

Laboratório Nacional de Computação Científica  
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Quantificação de Incertezas por Métodos de Perturbação  
Estocástica em Meios Poroelásticos Heterogêneos**

Por

**Rosa Luz Medina Aguilar**

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS POR MÉTODOS DE  
PERTURBAÇÃO ESTOCÁSTICA EM MEIOS POROELÁSTICOS  
HETEROGÊNEOS

**Rosa Luz Medina Aguilar**

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO NACIONAL  
DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECES-  
SÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM  
MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

---

Prof. Márcio Arab Murad, D.Sc.  
(Presidente)

---

Prof. Abimael Fernando Loula, D.Sc.

---

Prof. Eduardo Lúcio Mendes Garcia, D.Sc.

---

Prof. Márcio Rentes Borges, D.Sc.

---

Prof. Claude Boutin, Ph.D.

---

Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.

---

Prof. Maria Cristina C. Cunha, D.Sc.

---

Prof. Saulo Pomponet Oliveira, D.Sc.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 2008

Medina Aguilar, Rosa Luz

A283q        Quantificação de incertezas por métodos de perturbação estocástica em meios poroelásticos heterogêneos / Rosa Luz Medina Aguilar. Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2008.

XVIII, 148 p. il. : il.; 29 cm

Orientador: Márcio Arab Murad

Tese (D.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2008.

1. Materiais porosos 2. Modelos estocásticos I. Murad, Márcio Arab.  
II. LNCC/MCT. III. Título.

CDD 620.116

*“El milagro de la idoneidad del lenguaje matemático para la formulación de las leyes de la física es un don maravilloso que no nos merecemos y que no podemos llegar a comprender. Deberíamos estar agradecidos de que nos haya sido concedido y tenemos que confiar que seguirá siendo válido en las investigaciones futuras indefinidamente, para bien o para mal. Con ello podemos ampliar el saber humano, aunque sea a costa de nuestro anonadamiento”*  
*(Eugene Wigner)*

A Leocadia, mi querida y siempre recordada

Mamá.

# Agradecimentos

Ao Professor Márcio Murad pela orientação impecável e valiosas contribuições que enriqueceram este trabalho.

A minha família, pelo apoio sempre presente durante toda esta caminhada profissional.

A minha turma Maicon, Paula, Wanderson y Bones grandes amigos e apoio durante os estudos do doutorado.

A meus grandes amigos PattyPach, Cristiane, Claudia, Ana, Patricia, Adilson y Lupe pela preocupação e carinho principalmente no final desta fase da minha vida.

A meu querido amigo Alexei pela presença e grande apoio em momentos difíceis.

Aos professores do LNCC pelos ensinamentos ministrados no curso de doutorado.

Aos funcionários do LNCC pela constante colaboração no desenvolvimento do presente trabalho especialmente a Gazoni.

Finalmente agradeço a Capes e ao LNCC pelo apoio financeiro, muito importante para a conclusão deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

**QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS POR MÉTODOS DE  
PERTURBAÇÃO ESTOCÁSTICA EM MEIOS POROELÁSTICOS  
HETEROGÊNEOS**

Rosa Luz Medina Aguilar

Dezembro , 2008

**Orientador:** Márcio Arab Murad, D.Sc

No contexto das teorias de perturbação estocástica, analisamos a acurácia de dois modelos poroelásticos lineares aplicados a meios porosos altamente heterogêneos sujeitos as incertezas na permeabilidade e nas constantes elásticas. Os modelos poroelásticos completamente e fracamente acoplados analisados surgem caracterizados pelo grau de intensidade de acoplamento entre a hidrodinâmica governante da percolação do fluido e a poromecânica que rege as deformações da matriz porosa. Novas equações efetivas para os momentos das soluções são obtidas fazendo uso de técnicas de expansão assintótica. À luz da teoria de perturbação, são estabelecidas hipóteses simplificadoras que elucidam o domínio de validade do modelo fracamente acoplado, amplamente utilizado nos simuladores de Reservatórios de Petróleo, na presença de heterogeneidades e correlação nos coeficientes poroelásticos. Simulações computacionais do processo de extração primária de petróleo são realizadas utilizando técnicas de Monte Carlo em conjunção com métodos de elementos finitos. Resultados numéricos obtidos confirmam claramente a conjectura estabelecida pela teoria de perturbação relacionada com a inacurácia do modelo fracamente acoplado na presença de variabilidade nas constantes elásticas. A metodologia empregada permite quantificar a distância entre os dois modelos poroelásticos, e conseqüentemente, propor a escolha do modelo apropriado para diferentes condições de carregamento e variabilidade da formação geológica.

Abstract of Thesis presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Sciences (D.Sc.)

**UNCERTAINTY QUANTIFICATION WITHIN STOCHASTIC  
PERTURBATION METHODS FOR POROELASTIC  
HETEROGENEOUS MEDIA**

Rosa Luz Medina Aguilar

December, 2008

**Advisor:** Márcio Arab Murad, D.Sc

In the context of the stochastic perturbations theories we analyze the accuracy of two linear poroelastic models applied to highly heterogeneous porous media subject to uncertainties in the permeability and the elastic constants. The poroelastic models completely and weakly coupled analyzed arise characterized by the degree of intensity coupling between the hydrodynamics, governor of the percolation of the fluid and poromechanics which governs the deformation of the porous matrix. New equations for the moments of effective solutions using techniques of asymptotic expansion. In light of the perturbation theory are set simplifying assumptions that clarify clearly the domain of validity of weakly coupled model, widely used in simulation of oil reservoirs in the presence of heterogeneities and correlation in poroelastic coefficients. Computational simulations of the primary extraction of oil process are carried out using Monte Carlo techniques in conjunction with finite element methods. Results obtained clearly confirm the conjecture established by the perturbation theorie related with the inaccuracy of the weakly coupled model in the presence of variability in the elastic constants. The methodology used allows to quantify the distance between the two poroelastics models and therefore propose the appropriate model for different conditions of loading and variability of the geological formation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Noções básicas de campos aleatórios</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Modelagem da poroelasticidade na escala de laboratório</b>	<b>20</b>
3.1	Equações da poroelasticidade linear . . . . .	20
3.1.1	Equilíbrio da mistura sólido-fluido . . . . .	21
3.1.2	Equação constitutiva para as tensões efetivas . . . . .	22
3.1.3	Balanço de massa global . . . . .	22
3.1.4	Lei de Darcy . . . . .	23
3.1.5	Formulação do modelo totalmente acoplado . . . . .	23
3.2	Modelo fracamente acoplado . . . . .	24
3.2.1	Formulação do modelo fracamente acoplado . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Modelagem estocástica de meios poroelásticos heterogêneos</b>	<b>29</b>
4.1	Representação estocástica dos coeficientes . . . . .	29
4.2	Formulação estocástica . . . . .	32
4.3	Método de Monte Carlo . . . . .	34
4.3.1	Geração de campos aleatórios . . . . .	35
4.4	Métodos de perturbação . . . . .	37
4.5	Técnicas de discretização do espaço estatístico . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Método de expansão assintótica aplicado ao modelo poroelástico</b>	

<b>fracamente acoplado</b>	<b>41</b>
5.1 Equações hierárquicas . . . . .	43
5.2 Equações efetivas . . . . .	45
5.2.1 Equações efetivas para as médias . . . . .	46
5.2.2 Equações efetivas para as autocovariâncias . . . . .	50
5.2.3 Sistema de equações efetivas . . . . .	51
5.3 Equações efetivas para o deslocamento . . . . .	54
5.3.1 Equações efetivas para as médias . . . . .	57
5.3.2 Equações efetivas para as autocovariâncias . . . . .	60
<b>6 Método de expansão assintótica aplicado ao modelo totalmente acoplado</b>	<b>66</b>
6.1 Equações hierárquicas . . . . .	67
6.2 Equações efetivas . . . . .	70
6.2.1 Equações efetivas para as médias . . . . .	70
6.2.2 Equações efetivas para as covariâncias cruzadas . . . . .	72
6.2.3 Equações efetivas para as autocovariâncias . . . . .	75
6.3 Reprodução do modelo fracamente acoplado . . . . .	83
6.3.1 Equação fracamente acoplada para a média de $p$ . . . . .	83
6.3.2 Equação fracamente acoplada para a autocovariância de $p$ . . . . .	85
<b>7 Discretização dos modelos poroelásticos</b>	<b>87</b>
7.1 Notação unificada para as equações efetivas . . . . .	87
7.2 Notação adotada para o método de Monte Carlo . . . . .	90
7.3 Formulação variacional . . . . .	91
7.4 Aproximação por elementos finitos . . . . .	94
7.4.1 Formulação semidiscreta . . . . .	95
7.4.2 Formulação completamente discreta . . . . .	97
<b>8 Simulações Numéricas</b>	<b>100</b>
8.1 Geração dos campos aleatórios . . . . .	102

8.2	Estudo numérico da convergência estatística . . . . .	110
8.3	Deterioração da solução das equações efetivas para variâncias elevadas	112
8.4	Comparação entre os modelos totalmente e fracamente acoplados .	122
<b>9</b>	<b>Conclusões</b>	<b>138</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>141</b>

# Lista de Figuras

## Figura

1.1	Espectro de escalas espaciais em um Reservatório de Petróleo . . . . .	6
8.1	Exemplo utilizado para validação da teoria bidimensional . . . . .	101
8.2	Realizações do campo Gaussiano $Y = \ln K$ com $m_Y = -3.028$ , (a) covariância exponencial $\sigma_Y = 1$ e $\lambda_Y = 10$ e (b) covariância fractal $\sigma_Y = 1$ e $\beta = 0.5$ . . . . .	103
8.3	Covariância exponencial dos campos gerados com a factoração LU	104
8.4	Covariância fractal dos campos gerados com a factoração LU . . . . .	105
8.5	Campos de pressão normalizado pelo carregamento vertical e da segunda componente da velocidade para $t=2$ dias . . . . .	106
8.6	Campos de pressão normalizado pelo carregamento vertical e da segunda componente da velocidade para $t=36$ dias . . . . .	107
8.7	Campo das componentes do deslocamento vertical e da tensão nor- mal para $t = 2$ dias . . . . .	108
8.8	Campo das componentes do deslocamento vertical e da tensão nor- mal para $t = 36$ dias . . . . .	109
8.9	Convergência estatística do primeiro momento da pressão para cova- riância exponencial . . . . .	110
8.10	Convergência estatística do segundo momento da pressão para cova- riância exponencial . . . . .	110
8.11	Convergência estatística do primeiro momento da pressão para co- variância fractal . . . . .	111

8.12	Convergência para o segundo momento da pressão para covariância fractal . . . . .	111
8.13	Evolução temporal do erro relativo da média da pressão entre os métodos de Monte Carlo e expansão assintótica, para diferentes variâncias. . . . .	112
8.14	Erro relativo da média da pressão com o tempo, para diferentes escalas de correlação. . . . .	113
8.15	Comparação entre os perfis da média da pressão normalizada obtidas via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos com diferentes graus de heterogeneidade . . . . .	115
8.16	Comparação entre os perfis do desvio padrão da pressão obtidas via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos com diferentes graus de heterogeneidade . . . . .	116
8.17	Comaparação entre os perfis médios da segunda componente da velocidade de Darcy obtidos via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos com diferentes graus de heterogeneidade	117
8.18	Comparação entre os perfis do desvio padrão da segunda componente da velocidade de Darcy obtidos via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos com diferentes graus de heterogeneidade . . . . .	118
8.19	Comparação entre os perfis médios do deslocamento vertical obtidos via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos	120
8.20	Comparação entre os perfis médios da tensão vertical obtidos via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos . .	121
8.21	Dependência espacial da derivada do traço da média do tensor total para três tempos: $\mathbf{t1} = 2$ dias, $\mathbf{t2} = 36$ dias e $\mathbf{t3} = 68$ dias. Meio é homogêneo . . . . .	122

8.22	Dependência espacial da derivada do traço da média do tensor total para três tempos: $\mathbf{t1} = 2$ dias, $\mathbf{t2} = 36$ dias e $\mathbf{t3} = 68$ dias. Meio heterogêneo, $E$ determinístico e $K$ aleatório, covariância exponencial	123
8.23	Dependência espacial da derivada do traço da média do tensor total para três tempos: $\mathbf{t1} = 2$ dias, $\mathbf{t2} = 36$ dias e $\mathbf{t3} = 68$ dias. Meio é heterogêneo $E$ determinístico e $K$ aleatório, covariância fractal . . .	124
8.24	Gráfico da dependência espacial da derivada do traço da média do tensor total para três tempos: $\mathbf{t1} = 2$ dias, $\mathbf{t2} = 36$ dias e $\mathbf{t3} = 68$ dias, quando $K$ e $E$ são aleatórios . . . . .	125
8.25	Comparação dos perfis da média da pressão normalizada obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para três tempos .	127
8.26	Comparação entre os perfis da média da pressão normalizada obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para dois tempos	128
8.27	Comparação entre os perfis da velocidade de Darcy na direção $y$ obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para três tempos . . . . .	129
8.28	Comparação entre os perfis da velocidade de Darcy na direção $y$ obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para dois tempos . . . . .	130
8.29	Comparação entre os perfis da médias do deslocamento vertical do sólido obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para três tempos . . . . .	132
8.30	Comparação entre os perfis da médias do deslocamento vertical do sólido ao longo do entre os modelos totalmente e fracamente acoplados para dois tempos . . . . .	133
8.31	Comparação entre os perfis da média da tensão efetiva vertical obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para três tempos . . . . .	134

8.32	Comparação entre os perfis da média da tensão efetiva vertical do sólido obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para dois tempos . . . . .	135
8.33	Comparação entre as curvas médias de produção de óleo obtidas pelos modelos fracamente e totalmente acoplados em meios homogêneos	136
8.34	Comparação entre as curvas médias de produção de óleo obtidas pelos modelos fracamente e totalmente acoplados em meios heterogêneos	137

# Lista de Tabelas

## Tabela

5.1	Sistema de equações efetivas do modelo fracamente acoplado . . . .	53
5.2	Sistema de equações efetivas do pos-processamento baseado em elasticidade linear . . . . .	65
6.1	Sistema de equações efetivas para as variáveis poroelásticas estendidas	79
6.2	Sistema de equações efetivas para as variáveis poroelásticas estendidas	80
6.3	Sistema de equações efetivas poroelásticas formulado nos campos potênciais . . . . .	81
6.4	Sistema de equações efetivas poroelásticas formulado nos campos potênciais . . . . .	82
6.5	Métrica para os modelos fracamente e totalmente acoplados . . . .	86
8.1	Propriedades do reservatório . . . . .	102

# Lista de Símbolos

$\mathbf{x}, \mathbf{y}$	vetores espaciais
$t$	tempo
$\Omega$	domínio em $\mathbb{R}^d$ , $d = 1, 2$ ou $3$ (dimensão espacial)
$\Gamma$	fronteira do domínio $\Omega$
$\mathbf{n}$	vetor unitario normal externo a $\Gamma$
$\mathcal{S}$	espaço amostral
$\mathcal{F}$	$\sigma$ -álgebra (subconjunto de $\mathcal{S}$ )
$P$	medida de probabilidade
$\omega$	evento
$X, Y$	campos aleatórios
$C_X(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	função de covariância do campo $X$
$C_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	função de covariância cruzada entre os campos $X$ e $Y$
$\hat{X}$	flutuação do campo aleatório
$\sigma_X^2(\mathbf{x})$	variância do campo $X$
$\sigma_X(\mathbf{x})$	desvio padrão do campo $X$
$m_X(\mathbf{x})$	média do campo aleatório $X$
$m_G$	média geométrica do campo aleatório $X$
$m_H$	média harmônica do campo aleatório $X$
$CV_X$	coeficiente de variação
$\lambda_X$	comprimento de correlação
$\beta$	expoente de Hurst

$K$	condutividade hidráulica
$S$	compressibilidade
$E$	módulo de Young
$\lambda, \mu$	constantes de elasticidade
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\mathbf{u}$	deslocamento do sólido
$p$	pressão do poro
$\mathbf{q}$	velocidade de Darcy
$\boldsymbol{\sigma}$	tensão efetiva
$\boldsymbol{\sigma}_T$	tensão total
$\boldsymbol{\mathcal{E}}$	matriz de deformações

# Capítulo 1

## Introdução

Fenômenos caracterizados pelo acoplamento hidromecânico em meios porosos envolvem dois processos termodinâmicos básicos: o movimento do fluido através dos poros e a deformação da matriz porosa, os quais interagem mutuamente. Variações na pressão do poro produzem alterações no estado de tensões efetivas do esqueleto poroso provocando a deformação da matriz porosa que por sua vez induz perturbações no escoamento do fluido devido a variações nas propriedades da rocha tais como permeabilidade e porosidade.

A modelagem computacional deste tipo de acoplamento possui inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento, tais como engenharia de petróleo, meio ambiente, geologia, hidrologia, mecânica dos solos, e biomecânica [Bear (1979), Wang (2000), Fung (1990)]. Em particular, nas aplicações na área de engenharia de petróleo o correto entendimento do acoplamento entre a hidrodinâmica e a geomecânica é de suma importância na análise dos fenômenos de subsidência e compactação de reservatórios durante prospecção do óleo. Devido ao peso das formações residentes na parte superior da camada geológica produtiva, esta encontra-se sob intensas solicitações mecânicas que são equilibradas por tensões no sólido e pela pressão do fluido intersticial (pressão do poro). O processo evolutivo de produção é caracterizado pela dissipação da pressão do fluido intersticial que por sua vez transfere solicitação para a matriz porosa que sofre um processo de compactação [Lewis et al. (1991)]. Desta forma, torna-se imprescindível desenvolver

uma modelagem precisa e realista destes fenômenos acoplados para que possamos descrevê-los com acurácia, melhorando as previsões da resposta do meio poroso.

