notavelmente. Em fim, o que deve ser salientado com esta forma de trabalho é a versatilidade para lidar com situações que às vezes fogem dos casos usualmente encontrados na literatura.

Uma outra aplicação das idéias trabalhadas neste capítulo é o acoplamento de modelos onde a incompatibilidade nas cinemáticas surge somente a nível do problema discreto, e decorre das discretizações realizadas sobre cada partição de Ω . Considere, por simplicidade, o Problema 1.5 (princípio variacional estendido para transferência de calor). Realizando as discretizações pertinentes sobre cada domínio Ω_1 e Ω_2 , no caso mais geral tem-se que as malhas não precisam ser compatíveis sobre Γ_a , seja porque as posições dos nós não coincidem ou porque o grau de interpolação é diferente a ambos os lados de Γ_a . Nestes casos, o Problema 1.5 fornece o contexto adequado e uma forma sistemática para a abordagem desta classe de problemas, permitindo ainda determinar esquemas de transferência de informação em sistemas segregados por sub-domínios.

Resta mencionar que assim como em todas as seções vistas trabalhou-se com o princípio variacional primal, é possível formular o problema do acoplamento de modelos de diversa dimensionalidade através da formulação dual correspondente. Desde o momento em que é possível formular um princípio variacional estendido na forma primal, resulta factível formulá-lo em termos das variáveis duais. Este constitui em todo caso uma porta aberta para trabalhos futuros.

Viu-se neste capítulo que os princípios variacionais estendidos são capazes de acomodar as descontinuidades que surgem nos problemas sob as circunstâncias expostas. Um outro contexto no qual é possível encontrar este tipo de fenômenos (descontinuidades) é o dos métodos numéricos de tipo Galerkin descontínuos [3]. Ali, a solução obtida de forma aproximada carece das condições de regularidade exigidas no problema original, havendo saltos sobre os contornos dos elementos. Entretanto, veja que a natureza das descontinuidades é completamente diferente. Enquanto nos métodos de Galerkin descontínuos as mesmas são induzidas por meio de uma aproximação numérica determinada, relaxando a continuidade para depois recuperá-la em um sentido fraco, nos modelos cinematicamente incompatíveis tais descontinuidades são originadas na concepção do próprio modelo mecânico e portanto fazem parte da física do problema. Esta ressalva é importante a fim de esclarecer as diferenças que há entre estes métodos clássicos de aproximação numérica denominados Galerkin descontínuos e os modelos cinematicamente incompatíveis construídos

no nível do problema contínuo. Em todo caso, os métodos de Galerkin descontínuos podem ser caracterizados como modelos que possuem cinemáticas incompatíveis a nível discreto, onde cada elemento dentro da partição do domínio pode ter uma cinemática que é incompatível com a de cada um de seus vizinhos. Logo, esta metodologia fica compreendida dentro dos princípios variacionais estendidos apresentados neste capítulo.

Para encerrar o capítulo, e a colação do que será visto no Capítulo 5, os modelos acoplados vistos aqui podem ser entendidos dentro do contexto dos modelos multiescala. Resulta mais que evidente que os modelos de diversa dimensionalidade são capazes de atingir diferentes níveis de detalhe. Assim, modelos acoplados 3D–1D podem ser usados para modelar, com diferente grau de detalhe, diversas partes de um mesmo sistema. Neste caso, o modelo 3D dá informações a uma escala menor do que o modelo 1D é capaz de dar, o qual representaria a escala maior do problema. Obviamente, o tamanho da escala aqui depende do tamanho dos modelos 3D e 1D respectivamente. Por exemplo, e como será visto no Capítulo 2, no sistema cardiovascular o modelo 1D dá informações a uma escala de metros enquanto que a escala de domínio do modelo 3D é dos centímetros, ou inclusive milímetros.

Contribuições do capítulo

Dado que os conceitos desenvolvidos e as idéias apresentadas neste capítulo são de caráter geral e original, todo o conteúdo do capítulo é contribuição desta tese. Tal contribuição está, como já explicado, na formalização mecânica e matemática do problema de acoplamento de modelos com cinemáticas que *a priori* não são compatíveis, situação que abarca os modelos de diferente dimensão. Assim, é possível fornecer princípios variacionais que regem o conceito de *equilíbrio* em diversos âmbitos da física quando se consideram incompatibilidades por causa de alguma hipótese realizada em uma parte do domínio de análise. A forma sistemática de trabalhar facilita o entendimento dos conceitos presentes no acoplamento de modelos multidimensionais, assim como também a abordagem de novas questões. Os conceitos desenvolvidos neste capítulo constituem a base teórica das publicações [18, 20, 21, 155], as quais são repetidas aqui por conveniência:

- P.J. Blanco, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *A variational approach for coupling kinematically incompatible structural models*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (197) 1577–1602, 2008.
- P.J. Blanco, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *A unified variational approach for coupling 3D–1D models and its blood flow applications*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (196) 4391–4410, 2007.
- S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere e R.A. Feijóo, *Multidimensional modelling for the carotid artery blood flow*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (195) 4002–4017, 2006.
- P.J. Blanco e R.A. Feijóo, *An extended variational principle for coupling shell/plate models and 3D solid models*, Anais do WCCM 2008. Veneza, Itália, 2008.

Capítulo 2

Modelagem e simulação computacional do sistema cardiovascular humano

Introdução

A modelagem e simulação dos fenômenos que ocorrem dentro do corpo humano vem sendo matéria de estudo exaustivo nos últimos anos. A modelagem do sistema cardiovascular humano tem-se desenvolvido, desde algumas décadas atrás, com crescente sucesso e campo de aplicação. O cada vez maior interesse no desenvolvimento de modelos aplicados neste campo de pesquisa jaz no papel relevante que têm as doenças cardiovasculares na sociedade atual. Só por citar alguns fatos, as doenças cardiovasculares são a primeira causa de morte no mundo ocidental. Nos Estados Unidos superam, quando somadas, às seis doenças que seguem em maior importância [80]. Estes fatores têm feito com que muitos dos esforços a nível mundial estivessem fortemente orientados ao estudo de modelos assim como à posterior simulação computacional do sistema cardiovascular [31, 32, 134].

Em particular, o sistema arterial possui a função vital de transportar de forma eficiente o sangue a todos os órgãos e músculos do corpo humano, levando nutrientes e removendo produtos catabólicos. A modelagem e simulação em hemodinâmica tem sido amplamente utilizada objetivando adquirir um maior entendimento dos aspectos funcionais, terapêuticos e de diagnóstico relacionados ao fluxo sanguíneo. Por um lado, a modelagem em hemodinâmica a nível do sistema arterial completo emprega representações tubulares para modelar as principais artérias do corpo humano segundo estruturas de árvore [6, 72, 126, 141, 143, 146]. Por outro lado, modelos localizados têm sido utilizados para conhecer com maior detalhe a estrutura local do fluxo sanguíneo em distritos arteriais de interesse [25, 131, 135, 138, 151].

As equações que regem os fenômenos fluidodinâmicos dentro do sistema arterial são as equações da mecânica dos fluidos. Assim sendo, introduzindo simplificações nas equações completas de Navier–Stokes foi que se desenvolveram modelos de parâmetros concentrados e distribuídos, em função da natureza das hipóteses empregadas. Estes modelos estão governados por equações diferenciais em derivadas ordinárias e parciais respectivamente. Devido ao seu baixo custo computacional e aos resultados adequados para a realização de diversos estudos, estes modelos continuam sendo usados [6, 76, 134, 141, 146]. Ambos os modelos são de caráter 0D e 1D respectivamente, e portanto desconsideram aspectos de relevância na análise detalhada do escoamento do sangue em singularidades geométricas tais como bifurcações, curvas acentuadas, aneurismas e estenoses, dentre outras. Contudo, estes modelos reduzidos têm mostrado interessantes resultados e propriedades mais que atraentes na representação da dinâmica do sistema cardiovascular

quando analisadas as quantidades médias de pressão e fluxo. Este tipo de modelos permite então reproduzir com aceitável grau de realismo a conformação do pulso cardíaco nos principais segmentos arteriais. Ou seja, consegue-se que as curvas de pressão e fluxo sejam próximas às medições reais tomadas de pacientes. Entretanto, a sensibilidade dos modelos simplificados, por exemplo, às condições de contorno (das quais ainda não se tem dito nada) é notável, e uma adequada calibração de um modelo do sistema arterial resulta indispensável. Por outra parte, o fato da estrutura do fluxo estar associada à gênese e desenvolvimento de certas doenças faz com que os modelos detalhados joguem um papel fundamental na modelagem e simulações em hemodinâmica [29, 47]. Para levar a cabo este estudo local da estrutura do fluxo precisa-se de modelos que considerem toda a cinemática do problema, e para isto é que os modelos bidimensionais e, principalmente, tridimensionais aparecem como os mais indicados. Entretanto, modelos desta classe têm complicações associadas à capacidade de cálculo na hora de realizar as simulações, devido ao alto número de graus de liberdade, assim como à não linearidade do problema e o caráter transiente dos fenômenos.

Para atender às necessidades acima comentadas, aparecem em cena os modelos acoplados 3D–1D, e é aqui que a teoria desenvolvida no Capítulo 1 joga um papel essencial. Estes modelos são capazes de abranger a resposta do sistema completo, a fim de levar em conta as inter-relações entre os diversos modelos componentes, o qual resulta de vital importância para efetuar uma correta modelagem dos fenômenos que se sucedem no sistema cardiovascular. Isto está baseado na complexa interação que existe entre ambas as porções do modelo, a 1D e a 3D. Com efeito, qualquer mudança ou alteração nas condições do problema sobre alguma região em particular afeta automaticamente a outra, pondo assim em evidência a resposta sistêmica do modelo acoplado. De fato, o caráter hiperbólico das equações que governam os fenômenos no sistema arterial coloca o problema do correto tratamento das condições de contorno quando, por exemplo, isola-se uma região 3D. Neste caso, uma vez isolado o modelo 3D perde-se o controle sobre tais condições de contorno. Isto é, apesar de haver mudanças no distrito 3D as condições de contorno, como tais, permanecem invariantes. Isto limita notoriamente as possibilidades desta classe de modelos. Logo, os modelos multidimensionais 3D–1D vêm a dar resposta a estes problemas. Com este tipo de modelagem o leque de possibilidades aumenta de forma considerável, como se verá neste capítulo. De fato, qualquer evento que sucede, tanto na região modelada como 1D quanto na considerada 3D, afeta de forma direta o que ocorre na outra região devido à propagação da informação em ambas direções partindo do evento. Como um exemplo simples, pode-se mencionar a presença de uma obstrução em uma região 3D que afeta o que ocorre na região 1D. Fazendo a comparação com a modelagem clássica, onde as condições de contorno permanecem fixas, neste tipo de modelagem usando modelos acoplados as, agora, condições de acoplamento adaptam-se automaticamente às condições que se dão nas regiões 3D e 1D. Uma forma simplista de enxergar o modelo acoplado é separando as partes componentes como mostra a Figura 2.1. Nesta figura pretende-se pôr em evidência que o modelo 3D pode ser considerado como uma forma de devolver ao modelo 1D informações de caráter local inerentes à região isolada (parte superior da Figura 2.1). Neste caso, o modelo 3D é visto como *caixa preta*, e a dinâmica deste sistema é levada em conta nas *condições de contorno* sobre o sistema 1D. De forma equivalente, a mesma figura mostra como o modelo 1D pode ser considerado como um simples fornecedor de condições de contorno que são variantes em função da dinâmica estabelecida pelo sistema completo (parte inferior da Figura 2.1). Aqui é o modelo 1D que é visto como *caixa preta*, e sua dinâmica afeta a estrutura local do fluxo, pois determina as *condições de contorno* a serem providas ao sistema 3D.

A utilização de modelos 3D e 1D atuando juntamente é ainda relativamente pouco freqüente [41, 155]. Entretanto, e como mencionado, não se tem desenvolvido até a atuali-

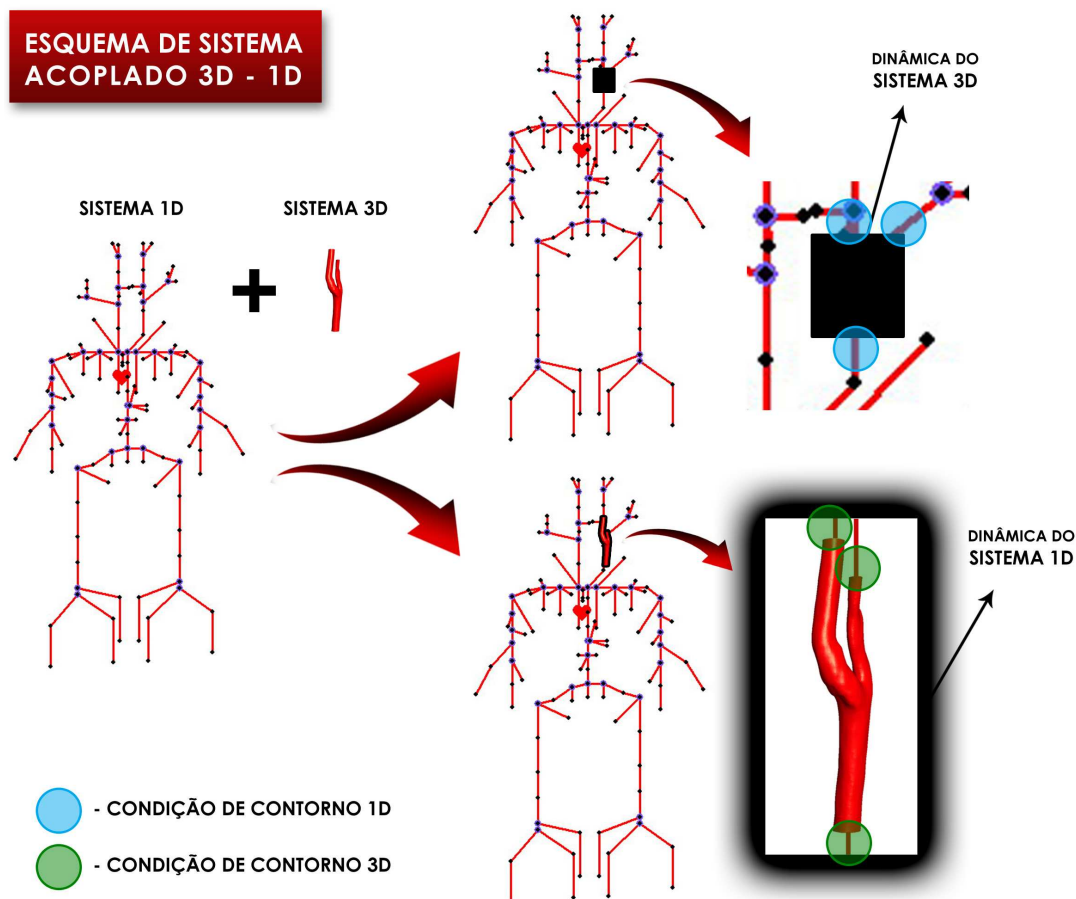


Figura 2.1: Esquema para o entendimento das interações presentes no modelo acoplado.

dade um princípio variacional como o apresentado no Capítulo 1 (ver Seção 1.5.2) que dê bases variacionais acabadas e que envolva todas as possíveis características do problema. Nas referências mencionadas somente formulam o problema no nível das equações diferenciais, e o acoplamento segue a partir do conhecimento prévio das quantidades que se devem conservar.

No presente capítulo tomam-se as idéias desenvolvidas no Capítulo 1, mais precisamente na Seção 1.5.2, e traça-se a construção de um modelo 3D-1D que será utilizado recorrentemente em diversas aplicações na modelagem do sistema cardiovascular humano. Em outras palavras, apresenta-se uma série de aplicações dos conceitos teóricos expostos no Capítulo 1 sobre o acoplamento de modelos cinematicamente incompatíveis, em particular para o problema de escoamento de fluidos em domínios multidimensionais 3D-1D deformáveis. Estas aplicações são concebidas em função da modelagem do sistema cardiovascular humano. Assim sendo, na Seção 2.1 expõe-se como se constrói um modelo 3D-1D orientado à hemodinâmica, ressaltando as considerações adicionais necessárias para completar a formulação do modelo acoplado para seu uso nesta aplicação. Na Seção 2.2 apresenta-se uma aproximação do problema contínuo para realizar a implementação computacional. Explicam-se todos os passos utilizados na discretização de um caso padrão, expondo as matrizes que constituem o sistema de equações lineares final a ser resolvido. Nestas primeiras seções do capítulo o conteúdo da tese é de caráter operacional a fim de aplicar o Problema 1.16 às situações vistas em hemodinâmica. A segunda parte, detalhada a seguir, visa mostrar as potencialidades mediante diversos exemplos numéricos. Na Seção 2.3 incluem-se diversos resultados numéricos. Em primeiro lugar, na Seção 2.3.1, os resultados correspondem a casos cujo interesse reside na análise do correto funcionamento

do esquema de acoplamento. Nas Seções 2.3.3 a 2.3.8, parte-se para a análise de casos específicos concernentes a aplicações na modelagem e simulação do sistema cardiovascular. Estas aplicações abarcam diversos estudos sobre o escoamento do sangue em diversos distritos do sistema arterial, pondo ênfase na bifurcação da artéria carótida. Já na Seção 2.3.9 realiza-se uma comparação entre a resolução do sistema acoplado e uma versão segregada do mesmo, visando estudar as conseqüências de utilizar um esquema de acoplamento mais barato computacionalmente. Finalmente, na Seção 2.4 apresenta-se de forma resumida e descritiva as atividades realizadas no grupo de trabalho do laboratório HeMoLab localizado no LNCC, onde se mostra parte da estrutura da ferramenta desenvolvida com algumas das principais funcionalidades e aplicações.

O material apresentado neste capítulo constitui contribuição da tese de forma complementar às idéias apresentadas no Capítulo 1. Os casos analisados na Seção 2.3.1 são parte dos trabalhos [20, 155], enquanto que nas Seções 2.3.4, 2.3.5 e 2.3.6 figuram as contribuições apresentadas em congressos da área, segundo indicam as referências [22, 23, 92]. Os resultados da Seção 2.3.7 estão em um trabalho ainda em processo de preparação, enquanto que os da Seção 2.3.8 relacionam-se com [142]. Por último, o material da Seção 2.4 considera-se ainda contribuição da tese devido a que não existe atualmente outro sistema que permita lidar com modelos acoplados da forma em que o sistema HeMoLab faz.

2.1 Construção de um modelo acoplado em hemodinâmica

A seguir emprega-se a base teórica desenvolvida no Capítulo 1 para lidar com modelos cinematicamente incompatíveis. Como comentado, o acoplamento de modelos 3D e 1D é uma situação particular desta classe de incompatibilidade, e pode ser abordada sem problemas, como feito na Seção 1.5.2, no Problema 1.16. O objetivo desta seção é apresentar todas as considerações adicionais que devem ser levadas em conta quando o modelo acoplado 3D–1D do Problema 1.16 é orientado para realizar modelagem e simulação computacional sob os regimes encontrados em hemodinâmica. Assim sendo, estuda-se a forma em que condições de contorno, comportamento constitutivo do sangue, comportamento da parede arterial e condições de acoplamento são manipuladas e ficam finalmente plasmadas no sistema de equações resultante.

2.1.1 Considerações sobre a porção 1D

De acordo com o visto no Capítulo 1, um modelo simplificado obtém-se através de hipóteses sobre a cinemática que governa os fenômenos físicos. A continuação utiliza-se a notação introduzida na Seção 1.5.2 e o princípio variacional (1.5.69) que corresponde ao Problema 1.16. Viu-se na (1.5.80) que as equações de Euler–Lagrange sobre a porção Ω_1 eram as seguintes

$$\begin{cases} \rho A \frac{\partial u_{1z}}{\partial t} + \rho A u_{1z} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} + A \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{D_1^{\Gamma} zz}) - t_D^w = f_z^{\Gamma} & \text{em } (z_a, z_b), \\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (A u_{1z}) = 0 & \text{em } (z_a, z_b), \end{cases} \quad (2.1.1)$$

e que na forma conservativa em termos da pressão p_1 e do fluxo $Q = u_{1z} A$, escrevem-se como segue

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial Q}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + A \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{D_1^{\Gamma} zz}) - t_D^w = f_z^{\Gamma} & \text{em } (z_a, z_b), \\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 & \text{em } (z_a, z_b). \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Estas equações costumam ser derivadas das leis de conservação da quantidade de movimento linear e massa [76]. Entretanto, na abordagem aqui proposta as mesmas foram obtidas ao introduzir a hipótese cinemática (1.5.54) no princípio variacional (1.5.5). A seguir serão realizadas algumas transformações no sistema de equações, no entanto, as condições de acoplamento não se vêem alteradas posto que tais transformações são referentes ao interior do domínio Ω_1 . Antes de continuar, veja que, do comentado no Problema 1.16, a área A devia ser fornecida. Entretanto, no sistema cardiovascular não se conhece a variação espacial e temporal da área. De fato, constitui uma incógnita do problema, pelo que resulta necessário introduzir mais uma equação que determine o comportamento da parede arterial, relacionando a área com as demais variáveis do problema. O caso especial que se considera aqui é um comportamento estrutural viscoelástico governado pela seguinte equação

$$p_1 = p_0 + \frac{E\pi R_0 h_0}{A} \left(\sqrt{\frac{A}{A_0}} - 1 \right) + \frac{k\pi R_0 h_0}{A} \frac{1}{2\sqrt{A_0 A}} \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{em } (z_a, z_b), \quad (2.1.3)$$

onde o índice 0 denota valores de referência, E é o módulo de elasticidade efetivo, k é o coeficiente de viscoelasticidade, R é o raio da artéria na direção transversal e h a sua espessura. Este tipo de modelos denomina-se de *anéis independentes* [68, 83, 84]. A extensão deste modelo para o caso 3D é apresentada na próxima seção ao analisar o comportamento da estrutura do modelo 3D. Outros modelos podem ser considerados, envolvendo o comportamento das fibras de colágeno e outros fenômenos de caráter não linear [43, 44, 136, 157]. As leis constitutivas para o domínio Ω_1 são as seguintes

$$\begin{cases} \sigma_{D_1}^{\Gamma}{}_{zz} = 0, \\ t_D^w = -8\pi\mu u_{1z}. \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Desta maneira, recuperam-se os clássicos termos de fricção vistos na literatura após considerar o sangue como Newtoniano e um perfil de velocidade parabólico [2, 76, 124]. Note que não há inconsistências na escolha destas leis, posto que ao ter definido os esforços generalizados o que resta é fornecer leis constitutivas que façam com que o modelo represente o problema físico em questão. Vale a pena observar que o comportamento constitutivo (2.1.4) desconsidera os termos de fricção associados ao gradiente axial da velocidade, o que pode ser justificado mediante uma análise adimensional [76]. Por último, aos efeitos da implementação computacional, e em função dos regimes vistos em hemodinâmica, convém reescrever o problema em termos de derivadas totais ao longo das linhas características do sistema de equações quando considerado puramente elástico [35], como segue

$$\begin{cases} \left. \frac{DQ}{Dt} \right|_{(-)} - f^+ \left. \frac{DA}{Dt} \right|_{(-)} = g_1, & \text{em } (z_a, z_b), \\ \left. \frac{DQ}{Dt} \right|_{(+)} - f^- \left. \frac{DA}{Dt} \right|_{(+)} = g_1, & \text{em } (z_a, z_b), \end{cases} \quad (2.1.5)$$

onde $\left. \frac{D(\cdot)}{Dt} \right|_{(\pm)}$ denota a derivada total com respeito às linhas características correspondentes às velocidades de propagação $f^{\pm} = \frac{Q}{A} \pm c$, sendo $c = \sqrt{\frac{A}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial A}}$ a velocidade de propagação do som dentro do vaso arterial, enquanto que $g_1 = f_z^{\Gamma} - \frac{8\pi\mu}{A} Q$. Este sistema pode ser obtido combinando convenientemente os termos do princípio variacional (1.5.69). Por último, a formulação pode ser colocada em termos da derivada total da pressão p_1 fazendo

$$\left. \frac{DA}{Dt} \right|_{(\pm)} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \right)^{-1} \left. \frac{Dp_1}{Dt} \right|_{(\pm)}, \quad (2.1.6)$$

e portanto tem-se

$$\begin{cases} \left. \frac{DQ}{Dt} \right|_{(-)} - f^+ \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \right)^{-1} \left. \frac{Dp_1}{Dt} \right|_{(-)} = g_1, & \text{em } (z_a, z_b), \\ \left. \frac{DQ}{Dt} \right|_{(+)} - f^- \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \right)^{-1} \left. \frac{Dp_1}{Dt} \right|_{(+)} = g_1, & \text{em } (z_a, z_b). \end{cases} \quad (2.1.7)$$

No caso viscoelástico utiliza-se o mesmo sistema canônico.

Trabalhar com as equações (2.1.7) requer maior regularidade da pressão, sendo que agora deve ser $p_1 \in H^1((z_a, z_b))$. Para finalizar, as condições de contorno sobre o modelo são discutidas na Seção 2.1.4.

2.1.2 Considerações sobre a porção 3D

Duas considerações sobre a parte 3D do modelo acoplado devem ser feitas: (i) sobre o comportamento da parede arterial e (ii) sobre a deformação do domínio e a formulação ALE.

O problema fluido–estrutura na sua forma mais geral não se considera aqui. Uma discussão mais detalhada apresenta-se no Capítulo 3. No problema acoplado 3D–1D considerou-se o caso mais simples de interação fluido–estrutura. De acordo com o modelo proposto para o comportamento da parede arterial apresentado na expressão (2.1.3), a sua extensão para o problema 3D consiste na seguinte equação

$$p_2 = p_0 + \frac{Eh_0}{R_0^2} \zeta + \frac{kh_0}{R_0^2} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{sobre } \Gamma_{L_2}, \quad (2.1.8)$$

onde o índice 0 indica valores de referência, E é o módulo de elasticidade efetivo, k o coeficiente de viscoelasticidade, R o raio de curvatura da parede arterial quando medido desde o eixo axial, h a espessura da mesma e ζ é o deslocamento da parede arterial na direção da normal exterior \mathbf{n}_2 . Portanto, a velocidade sobre Γ_{L_2} é obtida simplesmente fazendo

$$\mathbf{u}_{2|\Gamma_{L_2}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \mathbf{n}_2, \quad (2.1.9)$$

ou seja, a velocidade é sempre na direção normal à parede arterial. Logo, resulta evidente que sobre a fronteira de acoplamento Γ_a tem-se que $\mathbf{w}_2 = 0$. Neste ponto vale a pena salientar que para que a expressão (2.1.8) faça sentido deve ser exigida uma regularidade maior sobre o campo de pressão p_2 . Formulando o problema para $p_2 \in H^1(\Omega_2)$ a equação mencionada faz sentido como equação de Euler–Lagrange resultante da seguinte equação variacional

$$\int_{\Gamma_{L_2}} p_2 \psi \, d\Gamma = \int_{\Gamma_{L_2}} \left(p_0 + \frac{Eh_0}{R_0^2} \zeta + \frac{kh_0}{R_0^2} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \psi \, d\Gamma \quad \forall \psi \in H^{-1/2}(\Gamma_{L_2}), \quad (2.1.10)$$

donde segue-se que $\zeta \in H^{1/2}(\Gamma_{L_2})$ e $\frac{\partial \zeta}{\partial t} \in H^{1/2}(\Gamma_{L_2})$. Será visto na Seção 2.2 que o espaço de elementos finitos usado na aproximação do campo de pressão é de funções contínuas, portanto as expressões (2.1.8) e (2.1.10) fazem sentido.

Devido à deformação que sofre o domínio, como consequência da interação fluido–estrutura, é necessário colocar o problema no contexto da formulação Arbitrariamente Lagrangiana–Euleriana. Ao passar a esta descrição, as derivadas temporais adquirem a forma mostrada pela (1.5.73). Assim sendo, surge na formulação a velocidade \mathbf{w}_2 que, como indica o nome, pode ser arbitrária sempre que a derivada parcial temporal seja considerada fixando as coordenadas que se movem com esta velocidade. Devido à hipótese de aderência na parede Γ_{L_2} , resulta que $\mathbf{w}_{2|\Gamma_{L_2}} = \mathbf{u}_{2|\Gamma_{L_2}}$, sendo que a velocidade estará

determinada de maneira conjunta pelo problema fluido–estrutura. Continuando com a deformação do domínio, é necessário estabelecer um critério para, a partir da velocidade \mathbf{w}_2 sobre Γ_{L_2} , determinar a velocidade em todo o domínio Ω_2 . Uma discussão interessante é apresentada em [125] sobre a formulação ALE, assim como diversas formas de computar a velocidade \mathbf{w}_2 em Ω_2 . Neste trabalho considera-se o seguinte problema auxiliar para obter esta velocidade mediante o cálculo dos deslocamentos $\gamma_{\mathbf{Y}}$ sofridos pelo domínio Ω_2 :

Problema 2.1 (Problema auxiliar – Cálculo da velocidade ALE). *Encontre $\gamma_{\mathbf{Y}} \in \mathcal{M}_{\gamma_{\mathbf{Y}}}$ tal que*

$$\int_{\Omega_2} \boldsymbol{\kappa} \nabla \gamma_{\mathbf{Y}} \cdot \nabla \chi_{\mathbf{Y}} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \chi_{\mathbf{Y}} \in \mathcal{N}_{\gamma_{\mathbf{Y}}}, \quad (2.1.11)$$

onde $\mathcal{N}_{\gamma_{\mathbf{Y}}}$ é o espaço gerador da seguinte variedade linear

$$\mathcal{M}_{\gamma_{\mathbf{Y}}} = \{\gamma_{\mathbf{Y}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_2); \gamma_{\mathbf{Y}}|_{\Gamma_{L_2}} = \zeta \mathbf{n}_2\}, \quad (2.1.12)$$

sendo \mathbf{n}_2 a normal exterior ao domínio Ω_2 sobre Γ_{L_2} . No caso geral $\boldsymbol{\kappa}$ é um tensor que pode ser convenientemente definido visando deformar a malha de forma adaptativa em função do erro cometido na aproximação. Ao longo deste capítulo considera-se o caso mais simples possível, ou seja, $\boldsymbol{\kappa}$ é o tensor identidade. Finalmente a velocidade \mathbf{w}_2 é calculada como segue

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\partial \gamma_{\mathbf{Y}}}{\partial t}. \quad (2.1.13)$$

Vê-se que o problema auxiliar consiste em difundir a velocidade do contorno para o interior do domínio. Por outro lado, $\gamma_{\mathbf{Y}}$ é o deslocamento com respeito a uma dada configuração de referência, e posteriormente coincidirá com o deslocamento dos nós da malha de elementos finitos com respeito à configuração inicial. O cálculo faz-se necessário a fim de avaliar de forma correta as integrais no domínio e de computar a velocidade \mathbf{w}_2 .

Antes de continuar convém esclarecer algumas questões da formulação ALE. Como visto, neste trabalho utiliza-se a versão não conservativa da formulação. Isto faz com que a formulação não entre em conflito com a denominada lei de conservação geométrica [59, 93]. Esta questão técnica, concernente à aproximação numérica, impõe que a ordem da discretização temporal não pode ser arbitrária, mas que depende da discretização espacial. A vantagem na formulação não conservativa é o fato de ficar implícita a seguinte identidade geométrica

$$\left. \frac{\partial J_2}{\partial t} \right|_{\mathbf{Y}} = J_2 \operatorname{div} \mathbf{w}_2, \quad (2.1.14)$$

onde J_2 é o determinante do Jacobiano de transformação do domínio Ω_2 . Tal lei de evolução pode não ser satisfeita na formulação conservativa, dependendo das discretizações temporal e espacial utilizadas [125].

Por último, considera-se que o fluido é Newtoniano, a menos que se explicitamente o contrário como será feito na Seção 2.3.5. Logo, a lei constitutiva sobre Ω_2 é

$$\boldsymbol{\sigma}_{D_2} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2) = \mu (\nabla \mathbf{u}_2 + (\nabla \mathbf{u}_2)^T). \quad (2.1.15)$$

2.1.3 A escolha do parâmetro γ e o modelo 3D–1D acoplado final

Antes de apresentar o problema final que será resolvido, considere novamente o princípio variacional estendido (1.5.69) para o problema acoplado 3D–1D. Para realizar a implementação computacional é preciso escolher um valor para o parâmetro γ . Como discutido no Capítulo 1, esta escolha deve ser feita em função considerações físicas, pois o modelo é diferente para os diversos valores de γ . A partir daqui considera-se $\gamma = 1$. O principal critério para esta escolha é que, para o caso estacionário, recupera-se a solução

exata de perfil de velocidade parabólico em toda a região 3D, enquanto que a pressão também recupera a sua forma exata, posto que a mesma sofre uma queda linear ao longo de todo o domínio. Isto não ocorre se $\gamma \neq 1$ já que aparecem regiões de desenvolvimento e de de-desenvolvimento do perfil de velocidade, provocando a alteração na queda de pressão e uma solução que, para esse exemplo, fica mais longe da física real. Além disso, veja que o número de graus de liberdade é menor com esta escolha. Logo, as condições de acoplamento estabelecem que $t_{1z} = -A_a p_1 + \sigma_{D_1}^{\Gamma_{zz}}$. No entanto, de acordo com a lei constitutiva introduzida pela (2.1.4) resulta

$$t_{1z} = -A_a p_1. \quad (2.1.16)$$

Desta forma, e consistentemente com a transformação feita na Seção 2.1.1 sobre as equações no domínio Ω_1 , pode-se eliminar a variável t_{1z} , substituindo-a diretamente por $-A_a p_1$ segundo a (2.1.16) (lembre-se que a regularidade agora permite isto).

Logo, as considerações feitas sobre as partes 3D e 1D do modelo acoplado, expostas de forma resumida, são as seguintes

- i. transformação do sistema de equações para a forma canônica segundo a (2.1.7),
- ii. comportamento da parede arterial segundo as (2.1.3) e (2.1.8),
- iii. leis constitutivas segundo as (2.1.4) e (2.1.15),
- iv. formulação ALE não conservativa considerando as derivadas temporais segundo a (1.5.73),
- v. cálculo da velocidade consistente com a formulação ALE segundo o Problema 2.1 por meio da expressão (2.1.11) e logo da (2.1.13),
- vi. consideração de $\gamma = 1$,
- vii. substituição da variável t_{1z} segundo a (2.1.16).

Veja que estas modificações não alteram a teoria nem os conceitos desenvolvidos no Capítulo 1. Simplesmente, é mais conveniente trabalhar com estas considerações tendo em vista a aproximação numérica no contexto da modelagem do sistema cardiovascular devido às características que apresenta este problema.

Portanto, o Problema 1.16, quando pensado para aplicações em hemodinâmica, é modificado resultando no que segue:

Problema 2.2 (Modelo acoplado 3D–1D usado em hemodinâmica). *Para cada $t \in (0, T)$, encontre $(Q, A, p_1, \mathbf{u}_2, p_2, \gamma_{\mathbf{Y}}) \in \mathcal{M}$ tal que*

$$\begin{aligned} & \int_{z_a}^{z_b} \rho \left(\frac{DQ}{Dt} \Big|_{(-)} - f^+ \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \right)^{-1} \frac{Dp_1}{Dt} \Big|_{(-)} - g_1 \right) \frac{\tilde{Q}}{\lambda_1} dz \\ & \quad + \int_{z_a}^{z_b} \rho \left(\frac{DQ}{Dt} \Big|_{(+)} - f^- \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \right)^{-1} \frac{Dp_1}{Dt} \Big|_{(+)} - g_1 \right) \frac{\tilde{Q}}{\lambda_1} dz \\ & + \int_{\Omega_2} \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} \Big|_{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{v}_2 + \rho (\nabla \mathbf{u}_2) (\mathbf{u}_2 - \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{v}_2 - p_2 \operatorname{div} \mathbf{v}_2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_2) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 \right) dx \\ & - \int_{\Gamma_a} p_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v}_2 d\Gamma + \int_{\Gamma_a} \rho (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_1 - u_{1z}) \frac{\tilde{Q}}{\lambda_3} d\Gamma = 0 \quad \forall (\tilde{Q}, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{N}_Q \times \mathcal{N}_{\mathbf{u}_2}, \quad (2.1.17a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{z_a}^{z_b} \rho f^+ \left(\left. \frac{DQ}{Dt} \right|_{(-)} - f^+ \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \right)^{-1} \left. \frac{Dp_1}{Dt} \right|_{(-)} - g_1 \right) \frac{q_1}{\lambda_2} dz \\ & \quad + \int_{z_a}^{z_b} \rho f^- \left(\left. \frac{DQ}{Dt} \right|_{(+)} - f^- \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \right)^{-1} \left. \frac{Dp_1}{Dt} \right|_{(+)} - g_1 \right) \frac{q_1}{\lambda_2} dz \\ & \quad + \int_{\Omega_2} \rho q_2 \operatorname{div} \mathbf{u}_2 \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall (q_1, q_2) \in \mathcal{N}_{p_1} \times \mathcal{N}_{p_2}, \end{aligned} \quad (2.1.17b)$$

$$\int_{\Omega_2} \nabla \gamma_{\mathbf{Y}} \cdot \nabla \chi_{\mathbf{Y}} \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \chi_{\mathbf{Y}} \in \mathcal{N}_{\gamma_{\mathbf{Y}}}, \quad (2.1.17c)$$

$$p_1 = p_0 + \frac{E\pi R_0 h_0}{A} \left(\sqrt{\frac{A}{A_0}} - 1 \right) + \frac{k\pi R_0 h_0}{A} \frac{1}{2\sqrt{A_0 A}} \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{em } (z_a, z_b), \quad (2.1.17d)$$

$$p_2 = p_0 + \frac{Eh_0}{R_0^2} \zeta + \frac{kh_0}{R_0^2} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{sobre } \Gamma_{L_2}, \quad (2.1.17e)$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\partial \gamma_{\mathbf{Y}}}{\partial t} \quad \text{em } \Omega_2, \quad (2.1.17f)$$

com λ_i , $i = 1, 2, 3$, constantes que fazem com que as expressões sejam dimensionalmente consistentes, e onde $\mathcal{M} = \mathcal{M}_Q \times \mathcal{M}_A \times \mathcal{M}_{p_1} \times \mathcal{M}_{\mathbf{u}_2} \times \mathcal{M}_{p_2} \times \mathcal{M}_{\gamma_{\mathbf{Y}}}$, com

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_Q &= \{Q \in H^1((z_a, z_b)); Q|_{z_a} = \bar{Q}\}, \\ \mathcal{M}_A &= H^1((z_a, z_b)), \\ \mathcal{M}_{p_1} &= \{p_1 \in H^1((z_a, z_b)); \text{relacionada a } Q|_{z_a} \text{ segundo vê-se na Seção 2.1.4}\}, \\ \mathcal{M}_{\mathbf{u}_2} &= \{\mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}^1(\Omega_2); \mathbf{u}_2|_{\Gamma_{L_2}} = \mathbf{w}_2|_{\Gamma_{L_2}}, \mathbf{u}_2|_{\Gamma_{D_2}} = \bar{\mathbf{u}}_2\}, \\ \mathcal{M}_{p_2} &= L^2(\Omega_2), \\ \mathcal{M}_{\gamma_{\mathbf{Y}}} &= \{\gamma_{\mathbf{Y}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_2); \gamma_{\mathbf{Y}}|_{\Gamma_{L_2}} = \zeta \mathbf{n}_2\}, \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

onde $\bar{Q} = \bar{Q}(t)$ é a condição de contorno para o fluxo em função do tempo. Por último, \mathcal{N} é o correspondente espaço gerador da variedade linear \mathcal{M} .

Na seção que segue expõe-se a forma como as condições de contorno na porção 1D do modelo acoplado são impostas.

2.1.4 Condições de contorno

Uma forma de tratar as condições de contorno, assim como de impor condições em bifurcações, é através do denominado modelo de Windkessel, ou terminal de Windkessel. Estes elementos são modelos de parâmetros concentrados, como mostra a Figura 2.2, que ficam caracterizados a partir dos valores de duas resistências R_1 e R_2 , de um capacitor C e da pressão do terminal p_t [141, 146].

As equações que regem o comportamento destes modelos no caso geral são as seguintes

$$\begin{aligned} p_{N_s+1} &= p_i \quad i = 1, \dots, N_s, \\ \sum_{i=1}^{N_s+1} Q_i &= 0, \\ \frac{dQ_1}{dt} &= \frac{1}{R_1 R_2 C} \left(R_2 C \frac{d}{dt} (p_1 - p_t) + (p_1 - p_t) - (R_1 + R_2) Q_1 \right), \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

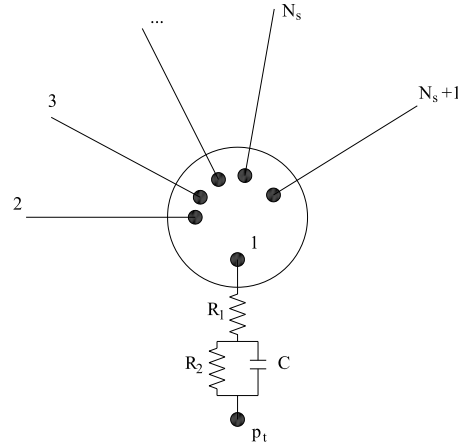


Figura 2.2: Modelo de parâmetros concentrados de Windkessel.

onde N_s é o número de segmentos que chegam ao terminal. Este sistema de equações assegura continuidade da pressão e do fluxo entre os segmentos que chegam ao terminal, incluindo o próprio terminal indicado pelo índice 1. Segundo os valores atribuídos aos elementos do modelo é possível utilizar este tipo de terminal para diferentes funções, como se descreve a seguir.

- i *Elemento de bifurcação*: Nesta situação deve-se assegurar a continuidade da pressão e do fluxo entre os segmentos arteriais que chegam ao terminal, isto sem que nada de fluxo se derive pelo terminal. O número de segmentos arteriais N_s que chegam ao terminal pode ser arbitrário. Em função disto o valor de Q_1 deve ser teoricamente nulo. Para simular tal situação com o modelo de Windkessel precisa-se escolher valores de R_1 e R_2 , os dois, ou qualquer um deles, muito grandes juntamente com $C = 0$. Desta forma

$$Q_1 \approx \frac{p_1 - p_t}{R_1 + R_2} \approx 0, \quad (2.1.20)$$

e, portanto, Q_1 é muito pequeno e a situação fica adequadamente representada. Usualmente, nestes casos a pressão do terminal é nula, isto é $p_t = 0$. Contudo, pode existir uma situação na qual deseja-se que haja alguma perda de massa em uma bifurcação, simulando a existência de algum leito periférico nesse local. Em tal caso, os valores dos parâmetros do modelo devem representar adequadamente as características do leito periférico que está sendo modelado com o terminal. Esta situação é descrita no item (iii).

- ii *Elemento terminal para imposição de uma curva de fluxo*: Neste caso o objetivo é que o terminal forneça ao segmento que chega até ele uma curva de fluxo desejada, simulando a imposição de uma condição de contorno como a vista no Problema 2.2. Assim sendo, somente um segmento arterial chega ao terminal, ou seja $N_s = 1$. Entretanto, a situação poderia ser mais geral se requerido. Suponha então que se deseja impor uma curva de fluxo $\bar{Q}(t)$. A forma de impô-la é escolhendo valores de R_1 e/ou R_2 suficientemente grandes juntamente com um valor de pressão do terminal dado por $p_t = (R_1 + R_2)\bar{Q}$, e além disso $C = 0$. A palavra *suficientemente* deve ser entendida no seguinte sentido: o sistema arterial pode ser, no caso linearizado, entendido como um circuito elétrico *RLC*. Ou seja, possui valores característicos de elementos do tipo resistência (R_s), capacitância (C_s) e indutância (L_s). Assim sendo, colocando valores de R_1 e R_2 tais que $R_1 + R_2 \gg R_s$. Por exemplo $R_1 + R_2 = 100R_s$ resulta que a maior parte da queda da pressão ocorre nas resistências internas do terminal, e o sistema, mesmo sendo muito complexo, não influencia no fluxo que sai do terminal, o qual

resulta aproximadamente

$$Q_1 \approx \frac{p_1 - p_t}{R_1 + R_2 + R_s} \approx -\frac{p_t}{R_1 + R_2} = -\bar{Q}, \quad (2.1.21)$$

onde também tem-se considerado que $|p_1| \ll |p_t|$. Logo, da continuidade do fluxo resulta

$$Q_2 = -Q_1 \approx \frac{p_t}{R_1 + R_2} = \bar{Q}, \quad (2.1.22)$$

e no segmento localizado a partir deste terminal tem-se a curva de fluxo desejada.

- iii *Elemento terminal como leito periférico*: Nesta situação os parâmetros do terminal devem ser escolhidos para representar adequadamente a região por ele substituída. Isto é, os valores das resistências devem ser tais que o fluxo, o valor médio dele, esteja de acordo com as distribuições usuais no sistema arterial, enquanto que o capacitor C deve levar em conta a capacidade de absorção de sangue por parte do leito periférico. Usualmente nestes casos a pressão do terminal é nula, isto é $p_t = 0$.

Desta forma, utilizando o modelo de Windkessel impõe-se no Problema 2.2 uma condição de contorno sobre o fluxo na porção 1D do modelo acoplado.

Ao avançar mais neste capítulo ver-se-á que o sistema arterial completo é considerado como um modelo acoplado 3D–1D. Assim, enquanto a maior parte do sistema é modelada de forma simplificada, determinadas regiões de interesse são consideradas utilizando modelos mais detalhados. Este tipo de situações representa um claro exemplo de aplicabilidade do modelo acoplado desenvolvido na Seção 1.5.2, particularizado para o campo da hemodinâmica na Seção 2.1.3. Neste sistema, a imposição da curva de ejeção cardíaca assim como as condições nas bifurcações e os modelos dos leitos periféricos são representados por modelos de Windkessel convenientemente calibrados. Por isto, se bem a atenção foi posta sobre a formulação do Problema 2.2, cabe mencionar que os modelos de Windkessel são recorrentemente utilizados nas situações mencionadas.

2.2 Discretização do problema acoplado

Para realizar uma discretização do Problema 2.2 diversos aspectos importantes da natureza do problema devem ser levados em conta. Só para mencionar alguns exemplos, observe que o problema é transiente e não linear, tanto explícita (nas próprias variáveis) como implicitamente (o domínio de integração é desconhecido). Além disso, os fenômenos são predominantemente convectivos, portanto as aproximações requerem algum tratamento adicional. Todos estes aspectos são discutidos a seguir, abordando todas as técnicas utilizadas na aproximação do Problema 2.2. Por brevidade na apresentação escolheu-se o caso de comportamento da parede arterial puramente elástico, isto é com $k = 0$.

Como regra geral representa-se o instante de tempo atual com o índice $n + 1$, ou seja t_{n+1} , e o instante de tempo anterior com o índice n , isto é t_n . Para tratar a não linearidade utiliza-se it como índice para denotar a iteração anterior, enquanto que a iteração atual não leva índice nenhum, evitando sobrecarregar a notação. Logo, uma quantidade denotada $(\cdot)^{n+1}$ deve ser considerada no instante de tempo atual e na iteração atual, enquanto que se for $(\cdot)^{it}$ deve ser considerada no instante de tempo atual, porém na iteração anterior. Finalmente, $(\cdot)^n$ denota diretamente a quantidade no instante de tempo anterior. Para a discretização temporal emprega-se um esquema θ de implicitude temporal que se denota como segue $(\cdot)^{n+\theta} = \theta(\cdot)^{n+1} + (1 - \theta)(\cdot)^n$, com $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$.

A forma de aproximar o problema espacialmente é por meio da construção de bases de aproximação de elementos finitos, tanto para a porção 1D quanto para a 3D. Para exemplificar claramente a forma em que a matriz do sistema de equações final é montada

considera-se um problema simples como mostrado na Figura 2.3. Neste caso incluiu-se o terminal Windkessel para impor uma condição de contorno em $z = z_a$. A Tabela 2.1 discrimina as diferentes regiões que constituem as discretizações dos domínios 1D e 3D. Convém dizer que dentro dos n_{3D} nós do domínio 3D estão incluídos os n_a nós da fronteira Γ_a , os n_L nós da fronteira Γ_{L2} e os n_D nós da fronteira Γ_{D2} . De forma que a interseção entre os conjuntos de nós \mathcal{I}_a^n e \mathcal{I}_L^n seja nula, considera-se que os nós que se encontram sobre a curva $\partial\Gamma_a$ pertencem ao grupo denominado \mathcal{I}_L^n , portanto o conjunto \mathcal{I}_a^n contém somente nós estritamente interiores à superfície Γ_a .

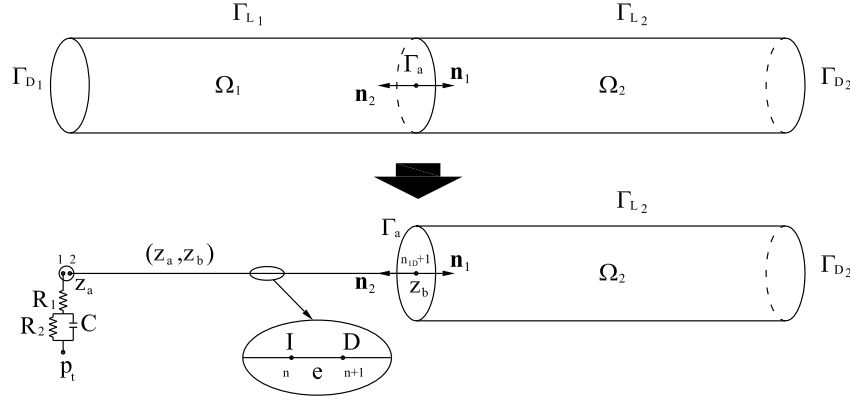


Figura 2.3: Problema 3D–1D padrão para mostrar o sistema de equações resultante.

Detalhe	Nós		Elementos		
	Conjunto	Cardinal	Conjunto	Cardinal	Nós por elemento n_{ne}
Terminal	\mathcal{I}_t^n	$n_t = 2$	\mathcal{I}_t^e	$e_t = 1$	2
Domínio 1D	\mathcal{I}_{1D}^n	n_{1D}	\mathcal{I}_{1D}^e	e_{1D}	2
Fronteira Γ_a	\mathcal{I}_a^n	n_a	\mathcal{I}_a^e	e_a	4
Fronteira Γ_{L2}	\mathcal{I}_L^n	n_L	\mathcal{I}_L^e	e_L	3
Fronteira Γ_{D2}	\mathcal{I}_D^n	n_D	\mathcal{I}_D^e	e_D	3
Domínio 3D	\mathcal{I}_{3D}^n	n_{3D}	\mathcal{I}_{3D}^e	e_{3D}	5

Tabela 2.1: Descrição da discretização do problema acoplado.

2.2.1 Técnicas de aproximação sobre a região 1D

Para aproximar o problema sobre o domínio 1D considera-se primeiramente a discretização temporal segundo um esquema de diferenças finitas de um passo, isto dentro de um esquema θ de implicitude temporal como comentado anteriormente. Os espaços usados na construção das bases de elementos finitos são

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_Q^h &= X_h, \\
 \mathcal{M}_A^h &= X_h, \\
 \mathcal{M}_{p_1}^h &= X_h, \\
 X_h &= \{\phi \in C^0([z_a, z_b]); \phi|_{e_{1D}} \in \mathbb{P}_1, \forall e_{1D} \in \mathcal{I}_{1D}^e\},
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

onde \mathbb{P}_1 é o espaço dos polinômios lineares definidos sobre cada elemento e_{1D} . Cabe mencionar que a condição de contorno sobre o conjunto \mathcal{M}_Q é agora introduzida mediante o terminal Windkessel, e por isto é que desaparece do espaço \mathcal{M}_Q^h .

Por outro lado, devido à convecção dominante utiliza-se uma ponderação modificada do tipo Petrov-Galerkin, onde a *upwinding* é considerado ao longo das linhas características por meio de um parâmetro adequado [73, 155]. Em todos os casos as não linearidades são

tratadas mediante iterações de Picard. No que segue indica-se o nó esquerdo mediante o índice 1 e o direito por meio do índice 2. Quantidades que são constantes por elemento indicam-se com e .

Procedendo desta forma obtém-se, a partir das expressões (2.1.17a), (2.1.17b) e (2.1.17d), e para um elemento genérico e_{1D} de dois nós, o seguinte

$$[\mathbf{A}_{QQ}^{1D}]_{ij}^{it} = \int_{e_{1D}} \left([C_j^-]^{it} [w_i^-]^{it} + [C_j^+]^{it} [w_i^+]^{it} \right) dz, \quad (2.2.2)$$

$$[\mathbf{A}_{Qp_1}^{1D}]_{ij}^{it} = - \int_{e_{1D}} \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_e^{it} \right)^{-1} \left([f_e^+]^{it} [C_j^-]^{it} [w_i^-]^{it} + [f_e^-]^{it} [C_j^+]^{it} [w_i^+]^{it} \right) dz, \quad (2.2.3)$$

$$[\mathbf{A}_{p_1Q}^{1D}]_{ij}^{it} = \int_{e_{1D}} \left([C_j^-]^{it} [z_i^-]^{it} + [C_j^+]^{it} [z_i^+]^{it} \right) dz, \quad (2.2.4)$$

$$[\mathbf{A}_{p_1p_1}^{1D}]_{ij}^{it} = - \int_{e_{1D}} \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_e^{it} \right)^{-1} \left([f_e^+]^{it} [C_j^-]^{it} [z_i^-]^{it} + [f_e^-]^{it} [C_j^+]^{it} [z_i^+]^{it} \right) dz, \quad (2.2.5)$$

onde

$$[C_j^\pm]^{it} = \frac{\phi_j}{\Delta t} + \theta [f_e^\pm]^{it} \frac{\partial \phi_j}{\partial z}, \quad (2.2.6)$$

$$[w_i^\pm]^{it} = \phi_i + \frac{\Delta z}{2} \frac{[f_e^\pm]^{it}}{|[f_e^\pm]^{it}|} \frac{\partial \phi_i}{\partial z}, \quad (2.2.7)$$

$$[z_i^\pm]^{it} = - \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_e^{it} \right)^{-1} [f_e^\mp]^{it} [w_i^\pm]^{it}, \quad (2.2.8)$$

$$[f_e^\pm]^{it} = \frac{1}{2} ([f_1^\pm]^{it} + [f_2^\pm]^{it}), \quad (2.2.9)$$

$$[f_1^\pm]^{it} = \frac{Q_1^{it}}{A_1^{it}} \pm \sqrt{\frac{A_1^{it}}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_I^{it}}, \quad (2.2.10)$$

$$[f_2^\pm]^{it} = \frac{Q_2^{it}}{A_2^{it}} \pm \sqrt{\frac{A_2^{it}}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_D^{it}}, \quad (2.2.11)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_I^{it} = \frac{E_e h_{0I}}{2R_{0I}} \frac{1}{\sqrt{A_1^{it} A_{0I}}}, \quad (2.2.12)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_D^{it} = \frac{E_e h_{0D}}{2R_{0D}} \frac{1}{\sqrt{A_2^{it} A_{0D}}}, \quad (2.2.13)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_e^{it} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_I^{it} + \frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_D^{it} \right), \quad (2.2.14)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_I^n = \frac{E_e h_{0I}}{2R_{0I}} \frac{1}{\sqrt{A_1^n A_{0I}}}, \quad (2.2.15)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_D^n = \frac{E_e h_{0D}}{2R_{0D}} \frac{1}{\sqrt{A_2^n A_{0D}}}, \quad (2.2.16)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_e^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_I^n + \frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_D^n \right), \quad (2.2.17)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_e^{it} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_e^{it} + \frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_e^n \right), \quad (2.2.18)$$

sendo que os índices 1 e I denotam o nó da esquerda e os índices 2 e D o da direita, Δz é o comprimento do elemento, e ainda $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$. Por último, E_e é o valor de E no elemento em questão. Além disso tem-se

$$[\mathbf{A}_{Ap_1}^{1D}]_{11} = 1, \quad (2.2.19)$$

$$[\mathbf{A}_{Ap_1}^{1D}]_{22} = 1, \quad (2.2.20)$$

$$[\mathbf{A}_{AA}^{1D}]_{11} = -\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_I^{it}, \quad (2.2.21)$$

$$[\mathbf{A}_{AA}^{1D}]_{22} = -\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_D^{it}. \quad (2.2.22)$$

Da mesma forma, os carregamentos elementares são os seguintes

$$[\mathbf{f}_Q^{1D}]_i^{it} = [g_{1e}]^{it} ([w_i^-]^{it} + [w_i^+]^{it}) + b_{1e}^- [w_i^-]^{it} + b_{1e}^+ [w_i^+]^{it}, \quad (2.2.23)$$

$$[\mathbf{f}_{p_1}^{1D}]_i^{it} = [g_{1e}]^{it} ([z_i^-]^{it} + [z_i^+]^{it}) + b_{1e}^- [z_i^-]^{it} + b_{1e}^+ [z_i^+]^{it}, \quad (2.2.24)$$

$$[\mathbf{f}_A^{1D}]_1^{it} = -\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_I^{it} A_1^{it}, \quad (2.2.25)$$

$$[\mathbf{f}_A^{1D}]_2^{it} = -\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_D^{it} A_2^{it}, \quad (2.2.26)$$

com

$$[g_{1e}]^{it} = \frac{1}{2} (g_{1I}^{it} + g_{1D}^{it}), \quad (2.2.27)$$

$$g_{1I}^{it} = f_{\text{vis}}^{it} + f_z^\Gamma A_1^{it}, \quad (2.2.28)$$

$$g_{1D}^{it} = f_{\text{vis}}^{it} + f_z^\Gamma A_D^{it}, \quad (2.2.29)$$

$$f_{\text{vis}}^{it} = -\frac{f_{re}^{it}}{4} \sqrt{\frac{A_e^{it}}{\pi}} |(u_{1z})_e^{it}| (u_{1z})_e^{it}, \quad (2.2.30)$$

$$A_e^{it} = \frac{1}{2} (A_1^{it} + A_2^{it}), \quad (2.2.31)$$

$$Q_e^{it} = \frac{1}{2} (Q_1^{it} + Q_2^{it}), \quad (2.2.32)$$

$$(u_{1z})_e^{it} = \frac{Q_e^{it}}{A_e^{it}}, \quad (2.2.33)$$

$$f_{re}^{it} = \frac{64}{\text{Re}_e^{it}}, \quad (2.2.34)$$

$$\text{Re}_e^{it} = \frac{2(u_{1z})_e^{it}}{\mu} \sqrt{\frac{A_e^{it}}{\pi}}, \quad (2.2.35)$$

$$b_{1e}^\pm = \frac{Q^n}{\Delta t} - (1 - \theta) [f_e^\pm]^{it} \frac{\partial Q^n}{\partial z} - \left(\frac{\partial p_1}{\partial A} \Big|_e^{it} \right)^{-1} [f_e^\mp]^{it} \left[\frac{p_1^n}{\Delta t} - (1 - \theta) [f_e^\pm]^{it} \frac{\partial p_1^n}{\partial z} \right]. \quad (2.2.36)$$

Neste ponto ainda não foram consideradas as condições de acoplamento nem as de contorno. Isto é discutido mais na frente.

2.2.2 Técnicas de aproximação sobre a região 3D

Sobre o domínio 3D considera-se uma discretização temporal implícita segundo um esquema θ . Os espaços usados na construção das bases de elementos finitos para a velocidade e a pressão neste caso devem ser escolhidos cuidadosamente, de forma que o problema discreto satisfaça a condição inf-sup correspondente à restrição sobre a divergência do campo de velocidade [28, 50]. Para isto utiliza-se o elemento comumente denominado *mini* [4], portanto, os espaços de aproximação são os seguintes

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mathbf{u}_2}^h &= ([Y_h]^3 \oplus \mathbf{B}_h) \cap \mathcal{M}_{\mathbf{u}_2}, \\ \mathcal{M}_{p_2}^h &= Y_h, \\ \mathcal{M}_{\gamma_Y}^h &= [Y_h]^3 \cap \mathcal{M}_{\gamma_Y}, \\ Y_h &= \{\phi \in C^0(\overline{\Omega}_2); \phi|_{e_{3D}} \in \mathbb{P}_1, \forall e_{3D} \in \mathcal{I}_{3D}^e\},\end{aligned}\tag{2.2.37}$$

onde \mathbf{B}_h é o espaço de funções vetoriais bolha em \mathbb{R}^3 .

Neste caso novamente é necessário utilizar uma ponderação do tipo Petrov–Galerkin devido à convecção dominante. Para isto emprega-se a técnica de *Streamline Upwind Petrov–Galerkin*, ou simplesmente SUPG [74], com um parâmetro de *upwind* definido de forma adequada em função da velocidade relativa que dá a convecção. Em todos os casos as não linearidades são tratadas com iterações de Picard. No que segue o domínio e_{3D}^{it} denota, de acordo à notação usada, o elemento genérico e_{3D} considerado na iteração anterior em função dos deslocamentos com respeito à configuração original de referência. Por último, o problema é regularizado utilizando o método de compressibilidade artificial [28], com coeficiente de compressibilidade ϵ .

Assim sendo, das expressões (2.1.17a), (2.1.17b), (2.1.17c) e (2.1.17e), obtém-se o seguinte para um elemento genérico e_{3D} de 5 nós

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}_{[\mathbf{u}_2]_m[\mathbf{u}_2]_n}^{3D}]_{ij}^{it} &= \int_{e_{3D}^{it}} \left(\frac{\rho}{\Delta t} [\phi_j]_n \cdot [\phi_i]_m + \theta \rho (\nabla [\phi_j]_n) \mathbf{u}_r^{it} \cdot [\omega_i^{it}]_m \right. \\ &\quad \left. + \theta \mu \varepsilon([\phi_j]_n) \cdot \varepsilon([\phi_i]_m) \right) dx,\end{aligned}\tag{2.2.38}$$

$$[\mathbf{A}_{[\mathbf{u}_2]_m p_2}^{3D}]_{ij}^{it} = - \int_{e_{3D}^{it}} \psi_j \operatorname{div} [\phi_i]_m dx,\tag{2.2.39}$$

$$[\mathbf{A}_{p_2[\mathbf{u}_2]_m}^{3D}]_{ij}^{it} = - \int_{e_{3D}^{it}} \operatorname{div} [\phi_j]_m \psi_i dx,\tag{2.2.40}$$

$$[\mathbf{A}_{p_2 p_2}^{3D}]_{ij}^{it} = -\epsilon \int_{e_{3D}^{it}} \psi_j \psi_i dx,\tag{2.2.41}$$

$$\begin{aligned}[\mathbf{f}_{[\mathbf{u}_2]_n}^{3D}]_i^{it} &= \int_{e_{3D}^{it}} \left([\mathbf{f}]_n \cdot [\omega_i^{it}]_n + \frac{\rho}{\Delta t} [\mathbf{u}_2^n]_n \cdot [\phi_i]_n - (1 - \theta) \rho (\nabla [\mathbf{u}_2^n]_n) \mathbf{u}_r^{it} \cdot [\omega_i^{it}]_n \right. \\ &\quad \left. - (1 - \theta) \mu \varepsilon([\mathbf{u}_2^n]_n) \cdot \varepsilon([\phi_i]_n) \right) dx,\end{aligned}\tag{2.2.42}$$

$$[\mathbf{f}_{p_2}^{3D}]_i = 0,\tag{2.2.43}$$

onde $[\phi_i]_1 = (\phi_i, 0, 0)$, $[\phi_i]_2 = (0, \phi_i, 0)$ e $[\phi_i]_3 = (0, 0, \phi_i)$, com $i = 1, \dots, n_{ne}$, são funções clássicas de tipo Galerkin junto com a função bolha, quando $i = 5$, para o campo de velocidade, ou seja $\phi \in \mathcal{M}_{\mathbf{u}_2}^h$. Correspondentemente, ψ é a função para interpolar a pressão, isto é $\psi \in \mathcal{M}_{p_2}^h$. Os índices i, j percorrem os nós do elemento (1 até 5), entretanto a pressão não possui grau de liberdade no último nó, que é o nó bolha. Os índices m, n percorrem a dimensão do problema (1 até 3). Segundo visto, para \mathbf{a} arbitrário,

$[\mathbf{a}]_m$ denota o vetor em cuja m -ésima posição contém a componente m -ésima do vetor \mathbf{a} , enquanto que os demais elementos são nulos, ou seja se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_q)$ então $[\mathbf{a}]_m = (0, 0, \dots, a_m, 0, \dots, 0)$. Além disso

$$\boldsymbol{\omega}_i^{it} = \phi_i + \tau_{uw}(\nabla\phi_i)\mathbf{u}_r^{it}, \quad (2.2.44)$$

$$\tau_{uw} = \frac{|\Delta\mathbf{x}|}{2|\mathbf{v}_{uw}^{it}|} \left(1 - \frac{1}{\alpha^{it}}\right), \quad (2.2.45)$$

$$\mathbf{u}_r^{it} = [\mathbf{u}_2^\theta]^{it} - \mathbf{w}_2^{it}, \quad (2.2.46)$$

$$\mathbf{v}_{uw}^{it} = \mathbf{u}_2^{it} - \mathbf{w}_2^{it}, \quad (2.2.47)$$

$$[\mathbf{u}_2^\theta]^{it} = \theta\mathbf{u}_2^{it} + (1 - \theta)\mathbf{u}_2^n, \quad (2.2.48)$$

$$\mathbf{w}_2^{it} = \frac{\gamma_{\mathbf{Y}}^{it} - \gamma_{\mathbf{Y}}^n}{\Delta t}, \quad (2.2.49)$$

$$\alpha^{it} = \frac{\rho|\mathbf{v}_{uw}^{it}||\Delta\mathbf{x}|}{2\mu}, \quad (2.2.50)$$

onde $|\Delta\mathbf{x}|$ é o tamanho característico do elemento. Passando ao problema relacionado aos deslocamentos $\gamma_{\mathbf{Y}}$, as matrizes para um elemento genérico resultam

$$[\mathbf{A}_{[\gamma_{\mathbf{Y}}]_m[\gamma_{\mathbf{Y}}]_n}]_{ij}^{it} = \int_{e_{3D}^{it}} \nabla[\boldsymbol{\psi}_j]_n \cdot \nabla[\boldsymbol{\psi}_i]_m \, d\mathbf{x}, \quad (2.2.51)$$

$$[\mathbf{f}_{[\gamma_{\mathbf{Y}}]_m}]_i = 0, \quad (2.2.52)$$

onde $[\boldsymbol{\psi}_i]_1 = (\psi_i, 0, 0)$, $[\boldsymbol{\psi}_i]_2 = (0, \psi_i, 0)$ e $[\boldsymbol{\psi}_i]_3 = (0, 0, \psi_i)$, com $i = 1, \dots, n_{ne} - 1$, e com $\boldsymbol{\psi} \in \mathcal{M}_{\gamma_{\mathbf{Y}}}^n$. Por último, para os nós sobre a fronteira Γ_{L2} resultam também as seguintes contribuições provenientes da parte estrutural do problema

$$[\mathbf{A}_{[\mathbf{u}_2]_m[\mathbf{u}_2]_n}]_{ij}^L = \frac{Eh_0}{R_0^2} [\boldsymbol{\delta}_{ij}]_{nm}, \quad (2.2.53)$$

$$[\mathbf{A}_{[\mathbf{u}_2]_m p_2}]_{ij}^{it} = -\frac{1}{\Delta t} \delta_{ij} [\mathbf{1}]_m \cdot [\mathbf{n}_2^{it}]_m, \quad (2.2.54)$$

$$[\mathbf{A}_{[\gamma_{\mathbf{Y}}]_m[\gamma_{\mathbf{Y}}]_n}]_{ij}^L = [\boldsymbol{\delta}_{ij}]_{nm}, \quad (2.2.55)$$

$$[\mathbf{A}_{[\gamma_{\mathbf{Y}}]_m p_2}]_{ij}^{it} = -\delta_{ij} [\mathbf{1}]_m \cdot [\mathbf{n}_2^{it}]_m, \quad (2.2.56)$$

$$[\mathbf{f}_{[\mathbf{u}_2]_n}]_i^L = -\frac{p_2^n}{\Delta t} [\mathbf{1}]_n \cdot [\mathbf{n}_2^{it}]_n, \quad (2.2.57)$$

$$[\mathbf{f}_{[\gamma_{\mathbf{Y}}]_n}]_i^{it} = -p_0 [\mathbf{1}]_n \cdot [\mathbf{n}_2^{it}]_n, \quad (2.2.58)$$

onde δ_{ij} é a delta de Kronecker, a qual é $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Além disso, $[\boldsymbol{\delta}_{ij}]_{kl}$ é a delta de Kronecker composta, sendo que quando $i = j$ tem-se $[\boldsymbol{\delta}_{ij}]_{kl} = \delta_{kl}$ e $[\boldsymbol{\delta}_{ij}]_{kl} = 0$ se $i \neq j$. Por último $[\mathbf{1}]_m$ é o vetor característico que possui valor unitário na componente m -ésima e valor nulo nas outras componentes. Estas equações devem ser incorporadas de forma não aditiva no sistema de equações, ou seja, não devem contribuir na montagem de elementos da forma clássica juntamente com os elementos de volume em Ω_2 , mas devem governar as equações dos graus de liberdade de velocidade e de deslocamentos dos nós que estão sobre a fronteira Γ_{L2} . Note que as equações para os graus de liberdade de pressão dos nós sobre esta fronteira não são alteradas, mas são os elementos que estão no volume Ω_2 os que contribuem nas equações da pressão sobre os nós da fronteira Γ_{L2} .

2.2.3 Fechamento do problema de acoplamento 3D–1D aproximado

Para fechar o problema discreto falta ainda especificar as equações do terminal de Windkessel assim como as de acoplamento. Começando com o terminal de Windkessel, as equações que são adicionadas à matriz são as correspondentes a uma discretização de um passo na variável temporal das equações na (2.1.19), que resultam

$$[\mathbf{A}_{QQ}^t]_{11} = 1, \quad (2.2.59)$$

$$[\mathbf{A}_{QQ}^t]_{12} = -1, \quad (2.2.60)$$

$$[\mathbf{A}_{p_1Q}^t]_{11} = (R_1 + R_2) + \frac{R_1 R_2 C}{\Delta t}, \quad (2.2.61)$$

$$[\mathbf{A}_{p_1p_1}^t]_{11} = 1 + \frac{R_2 C}{\Delta t}, \quad (2.2.62)$$

$$[\mathbf{A}_{p_1p_1}^t]_{22} = 1, \quad (2.2.63)$$

$$[\mathbf{A}_{p_1p_1}^t]_{21} = -1, \quad (2.2.64)$$

$$[\mathbf{f}_{p_1}^t]_1 = \frac{R_2 C}{\Delta t} p_1^n - \frac{R_1 R_2 C}{\Delta t} Q^n + p_t + R_2 C \frac{dp_t}{dt}, \quad (2.2.65)$$

$$[\mathbf{f}_{p_1}^t]_2 = 0, \quad (2.2.66)$$

$$[\mathbf{f}_Q^t]_1 = 0, \quad (2.2.67)$$

$$[\mathbf{f}_Q^t]_2 = 0, \quad (2.2.68)$$

onde $i = 1$ corresponde ao primeiro nó indicado na Figura 2.3, enquanto que $i = 2$ corresponde ao primeiro nó efetivo da porção de domínio 1D, e que é o segundo nó do terminal. Note que este primeiro elemento não possui grau de liberdade de área A , mas somente de fluxo Q e pressão p_1 .

Este é, para o caso sob estudo, um único elemento que contribui com uma só matriz elementar na matriz do sistema. Além do mais, esta matriz deve ir de forma não aditiva no grau de liberdade de pressão do nó 2 (segundo a numeração do terminal). Isto é, a equação que este elemento incorpora não deve ir somada como contribuição à matriz do sistema, mas deve vir a substituir a equação que se montou quando vindo desde a porção 1D. Em outras palavras, na equação de p_1 no nó 2 não se deve somar nenhuma contribuição além da que o elemento terminal introduz. Para mais detalhes sobre este conceito de não aditividade ver [156].

Por último, devem ser introduzidas as condições de acoplamento. Implementam-se dois tipos de elementos para tal fim. O primeiro elemento é um elemento de um nó, que é o último nó na malha do domínio 1D, ou seja, aquele nó que jaz sobre a superfície Γ_a e que fora enumerado como $n_{1D} + 1$ na Figura 2.3. Os graus de liberdade dele são os usuais, isto é Q , p_1 e A , porém somente introduz o seguinte termo

$$[\mathbf{A}_{QQ}^a]_{11} = 1, \quad (2.2.69)$$

sendo que este coeficiente deve ser introduzido de forma não aditiva na equação do fluxo do mencionado nó. Este bloco matricial é em efeito um valor real, ou seja, uma matriz de 1×1 .

Por outro lado, utiliza-se um conjunto de elementos de $n_{ne} = 4$ nós para discretizar a superfície Γ_a , obtendo o conjunto de elementos e_a denominado \mathcal{I}_a^e , segundo indicado na Tabela 2.1. Estes elementos são triângulos com um nó adicional que é o primeiro na matriz elementar. Este primeiro nó é de fato o nó da malha 1D que está sobre Γ_a , aquele mesmo cujo grau de liberdade Q foi alterado como acima. Estes elementos de quatro nós

introduzem a seguinte matriz elementar na matriz do sistema

$$[\mathbf{A}_{Q[\mathbf{u}_2]_m}^a]_{1j}^{it} = \int_{e_a^{it}} [\phi_j]_m \cdot \mathbf{n}_1 \, d\Gamma, \quad (2.2.70)$$

$$[\mathbf{A}_{[\mathbf{u}_2]_m p_1}^a]_{i1}^{it} = \int_{e_a^{it}} [\phi_i]_m \cdot \mathbf{n}_1 \, d\Gamma, \quad (2.2.71)$$

onde ϕ_i é a função vetorial do nó i , com $i = 2, 3, 4$, para cada nó do triângulo. A notação é igual à usada antes. O fato de ter explicitado $i = 1$ e $j = 1$ respectivamente é devido a que o primeiro nó é o da malha unidimensional, e os graus de liberdade envolvidos neste acoplamento são o fluxo e a pressão.

Para terminar de descrever o problema basta introduzir na matriz do sistema as condições sobre os graus de liberdade de velocidade \mathbf{u}_2 para os nós que estão sobre Γ_{D_2} . Isto é feito de forma tradicional, eliminando a equação correspondente, colocando um valor unitário na diagonal e incorporando o valor da condição no vetor de carregamentos. Finalmente, o sistema de equações é montado de forma clássica, a menos daquelas equações denominadas não aditivas. Entretanto, para simplificar a apresentação detalha-se a montagem clássica para depois, a nível das equações do sistema, introduzir de forma não aditiva as correspondentes equações. Para a porção 1D obtêm-se as seguintes matrizes após a montagem dos elementos

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}_{QQ}^{1D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{1D}} [\mathbf{A}_{QQ}^{1D}]_e^{it}, \\ [\mathcal{A}_{Qp_1}^{1D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{1D}} [\mathbf{A}_{Qp_1}^{1D}]_e^{it}, \\ [\mathcal{A}_{p_1Q}^{1D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{1D}} [\mathbf{A}_{p_1Q}^{1D}]_e^{it}, \\ [\mathcal{A}_{p_1p_1}^{1D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{1D}} [\mathbf{A}_{p_1p_1}^{1D}]_e^{it}, \\ \mathcal{A}_{Ap_1}^{1D} &= \bigcup_{e=1}^{e_{1D}} [\mathbf{A}_{Ap_1}^{1D}]_e, \\ [\mathcal{A}_{AA}^{1D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{1D}} [\mathbf{A}_{AA}^{1D}]_e^{it}, \\ [\mathcal{F}_Q^{1D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{1D}} [\mathbf{f}_Q^{1D}]_e^{it}, \\ [\mathcal{F}_{p_1}^{1D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{1D}} [\mathbf{f}_{p_1}^{1D}]_e^{it}, \\ [\mathcal{F}_A^{1D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{1D}} [\mathbf{f}_A^{1D}]_e^{it}, \end{aligned} \quad (2.2.72)$$

enquanto que para a porção 3D a montagem fornece o seguinte

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2}^{3D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{3D}} [\mathbf{A}_{\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2}^{3D}]_e^{it}, \\
[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_2p_2}^{3D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{3D}} [\mathbf{A}_{\mathbf{u}_2p_2}^{3D}]_e^{it}, \\
[\mathcal{A}_{p_2\mathbf{u}_2}^{3D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{3D}} [\mathbf{A}_{p_2\mathbf{u}_2}^{3D}]_e^{it}, \\
[\mathcal{A}_{p_2p_2}^{3D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{3D}} [\mathbf{A}_{p_2p_2}^{3D}]_e^{it}, \\
[\mathcal{F}_{\mathbf{u}_2}^{3D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{3D}} [\mathbf{f}_{\mathbf{u}_2}^{3D}]_e^{it}, \\
\mathcal{F}_{p_2}^{3D} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.2.73}$$

A montagem das equações dos deslocamentos é a seguinte

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}_{\gamma_Y\gamma_Y}^{3D}]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_{3D}} [\mathbf{A}_{\gamma_Y\gamma_Y}^{3D}]_e^{it}, \\
\mathcal{F}_{\gamma_Y}^{3D} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.2.74}$$

enquanto que para a interface de acoplamento tem-se também a seguinte montagem

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}_{Q\mathbf{u}_2}^a]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_a} [\mathbf{A}_{Q\mathbf{u}_2}^a]_e^{it}, \\
[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_2p_1}^a]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_a} [\mathbf{A}_{\mathbf{u}_2p_1}^a]_e^{it}.
\end{aligned} \tag{2.2.75}$$

Por último, sobre a fronteira Γ_{L_2} , lembrando que a montagem deve ser realizada de forma não aditiva, resulta

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2}^L]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_L} [\mathbf{A}_{\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2}^L]_e^{it}, \\
[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_2p_2}^L]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_L} [\mathbf{A}_{\mathbf{u}_2p_2}^L]_e^{it}, \\
[\mathcal{A}_{\gamma_Y\gamma_Y}^L]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_L} [\mathbf{A}_{\gamma_Y\gamma_Y}^L]_e^{it}, \\
[\mathcal{A}_{\gamma_Yp_2}^L]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_L} [\mathbf{A}_{\gamma_Yp_2}^L]_e^{it}, \\
[\mathcal{F}_{\mathbf{u}_2}^L]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_L} [\mathbf{f}_{\mathbf{u}_2}^L]_e^{it}, \\
[\mathcal{F}_{\gamma_Y}^L]^{it} &= \bigcup_{e=1}^{e_L} [\mathbf{f}_{\gamma_Y}^L]_e^{it}.
\end{aligned} \tag{2.2.76}$$

Aqui têm-se substituído os índices locais a nível de elemento i, j nas matrizes elementares

pelo índice de elemento e , e os índices m, n envolvendo quantidades vetoriais também foram suprimidos.

Como dito, estas montagens devem ser modificadas introduzindo os blocos matriciais não aditivos apresentados antes. Isto é feito na hora de explicitar o sistema de equações completo.

2.2.4 Problema acoplado 3D–1D monolítico

O problema de acoplamento como foi apresentado na seção anterior está totalmente acoplado, isto é, os valores de p_1 e Q na interface Γ_a são de fato incógnitas do problema e, portanto, são calculados após resolvido o sistema de equações. A seguir explicita-se a matriz do sistema em função dos sub-blocos matriciais vistos nas seções anteriores. Isto é, os nós e graus de liberdade que o mereçam serão discriminados a fim de introduzir corretamente as equações não aditivas. A partir daqui elimina-se o superíndice it para simplificar a notação. Logo, o problema discreto resulta ser o seguinte:

Problema 2.3 (Problema 3D–1D discreto monolítico). *Para cada passo de tempo t_{n+1} , $n = 0, \dots, N$, realize as iterações $it = 1, 2, \dots$, até que um critério de convergência seja atingido, resolvendo o seguinte sistema de equações lineares*

$$\mathbf{AU}^{n+1} = \mathbf{f}, \quad (2.2.77)$$

onde

$$\mathbf{U}^{n+1} = \begin{pmatrix} [Q_1^t]^{n+1} \\ [p_1^t]^{n+1} \\ [Q_2^D]^{n+1} \\ [p_2^D]^{n+1} \\ [A_2^D]^{n+1} \\ [U_Q^D]^{n+1} \\ [U_{p_1}^D]^{n+1} \\ [U_A^D]^{n+1} \\ [Q_{n_1 D+1}^{1D}]^{n+1} \\ [p_{n_1 D+1}^{1D}]^{n+1} \\ [A_{n_1 D+1}^{1D}]^{n+1} \\ [U_{u_2}^a]^{n+1} \\ [U_{u_2}^{3D}]^{n+1} \\ [U_{u_2}^L]^{n+1} \\ [U_{u_2}^D]^{n+1} \\ [U_{p_2}^a]^{n+1} \\ [U_{p_2}^{3D}]^{n+1} \\ [U_{p_2}^L]^{n+1} \\ [U_{p_2}^D]^{n+1} \\ [U_{\gamma_Y}^{3D}]^{n+1} \\ [U_{\gamma_Y}^L]^{n+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ [f_{p_1}^t]_1 \\ f_Q^{1D} \\ 0 \\ f_A^{1D} \\ \mathcal{F}_Q^{1D} \\ \mathcal{F}_{p_1}^{1D} \\ \mathcal{F}_A^{1D} \\ 0 \\ f_{p_1}^{1D} \\ f_A^{1D} \\ \mathcal{F}_{u_2}^{3D} \\ \mathcal{F}_{u_2}^{3D} \\ \mathcal{F}_{u_2}^L \\ \tilde{\mathcal{U}}_{u_2}^D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F}_{\gamma_Y}^L \end{pmatrix}, \quad (2.2.78)$$

em questão e um dos graus de liberdade do conjunto com o qual se está acoplando. Por exemplo, o grau de liberdade Q_2^{1D} acopla-se com o conjunto de graus de liberdade \mathbf{U}_Q^{1D} por meio do bloco $\tilde{\mathbf{A}}_{QQ}^{1D}$, através de uma equação imposta pela porção 1D, enquanto que o acoplamento recíproco indica-se da mesma forma. Entretanto, observe-se que somente se acopla com os graus de liberdade do nó que segue na malha, sendo somente um nó de tal conjunto. O bloco \mathbf{I} é a matriz identidade e $\tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{u}_2}^D$ indica a condição de Dirichlet imposta sobre Γ_{D2} . Finalmente, o bloco $\tilde{\mathbf{A}}_{Q\mathbf{u}_2}^a$ acopla os graus de liberdade de fluxo do último nó da porção 1D com os nós da superfície lateral Γ_{L2} que se encontram sobre a curva $\partial\Gamma_a$ e que de fato fazem parte da superfície Γ_a . O bloco $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{u}_2 p_1}^a$ não aparece devido à propriedade de não aditividade dos graus de liberdade de velocidade dos nós sobre Γ_{L2} , e em particular daqueles sobre $\partial\Gamma_a$.

A seguir indicam-se as dimensões de cada um dos vetores de incógnitas no sistema de equações para este caso que se corresponde com o esquema da Figura 2.3, lembrando que se utiliza o elemento *mini* que adiciona um nó por elemento no sistema completo

$$\begin{aligned}
[Q_1^t]^{n+1} &= 1 & [\mathbf{U}_{\mathbf{u}_2}^a]^{n+1} &= 3n_a, \\
[p_{11}^t]^{n+1} &= 1 & [\mathbf{U}_{\mathbf{u}_2}^{3D}]^{n+1} &= 3(n_{3D} + e_{3D} - n_a - n_L - n_D), \\
[Q_2^{1D}]^{n+1} &= 1 & [\mathbf{U}_{\mathbf{u}_2}^L]^{n+1} &= 3n_L, \\
[p_{12}^{1D}]^{n+1} &= 1 & [\mathbf{U}_{\mathbf{u}_2}^D]^{n+1} &= 3n_D, \\
[A_2^{1D}]^{n+1} &= 1 & [\mathbf{U}_{p_2}^a]^{n+1} &= n_a, \\
[\mathbf{U}_Q^{1D}]^{n+1} &= n_{1D} - 2 & [\mathbf{U}_{p_2}^{3D}]^{n+1} &= n_{3D} - n_a - n_L - n_D, \\
[\mathbf{U}_{p_1}^{1D}]^{n+1} &= n_{1D} - 2 & [\mathbf{U}_{p_2}^L]^{n+1} &= n_L, \\
[\mathbf{U}_A^{1D}]^{n+1} &= n_{1D} - 2 & [\mathbf{U}_{p_2}^D]^{n+1} &= n_D, \\
[Q_{n_{1D}+1}^{1D}]^{n+1} &= 1 & [\mathbf{U}_{\gamma_Y}^{3D}]^{n+1} &= 3(n_{3D} - n_L), \\
[p_{1n_{1D}+1}^{1D}]^{n+1} &= 1 & [\mathbf{U}_{\gamma_Y}^L]^{n+1} &= 3n_L, \\
[A_{n_{1D}+1}^{1D}]^{n+1} &= 1. & &
\end{aligned}$$

O superíndice discrimina qual a parte correspondente a cada conjunto de graus de liberdade de acordo com a Tabela 2.1.

Observa-se que os blocos que efetivamente realizam o acoplamento entre as porções 1D e 3D são $\mathcal{A}_{Q\mathbf{u}_2}^a$, $\tilde{\mathcal{A}}_{Q\mathbf{u}_2}^a$ e $\mathcal{A}_{\mathbf{u}_2 p_1}^a$ que se encontram ressaltados na matriz \mathbf{A} . O sistema $\mathbf{A}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{f}$ visto anteriormente pode ser apresentado, em forma compacta, da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1D1D} & \mathcal{A}_{1D3D} \\ \mathcal{A}_{3D1D} & \mathcal{A}_{3D3D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mathbf{U}_{1D}]^{n+1} \\ [\mathbf{U}_{3D}]^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{1D} \\ \mathcal{F}_{3D} \end{pmatrix}, \quad (2.2.80)$$

onde os índices denotam graus de liberdade e blocos matriciais correspondentes às porções 1D e 3D, e além disso

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{1D3D} &= \mathcal{A}_{Q\mathbf{u}_2}^a + \tilde{\mathcal{A}}_{Q\mathbf{u}_2}^a, \\
\mathcal{A}_{3D1D} &= \mathcal{A}_{\mathbf{u}_2 p_1}^a,
\end{aligned} \quad (2.2.81)$$

onde a soma deve ser entendida de forma a incluir no acoplamento os graus de liberdade de velocidade que se encontram sobre $\partial\Gamma_a$. O resto dos blocos matriciais pode ser facilmente identificado da expressão (2.2.79).

Na próxima seção discute-se acerca da possibilidade de desacoplar o sistema de equações a fim de reduzir o custo computacional.

2.2.5 Problema acoplado 3D–1D segregado

O problema acoplado envolve, segundo pode ser visto, um alto nível de acoplamento entre graus de liberdade. Com efeito, o grau de liberdade de fluxo Q do último nó da malha 1D, o nó $n_{1D} + 1$, está acoplado com todos os graus de liberdade de velocidade sobre Γ_a , que são, ao todo, $3(n_a + n_C)$ onde n_C é o número de nós sobre $\partial\Gamma_a$ (ver blocos $\mathcal{A}_{Qu_2}^a$ e $\tilde{\mathcal{A}}_{Qu_2}^a$). Por outro lado, todas as equações de velocidade dos nós sobre Γ_a (os n_a nós interiores) estão acopladas com o grau de liberdade de pressão p_1 do mesmo último nó da malha 1D (ver bloco $\mathcal{A}_{u_2p_1}^a$).

Pensando agora na resolução do sistema de equações, e devido ao fato de estar trabalhando em domínios 3D, o tamanho da matriz \mathbf{A} pode rapidamente crescer, fazendo com que a utilização de resolvidores diretos não seja viável. Dado que os resolvidores a utilizar são de caráter iterativo, o alto grau de acoplamento pode trazer, e de fato traz, complicações na hora do condicionamento e da resolução do sistema (2.2.77). Por esta causa, resulta indispensável encontrar uma forma de desacoplar as equações, resolvendo de forma iterativa um problema sobre o domínio 1D e outro sobre o domínio 3D. Um simples esquema de desacoplamento das equações baseado em um método de Gauss-Seidel (pelo fato de utilizar nas equações seguintes todas as incógnitas atualizadas disponíveis até esse momento) poderia ser o seguinte:

Problema 2.4 (Problema 3D–1D discreto segregado). *Para cada passo de tempo t_{n+1} , $n = 0, \dots, N$, realize as iterações $it = 1, 2, \dots$, $it_{1D} = 1, 2, \dots$, e $it_{3D} = 1, 2, \dots$, até que os correspondentes critérios de convergência sejam atingidos, resolvendo os seguintes sistemas de equações lineares*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{1D1D}^{it_{1D}}[\mathbf{U}_{1D}]^{n+1} &= [\tilde{\mathcal{F}}_{1D}^{it_{1D}}]_{it}, \\ \mathcal{A}_{3D3D}^{it_{3D}}[\mathbf{U}_{3D}]^{n+1} &= [\tilde{\mathcal{F}}_{3D}^{it_{3D}}]_{n+1},\end{aligned}\tag{2.2.82}$$

onde

$$\begin{aligned}[\tilde{\mathcal{F}}_{1D}^{it_{1D}}]_{it} &= \mathcal{F}_{1D}^{it_{1D}} - \mathcal{A}_{1D3D}^{it_{1D}}[\mathbf{U}_{3D}]^{it}, \\ [\tilde{\mathcal{F}}_{3D}^{it_{3D}}]_{n+1} &= \mathcal{F}_{3D}^{it_{3D}} - \mathcal{A}_{3D1D}^{it_{3D}}[\mathbf{U}_{1D}]^{n+1},\end{aligned}\tag{2.2.83}$$

onde é possível avaliar $[\mathbf{U}_{1D}]^{n+1}$ do fato de ter resolvido primeiramente o problema sobre a porção 1D. O índice it foi explicitado para salientar as iterações realizadas entre os problemas 1D e 3D.

Em palavras, resolve-se o sub-problema 1D iterando com it_{1D} , e considerando que no segundo membro há uma contribuição do sub-problema 3D, uma vez convergido passa-se a resolver o sub-problema 3D iterando com it_{3D} . Ao convergir volta-se ao sub-problema 1D e assim itera-se sucessivamente entre sub-sistemas, segundo o índice it , até alcançar a convergência global de todos os graus de liberdade. Observe que nada impede inverter a ordem de resolução, começando pelo problema 3D. Nos casos que foram testados utilizando este esquema de desacoplamento foi necessário introduzir um parâmetro de sub-relaxação ω entre as iterações it dos modelos 3D e 1D. Na Seção 2.3.9 apresenta-se um estudo sobre este aspecto.

2.3 Resultados numéricos

Nesta seção apresentam-se os resultados numéricos relacionados com o acoplamento de modelos 3D–1D de acordo com as técnicas de aproximação consideradas na seção anterior. Em primeiro lugar analisam-se diversos casos de interesse puramente acadêmico a

fim de estudar e entender as características do princípio variacional que governa o modelo acoplado 3D–1D. Depois, passa-se a analisar casos onde o modelo acoplado 3D–1D é utilizado na modelagem do sistema cardiovascular humano. Avançando mais um pouco mostram-se situações de interesse prático, onde as aplicações concretas estão apoiadas sobre as possibilidades que os modelos acoplados 3D–1D fornecem. Com efeito, alguns dos estudos a serem apresentados não poderiam ser realizados modelando o problema de forma clássica, entendendo por *clássica* àquela modelagem na qual um modelo, neste caso 3D, é suprido com condições de contorno obtidas de estimativas e/ou medições. Suponha por exemplo o caso de aplicação que será visto na Seção 2.3.4. Ali, devido à presença de uma estenose espera-se que as condições às quais está sujeita a região 3D sejam alteradas (não se fala de condições de contorno devido a que as mesmas são, em tal caso, condições de acoplamento, e são incógnitas do problema). Esta perturbação das curvas de fluxo e pressão à qual está sujeito o domínio 3D espera ser capturada pelo modelo acoplado 3D–1D devido a que o mesmo está construído de forma a representar a interação do sistema como uma única unidade. Esta sensibilidade do sistema ao que ocorre no modelo 3D nunca poderia ser captada por um modelo 3D com condições de contorno conhecidas, justamente porque tais condições de contorno, que são dadas, forçariam o escoamento dentro do domínio 3D. Analogamente, o modelo acoplado 3D–1D, e aqui está a maior vantagem deste modelo, permitiria quantificar qualquer outro tipo de sensibilidade do que ocorre a nível do escoamento na região 3D frente a alterações que acontecem a nível da árvore arterial completo.

Em todos os casos apresentados nesta seção o sistema de equações foi resolvido utilizando um resolvidor iterativo CGS com preconditionamento LU incompleto [140].

2.3.1 Casos de teste

Esta bateria de testes está baseada na resolução de um problema padrão onde o fluido escoar ao longo de um tubo que é modelado como sendo 1D nas partes inicial e final e como 3D na parte central. Nas Figuras 2.4 e 2.5 mostram-se os casos a serem resolvidos. A parede do tubo é considerada puramente elástica em todos os casos. Como condição de contorno impõe-se uma curva de pressão na entrada do domínio. A característica particular da onda de pressão imposta é o comprimento de onda, que se considera da ordem do raio do tubo. Assim sendo, a condição de contorno faz com que ondas de fluxo e pressão se propaguem através do tubo, atravessando as duas fronteiras de acoplamento.

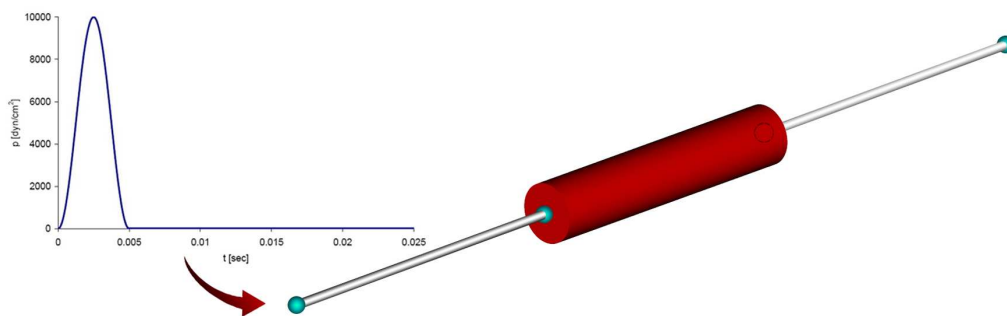


Figura 2.4: Domínio cilíndrico formado por regiões 3D e 1D.

As propriedades comuns a todos os casos são as seguintes $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, $\mu = 0.4 \text{ poise}$, $p_0 = 0$, $E = 20 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$, $k = 0$ e $h/R = 0.1$, e que são comuns às porções 3D e 1D de forma a ter um tubo homogêneo. O comprimento total do domínio é $L_T = 25 \text{ cm}$, o raio do tubo R e o comprimento L_{3D} são dados em cada caso. A onda de pressão imposta

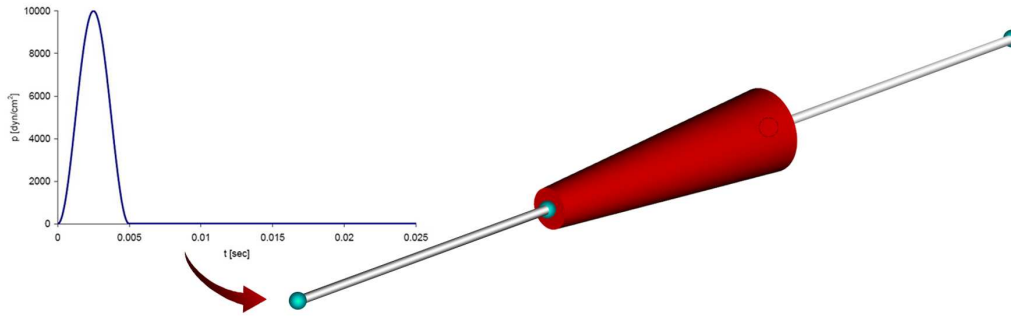


Figura 2.5: Domínio formado por uma região cônica 3D e duas cilíndricas 1D.

é da forma

$$p = \begin{cases} p_{\max} \sin^2\left(\frac{\pi t}{t_F}\right) & \text{se } 0 \leq t < t_F, \\ 0 & \text{se } t \geq t_F, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

e possui um valor máximo $p_{\max} = 10000 \text{ dyn/cm}^2$, o tempo t_F que define o comprimento de onda é dado em cada caso. A discretização temporal foi realizada em todos os casos com um passo de tempo $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$.

2.3.1.1 Caso A

Este caso corresponde ao esquema da Figura 2.4. O modelo 3D possui comprimento $L_{3D} = 5 \text{ cm}$, raio $R = 0.5 \text{ cm}$, e a condição de contorno de pressão foi definida para $t_F = 0.005 \text{ sec}$. A discretização espacial resultou em aproximadamente 41100 nós e 283400 graus de liberdade.

A seqüência da Figura 2.6 mostra a onda de pressão (o correspondente valor médio dentro do domínio 3D) atravessando o domínio 1D–3D–1D. Pode-se observar que surgem reflexões espúrias viajando em direção oposta ao atravessar ambas as fronteiras de acoplamento. A amplitude da reflexão é da ordem de 2.1% do valor máximo de pressão.

Na Figura 2.7 a manipulação da escala de cores permite apreciar a onda de pressão atravessando todo o domínio juntamente com as reflexões espúrias surgindo nas interfaces de acoplamento.

Para analisar a natureza das ondas espúrias foi feita, posteriormente, uma análise adimensional. No entanto, é possível obter algumas informações a partir de um caso similar como o que se apresenta a seguir.

Agora suponha que o comprimento de onda reduziu-se à metade, ou seja $t_F = 0.0025 \text{ sec}$. Neste caso a seqüência da Figura 2.8 põe em evidência novamente as reflexões espúrias que surgem quando a onda de pressão, que viaja ao longo do tubo, atravessa as fronteiras de acoplamento.

Neste caso, as reflexões possuem um comprimento de onda comparável ao da onda de pressão imposta, pelo que se conclui que as reflexões herdaram, como esperado, as características da onda incidente.

2.3.1.2 Caso B

Este caso corresponde também ao esquema da Figura 2.4. Os dados são idênticos aos da primeira parte do caso anterior, isto é, o comprimento do domínio 3D é $L_{3D} = 5 \text{ cm}$, com raio $R = 0.5 \text{ cm}$, e a condição de contorno de pressão é definida com $t_F = 0.005 \text{ sec}$. O detalhe interessante deste caso é que se simula a ausência de viscosidade no problema. Isto

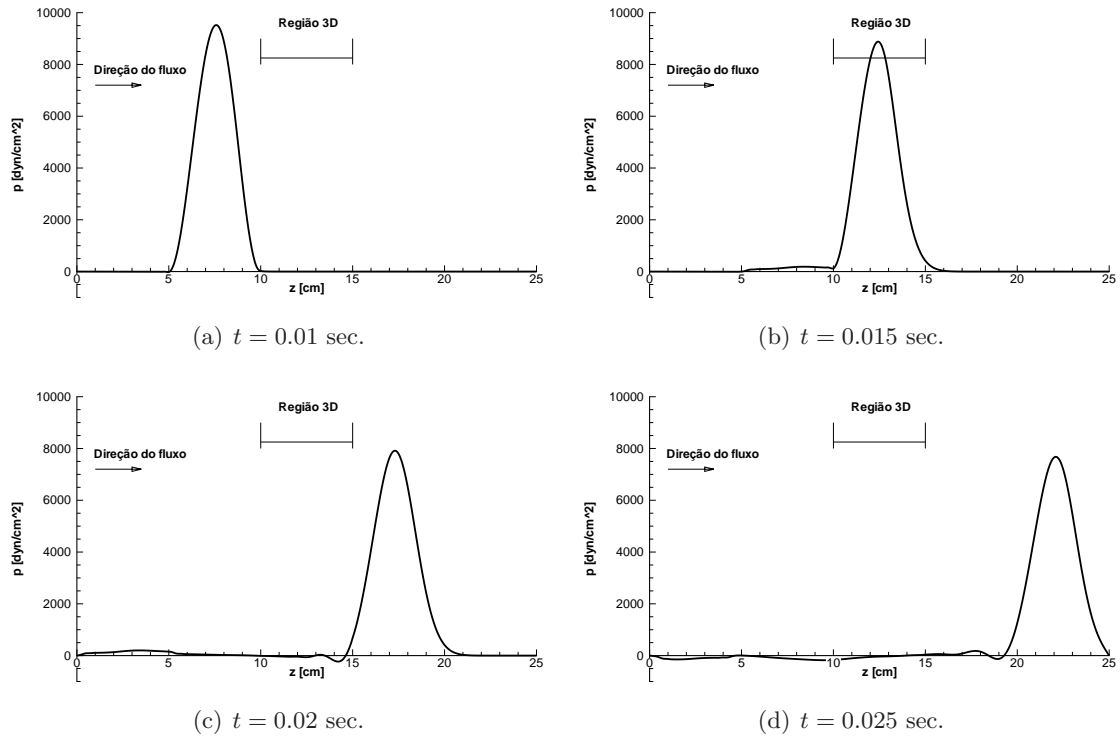


Figura 2.6: Resultados para o modelo acoplado 3D–1D.

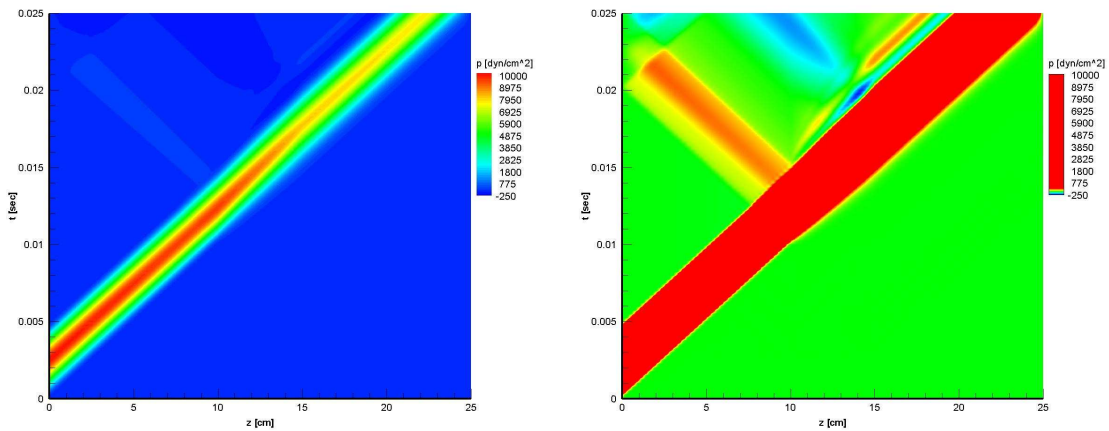


Figura 2.7: Onda de pressão atravessando o domínio 1D–3D–1D.

é realizado eliminando os termos viscosos nas equações sobre o domínio 1D e colocando a condição de deslizamento sobre a parede na região 3D. A discretização espacial é idêntica ao caso anterior.

Na seqüência da Figura 2.9 mostra-se a onda de pressão (o correspondente valor médio dentro do domínio 3D) atravessando o domínio 1D–3D–1D.

A Figura 2.10 evidencia a notória redução das reflexões espúrias com respeito à Figura 2.7. Apesar de ter reduzido o fenômeno, tais reflexões não foram completamente eliminadas, inclusive pelo fato de que o caso em estudo é somente uma forma artificial de simular ausência de viscosidade no domínio 3D.

Portanto, pode-se concluir que os fenômenos viscosos também estão associados ao aparecimento de reflexões espúrias nas interfaces de acoplamento entre os modelos. A

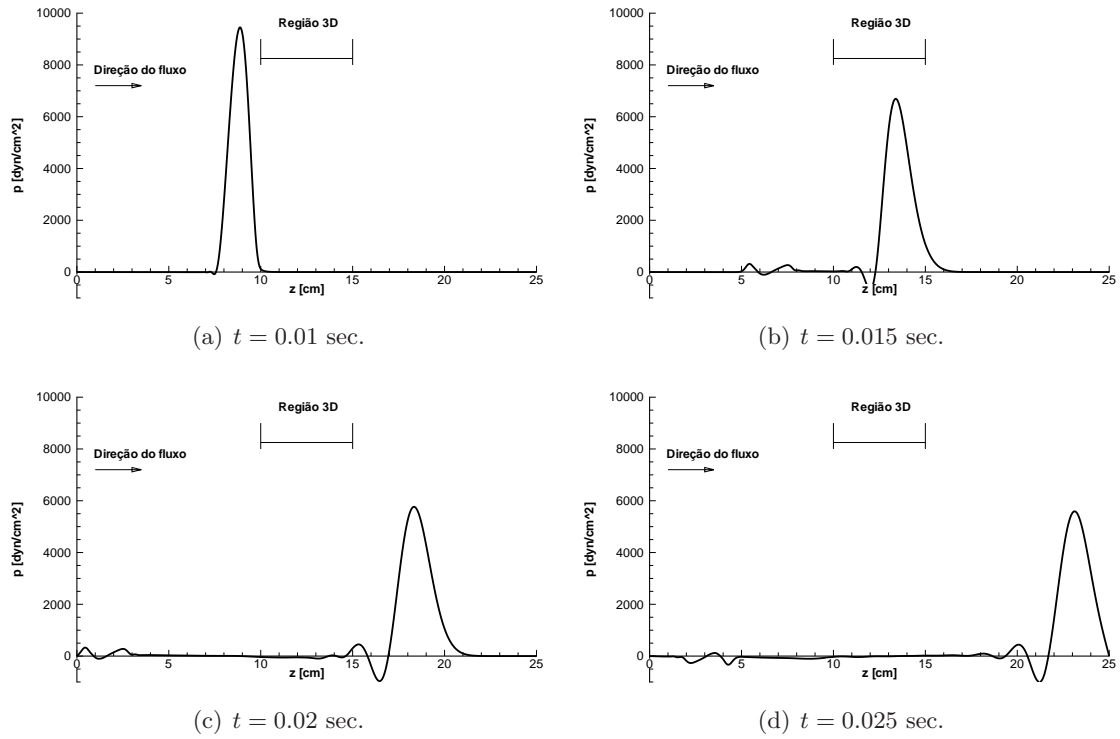


Figura 2.8: Resultados para o modelo acoplado 3D–1D. Comprimento de onda reduzido.

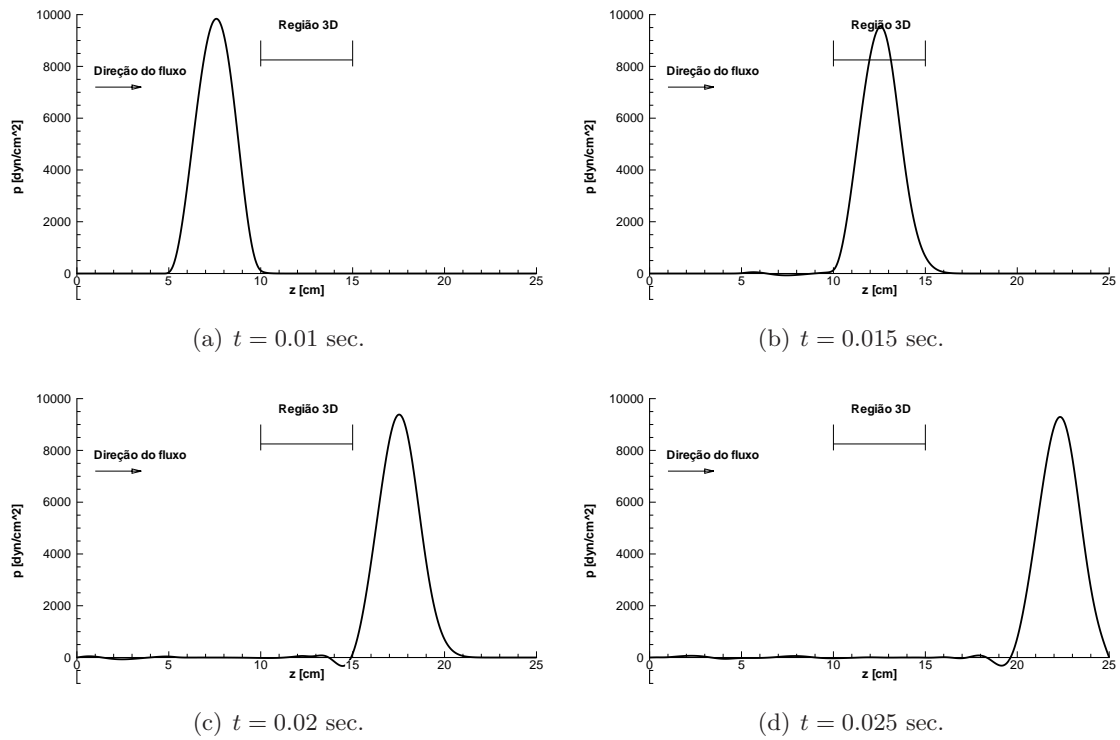


Figura 2.9: Resultados para o modelo acoplado 3D–1D simulando a ausência de viscosidade.