Historicamente, o primeiro modelo de acoplamento hidromecânico surgiu da teoria de consolidação unidimensional proposta por Terzaghi (1925) o qual introduziu o importante conceito de tensões efetivas através da diferença entre o carregamento total aplicado sobre o meio poroso e a pressão do poro. Generalizações da teoria de Terzaghi para três dimensões baseadas na equação de difusão para a poro pressão foram propostas por Rendulic em 1936 e Terzaghi e Frölich em 1943, os quais introduziram o conceito de compressibilidade da matriz porosa, definida pela derivada da porosidade em relação à pressão [Terzaghi e R. (1962), Shiffman et al. (1969)]. Tais modelos negligenciam os efeitos das tensões de cisalhamento sobre a mudança de porosidade da matriz (dilatância) uma vez que incorporam somente deformações volumétricas do esqueleto poroso induzidas por variações da poro pressão [Shiffman et al. (1969), Lewis e Schrefler (1987)].

O conceito de meio poroelástico generalizado surge posteriormente incorporando a influência da componente desviadora das tensões efetivas sobre a hidrodinâmica [Biot (1941)]. Baseando-se no princípio das tensões efetivas e na lei de Hooke da teoria de elasticidade, Biot(1941) propôs um modelo tridimensional geral para descrever o acoplamento hidromecânico em formações geológicas. Subseqüentemente, efeitos de anisotropia e viscoelasticidade da matriz foram incorporadas à teoria poromecânica [Biot (1955), Biot (1956a), Biot (1956b), Biot e Willis (1957)]. Posteriormente, diversos autores [Shiffman et al. (1969), Lewis e Schrefler (1987), Gutierrez e Lewis (2002)] mostraram que a teoria simplificada baseada no conceito de compressibilidade pode ser reproduzida como caso particular da teoria geral de poroelasticidade ao desprezar os efeitos da componente desviadora da tensão efetiva sobre as deformações volumétricas da formação geológica.

A teoria de poroelasticidade é o pilar que sustenta a modelagem do acoplamento hidrogeomecânico em reservatórios de petróleo. Atualmente o modelo de Biot, concebido na época para descrever processos de consolidação de solos, vem

sendo amplamente utilizado em diversas aplicações relacionadas com a geomecânica de reservatórios de petróleo [Lewis et al. (1991), Longuemare et al. (2002)]. Teorias poromecânicas mais realistas baseadas em modelos constitutivos não lineares (poroplasticidade, poroviscoplasticidade) têm sido largamente utilizadas em geomecânica de rochas [Chen e Han (1988), Coussy (2004)].

Apesar dos avanços significativos obtidos na área de geomecânica de reservatórios de petróleo persiste ainda o paradigma de quando se faz necessário a utilização de modelos geomecânicos mais complexos. Os simuladores de reservatórios ainda incorporam efeitos geomecânicos somente através da compressibilidade, conduzindo a um acoplamento fraco entre as equações da hidromecânica e das tensões efetivas levando a uma redução substancial de esforço computacional [Gambolati et al. (2000), Gutierrez e Lewis (2002)].

Mesmo com a crescente disponibilidade de recursos computacionais, *softwares* mais robustos e de metodologias de discretização mais acuradas e computacionalmente eficientes na resolução de problemas práticos, a utilização do modelo poromecânico totalmente acoplado ainda encontra resistência. Tal fato se deve à maior complexidade e intensidade no acoplamento quando comparado com os modelos simplificados, o que induz aumento do esforço computacional na simulação de problemas em grande escala [Settari e Mourits (1998)]. Para evitar a resolução simultânea das equações da poromecânica e da hidrodinâmica, estratégias baseadas em algoritmos numéricos iterativos de desacoplamento vêm sendo estudadas por vários investigadores [Lewis et al. (1991), Longuemare et al. (2002), Mainguy e Longuemare (2002), Settari e Mourits (1998), Dean et al. (2006), Samier et al. (2006), Samier e Gennaro (2007)]. Como resultado das diversas formas de abordar o problema as diferentes metodologias computacionais foram classificadas em diferentes grupos de acordo com o grau de acoplamento. Conseqüentemente, surgiram modelos denominados: fracamente acoplado, explicitamente acoplado, iterativamente acoplado e totalmente acoplado. A escolha do procedimento adequado depende das peculiaridades de cada problema [Settari e Mourits (1998)].

O procedimento implícito ou totalmente acoplado resolve as equações de conservação de massa e momento linear simultaneamente nas variáveis deslocamento da rocha e pressão do fluido. Embora esta formulação seja capaz de incorporar elevado grau de acoplamento, a resolução simultânea do sistema linear advindo da técnica de discretização empregada conduz a um modelo computacionalmente caro quando utilizado em grandes escalas [Dean et al. (2006)]. Um procedimento alternativo consiste em resolver seqüencialmente as equações da hidrodinâmica e das tensões iterativamente em cada passo de tempo até atingir um determinado grau de convergência. Tal procedimento iterativo permite acomodar diferentes metodologias numéricas na resolução de cada equação [Samier et al. (2006)]. Experimentos computacionais reportados na literatura ilustram a proximidade entre a solução do modelo iterativo com a do modelo totalmente acoplado [Mainguy e Longuemare (2002), Longuemare et al. (2002), Gutierrez e Lewis (2002)]. Por outro lado, o procedimento iterativo pode elevar substancialmente o tempo computacional causando a perda de competitividade quando comparado com o modelo completamente acoplado [Samier e Gennaro (2007)].

A forma mais simples de tratar o problema explora o conceito de compressibilidade, levando ao surgimento do modelo fracamente acoplado caracterizado pelo acoplamento unidirecional entre as equações (*“one-way coupling”*). Mais precisamente, a poromecânica influencia a hidrodinâmica somente através da compressibilidade da rocha o qual desacopla o sistema em uma equação de difusão e outra de elasticidade. A equação da poromecânica é resolvida mediante um esquema de pós-processamento onde o gradiente da poro pressão, previamente calculado na discretização da equação de difusão, entra como termo de força de corpo no problema de elasticidade da matriz porosa. Isso significa que mudanças na poro pressão alteram o estado de tensões efetivas e o inverso não acontece. A vantagem deste método reside na não necessidade de resolução simultânea do sistema, facilitando o uso de diferentes metodologias numéricas apropriadas para cada equação do sistema. Por outro lado, dependendo da aplicação a captura do acoplamento exhibe

menor precisão, uma vez que os efeitos de dilatação devido às tensões de cisalhamento são mascarados pela resolução desacoplada da hidrodinâmica [Mainguy e Longuemare (2002)].

Algumas conclusões parciais reportadas na literatura sobre a necessidade da utilização de modelos hidrogeomecânicos mais complexos residem fortemente na geometria do reservatório e nas condições de contorno de Neumann induzidas pelo carregamento devido as interações com as camadas superiores, inferiores e laterais vizinhas à formação geológica produtiva. Tais efeitos macroscópicos estão fortemente relacionados com a natureza das deformações e da componente desviadora da tensão efetiva do reservatório. Em cada exemplo as condições de carregamento que invalidam o modelo fracamento acoplado baseado em compressibilidade são ilustradas mais adiante no Capítulo 3 e estão associadas a geometrias curvas do reservatório, presença de falhas e anisotropia [Lewis et al. (1991), Gutierrez e Lewis (2002), Samier et al. (2006)].

Apesar dos avanços recentes na área de Geomecânica de reservatórios, podemos observar na literatura a ausência de comparações entre os modelos fracamente e totalmente acoplados no caso de meios porosos altamente heterogêneos. Na modelagem clássica dos problemas de poroelasticidade, as equações que governam o acoplamento hidromecânico são dadas na escala de laboratório ( $m$ ), e os coeficientes poromecânicos que surgem nas equações são calculados experimentalmente nesta escala. Entretanto, em quase todos os casos práticos envolvendo extração de fluidos de reservatórios, os problemas geomecânicos são postos na escala de campo ( $km$ ). A Figura 1.1 mostra o espectro de escalas típico envolvido na modelagem hidrogeomecânica em uma formação geológica heterogênea. Uma maneira simplificada de prever o comportamento geomecânico do reservatório na escala de campo é admitir homogeneidade do meio poroso adotando valores experimentais dos parâmetros obtidos na escala de laboratório. Embora a hipótese de homogeneidade na escala macroscópica seja amplamente adotada, observações de campo mostram que raras vezes tal homogeneidade existe [Freeze (1975), Gelhar (1993),

Dagan (1989)]. Meios porosos naturais exibem heterogeneidade em um amplo espectro de escalas espaciais e temporais. Conseqüentemente, adotar um modelo puramente determinístico que mascare os efeitos da variabilidade das propriedades não é realista. Uma alternativa, seria descrever o meio poroso detalhadamente, o que implica em estimar um número extraordinariamente grande de medidas, procedimento inviável na prática. A forma errática das variações das propriedades associada à distribuição irregular destes inviabiliza também o uso de interpolação contínua entre os pontos de medição [Gelhar (1993)].

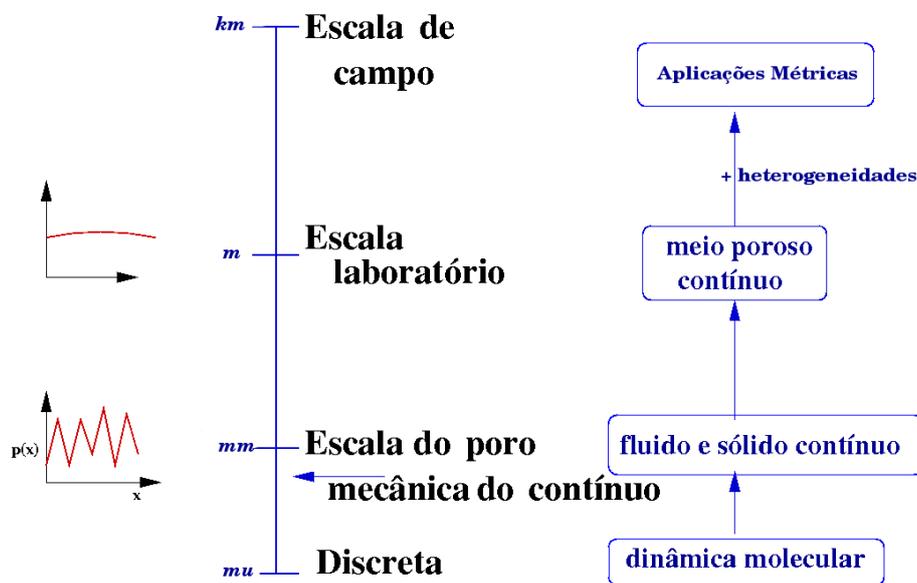


Figura 1.1: Espectro de escalas espaciais em um Reservatório de Petróleo

Para obtermos uma descrição mais realista do acoplamento hidromeecânico na escala de campo é necessário incorporar a variabilidade espacial das propriedades do material e também a incerteza devido à escassez de conhecimento detalhado da geologia (número limitado de amostras). Neste contexto, a teoria de campos aleatórios fornece uma ferramenta adequada para descrever os parâmetros do modelo [Dagan (1989), Gelhar (1993), Christakos (2005)]. A representação matemática dos coeficientes da geologia é dada pelo uso de funções aleatórias da posição, as quais expressam a variabilidade e a incerteza associadas à estas propriedades [Rubin (2003)]. Ao considerarmos os parâmetros de entrada do modelo como campos

aleatórios, as equações poroelásticas tornam-se equações diferenciais estocásticas com soluções dadas por campos aleatórios parametrizados pela posição e o tempo. O tratamento estocástico dado aos coeficientes conduz ao problema caracterizado por: conhecidas as distribuições de probabilidade dos parâmetros de entrada encontrar os momentos estatísticos das incógnitas do problema por resolução numérica das equações diferenciais parciais estocásticas. Na prática as informações provenientes dos dois primeiros momentos estatísticos das soluções (média, covariância), já são suficientes para as aplicações na engenharia de reservatórios [Gelhar (1993), Zhang (2002), Christakos (2005)].

Diversas técnicas de discretização de EDP's estocásticas têm sido propostas na literatura [Freeze (1975), Dagan (1989), Gelhar (1993), Zhang (2002)]. A mais tradicional, conhecida como método de Monte Carlo, envolve geração de um conjunto de amostras (realizações) dos coeficientes do modelo, de acordo com as estruturas estatísticas postuladas e a subsequente solução determinística do modelo para cada realização obtendo um conjunto de diferentes soluções com a mesma probabilidade estatística. A vantagem deste método é sua simplicidade robustez e facilidade para lidar com qualquer teor de heterogeneidade [Dagan (2002)]. Este método pode ser aplicado a problemas lineares e não lineares, não exibindo qualquer restrição quanto à magnitude da flutuação dos coeficientes (meios altamente heterogêneos). Sua limitação reside no elevado custo computacional [Zhang (2002)] associado a sua implementação.

Um outro procedimento adotado na literatura consiste no uso de técnicas perturbativas para a derivação de equações efetivas determinísticas para os momentos estatísticos. Exemplos desta técnica são os métodos de Expansão Assintótica e Truncamento Euleriano [Dagan (1989), Gelhar (1993), Rubin (1990), Keller (2001), Osness (1995), Bonilla e Cushman (2000), Li et al. (2003), Zhang (2002)]. Esta classe de métodos adota a hipótese de pequenas perturbações implicando na linearização do modelo através de um problema de fechamento (*"closure problem"*). Técnicas de solução das equações efetivas envolvem transformadas de Laplace no

tempo e Fourier no espaço [Cushman et al. (2002)], Funções de Green [Bonilla e Cushman (2000)], análise espectral [Gelhar (1986)], diferenças finitas e elementos finitos [Zhang (2002)]. Esta classe de métodos fornece aproximações acuradas para os problemas estocásticos quando a variabilidade dos parâmetros é pequena. Além desta restrição, em geral, somente os dois primeiros momentos estatísticos das soluções podem ser calculados e a aproximação destes momentos pode se tornar muito cara computacionalmente quando o número de variáveis envolvidas no sistema for elevado.

Por outro lado, métodos com notoriedade recente têm sido propostos, baseados na discretização do espaço estatístico. Campos aleatórios podem ser representados usando a expansão de Karhunen-Loève (quando sua função de covariância é conhecida) [Beran (1969)], expansões de Polinômios de Caos (*“Chaos Polynomial”*) [Ghanem e Spanos (1991)] ou generalizações destes polinômios [Xiu e Karniadakis (2002)]. A seleção de funções de base aleatórias para a aproximação do espaço estatístico dá origem a diferentes técnicas onde podemos salientar o método de Elementos Finitos Espectrais, desenvolvido por Ghanem e Spanos [Ghanem e Spanos (1991), Ghanem (1998), Roy e Grilli (1997), Zhang e Lu (2004), Lu e Zhang (2004)], onde os coeficientes de entrada são representados como uma série de Fourier usando expansão de Karhunen-Loève e as incógnitas do problema representadas usando polinômios de Hermite. Esta abordagem transforma o problema estocástico em um problema determinístico com dimensão maior (a incerteza é considerada uma dimensão a mais, além do tempo e espaço). Quando esta técnica é associada ao método de Elementos Finitos, o número de graus de liberdade necessários para a solução do problema é dado pelo produto do número de graus de liberdade espaciais e o número de coeficientes do Polinômio de Caos, aumentando consideravelmente o custo computacional [Nobile et al. (2008)]. O método de Colocação Estocástica consiste em uma outra forma de aproximação que permite o desacoplamento existente no método de Elementos Finitos Espectrais gerando equações determinísticas que podem ser resolvidas em cada ponto da colocação [Babūška

et al. (2007), Nobile et al. (2008)].

Embora a modelagem estocástica esteja bem desenvolvida para escoamentos e transporte em meios porosos rígidos [Dagan (2002)], avanços modestos têm sido alcançados no caso de meios porosos deformáveis heterogêneos [Frias et al. (2004)]. Desta forma, o objetivo deste trabalho é preencher esta lacuna. Nesta direção, pretendemos elucidar como se comportam as soluções dos modelos poroelásticos fracamente e totalmente acoplados na presença de incertezas nos parâmetros de entrada, análise ainda não abordada na literatura. Em particular, analisamos a acurácia do modelo baseado na compressibilidade na presença de variabilidade e incerteza na permeabilidade e constantes elásticas fazendo comparações com as soluções do problema de Biot. Fazemos uso da teoria de perturbação estocástica para ilustrar as diferenças entre os dois modelos devido somente à presença de heterogeneidade através de termos adicionais que surgem nos sistemas de equações efetivas. Mais precisamente, considerando aleatoriedade tanto na condutividade hidráulica quanto nas constantes elásticas do esqueleto poroso analisamos detalhadamente a generalização da teoria de poroelasticidade para meios heterogêneos à luz da modelagem estocástica no contexto da expansão assintótica com o objetivo de derivar equações efetivas para os momentos estatísticos das variáveis dos modelos fracamente e totalmente acoplados.

Neste contexto, nosso resultado principal é a derivação de um critério preciso para a validação do modelo fracamente acoplado baseado na estacionaridade dos momentos estatísticos da tensão total atuante na mistura sólido-fluido. O critério proposto neste trabalho generaliza o derivado por Gutierrez e Lewis (2002) para geologias homogêneas. Para ilustrar numericamente os resultados obtidos na análise assintótica, formulações variacionais e aproximações por elementos finitos são propostas e exemplos numéricos do problema de compactação de uma formação geológica heterogênea durante o processo de extração do fluido são realizadas em conjunção com o método de Monte Carlo.

Apresentamos, inicialmente no Capítulo 2 uma revisão da teoria de campos

aleatórios. No Capítulo 3 apresentamos a teoria de poroelasticidade de Biot na escala de laboratório bem como a versão simplificada desta teoria, onde os efeitos da componente desviadora da tensão efetiva sobre a hidrodinâmica são desprezados, resultando em um problema fracamente acoplado, onde a geomecânica influencia a percolação do fluido somente através da compressibilidade da rocha. No Capítulo 4 apresentamos os modelos estocásticos dos problemas de poroelasticidade resultantes do tratamento estatístico dado aos coeficientes, bem como alguns métodos de resolução utilizados na computação dos momentos estatísticos das soluções. Nos Capítulos 5 e 6 aplicamos o método de expansão assintótica aos modelos fracamente e totalmente acoplados estocásticos, obtendo sistemas de equações efetivas para os momentos estatísticos das variáveis poroelásticas. Em seguida, fazemos uma comparação entre as equações efetivas derivadas obtendo uma nova forma de validar o modelo fracamente acoplado. No Capítulo 7 apresentamos a discretização das equações efetivas obtidas nos Capítulos 5 e 6 bem como para as equações determinísticas obtidas para cada realização no contexto de Monte Carlo. O Capítulo 8 é dedicado às simulações numéricas. Finalmente no Capítulo 9 são apresentadas as conclusões ressaltando o aspecto inovador deste trabalho assim como sugestões de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Noções básicas de campos aleatórios

Neste capítulo apresentamos os principais conceitos que fundamentam a teoria de campos aleatórios que utilizaremos no decorrer deste trabalho. De uma forma geral, para cada posição espacial  $\mathbf{x}$  e instante de tempo  $t$ , um campo aleatório atribui uma variável aleatória governada por uma função de distribuição. Neste contexto identificamos comumente os conceitos de campos aleatórios e processos estocásticos, onde este último é tradicionalmente utilizado para descrever funções dependentes do tempo, governadas por equações diferenciais ordinárias estocásticas [Parzen (1962), Papoulis (1965)]. No presente contexto, os processos estocásticos envolvidos apresentam também dependência espacial sendo então governados por equações diferenciais parciais estocásticas [Dagan (1989), Gelhar (1993), Zhang (2002), Christakos (2005)].

Para caracterizar apropriadamente a estrutura estatística que sustenta os campos aleatórios em questão introduzimos a seguir alguns conceitos fundamentais: O espaço de probabilidade é caracterizado por uma tripla  $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ , onde  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ , é o espaço amostral formado por todos os resultados possíveis  $\omega$  de um experimento,  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\mathcal{S}$ , onde cada elemento de  $\mathcal{F}$  é denominado evento aleatório de  $\mathcal{S}$  e  $P$  uma medida de probabilidade definida sobre o espaço mensurável  $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ .

Uma variável aleatória real  $X := X(\omega)$ , discreta ou contínua, é uma função  $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada elemento  $\omega \in \mathcal{S}$  um único valor  $X(\omega)$ . A maneira

usual de mensurar estatisticamente os valores da variável  $X$  consiste em definir sua função de distribuição acumulada  $F$  da forma

$$F(x) := P[\omega \in \mathcal{S} : X(\omega) \leq x] = P(X \leq x).$$

a qual denota a probabilidade dos valores da variável aleatória  $X$  serem menores do que algum valor  $x$  fixado. Podemos notar que  $F(x)$  é uma função não decrescente de  $x$  com imagem no intervalo  $[0, 1]$ . Se  $F(x)$  admite diferenciabilidade então  $X$  é necessariamente uma variável aleatória contínua e podemos definir sua função de densidade de probabilidade

$$f(x) := \frac{dF(x)}{dx}.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo dado  $f(x)$  podemos definir  $F(x)$  da forma

$$F(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy.$$

Em muitas aplicações os modelos matemáticos que representam fenômenos físicos admitem como dados de entrada um conjunto de parâmetros susceptíveis à incerteza. Assim, fazendo uso da modelagem estocástica, para cada par  $(\mathbf{x}, t)$  os parâmetros físicos são tratados como variáveis aleatórias contínuas sendo atribuído a estas uma função de densidade de probabilidade.

A esperança matemática ou valor médio de uma variável aleatória  $X$  é definida por

$$E[X] := \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (2.1)$$

e a variância de  $X$  é definida por

$$\text{Var}(\mathbf{x}) := \sigma_X^2 := E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E^2[X]. \quad (2.2)$$

O desvio padrão de  $X$  é definido como  $\sigma_X := \sqrt{\sigma_X^2}$ . O valor médio de  $X$ , denominado também de primeiro momento, objetiva capturar o “centro” da distribuição

dos possíveis valores de  $X$  e a variância mede a dispersão ou espalhamento destes valores em torno da média. Se  $m_X := E[X] \neq 0$ , o grau de incerteza de  $X$  é medido pelo coeficiente de variação

$$CV := \frac{\sigma_X}{m_X}. \quad (2.3)$$

O modelo mais amplamente utilizado na caracterização de uma variável aleatória é a distribuição normal. Uma variável aleatória  $Y$  é Gaussiana ou normalmente distribuída, se sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp \left[ -\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right], \quad -\infty \leq y \leq \infty, \quad (2.4)$$

onde os parâmetros  $m_Y$  e  $\sigma_Y^2$  designam o valor médio e a variância de  $Y$ . Neste caso particular a variável aleatória normal denotada por  $Y := N(m_Y, \sigma_Y^2)$  é completamente caracterizada pela sua média e covariância.

Um conceito de grande importância nas aplicações deste trabalho é o de variável aleatória log-normal [Freeze (1975), Dagan (1989), Gelhar (1993)]. Considerando a função não linear da forma  $X = \exp Y$ , cuja inversa é  $Y = \ln X$ , se  $Y = N(m_Y, \sigma_Y^2)$ ,  $X$  é chamada de variável aleatória log-normal e sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y x} \exp \left[ -\frac{(\ln x - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right], \quad x \geq 0. \quad (2.5)$$

As médias e as variâncias das variáveis aleatórias  $Y$  e  $X = \exp Y$  satisfazem as relações [Gelhar (1993)]:

$$m_X = \exp \left( m_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2} \right), \quad (2.6)$$

$$\sigma_X^2 = \exp \left( 2m_Y + \sigma_Y^2 \right) \left[ \exp \left( \sigma_Y^2 \right) - 1 \right], \quad (2.7)$$

a flutuação de  $X$  em torno da média é dada por

$$\hat{X} = X - m_X = \exp(m_Y) \left[ \exp(\hat{Y}) - \exp\left(\frac{\sigma_Y^2}{2}\right) \right], \quad (2.8)$$

e o coeficiente de variação de  $X$  admite a representação

$$(CV_X)^2 = \frac{\sigma_X^2}{m_X^2} = \exp(\sigma_Y^2) - 1. \quad (2.9)$$

Finalmente definimos as médias geométrica e harmônica de  $X$  da forma [Dagan (1989)]:

$$m_G = \exp(m_Y), \quad (2.10)$$

$$m_H = \exp\left[m_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right]. \quad (2.11)$$

As definições anteriores são associadas à estatística de um ponto. Quando duas ou mais variáveis aleatórias são definidas simultaneamente em um espaço de probabilidade torna-se necessário a sua caracterização conjunta. Para estender as definições anteriores neste cenário definimos a distribuição cumulativa conjunta de duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  como

$$F_{XY}(x, y) := F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Da mesma forma,  $F_{XY}$  é monotonicamente crescente em cada uma das variáveis admitindo valores entre 0 e 1. A diferenciação de  $F(x, y)$  com respeito a  $x$  e  $y$  fornece a função de distribuição de probabilidade conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (2.12)$$

As funções de densidade de probabilidade marginais são definidas por:

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy; \quad f_Y(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx.$$

Duas variáveis aleatórias contínuas  $X$  e  $Y$  com densidades  $f_X$  e  $f_Y$  são ditas independentes se

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Denotando  $m_X = E[X]$  e  $m_Y = E[Y]$  as médias de  $X$  e  $Y$ , a covariância entre as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é definida por:

$$\text{Cov}(X, Y) := E[\hat{X}, \hat{Y}] = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = E[XY] - m_X m_Y. \quad (2.13)$$

A função de covariância desempenha papel fundamental neste trabalho, uma vez que é uma medida de associação linear entre variáveis aleatórias indicando o grau de correlação entre elas [Christakos (2005)]. Valores positivos da covariância indicam que  $Y$  cresce quando  $X$  incrementa e vice-versa para valores negativos. Definimos também a correlação entre duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  pela razão

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

onde  $|\rho_{XY}| \leq 1$  e  $\text{Cov}(X, Y) \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$  [Papoulis (1965)]. Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes então  $\rho_{XY} = 0$  e, conseqüentemente, não existe correlação entre elas.

Nas aplicações na área de meios porosos, parâmetros físicos tais como permeabilidade, porosidade e constantes elásticas admitem variações erráticas com incertezas descritas através de campos aleatórios com funções de covariância prescritas. A seguir apresentamos a generalização das definições acima para campos aleatórios:

Seja  $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade e  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3, \dots$ , um domínio espacial. Um campo aleatório escalar  $X(\mathbf{x}, \omega)$  é definido pela função

$$\begin{aligned} X : \Omega \times \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \omega) &\rightarrow X(\mathbf{x}, \omega), \end{aligned} \quad (2.14)$$

a qual pode ser interpretada como uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Fixando um evento  $\omega \in \mathcal{S}$ , a função  $X(\mathbf{x})$  é denominada realização do processo estocástico. Para cada  $\mathbf{x} \in \Omega$ , a dependência  $X(\omega)$  define uma variável aleatória do processo estocástico.

A extensão dos conceitos acima para campos aleatórios vetoriais é feita aplicando as definições acima a cada componente. Um campo aleatório vetorial  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \omega)$  é um conjunto de campos aleatórios escalares  $X_1(\mathbf{x}, \omega), X_2(\mathbf{x}, \omega), \dots, X_k(\mathbf{x}, \omega)$ , denotado por

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, \omega) = [X_1(\mathbf{x}, \omega), X_2(\mathbf{x}, \omega), \dots, X_k(\mathbf{x}, \omega)]^T. \quad (2.15)$$

No contexto de campos aleatórios a extensão das definições dos momentos estatísticos é imediata sendo apenas indexada pela posição. Definimos assim, as funções média e covariância da forma:

$$m_X(\mathbf{x}) = E[X(\mathbf{x})] \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} C_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \text{Cov}(X(\mathbf{x}), X(\mathbf{y})) = E[\hat{X}(\mathbf{x}) \cdot \hat{X}(\mathbf{y})] \\ &= E[X(\mathbf{x}) \cdot X(\mathbf{y})] - m_X(\mathbf{x})m_X(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde  $\hat{X}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{x}) - m_X(\mathbf{x})$  é a flutuação do campo  $X(\mathbf{x})$ . Quando a covariância é conhecida definimos a variância como

$$\sigma_X^2(\mathbf{x}) := C_X(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.18)$$

e a função de correlação espacial da forma

$$\rho_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{C_X(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sigma_X(\mathbf{x}) \cdot \sigma_X(\mathbf{y})}. \quad (2.19)$$

Para analisar o grau de correlação entre dois ou mais campos aleatórios definimos um momento estatístico adicional denominado de função de covariância cruzada. Denotando  $X$  e  $Y$  dois campos aleatórios e  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \Omega$ , a função cova-

riância cruzada é definida da forma

$$C_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := E \left[ (X(\mathbf{x}) - m_X(\mathbf{x})) (Y(\mathbf{y}) - m_Y(\mathbf{y})) \right]. \quad (2.20)$$

De forma análoga a (2.19), podemos definir a função de correlação cruzada espacial, da forma

$$\rho_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{C_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sigma_X(\mathbf{x}) \cdot \sigma_Y(\mathbf{y})}. \quad (2.21)$$

Os conceitos acima podem ser estendidos para campos aleatórios vetoriais. Assim, a matriz das funções de covariâncias cruzadas entre as componentes do vetor aleatório  $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = [X_1(\mathbf{x}), X_2(\mathbf{x}), \dots, X_k(\mathbf{x})]^T$ , é definida por

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[ C_{X_p X_q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right], \quad p, q = 1, 2, \dots, k \quad (2.22)$$

Por exemplo, para  $k = 2$ , temos

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} C_{X_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & C_{X_1 X_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ C_{X_2 X_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & C_{X_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix}.$$

Para descrever completamente a estrutura probabilística de um campo aleatório  $X(\mathbf{x}, \omega)$  é necessário especificar as funções de densidade de probabilidade conjunta para todas as variáveis aleatórias em cada ponto  $\mathbf{x} \in \Omega$ , o que consiste numa tarefa impraticável. Para simplificar a estrutura de dados adota-se, freqüentemente a hipótese de homogeneidade estatística (estacionaridade), onde postula-se que a distribuição estatística dos coeficientes de entrada no modelo são independentes da posição. Na maioria das aplicações práticas a hipótese de estacionaridade de segunda ordem ou estacionaridade fraca é adotada [Gelhar (1993), Christakos (2005)]. Logo, postulando que a média é constante e a covariância

depende somente do vetor  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  temos

$$m_X(\mathbf{x}) = m_X, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$C_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_X(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = C_X(\mathbf{r}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

Alguns processos naturais podem também ser aproximados por campos aleatórios isotrópicos, onde a função de covariância depende somente da distância  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  e não da orientação do vetor  $\mathbf{r}$ , implicando em equivalência em todas as direções.

O comportamento da covariância com a distância  $r$  é determinada pela organização ou grau de correlação entre as heterogeneidades geológicas. Dentre as funções de covariância frequentemente utilizadas para descrever formações geológicas, temos por exemplo a função de covariância Gaussiana

$$C_X(r) = \sigma_X^2 \exp\left(\frac{-4r^2}{\pi\lambda_X}\right), \quad (2.23)$$

e a função de covariância exponencial,

$$C_X(r) = \sigma_X^2 \exp\left(\frac{-r}{\lambda_X}\right). \quad (2.24)$$

A função exponencial é bastante usada na hidrodinâmica em meios porosos, onde  $\lambda_X$  denota o comprimento de correlação interpretado como a distância sobre o qual as correlações prevalecem. As relações (2.23) e (2.24) são definidas para meios isotrópicos e podem ser estendidas para meios anisotrópicos [Dagan (1989), Christakos (2005)].

Quando as geologias estudadas são caracterizadas por correlações longas, típicas de formações sedimentares, a covariância é descrita por um lei de potência [Mandelbrot e Wallis (1968)]

$$C_X(r) = cr^{-\beta}, \quad (2.25)$$

onde  $c$  é uma constante e  $\beta \geq 0$  é o expoente de Hurst. O grau de heterogeneidade nas diversas escalas envolvidas é determinado pelo fator de escalonamento

$\beta$ . Valores grandes de  $\beta$  correspondem a campos onde as heterogeneidades nas pequenas escalas de comprimento são enfatizadas. Por outro lado, valores pequenos de  $\beta$  enfatizam heterogeneidades nas grandes escalas [Glimm e Sharp (1991)]. A auto-similaridade de  $C_X$  é dada por

$$C_X(\alpha r) = \alpha^\beta C_X(r),$$

onde  $\alpha$  é o fator de escala. A relação acima mostra que a estrutura da  $C_X$  é preservada com uma mudança de escalas, dando origem a os campos denominados fractais caracterizados por processos estocásticos auto-similares [Gelhar (1993), Samorodnitsky e Taqqu (2000)].

No contexto de formações geológicas heterogêneas diversos processos naturais são bem aproximados por campos aleatórios com distribuição log-normal. Neste trabalho, os parâmetros físicos de entrada do modelo poroelástico em particular a condutividade hidráulica e o módulo de Young, considerados constantes nos modelos determinísticos na escala de laboratório, são representados como campos aleatórios estacionários com distribuição log-normal na escala de campo (Capítulo 4).

# Capítulo 3

## Modelagem da poroelasticidade na escala de laboratório

Neste capítulo apresentamos uma revisão das equações que modelam o acoplamento hidromecânico baseado na formulação de Biot (1941). Estas equações descrevem a interação entre a deformação da matriz porosa e o escoamento do fluido. A deformação da matriz porosa é governada pelas equações da elasticidade linear enquanto que o movimento do fluido pela lei de Darcy com a velocidade de percolação tomada relativa ao movimento da fase sólida. Em seguida apresentamos uma versão simplificada desta teoria, onde os efeitos da componente desviadora da tensão efetiva sobre a hidrodinâmica são desprezados, resultando em um problema fracamente acoplado, onde a geomecânica influencia a percolação do fluido somente através da compressibilidade da rocha.

### 3.1 Equações da poroelasticidade linear

Para apresentar as equações que regem o modelo poroelástico linear consideramos uma janela observacional da rocha que compõe o reservatório na escala de laboratório  $\mathcal{O}(10^0 m)$ . Nesta escala de resolução, observamos o meio poroso homogêneo, deformável e saturado por um único fluido, onde em cada ponto as fases sólida e fluida coexistem [Bear (1979), Coussy (2004)]. Como hipóteses simplificadoras supomos a ausência de efeitos gravitacionais e inerciais, incompressibilidade

da fase fluida e do sólido que compõe o esqueleto poroso e a matriz porosa é assumida elástica linear e isotrópica sofrendo pequenas deformações a partir de uma configuração livre de tensões. A seguir apresentamos o conjunto de equações propostas por Biot (1941).