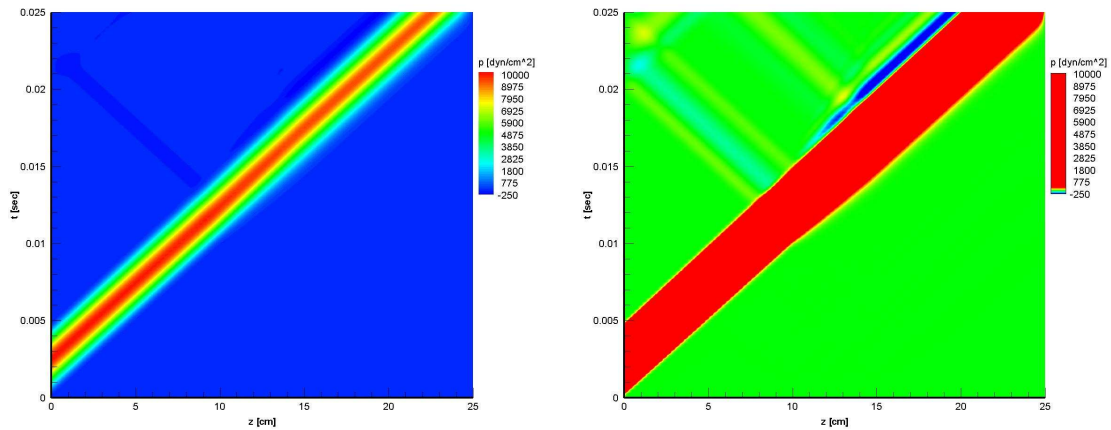


Figura 2.10: Onda de pressão atravessando o domínio 1D–3D–1D.

questão agora é estudar se existem outras condições sob as quais estas reflexões de caráter numérico sejam desprezíveis. Uma discussão sobre este tema é apresentada na Seção 2.3.2.

2.3.1.3 Caso C

O esquema para este exemplo é também o dado na Figura 2.4. Entretanto, aqui o modelo 3D possui comprimento $L_{3D} = 1$ cm, raio $R = 0.5$ cm, e a condição de contorno de pressão define-se com $t_F = 0.005$ sec. A discretização espacial resultou em aproximadamente 10700 nós e 71300 graus de liberdade.

A seqüência da Figura 2.11 mostra a onda de pressão (o correspondente valor médio dentro do domínio 3D) atravessando o domínio 1D–3D–1D. As reflexões que ocorrem nesta situação estão superpostas devido ao curto trecho percorrido pela onda de pressão na região 3D.

Da mesma forma que antes, a Figura 2.12 mostra as já mencionadas reflexões que, neste caso, estão quase superpostas como já explicado.

2.3.1.4 Caso D

Neste caso, o esquema é o dado na Figura 2.5 com uma região cônica 3D. O modelo 3D possui comprimento $L_{3D} = 5$ cm, raio de entrada $R_e = 0.35$ cm, raio de saída $R_s = 0.7$ cm, e a condição de contorno de pressão define-se com $t_F = 0.005$ sec. A discretização espacial resultou em aproximadamente 67900 nós e 472900 graus de liberdade.

Na seqüência de imagens da coluna esquerda na Figura 2.13 mostra-se a onda de pressão atravessando o domínio 1D–3D–1D.

Aqui, as reflexões de natureza numérica encontram-se superpostas com a reflexão distribuída de natureza física devido à expansão do domínio. No entanto, as mesmas ficam em evidência ao comparar a solução com a correspondente à obtida com um modelo puramente 1D, como mostra a seqüência de imagens da coluna direita na Figura 2.13.

2.3.2 Estudo sobre as reflexões espúrias

Como se viu, as reflexões espúrias ocorrem, em parte, devido a fenômenos viscosos. No entanto, pode ocorrer que haja outras condições para as quais tais reflexões possam ser desconsideradas. Para começar com o estudo desta resposta *não física* do modelo observe que ao longo da derivação do modelo 1D algumas hipóteses a respeito dos termos viscosos

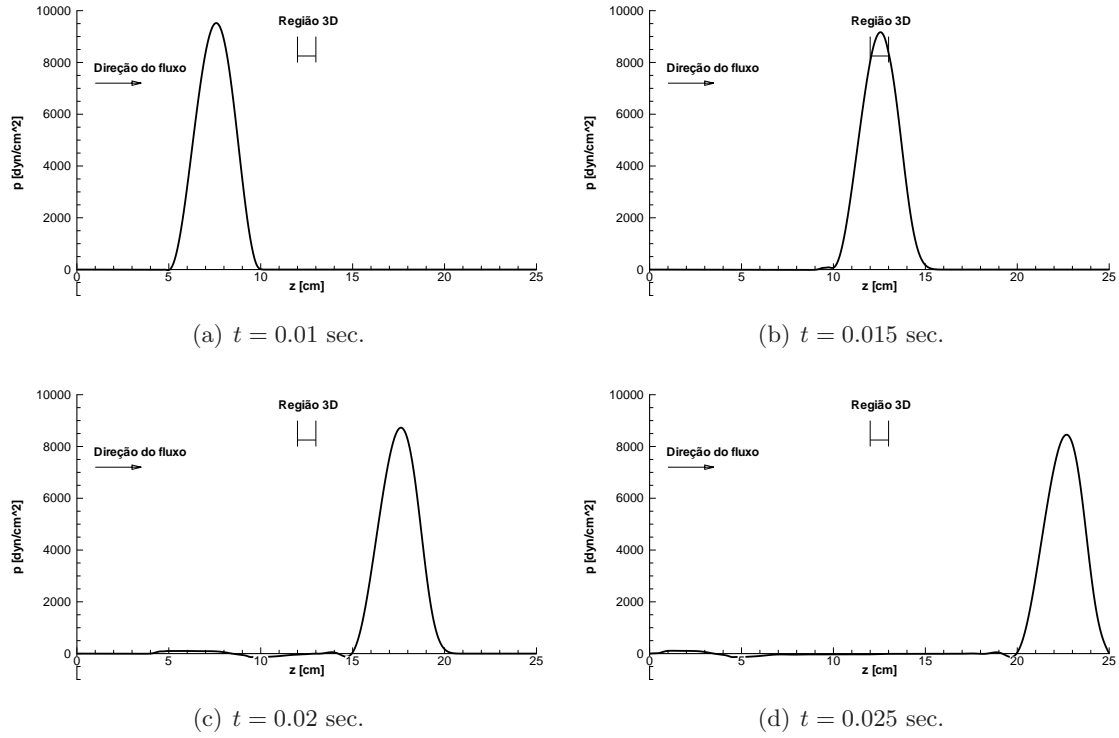


Figura 2.11: Resultados para o modelo acoplado 3D–1D. Domínio 3D reduzido.

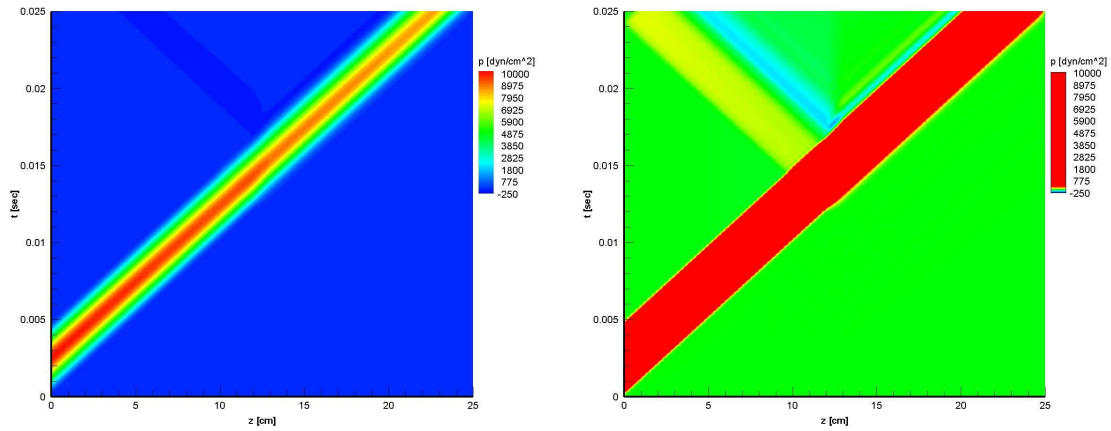


Figura 2.12: Onda de pressão atravessando o domínio 1D–3D–1D.

foram admitidas (veja a lei constitutiva (2.1.4)). Os termos relacionados com o gradiente da velocidade na direção do escoamento foram desconsiderados. Portanto, a análise vai se focar no estudo da condição de acoplamento que resulta como equação de Euler–Lagrange do Problema 2.2. A mesma é repetida aqui por conveniência

$$-p_1 \mathbf{n}_1 = (-p_2 \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2)) \mathbf{n}_1. \quad (2.3.2)$$

O objetivo desta seção é analisar sob que condições é satisfeita a condição de continuidade de pressão entre as regiões 1D e 3D. Para isto realiza-se a adimensionalização da expressão (2.3.2). Como valor de referência para a pressão utiliza-se o dobro da energia cinética ρU^2 , onde U é uma velocidade representativa, e além disso toma-se o comprimento de

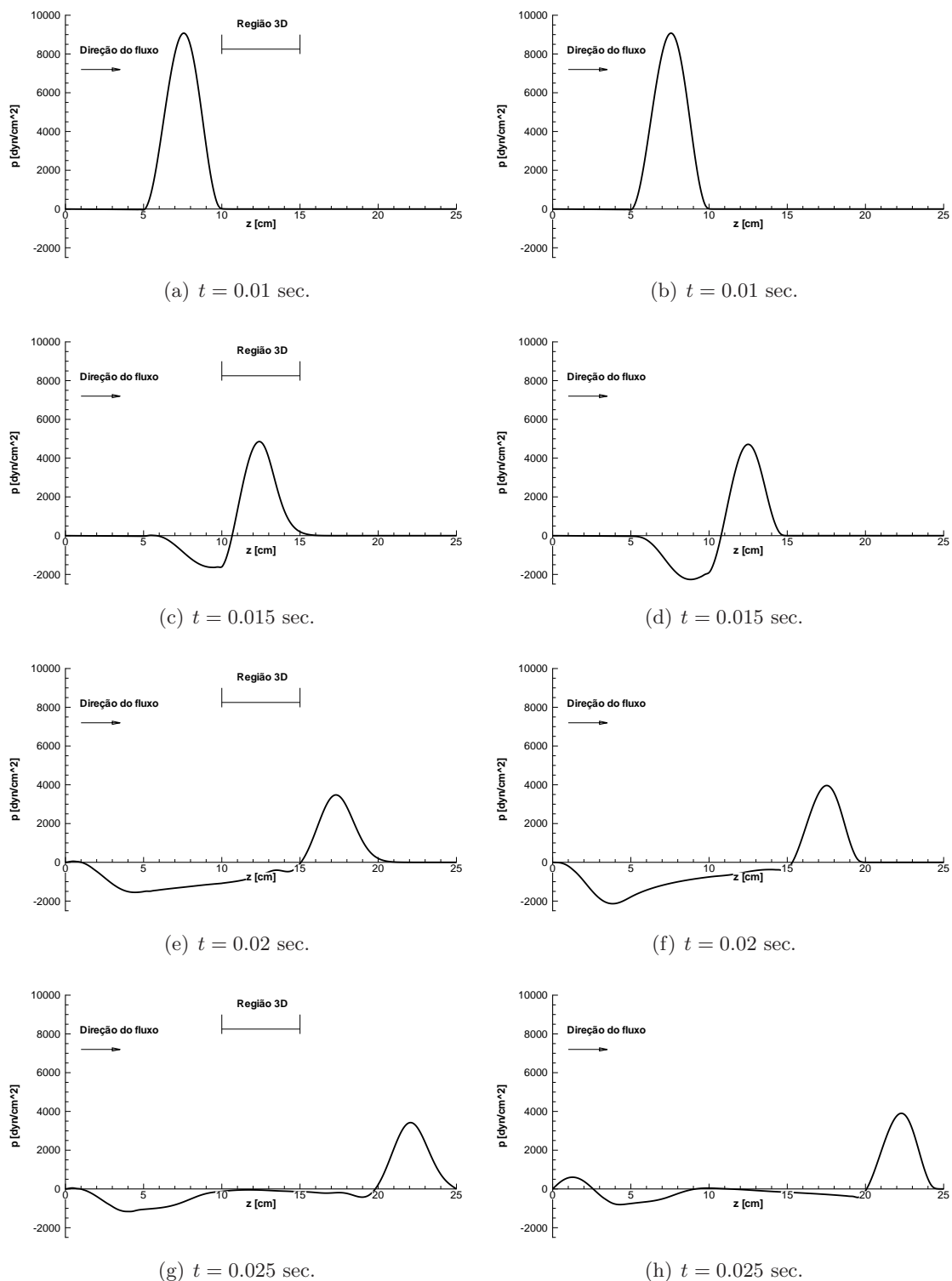


Figura 2.13: Resultados para os modelos acoplado 3D-1D (esquerda) e puro 1D (direita).

onda λ como representativo para medir a importância dos gradientes na direção axial, enquanto que se toma o diâmetro D para medir o gradiente na direção transversal. Logo, a correspondente forma adimensional da (2.3.2) pode escrever-se como segue

$$\begin{cases} -p_1^* = -p_2^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{D}{\lambda} \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{u}_2^*) \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1, \\ 0 = \frac{1}{\text{Re}} \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{u}_2^*) \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{t}_1, \end{cases} \quad (2.3.3)$$

onde $(\cdot)^*$ denota que a quantidade é adimensional, D é o diâmetro do tubo e $\text{Re} = \frac{\rho U D}{\mu}$ é o número de Reynolds. Vê-se então que a continuidade da pressão está governada pelo valor do número adimensional $\frac{1}{\text{Re}} \frac{D}{\lambda}$, o que indica que se estará próximo de tal condição ou bem quando o número de Reynolds seja elevado, ou bem quando o comprimento de onda seja várias vezes maior do que o diâmetro do tubo. Esta segunda condição não é satisfeita nos casos vistos acima, enquanto que para o caso onde se simula a ausência de viscosidade a continuidade da pressão fica teoricamente assegurada. O mesmo comentário vale para a segunda expressão (2.3.3) que estabelece que a continuidade das derivadas tangenciais está associada ao número adimensional $\frac{1}{\text{Re}}$.

Agora, este tipo de fenômeno pode ser analisado previamente quando o modelo acoplado 3D–1D é aplicado na modelagem do sistema cardiovascular. Aqui, o número de Reynolds está na faixa de 100 a 2000, e o comprimento de onda é da ordem de 100 a 1000 vezes o valor do diâmetro das artérias. Logo, espera-se que as reflexões espúrias sejam totalmente desprezíveis. Entretanto cabe aclarar que outros fenômenos envolvidos deveriam ser incluídos na análise, como por exemplo a descontinuidade das tensões de corte. Assim, esta classe de análise deve ser considerada como um ponto de partida para um futuro trabalho de pesquisa na área.

2.3.3 Aplicação do modelo 3D–1D no sistema arterial

Nesta primeira parte apresenta-se o modelo simplificado do sistema arterial com o qual se realizaram as simulações nas seções seguintes. A construção de um sistema arterial não resulta, em absoluto, uma tarefa simples. De fato, são poucos os autores que fornecem de forma completa modelos do sistema arterial [6, 146], ou inclusive uma forma de se obter a impedância característica do mesmo [126]. No presente trabalho utiliza-se o modelo proposto por Avolio [6], no qual o sistema arterial é descrito por 128 segmentos representando as principais artérias do corpo humano. Os leitos periféricos, assim como as bifurcações, são modelados mediante os terminais de Windkessel (ver Seção 2.1.4). Os valores atribuídos aos parâmetros que definem os modelos de Windkessel, na função de leito periférico, foram obtidos seguindo os seguintes critérios

- i. os valores da resistência R_e e da capacitância C_e equivalentes do terminal (como circuito em série) são obtidos segundo critérios dados em [146];
- ii. o valor da soma $R_1 + R_2$ é calculada, se necessário, afetando por uma constante à resistência R_e de forma que a distribuição do sangue no corpo humano esteja de acordo com os dados de [123];
- iii. considera-se que $R_1 = 0.2R_e$, critério adotado em [146];
- iv. o valor de C calcula-se em função dos valores de R_1 , R_2 e C_e , tal que o circuito de Windkessel dê como resultado um terminal equivalente ao circuito em série obtido no item (i).

A informação da topologia mostrada na Figura 2.14 complementa-se com os valores das características geométricas e propriedades mecânicas dos segmentos arteriais como

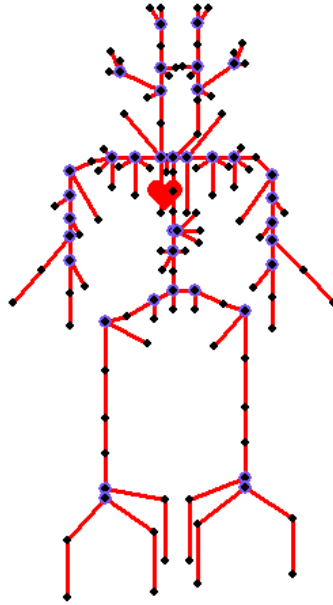


Figura 2.14: Topologia do sistema arterial constituído por 128 segmentos.

mostram as Tabelas 2.2 e 2.3. A numeração mostrada está de acordo com [6]. Além disso, a Tabela 2.4 apresenta os valores dos parâmetros que definem cada um dos terminais Windkessel utilizados para modelar os leitos periféricos.

Para definir a propriedade viscoelástica da parede introduz-se o ângulo de viscoelasticidade ϕ como sendo

$$\tan \phi = \frac{\omega k}{E}, \quad (2.3.4)$$

onde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, sendo T um tempo característico, que neste caso é o período do batimento cardíaco. Ao longo deste capítulo utilizou-se $\phi = 5^\circ$.

Como condição de contorno impõe-se a curva de fluxo que é dada na Figura 2.15, e foi obtida de [145]. A mesma corresponde a um período cardíaco de $T = 0.8$ sec e um fluxo médio de $Q = 5$ lt/min. O fluido é considerado Newtoniano com viscosidade $\mu = 0.04$ poise e massa específica $\rho = 1.04$ g/cm³. A discretização espacial do sistema arterial é realizada com 1210 nós, incluindo os nós dos terminais Windkessel, o que resulta em 1324 elementos, enquanto que a discretização temporal leva-se a cabo com um passo de tempo $\Delta t = 1.25 \cdot 10^{-3}$ sec.

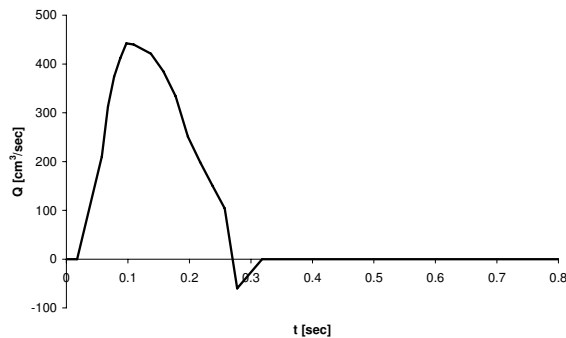


Figura 2.15: Ejeção cardíaca utilizada como condição de contorno.

Segmento	Nome	Comprimento [cm]	R [cm]	h [cm]	E [dyn/cm ²]
1	Ascending aorta	4.0	1.45	0.163	4000000
2	Aortic arch	2.0	1.12	0.132	4000000
5	Aortic arch	3.9	1.07	0.127	4000000
11	Thoracic aorta	5.2	1.00	0.120	4000000
21	Thoracic aorta	5.2	0.95	0.116	4000000
34	Thoracic aorta	5.2	0.95	0.116	4000000
50	Abdominal aorta	5.3	0.87	0.108	4000000
65	Abdominal aorta	5.3	0.57	0.080	4000000
75	Abdominal aorta	5.3	0.57	0.080	4000000
49	Coeliac artery	1.0	0.39	0.064	4000000
61	Gastric artery	7.1	0.18	0.045	4000000
62	Splenic artery	6.3	0.28	0.054	4000000
63	Hepatic artery	6.6	0.22	0.049	4000000
64	Renal artery	3.2	0.26	0.053	4000000
66	Superior mesenteric	5.9	0.43	0.069	4000000
67	Gastric artery	3.2	0.26	0.053	4000000
83	Inferior mesenteric	5.0	0.16	0.043	4000000
4	L. common carotid	8.9	0.37	0.063	4000000
10	L. common carotid	8.9	0.37	0.063	4000000
20	L. common carotid	3.1	0.37	0.063	4000000
12	R. common carotid	8.9	0.37	0.063	4000000
22	R. common carotid	8.9	0.37	0.063	4000000
3	L. subclavian artery	3.4	0.42	0.067	4000000
6	Brachiocephalic artery	3.4	0.62	0.086	4000000
82,84	Common iliac	5.8	0.52	0.076	4000000
89,92	External iliac	8.3	0.29	0.055	4000000
90,91	Internal iliac	5.0	0.20	0.040	16000000
98,99	External iliac	6.1	0.27	0.053	4000000
104,107	Femoral artery	12.7	0.24	0.050	8000000
105,106	Profundis artery	12.6	0.23	0.049	16000000
109,110	Femoral artery	12.7	0.24	0.050	8000000
111,112	Popliteal artery	9.4	0.20	0.047	8000000
113,114	Popliteal artery	9.4	0.20	0.050	4000000
115,118	Anterior tibial artery	2.5	0.13	0.039	16000000
119,124	Anterior tibial artery	15.0	0.10	0.020	16000000
125,128	Anterior tibial artery	15.0	0.10	0.020	16000000
116,117	Posterior tibial artery	16.1	0.18	0.045	16000000
121,122	Posterior tibial artery	16.1	0.18	0.045	16000000
120,123	Peroneal artery	15.9	0.13	0.039	16000000
126,127	Peroneal artery	15.9	0.13	0.019	16000000

Tabela 2.2: Parâmetros geométricos e mecânicos dos segmentos arteriais.

Em todos os exemplos comparam-se as soluções dadas pelo modelo acoplado 3D–1D e por um modelo puramente 1D do sistema arterial. Tais comparações compreendem as curvas de pressão e fluxo na entrada e na saída do domínio 3D, sobre as fronteiras de acoplamento denominadas Γ_{aP} (fronteira proximal) e Γ_{aD} (fronteira distal). O objetivo dos dois casos analisados a seguir é ver como o modelo acoplado reproduz as curvas de pressão e fluxo do modelo puramente 1D. Em outras palavras, deseja-se ver se a inclusão do modelo 3D altera ou não de forma artificial o sistema, já que nestes casos o segmento 3D que se inclui pretende ser idêntico ao segmento 1D que é substituído.

2.3.3.1 Simulação do escoamento na artéria aorta abdominal

Neste exemplo um segmento 3D vem a substituir uma parte da artéria aorta abdominal no sistema arterial da Figura 2.14, como se vê na Figura 2.16. Neste exemplo têm-se duas fronteiras de acoplamento, o comprimento do segmento 3D é $L_{3D} = 5.7$ cm, o raio é $R = 0.57$ cm e a espessura é $h = 0.08$ cm. As propriedades mecânicas da parede são $E = 4.0 \cdot 10^6$ dyn/cm² e $k = 4.44 \cdot 10^4$ dyn sec/cm². A pressão de referência é

Segmento	Nome	Comprimento [cm]	R [cm]	h [cm]	E [dyn/cm ²]
31,37	Internal carotid	5.9	0.18	0.045	800000
32,36	External carotid	11.8	0.15	0.042	800000
33,35	Superior thyroid artery	4.0	0.07	0.020	800000
43,56	Lingual artery	3.0	0.10	0.030	800000
44,55	Internal carotid	5.9	0.13	0.039	800000
45,54	Facial artery	4.0	0.10	0.030	1600000
46,53	Middle cerebral	3.0	0.06	0.020	1600000
47,52	Cerebral artery	5.9	0.08	0.026	1600000
48,51	Ophthalmic artery	3.0	0.07	0.020	1600000
60,68	Internal carotid	5.9	0.08	0.026	1600000
73,77	Superficial temporal	4.0	0.06	0.020	1600000
74,76	Maxillary artery	5.0	0.07	0.020	1600000
7,15	Internal mammary	15.0	0.10	0.030	800000
8,14	Subclavian artery	6.8	0.40	0.066	400000
9,13	Vertebral artery	14.8	0.19	0.045	800000
16,26	Costo-cervical artery	5.0	0.10	0.030	800000
17,25	Axillary artery	6.1	0.36	0.062	400000
18,24	Suprascapular	10.0	0.20	0.052	800000
19,23	Thyrocervical	5.0	0.10	0.030	800000
27,41	Thoraco-acromial	3.0	0.15	0.035	1600000
28,40	Axillary artery	5.6	0.31	0.057	400000
29,39	Circumflex scapular	5.0	0.10	0.030	1600000
30,38	Subscapular	8.0	0.15	0.035	1600000
42,57	Brachial artery	6.3	0.28	0.055	400000
58,70	Profunda brachi	15.0	0.15	0.035	800000
59,69	Brachial artery	6.3	0.26	0.053	400000
71,79	Brachial artery	6.3	0.25	0.052	400000
72,78	Superior ulnar collateral	5.0	0.07	0.020	1600000
80,86	Inferior ulnar collateral	5.0	0.06	0.020	1600000
81,85	Brachial artery	4.6	0.24	0.050	400000
87,94	Ulnar artery	6.7	0.21	0.049	800000
88,93	Radial artery	11.7	0.16	0.043	800000
95,102	Ulnar artery	8.5	0.19	0.046	800000
96,101	Interossea artery	7.9	0.09	0.028	1600000
97,100	Radial artery	11.7	0.16	0.043	800000
103,108	Ulnar artery	8.5	0.19	0.046	800000

Tabela 2.3: Parâmetros geométricos e mecânicos dos segmentos arteriais.

Terminal	R_1		R_2		C		Terminal	R_1		R_2		C	
		$\frac{\text{dyn sec}}{\text{cm}^2 \text{ ml}}$		$\frac{\text{ml cm}^2}{\text{dyn}}$		$\frac{\text{ml cm}^2}{\text{dyn}}$			$\frac{\text{dyn sec}}{\text{cm}^2 \text{ ml}}$		$\frac{\text{ml cm}^2}{\text{dyn}}$		$\frac{\text{ml cm}^2}{\text{dyn}}$
125,128	57464		229857		7.859E-07		30,38	55441		221765		8.1457E-07	
126,127	29067		116268		1.5537E-06		29,39	141445		565780		3.1928E-07	
121,122	19829		79317		2.2775E-06		27,41	55441		221765		8.1457E-07	
105,106	11211		44846		4.0281E-06		58,70	39203		156812		1.152E-06	
90,91	14366		57464		3.1436E-06		72,78	281707		1126827		1.6031E-07	
83	29257		117030		1.5436E-06		80,86	414156		1656625		1.0904E-07	
64	3192		12770		1.4146E-05		97,100	36978		147913		1.2213E-06	
66	3130		12520		1.4428E-05		96,101	177828		711312		2.5396E-07	
67	3192		12770		1.4146E-05		103,108	24889		99556		1.8145E-06	
61	22296		89184		2.0255E-06		33,35	39034		156136		1.157E-06	
62	8093		32372		5.5803E-06		48,51	55202		220810		8.1809E-07	
63	6385		25539		7.0732E-06		47,52	45076		180306		1.0019E-06	
9,15	24617		98468		1.8345E-06		46,53	81157		324627		5.5646E-07	
7,13	100017		400067		4.5153E-07		43,56	19599		78396		2.3042E-06	
19,23	100017		400067		4.5153E-07		45,54	27717		110869		1.6293E-06	
18,24	23278		93111		1.9401E-06		74,76	55202		220810		8.1809E-07	
16,26	100017		400067		4.5153E-07		73,77	81157		324627		5.5646E-07	

Tabela 2.4: Caracterização dos terminais de Windkessel.

$p_0 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ dyn/cm}^2$. Assim sendo, o segmento 3D possui exatamente as mesmas propriedades que o segmento 1D que está sendo substituído.

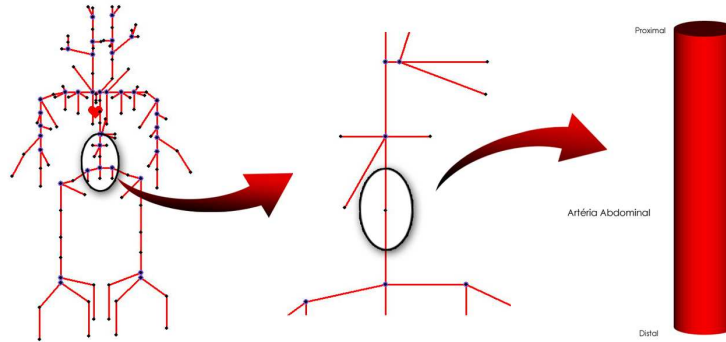
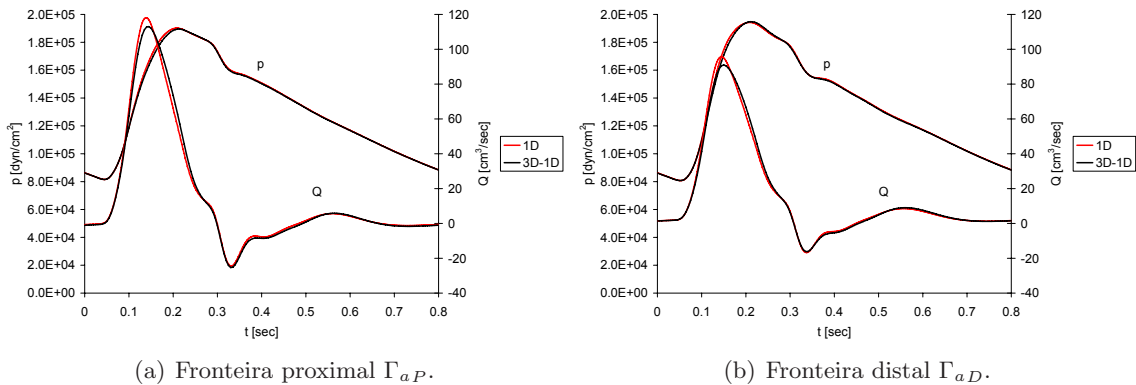


Figura 2.16: Sistema arterial 3D-1D. Acoplamento na artéria aorta abdominal.

A discretização espacial tem aproximadamente 41300 nós e 285200 graus de liberdade, enquanto que a discretização temporal realizou-se com um passo de tempo $\Delta t = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$, resultando em 640 passos de tempo.

A Figura 2.17 mostra as curvas de pressão e fluxo nas fronteiras de acoplamento Γ_{aP} e Γ_{aD} . Observa-se que o modelo acoplado consegue reproduzir adequadamente as curvas obtidas com o modelo 1D puro.



(a) Fronteira proximal Γ_{aP} .

(b) Fronteira distal Γ_{aD} .

Figura 2.17: Curvas de pressão e fluxo nas interfaces de acoplamento proximal e distal.

2.3.3.2 Simulação do escoamento na artéria íliaca

Neste outro exemplo, um segmento 3D substitui uma parte da artéria íliaca no sistema arterial da Figura 2.14, como se vê na Figura 2.18. Novamente, neste exemplo têm-se duas fronteiras de acoplamento, o comprimento do segmento 3D é $L_{3D} = 1.74 \text{ cm}$, o raio é $R = 0.29 \text{ cm}$ e a espessura é $h = 0.055 \text{ cm}$. As propriedades mecânicas da parede são $E = 4.0 \cdot 10^6 \text{ dyn/cm}^2$ e $k = 4.44 \cdot 10^4 \text{ dyn sec/cm}^2$. A pressão de referência é $p_0 = 1.0 \cdot 10^5 \text{ dyn/cm}^2$. Assim sendo, consegue-se que o segmento 3D possua as mesmas propriedades que o segmento 1D que está sendo substituído.

A discretização espacial tem aproximadamente 27800 nós e 190800 graus de liberdade, enquanto que a discretização temporal realizou-se novamente com um passo de tempo $\Delta t = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$, resultando em 640 passos de tempo.

A Figura 2.19 mostra as curvas de pressão e fluxo nas fronteiras de acoplamento Γ_{aP} e Γ_{aD} . Observa-se que o modelo acoplado consegue reproduzir de forma aceitável as curvas obtidas com o modelo 1D puro.

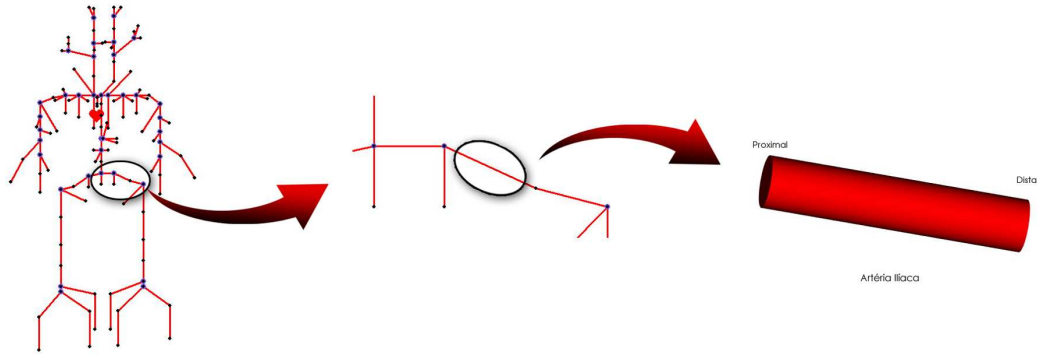


Figura 2.18: Sistema arterial 3D–1D. Acoplamento na artéria ilíaca.

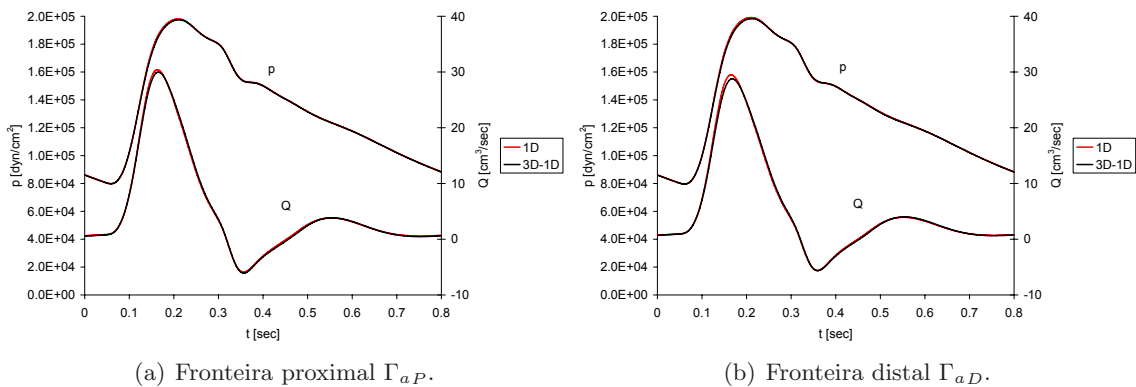


Figura 2.19: Curvas de pressão e fluxo nas interfaces de acoplamento proximal e distal.

2.3.4 Sensibilidade do pulso cardíaco à presença de uma estenose

O estudo da influência de uma estenose sobre o escoamento do sangue em uma dada região do sistema cardiovascular é de relevante importância a fim de quantificar, através de fatores fluidodinâmicos, o risco de desenvolver patologias, como por exemplo, a deposição de placas de ateroma, causando a constrição da artéria com o possível conseqüente colapso da mesma [29, 47, 146]. Diversos trabalhos na área têm dirigido a atenção ao próprio escoamento em condições normais que ocorre em um distrito do sistema arterial, como a bifurcação da artéria carótida [1, 14, 15, 25, 48, 87, 131, 138]. Nas referências citadas enfatiza-se o fato deste local possuir características geométricas que favorecem a deposição de placas de ateroma. Com efeito, o aumento do tamanho da artéria carótida interna logo após a bifurcação constitui uma região de alta recirculação do sangue, e em conseqüência de alto tempo de permanência das partículas.

Dado que o sistema arterial possui características, em certos casos, predominantemente hiperbólicas, quando o escoamento encontra um evento tal como uma estenose a informação desta é propagada em ambas as direções. Isto faz com que não seja possível utilizar condições de contorno obtidas (por exemplo, por medição) em condições normais para o caso onde se introduziu uma estenose. Por esta causa, não há ainda trabalhos desenvolvidos nesta área que tenham realizado simulações a fim de analisar e quantificar as variações que ocorrem no sistema cardiovascular quando se assume a existência de uma estenose no sino da bifurcação carótida. Por isto, recorre-se à utilização de modelos acoplados a fim de levar em conta a interação dinâmica entre domínios 1D e 3D, permitindo que o que originalmente eram consideradas condições de contorno do modelo 3D agora sejam condições de acoplamento com capacidade de adaptar-se convenientemente às condições

presentes a ambos os lados das fronteiras de acoplamento. Em outras palavras, a técnica para realizar a modelagem deve-se apoiar nas idéias apresentadas no Capítulo 1, junto com as considerações adicionais introduzidas nas Seções 2.1 e 2.2 do presente capítulo.

Assim sendo, o objetivo desta seção é apresentar alguns resultados mostrando a sensibilidade das curvas de pressão e fluxo quando uma estenose é introduzida no distrito 3D, ou mesmo quando a forma da estenose muda. Para isto utiliza-se a topologia do sistema arterial da Seção 2.3.3 com a parte do domínio correspondente à bifurcação da artéria carótida considerada 3D como mostrado na Figura 2.20.

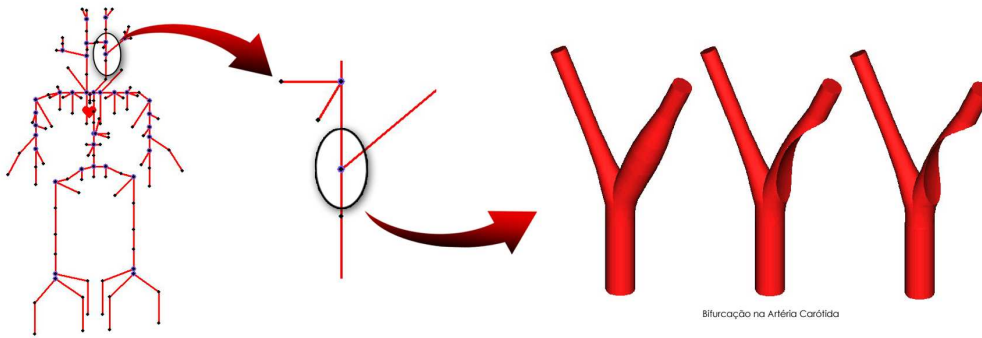


Figura 2.20: Sistema arterial 3D-1D. Sensibilidade à presença de uma estenose.

A geometria 3D utilizada está baseada em um caso padrão, onde as dimensões foram obtidas como médias sobre um conjunto de pacientes [14, 15]. A descrição da geometria é mostrada na Figura 2.21, com dimensões dadas na Tabela 2.5.

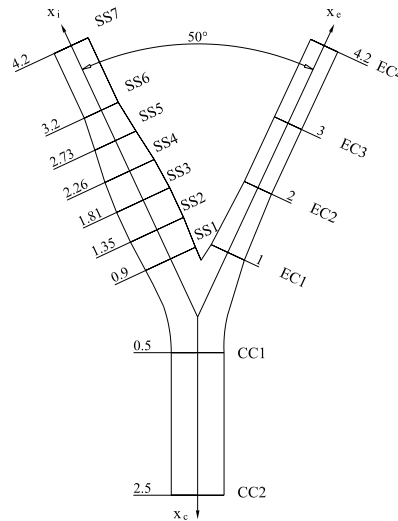


Figura 2.21: Geometria padrão da bifurcação na artéria carótida.

Seção	SS1	SS2	SS3	SS4	SS5	SS6	SS7
Diâmetro [cm]	0.77182	0.8214	0.8214	0.76368	0.6364	0.5254	0.5254
Seção	CC1	CC2	EC1	EC2	EC3	EC4	
Diâmetro [cm]	0.74	0.74	0.51356	0.42032	0.42032	0.42032	

Tabela 2.5: Dimensões da geometria padrão da Figura 2.21.

Os casos a serem estudados são dois, um deles é a sensibilidade ao aumento do tamanho de uma estenose simulada de forma artificial por meio da redução progressiva da

seção do sino da carótida, e o outro é a sensibilidade à forma que a estenose tem, mantendo a percentagem de redução da área. As alterações das geometrias estão definidas nas Figuras 2.22(a) e 2.22(b), e com dimensões dadas nas Tabelas 2.6 e 2.7. A percentagem da estenose está medida em função da percentagem de redução da seção SS3 (ver Figura 2.21). A variação das medidas S1 e S2 na Figura 2.22(a) permite estudar a sensibilidade à gravidade da estenose. Por outro lado, pondo consistentemente as medidas atinge-se uma situação de igual severidade, porém com uma morfologia da estenose diferente. Assim, tem-se uma forma de estenose circular como mostra a Figura 2.22(a), ou uma forma ovalada segundo a 2.22(b), ambas com uma percentagem de estenose de 80%.

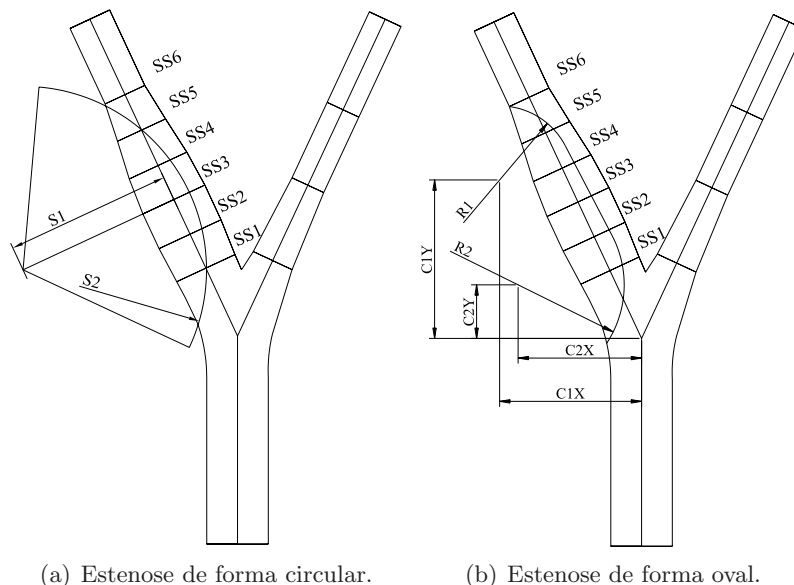


Figura 2.22: Simulação de uma estenose na bifurcação da artéria carótida.

Descrição	Estenose de 80%		Estenose de 95%	
	S1	S2	S1	S2
Medida [cm]	2	2.20535	1.5	1.835

Tabela 2.6: Dimensões da estenose circular de acordo com a Figura 2.22(a).

Descrição	Estenose de 80%					
	C1X	C1Y	C2X	C2Y	R1	R2
Medida [cm]	1.711571	1.785855	3.35534	0.375378	1.00555	3.11198

Tabela 2.7: Dimensões da estenose ovalada de acordo com a Figura 2.22(b).

A condição de contorno considerada nestes casos é obtida de [147] e se mostra na Figura 2.23. A ejeção cardíaca é tal que o fluxo médio é $Q = 5$ lt/min.

Na Figura 2.24 mostram-se os resultados concernentes às curvas de pressão e fluxo quando se simula o aumento da severidade da estenose de acordo com os dados da Tabela 2.6, indo da situação normal, sem estenose (curva N), até os casos com obstrução de 80% e 95% (curvas S80 e S95 respectivamente).

Estes resultados correspondem às interfaces de acoplamento na carótida comum, na carótida interna e na carótida externa. Observa-se que o fluxo e a pressão reduzem-se notoriamente na carótida interna após a estenose. Entretanto, na carótida comum vê-se que a estenose também produz certas alterações das curvas. Já na carótida externa tal perturbação quase não tem influência. Nota-se que somente no caso de uma severidade

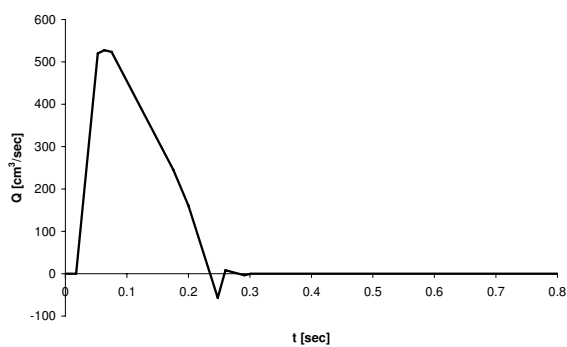
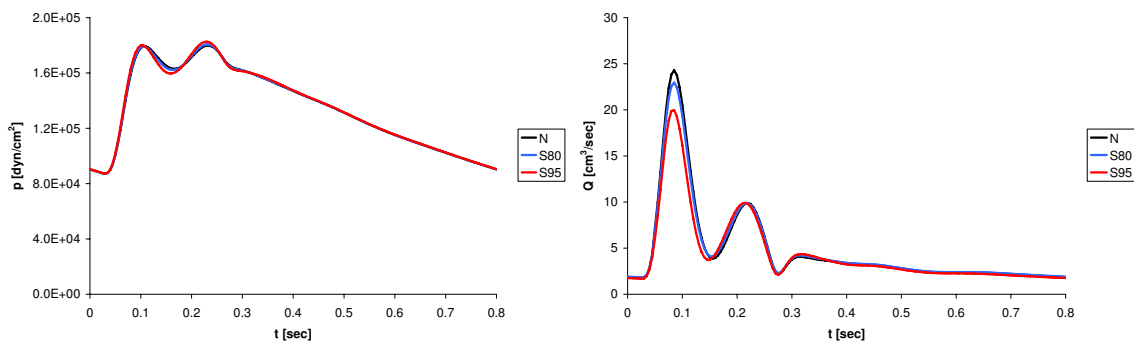
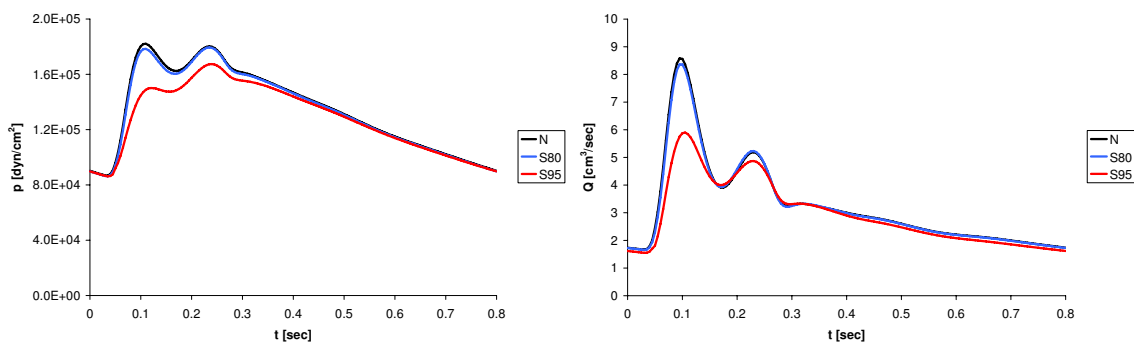


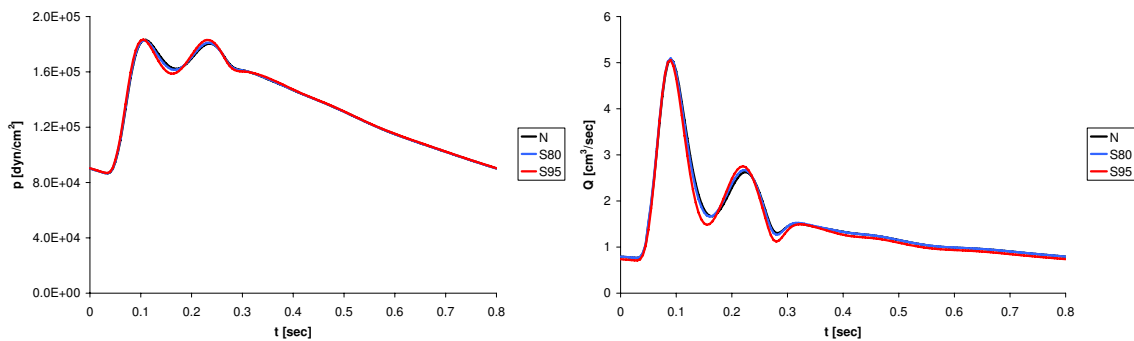
Figura 2.23: Ejeção cardíaca.



(a) Curvas de pressão e fluxo na artéria carótida comum.



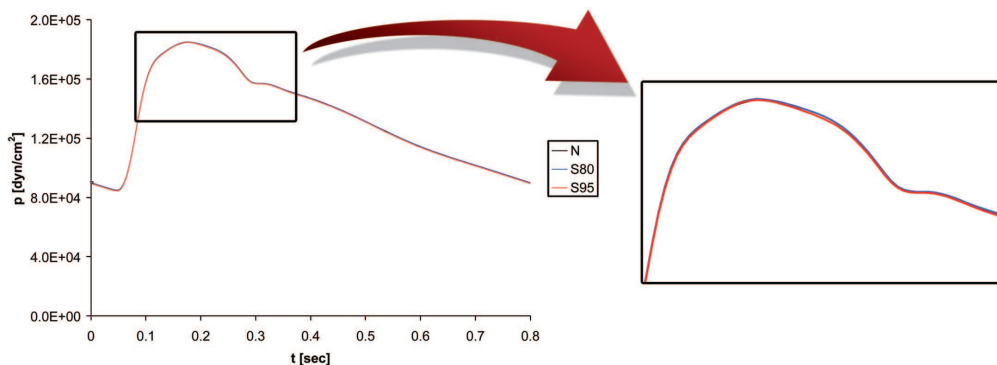
(b) Curvas de pressão e fluxo na artéria carótida interna.



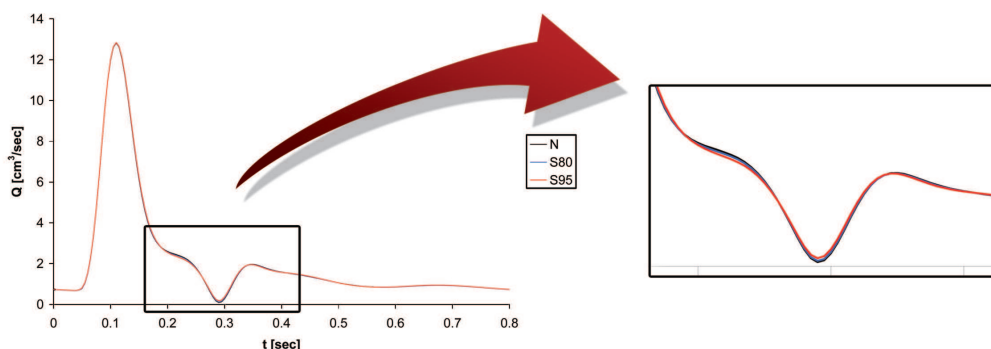
(c) Curvas de pressão e fluxo na artéria carótida externa.

Figura 2.24: Comparação dos resultados para os diversos graus de estenose considerados.

do 95% é que as alterações adquirem relevância. De fato, para evidenciar quão difícil é identificar a presença de uma estenose a partir de medições realizadas em outras partes do corpo humano apresenta-se a Figura 2.25. Nesta figura mostra-se, junto com um detalhe, as mudanças que ocorrem no pulso cardíaco avaliado na artéria braquial.



(a) Curva de pressão e detalhe.



(b) Curva de fluxo e detalhe.

Figura 2.25: Pulso cardíaco na artéria braquial para diversos graus de estenoses.

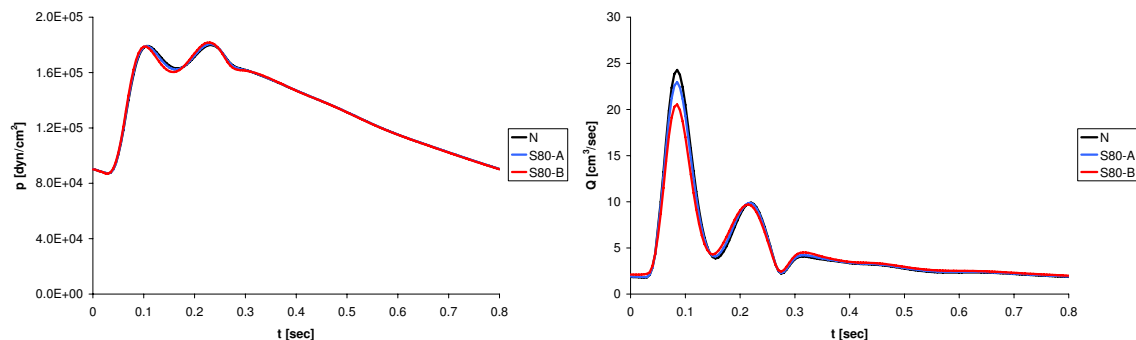
É fácil observar como a solução do problema no distrito arterial correspondente a esta artéria do braço é praticamente insensível à presença da estenose na artéria carótida. Em outras palavras, a estenose fica mascarada na própria dinâmica do sistema. Isto está de acordo com aquilo que é bem sabido na comunidade médica: este tipo de doenças não se manifesta até não atingir níveis extremos, ou até mesmo após a obstrução total da artéria, evitando o suprimento de sangue ao cérebro.

Agora apresentam-se os resultados com relação à alteração da forma da estenose introduzida. Comparando as Figuras 2.22(a) e 2.22(b) vê-se que a estenose mais ovalada pode afetar mais as condições devido a que o comprimento da obstrução é maior que no caso circular. Isto condiz-se com os resultados mostrados na Figura 2.26, onde comparam-se as curvas de pressão e fluxo nas três fronteiras de acoplamento do domínio 3D.

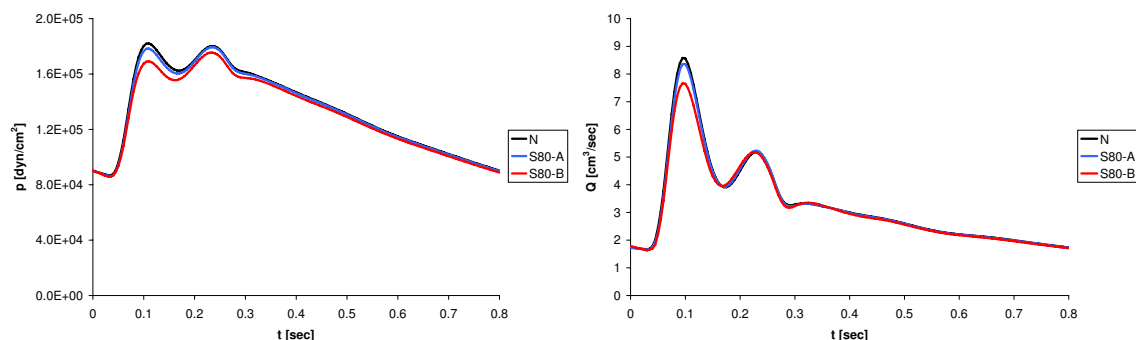
Com efeito, a estenose oval (curvas denominadas S80–B) introduz uma maior queda de pressão após a mesma, assim como uma maior alteração da curva de fluxo na carótida comum em comparação com a estenose circular (curvas denominadas S80–A). Ainda assim, as alterações nas formas das curvas não são significativas como a observada no caso anterior de 95% de redução da área.

Antes de passar ao próximo caso, vale a pena mencionar que nestas simulações não se incorporou o fenômeno de vasodilatação, que é um processo adaptativo no qual o sistema arterial reage à presença da estenose para tentar compensar a queda de fluxo através da carótida interna mediante a dilatação dos correspondentes leitos periféricos.

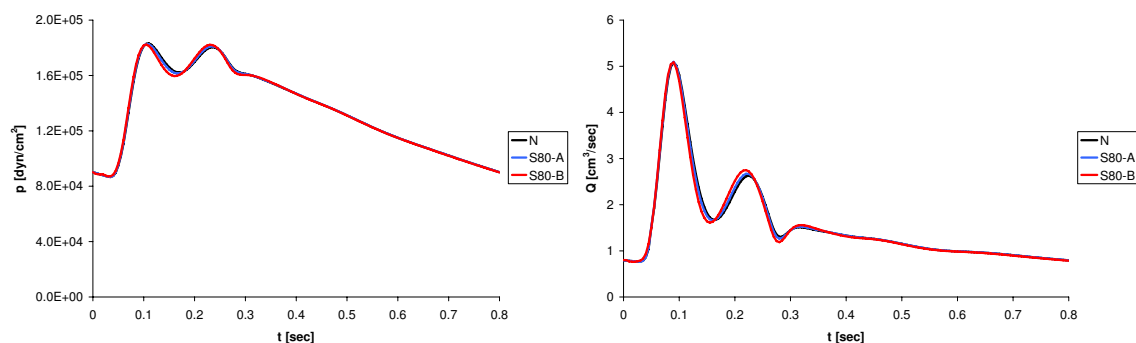
Nestes dois estudos realizados fica claro como o modelo acoplado 3D–1D trabalha



(a) Curvas de pressão e fluxo na artéria carótida comum.



(b) Curvas de pressão e fluxo na artéria carótida interna.



(c) Curvas de pressão e fluxo na artéria carótida externa.

Figura 2.26: Comparação dos resultados para os dois tipos de estenose simulados.

levando em conta as condições às quais o domínio 3D está sujeito como, neste caso, à presença de uma obstrução. Como mencionado, este tipo de modelagem não poderia ser efetuada suprindo modelos 3D com condições de contorno conhecidas, posto que, tais condições de contorno não são conhecidas depois que as condições mudaram pela presença da estenose.

Por último, embora a modelagem deste tipo de fenômeno seja realizável, em todos os casos é preciso levar em consideração quão difícil resulta obter conclusões dos resultados. A dificuldade jaz nas grandes diferenças existentes entre as curvas de pressão e fluxo de diferentes indivíduos, de forma que as variações observadas nos casos estudados estão dentro desta variabilidade (ver [166]). Mesmo assim, os resultados são capazes de mostrar a potencialidade desta classe de simulações a fim de representar situações de real interesse na prática médica.

2.3.5 Sensibilidade do escoamento 3D à lei constitutiva do fluido

Sabe-se que o sangue é um fluido que pode ser considerado Newtoniano nos maiores segmentos arteriais do sistema cardiovascular. Nas seções anteriores o sangue foi considerado Newtoniano, ou seja, linear com respeito à taxa de deformação. No entanto, em regiões onde a estrutura do escoamento é altamente complexa, ou bem onde a geometria possui alta complexidade, o sangue considerado como um fluido Newtoniano pode levar a divergências nos resultados.

O objetivo desta seção é analisar as diferenças no escoamento dentro da bifurcação carótida quando o fluido comporta-se como Newtoniano e como não Newtoniano. Para isto usa-se a topologia do sistema arterial introduzida na Seção 2.3.3 onde a parte correspondente à bifurcação da artéria carótida é considerada 3D, como mostra a Figura 2.27. Utilizam-se duas geometria 3D: (i) a geometria padrão que já foi empregada na Seção 2.3.4, e (ii) uma geometria real obtida por meio de técnicas de reconstrução a partir de imagens médicas [91].

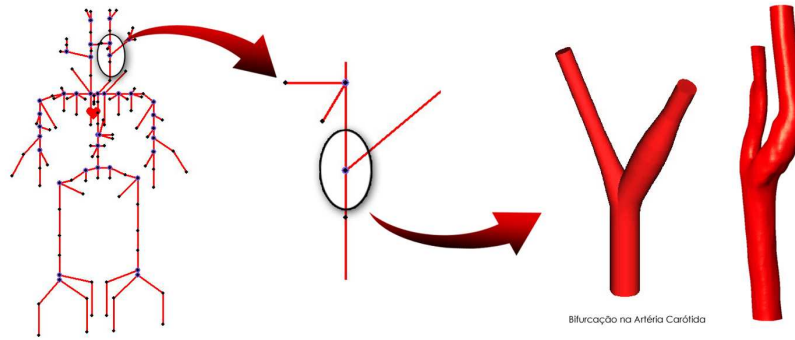


Figura 2.27: Sistema arterial 3D–1D. Sensibilidade à lei constitutiva do sangue.

Um modelo mais apropriado para o sangue é o modelo de Casson [30]. Este comportamento constitutivo é não linear, e caracteriza os fenômenos viscosos mediante a seguinte expressão que relaciona a viscosidade com a taxa de deformação

$$\mu(I_2^{\nabla \mathbf{u}}) = \left(\sqrt{\mu_o} + \sqrt{\frac{\tau_o}{2I_2^{\nabla \mathbf{u}}}} \right)^2, \quad (2.3.5)$$

onde

$$I_2^{\nabla \mathbf{u}} = \sqrt{\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^s \cdot (\nabla \mathbf{u})^s}, \quad (2.3.6)$$

é um dos invariantes do tensor $(\nabla \mathbf{u})^s$ que é a parte simétrica do tensor taxa de deformação, μ_o é a viscosidade assintótica quando $I_2^{\nabla \mathbf{u}} \rightarrow \infty$, e τ_o é a tensão limite quando $I_2^{\nabla \mathbf{u}} \rightarrow 0$. Logo, com este tipo de modelo espera-se observar modificações no escoamento quando a taxa de deformação tende a zero. Isto ocorre, no caso da bifurcação carótida, na região do sino na carótida interna. Portanto, as maiores alterações no escoamento devem ocorrer neste local, modificando assim a recirculação que se obtém com um modelo Newtoniano.

Nesta seção utilizaram-se valores $\mu_o = 0.04$ poise e $\tau_o = 0.038$ dyn/cm². Para a implementação computacional, o modelo de Casson foi regularizado para evitar os problemas que podem ocorrer quando $I_2^{\nabla \mathbf{u}} \rightarrow 0$. Desta maneira, na Figura 2.28 comparam-se os campos de velocidade obtidos com cada um dos modelos em diversos instantes de tempo no caso da carótida padrão, enquanto que na Figura 2.29 tal comparação é feita para a geometria real.

Por outro lado, nas Figuras 2.30 e 2.31 apresenta-se o módulo da velocidade para

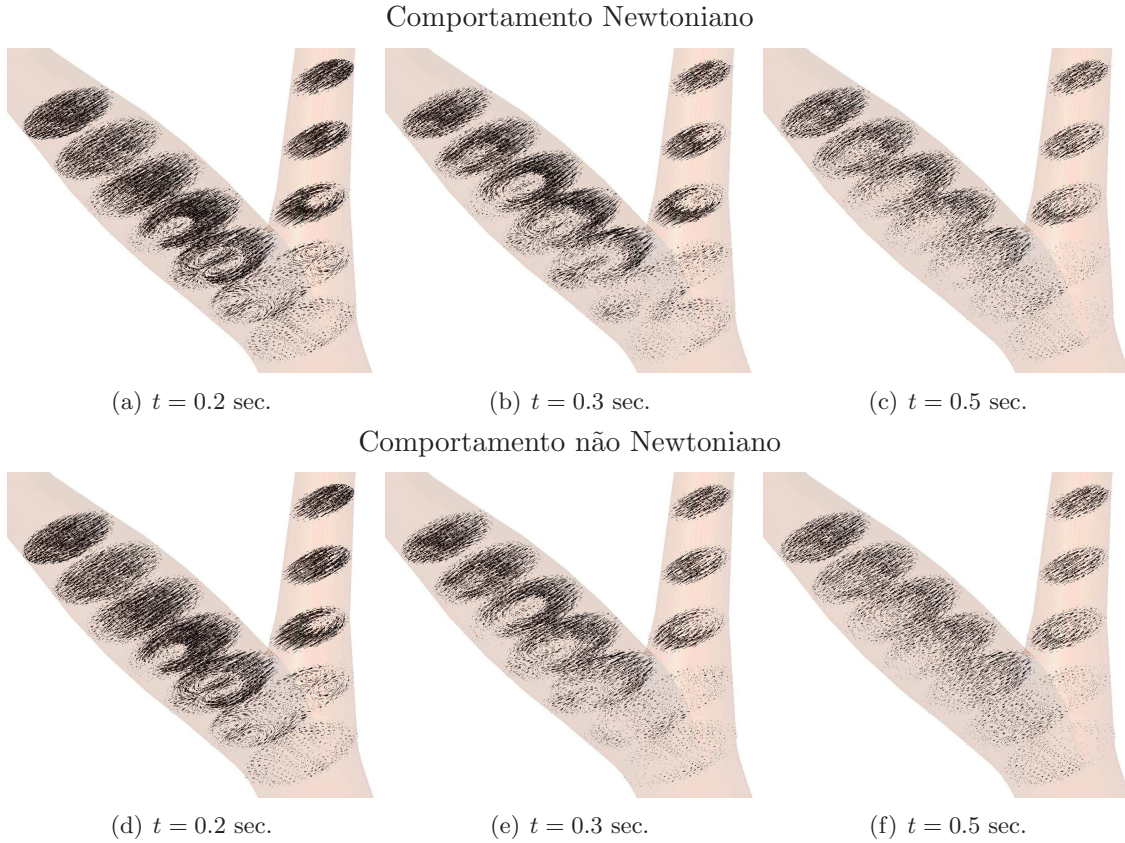


Figura 2.28: Campo de velocidade. Geometria padrão.

diversos instantes de tempo.

A estrutura do fluxo resulta alterada de forma apreciável quando o sangue é considerado não Newtoniano. Neste caso, o escoamento não é tão complexo quanto no caso Newtoniano. A escala de cores foi mantida em ambos os casos para evidenciar as diferenças existentes. Por outro lado, as estruturas dos vórtices resultante no sino da carótida interna são diferentes. Sobretudo após a sístole, quando o escoamento começa a fase de recirculação no início e ao longo da diástole. Estas diferenças ficam mais evidenciadas no caso da geometria real devido à maior complexidade do escoamento.

Para quantificar estas diferenças utiliza-se o índice OSI que mede a oscilação das tensões de corte sobre a parede arterial [88]. Este índice define-se como sendo

$$\text{OSI} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\left| \int_0^T \tau_w dt \right|}{\int_0^T |\tau_w| dt} \right], \quad (2.3.7)$$

onde T é o período cardíaco e τ_w é a tensão sobre a parede arterial. Este indicador correlaciona o comportamento do escoamento, através da oscilação das tensões sobre a parede arterial, com a tendência à deposição de placas de ateroma e, em consequência, com o desenvolvimento de estenoses [1, 29, 47, 88]. Nas Figuras 2.32 e 2.33 compara-se este indicador para as duas leis constitutivas, e também para as duas geometrias utilizadas nas simulações.

Note que as diferenças são importantes. Considerar o sangue como não Newtoniano traz consequências interessantes do ponto de vista das conclusões que se podem extrair através do indicador OSI. Em particular, o modelo não Newtoniano resulta em menores

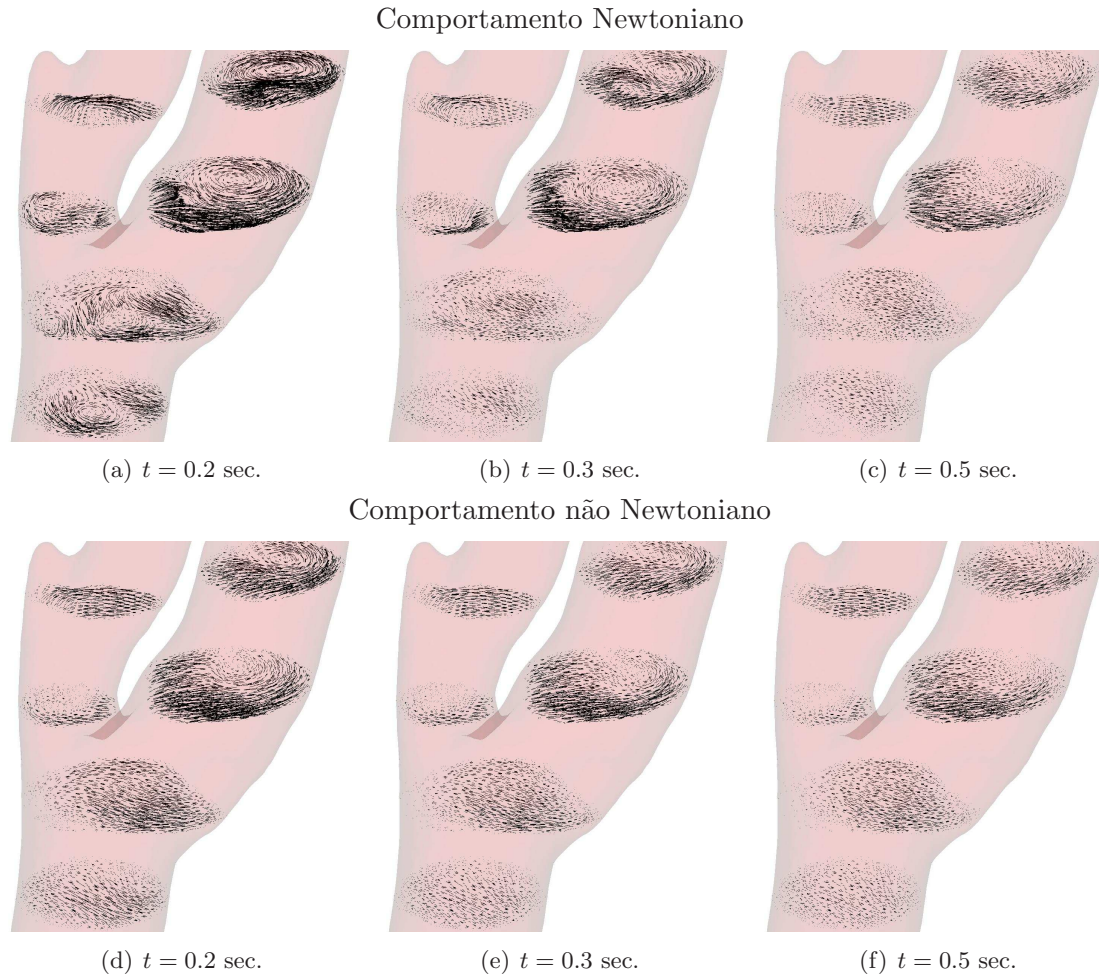


Figura 2.29: Campo de velocidade. Geometria real.

regiões com valores de OSI elevados, o que permite concluir que o modelo Newtoniano fornece uma cota superior com relação à tendência que as regiões têm ao espessamento da parede arterial.

Por outro lado, as não linearidades do comportamento do fluido resultam influentes na simulação do escoamento sanguíneo na bifurcação carótida, e é por isto que o desenvolvimento e a implementação de modelos melhorados do comportamento do sangue deve ser levado em conta na hora de modelar esta classe de problemas, o que condiz com as necessidades evidenciadas pelos dados experimentais [49].

Com relação ao custo computacional observou-se que considerar um comportamento não linear do sangue não elevou a quantidade de iterações além das próprias que o sistema deve realizar para a convergência do problema de Navier–Stokes. Logo, este não é um fator determinante para escolher entre estes modelos constitutivos.

2.3.6 Sensibilidade do escoamento 3D à curva de ejeção cardíaca

A grande variabilidade existente nas curvas de pressão e fluxo entre diversos sujeitos supõe também diversas condições locais do escoamento. Segundo dito, a estrutura local do fluxo sanguíneo está associada ao desenvolvimento e avanço de determinadas doenças cardiovasculares. Por esta causa, é interessante estudar a forma como o escoamento depende da condição de ejeção cardíaca. Isto fica justificado, ainda, pelo ganho no entendimento sobre como os fenômenos que se sucedem na escala da árvore arterial afetam as condições locais do escoamento. Cabe ressaltar que o fator geométrico, isto é a forma do segmento

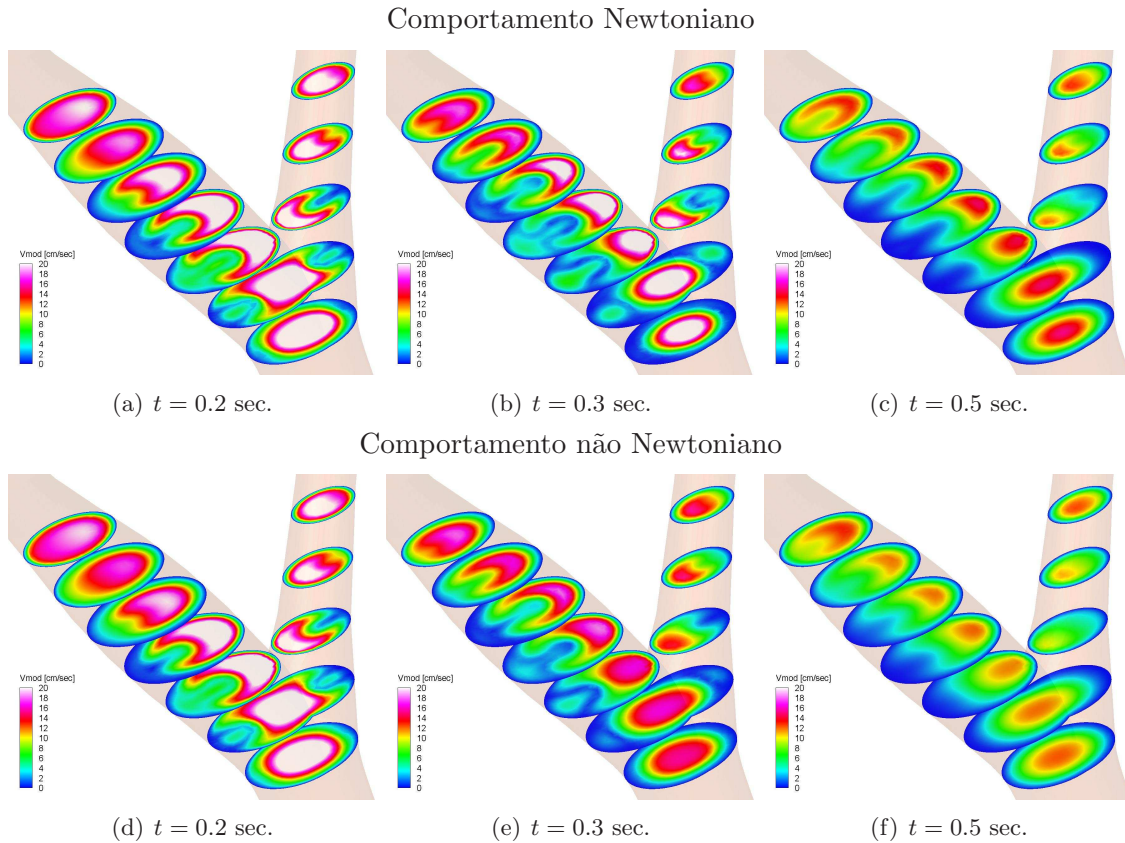


Figura 2.30: Módulo da velocidade. Geometria padrão.

arterial em questão, é de relevante importância. Aparentemente é o principal fator que influencia a forma local do escoamento. O interesse jaz então em saber se as condições que governam os fenômenos na escala do sistema arterial são também igualmente influentes na escala local.

Em particular, esta parte do trabalho está baseada no estudo das diferenças no escoamento na bifurcação da artéria carótida ao alterar, como dito, a curva de ejeção cardíaca. Para isto utiliza-se um modelo acoplado 3D–1D do sistema arterial com a topologia do sistema 1D mostrada na Seção 2.3.3 e a geometria 3D obtida de um paciente específico que já fora apresentada na Seção 2.3.5, segundo mostra o esquema da Figura 2.34

A ejeção cardíaca é simulada por meio do terminal Windkessel como explicado na Seção 2.1.4, de forma que o sistema arterial seja alimentado com uma curva de fluxo desejada. As diversas curvas de fluxo consideradas são mostradas na Figura 2.35, onde apresentam-se também as referências bibliográficas correspondentes. A escala de valores vertical das curvas foi adaptada a fim de obter, em todos os casos, um fluxo médio de $Q = 5$ lt/min, fazendo com que os resultados sejam comparáveis. O comportamento constitutivo do sangue é considerado não linear segundo o modelo de Casson visto na Seção 2.3.5, e com os valores que caracterizam essa resposta iguais aos indicados nessa seção.

Na Figura 2.36 mostram-se as curvas de pressão e fluxo ao longo do tempo sobre a interface de acoplamento correspondente à carótida comum. Nas curvas sobre as outras fronteiras de acoplamento observa-se a mesma classe de diferenças e, portanto, não são apresentadas. Vê-se que as dissimilaridades nestas curvas são notáveis. Os pontos de máximo e mínimo de fluxo variam em cada caso, tanto em valor quanto no instante no qual ocorrem. As curvas de pressão também são alteradas consideravelmente. Entretanto, note que as características essenciais das curvas mantêm-se. Isto é, a existência do vale após a sístole

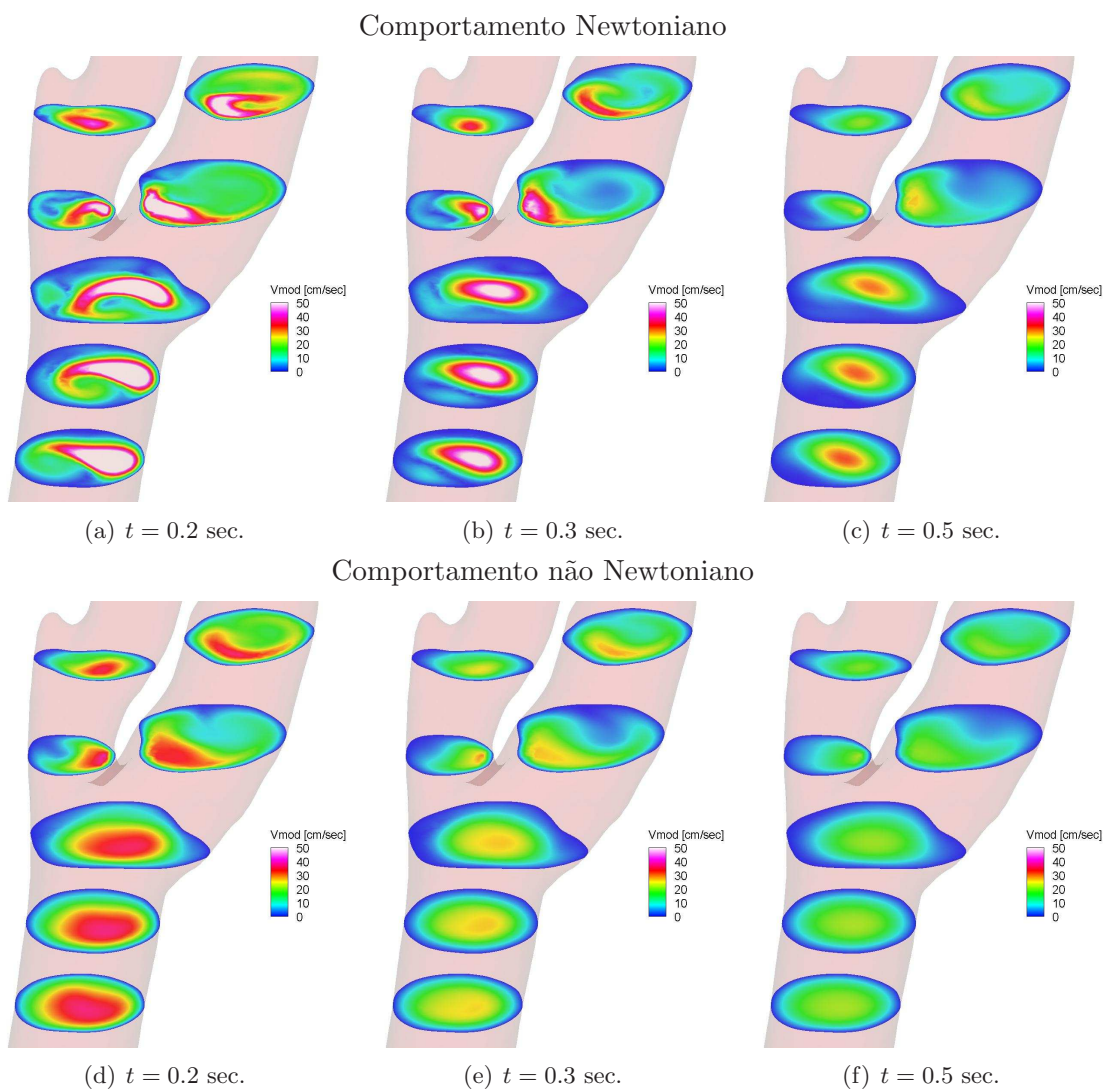


Figura 2.31: Módulo da velocidade. Geometria real.

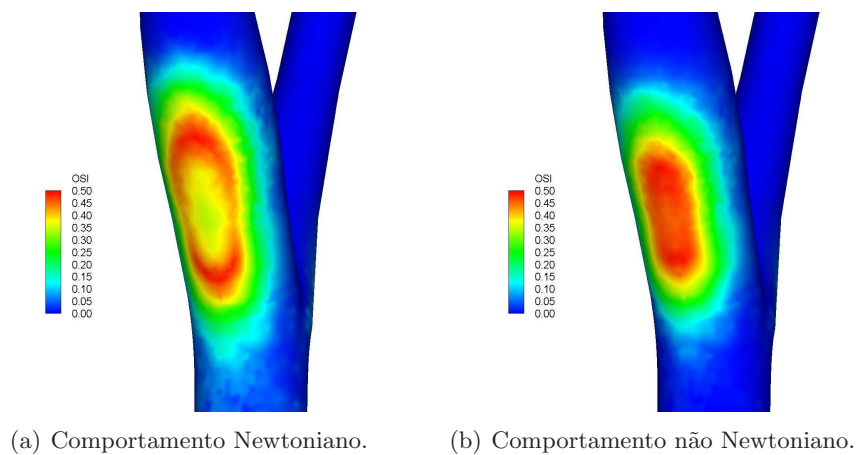


Figura 2.32: Indicador OSI. Geometria padrão.

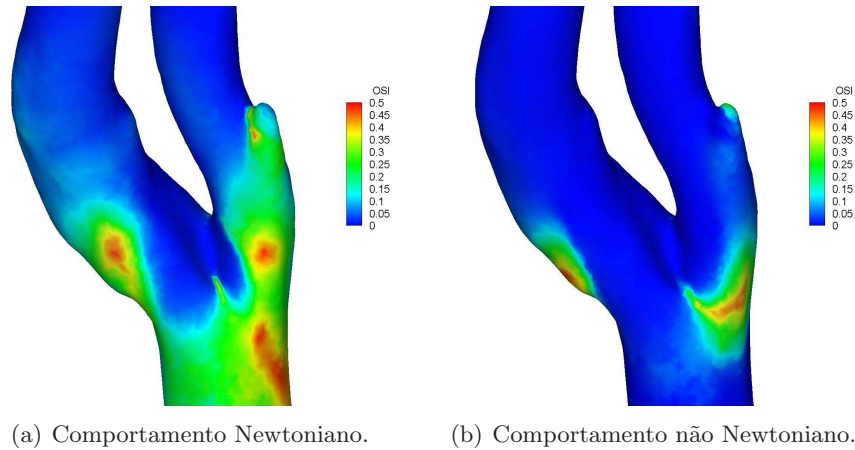


Figura 2.33: Indicador OSI. Geometria real.

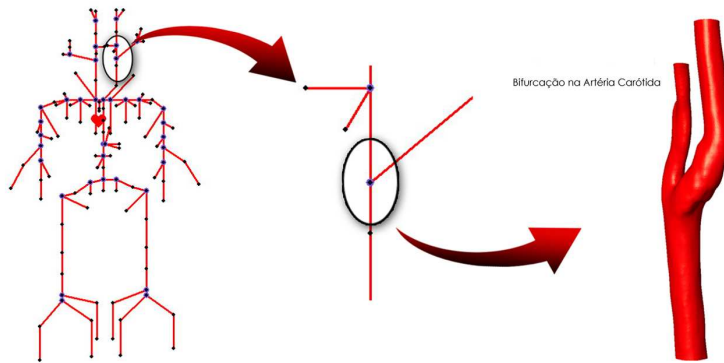


Figura 2.34: Sistema acoplado 3D–1D. Sensibilidade à curva de ejeção cardíaca.

e o máximo relativo alcançado antes da diástole, dentre outras características.

As variações observadas ocorrem devido a que a forma em que se combinam as reflexões no sistema arterial muda completamente como resultado da modificação das características da ejeção cardíaca. Sobretudo com relação aos tempos nos quais ocorrem os extremos relativos, já que isto é causado, em parte, pelas diferenças nas taxas de crescimento e decrescimento das curvas de ejeção cardíaca.

Na Figura 2.37 apresenta-se o módulo da velocidade para diversos instantes de tempo, os quais são fixados para cada uma das cinco curvas de ejeção cardíaca mostradas na Figura 2.35. As características essenciais do escoamento não mudam, o que pode ser justificado dizendo que as características fundamentais das curvas de pressão e fluxo nas interfaces de acoplamento permanecem invariantes. As diferenças, que ocorrem principalmente após a sístole, vão reduzindo-se à medida que a fase da diástole avança. Estas aparecem fundamentalmente depois da bifurcação, nas raízes dos segmentos arteriais das carótidas externa e interna. Nessas regiões o escoamento é alterado com relação ao tamanho das regiões de recirculação e aos máximos e mínimos valores de velocidade alcançados.

Para extrair mais informações das simulações, na Figura 2.38 comparam-se as formas do perfil de velocidade e as linhas de corrente em três instantes de tempo característicos, os quais não necessariamente coincidem para as diferentes curvas. O tempo denominado t_1 representa o primeiro vale que ocorre logo após a sístole, o tempo t_2 é o máximo que sucede após o tempo t_1 e t_3 é o último vale pronunciado antes da fase final da diástole. Em cada caso estes tempos são indicados na Tabela 2.8.

Como dito anteriormente, os perfis de velocidade também não sofrem significativas

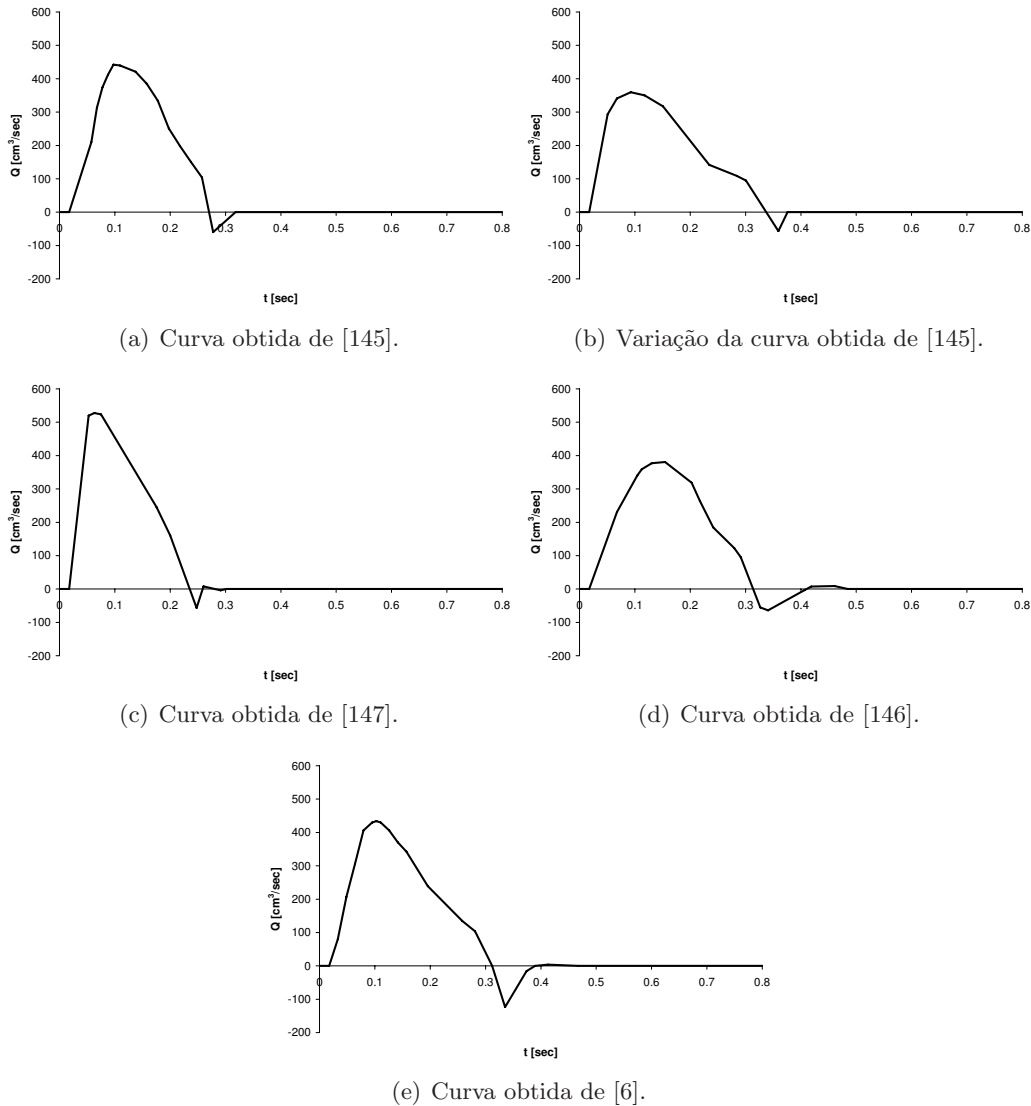


Figura 2.35: Curvas de ejeção cardíaca utilizadas.

alterações na sua estrutura. As diferenças principais são observadas nos valores máximos de velocidade alcançados, assim como na forma do perfil na região interior do sino da carótida, onde as velocidades são menores (ver a região central do corte do meio no sino da bifurcação). Por outro lado, as configurações das linhas de corrente são mais afetadas em função da ejeção cardíaca. Em geral observa-se uma maior complexidade na estrutura do escoamento nos instantes de tempo t_1 e t_3 em todos os casos.

Para todos os casos computou-se o indicador OSI dado pela expressão (2.3.7) tentando quantificar as diferenças existentes. Na Figura 2.39 compara-se este valor para cada ejeção cardíaca.

Note que, devido a que as características primordiais da estrutura do escoamento não mudam de forma considerável, a forma que adota o indicador OSI é, além de pequenas diferenças, a mesma. Nota-se que o caso da ejeção cardíaca da Figura 2.35(e) (ver Figura 2.39(e)) produz uma região maior de valores elevados de OSI, enquanto que a ejeção da Figura 2.35(d) (ver Figura 2.39(d)) é a que produz menor região de OSI elevado. Isto condiz com os resultados dados pelas Figuras 2.38(l) e 2.38(o), que mostram que as linhas de corrente possuem uma configuração menos complexa no primeiro caso e mais complexa no segundo, em ambos casos no tempo t_3 . Se bem isto não é conclusivo, pode dar uma

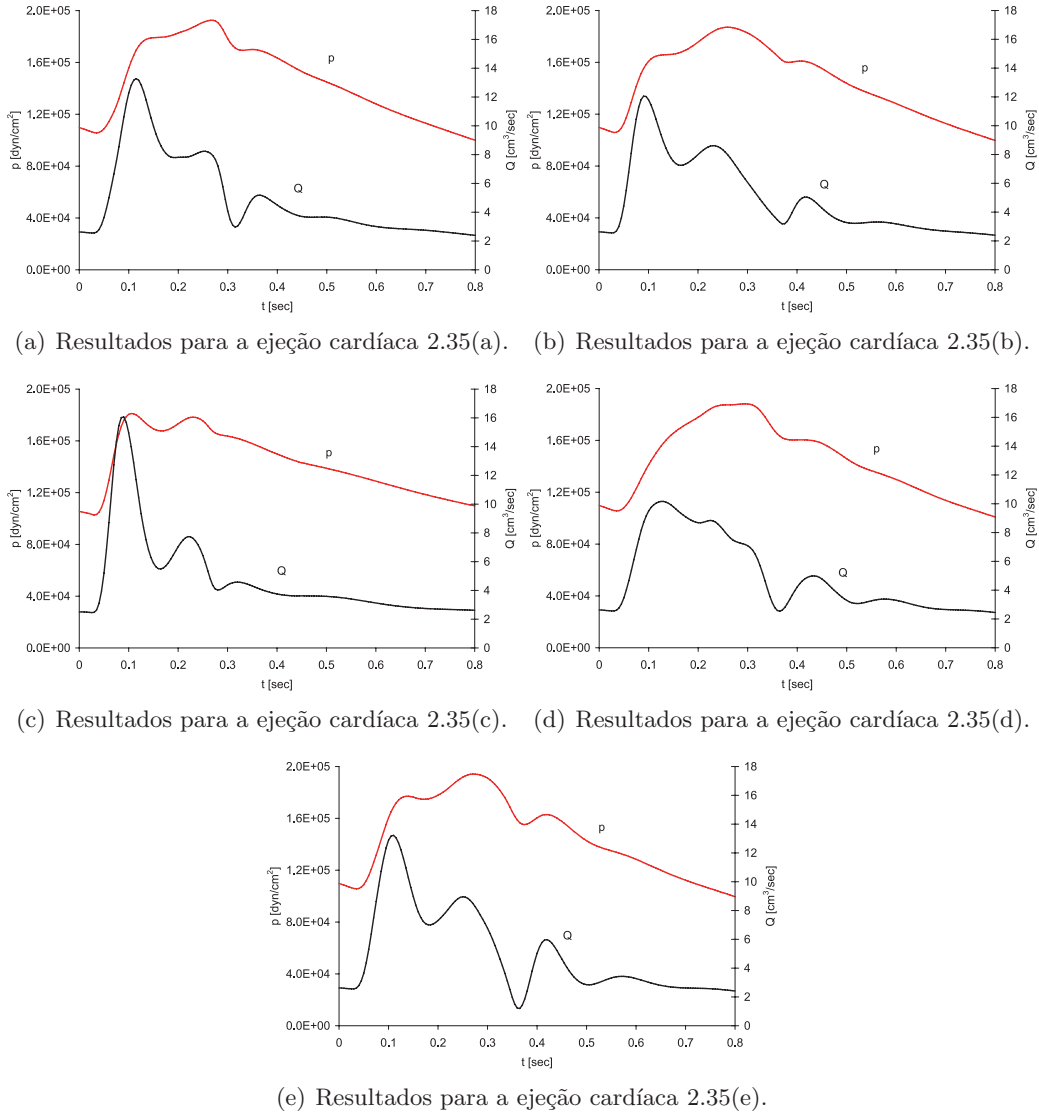
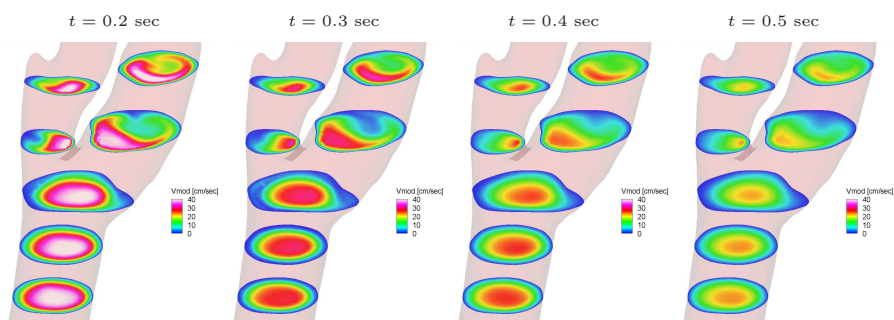


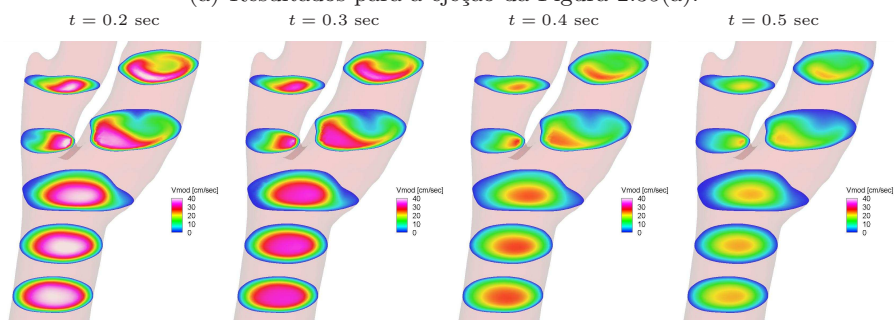
Figura 2.36: Curvas de fluxo (em preto) e pressão (em vermelho) na carótida comum.

idéia para justificar a estrutura do OSI nessas situações.

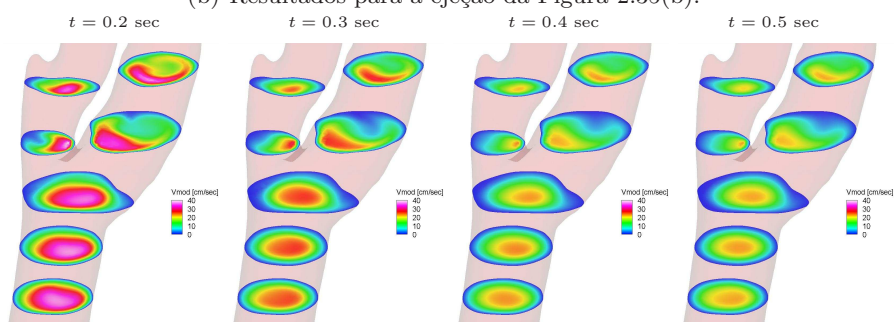
Conclui-se, então, que as diferenças entre as curvas de ejeção cardíaca se refletem fundamentalmente nas curvas de pressão e fluxo na escala global do problema e, de forma menos significativa, em certas propriedades da estrutura local do escoamento. Como conseqüência, tem-se que o indicador OSI, que dá informação levando em conta um batimento cardíaco completo, não traz à tona estas diferenças. Assim, infere-se que a maior influência nos aspectos locais do escoamento está principalmente governada pelas condições geométricas do distrito em questão, posto que determina as regiões de gradiente de pressão inverso com a conseqüente recirculação do sangue, o que, em geral, é causa de elevados valores do indicador OSI. Esta conclusão é válida para as condições aqui simuladas, como serem invariância do fluxo médio da ejeção e do período da mesma. Os resultados poderiam ser diferentes se estas condições mudassem. Eventualmente, poder-se-ia pensar em simular a aceleração do ritmo cardíaco e analisar a sua influência nos fenômenos de caráter local dentro de um distrito arterial 3D.



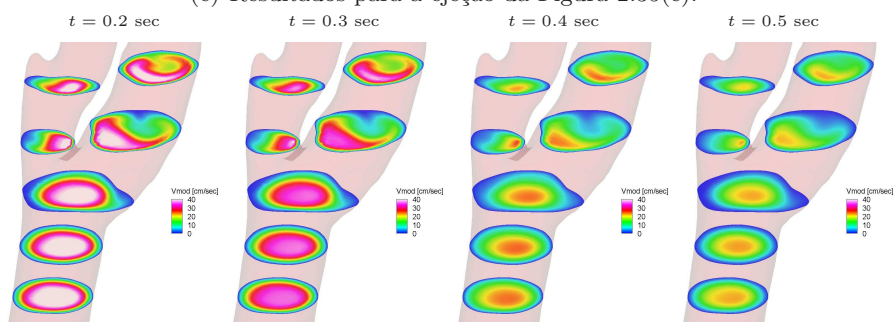
(a) Resultados para a ejeção da Figura 2.35(a).



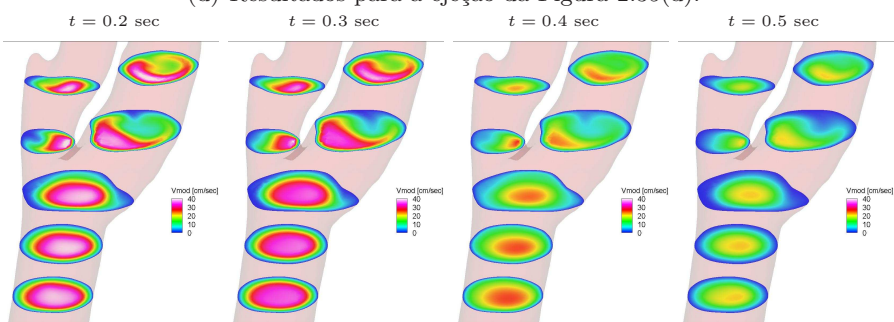
(b) Resultados para a ejeção da Figura 2.35(b).



(c) Resultados para a ejeção da Figura 2.35(c).



(d) Resultados para a ejeção da Figura 2.35(d).



(e) Resultados para a ejeção da Figura 2.35(e).

Figura 2.37: Módulo da velocidade para diversos instantes de tempo.

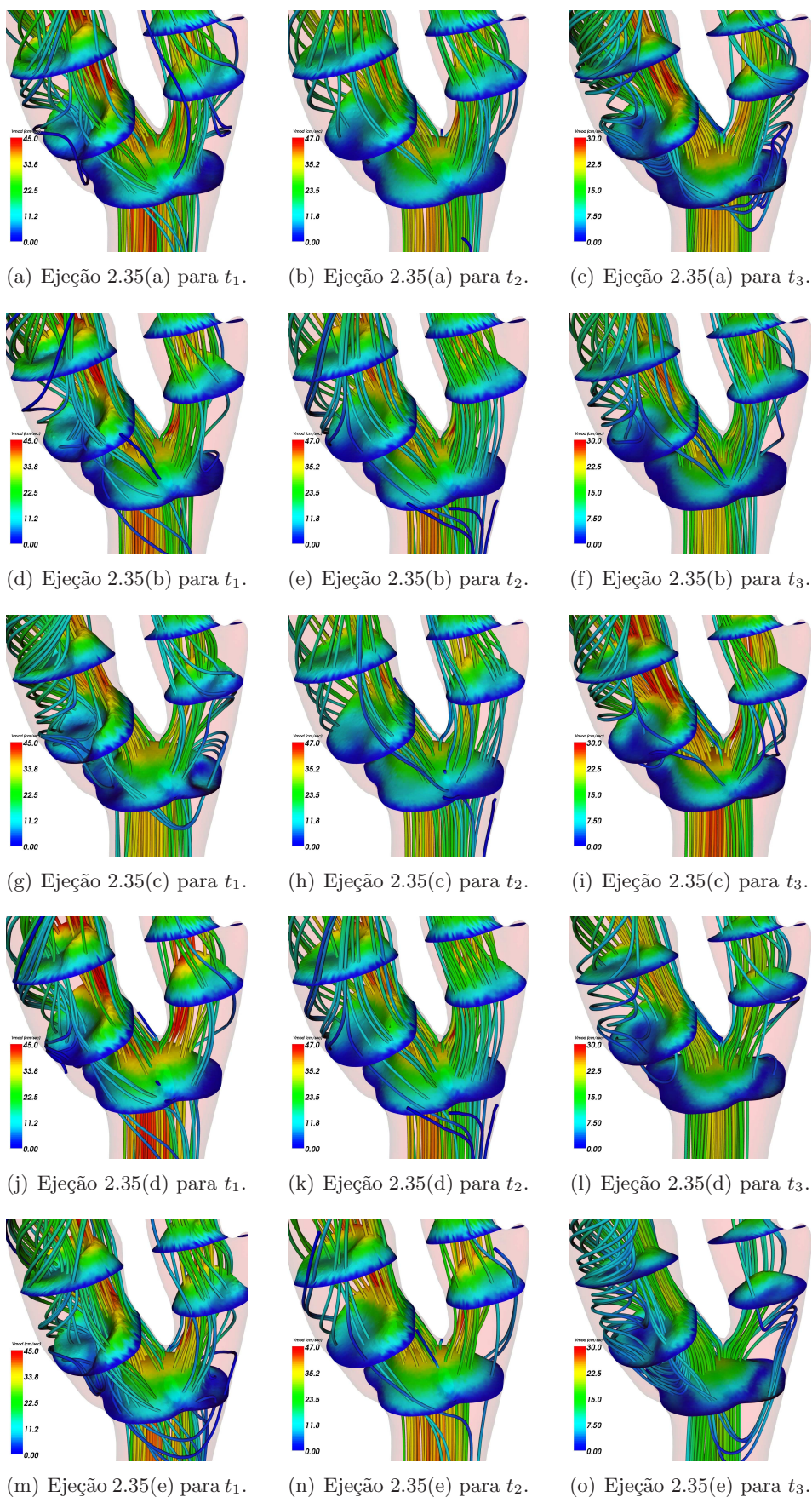


Figura 2.38: Perfis de velocidade e linhas de corrente para as diferentes ejeções cardíacas.

<i>Ejeção cardíaca</i>	<i>Tempo t_1 [sec]</i>	<i>Tempo t_2 [sec]</i>	<i>Tempo t_3 [sec]</i>
Curva 2.35(a)	0.19	0.255	0.315
Curva 2.35(b)	0.165	0.23	0.37
Curva 2.35(c)	0.165	0.225	0.28
Curva 2.35(d)	0.205	0.225	0.365
Curva 2.35(e)	0.185	0.25	0.365

Tabela 2.8: Tempos escolhidos para a comparação dos perfis de velocidade na Figura 2.38.

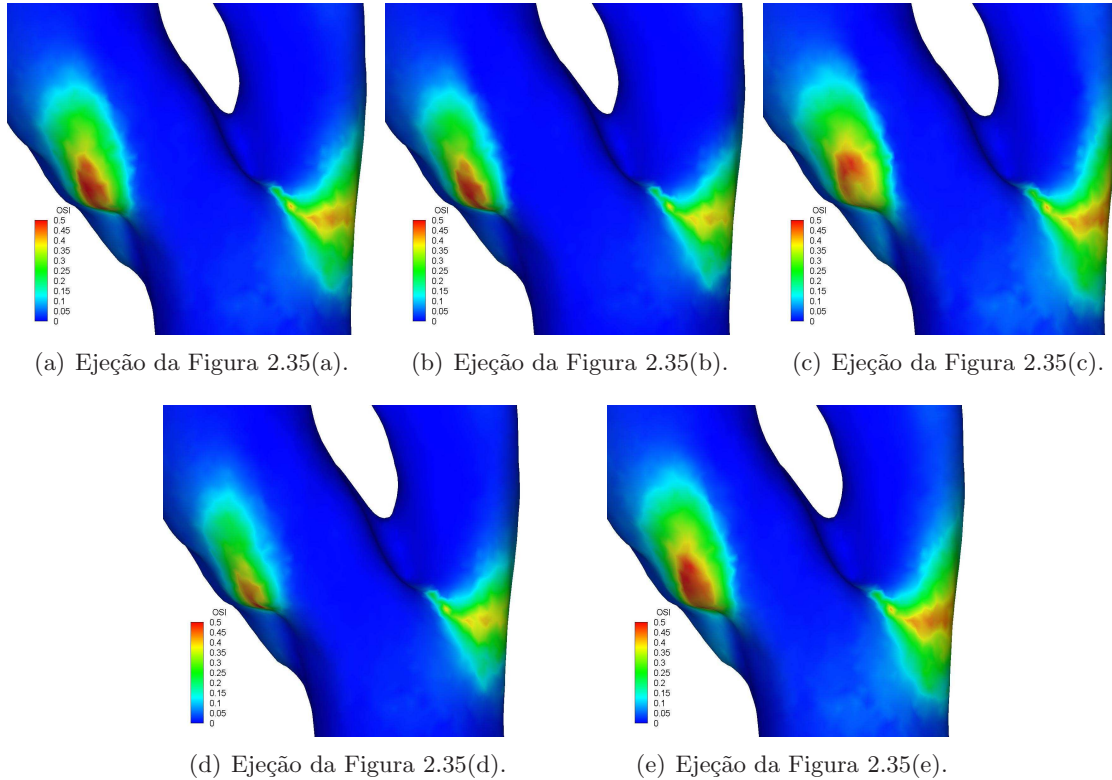


Figura 2.39: Indicador OSI para as diferentes ejeções cardíacas.