### 3.1.1 Equilíbrio da mistura sólido-fluido

Sob a ausência de efeitos inerciais e gravitacionais a equação do balanço de momento linear da mistura sólido-fluido se reduz à condição de equilíbrio:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_T = 0, \quad (3.1)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_T$  é a tensão total que atua na mistura sólido-fluido. Para sólidos microscopicamente incompressíveis, onde o volume dos grãos que compõem a matriz porosa permanece inalterado durante a deformação, o princípio de Terzaghi é representado matematicamente pela decomposição

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}, \quad (3.2)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é a tensão efetiva,  $p$  a poro pressão e  $\mathbf{I}$  o tensor identidade. A relação (3.2) pode ser interpretada como uma decomposição da tensão total em uma parcela responsável pela deformação da matriz porosa ( $\boldsymbol{\sigma}$ ), a qual governa a transmissão dos esforços por contato direto entre os grãos, e outra ( $p\mathbf{I}$ ) dada pela pressão atuante no fluido. Combinando o princípio das tensões efetivas (3.2) com a equação do balanço (3.1), obtemos

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \nabla p = 0. \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Equação constitutiva para as tensões efetivas

Considerando a matriz porosa elástica linear, isotrópica, temos a seguinte relação Hookeana

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}), \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{u}$  representa o deslocamento do meio poroso,  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  o tensor de deformações,  $\text{div}\mathbf{u} = \text{tr}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u})$  a deformação volumétrica da matriz e  $\lambda$  e  $\mu$  as constantes elásticas de Lamé definidas como

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.5)$$

onde  $E$  é o módulo de Young ou de elasticidade longitudinal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. Para estabelecer uma relação linear entre a deformação e o gradiente dos deslocamentos adotamos a condição de compatibilidade geométrica no regime de pequenas deformações

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T \right). \quad (3.6)$$

### 3.1.3 Balanço de massa global

Sendo o fluido e o sólido microscopicamente incompressíveis, as equações de continuidade são dadas por

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \text{div}(\phi\mathbf{v}_f) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \text{div} \left( (1-\phi) \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.8)$$

onde  $\phi$  é a porosidade e  $\mathbf{v}_f$  e  $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}$  as velocidades do fluido e do sólido respectivamente. Somando (3.7) e (3.8), obtemos

$$\text{div} \left[ \phi \left( \mathbf{v}_f - \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \right) \right] + \text{div} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

Definindo  $\mathbf{q} = \phi \left( \mathbf{v}_f - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)$  a velocidade Darciana de percolação do fluido, o balanço de massa total é dado por

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (3.10)$$

### 3.1.4 Lei de Darcy

Na ausência de efeitos gravitacionais a equação de momento da fase fluida é representada pela lei de Darcy

$$\mathbf{q} = -K \nabla p, \quad (3.11)$$

a qual estabelece uma relação linear entre a velocidade de percolação e o gradiente da pressão onde  $K$  é a condutividade hidráulica do meio.

A seguir, formulamos o problema de poroelasticidade adotando os campos potenciais de deslocamentos e pressão como variáveis primárias [Biot (1941), Lewis e Schrefler (1987), Wang (2000)].

### 3.1.5 Formulação do modelo totalmente acoplado

Seja  $(0, T]$  um intervalo de tempo e  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $1 \leq d \leq 3$ ) um domínio com fronteira regular  $\Gamma$  e  $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal exterior, ocupado por um meio poroelástico, isotrópico, homogêneo, microscopicamente incompressível e saturado por um fluido Newtoniano. O problema de poroelasticidade totalmente acoplado é dado por:

**Problema 3.1** Dados os parâmetros  $K$ ,  $\lambda$  e  $\mu$ , determinar os deslocamentos do meio poroso  $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  e a pressão no poro  $p : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

satisfazendo

$$\left. \begin{aligned} \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{div} [\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] - \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div}(K \nabla p) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{em } \Omega, \quad (3.12)$$

com condições de contorno

$$p = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \quad (3.14)$$

onde  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ ,  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  com  $\Gamma_2$  denotando um segmento de fronteira rígido e impermeável e  $\Gamma_1$  uma subfronteira drenante com vetor de tração prescrito  $\mathbf{h}$  imposto pelo carregamento externo. Como o fluido e o sólido que constituem a matriz são assumidos incompressíveis, no instante inicial onde não ocorre a drenagem do fluido, o meio poroso responde de forma incompressível

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad t = 0. \quad (3.15)$$

Após o cômputo dos campos potenciais  $\{\mathbf{u}, p\}$  a velocidade  $\mathbf{q}$  e a tensão efetiva  $\boldsymbol{\sigma}$  são calculadas dos esquemas de pós-processamento considerando as leis de Darcy (3.11) e Hooke (3.2), respectivamente.

## 3.2 Modelo fracamente acoplado

O modelo de poroelasticidade totalmente acoplado implica em resolver simultaneamente as equações de equilíbrio e massa. Embora linear, quando utilizado na resolução de problemas de grande porte, que surgem por exemplo na modelagem do acoplamento geomecânico em reservatórios de petróleo, pode se tornar computacionalmente custoso e inviável na prática. Uma forma de simplificar a formulação é enfraquecer o acoplamento de tal forma que para cada passo de tempo calcula-se primeiramente a pressão do poro e depois o deslocamento do meio poroso

usando a equação de equilíbrio (3.1), através de um esquema de pós-processamento, no qual o gradiente da pressão atua como força de corpo conhecida. Tal versão simplificada da teoria de poroelasticidade vem sendo amplamente utilizada nos simuladores convencionais de reservatórios [Fjaer et al. (1992), Lewis et al. (1991), Settari e Mourits (1998)]. Embora mascare alguns efeitos importantes, tais como a dilatação da rocha induzida por cisalhamento, a vantagem de adotar a formulação desacoplada é a sua simplicidade matemática e computacional [Verruijt (2006)].

A seguir adotamos o procedimento descrito em Gutierrez e Lewis (2002), o qual elucida as simplificações necessárias para a obtenção do modelo simplificado a partir da teoria geral de poroelasticidade. O modelo fracamente acoplado baseia-se na definição da compressibilidade da matriz porosa, desprezando os efeitos da componente desviadora da tensão efetiva sobre o balanço de massa. Tais hipóteses são ilustradas a seguir. Tomando o traço na decomposição de Terzaghi (3.2) e usando a lei elástica linear da tensão efetiva (3.4), temos

$$\text{tr}\boldsymbol{\sigma}_T = (d\lambda + 2\mu)\text{tr}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) - dp.$$

onde  $d = 1, 2, 3$  denota a dimensão do problema. Denotando  $K_0 = (d\lambda + 2\mu)/d$  o módulo de deformação volumétrica da fase sólida, derivando a equação acima em relação ao tempo e assumindo regularidade suficiente para que as derivadas espacial e temporal comutem obtemos

$$K_0 \frac{\partial \text{div} \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{d} \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Definindo a compressibilidade da rocha por  $S := 1/K_0$  e usando a relação (3.5) a compressibilidade  $S$  pode ser calculada como função do módulo de Young e do coeficiente de Poisson, da forma

$$S = \frac{d}{d\lambda + 2\mu} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(d\nu - 2\nu + 1)E}. \quad (3.17)$$

Usando (3.16) em (3.10) e a lei de Darcy (3.11) o balanço de massa pode ser reescrito da forma

$$S \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(K \nabla p) = \frac{S}{d} \frac{\partial \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial t}. \quad (3.18)$$

Podemos observar claramente que sob a hipótese de invariabilidade no tempo do traço da tensão total atuante no sistema ( $\frac{\partial \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial t} = 0$ ), a equação acima fornece um modelo de difusão clássica desacoplado para a pressão. Para ilustrar a validade desta hipótese consideramos a decomposição  $\boldsymbol{\sigma}_T$  como a soma de um tensor referente a tensão hidrostática e uma componente desviadora, referente ao cisalhamento puro

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \frac{1}{d} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_T \mathbf{I} + \mathbf{D},$$

onde  $\mathbf{D}$  é o desviador da tensão efetiva ( $\operatorname{tr} \mathbf{D} = 0$ ). Derivando a equação de equilíbrio (3.1) em relação ao tempo e usando a decomposição acima, temos

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{d} \frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_T) \mathbf{I}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

Considerando a formulação variacional do resultado acima, multiplicamos por uma função teste  $\mathbf{v}$  em um espaço apropriado, integramos por partes e usamos a condição de contorno (3.13) para obter

$$\left( \frac{1}{d} \frac{\partial \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial t} \mathbf{v} \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \mathbf{v}, \, d\Gamma_1. \quad (3.19)$$

Podemos verificar na equação acima que, na ausência de efeitos transientes na componente distorcional  $\mathbf{D}$  e no carregamento externo  $\mathbf{h}$  temos  $\partial(\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_T)/\partial t = 0$ . Usando esta hipótese em (3.18) obtemos a equação desacoplada para a pressão da forma

$$S \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(K \nabla p) = 0.$$

A acurácia do resultado acima está fortemente associada às condições de contorno externas ao carregamento imposto nas rochas vizinhas ao reservatório produtivo. Nas situações onde o carregamento é uniformemente distribuído em uma subfron-

teira, levando a um problema unidimensional (ex. problema de Terzaghi) ou uniforme sobre todo o contorno do reservatório, o efeito da componente desviadora é desprezível [Lewis et al. (1991), Gutierrez e Lewis (2002), Mainguy e Longuemare (2002)]. Por outro lado, nas demais situações a parcela  $\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T / \partial t$  pode não ser desprezível e seu efeito deve ser analisado caso a caso, sendo fortemente influenciado pela natureza de condições de contorno que descrevam o carregamento externo imposto sobre o reservatório.

### 3.2.1 Formulação do modelo fracamente acoplado

Sob as hipóteses mencionadas anteriormente podemos enunciar o problema hidromeecânico fracamente acoplado da forma:

**Problema 3.2** Seja  $(0, T]$  um intervalo de tempo e  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$  com fronteira  $\Gamma$ . Dados os parâmetros  $K$  e  $S$ , encontrar a pressão  $p : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$S \frac{\partial p}{\partial t} - \text{div}(K \nabla p) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (3.20)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} p &= 0, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

e condição inicial

$$p = \bar{p}, \quad \text{em } \Omega, \quad (3.22)$$

onde  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$  e  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

Uma vez computada a pressão, o deslocamento e a tensão efetiva podem ser calculados resolvendo o seguinte problema pós-processado de elasticidade:

**Problema 3.3** Dadas as constantes de Lamé  $\lambda$  e  $\mu$  e a pressão  $p(\mathbf{x}, t)$  solução do Problema 3.2, achar o campo de deslocamentos  $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , satisfazendo

$$\nabla(\lambda \text{div} \mathbf{u}) + \text{div}[\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] = \nabla p, \quad \text{em } \Omega. \quad (3.23)$$

sujeito às condições de contorno

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Neste capítulo, apresentamos os modelos poroelásticos totalmente e fracamente acoplados. Nosso interesse particular neste trabalho é comparar tais modelos considerando agora a presença de heterogeneidades geológicas que influenciam a hidrodinâmica e a poromecânica introduzindo variabilidade nos coeficientes  $(K, \lambda, \mu)$ .

# Capítulo 4

## Modelagem estocástica de meios poroelásticos heterogêneos

Na modelagem poroelástica apresentada no capítulo anterior as equações que governam o acoplamento hidromecânico são postas na escala de laboratório (*metros*) e os coeficientes do modelo avaliados experimentalmente nesta escala. Porém, em muitas aplicações envolvendo simulações de reservatórios de petróleo ou aquíferos são postas na escala de campo (*quilômetros*). Neste cenário geológico formações naturais (solos e rochas) são genuinamente heterogêneas na escala de campo e suas propriedades físicas variam de forma irregular ao longo de distâncias maiores do que as da escala de laboratório somada à escassez de dados experimentais das propriedades. Desta forma a teoria de campos aleatórios constitui uma ferramenta apropriada para caracterizar tais propriedades físicas sujeitas a variabilidades e incertezas.

Neste capítulo apresentamos os modelos estocásticos poroelásticos resultantes do tratamento estatístico dado aos coeficientes, bem como alguns métodos de resolução utilizados na computação dos momentos estatísticos das soluções.

### 4.1 Representação estocástica dos coeficientes

Para introduzirmos variabilidade e incerteza nos coeficientes hidromecânicos, em particular na condutividade hidráulica  $K(\mathbf{x})$  e no módulo de Young  $E(\mathbf{x})$ ,

consideramos tais parâmetros como campos aleatórios. Por outro lado, dada a faixa reduzida de valores do coeficiente de Poisson  $0 \leq \nu \leq 0.5$ , os efeitos da variabilidade são desprezíveis quando comparados aos de  $K$  e  $E$  [Beacher e Ingra (1981), Zeitoun e Baker (1992)]. Assim desta forma, no desenvolvimento a seguir,  $\nu$  será tratado deterministicamente.

Dados de campo justificam a utilização da distribuição log-normal para a condutividade hidráulica [Freeze (1975), Dagan (1989), Gelhar (1993)] e o módulo de Young [Lumb (1966), Paice et al. (1996)]. Definindo os campos Gaussianos

$$Y(\mathbf{x}) =: \ln K(\mathbf{x}), \quad T(\mathbf{x}) =: \ln E(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

sendo  $K(\mathbf{x}) > 0$  e  $E(\mathbf{x}) > 0$ , adotando a hipótese de estacionaridade e isotropia para  $Y(\mathbf{x})$  e  $T(\mathbf{x})$ , as médias e as covariâncias são dadas por

$$\begin{aligned} m_Y &= \text{cte}, & C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= C_Y(r), \\ m_T &= \text{cte}, & C_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= C_T(r), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , com  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ . Os modelos de covariância utilizados neste trabalho para os campos  $Y$  e  $T$  são os de covariância exponencial (2.24) e fractal (2.25) descritas no Capítulo 2. Além disto, consideramos a hipótese que os campos  $Y(\mathbf{x})$  e  $T(\mathbf{x})$  são independentes entre si.

Denotando  $X = \{K, E\}$  e  $Z = \{Y, T\}$ , considerando  $X$  campo aleatório Gaussiano com função de densidade de probabilidade univariada e usando (2.6)-(2.8) e (2.10) temos as relações:

$$\begin{aligned} m_X(\mathbf{x}) &= \exp\left(m_Z + \hat{Z}(\mathbf{x})\right) = \exp(m_Z) \exp\left(\hat{Z}(\mathbf{x})\right) \\ &= X_G \exp\left(\frac{\sigma_Z^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} C_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= E\left[\exp(Z(\mathbf{x})) \exp(Z(\mathbf{y}))\right] - m_X(\mathbf{x})m_X(\mathbf{y}) \\ &= X_G^2 \exp\left(\frac{\sigma_Z^2}{2}\right) \left[\exp(C_Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde  $X_G$  é a média geométrica do campo  $X$ .

Na ausência de incerteza no coeficiente de Poisson em (3.5) e (3.17), temos as seguintes relações entre as constantes de Lamé, compressibilidade e o módulo de Young

$$\lambda(\mathbf{x}) = c_1 E(\mathbf{x}), \quad c_1 = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (4.5)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = c_2 E(\mathbf{x}), \quad c_2 = \frac{1}{2(1+\nu)}, \quad (4.6)$$

$$S(\mathbf{x}) = \frac{c_3}{E(\mathbf{x})}, \quad c_3 = \frac{1}{(dc_1 + 2c_2)}. \quad (4.7)$$

Definindo  $R := \ln S$  e tomando o logaritmo em (4.7) temos as seguintes relações entre os momentos dos campos  $R$  e  $T$  associados ao módulo de Young e compressibilidade respectivamente

$$\begin{cases} m_R = \ln c_3 - m_T, \\ C_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -C_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \sigma_R^2 = \sigma_T^2, \end{cases} \quad (4.8)$$

e para um campo escalar  $X$  qualquer temos a seguinte relação

$$C_{RX}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -C_{TX}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (4.9)$$

Alem disto, temos também as relações entre as médias geométricas de  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $S$  e  $E$  [ $E_G = \exp(m_T)$ ]

$$\lambda_G = c_1 E_G, \quad \mu_G = c_2 E_G, \quad S_G = \frac{c_3}{E_G}. \quad (4.10)$$

Estabelecida a estrutura estatística dos parâmetros de entrada, formulamos a seguir o modelo poroelástico estocástico.

## 4.2 Formulação estocástica

Seja  $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade, onde  $\mathcal{S}$  é o espaço amostral,  $\mathcal{F}$  a  $\sigma$ -álgebra e  $P$  a medida de probabilidade. Denotando  $I = (0, T]$  um intervalo de tempo e  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ), com fronteira  $\Gamma$  suave e vetor unitário normal externo  $\mathbf{n}$ , um domínio macroscópico ocupado por um reservatório poroelástico heterogêneo. Então temos o seguinte problema:

**Problema 4.1** Sejam  $\{\omega, \mathbf{x}, t\} \in \mathcal{S} \times \Omega \times I$  um evento básico, a posição espacial e o tempo do processo estocástico respectivamente. Dadas as estruturas estatísticas das variáveis aleatórias com distribuição log-normal  $K(\mathbf{x}, \omega)$  e  $E(\mathbf{x}, \omega)$ , achar os momentos estatísticos dos campos aleatórios de deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega)$ , pressão de poro  $p(\mathbf{x}, t, \omega)$ , tensão efetiva  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t, \omega)$ , e velocidade de Darcy  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t, \omega)$  satisfazendo

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} &= 0, \\ \mathbf{q} &= -K \nabla p, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}), \end{aligned} \right\} \text{ em } \Omega \times \mathcal{S}, t \in [0, T], \quad (4.11)$$

sujeito às condições de fronteira e inicial

$$p = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{em } \Omega \times \mathcal{S}, \quad t = 0, \quad (4.13)$$

onde o carregamento imposto  $\mathbf{h}$  é assumido como uma função determinística.

De forma análoga podemos enunciar a formulação estocástica do problema fracamente acoplado da forma:

**Problema 4.2** Sejam  $\{\omega, \mathbf{x}, t\} \in \mathcal{S} \times \Omega \times I$  um evento básico, a posição espacial e o tempo do processo estocástico, respectivamente. Dadas as estruturas estatísticas

com função de distribuição log-normal de  $K(\mathbf{x}, \omega)$  e  $S(\mathbf{x}, \omega)$ , encontrar os momentos estatísticos dos campos pressão de poro  $p(\mathbf{x}, t, \omega)$  e velocidade de Darcy  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t, \omega)$  satisfazendo

$$\left. \begin{aligned} S \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{q}) &= 0, \\ \mathbf{q} &= -K \nabla p, \end{aligned} \right\} \text{ em } \Omega \times \mathcal{S}, t \in [0, T], \quad (4.14)$$

sujeito as condições de fronteira e inicial

$$\begin{aligned} p &= p_0, & \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$p = 0, \quad \text{em } \Omega \times \mathcal{S}, \quad t = 0, \quad (4.16)$$

onde  $p_0$  é considerada uma função determinística.