2.3.7 Influência do comprimento da região 3D no problema acoplado

Como foi visto até aqui, ao utilizar um modelo acoplado 3D–1D do sistema arterial uma parte da árvore original 1D é substituída por uma região 3D. Um passo seguinte no estudo destes modelos é analisar a influência do comprimento que a região 3D tem nos resultados do sistema acoplado, tanto nas quantidades definidas sobre o sub-domínio 1D como as definidas sobre o 3D. Isto permite, em geral, estender ainda mais o entendimento sobre o funcionamento do modelo acoplado e, em particular, prever as conseqüências da escolha de um aspecto que é relevante na modelagem como é o comprimento do domínio 3D, sobretudo quando o interesse está na simulação do escoamento no próprio domínio 3D. Nesta parte do trabalho utiliza-se, mais uma vez, o sistema arterial apresentado anteriormente na Seção 2.3.3, e substitui-se nele uma porção 3D da artéria femoral de comprimento variável.

A ejeção cardíaca utilizada foi a apresentada na Figura 2.15 e o sangue foi modelado como sendo um fluido Newtoniano. Essencialmente, o estudo baseia-se em introduzir uma determinada região 3D, neste caso um segmento da artéria femoral, e depois introduzir a mesma região porém com a metade do comprimento. Para isto consideram-se as disposições mostradas na Figura 2.40. Primeiramente insere-se o domínio 3D completo, de comprimento $L_{3D}^c = 12$ cm, que possui interfaces de acoplamento proximal e distal deno-

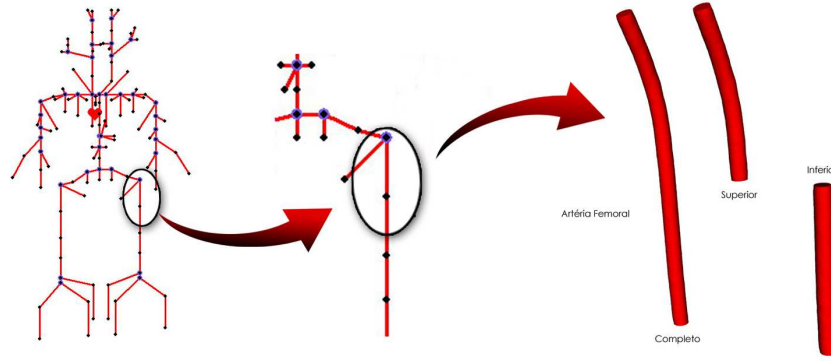


Figura 2.40: Sistema acoplado 3D-1D. Influência do comprimento da região 3D.

minadas Γ_{aP}^c e Γ_{aD}^c respectivamente. A seguir, insere-se a metade superior do domínio 3D resultando em um comprimento reduzido de $L_{3D}^s = 6$ cm, com interfaces de acoplamento proximal e distal denominadas Γ_{aP}^s e Γ_{aD}^s . Por último, emprega-se a metade inferior do domínio 3D, também de comprimento $L_{3D}^i = 6$ cm, cujas interfaces de acoplamento proximal e distal denominam-se Γ_{aP}^i e Γ_{aD}^i . Daqui em diante os índices c , s e i referem-se aos domínios completo, à metade superior e à metade inferior respectivamente.

Este resultado tem dois objetivos. Por um lado, busca-se comparar as curvas de pressão e fluxo nos pontos correspondentes às fronteiras de acoplamento de todas as regiões. Por outro lado, pretende-se estudar a forma do escoamento em determinados lugares dentro do segmento arterial 3D para analisar se o comprimento da região 3D é determinante no desenvolvimento dos perfis de velocidade, tanto na metade superior como na inferior. Com respeito a isto, observe que existe uma certa curvatura na metade superior. Este último fato é crucial no momento de examinar a estrutura do escoamento na entrada e na saída da região correspondente à metade inferior. As geometrias 3D foram discretizadas utilizando aproximadamente 225000 nós (ou seja 1575000 incógnitas) para o segmento completo e 110000 nós (portanto 770000 incógnitas) nos casos das duas metades. A discretização temporal foi levada a cabo com 640 passos de tempo em um ciclo cardíaco de $T = 0.8$ sec, o que dá um passo de tempo $\Delta t = 1.25 \cdot 10^{-3}$ sec. Os demais parâmetros (massa específica, viscosidade, parâmetros do sistema arterial, etc.) são idênticos aos mencionados nas seções anteriores.

De acordo com os três casos mencionados, as fronteiras de acoplamento são tais que: (i) $\Gamma_{aP}^c \equiv \Gamma_{aP}^s$, (ii) $\Gamma_{aD}^c \equiv \Gamma_{aD}^i$ e (iii) $\Gamma_{aD}^s \equiv \Gamma_{aP}^i$. Dado que no segmento maior a fronteira indicada como Γ_{aD}^s é interna calcularam-se os valores médios de pressão e fluxo a partir da solução do modelo 3D. As demais curvas foram obtidas a partir das soluções dos nós 1D correspondentes a cada uma das interfaces de acoplamento. Na Figura 2.41 mostram-se as curvas de fluxo e pressão para os três casos sob análise na fronteira Γ_{aP}^c , enquanto que nas Figuras 2.42 e 2.43 os mesmos resultados são apresentados para as interfaces Γ_{aD}^s e Γ_{aD}^c respectivamente. Em todas as comparações inclui-se também o resultado dado pelo modelo puramente 1D.

Alguns fatos interessantes devem ser salientados. Antes de tudo, note que, efetivamente, a deformação do domínio 3D dá lugar ao fenômeno de propagação das ondas de pressão e fluxo, o que ocorre pelo considerável tamanho do segmento. Desde já, este comportamento não poderia ser levado em conta se fossem utilizados modelos rígidos, o que faria com que se incorresse em uma apreciável perda da capacidade de representação da situação física real. Em primeiro lugar, veja que a alteração do comprimento da região considerada 3D não afeta grandemente às quantidades definidas no modelo 1D, isto é a pressão e o fluxo. Analisando mais detalhadamente os resultados vê-se que, ao utilizar um maior comprimento do domínio 3D, ocorre um leve fenômeno de diminuição da capacitância do

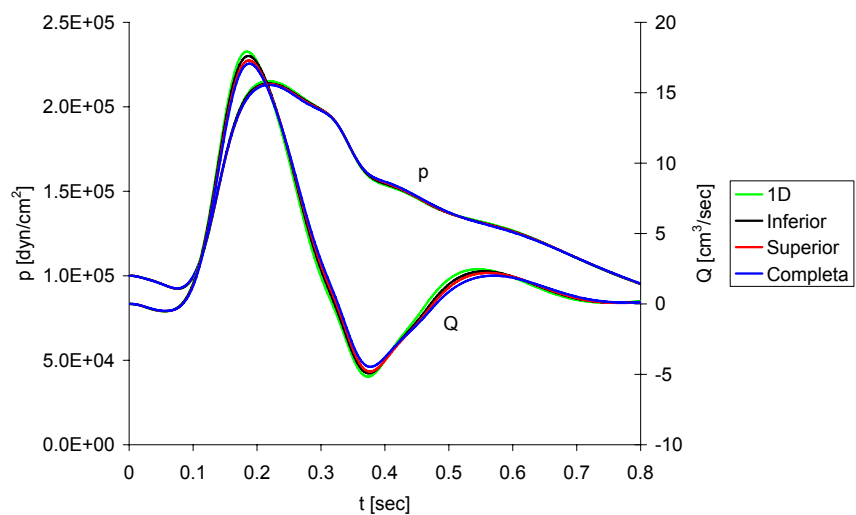


Figura 2.41: Curvas de pressão e fluxo em $\Gamma_{aP}^c \equiv \Gamma_{aP}^s$.

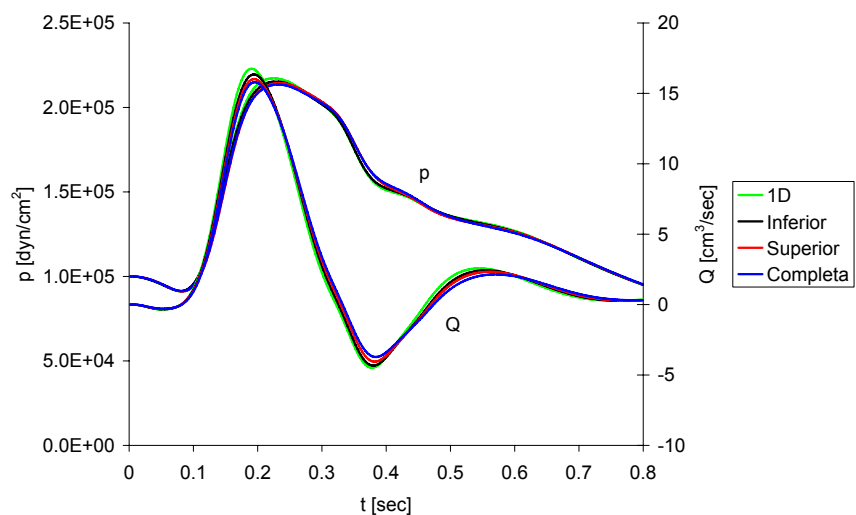


Figura 2.42: Curvas de pressão e fluxo em $\Gamma_{aD}^s \equiv \Gamma_{aP}^i$.

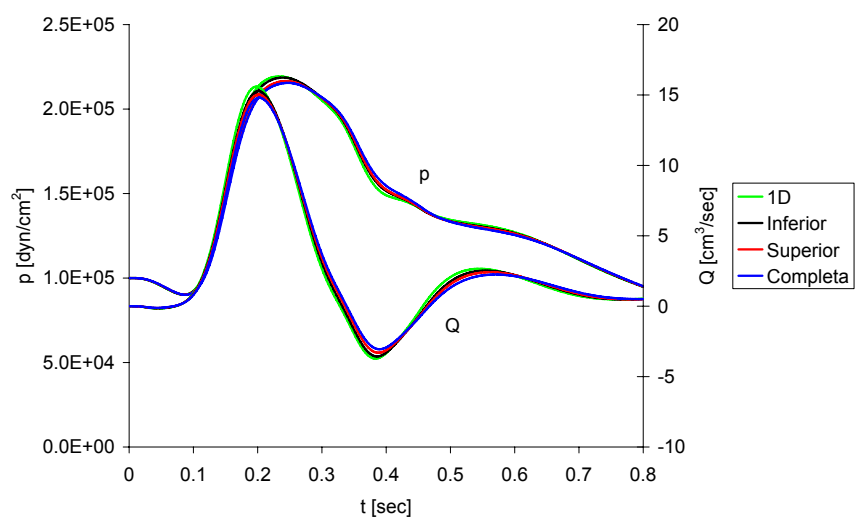


Figura 2.43: Curvas de pressão e fluxo em $\Gamma_{aD}^c \equiv \Gamma_{aD}^i$.

segmento arterial, ou seja uma redução da capacidade de armazenar sangue, ao longo de um ciclo cardíaco em comparação com o correspondente segmento 1D. Isto vê-se refletido na diminuição dos máximos y mínimos relativos de fluxo atingidos ao longo do ciclo cardíaco. Tal diminuição é de 4.7% no caso do segmento completo com respeito ao caso puramente 1D, e de 3.4% e 1.8% nos casos das metades superior e inferior, respectivamente com relação ao mesmo modelo 1D. Apesar disto, o fluxo médio que passa através da artéria femoral mantém-se, como esperado. Este fenômeno de amortecimento das ondas não afeta a essência da estrutura do escoamento tridimensional, o que pode ser inferido do estudo da sensibilidade do escoamento à curva da ejeção cardíaca da Seção 2.3.6 (lembre que na mencionada seção viu-se que os máximos e mínimos relativos variavam amplamente e, mesmo assim, as características essenciais do escoamento permaneciam inalteradas). Logo, esta pequena variação da capacidade de deformação do domínio 3D pode ser considerada dentro da ordem de aproximação do próprio modelo. Além do mais, um maior impacto desta mesma natureza deveria ser esperado ao utilizar modelos estruturais mais rígidos do que o aqui usado (modelos de cascas ou inclusive sólidos 3D) devido à ainda menor capacidade de deformação. Portanto, pode-se dizer que se está na situação mais favorável a fim de reproduzir os resultados do modelo considerado exclusivamente como 1D. Por último, pode-se ver que praticamente não ocorre atraso, nem adiantamento, do pulso cardíaco enquanto este viaja ao longo do modelo 3D. Ou seja, o modelo 3D, mesmo com um comprimento considerável, como no caso do segmento completo, consegue reproduzir a velocidade de propagação vista no modelo 1D. Isto resulta uma evidência concreta sobre o bom desempenho do modelo 3D-1D acoplado.

Deixando de lado as quantidades definidas sobre o modelo 1D, agora serão comparados os perfis de velocidade entre os segmentos 3D, a fim de observar a dependência da estrutura do escoamento com o comprimento do segmento arterial. Para facilitar a comparação, denota-se Ω^c , Ω^s e Ω^i aos segmentos completo, superior e inferior respectivamente. A Figura 2.44 compara, para vários instantes de tempo ali indicados, o perfil de velocidade em planos transversais à direção do escoamento para os três casos sob análise. Nas partes superior e inferior da mencionada figura apresentam-se as curvas de pressão e fluxo que identificam o estado das quantidades globais sobre as fronteiras Γ_{aP}^c e Γ_{aD}^c , respectivamente. Em particular estas curvas correspondem ao modelo sobre o domínio Ω^c . Mais fatos interessantes emergem dos resultados. Ao comparar a estrutura do escoamento na metade superior de Ω^c com a obtida sobre Ω^s vê-se claramente que esta não muda perceptivelmente, o que pode ser apreciado com mais detalhe nas Figuras 2.45(a) e 2.45(b) para $t = 0.190$ sec (no ponto máximo da sístole) e $t = 0.275$ sec (logo após a sístole) respectivamente. Assim, a complexa estrutura que adquire o campo de velocidade na região correspondente à metade superior de Ω^c , devido às particularidades da geometria do próprio segmento, é reproduzida sem dificuldades no domínio Ω^s . Além disso, a proximidade do contorno Γ_{aD}^s não influencia na solução aproximada em Ω^s .

Contrariamente, o comentado no parágrafo anterior não ocorre na metade inferior. Observa-se, tanto na seqüência da Figura 2.44 como nas 2.45(a)-2.45(b), que a solução obtida na metade inferior de Ω^c é totalmente diferente da obtida em Ω^i . Com efeito, o domínio Ω^i não possui nenhuma informação sobre a configuração espacial dos segmentos arteriais que a precedem. Logo, obtém-se o que seria praticamente a solução do escoamento para um tubo circular em regime transiente, derivando em uma solução do tipo escoamento de Womersley. O que é importante distinguir é o desenvolvimento do perfil de velocidade na metade inferior de Ω^c , ao ponto de chegar na saída Γ_{aD}^c com um perfil muito mais próximo ao obtido considerando somente o domínio Ω^i . Isto outorga fortes evidências numéricas a respeito do comprimento de segmento 3D necessário para que a estrutura do escoamento seja pouco sensível às particularidades geométricas dos segmentos arteriais precedentes. Poder-se-ia dizer que, para o regime aqui estudado e para as características

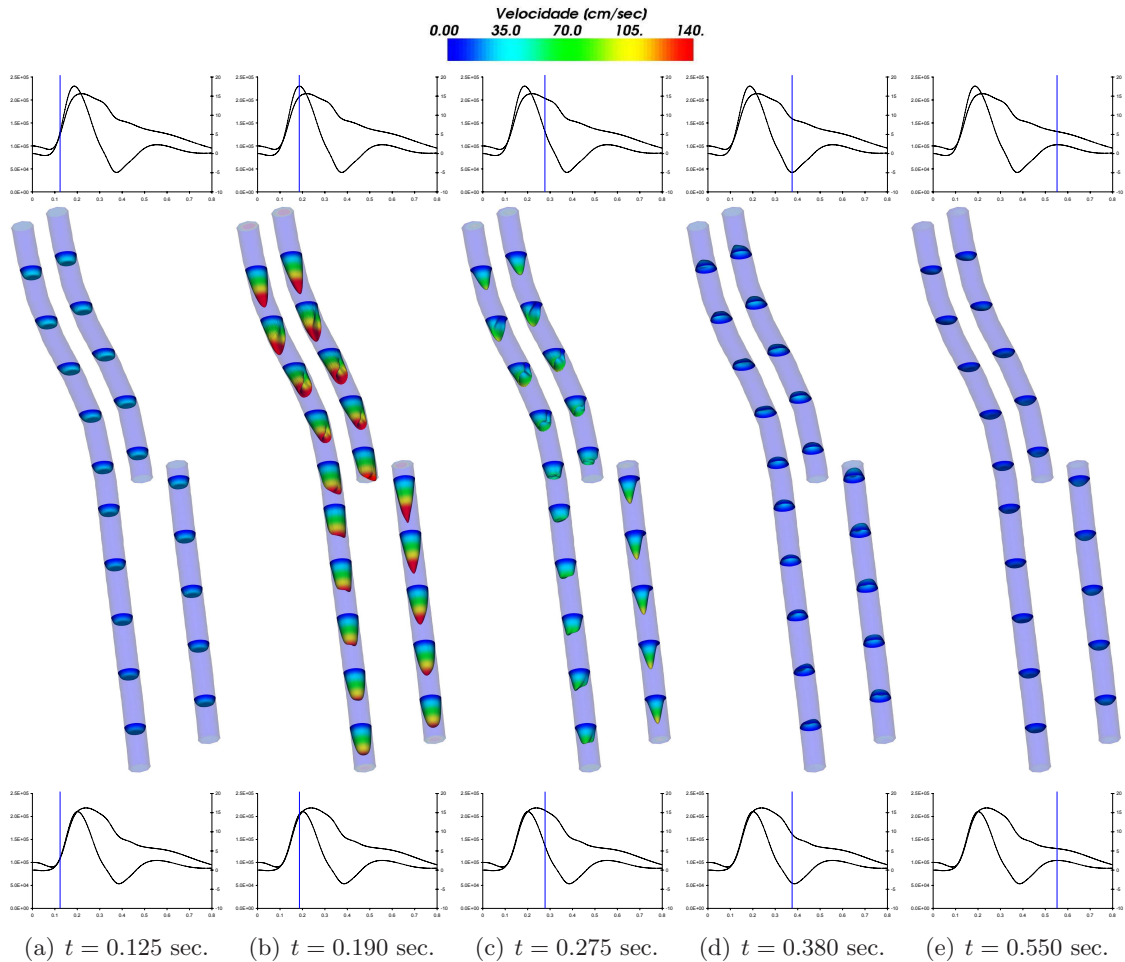


Figura 2.44: Perfis de velocidade, e quantidades globais, para as três geometrias estudadas.

geométricas consideradas, um comprimento de 6 cm é o mínimo adequado para que não haja notória influência devido ao desconhecimento da estrutura real do escoamento proveniente da direção proximal. Por exemplo, se se desejasse estudar a evolução do campo de velocidade na região correspondente a Ω^i teria sido imperativo empregar o segmento completo a fim de não desconsiderar a disposição espacial da artéria, o que traz, como visto, marcantes conseqüências a nível da estrutura local do escoamento. Por outro lado, a diferença indicada acima sobre a forma como se desenvolvem os fenômenos locais não influencia às quantidades definidas sobre a escala global (pressão e fluxo do modelo 1D) como se viu antes. Logo, conclui-se também que as influências desta natureza da escala local sobre a escala global são insignificantes.

Nas Figuras 2.46 e 2.47 mostram-se outros detalhes sobre as semelhanças e as diferenças entre a configuração do campo de velocidade para os casos estudados. O correspondente instante de tempo é identificado em cada figura. Vê-se que nas seções indicadas como $SS-A$ e $SS-B$ o campo de velocidade em Ω^c é muito similar ao calculado em Ω^s em ambos os instantes de tempo. Inclusive nas proximidades da saída de Ω^s há grande consonância entre estes. Em contrapartida, as maiores diferenças entre a solução sobre a metade inferior de Ω^c e a calculada sobre Ω^i ocorrem à altura da entrada deste último, na seção $SS-C$. Por outro lado, na seção $SS-D$ os perfis de velocidade são mais similares devido ao mencionado desenvolvimento do perfil de velocidade ao longo de Ω^c causado pelos fenômenos viscosos, o que faz com que se perca a estrutura que trazia da metade superior.

Resumindo, o comprimento da região 3D tem mostrado, para o regime do escoamento

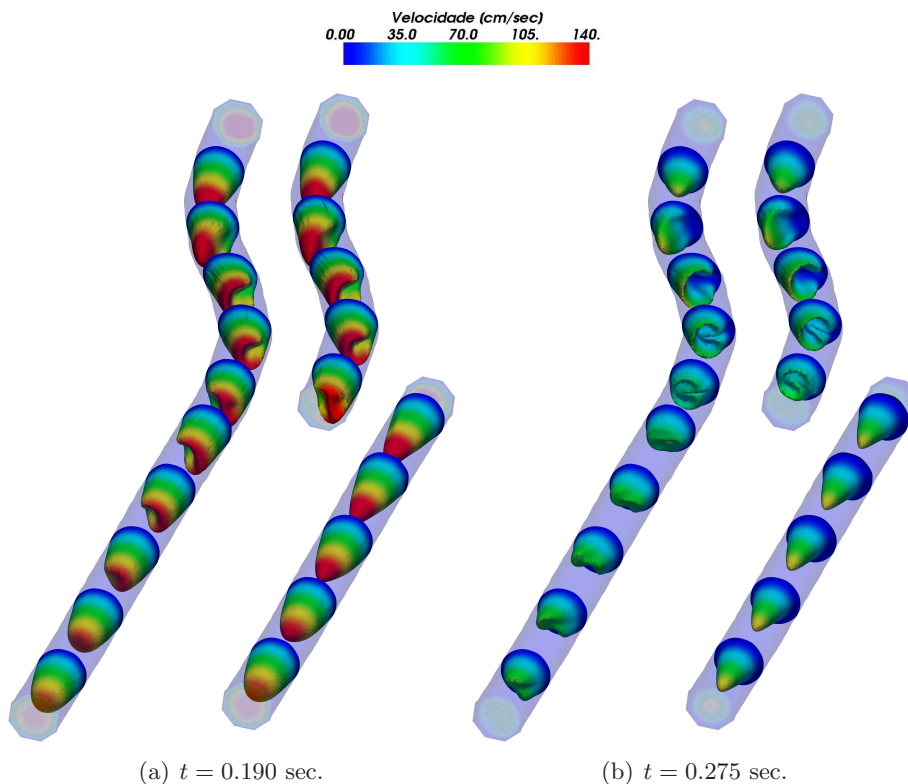


Figura 2.45: Detalhe dos perfis de velocidade para as três geometrias estudadas.

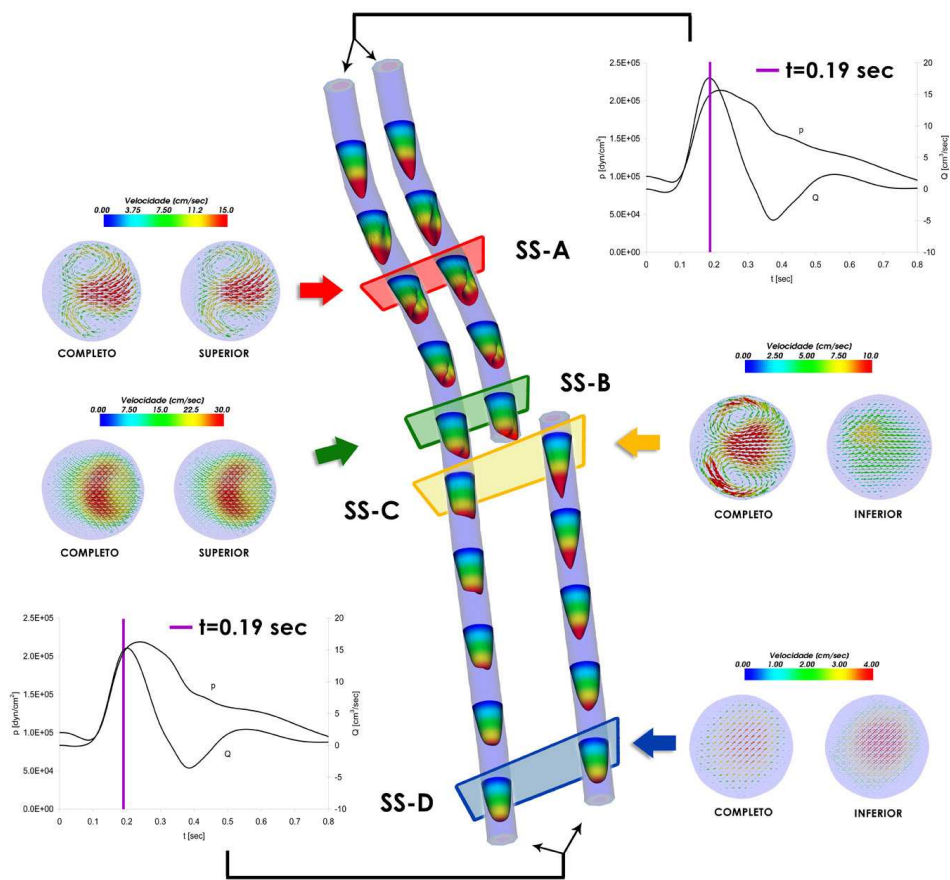


Figura 2.46: Campo de velocidade em diversos planos transversais para $t = 0.190$ sec.

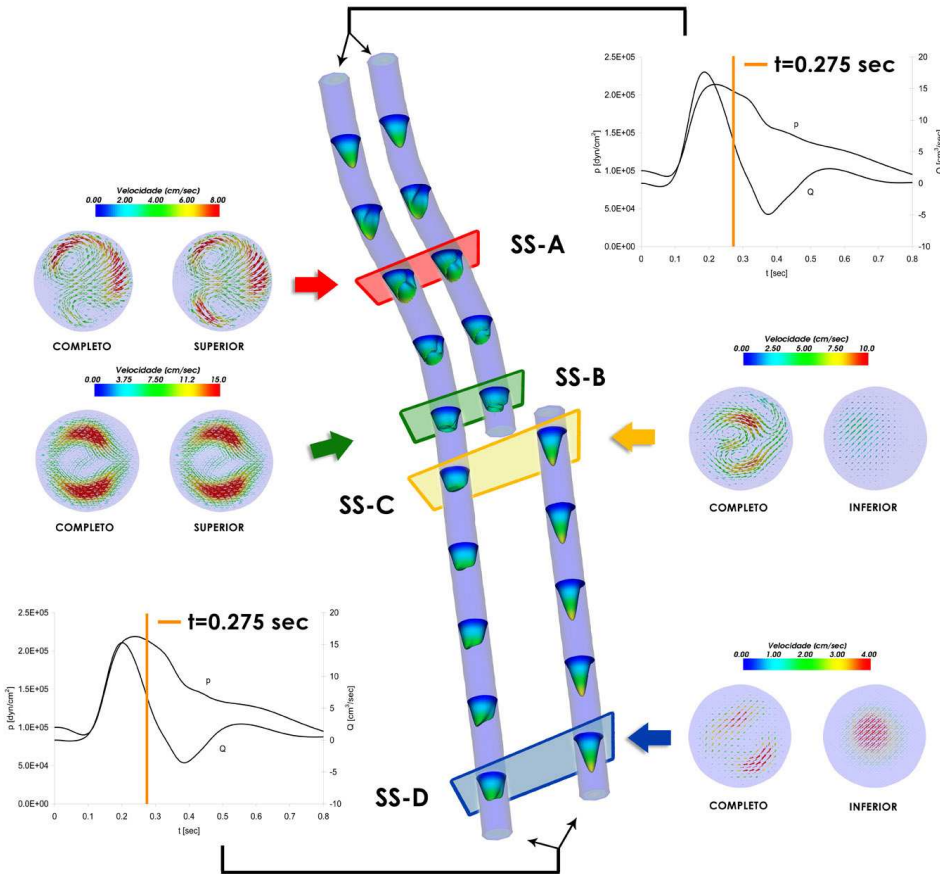


Figura 2.47: Campo de velocidade em diversos planos transversais para $t = 0.275$ sec.

aqui estudado, pouca ou quase nenhuma influência no desempenho do sistema acoplado 3D–1D quando analisadas as quantidades definidas sobre o modelo 1D. Por sua parte, ao ver a solução obtida sobre Ω^s , viu-se que a distância à fronteira de acoplamento de saída não é de relevante importância, o importante é que o segmento 3D esteja construído de forma que seja possível considerar certa independência com respeito ao que ocorre nos segmentos arteriais que o antecedem. Ao mesmo tempo, tal segmento 3D deve representar as principais características geométricas, a fim de que as condições locais do escoamento possam ser bem reproduzidas. Isto está relacionado com o que ocorre com a metade inferior. Aqui viu-se que o fato de não ter considerado a curvatura vista em Ω^s , embora pequena, levou a importantes diferenças entre a solução obtida em Ω^i e a correspondente a Ω^c . Apesar disto, observou-se que tais diferenças não afetam às quantidades globais, o que estabelece que este tipo de acoplamento entre fenômenos locais e globais é fraco.

2.3.8 Sensibilidade do pulso cardíaco à presença de um aneurisma

O objetivo desta seção é mostrar, mais uma vez, quais são as potencialidades do uso de modelos acoplados 3D–1D a fim de acomodar simulações de complexa natureza. Para tanto, procura-se analisar o modelo do sistema arterial da Seção 2.3.3 acoplado com um segmento da artéria carótida externa e estudar a influência que tem a presença de um aneurisma nas curvas de fluxo e pressão. Desta maneira, a filosofia deste exemplo é idêntica à do exemplo da Seção 2.3.4 quando se analisava a sensibilidade do escoamento à presença de uma estenose. A Figura 2.48 esquematiza a situação aqui tratada.

A origem da geometria tridimensional é um conjunto de imagens médicas de ressonância magnética. Diversas técnicas de reconstrução e segmentação de imagens foram

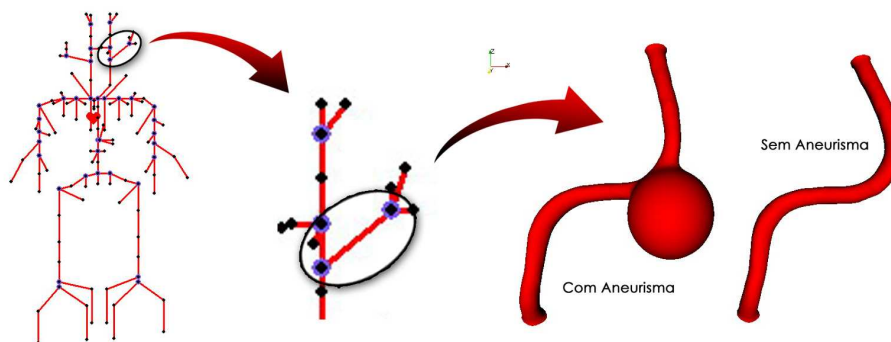


Figura 2.48: Sistema arterial 3D–1D. Sensibilidade à presença de um aneurisma.

utilizadas para chegar na versão final do segmento arterial mostrado na Figura 2.48. A geometria obtida é a da direita na figura, enquanto que a geometria da esquerda é uma versão que foi modificada a partir da original agregando uma perturbação geométrica que tem por objetivo simular um aneurisma.

Por sua vez, as propriedades mecânicas dos modelos 3D foram atribuídas em função das características do modelo 1D. O sangue foi considerado Newtoniano. Como ejeção cardíaca foi usada a curva da Figura 2.23. Foram simulados dois batimentos cardíacos de período $T = 0.8$ sec. Todos os resultados aqui mostrados correspondem ao segundo ciclo cardíaco.

Na Figura 2.49 apresentam-se as curvas de fluxo e pressão sobre as interfaces de acoplamento proximal e distal. Na mencionada figura indicam-se as soluções do modelo acoplado quando a região 3D possui o aneurisma (curva denotada por *com*, em preto) e quando a região 3D é a original (curva denotada por *sem*, em vermelho).

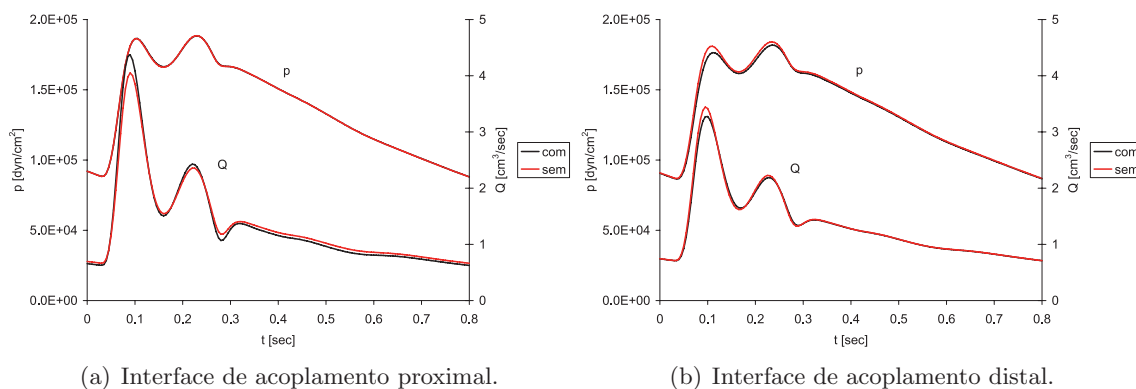


Figura 2.49: Fluxo e pressão nas interfaces de acoplamento.

Com respeito às curvas de pressão, a presença do aneurisma influencia, embora quase imperceptivelmente, em maior medida à solução na localização distal. Em particular, observa-se que a queda de pressão é maior no caso com o aneurisma, o que se correlaciona com a maior irregularidade do escoamento nesta situação e a maior distância percorrida pelas partículas. Contrariamente, o aneurisma possui uma maior influência na curva de fluxo sobre a fronteira de acoplamento proximal. Apesar das diferenças aqui comentadas, vê-se que a singularidade geométrica simulada não representa um fator influente nas quantidades definidas na escala do modelo 1D, mesmo levando em conta que a estrutura do escoamento 3D muda radicalmente devido à mudança na geometria de análise.

As Figuras 2.50 e 2.51 apresentam as soluções obtidas dentro do domínio da carótida

externa com e sem o aneurisma respectivamente. Em particular, mostram-se os perfis de velocidade em diversas seções transversais para os instantes de tempo ali indicados. Por sua parte, as Figuras 2.52 e 2.53 fornecem os detalhes do campo de velocidade dentro da região do aneurisma para os tempos $t = 0.15$ sec e $t = 0.5$ sec. As características da estrutura do escoamento são postas em evidência combinando cortes transversais, linhas de corrente e as iso-superfícies do módulo de velocidade, para valores de 10 cm/sec e 6 cm/sec, nos instantes $t = 0.15$ sec e $t = 0.5$ sec respectivamente.

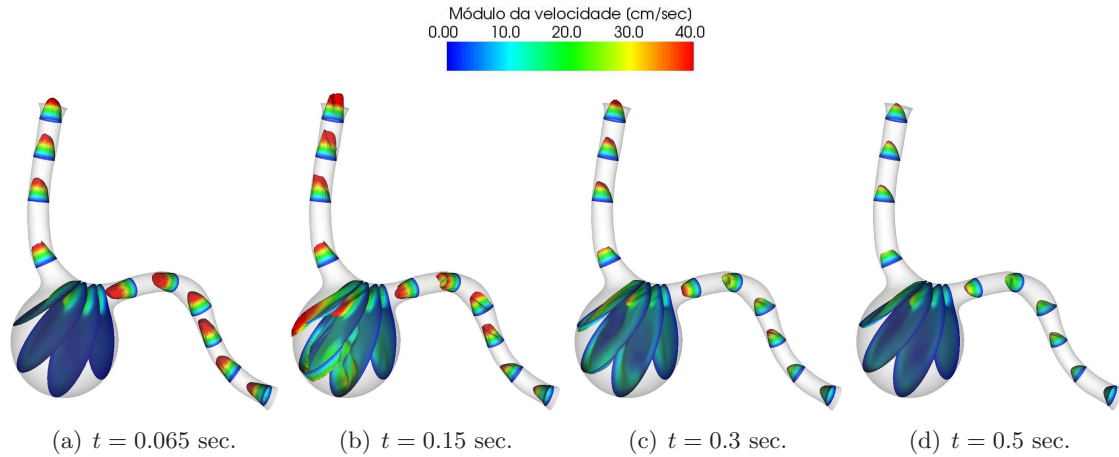


Figura 2.50: Perfis de velocidade para diversos instantes de tempo. Geometria com aneurisma.

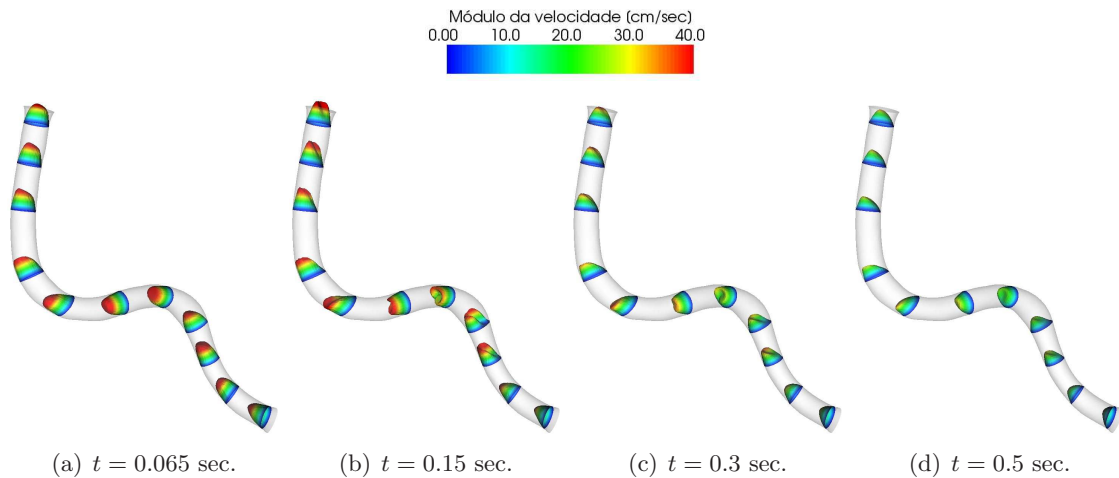


Figura 2.51: Perfis de velocidade para diversos instantes de tempo. Geometria sem aneurisma.

A seqüência da Figura 2.54 mostra a evolução, ao longo do período cardíaco, da iso-superfície correspondente ao campo escalar que representa o módulo de velocidade para o valor 10 cm/sec.

Das soluções dos dois casos computaram-se os índices OSI e WSS. Por um lado, a Figura 2.55(a) mostra que o índice OSI é relativamente baixo na artéria sem aneurisma, enquanto que no caso com a perturbação atinge os valores maiores dentro da região do aneurisma dada a forte recirculação que ali se produz. A escala de cores nessa figura foi reduzida para mostrar melhor a estrutura do campo escalar do OSI. Por outro lado, a Figura 2.55(b) compara os valores do WSS. Vê-se que na entrada e na saída da região do aneurisma o valor do WSS aumenta com respeito ao caso original.

Como comentário geral, observa-se que, apesar da notável diferença que há na estrutura interna do escoamento tridimensional, a solução no nível da escala global do sistema

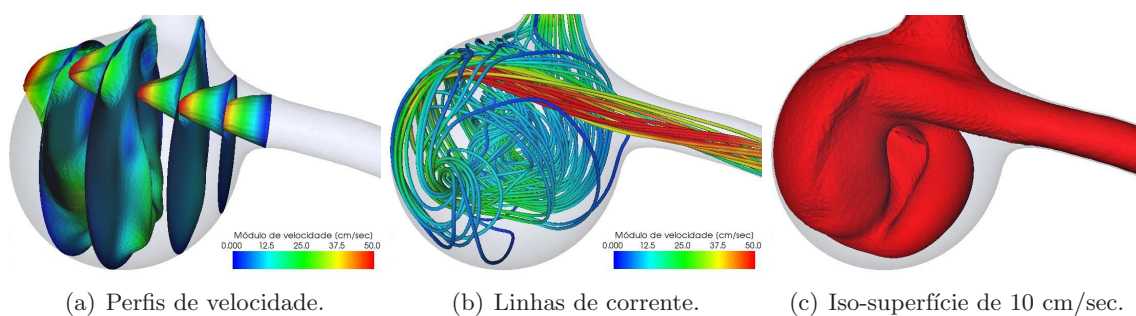


Figura 2.52: Estrutura do campo de velocidade para $t = 0.15$ sec.

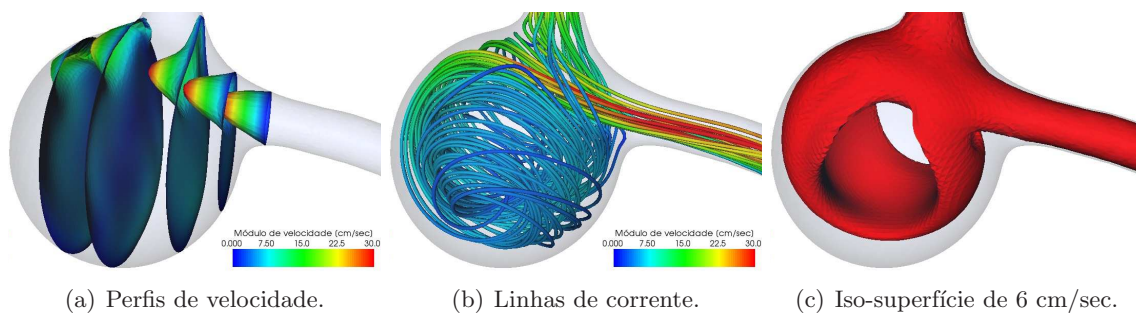


Figura 2.53: Estrutura do campo de velocidade para $t = 0.5$ sec.

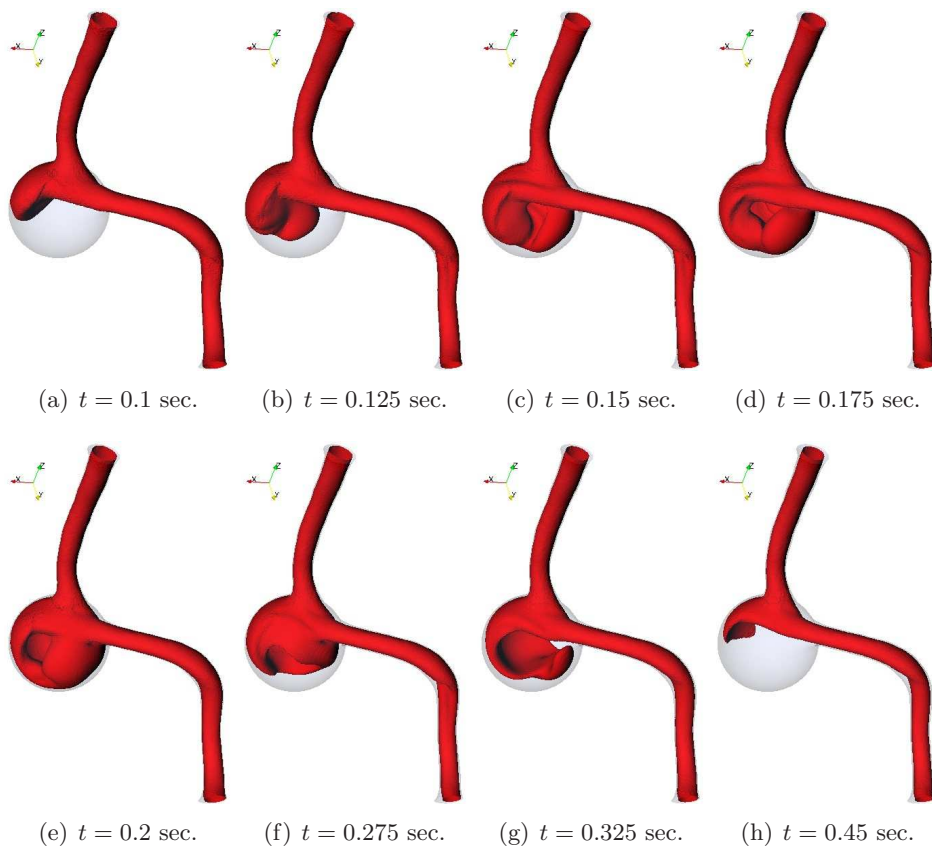


Figura 2.54: Evolução da iso-superfície do módulo de velocidade de valor 10 cm/sec.

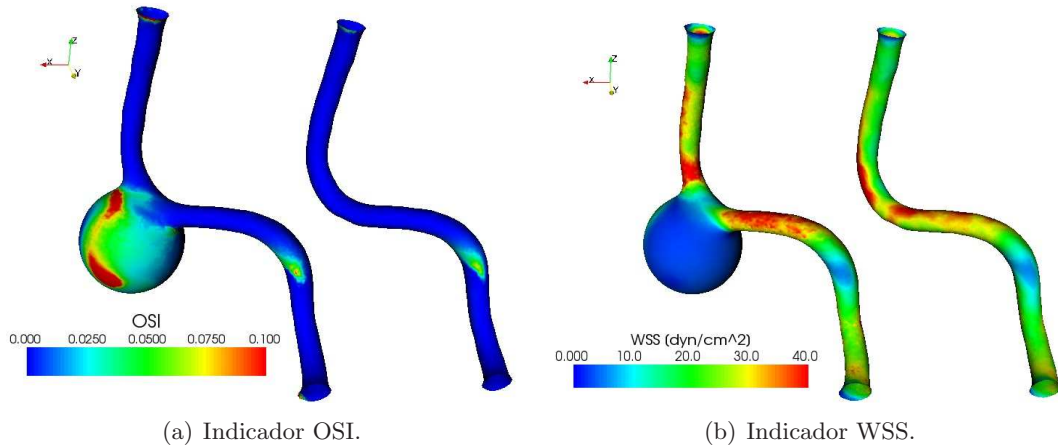


Figura 2.55: Indicadores OSI e WSS para os casos com e sem aneurisma.

é pouco sensível ao aneurisma, o que dá mais evidências de que o acoplamento entre fenômenos globais e locais é fraco neste tipo de situações.

2.3.9 Esquema segregado contra esquema monolítico

Nesta seção utiliza-se o modelo acoplado apresentado na Seção 2.3.3.1, segundo o esquema da Figura 2.16. O objetivo é comparar os resultados, isto é curvas de fluxo e pressão, quando utilizado o esquema monolítico da Seção 2.2.4 e quando usado o esquema segregado da Seção 2.2.5. Mais um caso é considerado a partir do esquema segregado: é aquele no qual não se realizam iterações entre os sub-problemas 3D e 1D, ou seja que é linear entre estes sub-problemas. Em particular, para o esquema segregado incorpora-se a possibilidade de sub-relaxação para as iterações entre os sub-problemas 3D e 1D por meio de um parâmetro real ω . Para fazer os resultados comparáveis procedeu-se como segue: a configuração do resolvidor do sistema de equações lineares foi fixada para todos os casos; o passo de tempo no início da simulação foi o mesmo para todos os casos; quando o resolvidor do sistema linear não convergia, diminuía-se o passo de tempo à metade. Na Figura 2.56 comparam-se as curvas de fluxo e pressão para diversas situações sobre a interface de acoplamento proximal Γ_{aP} . Devido a que os resultados mantiveram-se invariantes com respeito ao parâmetro ω , os resultados incluem o esquema monolítico *mon*, o segregado *seg* com $\omega = 0.8$ e o linearizado *lin*.

Note que os resultados são praticamente idênticos, ao menos para os regimes encontrados na aorta abdominal e para os passos de tempo utilizados. Pode-se concluir que a melhor opção com respeito ao custo computacional é o caso linearizado. Na Tabela 2.9 apresentam-se, em função do parâmetro de sub-relaxação, o número máximo de iterações até alcançar a convergência do esquema segregado durante a simulação e o passo de tempo mínimo alcançado na simulação, de acordo com o dito acima. É importante remarcar a situação com $\omega = 1$, a qual requer considerável esforço computacional devido à convergência extremamente lenta. Este aspecto é contornado da forma mais conveniente usando $\omega = 0.8$. Em contrapartida, no caso extremo de $\omega = 0.2$ já pressupunha de antemão um esquema com convergência lenta.

2.4 O sistema HeMoLab

Durante a realização desta tese tive participação no grupo de desenvolvimento do sistema HeMoLab. O nome do sistema decorre do inglês *Hemodynamic Modelling Laboratory*. Como indicado no nome, o sistema HeMoLab é concebido para suprir soluções na

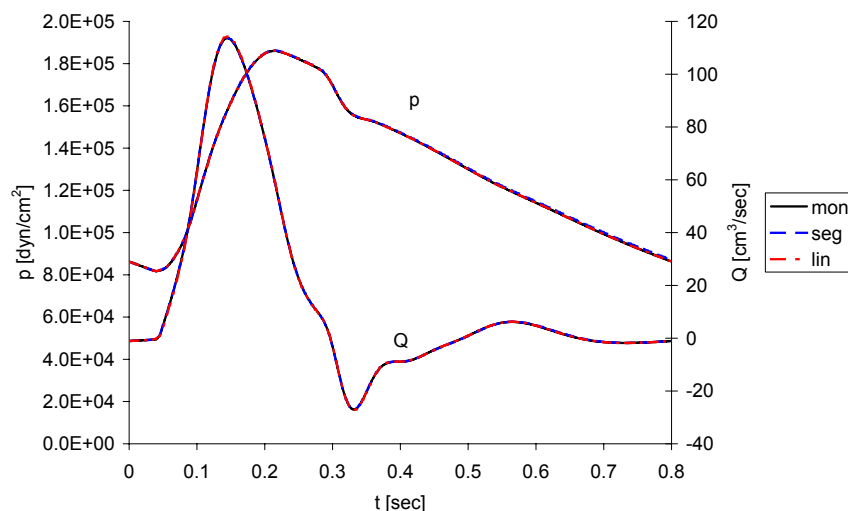


Figura 2.56: Resultados na artéria aorta abdominal com diferentes esquemas de acoplamento.

Valor de ω	Iterações entre sub-problemas	Mínimo passo de tempo usado [sec]
1.0	13	$3.125 \cdot 10^{-4}$
0.8	5	$6.25 \cdot 10^{-4}$
0.6	9	$6.25 \cdot 10^{-4}$
0.4	12	$6.25 \cdot 10^{-4}$
0.2	25	$3.125 \cdot 10^{-4}$

Tabela 2.9: Propriedades de convergência do esquema segregado.

área da modelagem e simulação computacional do sistema cardiovascular humano. Em particular, está orientado à construção e desenvolvimento de modelos personalizados do sistema cardiovascular para pacientes específicos, visando a inclusão da modelagem global do sistema arterial assim como de regiões de análise detalhadas. Isto consegue-se somente ajustando *ad hoc* os principais parâmetros que governam o comportamento do sistema arterial e dos distritos arteriais onde se deseja focar a análise, para o qual é preciso manipular grandes quantidades de dados. Assim, a calibração de um sistema arterial simplificado 1D, como o visto nas seções anteriores, junto com a segmentação de imagens médicas para a elaboração de geometrias 3D, permite elaborar um modelo determinado de um dado sujeito. Logo, pode-se simular tanto o sistema em condições normais como sob condições alteradas, seja artificialmente ou por alguma causa real como poderia ser uma doença. Ferramentas desenhadas para a simulação tanto do sistema arterial 1D como de modelos 3D encontram-se com facilidade quando buscadas por separado. Contudo, ferramentas que implementem as idéias desenvolvidas nestes dois primeiros capítulos sobre a utilização de modelos acoplados ainda carece de precedentes. Conseqüentemente, o sistema HeMoLab não é somente um laboratório de modelagem em hemodinâmica, mas também é uma ferramenta que vem a atender o requisito de implementação rápida e efetiva de modelos acoplados 3D–1D do sistema arterial. A justificativa para a utilização de modelos acoplados do sistema arterial tem sido continuamente evidenciada ao longo deste capítulo.

O objetivo principal que tem motivado o desenvolvimento do sistema HeMoLab é o de fornecer uma ferramenta que auxilie a toma de decisões nas diversas áreas da hemodinâmica. O sistema está dirigido a profissionais de diversas áreas, como os da área cardiovascular, radiologistas, hemodinamicistas ou mesmo engenheiros e técnicos de áreas afins. A idéia é, então, fornecê-lo como ferramenta de uso corriqueiro, para efetivar sua implementação como parte rotineira das atividades na pesquisa médica, ou mesmo como auxílio dos métodos de ensino e treinamento atuais. Em particular, este último ponto pode

ser entendido como um objetivo a curto prazo, já que pressupõe uma fácil implementação e rápida inserção como material educativo.

As aplicações do sistema HeMoLab dentro dos contextos mencionados nos parágrafos anteriores são inúmeras, e vão desde a simples simulação do sistema cardiovascular até a análise do risco de ruptura de aneurismas, ou mesmo o planejamento de cirurgias cardiovasculares, passando pelo treinamento de profissionais, tanto da área da medicina como da bio-engenharia, ou o estudo de fatores hemodinâmicos e a sua correlação com doenças cardiovasculares. Por outro lado, os pontos salientáveis do sistema HeMoLab, em relação à concepção, são a avançada tecnologia sobre a qual está apoiado e a versatilidade nas funcionalidades que o sistema fornece como resultado desta tecnologia. No que segue descrevem-se as principais características do sistema HeMoLab juntamente com a estrutura desenvolvida e uma breve descrição das bases do sistema. Para uma discussão mais detalhada sobre o assunto ver [91].

2.4.1 Estrutura e principais características do sistema HeMoLab

O sistema HeMoLab possui diversas funcionalidades, porém, estas podem ser claramente identificadas dentro dos seguintes módulos: (i) processamento de imagens, (ii) criação, edição e visualização de modelos 1D, (iii) criação, edição e visualização de modelos 3D, (iv) acoplamento de modelos 3D e 1D, (v) resolução numérica do problema e (vi) visualização dos resultados. Cabe ressaltar que estes grupos não necessariamente devem participar em um mesmo cenário (a menos do módulo de acoplamento que precisa necessariamente da existência de modelos 3D e 1D).

Processamento de imagens. O objetivo deste módulo é permitir o processamento de imagens médicas fornecidas em diferentes formatos (DICOM, BMP, JPG, dentre outros). As principais ferramentas incluídas neste módulo permitem realizar a leitura das imagens para, logo, aplicar filtros de suavização de diferentes classes para melhorar a imagem. A segmentação é o próximo passo, e é também parte das funcionalidades deste módulo. Assim, a calibração e ajuste das mais usuais técnicas de segmentação estão incorporadas dentro deste módulo, ao mesmo tempo que é possível adicionar novas metodologias. Neste ponto obtém-se uma triangulação da superfície correspondente à região segmentada, para depois ser tratada e assim gerar a malha de elementos finitos para a simulação.

Criação, edição e visualização de modelos 1D. Segundo visto, para construir um modelo 1D do sistema arterial precisa-se de diversas informações. Este módulo fornece todas as ferramentas para criar segmentos arteriais, unindo-os e estabelecendo hierarquias, assim como para atribuir valores às propriedades geométricas e mecânicas que caracterizam a cada segmento arterial. Da mesma forma, permite-se introduzir modelos de Windkessel, definindo os segmentos arteriais aos quais estes pertencem, e dando os valores dos parâmetros que os definem. Como caso particular, é possível realizar a edição da curva de ejeção cardíaca que será introduzida como condição de contorno através de um modelo de Windkessel. Além disso, o módulo permite realizar a discretização espacial do sistema, assim como diversas funções para modificar a malha de elementos finitos gerada.

Criação, edição e visualização de modelos 3D. Uma vez que se dispõe das imagens médicas segmentadas, este módulo toma conta da realização da melhora da triangulação superficial da região que será utilizada para a análise. Assim, obtém-se a malha de superfície final em função de diversas ferramentas implementadas a tal fim. A partir desta malha de superfície gera-se a malha de volume e, se necessário, otimiza-se. O módulo ainda permite detalhar as propriedades da parede arterial,

condições de contorno, determinar se o domínio é deformável ou não, dentre outras possibilidades.

Acoplamento de modelos 3D e 1D. A partir de dispor modelos 1D e 3D, este módulo permite basicamente acoplá-los. Para isto, as ferramentas baseiam-se na seleção da região do modelo 1D juntamente com as correspondentes superfícies, que agora passarão a ser interfaces de acoplamento, do modelo 3D. O módulo ainda permite estabelecer a forma em que o esquema de acoplamento é tratado, ou seja, determinar se o modelo 3D-1D é resolvido por meio de um sistema de equações acoplado ou segregado.

Resolução numérica do problema. Este módulo corresponde exclusivamente à fase de resolução numérica do problema. O resolvidor numérico empregado é um programa de propósito geral denominado SolverGP, e é descrito com maior detalhe na Seção 2.4.3. As funcionalidades deste módulo limitam-se à resolução do sistema de equações de acordo com os dados fornecidos através de arquivos formatados pelos módulos anteriores.

Visualização dos resultados. Uma vez obtido o resultado da simulação, este é devolvido ao sistema HeMoLab. Este módulo permite ao usuário visualizar os resultados, fornecendo todas as ferramentas necessárias para sua análise. Outra característica é a possibilidade de processamento dos resultados, caso seja necessário. As possibilidades que o módulo oferece para a visualização, a apresentação e também a manipulação dos resultados são inúmeras devido a que a base sobre a qual está montado o sistema HeMoLab é, de fato, um sistema de visualização de dados, que é descrito com maior detalhe na Seção 2.4.2.

2.4.2 Tecnologias empregadas no sistema HeMoLab

O desenvolvimento do sistema HeMoLab é feito sob o sistema operacional Linux, distribuição Ubuntu 6.06.1 LTS, enquanto que a linguagem escolhida para o desenvolvimento é ANSI-C++ com compiladores c++/gcc. O gerenciamento do projeto é realizado por meio do dotProject, versão 2.0.1, e as tarefas são gerenciadas por meio do Bugzilla, versão 2.16.7.

O sistema HeMoLab está montado dentro do ambiente de trabalho ParaView [82] que fornece o contexto adequado para a implementação das ferramentas necessárias. ParaView é uma aplicação *Open Source* sob licença GNU e desenvolvido em ANSI-C++. Utiliza a biblioteca Visualization Toolkit (VTK, ver [81]) escrita em linguagem C++ e que faz uso de OpenGL para tarefas de renderização 3D. Por sua vez, a interface de usuário do ParaView é escrita em TCL. ParaView foi desenvolvido pela Kitware Inc. juntamente com os Laboratórios de Los Alamos, Sandia e Lawrence Livermore. O objetivo do ParaView é a visualização de grandes volumes de dados através de uma interface gráfica de fácil configuração. A extensibilidade e possibilidade de paralelismo do ParaView são algumas das principais características. Além disso, o leque de formatos de dados suportados é amplo, resultando em uma arquitetura com grande versatilidade.

2.4.3 O resolvidor numérico

Assim como, por um lado, a arquitetura ParaView fornece as bases para a implementação das ferramentas relacionadas à preparação dos modelos de estudo e à visualização dos dados, é preciso dispor de um resolvidor numérico uma vez que tais modelos estão preparados. Segundo visto na Seção 2.2, o Método de Elementos Finitos é o método base para encontrar soluções aproximadas aos problemas formulados. Neste sentido, o sistema

SolverGP [158] é um programa de propósito geral que está adequado às necessidades do sistema HeMoLab, fornecendo a possibilidade de resolver o problema 1D, o problema 3D e por último o problema acoplado 3D–1D através da implementação do conceito de elementos não aditivos [156].

O sistema SolverGP é um programa de propósito geral. Como tal, este permite a resolução aproximada de qualquer problema cuja estrutura possa ser decomposta em contribuições elementares. Os conceitos básicos utilizados são o de elemento e o de grau de liberdade não aditivo. Combinando adequadamente estes dois é possível obter um sistema com total versatilidade e reutilização de código, posto que o armado dos problemas reduz-se à inclusão dos elementos relativos ao fenômeno que está sendo modelado.

Outra das características do sistema SolverGP é a possibilidade de escolher entre diferentes métodos para a resolução de grandes sistemas de equações, desde métodos diretos até os mais diversos métodos iterativos, como serem os baseados em gradientes conjugados e em subespaços de Krylov, incluindo a possibilidade de condicionamento. Finalmente, a paralelização deste sistema realiza-se utilizando MPI junto à biblioteca PetSc [89] que dá os métodos paralelizáveis de resolução dos sistemas de equações.

O SolverGP é provido, de forma padrão, de quatro arquivos que são convenientemente construídos, e a saída é dada em um único arquivo. Uma breve descrição dos mesmos é a seguinte:

Basparam.txt: Este arquivo é utilizado para realizar a configuração mais geral do resolvidor, definindo discretização temporal e métodos de resolução, estrutura de cálculo dos diferentes sub-passos, dentre outros. Também montam-se os elementos que fazem parte dos cálculos no problema. Este arquivo relaciona-se com o Mesh.txt através de um conjunto de indicadores elementares.

Mesh.txt: Este arquivo armazena a malha de elementos finitos, incluindo coordenadas, conectividade e índices de cada elemento para serem relacionados com os dados disponíveis tanto no Basparam.txt como no Param.txt. Também são fornecidas aqui as condições de contorno de Dirichlet.

Param.txt: Este arquivo armazena propriedades a nível de elementos, e está altamente relacionado com o arquivo Mesh.txt através dos conjuntos de indicadores elementares.

Inifile.txt: Este arquivo estabelece as condições iniciais para cada grau de liberdade de cada nó.

Dataout.txt: Este arquivo armazena, para cada passo de tempo, a solução do problema para cada um dos graus de liberdade de cada nó.

Para uma descrição mais detalhada do sistema SolverGP consultar [156, 158].

2.5 Comentários finais

Antes de fechar o capítulo é interessante prover uma visão acerca de possíveis futuros cenários quando se pensa em utilizar modelos acoplados 3D–1D para modelagem em hemodinâmica. Como foi visto ao longo dos exemplos mostrados, as potencialidades destes modelos multidimensionais estão orientadas a situações nas quais se deseja avaliar, tanto qualitativa como quantitativamente, a influência que os fenômenos globais têm na escala local do escoamento do fluxo sanguíneo e viceversa. Com relação a isto, pode-se pensar em um vasto número de aplicações nas quais a variação das condições do sistema com o tempo (situação cardiovascular não periódica) é dominante. Nestas circunstâncias, o acoplamento de modelos provê a forma mais apropriada de simular o problema, já que o

estado do sistema acoplado evolui constantemente de acordo às condições externas às quais está submetido. Um exemplo disto poderia ser a variação brusca de propriedades como os parâmetros que definem aos terminais periféricos, ou mesmo uma variação acentuada das propriedades mecânicas das artérias frente a condições externas (rápido enrijecimento das artérias). Também pode-se pensar em aplicar a teoria de análise de sensibilidade à mudança de forma sobre geometrias tridimensionais de forma a avaliar, por exemplo, como se desempenham diferentes formas de anastomoses. O mesmo comentário é válido para a análise de agregação de placas de ateroma e de crescimento da parede arterial, visando estudar como mudam as quantidades em função da alteração da geometria 3D. Um outro exemplo é a simulação de procedimentos cirúrgicos. Com efeito, pode-se pensar em fazer o estudo de mudanças locais e globais na solução do escoamento em torno do círculo de Willis ao realizar a implantação de um *clip*, ou ao interromper o escoamento do sangue por alguma das artérias do cérebro. Resumindo, com as idéias apresentadas neste capítulo, juntamente às do Capítulo 1, as possibilidades de simular situações hemodinâmicas mais complexas aumentam notavelmente devido à elevada capacidade de representação física que os modelos acoplados possuem.

Contribuições do capítulo

Segundo foi visto, este capítulo complementa de forma prática ao Capítulo 1 com referência ao problema do escoamento do sangue no sistema arterial. Logo, os resultados numéricos obtidos aqui, e em geral as análises desenvolvidas com cada exemplo mostrado, constituem parte da contribuição da tese. A aplicação em grande escala de modelos acoplados na área de hemodinâmica na literatura é muito pouca, ou quase nula, por isto considera-se que a aproximação numérica apresentada aqui, embora faça uso de técnicas bem conhecidas, também é uma contribuição importante da tese. Por outro lado, a ferramenta denominada HeMoLab é, de fato, uma contribuição que decorre também de todo o trabalho desenvolvido ao longo da tese. Os resultados numéricos aqui obtidos formam parte das publicações [20, 22, 23, 92, 142, 155], as quais são repetidas aqui por conveniência:

- P.J. Blanco, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *A unified variational approach for coupling 3D–1D models and its blood flow applications*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (196) 4391–4410, 2007.
- S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere e R.A. Feijóo, *Multidimensional modelling for the carotid artery blood flow*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (195) 4002–4017, 2006.
- R.L.S. Silva, E. Camargo, P.J. Blanco, M.R. Pivello e R.A. Feijóo, *Virtual modeling and numerical simulation of aneurysms and stenoses*, Anais do SVR 2008. João Pessoa, Brasil, 2008.
- P.J. Blanco, M.R. Pivello, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *Sensitivity of blood flow patterns at the carotid artery to the heart inflow boundary condition*, Anais do ICCB 2007. Isla Margarita, Venezuela, 2007.
- P.J. Blanco, I. Larrabide, S.A. Urquiza e R.A. Feijóo, *Sensitivity of blood flow patterns to the constitutive law of the fluid*, Anais do ECCM 2006. Lisboa, Portugal, 2006.
- I. Larrabide, P.J. Blanco, S.A. Urquiza e R.A. Feijóo, *Sensitivity of blood flow in stenosed carotid bifurcation*, Anais do ICCB 2005. Lisboa, Portugal, 2005.

Parte II

Modelos para Interação Fluido–Sólido

Capítulo 3

Imersão de domínios para o problema de interação fluido–sólido

Introdução

O problema de interação entre um fluido e um componente estrutural surge de maneira recorrente no campo da engenharia. A modelagem computacional deste problema é de relevante importância a fim de dar resposta a questões de desenho de estruturas, análises de tensões, condições de regularidade de escoamentos, propagação de ondas em tubos flexíveis, dentre outros. Em particular, dentro do sistema cardiovascular humano, não resulta difícil identificar o problema de interação entre o sangue e a parede arterial como o causante da propagação de ondas ao longo do sistema. Um outro problema de interesse é a modelagem da dinâmica entre partículas transportadas no sangue e o próprio sangue já que os fenômenos deste nível entram em jogo na adesão de placas de ateroma na parede arterial. Outro exemplo é o estudo da dinâmica da válvula aórtica e a sua interação com o sangue no processo da ejeção cardíaca. Resulta assim de vital importância a correta modelagem do problema, objetivando um cálculo acurado das velocidades de propagação assim como as condições sob as quais o escoamento do sangue pode ser alterado devido à deformação do espaço por ele ocupado e à possível interação com objetos imersos. Com efeito, acoplar modelos de fluido e de estrutura tem sido, do ponto de vista teórico e, principalmente, do ponto de vista numérico, um constante desafio ao longo dos últimos vinte e cinco anos. Diversas técnicas têm mostrado sucesso na resolução de uma ampla gama de problemas, conseguindo representar, com um alto grau de aproximação, os fenômenos físicos envolvidos [7, 9, 36, 38, 64, 79, 150, 159].

Dentro da literatura, encontram-se duas linhas bem marcadas para abordar o problema. Por um lado, estão os (aqui denominados) métodos clássicos. Neste grupo estão aqueles que “respeitam” a topologia do problema, a qual é estabelecida em cada posição de equilíbrio do sistema pelos respectivos domínios ocupados pelo fluido e pelo sólido identificados de forma separada. A teoria sobre a qual se apoiam estes métodos é bem básica e pode ser facilmente derivada e entendida no contexto variacional habitual. Por outro lado, aparecem os (aqui denominados) métodos imersos. Esta classe de métodos envolve a idéia de considerar o solapamento de fluido e estrutura na região ocupada pela última. Sob esta categorização encontram-se o *método de contornos imersos*, apresentado inicialmente em [132], e com posterior desenvolvimento em [57, 90, 133]; o *método de domínios fictícios* desenvolvido em [54], e utilizado, por exemplo, em [53, 62, 63, 130, 164]; o *método de elementos finitos imersos* apresentado em [97], e com aplicações em [98, 165]; e finalmente o *método do contínuo imerso* recentemente apresentado em [163]. O método

de contornos imersos possui interessantes vantagens nas situações tratadas na literatura, mas também acarreta algumas limitações como ser o fato da estrutura não possuir volume físico nem massa e a necessidade de efetuar a aproximação de uma distribuição delta de Dirac. Por outro lado, nas diversas abordagens encontradas na literatura, o comportamento do contorno (por contorno a literatura entende que se trata de uma estrutura com características particulares que aqui denomina-se casca) imerso é fornecido mediante uma equação constitutiva de tipo Hookeana, e nada é dito sobre as hipóteses cinemáticas que deram lugar a tal modelo. Um denominador que parece ser comum na literatura é tratar o contorno como membrana, eliminando os fenômenos de corte e de flexão. Ainda mais, quando encontrado um trabalho que formula o problema incluindo o fenômeno de flexão este está mal formulado (ver [40] e a discussão correspondente feita mais na frente ainda neste capítulo). Com efeito, podem existir situações nas quais a flexão constitua um esforço relevante na capacidade da estrutura suportar os carregamentos produzidos pelo fluido, e a sua adequada inclusão resulta determinante na análise do problema. Assim, vê-se que há campos de pesquisa ainda em aberto a fim de fornecer um entendimento acabado sobre os conceitos por trás dos métodos de contornos imersos.

Por sua parte, o método de domínios fictícios constitui a generalização natural do método de contornos imersos quando se deseja considerar o volume da estrutura no modelo. Ao analisar os trabalhos da área, vê-se que o método de domínios fictícios foi desenvolvido a fim de considerar a imersão de objetos de complexa geometria em malhas regulares. Isto é feito por meio da inclusão de multiplicadores de Lagrange de forma distribuída no fluido, os quais acabam tendo por função representar as forças de reação do objeto frente ao escoamento. Entretanto, em nenhum momento permite-se que os objetos se deformem e interajam com o fluido circundante. Aqui é onde aparecem dois métodos desenvolvidos para tal fim. O método de elementos finitos imersos e o método do contínuo imerso estão baseados nas idéias dos métodos de domínios fictícios, porém, permitindo que o objeto imerso seja factível de ser deformado pela ação do fluido. Como dito, se bem o método de domínios fictícios está fortemente apoiado sobre a base dos multiplicadores de Lagrange, o mesmo parece não ocorrer com os últimos casos acima mencionados. De fato, tanto no método de elementos finitos imersos como no método do contínuo imerso os multiplicadores de Lagrange já foram, por assim dizer, substituídos na formulação levando em conta o seu significado físico final. A razão para não ter incluído como incógnitas do problema estes esforços, que surgem ao impor certas restrições, é que o problema é abordado diretamente no nível dos sistemas de equações diferenciais em derivadas parciais, sem estabelecer relações explícitas com os respectivos princípios variacionais que regem cada sub-sistema. Posteriormente, através do emprego de técnicas de resíduos ponderados, os autores encontram a forma fraca do problema. Entretanto, há questões que não parecem ficar claras nestes trabalhos posto que, apesar de não empregar multiplicadores de Lagrange, impõem-se restrições de forma fraca (para o qual, como elemento dual, o esforço associado deveria aparecer na formulação). Um outro ponto fraco que surge nestes trabalhos é a restrição da formulação a determinadas classes de fluidos e sólidos. A situação problemática ocorre ao querer tratar um sólido compressível imerso em um fluido incompressível. A continuidade do campo de velocidade em todo o domínio do sólido faz com que um dos dois comportamentos falhe. Vê-se então que também há uma forte necessidade de reformular este problema empregando uma abordagem diferente da usada atualmente, assim como há uma necessidade de estender as possibilidades da metodologia para quaisquer classes de fluido e sólido.

Assim sendo, este capítulo tem dois objetivos principais. Por um lado, deriva-se um modelo de interação fluido-casca visando a generalização dos métodos de contornos imersos atualmente existentes. Isto é feito por meio da introdução de hipóteses cinemáticas a fim de reduzir a estrutura e descrevê-la em termos de uma superfície média, a qual

constitui o contorno imerso. Logo após, propõem-se as hipóteses adicionais para chegar na forma clássica que o método de contornos imersos apresenta, o que torna possível sua caracterização ao explicitar as hipóteses e conseqüentes limitações por trás da metodologia. Por outro lado, procura-se dar uma generalização, junto com uma nova abordagem, aos métodos de elementos finitos imersos e do contínuo imerso com relação à possibilidade de considerar qualquer tipo de fluido e sólido. Isto é feito sem incorrer em nenhuma classe de inconsistências com relação à equação de balanço de massa. Como corolário, pretende-se mostrar como é possível reescrever a forma em que a continuidade do campo de velocidade na interface fluido-sólido é entendida para dar lugar a esta classe de métodos. Como motivação comum aos dois objetivos do capítulo pode-se mencionar também a necessidade de pôr em evidência quais os passos para uma derivação consistente e sistemática, sempre dentro de um marco variacional, de métodos que empregam idéias de imersão de domínios.

A organização do capítulo é como segue. Na Seção 3.1 formula-se o problema modelo e a notação com os quais se trabalha ao longo do capítulo. Na Seção 3.2 apresentam-se, de forma sucinta, algumas das técnicas clássicas na modelagem desta classe de problemas. Em particular, na Seção 3.2.1 apresenta-se o que se considera o princípio variacional básico a partir do qual serão derivadas todas as formulações nas seções seguintes. Na Seção 3.2.2 coloca-se uma forma levemente diferente de formular o princípio básico fazendo uso das idéias de incompatibilidade cinemática apresentadas no Capítulo 1. Na Seção 3.2.3 o problema é reformulado somente em termos do campo de velocidade. Na Seção 3.3 estudam-se os métodos que usam idéias de superposição de domínios para colocar o problema de interação entre um sólido de forma arbitrária e um fluido. Aqui exhibe-se o método de elementos finitos imersos, o qual é apresentado de uma forma similar à linha seguida em [97]. Juntamente, estabelece-se a relação com o método do contínuo imerso segundo [163]. Em seguida, na Seção 3.3.2, e nas seções subseqüentes, desenvolve-se o denominado *método de domínios imersos* que é um modelo que emprega idéias de domínios fictícios e generaliza os anteriores métodos de domínios imersos, constituindo, assim, parte importante da contribuição deste capítulo. Aqui recoloca-se o problema de interação fluido-sólido mudando a forma como se relaxa a continuidade do campo de velocidade entre ambos os domínios, chegando a uma formulação mais geral que pode ser entendida como de multiplicadores de Lagrange distribuídos, e portanto como uma variante do método de domínios fictícios. Por último, na Seção 3.4 deriva-se um novo modelo denominado *método de cascas imersas* que, por sua vez, generaliza o método de contornos imersos, sendo outra parte importante das contribuições deste capítulo. Aqui o contorno é realmente um sólido condensado a uma casca, na qual se consideram esforços de membrana, de cortante e de flexão, incluindo também efeitos dinâmicos. O modelo assim alcançado considera-se o mais completo com respeito à interação entre uma superfície imersa e o fluido circundante.

Grande parte do trabalho realizado neste capítulo considera-se como contribuição desta tese, tendo sido motivação para o desenvolvimento dos trabalhos [17, 19]. Além disso, tomam-se idéias do Capítulo 1 e são aplicadas ao problema de interação fluido-estrutura, o que dá uma formulação diferente das existentes na literatura, a qual também pode ser considerada como contribuição da tese. Como dito no início, no contexto da modelagem de problemas no sistema cardiovascular podem-se exemplificar duas situações nas quais as diversas abordagens para o tratamento do problema de fluido-estrutura, que serão aqui apresentadas, mostram grandes possibilidades de sucesso. Por um lado, a modelagem da interação entre o sangue e a parede arterial, de grande importância nos aspectos referentes à solicitação das artérias em presença de um fluido com regime fortemente transiente, é uma situação na qual os métodos denominados clássicos são facilmente aplicáveis, posto que a deformação das artérias mantém-se relativamente limitada [45, 99, 127, 148]. Em contrapartida, na modelagem, por exemplo, da dinâmica de partículas suspensas no sangue, de importância no estudo da adesão e interação com a parede arterial, assim como

do regime de funcionamento da válvula aórtica, as deformações e/ou os deslocamentos podem ser arbitrários. Isto faz com que os métodos baseados na noção de imersão de domínios forneçam uma abordagem mais conveniente [63, 98, 132]. De forma particular, é isto o que tem motivado o estudo destas técnicas neste capítulo e sua posterior generalização através de formulações variacionais consistentes.

3.1 O problema modelo

Esta seção está dedicada à apresentação do problema modelo com o qual se trabalhará nas seções seguintes. Aqui introduz-se a notação comum para todo o capítulo e alguns comentários sobre situações alternativas ao problema modelo proposto. Também detalham-se as hipóteses sobre o comportamento do sólido e do fluido a fim de, posteriormente, formular corretamente os princípios variacionais que governam o problema.

3.1.1 Colocação do problema e notação

Considere um domínio Ω dividido em dois domínios dependentes do tempo denominados Ω_f^t e Ω_s^t correspondentes aos espaços ocupados pelo fluido e pelo sólido, respectivamente, como mostra a Figura 3.1. Assim sendo, tem-se que $\Omega = (\overline{\Omega_f^t \cup \Omega_s^t})^\circ$ (o interior do fecho da união dos sub-domínios) e $\Omega_f^t \cap \Omega_s^t = \emptyset$, e, sem perda de generalidade, Ω não depende do tempo. Os contornos dos respectivos domínios denominam-se Γ_f^t e Γ_s^t , os quais decompõem-se como sendo $\Gamma_f^t = \Gamma_{fD} \cup \Gamma_{fN} \cup \Gamma_{fs}^t$ e $\Gamma_s^t = \Gamma_{sD} \cup \Gamma_{fs}^t$. Nestas decomposições Γ_{fD} e Γ_{sD} denotam fronteiras com condições prescritas de tipo Dirichlet e são fixos, sem perda de generalidade, enquanto que Γ_{fN} é uma fronteira com condição de Neumann também considerada fixa. Por último, a fronteira denominada Γ_{fs}^t representa a interface entre fluido e estrutura que naturalmente depende do tempo. Os vetores unitários externos denotam-se \mathbf{n}_f e \mathbf{n}_s para Γ_f^t e Γ_s^t correspondentemente e dependem do tempo, mas o índice t não é explicitado. Em particular, é $\mathbf{n}_f|_{\Gamma_{fs}^t} = \mathbf{n}_{fs}$ e $\mathbf{n}_s|_{\Gamma_{fs}^t} = \mathbf{n}_{sf} = -\mathbf{n}_{fs}$.

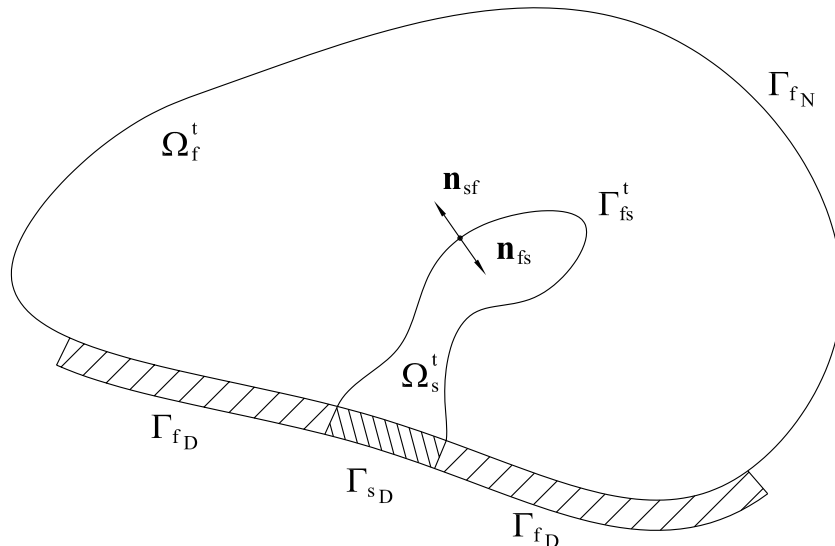


Figura 3.1: Esquema para o problema modelo de interação fluido-sólido.

O problema é de natureza intrinsecamente transiente e portanto se consideram os efeitos dinâmicos tanto no fluido, considerado viscoso, quanto no sólido. As deformações e os deslocamentos no sólido podem ser arbitrários, a não ser que se especifique o contrário nos casos particulares a serem analisados nas seções que seguem. Em geral, o campo de

velocidade denota-se como \mathbf{v} , sendo $\mathbf{v}|_{\Omega_f^t} = \mathbf{v}_f$ a velocidade do fluido e $\mathbf{v}|_{\Omega_s^t} = \mathbf{v}_s$ a do sólido, enquanto que o campo de deslocamentos neste último é \mathbf{u}_s . Tanto o fluido como o sólido podem ser de natureza incompressível ou fracamente compressível (de forma que valha a relação barotrópica entre pressão e densidade). Em tais casos, κ_f e κ_s são os módulos de compressibilidade do fluido e do sólido respectivamente. Por exemplo, pode-se considerar $\kappa_f = \infty$ e $\kappa_s < \infty$ para modelar a interação entre um fluido incompressível e um sólido compressível. Os tensores de tensão de Cauchy escrevem-se como $\boldsymbol{\sigma}_f = -p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}$ e $\boldsymbol{\sigma}_s = -p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD}$, onde p_f e p_s são as componentes hidrostáticas do fluido e sólido respectivamente. Neste capítulo $\boldsymbol{\sigma}_{fD}$ e $\boldsymbol{\sigma}_{sD}$ são deixados em forma genérica, fazendo com que a formulação permaneça válida para qualquer tipo de comportamento constitutivo. A massa específica do fluido é ρ_f , e ρ_s é a do sólido. Como força de corpo atuando sobre ambos os domínios considera-se somente a gravidade, denotada por \mathbf{g} . Nos contornos de Dirichlet Γ_{fD} e Γ_{sD} impõem-se as velocidades $\bar{\mathbf{v}}_f$ e $\bar{\mathbf{v}}_s$ respectivamente, enquanto que sobre o contorno de Neumann Γ_{fN} impõe-se a tração $\bar{\mathbf{t}}_f$.

Para escrever as leis de conservação do sistema fluido–estrutura utiliza-se sempre a configuração atual do sistema. Isto é, sobre a configuração deformada do sólido. Por isto, todas as integrais que se vêem neste capítulo, assim como as operações envolvendo derivadas, devem ser consideradas na configuração atual, a menos que se especifique explicitamente o contrário. Esta configuração é identificada pelas coordenadas \mathbf{x} . Não há perda de generalidade nisto pois qualquer descrição pode ser introduzida nas formulações derivadas. Logo, todas as quantidades apresentadas aqui podem ser transportadas a uma configuração de referência do sólido, caracterizada pelas coordenadas \mathbf{X} , fazendo uso do mapeamento $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ que representa o movimento do mesmo e estabelece a posição Ω_s^t a partir de uma referência Ω_s^0 . Por sua parte, os termos de acelerações são denotados pela expressão genérica da derivada material $\frac{D(\cdot)}{Dt}$. Por outro lado, quando surgirem multiplicadores de Lagrange estes também serão considerados na configuração atual da interface Γ_{fs}^t .

Por último as variações admissíveis dentro das formulações variacionais são denotadas com $(\hat{\cdot})$, logo $\hat{\mathbf{v}}$ é a variação admissível do campo \mathbf{v} . Em todos os problemas apresentados neste capítulo devem ser fornecidas condições iniciais apropriadas

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_f|_{t=0} &= \mathbf{v}_{f0} && \text{em } \Omega_f^0, \\ \mathbf{u}_s|_{t=0} &= \mathbf{u}_{s0} && \text{em } \Omega_s^0, \\ \mathbf{v}_s|_{t=0} &= \mathbf{v}_{s0} && \text{em } \Omega_s^0, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

satisfazendo $\mathbf{v}_{f0}|_{\Gamma_{fs}^0} = \mathbf{v}_{s0}|_{\Gamma_{fs}^0}$. Estas condições são omitidas daqui em diante por brevidade na apresentação.

Nas seções seguintes o problema é analisado sempre a nível do contínuo. Desta forma, a cinemática do problema estabelece naturalmente a continuidade do campo de velocidade para todo tempo t através da interface fluido–estrutura Γ_{fs}^t . Assim sendo, a condição

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s \quad \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \tag{3.1.2}$$

é de caráter fundamental, e é o ponto chave de todas as formulações que serão colocadas, posto que a forma na qual esta condição é expressa estabelece as características próprias de cada formulação.

3.1.2 Comentários adicionais

No caso exposto na Figura 3.1, o sólido encontra-se totalmente imerso no fluido. Desta forma, por simplicidade na apresentação desconsiderou-se a possibilidade de uma fronteira de Neumann no sólido. Outras configurações geométricas poderiam ser alter-

nativamente consideradas como, por exemplo, a situação de imersão parcial do sólido no fluido. Esta última encontra-se no problema de interação entre as artérias e o escoamento do sangue, como foi mostrado no Capítulo 2 por meio da utilização de modelos de estrutura simplificados. Sobre a fronteira externa das artérias é comum impor uma tração normal representando uma pressão externa.

Vale a pena antecipar que no momento de tratar o problema de interação fluido-casca (problema de imersão de cascas da Seção 3.4.2) não se realizará a identificação da componente hidrostática p_s no tensor σ_s . Assim sendo, ao formular este problema utilizar-se-á simplesmente o tensor σ_s sem fazer menção a p_s . Isto é porque desta forma conseguem-se definir os esforços generalizados encontrados na teoria de cascas. Além disso, no caso a ser tratado na Seção 3.4.2 a problemática não jaz no caráter compressível/incompressível dos elementos, mas nas hipóteses realizadas na construção do modelo.

3.2 Métodos clássicos

Dentro desta seção apresentam-se as abordagens que podem ser denominadas de clássicas devido a que os princípios variacionais que governam o problema de interação estão formulados em função dos domínios físicos ocupados pelo fluido e pelo sólido, mantendo em todo momento uma diferenciação entre estes. Dois casos particulares que exploram as características do problema são desenvolvidos nesta seção: o primeiro está baseado no uso dos multiplicadores de Lagrange para formular o problema de acoplamento, enquanto que o segundo caso, o qual não exclui a possibilidade do uso conjunto com o primeiro, baseia-se na formulação do problema do sólido explicitando a tensão em função da taxa de deformação.

O uso dos multiplicadores de Lagrange tem encontrado aplicação em diversos campos da física. Isto está motivado pela possibilidade de incorporar restrições dentro da formulação variacional relaxando condições que, de outra maneira, poderiam resultar complexas de serem tratadas quando abordado o problema da aproximação numérica. No contexto dos problemas de fluido-estrutura, o uso dos multiplicadores de Lagrange tem auxiliado na construção de diversos esquemas de acoplamento. Deste modo, a pesquisa tem estado orientada fundamentalmente à melhora dos esquemas que realizam a imposição das condições de acoplamento na interface Γ_{fs}^t , e da forma como são transferidas as informações entre fluido e sólido, tanto para esquemas de resolução monolíticos como segregados [24, 36, 37, 38, 100, 103, 104, 128, 129, 149, 150]. Nesta seção apresenta-se, em primeiro lugar, a forma mais clássica do problema para então estender a formulação usando idéias similares às desenvolvidas no Capítulo 1. Esta segunda abordagem é, no nível contínuo, idêntica à primeira, entretanto certas diferenças na definição dos multiplicadores de Lagrange fazem com que a sua implementação computacional dê como resultado esquemas de acoplamento diferentes.

Por outro lado, a descrição do problema do sólido em termos de taxas de deformação não tem sido muito estudado na bibliografia. Com efeito, esta formulação é apresentada em [56] com uma implementação realizada usando o método dos volumes finitos para sólidos Hookianos em deformações infinitesimais e em [71] para sólidos viscoelásticos. Esta forma de escrever o problema permite uma *formulação unificada* escrita somente em termos de velocidades, o que pode acarretar certas vantagens e/ou desvantagens na implementação computacional, as quais são discutidas mais na frente. Somente para mencionar a sua principal característica, quando são usadas malhas conformes para sólido e fluido então a continuidade da velocidade pode ser imposta de forma essencial através da própria definição usual dos espaços de funções empregados, tanto no nível contínuo quanto no discreto. Contudo, a clara desvantagem é que as leis constitutivas dos sólidos são dadas em termos do campo de deslocamentos, para o qual um tratamento adicional, e uma

aproximação a mais, deve ser fornecido.

3.2.1 O método dos multiplicadores de Lagrange

Como dito, as características de uma formulação para o problema de fluido–estrutura estão governadas em grande parte pela forma como a condição (3.1.2) é satisfeita. A alternativa mais natural é introduzir esta condição no próprio conjunto de funções candidatas a solução do problema. Neste caso, o princípio variacional que rege o problema é o seguinte:

Problema 3.1. *Para cada $t \in (0, T)$ encontre $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P}$ tal que*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f^t} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] dx \\ & - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma - \int_{\Omega_f^t} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} \right) dx - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_s \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} \right) dx \\ & + \int_{\Omega_s^t} \left[\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \boldsymbol{\sigma}_{sD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_s) - p_s \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_s - \rho_s \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] dx = 0 \\ & \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P}, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

onde $\mathbf{v}|_{\Omega_f^t} = \mathbf{v}_f$, $\mathbf{v}|_{\Omega_s^t} = \mathbf{v}_s$, $p|_{\Omega_f^t} = p_f$, $p|_{\Omega_s^t} = p_s$ e é

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{v}|_{\Gamma_{fD}} = \bar{\mathbf{v}}_f; \mathbf{v}|_{\Gamma_{sD}} = \bar{\mathbf{v}}_s \}, \\ \mathcal{P} &= L^2(\Omega). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Ademais, \mathcal{V} é o espaço obtido por diferença entre elementos de \mathcal{U} .

Dentro da expressão (3.2.1) está toda a informação do problema o que fica evidenciado a seguir. A obtenção das equações de Euler–Lagrange segue os caminhos clássicos. Assim, no sentido das distribuições tem-se que

$$\begin{cases} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} & \text{em } \Omega_f^t, \\ \rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{sD} + \nabla p_s = \rho_s \mathbf{g} & \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_f^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_f & \text{sobre } \Gamma_{fN}, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_{fs} = (-p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD}) \mathbf{n}_{fs} & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

ao que se deve acrescentar

$$\begin{cases} \mathbf{v}_f = \bar{\mathbf{v}}_f & \text{sobre } \Gamma_{fD}, \\ \mathbf{v}_s = \bar{\mathbf{v}}_s & \text{sobre } \Gamma_{sD}, \\ \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

de acordo com a definição do conjunto \mathcal{U} em (3.2.2). Note que a (3.2.3)₆ é derivada usando a (3.2.4)₃. Com esta formulação, a condição (3.1.2) é inerente ao conjunto \mathcal{U} . Em efeito, para funções em $\mathbf{H}^1(\Omega)$, e para Γ_{fs}^t regular

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s \quad \text{em } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_{fs}^t). \quad (3.2.5)$$

No entanto, esta escolha na colocação do problema, apesar de ser a mais intuitiva, não

é conveniente do ponto de vista da aproximação numérica devido à complexidade na construção dos espaços de aproximação correspondentes. Nas situações práticas é comum utilizar malhas diferentes para o sólido e para o fluido, fazendo com que não seja possível impor a continuidade do campo de velocidade no sentido em que a satisfazem as funções $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$. Para trabalhar com maior liberdade na construção do conjunto \mathcal{U} convém relaxar a mencionada condição de continuidade mediante a inclusão de um multiplicador de Lagrange dentro da formulação do problema. Procedendo desta forma, e denominando $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s)$ e $p = (p_f, p_s)$, chega-se ao seguinte princípio variacional:

Problema 3.2. Para cada $t \in (0, T)$ encontre $(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Lambda}$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f^t} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma - \int_{\Omega_f^t} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} \right) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_s \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} \right) d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega_s^t} \left[\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \boldsymbol{\sigma}_{sD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_s) - p_s \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_s - \rho_s \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Gamma_{fs}^t} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) d\Gamma + \int_{\Gamma_{fs}^t} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s - \hat{\mathbf{v}}_f) d\Gamma = 0 \\ & \qquad \qquad \qquad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Lambda}, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

onde $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s)$, $p = (p_f, p_s)$ e é

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s) \in \mathbf{H}^1(\Omega_f^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s^t); \mathbf{v}_f|_{\Gamma_{fD}} = \bar{\mathbf{v}}_f; \mathbf{v}_s|_{\Gamma_{sD}} = \bar{\mathbf{v}}_s\}, \\ \mathcal{P} &= \{(p_f, p_s) \in L^2(\Omega_f^t) \times L^2(\Omega_s^t)\}, \\ \boldsymbol{\Lambda} &= \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_{fs}^t). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Também, \mathcal{V} é o espaço obtido por diferença de elementos do conjunto \mathcal{U} .

A obtenção das equações de Euler-Lagrange é análoga ao caso anterior, portanto, no sentido das distribuições tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} & \text{em } \Omega_f^t, \\ \rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{sD} + \nabla p_s = \rho_s \mathbf{g} & \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_f^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_f & \text{sobre } \Gamma_{fN}, \\ \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_{fs} = \boldsymbol{\lambda} & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \\ (-p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD}) \mathbf{n}_{fs} = \boldsymbol{\lambda} & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \end{array} \right. \quad (3.2.8)$$

ao que se deve acrescentar

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{v}_f = \bar{\mathbf{v}}_f & \text{sobre } \Gamma_{fD}, \\ \mathbf{v}_s = \bar{\mathbf{v}}_s & \text{sobre } \Gamma_{sD}, \end{array} \right. \quad (3.2.9)$$

de acordo com a definição do conjunto \mathcal{U} em (3.2.7). Observe que das (3.2.8)₇ e (3.2.8)₈ obtém-se

$$(-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_{fs} = (-p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD}) \mathbf{n}_{fs} \quad \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \quad (3.2.10)$$

que coincide com a (3.2.3)₆. Daqui segue-se que o multiplicador de Lagrange adquire o significado físico da tração sobre Γ_{fs}^t , sempre na configuração atual deformada do sólido.

Claramente, o sentido no qual se consegue a continuidade da velocidade depende do espaço onde se encontra $\boldsymbol{\lambda}$. No problema contínuo isto não traz consigo diferenças já que a continuidade se dá no sentido de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_{fs}^t)$ (lembre que $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_{fs}^t)$) que é equivalente ao visto no Problema 3.1. Contudo, isto muda radicalmente no problema discreto posto que a continuidade não é mais uma condição essencial do conjunto de funções candidatas a solução, mas é dada no sentido do espaço de dimensão finita dual àquele no qual está $\boldsymbol{\lambda}$.

3.2.2 O método dos multiplicadores de Lagrange generalizado

Na seção anterior foi apresentado o método dos multiplicadores de Lagrange na forma habitual, ou seja, acrescentando a integral de superfície correspondente sobre Γ_{fs}^t que incorpora a restrição (3.1.2) de forma fraca. Nesta seção a formulação a nível do problema contínuo não muda. Porém, a forma como se entendem os multiplicadores de Lagrange leva a esquemas de resolução diferentes dos encontrados na literatura.

A formulação denominada aqui de método dos multiplicadores de Lagrange generalizada usa as principais idéias elaboradas no Capítulo 1. Ali, viu-se que para formular corretamente o princípio variacional ao utilizar modelos com cinemáticas incompatíveis era preciso incorporar as potências geradas pelas descontinuidades dentro do princípio de potências virtuais. Quando aplicadas estas idéias no problema de fluido–estrutura o que sucede é que, a nível do contínuo, não há de fato cinemáticas diferentes entre fluido e sólido. Entretanto, esta problemática surge no problema discreto. Note que quando as malhas usadas no domínio do fluido e do sólido diferem, tanto em interpolação utilizada quanto em número de graus de liberdade (para uma mesma interpolação), obtêm-se cinemáticas incompatíveis. Outra classe de incompatibilidade também pode surgir quando se incorporam hipóteses cinemáticas no campo de velocidade do sólido diferentes das do fluido, de forma similar a como eram tratados os modelos multidimensionais do Capítulo 1. Logo, a abordagem aqui proposta é diferente das existentes na literatura. Neste sentido, a forma de entender o problema segundo o apresentado no Capítulo 1 fornece uma abordagem direta para lidar com as incompatibilidades geradas no problema discreto. Logo, o problema sob esta óptica fica formulado como segue:

Problema 3.3. *Para cada $t \in (0, T)$ e para algum $\gamma \in [0, 1]$ encontre $(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\lambda}_f, \boldsymbol{\lambda}_s) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Lambda}_f \times \boldsymbol{\Lambda}_s$ tal que*

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_f^t} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} \\
& - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma - \int_{\Omega_f^t} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} \right) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_s \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} \right) d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega_s^t} \left[\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \boldsymbol{\sigma}_{sD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_s) - p_s \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_s - \rho_s \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{x} \\
& + \gamma \int_{\Gamma_{fs}^t} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_f \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma_{fs}^t} \boldsymbol{\lambda}_f \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s - \hat{\mathbf{v}}_f) d\Gamma \\
& + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_{fs}^t} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) d\Gamma + (1 - \gamma) \int_{\Gamma_{fs}^t} \boldsymbol{\lambda}_s \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s - \hat{\mathbf{v}}_f) d\Gamma = 0 \\
& \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_f, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Lambda}_f \times \boldsymbol{\Lambda}_s, \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s)$, $p = (p_f, p_s)$, \mathcal{U} e \mathcal{P} são definidos como em (3.2.7) e

$$\Lambda_f = \Lambda_s = \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_{fs}^t). \quad (3.2.12)$$

Também, \mathcal{V} é o espaço obtido por diferença de elementos do conjunto \mathcal{U} .

Observe primeiramente que este problema é idêntico ao Problema 3.2 se naquele problema o multiplicador λ é decomposto em

$$\lambda = \gamma \lambda_f + (1 - \gamma) \lambda_s. \quad (3.2.13)$$

A diferença aqui é que ao efetuar a aproximação do problema, indicada por exemplo com o índice h , os espaços Λ_{fh} e Λ_{sh} são em geral diferentes e, por sua vez, são diferentes do espaço Λ_h . Além do mais, o espaço $\Lambda_{fh} \oplus \Lambda_{sh}$ também é diferente de Λ_h que se usaria no Problema 3.2. Como dito, isto pode resultar em diferentes propriedades do esquema de acoplamento uma vez discretizado o problema. Aqui abre-se um leque de possibilidades para diversas escolhas destes dois espaços em função das cinemáticas que o fluido e o sólido possuem no nível discreto, o que deve ser feito sem incorrer em problemas de travamento das soluções por excesso de restrições no sistema de equações.

Para obter as equações de Euler-Lagrange procede-se de forma idêntica aos casos anteriores. Assim, resulta que no sentido das distribuições se satisfaz o seguinte

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} & \text{em } \Omega_f^t, \\ \rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{sD} + \nabla p_s = \rho_s \mathbf{g} & \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_f^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_f & \text{sobre } \Gamma_{fN}, \\ \gamma (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) = 0 & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \\ (1 - \gamma) (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) = 0 & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_{fs} = \gamma \lambda_f + (1 - \gamma) \lambda_s & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \\ (-p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD}) \mathbf{n}_{fs} = \gamma \lambda_f + (1 - \gamma) \lambda_s & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \end{array} \right. \quad (3.2.14)$$

junto com

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{v}_f = \bar{\mathbf{v}}_f & \text{sobre } \Gamma_{fD}, \\ \mathbf{v}_s = \bar{\mathbf{v}}_s & \text{sobre } \Gamma_{sD}, \end{array} \right. \quad (3.2.15)$$

de acordo com a definição do conjunto \mathcal{U} . Do mesmo modo que no Problema 3.2, das (3.2.14)₈ e (3.2.14)₉ obtém-se

$$(-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_{fs} = (-p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD}) \mathbf{n}_{fs} \quad \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \quad (3.2.16)$$

que, como esperado, coincide com a (3.2.3)₆. Isto diz respeito a equivalência do problema contínuo com relação ao parâmetro real γ como fora comentado ao longo do Capítulo 1. Assim, como acontecia naquele capítulo, a equivalência é perdida ao passar ao problema discreto, pois isto equivale a introduzir diferentes hipóteses para cada cinemática. Aqui é a combinação convexa de λ_f e λ_s a que adquire o significado físico da tração sobre Γ_{fs}^t . Fazendo uma conexão com o Capítulo 1, vê-se que os conceitos ali desenvolvidos encontram aplicabilidade em outras áreas, fora o acoplamento de modelos de diferente dimensão, fornecendo formas alternativas de pensar um dado problema como o aqui visto.

3.2.3 Uma formulação variacional em termos de velocidades

Nas formulações anteriores havia um ponto comum que tinha ficado por enquanto implícito, e é a descrição das tensões no sólido em termos da deformação. Não resulta difícil ver o por quê disto, dado que as leis constitutivas em sólidos estão dadas como funções da parte simétrica deste campo. Isto faz com que na abordagem aproximada o fluido seja resolvido na incógnita velocidade e o sólido na incógnita deslocamento. Uma forma interessante de utilizar uma formulação unificada para ambos os domínios é escrever o problema do sólido em função de taxas de deformação. Desta maneira, a construção de conjuntos de aproximação para o conjunto (3.2.2) pode ser notoriamente simplificada. Obviamente o maior interesse é então quando as aproximações para o sólido e para o fluido são conformes. Aproximações não conformes (malhas não compatíveis sobre Γ_{fs}^t) conduzem à necessidade de métodos baseados nos multiplicadores de Lagrange como visto anteriormente.

Antes de prosseguir na formulação do problema note que a lei constitutiva para $\boldsymbol{\sigma}_{sD}$ deve, agora, estar escrita em função da taxa de deformação. Para isto veja que se pode escrever

$$\boldsymbol{\sigma}_{sD} = \boldsymbol{\sigma}_{sD}^0 + \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{sD}}{\partial t} dt = \boldsymbol{\sigma}_{sD}^0 + \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{sD}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_s) dt, \quad (3.2.17)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{sD}^0 = \boldsymbol{\sigma}_{sD}(\mathbf{u}_{s0})$ é uma condição inicial que deve ser fornecida e, além disso, tem-se denotado $\boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s)$. Aqui $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{sD}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s}$ é o tensor de quarta ordem que expressa a relação tangente constitutiva tensão–deformação. Este operador tangente está estreitamente relacionado com aquele que surge comumente nos esquemas incrementais encontrados na análise de grandes deformações.

Logo, usando as expressões acima para a componente da tensão $\boldsymbol{\sigma}_{sD}$, pode-se escrever o problema em termos do, agora, único campo de velocidade \mathbf{v} que satisfaz $\mathbf{v}|_{\Omega_f^t} = \mathbf{v}_f$ e $\mathbf{v}|_{\Omega_s^t} = \mathbf{v}_s$ como segue:

Problema 3.4. Para cada $t \in (0, T)$ encontre $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P}$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f^t} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] dx \\ & - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma - \int_{\Omega_f^t} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} \right) dx - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_s \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} \right) dx \\ & + \int_{\Omega_s^t} \left[\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \left(\int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{sD}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_s) dt \right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_s) - p_s \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_s - \rho_s \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] dx = 0 \\ & \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P}, \quad (3.2.18) \end{aligned}$$

onde assumiu-se que $\boldsymbol{\sigma}_{sD}^0 = 0$, por outro lado $\mathbf{v}|_{\Omega_f^t} = \mathbf{v}_f$, $\mathbf{v}|_{\Omega_s^t} = \mathbf{v}_s$, $p|_{\Omega_f^t} = p_f$, $p|_{\Omega_s^t} = p_s$ e também

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega); \mathbf{v}|_{\Gamma_{fD}} = \bar{\mathbf{v}}_f; \mathbf{v}|_{\Gamma_{sD}} = \bar{\mathbf{v}}_s \}, \\ \mathcal{P} &= L^2(\Omega), \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

enquanto que \mathcal{V} é o espaço gerador da variedade linear \mathcal{U} .

Em primeiro lugar note que esta formulação vale também para grandes deformações. Neste caso convém realizar a descrição do sólido de forma totalmente Lagrangiana, na qual o termo de convecção desaparece na forma da derivada material. Em segundo lugar, esta formulação apresenta a desvantagem de ter que aproximar a integral no tempo que surge ao escrever as potências geradas pelas tensões em função da taxa de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_s)$. Isto implica em mais uma aproximação, já que é necessário construir um esquema

de integração temporal para esse termo. Em contrapartida, com relação à continuidade da velocidade, mesmo quando utilizados multiplicadores de Lagrange, a mesma é imposta mais corretamente devido a que não se precisa aproximar a derivada temporal do campo de deslocamentos, como ocorre na prática com os métodos clássicos. Por último, as definições do conjunto \mathbf{U} e do espaço associado \mathbf{V} são muito convenientes do ponto de vista da construção de uma aproximação do problema já que, e sempre que considerada a situação de discretizações fluido-sólido conformes, dentro da própria base de funções de elementos finitos está implícita a continuidade do campo de velocidade em um sentido idêntico ao dado no Problema 3.1, isto é, da forma mais forte possível.

O material desta seção não se considera contribuição já que uma situação muito similar foi tratada anteriormente em [56].

3.3 Métodos de sólidos imersos

Nesta seção apresenta-se uma classe de métodos que faz uso da idéia de imersão de domínios introduzida de forma pioneira em [54]. A palavra imersão aqui significa superposição de domínios. No caso do problema modelo da Seção 3.1 a imersão do domínio Ω_s^t no domínio Ω implica a coexistência de dois elementos, o sólido e o fluido, ocupando o mesmo espaço Ω_s^t . Apesar do ponto de vista da intuição física a imersão de domínios não parecer uma idéia viável, do ponto de vista da formulação matemática este conceito tem bases claras, ao ponto que é possível associar princípios variacionais correspondentes ao problema. A vantagem jaz no fato do problema do fluido ser estendido a todo o domínio Ω .

O objetivo desta seção é desenvolver um modelo que generalize às formulações do método de elementos finitos imersos e do método do contínuo imerso. Para isto expõe-se, segundo a literatura, qual a formulação do primeiro para pôr em evidência as fraquezas da colocação do problema e estar em condições de reformulá-lo. Tal reformulação é feita manipulando o princípio variacional clássico do Problema 3.2.

3.3.1 O método de elementos finitos imersos ou do contínuo imerso

Nesta parte segue-se à risca a formulação do problema, em termos do sistema de equações em derivadas parciais, apresentada em [97] para o método de elementos finitos imersos. Deste modo, esta seção constitui um estudo resumido dos conceitos desenvolvidos no mencionado trabalho. Tais idéias encontram-se, em parte, por trás do método do contínuo imerso [163]. O nome original foi introduzido pelos autores, entretanto, na verdade, o método cai dentro dos denominados métodos de domínios fictícios com uma leve modificação na formulação. Inclusive, a denominação *método de elementos finitos imersos* é restritiva devido a que a formulação é válida a nível do problema contínuo, e o método de elementos finitos constitui somente uma forma de aproximá-lo.

O motivo para deixar o marco variacional aqui e embarcar-se na proposta da literatura é, justamente, mostrar o problema originalmente formulado e as inconsistências que surgem ao trabalhar desta forma sem levar certos cuidados na colocação do problema. Estas inconsistências são salientadas, mas não corrigidas nesta seção. Tais erros são sanados na Seção 3.3.2 ao colocar o problema a partir do correspondente princípio variacional que o governa.

Como dito, a seguir emprega-se uma notação mais similar à dada em [97]. O modelo, segundo os autores, denomina-se sistema de sólido imerso, e consiste de um sólido imerso dentro de um fluido. No mencionado trabalho admite-se que a formulação é válida para quaisquer que forem o fluido e o sólido com relação ao seu caráter compressível/incompressível. Primeiro considere as seguintes quantidades que estão definidas

sobre todo o domínio Ω

$$(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t)) = \begin{cases} (\mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t), p_f(\mathbf{x}, t)) & \text{em } \Omega_f^t, \\ (\mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t), p_s(\mathbf{x}, t)) & \text{em } \Omega_s^t. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

A seguir, p_s denota a pressão no sólido na descrição espacial, κ_f e κ_s são os módulos de compressibilidade para fluido e sólido, sendo necessário salientar que os autores afirmam que podem ser diferentes. Além disso, os tensores de tensão do fluido, considerado Newtoniano, e do sólido, considerado hiperelástico, escrevem-se como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{I} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu((\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v})^T), \\ [\boldsymbol{\sigma}_s]_m &= -[p_s]_m \mathbf{I} + \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} (2(c_1 + c_2 \operatorname{tr}(\mathbf{C}))\mathbf{I} - 2c_2 \mathbf{C}) \mathbf{F}^T, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

onde o coeficiente λ é a viscosidade volumétrica, $[\cdot]_m$ denota a descrição material, e também $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ com $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\chi}$, sendo $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ o mapeamento que dá o movimento do sólido em função da configuração de referência caracterizada pelas coordenadas materiais \mathbf{X} . Finalmente, c_1 e c_2 são constantes próprias do material. O problema enunciado na forma de sistema de equações diferenciais parciais, segundo [97], consiste em encontrar (\mathbf{v}, p, p_s) e o movimento do sólido $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ tais que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_f \mathbf{g} + \mathcal{F} & \text{em } \Omega, \\ \mathcal{F} = \begin{cases} 0 & \text{em } \Omega_f^t, \\ (\rho_f - \rho_s) \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{g} \right) + \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_s - \boldsymbol{\sigma}) & \text{em } \Omega_s^t, \end{cases} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)} = \mathbf{v}_s & \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \det \mathbf{F} - 1 + \frac{1}{\kappa_s} [p_s]_m = 0 & \text{em } \Omega_s^0, \\ \mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\chi}, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{fs} = \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}_{fs} & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \end{array} \right. \quad (3.3.3)$$

e com apropriadas condições iniciais. A (3.3.3)₁ e a (3.3.3)₄ constituem as equações que governam o que os autores denominam o *problema de fluido aumentado*, já que o problema associado ao fluido foi estendido a todo o domínio Ω . Observe que, segundo parece (porém não é salientado no trabalho fonte), a força \mathcal{F} surge como a necessária para impor a condição de igualdade do campo de velocidade do fluido e do sólido em todo o domínio Ω_s^t . Entretanto, e aqui ocorre a inconsistência da formulação, as equações de conservação de massa são independentes para o fluido e para a estrutura sobre Ω_s^t , segundo as (3.3.3)₄ e (3.3.3)₅. Assim, dado que está sendo forçada a continuidade do campo de velocidade em todo o domínio do sólido, quando aplicado o operador divergente ambos os campos $\mathbf{v}|_{\Omega_s^t} = \mathbf{v}_s$ e \mathbf{v}_s resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_s &= -\frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp}{Dt}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_s &= -\frac{1}{\kappa_s [\det \mathbf{F}]_e} \frac{Dp_s}{Dt}, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

onde $[\cdot]_e$ denota descrição espacial. Por exemplo, considere $\kappa_f = \infty$ que corresponde a um

fluido incompressível. Dada a continuidade do campo de velocidade resulta

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0 \quad \text{em } \Omega_s^t, \quad (3.3.5)$$

implicando que o sólido, forçadamente, possui campo de velocidade solenoidal o que não é necessariamente a situação física que se estuda. Disto segue-se que a pressão no sólido tem que satisfazer $\frac{Dp_s}{Dt} = 0$, e esta condição afeta diretamente seu estado de tensão, fazendo com que as tensões calculadas não estejam corretas. Portanto, esta formulação está correta quando ambos fluido e sólido são compressíveis, ou quando ambos são incompressíveis. No entanto, esta ressalva não é mencionada em nenhum momento pelos autores destas publicações. Em particular, os exemplos numéricos apresentados em [98, 165] utilizam exclusivamente casos nos quais ambos elementos, fluido e sólido, são incompressíveis posto que assim ocorre na maioria dos problemas encontrados nos sistemas biológicos. Logo, nas aplicações tratadas nos mencionados trabalhos a inconsistência levantada não é, casualmente, fonte de erro.

Em contrapartida, o método do contínuo imerso formula exatamente o mesmo problema só que mencionando que a formulação é válida para fluido e sólido compressíveis, situação para a qual o modelo dado pelo sistema (3.3.3) está correto. Não obstante, nenhuma justificativa é feita em relação ao anteriormente dito.

Na Seção 3.3.2 generalizam-se estas questões dando lugar a uma formulação que abrange o caso mais genérico, admitindo qualquer combinação referente ao caráter compressível do fluido e do sólido. A formulação variacional correspondente ao sistema de equações (3.3.3) é derivada fazendo uso da técnica de resíduos ponderados. Contudo, há duas peculiaridades que devem ser remarcadas e são as seguintes: por um lado, (i) os autores expressam a necessidade de definir, em função da (3.3.3)₇, a seguinte representação integral para o produto de dualidade $\langle \mathcal{F}, \mathbf{w} \rangle$

$$\langle \mathcal{F}, \mathbf{w} \rangle = \int_{\Omega_s^t} \left[(\rho_f - \rho_s) \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{w} + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_s) \cdot \nabla \mathbf{w} \right] d\mathbf{x}, \quad (3.3.6)$$

aspecto que não resulta natural *a priori*; desta forma, a formulação variacional correspondente ao sistema de equações (3.3.3) é a seguinte

$$\int_{\Omega} \left[\rho_f \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{w} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{w} \right] d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s^t} \left[(\rho_f - \rho_s) \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{w} - (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_s) \cdot \nabla \mathbf{w} \right] d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \quad (3.3.7a)$$

$$\int_{\Omega} q \left[\operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp}{Dt} \right] d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in \mathcal{M}, \quad (3.3.7b)$$

$$\int_{\Omega_s^0} q_s \left[\det \mathbf{F} - 1 + \frac{1}{\kappa_f} [p_s]_m \right] d\mathbf{X} = 0 \quad \forall q_s \in \mathcal{M}_s, \quad (3.3.7c)$$

$$\int_{\Omega_s^0} \left[[\mathbf{v}_f]_m - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{w}_s = 0 \quad \forall \mathbf{w}_s \in \mathcal{V}_s, \quad (3.3.7d)$$

onde $\mathcal{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (usou-se condição de Dirichlet em todo o contorno de Ω), $\mathcal{M} = L^2(\Omega)$, $\mathcal{M}_s = L^2(\Omega_s^0)$ e $\mathcal{V}_s = \mathbf{L}^2(\Omega_s^0)$. Por outro lado, (ii) os autores estabelecem, através da equação (3.3.7d), a continuidade do campo de velocidade de forma fraca, porém, o elemento dual associado, isto é o esforço associado a tal restrição, não aparece na formulação. Segundo ver-se-á na seção seguinte, por trás desta formulação, de fato, estão implicitamente considerados os esforços duais à igualdade do campo de velocidade em Ω_s^t , já que

sobre a própria equação do fluido artificial em Ω_s^t encontram-se os esforços provenientes do sólido. Analisando estes dois aspectos da formulação vê-se que esta não parece ser a forma mais natural de colocar o problema.

Finalmente, é importante salientar mais uma vez que esta formulação somente é válida quando o sólido e o fluido são ambos compressíveis ou ambos incompressíveis. Assim sendo, na literatura não existe uma formulação que permita a análise da interação fluido–sólido com propriedades de compressibilidade/incompressibilidade arbitrárias.

3.3.2 O método de domínios imersos

Nesta seção procura-se dar bases bem fundadas na colocação do problema de interação fluido–estrutura quando aplicadas as idéias de imersão de domínios, formalizando e estendendo os conceitos mostrados na seção anterior. Para isto, desenvolve-se um novo modelo que é chamado método de domínios imersos, e que generaliza os métodos de elementos finitos imersos e do contínuo imerso. Embora as idéias mais básicas não se afastem muito do apresentado na seção anterior, a reformulação do problema permite não só efetuar a correção daquela inconsistência apresentada na Seção 3.3.1 com respeito ao balanço de massa, mas também formular um princípio de potências adequado para este problema que venha substituir às equações (3.3.7). Ao mesmo tempo, entende-se que a forma como é colocado o problema corresponde mais a uma alternativa dos métodos de domínios fictícios.

Como dito, o ponto de partida é a formulação clássica presente no Problema 3.2, a qual é repetida aqui por conveniência

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_f^t} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} \\
& - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma - \int_{\Omega_f^t} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} \right) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_s \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} \right) d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega_s^t} \left[\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \boldsymbol{\sigma}_{sD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_s) - p_s \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_s - \rho_s \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Gamma_{fs}^t} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) d\Gamma + \int_{\Gamma_{fs}^t} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s - \hat{\mathbf{v}}_f) d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

$$\forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Lambda}, \quad (3.3.8)$$

onde todos os elementos já foram definidos.

Considere agora a existência de um fluido artificial ocupando o espaço Ω_s^t para o qual o par velocidade–pressão denota-se também por (\mathbf{v}_f, p_f) . Devido a que, a final de contas, trata-se de um fluido fictício têm-se vários graus de liberdade a serem definidos, como, por exemplo, a massa específica e/ou o comportamento viscoso. Por simplicidade na apresentação emprega-se um fluido artificial com massa específica ρ_f e com o mesmo comportamento viscoso que o fluido real que ocupa Ω_f^t (mas note que esta é só uma escolha particular). A análise é focada primeiro sobre a equação de balanço de momento e logo a equação da massa aparecerá vinculada, de alguma forma, à primeira.

Aqui, entende-se que as idéias subjacentes aos métodos de domínios imersos estão apoiadas na continuidade do campo de velocidade sobre todo o domínio do sólido. Em outras palavras, a velocidade do sólido \mathbf{v}_s e a do fluido artificial \mathbf{v}_f são, em algum sentido

a ser definido, iguais. Disto obtém-se que o seguinte termo é identicamente nulo

$$\int_{\Omega_s^t} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - p_f \operatorname{div}(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \rho_f \mathbf{g} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) \right] d\mathbf{x} \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{\mathbf{v}}_s) \text{ tal que } \hat{\mathbf{v}}_f = \hat{\mathbf{v}}_s \text{ em } \Omega_s^t, \quad (3.3.9)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{fD}$ possui, como dito, as mesmas características que as do fluido real (o que é uma escolha particular). Objetivando remarcar as diferenças entre esta abordagem e a dada na seção anterior digamos que neste caso o fluido artificial estará permitido de ter propriedades de compressibilidade arbitrárias, com respeito às do fluido real, em consonância com a equação de continuidade do campo de velocidade. Mais na frente este ponto é discutido em detalhe.

Agora introduz-se o método de domínios imersos a nível do problema contínuo em dois passos: (i) somando o termo (3.3.9) na formulação variacional (3.3.8) e (ii) relaxando a condição de continuidade $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s$ em Ω_s^t através da inclusão de um multiplicador de Lagrange. Para levar a cabo o segundo passo pode-se, por exemplo, adicionar termos da seguinte forma

$$\int_{\Omega_s^t} \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\psi} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s - \hat{\mathbf{v}}_f) d\mathbf{x}, \quad (3.3.10)$$

onde esta é só uma forma de expressar a continuidade do campo de velocidade. Na Seção 3.5 ver-se-á que há outras alternativas para tal fim. Observe que por trás da expressão (3.3.10) está o sentido no qual se demanda a continuidade do campo de velocidade. Enquanto nos problemas formulados na Seção 3.2 a continuidade vinha dada no sentido do produto de dualidade

$$\langle \hat{\boldsymbol{\lambda}}, (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_{fs}^t) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_{fs}^t)} = 0 \quad \forall \hat{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_{fs}^t), \quad (3.3.11)$$

por meio da expressão (3.3.10) a continuidade da velocidade é agora dada no sentido do seguinte produto de dualidade

$$\langle \hat{\boldsymbol{\psi}}, (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s^t)} = 0 \quad \forall \hat{\boldsymbol{\psi}} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t), \quad (3.3.12)$$

que, por sua vez, implica aquele expresso pela (3.3.11). Logo, entende-se que a expressão (3.3.12) constitui uma forma indireta de impor a condição original (3.3.11). Este é o ponto crucial e básico em toda esta teoria de métodos imersos no contexto de formulações variacionais primais. Além disso, sendo que a igualdade dos campos ocorre em $\mathbf{H}^1(\Omega_s^t)$, o termo na (3.3.9) é efetivamente nulo.

Por outro lado, a equação da conservação da massa do fluido artificial pode ser arbitrária desde que não contradiga a continuidade do campo de velocidade. Este é, de alguma forma, um outro grau de liberdade. Logo, adiciona-se o seguinte termo na formulação

$$\int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_f}{Dt} \right) d\mathbf{x}. \quad (3.3.13)$$

Na expressão (3.3.13) o fluido artificial toma as propriedades de compressibilidade pertencentes ao sólido. Esta é uma das maiores diferenças entre a abordagem aqui proposta e as encontradas na literatura. Da forma como se procede aqui contorna-se qualquer inconsistência concernente à conservação da massa no limite de incompressibilidade do fluido e/ou do sólido. Realmente, o valor do módulo de compressibilidade do fluido artificial poderia ter sido arbitrário. A questão importante é que seja independente do caráter compressível/incompressível do fluido real em Ω_f^t .

Conseqüentemente, depois de acomodar alguns termos, a primeira versão do princípio variacional que faz uso de idéias de imersão de domínios está enunciada no seguinte problema:

Problema 3.5. *Para cada $t \in (0, T)$ encontre $(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\Psi}$ tal que*

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_f^t} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma \\
& - \int_{\Omega_f^t} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} \right) d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_f}{Dt} \right) d\mathbf{x} \\
& - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_s \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} \right) d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega_s^t} \left[\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + \boldsymbol{\sigma}_{sD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_s) - p_s \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_s - \rho_s \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega_s^t} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - p_f \operatorname{div} (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) - \rho_f \mathbf{g} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_f - \hat{\mathbf{v}}_s) \right] d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Gamma_{fs}^t} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) d\Gamma + \int_{\Gamma_{fs}^t} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s - \hat{\mathbf{v}}_f) d\Gamma \\
& + \int_{\Omega_s^t} \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\psi} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s - \hat{\mathbf{v}}_f) d\mathbf{x} = 0 \\
& \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\Psi}, \quad (3.3.14)
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s)$, $p = (p_f, p_s)$, com (\mathbf{v}_f, p_f) definido sobre todo o domínio Ω . Assim é

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{(\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s^t); \mathbf{v}_f|_{\Gamma_{fD}} = \bar{\mathbf{v}}_f; \mathbf{v}_s|_{\Gamma_{sD}} = \bar{\mathbf{v}}_s\}, \\
\mathcal{P} &= \{(p_f, p_s) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega_s^t)\}, \\
\boldsymbol{\Lambda} &= \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_{fs}^t), \\
\boldsymbol{\Psi} &= \mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t).
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Também, \mathcal{V} é o espaço obtido por diferença de elementos em \mathcal{U} .

As equações de Euler–Lagrange permitem entender a função que cada elemento possui neste problema. Procedendo de forma usual, aplicando a fórmula de Green obtém-

se, no sentido das distribuições, o seguinte conjunto de equações

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} & \text{em } \Omega_f^t, \\ \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} + \boldsymbol{\psi} & \text{em } \Omega_s^t, \\ \rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} - \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_{sD} - \boldsymbol{\sigma}_{fD}) + \nabla (p_s - p_f) = & \\ & (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} - \boldsymbol{\psi} \quad \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_f^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_f & \text{sobre } \Gamma_{fN}^t, \\ \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD})^f \mathbf{n}_{fs} - (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD})^s \mathbf{n}_{fs} = \boldsymbol{\lambda} & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \\ (-p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD})^s \mathbf{n}_{fs} - (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD})^s \mathbf{n}_{fs} = \boldsymbol{\lambda} & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \\ \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f & \text{em } \Omega_s^t, \end{array} \right. \quad (3.3.16)$$

onde $(\cdot)^f$ e $(\cdot)^s$ denotam quantidades sobre Γ_{fs}^t quando vistas desde os domínios Ω_f^t e Ω_s^t respectivamente.

Subtraindo agora a (3.3.16)₁₀ da (3.3.16)₉ chega-se à condição de continuidade da tração, ou seja

$$(-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD})^f \mathbf{n}_{fs} = (-p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD})^s \mathbf{n}_{fs} \quad \text{sobre } \Gamma_{fs}^t. \quad (3.3.17)$$

A pergunta que permanece aberta aqui é acerca do multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$. Note que, de acordo com o comentado anteriormente, na equação (3.3.16)₁₁ está compreendida na equação (3.3.16)₈. Logo, uma vez que o multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\psi}$ força a condição (3.3.16)₁₁, o multiplicador $\boldsymbol{\lambda}$ não tem nada que impor, resultando em

$$\boldsymbol{\lambda} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \quad (3.3.18)$$

o que significa que não há salto na tração entre o fluido real e o artificial

$$\llbracket -p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \rrbracket \mathbf{n}_{fs} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \quad (3.3.19)$$

onde $\llbracket \cdot \rrbracket = (\cdot)^f - (\cdot)^s$. Com efeito, em função disto podem-se desconsiderar os termos associados ao multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ e à sua variação $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$, pois eles não jogam nenhum papel adicional no problema contínuo. Além do mais, esta conclusão decorre diretamente de analisar o princípio variacional (3.3.14), em particular de ver que a (3.3.12) implica a (3.3.11). Entretanto, é importante frisar que este poderia não ser o caso no problema discreto. Então, o Problema 3.5 pode ser reescrito, após acomodar alguns termos, como segue:

Problema 3.6. Para cada $t \in (0, T)$ encontre $(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Psi}$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma \\ & \quad - \int_{\Omega} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \left(\frac{1}{\kappa_f} - \frac{1}{\kappa_s} \right) \frac{Dp_f}{Dt} d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega_s^t} \left[\left(\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} - \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s + (\boldsymbol{\sigma}_{sD} - \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_s) - (p_s - p_f) \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\ & \quad \quad \left. - (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{x} - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_s \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} \right) d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{\Omega_s^t} \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\psi} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_s - \hat{\mathbf{v}}_f) d\mathbf{x} = 0 \\ & \quad \quad \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}, \hat{\boldsymbol{\psi}}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Psi}, \quad (3.3.20) \end{aligned}$$

onde todos os elementos estão definidos segundo o Problema 3.5.

É fácil ver que o conjunto de equações de Euler–Lagrange é idêntico a (3.3.16) quando $\boldsymbol{\lambda} = 0$, e quando a expressão (3.3.16)₈ não é explicitamente dada (posto que está contida na (3.3.16)₁₁ como comentado antes), ou seja

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} & \text{em } \Omega_f^t, \\ \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} + \boldsymbol{\psi} & \text{em } \Omega_s^t, \\ \rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} - \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_{sD} - \boldsymbol{\sigma}_{fD}) + \nabla (p_s - p_f) = \\ \quad (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} - \boldsymbol{\psi} & \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_f^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_f & \text{sobre } \Gamma_{fN}, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD})^f \mathbf{n}_{fs} - (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD})^s \mathbf{n}_{fs} = 0 & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \\ (-p_s \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{sD})^s \mathbf{n}_{fs} - (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD})^s \mathbf{n}_{fs} = 0 & \text{sobre } \Gamma_{fs}^t, \\ \mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f & \text{em } \Omega_s^t. \end{array} \right. \quad (3.3.21)$$

Assim sendo, o Problema 3.6 constitui o método de domínios imersos desenvolvido nesta seção, o qual generaliza os métodos existentes na literatura que empregam idéias de imersão.

3.3.3 Equivalência entre as formulações

Para mostrar a consistência e a equivalência entre a formulação (3.3.20) e a (3.3.8) é preciso manipular levemente as equações de Euler–Lagrange. Assuma que $(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\psi})$ é uma solução do Problema 3.6, de forma que o par (\mathbf{v}, p) produz os estados de tensão $\boldsymbol{\sigma}_f$ e $\boldsymbol{\sigma}_s$ tais que a solução satisfaz, no sentido das distribuições, o conjunto de equações (3.3.21). Então, veja que da (3.3.21)₃ pode-se revelar o significado de $\boldsymbol{\psi}$

$$\boldsymbol{\psi} = -\rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} + \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} + \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_{sD} - \boldsymbol{\sigma}_{fD}) - \nabla (p_s - p_f) + (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} \quad \text{em } \Omega_s^t, \quad (3.3.22)$$

e cancelando os termos associados ao fluido na (3.3.27)₁.

Finalmente, da (3.3.25) obtém-se, para $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s$ em Ω_s^t , a expressão dada na (3.3.3)₂. Em outras palavras, a nova formulação variacional proposta nesta seção fornece, inclusive, uma base sólida para justificar a expressão adotada pelos autores em [97].

3.3.4 Situações limites das características de compressibilidade

Agora é importante analisar como se comporta o modelo quando tanto o fluido como o sólido variam seus comportamentos de compressíveis para incompressíveis. A formulação (3.3.20) apresentada na Seção 3.3.2 é geral, e portanto válida para todas as situações abaixo consideradas. Isto é um aspecto importante nesta nova formulação, permitindo resolver a inconsistência existente na literatura neste ponto.

- i. *Fluido compressível–sólido compressível*. Este caso é o mais simples, e é diretamente tratado no Problema 3.6 especificando os valores finitos de κ_f e κ_s . Aqui, a conservação da massa resulta

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_f^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \end{cases} \quad (3.3.28)$$

deixando em evidência que ambos os fluidos, real e artificial, são compressíveis, porém com características de compressibilidade diferentes. Em particular, neste caso poderia ter sido tomado um fluido artificial compressível com módulo de compressibilidade igual a κ_f sem acarretar inconsistências. Esta é justamente a situação para a qual o método do contínuo imerso é válida (ver [163]).

- ii. *Fluido incompressível–sólido incompressível*. Este caso também é uma situação simples devido a que ambos os módulos de compressibilidade, κ_f e κ_s , tomam valor infinito. Assim, a conservação da massa resulta

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0 & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \end{cases} \quad (3.3.29)$$

implicando que ambos os fluidos, real e artificial, são incompressíveis. Esta é a situação para a qual o método de elementos finitos imersos também é válida (ver [97, 98, 165]).

- iii. *Fluido compressível–sólido incompressível*. Este caso é tratado de forma similar aos anteriores. Em particular tem-se $\kappa_s = \infty$ e $\kappa_f < \infty$, portanto resulta

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_f^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_s = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \end{cases} \quad (3.3.30)$$

significando que o fluido muda seu comportamento, passando de ser compressível em Ω_f^t a incompressível em Ω_s^t . Este resultado frisa o fato do fluido artificial ter um comportamento realmente diferente ao do fluido real. Observe que com esta nova formulação este tipo de situação é válida, não acarretando nenhum tipo de inconsistência.

- iv. *Fluido incompressível-sólido compressível.* Esta situação é a que merece mais atenção. Em particular tem-se $\kappa_f = \infty$, enquanto que é $\kappa_s < \infty$. Logo, segue-se que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0 & \text{em } \Omega_f^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \end{cases} \quad (3.3.31)$$

o que implica que o fluido muda seu comportamento de Ω_f^t a Ω_s^t , indo de totalmente incompressível a compressível correspondentemente. Nesta situação vale a pena remarcar novamente que o fluido artificial é independente do real com respeito ao caráter de compressível.

Como explicado na Seção 3.3.1, as formulações dos métodos de elementos finitos imersos e do contínuo imerso falham no caso (iv). Apesar disso, em [97] postula-se que o método de elementos finitos imersos é geral em relação justamente a este ponto. Isto é o que motivou a formulação do método do contínuo imerso, a qual é idêntica à do primeiro só que se limita ao tratamento de fluidos e sólidos na situação (i) enunciada, embora seja também válido para os casos (ii) e (iii) detalhados acima. A explicação para isto, e a principal limitação destas formulações, é que o fluido artificial é totalmente idêntico ao real, inclusive no módulo de compressibilidade, ou seja κ_s é substituído por κ_f na (3.3.16)₅. Quando o fluido é incompressível, a expressão (3.3.12), ou equivalentemente a (3.3.16)₁₁, assegura que a divergência do campo de velocidade do sólido é idênticamente nula independentemente do comportamento real do sólido. Isto altera o estado da tensão no sólido na formulação do método de elementos finitos imersos, podendo derivar em um cálculo errado do equilíbrio e, portanto, em uma solução incorreta. De fato, introduzindo esta modificação obtém-se, para o caso de um fluido incompressível ($\kappa_f = \infty$), o seguinte

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_s + \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} = \frac{1}{\kappa_s} \frac{Dp_s}{Dt} = 0 \quad \text{em } \Omega_s^t, \quad (3.3.32)$$

pois $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_s$ em Ω_s^t . Isto conduz, como dito, a um comportamento incompressível irreal do sólido (que originalmente possuía um valor finito para κ_s), e como consequência disso deve satisfazer $\frac{Dp_s}{Dt} = 0$, ou igualmente $\frac{Dp_f}{Dt} = 0$. Em outras palavras, o fluido artificial que preenche Ω_s^t modifica o estado do sólido só no caso do limite de incompressibilidade. Aqui, uma forma inteligente de contornar tal dificuldade foi trocar o caráter compressível do fluido artificial com respeito ao que possui o fluido real, atribuindo o módulo de compressibilidade do sólido. Contudo, lembre que qualquer outro valor para este módulo de compressibilidade do fluido artificial poderia ter sido empregado desde que fosse independente do κ_f correspondente ao fluido real.

3.3.5 O método de domínios imersos para interação fluido-sólido rígido

Nesta seção o problema é simplificado assumindo que o sólido imerso não sofre deformação, ou seja que é rígido. Para isto desconsidera-se qualquer contorno de Dirichlet sobre o sólido, resultando totalmente imerso no fluido. Com isto, a formulação aqui desenvolvida é similar à apresentada em [39], e difere de outras formulações bem estabelecidas como a desenvolvida em [52]. A dinâmica de corpo rígido é caracterizada por um campo de velocidade dado por

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s^o + \boldsymbol{\omega}_s^o \times \mathbf{r}^o, \quad (3.3.33)$$

onde \mathbf{v}_s^o é a velocidade do centro de massa, $\boldsymbol{\omega}^o$ é a velocidade angular do objeto e \mathbf{r}^o é a distância de qualquer ponto dentro do sólido ao centro de massa. Todas essas quantidades

estão escritas na configuração atual no tempo t . Lembre que a (3.3.33) pode-se escrever de forma equivalente como

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s^o + \mathbf{\Omega}_s^o \mathbf{r}^o, \quad (3.3.34)$$

onde $\mathbf{\Omega}_s^o$ é o único tensor anti-simétrico associado ao vetor $\boldsymbol{\omega}_s^o$. Por outro lado, é um simples exercício da mecânica do contínuo mostrar que

$$\frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} = \frac{D\mathbf{v}_s^o}{Dt} + \frac{D\mathbf{\Omega}_s^o}{Dt} \mathbf{r}^o + \mathbf{\Omega}_s^o \mathbf{\Omega}_s^o \mathbf{r}^o. \quad (3.3.35)$$

Além disso, usa-se o fato dos movimentos de corpo rígido serem tais que $\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_s) = 0$ e $\text{div } \hat{\mathbf{v}}_s = 0$ junto com a desconsideração da correspondente conservação da massa (lembrando que $\kappa_s = \infty$). Antes de dar as expressões finais do problema veja que, dado que \mathbf{r}^o mede a distância ao centro de massa então $\int_{\Omega_s^o} \rho_s \mathbf{r}^o \, d\mathbf{x} = 0$ e alguns termos na formulação são nulos. Logo, introduzindo a (3.3.34) na (3.3.20) e tomando em conta os comentários anteriores chega-se na seguinte formulação:

Problema 3.7. Para cada $t \in (0, T)$ encontre $(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Psi}$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \text{div } \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \, d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \hat{p}_f \left(\text{div } \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^o} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} d\mathbf{x} \\ & + m_s \frac{D\mathbf{v}_s^o}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o + \frac{D\mathbf{\Omega}_s^o}{Dt} \mathbb{I}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o + \mathbf{\Omega}_s^o \mathbf{\Omega}_s^o \mathbb{I}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o \\ & - \left[\int_{\Omega_s^o} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} d\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o - \left[\int_{\Omega_s^o} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \otimes \mathbf{r}^o d\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o \\ & - (m_s - m_f) \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o + \int_{\Omega_s^o} \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot (\mathbf{v}_s^o + \mathbf{\Omega}_s^o \mathbf{r}^o - \mathbf{v}_f) d\mathbf{x} \\ & + \left[\int_{\Omega_s^o} \boldsymbol{\psi} d\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o + \left[\int_{\Omega_s^o} \boldsymbol{\psi} \otimes \mathbf{r}^o d\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o - \int_{\Omega_s^o} \boldsymbol{\psi} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\mathbf{x} = 0 \\ & \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{p}, \hat{\boldsymbol{\psi}}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Psi}, \quad (3.3.36) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} m_s &= \int_{\Omega_s^o} \rho_s d\mathbf{x}, \\ m_f &= \int_{\Omega_s^o} \rho_f d\mathbf{x}, \\ \mathbb{I}_s &= \int_{\Omega_s^o} \rho_s (\mathbf{r}^o \otimes \mathbf{r}^o) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

e sendo agora

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(\mathbf{v}_f, \mathbf{v}_s^o, \mathbf{\Omega}_s^o) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times [\mathbb{R}]^{n_d} \times ([\mathbb{R}]^{n_d \times n_d})^a; \mathbf{v}_f|_{\Gamma_{fD}} = \bar{\mathbf{v}}_f\}, \\ \mathcal{P} &= L^2(\Omega), \\ \boldsymbol{\Psi} &= \mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^o), \end{aligned} \quad (3.3.38)$$

onde $n_d = 2, 3$, $(\cdot)^a$ denota a parte anti-simétrica de um tensor de segunda ordem e, como sempre, \mathcal{V} é o espaço obtido por diferença de elementos de \mathcal{U} .

Observe que aqui tudo tem sido escrito em termos do tensor anti-simétrico $\mathbf{\Omega}_s^o$.

Entretanto, o mesmo poderia ter sido feito em termos do vetor $\boldsymbol{\omega}_s^o$. As equações de Euler-Lagrange são obtidas sem qualquer dificuldade e são as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} & \text{em } \Omega_f^t, \\ \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} + \boldsymbol{\psi} & \text{em } \Omega_s^t, \\ m_s \frac{D\mathbf{v}_s^o}{Dt} - \int_{\Omega_s^t} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \, d\mathbf{x} = (m_s - m_f) \mathbf{g} - \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\psi} \, d\mathbf{x} & \text{em } \Omega_s^t, \\ \frac{D\Omega_s^o}{Dt} \mathbb{I}_s + \mathbb{I}_s \frac{D\Omega_s^o}{Dt} + \Omega_s^o \Omega_s^o \mathbb{I}_s - \mathbb{I}_s \Omega_s^o \Omega_s^o \\ - \int_{\Omega_s^t} \rho_f \left(\frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \otimes \mathbf{r}^o - \mathbf{r}^o \otimes \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \right) \, d\mathbf{x} = & (3.3.39) \\ - \int_{\Omega_s^t} (\boldsymbol{\psi} \otimes \mathbf{r}^o - \mathbf{r}^o \otimes \boldsymbol{\psi}) \, d\mathbf{x} & \text{em } \Omega_s^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{Dp_f}{Dt} = 0 & \text{em } \Omega_f^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0 & \text{em } \Omega_s^t, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_f & \text{sobre } \Gamma_{fN}, \\ \mathbf{v}_s^o + \Omega_s^o \mathbf{r}^o = \mathbf{v}_f & \text{em } \Omega_s^t, \end{array} \right.$$

onde se recuperam facilmente as equações para o fluido, para o corpo rígido e a continuidade do campo de velocidade.

A pequena diferença existente com a formulação apresentada em [39] é que, no mencionado trabalho, a velocidade do fluido artificial $\mathbf{v}_f|_{\Omega_s^t}$ tem sido substituída diretamente na equação do sólido. Ou seja, fazendo uso da continuidade do campo de velocidade sobre Ω_s^t , em [39], os termos da equação do sólido associados ao campo \mathbf{v}_f na equação (3.3.36) estão alterados como segue

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s^t} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \, d\mathbf{x} &\rightarrow \int_{\Omega_s^t} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} \, d\mathbf{x} = m_f \frac{D\mathbf{v}_s^o}{Dt}, \\ \int_{\Omega_s^t} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \otimes \mathbf{r}^o \, d\mathbf{x} &\rightarrow \int_{\Omega_s^t} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} \otimes \mathbf{r}^o \, d\mathbf{x} = \frac{D\Omega_s^o}{Dt} \mathbb{I}_f + \Omega_s^o \Omega_s^o \mathbb{I}_f, \end{aligned} \quad (3.3.40)$$

onde \mathbb{I}_f define-se como na (3.3.37) substituindo ρ_s por ρ_f .

Por sua vez, a diferença entre o Problema 3.7 e o desenvolvido em [52] é que, no mencionado trabalho, a continuidade do campo de velocidade é forçada somente sobre a fronteira $\partial\Omega_s^t$, e portanto o multiplicador de Lagrange está definido somente sobre esta fronteira. Este último método é mais similar a um método de contorno imerso neste sentido, embora o motivo real do modelo seja simular um sólido rígido circundado por um fluido. Logo, nessa metodologia o fluido artificial possui uma velocidade diferente à do sólido no interior da região Ω_s^t , sendo igual só na fronteira.

3.4 Métodos de cascas imersas

Embora estes métodos sejam restritivos que os vistos na seção anterior, a interação de uma casca com um fluido resulta atraente não só pelo interesse em si em certas aplicações, mas também pela mecânica envolvida no problema. No começo do desenvolvimento destes métodos os mesmos eram utilizados na formulação de problemas de interação fluido-estrutura quando a estrutura, considerada sem volume nem massa, tinha um comportamento do tipo puramente elástico [132]. A forma como este método é colocado é sempre do ponto de vista da análise diferencial do problema, isto é, todos os trabalhos relacionados

baseiam os modelos nas equações diferenciais parciais correspondentes, com aproximação por meio de métodos de resíduos ponderados. Entretanto, a formulação de um princípio variacional que governe o problema resulta atraente de forma a entender as condições que se devem satisfazer os campos, assim como as condições de salto que surgem ao colapsar o volume ocupado pelo sólido a uma superfície. Um exemplo da necessidade de empregar este tipo de abordagem variacional é o que acontece com o modelo apresentado recentemente em [40]. Este trabalho formula o problema de interação entre uma viga de Bernoulli e um fluido. Nessa combinação, assim como em outros casos que serão tratados nesta seção, surge uma questão importante do ponto de vista teórico. O mencionado trabalho não aborda de forma consistente a formulação do problema deixando de lado características que, em primeira instância, deveriam ter sido incluídas na análise. Este ponto é comentado de forma muito superficial pelos autores dessa publicação. Em particular, este exemplo será discutido novamente mais na frente. Neste sentido, a presente seção vem a formular os princípios variacionais que governam o problema de uma casca imersa em um fluido, e, assim sendo, chega-se às equações diferenciais parciais respectivas. Tendo feito isto, será possível entender as hipóteses que estão por trás da formulação do método de contornos imersos, e quais as suas limitações.

Nesta seção apresenta-se um novo modelo, denominado método de cascas imersas, que provê um princípio variacional que generaliza os métodos de contornos imersos. Isto é feito através da formulação variacional que governa o problema de interação fluido-estrutura quando a estrutura é reduzida a uma casca por meio da introdução de hipóteses cinemáticas no Problema 3.2. Em particular, o objetivo final é desenvolver um novo modelo geral do qual o método de contornos imersos possa ser derivado como um caso particular ao introduzir hipóteses adicionais.

Vale a pena esclarecer que como o caráter compressível/incompressível de ambos os sistemas não é de importância nesta parte do capítulo, a situação é simplificada ao considerar o fluido como incompressível e ao não distinguir a componente hidrostática no tensor de tensão de Cauchy do sólido $\boldsymbol{\sigma}_s$.

3.4.1 Preliminares

A seguir far-se-á uso da notação e decomposições introduzidas na Seção 1.3.1 para o modelo de casca de Naghdi. Mesmo assim, os conceitos, a notação e as definições necessárias são repetidas aqui por conveniência. A descrição e a colocação do problema estão baseadas no esquema da Figura 3.2.

Lembre que uma casca é convenientemente caracterizada pelo seguinte conjunto de pontos no espaço Euleriano

$$\Omega_s^t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \xi \mathbf{n}, \mathbf{x}_o \in \Sigma_o^t, \xi \in H\}, \quad (3.4.1)$$

onde Σ_o^t é identificada como a superfície média, a qual é suficientemente suave para ter definida uma única normal $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$. Também considera-se que a casca é fina o suficiente (em função do raio de curvatura) a fim de que o mapeamento $\mathbf{x} \leftrightarrow (\mathbf{x}_o, \xi)$ esteja univocamente determinado. A espessura da casca denota-se $h = h(\mathbf{x}_o)$ e estabelece o intervalo $H = (-\frac{h(\mathbf{x}_o)}{2}, \frac{h(\mathbf{x}_o)}{2})$ que é caracterizado pela coordenada ξ . A casca é limitada superior e inferiormente por duas superfícies Σ_+^t e Σ_-^t respectivamente, e é lateralmente limitada pela superfície Γ_L^t . Como será visto mais na frente, esta fronteira lateral será desconsiderada na formulação.

Desta maneira, todas as quantidades envolvidas podem ser expressas em termos das componentes sobre o plano tangente e na direção da normal à superfície média. Fazendo uso do operador projeção sobre o plano tangente, denotado por $\boldsymbol{\Pi}_t(\mathbf{x}_o) = \mathbf{I} - \mathbf{n}(\mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$,

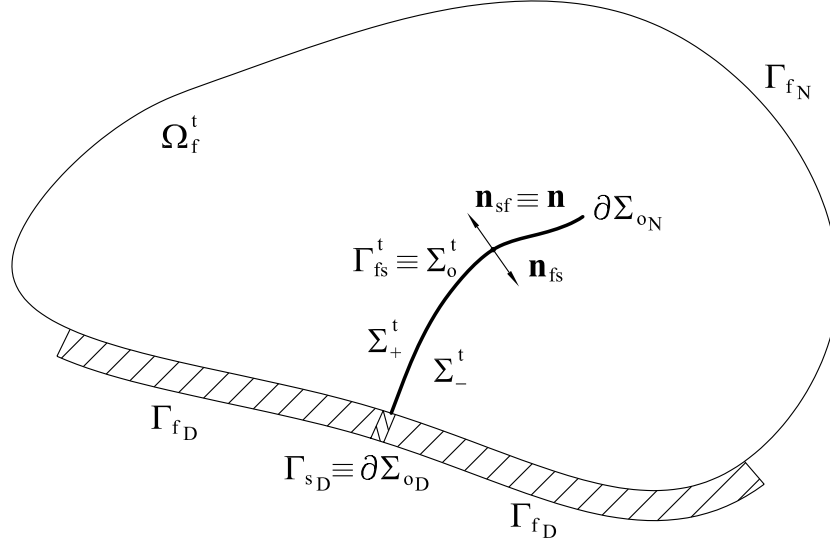


Figura 3.2: Esquema para o problema modelo de interação fluido-casca.

é fácil ver que para um tensor simétrico \mathbf{A} tem-se a seguinte decomposição

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_t + \mathbf{A}_s \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{A}_s + A_n(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (3.4.2)$$

onde $\mathbf{A}_t = \mathbf{\Pi}_t \mathbf{A} \mathbf{\Pi}_t$ é um tensor, $\mathbf{A}_s = \mathbf{\Pi}_t \mathbf{A} \mathbf{n}$ é um vetor e $A_n = (\mathbf{A} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$ é um escalar. Lembre que esta é uma decomposição ortogonal. Considerando o campo vetorial \mathbf{v} , escrito em componentes tangencial e normal $\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + v_n \mathbf{n}$, resulta

$$\nabla \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v})_t + (\nabla \mathbf{v})_s \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes (\nabla \mathbf{v})_s^* + (\nabla \mathbf{v})_n (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (3.4.3)$$

com

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{v})_t &= \mathbf{\Pi}_t (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_t) \mathbf{\Upsilon}^{-1} \mathbf{\Pi}_t + v_n (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{\Upsilon}^{-1} \mathbf{\Pi}_t, \\ (\nabla \mathbf{v})_s &= \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \xi}, \\ (\nabla \mathbf{v})_s^* &= \mathbf{\Pi}_t \mathbf{\Upsilon}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_o} v_n - \mathbf{\Pi}_t \mathbf{\Upsilon}^{-1} (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{v}_t, \\ (\nabla \mathbf{v})_n &= \frac{\partial v_n}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

onde $\mathbf{\Upsilon}$ (na notação da Seção 1.3.1 era denominado $\mathbf{\Lambda}$, mas aqui mudou-se para não confundir com os espaços dos multiplicadores de Lagrange) é o operador invertível definido como $\mathbf{\Upsilon} = \mathbf{I} + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}$, sendo $\nabla_{\mathbf{x}_o}(\cdot)$ o gradiente na variável \mathbf{x}_o definido sobre Σ_o^t e $\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}$ o tensor curvatura de tal superfície.

Para formular o problema considera-se que a cinemática da casca está governada por ações de movimento que possuem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}_{st}(\mathbf{x}_o, \xi, t) + \mathbf{v}_{sn}(\mathbf{x}_o, t), \\ \mathbf{v}_{st}(\mathbf{x}_o, \xi, t) &= \mathbf{v}_{st}^o(\mathbf{x}_o, t) + \xi \boldsymbol{\alpha}_{st}(\mathbf{x}_o, t), \\ \mathbf{v}_{sn}(\mathbf{x}_o, t) &= v_{sn}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}_o), \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

onde os índices t e n denotam componentes tangenciais e normais respectivamente. Como visto na Seção 1.3.1, este modelo é conhecido como modelo de Naghdi [115, 116]. Note que

existe uma velocidade angular definida sobre a superfície média ao ter somado o termo $\xi \boldsymbol{\alpha}_{st}$. Para estas hipóteses, a partir da (3.4.4), obtém-se

$$\begin{aligned}
(\nabla \mathbf{v}_s)_t &= \boldsymbol{\Pi}_t (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_{st}^o) \boldsymbol{\Upsilon}^{-1} \boldsymbol{\Pi}_t + \xi \boldsymbol{\Pi}_t (\nabla_{\mathbf{x}_o} \boldsymbol{\alpha}_{st}) \boldsymbol{\Upsilon}^{-1} \boldsymbol{\Pi}_t \\
&\quad + v_n (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \boldsymbol{\Upsilon}^{-1} \boldsymbol{\Pi}_t, \\
(\nabla \mathbf{v}_s)_s &= \boldsymbol{\alpha}_{st}, \\
(\nabla \mathbf{v}_s)_s^* &= \boldsymbol{\Pi}_t \boldsymbol{\Upsilon}^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_o} v_n - \boldsymbol{\Pi}_t \boldsymbol{\Upsilon}^{-1} (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{v}_{st}^o - \xi \boldsymbol{\Pi}_t \boldsymbol{\Upsilon}^{-1} (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \boldsymbol{\alpha}_{st}, \\
(\nabla \mathbf{v}_s)_n &= 0.
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

A seguir expressam-se as integrais envolvidas no modelo em função da superfície média Σ_o^t

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_s^t} (\cdot) d\mathbf{x} &= \int_{\Sigma_o^t} \int_H (\cdot) \det \boldsymbol{\Upsilon} d\xi d\Sigma_o, \\
\int_{\Sigma_+^t} (\cdot) d\Gamma &= \int_{\Sigma_o^t} (\cdot) \det \boldsymbol{\Upsilon}^+ d\Sigma_o, \\
\int_{\Sigma_-^t} (\cdot) d\Gamma &= \int_{\Sigma_o^t} (\cdot) \det \boldsymbol{\Upsilon}^- d\Sigma_o.
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Assim sendo, como é comum na teoria de cascas (e como feito na Seção 1.3.1), os seguintes esforços e carregamentos generalizados são definidos

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_t &= \int_H \boldsymbol{\sigma}_{st} \boldsymbol{\Upsilon}^{-1} \det \boldsymbol{\Upsilon} d\xi, \\
\mathbf{M}_t &= \int_H \boldsymbol{\sigma}_{st} \boldsymbol{\Upsilon}^{-1} \xi \det \boldsymbol{\Upsilon} d\xi, \\
\mathbf{Q}_t &= \int_H \boldsymbol{\Upsilon}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{ss} \det \boldsymbol{\Upsilon} d\xi, \\
\mathbf{f}_t^g &= \int_H \boldsymbol{\Pi}_t \mathbf{g} \det \boldsymbol{\Upsilon} d\xi, \\
f_n^g &= \int_H \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \det \boldsymbol{\Upsilon} d\xi, \\
\mathbf{m}_t^g &= \int_H \boldsymbol{\Pi}_t \mathbf{g} \xi \det \boldsymbol{\Upsilon} d\xi,
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_{st} = \boldsymbol{\Pi}_t \boldsymbol{\sigma}_s \boldsymbol{\Pi}_t$ e $\boldsymbol{\sigma}_{ss} = \boldsymbol{\Pi}_t \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}$. Também, \mathbf{N}_t é o esforço de membrana generalizado, \mathbf{M}_t é o esforço de flexão generalizado e \mathbf{Q}_t é o esforço cortante generalizado. Por outro lado, \mathbf{f}_t^g e f_n^g são as componentes tangencial e normal generalizadas do carregamento de corpo devido à gravidade respectivamente, enquanto que \mathbf{m}_t^g é o momento resultante pela ação da gravidade.

Com relação à dinâmica algum cuidado é preciso ao avaliar as derivadas materiais, de maneira a encontrar uma expressão da forma

$$\int_{\Omega_s^t} \rho_s \frac{D\mathbf{v}_s}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s d\mathbf{x} = \int_{\Sigma_o^t} [\rho_s \mathbf{a}_{st}^o \cdot \hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \rho_s \boldsymbol{\omega}_{st} \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} + \rho_s a_{sn} \hat{v}_{sn}] d\Sigma_o. \tag{3.4.9}$$

Isto é devido a que a derivada material de um vetor sobre o plano tangente não pertence em geral a tal plano, e o mesmo comentário vale para a componente normal. Para isto escreve-se a derivada material empregando coordenadas convectadas, isto é, uma descrição

Lagrangiana atual. Isto dá, para as acelerações \mathbf{a}_{st}^o , $\boldsymbol{\varpi}_{st}$ e a_{sn} , o seguinte

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{st}^o &= H_{\xi^0} \frac{\partial \mathbf{v}_{st}^o}{\partial t} + H_{\xi^1} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{st}}{\partial t}, \\ \boldsymbol{\varpi}_{st} &= H_{\xi^1} \frac{\partial \mathbf{v}_{st}^o}{\partial t} + H_{\xi^2} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{st}}{\partial t}, \\ a_{sn} &= H_{\xi^0} \frac{\partial v_{sn}}{\partial t},\end{aligned}\tag{3.4.10}$$

onde

$$H_{\xi^i} = \int_H \xi^i \det \mathbf{Y} \, d\xi \quad i = 0, 1, 2.\tag{3.4.11}$$

Uma vez que a estrutura é considerada uma casca o contorno da mesma é $\partial \Sigma_o^t = \partial \Sigma_{oD} \cup \partial \Sigma_{oN}$, onde $\partial \Sigma_{oD}$ denota o contorno de Dirichlet e $\partial \Sigma_{oN}$ o complemento. Além disso, de acordo com a Figura 3.2 vê-se que a normal da casca \mathbf{n} coincide com a que previamente fora denominada $\mathbf{n}_{sf} = -\mathbf{n}_{fs}$.

3.4.2 O método de cascas imersas geral

O motivo de utilizar o modelo de Naghdi é devido a que constitui uma representação matemática bastante geral para modelar o comportamento de estruturas de tipo casca. No entanto, qualquer outra teoria poderia ter sido cogitada no seu lugar. Escolheu-se este modelo porque oferece a possibilidade de derivar um caso mais geral que quando usado um modelo com hipóteses de Kirchhoff–Love, assim como quando empregado algum outro modelo ainda mais simples como aquele que será visto mais na frente ao recuperar, a partir do modelo de casca imersa, o método de contornos imersos.

É importante notar que a hipótese de Naghdi introduz uma diferença na velocidade dos pontos do sólido sobre as superfícies Σ_+^t e Σ_-^t . Isto, como será visto, leva à existência de uma descontinuidade no campo de velocidade do fluido quando o volume do sólido é condensado à superfície média, pois se tem $\mathbf{v}_{f|\Sigma_+^t} \neq \mathbf{v}_{f|\Sigma_-^t}$. Portanto, certa precaução deve ser levada em conta no tratamento das condições de acoplamento.

Lembre que todo o processo de construção do modelo é feito começando da formulação variacional (3.2.6) do Problema 3.2. As considerações e hipóteses que devem ser levadas em conta até aqui são as seguintes: incompressibilidade do fluido e introdução das hipóteses (3.4.5) e das definições da seção anterior.

Uma hipótese adicional é adotada na formulação variacional original: a potência exercida pelo par velocidade–tração sobre o contorno lateral da casca Γ_L^t é desconsiderada. Assim, tendo em conta as decomposições apresentadas na seção anterior, e com a ajuda de uma descrição em coordenadas convectadas, não é difícil alcançar, a partir de (3.2.6), o seguinte problema:

Problema 3.8. Para cada $t \in (0, T)$ encontre $((\mathbf{v}_{st}^o, \boldsymbol{\alpha}_{st}, v_{sn}, \mathbf{v}_f), p_f, (\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P} \times$

Λ tal que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_f^t} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} \\
& \quad - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma - \int_{\Omega_f^t} \hat{p}_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f d\mathbf{x} \\
& \quad + \int_{\Sigma_o^t} \left[\rho_s \left(H_{\xi^0} \frac{\partial \mathbf{v}_{st}^o}{\partial t} + H_{\xi^1} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{st}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \rho_s \left(H_{\xi^1} \frac{\partial \mathbf{v}_{st}^o}{\partial t} + H_{\xi^2} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{st}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} \right. \\
& \quad \quad \left. + \rho_s H_{\xi^0} \frac{\partial v_{sn}}{\partial t} \hat{v}_{sn} + \mathbf{N}_t \cdot (\boldsymbol{\Pi}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \hat{v}_{sn} \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) + \mathbf{M}_t \cdot \boldsymbol{\Pi}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} \right. \\
& \quad \left. + \mathbf{Q}_t \cdot (\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} - (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \nabla_{\mathbf{x}_o} \hat{v}_{sn}) - \rho_s \mathbf{f}_t^g \cdot \hat{\mathbf{v}}_{st}^o - \rho_s \mathbf{m}_t^g \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} - \rho_s f_n^g \hat{v}_{sn} \right] d\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\Sigma_o^t} \hat{\boldsymbol{\lambda}}^+ \cdot \left(\mathbf{v}_{st}^o + \frac{h}{2} \boldsymbol{\alpha}_{st} + v_{sn} \mathbf{n} - \mathbf{v}_f^+ \right) \det \boldsymbol{\Upsilon}^+ d\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\Sigma_o^t} \hat{\boldsymbol{\lambda}}^- \cdot \left(\mathbf{v}_{st}^o - \frac{h}{2} \boldsymbol{\alpha}_{st} + v_{sn} \mathbf{n} - \mathbf{v}_f^- \right) \det \boldsymbol{\Upsilon}^- d\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\Sigma_o^t} \boldsymbol{\lambda}^+ \cdot \left(\hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \frac{h}{2} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} + \hat{v}_{sn} \mathbf{n} - \hat{\mathbf{v}}_f^+ \right) \det \boldsymbol{\Upsilon}^+ d\Sigma_o \\
& \quad + \int_{\Sigma_o^t} \boldsymbol{\lambda}^- \cdot \left(\hat{\mathbf{v}}_{st}^o - \frac{h}{2} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} + \hat{v}_{sn} \mathbf{n} - \hat{\mathbf{v}}_f^- \right) \det \boldsymbol{\Upsilon}^- d\Sigma_o = 0 \\
& \quad \forall ((\hat{\mathbf{v}}_{st}^o, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st}, \hat{v}_{sn}, \hat{\mathbf{v}}_f), \hat{p}_f, (\hat{\boldsymbol{\lambda}}^+, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^-)) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \Lambda, \quad (3.4.12)
\end{aligned}$$

onde $H_{\xi^i} = \int_H \xi^i \det \boldsymbol{\Upsilon} d\xi$ e $\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{I} + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}$ segundo o visto na seção anterior, e onde \mathbf{v}_f^\pm representa a velocidade do fluido sobre Σ_\pm^t , descrita como um campo definido sobre Σ_o^t . Além do mais

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{(\mathbf{v}_{st}^o, \boldsymbol{\alpha}_{st}, v_{sn}, \mathbf{v}_f) \in \mathbf{H}^1(\Sigma_o^t) \times \mathbf{H}^1(\Sigma_o^t) \times H^1(\Sigma_o^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega_f^t); \\
& \quad (\mathbf{v}_{st}^o, \boldsymbol{\alpha}_{st}, v_{sn}, \mathbf{v}_f)|_{\Gamma_D} = (\bar{\mathbf{v}}_{st}^o, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{st}, \bar{v}_{sn}, \bar{\mathbf{v}}_f)\}, \\
\mathcal{P} &= L^2(\Omega_f^t), \\
\Lambda &= \mathbf{H}^{-1/2}(\Sigma_o^t) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Sigma_o^t).
\end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Como sempre, \mathcal{V} é o espaço obtido por diferença de elementos do conjunto \mathcal{U} .

Na formulação (3.4.12) somente as hipóteses da casca foram incorporadas e, como dito antes, a potência virtual sobre Γ_L^t foi desconsiderada. Agora se está em condições de introduzir a última hipótese na formulação: a primeira integral e a terceira integral em (3.4.12) são substituídas por integrais definidas sobre $\Omega \setminus \Sigma_o^t$. Logo, chega-se ao seguinte problema variacional:

Problema 3.9. Para cada $t \in (0, T)$ encontre $((\mathbf{v}_{st}^o, \boldsymbol{\alpha}_{st}, v_{sn}, \mathbf{v}_f), p_f, (\boldsymbol{\lambda}^+, \boldsymbol{\lambda}^-)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P} \times$

Λ tal que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega \setminus \Sigma_o^t} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] dx \\
& \quad - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma - \int_{\Omega \setminus \Sigma_o^t} \hat{p}_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f dx \\
& + \int_{\Sigma_o^t} \left[\rho_s \left(H_{\xi^0} \frac{\partial \mathbf{v}_{st}^o}{\partial t} + H_{\xi^1} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{st}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \rho_s \left(H_{\xi^1} \frac{\partial \mathbf{v}_{st}^o}{\partial t} + H_{\xi^2} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{st}}{\partial t} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} \right. \\
& \quad + \rho_s H_{\xi^0} \frac{\partial v_{sn}}{\partial t} \hat{v}_{sn} + \mathbf{N}_t \cdot (\boldsymbol{\Pi}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \hat{v}_{sn} \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) + \mathbf{M}_t \cdot \boldsymbol{\Pi}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} \\
& \left. + \mathbf{Q}_t \cdot (\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} - (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \nabla_{\mathbf{x}_o} \hat{v}_{sn}) - \rho_s \mathbf{f}_t^g \cdot \hat{\mathbf{v}}_{st}^o - \rho_s \mathbf{m}_t^g \cdot \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} - \rho_s f_n^g \hat{v}_{sn} \right] d\Sigma_o \\
& + \int_{\Sigma_o^t} \hat{\boldsymbol{\lambda}}^+ \cdot \left(\mathbf{v}_{st}^o + \frac{h}{2} \boldsymbol{\alpha}_{st} + v_{sn} \mathbf{n} - \mathbf{v}_f^+ \right) \det \boldsymbol{\Upsilon}^+ d\Sigma_o \\
& + \int_{\Sigma_o^t} \hat{\boldsymbol{\lambda}}^- \cdot \left(\mathbf{v}_{st}^o - \frac{h}{2} \boldsymbol{\alpha}_{st} + v_{sn} \mathbf{n} - \mathbf{v}_f^- \right) \det \boldsymbol{\Upsilon}^- d\Sigma_o \\
& + \int_{\Sigma_o^t} \boldsymbol{\lambda}^+ \cdot \left(\hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \frac{h}{2} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} + \hat{v}_{sn} \mathbf{n} - \hat{\mathbf{v}}_f^+ \right) \det \boldsymbol{\Upsilon}^+ d\Sigma_o \\
& + \int_{\Sigma_o^t} \boldsymbol{\lambda}^- \cdot \left(\hat{\mathbf{v}}_{st}^o - \frac{h}{2} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st} + \hat{v}_{sn} \mathbf{n} - \hat{\mathbf{v}}_f^- \right) \det \boldsymbol{\Upsilon}^- d\Sigma_o = 0 \\
& \quad \forall ((\hat{\mathbf{v}}_{st}^o, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{st}, \hat{v}_{sn}, \hat{\mathbf{v}}_f), \hat{p}_f, (\hat{\boldsymbol{\lambda}}^+, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^-)) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \Lambda, \quad (3.4.14)
\end{aligned}$$

onde agora os conjuntos \mathcal{U} e \mathcal{P} mudam, sendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{(\mathbf{v}_{st}^o, \boldsymbol{\alpha}_{st}, v_{sn}, \mathbf{v}_f) \in \mathbf{H}^1(\Sigma_o^t) \times \mathbf{H}^1(\Sigma_o^t) \times H^1(\Sigma_o^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \Sigma_o^t); \\
& \quad (\mathbf{v}_{st}^o, \boldsymbol{\alpha}_{st}, v_{sn}, \mathbf{v}_f)|_{\Gamma_D} = (\bar{\mathbf{v}}_{st}^o, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{st}, \bar{v}_{sn}, \bar{\mathbf{v}}_f)\}, \\
\mathcal{P} &= L^2(\Omega \setminus \Sigma_o^t), \\
\Lambda &= \mathbf{H}^{-1/2}(\Sigma_o^t) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Sigma_o^t),
\end{aligned} \quad (3.4.15)$$

e, como usual, o espaço \mathcal{V} é descrito por elementos que são dados como diferença entre elementos de \mathcal{U} .

Em primeiro lugar, note que, apesar do problema do fluido ter sido estendido sobre todo o domínio, a descontinuidade no campo de velocidade aparece sobre Σ_o^t como resultado da presença da casca com as hipóteses (3.4.5). Assim, o campo de velocidade não pertence a $\mathbf{H}^1(\Omega)$, e já não é possível afirmar que $\mathbf{v}_f^+ = \mathbf{v}_f^-$ (do que se segue $\hat{\mathbf{v}}_f^+ \neq \hat{\mathbf{v}}_f^-$). O fato importante a ser frisado é que para o problema do fluido existe só uma superfície imersa, que é Σ_o^t , onde o salto no campo de velocidade ocorre. Por outro lado, o acoplamento entre o fluido e a estrutura é dado de forma distribuída sobre Σ_o^t por meio dos carregamentos $\boldsymbol{\lambda}^\pm$.

Logo, as equações de Euler–Lagrange do Problema 3.9 são as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} & \text{em } \Omega \setminus \Sigma_o^t, \\
 \rho_s \left(H_{\xi^0} \frac{\partial \mathbf{v}_{st}^o}{\partial t} + H_{\xi^1} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{st}}{\partial t} \right) - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{N}_t - (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{Q}_t = \\
 \rho_s \mathbf{f}_t^g - (\boldsymbol{\lambda}_t^+ + \boldsymbol{\lambda}_t^-) & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\
 \rho_s \left(H_{\xi^1} \frac{\partial \mathbf{v}_{st}^o}{\partial t} + H_{\xi^2} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_{st}}{\partial t} \right) - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{M}_t + \mathbf{Q}_t = \\
 \rho_s \mathbf{m}_t^g - (\boldsymbol{\nu}_t^+ + \boldsymbol{\nu}_t^-) & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\
 \rho_s H_{\xi^0} \frac{\partial v_{sn}}{\partial t} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{Q}_t + \mathbf{N}_t \cdot \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n} = \\
 \rho_s f_n^g - (\lambda_n^+ + \lambda_n^-) & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\
 \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0 & \text{em } \Omega \setminus \Sigma_o^t, \\
 (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_f & \text{sobre } \Gamma_{fN}, \\
 \mathbf{v}_f^+ = \mathbf{v}_{st}^o + \frac{h}{2} \boldsymbol{\alpha}_{st} + v_{sn} \mathbf{n} & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\
 \mathbf{v}_f^- = \mathbf{v}_{st}^o - \frac{h}{2} \boldsymbol{\alpha}_{st} + v_{sn} \mathbf{n} & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\
 (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD})^+ (-\mathbf{n}) = \boldsymbol{\lambda}^+ \det \boldsymbol{\Upsilon}^+ & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\
 (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD})^- \mathbf{n} = \boldsymbol{\lambda}^- \det \boldsymbol{\Upsilon}^- & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\
 \mathbf{N}_t \mathbf{n}_o = 0 & \text{sobre } \partial \Sigma_{oN}, \\
 \mathbf{M}_t \mathbf{n}_o = 0 & \text{sobre } \partial \Sigma_{oN}, \\
 \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_o = 0 & \text{sobre } \partial \Sigma_{oN},
 \end{array} \right. \quad (3.4.16)$$

onde as seguintes definições foram empregadas

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\lambda}_t^\pm &= \boldsymbol{\Pi}_t \boldsymbol{\lambda}^\pm \det \boldsymbol{\Upsilon}^\pm, \\
 \boldsymbol{\nu}_t^\pm &= \pm \boldsymbol{\Pi}_t \boldsymbol{\lambda}^\pm \frac{h}{2} \det \boldsymbol{\Upsilon}^\pm, \\
 \lambda_n^\pm &= \boldsymbol{\lambda}^\pm \cdot \mathbf{n} \det \boldsymbol{\Upsilon}^\pm.
 \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Pode-se ver, das últimas três equações de (3.4.16), que o presente problema conduz a um modelo de casca que não se encontra carregado pela tração do fluido sobre o contorno lateral $\partial \Sigma_{oN}$ cujo vetor normal externo é \mathbf{n}_o . A razão para isto é que, para o fluido, este contorno é inexistente de acordo com a hipótese utilizada ao formular o Problema 3.9. Agora manipulam-se as equações em (3.4.16) de forma a caracterizar o carregamento distribuído que ocorre sobre a casca assim como também o salto na velocidade do fluido. Por um lado, subtraindo a (3.4.16)₈ da (3.4.16)₇ obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \boldsymbol{\Pi}_t \llbracket \mathbf{v}_f \rrbracket = h \boldsymbol{\alpha}_{st} & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\
 \llbracket \mathbf{v}_f \rrbracket \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sobre } \Sigma_o^t,
 \end{array} \right. \quad (3.4.18)$$

e uma descontinuidade na componente tangencial do campo de velocidade emerge como consequência da velocidade angular das fibras da casca que são ortogonais à superfície média Σ_o^t . Aqui é $\llbracket \cdot \rrbracket = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$. Por outro lado, introduzindo as expressões (3.4.17) junto com as (3.4.16)₉ e (3.4.16)₁₀ no equilíbrio da casca dado pelas (3.4.16)₂–(3.4.16)₄

plexidade considerável na sua implementação. Contudo, tê-lo construído é de grande importância do ponto de vista teórico pelo seguinte: (i) todas as hipóteses na derivação dos métodos de contornos imersos estão claramente expressas e caem dentro da teoria clássica, e (ii) é muito mais direto construir modelos mais simples, como o método de contornos imersos clássico, segundo será visto a seguir.

3.4.3 Em busca do método de contornos imersos

Nesta seção os métodos clássicos de contornos imersos são contextualizados dentro do marco desenvolvido na seção anterior. Isto será feito mediante a adição de hipóteses adicionais.

Na grande maioria dos trabalhos na área, o método de contornos imersos é formulado assumindo que os fenômenos gravitatórios são desprezíveis e que a velocidade do fluido é contínua através da superfície imersa. A fim de reproduzir tais condições, considera-se no Problema 3.9 que $\mathbf{g} = 0$ de forma a eliminar os efeitos da gravidade e ainda $\boldsymbol{\alpha}_{st} = 0$. Com esta última consideração, elimina-se a velocidade angular da formulação, a qual originalmente dava lugar à descontinuidade da velocidade. Por sua vez, os fenômenos de flexão passam a ter natureza reativa, não estando presentes no balanço de potências. Conseqüentemente já não é necessário distinguir entre $\boldsymbol{\lambda}^+$ e $\boldsymbol{\lambda}^-$, sendo agora simplesmente denotado por $\boldsymbol{\lambda}$. Logo resulta o seguinte problema simplificado:

Problema 3.10. *Para cada $t \in (0, T)$ encontre $((\mathbf{v}_{st}^o, v_{sn}, \mathbf{v}_f), p_f, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Lambda}$ tal que*

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma - \int_{\Omega} \hat{p}_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f d\mathbf{x} + \int_{\Sigma_o^t} \left[\rho_s H_{\xi^0} \frac{\partial \mathbf{v}_{st}^o}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \rho_s H_{\xi^0} \frac{\partial v_{sn}}{\partial t} \hat{v}_{sn} \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{N}_t \cdot (\mathbf{H}_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \hat{v}_{sn} \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) + \mathbf{Q}_t \cdot (-(\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \nabla_{\mathbf{x}_o} \hat{v}_{sn}) \right] d\Sigma_o \\ & + \int_{\Sigma_o^t} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot (\mathbf{v}_{st}^o + v_{sn} \mathbf{n} - \mathbf{v}_f) d\Sigma_o + \int_{\Sigma_o^t} \boldsymbol{\lambda} \cdot (\hat{\mathbf{v}}_{st}^o + \hat{v}_{sn} \mathbf{n} - \hat{\mathbf{v}}_f) d\Sigma_o = 0 \\ & \quad \forall ((\hat{\mathbf{v}}_{st}^o, \hat{v}_{sn}, \hat{\mathbf{v}}_f), \hat{p}_f, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \boldsymbol{\Lambda}, \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(\mathbf{v}_{st}^o, v_{sn}, \mathbf{v}_f) \in \mathbf{H}^1(\Sigma_o^t) \times H^1(\Sigma_o^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega); \\ & \quad (\mathbf{v}_{st}^o, v_{sn}, \mathbf{v}_f)|_{\Gamma_D} = (\bar{\mathbf{v}}_{st}^o, \bar{v}_{sn}, \bar{\mathbf{v}}_f)\}, \\ \mathcal{P} &= L^2(\Omega), \\ \boldsymbol{\Lambda} &= \mathbf{H}^{-1/2}(\Sigma_o^t), \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

enquanto que \mathcal{V} é o espaço obtido por diferença de elementos de \mathcal{U} .

Observe que com as hipóteses adicionais aqui incorporadas foi possível escrever a integral no problema do escoamento sobre Ω em lugar de $\Omega \setminus \Sigma_o^t$, ao mesmo tempo que recuperar o problema do escoamento no sentido clássico de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. As equações de Euler–Lagrange para este problema são obtidas exatamente da mesma forma que antes e

estão dadas a seguir

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f \frac{D\mathbf{v}_f}{Dt} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{fD} + \nabla p_f = \rho_f \mathbf{g} & \text{em } \Omega, \\ \rho_s H_{\xi^0} \frac{\partial \mathbf{v}_{st}^o}{\partial t} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{N}_t - (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{Q}_t = -\boldsymbol{\lambda}_t & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\ \rho_s H_{\xi^0} \frac{\partial v_{sn}}{\partial t} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{Q}_t + \mathbf{N}_t \cdot \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n} = -\lambda_n & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0 & \text{em } \Omega, \\ (-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}) \mathbf{n}_f = \bar{\mathbf{t}}_f & \text{sobre } \Gamma_{fN}, \\ \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{st}^o + v_{sn} \mathbf{n} & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\ -[-p_f \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}_{fD}] \mathbf{n} = \boldsymbol{\lambda} & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\ \mathbf{N}_t \mathbf{n}_o = 0 & \text{sobre } \partial \Sigma_{oN}, \\ \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_o = 0 & \text{sobre } \partial \Sigma_{oN}, \end{array} \right. \quad (3.4.23)$$

com $\boldsymbol{\lambda}_t = \mathbf{\Pi}_t \boldsymbol{\lambda}$ e $\lambda_n = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}$. Como dito acima, neste problema a continuidade do campo de velocidade é recuperada

$$[[\mathbf{v}_f]] = 0 \quad \text{sobre } \Sigma_o^t, \quad (3.4.24)$$

e então é possível caracterizar de forma direta o salto da tração no fluido sobre a superfície imersa como segue

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_s H_{\xi^0} \frac{\partial \mathbf{v}_{st}^o}{\partial t} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{N}_t - (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{Q}_t = \mathbf{\Pi}_t [[\boldsymbol{\sigma}_{fD}]] \mathbf{n} & \text{sobre } \Sigma_o^t, \\ \rho_s H_{\xi^0} \frac{\partial v_{sn}}{\partial t} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{Q}_t + \mathbf{N}_t \cdot \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n} = [[-p_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]] & \text{sobre } \Sigma_o^t. \end{array} \right. \quad (3.4.25)$$

Veja que o salto na tração do fluido é dado de forma explícita como função dos esforços generalizados definidos na casca imersa.

Para poder escrever este problema em uma forma mais próxima a como se faz na literatura da área, isto é transformar a tração na fronteira Σ_o^t em uma força de volume atuando em todo o domínio do fluido, é preciso introduzir a distribuição Delta da mesma forma em que se realiza na maioria dos trabalhos que lidam com este problema [57, 133, 139]. Suponha que a regularidade do escoamento é tal que está permitido proceder como segue

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_o^t} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_o, t) \cdot \hat{\mathbf{v}}_f(\mathbf{x}_o, t) d\Sigma_o &= \int_{\Sigma_o^t} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_o, t) \cdot \left(\int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}}_f(\mathbf{x}, t) \delta^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) d\mathbf{x} \right) d\Sigma_o = \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Sigma_o^t} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_o, t) \cdot \hat{\mathbf{v}}_f(\mathbf{x}, t) \delta^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) d\Sigma_o d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Sigma_o^t} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_o, t) \delta^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) d\Sigma_o \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}_{\delta}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{v}}_f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

onde é necessário assumir que a inversão na ordem de integração é possível. Então, esta expressão é substituída no Problema 3.10 e chega-se à formulação variacional em cujas equações de Euler-Lagrange do problema do escoamento há uma força de volume $\boldsymbol{\lambda}_{\delta}$ que, em função dos esforços generalizados da casca, é igual a

$$\boldsymbol{\lambda}_{\delta} = \int_{\Sigma_o^t} [\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{N}_t + (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{Q}_t + (\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{Q}_t) \mathbf{n} - (\mathbf{N}_t \cdot \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n})] \delta^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) d\Sigma_o. \quad (3.4.27)$$

Esta é a expressão correspondente à força de volume comumente encontrada nas formulações clássicas do método de contornos imersos. Usualmente esta força é fornecida de forma direta por uma relação constitutiva [133, 139] sem fazer nenhuma referência à sua natureza e/ou forma de derivação. Com o modelo aqui proposto, a mesma foi obtida a partir do problema acoplado, e sua forma depende explicitamente dos esforços generalizados definidos no modelo de casca.

Assim sendo, uma das principais contribuições desta parte do capítulo foi fornecer a caracterização da força de volume que surge nos métodos de contornos imersos, a partir do contexto variacional contínuo, como uma função explícita dos esforços generalizados encontrados na teoria de cascas com as hipóteses cinemáticas aqui empregadas. Outra conclusão importante é que nem sempre é possível escrever o problema do fluido como função de uma força distribuída no volume do problema de fluido. Com efeito, a situação mais geral (ver Problema 3.9) não poderia ter sido colocada neste contexto pois o campo de velocidade sofre uma descontinuidade devido à velocidade angular da casca. Como corolário, devido a que os esforços de flexão estão associados de forma conjugada a esta velocidade angular, pode-se inferir que todas as teorias relacionadas aos métodos de contornos imersos não permitem que ocorra esta classe de fenômenos na estrutura.

3.5 Comentários finais

Ao longo deste capítulo, em especial na Seção 3.3, foram vistos os caminhos que conduzem aos métodos de domínios imersos para colocar o problema de interação fluido-sólido. Viu-se que o conceito estava apoiado basicamente em mudar a forma como se escreve a continuidade do campo de velocidade na fronteira Γ_{fs}^t , passando da (3.3.11) para a (3.3.12). Em particular, o último produto de dualidade foi expresso por extenso como segue

$$\langle \boldsymbol{\psi}, (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s^t)} = \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\psi} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \, d\mathbf{x}, \quad (3.5.1)$$

onde $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t)$ é uma função vetorial. No entanto, esta é só uma forma de expressar o produto de dualidade $\mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s^t)$, e outras também são possíveis. Por exemplo, uma forma é fazer uso da identificação entre o espaço $\mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t)$ com o par $\mathbf{L}^2(\Omega_s^t) \times \mathbf{L}^2(\Omega_s^t)$, onde $\mathbf{L}^2(\Omega_s^t)$ é o espaço de campos tensoriais de segunda ordem de quadrado integrável, como segue

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\eta}, (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s^t)} = \\ \langle \boldsymbol{\phi}, (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_s^t) \times \mathbf{L}^2(\Omega_s^t)} + \langle \boldsymbol{\Phi}, (\nabla \mathbf{v}_s - \nabla \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_s^t) \times \mathbf{L}^2(\Omega_s^t)} = \\ \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\Phi} \cdot (\nabla \mathbf{v}_s - \nabla \mathbf{v}_f) \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

onde aqui o elemento $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t)$ identifica-se com o elemento $(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\Phi}) \in \mathbf{L}^2(\Omega_s^t) \times \mathbf{L}^2(\Omega_s^t)$, onde $\boldsymbol{\phi}$ é uma função vetorial e $\boldsymbol{\Phi}$ é uma função tensorial. Pode-se, como caso particular, tomar $\boldsymbol{\Phi} = \nabla \boldsymbol{\phi}$, resultando

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\eta}, (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s^t)} = \\ \langle \boldsymbol{\phi}, (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_s^t) \times \mathbf{L}^2(\Omega_s^t)} + \langle \nabla \boldsymbol{\phi}, (\nabla \mathbf{v}_s - \nabla \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_s^t) \times \mathbf{L}^2(\Omega_s^t)} = \\ \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \nabla \boldsymbol{\phi} \cdot (\nabla \mathbf{v}_s - \nabla \mathbf{v}_f) \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

sendo que aqui o elemento $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t)$ identifica-se com $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}^1(\Omega_s^t)$. Outra forma pode ser dada eliminando a primeira integral do lado direito da (3.5.2), ou seja

$$\langle \boldsymbol{\eta}, (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s^t)} = \langle \boldsymbol{\Phi}, (\nabla \mathbf{v}_s - \nabla \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_s^t) \times \mathbf{L}^2(\Omega_s^t)} = \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\Phi} \cdot (\nabla \mathbf{v}_s - \nabla \mathbf{v}_f) \, d\mathbf{x}, \quad (3.5.4)$$

porém, esta forma assegura que $\nabla \mathbf{v}_s = \nabla \mathbf{v}_f$ em $\mathbf{L}^2(\Omega_s^t)$. Para assegurar a igualdade $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f$ em $\mathbf{H}^1(\Omega_s^t)$ devem-se eliminar os movimentos de corpo rígidos, para o qual em alguma porção do domínio Ω_s^t deve-se fazer $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f$. Uma outra forma alternativa, e menos natural, é aproveitar o fato de que uma função está em $\mathbf{H}^1(\Omega_s^t)$ desde que o seu divergente esteja em $L^2(\Omega_s^t)$ e o seu rotacional esteja em $\mathbf{L}^2(\Omega_s^t)$ (ver [50]). Assim sendo pode-se escrever

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\eta}, (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s^t)} &= \langle \boldsymbol{\phi}, (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_s^t) \times \mathbf{L}^2(\Omega_s^t)} \\ &+ \langle \varsigma, (\operatorname{div} \mathbf{v}_s - \operatorname{div} \mathbf{v}_f) \rangle_{L^2(\Omega_s^t) \times L^2(\Omega_s^t)} + \langle \boldsymbol{\varrho}, (\operatorname{curl} \mathbf{v}_s - \operatorname{curl} \mathbf{v}_f) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega_s^t) \times \mathbf{L}^2(\Omega_s^t)} = \\ &\int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \varsigma (\operatorname{div} \mathbf{v}_s - \operatorname{div} \mathbf{v}_f) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^t} \boldsymbol{\varrho} \cdot (\operatorname{curl} \mathbf{v}_s - \operatorname{curl} \mathbf{v}_f) \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

onde aqui o elemento $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t)$ identifica-se com a tripla $(\boldsymbol{\phi}, \varsigma, \boldsymbol{\varrho}) \in \mathbf{L}^2(\Omega_s^t) \times L^2(\Omega_s^t) \times \mathbf{L}^2(\Omega_s^t)$. Além disso, o mesmo comentário que levou da (3.5.2) à (3.5.4) segue valendo neste caso, com respeito a eliminar o termo associado a $\boldsymbol{\phi}$. Vale a pena comentar que a (3.5.5) é equivalente à (3.5.1) desde que o contorno $\Gamma_{f_s}^t$ seja suficientemente regular.

Veja que estas variações do produto de dualidade $\mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t) \times \mathbf{H}^1(\Omega_s^t)$ levam a equações de Euler–Lagrange levemente diferentes onde o significado do multiplicador de Lagrange muda. Por outro lado, embora as implicações de variar estes termos no problema contínuo sejam exatamente as mesmas, no problema discreto aproximado esta equivalência é perdida e algumas diferenças podem ser observadas.

Contribuições do capítulo

Diversos pontos dentro deste capítulo identificam-se como contribuições desta tese. Por ordem de aparição, a formulação variacional do Problema 3.3 da Seção 3.2.2 é uma abordagem que, ao empregar idéias novas como as apresentadas no Capítulo 1, não fora colocada na literatura, e portanto considera-se uma contribuição. Passando aos métodos que usam imersão de domínios, o método de domínios imersos desenvolvido na Seção 3.3.2 através do Problema 3.6 é uma das contribuições mais importantes deste capítulo, posto que generaliza os métodos de elementos finitos imersos e do contínuo imerso. A outra contribuição importante é dada na Seção 3.4.2. Ali a formulação do método de cascas imersas por meio do Problema 3.9 permite dar uma generalização acabada da teoria por trás dos métodos de contornos imersos, pondo em evidência a existência de uma descontinuidade no campo de velocidade do fluido, aspecto que na literatura é desconsiderado ou inclusive tratado de forma errônea. Por enquanto, a produção decorrente do trabalho deste capítulo é a base das publicações [17, 19], as quais são repetidas aqui por conveniência:

- P.J. Blanco, R.A. Feijóo e E.A. Dari, *A variational framework for solving fluid–solid interaction problems based on immersed domains. Theoretical bases*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (197) 2353–2371, 2008.
- P.J. Blanco, E.A. Dari e R.A. Feijóo, *A variational approach for fluid–solid interaction problems using immersed domains*, Anais do WCCM 2008. Veneza, Itália, 2008.

Capítulo 4

Implementação computacional do método de domínios imersos

Introdução

Na introdução do capítulo anterior foi descrito, de forma breve, o desenvolvimento e avanços de técnicas como o método de domínios fictícios, o método dos elementos finitos imersos, o método do contínuo imerso e a generalização destes, proposta ao longo do Capítulo 3 e que foi denominada método de domínios imersos, focando a descrição nos aspectos teóricos de cada um deles. Do ponto de vista da implementação computacional, a aproximação numérica dos métodos de domínios fictícios tem sido também um tema de forte pesquisa desde os inícios da sua existência. Para as técnicas mais recentes a mesma constitui ainda um tema de estudo. Um dos pontos mais relevantes que caracterizam cada uma das versões discretas das metodologias propostas na literatura é a aproximação do multiplicador de Lagrange que realiza o acoplamento entre fluido e sólido, a menos do caso do método de elementos finitos imersos no qual não há multiplicador de Lagrange. Como será visto, este aspecto não é trivial pois pode levar a implementações computacionais complexas como resulta ao considerar o problema monolítico. A forma mais utilizada pelos pioneiros na área de métodos de domínios fictícios faz uso de técnicas de decomposição de operadores, somado a métodos de colocação para aproximar o multiplicador de Lagrange [52, 53, 54, 130]. Com respeito ao segundo ponto, o produto de dualidade que possui a função de forçar o acoplamento é substituído, em muitas ocasiões, por uma versão discreta que relembra aos métodos de colocação por pontos típicos no contexto de métodos de resíduos ponderados. Outras duas abordagens que também empregam decomposição de operadores são as usadas em [39, 160]. Ali, a diferença está nos espaços de aproximação escolhidos para o multiplicador de Lagrange. Enquanto que a primeira emprega uma aproximação baseada em funções base de elementos finitos de tipo Galerkin para o multiplicador de Lagrange, a segunda o elimina da formulação no nível do contínuo e logo depois também emprega elementos finitos na aproximação. O ponto em comum de todos estes trabalhos é que a linearização é levada a cabo mediante iterações sucessivas de tipo Picard, também chamadas substituições sucessivas. Entretanto, uma linearização consistente no estilo do método de Newton–Raphson é algo que deve ser cogitado como importante em qualquer sistema altamente não linear, sobretudo levando em consideração a possibilidade de segregar a resolução do sistema de equações em dois problemas: o do fluido e do sólido. Mudando para o contexto do método dos elementos finitos imersos, somente no trabalho [97] é apresentada uma linearização consistente dentro do esquema de Newton–Raphson através da obtenção do operador tangente. Tanto nesta metodologia como no método do contínuo imerso [163], o acoplamento entre fluido e sólido é realizado empregando métodos de partículas, similares aos desenvolvidos em [96, 162]. O

objetivo principal destes métodos de partículas é lidar com os termos associados à parte Lagrangiana da formulação e facilitar o tratamento do domínio variável do sólido dentro do domínio fixo do fluido. No entanto, este tratamento foge a uma implementação dentro de um código de elementos finitos.

O objetivo do capítulo é, em primeiro lugar, apresentar uma linearização consistente do método de domínios imersos desenvolvido no Capítulo 3 dentro de um esquema iterativo de Newton–Raphson, obtendo o operador tangente para o esquema incremental. Depois, com o problema linear formulado, discute-se o possível desacoplamento em dois sub-problemas: o do fluido e o do sólido, o que resulta de grande interesse no sentido de dispor de um método viável em termos de custo computacional e com baixa complexidade na implementação. Além disso, fornece-se uma possível aproximação numérica, avaliando os casos do fluido e do sólido separadamente. Tudo isto é feito para os casos de sólidos deformáveis e rígidos. Neste sentido, a maior complexidade por trás da implementação computacional do problema de domínios imersos jaz no fato de estar lidando ao mesmo tempo, ou seja no mesmo sistema de equações, com variáveis de natureza intrinsecamente Euleriana e Lagrangiana acopladas entre si. Isto implica, segundo a abordagem proposta via o método dos elementos finitos, a necessidade de empregar duas malhas, uma de caráter espacial (ou Euleriano) para o problema do fluido e uma de caráter material (ou Lagrangiano) para descrever os fenômenos associados ao sólido. Ver-se-á então que se precisa transferir informação entre as duas malhas, o que se traduz na interpolação das quantidades que estão definidas em uma malha sobre a outra. Em segundo lugar, o capítulo objetiva apresentar uma série de exemplos numéricos mostrando a potencialidade da metodologia desenvolvida ao modelar problemas cuja complexidade seria de considerável magnitude se empregados métodos clássicos. Como corolário, este capítulo representa um primeiro passo na direção de simular, dentro da modelagem do sistema cardiovascular humano por exemplo, o comportamento da válvula aórtica, o que constitui um problema de complexa abordagem tanto nos fenômenos físicos que ocorrem como na aproximação do problema (ver [63]). Neste sentido, apresenta-se um primeiro modelo simplificado de um mecanismo que visa simular uma dinâmica similar à da válvula aórtica.

O presente capítulo está organizado como segue. Na Seção 4.1 realiza-se de forma detalhada a linearização do problema de interação fluido–sólido deformável empregando o método de domínios imersos apresentado no capítulo anterior, enquanto que na Seção 4.2 o mesmo é feito para o problema de sólidos rígidos. Logo depois, na Seção 4.3 apresentam-se alguns casos particulares de fluido e sólido para os quais se especificam as leis constitutivas e as conseqüências das mesmas no problema linearizado geral. Na Seção 4.4 discute-se a aproximação numérica do problema no contexto do método dos elementos finitos para a interação entre um determinado fluido e um sólido, tanto rígido como deformável. Ao passar à Seção 4.5 mostra-se uma série de exemplos numéricos correspondentes ao problema de interação fluido–sólido rígido. A implementação computacional para sólidos deformáveis encontra-se ainda em desenvolvimento. Com relação aos exemplos numéricos apresentados nesta última seção, há duas classes. Por um lado, estão aqueles nos quais o escoamento está governado pelas condições de contorno, situação que é típica na modelagem da válvula aórtica assim como de outra grande classe de aplicações. Por outro lado, alguns exemplos focam a análise no estudo do escoamento produzido pela força boiante produto de diferença de massas específicas, em presença de gravidade, entre fluido e sólido. Este caso é mais característico na análise de sedimentação de partículas. O capítulo finaliza com alguns comentários na Seção 4.6.

A contribuição do presente capítulo está fortemente atrelada à do capítulo anterior. Os trabalhos decorrentes do material deste capítulo são [17, 19]. A linearização do problema de acoplamento entre um fluido e um sólido via o método de domínios imersos, tanto deformável como rígido, considera-se contribuição desta tese pois, uma vez que a

própria formulação é uma contribuição, também o é a sua linearização.

4.1 Linearização do problema fluido–sólido deformável

Nesta seção apresenta-se a linearização do Problema 3.6 desenvolvido na Seção 3.3 do Capítulo 3. Lembre-se que este modelo foi construído para simular a interação entre um fluido e um sólido de forma arbitrária que sofre deformações, ambos com características de compressibilidade/incompressibilidade arbitrárias e independentes entre si.

4.1.1 Descrições espacial e material

Primeiramente considere sem perda de generalidade que, quando necessário, parte da formulação é escrita em uma descrição material de referência (usualmente conhecida como descrição totalmente Lagrangiana). Assim, quando pertinente, as quantidades são referidas a uma configuração de referência Ω_s^0 . As coordenadas materiais que caracterizam esta configuração são \mathbf{X} , e o mapeamento $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ relaciona essas coordenadas com as coordenadas da configuração atual Ω_s^t . Logo é $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\chi} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}_s$ devido a que $\mathbf{u}_s(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$, com $\nabla_{\mathbf{X}}(\cdot)$ sendo o gradiente material do campo (\cdot) com respeito às coordenadas \mathbf{X} . Emprega-se a componente desviadora do tensor de Piola–Kirchhoff de segunda espécie \mathbf{S}_{sD} , sendo portanto $[\boldsymbol{\sigma}_{sD}]_m = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \mathbf{S}_{sD} \mathbf{F}^T$, onde $\mathbf{S}_{sD} = \mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s))$ com $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ sendo um dos tensores de deformação de Cauchy–Green, e $[\cdot]_m$ denotando a descrição material do campo espacial (\cdot) . A partir do Problema 3.6 as variáveis devem ser classificadas como sendo quantidades espaciais ou materiais, lembrando que as últimas podem estar descritas na configuração atual ou na de referência. Assim, as quantidades inerentemente definidas sobre o domínio do sólido Ω_s^t são Lagrangianas ou materiais, e aquelas definidas sobre o domínio completo Ω são Eulerianas ou espaciais.

Inicialmente mantém-se a notação genérica para descrever os comportamentos constitutivos do fluido e do sólido, isto é

$$\boldsymbol{\sigma}_{fD} = \boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)), \quad (4.1.1)$$

$$\mathbf{S}_{sD} = \mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s)). \quad (4.1.2)$$

Portanto, a equação de balanço para o fluido é expressa em termos de velocidades, enquanto que para o sólido a mesma é dada em termos do campo de deslocamentos \mathbf{u}_s . Após

estas considerações, o princípio variacional (3.3.20) é reescrito como segue

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f (\nabla \mathbf{v}_f) \mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} \\
& - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma - \int_{\Omega} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{1}{\kappa_f} \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \left(\frac{1}{\kappa_f} - \frac{1}{\kappa_s} \right) \left(\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega_s^0} \left[\left(\rho_s^0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} - \rho_f^0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \right]_m - \rho_f^0 [(\nabla \mathbf{v}_f)]_m [\mathbf{v}_f]_m \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\
& + (\mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s)) - \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} [\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))]_m \mathbf{F}^{-T}) \cdot \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& \left. - (p_s - [p_f]_m) \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) - (\rho_s^0 - \rho_f^0) \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{X} \\
& - \int_{\Omega_s^0} \hat{p}_s \left(\det \mathbf{F} - 1 + \frac{1}{\kappa_s^*} p_s \right) d\mathbf{X} \\
& + \int_{\Omega_s^0} \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} - [\mathbf{v}_f]_m \right) \det \mathbf{F} d\mathbf{X} + \int_{\Omega_s^0} \boldsymbol{\psi} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \det \mathbf{F} d\mathbf{X} - \int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\mathbf{x} = 0 \\
& \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s, \hat{p}_s, \hat{\boldsymbol{\psi}}) \in \mathcal{V}_f \times \mathcal{P}_f \times \mathcal{V}_s \times \mathcal{P}_s \times \boldsymbol{\Psi}, \quad (4.1.3)
\end{aligned}$$

onde ρ_s^0 e ρ_f^0 são os valores na configuração de referência de ρ_s e ρ_f , respectivamente, $\kappa_s^* = \frac{\kappa_s}{\det \mathbf{F}}$ é o módulo de compressibilidade como usualmente vindo da mecânica dos sólidos e $[\cdot]_m$ e $[\cdot]_e$ denotam as descrições material e espacial do campo (\cdot) . Aqui têm sido substituídos os espaços \mathcal{V} e \mathcal{P} do Problema 3.6 pelas formas explícitas $\mathcal{V} = \mathcal{V}_f \times \mathcal{V}_s$ e $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f \times \mathcal{P}_s$. Em função do dito anteriormente, a descrição em que as quantidades são consideradas no problema acima é a seguinte

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_f &= [\mathbf{v}_f]_e(\mathbf{x}, t) & \xrightarrow{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)} & & [\mathbf{v}_f]_m(\mathbf{X}, t), \\
p_f &= [p_f]_e(\mathbf{x}, t) & \xrightarrow{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)} & & [p_f]_m(\mathbf{X}, t), \\
\mathbf{u}_s &= [\mathbf{u}_s]_m(\mathbf{X}, t) & \xrightarrow{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)} & & [\mathbf{u}_s]_e(\mathbf{x}, t), \\
p_s &= [p_s]_m(\mathbf{X}, t) & \xrightarrow{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)} & & [p_s]_e(\mathbf{x}, t), \\
\boldsymbol{\psi} &= [\boldsymbol{\psi}]_m(\mathbf{X}, t) & \xrightarrow{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}, t)} & & [\boldsymbol{\psi}]_e(\mathbf{x}, t),
\end{aligned} \quad (4.1.4)$$

onde $\boldsymbol{\chi}^{-1}$ é o mapeamento inverso de $\boldsymbol{\chi}$ que existe para todo tempo t devido às hipóteses básicas da cinemática de corpos.

Um fato importante a ser salientado antes de apresentar a linearização do problema é a seguinte. As propriedades empregadas para caracterizar o fluido artificial são, a menos do módulo de compressibilidade, idênticas às do fluido real. Desta maneira, como será visto, a linearização é levada a cabo sobre o mínimo número de termos na equação do fluido. Caso contrário, cada um dos termos na mencionada equação de momento teria que ser manipulado de forma adequada, devido a que o domínio Ω_s^t , e portanto Ω_f^t , é desconhecido. Logo, a linearização proposta a seguir somente é válida neste caso.

4.1.2 Esquema monolítico

O problema variacional não linear (4.1.3) pode ser escrito, de forma equivalente, como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{G}((\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{u}_s, p_s, \boldsymbol{\psi}), (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s, \hat{p}_s, \hat{\boldsymbol{\psi}})) &= 0 \\ \forall (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s, \hat{p}_s, \hat{\boldsymbol{\psi}}) &\in \mathcal{V}_f \times \mathcal{P}_f \times \mathcal{V}_s \times \mathcal{P}_s \times \boldsymbol{\Psi}. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Em forma mais compacta, e agrupando as incógnitas como $\mathbf{U} = (\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{u}_s, p_s, \boldsymbol{\psi})$, resulta

$$\mathcal{G}(\mathbf{U}, \hat{\mathbf{U}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{U}} \in \boldsymbol{\Xi}, \quad (4.1.6)$$

onde $\boldsymbol{\Xi} = \mathcal{V}_f \times \mathcal{P}_f \times \mathcal{V}_s \times \mathcal{P}_s \times \boldsymbol{\Psi}$, sendo portanto uma equação não linear em \mathbf{U} , entretanto linear no argumento $\hat{\mathbf{U}}$.

A linearização do problema variacional (4.1.6) dentro do contexto de um esquema de Newton–Raphson em torno de um dado ponto $(\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{u}_s, p_s, \boldsymbol{\psi})$ consiste em encontrar o incremento na solução $(\delta \mathbf{v}_f, \delta p_f, \delta \mathbf{u}_s, \delta p_s, \delta \boldsymbol{\psi})$ tal que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}((\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{u}_s, p_s, \boldsymbol{\psi}))[(\delta \mathbf{v}_f, \delta p_f, \delta \mathbf{u}_s, \delta p_s, \delta \boldsymbol{\psi})], (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s, \hat{p}_s, \hat{\boldsymbol{\psi}}) \rangle = \\ - \mathcal{G}((\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{u}_s, p_s, \boldsymbol{\psi}), (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s, \hat{p}_s, \hat{\boldsymbol{\psi}})) \\ \forall (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s, \hat{p}_s, \hat{\boldsymbol{\psi}}) \in \mathcal{V}_f \times \mathcal{P}_f \times \mathcal{V}_s \times \mathcal{P}_s \times \boldsymbol{\Psi}, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

onde $\mathcal{D}\mathcal{G}((\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{u}_s, p_s, \boldsymbol{\psi}))$ é usado para denotar o operador tangente consistente associado a \mathcal{G} no ponto $(\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{u}_s, p_s, \boldsymbol{\psi})$, o qual é obtido por diferenciação clássica. Usando a notação compacta, o operador tangente define-se como

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta \mathbf{U}], \hat{\mathbf{U}} \rangle = \left. \frac{d}{d\varsigma} \mathcal{G}(\mathbf{U} + \varsigma \delta \mathbf{U}, \hat{\mathbf{U}}) \right|_{\varsigma=0}. \quad (4.1.8)$$

Portanto, a equação variacional linear (4.1.7) pode ser escrita como

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta \mathbf{U}] - \mathbf{f}, \hat{\mathbf{U}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{U}} \in \boldsymbol{\Xi}, \quad (4.1.9)$$

onde pode ser identificada cada componente do operador tangente $\mathcal{D}\mathcal{G}_{XY}(\mathbf{U})$, ou simplesmente $\mathcal{D}\mathcal{G}_{XY}$, que realiza o acoplamento da incógnita Y dentro da equação correspondente a X , enquanto que $\langle \mathbf{f}, \hat{\mathbf{U}} \rangle = -\mathcal{G}(\mathbf{U}, \hat{\mathbf{U}})$.

Antes de efetuar a linearização lembre alguns conceitos preliminares vindos da teoria da mecânica do contínuo. A seguir $(\cdot)_\varsigma$ indica a perturbação da quantidade (\cdot) na direção do incremento $\delta \mathbf{u}_s$. Em particular, $\mathbf{F}_\varsigma = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_s + \varsigma \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s = \mathbf{F} + \varsigma \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s$. As seguintes identidades serão úteis no processo de linearização

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \left. \frac{d}{d\varsigma} \mathbf{F}_\varsigma \right|_{\varsigma=0} = \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s, \\ (\mathbf{F}^{-1})^\cdot &= \left. \frac{d}{d\varsigma} \mathbf{F}_\varsigma^{-1} \right|_{\varsigma=0} = -\mathbf{F}^{-1} \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s \mathbf{F}^{-1}, \\ (\det \mathbf{F})^\cdot &= \left. \frac{d}{d\varsigma} \det \mathbf{F}_\varsigma \right|_{\varsigma=0} = \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s), \\ \dot{p} &= \left. \frac{d}{d\varsigma} p_\varsigma \right|_{\varsigma=0} = \nabla p \cdot [\delta \mathbf{u}_s]_e, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \left. \frac{d}{d\varsigma} \mathbf{v}_\varsigma \right|_{\varsigma=0} = (\nabla \mathbf{v}) [\delta \mathbf{u}_s]_e, \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

onde p e \mathbf{v} são duas quantidades espaciais (ou Eulerianas), escalar e vetorial respectivamente, definidas sobre Ω . Uma menção especial deve ser feita sobre como reagemo tais quantidades ao perturbar o domínio Ω_s^t através da perturbação no deslocamento $\delta \mathbf{u}_s$. Isto leva a expressões como as vistas em (4.1.10)₄ e (4.1.10)₅. Certo cuidado deve ser tomado em consideração ali já que a operação correta a ser realizada é, explicitando a dependência funcional, a que se detalha a seguir. Veja que as perturbações são $p_\varsigma = p(\mathbf{x}_\varsigma) = p(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \varsigma \delta \mathbf{u}_s(\mathbf{X}, t), t)$ e portanto

$$\left. \frac{d}{d\varsigma} p_\varsigma \right|_{\varsigma=0} = \left. \frac{d}{d\varsigma} p(\mathbf{x}_\varsigma) \right|_{\varsigma=0} = \left. \frac{d}{d\varsigma} p(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \varsigma \delta \mathbf{u}_s(\mathbf{X}, t), t) \right|_{\varsigma=0} = \nabla p \cdot [\delta \mathbf{u}_s]_e. \quad (4.1.11)$$

Algo totalmente análogo é feito para uma quantidade vetorial.

Assim sendo, a linearização do problema (4.1.3) de acordo com a notação da (4.1.9) resulta, em relação ao lado direito da equação, no seguinte

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \hat{\mathbf{v}}_f \rangle = & \int_{\Omega} \left[-\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f (\nabla \mathbf{v}_f) \mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f - \boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) + p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f \right. \\ & \left. + \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{fN}} (\bar{\mathbf{t}}_f + \delta \bar{\mathbf{t}}_f) \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\Gamma + \int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f d\mathbf{x}, \quad (4.1.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \hat{p}_f \rangle = & \int_{\Omega} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{1}{\kappa_f} \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) d\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \left(\frac{1}{\kappa_f} - \frac{1}{\kappa_s} \right) \left(\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) d\mathbf{x}, \quad (4.1.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \hat{\mathbf{v}}_s \rangle = & \int_{\Omega_s^0} \left[\left(-\rho_s^0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + \rho_f^0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \right]_m + \rho_f^0 [(\nabla \mathbf{v}_f)]_m [\mathbf{v}_f]_m \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\ & \left. + (\rho_s^0 - \rho_f^0) \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s - \mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s)) \cdot \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s + \det \mathbf{F} [\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))]_m \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\ & \left. + (p_s - [p_f]_m) \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) - (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\psi} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{X}, \quad (4.1.14) \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{f}, \hat{p}_s \rangle = \int_{\Omega_s^0} \hat{p}_s \left(\det \mathbf{F} - 1 + \frac{1}{\kappa_s^*} p_s \right) d\mathbf{X}, \quad (4.1.15)$$

$$\langle \mathbf{f}, \hat{\boldsymbol{\psi}} \rangle = - \int_{\Omega_s^0} \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} - [\mathbf{v}_f]_m \right) \det \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (4.1.16)$$

Por outro lado, as componentes do operador tangente $\mathcal{D}\mathcal{G}$ que conformam a equação de $\hat{\mathbf{v}}_f$, isto é $\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta \mathbf{U}], \hat{\mathbf{v}}_f \rangle$, são

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta \mathbf{v}_f], \hat{\mathbf{v}}_f \rangle = & \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{\partial \delta \mathbf{v}_f}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f (\nabla \mathbf{v}_f) \delta \mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right. \\ & \left. + \rho_f (\nabla \delta \mathbf{v}_f) \mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + [\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))] \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}_f) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) \right] d\mathbf{x}, \quad (4.1.17) \end{aligned}$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta p_f], \hat{\mathbf{v}}_f \rangle = - \int_{\Omega} \delta p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f d\mathbf{x}, \quad (4.1.18)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta \mathbf{u}_s], \hat{\mathbf{v}}_f \rangle = - \int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \cdot (\nabla \hat{\mathbf{v}}_f [\delta \mathbf{u}_s]_e + \operatorname{div} [\delta \mathbf{u}_s]_e \hat{\mathbf{v}}_f) d\mathbf{x}, \quad (4.1.19)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\boldsymbol{\psi}], \hat{\mathbf{v}}_f \rangle = - \int_{\Omega_s^t} [\delta\boldsymbol{\psi}]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \, d\mathbf{x}, \quad (4.1.20)$$

onde $\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))$ é a relação tangente constitutiva avaliada no ponto $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)$, e que é obtida fazendo

$$[\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))]\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{v}_f) = \left. \frac{d}{d\varsigma} \boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f + \varsigma\delta\mathbf{v}_f)) \right|_{\varsigma=0}. \quad (4.1.21)$$

Para a equação $\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\mathbf{U}], \hat{p}_f \rangle$ tem-se

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\mathbf{v}_f], \hat{p}_f \rangle &= - \int_{\Omega} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \delta\mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \nabla p_f \cdot \delta\mathbf{v}_f \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \left(\frac{1}{\kappa_f} - \frac{1}{\kappa_s} \right) \nabla p_f \cdot \delta\mathbf{v}_f \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta p_f], \hat{p}_f \rangle &= - \int_{\Omega} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_f} \left(\frac{\partial \delta p_f}{\partial t} + \nabla \delta p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \left(\frac{1}{\kappa_f} - \frac{1}{\kappa_s} \right) \left(\frac{\partial \delta p_f}{\partial t} + \nabla \delta p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\mathbf{u}_s], \hat{p}_f \rangle &= \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \left(\frac{1}{\kappa_f} - \frac{1}{\kappa_s} \right) \left(\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) \operatorname{div} [\delta\mathbf{u}_s]_e \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_s^t} \left(\frac{1}{\kappa_f} - \frac{1}{\kappa_s} \right) \left[\nabla \hat{p}_f \cdot [\delta\mathbf{u}_s]_e \left(\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{p}_f \nabla \left(\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) \cdot [\delta\mathbf{u}_s]_e \right] d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

Por sua vez, a equação linearizada do deslocamento do sólido $\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\mathbf{U}], \hat{\mathbf{v}}_s \rangle$ resulta

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\mathbf{v}_f], \hat{\mathbf{v}}_s \rangle &= - \int_{\Omega_s^0} \left[\rho_f^0 \left(\left[\frac{\partial \delta\mathbf{v}_f}{\partial t} \right]_m + [(\nabla \delta\mathbf{v}_f)]_m [\mathbf{v}_f]_m + [(\nabla \mathbf{v}_f)]_m [\delta\mathbf{v}_f]_m \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\ &\quad \left. + \det \mathbf{F} [\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))]_m [\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{v}_f)]_m \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{X}, \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta p_f], \hat{\mathbf{v}}_s \rangle = \int_{\Omega_s^0} [\delta p_f]_m \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) \, d\mathbf{X}, \quad (4.1.26)$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\mathbf{u}_s], \hat{\mathbf{v}}_s \rangle &= \int_{\Omega_s^0} \left[\rho_s^0 \frac{\partial^2 \delta\mathbf{u}_s}{\partial t^2} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s - \rho_f^0 \left[\nabla \left(\frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}_f) \mathbf{v}_f \right) \right]_m \delta\mathbf{u}_s \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\
&\quad + [\mathcal{D}\mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s))] \nabla_{\mathbf{X}} \delta\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s + \nabla_{\mathbf{X}} \delta\mathbf{u}_s \mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s)) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
&\quad - \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta\mathbf{u}_s) [\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))]_m \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
&\quad - \det \mathbf{F} [\nabla(\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)))]_m \delta\mathbf{u}_s \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
&\quad + \det \mathbf{F} [\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))]_m \mathbf{F}^{-T} (\nabla_{\mathbf{X}} \delta\mathbf{u}_s)^T \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
&\quad - (p_s - [p_f]_m) \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta\mathbf{u}_s) (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) \\
&\quad + (p_s - [p_f]_m) \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} (\nabla_{\mathbf{X}} \delta\mathbf{u}_s)^T \mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
&\quad \left. + [\nabla p_f]_m \cdot \delta\mathbf{u}_s \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) + \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta\mathbf{u}_s) \boldsymbol{\psi} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{X}, \quad (4.1.27)
\end{aligned}$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta p_s], \hat{\mathbf{v}}_s \rangle = - \int_{\Omega_s^0} \delta p_s \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) d\mathbf{X}, \quad (4.1.28)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\boldsymbol{\psi}], \hat{\mathbf{v}}_s \rangle = \int_{\Omega_s^0} \det \mathbf{F} (\delta\boldsymbol{\psi} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s) d\mathbf{X}, \quad (4.1.29)$$

onde $\mathcal{D}\mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s))$ e $[\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))]_m$ são os correspondentes tensores constitutivos de quarta ordem dados por

$$[\mathcal{D}\mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s))] \nabla_{\mathbf{X}} \delta\mathbf{u}_s = \left. \frac{d}{d\varsigma} \mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s + \varsigma \delta\mathbf{u}_s)) \right|_{\varsigma=0}, \quad (4.1.30)$$

$$[\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))]_m [\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{v}_f)]_m = \left[\left. \frac{d}{d\varsigma} \boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f + \varsigma \delta\mathbf{v}_f)) \right|_{\varsigma=0} \right]_m. \quad (4.1.31)$$

Para a equação $\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\mathbf{U}], \hat{p}_s \rangle$ obtém-se

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\mathbf{u}_s], \hat{p}_s \rangle = - \int_{\Omega_s^0} \hat{p}_s \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta\mathbf{u}_s) d\mathbf{X}, \quad (4.1.32)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta p_s], \hat{p}_s \rangle = - \int_{\Omega_s^0} \hat{p}_s \frac{1}{\kappa_s^*} \delta p_s d\mathbf{X}. \quad (4.1.33)$$

Finalmente, a equação linear $\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\mathbf{U}], \hat{\boldsymbol{\psi}} \rangle$ é como segue

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\mathbf{v}_f], \hat{\boldsymbol{\psi}} \rangle = - \int_{\Omega_s^0} \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot [\delta\mathbf{v}_f]_m \det \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (4.1.34)$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{D}\mathcal{G}(\mathbf{U})[\delta\mathbf{u}_s], \hat{\boldsymbol{\psi}} \rangle &= \int_{\Omega_s^0} \hat{\boldsymbol{\psi}} \cdot \left[\frac{\partial \delta\mathbf{u}_s}{\partial t} - [\nabla \mathbf{v}_f]_m \delta\mathbf{u}_s \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} - [\mathbf{v}_f]_m \right) (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta\mathbf{u}_s) \right] \det \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (4.1.35)
\end{aligned}$$

Depois de introduzir aproximações no espaço e no tempo não resulta difícil identificar a estrutura de acoplamento que apresenta o sistema final de equações lineares

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{v}_f \mathbf{v}_f} & \mathbf{K}_{\mathbf{v}_f p_f} & \mathbf{K}_{\mathbf{v}_f \mathbf{u}_s} & 0 & \mathbf{K}_{\mathbf{v}_f \boldsymbol{\psi}} \\ \mathbf{K}_{p_f \mathbf{v}_f} & \mathbf{K}_{p_f p_f} & \mathbf{K}_{p_f \mathbf{u}_s} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{\mathbf{u}_s \mathbf{v}_f} & \mathbf{K}_{\mathbf{u}_s p_f} & \mathbf{K}_{\mathbf{u}_s \mathbf{u}_s} & \mathbf{K}_{\mathbf{u}_s p_s} & \mathbf{K}_{\mathbf{u}_s \boldsymbol{\psi}} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{p_s \mathbf{u}_s} & \mathbf{K}_{p_s p_s} & 0 \\ \mathbf{K}_{\boldsymbol{\psi} \mathbf{v}_f} & 0 & \mathbf{K}_{\boldsymbol{\psi} \mathbf{u}_s} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{v}_f \\ \delta p_f \\ \delta\mathbf{u}_s \\ \delta p_s \\ \delta\boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{v}_f} \\ \mathbf{f}_{p_f} \\ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_s} \\ \mathbf{f}_{p_s} \\ \mathbf{f}_{\boldsymbol{\psi}} \end{pmatrix}, \quad (4.1.36)$$

onde cada bloco \mathbf{K}_{XY} está relacionado com o operador tangente $\langle \mathcal{D}\mathbf{g}(\mathbf{U})[\delta Y], \hat{X} \rangle$, enquanto que \mathbf{f}_X está associado a $\langle \mathbf{f}, \hat{X} \rangle$.

4.1.3 Esquema segregado

O sistema de equações lineares apresentado na seção prévia (veja a (4.1.36)) é a versão linearizada completamente acoplada do Problema 3.6. Nesta seção mostra-se uma pequena modificação sobre o mencionado sistema de forma a simplificar a implementação computacional.