Uma vez computados os momentos da pressão, o esquema de pós-processamento dos momentos do campo de deslocamento é dado por:

**Problema 4.3** Dados os momentos do campo aleatório  $p(\mathbf{x}, t, \omega)$ , solução do Problema 4.2, a estrutura estatística com função de distribuição log-normal de  $E(\mathbf{x}, \omega)$ , achar os momentos do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega)$ , tal que

$$\operatorname{div}[\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) = \nabla p, \quad \text{em } \Omega \times \mathcal{S}, \quad (4.17)$$

sujeito às condições de contorno

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{h}, & \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \\ \mathbf{u} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ao tratarmos os parâmetros de entrada do modelo como campos aleatórios, as equações poroelásticas tornam-se estocásticas com soluções dadas por funções aleatórias dependentes de  $(\mathbf{x}, t, \omega)$ . O problema fundamental consiste em, dada uma distribuição de probabilidades para os coeficientes encontrar procedimentos para computar as distribuições de probabilidade das variáveis poroelásticas. De forma

geral, tal nível de informação é muito sofisticado e custoso computacionalmente. Na prática computar os dois primeiros momentos estatísticos, os quais fornecem informações sobre a média e a variância, já é suficiente para as aplicações que desejamos [Gelhar (1993), Zhang (2002), Christakos (2005)].

A seguir apresentamos alguns métodos tradicionais de resolução para o cômputo dos momentos estatísticos das soluções.

### 4.3 Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é uma técnica tradicional de simulação numérica direta amplamente usada para computar os momentos estatísticos das variáveis dependentes. Em muitos casos as soluções numéricas obtidas por este método são tratadas como soluções exatas para testar a precisão de outros métodos [Dagan (1989), Zhang (2002)]. O procedimento de implementação do método é dividido em três etapas: A primeira consiste na geração de um conjunto de realizações dos coeficientes de entrada do modelo, em nosso caso a condutividade hidráulica  $K$  e o módulo de Young  $E$ . Em seguida as equações determinísticas são resolvidas numericamente para cada realização  $k$  gerando um conjunto de possíveis soluções do problema (pressão, deslocamentos, tensão e velocidade). Finalmente, após a obtenção do conjunto das soluções  $g_k = \{p_k, \mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\sigma}_k\}$  do problema indexadas para cada realização  $k = 1, 2, 3, \dots, M$ , os dois primeiros momentos estatísticos, média  $m_g^M$ , covariância  $C_g^M$  e variância  $\sigma_g^M$  associadas às  $M$  realizações, são calculados numericamente da seguinte forma:

$$m_g^M(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M g_k(\mathbf{x}), \quad (4.19)$$

$$C_g^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left( g_k(\mathbf{x})g_k(\mathbf{y}) - m_g^M(\mathbf{x})m_g^M(\mathbf{y}) \right), \quad (4.20)$$

$$\sigma_g^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left( [g_k(\mathbf{x})]^2 - [m_g^M(\mathbf{x})]^2 \right). \quad (4.21)$$

Sob a hipótese de convergência estatística, quando  $M \rightarrow \infty$ , os momentos computados numericamente convergem para os momentos da solução do problema contínuo. Para o cômputo de  $M$  adotamos o critério de convergência de Cauchy, avaliando o erro relativo  $Er$  para duas realizações sucessivas. Por exemplo, para a média temos

$$Er(m_g^M) = \frac{\|m_g^M - m_g^{M-1}\|}{\|m_g^M\|}, \quad (4.22)$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma do máximo. Para uma tolerância prescrita  $\epsilon$  o critério de convergência é dado por:

$$|Er(m_g^{M+1}) - Er(m_g^M)| < \epsilon. \quad (4.23)$$

De forma análoga, definimos os critérios de convergência para a variância e covariância.

Uma grande vantagem do método de Monte Carlo é sua simplicidade e robustez [Dagan (2002)]. Os momentos de ordem mais alta da solução também podem ser computados numericamente. Além disto, ao contrário dos métodos perturbativos apresentados a seguir, a acurácia do método de Monte Carlo não está restrita à pequenas flutuações dos coeficientes, podendo ser aplicado a meios altamente heterogêneos. Sua limitação reside no elevado custo computacional, sendo necessário em alguns casos um grande número de realizações para se obter convergência estatística [Dagan (1989), Zhang (2002)].

### 4.3.1 Geração de campos aleatórios

A geração e a qualidade dos campos aleatórios associados aos parâmetros físicos de entrada do modelo possui papel decisivo na precisão do método de Monte Carlo. O objetivo das diversas técnicas de geração de campos aleatórios propostos na literatura é a construção de mapas geológicos que reflitam de forma precisa a estrutura estatística postulada para os coeficientes. Dentre os métodos mais utilizados podemos destacar: Método das bandas rotativas (*Turning bands*) [Mantoglou

e Wilson (1982)], Método espectral [Christakos (2005)], Método da decomposição LU da matriz de covariâncias [Harter (1994), Zhang (2002), Christakos (2005)].

Neste trabalho adotamos o método de decomposição de matrizes LU, o qual, segundo Christakos (2005) é o que exibe melhor qualidade para campos aleatórios Gaussianos. A aplicação desta técnica consiste basicamente em três passos: No primeiro, dado um modelo de covariância  $C_X(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)(i, j = 1, 2, \dots, m)$  calculamos a correspondente matriz de covariâncias discreta de dimensão  $m \times m$

$$\mathbf{C}_X^M = \begin{bmatrix} C_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) \dots C_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m) \\ C_X(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \dots C_X(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ C_X(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1) \dots C_X(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m) \end{bmatrix}.$$

Sendo  $\mathbf{C}_X^M$  uma matriz simétrica e positiva definida, o segundo passo consiste na decomposição em matrizes triangulares superior L e inferior U (Decomposição de Cholesky), da forma

$$\mathbf{C}_X^M = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

onde  $\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$ . Finalmente, um campo correlacionado X, de média zero e covariância  $\mathbf{C}_X^M$  é obtido tomando o produto da matriz triangular superior com um vetor V de  $m$  variáveis aleatórias Gaussianas independentes de média zero e variância unitária.

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{V},$$

onde  $\mathbf{X}^T = [X(\mathbf{x}_1), \dots, X(\mathbf{x}_m)]$ . De fato a covariância de X é dada por  $\langle \mathbf{X}\mathbf{X}^T \rangle = \mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{V}^T\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{I}\mathbf{U} = \mathbf{C}_X^M$ . Como X possui média nula, um campo aleatório Y ( $\mathbf{Y}^T = [Y(\mathbf{x}_1), \dots, Y(\mathbf{x}_m)]$ ), com média  $E[Y(\mathbf{x})] \neq 0$  pode ser gerado fazendo uso da relação

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{V} + \mathbf{M},$$

onde  $\mathbf{M}^T = E[Y(\mathbf{x}_1), \dots, Y(\mathbf{x}_m)]$ .

A limitação deste método esta no requerimento de memoria para armazenar

a matriz covariâncias [Zhang (2002)]. Conforme Bruining et al. (1997), alguns cuidados devem ser tomados quando se utiliza o método de decomposição para geração de campos aleatórios com leis de potência.

#### 4.4 Métodos de perturbação

Na área de transporte e escoamento em meios porosos heterogêneos uma técnica alternativa, amplamente discutida na literatura, consiste na derivação de equações efetivas determinísticas para os momentos estatísticos das incógnitas do problema [Bakr et al. (1978), Dagan (1989), Neuman e Orr (1993), Gelhar (1993), Osness (1995), Tartakovsky e Neuman (1999), Bonilla e Cushman (2001), Guadagnini e Neuman (2001), Keller (2001), Li et al. (2004)]. Esta classe de métodos baseia-se em perturbar o problema determinístico por intermédio de um parâmetro, usualmente tomado como o desvio padrão de  $Y = \ln K$ , para gerar uma hierarquia de modelos perturbados. O estabelecimento do truncamento e da ordem da acurácia do esquema perturbativo implica na linearização do modelo dando origem ao chamado problema de fechamento (“*closure problem*”) que surge devido ao fato de existir mais incógnitas do que equações. O cômputo dos momentos estatísticos no sistema de equações perturbadas dá origem às equações efetivas que governam as médias e as covariâncias das incógnitas [Zhang (2002)].

Na classe de métodos perturbativos a técnica de truncamento Euleriano tem sido amplamente utilizada na derivação de equações efetivas [Gelhar (1993), Keller (2001), Li et al. (2004)]. Neste contexto, cada variável estocástica é decomposta em um termo da média e flutuação, da forma  $Y = \langle Y \rangle + \hat{Y}$ . As decomposições são introduzidas nas equações estocásticas obtendo-se duas equações acopladas, uma referente à média e outra às flutuações. A partir deste sistema, equações efetivas para os momentos das incógnitas são derivadas fazendo uso do problema de fechamento, assumindo que as perturbações são relativamente pequenas quando comparadas com o valor da média de tal forma que termos contendo produtos de perturbações de terceira ordem são desprezados [Gelhar (1993), Keller (2001)].

Este tipo de perturbação gera um forte acoplamento nas equações efetivas resultantes, tornando custosa sua resolução [Li et al. (2004)].

Ainda no contexto das técnicas perturbativas, um procedimento alternativo consiste em postular uma expansão assintótica da forma  $Y = Y_0 + Y_1 + Y_2 \dots$  com cada componente  $Y_i$  da ordem  $i$  do desvio padrão  $\sigma_Y$ . Introduzindo as expansões no modelo estocástico e agrupando em potências da mesma  $\mathcal{O}(\sigma_Y^n)$   $n = 0, 1, \dots$ , obtemos um sistema de equações hierárquicas. A equação em ordem zero corresponde ao modelo determinístico que governa o meio homogêneo [Dagan (1989)]. Uma vantagem deste método é que as equações efetivas resultantes podem ser resolvidas sequencialmente.

Na resolução dos problemas estocásticos de ordem superior diversas técnicas podem ser empregadas, onde destacamos as técnicas de função de Green determinística e aleatória [Tartakovsky e Neuman (1999)]. Neste contexto, os momentos das variáveis dependentes são representados por equações integro-diferenciais, onde a função de Green surge como núcleo. A análise espectral também pode ser empregada [Bakr et al. (1978), Gutjhar e Gelhar (1981)], onde as equações perturbadas são transformadas para um domínio de frequência usando o teorema da representação de Fourier-Stieltjes, para obter o espectro das incógnitas como função do espectro do parâmetro de entrada do modelo. Em seguida, os momentos estatísticos são obtidos fazendo uso da transformada inversa de Fourier.

Quando a variabilidade dos parâmetros é pequena as técnicas de perturbação fornecem aproximações acuradas para os problemas estocásticos [Dagan (1989), Zhang (2002), Li et al. (2004)]. Mais uma vez salientamos que, em geral somente os dois primeiros momentos estatísticos das soluções são calculados e a aproximação destes momentos pode tornar extremamente complexa e muito custosa computacionalmente quando o número de variáveis envolvidas no sistema for elevado.

## 4.5 Técnicas de discretização do espaço estatístico

Nesta seção destacamos uma classe de métodos baseados na discretização do espaço estatístico que vêm recebendo notoriedade recentemente. Campos aleatórios podem ser representados usando expansão de Karhunen-Loève [Beran (1969)], expansão em Polinômio de Caos (“*Chaos Polynomial*”) [Ghanem e Spanos (1991)] ou generalizações destes polinômios [Xiu e Karniadakis (2002)].

A expansão de Karhunen-Loève representa os campos aleatórios como combinação linear de um número infinito de variáveis aleatórias não correlacionadas, por exemplo  $Y = \ln K$ , pode ser representado da forma

$$Y(\mathbf{x}, \omega) = m_Y(\mathbf{x}) + \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n(\omega) f_n(\mathbf{x})$$

onde  $\{\xi_n(\omega)\}$  é um conjunto de variáveis aleatórias Gaussianas não correlacionadas de média zero  $E[\xi_n(\omega)]$  e covariância  $E[\xi_m(\omega)\xi_n(\omega)] = \delta_{m,n}$ . As funções  $\{f_n(\mathbf{x})\}$  denotam o conjunto de autovetores ortogonais determinísticos sobre o domínio  $\Omega$  e os escalares  $\{\lambda_n\}$  denotam os autovalores do núcleo  $C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , satisfazendo a equação integro-diferencial

$$\int_{\Omega} C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f_m(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \lambda_m f_m(\mathbf{x}).$$

A expansão de Polinômio de Caos representa os campos aleatórios como combinação linear infinita de polinômios de Hermite no caso de serem construídos a partir do conjunto ortonormal Gaussiano  $\{\xi_n(\omega)\}$  com coeficientes determinísticos.

A aplicação destas expansões em conjunção com métodos numéricos foi proposta originalmente por Ghanem e Spanos [Ghanem e Spanos (1991)] para equações elípticas com coeficientes aleatórios. A técnica de discretização é denominada de método Espectral de Galerkin e envolve uma expansão Karhunen-Loève do parâmetro de entrada e uma expansão de polinômios de Hermite para a solução do problema. Os coeficientes da série são determinados num esquema tipo Galerkin. Esta técnica transforma o problema estocástico em um problema determinístico

com dimensão maior. Este método vem sendo aplicado na modelagem de escoamentos em meios porosos rígidos [Ghanem (1998), Roy e Grilli (1997), Zhang e Lu (2004) e Lu e Zhang (2004)]. Esta abordagem para a resolução de equações elípticas estocásticas foi desenvolvida e generalizada recentemente por diversos pesquisadores [Babüska e Chatzipantelidis (2002), Matthies e Keese (2005)]. Em particular, Xiu e Karniadakis [Xiu e Karniadakis (2002)] adotaram uma versão generalizada da expansão de polinômios de Hermite incluindo outros polinômios ortogonais.

Uma outra técnica numérica alternativa recente é o método estocástico de colocação [Babüska et al. (2007), Nobile et al. (2008)]. Nesta aproximação são usadas as raízes dos polinômios de aproximação de ordem maior como pontos onde são construídas as aproximações. Este método apresenta menor custo computacional comparado com o do método Espectral de Galerkin.

Nos capítulos seguintes exploramos uma técnica de perturbação. Mais precisamente a de expansão assintótica, para tentar esclarecer as diferenças adicionais que possam surgir entre os modelos fracamente e totalmente acoplados na presença de heterogeneidades e incertezas.

# Capítulo 5

## Método de expansão assintótica aplicado ao modelo poroelástico fracamente acoplado

Com o objetivo de elucidarmos as hipóteses que sustentam os modelos fracamente e completamente acoplados descritos anteriormente no caso de meios heterogêneos, neste capítulo fazemos uso da técnica de expansão assintótica no sentido de Zhang (1999), aplicando o método ao problema estocástico resultante do modelo fracamente acoplado. Tal método vem sendo amplamente utilizado para descrever a hidrodinâmica e transporte de solutos em meios porosos heterogêneos, particularmente no estudo da macrodispersão de solutos onde a técnica é capaz de prover relações de fechamento para a macrodispersividade do meio explorando sua relação com as flutuações do campo de velocidades [Dagan (1989), Osness (1995), Alvarado et al. (1998), Tartakovsky e Neuman (1998), Zhang (1999), Bonilla e Cushman (2001), Cushman et al. (2002), Zhang (2002), Hu et al. (2002)]. Por outro lado, a aplicação do método a meios porosos deformáveis ainda se encontra em estado embrionário. Dada a forma determinística do resultado obtido pelas técnicas de perturbação, representada por meio de equações efetivas para os momentos, este método pode ser explorado na melhor compreensão da disparidade entre os dois modelos de acoplamento geomecânico (fracamente e totalmente acoplados) na presença de heterogeneidades.

No contexto perturbativo, as variáveis aleatórias são decompostas em médias e flutuações em torno da média e depois expandidas em séries de potências em termos de um parâmetro que quantifica a variabilidade da formação geológica (comumente tomado como o desvio padrão dos coeficientes de entrada do modelo). Em seguida, as equações diferenciais nas diferentes ordens da escala hierárquica são obtidas coletando potências idênticas do parâmetro na expansão. O problema de fechamento que surge naturalmente, consiste em estabelecer uma ordem da aproximação e truncar a série, desprezando os termos de mais alta ordem assumindo que o parâmetro de perturbação seja pequeno.

Salientamos que, diferentemente de Dagan (1989), Zhang e Winter (1999), além de introduzir variabilidade na condutividade hidráulica, o presente trabalho incorpora incerteza na compressibilidade da rocha tratando este parâmetro como um campo aleatório. Para facilitar a exposição, revisitamos o problema estocástico do modelo fracamente acoplado nos campos de pressão e velocidade.

**Problema 5.1** Dadas as estruturas estatísticas de  $Y = \ln K$  e  $R = \ln S$ , assumidos campos aleatórios Gaussianos estacionários, isotrópicos e independentes entre si, encontrar os momentos estatísticos da pressão do poro  $p$  e velocidade de Darcy  $\mathbf{q}$ , satisfazendo

$$\begin{cases} S \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0, \\ \mathbf{q} = -K \nabla p, \end{cases} \quad \text{em } \Omega \times \mathcal{S}, t \in [0, T], \quad (5.1)$$

sujeito as condições de fronteira

$$\begin{aligned} p &= 0, & \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

e condição inicial

$$p = p_D, \quad \text{em } \Omega \times \mathcal{S}, \quad t = 0, \quad (5.3)$$

onde  $p_D$  é considerada uma função determinística.