O sistema (4.1.36) compreende, em um único passo de cálculo, a resolução de todas as incógnitas do problema. Sempre que for possível, essa é a melhor forma de resolvê-lo. Não obstante, este sistema possui alguns inconvenientes do ponto de vista da implementação computacional. Esses temas serão tratados mais na frente a partir da Seção 4.4 ao discutir os aspectos gerais da implementação computacional. Assim, um ponto importante que deve ser estudado, como em todo problema acoplado, é a versão segregada do mesmo, separando a resolução em dois passos de cálculo, o do fluido e o do sólido.

Uma possível versão segregada decorrente do sistema (4.1.36) é a seguinte

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{v}_f \mathbf{v}_f} & \mathbf{K}_{\mathbf{v}_f p_f} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\mathbf{v}_f \psi} \\ \mathbf{K}_{p_f \mathbf{v}_f} & \mathbf{K}_{p_f p_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{\mathbf{u}_s \mathbf{u}_s} & \mathbf{K}_{\mathbf{u}_s p_s} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{p_s \mathbf{u}_s} & \mathbf{K}_{p_s p_s} & 0 \\ \mathbf{K}_{\psi \mathbf{v}_f} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{v}_f \\ \delta p_f \\ \delta \mathbf{u}_s \\ \delta p_s \\ \delta \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{f}_{\mathbf{v}_f}]^* \\ [\mathbf{f}_{p_f}]^* \\ [\mathbf{f}_{\mathbf{u}_s}]^* \\ \mathbf{f}_{p_s} \\ [\mathbf{f}_{\psi}]^* \end{pmatrix}, \quad (4.1.37)$$

onde os termos modificados do lado direito da equação, indicados por $[\cdot]^*$, são

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_{\mathbf{v}_f}]^* &= \mathbf{f}_{\mathbf{v}_f} - \mathbf{K}_{\mathbf{v}_f \mathbf{u}_s} (\delta \mathbf{u}_s)^P, \\ [\mathbf{f}_{p_f}]^* &= \mathbf{f}_{p_f} - \mathbf{K}_{p_f \mathbf{u}_s} (\delta \mathbf{u}_s)^P, \\ [\mathbf{f}_{\mathbf{u}_s}]^* &= \mathbf{f}_{\mathbf{u}_s} - \mathbf{K}_{\mathbf{u}_s \mathbf{v}_f} (\delta \mathbf{v}_f)^P - \mathbf{K}_{\mathbf{u}_s p_f} (\delta p_f)^P - \mathbf{K}_{\mathbf{u}_s \psi} (\delta \psi)^P, \\ [\mathbf{f}_{\psi}]^* &= \mathbf{f}_{\psi} - \mathbf{K}_{\psi \mathbf{u}_s} (\delta \mathbf{u}_s)^P. \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

Aqui, a notação $(\cdot)^P$ significa que a quantidade é previamente conhecida, por exemplo, através de um esquema de predição.

O problema resulta assim parcialmente desacoplado, já que na verdade o problema do escoamento está acoplado com o campo ψ . A resolução está composta por dois passos de cálculo: (i) o problema do escoamento do fluido acoplado com o campo material ψ de forma a impor a restrição sobre o campo de velocidade \mathbf{v}_f dependente da velocidade do sólido conhecida de um passo anterior e (ii) o problema do sólido com diversos termos forçantes vindos de um passo de cálculo anterior. Este esquema segregado pode ser melhorado resolvendo primeiro o problema do escoamento do fluido como indicado em (i) e a seguir o problema do sólido substituindo as quantidades denotadas com $(\cdot)^P$ em (4.1.38)₃ pelos valores atualizados de $\delta \mathbf{v}_f$, δp_f e $\delta \psi$, de forma similar a um procedimento de resolução de Gauss–Seidel.

4.2 Linearização do problema fluido–sólido rígido

Nesta seção desenvolve-se a linearização do Problema 3.7 formulado na Seção 3.3 do Capítulo 3. Este modelo visa simular a interação entre um fluido e um sólido de forma arbitrária, porém rígido, enquanto que o fluido possui características de compressibilidade/incompressibilidade arbitrárias.

4.2.1 Descrições espacial e material

No caso do problema de interação entre um fluido e sólidos rígidos o tratamento muda levemente. Aqui não é necessário levar em consideração a descrição Lagrangiana de quantidades como o deslocamento \mathbf{u}_s e a pressão p_s como ocorria na Seção 4.1. Entretanto, é necessário fazê-lo com o campo $\boldsymbol{\psi}$ que continua sendo uma quantidade material. Dada a particularidade do sólido rígido, resulta trivialmente que $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{Q}_s^o$, onde \mathbf{Q}_s^o é uma matriz de rotação, com todas as suas conseqüências. Além disso, e visando simplificar a abordagem, assume-se no Problema 3.7 que $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_f|_{\Omega_s^t}$ na equação correspondente a $\hat{\mathbf{v}}_s$. Procedimentos similares foram explorados nos trabalhos [39, 97, 163]. Isto é mais fácil de ser justificado através do caminho desenvolvido no Capítulo 3 em contraste com a abordagem da literatura, na qual não é deixado claro o motivo desta consideração. Com isto é possível agrupar alguns termos e simplificar notavelmente a linearização, e em geral o tratamento do problema em si. Só por citar um exemplo, veja que desta maneira não aparecerá o bloco matricial $\mathbf{K}_{\mathbf{u}_s \mathbf{v}_f}$ na equação análoga à (4.1.36). Por tudo o que foi dito pode-se manter a equação de balanço de momentos linear e angular do sólido em termos da velocidade \mathbf{v}_s . Neste caso para o problema no qual o sólido é rígido o princípio variacional (3.3.36) é reescrito como segue

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f (\nabla \mathbf{v}_f) \mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] \mathrm{d}\mathbf{x} \\
& - \int_{\Gamma_{fN}} \bar{\mathbf{t}}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{1}{\kappa_f} \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_f} \left(\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
& + \Delta m_{sf} \frac{\partial \mathbf{v}_s^o}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o + \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_s^o}{\partial t} \Delta \mathbb{I}_{sf} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o + \boldsymbol{\Omega}_s^o \boldsymbol{\Omega}_s^o \Delta \mathbb{I}_{sf} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o \\
& - \Delta m_{sf} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o + \int_{\Omega_s^t} [\hat{\boldsymbol{\psi}}]_e \cdot (\mathbf{v}_s^o + \boldsymbol{\Omega}_s^o(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o) - \mathbf{v}_f) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
& + \left[\int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \mathrm{d}\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o + \left[\int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o) \mathrm{d}\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o - \int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \\
& \forall (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\psi}}) \in \mathcal{V}_f \times \mathcal{P}_f \times \mathcal{V}_s^o \times \mathcal{O}_s^o \times \boldsymbol{\Psi}, \quad (4.2.1)
\end{aligned}$$

onde a equação de $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ agora está escrita na configuração atual Ω_s^t , o que é indicado por $[\hat{\boldsymbol{\psi}}]_e$. Também foi usado o fato de ser $\mathbf{r}^o = \mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o = [\mathbf{u}_s]_e - \mathbf{u}_s^o$, com \mathbf{u}_s^o sendo a posição do centro de massa, e além disso

$$\begin{aligned}
\Delta m_{sf} &= m_s - m_f, \\
\Delta \mathbb{I}_{sf} &= \mathbb{I}_s - \mathbb{I}_f,
\end{aligned} \quad (4.2.2)$$

onde m_f e \mathbb{I}_f têm as mesmas definições que m_s e \mathbb{I}_s respectivamente, porém com ρ_f em lugar de ρ_s . Veja que na expressão (4.2.1) foi dada de forma explícita a forma do espaço \mathcal{V} do Problema 3.7 como sendo $\mathcal{V} = \mathcal{V}_f \times \mathcal{V}_s^o \times \mathcal{O}_s^o$.

Neste problema, a descrição usada para cada uma das quantidades é a seguinte

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_f &= [\mathbf{v}_f]_e(\mathbf{x}, t) && \xrightarrow{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t)} && [\mathbf{v}_f]_m(\mathbf{X}, t), \\
p_f &= [p_f]_e(\mathbf{x}, t) && \xrightarrow{\mathbf{x}=\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X},t)} && [p_f]_m(\mathbf{X}, t), \\
\mathbf{v}_s^o &= [\mathbf{v}_s^o]_m(t) && \xrightarrow{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x},t)} && [\mathbf{v}_s^o]_e(t) = \mathbf{v}_s^o, \\
\boldsymbol{\Omega}_s^o &= [\boldsymbol{\Omega}_s^o]_m(t) && \xrightarrow{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x},t)} && [\boldsymbol{\Omega}_s^o]_e(t) = \boldsymbol{\Omega}_s^o, \\
\boldsymbol{\psi} &= [\boldsymbol{\psi}]_m(\mathbf{X}, t) && \xrightarrow{\mathbf{X}=\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x},t)} && [\boldsymbol{\psi}]_e(\mathbf{x}, t).
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Veja que aqui as quantidades \mathbf{v}_s^o e $\boldsymbol{\Omega}_s^o$ são invariantes perante o mapeamento $\boldsymbol{\chi}$, pois são independentes da posição e portanto da descrição.

Embora o problema esteja em termos de velocidades, o deslocamento do sólido deve ser computado a fim de efetuar o balanço no corpo rígido de forma adequada. De fato, o correto posicionamento do sólido entra em jogo no cálculo do tensor $\Delta \mathbb{I}_{sf}$, na componente da velocidade $\boldsymbol{\Omega}_s^o(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o)$ e na contribuição para a equação de momento angular dada por $[\boldsymbol{\psi}]_e \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o)$. Em outras palavras, uma parte da não linearidade do problema é com respeito ao deslocamento do sólido. Isto faz com que seja necessário linearizar a formulação anterior em função do incremento no deslocamento \mathbf{u}_s adequadamente definido para um movimento de corpo rígido. Isto é a contrapartida do feito no problema anterior para um sólido deformável.

No caso de um movimento rígido o deslocamento \mathbf{u}_s está descrito como

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_s^o(t) + \mathbf{Q}_s^o(t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^o), \tag{4.2.4}$$

onde \mathbf{X}^o é a posição do centro de massa na configuração de referência Ω_s^0 , \mathbf{u}_s^o representa a posição do centro de massa em função do tempo e \mathbf{Q}_s^o é uma transformação ortogonal com determinante positivo, ou seja $\mathbf{Q}_s^o(\mathbf{Q}_s^o)^T = \mathbf{I}$, que coloca o sólido na posição rotada para cada instante de tempo. Logo, uma perturbação no deslocamento está governada por perturbações em \mathbf{u}_s^o e em \mathbf{Q}_s^o pois

$$\delta \mathbf{u}_s(\mathbf{X}, t) = \delta \mathbf{u}_s^o(t) + (\delta \mathbf{Q}_s^o(t) - \mathbf{I})\mathbf{Q}_s^o(t)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^o). \tag{4.2.5}$$

Na descrição espacial a expressão anterior resulta

$$[\delta \mathbf{u}_s]_e(\mathbf{x}, t) = \delta \mathbf{u}_s^o(t) + (\delta \mathbf{Q}_s^o(t) - \mathbf{I})(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o(t)), \tag{4.2.6}$$

pois $\mathbf{X} - \mathbf{X}^o = \mathbf{Q}_s^o(t)^T(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o(t))$. Um aspecto importante que deve ser remarcado aqui é que a perturbação no tensor rotação \mathbf{Q}_s^o não é aditiva, mas multiplicativa. Ver-se-á depois como os incrementos $\delta \mathbf{u}_s^o$ e $\delta \mathbf{Q}_s^o$ estão relacionados à velocidade \mathbf{v}_s^o e ao tensor $\boldsymbol{\Omega}_s^o$. Isto entra em jogo ao especificar uma discretização temporal. Por enquanto assumamos as seguintes relações genéricas

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{u}_s^o &= \delta \mathbf{u}_s^o(\delta \mathbf{v}_s^o), \\
\delta \mathbf{Q}_s^o &= \delta \mathbf{Q}_s^o(\delta \boldsymbol{\Omega}_s^o).
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Estas relações incrementais são lineares. Desta forma, a formulação variacional (4.2.1) é escrita em termos de velocidade, levando em conta que a linearização com respeito à posição do domínio Ω_s^t será também escrita em termos de $\delta \mathbf{v}_s^o$ e de $\delta \boldsymbol{\Omega}_s^o$ segundo indicado

pela (4.2.7). Não resulta difícil, a partir da (4.2.4), obter as seguintes relações

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_s^o &= \frac{\partial \mathbf{u}_s^o}{\partial t}, \\ \boldsymbol{\Omega}_s^o &= \frac{\partial \mathbf{Q}_s^o}{\partial t} \mathbf{Q}_s^{oT},\end{aligned}\tag{4.2.8}$$

das quais se derivam as formas genéricas (4.2.7).

Por outro lado, a equação de \hat{p}_s não está presente na formulação, o que faz com que as incógnitas sejam as seguintes \mathbf{v}_f , p_f , \mathbf{v}_s^o , $\boldsymbol{\Omega}_s^o$ e $\boldsymbol{\psi}$, além de, como dito, ter que considerar o cálculo de \mathbf{u}_s^o e \mathbf{Q}_s^o .

Neste caso resulta mais natural considerar o fluido artificial com propriedades (massa específica e viscosidade) idênticas às do fluido real. Isto simplifica, como dito anteriormente, a linearização do problema. Aqui o módulo de compressibilidade do fluido artificial é $\kappa_s = \infty$, independente de κ_f .

4.2.2 Esquema monolítico

Aqui, o problema variacional não linear (4.2.1) escreve-se em forma abstrata como segue

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_r((\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{v}_s^o, \boldsymbol{\Omega}_s^o, \boldsymbol{\psi}), (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\psi}})) &= 0 \\ \forall (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\psi}}) &\in \mathcal{V}_f \times \mathcal{P}_f \times \mathcal{V}_s^o \times \mathcal{O}_s^o \times \boldsymbol{\Psi},\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

que depende também das incógnitas $(\mathbf{u}_s^o, \mathbf{Q}_s^o)$ (pois estas definem o domínio Ω_s^t), as quais estão relacionadas com as outras incógnitas pelas expressões (4.2.8). Em forma mais compacta, e agrupando as incógnitas como $\mathbf{U}_r = (\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{v}_s^o, \boldsymbol{\Omega}_s^o, \boldsymbol{\psi})$, resulta

$$\mathcal{G}_r(\mathbf{U}_r, \hat{\mathbf{U}}_r) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{U}}_r \in \boldsymbol{\Xi}_r,\tag{4.2.10}$$

onde $\boldsymbol{\Xi}_r = \mathcal{V}_f \times \mathcal{P}_f \times \mathcal{V}_s^o \times \mathcal{O}_s^o \times \boldsymbol{\Psi}$. Esta expressão é uma equação não linear em \mathbf{U}_r .

Como ocorria no problema geral (4.1.6), a linearização do problema (4.2.10) segundo um esquema de Newton–Raphson, em torno de um dado ponto $(\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{v}_s^o, \boldsymbol{\Omega}_s^o, \boldsymbol{\psi})$, e dados $(\mathbf{u}_s^o, \mathbf{Q}_s^o)$, consiste em resolver o seguinte problema linear onde a incógnita é o incremento na solução $(\delta \mathbf{v}_f, \delta p_f, \delta \mathbf{v}_s^o, \delta \boldsymbol{\Omega}_s^o, \delta \boldsymbol{\psi})$

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r((\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{v}_s^o, \boldsymbol{\Omega}_s^o, \boldsymbol{\psi}))[(\delta \mathbf{v}_f, \delta p_f, \delta \mathbf{v}_s^o, \delta \boldsymbol{\Omega}_s^o, \delta \boldsymbol{\psi})], (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\psi}}) \rangle &= \\ - \mathcal{G}_r((\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{v}_s^o, \boldsymbol{\Omega}_s^o, \boldsymbol{\psi}), (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\psi}})) & \\ \forall (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{p}_f, \hat{\mathbf{v}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o, \hat{\boldsymbol{\psi}}) &\in \mathcal{V}_f \times \mathcal{P}_f \times \mathcal{V}_s^o \times \mathcal{O}_s^o \times \boldsymbol{\Psi},\end{aligned}\tag{4.2.11}$$

onde aqui $\mathcal{D}\mathcal{G}_r((\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{v}_s^o, \boldsymbol{\Omega}_s^o, \boldsymbol{\psi}))$ é o operador tangente consistente associado a \mathcal{G}_r no ponto $(\mathbf{v}_f, p_f, \mathbf{v}_s^o, \boldsymbol{\Omega}_s^o, \boldsymbol{\psi})$, que também depende do par $(\mathbf{u}_s^o, \mathbf{Q}_s^o)$. Usando a notação compacta resulta

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U}_r)[\delta \mathbf{U}_r], \hat{\mathbf{U}}_r \rangle = \left. \frac{d}{d\varsigma} \mathcal{G}_r(\mathbf{U}_r + \varsigma \delta \mathbf{U}_r, \hat{\mathbf{U}}_r) \right|_{\varsigma=0}.\tag{4.2.12}$$

A equação variacional (4.2.11) pode ser ainda reescrita como segue

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U}_r)[\delta \mathbf{U}_r] - \mathbf{f}_r, \hat{\mathbf{U}}_r \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{U}}_r \in \boldsymbol{\Xi}_r,\tag{4.2.13}$$

e daqui é possível obter cada um dos operadores componentes $\mathcal{D}\mathcal{G}_{rXY}(\mathbf{U}_r)$, ou $\mathcal{D}\mathcal{G}_{rXY}$, que acopla a incógnita Y na equação X , e por outro lado é $\langle \mathbf{f}_r, \hat{\mathbf{U}}_r \rangle = -\mathcal{G}_r(\mathbf{U}_r, \hat{\mathbf{U}}_r)$.

Após proceder de forma similar ao feito com o problema geral da Seção 4.1, na

linearização do problema (4.2.1), obtém-se

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_r, \hat{\mathbf{v}}_f \rangle = \int_{\Omega} \left[-\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} - \rho_f (\nabla \mathbf{v}_f) \mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f - \boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) + p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f \right. \\ \left. + \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{fN}} (\bar{\mathbf{t}}_f + \delta \bar{\mathbf{t}}_f) \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \, d\Gamma + \int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \, \mathbf{d}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_r, \hat{p}_f \rangle = \int_{\Omega} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{1}{\kappa_f} \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) \mathbf{d}\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_f} \left(\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) \mathbf{d}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

$$\langle \mathbf{f}_r, \hat{\mathbf{v}}_s^o \rangle = -\Delta m_{sf} \frac{\partial \mathbf{v}_s^o}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o + \Delta m_{sf} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o - \left[\int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o, \quad (4.2.16)$$

$$\langle \mathbf{f}_r, \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o \rangle = -\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}_s^o}{\partial t} \Delta \mathbb{I}_{sf} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o - \boldsymbol{\Omega}_s^o \boldsymbol{\Omega}_s^o \Delta \mathbb{I}_{sf} \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o - \left[\int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\boldsymbol{\Omega}}_s^o, \quad (4.2.17)$$

$$\langle \mathbf{f}_r, \hat{\boldsymbol{\psi}} \rangle = - \int_{\Omega_s^t} [\hat{\boldsymbol{\psi}}]_e \cdot (\mathbf{v}_s^o + \boldsymbol{\Omega}_s^o (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o) - \mathbf{v}_f) \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (4.2.18)$$

O operador tangente $\mathcal{D}\mathcal{G}_r$ correspondente a $\hat{\mathbf{v}}_f$, isto é $\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{U}], \hat{\mathbf{v}}_f \rangle$, é composto como segue

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{v}_f], \hat{\mathbf{v}}_f \rangle = \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{\partial \delta \mathbf{v}_f}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f (\nabla \mathbf{v}_f) \delta \mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right. \\ \left. + \rho_f (\nabla \delta \mathbf{v}_f) \mathbf{v}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + [\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))] \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}_f) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) \right] \mathbf{d}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta p_f], \hat{\mathbf{v}}_f \rangle = - \int_{\Omega} \delta p_f \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f \, \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad (4.2.20)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{v}_s^o], \hat{\mathbf{v}}_f \rangle = - \int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}_f \delta \mathbf{u}_s^o \, \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad (4.2.21)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \boldsymbol{\Omega}_s^o], \hat{\mathbf{v}}_f \rangle = - \int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}_f (\delta \mathbf{Q}_s^o - \mathbf{I})(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o) \, \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad (4.2.22)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \boldsymbol{\psi}], \hat{\mathbf{v}}_f \rangle = - \int_{\Omega_s^t} [\delta \boldsymbol{\psi}]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \, \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad (4.2.23)$$

onde novamente $\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))$ é a relação tangente constitutiva avaliada no ponto $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)$ obtida como na (4.1.21). Por sua parte, a equação $\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{U}], \hat{p}_f \rangle$ resulta

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{v}_f], \hat{p}_f \rangle = - \int_{\Omega} \hat{p}_f \left(\operatorname{div} \delta \mathbf{v}_f + \frac{1}{\kappa_f} \nabla p_f \cdot \delta \mathbf{v}_f \right) \mathbf{d}\mathbf{x} \\ + \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_f} \nabla p_f \cdot \delta \mathbf{v}_f \, \mathbf{d}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta p_f], \hat{p}_f \rangle &= - \int_{\Omega} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_f} \left(\frac{\partial \delta p_f}{\partial t} + \nabla \delta p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_s^t} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_f} \left(\frac{\partial \delta p_f}{\partial t} + \nabla \delta p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{v}_s^o], \hat{p}_f \rangle &= \int_{\Omega_s^t} \frac{1}{\kappa_f} \left[\nabla \hat{p}_f \cdot \delta \mathbf{u}_s^o \left(\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{p}_f \nabla \left(\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) \cdot \delta \mathbf{u}_s^o \right] d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{\Omega}_s^o], \hat{p}_f \rangle &= \int_{\Omega_s^t} \frac{1}{\kappa_f} \left[\nabla \hat{p}_f \cdot (\delta \mathbf{Q}_s^o - \mathbf{I})(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o) \left(\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{p}_f \nabla \left(\frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla p_f \cdot \mathbf{v}_f \right) \cdot (\delta \mathbf{Q}_s^o - \mathbf{I})(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o) \right] d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Por sua vez, a equação linearizada $\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{U}], \hat{\mathbf{v}}_s^o \rangle$ do momento linear do sólido rígido resulta

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{v}_s^o], \hat{\mathbf{v}}_s^o \rangle = \Delta m_{sf} \frac{\partial \delta \mathbf{v}_s^o}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o, \quad (4.2.28)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \boldsymbol{\psi}], \hat{\mathbf{v}}_s^o \rangle = \left[\int_{\Omega_s^t} [\delta \boldsymbol{\psi}]_e d\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o, \quad (4.2.29)$$

enquanto que a equação linearizada do momento angular do sólido rígido $\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{U}], \hat{\mathbf{\Omega}}_s^o \rangle$ é

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{\Omega}_s^o], \hat{\mathbf{\Omega}}_s^o \rangle &= \frac{\partial \delta \mathbf{\Omega}_s^o}{\partial t} \Delta \mathbb{I}_{sf} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_s^o + \delta \mathbf{\Omega}_s^o \mathbf{\Omega}_s^o \Delta \mathbb{I}_{sf} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_s^o + \mathbf{\Omega}_s^o \delta \mathbf{\Omega}_s^o \Delta \mathbb{I}_{sf} \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_s^o \\ &\quad + \left[\frac{\partial \mathbf{\Omega}_s^o}{\partial t} + \mathbf{\Omega}_s^o \mathbf{\Omega}_s^o \right] [(\delta \mathbf{Q}_s^o - \mathbf{I}) \Delta \mathbb{I}_{sf} + \Delta \mathbb{I}_{sf} (\delta \mathbf{Q}_s^o - \mathbf{I})^T] \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_s^o \\ &\quad + \left[\int_{\Omega_s^t} [\boldsymbol{\psi}]_e \otimes (\delta \mathbf{Q}_s^o - \mathbf{I})(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o) d\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_s^o, \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \boldsymbol{\psi}], \hat{\mathbf{\Omega}}_s^o \rangle = \left[\int_{\Omega_s^t} [\delta \boldsymbol{\psi}]_e \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o) d\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\mathbf{\Omega}}_s^o. \quad (4.2.31)$$

Aqui tem sido usado o seguinte fato

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varsigma} \Delta \mathbb{I}_{sf\varsigma} \Big|_{\varsigma=0} &= \frac{d}{d\varsigma} \left[\int_{\Omega_s^t} (\rho_s - \rho_f)(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o)_\varsigma \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o)_\varsigma d\mathbf{x} \right] \Big|_{\varsigma=0} = \\ &= (\delta \mathbf{Q}_s^o - \mathbf{I}) \Delta \mathbb{I}_{sf} + \Delta \mathbb{I}_{sf} (\delta \mathbf{Q}_s^o - \mathbf{I})^T. \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

Por último, a equação linear $\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{U}], \hat{\boldsymbol{\psi}} \rangle$ é como segue

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{v}_f], \hat{\boldsymbol{\psi}} \rangle = - \int_{\Omega_s^t} [\hat{\boldsymbol{\psi}}]_e \cdot \delta \mathbf{v}_f d\mathbf{x}, \quad (4.2.33)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta \mathbf{v}_s^o], \hat{\boldsymbol{\psi}} \rangle = \int_{\Omega_s^t} [\hat{\boldsymbol{\psi}}]_e \cdot (\delta \mathbf{v}_s^o - \nabla \mathbf{v}_f \delta \mathbf{u}_s^o) d\mathbf{x}, \quad (4.2.34)$$

$$\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta\Omega_s^o], \hat{\boldsymbol{\psi}} \rangle = \int_{\Omega_s^t} [\hat{\boldsymbol{\psi}}]_e \cdot (\delta\Omega_s^o(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o) + \Omega_s^o(\delta\mathbf{Q}_s^o - \mathbf{I})(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o) - \nabla\mathbf{v}_f(\delta\mathbf{Q}_s^o - \mathbf{I})(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^o)) \, d\mathbf{x}. \quad (4.2.35)$$

Introduzindo aqui as correspondentes aproximações no espaço e no tempo é possível identificar a seguinte estrutura de acoplamento no sistema final de equações lineares para o problema de sólido rígido

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_f\mathbf{v}_f} & \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_f p_f} & \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_f\mathbf{v}_s^o} & \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_f\Omega_s^o} & \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_f\boldsymbol{\psi}} \\ \mathbf{K}_{rp_f\mathbf{v}_f} & \mathbf{K}_{rp_f p_f} & \mathbf{K}_{rp_f\mathbf{v}_s^o} & \mathbf{K}_{rp_f\Omega_s^o} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_s^o\mathbf{v}_s^o} & 0 & \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_s^o\boldsymbol{\psi}} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{r\Omega_s^o\Omega_s^o} & \mathbf{K}_{r\Omega_s^o\boldsymbol{\psi}} \\ \mathbf{K}_{r\boldsymbol{\psi}\mathbf{v}_f} & 0 & \mathbf{K}_{r\boldsymbol{\psi}\mathbf{v}_s^o} & \mathbf{K}_{r\boldsymbol{\psi}\Omega_s^o} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{v}_f \\ \delta p_f \\ \delta\mathbf{v}_s^o \\ \delta\Omega_s^o \\ \delta\boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{r\mathbf{v}_f} \\ \mathbf{f}_{rp_f} \\ \mathbf{f}_{r\mathbf{v}_s^o} \\ \mathbf{f}_{r\Omega_s^o} \\ \mathbf{f}_{r\boldsymbol{\psi}} \end{pmatrix}, \quad (4.2.36)$$

onde, como no caso visto na Seção 4.1, cada bloco \mathbf{K}_{rXY} está relacionado ao operador tangente $\langle \mathcal{D}\mathcal{G}_r(\mathbf{U})[\delta Y], \hat{X} \rangle$, enquanto que \mathbf{f}_{rX} define-se a partir de $\langle \mathbf{f}_r, \hat{X} \rangle$. Veja que a estrutura da matriz tangente aqui muda com respeito à (4.1.36) devido à mudança nos graus de liberdade que governam o problema e também a ter assumido que a velocidade do fluido é exatamente a do sólido na região Ω_s^t , eliminando nas equações de \mathbf{v}_s^o e Ω_s^o o acoplamento com \mathbf{v}_f .

4.2.3 Esquema segregado

Como feito para o problema geral envolvendo sólidos deformáveis, neste caso de sólidos rígidos surge o mesmo interesse de formular uma versão segregada do problema (4.2.36). Este sistema resolve em um só passo todas as incógnitas do problema. Contudo, aspectos similares aos que serão discutidos para o caso de sólidos deformáveis fazem com que a implementação computacional seja complexa. Por isto, pretende-se fornecer a versão segregada do problema, separando as equações de balanço no fluido das equações de balanço no sólido rígido. Assim sendo, uma das versões segregadas que decorrem do sistema (4.2.36) é a seguinte

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_f\mathbf{v}_f} & \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_f p_f} & 0 & 0 & \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_f\boldsymbol{\psi}} \\ \mathbf{K}_{rp_f\mathbf{v}_f} & \mathbf{K}_{rp_f p_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_s^o\mathbf{v}_s^o} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{r\Omega_s^o\Omega_s^o} & 0 \\ \mathbf{K}_{r\boldsymbol{\psi}\mathbf{v}_f} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{v}_f \\ \delta p_f \\ \delta\mathbf{v}_s^o \\ \delta\Omega_s^o \\ \delta\boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathbf{f}_{r\mathbf{v}_f}]^* \\ [\mathbf{f}_{rp_f}]^* \\ [\mathbf{f}_{r\mathbf{v}_s^o}]^* \\ [\mathbf{f}_{r\Omega_s^o}]^* \\ [\mathbf{f}_{r\boldsymbol{\psi}}]^* \end{pmatrix}, \quad (4.2.37)$$

onde os termos $[\cdot]^*$ são os seguintes

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_{r\mathbf{v}_f}]^* &= \mathbf{f}_{r\mathbf{v}_f} - \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_f\mathbf{v}_s^o}(\delta\mathbf{v}_s^o)^P - \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_f\Omega_s^o}(\delta\Omega_s^o)^P, \\ [\mathbf{f}_{rp_f}]^* &= \mathbf{f}_{rp_f} - \mathbf{K}_{rp_f\mathbf{v}_s^o}(\delta\mathbf{v}_s^o)^P - \mathbf{K}_{rp_f\Omega_s^o}(\delta\Omega_s^o)^P, \\ [\mathbf{f}_{r\mathbf{v}_s^o}]^* &= \mathbf{f}_{r\mathbf{v}_s^o} - \mathbf{K}_{r\mathbf{v}_s^o\boldsymbol{\psi}}(\delta\boldsymbol{\psi})^P, \\ [\mathbf{f}_{r\Omega_s^o}]^* &= \mathbf{f}_{r\Omega_s^o} - \mathbf{K}_{r\Omega_s^o\boldsymbol{\psi}}(\delta\boldsymbol{\psi})^P, \\ [\mathbf{f}_{r\boldsymbol{\psi}}]^* &= \mathbf{f}_{r\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{K}_{r\boldsymbol{\psi}\mathbf{v}_s^o}(\delta\mathbf{v}_s^o)^P - \mathbf{K}_{r\boldsymbol{\psi}\Omega_s^o}(\delta\Omega_s^o)^P, \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

onde a notação $(\cdot)^P$ implica que a quantidade é conhecida de um passo de cálculo anterior.

Claramente, o problema do escoamento está separado do problema do movimento do sólido rígido. O acoplamento parcial vem dado pela ação do campo $\boldsymbol{\psi}$ que, na versão aqui apresentada, encontra-se totalmente acoplado ao problema do fluido, e atua como termo forçante no problema do sólido. Como no caso visto na Seção 4.1, este esquema

segregado pode ser melhorado. Para isto resolve-se o problema do escoamento do fluido e depois o problema do sólido com valores atualizados de $\delta \mathbf{v}_f$, δp_f e $\delta \psi$ como ocorre em um procedimento de Gauss–Seidel.

4.3 Casos particulares de comportamentos constitutivos

Aqui pretende-se explicitar as formas das leis constitutivas (4.1.1) e (4.1.2) para casos de interesse. Em função disto é possível especificar aqueles termos dados de forma genérica obtidos na linearização do problema nas seções anteriores.

Os problemas incrementais até aqui apresentados nas seções anteriores possuem toda a generalidade dos Problemas 3.6 e 3.7. Aqui realizam-se algumas simplificações adicionais para reduzir a esfera de exemplos de estudo como será feito mais na frente. Por exemplo, embora a formulação (4.1.3) seja válida para qualquer comportamento constitutivo do sólido, aqui não se consideram comportamentos dissipativos, limitando a apresentação a deformação finita e materiais não dependentes da história.

4.3.1 Comportamento constitutivo do fluido

Considere primeiro um fluido compressível e Newtoniano. Logo, a relação tensão–taxa de deformação $\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))$ é dada por

$$\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)) = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f) + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}_f, \quad (4.3.1)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica e λ é a viscosidade volumétrica. Com este comportamento constitutivo pode-se estabelecer qual a forma do operador tangente constitutivo da (4.1.21). Para isto veja que

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))]\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{v}_f) &= \left. \frac{d}{d\varsigma} \boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f + \varsigma\delta\mathbf{v}_f)) \right|_{\varsigma=0} = \\ &= \left. \frac{d}{d\varsigma} [2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f + \varsigma\delta\mathbf{v}_f) + \lambda \operatorname{div}(\mathbf{v}_f + \varsigma\delta\mathbf{v}_f)] \right|_{\varsigma=0} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{v}_f) + \lambda \operatorname{div} \delta\mathbf{v}_f = \\ &= (2\mu\mathbb{I} + \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}))\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{v}_f), \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

onde \mathbb{I} é o tensor identidade de quarta ordem. Logo, o operador de quarta ordem $\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))$ neste caso é constante, e é

$$\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}). \quad (4.3.3)$$

Para um fluido incompressível resulta trivialmente

$$\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD} = 2\mu\mathbb{I}. \quad (4.3.4)$$

Um caso mais complexo que pode ser de interesse no contexto da modelagem do escoamento de sangue é o modelo de Casson incompressível. Este modelo pode ser descrito pela seguinte relação constitutiva

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)) &= 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f), \\ \mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)) &= \left(\sqrt{\mu_o} + \sqrt{\frac{\tau_o}{\sqrt{2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)}}}} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Para este modelo o operador tangente constitutivo obtém-se como

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))]\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{v}_f) &= \left. \frac{d}{d\varsigma} \boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f + \varsigma\delta\mathbf{v}_f)) \right|_{\varsigma=0} = \\ &= \left. \frac{d}{d\varsigma} [2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f + \varsigma\delta\mathbf{v}_f))\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f + \varsigma\delta\mathbf{v}_f)] \right|_{\varsigma=0} = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{v}_f) \\ &\quad - 2\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f) \otimes \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)]\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{v}_f), \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

com

$$\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)) = 2 \left(\sqrt{\mu_o} + \sqrt{\frac{\tau_o}{\sqrt{2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)}}}} \right) \frac{\sqrt{\tau_o}}{(2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))^{5/4}}. \quad (4.3.7)$$

Logo, o operador constitutivo de quarta ordem $\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))$ é como segue

$$\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)) = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))\mathbb{I} - 2\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f))[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f) \otimes \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f)]. \quad (4.3.8)$$

Lembre que o modelo de Casson possui um ponto singular que é quando $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f) \rightarrow 0$, como pode ser observado do modelo constitutivo. Logo, a linearização realizada aqui é válida para a região diferenciável do modelo.

4.3.2 Comportamento constitutivo do sólido

O modelo constitutivo de sólido mais geral aqui considerado é o de Mooney–Rivlin. O comportamento destes materiais pode ser derivado da seguinte expressão da função de energia de deformação desviadora

$$\phi_{sD} = C_1(I_1^* - 3) + C_2(I_2^* - 3), \quad (4.3.9)$$

onde C_1 e C_2 são parâmetros do material. Por outro lado, I_1^* e I_2^* são os invariantes modificados do tensor $\mathbf{C}(\mathbf{u}_s)$ definidos como

$$\begin{aligned} I_1^* &= J^{-2/3}I_1, \\ I_2^* &= J^{-4/3}I_2, \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

onde I_i , $i = 1, 2, 3$, são os invariantes do tensor $\mathbf{C}(\mathbf{u}_s)$, isto é

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } \mathbf{C}, \\ I_2 &= \frac{1}{2}[(\text{tr } \mathbf{C})^2 - \text{tr } \mathbf{C}^2], \\ I_3 &= \det \mathbf{C} = J^2. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

No que segue serão úteis as seguintes expressões das derivadas dos invariantes I_i , $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \left. \frac{d}{d\varsigma} I_{1\varsigma} \right|_{\varsigma=0} = \mathbf{I}, \\ \dot{I}_2 &= \left. \frac{d}{d\varsigma} I_{2\varsigma} \right|_{\varsigma=0} = (\text{tr } \mathbf{C})\mathbf{I} - \mathbf{C} = I_1\mathbf{I} - \mathbf{C}, \\ \dot{I}_3 &= \left. \frac{d}{d\varsigma} I_{3\varsigma} \right|_{\varsigma=0} = (\det \mathbf{C})\mathbf{C}^{-1} = I_3\mathbf{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

A partir da (4.3.9), e fazendo uso da (4.3.12), a relação constitutiva entre a parte desviadora do tensor de tensão de Piola–Kirchhoff de segunda espécie \mathbf{S}_{sD} e o tensor de

deformação é obtida derivando ϕ_{sD} com respeito ao tensor de deformação de Green $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ como segue

$$\mathbf{S}_{sD} = \frac{\partial \phi_{sD}}{\partial \mathbf{E}} = D_1 \mathbf{I} + D_2 \mathbf{C} + D_3 \mathbf{C}^{-1}, \quad (4.3.13)$$

onde D_i , $i = 1, 2, 3$, são funções de $\mathbf{C}(\mathbf{u}_s)$ através dos invariantes

$$\begin{aligned} D_1 &= 2C_1 I_3^{-1/3} + 2C_2 I_3^{-2/3} I_1, \\ D_2 &= -2C_2 I_3^{-2/3}, \\ D_3 &= -\frac{2}{3} C_1 I_3^{-1/3} I_1 - \frac{4}{3} C_2 I_3^{-2/3} I_2. \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

A relação constitutiva (4.3.13) é altamente não linear em $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_s$. Para tratar isto aparece o operador tangente constitutivo dado na (4.1.30), e que em função da (4.3.13) é

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}\mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s))] \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s &= \frac{d}{d\varsigma} \mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s + \varsigma \delta \mathbf{u}_s)) \Big|_{\varsigma=0} = B_1 \mathbf{I} + B_2 \mathbf{C} + B_3 \mathbf{C}^{-1} \\ &+ D_2 [(\nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s)^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s] - D_3 \mathbf{C}^{-1} [(\nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s)^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s] \mathbf{C}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

onde

$$B_i = \frac{d}{d\varsigma} D_i(\mathbf{u}_s + \varsigma \delta \mathbf{u}_s) \Big|_{\varsigma=0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.3.16)$$

e, além disso, foi usado o fato de ser

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varsigma} \mathbf{C}(\mathbf{u}_s + \varsigma \delta \mathbf{u}_s) \Big|_{\varsigma=0} &= (\nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s)^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s, \\ \frac{d}{d\varsigma} [\mathbf{C}(\mathbf{u}_s + \varsigma \delta \mathbf{u}_s)]^{-1} \Big|_{\varsigma=0} &= -\mathbf{C}^{-1} \left[\frac{d}{d\varsigma} \mathbf{C}(\mathbf{u}_s + \varsigma \delta \mathbf{u}_s) \Big|_{\varsigma=0} \right] \mathbf{C}^{-1} \\ &= -\mathbf{C}^{-1} [(\nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s)^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s] \mathbf{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

As expressões de B_i , $i = 1, 2, 3$, seguem de utilizar resultados clássicos da teoria da mecânica do contínuo, e resultam

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{4}{3} C_1 \frac{1}{(\det \mathbf{F})^{2/3}} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s) - \frac{8}{3} C_2 \frac{1}{(\det \mathbf{F})^{4/3}} \text{tr} \mathbf{C} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s) \\ &\quad + 4C_2 \frac{1}{(\det \mathbf{F})^{4/3}} (\mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s), \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

$$B_2 = \frac{8}{3} C_2 \frac{1}{(\det \mathbf{F})^{4/3}} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s), \quad (4.3.19)$$

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{4}{9} C_1 \frac{1}{(\det \mathbf{F})^{2/3}} \text{tr} \mathbf{C} (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s) - \frac{4}{3} C_1 \frac{1}{(\det \mathbf{F})^{2/3}} (\mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s) \\ &\quad + \frac{8}{9} C_2 \frac{1}{(\det \mathbf{F})^{4/3}} [(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2] (\mathbf{F}^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s) \\ &\quad - \frac{4}{3} C_2 \frac{1}{(\det \mathbf{F})^{4/3}} [2 \text{tr} \mathbf{C} (\mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s) - \mathbf{C} \cdot ((\nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s)^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s)]. \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

Como exemplo particular, um material de Mooney–Rivlin pode ser reduzido facilmente a um material de comportamento neo-Hookiano fazendo $C_2 = 0$ e $2C_1 = \mu_s$, onde μ_s é o

parâmetro constante característico de um material neo-Hookiano.

4.4 Aproximação do problema

Nas principais aplicações na modelagem do sistema cardiovascular o sangue pode ser razoavelmente modelado como incompressível. Logo, no que segue assume-se que o fluido é incompressível. Por sua vez o sangue é considerado como Newtoniano enquanto que o sólido é um material de tipo Mooney–Rivlin. Logo, valem as expressões (4.3.4) e (4.3.15) mostradas na Seção 4.3 para os operadores constitutivos tangentes do fluido e do sólido, respectivamente.

Esta seção mostra um possível modo para resolver de forma aproximada os problemas lineares obtidos nas Seções 4.1 e 4.2. O marco escolhido para discutir a aproximação numérica é o dos esquemas segregados correspondentes. A razão disto é que a abordagem monolítica constitui um problema extremamente complexo do ponto de vista da implementação computacional. Com efeito, o problema acoplado implica resolver em um só passo todas as incógnitas do problema. Desta maneira há equações nas quais existe um acoplamento entre variáveis Eulerianas e Lagrangianas (veja por exemplo a equação do deslocamento do sólido no caso deformável). Em um código de elementos finitos isto traduz-se em uma incidência variável no tempo, o que impõe uma dificuldade considerável em vistas de uma eficiente implementação. Contrariamente, o esquema segregado não apresenta tal inconveniente, sendo uma forma alternativa que torna mais exequível à implementação computacional dentro de um código de elementos finitos que já se encontre em funcionamento.

Como dito, o problema é aproximado empregando bases de aproximação de elementos finitos tanto para o fluido como para o sólido. Isto implica na utilização de duas malhas, uma Euleriana e outra Lagrangiana. Se o sólido é rígido a malha do sólido não é necessária e a implementação computacional realiza-se empregando uma função de *level set* como será explicado mais na frente. Em função de uma apresentação clara, nas seções que seguem considere o exemplo dado na Figura 4.1. Mostra-se também um detalhe das malhas do fluido e do sólido. A malha do sólido aqui foi colocada na configuração Ω_s^t , mas eventualmente pode estar definida sobre a configuração de referência Ω_s^0 .

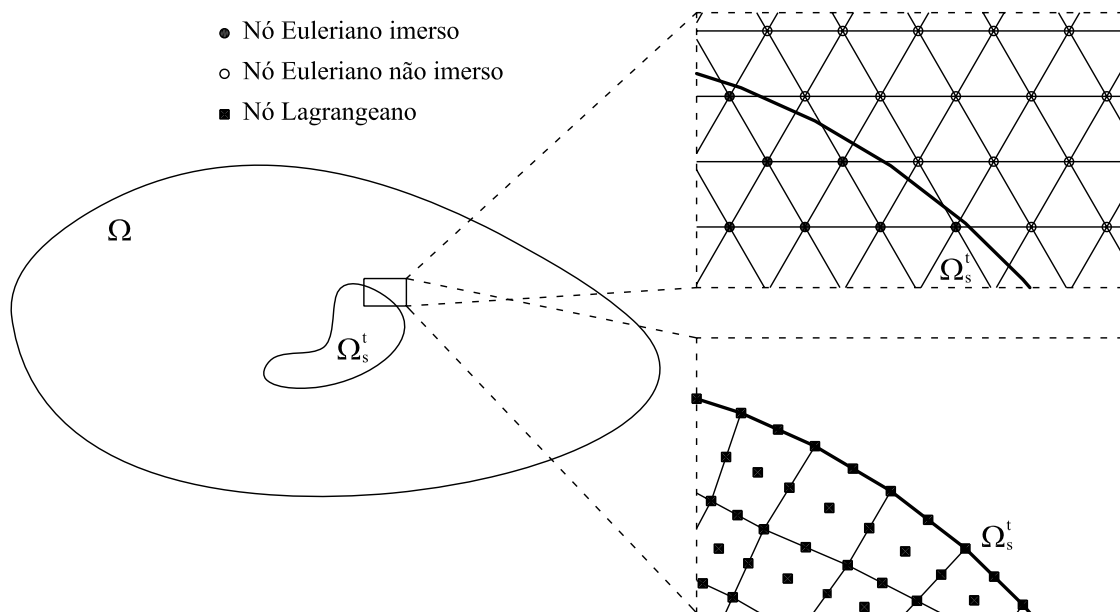


Figura 4.1: Exemplo de um problema empregando domínios imersos.

Para mostrar o caso que será tratado aqui, veja que na Figura 4.1 o sólido está discretizado com quadriláteros enquanto que o fluido está discretizado com triângulos (no caso de duas dimensões). Também para esta figura a Tabela 4.1 descreve a notação usada para denotar as partições empregadas nos diferentes domínios. Para o domínio Ω a denominação para a partição correspondente é \mathcal{I}_f , enquanto que para o domínio Ω_s^t é \mathcal{I}_s . Inclui-se ainda o número de nós por elemento, e segundo é especificado utiliza-se uma formulação de igual ordem para o fluido e diferentes ordens para o caso do sólido (combinação de interpolação quadrática/linear para o par deslocamento–pressão). Isto é discutido em detalhe em cada uma das seções que seguem.

Detalhe	Nós		Elementos		
	Conjunto	Cardinal	Conjunto	Cardinal	Nós por elemento 2D/3D
Domínio Ω (fluido)	\mathcal{I}_f^n	n_f	\mathcal{I}_f^e	e_f	3 / 4
Domínio $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$ (sólido (i))	$\mathcal{I}_{s_k}^{n, t_{n+1}}$	$n_{s_k}^{t_{n+1}}$	$\mathcal{I}_{s_k}^{e, t_{n+1}}$	$e_{s_k}^{t_{n+1}}$	9-4 / 27-8 (q-1)
Domínio $\Omega_s^{t_n}$ (sólido (ii))	\mathcal{I}_s^{n, t_n}	$n_s^{t_n}$	\mathcal{I}_s^{e, t_n}	$e_s^{t_n}$	9-4 / 27-8 (q-1)
Domínio Ω_s^0 (sólido)	$\mathcal{I}_s^{n, 0}$	n_s^0	$\mathcal{I}_s^{e, 0}$	e_s^0	9-4 / 27-8 (q-1)

Tabela 4.1: Descrição da discretização do problema aproximado.

Na Tabela 4.1 diferenciam-se os conjuntos de nós e de elementos, e ainda no caso do sólido detalham-se os elementos tanto na configuração de referência Ω_s^0 como na atual $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$, a qual por sua vez, de acordo ao processo iterativo que será comentado a seguir, é conhecida no tempo t_{n+1} e na iteração anterior k . Ainda outra forma de abordar o problema é possível e é também incluída na tabela anterior. Nesta, a configuração atual conhecida é $\Omega_s^{t_n}$, e não se realizam iterações para atingir, a partir do instante t_n , o instante t_{n+1} . As duas possibilidades são discutidas na seção que segue.

A seção começa pela descrição da aproximação efetuada na variável temporal junto com a discussão do procedimento iterativo. Depois analisa-se a aproximação sobre a variável espacial para o sub-problema do fluido, que resulta no mesmo problema tanto para sólidos deformáveis como para sólidos rígidos. Finalmente a seção é dedicada a discutir as aproximações no caso de sólidos deformáveis e rígidos, finalizando com alguns comentários adicionais sobre aspectos envolvidos na implementação computacional.

4.4.1 Discretização temporal e o processo iterativo

Para discretizar as derivadas com relação ao tempo emprega-se um esquema de Euler de diferenças finitas completamente implícito. Logo, a derivada primeira com relação ao tempo de uma quantidade genérica Θ está determinada por

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right|_{t_{n+1}} = \frac{\Theta^{n+1} - \Theta^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \approx \frac{\Theta^{n+1} - \Theta^n}{\Delta t}, \quad (4.4.1)$$

onde Θ^{n+1} e Θ^n indicam o estado da quantidade Θ nos instantes t_{n+1} e t_n respectivamente, e Δt é o passo de tempo. Por outro lado a derivada segunda é

$$\left. \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} \right|_{t_{n+1}} = \frac{\Theta^{n+1} - 2\Theta^n + \Theta^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t) \approx \frac{\Theta^{n+1} - 2\Theta^n + \Theta^{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (4.4.2)$$

Como dito, os demais termos no problema linear são avaliados de forma completamente implícita o que formalmente resulta em um esquema de discretização temporal de primeira ordem.

Para formular o problema linear há duas possibilidades.

- (i) A primeira consiste em considerar o ponto referenciado como \mathbf{U} em torno do qual se

realiza a linearização como \mathbf{U}_k^{n+1} , o que denota a solução conhecida correspondente ao instante t_{n+1} e na iteração anterior k . Em cada passo de tempo pode-se inicializar como $\mathbf{U}_1^{n+1} = \mathbf{U}^n$. Assim, o incremento na solução $\delta\mathbf{U}$ define-se como

$$\delta\mathbf{U}_{k+1}^{n+1} = \mathbf{U}_{k+1}^{n+1} - \mathbf{U}_k^{n+1}, \quad (4.4.3)$$

com $k = 1, 2, \dots$. O processo iterativo consiste em achar a solução $\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}_{K+1}^{n+1}$, em por exemplo K iterações, após satisfazer um critério de convergência como o seguinte

$$\|\delta\mathbf{U}_{K+1}^{n+1}\| \leq \epsilon \|\delta\mathbf{U}_2^{n+1}\|, \quad (4.4.4)$$

onde $\epsilon > 0$ é uma tolerância adequada. Logo, a solução convergida escreve-se como

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}_{K+1}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \sum_{k=1}^K \delta\mathbf{U}_{k+1}^{n+1}. \quad (4.4.5)$$

Assim, o incremento na solução ao longo do intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ é dado por

$$\delta\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n = \sum_{k=1}^K \delta\mathbf{U}_{k+1}^{n+1}. \quad (4.4.6)$$

Desta maneira as derivadas temporais escrevem-se como função do incremento na solução $\delta\mathbf{U}_{k+1}^{n+1}$ como segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta_{k+1}^{n+1}}{\partial t} &\approx \frac{\Theta_{k+1}^{n+1} - \Theta^n}{\Delta t} = \frac{\delta\Theta_{k+1}^{n+1}}{\Delta t} + \sum_{m=2}^k \frac{\delta\Theta_m^{n+1}}{\Delta t}, \\ \frac{\partial^2\Theta_{k+1}^{n+1}}{\partial t^2} &\approx \frac{\Theta_{k+1}^{n+1} - 2\Theta^n + \Theta^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\delta\Theta_{k+1}^{n+1}}{\Delta t^2} + \sum_{m=2}^k \frac{\delta\Theta_m^{n+1}}{\Delta t^2} - \frac{\delta\Theta^n}{\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Definindo o incremento acumulado como $\delta\Theta_A^{n+1} = \sum_{m=2}^k \delta\Theta_m^{n+1}$ tem-se finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta_{k+1}^{n+1}}{\partial t} &\approx \frac{\delta\Theta_{k+1}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\delta\Theta_A^{n+1}}{\Delta t}, \\ \frac{\partial^2\Theta_{k+1}^{n+1}}{\partial t^2} &\approx \frac{\delta\Theta_{k+1}^{n+1}}{\Delta t^2} + \frac{\delta\Theta_A^{n+1}}{\Delta t^2} - \frac{\delta\Theta^n}{\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

- (ii) A segunda possibilidade consiste em tomar o ponto de referência como sendo a solução conhecida no instante t_n , denominada \mathbf{U}^n , e a partir dali buscar qual o incremento $\delta\mathbf{U}$, chamado $\delta\mathbf{U}^{n+1}$, tal que

$$\delta\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n. \quad (4.4.9)$$

Assim, o problema linear compreende a resolução, para cada instante de tempo, do incremento na solução que permite avançar na variável temporal, sem realizar iterações no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$ como ocorre na opção detalhada anteriormente em (i).

Logo, as derivadas temporais resultam

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta^{n+1}}{\partial t} &\approx \frac{\Theta^{n+1} - \Theta^n}{\Delta t} = \frac{\delta\Theta^{n+1}}{\Delta t}, \\ \frac{\partial^2\Theta^{n+1}}{\partial t^2} &\approx \frac{\Theta^{n+1} - 2\Theta^n + \Theta^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{\delta\Theta^{n+1}}{\Delta t^2} - \frac{\delta\Theta^n}{\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

A seguir formula-se o problema de interação fluido-sólido deformável sob a óptica das duas alternativas (i) e (ii), e posteriormente a opção (ii) é empregada para o caso do sólido rígido.

Utilizando o processo descrito pela opção (i), o sistema (4.1.37) resulta ser a versão matricial, sob as considerações acima introduzidas com respeito à incompressibilidade do fluido, do seguinte problema variacional semi-contínuo constituído por duas partes:

Problema 4.1. *Para cada $n = 0, 1, \dots$, dada a solução no passo de tempo t_n , digamos $(\mathbf{v}_f^n, p_f^n, \mathbf{u}_s^n, p_s^n, \boldsymbol{\psi}^n)$ e dado também \mathbf{u}_s^{n-1} , realize as iterações $k = 1, 2, \dots$ inicializando o processo com $(\mathbf{v}_{f1}^{n+1}, p_{f1}^{n+1}, \mathbf{u}_{s1}^{n+1}, p_{s1}^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_1^{n+1}) = (\mathbf{v}_f^n, p_f^n, \mathbf{u}_s^n, p_s^n, \boldsymbol{\psi}^n)$, resolvendo os seguintes dois sub-problemas até que um critério de convergência seja atingido.*

Sub-problema do fluido:

Dado $(\delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^P$ encontre $(\delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1}, \delta p_{f_{k+1}}^{n+1}, \delta \boldsymbol{\psi}_{k+1}^{n+1})$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{\delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1}}{\Delta t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f (\nabla \mathbf{v}_{f_k}^{n+1}) \delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f (\nabla \delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1}) \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right. \\ & \left. + [\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_f(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{f_k}^{n+1}))] \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - \delta p_{f_{k+1}}^{n+1} \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f \right] \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}} [\delta \boldsymbol{\psi}_{k+1}^{n+1}]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \mathrm{d}\mathbf{x} = \\ & \int_{\Omega} \left[-\rho_f \frac{\delta p_{f_A}^{n+1}}{\Delta t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f - \rho_f (\nabla \mathbf{v}_{f_k}^{n+1}) \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f - \boldsymbol{\sigma}_{f_D}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{f_k}^{n+1})) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) \right. \\ & \left. + p_{f_k}^{n+1} \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right] \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{f_N}} (\bar{\mathbf{t}}_f^n + \delta \bar{\mathbf{t}}_f^{n+1}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}} [\boldsymbol{\psi}_k^{n+1}]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}} [\boldsymbol{\psi}_k^{n+1}]_e \cdot (\nabla \hat{\mathbf{v}}_f [(\delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^P]_e + \operatorname{div} [(\delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^P]_e \hat{\mathbf{v}}_f) \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_f \in \mathcal{V}_f, \quad (4.4.11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \hat{p}_f \operatorname{div} \delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1} \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_s} \nabla p_{f_k}^{n+1} \cdot \delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1} \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_s} \left(\frac{\delta p_{f_{k+1}}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla \delta p_{f_{k+1}}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega} \hat{p}_f \operatorname{div} \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_s} \left(\frac{\delta p_{f_A}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla p_{f_k}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_s} \left(\frac{\delta p_{f_A}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla p_{f_k}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} \right) \operatorname{div} [(\delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^P]_e \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}} \frac{1}{\kappa_s} \left[\nabla \hat{p}_f \cdot [(\delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^P]_e \left(\frac{\delta p_{f_A}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla p_{f_k}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} \right) \right. \\ & \left. + \hat{p}_f \nabla \left(\frac{\delta p_{f_A}^{n+1}}{\Delta t} + \nabla p_{f_k}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} \right) \cdot [(\delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^P]_e \right] \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall \hat{p}_f \in \mathcal{P}_f, \quad (4.4.11b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}} [\hat{\boldsymbol{\psi}}]_e \cdot \delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1} \mathrm{d}\mathbf{x} = - \int_{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}} [\hat{\boldsymbol{\psi}}]_e \cdot \left(\frac{[\delta \mathbf{u}_{s_A}^{n+1}]_e}{\Delta t} - \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} \right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}} [\hat{\boldsymbol{\psi}}]_e \cdot \left[\frac{[(\delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^P]_e}{\Delta t} - \nabla \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} [(\delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^P]_e \right. \\ & \left. + \left(\frac{[\delta \mathbf{u}_{s_A}^{n+1}]_e}{\Delta t} - \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} \right) \operatorname{div} [(\delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^P]_e \right] \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall [\hat{\boldsymbol{\psi}}]_e \in \boldsymbol{\Psi}, \quad (4.4.11c) \end{aligned}$$

onde a notação $[\hat{\psi}]_e$ é empregada para significar a variação admissível definida na configuração $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$. O espaço Ψ é consistente com a configuração sobre a qual está definida $[\hat{\psi}]_e$.

Sub-problema do sólido:

Dados $((\delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1})^P, (\delta p_{f_{k+1}}^{n+1})^P, (\delta \psi_{k+1}^{n+1})^P)$, encontre $(\delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1}, \delta p_{s_{k+1}}^{n+1})$ tal que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_s^0} \left[\rho_s^0 \frac{\delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1}}{\Delta t^2} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s - \rho_f^0 \left[\nabla \left(\frac{\delta \mathbf{v}_{f_A}^{n+1}}{\Delta t} + (\nabla \mathbf{v}_{f_k}^{n+1}) \mathbf{v}_{f_k}^{n+1} \right) \right]_m \delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\
& + [\mathcal{D} \mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_{s_k}^{n+1}))] \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1} \cdot (\mathbf{F}_k^{n+1})^T \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s + \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1} \mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_{s_k}^{n+1})) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& - \det \mathbf{F}_k^{n+1} ((\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1}) [\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{f_k}^{n+1}))]_m (\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& - \det \mathbf{F}_k^{n+1} [\nabla(\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{f_k}^{n+1})))]_m \delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1} (\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& + \det \mathbf{F}_k^{n+1} [\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{f_k}^{n+1}))]_m (\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} (\nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^T (\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& - (p_{s_k}^{n+1} - [p_{f_k}^{n+1}]_m) \det \mathbf{F}_k^{n+1} ((\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1}) ((\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) \\
& + (p_{s_k}^{n+1} - [p_{f_k}^{n+1}]_m) \det \mathbf{F}_k^{n+1} (\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} (\nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^T (\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& + [\nabla p_{f_k}^{n+1}]_m \cdot \delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1} \det \mathbf{F}_k^{n+1} ((\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) \\
& + \det \mathbf{F}_k^{n+1} ((\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1}) \psi_k^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \Big] d\mathbf{X} \\
& - \int_{\Omega_s^0} \delta p_{s_{k+1}}^{n+1} \det \mathbf{F}_k^{n+1} ((\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) d\mathbf{X} = \\
& \int_{\Omega_s^0} \left[\left(-\rho_s^0 \frac{\delta \mathbf{u}_{s_A}^{n+1}}{\Delta t^2} + \rho_s^0 \frac{\delta \mathbf{u}_s^n}{\Delta t^2} + \rho_f^0 \frac{[\delta \mathbf{v}_{f_A}^{n+1}]_m}{\Delta t} + \rho_f^0 [(\nabla \mathbf{v}_{f_k}^{n+1})]_m [\mathbf{v}_{f_k}^{n+1}]_m \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\
& + (\rho_s^0 - \rho_f^0) \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s - \mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_{s_k}^{n+1})) \cdot (\mathbf{F}_k^{n+1})^T \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& + \det \mathbf{F}_k^{n+1} [\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{f_k}^{n+1}))]_m (\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& + (p_{s_k}^{n+1} - [p_{f_k}^{n+1}]_m) \det \mathbf{F}_k^{n+1} ((\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) - (\det \mathbf{F}_k^{n+1}) \psi_k^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \Big] d\mathbf{X} \\
& + \int_{\Omega_s^0} \left[\rho_f^0 \left(\frac{[(\delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1})^P]_m}{\Delta t} + [(\nabla(\delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1})^P)]_m [\mathbf{v}_{f_k}^{n+1}]_m + [(\nabla \mathbf{v}_{f_k}^{n+1})]_m [(\delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1})^P]_m \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\
& + \det \mathbf{F}_k^{n+1} [\mathcal{D} \boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_{f_k}^{n+1}))]_m [\boldsymbol{\varepsilon}((\delta \mathbf{v}_{f_{k+1}}^{n+1})^P)]_m (\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \Big] d\mathbf{X} \\
& - \int_{\Omega_s^0} [(\delta p_{f_{k+1}}^{n+1})^P]_m \det \mathbf{F}_k^{n+1} ((\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) d\mathbf{X} \\
& - \int_{\Omega_s^0} \det \mathbf{F}_k^{n+1} ((\delta \psi_{k+1}^{n+1})^P \cdot \hat{\mathbf{v}}_s) d\mathbf{X} \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_s \in \mathcal{V}_s, \quad (4.4.12a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_s^0} \hat{p}_s \det \mathbf{F}_k^{n+1} ((\mathbf{F}_k^{n+1})^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1}) d\mathbf{X} - \int_{\Omega_s^0} \hat{p}_s \frac{1}{\kappa_s^*} \delta p_{s_{k+1}}^{n+1} d\mathbf{X} = \\
& \int_{\Omega_s^0} \hat{p}_s \left(\det \mathbf{F}_k^{n+1} - 1 + \frac{1}{\kappa_s^*} p_{s_k}^{n+1} \right) d\mathbf{X} \quad \forall \hat{p}_s \in \mathcal{P}_s. \quad (4.4.12b)
\end{aligned}$$

Neste problema alguns termos originalmente escritos em Ω_s^0 foram transferidos para a configuração atual $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$, da mesma forma que agora as equações de $\hat{\psi}$ estão nessa mesma configuração, o que é denotado por $[\hat{\psi}]_e$.

Seguindo o caminho indicado pela opção (ii) anteriormente descrita, o sistema (4.1.37) é a versão matricial do seguinte problema variacional semi-contínuo:

Problema 4.2. Para cada $n = 0, 1, \dots$, dada a solução no passo de tempo t_n , digamos $(\mathbf{v}_f^n, p_f^n, \mathbf{u}_s^n, p_s^n, \psi^n)$ e dado também \mathbf{u}_s^{n-1} , resolva os seguintes dois sub-problemas.

Sub-problema do fluido:

Dado $(\delta \mathbf{u}_s^{n+1})^P$ encontre $(\delta \mathbf{v}_f^{n+1}, \delta p_f^{n+1}, \delta \psi^{n+1})$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{\delta \mathbf{v}_f^{n+1}}{\Delta t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f (\nabla \mathbf{v}_f^n) \delta \mathbf{v}_f^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f (\nabla \delta \mathbf{v}_f^{n+1}) \mathbf{v}_f^n \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right. \\ & \left. + [\mathcal{D}\sigma_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f^n))] \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}_f^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - \delta p_f^{n+1} \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f \right] \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega_s^{t_n}} [\delta \psi^{n+1}]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \mathrm{d}\mathbf{x} = \\ & \int_{\Omega} [-\rho_f (\nabla \mathbf{v}_f^n) \mathbf{v}_f^n \cdot \hat{\mathbf{v}}_f - \sigma_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f^n)) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) \\ & + p_f^n \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f] \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{fN}} (\bar{\mathbf{t}}_f^n + \delta \bar{\mathbf{t}}_f^{n+1}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_s^{t_n}} [\psi^n]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega_s^{t_n}} [\psi^n]_e \cdot (\nabla \hat{\mathbf{v}}_f [(\delta \mathbf{u}_s^{n+1})^P]_e + \operatorname{div} [(\delta \mathbf{u}_s^{n+1})^P]_e \hat{\mathbf{v}}_f) \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_f \in \mathcal{V}_f, \quad (4.4.13a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \hat{p}_f \operatorname{div} \delta \mathbf{v}_f^{n+1} \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega_s^{t_n}} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_s} \nabla p_f^n \cdot \delta \mathbf{v}_f^{n+1} \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega_s^{t_n}} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_s} \left(\frac{\delta p_f^{n+1}}{\Delta t} + \nabla \delta p_f^{n+1} \cdot \mathbf{v}_f^n \right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega} \hat{p}_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f^n \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega_s^{t_n}} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_s} \nabla p_f^n \cdot \mathbf{v}_f^n \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega_s^{t_n}} \hat{p}_f \frac{1}{\kappa_s} \nabla p_f^n \cdot \mathbf{v}_f^n \operatorname{div} [(\delta \mathbf{u}_s^{n+1})^P]_e \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega_s^{t_n}} \frac{1}{\kappa_s} \left[\nabla \hat{p}_f \cdot [(\delta \mathbf{u}_s^{n+1})^P]_e \nabla p_f^n \cdot \mathbf{v}_f^n \right. \\ & \left. + \hat{p}_f \nabla (\nabla p_f^n \cdot \mathbf{v}_f^n) \cdot [(\delta \mathbf{u}_s^{n+1})^P]_e \right] \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall \hat{p}_f \in \mathcal{P}_f, \quad (4.4.13b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_s^{t_n}} [\hat{\psi}]_e \cdot \delta \mathbf{v}_f^{n+1} \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega_s^{t_n}} [\hat{\psi}]_e \cdot \mathbf{v}_f^n \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega_s^{t_n}} [\hat{\psi}]_e \cdot \left[\frac{[(\delta \mathbf{u}_s^{n+1})^P]_e}{\Delta t} - \nabla \mathbf{v}_f^n [(\delta \mathbf{u}_s^{n+1})^P]_e \right. \\ & \left. - \mathbf{v}_f^n \operatorname{div} [(\delta \mathbf{u}_s^{n+1})^P]_e \right] \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall [\hat{\psi}]_e \in \Psi, \quad (4.4.13c) \end{aligned}$$

onde a notação $[\hat{\psi}]_e$ é empregada para significar a variação admissível definida, agora, na configuração $\Omega_s^{t_n}$. O espaço Ψ é consistente com tal configuração.

Sub-problema do sólido:

Dados $((\delta \mathbf{v}_f^{n+1})^P, (\delta p_f^{n+1})^P, (\delta \psi^{n+1})^P)$, encontre $(\delta \mathbf{u}_s^{n+1}, \delta p_s^{n+1})$ tal que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_s^0} \left[\rho_s^0 \frac{\delta \mathbf{u}_s^{n+1}}{\Delta t^2} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s - \rho_f^0 [\nabla((\nabla \mathbf{v}_f^n) \mathbf{v}_f^n)]_m \delta \mathbf{u}_s^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\
& \quad + [\mathcal{D}\mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s^n))] \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s^{n+1} \cdot (\mathbf{F}^n)^T \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s + \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s^{n+1} \mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s^n)) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& \quad - \det \mathbf{F}^n ((\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s^{n+1}) [\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f^n))]_m (\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& \quad - \det \mathbf{F}^n [\nabla(\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f^n)))]_m \delta \mathbf{u}_s^{n+1} (\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& \quad + \det \mathbf{F}^n [\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f^n))]_m (\mathbf{F}^n)^{-T} (\nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s^{n+1})^T (\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& \quad - (p_s^n - [p_f^n]_m) \det \mathbf{F}^n ((\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s^{n+1}) ((\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) \\
& \quad + (p_s^n - [p_f^n]_m) \det \mathbf{F}^n (\mathbf{F}^n)^{-T} (\nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s^{n+1})^T (\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& \quad + [\nabla p_f^n]_m \cdot \delta \mathbf{u}_s^{n+1} \det \mathbf{F}^n ((\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) \\
& \quad \left. + \det \mathbf{F}^n ((\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s^{n+1}) \psi^n \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{X} \\
& - \int_{\Omega_s^0} \delta p_s^{n+1} \det \mathbf{F}^n ((\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) d\mathbf{X} = \int_{\Omega_s^0} \left[\left(\rho_s^0 \frac{\delta \mathbf{u}_s^n}{\Delta t^2} + \rho_f^0 [(\nabla \mathbf{v}_f^n)]_m [\mathbf{v}_f^n]_m \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\
& \quad + (\rho_s^0 - \rho_f^0) \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s - \mathbf{S}_{sD}(\mathbf{C}(\mathbf{u}_s^n)) \cdot (\mathbf{F}^n)^T \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& \quad + \det \mathbf{F}^n [\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f^n))]_m (\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \\
& \quad \left. + (p_s^n - [p_f^n]_m) \det \mathbf{F}^n ((\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) - (\det \mathbf{F}^n) \psi^n \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{X} \\
& + \int_{\Omega_s^0} \left[\rho_f^0 \left(\frac{[(\delta \mathbf{v}_f^{n+1})^P]_m}{\Delta t} + [(\nabla(\delta \mathbf{v}_f^{n+1})^P)]_m [\mathbf{v}_f^n]_m + [(\nabla \mathbf{v}_f^n)]_m [(\delta \mathbf{v}_f^{n+1})^P]_m \right) \cdot \hat{\mathbf{v}}_s \right. \\
& \quad \left. + \det \mathbf{F}^n [\mathcal{D}\boldsymbol{\sigma}_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f^n))]_m [\boldsymbol{\varepsilon}((\delta \mathbf{v}_f^{n+1})^P)]_m (\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s \right] d\mathbf{X} \\
& \quad - \int_{\Omega_s^0} [(\delta p_f^{n+1})^P]_m \det \mathbf{F}^n ((\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{v}}_s) d\mathbf{X} \\
& \quad - \int_{\Omega_s^0} \det \mathbf{F}^n ((\delta \psi^{n+1})^P \cdot \hat{\mathbf{v}}_s) d\mathbf{X} \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_s \in \mathcal{V}_s, \quad (4.4.14a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_s^0} \hat{p}_s \det \mathbf{F}^n ((\mathbf{F}^n)^{-T} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \delta \mathbf{u}_s^{n+1}) d\mathbf{X} - \int_{\Omega_s^0} \hat{p}_s \frac{1}{\kappa_s^*} \delta p_s^{n+1} d\mathbf{X} = \\
& \quad \int_{\Omega_s^0} \hat{p}_s \left(\det \mathbf{F}^n - 1 + \frac{1}{\kappa_s^*} p_s^n \right) d\mathbf{X} \quad \forall \hat{p}_s \in \mathcal{P}_s. \quad (4.4.14b)
\end{aligned}$$

Para este problema empregou-se a configuração atual $\Omega_s^{t_n}$ em lugar de $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$ que foi usada no Problema 4.1. Consistentemente, as equações de $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ estão definidas sobre $\Omega_s^{t_n}$.

Para o caso de um sólido rígido observe que é preciso estabelecer a relação entre $\delta \mathbf{u}_s^o$ e $\delta \mathbf{Q}_s^o$ com $\delta \mathbf{v}_s^o$ e $\delta \Omega_s^o$, de acordo com o expresso na (4.2.7). Por um lado, pode-se escrever

$$\delta \mathbf{u}_s^{on+1} = \Delta t \mathbf{v}_s^{on+1} = \Delta t \delta \mathbf{v}_s^{on+1} + \Delta t \mathbf{v}_s^{on}. \quad (4.4.15)$$

Fazendo um desenvolvimento em séries de Taylor resulta

$$\delta \mathbf{Q}_s^{on+1} = \mathbf{I} + \Delta t \Omega_s^{on+1} = \mathbf{I} + \Delta t \delta \Omega_s^{on+1} + \Delta t \Omega_s^{on}. \quad (4.4.16)$$

Com estas considerações, o sistema (4.2.37) é a versão matricial, segundo a alternativa (ii) discutida anteriormente, do seguinte problema variacional semi-contínuo:

Problema 4.3. Para cada $n = 0, 1, \dots$, dada a solução no passo de tempo t_n , digamos $(\mathbf{v}_f^n, p_f^n, \mathbf{v}_s^{on}, \Omega_s^{on}, \psi^n)$ e dado também $(\mathbf{u}_s^{on}, \mathbf{Q}_s^{on})$, resolva os seguintes dois sub-problemas.

Sub-problema do fluido:

Dados $((\delta \mathbf{v}_s^{on+1})^P, (\delta \Omega_s^{on+1})^P)$ encontre $(\delta \mathbf{v}_f^{n+1}, \delta p_f^{n+1}, \delta \psi^{n+1})$ tal que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\rho_f \frac{\delta \mathbf{v}_f^{n+1}}{\Delta t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f (\nabla \mathbf{v}_f^n) \delta \mathbf{v}_f^{n+1} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f (\nabla \delta \mathbf{v}_f^{n+1}) \mathbf{v}_f^n \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \right. \\ & \left. + [\mathcal{D}\sigma_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f^n))] \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}_f^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) - \delta p_f^{n+1} \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f \right] \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega_s^{t_n}} [\delta \psi^{n+1}]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \mathrm{d}\mathbf{x} = \\ & \int_{\Omega} [-\rho_f (\nabla \mathbf{v}_f^n) \mathbf{v}_f^n \cdot \hat{\mathbf{v}}_f - \sigma_{fD}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f^n)) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) \\ & + p_f^n \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}}_f + \rho_f \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f] \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Gamma_{fN}} (\bar{\mathbf{t}}_f^n + \delta \bar{\mathbf{t}}_f^{n+1}) \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \mathrm{d}\Gamma \\ & + \int_{\Omega_s^{t_n}} [\psi^n]_e \cdot \hat{\mathbf{v}}_f \mathrm{d}\mathbf{x} + \Delta t \int_{\Omega_s^{t_n}} [\psi^n]_e \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}_f (\mathbf{v}_s^{on} + (\delta \mathbf{v}_s^{on+1})^P) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & + \Delta t \int_{\Omega_s^{t_n}} [\psi^n]_e \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}_f (\Omega_s^{on} + (\delta \Omega_s^{on+1})^P) (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{on}) \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_f \in \mathcal{V}_f, \quad (4.4.17a) \end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} \hat{p}_f \operatorname{div} \delta \mathbf{v}_f^{n+1} \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega} \hat{p}_f \operatorname{div} \mathbf{v}_f^n \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall \hat{p}_f \in \mathcal{P}_f, \quad (4.4.17b)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_s^{t_n}} [\hat{\psi}]_e \cdot \delta \mathbf{v}_f^{n+1} \mathrm{d}\mathbf{x} = - \int_{\Omega_s^{t_n}} [\hat{\psi}]_e \cdot (\mathbf{v}_s^{on} + \Omega_s^{on} (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{on}) - \mathbf{v}_f^n) \mathrm{d}\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega_s^{t_n}} [\hat{\psi}]_e \cdot ((\delta \mathbf{v}_s^{on+1})^P + (\delta \Omega_s^{on+1})^P (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{on})) \\ & + \Delta t \Omega_s^{on} (\Omega_s^{on} + (\delta \Omega_s^{on+1})^P) (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{on}) - \Delta t \nabla \mathbf{v}_f^n (\mathbf{v}_s^{on} + (\delta \mathbf{v}_s^{on+1})^P) \\ & - \Delta t \nabla \mathbf{v}_f^n (\Omega_s^{on} + (\delta \Omega_s^{on+1})^P) (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{on}) \mathrm{d}\mathbf{x} \quad \forall [\hat{\psi}]_e \in \Psi, \quad (4.4.17c) \end{aligned}$$

onde, novamente, $[\hat{\psi}]_e$ denota a variação admissível definida na configuração $\Omega_s^{t_n}$, enquanto que o espaço Ψ é consistente com a configuração sobre a qual está definida $[\hat{\psi}]_e$.

Sub-problema do sólido:

Dado $(\delta \psi^{n+1})^P$, encontre $(\delta \mathbf{v}_s^{on+1}, \delta \Omega_s^{on+1})$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta m_{sf} \frac{\delta \mathbf{v}_s^{on+1}}{\Delta t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o &= \Delta m_{sf} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o \\ & - \left[\int_{\Omega_s^{t_n}} [\psi^n + (\delta \psi^{n+1})^P]_e \mathrm{d}\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\mathbf{v}}_s^o \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_s^o \in \mathcal{V}_s^o, \quad (4.4.18a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta\Omega_s^{on+1}}{\Delta t} \Delta\mathbb{I}_{sf}^n \cdot \hat{\Omega}_s^o + (\delta\Omega_s^{on+1}\Omega_s^{on} + \Omega_s^{on}\delta\Omega_s^{on+1})\Delta\mathbb{I}_{sf}^n \cdot \hat{\Omega}_s^o \\
& \quad + \Delta t \Omega_s^{on} \Omega_s^{on} (\delta\Omega_s^{on+1} \Delta\mathbb{I}_{sf}^n + \Delta\mathbb{I}_{sf}^n (\delta\Omega_s^{on+1})^T) \cdot \hat{\Omega}_s^o \\
& \quad + \Delta t \left[\int_{\Omega_s^{tn}} [\psi^n]_e \otimes \delta\Omega_s^{on+1}(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{on}) \, d\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\Omega}_s^o = \\
& \quad - \Omega_s^{on} \Omega_s^{on} \Delta\mathbb{I}_{sf}^n \cdot \hat{\Omega}_s^o - \Delta t \Omega_s^{on} \Omega_s^{on} (\Omega_s^{on} \Delta\mathbb{I}_{sf}^n + \Delta\mathbb{I}_{sf}^n (\Omega_s^{on})^T) \cdot \hat{\Omega}_s^o \\
& \quad - \Delta t \left[\int_{\Omega_s^{tn}} [\psi^n]_e \otimes \Omega_s^{on}(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{on}) \, d\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\Omega}_s^o \\
& \quad - \left[\int_{\Omega_s^{tn}} ([\psi^n]_e + [(\delta\psi^{n+1})^P]_e) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{on}) \, d\mathbf{x} \right] \cdot \hat{\Omega}_s^o \quad \forall \hat{\Omega}_s^o \in \mathcal{O}_s^o. \quad (4.4.18b)
\end{aligned}$$

Logo depois calcule \mathbf{u}_s^{on+1} e \mathbf{Q}_s^{on+1} , a fim de reposicionar o corpo rígido como segue

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_s^{on+1} &= \mathbf{u}_s^{on} + \Delta t (\mathbf{v}_s^{on} + \delta\mathbf{v}_s^{on+1}), \\
\mathbf{Q}_s^{on+1} &= \delta\mathbf{Q}_s^{on+1} \mathbf{Q}_s^{on} = (\mathbf{I} + \Delta t (\Omega_s^{on} + \delta\Omega_s^{on+1})) \mathbf{Q}_s^{on}. \quad (4.4.19)
\end{aligned}$$

Note que o sub-problema do fluido é muito similar ao caso de sólido deformável do Problema 4.1. A maior diferença, além da natureza diferente dos graus de liberdade do sólido, é que o sólido neste caso é incompressível e a equação de conservação da massa é mais simples. Além disso, na implementação computacional utilizam-se os ângulos de Euler para levar em conta as transformações que rotam o corpo até a posição atual em t_n . Isto é comentado novamente mais na frente.

4.4.2 Aproximação do problema do fluido com restrição

Nesta parte discute-se a resolução aproximada do sub-problema do fluido presente nos Problemas 4.1, 4.2 e 4.3. Como explicado nas Seções 4.1.3 e 4.2.3, o problema do escoamento do fluido é resolvido separadamente do problema do sólido. Entretanto, este encontra-se sujeito a uma restrição imposta por meio de um multiplicador de Lagrange definido sobre a região correspondente ao sólido Ω_s^t .

Dado que o fluido é incompressível, o espaço de aproximação para o par velocidade–pressão deve estar adequadamente escolhido de forma a satisfazer a condição LBB correspondente. Isto também ocorre na situação de fluido quase incompressível. A opção mais natural a priori pode ser a escolha de um elemento tipo Taylor–Hood, ou também Crouzeix–Raviart. No entanto, a fim de reduzir o tamanho do problema há outras alternativas mais atraentes. Estas estão baseadas no emprego de formulações estabilizadas que permitem o uso de espaços de aproximação de igual ordem. Em particular, a formulação escolhida neste capítulo para o problema do fluido é baseada na estabilização via técnicas de tipo Galerkin Least Squares [73]. Estas formulações contornam a condição LBB adicionando termos que estabilizam a formulação discreta. As técnicas anteriores combinam-se com o método SUPG [74] para prover estabilização frente a números de Reynolds elevados. Primeiro lembre que os espaços \mathcal{V}_f , \mathcal{P}_f e Ψ são

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_f &= \{\hat{\mathbf{v}}_f \in \mathbf{H}^1(\Omega); \hat{\mathbf{v}}_f|_{\Gamma_{fD}} = 0\}, \\
\mathcal{P}_f &= L^2(\Omega), \\
\Psi &= \mathbf{H}^{-1}(\Omega_s^t). \quad (4.4.20)
\end{aligned}$$

Assim sendo, os espaços de aproximação empregados neste primeiro sub-problema, levando em conta a discretização temporal e o processo iterativo apresentados na alternativa (i)

da seção anterior, são os seguintes

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_f^h &= [Y_h]^{n_d} \cap \mathcal{V}_f, \\
\mathcal{P}_f^h &= Y_h, \\
\mathbf{\Psi}^h &= [Z_h]^{n_d}, \\
Y_h &= \{\phi \in C^0(\overline{\Omega}); \phi|_{e_f} \in \mathbb{P}_1, \forall e_f \in \mathcal{I}_f^e\}, \\
Z_h &= \{\phi \in C^0(\overline{\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}}); \phi|_{e_{s_k}^{t_{n+1}}} \in \mathbb{P}_1, \forall e_{s_k}^{t_{n+1}} \in \mathcal{I}_{s_k}^{e t_{n+1}}\},
\end{aligned} \tag{4.4.21}$$

onde n_d é o número de dimensões do problema. Aqui também foi empregada a notação introduzida no início desta seção para as diferentes partições. Além disso, \mathbb{P}_1 denota a família Lagrangiana de polinômios lineares definida sobre o triângulo/tetraedro em $2/3$ dimensões. Em particular, deve-se dizer que a escolha do espaço Z_h acima não foi feita sob a base de uma demonstração que estabeleça que o par $(\mathcal{V}_f^h, \mathbf{\Psi}^h)$ satisfaz uma condição LBB com respeito à restrição que o multiplicador de Lagrange impõe. Neste sentido, a proposta aqui feita é heurística e poderia mudar caso seja futuramente necessário. Logo, os comentários feitos a seguir baseiam-se na escolha anterior.

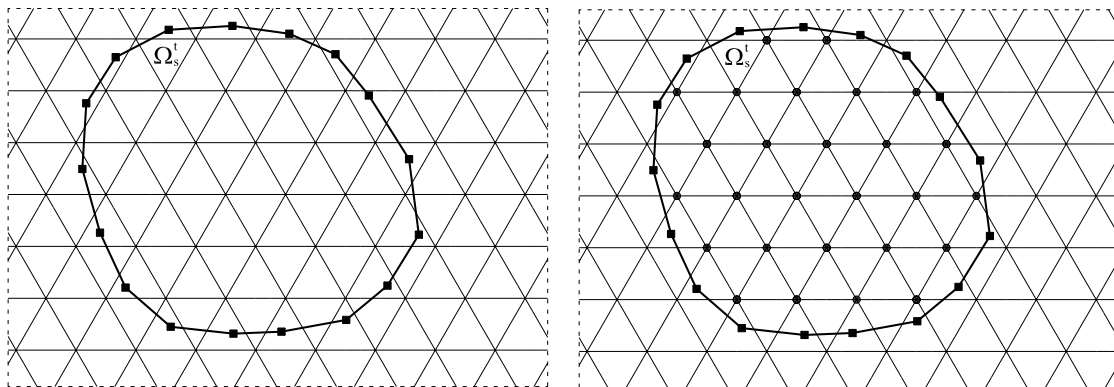
Para a alternativa (ii) o único que muda é a definição do espaço Z_h , sendo agora

$$Z_h = \{\phi \in C^0(\overline{\Omega_s^{t_n}}); \phi|_{e_s^{t_n}} \in \mathbb{P}_1, \forall e_s^{t_n} \in \mathcal{I}_s^{e t_n}\}. \tag{4.4.22}$$

Na abordagem proposta, como comentado anteriormente, empregam-se duas malhas, uma Euleriana e outra Lagrangiana. No problema tratado nesta seção há um acoplamento entre as variáveis Eulerianas e Lagrangianas e portanto haveria acoplamento entre graus de liberdade das duas malhas. Para evitar isto emprega-se o esquema segregado e procede-se como segue. Seja a alternativa (i) proposta na seção anterior. Conhecido o estado do sistema em t_{n+1} e na iteração k define-se a posição do sólido $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$ (ver Figura 4.2(a)), desta forma é possível identificar quais são os nós do fluido que se encontram imersos no domínio $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$. Este subconjunto de \mathcal{I}_f^n denomina-se $\mathcal{I}_{f s_k}^{n t_{n+1}} = \Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}(\mathcal{I}_f^n)$, onde $\Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}$ denota a projeção do domínio Ω sobre $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$ de acordo com as partições correspondentes (ver Figura 4.2(b)). Nestes nós será calculado o multiplicador de Lagrange ψ , devolvendo o problema à situação na qual se resolvem graus de liberdade em uma única malha. Depois, com o conjunto $\mathcal{I}_{f s_k}^{n t_{n+1}}$ define-se o subconjunto de elementos de \mathcal{I}_f^e , denominado $\mathcal{I}_{f s_k}^{e t_{n+1}} = \Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}(\mathcal{I}_f^e)$, nestes elementos as funções de aproximação para o multiplicador de Lagrange são não nulas (ver Figura 4.2(c)). Uma vez definido este domínio vê-se que fica determinada a função característica para o multiplicador de Lagrange que tem valor unitário nos nós em $\mathcal{I}_{f s_k}^{n t_{n+1}}$ e zero no resto. Este domínio denomina-se também $\Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}(\Omega)$ e em geral é $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}} \neq \Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}(\Omega)$. Assim, a função possui valor unitário nos elementos completamente imersos (ver Figura 4.2(d)) e decresce a zero linearmente nos elementos com imersão parcial (ver Figura 4.2(e)). Isto estabelece que o domínio $\mathcal{I}_{f s_k}^{e t_{n+1}}$ é decomposto em $(\mathcal{I}_{f s_k}^{e t_{n+1}})_c$ e $(\mathcal{I}_{f s_k}^{e t_{n+1}})_p$, onde c e p denotam elementos completamente imersos e parcialmente imersos respectivamente. Assim, na matriz do sistema os elementos em $(\mathcal{I}_{f s_k}^{e t_{n+1}})_c$ contribuem com termos nas equações de todos os nós enquanto que os elementos em $(\mathcal{I}_{f s_k}^{e t_{n+1}})_p$ contribuem de forma parcial à matriz.

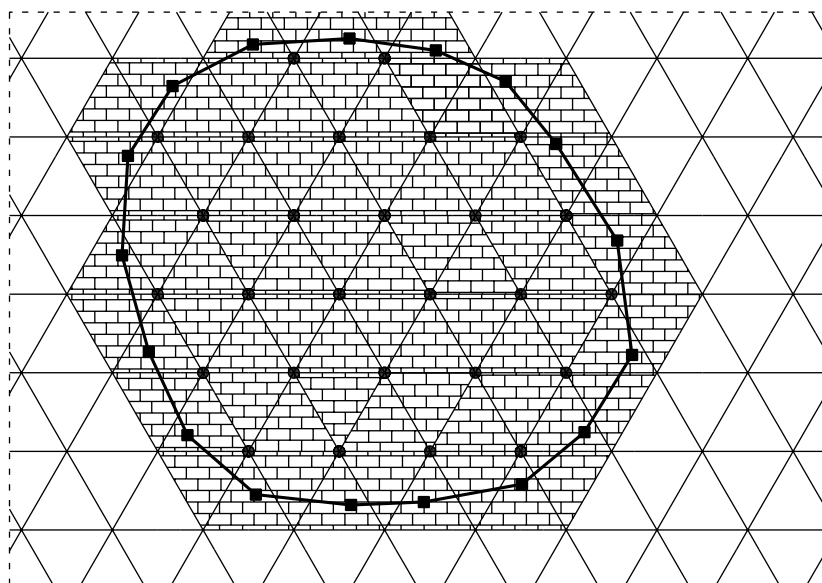
O domínio na malha Euleriana ocupado pelo sólido, isto é $\Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}(\Omega)$, utiliza-se para definir o novo espaço usado para aproximar o multiplicador de Lagrange ψ como segue

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Psi}^h &= [Z_h^\Lambda]^{n_d}, \\
Z_h^\Lambda &= \{\phi \in C^0(\overline{\Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}(\Omega)}); \phi|_{e_f} \in \mathbb{P}_1, \forall e_f \in \mathcal{I}_{f s_k}^{e t_{n+1}}\}.
\end{aligned} \tag{4.4.23}$$

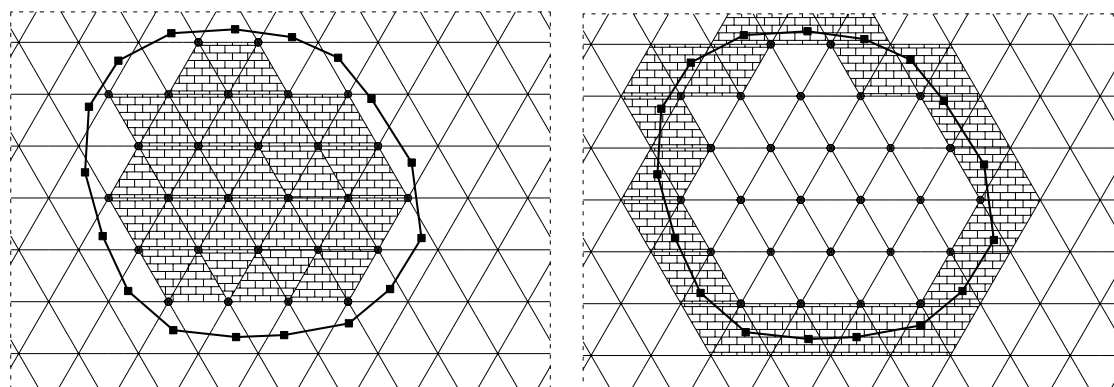


(a) Domínio $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$ imerso na malha do fluido.

(b) Conjunto de nós $\mathcal{I}_{fs_k}^{n, t_{n+1}} = \Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}(\mathcal{I}_f^n)$.



(c) Domínio $\Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}(\Omega)$ e conjunto de elementos imersos $\mathcal{I}_{fs_k}^{e, t_{n+1}} = \Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}(\mathcal{I}_f^e)$.



(d) Domínio $(\mathcal{I}_{fs_k}^{e, t_{n+1}})_c$.

(e) Domínio $(\mathcal{I}_{fs_k}^{t_{n+1}})_p$.

Figura 4.2: Construção do operador $\Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}$ para identificar o domínio $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$ sobre Ω .

Dado que, além do aqui exposto a respeito do tratamento do multiplicador de Lagrange e das interpolações, a abordagem é clássica, não se detalham as contribuições que intervêm na montagem da matriz do sistema.

Uma vez resolvido este sub-problema o que se obtém é a quantidade $[\delta\psi_{k+1}^{n+1}]_e^f$, onde o índice f indica que está definida sobre $\mathcal{I}_{f s_k}^{e t_{n+1}}$. Assim, precisa-se interpolar este campo para a malha do sólido posto que é um campo Lagrangiano e deve ser transportado com o sólido quando este se deslocar. Aqui surge então o operador denominado $\Upsilon_{s_k}^{t_{n+1}}$ que interpola o campo definido em $\mathcal{I}_{f s_k}^{e t_{n+1}}$ sobre a partição $\mathcal{I}_{s_k}^{e t_{n+1}}$, ou seja $\Upsilon_{s_k}^{t_{n+1}}([\delta\psi_{k+1}^{n+1}]_e^f) = [\delta\psi_{k+1}^{n+1}]_e$, recuperando a variável Lagrangiana na malha do sólido $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$.

Com estas considerações algumas alterações devem ser feitas no sub-problema do fluido no Problema 4.1. Ali, as integrais sobre $\Omega_{s_k}^{t_{n+1}}$ devem ser consideradas sobre o domínio $\Lambda_{s_k}^{t_{n+1}}(\Omega)$. Assim, as funções $[\hat{\psi}^h]_e$ dos mencionados problemas estão agora no espaço Ψ^h dado pela (4.4.23).

Um outro fato a ser observado é a necessidade de transferir informação da malha do sólido para a malha do fluido. Isto pode ser visto nas equações (4.4.11a)–(4.4.11c) onde o segundo membro depende, por um lado, da predição $[(\delta\mathbf{u}_{s_{k+1}}^{n+1})^P]_e$ e do incremento acumulado $[\delta\mathbf{u}_{s_A}^{n+1}]_e$, e, por outro lado, do valor $[\psi_k^{n+1}]_e$. O que realmente é necessário é o valor interpolado em cada ponto de Gauss ao realizar a integração numérica dos termos de carga. A construção destas interpolações pode seguir linhas básicas como uma interpolação em função da posição no espaço de pontos correspondentes. Outra alternativa é empregar metodologias mais sofisticadas como métodos de *multi-grid* para transferir as quantidades Lagrangianas para os nós da malha do fluido. Em particular utiliza-se a primeira opção para a implementação computacional aqui proposta.

Todo o que foi explicado no parágrafo anterior para a alternativa (i) pode ser estendido para o caso mais simples da opção (ii) quando o sólido é deformável e quando é rígido. Correspondentemente tem-se o domínio $\Omega_s^{t_n}$ que permite identificar os nós dentro de um subconjunto $\mathcal{I}_{f s}^{t_n} = \Lambda_s^{t_n}(\mathcal{I}_f^n)$. Nestes nós calcula-se o multiplicador de Lagrange como incógnita. Também identificam-se os elementos em questão dentro do subconjunto $\mathcal{I}_{f s}^{e t_n} = \Lambda_s^{t_n}(\mathcal{I}_f^e)$. Logo, o domínio dentro da malha Euleriana ocupado pelo sólido é $\Lambda_s^{t_n}(\Omega)$ e é usado para redefinir o espaço Ψ^h , através de Z_h^Λ , como segue

$$\begin{aligned} \Psi^h &= [Z_h^\Lambda]^{n_d}, \\ Z_h^\Lambda &= \{\phi \in C^0(\overline{\Lambda_s^{t_n}(\Omega)}); \phi|_{e_f} \in \mathbb{P}_1, \forall e_f \in \mathcal{I}_{f s}^{e t_n}\}. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

Juntamente com isto está a necessidade de interpolar as quantidades, o que agora é denotado através do operador $\Upsilon_s^{t_n}$ que interpola o campo definido em $\mathcal{I}_{f s}^{e t_n}$ sobre a partição $\mathcal{I}_{s}^{e t_n}$, ou seja $\Upsilon_s^{t_n}([\delta\psi^{n+1}]_e^f) = [\delta\psi^{n+1}]_e$. Assim, nos Problemas 4.2 e 4.3 as integrais sobre $\Omega_s^{t_n}$ são consideradas sobre $\Lambda_s^{t_n}(\Omega)$, e as funções $[\hat{\psi}^h]_e$ dos mencionados problemas estão agora no espaço Ψ^h dado pela (4.4.24).

Como comentário geral, note que outras alternativas podem ser exploradas com relação à aproximação do multiplicador de Lagrange. Uma outra opção natural seria empregar funções constantes para cada elemento imerso em $\mathcal{I}_{f s_k}^{e t_{n+1}}$, o que dá como resultado uma função característica, a qual representa a posição do sólido, descontínua. De fato, neste trabalho não foi formalmente analisada a questão relativa às condições que os espaços de elementos finitos devem satisfazer para que não ocorra trancamento da solução produto de não atender a condição LBB associada à restrição no problema discreto. Este constitui sem dúvidas um trabalho futuro, entretanto, vale a pena mencionar que na literatura encontram-se algumas abordagens mais sofisticadas para impor restrições como a aqui tratada e que asseguram convergência ótima. Estas estão baseadas no emprego de métodos de Galerkin descontínuos sobre o conjunto de elementos que compõem a partição

$(\mathcal{I}_{fs_k}^{e t_{n+1}})_p$ (ver Figura 4.2(e)). Idéias desta classe foram exploradas em [94] para casos de contornos imersos, com a diferença de que nesse trabalho os domínios imersos permanecem fixos no tempo e o objetivo é impor condições de contorno de tipo Dirichlet em malhas estruturadas.

4.4.3 Aproximação do problema do sólido deformável

Nesta parte discute-se a resolução aproximada do sub-problema de sólido presente nos Problemas 4.1 e 4.2. O problema de sólidos deformáveis aqui tratado constitui um problema clássico com a diferença de ter um segundo membro com carregamento dependente das quantidades definidas na malha do fluido. Embora o sólido seja considerado compressível mantém-se a separação da componente hidrostática da tensão a fim de poder efetuar o limite de incompressibilidade. Logo, no que segue a aproximação é dada de forma tal que permita atender ao limite de incompressibilidade sem incorrer em qualquer instabilidade numérica. Assim sendo, o espaço de aproximação do par deslocamento–pressão deve ser tal que satisfaça a condição LBB correspondente. A alternativa mais natural é empregar espaços com interpolação de diferente ordem. Primeiramente lembre-se que os espaços \mathcal{V}_s e \mathcal{P}_s são

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_s &= \{\hat{\mathbf{v}}_s \in \mathbf{H}^1(\Omega_s^0); \hat{\mathbf{v}}_s|_{\Gamma_{s_D}} = 0\}, \\ \mathcal{P}_s &= L^2(\Omega_s^0).\end{aligned}\tag{4.4.25}$$

Logo, os espaços de aproximação empregados neste sub-problema são os seguintes

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_s^h &= [W_h]^{n_d} \cap \mathcal{V}_s, \\ \mathcal{P}_s^h &= X_h, \\ W_h &= \{\phi \in C^0(\overline{\Omega_s^0}); \phi|_{e_s^0} \in \mathbb{Q}_2, \forall e_s^0 \in \mathcal{I}_s^{e0}\}, \\ X_h &= \{\phi \in C^0(\overline{\Omega_s^0}); \phi|_{e_s^0} \in \mathbb{Q}_1, \forall e_s^0 \in \mathcal{I}_s^{e0}\},\end{aligned}\tag{4.4.26}$$

onde n_d é o número de dimensões do problema. Os elementos são quadriláteros no caso bidimensional e hexaedros no caso tridimensional, e as famílias de polinômios Lagrangianos de primeira e segunda ordem sobre tais elementos denotam-se por \mathbb{Q}_1 e \mathbb{Q}_2 respectivamente.

Como se vê na equação (4.4.12a), ou na (4.4.14a), precisa-se de informações vindas da malha Euleriana. Para realizar a integração numérica e obter as contribuições de cada elemento é necessário interpolar sobre cada ponto de Gauss as quantidades como velocidade \mathbf{v}_f e pressão p_f . Para isto pode ser empregada uma interpolação básica, como comentado no problema do fluido, ou também pode ser formulado um esquema de transferência de informação entre malhas através de métodos *multi-grid*. Novamente, a primeira alternativa é preferida em uma primeira implementação computacional.

Outras possibilidades empregando elementos de mais baixa ordem podem ser aquelas baseadas em macro-elementos para calcular o gradiente da deformação como ocorre com a metodologia **F**-bar [121]. Assim como no sub-problema do fluido, a abordagem não escapa a qualquer tratamento clássico e por isto não se apresentam as contribuições elementares que conformam a matriz do sistema.

4.4.4 Aproximação do problema para sólidos rígidos

Nesta parte discute-se a resolução aproximada do sub-problema de sólido rígido presente no Problema 4.3. Quando o sólido é rígido o número de graus de liberdade reduz-se drasticamente e a malha Lagrangiana não é estritamente necessária. Para ser consistentes no tratamento do campo $\boldsymbol{\psi}$ este deve ser convectado pela velocidade do sólido uma vez que foram resolvidos ambos passos de cálculo e antes de passar ao próximo passo

de tempo. Por esta razão a implementação computacional está baseada em um método de *level-set* para representar o domínio ocupado pelo sólido. Este campo escalar está definido em toda a malha Euleriana e varia com o tempo conforme o movimento do sólido.

Como dito, este sub-problema compreende a resolução de seis equações diferenciais ordinárias na variável temporal que no Problema 4.3 já se encontram discretizadas. As três correspondentes à velocidade do centro de massa não implicam maiores complicações, somente é preciso integrar as quantidades associadas à variável ψ no domínio $\Omega_s^{t_n}$ (ver equação (4.4.18a)), o qual é determinado pela função de *level-set* ao considerar os valores menores a um valor pré-determinado (que é aquele que define o contorno do sólido). Para resolver a equação do momento angular há alguns aspectos adicionais a serem considerados. O caso em duas dimensões é simples, e o problema consiste em resolver uma única velocidade angular. Neste caso, supondo que o problema está no plano x - y o tensor $\mathbf{\Omega}_s^o$ (a sua variação $\hat{\mathbf{\Omega}}_s^o$ e o incremento $\delta\mathbf{\Omega}_s^o$ seguem a mesma forma) é

$$\mathbf{\Omega}_s^o = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{sz}^o & 0 \\ -\omega_{sz}^o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.4.27)$$

e a equação correspondente resulta

$$\begin{aligned} (\Delta I_{sf_{xx}}^n + \Delta I_{sf_{yy}}^n) \frac{\delta\omega_{sz}^{o_{n+1}}}{\Delta t} \hat{\omega}_{sz}^o - \Delta t \delta\omega_{sz}^{o_{n+1}} \left[\int_{\Omega_s^{t_n}} [\psi^n]_e \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{o_n}) d\mathbf{x} \right] \hat{\omega}_{sz}^o = \\ \Delta t \omega_{sz}^{o_n} \left[\int_{\Omega_s^{t_n}} [\psi^n]_e \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{o_n}) d\mathbf{x} \right] \hat{\omega}_{sz}^o \\ - \left[\int_{\Omega_s^{t_n}} ([\psi^n]_e + [(\delta\psi^{n+1})^P]_e) \times (\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{o_n}) d\mathbf{x} \right] \hat{\omega}_{sz}^o, \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

onde $\Delta I_{sf_{xx}}^n$ e $\Delta I_{sf_{yy}}^n$ são as componentes do tensor $\Delta\mathbb{I}_{sf}^n$, e os vetores $[\psi^n]_e$ e $(\mathbf{x} - \mathbf{u}_s^{o_n})$ possuem duas componentes. Logo depois o ângulo de rotação, digamos θ_{sz}^o , é atualizado fazendo

$$\theta_{sz}^{o_{n+1}} = \theta_{sz}^{o_n} + \Delta t \omega_{sz}^{o_{n+1}}, \quad (4.4.29)$$

com o qual se encontra a nova posição do sólido $\Omega_s^{t_n}$. No caso tridimensional o tensor $\mathbf{\Omega}_s^o$ é

$$\mathbf{\Omega}_s^o = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{sz}^o & -\omega_{sy}^o \\ -\omega_{sz}^o & 0 & \omega_{sx}^o \\ \omega_{sy}^o & -\omega_{sx}^o & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4.30)$$

Aqui é preciso empregar os ângulos de Euler a fim de posicionar corretamente o sólido depois de cada passo de cálculo. Em outras palavras, o cálculo destes ângulos, denominados α_s^o , β_s^o e γ_s^o , permite obter a matriz de rotação \mathbf{Q}_s^o necessária para determinar o domínio Ω_s^t pois a mesma é

$$\mathbf{Q}_s^o = \begin{pmatrix} \cos \gamma_s^o & \sin \gamma_s^o & 0 \\ -\sin \gamma_s^o & \cos \gamma_s^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_s^o & \sin \beta_s^o \\ 0 & -\sin \beta_s^o & \cos \beta_s^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_s^o & \sin \alpha_s^o & 0 \\ -\sin \alpha_s^o & \cos \alpha_s^o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4.31)$$

Depois de resolver a equação (4.4.18b) nas variáveis $\delta\omega_{sx}^{o_{n+1}}$, $\delta\omega_{sy}^{o_{n+1}}$ e $\delta\omega_{sz}^{o_{n+1}}$ procede-se a atualizar os ângulos de Euler como segue. Assume-se que se conhecem os ângulos no instante t_n , isto é, $\alpha_s^{o_n}$, $\beta_s^{o_n}$ e $\gamma_s^{o_n}$, com os quais calcula-se a matriz de rotação $\mathbf{Q}_s^{o_n}$ empregando a (4.4.31). Assim, calculam-se três ângulos que conformam a matriz de rotação

incremental a ser aplicada para passar do tempo t_n a t_{n+1} como

$$\begin{aligned}\theta_{sx}^{on+1} &= \Delta t \omega_{sx}^{on+1} = \Delta t (\omega_{sx}^{on} + \delta \omega_{sx}^{on+1}), \\ \theta_{sy}^{on+1} &= \Delta t \omega_{sy}^{on+1} = \Delta t (\omega_{sy}^{on} + \delta \omega_{sy}^{on+1}), \\ \theta_{sz}^{on+1} &= \Delta t \omega_{sz}^{on+1} = \Delta t (\omega_{sz}^{on} + \delta \omega_{sz}^{on+1}).\end{aligned}\tag{4.4.32}$$

A matriz de rotação $\delta \mathbf{Q}_s^{on+1} = \mathbf{I} + \Delta t \boldsymbol{\Omega}_s^{on+1}$ é então construída como segue

$$\delta \mathbf{Q}_s^{on+1} = \begin{pmatrix} 1 & \theta_{sz}^{on+1} & -\theta_{sy}^{on+1} \\ -\theta_{sz}^{on+1} & 1 & \theta_{sx}^{on+1} \\ \theta_{sy}^{on+1} & -\theta_{sx}^{on+1} & 1 \end{pmatrix},\tag{4.4.33}$$

de acordo com a (4.4.16). Depois obtém-se a matriz \mathbf{Q}_s^{on+1} como $\mathbf{Q}_s^{on+1} = \delta \mathbf{Q}_s^{on+1} \mathbf{Q}_s^{on}$ de acordo com a (4.4.19). Finalmente é preciso obter os ângulos de Euler atualizados, isto é α_s^{on+1} , β_s^{on+1} e γ_s^{on+1} , empregando as seguintes fórmulas

$$\begin{aligned}\alpha_s^{on+1} &= \arcsin(-[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{32}), \\ \beta_s^{on+1} &= \begin{cases} \operatorname{sgn}([\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{31}) \arctan \left| \frac{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{31}}{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{33}} \right| & \text{se } y \neq 0 \text{ e } x > 0, \\ \operatorname{sgn}([\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{31}) \frac{\pi}{2} & \text{se } y \neq 0 \text{ e } x = 0, \\ \operatorname{sgn}([\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{31}) \left(\pi - \arctan \left| \frac{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{31}}{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{33}} \right| \right) & \text{se } y \neq 0 \text{ e } x < 0, \\ 0 & \text{se } y = 0 \text{ e } x > 0, \\ \text{Não definido} & \text{se } y = 0 \text{ e } x = 0, \\ \pi & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0, \end{cases} \\ \gamma_s^{on+1} &= \begin{cases} \operatorname{sgn}([\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{12}) \arctan \left| \frac{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{12}}{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{22}} \right| & \text{se } y \neq 0 \text{ e } x > 0, \\ \operatorname{sgn}([\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{12}) \frac{\pi}{2} & \text{se } y \neq 0 \text{ e } x = 0, \\ \operatorname{sgn}([\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{12}) \left(\pi - \arctan \left| \frac{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{12}}{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{22}} \right| \right) & \text{se } y \neq 0 \text{ e } x < 0, \\ 0 & \text{se } y = 0 \text{ e } x > 0, \\ \text{Não definido} & \text{se } y = 0 \text{ e } x = 0, \\ \pi & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0, \end{cases}\end{aligned}\tag{4.4.34}$$

onde $[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{ij}$ é a componente ij da matriz \mathbf{Q}_s^{on+1} e $\operatorname{sgn}(\cdot)$ é a função sinal. Além disso é $\arctan \left| \frac{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{31}}{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{33}} \right| \in [0, \frac{\pi}{2})$ e $\arctan \left| \frac{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{12}}{[\mathbf{Q}_s^{on+1}]_{22}} \right| \in [0, \frac{\pi}{2})$. Assim sendo, a posição do sólido é determinada mediante o vetor que dá a localização do centro de massa e a tripla conformada pelos ângulos de Euler.

4.5 Resultados numéricos para casos de fluido-sólido rígido

Nesta seção apresentam-se diversos exemplos que visam mostrar a potencialidade do método de domínios imersos desenvolvido, no nível do problema contínuo, no Capítulo 3 e cuja aproximação numérica tem sido apresentada ao longo do presente capítulo. Os exemplos aqui tratados mostram situações nas quais ocorre interação entre um fluido e corpos rígidos em duas e três dimensões. Portanto, emprega-se o Problema 4.3 que é discretizado no espaço como comentado nas Seções 4.4.2 e 4.4.4. Em todos os problemas que seguem as quantidades físicas estão dadas em forma adimensional.

4.5.1 Caso 1: Corpo com velocidade imposta conhecida

A idéia para colocar este problema foi tomada de [55]. Este primeiro exemplo em duas dimensões visa mostrar a situação mais simples possível que é aquela na qual a velocidade do sólido é imposta externamente, ou seja que é um valor conhecido para todo instante de tempo. O problema consiste, como mostrado na Figura 4.3(a), em um corpo circular confinado em um domínio retangular que se encontra cheio de fluido. As dimensões são $L = 20$, $H = 10$, $a = 5$, $b = 5$ e $R = 0.5$. As condições de contorno no fluido são de Dirichlet e homogêneas em todo o contorno. O fluido é Newtoniano com viscosidade $\mu = 0.01$ e massa específica $\rho_f = 1$. A malha de triângulos compõe-se de 46012 nós e o passo de tempo é $\Delta t = 0.002$. Na Figura 4.3(b) apresenta-se um detalhe da malha espacial em torno do corpo imerso que mostra a não conformidade entre a malha do fluido e o corpo sólido.

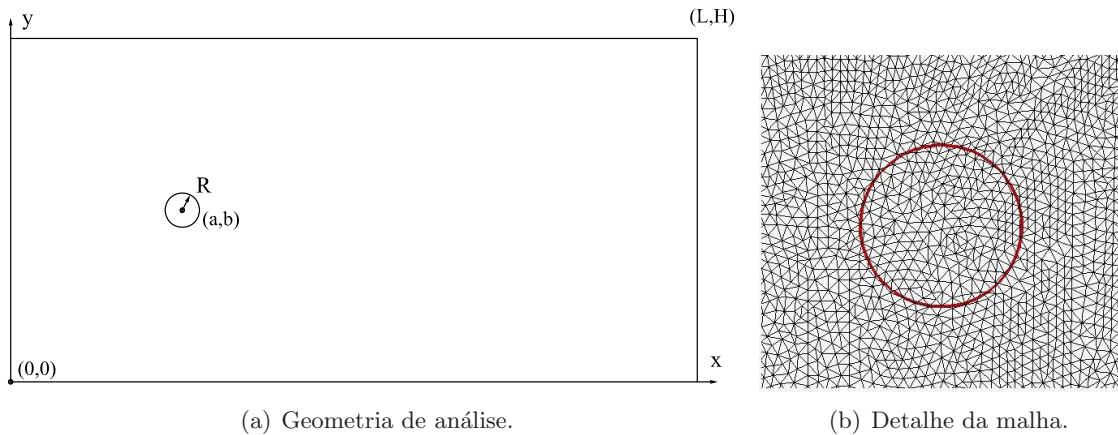


Figura 4.3: Corpo circular rodeado por um fluido e detalhe da malha espacial.

O sólido inicia o movimento na posição indicada na Figura 4.3(a) e segue a trajetória no plano x - y determinada pelo campo de velocidade $\mathbf{v}_s = (v_{sx}, v_{sy})$ dado por

$$\begin{aligned} v_{sx} &= \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi t}{20}\right), \\ v_{sy} &= \frac{3\pi^2}{40} \cos\left[\pi\left(1 - \cos\left(\frac{\pi t}{20}\right)\right)\right] \sin\left(\frac{\pi t}{20}\right). \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

O máximo número de Reynolds é aproximadamente $Re = 150$. Assim, o tempo em que o corpo atinge a máxima posição no eixo x , o que poderia ser chamado de período, é $T = 20$. Simularam-se seis períodos, portanto em três oportunidades o corpo volta à posição inicial, chegando a um tempo final da simulação $T_f = 120$.

A seqüência da Figura 4.4 mostra o módulo do campo de velocidade do fluido para diversos instantes de tempo ao longo de toda a simulação. Ainda inclui-se o contorno que delimita o domínio do corpo Ω_s^t para cada instante de tempo. Dado que a malha do fluido é espacial pode-se ver o campo de velocidade do fluido artificial (região interna a Ω_s^t). Vê-se que o movimento do corpo gera uma ação misturadora no fluido. Esta ação é enxergada por parte do problema do fluido *simplesmente* como uma força de volume que varia com a posição em função do tempo. No entanto, esta força está implícita nas equações e só se conhece após resolver o problema do fluido com a restrição.

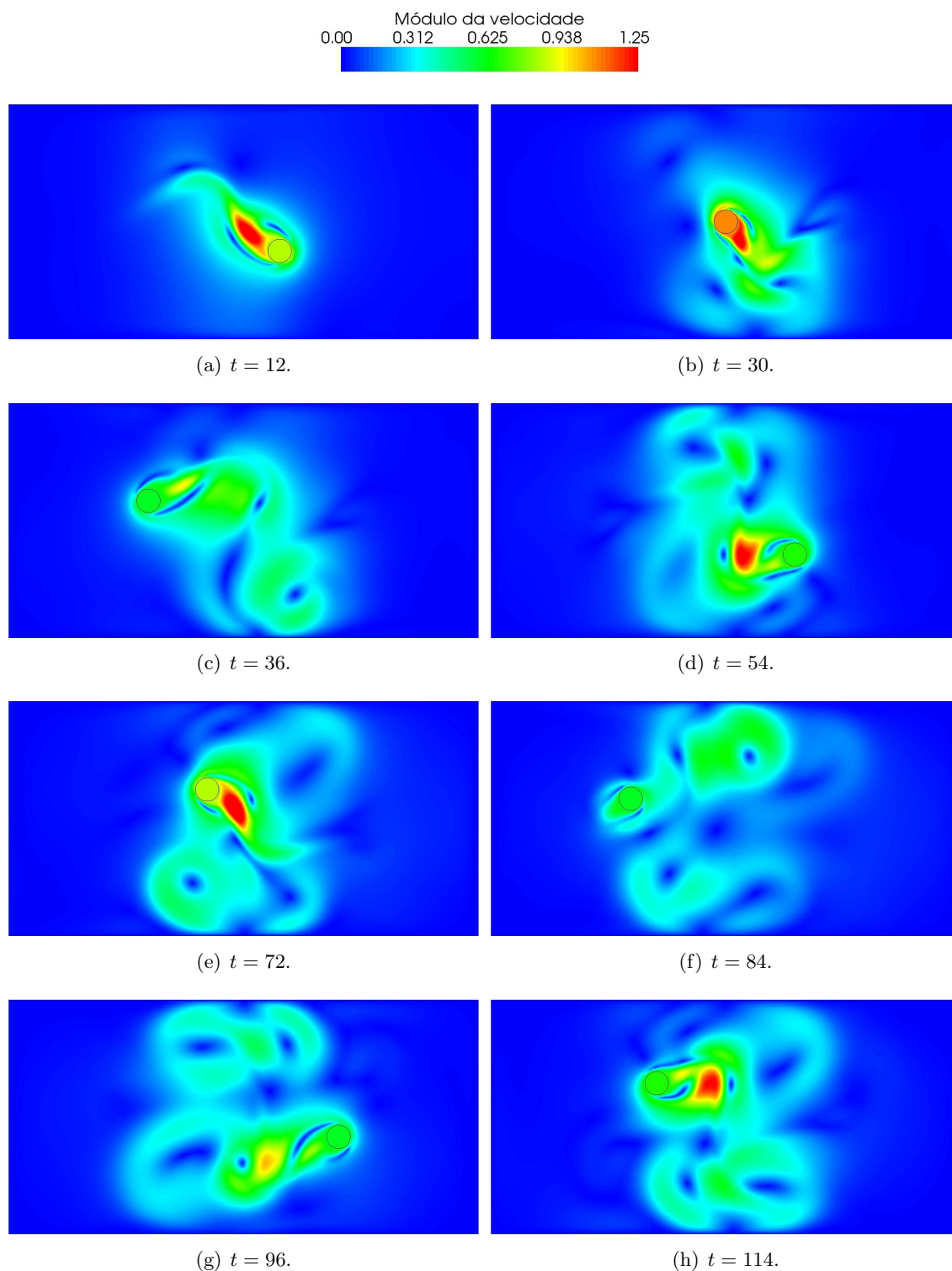


Figura 4.4: Módulo da velocidade para diversos instantes de tempo.

O comentado no parágrafo anterior pode ser observado mais em detalhe na estrutura das linhas de corrente da Figura 4.5. Ali as linhas de corrente são calculadas para dois instantes de tempo e são coloridas em função do módulo do campo de velocidade, permitindo mostrar a complexa configuração adotada pelo fluido sob a ação do movimento do sólido. Embora os parâmetros que definem o problema são diferentes aos do exemplo apresentado em [55], os resultados aqui obtidos encontram-se em consonância com os da mencionada referência.

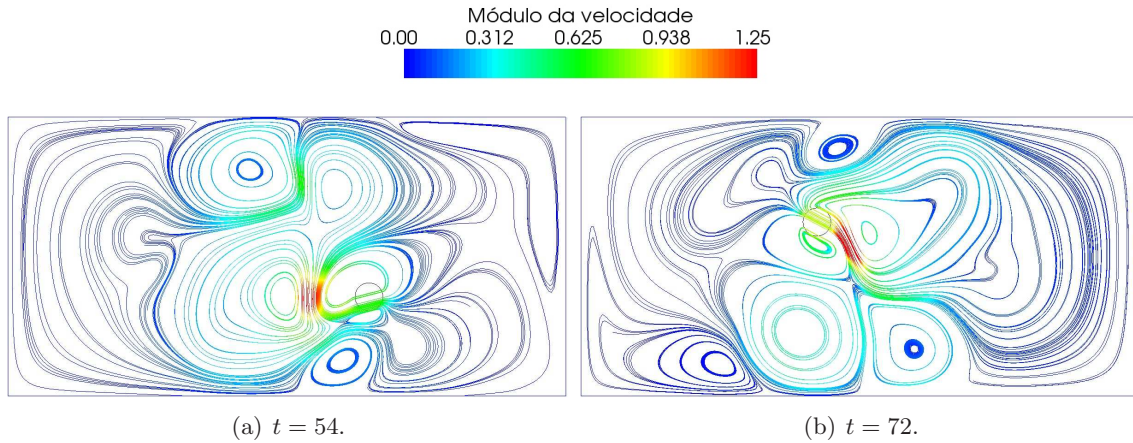


Figura 4.5: Linhas de corrente para dois instantes de tempo.

Este problema é evidentemente ainda mais simples que o Problema 4.3 já que não implica a resolução das equações do corpo rígido. Entretanto, é um exemplo interessante para pôr em evidência situações capazes de serem modeladas empregando o método de domínios imersos. A implementação computacional por trás deste caso não implica nenhuma complicação adicional, contanto que se disponha de um código de elementos finitos em funcionamento para resolver de forma aproximada as equações de Navier–Stokes.

4.5.2 Caso 2: Esfera caindo por ação da gravidade

Neste segundo exemplo simula-se o problema de um corpo sólido esférico caindo pela ação da gravidade dentro de um recipiente cheio de um fluido. O esquema correspondente a este problema tridimensional mostra-se na Figura 4.6(a), onde se observa um recipiente de seção transversal quadrada dentro do qual coloca-se a esfera centrada com respeito à seção transversal e sem nenhuma restrição.

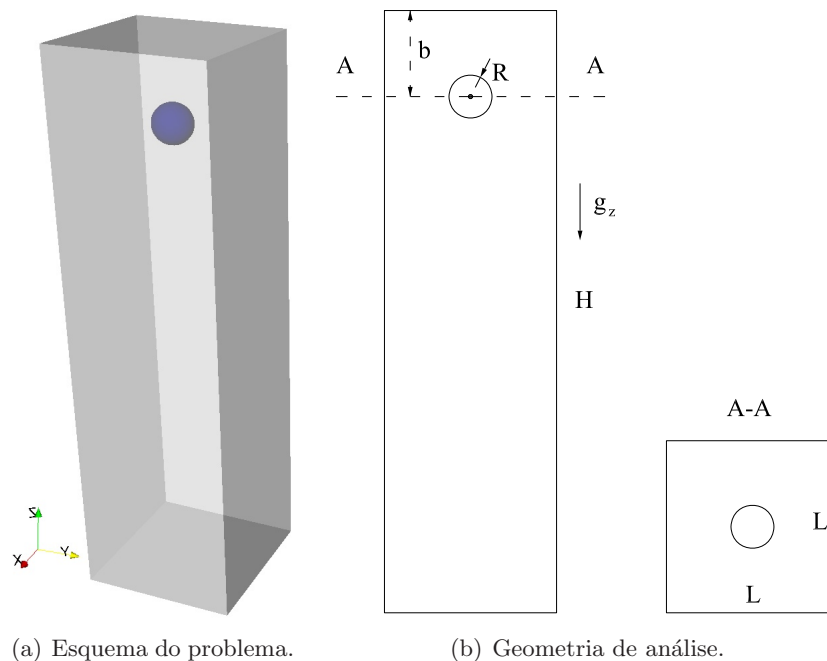


Figura 4.6: Esfera imersa em recipiente de seção quadrada.

As dimensões mostradas na Figura 4.6(b) são $L = 4$, $H = 14$, $b = 2$ e $R = 0.5$. As propriedades físicas do fluido são $\rho_f = 1$ e $\mu = 0.02317$, enquanto que para o sólido tem-se $\rho_s = 1.72$. A força da gravidade é $g_z = -1$ na direção z . A malha de tetraedros de elementos finitos está composta por 424200 nós, o passo de tempo usado é $\Delta t = 0.001$ e o tempo final da simulação é $T_f = 16$. As condições de contorno no recipiente são de Dirichlet homogêneas na superfície lateral e na inferior, e de Neumann homogênea, na superfície superior.

A Figura 4.7 descreve o movimento do corpo sólido por meio das componentes da velocidade e do deslocamento do centro de massa na direção z como funções do tempo, isto é v_{sz}^o e u_{sz}^o respectivamente. Após a aceleração inicial as forças viscosas começam a equilibrar a força boiante produzida pela força da gravidade, fazendo com que a esfera atinja uma velocidade constante de descida, também denominada velocidade terminal.

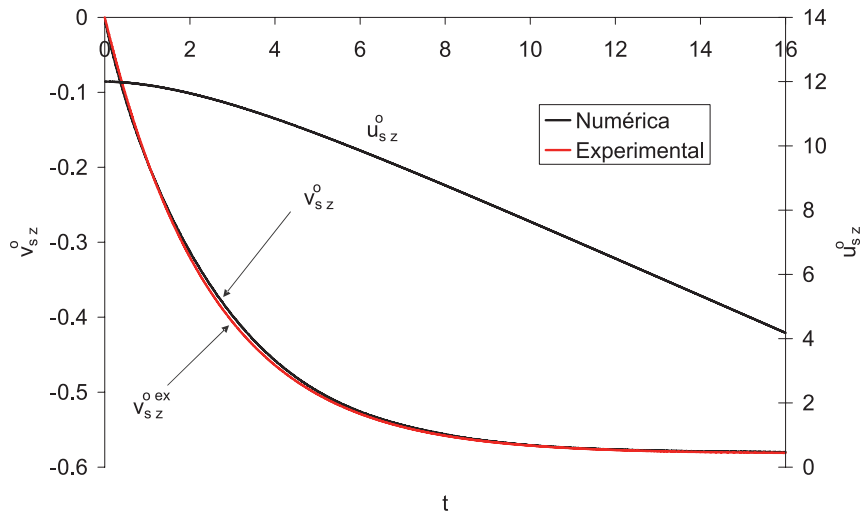


Figura 4.7: Deslocamento e velocidade do centro de massa do corpo em função do tempo.

Em particular, mostra-se a velocidade da esfera junto a uma curva analítica obtida em [114] mediante experimentação e adimensionalização. Tal curva é dada pela expressão

$$v_{sz}^{oex} = V_{ter} \left(1 - e^{-\frac{3t}{\tau}} \right), \quad (4.5.2)$$

onde V_{ter} é a velocidade terminal do corpo, neste caso $V_{ter} = 0.582$, e τ é o tempo que levou o corpo para atingir uma velocidade igual a $0.95V_{ter}$, neste caso $\tau = 7.52$. Embora a curva analítica tenha sido obtida a partir de resultados determinados sob condições de *domínio infinito*, os resultados adimensionais são reproduzidos com alta fidelidade. Isso já não ocorre com o valor da velocidade terminal já que no caso de domínio infinito deveria ser $V_{ter} = 1$, o que permite estabelecer uma quantificação do efeito da proximidade da parede do recipiente. Assim, como pode ser observado, o resultado numérico obtido encontra-se muito próximo da curva analítica (4.5.2).

A seqüência da Figura 4.8 apresenta, para diversos instantes de tempo, a alteração que a esfera produz no fluido ao cair dentro do recipiente. Isto é mostrado para uma seção longitudinal, ao mesmo tempo que se inclui o domínio delimitado pelo corpo sólido. Veja que após o tempo $t = 12$ a estrutura do escoamento permanece praticamente invariante.

Na Figura 4.9 observam-se, desde uma vista superior, dois cortes longitudinais através do canal, os quais são ortogonais entre si. Nestas seções vêem-se os vetores correspondentes ao campo de velocidade que é induzido pela queda da esfera, dando uma descrição ainda mais detalhada da interação entre o fluido e o objeto sólido. Veja que para o regime do escoamento considerado aqui, o número de Reynolds máximo é aproxi-

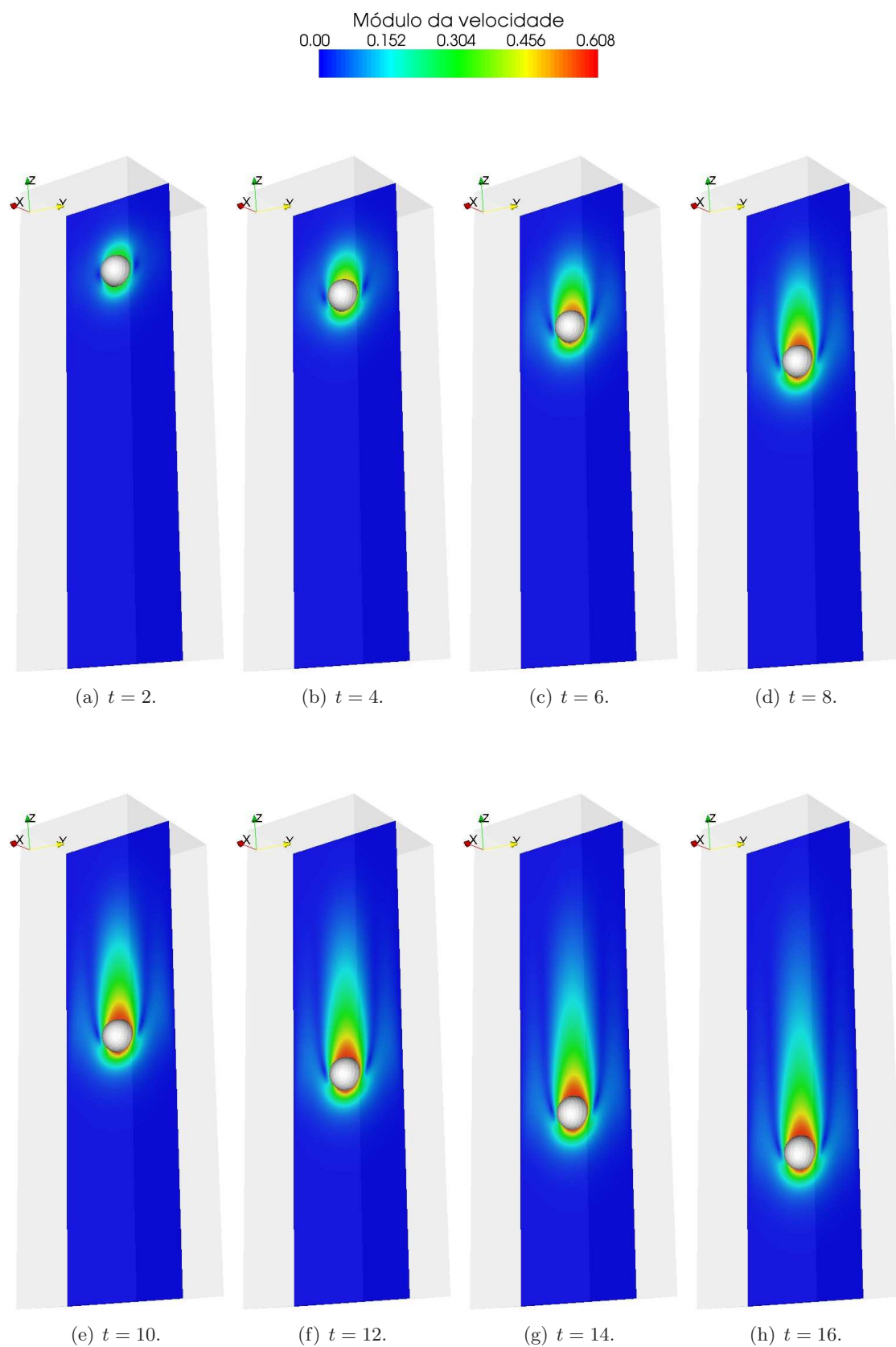


Figura 4.8: Módulo da velocidade na seção longitudinal.

madamente $Re = 25$, obtém-se um vórtice principal gerado logo após a seção transversal correspondente ao plano médio da esfera. Isto também se vê na configuração das linhas de corrente da Figura 4.10, onde ainda são incluídas duas iso-superfícies do módulo do campo de velocidade.

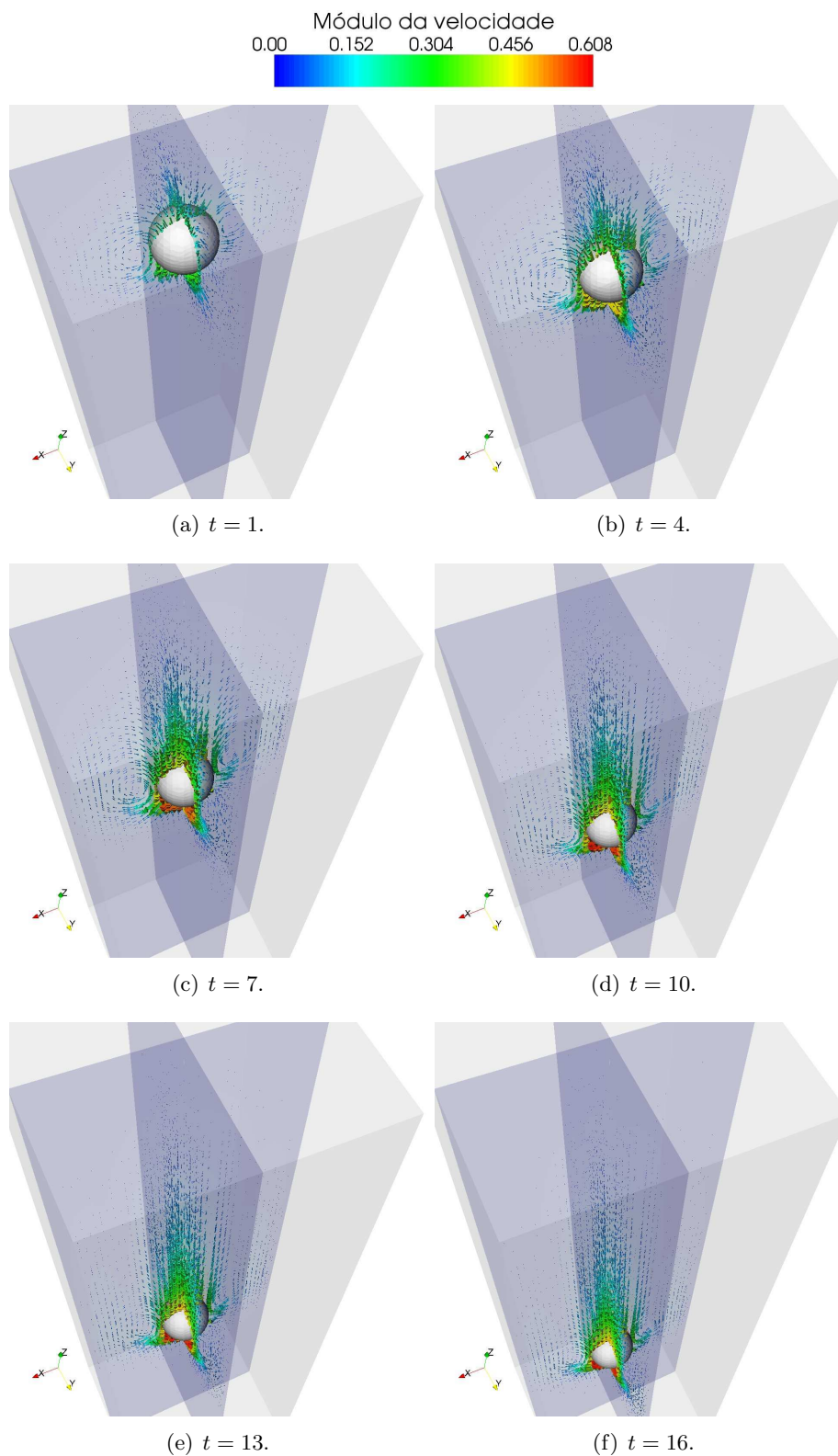


Figura 4.9: Campo de velocidade em duas seções longitudinais ortogonais.

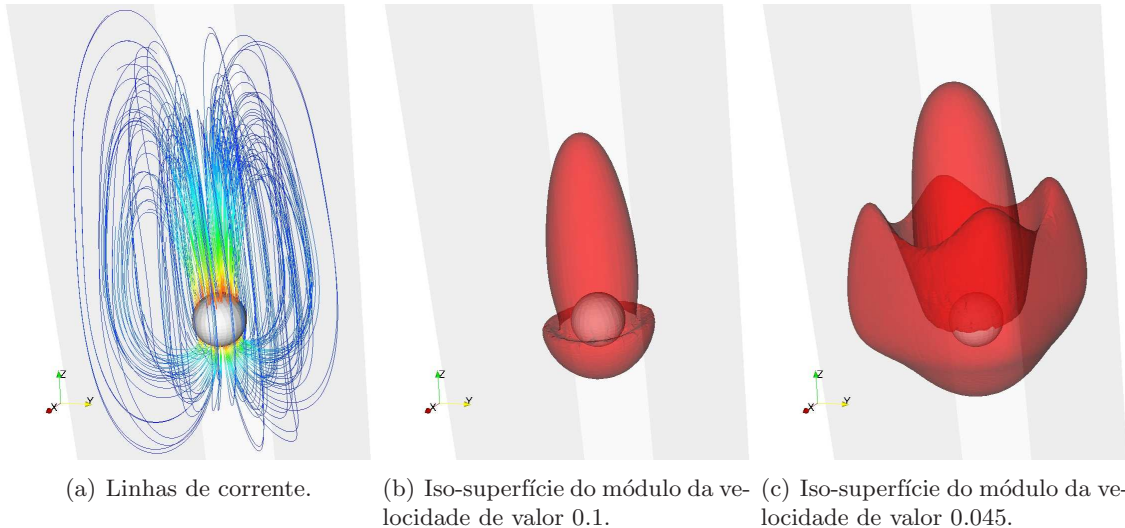


Figura 4.10: Detalhes do campo de velocidade para $t = 10$.

4.5.3 Caso 3: Esfera em cilindro girando

Este terceiro exemplo foi formulado originalmente em [39]. O objetivo do problema aqui proposto é avaliar, de uma forma simples, a equação de momento angular do corpo rígido em três dimensões. Para isto recorre-se ao esquema da Figura 4.11(a) que mostra um canal de seção circular dentro do qual há uma esfera sólida posicionada de forma centrada e na metade do cilindro considerando a direção longitudinal.

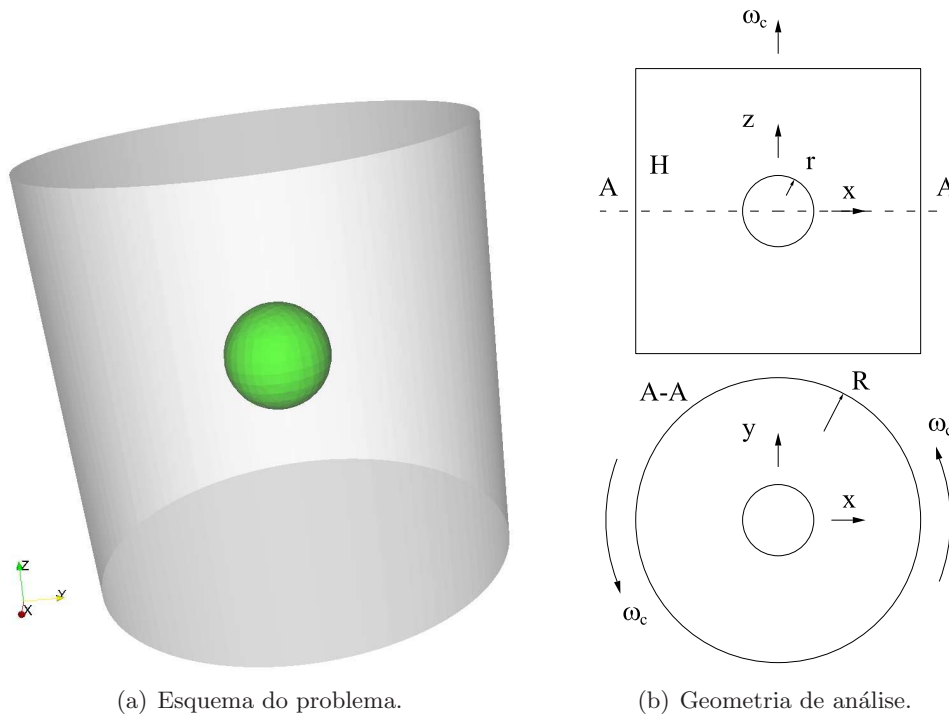


Figura 4.11: Esfera imersa em um fluido dentro de um cilindro girando.

A superfície lateral do cilindro possui uma condição de contorno de Dirichlet sobre a velocidade tal que o cilindro se encontra em rotação com um vetor velocidade angular na direção z que é $\omega_c = 0.01$ como mostra a Figura 4.11(b). Sobre as duas superfícies

transversais as condições de contorno são de Neumann homogêneas. As dimensões de acordo com tal figura são as seguintes $R = 2$, $r = 0.5$, $H = 4$. O estado final do sistema, para números de Reynolds baixos como o presente caso, é em estado de rotação rígida com velocidade angular constante ω_c . Neste caso as massas específicas do fluido e do sólido coincidem, sendo $\rho_f = \rho_s = 1$, e a viscosidade é $\mu = 0.743$. A malha de elementos finitos de tetraedros consta de 60926 nós, e o passo de tempo empregado é $\Delta t = 0.01$, enquanto que o tempo final da simulação é $T_f = 2.5$.

Assim sendo, existe uma fase transiente no qual as tensões de corte vão se difundindo, devido à velocidade imposta sobre o contorno lateral, até chegar ao centro do cilindro. Entretanto, na presença do corpo rígido ocorre que o mesmo é acelerado até alcançar o equilíbrio com velocidade de rotação ω_c constante junto com todo o resto do fluido. Isto vê-se claramente na Figura 4.12 onde se mostra a componente da velocidade angular ω_{sz}^o em função do tempo. Em, aproximadamente, $t = 0.13$ o sólido começa a ser acelerado de forma significativa, e o faz monotonicamente até alcançar a velocidade $\omega_c = 0.01$.

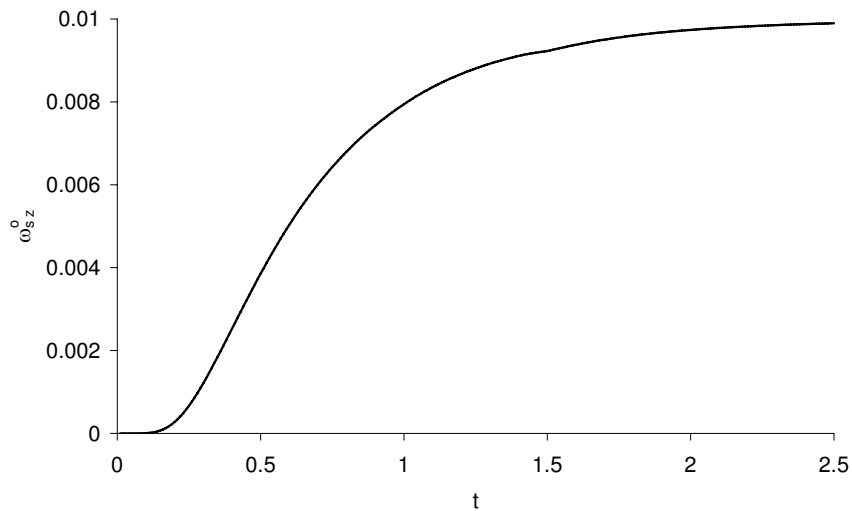


Figura 4.12: Evolução da velocidade angular do corpo em função do tempo.

A seqüência da Figura 4.13 apresenta a evolução do campo de velocidade em um corte transversal na metade do cilindro que atravessa a esfera imersa. Aqui vê-se o comentado no parágrafo anterior com respeito à difusão das tensões de corte na direção do centro do cilindro.

Por último, na Figura 4.14 mostra-se, além do corte na seção transversal, a configuração das linhas de corrente que atravessam a reta diagonal correspondente à geratriz do cone que envolve o conjunto de linhas de corrente.

4.5.4 Caso 4: Canal com sistema de válvula

O exemplo desenvolvido aqui constitui uma primeira aproximação bidimensional na direção de realizar a modelagem de um mecanismo encontrado no sistema cardiovascular como o da válvula aórtica. O sistema aqui empregado, que se mostra na Figura 4.15(a), consta de um canal pelo qual circula um fluido e que possui um mecanismo que simula o de uma válvula. Esta válvula rígida está sujeita no extremo superior a um ponto fixo por meio de uma mola de restituição angular, a qual permite a sua abertura e a passagem do fluido. Após a válvula surge uma região circular que produz uma expansão do canal. Este tipo de geometria constitui uma contrapartida bidimensional da geometria correspondente à válvula aórtica. De acordo com a mencionada figura, $L = 2$ e a válvula possui um comprimento de $a = 2$ e uma espessura de $b = 0.03$. A mola é tal que a válvula possui

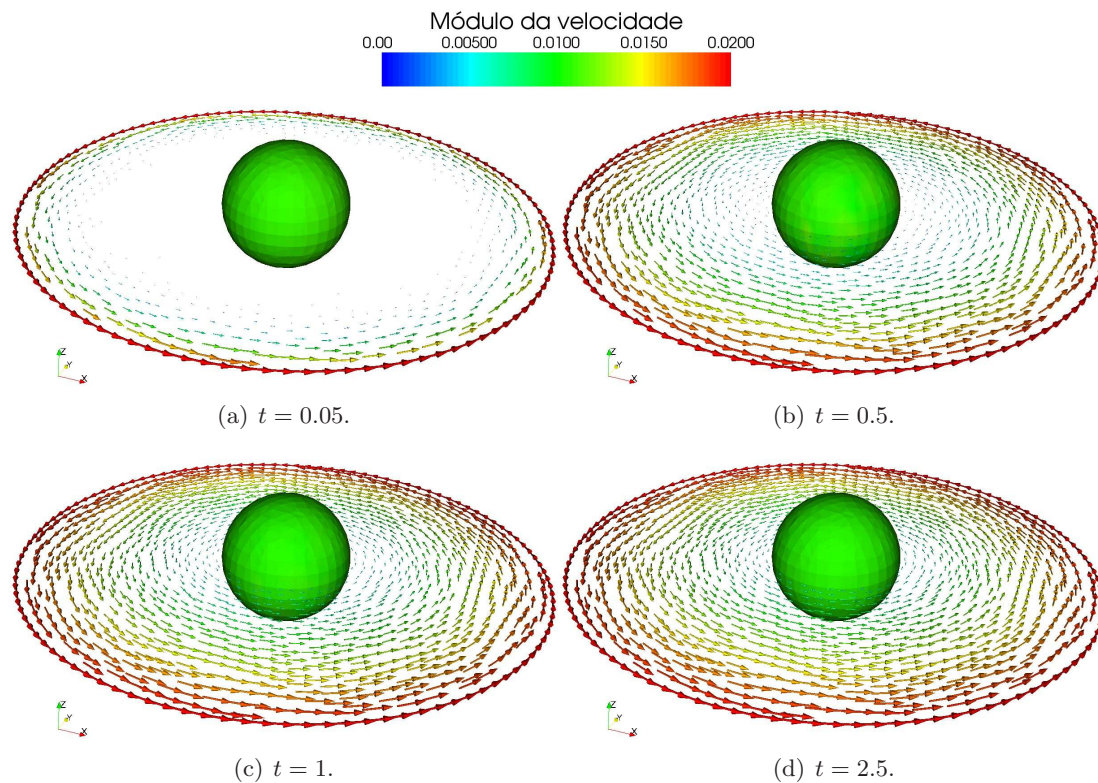
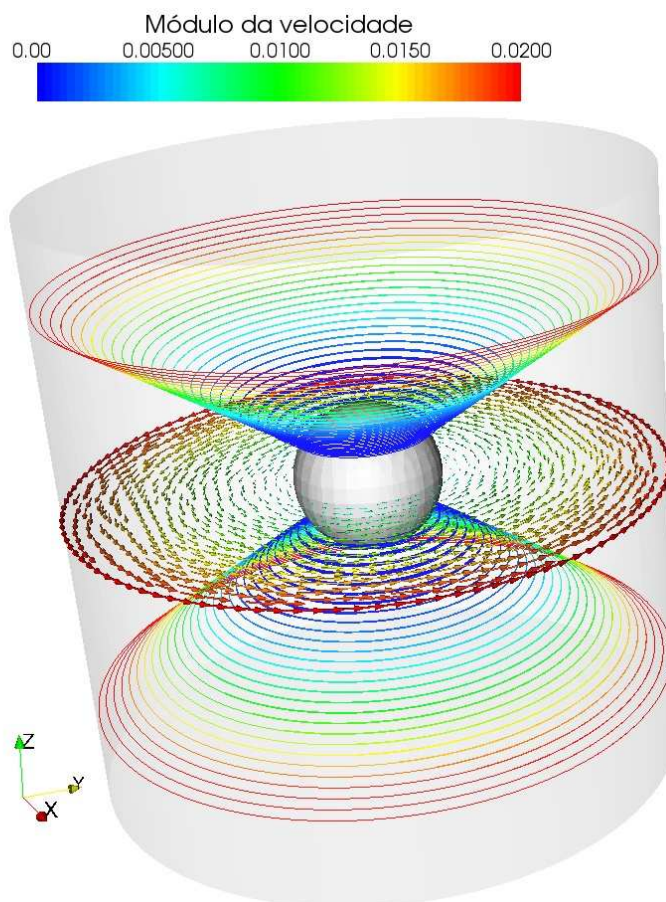


Figura 4.13: Campo de velocidade na seção transversal correspondente ao corpo.

Figura 4.14: Campo de velocidade e linhas de corrente para $t = 2.5$.

uma posição de repouso para um ângulo $\theta_o = -68.75^\circ$ medido desde o eixo horizontal, e o coeficiente de restituição da mola é $k_\theta = 50$. Na Figura 4.15(b) mostra-se um detalhe da malha espacial ao longo da espessura da válvula. As propriedades do fluido são $\rho_f = 1$ e $\mu = 0.043$, e para o sólido é $\rho_s = 20$. Não se considera a força de gravidade neste caso.

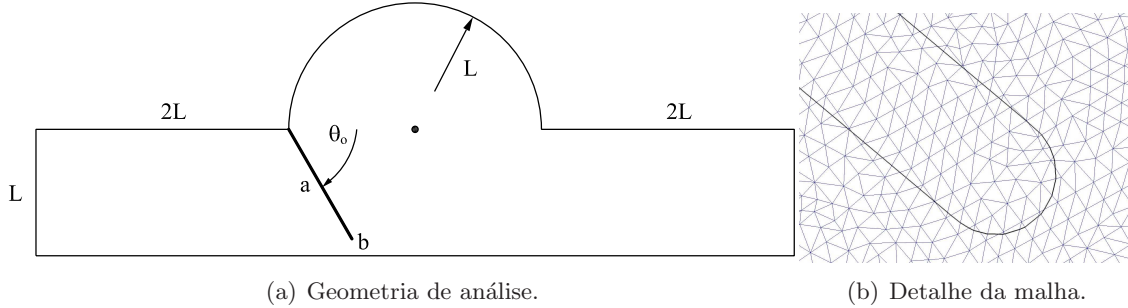


Figura 4.15: Válvula em canal bidimensional e detalhe da malha em torno da mesma.

As condições de contorno são de Dirichlet homogêneas nas superfícies horizontais superior e inferior, e de Neumann homogênea na superfície vertical do extremo direito. O escoamento é impulsado a partir do lado esquerdo da figura, a superfície vertical esquerda, por meio de uma condição de Dirichlet variante no tempo que estabelece um perfil parabólico cujo valor máximo, chamado V_{max} , segundo a coordenada vertical, mostra-se na Figura 4.16 como função do tempo. A expressão matemática da curva é

$$V_{max} = 30 \sin\left(\frac{t\pi}{T_c}\right), \quad (4.5.3)$$

com $T_c = 0.75$. A malha de triângulos é composta por 49823 nós, e o passo de tempo usado é $\Delta t = 0.0002$, com um tempo final da simulação $T_f = T_c = 0.75$.

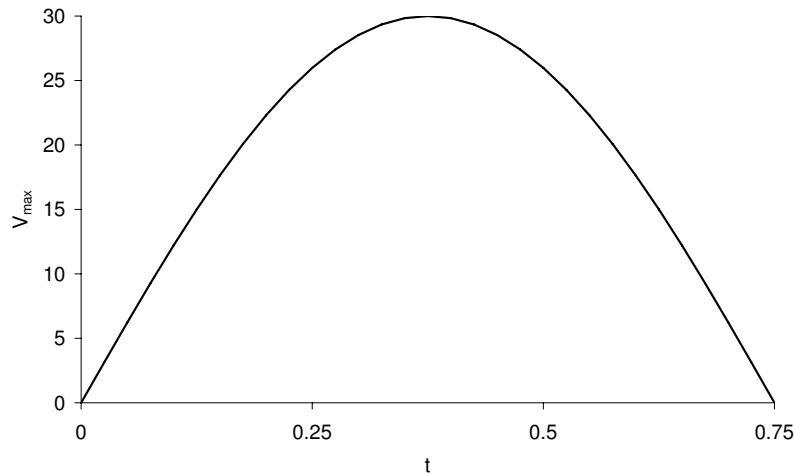


Figura 4.16: Condição de Dirichlet variante no tempo.

A seqüência da Figura 4.17 mostra a evolução do campo de velocidade (o módulo) ao longo da simulação. Inclui-se também o contorno que delimita o domínio do sólido que corresponde à válvula. Após a abertura progressiva da válvula, devido ao crescente fluxo que entra na região, a mesma atinge o seu máximo ponto no tempo $t = 0.4$. Logo depois, começa a fase de descida que é movida pela restituição da mola junto ao decrescimento do fluxo provido pela condição de contorno.

A Figura 4.18 apresenta o movimento da válvula impulsado pela ação do fluido. O movimento é descrito pela velocidade angular resultante da válvula $\omega_{s_z}^o$ e pelo ângulo

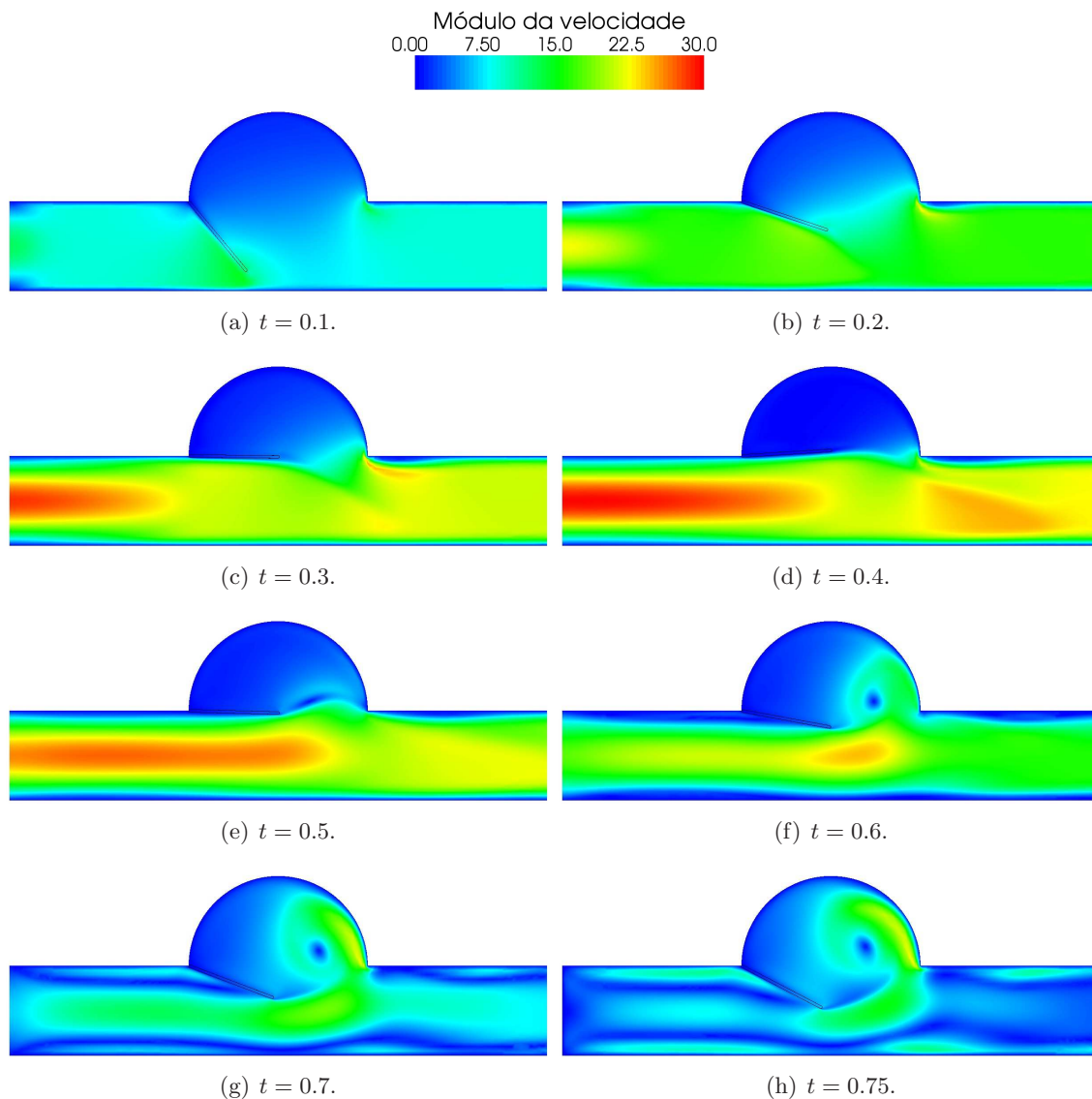


Figura 4.17: Módulo da velocidade para diversos instantes de tempo.

θ_{sz}^o medido de forma positiva desde o eixo horizontal em sentido horário. Vê-se que há uma fase de rápida aceleração até o tempo $t = 0.13$ após o qual a fase de desaceleração estende-se até o final da simulação. O ângulo aumenta também rapidamente e alcança o máximo valor em $t = 0.4$, momento no qual o mesmo supera levemente o ângulo nulo que coincide com o eixo horizontal. Logo depois, começa a diminuir novamente até o final da simulação.

Na Figura 4.19 observa-se o comportamento do campo de pressão em todo o domínio durante os primeiros instantes de tempo. Nesta seqüência de figuras a escala de cores para representar o campo escalar foi ajustada convenientemente em cada instante de tempo a fim de evidenciar o salto que ocorre entre ambos os lados do domínio da válvula.

Por último, na seqüência da Figura 4.20 apresenta-se a configuração adquirida pelas linhas de corrente para diversos instantes de tempo juntamente com a posição ocupada pela válvula.

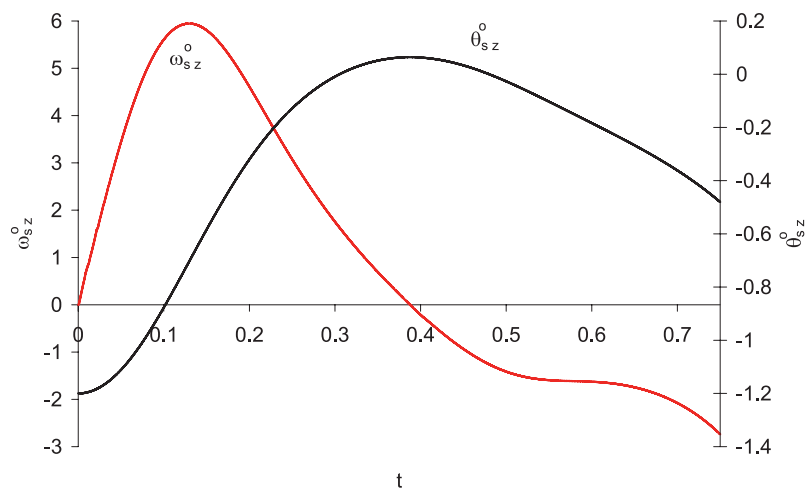


Figura 4.18: Movimento da válvula em função do tempo.

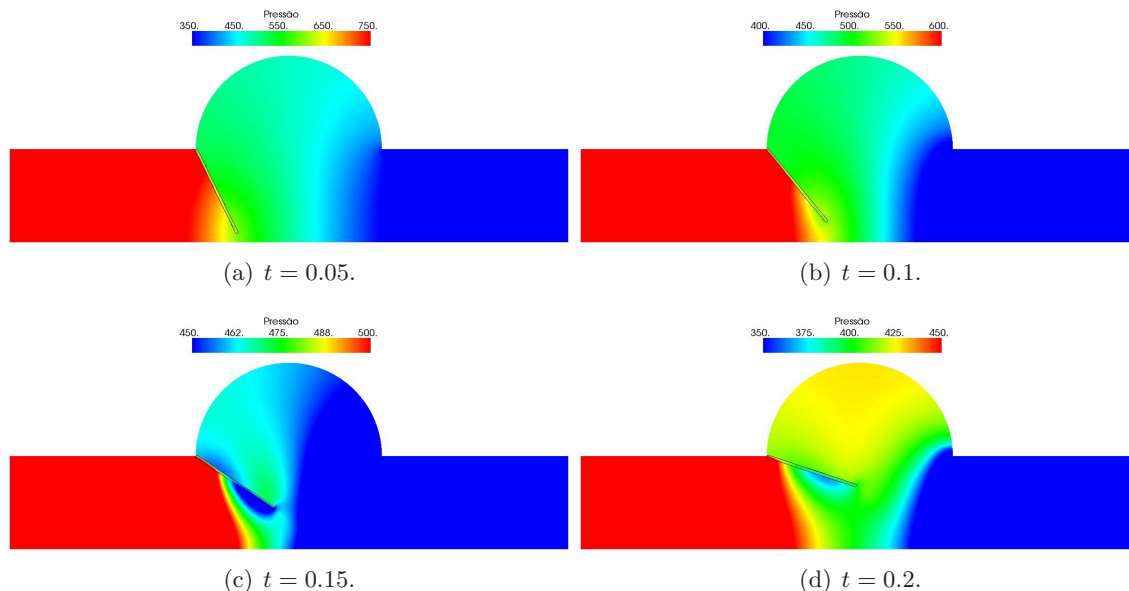


Figura 4.19: Pressão para diversos instantes de tempo.

4.5.5 Caso 5: Elipse caindo por ação da gravidade

Este último exemplo visa mostrar uma análise do que é denominado vôo passivo. Em particular, estuda-se um corpo rígido elíptico caindo por ação da gravidade. Um dos objetivos de uma análise deste tipo poderia ser o fato de estabelecer limites de instabilidade a partir dos quais ocorre a transição do fenômeno de *fluttering* ao fenômeno de *tumbling*. Um cálculo bem acurado deste tipo de problemas pode requerer um altíssimo custo computacional devido a que é preciso capturar as forças e momentos atuantes sobre o corpo rígido, os quais são de valor muito pequeno. Justamente o pequeno desbalanço dessas quantidades estabelece os limites de transição de um regime a outro. Se bem este caso tem pouco a ver com a modelagem do sistema cardiovascular, é uma forma de mostrar uma outra classe de problemas que pode ser tratada com o método de domínios imersos.

O esquema escolhido é o da Figura 4.21. Emprega-se um domínio retangular de medidas $H = 10$ e $L = 13$, e a elipse está localizada no ponto $(h, l) = (4, 9)$ com relação ao centro de coordenadas colocado no canto inferior esquerdo. A elipse possui semi-eixos dados por $a = 1$ e $b = 0,15$, e é lançada com uma rotação inicial $\alpha = 34,37^\circ$. A massa

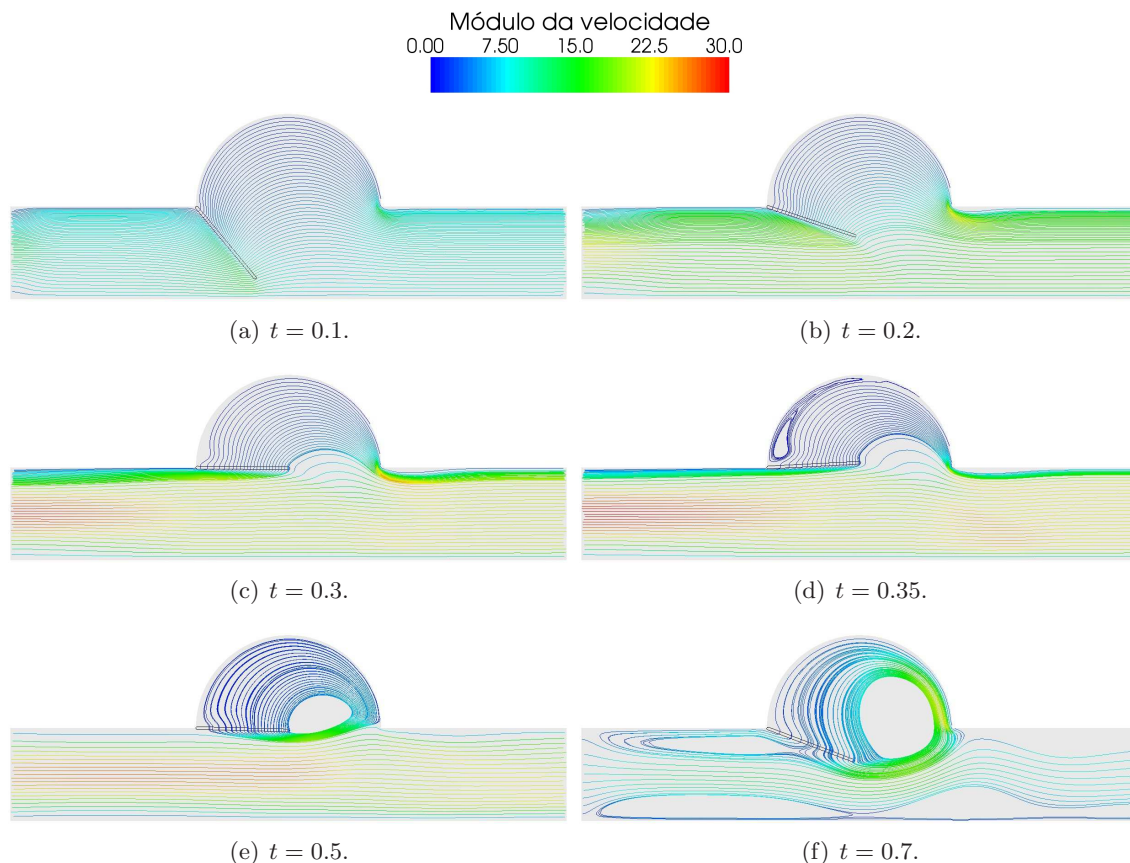


Figura 4.20: Estrutura das linhas de corrente para diversos instantes de tempo.

específica do fluido é $\rho_f = 1$ e a do sólido é $\rho_s = 2.678$. A viscosidade dinâmica do fluido é $\mu = 0.00462$ e a ação da gravidade vem dada por uma força volumétrica $\mathbf{g} = -9.81\mathbf{e}_y$.

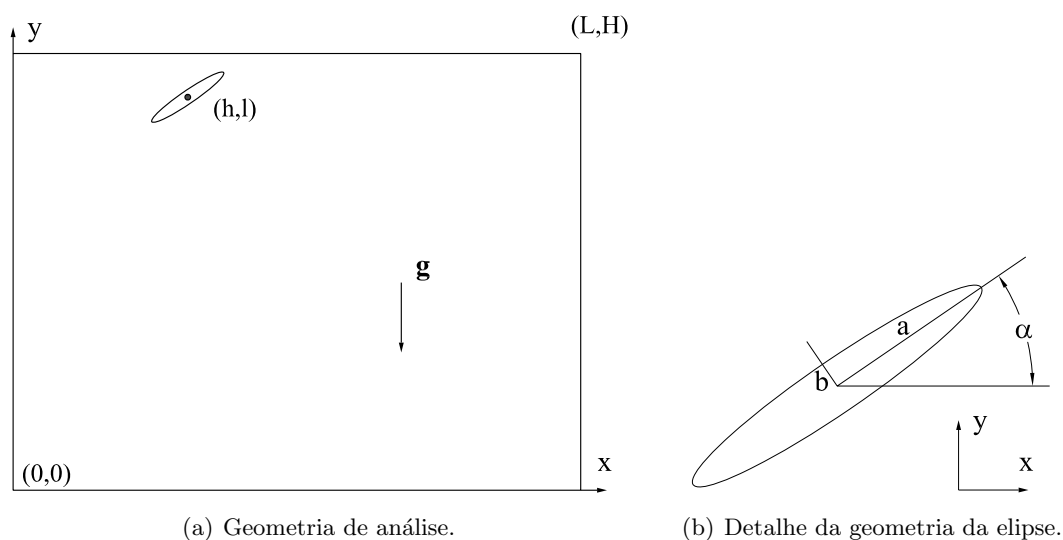
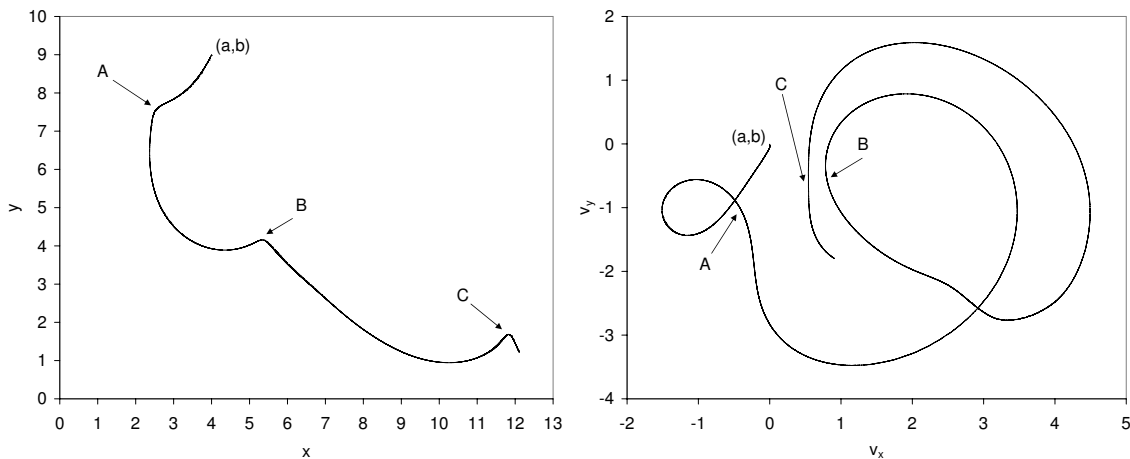


Figura 4.21: Corpo elíptico sob ação da gravidade.

As condições de contorno são de Dirichlet homogêneas nas superfícies laterais e na inferior, enquanto que na superfície superior a condição é de Neumann homogênea. Como dito, o corpo é liberado com um ângulo de inclinação $\alpha = 34.37^\circ$ respeito da horizontal e com velocidade inicial nula. A malha de triângulos compõe-se de 208921 nós, e o passo

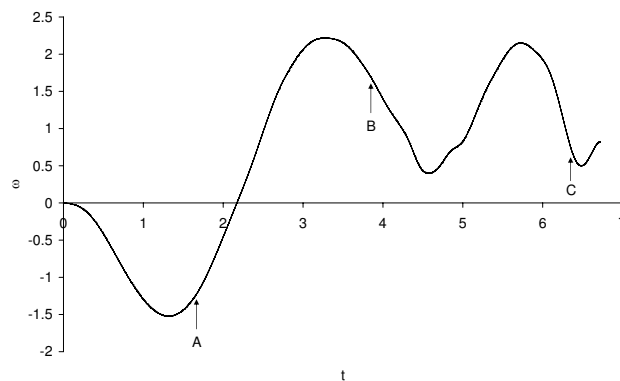
de tempo empregado é $\Delta t = 0.0005$, com um tempo final da simulação $T_f = 6.72$. Na situação de domínio infinito, espera-se que o movimento da elipse não tenha fim, mas aqui a simulação foi detida ao chegar no limite do domínio onde impôs-se condição de Dirichlet homogênea.

A Figura 4.22(a) mostra a trajetória descrita pelo centro de massa do objeto no espaço bidimensional. Ali vê-se como há uma primeira parte onde a elipse cai sem chegar a dar uma volta completa, fase que é denominada *fluttering* (ponto *A* em $t = 1.688$), para logo depois se desencadear a fase na qual a elipse começa a girar, fenômeno denominado *tumbling* (pontos *B* e *C* em $t = 3.858$ e $t = 6.394$ respectivamente). Em particular veja que por alguns momentos, antes dos pontos *B* e *C*, ocorre o levantamento do centro de massa, que é quando o mesmo adquire velocidade na direção vertical positiva. Associada a esta trajetória está o mapa do vetor da velocidade da elipse que se mostra na Figura 4.22(b). O eixo horizontal e o vertical representam as velocidades nas direções x e y respectivamente. Os pontos *A*, *B* e *C* também encontram-se identificados nesta figura. Ao mesmo tempo, na Figura 4.22(c) mostra-se a velocidade angular do corpo em função do tempo. Veja que depois de alterar o sinal (após a fase de *fluttering*) a velocidade angular mantém-se positiva indicando que começou a fase de *tumbling* do corpo. Ali também indicam-se os pontos *A*, *B* e *C* anteriormente mencionados.



(a) Posição do centro de massa no espaço.

(b) Mapa da velocidade do centro de massa do corpo.



(c) Velocidade angular em função do tempo.

Figura 4.22: Características do movimento da elipse.

Na Figura 4.23 observa-se o módulo do campo de velocidade para diversos instantes de tempo. Veja que o desprendimento de vórtices é um fenômeno que, neste caso, é desencadeado à medida que a elipse vai tomando velocidade. As características do campo de velocidade também são mostradas na seqüência da Figura 4.24, onde no eixo perpendicular

ao plano do movimento da elipse representa-se o módulo da velocidade. Logo, a superfície resultante dá maiores detalhes sobre a estrutura do escoamento produzido pela queda do corpo. Veja que o campo de velocidade dentro do corpo é um plano, o que se corresponde com as características de um movimento rígido.

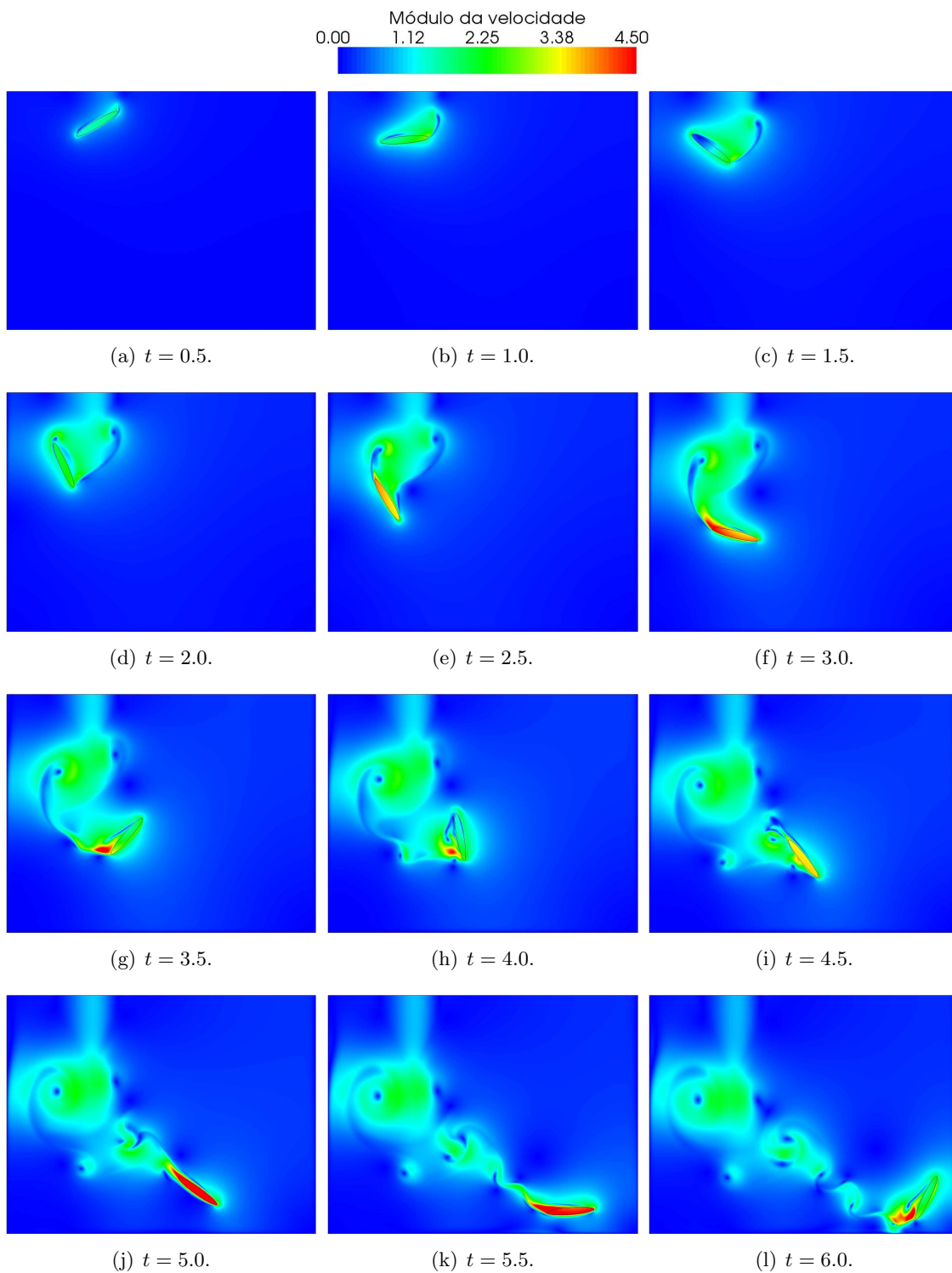


Figura 4.23: Módulo do campo de velocidade ao longo da caía do corpo.

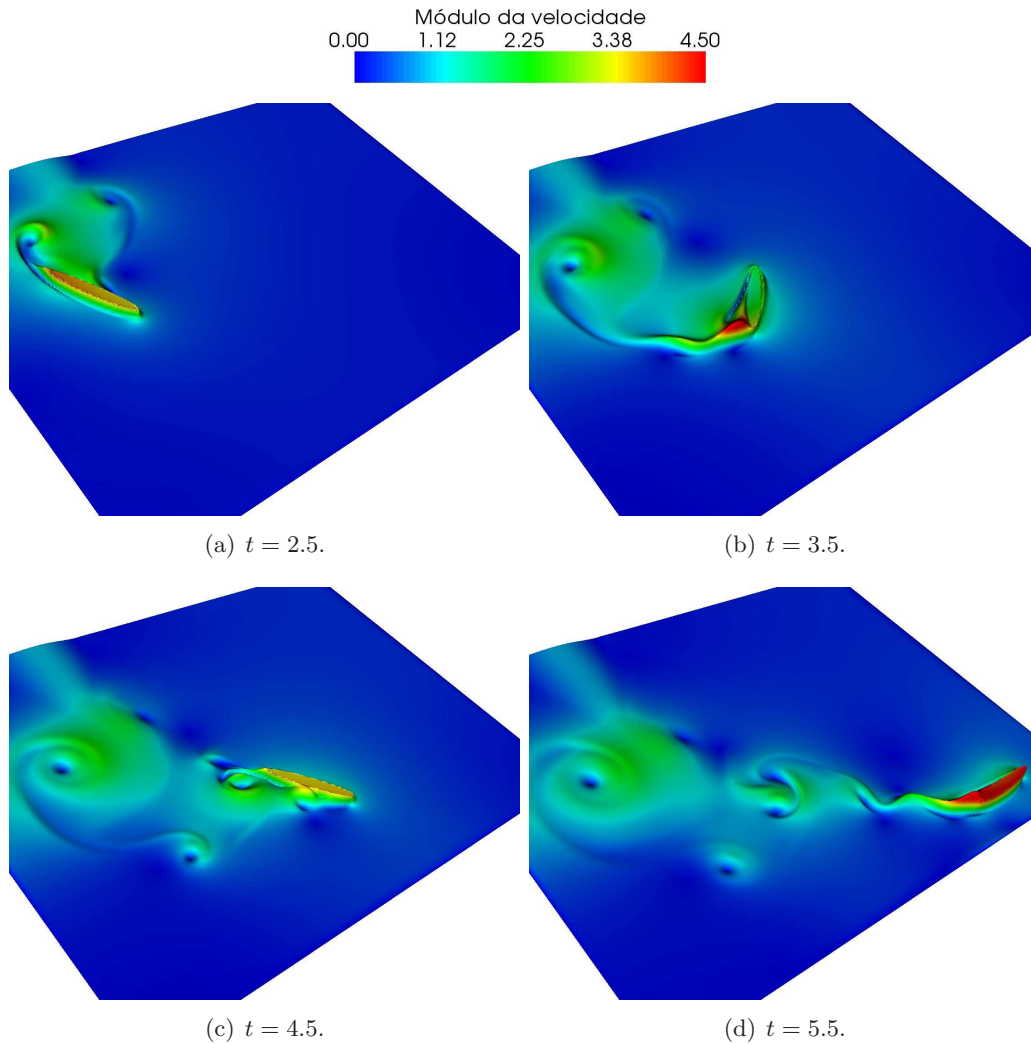


Figura 4.24: Superfície dada pelo módulo de velocidade do fluido.

4.6 Comentários finais

Como visto, a proposta feita neste capítulo é tão só uma possibilidade para abordar de forma aproximada o problema de domínios imersos. Qualquer outra técnica de aproximação numérica pode ser eventualmente utilizada. Como comentado na introdução do capítulo, algumas alternativas a serem consideradas são o emprego de métodos de partículas para o seguimento das quantidades Lagrangianas e/ou métodos de colocação por pontos para impor a restrição da igualdade do campo de velocidade entre sólido e fluido. Também podem ser consideradas técnicas de decomposição de operadores a fim de simplificar ainda mais a imposição das restrições, tanto da incompressibilidade como da igualdade de velocidades. Em particular, esta última é muito empregada entre os autores que usam os métodos de domínios fictícios para tratar o problema de interação entre um fluido e um sólido rígido. Em qualquer caso, tais abordagens são situações mais simples do que a correspondente ao aqui exposto. De fato, é muito pouco freqüente encontrar na literatura trabalhos que analisem o problema a partir da versão linearizada consistentemente com um esquema de tipo Newton–Raphson. Com este último tratamento é possível obter efetivamente todos os acoplamentos que surgem ao obter o operador tangente do problema variacional não linear.

Contribuições do capítulo

A principal contribuição deste capítulo é a linearização consistente, dentro de um esquema de Newton–Raphson, do método de domínios imersos que fora desenvolvido no Capítulo 3. Isto foi levado a cabo ao longo das Seções 4.1 e 4.2 para os casos de sólidos deformáveis e de sólidos rígidos respectivamente. Também ressalta-se a formulação dos Problemas 4.1, 4.2 e 4.3 como contribuição do presente capítulo. Com efeito, a obtenção das contrapartidas discretas dos problemas formulados no Capítulo 3 constitui uma extensão das contribuições mencionadas naquele capítulo com relação ao melhor entendimento sobre a construção do modelo matemático. Isto traduz-se, no presente capítulo, em um maior entendimento dos aspectos envolvidos na forma linear e na posterior aproximação do problema.

Com relação à produção decorrente deste capítulo remarca-se que o processo de linearização do método de domínios imersos foi incluído na publicação [19]. Por outro lado parte dos exemplos numéricos mostrados está incluída na publicação [17]. Estas são repetidas aqui por conveniência:

- P.J. Blanco, R.A. Feijóo e E.A. Dari, *A variational framework for solving fluid–solid interaction problems based on immersed domains. Theoretical bases*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (197) 2353–2371, 2008.
- P.J. Blanco, E.A. Dari e R.A. Feijóo, *A variational approach for fluid–solid interaction problems using immersed domains*, Anais do WCCM 2008. Veneza, Itália, 2008.

Parte III

**Modelos Constitutivos de
Multiescala**

Capítulo 5

Modelos de multiescala nas suas formas primal e dual

Introdução

Motivado pelo avanço da tecnologia e dos processos de fabricação, assim como pelo interesse despertado em diversos campos da ciência, os materiais utilizados e estudados em muitas áreas da engenharia têm atingido uma cada vez mais crescente complexidade com respeito à sua resposta constitutiva. Exemplos disto são os polímeros de complexas estruturas compostas assim como os materiais de índole biológica.

Em particular no marco dos problemas encontrados na modelagem do sistema cardiovascular, a parede arterial, ou inclusive cada uma de suas partes componentes, pode ser considerada como um material de alta complexidade dada a intrincada interação entre os diversos elementos que a conformam [69]. A parede arterial está formada principalmente por três camadas. A primeira, denominada *intima*, é de espessura reduzida e compõe-se das células de endotélio cobertas por uma lâmina elástica que é a interface com a segunda camada. Esta segunda camada, denominada *media*, possui por sua vez diversas camadas cada uma com uma estrutura helicoidal própria. Em cada sub-camada a composição é principalmente de músculo liso e caracteriza-se por ter um comportamento principalmente elástico. Uma lâmina elástica realiza a interface entre esta e a terceira camada, a qual se denomina *adventitia*, que é um complexo arranjo, também helicoidal, de fibras de colágeno que fornece o maior suporte estrutural a fim de manter a estabilidade frente à solicitação produzida pelo escoamento do sangue. Logo, a possibilidade de dar uma representação do comportamento da parede arterial, se bem constitui um objetivo ambicioso, resulta da maior importância a fim de examinar a solicitação e a conseqüente resposta da mesma frente à constante interação com o sangue, tendo como motivação final o estudo do desenvolvimento de doenças relacionadas com estas questões mecânicas. Um outro exemplo interessante de ser cogitado é o da válvula aórtica. O estudo da composição assim como da caracterização deste componente resulta também essencial visando analisar a fadiga gerada pelo regime de funcionamento, sobretudo ao avaliar o desempenho de válvulas artificiais.

A possibilidade de controlar e conhecer a resposta constitutiva desta classe de materiais é a principal causa do aumento da complexidade mencionada anteriormente, e tem sido matéria de estudo exaustivo a fim de caracterizá-los adequadamente. O contexto matemático clássico no qual uma resposta constitutiva está inserida é o das teorias constitutivas fenomenológicas locais, ou seja aquelas baseadas em formas funcionais calibradas experimentalmente. Contudo, dada a evolução dos materiais e a forte evidência da dependência do comportamento constitutivo com relação aos fenômenos que ocorrem nas diversas escalas passíveis de serem identificadas dentro do material, estas teorias parecem

estar chegando ao seu limite com respeito à capacidade de predição–descrição. Os casos que põem em evidência a fraqueza da teoria fenomenológica são, por exemplo, os materiais biológicos assim como materiais de complexa natureza dissipadora.

Neste sentido, o contexto matemático fornecido pelas teorias constitutivas de multiescala aparece como uma forma consistente para abordar o problema da caracterização, a nível da escala do problema real, destes complexos materiais [16, 34, 58, 70, 77, 78, 85, 95, 102, 105, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 119, 137, 154]. A teoria constitutiva de multiescala (no caso particular de duas escalas para simplificar a apresentação) baseia-se na combinação do problema da escala maior, que é o problema real com o qual se lida, com um problema formulado a uma escala menor através do conceito de elemento de volume representativo (EVR, ou em inglês RVE de *representative volume element*). O objetivo deste segundo problema é introduzir, em algum sentido, aqueles fenômenos relevantes na escala do EVR dentro do problema da escala real. Em outras palavras, o problema da macroescala é modelado utilizando um comportamento constitutivo provido pela microescala através da resolução de um problema formulado no nível do EVR. Este é o ponto chave de toda a teoria constitutiva de multiescala, segundo é entendido nesta tese, posto que é a formulação do problema sobre o EVR a que tem por missão incorporar os fenômenos ocorridos em tal escala. No caso mais geral o problema pode envolver mais de duas escalas, entretanto, a apresentação limita-se a duas escalas por brevidade.

A forma em que os problemas de diferentes escalas estão inter-relacionados depende da natureza das formulações empregadas para colocar o problema em cada nível. Nos casos que serão vistos aqui utilizam-se formulações variacionais derivadas da mecânica do contínuo para ambas as escalas, porém esta é uma situação particular sendo que se admite o uso de problemas de natureza totalmente independente. Um exemplo disto é o acoplamento entre um problema colocado no nível do contínuo macroscópico e um problema formulado a nível do discreto microscópico. As relações existentes entre ambos os problemas estão dadas pela homogeneização (passagem da escala menor à maior) e pela localização (passagem da escala maior à menor). Um outro princípio explorado neste capítulo que governa a relação entre as quantidades das diferentes escalas é o princípio de macro-homogeneidade de Hill–Mandel [67, 101]. Este conceito é primordial e serve como base para a adequada colocação da inter-relação entre as escalas e a correta interpretação das hipóteses realizadas para formular o problema na microescala.

Por outro lado, apesar do interesse em formulações de multiescala ter sido amplamente explorado na literatura no contexto de formulações comandadas por medidas de deformação [111, 113, 119, 154], ainda não há trabalhos na área que se refiram às formulações de multiescala duais, isto é, comandadas pela tensão. Um completo tratamento do ponto de vista da formulação variacional na sua forma primal dos modelos de multiescala é desenvolvido em [120], e de forma resumida é apresentado na primeira parte deste capítulo. Uma maneira de aprofundar o entendimento sobre o problema de multiescala é através do conceito de dualidade. Estes conceitos, com bases bem desenvolvidas tanto matemática (do ponto de vista do tratamento formal) quanto mecanicamente (do ponto de vista do sentido físico), fornecem ainda mais ferramentas a fim de estabelecer bases teóricas sólidas para os diferentes modelos de multiescala.

Assim sendo, este capítulo tem dois objetivos: (i) por um lado, revisitam-se as bases para colocar o problema de multiescala através da formulação variacional cinemática, ou formulação primal, derivando quatro possíveis modelos de multiescala diferentes, (ii) por outro lado, empregam-se os conceitos básicos de dualidade em mecânica para abordar o problema de multiescala dual, reescrevendo os quatro modelos de multiescala obtidos com a formulação primal, e dando assim um tratamento completo e sistemático ao problema. Uma vez feito isto estão providas as ferramentas para passar, no Capítulo 6, à implementação computacional de cada um dos modelos primais desenvolvidos.

A organização do capítulo é como segue. Na Seção 5.1 coloca-se o problema de multiescala do ponto de vista variacional. Isto é levado a cabo para a mecânica do sólido sob a hipótese de deformações infinitesimais. Para os detalhes do caso de grandes deformações consultar o trabalho [120]. Para isto introduzem-se os conceitos básicos necessários mencionados acima como homogeneização, localização e o princípio de macro-homogeneidade de Hill–Mandel. Exibem-se, na Seção 5.2, diferentes formas de colocar o problema de microescala em função dos espaços escolhidos para as variações admissíveis do campo na formulação primal, o que resulta em diferentes condições para o problema sobre o EVR e portanto diferentes modelos de multiescala. Depois, na Seção 5.3 obtém-se uma expressão genérica do operador tangente constitutivo homogeneizado característico de um esquema de linearização de Newton–Raphson. O conceito de dualidade do ponto de vista mecânico é apresentado na Seção 5.4 junto com algumas das ferramentas básicas sobre as quais estão apoiadas as idéias do Princípio da Potência Complementar. A colocação do problema de multiescala dual é realizada na Seção 5.5. Ainda nesta parte enuncia-se o princípio de Hill–Mandel de forma dual, e discute-se a forma de derivar os diferentes modelos por meio da escolha do carregamento externo. Na Seção 5.6 estudam-se os diferentes modelos de multiescala obtidos por meio da formulação dual, e assenta-se a correspondência com os modelos obtidos na Seção 5.2. Finalmente, na Seção 5.7 fazem-se alguns comentários para resumir idéias e fechar o capítulo.

Os tópicos introduzidos na primeira parte do capítulo estão baseados no trabalho [120] e não constituem contribuição desta tese. Esta primeira parte foi incluída visando dar uma abordagem completa e acabada sobre o tema. Entretanto, a teoria desenvolvida nesta primeira parte serviu de base para o trabalho [51] onde foi realizada a implementação computacional de cada modelo de multiescala primal como será visto no capítulo seguinte. Com relação à segunda parte deste capítulo, os temas tratados constituem, de fato, parte das contribuições desta tese.

5.1 Formulação do problema de multiescala primal

Nesta seção primeiramente estabelecem-se as bases para a colocação do problema através da revisão das idéias da teoria constitutiva e da posterior formulação do problema de multiescala geral, o qual resulta função do espaço de restrições cinemáticas escolhido para formular o problema no EVR. Em todos os casos a dependência das quantidades com respeito à história de deformação denota-se pelo índice t .

5.1.1 A teoria constitutiva e suas limitações

De acordo com a teoria constitutiva local para materiais sólidos, a tensão em um dado ponto do contínuo é função exclusivamente da história de deformação daquele ponto, ou seja que existe um operador \mathcal{F} tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{U}_{\varepsilon^t} &\rightarrow \mathcal{U}_{\sigma}, \\ \varepsilon^t &\mapsto \mathcal{F}(\varepsilon^t) = \sigma, \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

onde σ é o tensor de tensão, ε^t representa a história do tensor de deformação infinitesimal $\varepsilon(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u})^s$, e \mathcal{U}_{σ} e $\mathcal{U}_{\varepsilon^t}$ são os correspondentes conjuntos dos possíveis estados de tensão e histórias de deformação. Denotou-se \mathbf{u} o campo de deslocamentos, enquanto que o operador \mathcal{F} realiza o mapeamento para cada ponto fixo \mathbf{x} do contínuo. Esta é a forma mais geral de expressar um comportamento constitutivo. Por exemplo, no caso de um material elástico linear resulta $\sigma = \mathbb{D}\varepsilon$, onde \mathbb{D} é o tensor de quarta ordem de elasticidade. Dentro da forma genérica (5.1.1) ficam também incluídos comportamentos como o elasto-plástico e o elasto-viscoplástico, e em ambos os casos um conjunto de variáveis

internas controla a história da deformação $\boldsymbol{\varepsilon}^t$. Tais variáveis encontram-se relacionadas com fenômenos macroscópicos observáveis por meio da experimentação, daí segue que estes modelos denominam-se fenomenológicos. Somente para citar um exemplo simples, o modelo generalizado para metais que seguem a lei de creep de Norton é o seguinte

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \\ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{dt} &= \left(\frac{\|\boldsymbol{\sigma}^S\|}{\lambda} \right)^N \boldsymbol{\sigma}^S,\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

onde N e λ são constantes do material, $\boldsymbol{\sigma}^S = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}$ é a parte desviadora do tensor $\boldsymbol{\sigma}$ e a norma $\|\cdot\|$ é Euclidiana. Aqui a variável interna é o tensor de deformação plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ cuja evolução é controlada mediante uma equação diferencial ordinária. Assim, a evolução do estado de tensão do material vem dada pela seguinte equação diferencial ordinária

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbb{D} \left[\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} - \left(\frac{\|\boldsymbol{\sigma}^S\|}{\lambda} \right)^N \boldsymbol{\sigma}^S \right],\tag{5.1.3}$$

e o operador \mathcal{F} apresentado é a representação abstrata da solução desta equação diferencial uma vez dada a condição inicial. Este tipo de modelo fenomenológico responde de forma adequada a um amplo leque de materiais. O nome decorre, com efeito, do modelo estar construído em função de fatos observáveis à escala real do problema, e isto apesar de ser bem sabido que a deformação plástica é um fenômeno inerente à microestrutura do material. Como mencionado anteriormente, frente a histórias de deformação mais complexas estes modelos fenomenológicos devem necessariamente ser melhorados, para o qual o número de variáveis internas deve aumentar juntamente com as correspondentes leis de evolução. Cada uma destas leis depende das propriedades dos materiais, as quais são cada vez mais difíceis de serem identificadas e mensuradas. Isto representa, de alguma forma, um limite por parte dos modelos constitutivos fenomenológicos para a caracterização de materiais. Contudo, outra forma de abordar o problema é possível, e é através dos modelos constitutivos de multiescala. Nestes modelos o comportamento constitutivo é obtido por meio da análise dos fenômenos que sucedem em uma escala menor, podendo incorporá-los no problema real mediante técnicas de homogeneização. Estas questões serão abordadas nas seções seguintes.

5.1.2 Conceitos preliminares de multiescala

Considere que qualquer ponto \mathbf{x} do domínio contínuo macroscópico Ω está associado com um elemento de volume representativo Ω_μ (daqui em diante o EVR), com contorno Γ_μ , cujo comprimento característico é muito menor que o do contínuo macroscópico ($l_\mu \ll l$), como se vê na Figura 5.1. O EVR pode, eventualmente, conter talhos e poros vazios ou com algum fluido, ou um outro tipo de material, preenchendo o espaço Ω_μ^v , cujo contorno é Γ_μ^{vs} de normal \mathbf{n}_{vs} . Neste trabalho, a matriz sólida do EVR, denominada Ω_μ^s , também considera-se um contínuo microscópico cujo contorno é $\Gamma_\mu \cup \Gamma_\mu^{sv}$. Logo tem-se $\Omega_\mu = \Omega_\mu^s \cup \overline{\Omega_\mu^v}$ e $\Gamma_\mu^{sv} \equiv \Gamma_\mu^{vs}$ e assume-se, por simplicidade na apresentação, que $\Gamma_\mu \cap \overline{\Omega_\mu^v} = \emptyset$.

A formulação variacional do modelo multiescala primal está baseada no fato do tensor de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ em qualquer ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ satisfazer a seguinte relação com o tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$ definido no EVR

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_\mu \, d\mathbf{y},\tag{5.1.4}$$

onde $V_\mu = |\Omega_\mu|$, ou seja, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é a média volumétrica de $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$ no EVR. Esta expressão representa uma primeira restrição sobre a cinemática do EVR. Em ambos os tensores está envolvida

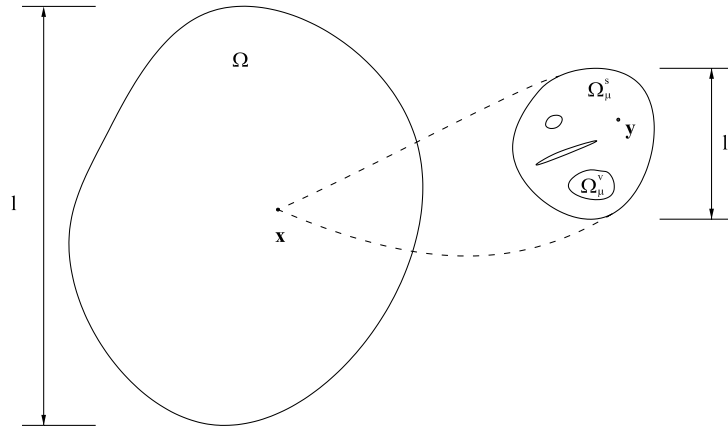


Figura 5.1: Contínuos macroscópico e microscópico associados a cada ponto $\mathbf{x} \in \Omega$.

a história da deformação até chegar ao instante t . A deformação $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$ define-se em função do deslocamento no EVR, denotado por \mathbf{u}_μ , como $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu = (\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_\mu)^s$, onde $(\cdot)^s$ indica a parte simétrica. A expressão (5.1.4) introduz o conceito de homogeneização, fornecendo, a partir de quantidades definidas a nível do EVR, as correspondentes quantidades definidas no contínuo macroscópico.

Um conceito que será recorrentemente utilizado é a decomposição aditiva do campo de deslocamentos \mathbf{u}_μ no EVR que, sem perda de generalidade, é escrito da seguinte forma

$$\mathbf{u}_\mu = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \quad (5.1.5)$$

onde $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ denomina-se a flutuação do campo de deslocamentos, e vai somada a uma componente linear, função do tensor de deformação homogeneizado. Logo, a deformação microscópica pode ser decomposta de forma aditiva como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mu = \boldsymbol{\varepsilon} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu, \quad (5.1.6)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu = (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s$ é a flutuação do tensor de deformação.

De forma análoga à (5.1.4) define-se a tensão homogeneizada $\boldsymbol{\sigma}$ como sendo a média no EVR da tensão da microescala $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ como segue

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \, d\mathbf{y}. \quad (5.1.7)$$

Note que ao ter assumido que o EVR é um meio contínuo imediatamente a tensão $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ está definida.

5.1.3 Escolha de restrições cinemáticas e o princípio de Hill–Mandel

Como é habitual, dentro de uma formulação variacional primal as hipóteses são feitas sobre a cinemática do problema, isto é sobre o campo de deslocamentos. O equilíbrio do EVR deve ser formulado dentro do conjunto dos denominados campos cinematicamente admissíveis. De acordo com o conceito de deformação homogeneizada, os campos cinematicamente admissíveis são aqueles que satisfazem a (5.1.4). Logo, fixado um ponto \mathbf{x} do contínuo macroscópico e, abusando da notação, dado $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$, o conjunto de funções vetoriais cinematicamente admissíveis fica definido como

$$\mathcal{K}_\mu^m = \left\{ \mathbf{v}_\mu \in \mathcal{U}; \int_{\Omega_\mu} (\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v}_\mu)^s \, d\mathbf{y} = V_\mu \boldsymbol{\varepsilon} \right\}, \quad (5.1.8)$$

onde \mathcal{U} impõe sobre o conjunto \mathcal{K}_μ^m a regularidade necessária tal que as operações a serem realizadas façam sentido.

Considerando algumas identidades tensoriais básicas (ver [61]) pode-se escrever, quando $\Omega_\mu^v = \emptyset$

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_\mu \, d\mathbf{y} = \int_{\Omega_\mu} (\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_\mu)^s \, d\mathbf{y} = \int_{\Gamma_\mu} (\mathbf{u}_\mu \otimes \mathbf{n})^s \, d\Gamma. \quad (5.1.9)$$

Esta expressão pode ser generalizada ao caso onde $\Omega_\mu^v \neq \emptyset$ como

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_\mu \, d\mathbf{y} = \int_{\Gamma_\mu} (\mathbf{u}_\mu \otimes \mathbf{n})^s \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu^{sv}} (\mathbf{u}_\mu \otimes \mathbf{n}_{sv})^s \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu^{vs}} (\mathbf{u}_\mu \otimes \mathbf{n}_{vs})^s \, d\Gamma, \quad (5.1.10)$$

e usando o fato de ser $\mathbf{n}_{vs} = -\mathbf{n}_{sv}$ e $\Gamma_\mu^{vs} \equiv \Gamma_\mu^{sv}$ resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_\mu \, d\mathbf{y} &= \int_{\Gamma_\mu} (\mathbf{u}_\mu \otimes \mathbf{n})^s \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu^{sv}} (\mathbf{u}_\mu \otimes \mathbf{n}_{sv})^s \, d\Gamma - \int_{\Gamma_\mu^{sv}} (\mathbf{u}_\mu \otimes \mathbf{n}_{sv})^s \, d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_\mu} (\mathbf{u}_\mu \otimes \mathbf{n})^s \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Logo, o conjunto \mathcal{K}_μ^m pode ser redefinido como

$$\mathcal{K}_\mu^m = \left\{ \mathbf{v}_\mu \in \mathcal{U}; \int_{\Gamma_\mu} (\mathbf{v}_\mu \otimes \mathbf{n})^s \, d\Gamma = V_\mu \boldsymbol{\varepsilon} \right\}, \quad (5.1.12)$$

ficando caracterizado como função dos deslocamentos sobre o contorno do EVR. A partir deste conjunto obtém-se o modelo com as mínimas restrições cinemáticas necessárias. Agora, empregando a decomposição aditiva expressa pela (5.1.5), sabendo que

$$V_\mu \boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\Omega_\mu} (\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_\mu)^s \, d\mathbf{y} = \int_{\Omega_\mu} (\boldsymbol{\varepsilon} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{y} + (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s) \, d\mathbf{y} = V_\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \int_{\Omega_\mu} (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s \, d\mathbf{y}, \quad (5.1.13)$$

e usando a (5.1.11) para o caso da flutuação, vê-se que o conjunto de mínimas restrições cinemáticas pode ser mais uma vez redefinido como sendo

$$\mathcal{K}_\mu^m = \{ \mathbf{v}_\mu = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{y} + \tilde{\mathbf{v}}_\mu; \tilde{\mathbf{v}}_\mu \in \tilde{\mathcal{K}}_\mu^m \}, \quad (5.1.14)$$

com

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^m = \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_\mu \in \mathcal{U}; \int_{\Gamma_\mu} (\tilde{\mathbf{v}}_\mu \otimes \mathbf{n})^s \, d\Gamma = 0 \right\}. \quad (5.1.15)$$

Desta forma trabalha-se equivalentemente com o espaço $\tilde{\mathcal{K}}_\mu^m$, a partir do qual obtém-se o conjunto \mathcal{K}_μ^m mediante uma translação. Logo, a formulação do problema no EVR está intimamente ligada ao espaço $\tilde{\mathcal{K}}_\mu^m$. Assim, é possível que a caracterização deste problema a nível da microescala esteja atrelada a hipóteses adicionais sobre o campo de deslocamentos, ou sobre as flutuações do mesmo (seguindo o conceito introduzido acima). Suponha que \mathcal{K}_μ é o conjunto dos campos de deslocamento cinematicamente admissíveis escolhido, este deve satisfazer a inclusão $\mathcal{K}_\mu \subset \mathcal{K}_\mu^m$, ou igualmente $\tilde{\mathcal{K}}_\mu \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu^m$. Assim, diferentes escolhas de \mathcal{K}_μ , ou $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$, resultam em diferentes modelos de multiescala, posto que cada um deles possui uma cinemática própria. Entretanto, todos eles mantêm como ponto em comum a inclusão no conjunto de restrições cinemáticas mínimas.

Seja um dado conjunto \mathcal{K}_μ . O espaço das variações cinematicamente admissíveis, denominado \mathcal{V}_μ , define-se por meio de efetuar a diferença entre elementos do conjunto de campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis. Entretanto, dada a decomposição

aditiva (5.1.5) resulta simplesmente que as variações de elementos em \mathcal{K}_μ estão no próprio espaço das flutuações, ou seja

$$\mathcal{V}_\mu = \tilde{\mathcal{K}}_\mu. \quad (5.1.16)$$

Vê-se então que a decomposição aditiva permite claramente identificar os diferentes elementos dentro da formulação primal do problema no EVR, além de poder permitir a caracterização de diversos modelos de multiescala, como é feito na Seção 5.2, através da escolha do espaço \mathcal{V}_μ .

Junto com a escolha da cinemática do modelo em compliância com a inclusão no conjunto \mathcal{K}_μ^m um outro princípio deve ser satisfeito por qualquer modelo que envolva a passagem de uma escala a outra. O princípio de macro-homogeneidade de Hill–Mandel [67, 101] é um princípio fundado em bases físicas. O mesmo postula que a potência produzida pelas tensões da macroescala deve ser igual à potência média no volume do EVR produzida pelas tensões da microescala. Ou seja, assumindo que os tensores $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ são tais que o equilíbrio foi alcançado em ambas as escalas então a seguinte identidade deve ser satisfeita

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu \, dy \quad \forall \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu \text{ admissível}, \quad (5.1.17)$$

onde a taxa de deformação vem dada, no caso da decomposição aditiva do campo \mathbf{u}_μ , como $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\mu = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\nabla_{\mathbf{y}} \dot{\mathbf{u}}_\mu)^s$. Além disso, o tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ está relacionado com $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu$ pela (5.1.4).

O princípio de Hill–Mandel é utilizado ao formular o problema variacional no EVR. Na Seção 5.1.4 analisam-se as conseqüências que o princípio enunciado acima traz na formulação variacional do problema de equilíbrio na microescala. Ver-se-á que os elementos que definem o problema da microescala dependem do que estabelece o princípio de Hill–Mandel.

5.1.4 O problema de multiescala primal geral

Considere o conjunto de campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis \mathcal{K}_μ e o correspondente espaço de flutuações $\tilde{\mathcal{K}}_\mu$. Para o tensor $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ o equilíbrio no EVR é alcançado se e somente se a seguinte equação variacional é satisfeita

$$\int_{\Omega_\mu^s} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, dy = \int_{\Omega_\mu^s} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dy + \int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}^e \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu^{sv}} \mathbf{t}^v \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu, \quad (5.1.18)$$

onde \mathbf{b} e \mathbf{t}^e são uma força de corpo e uma tração externa atuando sobre o EVR, enquanto que \mathbf{t}^v é a tração exercida pelo meio que se encontra em Ω_μ^v . Além disso, $\mathcal{V}_\mu = \tilde{\mathcal{K}}_\mu$ é um espaço que satisfaz as condições discutidas na seção anterior. A natureza da tração \mathbf{t}^v dependerá do que se considere que haja dentro do domínio Ω_μ^v . Analogamente, supondo a existência de um outro material sólido em Ω_μ^v , o equilíbrio estabelece que

$$\int_{\Omega_\mu^v} \boldsymbol{\sigma}_\mu^v \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, dy = \int_{\Omega_\mu^v} \mathbf{b}^v \cdot \boldsymbol{\eta} \, dy + \int_{\Gamma_\mu^{vs}} (-\mathbf{t}^v) \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \quad (5.1.19)$$

As equações de Euler–Lagrange correspondentes às formulações variacionais (5.1.18) e (5.1.19) são a seguintes

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma}_\mu = -\mathbf{b} & \text{em } \Omega_\mu^s, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma}_\mu^v = -\mathbf{b}^v & \text{em } \Omega_\mu^v, \\ \boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{n} = \mathbf{t}^e & \text{sobre } \Gamma_\mu, \\ \boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{n}_{sv} = \mathbf{t}^v & \text{sobre } \Gamma_\mu^{sv}, \\ \boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{n}_{sv} = \boldsymbol{\sigma}_\mu^v \mathbf{n}_{sv} & \text{sobre } \Gamma_\mu^{sv}, \end{cases} \quad (5.1.20)$$

onde \mathbf{n} indica sempre a normal externa ao domínio Ω_μ^s .

Com a equação de equilíbrio é possível escrever a tensão homogeneizada (5.1.7) em termos das forças de corpo e de tração sobre o EVR. Para isto observe que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \, d\mathbf{y} &= \int_{\Omega_\mu^s} \boldsymbol{\sigma}_\mu \, d\mathbf{y} + \int_{\Omega_\mu^v} \boldsymbol{\sigma}_\mu^v \, d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\Gamma_\mu} (\boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{n}) \otimes \mathbf{y} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu^{sv}} (\boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{n}_{sv}) \otimes \mathbf{y} \, d\Gamma - \int_{\Omega_\mu^s} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma}_\mu \otimes \mathbf{y} \, d\mathbf{y} \\ &\quad + \int_{\Gamma_\mu^{vs}} (\boldsymbol{\sigma}_\mu^v \mathbf{n}_{vs}) \otimes \mathbf{y} \, d\Gamma - \int_{\Omega_\mu^v} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma}_\mu^v \otimes \mathbf{y} \, d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Utilizando as equações de Euler–Lagrange e sabendo que $\Gamma_\mu^{sv} \equiv \Gamma_\mu^{vs}$ com normais opostas resulta

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V_\mu} \left[\int_{\Gamma_\mu} (\mathbf{t}^e \otimes \mathbf{y})^s \, d\Gamma + \int_{\Omega_\mu^s} (\mathbf{b} \otimes \mathbf{y})^s \, d\mathbf{y} + \int_{\Omega_\mu^v} (\mathbf{b}^v \otimes \mathbf{y})^s \, d\mathbf{y} \right], \quad (5.1.22)$$

onde também foi usada a simetria do tensor de tensão. Em [120] demonstra-se que, para o caso em que $\mathbf{b}^v = 0$, o postulado do princípio de Hill–Mandel visto anteriormente é equivalente, uma vez formulado o equilíbrio sobre o EVR, a exigir que

$$\int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}^e \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Gamma + \int_{\Omega_\mu^s} \mathbf{b} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu, \quad (5.1.23)$$

o que implica que ambos os termos se devem anular de forma separada, para o qual a força de volume e a tração devem ser ortogonais ao espaço das variações admissíveis. Este resultado determina que qualquer modelo de multiescala que procure satisfazer o princípio de Hill–Mandel deve ser tal que a força de volume \mathbf{b} e a tração \mathbf{t}^e tenham certas características. Em outras palavras, a força de corpo e a tração são de natureza reativa, e as propriedades que estes campos possuem dependem das restrições cinemáticas impostas no espaço das variações admissíveis \mathcal{V}_μ . A extensão para o caso em que $\mathbf{b}^v \neq 0$ resulta analogamente o seguinte

$$\int_{\Omega_\mu^v} \mathbf{b}^v \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu. \quad (5.1.24)$$

Para fechar o problema de microescala deve ser fornecido um comportamento constitutivo para o material do EVR. Para isto recorre-se à teoria constitutiva fenomenológica da Seção 5.1.1 que estabelece que existe um operador \mathcal{F}_μ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mu : \mathcal{U}_{\boldsymbol{\varepsilon}_\mu^t} &\rightarrow \mathcal{U}_{\boldsymbol{\sigma}_\mu}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_\mu^t &\mapsto \mathcal{F}_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu^t) = \boldsymbol{\sigma}_\mu. \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Aqui seguem valendo todos os aspectos que a teoria constitutiva fenomenológica envolve. Logo, levando em conta a expressão do equilíbrio (5.1.18), junto com a lei constitutiva genérica (5.1.25) e com a consequência do princípio de Hill–Mandel (5.1.23), resulta que o problema de microescala para todo ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ em termos da flutuação do campo de deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ é o seguinte:

Problema 5.1. *Dada uma história de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}^t$, encontre a flutuação do campo de*

deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu$ tal que

$$\int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{F}_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}^t + ((\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t) \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = \int_{\Gamma_\mu^{sv}} \mathbf{t}^v \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu, \quad (5.1.26)$$

onde \mathcal{V}_μ deve satisfazer as condições discutidas na Seção 5.1.3. Logo, calcule a tensão homogeneizada $\boldsymbol{\sigma}$ usando a (5.1.7).

O problema geral de multiescala fica fechado uma vez que o espaço \mathcal{V}_μ é escolhido de forma que satisfaça $\mathcal{V}_\mu \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu^m$. O Problema 5.1 aqui apresentado define então um operador constitutivo na macroescala \mathcal{F} como o da expressão (5.1.1) posto que se satisfazem todos os axiomas estabelecidos pela teoria constitutiva.

5.2 Modelos específicos de multiescala primais

Nesta seção apresentam-se diversos modelos de multiescala baseados na escolha do espaço das flutuações do campo de deslocamentos, \mathcal{V}_μ . Assim, podem-se gerar quatro classes de modelos:

- i. modelo de Taylor;
- ii. modelo de flutuação nula;
- iii. modelo de flutuação periódica;
- iv. modelo de mínima restrição cinemática.

A enumeração foi dada começando pelo modelo cinematicamente mais restrito e indo ao menos restrito, portanto os espaços definidos em cada caso satisfazem as seguintes inclusões

$$\mathcal{V}_\mu^T \subset \mathcal{V}_\mu^N \subset \mathcal{V}_\mu^P \subset \mathcal{V}_\mu^M, \quad (5.2.1)$$

onde os índices T , N , P e M estão na mesma ordem dos modelos acima mencionados. Logo, fixado o comportamento constitutivo na microescala \mathcal{F}_μ e a natureza da tração \mathbf{t}^v , o modelo de Taylor dá como resultado o material cujo comportamento constitutivo macroscópico \mathcal{F}^T é mais rígido, enquanto que o modelo de mínima restrição cinemática é o de comportamento constitutivo \mathcal{F}^M menos rígido.

Nas seções que seguem abordam-se as principais características de cada um destes modelos. Em cada caso deriva-se, como conseqüência, a forma que assume o carregamento externo $(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e)$ tal que o princípio de Hill–Mandel seja satisfeito.

5.2.1 Modelo de Taylor

Este é o modelo de multiescala mais simples e com maiores restrições cinemáticas. Neste caso o espaço \mathcal{V}_μ é simplesmente o elemento nulo, isto é

$$\mathcal{V}_\mu^T = \{0\} \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu^m, \quad (5.2.2)$$

o que implica que

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu = 0 \quad \text{em } \Omega_\mu^s, \quad (5.2.3)$$

e portanto $\mathbf{u}_\mu = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{y}$. Esta hipótese de deformação homogênea conhece-se como hipótese de Taylor [152]. Logo, a deformação é

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\mu = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.2.4)$$

e a tensão na microescala vem dada diretamente como

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu = \mathcal{F}_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}^t). \quad (5.2.5)$$

A tensão homogeneizada resulta então

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}^T(\boldsymbol{\varepsilon}^t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{F}_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}^t) \, d\mathbf{y}. \quad (5.2.6)$$

Para o caso simples de um material poroso onde o operador \mathcal{F}_μ independe de \mathbf{y} resulta

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}^T(\boldsymbol{\varepsilon}^t) = \frac{V_\mu^s}{V_\mu} \mathcal{F}_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}^t) = \nu^s \boldsymbol{\sigma}_\mu, \quad (5.2.7)$$

onde $\nu^s = \frac{V_\mu^s}{V_\mu}$ é a fração de material sólido no EVR. Em um caso mais geral com presença de diversas fases resulta a bem conhecida regra da mistura

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}^T(\boldsymbol{\varepsilon}^t) = \sum_{i=1}^k \nu^i \mathcal{F}_\mu^i(\boldsymbol{\varepsilon}^t) = \sum_{i=1}^k \nu^i \boldsymbol{\sigma}_\mu^i, \quad (5.2.8)$$

onde $i = 1, \dots, k$ denota cada uma das fases de material no EVR e $\nu^i = \frac{V_\mu^i}{V_\mu}$ indica a fração de volume ocupada pelo material i .

Finalmente, com relação ao par $(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e)$ resulta que este carregamento está dentro do maior conjunto possível posto que qualquer campo, tanto sobre o domínio como sobre a fronteira, é ortogonal ao elemento nulo no sentido dado pela (5.1.23). Em outras palavras, $(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e)$ é um par arbitrário.