## 5.1 Equações hierárquicas

Seguindo a metodologia proposta por Zhang (1999), escolhemos como parâmetros de perturbação os desvios padrão dos campos aleatórios  $Y$  e  $R$ , denotados por  $\sigma_Y$  e  $\sigma_R$  respectivamente, ambos assumidos da mesma ordem de magnitude. Sob esta hipótese definimos o parâmetro de perturbação  $\sigma$  como  $\sigma = \mathcal{O}(\sigma_Y) = \mathcal{O}(\sigma_R)$ . Ao adotarmos  $\sigma$  como parâmetro de perturbação, o problema estocástico tende para o determinístico a medida que  $\sigma_Y$  e  $\sigma_R$  tendem a zero. Porém, há que ressaltar que além de  $\sigma$ , as estruturas de correlação dos parâmetros físicos, o tamanho do domínio do escoamento em relação à escala de correlação e as condições de fronteira podem também desempenhar um papel importante na acurácia das aproximações das soluções [Zhang e Winter (1999), Bonilla e Cushman (2001)].

A seguir desenvolvemos o conjunto de equações hierárquicas. Para isto decomponemos aditivamente os campos  $\ln K$  e  $\ln S$  nas suas médias e flutuações

$$\ln K = m_Y + \hat{Y}, \quad \text{e} \quad \ln S = m_R + \hat{R}. \quad (5.4)$$

Usando a definição de média geométrica em (5.4), os campos  $K$  e  $S$  podem ser expandidos em torno de  $K_G$  e  $S_G$  respectivamente, da forma

$$K = K_G \left( 1 + \hat{Y} + \frac{\hat{Y}^2}{2!} + \dots \right), \quad (5.5)$$

e

$$S = S_G \left( 1 + \hat{R} + \frac{\hat{R}^2}{2!} + \dots \right). \quad (5.6)$$

Em seguida, postulamos a expansão assintótica para a poro pressão e para a velocidade

$$\begin{cases} p = p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(0)} + \mathbf{q}^{(1)} + \mathbf{q}^{(2)} + \dots, \end{cases} \quad (5.7)$$

onde  $p^{(n)} = \mathcal{O}(\sigma^n)$ , e  $\frac{p^{(n+1)}}{p^{(n)}} \rightarrow 0$ , quando  $\sigma \rightarrow 0$ . Substituindo as expansões (5.5),

(5.6) e (5.7), em (5.1) temos

$$S_G \left( 1 + \hat{R} + \frac{\hat{R}^2}{2!} + \dots \right) \frac{\partial}{\partial t} (p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + \dots) + \operatorname{div} (\mathbf{q}^{(0)} + \mathbf{q}^{(1)} + \mathbf{q}^{(2)} + \dots) = 0,$$

$$\mathbf{q}^{(0)} + \mathbf{q}^{(1)} + \mathbf{q}^{(2)} + \dots = -K_G \left( 1 + \hat{Y} + \frac{\hat{Y}^2}{2} + \dots \right) \nabla (p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + \dots).$$
(5.8)

Agrupando os termos de mesma ordem e utilizando a hipótese de estacionaridade de segunda ordem dos campos  $R$  e  $Y$  obtemos o seguinte sistema de equações hierárquicas:

$$n = 0, \quad \begin{cases} S_G \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(0)} = 0, \\ \mathbf{q}^{(0)} = -K_G \nabla p^{(0)}, \end{cases} \quad (5.9)$$

$$n = 1, \quad \begin{cases} S_G \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(1)} = -S_G \hat{R} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t}, \\ \mathbf{q}^{(1)} = -K_G \left[ \hat{Y} \nabla p^{(0)} + \nabla p^{(1)} \right], \end{cases} \quad (5.10)$$

$$n = 2, \quad \begin{cases} S_G \frac{\partial p^{(2)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(2)} = -S_G \hat{R} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} - S_G \frac{\hat{R}^2}{2} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t}, \\ \mathbf{q}^{(2)} = -K_G \left[ \frac{1}{2} \hat{Y}^2 \nabla p^{(0)} + \hat{Y} \nabla p^{(1)} + \nabla p^{(2)} \right]. \end{cases} \quad (5.11)$$

Aplicando o mesmo procedimento para as ordens mais altas podemos escrever recursivamente para  $n \geq 1$ ,

$$\begin{cases} S_G \frac{\partial p^{(n)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(n)} = -S_G \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\hat{R}^{n-i}}{(n-i)!} \frac{\partial p^{(i)}}{\partial t}, \\ \mathbf{q}^{(n)} = -K_G \left( \nabla p^{(n)} + \sum_{i=1}^n \frac{\hat{Y}^i}{(i)!} \nabla p^{(n-i)} \right). \end{cases} \quad (5.12)$$

Podemos notar que a equação (5.9) possui a mesma forma da equação determinística no modelo (3.20), com as médias geométricas  $K_G$  e  $S_G$  desempenhando o

papel de coeficientes efetivos. Além disto, pela hipótese de estacionaridade, o lado esquerdo de (5.10)-(5.12) preserva a mesma estrutura do problema determinístico, o que é conveniente do ponto de vista numérico. À medida que evoluímos na escala hierárquica aumenta a complexidade dos termos de fonte que surgem do lado direito de cada equação.

Podemos observar também que a velocidade em  $\mathcal{O}(\sigma^0)$  ( $\mathbf{q}^{(0)}$ ) representa a velocidade determinística. Para  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{q}^{(n)}$  não admite mais uma relação linear com  $\nabla p^{(n)}$  devido ao surgimento dos termos adicionais contendo produtos entre as flutuações de  $Y$  e  $p$ .

Finalmente, expandindo as condições de contorno (5.2), obtemos

$$n \geq 0, \quad \begin{cases} p^{(n)} = 0, & \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \\ \mathbf{q}^{(n)} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S}, \end{cases} \quad (5.13)$$

e da condição inicial (5.3)

$$\begin{aligned} n = 0, & \quad p^{(0)} = p_D, & \text{em } \Omega, & \quad t = 0, \\ n \geq 1, & \quad p^{(n)} = 0, & \text{em } \Omega \times \mathcal{S}, & \quad t = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Podemos observar que apenas o sistema (5.9) ( $n = 0$ ) herda o dado inicial determinístico não homogêneo. Para  $n \geq 1$ , as equações estão sujeitas a condições inicial e de fronteira homogêneas. A diferença entre a solução trivial é advinda dos termos de fonte dependentes das soluções das equações nas ordens inferiores. Condições de fronteira e inicial não determinísticas são tratadas em Zhang (2002) e Bonilla e Cushman (2000).

## 5.2 Equações efetivas

A partir dos conjuntos de equações hierárquicas construídos na seção anterior, derivamos a seguir as equações efetivas que governam os dois primeiros momentos dos campos de pressão  $p$  e velocidade  $\mathbf{q}$ .

### 5.2.1 Equações efetivas para as médias

Tomando a média no conjunto de equações (5.9)-(5.11) e nas condições de fronteira (5.13) e inicial (5.14) (para  $n = 0, 1, 2$ ), notando que  $E[\hat{Y}] = E[\hat{R}] = 0$ , obtemos os seguintes sistemas:

$$n = 0 : \left\{ \begin{array}{l} S_G \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \text{div} \mathbf{q}^{(0)} = 0, \\ \mathbf{q}^{(0)} = -K_G \nabla p^{(0)}, \\ p^{(0)} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{q}^{(0)} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ p^{(0)} = p_D, \quad \text{em } \Omega, \quad t = 0, \end{array} \right. \quad (5.15)$$

$$n = 1 : \left\{ \begin{array}{l} S_G \frac{\partial \langle p^{(1)} \rangle}{\partial t} + \text{div} \langle \mathbf{q}^{(1)} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{q}^{(1)} \rangle = -K_G \nabla \langle p^{(1)} \rangle, \\ \langle p^{(1)} \rangle = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \langle \mathbf{q}^{(1)} \rangle \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ \langle p^{(1)} \rangle = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad t = 0, \end{array} \right. \quad (5.16)$$

$$n = 2 : \left\{ \begin{array}{l} S_G \frac{\partial \langle p^{(2)} \rangle}{\partial t} + \text{div} \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle = -S_G \left\langle \hat{R} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} \right\rangle - S_G \frac{\sigma_R^2}{2} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t}, \\ \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle = -K_G \left[ \nabla \langle p^{(2)} \rangle + \langle \hat{Y} \nabla p^{(1)} \rangle + \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \nabla p^{(0)} \right], \\ \langle p^{(2)} \rangle = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ \langle p^{(2)} \rangle = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad t = 0, \end{array} \right. \quad (5.17)$$

onde o símbolo  $\langle \cdot \rangle := E[\cdot]$  denota a média estatística. Na ausência de termos de fonte e com condições de contorno e inicial homogêneas o sistema (5.16) admite a solução trivial  $\langle p^{(1)} \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{q}^{(1)} \rangle = \mathbf{0}$ . Portanto, as aproximações de segunda

ordem para a média da pressão e da velocidade são dadas por

$$\begin{cases} \langle p \rangle(\mathbf{x}, t) = p^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \langle p^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t), \\ \langle \mathbf{q} \rangle(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (5.18)$$

e as aproximações das flutuações de  $p$  e  $\mathbf{q}$  na primeira ordem são dadas por

$$\begin{cases} \hat{p}(\mathbf{x}, t) = p^{(1)}(\mathbf{x}, t), \\ \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, t). \end{cases} \quad (5.19)$$

Podemos notar que para obter as médias de  $\{p, \mathbf{q}\}$  é necessário computar  $\{p^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}\}$  e em seguida  $\{\langle p^{(2)} \rangle, \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle\}$ . O sistema (5.15) que governa o comportamento de  $\{p^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}\}$  é de fácil resolução. Entretanto, o sistema (5.17) para  $\{\langle p^{(2)} \rangle, \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle\}$  contém termos de fonte envolvendo produtos das flutuações entre  $Y$  e  $p^{(1)}$  e  $R$  e  $p^{(1)}$ , portanto, demanda antes o cômputo destes termos. Para este fim, introduzimos as aproximações de segunda ordem para as covariâncias cruzadas entre os coeficientes e a pressão da forma:

$$\mathbf{C}_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \langle \hat{Y}(\mathbf{x}), p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle; \quad \mathbf{C}_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \langle \hat{R}(\mathbf{x}), p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle. \quad (5.20)$$

e das covariâncias cruzadas entre os coeficientes e a velocidade que representam o fluxo associado a  $\mathbf{C}_{Yp}$  e  $\mathbf{C}_{Rp}$  respectivamente

$$\mathbf{C}_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \langle \hat{Y}(\mathbf{x}), \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle. \quad \mathbf{C}_{Rq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \langle \hat{R}(\mathbf{x}), \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle. \quad (5.21)$$

Nosso objetivo aqui é derivar as equações efetivas que governam  $\{\mathbf{C}_{Yp}, \mathbf{C}_{Yq}\}$  e  $\{\mathbf{C}_{Rp}, \mathbf{C}_{Rq}\}$ , as quais surgem como termos de fonte nas equações (5.17) acima. Para este fim representamos as equações da pressão e da velocidade em (5.10) em termos de  $(\mathbf{y}, \tau) \in \Omega \times (0, T]$  onde  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x} \in \Omega$ , as multiplicamos por  $\hat{X}(\mathbf{x})$  ( $\hat{X} = \hat{Y}$

ou  $\hat{X} = \hat{R}$ ) e tomamos a esperança matemática para obtermos

$$\begin{cases} S_G \left\langle \hat{X}(\mathbf{x}) \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} \right\rangle + \left\langle \hat{X}(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \right\rangle = -S_G \left\langle \hat{X}(\mathbf{x}) \hat{R}(\mathbf{y}) \right\rangle \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau}, \\ \left\langle \hat{X}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \right\rangle = -K_G \left[ \left\langle \hat{X}(\mathbf{x}) \hat{Y}(\mathbf{y}) \right\rangle \nabla p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau) + \left\langle \hat{X}(\mathbf{x}) \nabla p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \right\rangle \right]. \end{cases} \quad (5.22)$$

Das condições de fronteira (5.13) e inicial (5.14), segue que

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{X}(\mathbf{x}) p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \right\rangle &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \left\langle \hat{X}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \right\rangle \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ \left\langle \hat{X}(\mathbf{x}) p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \right\rangle &= 0, \quad \text{em } \Omega, \tau = 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Lembrando que pela hipótese de campos independentes  $C_{YR} = C_{RY} = 0$ . Logo tomando  $\hat{X} = \hat{Y}$  em (5.22) obtemos as equações efetivas que governam a aproximação de segunda ordem das covariâncias cruzadas  $C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)$  e  $C_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)$ , da forma

$$\begin{cases} S_G \frac{\partial C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} + \operatorname{div}_{\mathbf{y}} C_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \\ C_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -K_G \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) - K_G C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau). \end{cases} \quad (5.24)$$

Utilizando (5.23) e as condições de contorno de (5.10) segue que as condições de fronteira e inicial para (5.24) são dadas por :

$$\begin{cases} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, & \forall \mathbf{y} \text{ sobre } \Gamma_1, \\ C_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} = \left[ -K_G \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) + C_Y(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{y}, \tau) \right] \cdot \mathbf{n} = 0, & \forall \mathbf{y} \text{ sobre } \Gamma_2, \\ C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, & \forall \mathbf{y} \text{ sobre } \Omega, \tau = 0. \end{cases}$$

De forma semelhante, tomando  $\hat{X} = \hat{R}$  obtemos a equação que governa a aproximação de segunda ordem para as covariâncias cruzadas  $C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)$  e  $C_{Rq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)$ ,

da forma

$$\begin{cases} S_G \frac{\partial C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} + K_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Rq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -S_G \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} C_R(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \\ \mathbf{C}_{Rq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -K_G \nabla_{\mathbf{y}} C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \end{cases} \quad (5.25)$$

também suplementada por condições de contorno e inicial homogêneas.

Podemos notar que, devido à hipótese de estacionaridade dos campos  $Y$  e  $R$ , o lado esquerdo de (5.24) e (5.25) preserva a mesma forma parabólica do problema determinístico (5.15). Os termos de fonte que surgem no lado direito destas equações dependem da solução  $p^{(0)}$  e das covariâncias cruzadas dos campos aleatórios  $Y$  e  $R$ .

Retornando ao sistema (5.17), e utilizando as definições (5.20) e (5.21), podemos reescrever a equação para as médias da pressão e velocidade em  $\mathcal{O}(\sigma^2)$ , da forma

$$\begin{cases} S_G \frac{\partial \langle p^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = -S_G \frac{\partial C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{x}, t)}{\partial t} - S_G \frac{\sigma_R^2}{2} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t}, \\ \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = -K_G \left[ \nabla \langle p^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + \frac{\sigma_Y^2}{2} \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t) \right]. \end{cases} \quad (5.26)$$

Usando as condições de fronteira e iniciais dos problemas para  $p^{(0)}$  e  $C_{Yp}$  o sistema acima é suplementado por condições de fronteira e inicial homogêneas.

De (5.18) e (5.26) escrevemos a média da velocidade como

$$\langle \mathbf{q} \rangle(\mathbf{x}, t) = -K_G \left[ \nabla \langle p \rangle(\mathbf{x}, t) + \frac{\sigma_Y^2}{2} \nabla \langle p^{(0)} \rangle(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \right]. \quad (5.27)$$

É importante salientar que a média da velocidade não obedece mais uma relação linear com a média do gradiente da pressão. Em particular, a percolação do fluido não obedece mais uma lei local, uma vez que efeitos não locais são herdados pelo surgimento da componente da covariância cruzada  $C_{Yp}$  em (5.27).

### 5.2.2 Equações efetivas para as autocovariâncias

Para completar a derivação das equações efetivas que governam os momentos estatísticos da velocidade e pressão resta obtermos o modelo para as covariâncias  $C_p$  e  $C_{\mathbf{q}}$ . Usando (5.19), temos a covariância de segunda ordem de  $p$  e autocovariância cruzada de segunda ordem entre  $\mathbf{q}$  e  $p$  dadas por

$$\begin{aligned} C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= \langle p^{(1)}(\mathbf{x}, t), p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle, \\ C_{\mathbf{q}p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= \langle \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, t), p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle. \end{aligned}$$

De forma análoga, para derivarmos as equações efetivas para as covariâncias  $C_p$  e  $C_{\mathbf{q}p}$ , representamos (5.10) em função de  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T]$  e multiplicamos esta equação por  $p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau)$ ,  $(\mathbf{y}, \tau) \in \Omega \times (0, T]$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , para obter

$$\begin{cases} S_G \frac{\partial p^{(1)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, t) p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) = -S_G \hat{R}(\mathbf{x}) \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \\ \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, t) p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) = -K_G \left[ \hat{Y}(\mathbf{x}) \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t) p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) + \nabla p^{(1)}(\mathbf{x}, t) p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \right], \end{cases} \quad (5.28)$$

e das condições de fronteira (5.13) e inicial (5.14), segue

$$\begin{aligned} p^{(1)}(\mathbf{x}, t) p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ p^{(1)}(\mathbf{x}, 0) p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) &= 0, \quad \text{em } \Omega, \tau = 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Tomando a esperança matemática em (5.28) obtemos as equações efetivas para  $C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)$  e  $C_{\mathbf{q}p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)$

$$\begin{cases} S_G \frac{\partial C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} C_{\mathbf{q}p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = -S_G \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \\ C_{\mathbf{q}p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = -K_G \nabla_{\mathbf{x}} C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) - K_G C_{Yp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (5.30)$$

suplementada por condições de fronteira e inicial homogêneas.

Da mesma forma que (5.26), para resolver o problema (5.30), necessitamos calcular

as covariâncias cruzadas  $C_{Yp}$ ,  $C_{Rp}$  que surgem como termos de fonte.

Finalmente, de (5.19) a aproximação de segunda ordem da covariância da velocidade  $\mathbf{q}$  é dada por  $\mathbf{C}_q(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \langle \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, t), \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle$ . Logo, usando a lei de Darcy em (5.10) e tomando a média temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_q(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = K_G^2 & \left[ \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t) \nabla p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau) C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \right. \\ & \left. + \nabla p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}} C_{Yp}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

### 5.2.3 Sistema de equações efetivas

Coletando as equações (5.15), (5.24), (5.25), (5.26) e (5.30) das subseções anteriores obtemos um sistema de equações efetivas formulado da forma: Dados os momentos  $\{m_Y, m_R, C_Y, C_R\}$  dos coeficientes Gaussianos  $Y$  e  $R$ , calcular os pares de variáveis  $\{p^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}\}$ ,  $\{C_{Yp}, C_{Yq}\}$ ,  $\{C_{Rp}, C_{Rq}\}$ ,  $\{C_p, C_{qp}\}$ ,  $\{\langle p^{(2)} \rangle, \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle\}$ ,

satisfazendo

$$\begin{cases} S_G \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t) = -K_G \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (5.32)$$

$$\begin{cases} S_G \frac{\partial C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} + \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Y\mathbf{q}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \\ \mathbf{C}_{Y\mathbf{q}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -K_G \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) - K_G \nabla_{\mathbf{y}} p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau) C_Y(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\begin{cases} S_G \frac{\partial C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} + \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{R\mathbf{q}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -S_G \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} C_R(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \\ \mathbf{C}_{R\mathbf{q}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -K_G \nabla_{\mathbf{y}} C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \end{cases} \quad (5.34)$$

$$\begin{cases} S_G \frac{\partial C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{q}p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = -S_G \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \\ \mathbf{C}_{\mathbf{q}p}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -K_G \nabla_{\mathbf{x}} C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) - K_G \nabla_{\mathbf{x}} p^{(0)}(\mathbf{x}, t) C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \end{cases} \quad (5.35)$$

$$\begin{cases} S_G \frac{\partial \langle p^{(2)} \rangle}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = -S_G \frac{\partial C_{Rp}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x})}{\partial t} - S_G \frac{\sigma_R^2}{2} \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \\ \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = -K_G \left[ \nabla \langle p^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + \frac{\sigma_Y^2}{2} \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t) \right]. \end{cases} \quad (5.36)$$

Na Tabela 5.1 as equações efetivas acima são rerepresentadas somente nos campos potenciais  $\{p^{(0)}, C_{Yp}, C_{Rp}, C_p, \langle p^{(2)} \rangle\}$ .

Ao contrário da técnica de truncamento Euleriano [Zhang (2002)], as equações (5.32)-(5.36) podem ser resolvidas sequencialmente. Inicialmente resolvemos o problema determinístico (5.32) para  $p^{(0)}$ . Com  $p^{(0)}$  conhecido em seguida resolvemos (5.33) e (5.34) para achar as covariâncias cruzadas entre as variáveis dependentes e independentes, as quais são usadas finalmente como fonte em (5.35) e (5.36) no cômputo de  $C_p$  e  $\langle p^{(2)} \rangle$ , respectivamente.

Em algumas formações geológicas a variabilidade da compressibilidade é con-

<p><b>Problema <math>p_0</math>:</b> Dados <math>K_G</math> e <math>S_G</math>, achar <math>p^{(0)}</math> tal que:</p> $S_G \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - K_G \operatorname{div} (\nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad \text{em } \Omega, t \in [0, T]$ <p>com</p> $p^{(0)}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1,$ $\mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2,$ $p^{(0)}(\mathbf{x}, t) = p_0, \quad \text{em } \Omega, t = 0.$
<p><b>Problema <math>C_{Yp}</math>:</b> Dados <math>K_G</math>, <math>S_G</math>, <math>p^{(0)}</math> e <math>C_Y</math>, achar <math>C_{Yp}</math> satisfazendo:</p> $S_G \frac{\partial C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} - K_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} (\nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)) = K_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} (C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau))$ <p>com condições de contorno e inicial homogêneas</p>
<p><b>Problema <math>C_{Rp}</math>:</b> Dados <math>K_G</math>, <math>S_G</math>, <math>p^{(0)}</math> e <math>C_R</math>, achar <math>C_{Rp}</math> tal que:</p> $S_G \frac{\partial C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} - K_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} (\nabla_{\mathbf{y}} C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)) = -S_G \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} C_R(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ <p>com condição de contorno e inicial homogêneas</p>
<p><b>Problema <math>C_p</math>:</b> Dados <math>K_G</math>, <math>S_G</math>, <math>p^{(0)}</math>, <math>C_{Rp}</math> e <math>C_{Yp}</math>, achar <math>C_p</math> tal que:</p> $S_G \frac{\partial C_p(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} - K_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}} C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)) = K_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (C_{Yp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t))$ $- S_G \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ <p>com condições de contorno e inicial homogêneas</p>
<p><b>Problema <math>p_2</math>:</b> Dados <math>K_G</math>, <math>S_G</math>, <math>p^{(0)}</math>, <math>C_{Rp}</math> e <math>C_{Yp}</math>, achar <math>\langle p^{(2)} \rangle</math> tal que:</p> $S_G \frac{\partial \langle p^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - K_G \operatorname{div} (\nabla \langle p^{(2)} \rangle) = K_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau))  _{\mathbf{x}=\mathbf{y}}$ $- S_G \frac{\partial C_{Rp}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x})}{\partial t} - S_G \left( \frac{\sigma_R^2}{2} + \frac{\sigma_Y^2}{2} \right) \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t}$ <p>com condições de contorno e inicial homogêneas</p>

Tabela 5.1: Sistema de equações efetivas do modelo fracamente acoplado

siderada pequena quando comparada com a da condutividade hidráulica de tal forma que este parâmetro pode ser tratado como determinístico e consequentemente  $C_R = 0$  e  $C_{Rp} = 0$ . Neste caso, o sistema se reduz ao problema descrito em [Zhang (2002)]: Dados os momentos  $\{m_Y, C_Y\}$  do log da condutividade hidráulica calcular os pares  $\{p^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}\}$ ,  $\{C_{Yp}, C_{Yq}\}$ ,  $\{C_p, C_{qp}\}$ ,  $\{\langle p^{(2)} \rangle, \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle\}$ , satisfazendo

$$\begin{cases} S \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \text{div} \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t) = -K_G \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (5.37)$$

$$\begin{cases} S \frac{\partial C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} + \text{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \\ \mathbf{C}_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -K_G \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) - K_G \nabla_{\mathbf{y}} p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau) C_Y(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \end{cases} \quad (5.38)$$

$$\begin{cases} S \frac{\partial C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{qp}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = 0 \\ \mathbf{C}_{qp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -K_G \nabla_{\mathbf{x}} C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) - K_G \nabla_{\mathbf{x}} p^{(0)}(\mathbf{x}, t) C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \end{cases} \quad (5.39)$$

$$\begin{cases} S \frac{\partial \langle p^{(2)} \rangle}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \text{div} \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = -K_G \left[ \nabla \langle p^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + \frac{\sigma_Y^2}{2} \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t) \right]. \end{cases} \quad (5.40)$$

### 5.3 Equações efetivas para o deslocamento

Uma vez computada a pressão e a velocidade, adotamos em seguida o mesmo procedimento da técnica de expansão assintótica no problema de pós-processamento (4.17)-(4.18), para derivar o sistema de equações efetivas que governam os dois primeiros momentos estatísticos do deslocamento da matriz sólida e da tensão efetiva. Para atingir este objetivo rerepresentamos o problema de elasticidade linear que governa os campos  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ .

**Problema 5.2** Dada a estrutura estatística de  $T = \ln E$  e os primeiros momentos

estatísticos de  $p(\mathbf{x}, t, \omega)$  solução do Problema 5.1, achar os momentos estatísticos dos campos aleatórios  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ , tal que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \nabla p, \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}), \end{cases} \quad \text{em } \Omega \times \mathcal{S}, \quad (5.41)$$

sujeito as condições de contorno

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

Estabelecemos inicialmente, as relações entre os momentos estatísticos da compressibilidade  $S = \exp(R)$  e o módulo de Young  $E = \exp(T)$ , as quais serão de gram utilidade no seguinte capítulo para a comparação dos modelos fracamente e totalmente acoplados.

De acordo com o exposto no Capítulo 4 temos  $\sigma_R^2 = \sigma_T^2$  e  $C_T = -C_R$ . O mais natural é tomar como parâmetro de perturbação o desvio padrão  $\sigma_T$  assumido da mesma ordem de magnitude que  $\sigma_Y$ ,  $\sigma = \mathcal{O}(\sigma_T)$ . Usando as relações (4.5), (4.6) e (4.10), as constantes de Lamé estocásticas admitem as representações

$$\begin{aligned} \lambda &= c_1 E = c_1 \exp(m_T + \hat{T}) = c_1 E_G \exp(\hat{T}) = \lambda_G \exp(\hat{T}), \\ \mu &= c_2 E = c_2 \exp(m_T + \hat{T}) = c_2 E_G \exp(\hat{T}) = \mu_G \exp(\hat{T}), \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde  $\lambda_G$ ,  $\mu_G$  e  $E_G$ , são as médias geométricas de  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $E$ , respectivamente.

Fazendo uso das decomposições (5.43), expandimos as constantes de Lamé em torno de suas respectivas médias geométricas, da forma

$$\begin{cases} \mu = \mu_G \left( 1 + \hat{T} + \frac{\hat{T}^2}{2!} + \cdots \right), \\ \lambda = \lambda_G \left( 1 + \hat{T} + \frac{\hat{T}^2}{2!} + \cdots \right). \end{cases} \quad (5.44)$$

Postulamos que os deslocamentos da matriz porosa  $\mathbf{u}$  e a tensão efetiva podem ser expandidos em série de potências de  $\sigma$  da forma

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} + \dots, \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \dots, \end{cases} \quad (5.45)$$

Substituindo as expansões (5.5), (5.7), (5.44) e (5.45) em (5.41), obtemos

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \dots) = \nabla(p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + \dots), \\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \dots = \lambda_G \left(1 + \hat{T} + \frac{\hat{T}^2}{2} + \dots\right) \operatorname{div}(\mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} + \dots) \mathbf{I} \\ \quad + 2\mu_G \left(1 + \hat{T} + \frac{\hat{T}^2}{2} + \dots\right) (\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)}) + \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(1)}) + \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(2)}) + \dots). \end{cases}$$

onde  $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(n)}) = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^{(n)} + \nabla (\mathbf{u}^{(n)})^T]$ .

Seguindo o procedimento formal, agrupamos os termos de mesma ordem, para obter o sistema hierárquico:

$$n = 0 : \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \nabla p^{(0)}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)}), \end{cases} \quad (5.46)$$

$$n = 1 : \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \nabla p^{(1)}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(1)}) + \hat{T} \boldsymbol{\sigma}^{(0)}, \end{cases} \quad (5.47)$$

$$n = 2 : \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \nabla p^{(2)}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(2)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(2)}) \\ \quad + \hat{T} [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(1)})] + \frac{\hat{T}^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^{(0)}, \end{cases} \quad (5.48)$$

Aplicando o mesmo procedimento para as ordens mais altas podemos escrever recursivamente o modelo para  $n \geq 1$ , da forma

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \nabla p^{(n)}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(n)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(n)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\hat{T}^i}{(i)!} [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(n-i)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(n-i)})]. \end{cases} \quad (5.49)$$

Podemos observar que o tensor  $\boldsymbol{\sigma}^{(0)}$  em (5.46) é dado constitutivamente pelo modelo determinístico linear. Da mesma forma que na lei de Darcy, para  $n \geq 1$ , a relação entre  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$  e  $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(n)})$  torna-se não linear devido aos termos adicionais contendo produtos entre flutuações de  $T$  e das tensões nas ordens anteriores.

Finalmente, a partir de (5.42) derivamos as respectivas condições de contorno hierárquicas

$$\begin{aligned} n = 0 : \quad & \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ n \geq 1 : \quad & \boldsymbol{\sigma}^{(n)} \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \\ n \geq 0 : \quad & \mathbf{u}^{(n)} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

### 5.3.1 Equações efetivas para as médias

Para obtermos as equações efetivas para as médias das variáveis  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  tomamos a esperança matemática no conjunto de equações (5.46)-(5.47) em desloca-

mento e tensão efetiva bem como nas condições de contorno (5.50), para obter:

$$n = 0 : \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \nabla p^{(0)}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)}), \\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \end{cases} \quad (5.51)$$

$$n = 1 : \begin{cases} \operatorname{div} \langle \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \rangle = \nabla \langle p^{(1)} \rangle = 0, \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \rangle = \lambda_G \operatorname{div} \langle \mathbf{u}^{(1)} \rangle \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\langle \mathbf{u}^{(1)} \rangle), \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \rangle \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \langle \mathbf{u}^{(1)} \rangle = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \end{cases} \quad (5.52)$$

$$n = 2 : \begin{cases} \operatorname{div} \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle = \nabla \langle p^{(2)} \rangle, \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle = \lambda_G \operatorname{div} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle) + \\ \quad \left\langle \hat{T} \left[ \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(1)}) \right] \right\rangle + \frac{\sigma_T^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^{(0)}, \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \end{cases} \quad (5.53)$$

Da mesma forma que na hidrodinâmica, na ausência de termos de fonte e condições de contorno homogêneas, o sistema (5.52) admite solução trivial  $\langle \mathbf{u}^{(1)} \rangle = \mathbf{0}$  e  $\langle \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \rangle = \mathbf{0}$ . Portanto, as aproximações de segunda ordem para as médias de  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$  dadas por

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t), \\ \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t), \end{cases} \quad (5.54)$$

e suas respectivas flutuações de primeira ordem são dadas por  $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t)$  e  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ .

Podemos notar também que para computar as médias de  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  é necessário calcular primeiramente  $\{\mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}^{(0)}\}$  e em seguida  $\{\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle, \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle\}$  no sistema (5.53), o qual contém termos de fonte envolvendo produtos entre flutuações de  $T$  e  $\mathbf{u}$ . Para derivar as equações efetivas que governam estes momentos definimos as covariâncias cruzadas entre os campos  $\{T, \mathbf{u}\}$  e  $\{T, \boldsymbol{\sigma}\}$ , da forma

$$\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \langle \hat{T}(\mathbf{x}), \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle, \quad \mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \langle \hat{T}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle. \quad (5.55)$$

A seguir, derivamos as equações efetivas que governam as aproximações de segunda ordem das covariâncias cruzadas  $\{\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}, \mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}}\}$ . Para este fim avaliamos o sistema de equações estocásticas (5.47), no par  $(\mathbf{y}, \tau) \in \Omega \times T$ . Em seguida, multiplicamos por  $\hat{T}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \Omega$ , para obtermos

$$\begin{cases} \hat{T}(\mathbf{x}) \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) = \hat{T}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{y}} p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau), \\ \hat{T}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) = \lambda_G \hat{T}(\mathbf{x}) \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \hat{T}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau)) \\ \quad + \hat{T}(\mathbf{x}) \hat{T}(\mathbf{y}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{y}, \tau). \end{cases} \quad (5.56)$$

Da mesma forma tomando  $n = 1$  nas condições de contorno (5.50), temos

$$\begin{cases} \hat{T}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \mathbf{n} = 0, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \hat{T}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) = 0, & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (5.57)$$

Definindo

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}} [(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}})(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)] = \frac{1}{2} [\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}^T(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)], \quad (5.58)$$

tomando a esperança matemática das equações (5.56) e (5.57) e lembrando a relação  $\mathbf{C}_{Tp} = -\mathbf{C}_{Rp}$ , obtemos o sistema de equações efetivas que governa as variáveis

$\{\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}, \mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}}\}$  da forma

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \\ \mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)) \\ \quad + \mathbf{C}_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \end{cases} \quad (5.59)$$

suplementada por condições de contorno homogêneas.

Da mesma forma, devido a hipótese de estacionaridade do campo  $T$ , o lado esquerdo do sistema (5.59) exhibe a mesma forma do problema determinístico com a covariância  $\mathbf{C}_T$  influenciando a lei de Hooke associada a  $\mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}}$ .

Retornando agora ao problema (5.53) para  $\{\mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}\}$ , usando (5.55) e (5.58) segue que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = \nabla \langle p^{(2)} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle) + \frac{\sigma_T^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}, t) \\ \quad + \left[ \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (5.60)$$

Logo, usando o resultado acima em (5.54), podemos escrever a média da tensão efetiva da forma

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle(\mathbf{x}, t) &= \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{u} \rangle(\mathbf{x}, t) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{u} \rangle)(\mathbf{x}, t) + \frac{\sigma_T^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + \left[ \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Salientamos que a média da tensão efetiva não é mais regida por uma lei constitutiva linear e exhibe propriedades não locais. A não localidade de  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  é advinda do termo envolvendo a covariância cruzada  $\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}$ .

### 5.3.2 Equações efetivas para as autocovariâncias

Para fecharmos o sistema de equações efetivas do problema de pós-processamento resta obtermos equações determinísticas para as covariâncias de  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ .

Sejam  $\{u_i\}, i = 1, 2, 3$  componentes de  $\mathbf{u}$  em uma base ortonormal. Escrevendo a flutuação de  $\mathbf{u}$  da forma  $\mathbf{u}^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)})$ , no caso tridimensional a matriz de covariâncias cruzadas de  $\mathbf{u}$  admite a definição

$$\mathbf{C}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \left[ C_{u_i u_j}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \right] \quad (5.62)$$

onde  $i, j = 1, 2, 3$  e  $C_{u_i u_j}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \langle u_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) u_j^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle$ .