5.2.2 Modelo de flutuação nula

Este modelo de multiescala está baseado na hipótese que estabelece que a flutuação $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ sobre a fronteira Γ_μ é nula, portanto o espaço \mathcal{V}_μ resulta

$$\mathcal{V}_\mu^N = \{\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{U}; \tilde{\mathbf{u}}_\mu|_{\Gamma_\mu} = 0\} \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu^m. \quad (5.2.9)$$

Esta escolha implica que

$$\mathbf{u}_\mu = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{y} \quad \text{sobre } \Gamma_\mu, \quad (5.2.10)$$

e por isto é que se denomina também modelo de deslocamento linear na fronteira. O carregamento $(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e)$ aqui comporta-se de forma diferente ao caso anterior. Em função da (5.1.23) note que, enquanto a tração \mathbf{t}^e pode ser arbitrária devido à ortogonalidade com o elemento nulo sobre Γ_μ , a força \mathbf{b} deve ser necessariamente nula, isto é

$$\mathbf{b} = 0 \quad \text{em } \Omega_\mu^s, \quad (5.2.11)$$

devido a que a flutuação no interior do EVR é arbitrária. Caso contrário o princípio de Hill–Mandel estaria sendo violado e o modelo estaria mal construído.

5.2.3 Modelo de flutuação periódica

Esta classe de modelo é particularmente adequada para aqueles materiais cuja microestrutura seja facilmente identificável com uma estrutura periódica. Por esta causa, ou mesmo pelo fato de que assumir periodicidade da microestrutura parece ser uma hipótese bastante razoável, a maior percentagem dos trabalhos encontrados na literatura empregam esta classe de modelos. Por simplicidade considera-se o problema em duas dimensões, e

segue-se a notação de [113, 120]. Seja o esquema do EVR apresentado na Figura 5.2, onde identificam-se contornos recíprocos Γ_i^+ e Γ_i^- componentes de Γ_μ , tanto no caso de um quadrado quanto no caso de um hexágono. Para que haja consistência na estrutura periódica, o EVR deve ser tal que para cada ponto $\mathbf{y}^+ \in \Gamma_i^+$ exista o ponto $\mathbf{y}^- \in \Gamma_i^-$ de forma que $\mathbf{n}_i^+ = \mathbf{n}(\mathbf{y}^+) = -\mathbf{n}(\mathbf{y}^-) = \mathbf{n}_i^-$, $\forall i$, e tal que a flutuação nesses pontos tome o mesmo valor. Na Figura 5.2 também mostram-se os vetores tangentes sobre contorno Γ_μ , os quais são denotados por \mathbf{t}_i^\pm , $\forall i$.

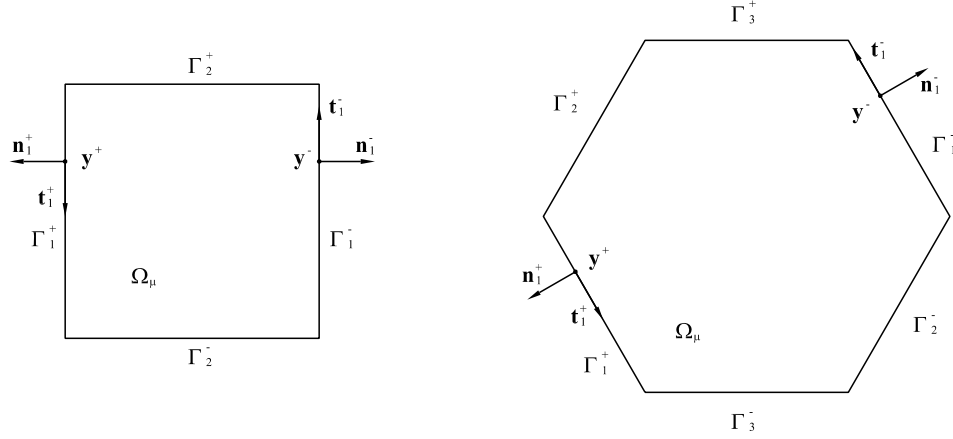


Figura 5.2: Características geométricas do EVR para o modelo de flutuação periódica.

Logo, a hipótese cinemática que está por trás deste modelo de multiescala estabelece que a flutuação $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ sobre a fronteira é de caráter periódico, portanto o espaço \mathcal{V}_μ resulta

$$\mathcal{V}_\mu^P = \{\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{U}; \tilde{\mathbf{u}}_\mu|_{\Gamma_i^+} = \tilde{\mathbf{u}}_\mu|_{\Gamma_i^-}, \forall i\} \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu^m. \quad (5.2.12)$$

Para ver que a inclusão é verdadeira observe que, de acordo com a decomposição do contorno Γ_μ tem-se que $\forall \tilde{\mathbf{v}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu^P$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\mu} (\tilde{\mathbf{v}}_\mu \otimes \mathbf{n})^s d\Gamma &= \sum_i \left(\int_{\Gamma_i^+} (\tilde{\mathbf{v}}_\mu \otimes \mathbf{n}_i^+)^s d\Gamma + \int_{\Gamma_i^-} (\tilde{\mathbf{v}}_\mu \otimes \mathbf{n}_i^-)^s d\Gamma \right) = \\ &= \sum_i \left(\int_{\Gamma_i^+} (\tilde{\mathbf{v}}_\mu \otimes \mathbf{n}_i^+)^s d\Gamma - \int_{\Gamma_i^-} (\tilde{\mathbf{v}}_\mu \otimes \mathbf{n}_i^+)^s d\Gamma \right) = 0, \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

onde usou-se o fato das normais \mathbf{n}_i^+ e \mathbf{n}_i^- serem opostas e da reciprocidade das flutuações para os pontos \mathbf{y}^+ de Γ_i^+ e \mathbf{y}^- de Γ_i^- , $\forall i$.

Aqui também o carregamento $(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e)$ comporta-se de forma diferente ao modelo de Taylor. Note que a tração deve satisfazer

$$\int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}^e \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^P, \quad (5.2.14)$$

e portanto tem-se que a mesma é antiperiódica, ou seja

$$\mathbf{t}^e|_{\Gamma_i^+} = -\mathbf{t}^e|_{\Gamma_i^-} \quad \forall i. \quad (5.2.15)$$

Da mesma maneira, e como anteriormente, o carregamento \mathbf{b} deve ser nulo, ou seja

$$\mathbf{b} = 0 \quad \text{em } \Omega_\mu^s. \quad (5.2.16)$$

Somente desta forma assegura-se que se satisfaz a (5.1.23).

5.2.4 Modelo de mínima restrição cinemática

Como indica o nome, o espaço \mathcal{V}_μ a partir do qual constrói-se este modelo é o próprio espaço de mínima restrição cinemática, isto é

$$\mathcal{V}_\mu^M = \tilde{\mathcal{K}}_\mu^m, \quad (5.2.17)$$

onde $\tilde{\mathcal{K}}_\mu^m$ é definido na (5.1.15). A fim de satisfazer a (5.1.23), a escolha deste espaço implica que o carregamento de corpo \mathbf{b} deve ser nulo, ou seja

$$\mathbf{b} = 0 \quad \text{em } \Omega_\mu^s, \quad (5.2.18)$$

enquanto que, por outro lado, a tração \mathbf{t}^e deve satisfazer

$$\int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}^e \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^M. \quad (5.2.19)$$

Logo, escrevendo $\mathbf{t}^e = \boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{n}$ e usando a simetria de $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot (\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n}) \, d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot (\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n})^s \, d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^M. \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Esta expressão implica que certas componentes do tensor $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ devem ser constantes sobre Γ_μ . Decompondo a variação admissível $\boldsymbol{\eta}$ em componentes normal e tangencial sobre Γ_μ pode-se ver que as componentes

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu nn} &= \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \\ \sigma_{\mu nt} &= \sigma_{\mu tn} = \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t}), \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

são constantes sobre Γ_μ , e portanto deve ser

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) && \text{sobre } \Gamma_\mu, \\ \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t}) &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t}) && \text{sobre } \Gamma_\mu, \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

e nada pode ser dito sobre a componente $\sigma_{\mu tt} = \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot (\mathbf{t} \otimes \mathbf{t})$. Por isto é que também se costuma denominar este modelo como de tração uniforme, ou tração constante, sobre a fronteira.

5.3 O operador tangente constitutivo

O modelo geral de multiescala do qual o Problema 5.1 forma parte é, no caso geral, não linear. A linearização desta classe de problemas é da maior importância tanto pelo próprio conceito que a forma linear do problema tem ao fornecer, por exemplo, informação sobre a estabilidade do problema, assim como para realizar a abordagem aproximada do mesmo. Nesta seção obtém-se a forma do operador tangente constitutivo após ter linearizado o problema. O próximo passo seria então a especialização de algum esquema numérico discreto para efetuar a aproximação do problema. Isso não é feito aqui, e pode ser consultado em [120].

Considere a perturbação do tensor ε governada pelo parâmetro $\tau \in \mathbb{R}^+$

$$\varepsilon_\tau = \varepsilon + \tau \delta \varepsilon, \quad (5.3.1)$$

onde a perturbação deve ser considerada sobre toda a história de deformação. Então, o operador genérico \mathcal{F} definido em (5.1.1) pode ser escrito, expandindo-o em potências de τ , como segue

$$\mathcal{F}(\varepsilon_\tau^t) = \mathcal{F}(\varepsilon^t) + \tau \mathcal{D}\mathcal{F}(\varepsilon^t, \delta \varepsilon^t) + \mathcal{O}(\tau), \quad (5.3.2)$$

onde

$$\mathcal{D}\mathcal{F}(\varepsilon^t, \delta \varepsilon^t) = \left. \frac{d}{d\tau} \mathcal{F}(\varepsilon_\tau^t) \right|_{\tau=0}, \quad (5.3.3)$$

e $\mathcal{O}(\tau)$ é um termo tal que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(\tau)}{\tau} = 0. \quad (5.3.4)$$

Aqui, o operador $\mathcal{D}\mathcal{F}(\varepsilon^t, \delta \varepsilon^t)$ denomina-se operador tangente constitutivo do funcional \mathcal{F} no ponto ε^t e na direção $\delta \varepsilon^t$.

Para os modelos de multiescala utilizados aqui, baseados na homogeneização da tensão, tem-se que o operador constitutivo homogeneizado define-se como

$$\mathcal{F}_H(\varepsilon^t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{F}_\mu(\varepsilon^t + ((\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t) d\mathbf{y}. \quad (5.3.5)$$

Por outro lado, convém expressar a relação não linear existente entre as histórias das deformações ε e $(\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s$ através de um operador abstrato \mathcal{C} como $((\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t = \mathcal{C}(\varepsilon^t)$ (definido implicitamente pelo Problema 5.1), e portanto segue-se que

$$\mathcal{F}_H(\varepsilon^t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{F}_\mu(\varepsilon^t + \mathcal{C}(\varepsilon^t)) d\mathbf{y}, \quad (5.3.6)$$

onde resulta $\varepsilon_\mu^t = \varepsilon^t + \mathcal{C}(\varepsilon^t)$. Agora é possível obter o operador tangente constitutivo homogeneizado. De acordo com o anterior tem-se

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_H(\varepsilon^t, \delta \varepsilon^t) = \left. \frac{d}{d\tau} \mathcal{F}_H(\varepsilon_\tau^t) \right|_{\tau=0} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{D}\mathcal{F}_\mu(\varepsilon_\mu^t, \delta \varepsilon^t + \mathcal{D}\mathcal{C}(\varepsilon^t, \delta \varepsilon^t)) d\mathbf{y}. \quad (5.3.7)$$

Logo, dada a linearidade do operador $\mathcal{D}(\cdot)$ segundo a direção $\delta \varepsilon^t$, isto é $\mathcal{D}\mathcal{F}_\mu(\varepsilon_\mu^t, \delta \varepsilon_\mu^t) = \mathcal{D}\mathcal{F}_\mu(\varepsilon_\mu^t)[\delta \varepsilon_\mu^t]$, resulta

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_H(\varepsilon^t)[\delta \varepsilon^t] = \frac{1}{V_\mu} \left[\int_{\Omega_\mu^s} (\mathcal{D}\mathcal{F}_\mu(\varepsilon_\mu^t) + \mathcal{D}\mathcal{F}_\mu(\varepsilon_\mu^t) \mathcal{D}\mathcal{C}(\varepsilon^t)) d\mathbf{y} \right] [\delta \varepsilon^t]. \quad (5.3.8)$$

Considere agora a perturbação da flutuação do campo de deslocamentos como

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\mu\tau} = \tilde{\mathbf{u}}_\mu + \tau \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \quad (5.3.9)$$

onde $\tau \in \mathbb{R}^+$ e $\delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu$. Daqui obtém-se

$$((\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t + \tau ((\nabla_{\mathbf{y}} \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t = \mathcal{C}(\varepsilon^t) + \tau \mathcal{D}\mathcal{C}(\varepsilon^t)[\delta \varepsilon^t] + \mathcal{O}(\tau), \quad (5.3.10)$$

donde surge a seguinte relação

$$((\nabla_{\mathbf{y}} \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t = \mathcal{D}\mathcal{C}(\varepsilon^t)[\delta \varepsilon^t]. \quad (5.3.11)$$

Só agora é possível passar à linearização do Problema 5.1. A equação variacional (5.1.26) pode ser escrita, para o par $\{\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}_\mu\}$, de forma equivalente como sendo

$$\mathcal{G}(\varepsilon, \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu, \quad (5.3.12)$$

onde \mathcal{G} é a representação abstrata da formulação. Deseja-se linearizar o problema em torno do par de equilíbrio quando se realiza uma perturbação passando ao par $\{\varepsilon_\tau, \tilde{\mathbf{u}}_{\mu\tau}\}$. Logo, a linearização consiste em colocar o seguinte

$$\left. \frac{d}{d\tau} \mathcal{G}(\varepsilon_\tau, \tilde{\mathbf{u}}_{\mu\tau}, \boldsymbol{\eta}) \right|_{\tau=0} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \quad (5.3.13)$$

Para obter a caracterização deste novo problema variacional, agora linear, veja que a perturbação da expressão (5.1.26) é

$$\int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{F}_\mu(\varepsilon^t + \tau \delta \varepsilon^t + ((\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t + \tau ((\nabla_{\mathbf{y}} \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t) \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = \int_{\Gamma_\mu^{sv}} \mathbf{t}^v \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \quad (5.3.14)$$

Diferenciando esta expressão com relação a τ e avaliando em $\tau = 0$ encontra-se que, dado um incremento de história de deformação macroscópica $\delta \varepsilon^t$, o problema linearizado consiste em encontrar o incremento $\delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu$ tal que

$$\int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{D}\mathcal{F}_\mu(\varepsilon_\mu^t)[((\nabla_{\mathbf{y}} \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t] \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = - \int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{D}\mathcal{F}_\mu(\varepsilon_\mu^t)[\delta \varepsilon^t] \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \quad (5.3.15)$$

A solução deste problema caracteriza o operador linear \mathcal{DC} que fora dado de forma abstrata na (5.3.11). Note que este operador depende do modelo de multiescala em questão posto que depende da escolha de \mathcal{V}_μ . Para o caso particular do modelo de Taylor resulta trivialmente que

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_H(\varepsilon^t) = \mathcal{D}\mathcal{F}^T(\varepsilon_\mu^t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{D}\mathcal{F}_\mu(\varepsilon_\mu^t) \, d\mathbf{y}, \quad (5.3.16)$$

posto que $\mathcal{DC} : \mathcal{U}_{\varepsilon^t} \mapsto \{0\}$ para qualquer história de deformação $\varepsilon^t \in \mathcal{U}_{\varepsilon^t}$. Segue-se então que a forma genérica do operador tangente constitutivo homogeneizado é

$$\mathcal{D}\mathcal{F}_H(\varepsilon^t) = \mathcal{D}\mathcal{F}^T(\varepsilon_\mu^t) + \mathcal{L}(\varepsilon_\mu^t), \quad (5.3.17)$$

onde \mathcal{L} denota o seguinte operador linear

$$\mathcal{L}(\varepsilon_\mu^t) = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{D}\mathcal{F}_\mu(\varepsilon_\mu^t) \mathcal{DC}(\varepsilon^t) \, d\mathbf{y}. \quad (5.3.18)$$

5.4 Conceitos preliminares de dualidade em mecânica

A dualidade é um conceito que tem a sua origem na mecânica clássica a partir de idéias de caráter intuitivo. Com efeito, a correspondência entre ação de movimento e esforço, no sentido de resistência a dita ação de movimento, aparece de forma implícita nos primeiros estágios da nossa vida. No entanto, este conceito não é exclusivo da mecânica já que a matemática tem encontrado na dualidade uma das bases no desenvolvimento da

análise funcional com relação à caracterização de certos elementos abstratos com determinadas particularidades.

Nas seções que seguem realiza-se uma breve revisão dos conceitos de dualidade desde o ponto de vista mecânico. Também apresentam-se os elementos básicos na construção de um modelo primal por meio do conceito de equilíbrio através do Princípio da Potência Virtual. Em função da formulação deste princípio passa-se a formular o problema de compatibilidade através do Princípio da Potência Virtual Complementária, chegando assim ao problema dual.

5.4.1 Generalidades de uma formulação variacional

Seja um corpo cuja configuração no instante t denomina-se Ω , com contorno Γ . Em função das restrições de movimento tem-se um espaço vetorial \mathcal{V} das ações de movimento admissíveis (velocidades) equipado com uma topologia adequada ao problema. Estas ações de movimento também estão atreladas às restrições cinemáticas do corpo, e serão explicitadas depois. Surge também o operador $\mathcal{D} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ como aquele que para uma dada ação de movimento atribui um elemento denominado taxa de deformação. No caso de sólidos sob hipótese de deformações infinitesimais este operador é o operador gradiente simétrico $\mathcal{D}(\cdot) = (\nabla(\cdot))^s$, que mede a deformação. Logo, as hipóteses utilizadas na construção do modelo mecânico são as seguintes:

- o esforço externo que atua sobre o corpo na configuração Ω é um funcional linear e contínuo sobre \mathcal{V} . O valor deste funcional designa-se potência externa

$$p_e = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}; \quad (5.4.1)$$

- o esforço interno é um funcional linear e contínuo sobre a imagem do operador \mathcal{D} , isto é sobre \mathcal{W} . O valor deste funcional denomina-se potência interna

$$p_i = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dx, \quad (5.4.2)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{W}$ e $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{W}'$. Aqui a forma do produto de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}' \times \mathcal{W}}$ foi definida utilizando o teorema de representação de Riesz. Assim, a operação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}$ fica definida a partir do produto interno em \mathcal{W} devido à estrutura de espaço de Hilbert deste espaço. Com a representação (5.4.2) assegura-se que a potência interna é nula para toda ação de movimento rígida.

Seja então o esquema da Figura 5.3 onde se apresentam os elementos sobre os quais está montada a teoria a ser desenvolvida. Os espaços \mathcal{V}' e \mathcal{W}' são os espaços duais correspondentes de \mathcal{V} e \mathcal{W} , enquanto que o operador \mathcal{D}^* é o denominado operador adjunto (ou transposto) de \mathcal{D} . Este operador permite caracterizar, como será visto mais na frente, os esforços externos compatíveis com o modelo, e portanto permite estabelecer uma representação da operação $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}$.

A partir daqui constrói-se o modelo em função do que se denomina Princípio da Potência Virtual. Este princípio físico caracteriza o problema de diversas formas, fornecendo condições de equilíbrio global ponto a ponto (a noção de equilíbrio introduz-se na Seção 5.4.2), assim como as condições de compatibilidade (o conceito de compatibilidade introduz-se na Seção 5.4.3). Finalmente este princípio permite caracterizar aos esforços externos \mathbf{f} por meio da forma que assume o produto de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}$.

Seja o corpo com configuração Ω e com restrições sobre o movimento dadas sobre Γ_D por $\bar{\mathbf{u}}$ segundo mostra a Figura 5.4.

Todas as possíveis configurações de acordo com estas restrições estão no conjunto $\mathcal{K}_{\bar{\mathbf{u}}}$ denominado conjunto de configurações cinematicamente admissíveis. Este conjunto é

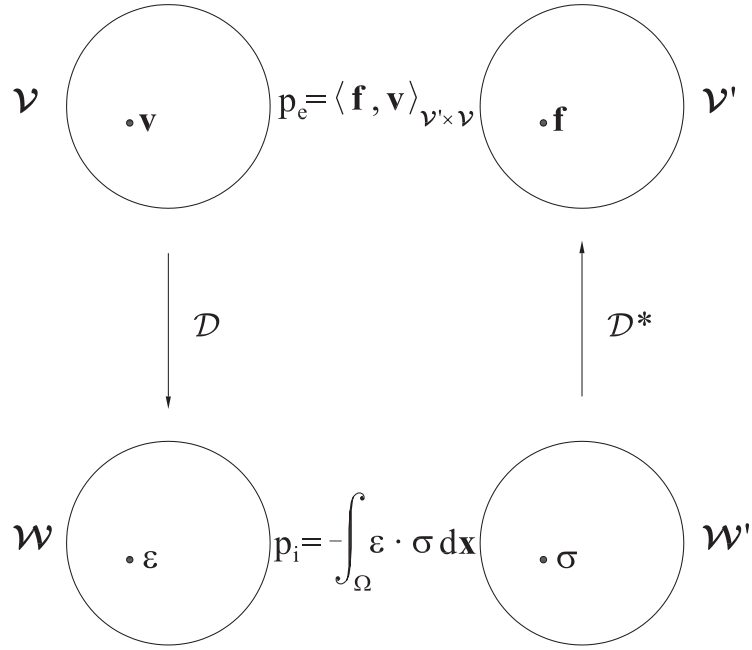


Figura 5.3: Elementos na construção de um modelo via Princípio da Potência.

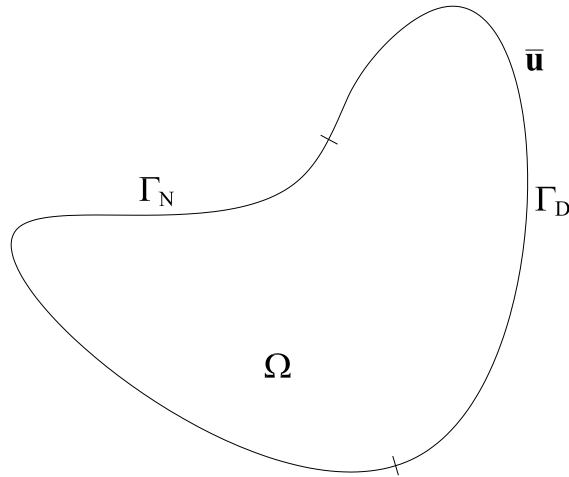


Figura 5.4: Corpo com restrições cinemáticas.

dado por

$$\mathcal{K}_{\bar{\mathbf{u}}} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U}; \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \bar{\mathbf{u}}\}, \quad (5.4.3)$$

onde \mathcal{U} está dotado com a topologia adequada de forma que as operações envolvidas façam sentido. Conseqüentemente, as ações de movimento que o corpo pode experimentar, não necessariamente de forma real, e é por isto que se denominam usualmente variações virtuais, estão no espaço \mathcal{V}

$$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}; \boldsymbol{\eta}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}\}. \quad (5.4.4)$$

Todo elemento de \mathcal{V} diz-se que é uma variação cinematicamente admissível. Vê-se então que o conjunto $\mathcal{K}_{\bar{\mathbf{u}}}$ é uma translação do espaço \mathcal{V} dada pelo elemento $\bar{\mathbf{u}}$, ou seja

$$\mathcal{K}_{\bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{u}} + \mathcal{V}, \quad (5.4.5)$$

ou, reciprocamente, \mathcal{V} obtém-se por diferença entre os elementos de $\mathcal{K}_{\bar{\mathbf{u}}}$.

5.4.2 Formulação primal, ou de equilíbrio

Dentro da mecânica, a formulação primal é aquela na qual a cinemática governa o problema por meio da definição do conjunto $\mathcal{K}_{\mathbf{u}}$ e conseqüentemente do espaço \mathcal{V} e do operador taxa de deformação \mathcal{D} , que no caso sob estudo é o operador gradiente simétrico. O Princípio da Potência Virtual estabelece que um campo de esforços internos $\boldsymbol{\sigma}$ está em equilíbrio com um sistema de cargas \mathbf{f} se se satisfaz o seguinte

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \boldsymbol{\eta})^s \, dx = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (5.4.6)$$

Logo, utilizando a fórmula de Green resulta

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \boldsymbol{\eta})^s \, dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}. \quad (5.4.7)$$

Obtém-se assim a caracterização para o produto de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}}$ que admite, como esforços externos duais em consonância com a cinemática imposta, a existência de uma força por unidade de volume \mathbf{b} em Ω e uma tração no contorno Γ_N dada por $\bar{\mathbf{t}}$, isto é

$$\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (5.4.8)$$

onde $\mathbf{f} \in \mathcal{V}'$ corresponde-se com o par $(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{t}})$. Qualquer outro sistema de cargas não é consistente com a cinemática utilizada e portanto faz com que o modelo esteja mal construído.

Tendo posto em evidência a forma do produto de dualidade pode-se enunciar o seguinte problema que introduz a noção de equilíbrio para o problema na mecânica dos sólidos sob hipóteses de deformações infinitesimais:

Problema 5.2 (Problema primal). *Encontre o campo de deslocamentos $\mathbf{u} \in \mathcal{K}_{\mathbf{u}}$ tal que a tensão $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$, esteja em equilíbrio com os esforços externos dados pelo par $(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{t}}) \in \mathcal{V}'$, ou seja, tal que satisfaça o seguinte*

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \boldsymbol{\eta})^s \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (5.4.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mathbf{u}} &= \{ \mathbf{u} \in \mathcal{U}; \mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \bar{\mathbf{u}} \}, \\ \mathcal{V} &= \{ \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{U}; \boldsymbol{\eta}|_{\Gamma_D} = 0 \}. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Aqui, a relação entre o campo de tensão e o campo de deformação vem dada pela lei constitutiva que modela a resposta do material frente à deformação experimentada.

A partir desta formulação primal observe que surgem outros conceitos. O primeiro é o de conjunto de todos os esforços internos $\boldsymbol{\sigma}$ que estão em equilíbrio com o sistema de cargas $\mathbf{f} = (\mathbf{b}, \bar{\mathbf{t}})$, ou seja

$$\mathcal{T} = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{W}'; \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \boldsymbol{\eta})^s \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \right\}. \quad (5.4.11)$$

Os esforços em \mathcal{T} denominam-se esforços estaticamente equilibrados. Logo, a partir deste conjunto pode-se incorporar mais um conceito que é o de espaço dos esforços internos que

estão em equilíbrio com o sistema de cargas nulo $\mathbf{f} = (0, 0)$, isto é

$$\mathcal{S} = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{W}'; \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \right\}. \quad (5.4.12)$$

Os elementos de \mathcal{S} são denominados esforços internos auto-equilibrados. Resulta importante observar que na construção, tanto do conjunto \mathcal{T} como do espaço \mathcal{S} , aparece a cinemática do problema de forma implícita, já que a condição que os esforços devem satisfazer para serem considerados estaticamente equilibrados ou auto-equilibrados depende dos elementos do espaço \mathcal{V} . Além disso, vê-se que o espaço \mathcal{S} contém elementos que podem ser obtidos como diferença de elementos em \mathcal{T} , ou seja que

$$\mathcal{T} = \boldsymbol{\sigma}_o + \mathcal{S}, \quad (5.4.13)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_o \in \mathcal{T}$ é arbitrário. Esta expressão é a correspondente dual à expressão (5.4.5) vista anteriormente. Estes elementos são importantes na formulação dual do problema que se apresenta a seguir.

Observe então que das características do espaço \mathcal{S} tem-se, no sentido das distribuições, que os esforços auto-equilibrados satisfazem o seguinte

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}, \quad (5.4.14)$$

do que, de acordo com a cinemática dada em \mathcal{V} , obtém-se

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} &= 0 && \text{em } \Omega, \\ \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} &= 0 && \text{sobre } \Gamma_N. \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

Na obtenção da (5.4.15) usou-se o fato de ser $\boldsymbol{\eta}|_{\Gamma_D} = 0$. Em outras palavras, os esforços auto-equilibrados ficam caracterizados a partir de explicitar o espaço \mathcal{V} . Procedendo analogamente obtém-se que os esforços estaticamente equilibrados estão caracterizados como segue

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} &= -\mathbf{b} && \text{em } \Omega, \\ \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} && \text{sobre } \Gamma_N, \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

onde novamente a cinemática dada em \mathcal{V} tem entrado em jogo.

5.4.3 Formulação dual, ou de compatibilidade

Assim como o Princípio da Potência Virtual induz naturalmente o Problema 5.2, tem-se o Princípio da Potência Virtual Complementar que induz o problema dual que se apresenta a seguir. De acordo com este princípio, e no contexto do problema que vem sendo estudado, uma deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ (taxa de deformação no caso de um problema geral) é compatível se se satisfaz o seguinte

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{w})^s \, d\mathbf{x} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}, \quad (5.4.17)$$

com $\mathbf{w} \in \mathcal{K}_{\mathbf{u}}$ arbitrário e com \mathcal{S} dado pela (5.4.12). Logo, utilizando a fórmula de Green no sentido das distribuições resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{w})^s \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

onde utilizou-se o fato de ser $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0$, $\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0$ e $\mathbf{w}|_{\Gamma_D} = \bar{\mathbf{u}}$. Logo, a (5.4.17) permite estabelecer formalmente o conceito de deformação compatível:

Problema 5.3 (Problema dual). *Encontre o campo de tensão $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{T}$ tal que a deformação $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma})$ por este produzida seja compatível com a restrição cinemática dada por $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{K}_{\mathbf{u}}$, ou seja, tal que se satisfaça o seguinte*

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}, \quad (5.4.19)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{W}'; \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \right\}, \\ \mathcal{S} &= \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{W}'; \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \right\}. \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Neste caso, a relação entre o campo de deformação e o campo de tensão vem dada pela lei constitutiva inversa que modela o comportamento do material. O Problema 5.3 identifica-se como o problema dual do Problema 5.2. Ver-se-á que trabalhar de forma dual no contexto dos problemas de multiescala implica comandar o problema escolhendo a forma particular do carregamento externo $(\mathbf{b}, \bar{\mathbf{t}})$ no nível do EVR. Em função disto, e junto com o princípio de Hill–Mandel, ficará definido o espaço \mathcal{V} que caracteriza ao conjunto \mathcal{T} e ao espaço \mathcal{S} .

5.5 Formulação do problema de multiescala dual

Nesta parte do trabalho são revisitados rapidamente os conceitos básicos envolvidos na formulação de multiescala segundo visto na Seção 5.1, porém, agora alguns conceitos são introduzidos de forma recíproca a como foi feito anteriormente. Por isto talvez resulte um pouco repetitivo, mas é conveniente seguir os mesmos passos para pôr em evidência como a dualidade é aplicada a este problema.

Seja novamente o ponto \mathbf{x} do domínio contínuo macroscópico Ω associado ao domínio do EVR, denominado Ω_{μ} com contorno Γ_{μ} . A Figura 5.1 apresenta o esquema sobre o qual está montada a notação. Como visto anteriormente, o EVR pode incluir poros vazios, conter algum fluido ou estar constituído por diversas fases representando diferentes materiais no domínio Ω_{μ}^v . A hipótese do contínuo microscópico sobre a matriz do EVR mantém-se. Lembre-se que $\Omega_{\mu} = \Omega_{\mu}^s \cup \Omega_{\mu}^v$ e $\Gamma_{\mu}^{sv} \equiv \Gamma_{\mu}^{vs}$ e que, por simplicidade, $\Gamma_{\mu} \cap \bar{\Omega}_{\mu}^v = \emptyset$.

A formulação variacional do modelo multiescala dual está baseada no fato do tensor de tensão $\boldsymbol{\sigma}$, em qualquer ponto $\mathbf{x} \in \Omega$, satisfazer a seguinte relação com o tensor $\boldsymbol{\sigma}_{\mu}$ definido no EVR

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V_{\mu}} \int_{\Omega_{\mu}} \boldsymbol{\sigma}_{\mu} \, d\mathbf{y}, \quad (5.5.1)$$

onde $V_{\mu} = |\Omega_{\mu}|$. Da mesma forma que antes, resulta que $\boldsymbol{\sigma}$ é a média volumétrica de $\boldsymbol{\sigma}_{\mu}$ no EVR. Isto representa uma restrição sobre os campos de esforços estaticamente equilibrados

do EVR. Dado que o problema dual resulta diretamente em termos do campo de tensão, não é vantajoso aplicar o conceito de decomposição aditiva ao campo σ_μ no EVR. Desta forma é possível recuperar os modelos de multiescala desenvolvidos no Capítulo 5 de forma mais direta.

Analogamente à (5.5.1) define-se a deformação homogeneizada ε como sendo a média no EVR da deformação da microescala ε_μ , isto é

$$\varepsilon = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu \, dy. \quad (5.5.2)$$

5.5.1 Escolha do sistema de carregamentos e o princípio de Hill–Mandel

Na Seção 5.1.3 foi enunciado que as potências geradas pelos campos de tensões de macro e microescala, ambas as duas em equilíbrio, devem ser iguais para todas as taxas de deformação admissíveis nas correspondentes escalas. Embora a expressão matemática deste princípio se mantenha, o enunciado aqui é modificado em função do conceito de compatibilidade, ou seja, assumindo que os tensores taxas de deformação $\dot{\varepsilon}$ e $\dot{\varepsilon}_\mu$ da macro e microescala respectivamente são compatíveis, então a seguinte identidade deve ser satisfeita

$$\sigma \cdot \dot{\varepsilon} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu \cdot \dot{\varepsilon}_\mu \, dy \quad \forall \sigma_\mu \text{ estaticamente equilibrado}, \quad (5.5.3)$$

onde o tensor σ_μ está relacionado com σ por meio da (5.5.1). Viu-se na formulação primal que este princípio afeta o conceito de equilíbrio, acarretando certas conseqüências sobre os carregamentos admissíveis e a sua relação com o espaço das ações de movimento cinematicamente admissíveis. Logo, na formulação dual este princípio afeta, da mesma forma, à estrutura do conjunto dos esforços estaticamente equilibrados e do espaço dos esforços auto-equilibrados.

Ao trabalhar com uma formulação dual viu-se que a quantidade que comanda o problema é o estado de tensão, ao ponto de que o problema de compatibilidade no EVR deve ser formulado dentro do conjunto dos denominados campos de tensão estaticamente equilibrados. Em função do conceito de tensão homogeneizada, os campos admissíveis são aqueles que satisfazem a (5.5.1). Portanto, o conjunto dos esforços internos estaticamente equilibrados fica definido como

$$\mathcal{T}_\mu = \left\{ \tau_\mu \in \mathcal{W}'_\mu; \int_{\Omega_\mu^s} \tau_\mu \cdot (\nabla_y \eta)^s \, dy = \int_{\Omega_\mu^s} \mathbf{b} \cdot \eta \, dy + \int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}^e \cdot \eta \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\mu^{sv}} \mathbf{t}^v \cdot \eta \, d\Gamma \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_\mu \right\}, \quad (5.5.4)$$

onde

$$\mathcal{W}'_\mu = \left\{ \tau_\mu \in \mathcal{W}'; \int_{\Omega_\mu} \tau_\mu \, dy = V_\mu \sigma \right\}. \quad (5.5.5)$$

Considere então o princípio de Hill–Mandel visto acima a partir do qual, sabendo a relação entre os tensores ε e ε_μ ambos compatíveis, resulta

$$V_\mu \sigma \cdot \dot{\varepsilon} = \int_{\Omega_\mu} \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_\mu \, dy = \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu \cdot \dot{\varepsilon}_\mu \, dy \quad \forall \sigma_\mu \text{ estaticamente equilibrado}. \quad (5.5.6)$$

Da definição do conjunto \mathcal{T}_μ , e usando a (5.5.6) tem-se que

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\tau}_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = \int_{\Omega_\mu^s} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{y} + \int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}^e \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu, \quad (5.5.7)$$

e usando a fórmula de Green e sabendo que $\boldsymbol{\sigma}$ é constante no EVR resulta

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = - \int_{\Omega_\mu} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{y} + \int_{\Gamma_\mu} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_\mu} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma = \int_{\Omega_\mu^s} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\mathbf{y} + \int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}^e \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu. \quad (5.5.8)$$

Assumindo que os conjuntos aos quais pertencem os carregamentos \mathbf{b} e \mathbf{t}^e são respectivamente $\mathcal{Z}_{\mathbf{b}}$ e $\mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e}$, então a expressão (5.5.8) implica que o espaço \mathcal{V}_μ deve ser tal que seus elementos satisfaçam

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &\in (\mathcal{Z}_{\mathbf{b}})^\perp, \\ \boldsymbol{\eta}|_{\Gamma_\mu} &\in (-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\Gamma_\mu} + \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^\perp, \end{aligned} \quad (5.5.9)$$

onde $-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\Gamma_\mu}$ é um elemento constante que produz uma translação de $\mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e}$, a qual se denomina $\mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e}^\mu$. Ou seja, o espaço das variações admissíveis \mathcal{V}_μ deve ser ortogonal ao conjunto onde se encontram as forças de corpo \mathbf{b} e ao mesmo tempo ortogonal, sobre Γ_μ , ao conjunto das trações deslocado em um elemento constante. Voltando à definição do conjunto \mathcal{T}_μ , e incluindo a restrição imposta pelo princípio de Hill–Mandel obtém-se o novo conjunto \mathcal{T}_μ^d definido como

$$\mathcal{T}_\mu^d = \left\{ \boldsymbol{\tau}_\mu \in \mathcal{W}'_\mu; \int_{\Omega_\mu^s} \boldsymbol{\tau}_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = \int_{\Gamma_\mu^{sv}} \mathbf{t}^v \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^d \right\}, \quad (5.5.10)$$

onde

$$\mathcal{V}_\mu^d = \{ \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu; \boldsymbol{\eta} \in (\mathcal{Z}_{\mathbf{b}})^\perp; \boldsymbol{\eta}|_{\Gamma_\mu} \in (\mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e}^\mu)^\perp \}. \quad (5.5.11)$$

O fato a ser frisado aqui é que o espaço \mathcal{V}_μ^d fica atrelado às características escolhidas para o carregamento $(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e)$. Segue-se então que cada modelo multiescala dual depende da forma assumida para estes carregamentos.

Com esta definição para o conjunto dos esforços estaticamente equilibrados assegura-se que o princípio de Hill–Mandel é satisfeito. Aqui também tem-se considerado a contribuição do domínio Ω_μ^v por meio da tração \mathbf{t}^v . Conseqüentemente, o espaço dos esforços auto-equilibrados define-se a partir de tomar a diferença entre elementos do conjunto \mathcal{T}_μ^d , isto é

$$\mathcal{S}_\mu^d = \left\{ \boldsymbol{\tau}_\mu \in \mathcal{W}'_{\mu_o}; \int_{\Omega_\mu^s} \boldsymbol{\tau}_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^d \right\}, \quad (5.5.12)$$

com

$$\mathcal{W}'_{\mu_o} = \left\{ \boldsymbol{\tau}_\mu \in \mathcal{W}'; \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\tau}_\mu \, d\mathbf{y} = 0 \right\}. \quad (5.5.13)$$

Assim sendo, qualquer escolha do par $(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e)$ é possível, e em função disto o espaço \mathcal{V}_μ^d fica caracterizado segundo a (5.5.11) de forma que o princípio de Hill–Mandel seja satisfeito, o que determina a forma final do espaço \mathcal{S}_μ^d e do conjunto \mathcal{T}_μ^d .

5.5.2 O problema de multiescala dual geral

Da teoria vista na Seção 5.4.3 e utilizando as idéias apresentadas na seção anterior é possível estabelecer o problema de multiescala dual. Para isto utiliza-se a noção de compatibilidade da deformação, com o qual resulta que o problema de microescala, para o ponto $\mathbf{x} \in \Omega$, em termos do campo de tensão σ_μ é o seguinte:

Problema 5.4. *Dada uma história de tensão σ^t e um carregamento externo definido pelo par $(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e)$, encontre o campo de tensão $\sigma_\mu \in \mathcal{T}_\mu^d$ tal que*

$$\int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{F}_\mu^{-1}(\sigma_\mu^t) \cdot \boldsymbol{\tau} \, dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_\mu^d, \quad (5.5.14)$$

onde \mathcal{S}_μ^d e \mathcal{T}_μ^d ficam caracterizados uma vez dada a forma do carregamento externo. Logo, calcule a deformação homogeneizada $\boldsymbol{\varepsilon}$ usando a (5.5.2).

Vê-se aqui que não se impõem condições sobre o espaço \mathcal{V}_μ^d , em tal caso as mesmas são obtidas como função de $(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e)$. O Problema 5.4 aqui apresentado define então um operador constitutivo inverso \mathcal{F}^{-1} no seguinte sentido

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{U}_{\sigma^t} &\rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon, \\ \sigma^t &\mapsto \mathcal{F}^{-1}(\sigma^t) = \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

Para fechar o problema de microescala deve ser fornecido um comportamento constitutivo para o material do EVR. Para isto recorre-se à teoria constitutiva fenomenológica que estabelece, neste caso, que existe um operador constitutivo inverso \mathcal{F}_μ^{-1} tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mu^{-1} : \mathcal{U}_{\sigma_\mu^t} &\rightarrow \mathcal{U}_{\varepsilon_\mu}, \\ \sigma_\mu^t &\mapsto \mathcal{F}_\mu^{-1}(\sigma_\mu^t) = \varepsilon_\mu. \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

5.6 Modelos específicos de multiescala duais

Em contrapartida ao feito na Seção 5.2, aqui apresentam-se os diversos modelos de multiescala baseados, agora, na escolha do conjunto $\mathcal{Z}_\mathbf{b} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e}$ ao qual pertence o par $(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e)$ e que acaba definindo o espaço \mathcal{V}_μ^d . Assim, geram-se as quatro classes de modelos já vistas e que se repetem aqui por conveniência:

- i. modelo dual do modelo de Taylor;
- ii. modelo dual do modelo de flutuação nula;
- iii. modelo dual do modelo de flutuação periódica;
- iv. modelo dual do modelo de mínima restrição cinemática.

Aqui a enumeração foi dada de acordo a como foram apresentados estes modelos anteriormente. Ver-se-á que neste caso a forma de apresentar os modelos inverte-se já que agora começa-se por aquele que possui um conjunto de esforços estaticamente equilibrados arbitrário e avança-se incorporando restrições sobre este conjunto. Logo, os espaços dos esforços auto-equilibrados definidos em cada caso são tais que são satisfeitas as seguintes inclusões

$$(\mathcal{Z}_\mathbf{b} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^M \subset (\mathcal{Z}_\mathbf{b} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^P \subset (\mathcal{Z}_\mathbf{b} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^N \subset (\mathcal{Z}_\mathbf{b} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^T, \quad (5.6.1)$$

de forma que

$$\mathcal{V}_\mu^T \subset \mathcal{V}_\mu^N \subset \mathcal{V}_\mu^P \subset \mathcal{V}_\mu^M, \quad (5.6.2)$$

onde foi eliminado o índice d . Além disso os índices T , N , P e M estão na mesma ordem dos modelos acima mencionados, tendo utilizado a notação correspondente ao problema primal. Observe que o modelo dual do modelo de Taylor continua sendo aquele cujo comportamento é mais rígido, porém agora é definido como aquele que mais liberdade possui em termos dos carregamentos externos. Por outro lado, o modelo dual do modelo de mínima restrição cinemática é o de comportamento menos rígido e, em contraposição é aquele que fica caracterizado por esforços externos mais restritos.

Assim, fixado o comportamento constitutivo na microescala mediante o operador constitutivo inverso \mathcal{F}_μ^{-1} e a natureza da tração \mathbf{t}^v , o modelo de Taylor dá como resultado o material cujo comportamento constitutivo macroscópico $(\mathcal{F}^{-1})^T$ é mais rígido, enquanto que o modelo de mínima restrição cinemática é o de comportamento constitutivo $(\mathcal{F}^{-1})^M$ menos rígido. Nas seções que seguem abordam-se as principais características de cada um destes modelos, manifestando a correspondência com os modelos primais.

5.6.1 Modelo dual do modelo de Taylor

O modelo de multiescala dual do modelo de Taylor (modelo denominado T anteriormente) obtém-se escolhendo o conjunto $(\mathcal{Z}_\mathbf{b} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^T$ o mais amplo possível. Assim sendo, o mesmo fica definido como

$$(\mathcal{Z}_\mathbf{b} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^T = \{(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e) \in \mathcal{V}'_\mu; \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{t}^e \text{ arbitrários}\}. \quad (5.6.3)$$

Logo, o espaço \mathcal{V}_μ^d , denominado agora \mathcal{V}_μ^T , deve adotar a seguinte forma

$$\mathcal{V}_\mu^T = \{0\}, \quad (5.6.4)$$

tal que se satisfaça a (5.5.9). Neste caso os elementos do conjunto dos esforços estaticamente equilibrados, chamado \mathcal{T}_μ^T , satisfazem a restrição variacional de forma trivial, posto que o elemento nulo é ortogonal a qualquer conjunto. Com efeito, os esforços estaticamente equilibrados e os auto-equilibrados são tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\mu^T &= \{\tau_\mu \in \mathcal{W}'_\mu\}, \\ \mathcal{S}_\mu^T &= \{\tau_\mu \in \mathcal{W}'_{\mu o}\}. \end{aligned} \quad (5.6.5)$$

Daqui obtém-se que os elementos em \mathcal{T}_μ^T satisfazem

$$\int_{\Omega_\mu} \tau_\mu \, d\mathbf{y} = V_\mu \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.6.6)$$

enquanto que os elementos em \mathcal{S}_μ^T são, simplesmente, tais que

$$\int_{\Omega_\mu} \tau_\mu \, d\mathbf{y} = 0. \quad (5.6.7)$$

Assim, de forma natural caracterizou-se o espaço \mathcal{V}_μ^T como o elemento nulo, recuperando a particularidade do modelo de Taylor vista na Seção 5.2.1, ao mesmo tempo que se pode afirmar que o conjunto \mathcal{T}_μ^T e o espaço \mathcal{S}_μ^T são os mais amplos possíveis, sempre respeitando a restrição do valor médio.

5.6.2 Modelo dual do modelo de flutuação nula

Considere agora que a força de corpo \mathbf{b} e a tração sobre a fronteira \mathbf{t}^e pertencem ao conjunto $(\mathcal{Z}_{\mathbf{b}} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^N$ definido como

$$(\mathcal{Z}_{\mathbf{b}} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^N = \{(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e) \in \mathcal{V}'_{\mu}; \mathbf{b} = 0; \mathbf{t}^e \text{ arbitrário}\}. \quad (5.6.8)$$

Portanto, o espaço \mathcal{V}_{μ}^d , denominado \mathcal{V}_{μ}^N , deve ser tal que

$$\mathcal{V}_{\mu}^N = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_{\mu}; \boldsymbol{\eta}|_{\Gamma_{\mu}} = 0\}, \quad (5.6.9)$$

de forma que o princípio de Hill–Mandel, através da (5.5.9), seja satisfeito. Com esta escolha os esforços estaticamente equilibrados e os auto-equilibrados estão, respectivamente, em

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu}^N &= \left\{ \boldsymbol{\tau}_{\mu} \in \mathcal{W}'_{\mu}; \int_{\Omega_{\mu}^s} \boldsymbol{\tau}_{\mu} \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_{\mu}^N \right\}, \\ \mathcal{S}_{\mu}^N &= \left\{ \boldsymbol{\tau}_{\mu} \in \mathcal{W}'_{\mu_o}; \int_{\Omega_{\mu}^s} \boldsymbol{\tau}_{\mu} \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_{\mu}^N \right\}. \end{aligned} \quad (5.6.10)$$

Daqui segue-se que os esforços em \mathcal{T}_{μ}^N satisfazem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\mu}} \boldsymbol{\tau}_{\mu} \, d\mathbf{y} &= V_{\mu} \boldsymbol{\sigma}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau}_{\mu} &= 0 \quad \text{em } \Omega_{\mu}^s, \\ \boldsymbol{\tau}_{\mu} \mathbf{n}|_{\Gamma_{\mu}} &\text{ arbitrário,} \end{aligned} \quad (5.6.11)$$

enquanto que aqueles em \mathcal{S}_{μ}^N são tais que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\mu}} \boldsymbol{\tau}_{\mu} \, d\mathbf{y} &= 0, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau}_{\mu} &= 0 \quad \text{em } \Omega_{\mu}^s, \\ \boldsymbol{\tau}_{\mu} \mathbf{n}|_{\Gamma_{\mu}} &\text{ arbitrário.} \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

Assim sendo, mais uma vez foi possível caracterizar naturalmente o espaço \mathcal{V}_{μ}^N , recuperando a particularidade do modelo de flutuação nula na fronteira vista na Seção 5.2.2.

5.6.3 Modelo dual do modelo de flutuação periódica

Para este modelo recorre-se novamente às configurações do EVR com estrutura periódica mostradas na Figura 5.2. Como nos casos anteriores, o modelo é construído realizando hipóteses sobre a forma do carregamento externo na microescala. Considere então que o par $(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e)$ pertence ao conjunto $(\mathcal{Z}_{\mathbf{b}} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^P$ definido como

$$(\mathcal{Z}_{\mathbf{b}} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^P = \{(\mathbf{b}, \mathbf{t}^e) \in \mathcal{V}'_{\mu}; \mathbf{b} = 0; (-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\Gamma_{\mu}} + \mathbf{t}^e)|_{\Gamma_i^+} = -(-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\Gamma_{\mu}} + \mathbf{t}^e)|_{\Gamma_i^-}, \forall i\}, \quad (5.6.13)$$

ou seja que $-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\Gamma_{\mu}} + \mathbf{t}^e$ é anti-periódico. Este conjunto permite obter o modelo dual do modelo de flutuação periódica (modelo denominado P anteriormente), posto que neste caso o espaço \mathcal{V}_{μ}^d , chamado aqui \mathcal{V}_{μ}^P , possui a seguinte forma

$$\mathcal{V}_{\mu}^P = \{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_{\mu}; \boldsymbol{\eta}|_{\Gamma_i^+} = \boldsymbol{\eta}|_{\Gamma_i^-} \forall i\}. \quad (5.6.14)$$

Só assim é possível afirmar que o modelo não viola o princípio de Hill–Mandel. Logo, o conjunto dos esforços estaticamente equilibrados e dos auto-equilibrados, correspondentemente, resultam

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\mu^P &= \left\{ \tau_\mu \in \mathcal{W}'_\mu; \int_{\Omega_\mu^s} \tau_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^P \right\}, \\ \mathcal{S}_\mu^P &= \left\{ \tau_\mu \in \mathcal{W}'_{\mu_o}; \int_{\Omega_\mu^s} \tau_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^P \right\}.\end{aligned}\quad (5.6.15)$$

Portanto, os esforços em \mathcal{T}_μ^P satisfazem

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\mu} \tau_\mu \, d\mathbf{y} &= V_\mu \boldsymbol{\sigma}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \tau_\mu &= 0 \quad \text{em } \Omega_\mu^s, \\ \tau_\mu \mathbf{n}|_{\Gamma_i^+} &= -\tau_\mu \mathbf{n}|_{\Gamma_i^-} \quad \forall i,\end{aligned}\quad (5.6.16)$$

enquanto que os esforços em \mathcal{S}_μ^P são tais que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_\mu} \tau_\mu \, d\mathbf{y} &= 0, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \tau_\mu &= 0 \quad \text{em } \Omega_\mu^s, \\ \tau_\mu \mathbf{n}|_{\Gamma_i^+} &= -\tau_\mu \mathbf{n}|_{\Gamma_i^-} \quad \forall i.\end{aligned}\quad (5.6.17)$$

5.6.4 Modelo dual do modelo de mínima restrição cinemática

Por último, considere que a força de corpo \mathbf{b} e a tração \mathbf{t}^e estão no conjunto $(\mathcal{Z}_{\mathbf{b}} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^M$ definido como

$$(\mathcal{Z}_{\mathbf{b}} \times \mathcal{Z}_{\mathbf{t}^e})^M = \{(0, 0)\}.\quad (5.6.18)$$

Escolhendo este tipo de carregamento, que é o mais restrito de todos, é possível reconstruir o modelo dual do modelo de mínima restrição cinemática posto que, para que o princípio de Hill–Mandel dual seja satisfeito, o espaço \mathcal{V}_μ^d , denominado aqui \mathcal{V}_μ^M , fica definido como segue

$$\mathcal{V}_\mu^M = \left\{ \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu; \int_{\Gamma_\mu} (\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n})^s \, d\Gamma = 0 \right\}.\quad (5.6.19)$$

Isto é devido a que, sendo $\mathbf{t}^e = 0$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^M$ deve ser ortogonal ao vetor constante $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\Gamma_\mu}$, resultando na restrição já vista sobre a cinemática do modelo da Seção 5.2.4.

Por último, o conjunto dos esforços estaticamente equilibrados e auto-equilibrados são os seguintes

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\mu^M &= \left\{ \tau_\mu \in \mathcal{W}'_\mu; \int_{\Omega_\mu^s} \tau_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^M \right\}, \\ \mathcal{S}_\mu^M &= \left\{ \tau_\mu \in \mathcal{W}'_{\mu_o}; \int_{\Omega_\mu^s} \tau_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^M \right\},\end{aligned}\quad (5.6.20)$$

e, logo, os esforços em \mathcal{T}_μ^M satisfazem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\tau}_\mu \, d\mathbf{y} &= V_\mu \boldsymbol{\sigma}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau}_\mu &= 0 \quad \text{em } \Omega_\mu^s, \\ \boldsymbol{\tau}_\mu \mathbf{n}|_{\Gamma_\mu} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\Gamma_\mu}, \end{aligned} \tag{5.6.21}$$

e os esforços em \mathcal{S}_μ^M satisfazem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\tau}_\mu \, d\mathbf{y} &= 0, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau}_\mu &= 0 \quad \text{em } \Omega_\mu^s, \\ \boldsymbol{\tau}_\mu \mathbf{n}|_{\Gamma_\mu} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}|_{\Gamma_\mu}. \end{aligned} \tag{5.6.22}$$

5.7 Comentários finais

Segundo foi mostrado na primeira e na segunda parte deste capítulo, diferentes modelos de multiescala são obtidos ao especificar diferentes restrições de caráter cinemático (no modelo primal) ou diferentes tipos de carregamentos externos (no modelo dual). Em outras palavras, obtêm-se diferentes operadores constitutivos em função da forma como se coloca o problema na microescala.

Na primeira parte do capítulo pôde ser visto que o comportamento constitutivo de um material quando usado um modelo constitutivo multiescala dependia da cinemática fornecida ao modelo na microescala. Neste sentido, quanto mais livre está o espaço das variações admissíveis das flutuações do campo de deslocamento no EVR então menos rígido resulta o comportamento do material modelado. Além do mais, viu-se ainda que à medida que o espaço das ações de movimento era maior, resultava menor o conjunto dos esforços internos no EVR. Isto ficou de manifesto na segunda parte deste capítulo ao tratar o problema dual. Observou-se na formulação dual que, contrariamente à formulação primal, à medida que os carregamentos externos que definem o problema de compatibilidade sobre o EVR estão em um conjunto maior, o comportamento do material modelado é mais rígido. Com efeito, à medida que foi progressivamente restringindo-se o conjunto dos carregamentos externos obteve-se um aumento no tamanho do espaço das ações de movimento admissíveis com as quais se define o conceito de esforços estaticamente equilibrados e auto-equilibrados.

Outro aspecto importante a ser salientado é o papel que possui o princípio de Hill–Mandel. Enquanto que na formulação primal este princípio restringe, de forma consequente, o sistema de cargas do EVR diretamente no nível do problema de equilíbrio, na formulação dual este princípio restringe, também de forma natural, o espaço das variações admissíveis com o qual se definem os conceitos de esforços estaticamente equilibrados e auto-equilibrados. A razão disto encontra-se na própria natureza da formulação dual, que estabelece que o conceito de equilíbrio agora é uma restrição inerente do conjunto de esforços estaticamente equilibrados. Logo, vê-se que a forma como este princípio físico afeta a natureza do problema na microescala é a mesma independentemente do tipo de formulação. Entretanto, apesar do princípio de Hill–Mandel estar representado exatamente pela mesma expressão para as duas formulações, o que é razoável, o enunciado do mesmo muda adaptando-se ao contexto que lhe cabe dentro de cada uma das formulações.

Contribuições do capítulo

A teoria apresentada na primeira parte deste capítulo, que vai até a Seção 5.3 inclusive, não é contribuição da tese. Entretanto, considera-se importante ter feito a revisão destes conceitos teóricos a fim de proporcionar um contexto adequado dentro do qual se realizam as contribuições do capítulo. Tais contribuições correspondem-se com o material desenvolvido a partir da Seção 5.4, tratando o problema de multiescala via conceitos variacionais de dualidade. Nem todos os resultados foram plasmados em publicações ainda. Com efeito, o trabalho relacionado à parte do capítulo que trata a dualidade em multiescala encontra-se em processo de desenvolvimento. Entretanto, houve produção já que as idéias teóricas da primeira parte do capítulo constituem a base teórica da publicação [51] e de um trabalho resumido apresentado em congresso, os quais são:

- S.M. Giusti, P.J. Blanco, E.A. Souza Neto e R.A. Feijóo, *An assessment of the Gurson yield criterion by a computational multi-scale approach*, Aceito para ser publicado em Engng. Comput., 2008.
- S.M. Giusti, P.J. Blanco, E.A. Souza Neto e R.A. Feijóo, *Multiscale modelling of ductile porous metals: determination of macroscopic yield surfaces*, Anais do ENIEF 2007. Córdoba, Argentina, 2007.

Capítulo 6

Implementação computacional dos modelos de multiescala

Introdução

Na última década, o uso de ferramentas computacionais e analíticas baseadas no uso de múltiplas escalas para prever comportamentos constitutivos de materiais complexos tem sido matéria de intensivo estudo. Uma aplicação interessante do conceito de multiescala pode ser, por exemplo, a estimação de parâmetros efetivos definidos no nível do problema no contínuo macroscópico para uma dada resposta constitutiva a partir da análise do elemento de volume representativo [60, 66, 105, 107]. Um outro exemplo pode ser o desenvolvimento de modelos de multiescala visando modelar um comportamento dissipativo mediante a homogeneização da resposta constitutiva obtida no problema do contínuo microscópico. Neste caso a resposta na macroescala é substituída diretamente pela obtenção das quantidades do problema da microescala [85, 112, 113, 154].

Com relação à primeira classe de exemplos mencionada no parágrafo anterior, o trabalho [60] merece atenção especial. Neste trabalho cotas superiores para a localização das superfícies de fluência são obtidas de forma semi-analítica, baseando-se no estudo do colapso plástico de um elemento de volume representativo poroso com comportamento linear elástico–perfeitamente plástico. Este colapso plástico ocorre na microcélula de estudo segundo um mecanismo assumido, o que de alguma forma constitui um elemento limitante apesar dos bons resultados e da boa capacidade de representação física do método. Dentre outros, análises de materiais porosos, no contexto da abordagem multiescala, foi levada a cabo em [46, 106].

Um dos objetivos deste capítulo é implementar computacionalmente os modelos de multiescala primais desenvolvidos no Capítulo 5. Feito isto propõe-se tratar dois exemplos que mostram a potencialidade desta classe de técnicas. O primeiro caso baseia-se em caracterizar as superfícies de colapso plástico de um material poroso elasto–plástico sob critério de von Mises, como o empregado em [60]. Pretende-se estudar também como o critério de colapso plástico proposto em [60] se comporta frente aos resultados obtidos por cada uma das previsões numéricas computadas com os modelos que empregam a abordagem computacional de multiescala vistos anteriormente. Este constitui de fato um dos propósitos fundamentais do capítulo. A principal diferença com [60] é que não se assume a existência de nenhum tipo de mecanismo de colapso predeterminado da microcélula. De forma complementar, a resposta constitutiva macroscópica não é só obtida para o caso de um poro centrado na microcélula, mas também para uma situação de um arranjo de três poros por microcélula. Estes dois últimos aspectos mencionados constituem respectivas generalizações dos resultados obtidos em [60]. Como corolário deste exemplo pode-se mencionar a análise de sensibilidade da resposta constitutiva homogeneizada frente às

mudanças na colocação do problema de microescala que levam de um modelo constitutivo a outro (modelo de Taylor, de flutuação nula, etc.). Por último, esta técnica de modelagem constitutiva é aplicada a um caso de interesse em hemodinâmica. Este segundo exemplo visa o estudo do comportamento constitutivo da parede arterial. O caso está motivado não só pelo seu uso no problema de interação fluido–estrutura, mas também na própria caracterização dos elementos que conformam a estrutura do tecido da parede arterial. Assim sendo, o objetivo deste último exemplo é analisar como se pode modelar o comportamento da parede arterial considerando diferentes componentes constituintes como serem elastina e colágeno. Para isto tomam-se, como ponto de partida, os resultados apresentados em [167] e estes são reproduzidos de forma qualitativa empregando uma abordagem via modelagem multiescala similar à adotada em [144].

Este capítulo está organizado como segue. Na Seção 6.1 recolocam-se os quatro modelos de multiescala primais obtidos no Capítulo 5 e se fornece, na Seção 6.2, o detalhe da implementação computacional assim como a construção dos espaços empregados em cada modelo. Na Seção 6.3 apresentam-se alguns resultados obtidos das simulações numéricas realizadas. Ali comparam-se os resultados dados em [60] com os aqui computados, e propõe-se uma extensão para a forma analítica da localização da superfície de colapso plástico do material em questão. Na Seção 6.4 desenvolve-se um exemplo numérico que mostra como é possível efetuar a modelagem da parede arterial considerando múltiplos componentes e empregando técnicas de multiescala. Por último, na Seção 6.5 fecha-se o capítulo com alguns comentários finais.

6.1 O problema microestrutural

Nesta seção revisita-se o problema geral de multiescala e os seus elementos componentes assim como os quatro modelos primais obtidos no Capítulo 5 que surgem ao escolher diferentes cinemáticas para o problema na microescala. Além disso, especifica-se o modelo constitutivo escolhido para o material que compõe a microestrutura antes de abordar os exemplos numéricos na Seção 6.3. Por último, descreve-se o algoritmo de integração numérica empregado no tratamento do comportamento elasto–plástico.

6.1.1 Formulação do problema microestrutural

No Capítulo 5 viu-se que o problema que introduz o conceito de equilíbrio na microestrutura, dentro do contexto da modelagem constitutiva via métodos de multiescala, está estreitamente ligado ao princípio de Hill–Mandel enunciado na Seção 5.1.3. Assim, dada uma história de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}^t$ vinda da macroescala, o problema no EVR consiste em resolver o Problema 5.1 que é repetido aqui por conveniência:

Problema 6.1. *Dada uma história de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}^t$, encontre a flutuação do campo de deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu$ tal que*

$$\int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{F}_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}^t + ((\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t) \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta})^s \, d\mathbf{y} = \int_{\Gamma_\mu^{sv}} \mathbf{t}^v \cdot \boldsymbol{\eta} \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu, \quad (6.1.1)$$

onde \mathcal{V}_μ deve satisfazer as condições discutidas na Seção 5.1.3, e logo depois é preciso calcular a tensão homogeneizada $\boldsymbol{\sigma}$ usando a (5.1.7).

Para satisfazer o princípio de Hill–Mandel, lembre-se que deve ser $\mathcal{V}_\mu \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu^m$ com

$$\tilde{\mathcal{K}}_\mu^m = \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_\mu \in \mathcal{U}; \int_{\Gamma_\mu} (\tilde{\mathbf{v}}_\mu \otimes \mathbf{n})^s \, d\Gamma = 0 \right\}. \quad (6.1.2)$$

Esta forma de apresentar o problema é resultado de ter formulado a teoria em termos da média volumétrica do tensor de deformação. Assim, a cada ponto do contínuo macroscópico é associado um elemento de volume representativo que caracteriza a microestrutura. Além disso, o problema fica posto em termos da flutuação $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ devido a ter decomposto convenientemente o campo de deslocamentos na microescala.

Considere que foi explicitado o operador constitutivo do material na microestrutura \mathcal{F}_μ , e suponha que um espaço \mathcal{V}_μ foi escolhido e o problema na microescala foi resolvido. Logo, com a solução calcula-se a tensão na microescala $\boldsymbol{\sigma}_\mu = \mathcal{F}_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}^t + ((\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t)$ e finalmente esta é homogeneizada como segue

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathcal{F}_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}^t + ((\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)^t) d\mathbf{y}, \quad (6.1.3)$$

caracterizando o operador constitutivo de macroescala \mathcal{F} definido implicitamente por meio do problema acima enunciado. A forma de abordar os exemplos numéricos segue exatamente esta linha, isto é, assume-se um tensor $\boldsymbol{\varepsilon}^t$ conhecido que, em particular nos exemplos tratados nas seções seguintes, não depende da história. Depois resolve-se o problema no EVR escolhendo os diversos espaços \mathcal{V}_μ e logo homogeneiza-se a tensão $\boldsymbol{\sigma}_\mu$ para recuperar a tensão $\boldsymbol{\sigma}$.

6.1.2 Modelos de multiescala primais revisitados

Somente para fazer o capítulo auto-contido, lembre que os modelos de multiescala construídos no Capítulo 5 eram definidos fornecendo a cinemática através do espaço $\mathcal{V}_\mu \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu^m$. Assim, o modelo de Taylor é obtido escolhendo simplesmente

$$\mathcal{V}_\mu^T = \{0\}. \quad (6.1.4)$$

Este modelo não requer resolver, de fato, nenhum problema na microestrutura posto que o que se assume é que a solução depende exclusivamente da deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ vinda da macroescala. O modelo de flutuação nula é construído escolhendo

$$\mathcal{V}_\mu^N = \{\tilde{\mathbf{v}}_\mu \in \mathcal{U}; \tilde{\mathbf{v}}_\mu|_{\Gamma_\mu} = 0\}. \quad (6.1.5)$$

Já, ao deixar livre a flutuação no interior do domínio é preciso resolver o Problema 6.1 correspondente à microescala. Neste caso o problema discreto decorrente, quando abordado pelo método dos elementos finitos, cai dentro do tratamento clássico com respeito à construção dos espaços de funções de aproximação. Por sua parte, o modelo de flutuação periódica, em uma geometria com estrutura periódica, constrói-se ao estabelecer que

$$\mathcal{V}_\mu^P = \{\tilde{\mathbf{v}}_\mu \in \mathcal{U}; \tilde{\mathbf{v}}_\mu|_{\Gamma_i^+} = \tilde{\mathbf{v}}_\mu|_{\Gamma_i^-}, \forall i\}. \quad (6.1.6)$$

Neste caso também é preciso resolver o Problema 6.1, porém, ao contrário do caso anterior, o método dos elementos finitos deriva em uma situação levemente mais complexa com respeito à implementação. Isto é discutido mais na frente na Seção 6.2. Por último, o modelo de mínima restrição cinemática é obtido mediante a seguinte escolha

$$\mathcal{V}_\mu^M = \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_\mu \in \mathcal{U}; \int_{\Gamma_\mu} (\tilde{\mathbf{v}}_\mu \otimes \mathbf{n})^s d\Gamma = 0 \right\}. \quad (6.1.7)$$

Neste caso mais uma vez precisa-se resolver o Problema 6.1. No entanto, o problema aproximado decorrente não resulta em uma implementação clássica dentro do contexto do método dos elementos finitos, segundo será visto na Seção 6.2.

6.1.3 Resposta constitutiva na microescala

Parte dos exemplos numéricos apresentados ao longo deste capítulo tem por objetivo estudar o comportamento de um material cuja microestrutura pode ser modelada de forma razoável empregando um material poroso cuja resposta constitutiva é elasto-plástica. A seguir introduzem-se de forma rápida alguns elementos clássicos na teoria constitutiva da elasto-plasticidade.

No tratamento do fenômeno de plasticidade é usual decompor o tensor de deformação de forma aditiva como segue

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (6.1.8)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ são as contribuições elástica e plástica da deformação.

Para determinar se o material está em regime de escoamento ou em regime elástico define-se o denominado critério de fluência. O critério aqui empregado é o de von Mises que determina que o material pode se deformar plasticamente se o segundo invariante da componente desviadora do tensor de tensão $I_2(\boldsymbol{\sigma}^d)$ atinge um determinado valor. Uma das formas alternativas de definir a função de fluência para este critério é a seguinte

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = q(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_Y, \quad (6.1.9)$$

onde Φ é a função de fluência, σ_Y é a denominada tensão limite do material e

$$q(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^d \cdot \boldsymbol{\sigma}^d}. \quad (6.1.10)$$

Lembre, da teoria da plasticidade, que o escoamento plástico pode ocorrer somente quando $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 0$. Assim, as tensões admissíveis são tais que $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$, enquanto que a denominada superfície de fluência é a hiper-superfície, no espaço de tensões, daqueles pontos tais que $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 0$. Além disso, se σ_Y depende do grau de deformação plástica então se diz que o material sofre endurecimento por deformação plástica. Nos casos tratados aqui σ_Y é constante, modelando assim um comportamento chamado perfeitamente plástico, ou seja, sem qualquer endurecimento. Por outro lado, precisa-se de uma lei que governe o escoamento plástico $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$. Os denominados modelos associativos estabelecem que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (6.1.11)$$

onde $\dot{\gamma}$ é chamado multiplicador plástico. A forma como evolui o estado do material está complementada pelas seguintes condições de carga/descarga (também conhecidas como de complementariedade linear)

$$\Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \dot{\gamma} = 0. \quad (6.1.12)$$

Logo, dada a função de fluência (6.1.9), e sabendo que o critério aqui apresentado se enquadra dentro dos comportamentos plásticos denominados associativos (quando o vetor de fluxo plástico deriva da própria Φ), então o modelo constitutivo associativo de von

Mises elástico linear e perfeitamente plástico resume-se no seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \\
\boldsymbol{\sigma} &= \left[\frac{E}{2(1+\nu)} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \mathbb{I} \right] \boldsymbol{\varepsilon}^e, \\
\boldsymbol{\sigma}^d &= \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}, \\
\Phi &= \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^d \cdot \boldsymbol{\sigma}^d} - \sigma_Y, \\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p &= \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^d \cdot \boldsymbol{\sigma}^d}}} \boldsymbol{\sigma}^d, \\
\Phi &\leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \dot{\gamma} = 0,
\end{aligned} \tag{6.1.13}$$

onde \mathbb{I} é o tensor identidade de quarta ordem. Note que o escoamento plástico não possui componente hidrostática, pelo que se diz que o critério empregado é insensível à pressão.

Evidentemente esta resposta constitutiva é não linear e requer um tratamento especial para inseri-la no contexto de um esquema incremental no método dos elementos finitos. Isto é analisado a seguir.

6.1.4 Algoritmo de integração numérica

Dada uma deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ em um instante t_o dado, e dada a história de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ em um intervalo de pseudo-tempo $[t_o, t]$, o conjunto de equações (6.1.13) implica obter nesse intervalo o valor das quantidades $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, $\dot{\gamma}$ e $\boldsymbol{\sigma}$. Empregando uma discretização de Euler totalmente implícita resulta um problema incremental entre os pseudo-instantes t_n e t_{n+1} . O problema consiste, dada a deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$ em t_n e dado o incremento na deformação $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, em encontrar $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$, $\Delta \gamma$ e $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ tais que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \gamma \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d}}} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d, \\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \left[\frac{E}{2(1+\nu)} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \mathbb{I} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e, \\
\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{1}{3} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \\
\Phi_{n+1} &= \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d} - \sigma_Y, \\
\Phi_{n+1} &\leq 0 \quad \Delta \gamma \geq 0 \quad \Phi_{n+1} \Delta \gamma = 0,
\end{aligned} \tag{6.1.14}$$

onde $\Delta(\cdot) = (\cdot)_{n+1} - (\cdot)_n$. Este problema não constitui um problema de valor inicial clássico devido às restrições que devem ser satisfeitas. Para resolver o problema observe que são duas as possibilidades com respeito ao valor de $\Delta \gamma$. Primeiro suponha que $\Delta \gamma = 0$, em tal caso não há escoamento plástico e o incremento é puramente elástico, portanto $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ e, além disso, deve-se manter a restrição $\Phi_{n+1} \leq 0$, onde $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ depende de $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ como explicitado em (6.1.14)₂. Considere agora $\Delta \gamma > 0$, então $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ é exatamente como na (6.1.14)₁ além de ser necessário satisfazer $\Phi_{n+1} = 0$. A questão então é construir um procedimento que permita discernir qual das duas possibilidades é a solução do problema incremental. Aqui emprega-se o conhecido método de dois passos com um primeiro passo de predição elástico e um segundo passo de correção plástico, o qual é descrito a seguir.

- Passo preditor elástico. O objetivo deste passo é obter uma tensão de teste e ver se é admissível, ou seja, se está no domínio elástico ou mesmo sobre a superfície de

fluência. Seja $\Delta\gamma = 0$ e calcule

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ teste}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{teste}} &= \left[\frac{E}{2(1+\nu)}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\mathbb{I} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ teste}}.\end{aligned}\quad (6.1.15)$$

Se este estado é tal que

$$\Phi_{n+1}^{\text{teste}} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{d \text{ teste}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{d \text{ teste}}} - \sigma_Y \leq 0, \quad (6.1.16)$$

então a solução é válida já que está no domínio elástico ou sobre a superfície de fluência. Logo é

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ teste}}, \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{teste}},\end{aligned}\quad (6.1.17)$$

e o cálculo finaliza. Caso contrário o estado de tensão deve ser corrigido, para o qual se realiza o seguinte passo.

- **Passo corretor plástico.** O objetivo deste passo é devolver um estado de tensão não admissível à superfície de fluência que, neste caso de plasticidade perfeita, permanece sempre fixa. Nesta situação resolve-se, nas incógnitas $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ e $\Delta\gamma$, o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ teste}} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d}} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \left[\frac{E}{2(1+\nu)}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\mathbb{I} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e, \\ \Phi_{n+1} &= \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d} - \sigma_Y = 0,\end{aligned}\quad (6.1.18)$$

junto com a restrição

$$\Delta\gamma > 0. \quad (6.1.19)$$

Em particular, devido à invariância com respeito à componente hidrostática da tensão, a (6.1.18) pode ser trabalhada empregando a seguinte relação entre $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d$ e $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{d \text{ teste}}$ (ver [122])

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^d = \left(1 - \frac{3G\Delta\gamma}{q_{n+1}^{\text{teste}}} \right) \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{d \text{ teste}}, \quad (6.1.20)$$

com $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ e $q_{n+1}^{\text{teste}} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{d \text{ teste}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{d \text{ teste}}}$. Substituindo a (6.1.20) na (6.1.18)₃ resulta a seguinte equação escalar em $\Delta\gamma$

$$\Phi_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{d \text{ teste}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{d \text{ teste}}} - 3G\Delta\gamma - \sigma_Y = 0, \quad (6.1.21)$$

que, neste caso, é linear na incógnita $\Delta\gamma$.

Também calcula-se a denominada deformação plástica acumulada $\bar{\varepsilon}^p$ através da expressão $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma}$. Logo, esta acumulação obtém-se a partir de fazer $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma$ após cada passo de cálculo.

6.2 Aproximação pelo método dos elementos finitos

Nesta seção trata-se de forma detalhada a construção dos espaços de funções de aproximação para o problema empregando o método dos elementos finitos. Isto é feito com ênfase nos modelos de flutuação periódica e de mínima restrição cinemática pois estes casos, em particular o último, merecem atenção especial por se tratarem de situações que fogem à tradicional abordagem. Isto é devido às características das restrições a serem satisfeitas pelas variações admissíveis, o que termina impactando na cinemática discreta do problema aproximado. Por sua parte, o caso de flutuação nula no contorno do EVR não é analisado posto que recai dentro do tratamento clássico do método dos elementos finitos ao envolver condições de contorno tradicionais. Antes de nada descreve-se o tipo de elemento empregado e o contexto não linear no qual se insere o problema. Finalmente, vale a pena mencionar que o problema é tratado em duas dimensões e em coordenadas cartesianas por simplicidade na apresentação.

6.2.1 Particularidades da aproximação empregada

Considere um espaço de dimensão finita denominado \mathcal{V}_μ^h , o qual está caracterizado por uma base de funções de aproximação de elementos finitos e que é adequadamente construída tal que $\mathcal{V}_\mu^h \subset \mathcal{V}_\mu$. Aqui assume-se que na discretização o domínio da microcélula é capturado de forma exata. Assim, o problema aproximado correspondente ao Problema 6.1 no intervalo de pseudo-tempo $[t_n, t_{n+1}]$ é o seguinte:

Problema 6.2. *Dada uma deformação ε^{n+1} , encontre a flutuação do campo de deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{h^{n+1}} \in \mathcal{V}_\mu^h$ tal que*

$$\int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{F}_\mu^h(\varepsilon^{n+1} + (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu^{h^{n+1}})^s) \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta}^h)^s \, d\mathbf{y} = \int_{\Gamma_\mu^{sv}} \mathbf{t}^v \cdot \boldsymbol{\eta}^h \, d\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}_\mu^h, \quad (6.2.1)$$

onde $\mathcal{V}_\mu^h \subset \mathcal{V}_\mu \subset \tilde{\mathcal{K}}_\mu^m$, e logo calcule a tensão $\boldsymbol{\sigma}^{h^{n+1}}$ como

$$\boldsymbol{\sigma}^{h^{n+1}} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathcal{F}_\mu^h(\varepsilon^{n+1} + (\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu^{h^{n+1}})^s) \, d\mathbf{y}. \quad (6.2.2)$$

O operador constitutivo \mathcal{F}_μ^h do Problema 6.2 representa à contrapartida discreta do conjunto de equações (6.1.13). No entanto, o problema aqui enunciado é ainda não linear. A linearização realiza-se fazendo uso do método de Newton–Raphson a partir de considerar iterações, denotadas pelo índice it , que envolvem incrementos da forma

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{h^{it+1}} = \tilde{\mathbf{u}}_\mu^{h^{it}} + \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu^{h^{it+1}}. \quad (6.2.3)$$

Isto deriva em uma série de problemas lineares que correspondem a cada iteração do esquema incremental iterativo como segue:

Problema 6.3. *Dada uma deformação ε^{n+1} , realize as iterações $it = 1, 2, \dots$, até que um critério de convergência seja atingido, calculando o incremento na flutuação do campo de deslocamentos $\delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu^{h^{it+1}} \in \mathcal{V}_\mu^h$ tal que*

$$\int_{\Omega_\mu^s} \mathcal{D}_\mu^{h^{it}} (\nabla_{\mathbf{y}} \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu^{h^{it+1}})^s \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta}^h)^s \, d\mathbf{y} = - \int_{\Omega_\mu^s} \boldsymbol{\sigma}_\mu^{h^{it}} \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\eta}^h)^s \, d\mathbf{y} \quad \forall \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}_\mu^h, \quad (6.2.4)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu^{hit} &= \frac{d\mathcal{F}_\mu^h}{d\varepsilon}(\varepsilon^{n+1} + (\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{hit})^s), \\ \sigma_\mu^{hit} &= \mathcal{F}_\mu^h(\varepsilon^{n+1} + (\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{hit})^s).\end{aligned}\quad (6.2.5)$$

Logo, com a solução convergida após, digamos, $it = K - 1$ iterações faça

$$\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{h^{n+1}} = \tilde{\mathbf{u}}_\mu^{h^K}, \quad (6.2.6)$$

e, finalmente, calcule a tensão $\sigma^{h^{n+1}}$ como

$$\sigma^{h^{n+1}} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathcal{F}_\mu^h(\varepsilon^{n+1} + (\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{h^{n+1}})^s) d\mathbf{y}. \quad (6.2.7)$$

Seja N o número de nós da malha de elementos finitos. Os valores nodais correspondentes às funções aproximadas $\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{hit+1}$ e $\boldsymbol{\eta}^h$ estão agrupados nos vetores $\mathbf{U}^{it+1} = [\mathbf{U}_1^{it+1} \ \mathbf{U}_2^{it+1}]^T$ e $\boldsymbol{\Theta}^h = [\boldsymbol{\Theta}_1^h \ \boldsymbol{\Theta}_2^h]^T$ respectivamente, onde cada sub-vetor possui N componentes. Portanto escreve-se

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{hit+1} &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^2 [\mathbf{U}_m^{it+1}]_n \phi_n \mathbf{e}_m, \\ \boldsymbol{\eta}^h &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^2 [\boldsymbol{\Theta}_m^h]_n \phi_n \mathbf{e}_m,\end{aligned}\quad (6.2.8)$$

onde ϕ_n , $n = 1, \dots, N$, são as clássicas funções de elementos finitos cujo espaço denomina-se X_h e é dado por

$$X_h = \{\phi \in C^0(\overline{\Omega_\mu^s}); \phi|_e \in \mathbb{Q}_2, \forall e \in \mathcal{I}^e\}, \quad (6.2.9)$$

onde \mathbb{Q}_2 denota o espaço de funções de interpolação quadrática no elemento quadrilátero pertencente a uma malha de elementos finitos chamada \mathcal{I}^e . Além disso, $[\cdot]_n$ indica cada uma das N componentes do vetor $[\cdot]$. Logo, o Problema 6.3 deriva em um sistema de equações lineares, com $2N$ incógnitas, da forma

$$[\mathbf{K}^{it} \mathbf{U}^{it+1} - \mathbf{f}^{it}] \cdot \boldsymbol{\Theta}^h = 0 \quad \forall \boldsymbol{\Theta}^h \text{ tal que } \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}_\mu^h, \quad (6.2.10)$$

com \mathbf{K}^{it} e \mathbf{f}^{it} facilmente identificáveis da (6.2.4) após introduzir as formas de $\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{hit+1}$ e $\boldsymbol{\eta}^h$ dadas pela (6.2.8).

Como dito antes, o modelo de multiescala de flutuação nula no contorno do EVR não requer comentários adicionais pois se encaixa dentro da abordagem clássica do método dos elementos finitos. Segue-se que

$$\mathcal{V}_\mu^{Nh} = [X_h]^2 \cap \mathcal{V}_\mu^N, \quad (6.2.11)$$

onde com o índice N deseja-se ressaltar que são os espaços de variações virtuais correspondentes a flutuações nulas na fronteira do EVR. Suponha que há N_i nós no interior do domínio Ω_μ^s e $N_c = N - N_i$ nós sobre o contorno Γ_μ . Então os vetores \mathbf{U}^{it+1} e $\boldsymbol{\Theta}^h$ podem ser divididos como segue

$$\mathbf{U}^{it+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{it+1}_i \\ \mathbf{U}^{it+1}_c \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Theta}^h = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Theta}^h_i \\ \boldsymbol{\Theta}^h_c \end{pmatrix}, \quad (6.2.12)$$

onde $(\cdot)_i$ e $(\cdot)_c$ referem a nós no interior e no contorno do domínio respectivamente, pos-

suindo $2N_i$ e $2N_c$ elementos cada um deles. Por sua parte, cada um dos sub-vetores é dividido em $((\cdot)_m)_i$ e $((\cdot)_m)_c$, $m = 1, 2$, por se tratar de um problema em duas dimensões. Logo, a interseção com o espaço \mathbf{V}_μ^N faz com que o espaço $\mathbf{V}_\mu^{N^h}$ adquira a seguinte característica

$$\begin{aligned}\Theta_c^h &= 0, \\ \mathbf{U}_c^{it+1} &= 0,\end{aligned}\tag{6.2.13}$$

e os graus de liberdade livres no problema são todas aquelas incógnitas associadas aos N_i nós internos em Ω_μ^s . De acordo com a seguinte forma de escrever o sistema (6.2.10) tem-se

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii}^{it} & \mathbf{K}_{ic}^{it} \\ \mathbf{K}_{ci}^{it} & \mathbf{K}_{cc}^{it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i^{it+1} \\ \mathbf{U}_c^{it+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i^{it} \\ \mathbf{f}_c^{it} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \Theta_i^h \\ \Theta_c^h \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \Theta^h \text{ tal que } \boldsymbol{\eta}^h \in \mathbf{V}_\mu^{N^h}, \tag{6.2.14}$$

e as incógnitas são obtidas fazendo $\Theta_c^h = 0$, ou seja

$$[\mathbf{K}_{ii}^{it} \mathbf{U}_i^{it+1} - \mathbf{f}_i^{it}] \cdot \Theta_i^h = 0 \quad \forall \Theta_i^h, \tag{6.2.15}$$

que deriva, conseqüentemente, no seguinte sistema de equações lineares reduzido de $2N_i$ graus de liberdade independentes

$$\mathbf{K}_{ii}^{it} \mathbf{U}_i^{it+1} = \mathbf{f}_i^{it}. \tag{6.2.16}$$

Entretanto, para os modelos de flutuação periódica e de mínima restrição cinemática as expressões equivalentes às anteriores mudam radicalmente. Logo, a identificação dos graus de liberdade independentes requer, principalmente no último caso, uma análise especial como é feito nas seções a seguir. A razão disto é que as respectivas restrições são incorporadas diretamente nos espaços $\mathbf{V}_\mu^{P^h}$ e $\mathbf{V}_\mu^{M^h}$, onde os índices P e M correspondem aos modelos de flutuações periódicas na fronteira do EVR e de mínima restrição cinemática, respectivamente. Uma outra abordagem possível, porém não explorada aqui, é através do uso de multiplicadores de Lagrange de forma a devolver o problema a espaços de elementos finitos tradicionais.

6.2.2 Modelo discreto de flutuação periódica

Para este modelo, o espaço de dimensão finita $\mathbf{V}_\mu^{P^h}$ é como segue

$$\mathbf{V}_\mu^{P^h} = [X_h]^2 \cap \mathbf{V}_\mu^P, \tag{6.2.17}$$

com X_h dado pela (6.2.9). Para satisfazer esta interseção deve-se proceder como segue. Dado que o modelo de flutuação periódica está baseado na relação entre pontos em correspondência com a periodicidade, é conveniente decompor os vetores \mathbf{U}^{it+1} e Θ^h como segue

$$\mathbf{U}^{it+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i^{it+1} \\ \mathbf{U}_+^{it+1} \\ \mathbf{U}_-^{it+1} \end{pmatrix} \quad \Theta^h = \begin{pmatrix} \Theta_i^h \\ \Theta_+^h \\ \Theta_-^h \end{pmatrix}, \tag{6.2.18}$$

onde $(\cdot)_i$ se refere aos nós do interior do domínio Ω_μ^s enquanto que $(\cdot)_+$ e $(\cdot)_-$ denotam os nós sobre cada uma das partes recíprocas do contorno, denominadas Γ_+ e Γ_- , nas quais há total correspondência entre pontos. Novamente no interior há $2N_i$ graus de liberdade, enquanto que há $2N_\pm$ graus de liberdade em cada parte do contorno Γ_\pm , lembrando que deve ser $N_+ = N_-$ e $N_+ + N_- = N_c$, onde N_c é o número de nós no contorno. Com esta

decomposição, o sistema (6.2.10) pode ser escrito como segue

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{it}_{ii} & \mathbf{K}^{it}_{i+} & \mathbf{K}^{it}_{i-} \\ \mathbf{K}^{it}_{+i} & \mathbf{K}^{it}_{++} & \mathbf{K}^{it}_{+-} \\ \mathbf{K}^{it}_{-i} & \mathbf{K}^{it}_{-+} & \mathbf{K}^{it}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{it+1}_i \\ \mathbf{U}^{it+1}_+ \\ \mathbf{U}^{it+1}_- \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{it}_i \\ \mathbf{f}^{it}_+ \\ \mathbf{f}^{it}_- \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \Theta^h_i \\ \Theta^h_+ \\ \Theta^h_- \end{pmatrix} = 0$$

$$\forall \Theta^h \text{ tal que } \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}_\mu^{Ph}. \quad (6.2.19)$$

Assim sendo, no modelo de flutuação periódica pede-se que se satisfaça o seguinte

$$\begin{aligned} \Theta^h_+ &= \Theta^h_-, \\ \mathbf{U}^{it+1}_+ &= \mathbf{U}^{it+1}_-. \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Introduzindo estas igualdades no sistema (6.2.19) resulta

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{it}_{ii} & \mathbf{K}^{it}_{i+} & \mathbf{K}^{it}_{i-} \\ \mathbf{K}^{it}_{+i} & \mathbf{K}^{it}_{++} & \mathbf{K}^{it}_{+-} \\ \mathbf{K}^{it}_{-i} & \mathbf{K}^{it}_{-+} & \mathbf{K}^{it}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{it+1}_i \\ \mathbf{U}^{it+1}_+ \\ \mathbf{U}^{it+1}_+ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{it}_i \\ \mathbf{f}^{it}_+ \\ \mathbf{f}^{it}_- \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \Theta^h_i \\ \Theta^h_+ \\ \Theta^h_+ \end{pmatrix} = 0$$

$$\forall (\Theta^h_i, \Theta^h_+). \quad (6.2.21)$$

O sistema pode ser escrito diretamente em termos dos graus de liberdade independentes \mathbf{U}^{it+1}_i e \mathbf{U}^{it+1}_+ , cada um com $2N_i$ e $2N_+$ incógnitas respectivamente, como segue

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{it}_{ii} & \mathbf{K}^{it}_{i+} + \mathbf{K}^{it}_{i-} \\ \mathbf{K}^{it}_{+i} + \mathbf{K}^{it}_{-i} & \mathbf{K}^{it}_{++} + \mathbf{K}^{it}_{-+} + \mathbf{K}^{it}_{+-} + \mathbf{K}^{it}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{it+1}_i \\ \mathbf{U}^{it+1}_+ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{it}_i \\ \mathbf{f}^{it}_+ + \mathbf{f}^{it}_- \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \Theta^h_i \\ \Theta^h_+ \end{pmatrix} = 0 \quad \forall (\Theta^h_i, \Theta^h_+), \quad (6.2.22)$$

produto de ter manipulado as filas e as colunas. Isto implica resolver o seguinte sistema de equações lineares reduzido de $2(N_i + N_+)$ incógnitas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{it}_{ii} & \mathbf{K}^{it}_{i+} + \mathbf{K}^{it}_{i-} \\ \mathbf{K}^{it}_{+i} + \mathbf{K}^{it}_{-i} & \mathbf{K}^{it}_{++} + \mathbf{K}^{it}_{-+} + \mathbf{K}^{it}_{+-} + \mathbf{K}^{it}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{it+1}_i \\ \mathbf{U}^{it+1}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{it}_i \\ \mathbf{f}^{it}_+ + \mathbf{f}^{it}_- \end{pmatrix}. \quad (6.2.23)$$

6.2.3 Modelo discreto de mínima restrição cinemática

Para analisar o modelo de mínima restrição cinemática lembre-se que este está baseado em que toda $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^M$ satisfaça a seguinte restrição

$$\int_{\Gamma_\mu} (\boldsymbol{\eta} \otimes \mathbf{n})^s d\Gamma = 0, \quad (6.2.24)$$

onde $(\cdot)^s$ denota a parte simétrica do tensor e \mathbf{n} é a normal externa a Ω_μ^s sobre Γ_μ . Logo, o espaço de dimensão finita correspondente é

$$\mathcal{V}_\mu^{Mh} = [X_h]^2 \cap \mathcal{V}_\mu^M, \quad (6.2.25)$$

com X_h dado pela (6.2.9). A seguir são dados os passos para realizar a interseção de $[X_h]^2$ com \mathbf{V}_μ^M . Em função disto é conveniente efetuar a seguinte, primeira, decomposição

$$\mathbf{U}^{it+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{it+1}_i \\ \mathbf{U}^{it+1}_c \end{pmatrix} \quad \Theta^h = \begin{pmatrix} \Theta^h_i \\ \Theta^h_c \end{pmatrix}, \quad (6.2.26)$$

onde $(\cdot)_i$ e $(\cdot)_c$ referem aos nós do interior do domínio Ω_μ^s e do contorno Γ_μ . Aqui há $2N_i$ e $2N_c$ graus de liberdade no interior e no contorno respectivamente. Com esta decomposição, considere que a interpolação sobre Γ_μ escreve-se como

$$\boldsymbol{\eta}^h|_{\Gamma_\mu} = \sum_{n=1}^{N_c} \sum_{m=1}^2 [\Theta^h_{mc}]_n \psi_n \mathbf{e}_m, \quad (6.2.27)$$

onde $\boldsymbol{\eta}^h|_{\Gamma_\mu} \in \mathbf{V}_\mu^{Mh}|_{\Gamma_\mu}$ com

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\mu^{Mh}|_{\Gamma_\mu} &= [W_h]^2 \cap \mathbf{V}_\mu^M|_{\Gamma_\mu}, \\ W_h &= \{\psi \in C^0(\overline{\Gamma_\mu}); \psi|_{e_\mu} \in \mathbb{P}_2, \forall e_\mu \in \mathcal{I}^{e_\mu}\}, \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

onde e_μ é cada um dos elementos, de linha no caso bidimensional, que compõem a malha \mathcal{I}^{e_μ} resultante da projeção da malha \mathcal{I}^e sobre o contorno Γ_μ . Aqui, \mathbb{P}_2 representa a família de polinômios quadráticos.

A contrapartida discreta da expressão (6.2.24) escreve-se

$$\int_{\Gamma_\mu} (\boldsymbol{\eta}^h \otimes \mathbf{n})^s d\Gamma = 0, \quad (6.2.29)$$

e substituindo a (6.2.27) na (6.2.29) tem-se

$$\sum_{n=1}^{N_c} \sum_{m=1}^2 \left(\int_{\Gamma_\mu} \psi_n (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{n})^s d\Gamma \right) [\Theta^h_{mc}]_n = 0, \quad (6.2.30)$$

que pode ser escrito equivalentemente como

$$\mathbf{C}_c \Theta^h_c = 0, \quad (6.2.31)$$

onde \mathbf{C}_c é uma matriz de três filas (no caso de duas dimensões, e seis no caso tridimensional) e $2N_c$ colunas que impõe três equações que equivalem à mínima restrição cinemática dada pela (6.2.29). A matriz \mathbf{C}_c pode ser construída a partir de contribuições elementares como

$$\mathbf{C}_c = \sum_{e_\mu \in \mathcal{I}^{e_\mu}} \mathbf{C}_c^{e_\mu}. \quad (6.2.32)$$

A fim de identificar cada contribuição elementar, a função ψ^j denota, neste caso de elementos quadráticos, cada uma das funções de forma com uma numeração local $j = 1, 2, 3$ (três é a quantidade de nós do elemento de linha quadrático), enquanto que dl é o diferencial de comprimento ao longo de cada elemento e_μ . Logo, cada matriz $\mathbf{C}_c^{e_\mu}$ possui três filas e

seis colunas, e é da forma

$$\mathbf{C}_c^{e_\mu} = \begin{pmatrix} \int_{e_\mu} \psi^1 n_1 dl & 0 & \int_{e_\mu} \psi^2 n_1 dl & 0 & \int_{e_\mu} \psi^3 n_1 dl & 0 \\ 0 & \int_{e_\mu} \psi^1 n_2 dl & 0 & \int_{e_\mu} \psi^2 n_2 dl & 0 & \int_{e_\mu} \psi^3 n_2 dl \\ \int_{e_\mu} \psi^1 n_2 dl & \int_{e_\mu} \psi^1 n_1 dl & \int_{e_\mu} \psi^2 n_2 dl & \int_{e_\mu} \psi^2 n_1 dl & \int_{e_\mu} \psi^3 n_2 dl & \int_{e_\mu} \psi^3 n_1 dl \end{pmatrix}. \quad (6.2.33)$$

Contudo, a expressão (6.2.24) não exclui os movimentos de corpo rígido da microestrutura. Para isto, e em função da equação correspondente à própria restrição (6.2.29), convém decompor os vetores \mathbf{U}^{it+1}_c e Θ^h_c como segue

$$\mathbf{U}^{it+1}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{it+1}_l \\ \mathbf{U}^{it+1}_d \\ \mathbf{U}^{it+1}_p \end{pmatrix} \quad \Theta^h_c = \begin{pmatrix} \Theta^h_l \\ \Theta^h_d \\ \Theta^h_p \end{pmatrix}, \quad (6.2.34)$$

onde os índices l , d e p indicam graus de liberdade sobre Γ_μ livres, dependentes e prescritos, respectivamente. Segue-se então que a restrição (6.2.31) é escrita como

$$(\mathbf{C}_l \quad \mathbf{C}_d \quad \mathbf{C}_p) \begin{pmatrix} \Theta^h_l \\ \Theta^h_d \\ \Theta^h_p \end{pmatrix} = 0. \quad (6.2.35)$$

Por um lado, a escolha dos graus de liberdade prescritos deve ser de tal forma que elimine os deslocamentos de corpo rígido, pelo que se escolhe

$$\Theta^h_p = 0, \quad (6.2.36)$$

sendo que no caso bidimensional estes são três graus de liberdade (no caso tridimensional são seis). Assim, a (6.2.35) resulta

$$(\mathbf{C}_l \quad \mathbf{C}_d) \begin{pmatrix} \Theta^h_l \\ \Theta^h_d \end{pmatrix} = 0. \quad (6.2.37)$$

Conseqüentemente, em duas dimensões esta restrição envolve $2N_c - 3$ graus de liberdade, dos quais há ainda três que se denominam dependentes devido às três restrições impostas pela (6.2.37). Disto decorre que os graus de liberdade independentes ou livres, agrupados em Θ^h_l , são $2N_c - 6$ no caso bidimensional (e $2N_c - 12$ no caso tridimensional). Com efeito, da (6.2.37) obtém-se

$$\Theta^h_d = \mathbf{R}\Theta^h_l, \quad (6.2.38)$$

onde

$$\mathbf{R} = -\mathbf{C}_d^{-1}\mathbf{C}_l. \quad (6.2.39)$$

As mesmas equações que as (6.2.36) e (6.2.38) valem para os sub-vetores \mathbf{U}^{it+1}_p e \mathbf{U}^{it+1}_d respectivamente. Apesar de haver muitas possibilidades de escolher os graus de liberdade correspondentes a Θ^h_d , esta escolha não é arbitrária já que deve ser feita de forma que a matriz \mathbf{C}_d seja invertível. Isto elimina a possibilidade, por exemplo, de escolher os três nós de um mesmo elemento.

Agora observe que, de acordo com as decomposições até aqui introduzidas, o sistema

(6.2.10) escreve-se como

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{it}_{ii} & \mathbf{K}^{it}_{il} & \mathbf{K}^{it}_{id} & \mathbf{K}^{it}_{ip} \\ \mathbf{K}^{it}_{li} & \mathbf{K}^{it}_{ll} & \mathbf{K}^{it}_{ld} & \mathbf{K}^{it}_{lp} \\ \mathbf{K}^{it}_{di} & \mathbf{K}^{it}_{dl} & \mathbf{K}^{it}_{dd} & \mathbf{K}^{it}_{dp} \\ \mathbf{K}^{it}_{pi} & \mathbf{K}^{it}_{pl} & \mathbf{K}^{it}_{pd} & \mathbf{K}^{it}_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{it+1}_i \\ \mathbf{U}^{it+1}_l \\ \mathbf{U}^{it+1}_d \\ \mathbf{U}^{it+1}_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{it}_i \\ \mathbf{f}^{it}_l \\ \mathbf{f}^{it}_d \\ \mathbf{f}^{it}_p \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \Theta^h_i \\ \Theta^h_l \\ \Theta^h_d \\ \Theta^h_p \end{pmatrix} = 0$$

$$\forall \Theta^h \text{ tal que } \boldsymbol{\eta}^h \in \mathcal{V}_\mu^{M^h}. \quad (6.2.40)$$

Coletando as (6.2.36) e (6.2.38), as quais são resumidas a seguir

$$\begin{aligned} \Theta^h_p &= 0, \\ \mathbf{U}^{it+1}_p &= 0, \\ \Theta^h_d &= \mathbf{R}\Theta^h_l, \\ \mathbf{U}^{it+1}_d &= \mathbf{R}\mathbf{U}^{it+1}_l, \end{aligned} \quad (6.2.41)$$

o sistema (6.2.40) resulta

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{it}_{ii} & \mathbf{K}^{it}_{il} & \mathbf{K}^{it}_{id} \\ \mathbf{K}^{it}_{li} & \mathbf{K}^{it}_{ll} & \mathbf{K}^{it}_{ld} \\ \mathbf{K}^{it}_{di} & \mathbf{K}^{it}_{dl} & \mathbf{K}^{it}_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{it+1}_i \\ \mathbf{U}^{it+1}_l \\ \mathbf{R}\mathbf{U}^{it+1}_l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{it}_i \\ \mathbf{f}^{it}_l \\ \mathbf{f}^{it}_d \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \Theta^h_i \\ \Theta^h_l \\ \mathbf{R}\Theta^h_l \end{pmatrix} = 0$$

$$\forall (\Theta^h_i, \Theta^h_l). \quad (6.2.42)$$

Manipulando as filas e as colunas, como feito no caso do modelo de flutuação periódica, obtém-se o seguinte problema que põe em evidência os graus de liberdade que efetivamente estão livres

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{it}_{ii} & \mathbf{K}^{it}_{il} + \mathbf{K}^{it}_{id}\mathbf{R} \\ \mathbf{K}^{it}_{li} + \mathbf{R}^T\mathbf{K}^{it}_{di} & \mathbf{K}^{it}_{ll} + \mathbf{K}^{it}_{ld}\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\mathbf{K}^{it}_{dl} + \mathbf{R}^T\mathbf{K}^{it}_{dd}\mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{it+1}_i \\ \mathbf{U}^{it+1}_l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{it}_i \\ \mathbf{f}^{it}_l + \mathbf{R}^T\mathbf{f}^{it}_d \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \Theta^h_i \\ \Theta^h_l \end{pmatrix} = 0 \quad \forall (\Theta^h_i, \Theta^h_l). \quad (6.2.43)$$

Logo, o sistema de equações lineares reduzido para o modelo de mínima restrição cinemática é o seguinte

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{it}_{ii} & \mathbf{K}^{it}_{il} + \mathbf{K}^{it}_{id}\mathbf{R} \\ \mathbf{K}^{it}_{li} + \mathbf{R}^T\mathbf{K}^{it}_{di} & \mathbf{K}^{it}_{ll} + \mathbf{K}^{it}_{ld}\mathbf{R} + \mathbf{R}^T\mathbf{K}^{it}_{dl} + \mathbf{R}^T\mathbf{K}^{it}_{dd}\mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{it+1}_i \\ \mathbf{U}^{it+1}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{it}_i \\ \mathbf{f}^{it}_l + \mathbf{R}^T\mathbf{f}^{it}_d \end{pmatrix}. \quad (6.2.44)$$

6.3 Resultados numéricos: O modelo de Gurson

O objetivo agora é salientar as diferenças entre as respostas constitutivas no nível da macroescala provida pelos modelos constitutivos de multiescala vistos na Seção 5.2. Para tal fim, utiliza-se um problema padrão que consiste em determinar as superfícies de escoamento de um material com uma determinada microestrutura. Este estudo está motivado pela comparação com resultados já existentes na literatura para este problema particular [60].

6.3.1 Descrição do problema de interesse

Em [60] expõe-se uma metodologia semi-analítica para estimar as superfícies de colapso plástico de materiais porosos. Nesta abordagem o material considerado possui uma matriz que segue o modelo elástico–perfeitamente plástico de Von Mises. A metodologia proposta no mencionado trabalho baseia-se em calcular a posição de diversos pontos da curva de colapso no espaço de variáveis p – q (que serão introduzidas mais adiante) assumindo um dado mecanismo de colapso plástico. Finalmente a forma analítica da curva é obtida por ajuste de coeficientes. Em [60] a superfície de colapso deriva-se para uma célula circular com um poro vazio centrado, e resulta, após o ajuste de coeficientes, na seguinte expressão

$$\Phi = q - \sigma_Y \sqrt{\frac{1}{C_{\text{eq}}} \left[1 + f^2 - 2f \cosh \left(\frac{\sqrt{3}p}{\sigma_Y} \right) \right]}, \quad (6.3.1)$$

com

$$C_{\text{eq}} = (1 + 3f + 24f^6)^2, \quad (6.3.2)$$

onde f é a fração de vazio determinada pelo tamanho do poro e σ_Y a tensão uniaxial de fluência.

No que segue o objetivo é obter formas analíticas para as superfícies de colapso, para o mesmo tipo de material, que generalizem à (6.3.2). Isto é feito através do cálculo dos pontos que jazem sobre a superfície de colapso plástico no espaço de variáveis p – q . Para isto emprega-se a técnica de multiescala aqui desenvolvida baseando-se nos três modelos constitutivos vistos nas Seções 5.2.2, 5.2.3 e 5.2.4, e revisitados na Seção 6.1.2. O modelo de Taylor (ver Seção 5.2.1) não se considera devido a que o resultado é imediato. Aqui surge a diferença essencial com a abordagem de [60], pois com a presente metodologia o mecanismo de colapso plástico é obtido após ter resolvido o problema na microescala.

Utiliza-se um EVR quadrado com tamanho de lado unitário como mostrado na Figura 6.1, onde a fronteira Γ_μ^{sv} encontra-se sem tração imposta, isto é $\mathbf{t}^v = 0$. O EVR pode conter um ou três poros como mostrado na Figura 6.1, e o tamanho destes varia de acordo com os diferentes valores de f estudados que, em particular, são os seguintes $f = 0.5\%$, $f = 2\%$, $f = 10\%$ e $f = 30\%$ iguais aos dados em [60]. Para o caso de três poros os mesmos estão localizados a 120° entre si, e a uma distância L do centro da célula tal que a mínima distância entre eles seja menor que a distância até o contorno. Aqui surge uma das principais vantagens desta abordagem posto que é possível considerar situações bastante arbitrárias para a forma da microestrutura.

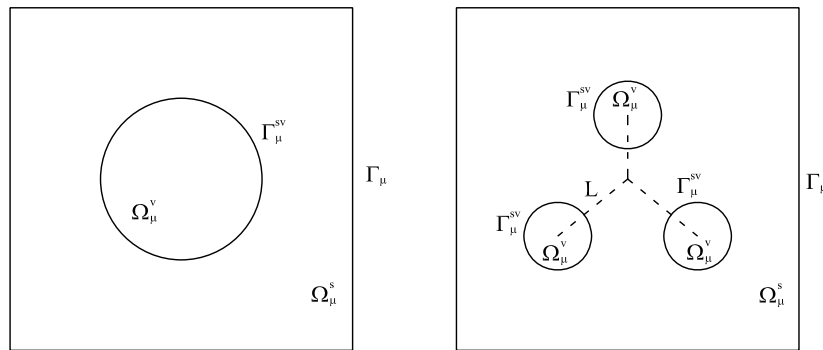


Figura 6.1: Configurações do EVR.

Neste caso bidimensional assume-se que o estado do EVR é de deformação plana. As propriedades do material, de acordo com o modelo elástico linear–perfeitamente plástico

de von Mises visto na Seção 6.1.3, são

$$\begin{aligned} E &= 200 \text{ GPa}, \\ \nu &= 0.3, \\ \sigma_Y &= 0.24 \text{ GPa}. \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Os modelos constitutivos de multiescala para os quais realizam-se os cálculos são os seguintes

- modelo de flutuação nula na fronteira, ou de deslocamento linear na fronteira, denominado modelo N ,
- modelo de flutuação periódica na fronteira, denominado modelo P ,
- modelo de mínima restrição cinemática, ou de tração uniforme na fronteira, denominado modelo M .

A microestrutura é comandada até atingir o colapso plástico mediante o seguinte tensor de deformação que simula a deformação vinda da macroescala

$$\varepsilon = \zeta \bar{\varepsilon}, \tag{6.3.4}$$

onde ζ é um fator de carga monotonicamente crescente e o tensor $\bar{\varepsilon}$ é

$$\bar{\varepsilon} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \sqrt{1 - \alpha^2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.3.5}$$

com $\alpha \in [0, 1]$ tal que se satisfaça $\|\bar{\varepsilon}\| = 1$ em todos os casos. Note que para $\alpha = 1$ tem-se um estado esférico de deformação enquanto que para $\alpha = 0$ obtém-se um estado de deformação equivalente a um corte puro. Com esta decomposição do tensor ε espera-se atingir a maior quantidade de pontos nas superfícies de colapso no espaço de variáveis p - q . A deformação ε é aplicada de forma progressiva no contexto do esquema incremental visto no Problema 6.3 através do fator ζ , iniciando de um estado sem tensão residual até alcançar o colapso plástico da célula. Como dito nas seções anteriores, o problema aproximado é resolvido por meio do método de elementos finitos com elementos quadriláteros de interpolação quadrática. Algumas das malhas empregadas, mostrando os diferentes níveis de vazio considerados, são apresentadas na Figura 6.2.

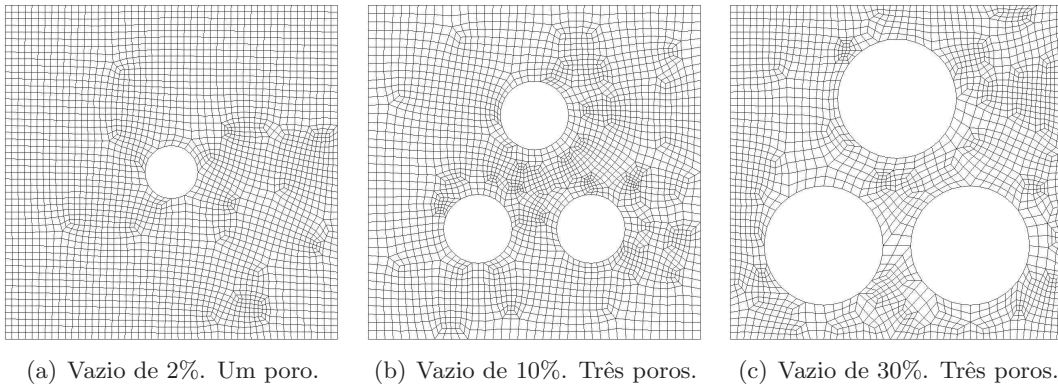


Figura 6.2: Alguns dos casos estudados e malhas de elementos finitos empregadas.

Uma vez resolvido o problema deve-se obter o tensor de tensão σ homogeneizado utilizando a expressão (6.2.7) (a versão discreta da (5.1.7)). Logo, a análise é realizada

em termos das componentes hidrostática e desviadora deste tensor, a partir das quais obtêm-se as quantidades p e q como segue

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}, \\ q &= \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^d \cdot \boldsymbol{\sigma}^d}. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Pondo uma variável como função da outra representa-se, no espaço p - q , a superfície de colapso buscada.

6.3.2 Superfícies de colapso plástico

Nesta seção apresentam-se as comparações dos resultados obtidos com a estimação das superfícies de colapso dada em [60]. Além disso, propõem-se formas analíticas que visam corrigir à expressão (6.3.1). No que segue lembre-se que os modelos denominados N , P e M correspondem aos de flutuação nula, flutuação periódica e mínima restrição cinemática respectivamente.

Vale a pena lembrar, do dito no Capítulo 5, que o modelo N é, dos três modelos considerados, o que produzirá um comportamento constitutivo macroscópico mais rígido devido à maior restrição cinemática, resultando então em uma cota superior para as superfícies de colapso. Reciprocamente, o modelo M constitui a cota inferior, e o modelo P é um caso intermediário. Isto pode ser confirmado pelos resultados numéricos obtidos que são mostrados nas Figuras 6.3 e 6.4, onde se comparam as superfícies de colapso para os três modelos de multiescala nos casos de um e três poros respectivamente. Ali, $(\cdot)^*$ denota quantidades normalizadas com respeito a σ_Y , isto é

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{p}{\sigma_Y}, \\ q^* &= \frac{q}{\sigma_Y}. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

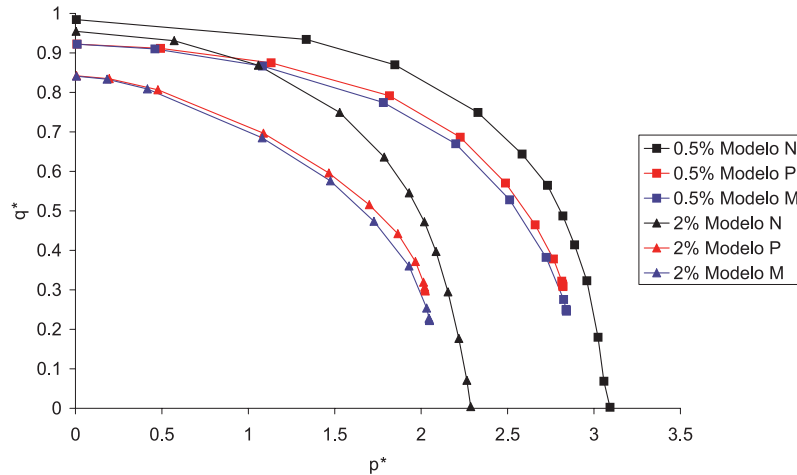


Figura 6.3: Superfícies de colapso. Caso de um poro com 0.5% e 2% de vazios.

Nas Figuras 6.3 e 6.4 vê-se que os modelos P e M possuem um comportamento, em termos da superfície de colapso, bastante próximo. No entanto, o primeiro destes representa, de fato, a resposta de um material menos rígido devido à inclusão estrita $\mathcal{V}_\mu^P \subset \mathcal{V}_\mu^M$.

A Figura 6.5 compara, somente para o modelo N , as superfícies de colapso obtidas

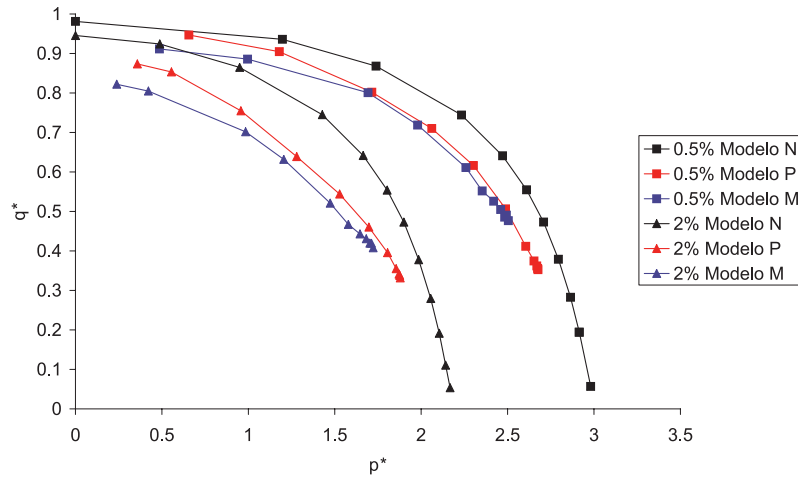


Figura 6.4: Superfícies de colapso. Caso de três poros com 0.5% e 2% de vazio.

para um e três poros, e para diversos graus de vazio. Desta maneira pode-se perceber como a forma da microestrutura influi no comportamento constitutivo macroscópico, aspecto que não seria capturado pelo modelo de Taylor.

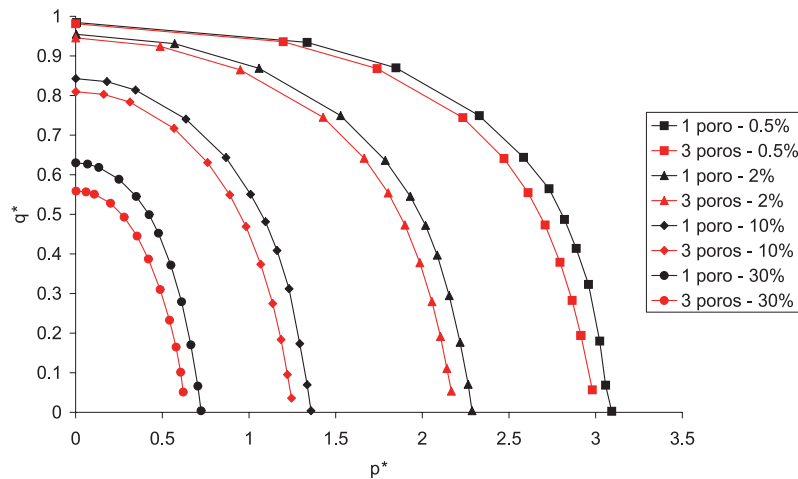


Figura 6.5: Comparação das superfícies de colapso para as duas microestruturas. Modelo *N*.

Por outro lado, na Figura 6.6 comparam-se os modelos de flutuação nula e de tração uniforme, ou de mínima restrição cinemática, (cotas superior e inferior) com a superfície de colapso calculada segundo a expressão (6.3.1). A comparação é feita para a microestrutura com um poro posto que sob esta condição foi obtida a mencionada estimativa da superfície de colapso em [60]. Veja que as cotas superior e inferior se afastam cada vez mais à medida que o valor de f aumenta. Para altos valores de f as Figuras 6.6(c) e 6.6(d) mostram que a superfície estimada semi-analiticamente por Gurson em [60] encontra-se entre as cotas superior e inferior, de forma especialmente próxima aos casos limites de estado hidrostático e de corte puro. Por outro lado, para valores de f baixos as Figuras 6.6(a) e 6.6(b) mostram que a superfície de Gurson foge à cota superior, e tende a sobrestimar o valor da tensão de fluência do material.

Por causa das diferenças mencionadas no parágrafo anterior é preciso melhorar a capacidade de representação da superfície Φ , alterando a expressão (6.3.1). Para isto

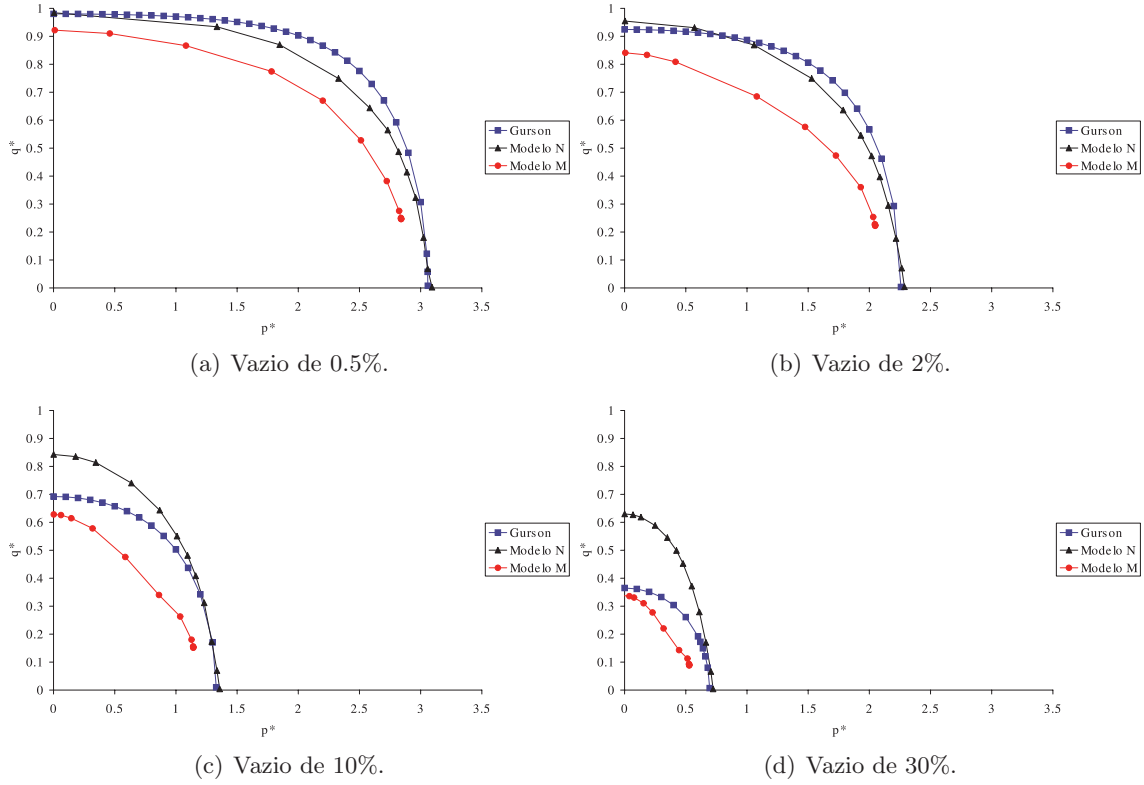


Figura 6.6: Comparação com a estimativa dada pela (6.3.1) para diversos graus de vazio.

propõe-se a seguinte forma analítica

$$\Phi = q - C_1 \left[1 - C_2 \sin^2 \left(\frac{\pi p}{2P_m} \right) \right] \sigma_Y \sqrt{\frac{1}{C_{eq}} \left[1 + f^2 - 2fC_3 \cosh \left(\frac{\sqrt{3}C_4 p}{\sigma_Y} \right) \right]}, \quad (6.3.8)$$

onde C_{eq} é dada pela (6.3.2), P_m é o valor de p obtido para $\alpha = 1$, e C_i , $i = 1, \dots, 4$, são constantes adimensionais usadas para ajustar a curva, e dependem de cada modelo particular. O ajuste dá como resultado as curvas que se mostram nas Figuras 6.7(a), 6.7(b) e 6.7(c) para cada um dos modelos considerados. Além disso, na Tabela 6.1 e na Figura 6.8 apresentam-se os valores dos coeficientes que realizam o ajuste das curvas para cada um dos modelos e como função da fração de vazio f . Note-se que o comportamento destes coeficientes em função da fração de vazio é qualitativamente similar para todos os modelos.

6.3.3 Mecanismos de colapso plástico

Como se viu na seção anterior as curvas de colapso de cada modelo diferem devido às diferenças nas restrições cinemáticas que os definem. Assim, cada um deles leva para a macroescala o comportamento constitutivo dependente do colapso na microescala, o qual depende por sua vez das hipóteses subjacentes a cada modelo. Portanto, é razoável pensar que em cada caso existe um mecanismo de colapso plástico característico.

Na dedução da estimativa dada pela (6.3.1) o mecanismo que produz o colapso assume uma forma predeterminada. Utilizando os modelos de multiescala o colapso ocorre como consequência de dois aspectos inerentes à microestrutura: (i) a característica geométrica e (ii) as restrições cinemáticas que definem o modelo de multiescala. No anterior não foi mencionada a evidente dependência da resposta constitutiva escolhida para o

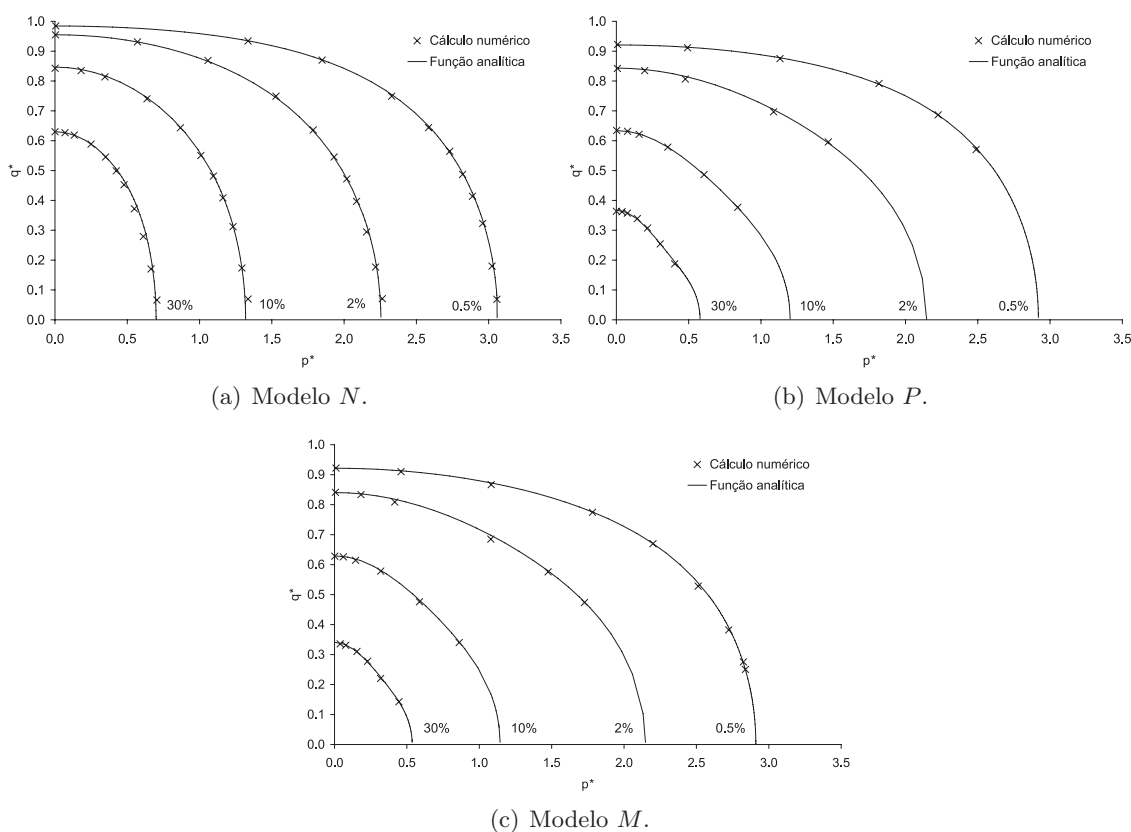


Figura 6.7: Resultados numéricos e curvas de ajuste analíticas.

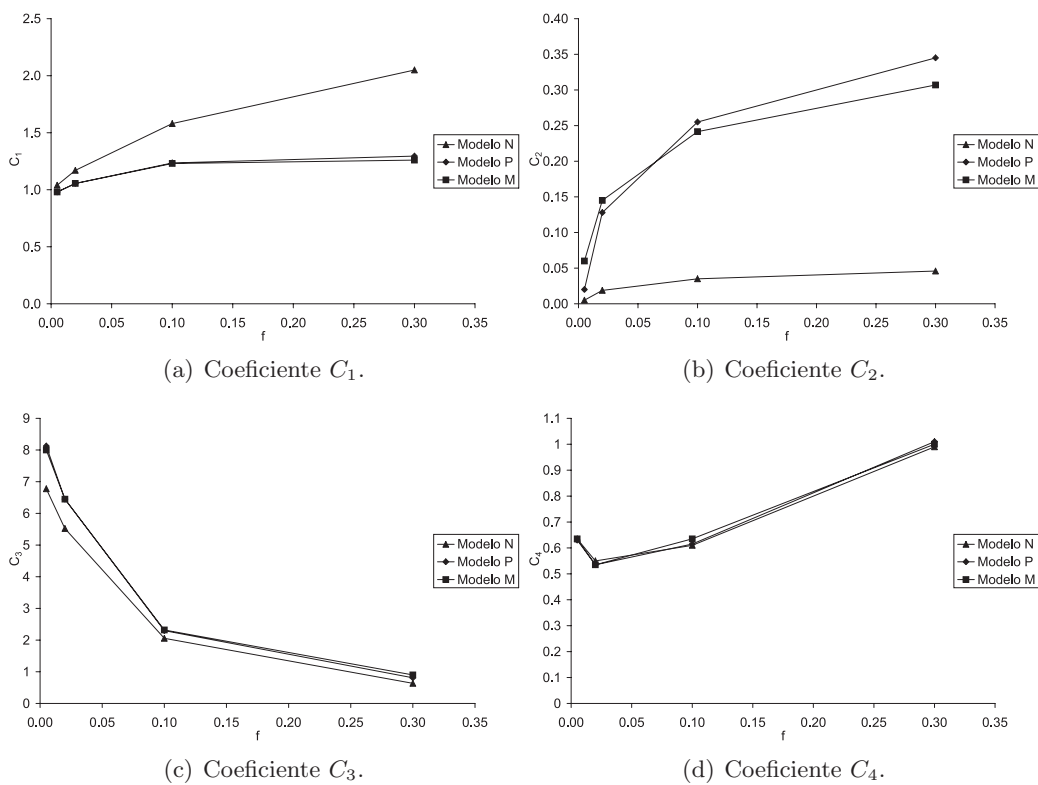


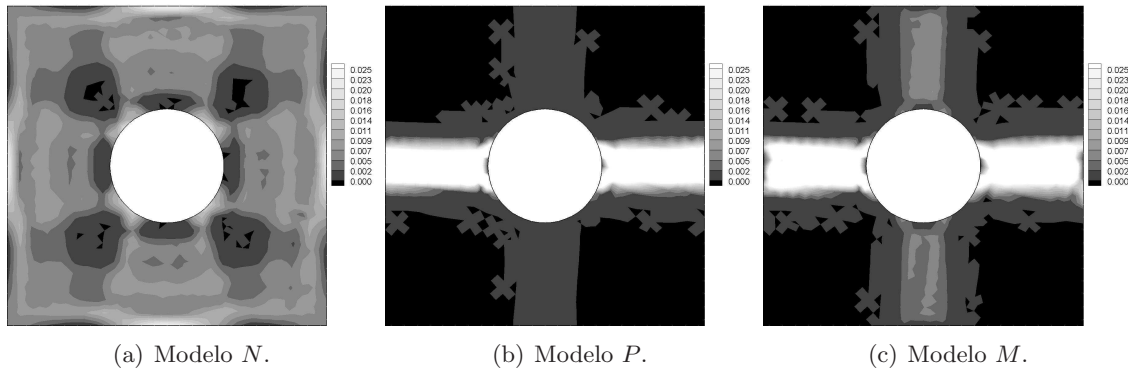
Figura 6.8: Coeficientes que realizam o ajuste das curvas em função da fração de vazio.

f	0.5%			2%		
	N	P	M	N	P	M
C_1	1.04	0.98	0.98	1.17	1.055	1.055
C_2	0.005	0.02	0.06	0.0188	0.128	0.145
C_3	6.776	8.034	8.08	5.52	6.45	6.45
C_4	0.6347	0.63	0.635	0.55	0.535	0.535

f	10%			30%		
	N	P	M	N	P	M
C_1	1.58	1.235	1.23	2.05	1.295	1.26
C_2	0.035	0.255	0.2415	0.0459	0.345	0.307
C_3	2.055	2.30	2.32	0.6344	0.81	0.90
C_4	0.61	0.615	0.645	0.99	1.01	1.00

Tabela 6.1: Valores dos coeficientes que ajustam às superfícies de fluência.

material no contínuo microscópico. Na Figura 6.9 apresentam-se os mecanismos de colapso para a microestrutura com um poro e com 10% de vazio. Esta comparação é feita para um estado de deformação macroscópico dado por ε definido com $\alpha = 0$ (ver as (6.3.4) e (6.3.5)). Aqui se mostra a deformação plástica acumulada no EVR após ter alcançado o colapso plástico. Vê-se que o mesmo varia de um modelo para outro. Em especial, observa-se uma grande diferença entre o modelo N e os modelos P e M . Na Figura 6.10 o mesmo resultado é mostrado no caso em que a deformação ε fica definida com $\alpha = 1$.

Figura 6.9: Colapso plástico para cada modelo. Deformação definida para $\alpha = 0$.

Também, a evidência numérica mostra que, para os diferentes valores de α , os mecanismos de colapso dos modelos P e M são bastante similares, o que condiz com a proximidade entre as superfícies de fluência como visto anteriormente. Conclui-se então que o modelo de flutuação periódica constitui uma boa aproximação do modelo de mínima restrição cinemática, o que representa uma boa notícia dada a maior complexidade envolvida na implementação computacional do último.

6.3.4 Sensibilidade da resposta constitutiva

Para ver como afeta a resolução aproximada do problema no EVR à resposta constitutiva que o problema na macroescala enxerga, realizou-se uma comparação refinando a malha de elementos finitos utilizada. O modelo de multiescala empregado é o de condição de flutuação nula, isto é o modelo N . O experimento numérico foi feito para a microestrutura com três poros e com 30% de vazio posto que se pressupõe que esta situação é a mais comprometida e na que maiores diferenças poderiam ocorrer. As malhas usadas nos cálculos são mostradas na Figura 6.11.

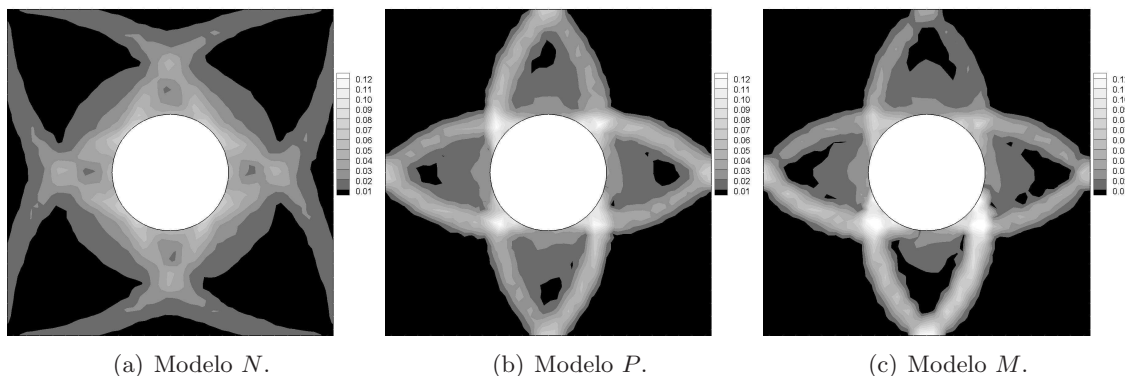


Figura 6.10: Colapso plástico para cada modelo. Deformação definida para $\alpha = 1$.

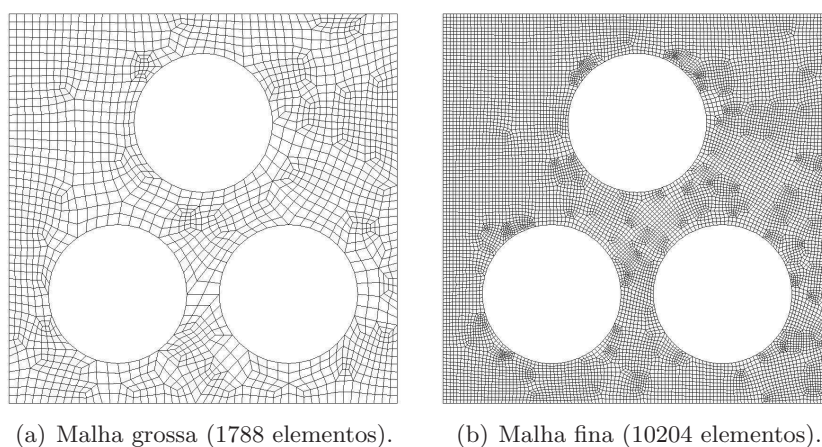


Figura 6.11: Diferentes malhas de elementos finitos para o caso de 30% de vazio e três poros.

Para ambos os casos calculou-se a superfície de colapso plástico como mostra a Figura 6.12. Observa-se que as maiores diferenças se dão para valores de α próximos de 1, que são aqueles para os quais a curva chega próximo do eixo horizontal. Como esperado, a malha mais grossa dá como resultado a resposta de um material mais rígido. Logo, ao fazer uso destes modelos, resulta importante levar em conta que, apesar desta ser uma diferença de caráter meramente numérico, entra claramente em jogo no problema da macroescala devido a que os erros cometidos na microescala propagam-se, através da homogeneização, à macroescala afetando os resultados.

6.4 Resultados numéricos: O modelo de Zulliger

Nesta seção apresenta-se um exemplo da aplicação dos modelos de multiescala desenvolvidos na Seção 5.2 na modelagem do sistema cardiovascular. A seção está focada no cálculo da resposta constitutiva no nível da macroescala empregando um modelo microestrutural do tecido arterial. O exemplo segue as características dos trabalhos [144, 167] a fim de realizar uma comparação qualitativa com os resultados obtidos nesses trabalhos.

6.4.1 Descrição do problema de interesse

Devido às características dos materiais e das cargas atuantes, o problema da modelagem do tecido da parede arterial envolve grandes deformações. Apesar de ter desenvolvido toda a teoria das técnicas de multiescala, no Capítulo 5, para deformações infinitesimais, a

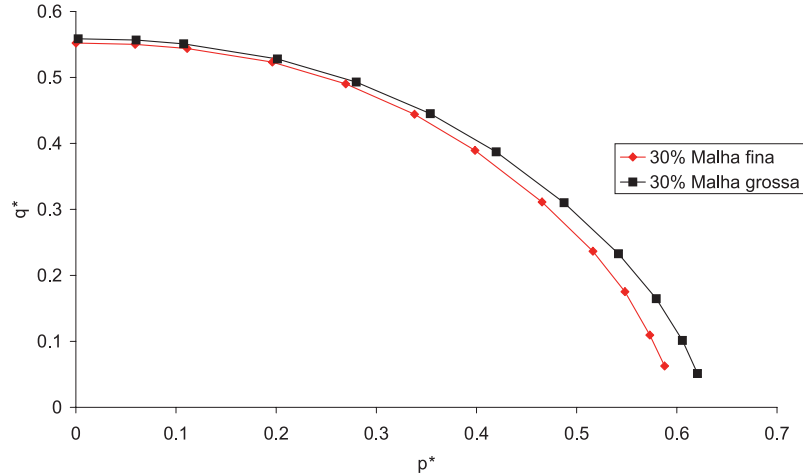


Figura 6.12: Diferenças na superfície de colapso do modelo N para as duas malhas consideradas.

mesma é extensível a grandes deformações (ver [120]). O primeiro comentário que se deve fazer é que em grandes deformações o modelo de mínima restrição cinemática não satisfaz a invariância frente à mudança na configuração usada para descrever os fenômenos. Em outras palavras, as tensões homogêneas calculadas empregando uma descrição material diferem daquelas obtidas por meio de uma formulação espacial. Desta forma, na comparação feita a seguir usa-se o modelo de flutuação periódica (denominado modelo P anteriormente). Somente emprega-se este modelo devido a que, para a faixa de deformações que será empregada, tanto o modelo de flutuação nula quanto o de flutuação periódica fornecem idênticos resultados. A seguir, realiza-se uma breve exposição dos conceitos de multiescala neste caso mais geral de grandes deformações. As quantidades homogêneas são definidas de forma usual como

$$\mathbf{F} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{F}_\mu \, dy, \quad (6.4.1)$$

para a deformação homogênea e

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \, dy, \quad (6.4.2)$$

para a forma homogênea do tensor de Piola–Kirchhoff de primeira espécie. Aqui V_μ é o volume na configuração de referência, e Ω_μ é o domínio de referência. Lembre-se que esta última expressão pode-se escrever, a partir da (5.1.22), como segue

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Gamma_\mu} \mathbf{t}^e \otimes \mathbf{y} \, d\Gamma. \quad (6.4.3)$$

Finalmente, o princípio de Hill–Mandel neste caso estabelece que

$$\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\mu \, dy \quad \forall \dot{\mathbf{F}}_\mu \text{ admissível.} \quad (6.4.4)$$

Como feito ao longo da Seção 6.3, aqui assume-se que os elementos constituintes da microcélula respondem a um modelo constitutivo fenomenológico, isto é

$$\mathbf{P}_\mu = \frac{\partial \Psi_\mu}{\partial \mathbf{F}_\mu} = \mathcal{F}_\mu(\mathbf{F}_\mu) = \mathcal{F}_\mu(\mathbf{F} + \mathbf{I} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}_\mu), \quad (6.4.5)$$

onde foi empregada a decomposição $\mathbf{F}_\mu = \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{F}}_\mu = \mathbf{F} + \mathbf{I} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}_\mu$. O problema consiste, restringindo o enunciado ao modelo de flutuação periódica que será usado aqui, no seguinte:

Problema 6.4. *Dada uma deformação \mathbf{F} , encontre a flutuação do campo de deslocamentos $\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathcal{V}_\mu^P$ tal que*

$$\int_{\Omega_\mu} \mathcal{F}_\mu(\mathbf{F} + \mathbf{I} + \nabla \tilde{\mathbf{u}}_\mu) \cdot \nabla \boldsymbol{\eta} \, dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V}_\mu^P, \quad (6.4.6)$$

onde \mathcal{V}_μ^P denota o espaço correspondente ao modelo de flutuação periódica e ∇ é o gradiente com relação às coordenadas materiais. Logo depois calcule a tensão homogeneizada \mathbf{P} usando a (6.4.3).

O problema da modelagem da parede arterial, como explicado acima, difere notoriamente da situação tratada na Seção 6.3. Em primeiro lugar desconsidera-se qualquer tipo de comportamento dissipativo, sobretudo ao não levar em conta a fricção entre os materiais que compõem a estrutura. Embora o problema seja realmente tridimensional, o tecido arterial é modelado em estado plano de tensão seguindo as justificativas expostas em [167]. Assim sendo, uma microcélula é um elemento representativo da parede arterial cuja forma mostra-se na Figura 6.13. Emprega-se uma matriz hiperelástica para modelar o comportamento da elastina, enquanto que se considera a presença de colágeno através da inclusão de barras unidas a determinados pontos da estrutura que representam a elastina. Logo, não são incluídos nesta modelagem nem o músculo liso nem o fenômeno de viscoelasticidade. Além disso, o material é considerado incompressível.

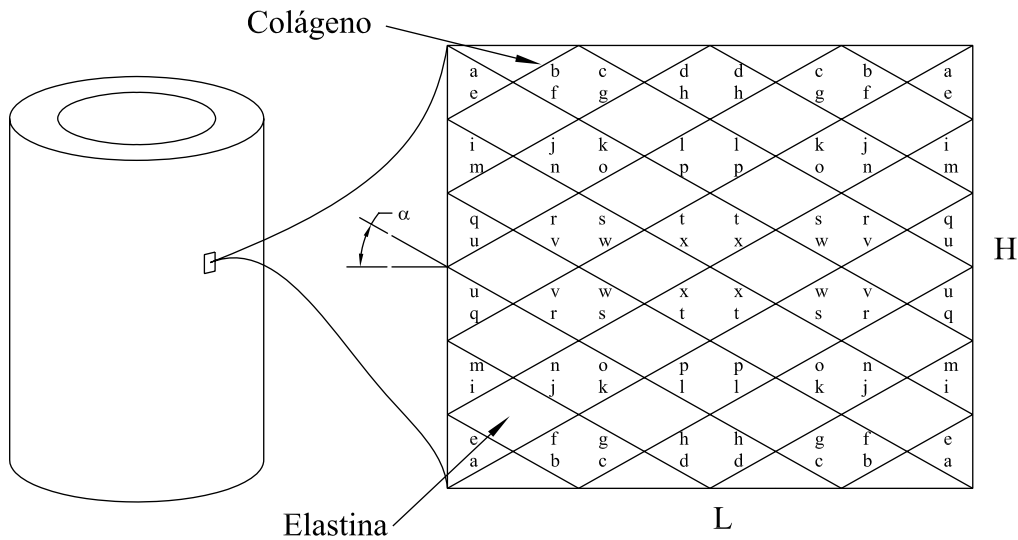


Figura 6.13: Esquema para a modelagem multiescala da parede arterial.

Para a representação da matriz hiperelástica assume-se uma função de energia de deformação Ψ_{elas} dada por (ver [167])

$$\Psi_{elas} = c_{elas}(I_1 - 3)^{3/2}, \quad (6.4.7)$$

onde c_{elas} caracteriza a propriedade material da elastina, e $I_1 = \text{tr } \mathbf{C}$ é o primeiro invariante do tensor de Cauchy–Green \mathbf{C} . O colágeno é representado por meio de barras entrelaçadas em forma romboidal, cuja disposição é determinada através de um dado ângulo α , como mostrado na Figura 6.13. Estas barras também sofrem grandes deformações, e a resposta

do material deriva-se da seguinte função de energia de deformação (ver [167])

$$\Psi_{col} = \begin{cases} 0 & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_{ativ}, \\ c_{col}(\varepsilon - \varepsilon_{ativ} - \log(\varepsilon - \varepsilon_{ativ} + 1)) & \text{se } \varepsilon > \varepsilon_{ativ}, \end{cases} \quad (6.4.8)$$

onde ε_{ativ} é a deformação de ativação das fibras de colágeno e $\varepsilon = \lambda - 1$, sendo λ o alongamento axial das fibras. A determinação de ε_{ativ} para cada fibra é tal que a distribuição do valor dentre aqueles possíveis é consistente com [167]. Além disso, c_{col} é o módulo de rigidez do colágeno. De acordo com a Figura 6.13, o estado plano de tensão ocorre no plano dado pelo eixo circunferencial e pelo eixo axial. Nesta seção estudam-se três casos cuja diferença é na distribuição espacial do valor de ε_{ativ} . Todos os casos possuem o mesmo valor médio, que é $\bar{\varepsilon}_{ativ} = 0.6604$. Na Tabela 6.2 apresentam-se os casos *A* e *B* como duas possíveis distribuições do parâmetro ε_{ativ} , e finalmente no caso *C* assume-se que todas as fibras são idênticas. Com respeito ao valor de c_{col} todas as fibras são iguais.

Código da fibra (ver Figura 6.13)	Valor de ε_{ativ}		
	Caso A	Caso B	Caso C
a	0.67	0.57	0.6604
b	0.64	0.67	0.6604
c	0.7	0.64	0.6604
d	0.57	0.7	0.6604
e	0.62	0.65	0.6604
f	0.68	0.62	0.6604
g	0.61	0.68	0.6604
h	0.65	0.61	0.6604
i	0.7	0.55	0.6604
j	0.68	0.7	0.6604
k	0.65	0.68	0.6604
l	0.55	0.65	0.6604
m	0.66	0.72	0.6604
n	0.67	0.66	0.6604
o	0.73	0.67	0.6604
p	0.72	0.73	0.6604
q	0.66	0.75	0.6604
r	0.6	0.66	0.6604
s	0.65	0.6	0.6604
t	0.75	0.65	0.6604
u	0.66	0.8	0.6604
v	0.64	0.66	0.6604
w	0.59	0.64	0.6604
x	0.8	0.59	0.6604

Tabela 6.2: Valores de ε_{ativ} para as fibras de colágeno nos diferentes casos.

Todos os valores das quantidades físicas que caracterizam à microestrutura foram escolhidos dentro da faixa de valores fisiológicos, similares aos dados em [144, 167]. Logo

$$\begin{aligned} c_{elas} &= 24.6458 \text{ kPa} & c_{col} &= 101800 \text{ kPa}, \\ L &= 3559.78 & H &= 3000, \\ h &= 500 & \alpha &= 29.32^\circ, \\ A_o &= 72308.5, \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

onde L , H e α correspondem às medidas da Figura 6.13, h é a espessura da microcélula e A_o é a área das barras de colágeno. Com estes valores assegura-se que a relação entre o

volume do colágeno e o da elastina é

$$\frac{V_{\mu}^{elas}}{V_{\mu}^{col}} = \frac{0.306}{0.203} = 1.50739, \quad (6.4.10)$$

como em [167], sendo que

$$V_{\mu} = V_{\mu}^{elas} + V_{\mu}^{col}. \quad (6.4.11)$$

Por último, veja que o Problema 6.4 provido com as leis constitutivas derivadas de (6.4.7) e (6.4.8) é não linear tanto geométrica como constitutivamente. A linearização é realizada por meio do método de Newton–Raphson.

Vale a pena mencionar que a caracterização constitutiva de um tecido biológico escapa facilmente à capacidade de representação dos modelos fenomenológicos. Para levar em conta a ação do colágeno, na maioria dos trabalhos que empregam esta abordagem clássica, colocam-se funções de energia de deformação constituídas por partes isotrópicas e anisotrópicas [69, 167], ou seja

$$\Psi = \Psi_{iso} + \Psi_{aniso}. \quad (6.4.12)$$

A anisotropia é incorporada no nível da lei constitutiva macroscópica o que, de alguma forma, deve representar a existência do colágeno que propicia direções bem determinadas para o comportamento do material. De forma completamente diferente, embora com o mesmo objetivo, ao empregar técnicas de multiescala a anisotropia decorre diretamente da própria estrutura escolhida para o EVR, sem qualquer consideração sobre anisotropia adicional na microestrutura. Ou seja, o fenômeno de anisotropia macroscópico é resultado do arranjo geométrico escolhido e das propriedades do material atribuídas à microestrutura. Surgem, portanto, muitas possibilidades como, por exemplo, o estudo sobre como varia o comportamento quando se altera o arranjo das fibras de colágeno, chegando ao ponto de poder avaliar a situação de arranjos com características quase arbitrárias, ou inclusive ver como muda a resposta quando as fibras variam sua deformação de ativação e quando se consideram diferentes valores de c_{col} . Estes últimos casos não poderiam ser abordados tão facilmente com as técnicas clássicas.

6.4.2 Recuperação da resposta constitutiva

Como dito, para obter a resposta constitutiva homogeneizada precisa-se resolver o Problema 6.4 fornecendo a deformação \mathbf{F} que atua como o dado que provém da macroescala. Dada a geometria da Figura 6.13, resulta mais conveniente trabalhar em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , logo, em função destas coordenadas, o estado plano de tensão ocorre no plano cartesiano determinado pelos vetores unitários \mathbf{e}_{θ} e \mathbf{e}_z . A fim de alcançar a faixa de deformações factíveis de serem sofridas pela artéria no processo de carga que será usado na próxima seção, considera-se que o tensor de Cauchy–Green \mathbf{C} , dado nas coordenadas (r, θ, z) e dependente de um parâmetro real k , é dado por

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} (2.0164(0.6 + 0.05k))^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 + 0.05k & 0 \\ 0 & 0 & 2.0164 \end{pmatrix}, \quad (6.4.13)$$

onde o valor de k varia no intervalo $[0, 52]$. Dado o estado plano de tensão, veja que somente as componentes (θ, z) são requeridas. Logo, o tensor que é fornecido como dado ao problema é o seguinte

$$\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{0.6 + 0.05k} & 0 \\ 0 & 1.42 \end{pmatrix}, \quad (6.4.14)$$

onde o índice 2 faz referência ao tensor reduzido a duas dimensões.

Devido à natureza diferente dos modelos matemáticos dos elementos que compõem a célula sob estudo, para calcular a tensão homogeneizada é preciso empregar uma versão levemente generalizada da expressão (6.4.3). Tal generalização é

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V_\mu} \left[\int_{\Gamma_\mu^{elas}} \mathbf{t}_{elas}^e \otimes \mathbf{y} \, d\Gamma + A_o \sum_{i \in \mathcal{I}_{col}} \mathbf{t}_{col}^e \otimes \mathbf{y} \right], \quad (6.4.15)$$

onde \mathcal{I}_{col} é o conjunto de barras que se encontram sobre o contorno da célula. Esta expressão leva em conta, de forma separada, as trações \mathbf{t}_{elas}^e e \mathbf{t}_{col}^e que são produzidas na matriz elástica e nas fibras de colágeno, respectivamente. Na expressão acima, Γ_μ^{elas} denota somente o contorno da célula que corresponde à elastina.

Assim sendo, a presente análise também pode ser enxergada como uma análise de sensibilidade à distribuição do valor de ε_{ativ} das fibras de colágeno no material. Por um lado, a Figura 6.14 mostra a relação entre a tensão circunferencial $P_{\theta\theta}$ e a correspondente deformação circunferencial $C_{\theta\theta}$ para as três distribuições de colágeno estudadas. Por outro lado, a Figura 6.15 mostra a relação entre a tensão axial e a deformação na direção circunferencial, novamente para os três casos sob análise. Vê-se que o fenômeno de aumento da tensão para os valores mais elevados de deformação ocorre efetivamente devido à ativação das fibras de colágeno. Observa-se também que a distribuição do colágeno afeta a relação constitutiva homogeneizada. Em particular, no caso *C* a ativação das fibras não ocorre gradativamente, mas de uma só vez ao superar o valor de deformação de ativação.

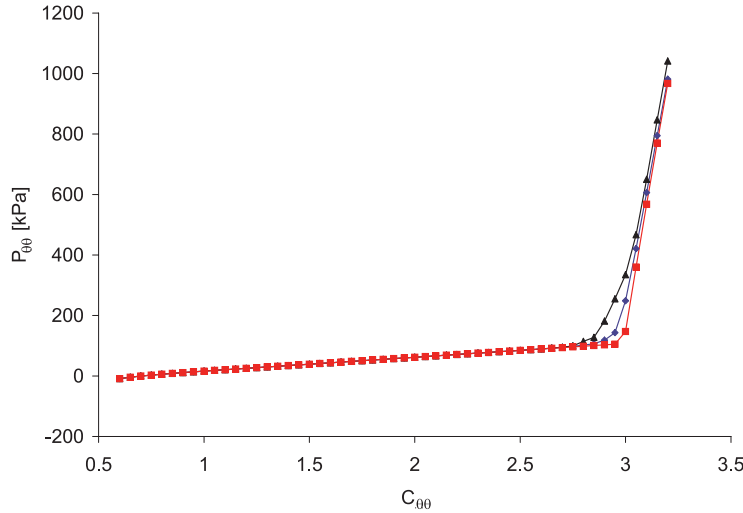


Figura 6.14: Relação entre tensão circunferencial e deformação circunferencial.

Com este exemplo, a modelagem de multiescala prova mais uma vez ser capaz de capturar um maior detalhe do problema constitutivo. Com efeito, a diferença observada entre os casos *A* e *B* é devido exclusivamente à alteração da microestrutura, em particular do arranjo das fibras de colágeno. Apesar dos dois arranjos possuírem uma correspondência um a um com respeito aos valores de ε_{ativ} (somente houve uma recolocação das fibras na matriz), a estrutura do caso *B* resulta ser mais rígida que a do caso *A*.

Na seção seguinte utilizam-se estes resultados para analisar a resposta macroscópica de um tubo cilíndrico sujeito a uma pressão interna e a uma tração axial.

6.4.3 Aplicação a um problema simplificado

A seguir apresenta-se uma aplicação dos resultados obtidos na seção anterior. Para isto coloca-se um problema simplificado que visa simular o inflado e o estiramento axial

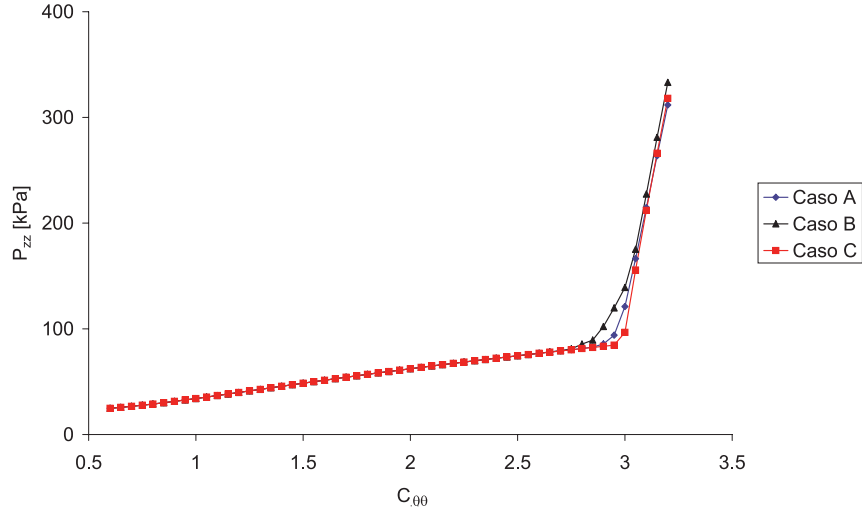


Figura 6.15: Relação entre tensão axial e deformação circunferencial.

de uma artéria com um comportamento dado pelo material analisado na seção anterior. Isto é feito para um tubo cilíndrico sob a hipótese de simetria, resultando, portanto, um problema unidimensional. O estado de cargas aqui considerado pode ser abordado através da hipótese de estado plano de tensão empregada na seção anterior, com a conseqüente aplicabilidade dos resultados obtidos.

Sabe-se que as artérias guardam um estado residual de tensão, o qual pode ser aliviado após realizar um corte longitudinal, produzindo a abertura do segmento [167]. Vendo a geometria como um cilindro, ao realizar o corte este adquire uma abertura que é caracterizada por um ângulo Θ_o (denominado ângulo de abertura) como mostra a Figura 6.16. Também na mencionada figura vê-se que existem dois conjuntos de coordenadas, as de referência (R, Θ, Z) no qual o estado da artéria é sem tensão, e as reais (r, θ, z) , no qual aparece o estado de deformação. Assim, a artéria possui raios interno R_i e externo R_e na configuração da esquerda na Figura 6.16, e raios r_i e r_e na configuração da direita mesma figura.

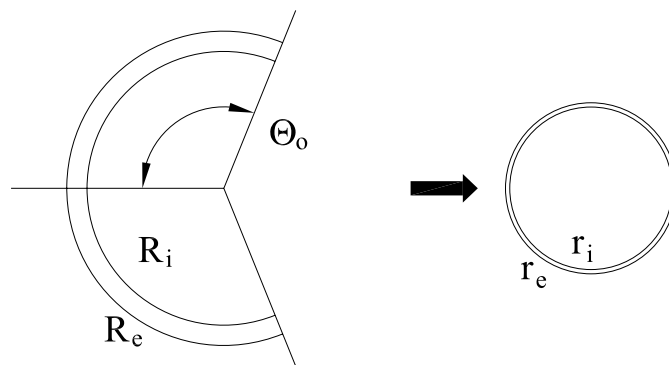


Figura 6.16: Esquema geométrico do problema macroscópico.

O mapeamento entre ambos os sistemas de coordenadas é o seguinte

$$r = r(R) \quad \theta = \frac{\pi}{\Theta_o} \Theta \quad z = \lambda Z, \quad (6.4.16)$$

onde λ é o alongamento na direção z . Logo, sabendo que

$$\lambda_r = \frac{\partial r}{\partial R} \quad \lambda_\theta = \frac{r}{R} \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} \quad \lambda_z = \frac{\partial z}{\partial Z}, \quad (6.4.17)$$

e considerando a incompressibilidade do material que estabelece que $\lambda_r \lambda_\theta \lambda_z = 1$, tem-se

$$\lambda_r = \frac{\Theta_o R}{\pi \lambda r} \quad \lambda_\theta = \frac{\pi r}{\Theta_o R} \quad \lambda_z = \lambda. \quad (6.4.18)$$

Logo, combinando todas estas expressões e integrando a forma resultante de $\frac{\partial r}{\partial R}$ obtém-se a relação $r = r(R)$, ou equivalentemente a inversa $R = R(r)$

$$R = \sqrt{R_e^2 - \frac{\pi \lambda}{\Theta_o} (r_e^2 - r^2)}. \quad (6.4.19)$$

Desta expressão pode-se obter a relação entre r_i e r_e que resulta

$$r_i = \sqrt{r_e^2 + \frac{\Theta_o}{\pi \lambda} (R_i^2 - R_e^2)}. \quad (6.4.20)$$

De acordo com as considerações feitas acima, a equação que governa o equilíbrio da parede arterial é (ver [69, 167])

$$p_i = \int_{r_i}^{r_e} \frac{1}{r} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) dr, \quad (6.4.21)$$

onde p_i é a pressão interna. Aqui procura-se estabelecer qual a relação entre p_i e o raio externo r_e . Veja que devido ao estado plano de tensão a única contribuição na expressão (6.4.21) vem dada pela componente desviadora da tensão $\sigma_{\theta\theta}$, denominada $\sigma_{\theta\theta}^d$ (note que as componentes hidrostáticas se anulam). Também, a componente desviadora de $\sigma_{\theta\theta}$ é

$$\sigma_{\theta\theta}^d = \lambda_\theta P_{\theta\theta}, \quad (6.4.22)$$

onde $P_{\theta\theta}$ é a componente principal do tensor de Piola–Kirchhoff de primeira espécie na direção circunferencial. Aqui introduz-se o resultado da seção anterior, onde foi calculado $P_{\theta\theta}$ para uma faixa de valores da deformação $C_{\theta\theta}$. Para obter a pressão interna para um dado raio externo r_e é preciso resolver a integral (6.4.21) após substituir nela as (6.4.18), (6.4.19), (6.4.20) e (6.4.22), onde também deve ser observado que

$$P_{\theta\theta} = P_{\theta\theta}(C_{\theta\theta}) = P_{\theta\theta}(\lambda_\theta^2) = P_{\theta\theta}\left(\left(\frac{\pi r}{\Theta_o R}\right)^2\right). \quad (6.4.23)$$

Os valores escolhidos para este caso são $R_i = 0.96$ mm, $R_e = 1.102$ mm, $\Theta_o = 112^\circ$ e $\lambda = 1.42$. Para atingir toda a faixa de valores de $C_{\theta\theta}$ testados na seção anterior na obtenção de $P_{\theta\theta}$, propõe-se que o raio externo (a variável independente) esteja no intervalo $r_e \in [0.625$ mm, 1.125 mm], desta forma resulta $C_{\theta\theta} \in [0.735, 3.1875]$.

Na Figura 6.17 mostra-se a relação entre a pressão interna p_i e o raio externo r_e , ou seja, cada ponto da curva é uma situação de equilíbrio. Também inclui-se um detalhe com os eixos do gráfico invertidos para mostrar uma versão da figura também muito divulgada deste tipo de comportamento do tecido arterial. O resultado é apresentado para as três distribuições de colágeno tratadas na seção anterior. Como esperado, dado que cada distribuição dá como resultado um comportamento diferente, ao se ativarem as fibras de colágeno surge uma discrepância entre os três modelos. Como comentário geral, vê-se que a típica curva em forma de S invertida é recuperada com sucesso pelo modelo constitutivo de multiescala, manifestando o aumento da pressão ao alcançar um valor do raio tal que a ativação do colágeno faz-se presente. Deve-se dizer que o valor de pressão a partir do qual

ocorre o aumento da mesma de forma considerável, aproximadamente 9 kPa, coincide com os dados obtidos experimental e numericamente em [144, 167].

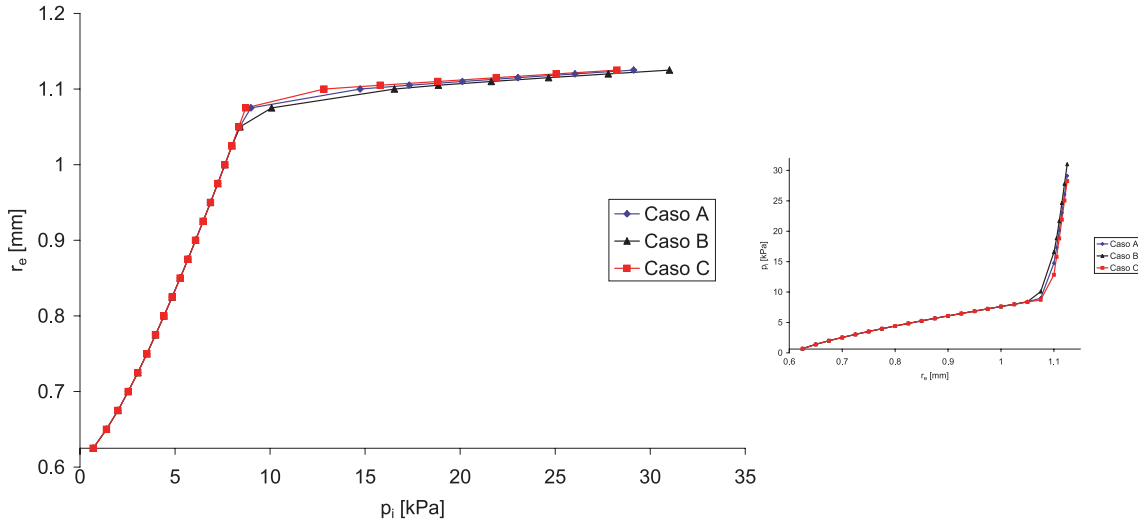


Figura 6.17: Pressão interna em função do raio externo da artéria.

Desde já, todos os valores das propriedades físicas usados neste exemplo são discutíveis, e em geral a literatura está de acordo na elevada incerteza na determinação destes parâmetros, além da grande variabilidade encontrada de uma amostra a outra. Entretanto, pode-se concluir que esta classe de modelos de multiescala provê uma ferramenta muito potente, devido ao grande controle que se tem sobre a microestrutura, a fim de ajustar as respostas constitutivas obtidas numericamente com medições realizadas experimentalmente.

6.5 Comentários finais

Neste capítulo foi frisado como, através de técnicas de multiescala, a microestrutura afeta de forma direta aos fenômenos da escala do problema real. Além do mais, a formulação do problema está atrelada à escolha do modelo de multiescala a ser utilizado, ou seja, ao espaço \mathcal{V}_μ que será escolhido. Observou-se que diferentes escolhas levam a diferenças apreciáveis na macroescala, salientando a necessidade de hipóteses firmes que justifiquem a seleção de um ou outro modelo.

Das evidências numéricas, pôde ser confirmado que o modelo de flutuação nula (modelo N) constitui uma cota superior para a resposta constitutiva homogeneizada, ao mesmo tempo que o modelo de mínima restrição cinemática (modelo M) é a cota inferior. Além disso, viu-se que o modelo de flutuação periódica (modelo P) está muito próximo do modelo M . Isto levanta a questão da conveniência entre um modelo e outro, sobretudo levando em conta a maior complexidade na implementação do modelo M . Por outro lado, de acordo com o que foi feito aqui, conclui-se que é possível propor modelos constitutivos macroscópicos e calibrá-los em função do comportamento microestrutural, potenciando a modelagem constitutiva fenomenológica.

Os problemas para os quais se apresentaram resultados numéricos são relativamente simples. O primeiro caso não envolve grandes deformações, e nem sequer considera uma microestrutura muito complexa enquanto que no segundo, apesar de considerar grandes deformações, não leva em conta fenômenos dissipativos. Mesmo assim, os resultados numéricos permitem ver quão importante é caracterizar de forma adequada a resposta constitutiva de um material, ao mesmo tempo que mostram que a modelagem por técnicas

de multiescala constitui uma poderosa ferramenta a fim de abordar consistente e sistematicamente a modelagem constitutiva de materiais de complexa resposta. Isto foi comprovado com evidências numéricas (i) na modelagem constitutiva do colapso plástico de um material poroso e (ii) na modelagem constitutiva do tecido da parede arterial. Em particular com relação ao segundo exemplo, diversas pesquisas estão sendo desenvolvidas a fim de caracterizar os materiais de índole biológica. O maior interesse é posto na calibração de modelos macroscópicos a partir da resolução de um problema na microescala continuando o caminho delineado na última parte deste capítulo (ver também [144] e as referências ali citadas). Os resultados aqui apresentados são muito promissores e estabelecem um rumo claro a fim de direcionar a pesquisa das técnicas de multiescala às aplicações na modelagem do sistema cardiovascular.

Contribuições do capítulo

A implementação computacional dos conceitos teóricos do Capítulo 5 desenvolvida na Seção 6.2 constitui uma parte da contribuição deste capítulo, sobre todo a do modelo de mínima restrição cinemática que fora apresentada na Seção 6.2.3. Lembre que este modelo condiz com um modelo de tração uniforme na fronteira do EVR, portanto na literatura a abordagem empregada é a partir do fornecimento de um valor de tração constante no contorno. O tratamento realizado aqui difere da literatura existente no nível do problema aproximado pois o processo de carga do EVR é feito controlando, em todos os modelos, a deformação em lugar da tensão. De fato, com esta abordagem é possível posteriormente efetuar as comparações entre as respostas constitutivas dos diferentes modelos como feito na Seção 6.3, cujo material é a outra parte da contribuição deste capítulo.

A implementação computacional desenvolvida na Seção 6.2 e os resultados numéricos apresentados na Seção 6.3 formam parte do núcleo da publicação [51] assim como de um trabalho resumido apresentado em congresso, os quais são:

- S.M. Giusti, P.J. Blanco, E.A. Souza Neto e R.A. Feijóo, *An assessment of the Gurson yield criterion by a computational multi-scale approach*, Aceito para ser publicado em Engng. Comput., 2008.
- S.M. Giusti, P.J. Blanco, E.A. Souza Neto e R.A. Feijóo, *Multiscale modelling of ductile porous metals: determination of macroscopic yield surfaces*, Anais do ENIEF 2007. Córdoba, Argentina, 2007.

Conclusões

Neste capítulo conclusivo enumeram-se os tópicos específicos que devem ser considerados como os principais resultados obtidos no decorrer desta tese. A apresentação e discussão vai dos resultados e conceitos gerais aos particulares, expondo as implicações teóricas e práticas dentro de um cenário de pesquisa futuro.

Discussão e comentários gerais

Nesta tese têm sido desenvolvidos princípios variacionais correspondentes a modelos matemáticos aplicáveis a diversos problemas no contexto da modelagem do sistema cardiovascular humano. De forma geral pode-se dizer que o marco variacional tem-se apresentado como uma ferramenta poderosa e consistente para abordar novas problemáticas. O procedimento claro e sistemático da construção das novas formulações variacionais que foram propostas neste trabalho tem permitido entender de uma forma precisa e acabada todos os conceitos por trás dos respectivos modelos matemáticos, o que é imperativo na hora de atacar novas questões. Além desta grande vantagem da metodologia variacional, a mesma possui, em forma de corolário, a vantagem de fornecer um caminho direto para realizar a aproximação numérica do modelo construído. Em outras palavras, após colocar o problema mediante um princípio variacional determinado fica estabelecido de forma quase direta um caminho a ser percorrido para resolvê-lo de forma aproximada. Isto tem ficado de manifesto ao longo das diferentes aplicações apresentadas neste trabalho.

Em resumo, nesta tese tem-se fornecido novos princípios variacionais para lidar com questões que não tinham sido ainda colocadas na literatura dentro de um marco variacional claro. Isto foi feito nos seguintes contextos: (i) acoplamento de modelos cinematicamente incompatíveis (ou modelos de diferente dimensão), (ii) modelagem do problema de interação fluido-estrutura via métodos baseados na imersão de domínios e (iii) modelagem constitutiva via técnicas de multiescala. A seguir desenvolve-se cada um destes tópicos de forma mais detalhada.

Discussão e comentários particulares

Ao longo das três partes componentes desta tese foram abordados diferentes problemas cujo nexos comum é a modelagem do sistema cardiovascular humano. Os principais aspectos que devem ficar salientados como os mais relevantes dentro de cada seção são os seguintes.

Sobre os resultados da Parte I

Na primeira parte da tese foram dados os fundamentos teóricos de caráter geral para formular o problema de acoplamento dos denominados modelos cinematicamente incompatíveis. Como conclusão principal deve ser sublinhada a colocação de forma sistemática de conceitos que permitem tratar com relativa facilidade e clareza o acoplamento de modelos

de diferente dimensão. A vantagem na nova forma de entender este problema reside em enxergar o acoplamento entre os modelos como um problema no qual há duas, ou mais, cinemáticas presentes que *a priori* não são compatíveis. Logo, tais incompatibilidades são contornadas através dos aqui denominados princípios variacionais estendidos. Estes novos princípios variacionais regem o conceito de *equilíbrio* nestas novas situações, e foram desenvolvidos estabelecendo passo por passo e de forma explícita todas as hipóteses que entram em jogo na construção dos modelos. Esta maneira de formular o problema tem apresentado duas grandes vantagens: (i) o entendimento do modelo matemático final é completo e (ii) os fundamentos propostos mediante os princípios variacionais estendidos são de caráter geral e portanto aplicáveis a novas situações.

Com respeito às aplicações, viu-se que tanto na mecânica dos sólidos como na mecânica dos fluidos os resultados obtidos são muito promissores. Em particular, em função das aplicações na modelagem do sistema cardiovascular vê-se que o emprego de modelos acoplados permite atacar desafios novos e inclusive problemas a grande escala em hemodinâmica. Em certas situações a simulação via modelos acoplados é a única forma de dar uma resposta baseando-se em um modelo numérico (lembre do caso da sensibilidade ao haver uma estenose ou um aneurisma) sem ter que efetuar a modelagem tridimensional completa. Logo, o modelo acoplado do sistema cardiovascular desenvolvido e apresentado aqui constitui um avanço na direção de conseguir realizar modelagem e simulação em hemodinâmica levando em conta as complexas interações existentes no sistema arterial.

Os objetivos alcançados nesta primeira parte são enumerados a seguir:

- i. fundamentação dos conceitos teóricos por trás de problemas com incompatibilidades cinemáticas;
- ii. colocação variacional do problema de acoplamento de modelos de diferente dimensão em transferência de calor;
- iii. colocação variacional e aproximação numérica do problema de acoplamento de modelos de diferente dimensão na mecânica dos sólidos;
- iv. colocação variacional e aproximação numérica do problema de acoplamento de modelos de diferente dimensão na mecânica dos fluidos;
- v. construção de um modelo do sistema cardiovascular acoplado 3D–1D para modelagem de problemas em hemodinâmica.

Sobre os resultados da Parte II

Nesta parte da tese foi atacado o problema de interação fluido–estrutura empregando métodos que fazem uso de domínios imersos. Nesta direção foi fornecida uma nova forma de enxergar o problema, conseguindo ao mesmo tempo desenvolver generalizações de diversas metodologias encontradas na literatura. Por um lado, foi apresentado um princípio variacional, denominado Método de Domínios Imersos, que é a generalização dos métodos de elementos finitos imersos e do contínuo imerso. Este novo modelo proposto permite realizar a modelagem de fluidos e sólidos que podem possuir características de compressibilidade/incompressibilidade arbitrárias entre si, aspecto que não tinha sido tratado na literatura. Além disso, foi apresentada a linearização do problema mediante a obtenção do operador tangente consistente, questão que também é pouco freqüente na literatura relacionada. Por outro lado, foi desenvolvido um princípio variacional, chamado Método de Cascas Imersas, que constitui uma generalização dos métodos de contornos imersos encontrados habitualmente na literatura. Esta generalização apresenta uma nova situação na qual ocorre uma descontinuidade no campo de velocidade do fluido e que permite extrair conclusões acerca da natureza dos fenômenos físicos presentes dentro da formulação. Além

disso, o caminho percorrido tem permitido clarificar diversos pontos que na literatura são considerados muito superficialmente, entre eles: (i) quais as hipóteses cinemáticas usadas na construção dos modelos, (ii) como se conformam os esforços generalizados que dão lugar à resposta constitutiva da estrutura, e (iii) qual a justificativa para considerar e/ou desconsiderar os fenômenos de flexão, e em caso de considerá-los quais as suas conseqüências. A abrangência deste modelo é maior devido à presença dos fenômenos de flexão no balanço de potências, o que permite pensar em novas aplicações.

Com referência aos resultados numéricos apresentados viu-se que o aqui denominado Método de Domínios Imersos constitui uma ferramenta atraente a fim de prover uma alternativa às metodologias clássicas de modelagem do problema de interação fluido–estrutura. Isto foi comprovado através de diversos exemplos que representam mecanismos físicos de complexidade relativamente elevada.

Os objetivos alcançados nesta segunda parte são enumerados a seguir:

- i. colocação variacional consistente do problema de interação fluido–sólido, para fluidos e sólidos compressíveis/incompressíveis, empregando conceitos de imersão de domínios;
- ii. fundamentação dos aspectos envolvidos na conformação da força de volume que surge nos métodos que empregam conceitos de imersão de domínios;
- iii. obtenção do operador tangente resultante na versão linearizada do Método de Domínios Imersos;
- iv. colocação variacional consistente e aproximação numérica do problema de interação fluido–sólido rígido empregando conceitos de imersão de domínios;
- v. colocação variacional consistente do problema de interação fluido–casca, empregando conceitos de imersão de superfícies;
- vi. fundamentação dos aspectos envolvidos na conformação da força de volume que surge nos métodos de contornos imersos.

Sobre os resultados da Parte III

Na última parte da tese foi tratado o problema de como modelar uma resposta constitutiva utilizando técnicas de multiescala. Para isto empregaram-se idéias já desenvolvidas na literatura que fazem uso de modelos cinemáticos para a colocação dos princípios variacionais que governam o equilíbrio na microescala. Nestes modelos utiliza-se a deformação como variável principal que comanda os fenômenos no problema. Percorrendo um caminho análogo foi possível realizar uma extensão da teoria colocando os princípios variacionais empregando conceitos de dualidade clássicos da mecânica. Nestes modelos os fenômenos são comandados pela variável tensão, estabelecendo uma alternativa para entender o problema de acoplamento entre macroescala e microescala. Em segundo lugar, e voltando aos modelos cinemáticos, realizou-se a implementação computacional de cada um deles e foi possível analisar a sensibilidade, de forma quantitativa e qualitativa, da resposta constitutiva de uma determinada microestrutura às hipóteses cinemáticas que definem cada um deles.

Os objetivos alcançados nesta terceira parte são enumerados a seguir:

- i. colocação variacional consistente do problema de modelagem constitutiva de multiescala empregando conceitos de dualidade em mecânica;
- ii. implementação computacional dos modelos de multiescala cinemáticos;
- iii. recuperação da resposta constitutiva macroscópica para materiais porosos com comportamento elasto-plástico empregando diferentes modelos de multiescala cinemáticos;

- iv. recuperação da resposta constitutiva macroscópica de um material biológico como o encontrado na parede arterial, incluindo as contribuições de componentes como a elastina e o colágeno.

Implicações teórico-práticas e cenários futuros

Espera-se que os modelos cinematicamente incompatíveis, ou modelos acoplados de diferente dimensão, adquiriram um papel mais relevante na modelagem computacional ao momento de atacar novos problemas em transferência de calor, na mecânica dos sólidos e na mecânica dos fluidos. Como discutido, as situações mais favoráveis para o uso destes modelos são aquelas nas quais identificam-se, dentro de um grande sistema e/ou mecanismo, sub-sistemas com características particulares factíveis de serem considerados mediante diferentes modelos físicos. Vale a pena remarcar que isto é algo muito comum de ser encontrado em muitas áreas da engenharia.

Passando aos modelos de interação fluido-estrutura que empregam como base a imersão de domínios, estes estão encaminhando-se como os principais métodos para lidar com situações de elevada complexidade com relação à configuração geométrica do sistema, sobretudo quando se pensa no comportamento arbitrário de estruturas interagindo com fluidos. Como comentado, exemplos disto são os estudos de partículas imersas em sistemas fluidos, assim como a modelagem da válvula aórtica, só para citar alguns casos dentro da modelagem do sistema cardiovascular.

Por último, com relação à modelagem constitutiva de multiescala, é claro que esta forma de colocar o problema possui potencialidades que ainda não conhecem limites. Portanto, estas técnicas continuarão a ter um importante papel no estudo de materiais de complexa conformação como são os tecidos biológicos. Um dos próximos passos nesta direção é o uso de modelos de multiescala, ou de respostas constitutivas obtidas via modelos de multiescala, em problemas de grande escala como os vistos nas Partes I e II da tese.

Fazendo uma coleção de todos os conceitos tratados neste trabalho pode-se pensar em um exemplo que amalgama modelos cinematicamente incompatíveis com problemas de interação fluido-estrutura e modelagem constitutiva de multiescala. Tal exemplo é o da modelagem da válvula aórtica. Assim sendo, pode-se imaginar a região tridimensional correspondente ao segmento arterial no qual se encontra a válvula. A mesma é modelada por meio de um material cuja resposta constitutiva é obtida através de técnicas de multiescala (aqui empregar-se-iam as idéias da Parte III). Ao mesmo tempo deve-se modelar a dinâmica da interação entre a válvula e o sangue durante cada batimento cardíaco (aqui empregar-se-iam as idéias da Parte II). Finalmente tal segmento tridimensional encontra-se imerso em um modelo do sistema arterial construído mediante modelos unidimensionais (aqui empregar-se-iam as idéias da Parte I). Este exemplo engloba e resume todos os tópicos tratados em cada uma das partes.

Referentes à modelagem do sistema cardiovascular, o emprego de modelos como os aqui desenvolvidos continuará a possuir um caráter fundamental na pesquisa dentro da área. Exemplo disto é a constante busca da comunidade científica por melhorar as representações matemáticas existentes, as quais passam a ter, cada vez mais, uma maior relevância dentro da comunidade médica objetivando contribuir no entendimento dos diferentes fenômenos físicos que se sucedem no sistema cardiovascular. Embora tenha havido uma ampla tendência da comunidade de pesquisadores nesta direção, o campo encontra-se ainda em aberto, apresentando constantemente novos desafios, parte dos quais podem ser abordados com sucesso através de técnicas como as aqui apresentadas.

Por último, uma lista da produção científica resultante desta tese pode ser encontrada ao final de cada capítulo.

Referências Bibliográficas

- [1] A.S. Anayiotos, S.A. Jones, D.P. Giddens, S. Glagov, e C.K. Zarins. Shear stress at a compliant model of the human carotid bifurcation. J. Biomech. Engng., 116:98–106, 1994.
- [2] M. Anliker, R.L. Rockwell, e E. Ogden. Nonlinear analysis of flow pulses and shock waves in arteries. Z. Angew. Math. Phys., 22:217–246, 1971.
- [3] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, e L.D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. SIAM J. Num. Anal., 39:1749–1779, 2002.
- [4] D.N. Arnold, F. Brezzi, e M. Fortin. A stable finite element for the Stokes equations. Calcolo, 21:337–344, 1984.
- [5] M. Aufranc. Numerical study of a junction between a three-dimensional elastic structure and a plate. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 74:207–222, 1989.
- [6] A.P. Avolio. Multi-branched model of the human arterial system. Med. Biol. Engng. Comp., 18:709–718, 1980.
- [7] F.P.T Baaijens. A fictitious domain/mortar element method for fluid-structure interaction. Int. J. Num. Meth. Fluids, 35:743–761, 2001.
- [8] I. Babuška. Error bounds for finite element methods. Numer. Math., 16:322–333, 1971.
- [9] K.J. Bathe, H. Zhang, e M.H. Wang. Finite element analysis of incompressible and compressible fluid flows with free surfaces and structural interactions. Comput. Struct., 56:193–213, 1995.
- [10] M. Bernadou e A. Cubier. Numerical analysis of junctions between thin shells. Part 1: Continuous problems. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 161:349–363, 1998.
- [11] M. Bernadou e A. Cubier. Numerical analysis of junctions between thin shells. Part 2: Approximation by finite element methods. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 161:365–387, 1998.
- [12] M. Bernadou, S. Fayolle, e F. Léné. Numerical analysis of junctions between plates. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 74:307–326, 1989.
- [13] L. Bevilacqua, R.A. Feijóo, e L. Rojas. A variational principle for the Laplace operator with application in the torsion of composite rods. Int. J. Sol. Struct., 10:1091–1102, 1974.
- [14] B.K. Bharadvaj, R.F. Mabon, e D.P. Giddens. Steady flow in a model of the human carotid bifurcation. Part I—Flow visualisation. J. Biomech., 15:349–362, 1982.

- [15] B.K. Bharadvaj, R.F. Mabon, e D.P. Giddens. Steady flow in a model of the human carotid bifurcation. Part II—Laser—Doppler anemometer measurements. *J. Biomech.*, 15:363–378, 1982.
- [16] N. Bilger, F. Auslender, M. Bornert, J.C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet, e A. Zaoui. Effect of a nonuniform distribution of voids on the plastic response of voided materials: a computational and statistical analysis. *Int. J. Solids Struct.*, 42:517–538, 2005.
- [17] P.J. Blanco, E.A. Dari, e R.A. Feijóo. A variational approach for fluid–solid interaction problems using immersed domains. Anais do 8th World Congress on Computational Mechanics, WCCM 2008. Veneza, Itália, 2008.
- [18] P.J. Blanco e R.A. Feijóo. An extended variational principle for coupling shell/plate models and 3D solid models. Anais do 8th World Congress on Computational Mechanics, WCCM 2008. Veneza, Itália, 2008.
- [19] P.J. Blanco, R.A. Feijóo, e E.A. Dari. A variational framework for fluid–solid interaction problems based on immersed domains. Theoretical bases. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 197:2353–2371, 2008.
- [20] P.J. Blanco, R.A. Feijóo, e S.A. Urquiza. A unified variational approach for coupling 3D–1D models and its blood flow applications. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 196:4391–4410, 2007.
- [21] P.J. Blanco, R.A. Feijóo, e S.A. Urquiza. A variational approach for coupling kinematically incompatible structural models. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 197:1577–1602, 2008.
- [22] P.J. Blanco, I. Larrabide, S.A. Urquiza, e R.A. Feijóo. Sensitivity of blood flow patterns to the constitutive law of the fluid. Anais do III European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, ECCM 2006. Lisboa, Portugal, 2006.
- [23] P.J. Blanco, M.R. Pivello, R.A. Feijóo, e S.A. Urquiza. Sensitivity of blood flow patterns at the carotid artery to the heart inflow boundary condition. Anais do III International Congress on Computational Bioengineering, ICCB 2007. Isla Margarita, Venezuela, 2007.
- [24] A. De Boer, A.H. van Zuijlen, e H. Bijl. Review of coupling methods for non-matching meshes. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 196:1515–1525, 2007.
- [25] R.H. Botnar, G. Rappitsch, M.B. Scheidegger, D. Liepsch, K. Perktold, e P. Boesiger. Hemodynamics in the carotid artery bifurcation: a comparison between numerical simulations and in vitro MRI measurements. *J. Biomech.*, 33:137–144, 2000.
- [26] S.C. Brenner e L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer–Verlag, New York, 1994.
- [27] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers. *RAIRO Analyse Numerique*, 8:129–151, 1974.
- [28] F. Brezzi e M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer–Verlag, New York, 1991.

- [29] C.G. Caro, J.M. Fitz-Gerald, e R.C. Schroter. Atheroma and arterial wall shear observation, correlation and proposal of a shear dependent mass transfer mechanism for atherogenesis. Proc. Royal Society of London, Series B, Biological Sciences, 177:109–159, 1971.
- [30] N. Casson. In: Rheology of Disperse Systems, C.C. Mill Ed., page 59. Pergamon, New York, 1959.
- [31] J.R. Cebal e R. Löhner. From medical images to CFD meshes. Anais do 8th International Meshing Roundtable, IMR 1999. South Lake Tahoe, California, U.S.A., 1999.
- [32] J.R. Cebal, P.J. Yim, R. Löhner, O. Soto, e P.L. Choyke. Blood flow modeling in carotid arteries using computational fluid dynamics and MR imaging. Academic Radiology, 9:1286–1299, 2002.
- [33] P.G. Ciarlet, H. Le Dret, e R. Nzingwa. Junctions between three-dimensional and two-dimensional linearly elastic structures. J. Math. Pures Appl., 68:261–295, 1989.
- [34] J.D. Clayton e D.L. McDowell. A multiscale multiplicative decomposition for elastoplasticity of polycrystals. Int. J. Plasticity, 19:1401–1444, 2003.
- [35] R. Courant e D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics, Vol. II. Interscience Publishers, New York, 1962.
- [36] S. Deparis, M. Discacciati, G. Fourestey, e A. Quarteroni. Fluid-structure algorithms based on Steklov-Poincaré operators. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 195:5797–5812, 2006.
- [37] S. Deparis, M.A. Fernández, L. Formaggia, e F. Nobile. Modified fixed point algorithm in fluid-structure interaction. Comptes Rendus Mecanique, 331:525–530, 2003.
- [38] W. Dettmer e D. Perić. A computational framework for fluid-structure interaction: Finite element formulation and applications. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 195:5754–5779, 2006.
- [39] C. Diaz-Goano, P.D. Mineev, e K. Nandakumar. A fictitious domain/finite element method for particulate flows. J. Comput. Phys., 192:105–123, 2003.
- [40] N. Diniz dos Santos, J.-F. Gerbeau, e J.-F. Bourgat. A partitioned fluid-structure algorithm for elastic thin valves with contact. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 197:1750–1761, 2008.
- [41] L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, F. Nobile, e A. Quarteroni. On the coupling of 3D and 1D Navier–Stokes equations for flow problems in compliant vessels. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 191:561–582, 2001.
- [42] L. Formaggia, J.-F. Gerbeau, F. Nobile, e A. Quarteroni. Numerical treatment of defective boundary conditions for the Navier–Stokes equations. SIAM J. Num. Anal., 40:376–401, 2002.
- [43] L. Formaggia, F. Nobile, A. Quarteroni, e A. Veneziani. Multiscale modelling of the circulatory system: a preliminary analysis. Comp. Vis. Science, 2:75–83, 1999.
- [44] Y.C. Fung. Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues. Springer, New York, 1993.

- [45] J.-F. Gerbeau, M. Vidrascu, e P. Frey. Fluid-structure interaction in blood flows on geometries based on medical imaging. Comput. Struct., 83:155–165, 2005.
- [46] M. Găărăjeu e P. Suquet. Effective properties of porous ideally plastic or viscoplastic materials containing rigid particles. J. Mech. Phys. Solids, 45:873–902, 1997.
- [47] D.P. Giddens, C.K. Zarins, e S. Glagov. The role of fluid mechanics in the localization and detection of atherosclerosis. J. Biomech. Engng., 115:588–594, 1993.
- [48] F.J.H. Gijssen, D.E.M. Palmen, M.H.E. van der Beek, F.N. van de Vosse, M.E.H. van Dongen, e J.D. Janssen. Analysis of the axial flow field in stenosed carotid artery bifurcation models—LDA experiments. J. Biomech., 29:1483–1489, 1996.
- [49] F.J.H. Gijssen, F.N. van de Vosse, e J.D. Janssen. The influence of the non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: steady flow in a carotid bifurcation model. J. Biomech., 32:601–608, 1999.
- [50] V. Girault e P.-A. Raviart. Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations. Theory and Algorithms. Springer–Verlag, Berlin, 1986.
- [51] S.M. Giusti, P.J. Blanco, E.A. Souza Neto, e R.A. Feijóo. An assessment of the Gurson yield criterion by a computational multi-scale approach. Aceito para ser publicado em Engng. Comput., 2008.
- [52] R. Glowinski, T.-W. Pan, T.I. Hesla, e D.D. Joseph. A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. Int. J. Multiphase Flow, 25:755–794, 1999.
- [53] R. Glowinski, T.-W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph, e J. Périaux. A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for flows around moving rigid bodies: application to particulate flow. Int. J. Num. Meth. Fluids, 30:1043–1066, 1999.
- [54] R. Glowinski, T.-W. Pan, e J. Périaux. A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 111:283–303, 1994.
- [55] R. Glowinski, T.-W. Pan, e J. Périaux. Distributed Lagrange multiplier methods for incompressible viscous flow around moving rigid bodies. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 151:181–194, 1998.
- [56] C.J. Greenshields e H.G. Weller. A unified formulation for continuum mechanics applied to fluid–structure interaction in flexible tubes. Int. J. Num. Meth. Engng., 64:1575–1593, 2005.
- [57] B.E. Griffith, R.D. Hornung, D.M. McQueen, e C.S. Peskin. An adaptive, formally second order accurate version of the immersed boundary method. J. Comput. Phys., 223:10–49, 2007.
- [58] S. Göktepe e C. Miehe. A micro–macro approach to rubber–like materials—Part III: the micro–sphere model of anisotropic Mullins–type damage. J. Mech. Phys. Solids, 53:2259–2283, 2005.
- [59] H. Guillard e C. Farhat. On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 190:1467–1482, 2000.
- [60] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I—yield criteria and flow rules for porous ductile media. J. Engng. Mat. Tech., 99:2–15, 1977.

- [61] M.E. Gurtin. An Introduction to Continuum Mechanics. Academic Press, 1981.
- [62] J. De Hart, F.P.T. Baaijens, G.W.M. Peters, e P.J.G. Schreurs. A computational fluid–structure interaction analysis of a fiber–reinforced stentless aortic valve. J. Biomech., 36:699–712, 2003.
- [63] J. De Hart, G.W.M. Peters, P.J.G. Schreurs, e F.P.T. Baaijens. A three–dimensional computational analysis of fluid–structure interaction in the aortic valve. J. Biomech., 36:103–112, 2003.
- [64] M. Heil. An efficient solver for the fully coupled solution of large–displacement fluid–structure interaction problems. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 193:1–23, 2004.
- [65] J.G. Heywood, R. Rannacher, e S. Turek. Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the incompressible Navier–Stokes equations. Int. J. Num. Meth. Fluids, 22:325–352, 1996.
- [66] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. J. Mech. Phys. Solids, 11:357–372, 1963.
- [67] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. J. Mech. Phys. Solids, 12:213–222, 1965.
- [68] R. Holenstein, P. Niederer, e M. Anliker. A viscoelastic model for use in predicting arterial pulse waves. J. Biomech. Engng., 102:318–325, 1980.
- [69] G.A. Holzapfel, T.C. Gasser, e R.W. Ogden. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. J. Elasticity, 61:1–48, 2000.
- [70] M. Hori e S. Nemat-Nasser. On two micromechanics theories for determining micro–macro relations in heterogeneous solids. Mech. Materials, 31:667–682, 1999.
- [71] B. Hübner e D. Dinkler. A simultaneous solution procedure for strong interactions of generalized Newtonian fluids and viscoelastic solids at large strains. Int. J. Num. Meth. Fluids, 64:920–939, 2005.
- [72] T.J.R. Hughes. A Study of the One–Dimensional Theory of Arterial Pulse Propagation. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1974.
- [73] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, e G.M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least squares method for advective–diffusive equations. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 73:173–189, 1989.
- [74] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, e M. Mallet. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VI. Convergence analysis of the generalized SUPG formulation for linear time–dependent multidimensional advective–diffusive systems. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 63:97–112, 1987.
- [75] T.J.R. Hughes, W.K. Liu, e T.K. Zimmermann. Lagrangian–Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 29:329–349, 1981.
- [76] T.J.R. Hughes e J. Lubliner. On the one–dimensional theory of blood flow in the larger vessels. Math. Biosciences, 18:161–170, 1973.

- [77] A. Ibrahimbegović, I. Grešovnik, D. Markovič, S. Melnyk, e T. Rodič. Shape optimization of two-phase inelastic material with microstructure. Engng. Comput., 22:605–645, 2005.
- [78] A. Ibrahimbegović e D. Markovič. Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 192:3089–3107, 2003.
- [79] S.R. Idelsohn, E. Oñate, F. Del Pin, e N. Calvo. Fluid-structure interaction using the particle finite element method. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 195:2100–2123, 2006.
- [80] K.J. Isselbacher, E. Braunwald, J.D. Wilson, J.B. Martin, A.S. Fauci, e D.L. Kasper, editors. Harrison's Principle of Internal Medicine – 13th Edition, International Edition. McGraw–Hill, New York, 1994.
- [81] Kitware. VTK: The Visualization Toolkit – Kitware Inc. <http://www.vtk.org>.
- [82] Kitware e Sandia National Laboratories. ParaView – Kitware Inc. <http://www.paraview.org>.
- [83] Y. Kivity e R. Collins. Nonlinear fluid–shell interactions: Applications to blood flow in large arteries. Proc. Int. Sym. Discrete Meth. Engng., pages 476–488, 1974.
- [84] Y. Kivity e R. Collins. Nonlinear wave propagation in viscoelastic tubes: Application to aortic rupture. J. Biomech., 7:67–76, 1974.
- [85] V.G. Kouznetsova, M.G.D. Geers, e W.A.M. Brekelmans. Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient–enhanced computational homogenization scheme. Int. J. Num. Meth. Engng., 54:1235–1260, 2002.
- [86] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, e A.B. Movchan. Fields in non-degenerate 1D–3D elastic multi-structures. Quart. J. Mech. Appl. Math., 54:177–212, 2001.
- [87] D.N. Ku e D.P. Giddens. Hemodynamics of the normal carotid bifurcation. Ultrasound in Medicine and Biology, 11:13–26, 1985.
- [88] D.N. Ku, D.P. Giddens, C.K. Zarins, e S. Glagov. Pulsatile flow and atherosclerosis in the human carotid bifurcation. Positive correlation between plaque location and low oscillating shear stress. Arteriosclerosis, 5:293–302, 1985.
- [89] Argonne National Laboratory. PETSc – Users Manual. <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.
- [90] M.-C. Lai e C.S. Peskin. An immersed boundary method with formal second–order accuracy and reduced numerical viscosity. J. Comput. Phys., 160:705–719, 2000.
- [91] I. Larrabide. Processamento de Imagens via Derivada Topológica e suas Aplicações na Modelagem e Simulação Computacional do Sistema Cardiovascular Humano. PhD thesis, Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, 2007.
- [92] I. Larrabide, P.J. Blanco, S.A. Urquiza, e R.A. Feijóo. Sensitivity of blood flow in stenosed carotid bifurcation. Anais do II International Congress on Computational Bioengineering, ICCB 2005. Lisboa, Portugal, 2005.

- [93] M. Lesoinne e C. Farhat. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 134:71–90, 1996.
- [94] A.J. Lew e G.C. Buscaglia. A discontinuous–Galerkin–based immersed boundary method. Aceito para ser publicado em Int. J. Num. Meth. Engng., 2007.
- [95] X. Li e W. E. Multiscale modeling of the dynamics of solids at finite temperature. J. Mech. Phys. Solids, 53:1650–1685, 2005.
- [96] W.K. Liu, S. Jun, e Y.F. Zhang. Reproducing kernel particle methods. Int. J. Num. Meth. Fluids, 20:1081–1106, 1995.
- [97] W.K. Liu, D.W. Kim, e S. Tang. Mathematical foundations of the immersed finite element method. Comput. Mech., 39:211–222, 2007.
- [98] W.K. Liu, Y. Liu, D. Farrell, L. Zhang, X.S. Wang, Y. Fukui, N. Patankar, Y. Zhang, C. Bajaj, J. Lee, J. Hong, X. Chen, e H. Hsu. Immersed finite element method and its applications to biological systems. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 195:1722–1749, 2006.
- [99] R. Löhner, J.R. Cebal, O. Soto, P. Yim, e J.E. Burgess. Applications of patient–specific CFD in medicine and life sciences. Int. J. Num. Meth. Fluids, 43:637–650, 2003.
- [100] R. Löhner, J.D. Baum, E. Mestreau, D. Sharov, C. Charman, e D. Pelessone. Adaptive embedded unstructured grid methods. Int. J. Num. Meth. Engng., 60:641–660, 2004.
- [101] J. Mandel. Plasticité Classique et Viscoplasticité. CISM Lecture Notes, Udine, Italy, Springer-Verlag, 1971.
- [102] K. Matsui, K. Terada, e K. Yuge. Two–scale finite element analysis of heterogeneous solids with periodic microstructures. Comput. Struct., 82:593–606, 2004.
- [103] H.G. Matthies e J. Steindorf. Partitioned but strongly coupled iteration schemes for nonlinear fluid–structure interaction. Comput. Struct., 80:1991–1999, 2002.
- [104] H.G. Matthies e J. Steindorf. Partitioned strong coupling algorithms for fluid–structure interaction. Comput. Struct., 81:805–812, 2003.
- [105] J.C. Michel, H. Moulinec, e P. Suquet. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 172:109–143, 1999.
- [106] J.C. Michel, H. Moulinec, e P. Suquet. A computational scheme for linear and non-linear composites with arbitrary phase contrast. Int. J. Num. Meth. Engng., 52:139–160, 2001.
- [107] J.C. Michel e P. Suquet. The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials. J. Mech. Phys. Solids, 40:783–812, 1992.
- [108] J.C. Michel e P. Suquet. Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 193:5477–5502, 2004.

- [109] C. Miehe. Strain-driven homogenization of inelastic microstructures and composites based on an incremental variational formulation. Int. J. Num. Meth. Engng., 55:1285–1322, 2002.
- [110] C. Miehe. Computational micro-to-macro transitions for discretized microstructures of heterogeneous materials at finite strains based on the minimization of averaged incremental energy. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 192:559–591, 2003.
- [111] C. Miehe e A. Koch. Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains. Arch. Appl. Mech., 72:300–317, 2002.
- [112] C. Miehe, J. Schotte, e M. Lambrecht. Homogenization of inelastic solid materials at finite strains based on incremental minimization principles. Application to the texture analysis of polycrystals. J. Mech. Phys. Solids, 50:2123–2167, 2002.
- [113] C. Miehe, J. Schotte, e J. Schröder. Computational micro-macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. Comput. Mat. Sci., 16:372–382, 1999.
- [114] N. Mordant e J.-F. Pinton. Velocity measurement of a settling sphere. Eur. Phys. J. B, 18:343–352, 2000.
- [115] P.M. Naghdi. On the theory of thin elastic shells. Quart. Appl. Math., 14:369–380, 1957.
- [116] P.M. Naghdi. Foundations of elastic shell theory. In Progress in Solid Mechanics IV, I.N. Sneddon and R. Hill eds., pages 1–90. North-Holland, Amsterdam, 1963.
- [117] S.A. Nazarov. Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions I. J. Math. Sci., 80:1989–2034, 1996.
- [118] S.A. Nazarov. Junctions of singularly degenerating domains with different limit dimensions II. J. Math. Sci., 97:4085–4108, 1999.
- [119] S. Nemat-Nasser. Averaging theorems in finite deformation plasticity. Mech. Materials, 31:493–523, 1999.
- [120] E.A. Souza Neto e R.A. Feijóo. Variational foundations of multi-scale constitutive models of solid: small and large strain kinematical formulation. Submetido a Int. J. Plasticity, 2007.
- [121] E.A. Souza Neto, D. Perić, M. Dutko, e D.R.J. Owen. Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids. Int. J. Solids Struct., 33:3277–3296, 1996.
- [122] E.A. Souza Neto, D. Perić, e D.R.J. Owen. Computational Methods for Plasticity: Theory and Application. Wiley, Chichester, 2008.
- [123] W.W. Nichols e M.F. O’Rourke. McDonald’s Blood Flow in Arteries: Theoretical, Experimental and Clinical Principles – 4th Edition. Arnold and Oxford University Press, New York, 1998.
- [124] P.F. Niederer. Damping mechanisms and shock-like transitions in the human arterial tree. Z. Angew. Math. Phys., 36:204–220, 1985.

- [125] F. Nobile. Numerical Approximation of Fluid–Structure Interaction Problems with Application to Haemodynamics. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 2001.
- [126] M.S. Olufsen. Modeling the Arterial System with Reference to an Anesthesia Simulator. PhD thesis, Roskilde University, Roskilde, 1998.
- [127] Y. Papaharilaou, J.A. Ekaterinaris, E. Manousaki, e A.N. Katsamouris. A decoupled fluid structure approach for estimating wall stress in abdominal aortic aneurysms. J. Biomech., 40:367–377, 2007.
- [128] K.C. Park e C.A. Felippa. A variational principle for the formulation of partitioned structural systems. Int. J. Num. Meth. Engng., 47:395–418, 2000.
- [129] K.C. Park, C.A. Felippa, e R. Ohayon. Partitioned formulation of internal fluid-structure interaction problems by localized Lagrange multipliers. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 190:2989–3007, 2001.
- [130] N.A. Patankar, P. Singh, D.D. Joseph, R. Glowinski, e T.-W. Pan. A new formulation of the distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. Int. J. Multiphase Flow, 26:1509–1524, 2000.
- [131] K. Perktold e G. Rappitsch. Computer simulation of local blood flow and vessel mechanics in a compliant carotid artery bifurcation model. J. Biomech., 28:845–856, 1995.
- [132] C.S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. J. Comput. Phys., 25:220–252, 1977.
- [133] C.S. Peskin. The immersed boundary method. Acta Numerica, 11:479–517, 2002.
- [134] A. Quarteroni. Modelling the Cardiovascular System: a Mathematical Challenge. In Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, B. Engquist and W. Schmid eds., pages 961–972. Springer–Verlag, 2001.
- [135] A. Quarteroni, M. Tuveri, e A. Veneziani. Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods. Comput. Visual. Sci., 2:163–197, 2000.
- [136] J.K. Raines, M.Y. Jaffrin, e A.H. Shapiro. A computer simulation of arterial dynamics in the human leg. J. Biomech., 7:77–91, 1974.
- [137] S. Reese. Meso–macro modelling of fibre–reinforced rubber–like composites exhibiting large elastoplastic deformations. Int. J. Solids Struct., 40:951–980, 2003.
- [138] C.C.M. Rindt, A.A. van Steenhoven, J.D. Janssen, R.S. Reneman, e A. Segal. A numerical analysis of steady flow in a three–dimensional model of the carotid artery bifurcation. J. Biomech., 23:461–473, 1990.
- [139] A.M. Roma, C.S. Peskin, e M.J. Berger. An adaptive version of the immersed boundary method. J. Comput. Phys., 153:509–534, 1999.
- [140] Y. Saad. SPARSEKIT: a basic tool kit for sparse matrix computations. Version 2. University of Illinois (1994).
- [141] B.W. Schaaf e P.H. Abbrecht. Digital computer simulation of human systemic arterial pulse wave transmission: A nonlinear model. J. Biomech., 5:345–364, 1972.

- [142] R.L.S. Silva, E. Camargo, P.J. Blanco, M.R. Pivello, e R.A. Feijóo. Virtual modeling and numerical simulation of aneurysms and stenoses. *Anais do X Symposium on Virtual and Augmented Reality, SVR 2008*. João Pessoa, Brasil, 2008.
- [143] M.F. Snyder, V.C. Rideout, e R.J. Hillestad. Computer modelling of the human systemic arterial tree. *J. Biomech.*, 1:341–353, 1968.
- [144] D.C.D. Speirs, E.A. Souza Neto, e D. Perić. An approach to the mechanical constitutive modelling of arterial tissue based on homogenization and optimization. Submetido para publicação, 2008.
- [145] M.P. Spencer e A.B. Denison. The square-wave electro-magnetic flowmeter: Theory of operation and design of magnetic probes for clinical and experimental applications. *I.R.E. Trans. Med. Elect.*, 6:220–228, 1959.
- [146] N. Stergiopoulos, D.F. Young, e T.R. Rogge. Computer simulation of arterial flow with applications to arterial and aortic stenoses. *J. Biomech.*, 25:1477–1488, 1992.
- [147] J.C. Stettler, P. Niederer, e M. Anliker. Theoretical analysis of arterial hemodynamics including the influence of bifurcations. Part I: Mathematical model and prediction of normal pulse patterns. *Ann. Biomed. Engng.*, 9:145–164, 1981.
- [148] G.R. Stuhne e D.A. Steinman. Finite-element modeling of the hemodynamics of stented aneurysms. *J. Biomech. Engng.*, 126:382–387, 2004.
- [149] E.W. Swim e P. Seshaiyer. A nonconforming finite element method for fluid-structure interaction problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 195:2088–2099, 2006.
- [150] P. Le Tallec e J. Mouro. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 190:3039–3067, 2001.
- [151] C.A. Taylor, T.J.R. Hughes, e C.K. Zarins. Finite element modeling of blood flow in arteries. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 158:155–196, 1998.
- [152] G.I. Taylor. Plastic strains in metals. *J. Inst. Metals*, 62:307–324, 1938.
- [153] R. Temam. *Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. North-Holland, New York, 1979.
- [154] K. Terada, I. Saiki, K. Matsui, e Y. Yamakawa. Two-scale kinematics and linearization for simultaneous two-scale analysis of periodic heterogeneous solids at finite strain. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 192:3531–3563, 2003.
- [155] S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere, e R.A. Feijóo. Multidimensional modelling for the carotid artery blood flow. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 195:4002–4017, 2006.
- [156] S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere, e R.A. Feijóo. A software architecture for numerical solvers implementing the concept of non-additive elements. Submetido a *Adv. Soft. Engng.*, 2007.
- [157] S.A. Urquiza, H. Desimone, M. Goñi, A. Introzzi, e F.M. Clara. *Prediction of Human Arterial Pulse Wave Shape in Aging and Hypertension*, pages 131–138. Transactions of the Wessex Institute, Southampton, 1995.

- [158] S.A. Urquiza e M.J. Vénere. An application framework architecture for FEM and other related solvers. *Anais do 1st South American Congress on Computational Mechanics, MECOM 2002*. Santa Fe, Argentina, 2002.
- [159] R. van Loon, P.D. Anderson, e F.N. van de Vosse. A fluid-structure interaction method with solid-rigid contact for heart valve dynamics. *J. Comput. Phys.*, 217:806–823, 2006.
- [160] C. Veeramani, P.D. Mineev, e K. Nandakumar. A fictitious domain formulation for flows with rigid particles: A non-Lagrange multiplier version. *J. Comput. Phys.*, 224:867–879, 2007.
- [161] A. Veneziani e C. Vergara. Flow rate defective boundary conditions in haemodynamics simulations. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 47:803–816, 2005.
- [162] X. Wang e W.K. Liu. Extended immersed boundary method using FEM and RKPM. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 193:1305–1321, 2004.
- [163] X.S. Wang. From immersed boundary method to immersed continuum method. *Int. J. Multiscale Comp. Engng.*, 4:127–145, 2006.
- [164] Z. Yu. A DLM/FD method for fluid/flexible-body interactions. *J. Comput. Phys.*, 207:1–27, 2005.
- [165] L. Zhang, A. Gerstenberger, X. Wang, e W.K. Liu. Immersed finite element method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 193:2051–2067, 2004.
- [166] S.Z. Zhao, B. Ariff, Q. Long, A.D. Hughes, S.A. Thom, A.V. Stanton, e X.Y. Xu. Inter-individual variations in wall shear stress and mechanical stress distributions at the carotid artery bifurcation of healthy humans. *J. Biomech.*, 35:1367–1377, 2002.
- [167] M.A. Zulliger, P. Fridez, K. Hayashi, e N. Stergiopoulos. A strain energy function for arteries accounting for wall composition and structure. *J. Biomech.*, 37:989–1000, 2004.

Biografia acadêmica do autor

Pablo Javier Blanco nasceu o dia 19 de Junho de 1979 na cidade de Mar del Plata, Província de Buenos Aires, Argentina. Iniciou seus estudos de graduação em engenharia em Março de 1998 após ter concluído o nível secundário de educação no Colégio Industrial Pablo Tavelli. Formou-se como Engenheiro Eletromecânico na Facultad de Ingeniería da Universidad Nacional de Mar del Plata em Abril de 2003 recebendo a medalha de ouro pela maior média do ano com 9.43/10. Nos anos 2003 e 2004 realizou atividades de iniciação científica sob a orientação do Professor Santiago Adrián Urquiza. Em 2005 mudou sua residência para a cidade de Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil, e no mês de Março desse mesmo ano começou os estudos para obter o grau de Doutor em Ciências da Modelagem Computacional no Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC/MCT) sob a orientação do Professor Raúl Antonino Feijóo. A continuação inclui-se uma lista completa dos trabalhos desenvolvidos pelo autor no âmbito de pesquisa.

Trabalhos publicados em periódicos científicos:

- P.J. Blanco, R.A. Feijóo e E.A. Dari, *A variational framework for solving fluid–solid interaction problems based on immersed domains. Theoretical bases*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (197) 2353–2371, 2008.
- P.J. Blanco, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *A variational approach for coupling kinematically incompatible structural models*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (197) 1577–1602, 2008.
- S.M. Giusti, P.J. Blanco, E.A. Souza Neto e R.A. Feijóo, *An assessment of the Gurson yield criterion by a computational multi-scale approach*, Aceito para ser publicado em Engng. Comput., 2008.
- P.J. Blanco, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *A unified variational approach for coupling 3D–1D models and its blood flow applications*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (196) 4391–4410, 2007.
- S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere e R.A. Feijóo, *Multidimensional modelling for the carotid artery blood flow*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., (195) 4002–4017, 2006.

Trabalhos publicados em anais de congressos:

- P.J. Blanco e R.A. Feijóo, *A computational framework for patient-specific modeling of the cardiovascular system*, Anais do WCCM 2008. Veneza, Itália, 2008.
- P.J. Blanco, E.A. Dari e R.A. Feijóo, *A variational approach for fluid-solid interaction problems using immersed domains*, Anais do WCCM 2008. Veneza, Itália, 2008.
- P.J. Blanco e R.A. Feijóo, *An extended variational principle for coupling shell/plate models and 3D solid models*, Anais do WCCM 2008. Veneza, Itália, 2008.

- R.L.S. Silva, E. Camargo, P.J. Blanco, M.R. Pivello e R.A. Feijóo, *Virtual modeling and numerical simulation of aneurysms and stenoses*, Anais do SVR 2008. João Pessoa, Brasil, 2008.
- P.J. Blanco, M.R. Pivello, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *Sensitivity of blood flow patterns at the carotid artery to the heart inflow boundary condition*, Anais do ICCB 2007. Isla Margarita, Venezuela, 2007.
- S.M. Giusti, P.J. Blanco, E.A. Souza Neto e R.A. Feijóo, *Multiscale modelling of ductile porous metals: determination of macroscopic yield surfaces*, Anais do ENIEF 2007. Córdoba, Argentina, 2007.
- P.J. Blanco, M.R. Pivello, I. Larrabide, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *Calibração de um modelo 1D do sistema cardiovascular*, Anais do ENEBI 2007. Petrópolis, Brasil, 2007.
- P.J. Blanco, A.A. Novotny e R.A. Feijóo, *Topological sensitivity analysis for source perturbation in transient problems*, Anais do IPDO 2007. Miami, Florida, USA, 2007.
- P.J. Blanco, I. Larrabide, S.A. Urquiza e R.A. Feijóo, *Sensitivity of blood flow patterns to the constitutive law of the fluid*, Anais do ECCM 2006. Lisboa, Portugal, 2006.
- I. Larrabide, P.J. Blanco, S.A. Urquiza e R.A. Feijóo, *Sensitivity of blood flow in stenosed carotid bifurcation*, Anais do ICCB 2005. Lisboa, Portugal, 2005.
- S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere e R.A. Feijóo, *Modelos multidimensionales de la bifurcación carotídea con diversos grados de estenosis*, Anais do ENIEF 2004. Bariloche, Argentina, 2004.
- S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere e R.A. Feijóo, *Multidimensional models of stenotic carotid bifurcations*, Anais do 1st LNCC Meeting 2004. Petrópolis, Brasil, 2004.
- S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere e R.A. Feijóo, *Acoplamiento de modelos uni y tridimensionales para la resolución de problemas hemodinámicos*, Anais do SABI 2003. Tucumán, Argentina, 2003.
- S.A. Urquiza, P.J. Blanco, G. Lombera, M.J. Vénere e R.A. Feijóo, *Coupling multi-dimensional compliant models for carotid artery blood flow*, Anais do ENIEF 2003. Bahía Blanca, Argentina, 2003.
- S.A. Urquiza, P.J. Blanco e S. Chevalier, *Estabilización numérica de problemas de advección dominante a través del desplazamiento de dominios*, Anais do ENIEF 2003. Bahía Blanca, Argentina, 2003.
- S.A. Urquiza, S. Chevalier e P.J. Blanco, *Cálculo térmico del proceso de sellado de envases plásticos para productos alimenticios líquidos*, Anais do ENIEF 2003. Bahía Blanca, Argentina, 2003.

Relatórios internos de pesquisa:

- S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere e R.A. Feijóo, *Multidimensional modelling for the carotid artery blood flow*, LNCC Report 8/2004.
- S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere e R.A. Feijóo, *Multidimensional models of stenotic carotid bifurcations*, LNCC Report 32/2004.

- I. Larrabide, P.J. Blanco, S.A. Urquiza, e R.A. Feijóo, *Sensitivity of blood flow in stenosed carotid bifurcation*, LNCC Report 17/2005.
- P.J. Blanco, *Tensores de terceira ordem*, LNCC Report 9/2006.
- P.J. Blanco, M.R. Pivello, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *On the influence of the heart inflow boundary condition on local 3D flow patterns at the carotid artery*, LNCC Report 19/2007.
- P.J. Blanco, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *A unified variational approach for coupling 3D–1D models and its blood flow applications*, LNCC Report 20/2007.
- S.M. Giusti, P.J. Blanco, E.A. Souza Neto e R.A. Feijóo, *An assessment of the Gurson yield criterion by a computational multi-scale approach*, LNCC Report 27/2007.
- P.J. Blanco, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *A variational approach for coupling kinematically incompatible structural models*, LNCC Report 28/2007.
- R.L.S. Silva, M.R. Pivello, P.J. Blanco e R.A. Feijóo, *Algoritmos para a homogeneização de malhas triangulares*, LNCC Report 30/2007.

Manuscritos submetidos ou em preparação:

- S.A. Urquiza, P.J. Blanco, M.J. Vénere e R.A. Feijóo, *A software architecture for numerical solvers implementing the concept of non-additive elements*. Submetido a Adv. Engng. Soft, 2007.
- P.J. Blanco, A.A. Novotny e R.A. Feijóo, *Topological sensitivity analysis for source perturbation in transient problems*. Submetido a Inv. Prob. Sci. Engng., 2007.
- P.J. Blanco, R.L.S. Silva, M.R. Pivello, P.G.P. Ziemer e R.A. Feijóo, *HeMoLab: A computational framework towards the patient-specific modeling of the cardiovascular system*, 2008.
- I. Larrabide, P.J. Blanco e R.A. Feijóo, *HeMoLab - Hemodynamics Modeling Laboratory: An application for modelling the Human Cardiovascular System*, 2008.
- P.J. Blanco, E.A. Dari e R.A. Feijóo, *A variational framework for solving fluid–solid interaction problems based on immersed domains. Fluid–rigid solid computational implementation*, 2007.
- P.J. Blanco, R.A. Feijóo e E.A. Souza Neto, *Dual variational formulations of multi-scale constitutive models in solid mechanics*, 2008.
- P.J. Blanco, M.R. Pivello, R.A. Feijóo e S.A. Urquiza, *On the potentialities of 3D–1D coupled models in hemodynamic simulations*, 2008.

Por último, durante o tempo que levou a conclusão dos estudos de Doutorado o autor participou dos seguintes eventos

- International Congress on Computational Bioengineering, ICCB 2007, 17 ao 19 de Setembro de 2007, Isla Margarita, Venezuela.
- Encontro Nacional de Engenharia Biomecânica, ENEBI 2007, 23 ao 25 de Maio de 2007, Petrópolis, Brasil.
- Inverse Problems, Design and Optimization Symposium, IPDO 2007, 16 ao 18 de Abril de 2007, Miami, USA.
- European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, ECCM 2006, 5 ao 9 de Junho de 2006, Lisboa, Portugal.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)