Definimos também a covariância cruzada entre  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \langle \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle.$$

A obtenção das equações efetivas que governam as componentes da matriz  $\mathbf{C}_{\mathbf{u}}$  é feita coluna por coluna da seguinte forma: Denotando  $z^{(1)} = u_1^{(1)}$ , a primeira componente de  $\mathbf{u}^{(1)}$ , escrevemos (5.47) em termos do par  $(\mathbf{x}, t)$ , para em seguida multiplicarmos por  $z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau)$  com  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Após tomarmos a média, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{x}} p^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle = \langle \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t)) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle \\ \quad + \langle \hat{T}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle. \end{array} \right. \quad (5.63)$$

Analogamente, tomando  $n = 1$  nas condições de contorno temos que

$$\begin{aligned} \langle z^{(1)}(\mathbf{x}, t)(\mathbf{y}, \tau) \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \mathbf{n} \rangle &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \langle \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Introduzindo as definições

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{\mathbf{u}z})(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \frac{1}{2} \left[ \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{\mathbf{u}z}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{u}z}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \right], \quad (5.65)$$

$$C_{pz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \langle p^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, t)(\mathbf{y}, \tau) \rangle, \quad (5.66)$$

em (5.63) obtemos o sistema de equações efetivas que governa a covariância cruzada  $\mathbf{C}_{\mathbf{u}z}$  correspondente à primeira coluna da matriz  $\mathbf{C}_{\mathbf{u}}$  e a covariância cruzada  $\mathbf{C}_{\sigma z}$ , da forma

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\sigma z}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \nabla_{\mathbf{x}} C_{pz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau), \\ \mathbf{C}_{\sigma z}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{u}z}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{\mathbf{u}z}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)) \\ \quad + C_{Tz}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \end{cases} \quad (5.67)$$

sujeito às condições de contorno homogêneas.

De forma análoga, as equações efetivas que governam as covariâncias cruzadas da segunda e terceira colunas da matriz  $\mathbf{C}_{\mathbf{u}}$  são obtidas tomando  $z^{(1)} = u_2$  e  $z^{(1)} = u_3$ , respectivamente e adotando o mesmo procedimento.

As equações efetivas obtidas para cada coluna da matriz  $\mathbf{C}_{\mathbf{u}}$  também preservam no lado esquerdo a mesma estrutura do sistema determinístico. Entretanto a lei de Hooke em (5.67) é afetada pelas covariâncias cruzadas  $C_{Tz}$ . Observamos que o termo de fonte que envolve flutuações entre  $p$  e  $\mathbf{u}$  necessita ser calculado antes. Para este fim avaliamos o sistema de equações estocásticas (5.47), no par  $(\mathbf{y}, \tau) \in \Omega \times T$ . Em seguida, multiplicamos por  $p^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ , para obter

$$\begin{cases} p^{(1)}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) = p^{(1)}(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{y}} p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau), \\ p^{(1)}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) = \lambda_G p^{(1)}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G p^{(1)}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau)) \\ \quad + p^{(1)}(\mathbf{x}, t) \hat{T}(\mathbf{y}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{y}, \tau), \end{cases} \quad (5.68)$$

com condições de contorno (5.50),

$$\begin{aligned} \hat{T}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \mathbf{n} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \hat{T}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Definindo

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}} [(\mathbf{C}_{p\mathbf{u}})(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)] = \frac{1}{2} [\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{p\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{p\mathbf{u}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)], \quad (5.70)$$

tomando a esperança matemática das equações (5.68) e (5.69) obtemos o sistema de equações efetivas que governa as variáveis  $\{\mathbf{C}_{p\mathbf{u}}, \mathbf{C}_{p\boldsymbol{\sigma}}\}$  da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{p\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{y}} C_p(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \\ \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}p}(\mathbf{x}; t; \mathbf{y}, \tau) = \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{\mathbf{u}p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{\mathbf{u}p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)) \\ \quad + C_{Tp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{y}, \tau), \end{array} \right. \quad (5.71)$$

suplementado com condições de contorno homogêneas.

Finalmente, definimos a covariância de segunda ordem do tensor de tensões efetivas  $\boldsymbol{\sigma}$  como

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \langle \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle,$$

e tomando o quadrado na lei de Hooke (5.52) e a média, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = 4E_G^2 \left[ C_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^{(0)}) \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}^{(0)}) + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^{(0)}) \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}) \right. \\ \left. + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}^{(0)}) \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}) + \langle \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^{(1)}) \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}^{(1)}) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.72)$$

A seguir coletamos as equações efetivas elásticas lineares resultantes. De uma maneira geral podemos formular o pós-processamento para  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$  da forma: Dados os momentos do coeficiente Gaussiano  $\{m_T, C_T\}$  e da pressão  $\{p^{(0)}, C_{Rp}, C_p, \langle p^{(2)} \rangle\}$  achar os pares  $\{\mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}^{(0)}\}$ ,  $\{C_{T\mathbf{u}}, C_{T\boldsymbol{\sigma}}\}$ ,  $\{C_{\mathbf{u}z}, C_{z\boldsymbol{\sigma}}\}$  e  $\{\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle, \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle\}$ , ( $z = u_i, i = 1, 2, 3$ ), satisfazendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \nabla p^{(0)}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)}), \end{array} \right. \quad (5.73)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{y}} C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \\ \mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)) \\ \quad + C_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \end{array} \right. \quad (5.74)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{C}_{p\sigma}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = -\nabla_{\mathbf{y}} C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau), \\ \mathbf{C}_{p\sigma}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{pu}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{pu}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)) \\ \quad - C_{pR}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \end{array} \right. \quad (5.75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{C}_{\sigma z}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \nabla_{\mathbf{y}} C_{pz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau), \\ \mathbf{C}_{\sigma z}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{uz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{uz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)) \\ \quad + C_{Tz}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \end{array} \right. \quad (5.76)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = \nabla \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \langle p^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle) + \frac{\sigma_T^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}, t) \\ \quad + \left[ \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{Tu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{Tu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}. \end{array} \right. \quad (5.77)$$

Eliminando as variáveis que envolvem os momentos da tensão efetiva ( $\boldsymbol{\sigma}$ ), na Tabela 5.2, são rerepresentadas as equações efetivas acima somente nos campos  $\{\mathbf{u}^{(0)}, C_{Tu}, C_{uz}, \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle\}$ , ( $z = u_i, i = 1, 2, 3$ ),

Embora a técnica de derivação das equações efetivas sofra severas restrições oriundas do truncamento necessário para o problema de fechamento, o qual restringe a sua validade para geologias caracterizadas por  $\sigma \ll 1$ , ela pode ser de grande utilidade na análise de comparação entre os modelos fracamente acoplados de poroelasticidade. Sob esta ótica o sistema de equações efetivas (5.32)-(5.36) será usado posteriormente para comparação com o sistema de equações efetivas do modelo de poroelasticidade de Biot no Capítulo 6. Ao elucidarmos as hipóteses envolvidas para sua reprodução a partir do modelo poroelástico completamente acoplado estaremos aptos a compreender o papel que a heterogeneidade desempenha sobre a proximidade entre os dois modelos.

<p><b>Problema <math>\mathbf{u}_0</math>:</b> Dados <math>\lambda_G, \mu_G</math> e <math>p^{(0)}</math>, achar <math>\mathbf{u}^{(0)}</math> tal que:</p> $\mu_G \Delta \mathbf{u}^{(0)} + (\lambda_G + \mu_G) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} = \nabla p^{(0)},$ <p>sujeito as condições de contorno  <math>\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}^{(0)} = \mathbf{h}</math>, sobre <math>\Gamma_1</math>, <math>\mathbf{u}^{(0)} = 0</math>, sobre <math>\Gamma_2</math>.</p>
<p><b>Problema <math>C_{T\mathbf{u}}</math>:</b> Dados <math>\lambda_G, \mu_G, C_T, \mathbf{u}^{(0)}</math> e <math>C_{Rp}</math> achar <math>C_{T\mathbf{u}}</math> tal que:</p> $\lambda_G \nabla_{\mathbf{y}} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) + 2\mu_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)) = -\nabla_{\mathbf{y}} C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) + \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \left\{ C_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)})] \right\},$ <p>com condições de contorno homogêneas.</p>
<p><b>Problema <math>C_{p\mathbf{u}}</math>:</b> Dados <math>\lambda_G, \mu_G, C_{pR}, C_p</math> e <math>\mathbf{u}^{(0)}</math>, achar <math>C_{p\mathbf{u}}</math> tal que:</p> $\lambda_G \nabla_{\mathbf{y}} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{p\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) + 2\mu_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{p\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)) = \nabla_{\mathbf{y}} C_p(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) + \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \left\{ C_{pR}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)})] \right\},$ <p>com condições de contorno homogêneas</p>
<p><b>Problema <math>C_{\mathbf{u}}</math>:</b> Dados <math>\lambda_G, \mu_G, \mathbf{u}^{(0)}, C_{T\mathbf{u}}</math> e <math>C_{p\mathbf{u}}</math> achar <math>C_{\mathbf{u}w}</math>, <math>w = u_1, u_2, u_3</math>, tal que:</p> $\lambda_G \nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{u}w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) + 2\mu_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{\mathbf{u}w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)) = \nabla_{\mathbf{x}} C_{pw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left\{ C_{Tw}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)})] \right\},$ <p>com condições de contorno homogêneas</p>
<p><b>Problema <math>\mathbf{u}_2</math>:</b> Dados <math>\lambda_G, \mu_G, C_{T\mathbf{u}}</math> e <math>\mathbf{u}^{(0)}</math>, achar <math>\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle</math> tal que:</p> $\lambda_G \nabla \operatorname{div} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) + \mu_G \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle) = \nabla \langle p^{(2)} \rangle - \left[ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left( \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)) \right) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} - \frac{\sigma_T^2}{2} \operatorname{div} [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)})],$ <p>com condições de contorno homogêneas</p>

Tabela 5.2: Sistema de equações efetivas do pos-processamento baseado em elasticidade linear

# Capítulo 6

## Método de expansão assintótica aplicado ao modelo totalmente acoplado

Neste capítulo, deduzimos as equações efetivas do modelo completamente acoplado de poroelasticidade linear considerando a condutividade hidráulica e constantes de Lamé como campos aleatórios. Seguindo a mesma metodologia apresentada no Capítulo 5, aplicamos o método de expansão assintótica ao modelo estocástico totalmente acoplado. Primeiramente, derivamos o sistema de equações hierárquicas e em seguida as equações efetivas até segunda ordem. Uma vez deduzidas as equações efetivas para o modelo totalmente acoplado elucidamos as hipóteses necessárias para a reprodução das equações efetivas do modelo fracamente acoplado obtidas no capítulo anterior.

O modelo estocástico poroelástico completamente acoplado é dado por:

**Problema 6.1** *Dadas as estruturas estatísticas dos coeficientes  $T = \ln E$  e  $Y = \ln K$ , assumidos campos aleatórios estacionários de segunda ordem, isotrópicos e independentes entre si, e os valores determinísticos do coeficiente de Poisson e do vetor tração prescrito  $\mathbf{h}$ , achar os momentos estatísticos dos campos aleatórios: deslocamento  $\mathbf{u}$ , pressão do poro  $p$ , tensão efetiva  $\boldsymbol{\sigma}$  e velocidade de Darcy  $\mathbf{q}$ ,*

satisfazendo

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{q}) &= 0, \\ \mathbf{q} &= -K \nabla p, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}), \end{aligned} \right\} \text{ em } \Omega \times \mathcal{S}, t \in [0, T] \quad (6.1)$$

sujeito às condições de fronteira

$$p = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S}, \quad (6.3)$$

e condição inicial de incompressibilidade

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \times \mathcal{S}, \quad t = 0. \quad (6.4)$$

## 6.1 Equações hierárquicas

De forma análoga ao capítulo anterior, tomamos como os parâmetros de perturbação os desvios padrão  $\sigma_Y$  e  $\sigma_T$ . Como ambos são assumidos da mesma ordem de magnitude definimos  $\sigma = \mathcal{O}(\sigma_Y) = \mathcal{O}(\sigma_T)$ . Postulamos que os deslocamentos da matriz porosa  $\mathbf{u}$ , a poro pressão  $p$ , a velocidade de Darcy  $\mathbf{q}$  e a tensão efetiva  $\boldsymbol{\sigma}$  podem ser expandidos em série de potências de  $\sigma$  da forma

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} + \dots, \\ p &= p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{q}^{(0)} &= \mathbf{q}^{(0)} + \mathbf{q}^{(1)} + \mathbf{q}^{(2)} + \dots, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \dots, \end{aligned} \right. \quad (6.5)$$

com  $\{\mathbf{u}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}^{(0)}, p^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}\}$  determinísticos e  $\{\mathbf{u}^{(n)}, \boldsymbol{\sigma}^{(n)}, p^{(n)}, \mathbf{q}^{(n)}\} (n \geq 1)$ , soluções estocásticas em  $\mathcal{O}(\sigma^n)$ .

Substituindo as expansões (5.5), (5.44) e (6.5) nas equações (6.1), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \dots) - \nabla(p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + \dots) = 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} + \dots) + \operatorname{div} (\mathbf{q}^{(0)} + \mathbf{q}^{(1)} + \mathbf{q}^{(2)} + \dots) = 0, \\ \mathbf{q}^{(0)} + \mathbf{q}^{(1)} + \mathbf{q}^{(2)} + \dots = -K_G \left(1 + \hat{Y} + \frac{\hat{Y}^2}{2} + \dots\right) \nabla(p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + \dots), \\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} + \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \dots = \lambda_G \left(1 + \hat{T} + \frac{\hat{T}^2}{2} + \dots\right) \operatorname{div} (\mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} + \dots) \mathbf{I} \\ \quad + 2\mu_G \left(1 + \hat{T} + \frac{\hat{T}^2}{2} + \dots\right) (\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)}) + \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(1)}) + \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(2)}) + \dots). \end{array} \right.$$

onde  $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(n)}) = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u}^{(n)} + \nabla (\mathbf{u}^{(n)})^T]$ .

Seguindo o procedimento formal, agrupamos os termos de mesma ordem, para obter o sistema hierárquico:

$n = 0,$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} - \nabla p^{(0)} = 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(0)} = 0 \\ \mathbf{q}^{(0)} = -K_G \nabla p^{(0)}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)}), \end{array} \right. \quad (6.6)$$

$n = 1,$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} - \nabla p^{(1)} = 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(1)} = 0, \\ \mathbf{q}^{(1)} = -K_G \left[ \hat{Y} \nabla p^{(0)} + \nabla p^{(1)}(\mathbf{x}, t) \right], \\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(1)}) + \hat{T} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \end{array} \right. \quad (6.7)$$

$n = 2$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} - \nabla p^{(2)} = 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(2)} = 0, \\ \mathbf{q}^{(2)} = -K_G \left[ \frac{1}{2} \hat{Y}^2 \nabla p^{(0)} + \hat{Y} \nabla p^{(1)} + \nabla p^{(2)} \right], \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(2)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(2)}) + \hat{T} \left[ \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(1)}) \right] + \frac{\hat{T}^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \end{array} \right. \quad (6.8)$$

Aplicando o mesmo procedimento para as ordens mais altas podemos escrever recursivamente o modelo poroelástico hierárquico para  $n \geq 1$ , da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(n)} - \nabla p^{(n)} = 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(n)} = 0, \\ \mathbf{q}^{(n)} = -K_G \left( \nabla p^{(n)} + \sum_{i=1}^n \frac{\hat{Y}^i}{(i)!} \nabla p^{(n-i)} \right), \\ \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(n)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(n)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\hat{T}^i}{(i)!} \left[ \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(n-i)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(n-i)}) \right]. \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Da mesma forma que no Capítulo anterior, na obtenção das equações hierárquicas (6.6)-(6.9) usamos a hipótese de estacionaridade de segunda ordem dos campos  $T$  e  $Y$ . Tal hipótese implica que o lado esquerdo das equações poroelásticas preserva a mesma forma do caso determinístico com as médias geométricas  $\lambda_G$ ,  $\mu_G$ , e  $K_G$  desempenhando o papel de constantes efetivas. Por outro lado, a direita das equações surgem termos de fonte adicionais contendo produtos entre as flutuações de  $T$ ,  $\mathbf{u}$  e  $p$  e  $Y$ ,  $\mathbf{u}$  e  $p$ . É importante salientar que as formas lineares das leis de Darcy e Hooke não são preservadas nas ordens mais altas da expansão.

Finalmente, a partir de (6.2) e (6.3) derivamos as respectivas condições de contorno hierárquicas:

$$\left. \begin{array}{l} n = 0, \quad p^{(0)} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \mathbf{n} = \mathbf{h}, \\ n > 1, \quad p^{(n)} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(n)} \mathbf{n} = 0, \end{array} \right\} \text{ sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \quad (6.10)$$

$$n \geq 0, \quad \mathbf{u}^{(n)} = 0, \quad \mathbf{q}^{(n)} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{ sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S},$$

e de (6.4) as condições iniciais

$$n \geq 0 \quad \operatorname{div} \mathbf{u}^{(n)} = 0, \quad \text{em } \Omega \times \mathcal{S}, \quad t = 0. \quad (6.11)$$

Da mesma forma que no caso fracamente acoplado, no caso de  $\mathbf{h}$  determinística, as condições de contorno para os problemas estocásticos ( $n \geq 1$ ) são homogêneas.

## 6.2 Equações efetivas

A seguir, adotando a mesma metodologia do capítulo anterior, derivamos o sistema de equações efetivas que governa os dois primeiros momentos estatísticos das variáveis poroelásticas. Os cálculos são feitos simultaneamente para os quatro campos  $\{\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\sigma}, \text{ e } \mathbf{q}\}$ .

### 6.2.1 Equações efetivas para as médias

Para obtermos as equações efetivas para as médias das variáveis poroelásticas tomamos a esperança matemática no conjunto de equações (6.6)-(6.9) em deslocamento, pressão, velocidade e tensão efetiva bem como nas condições de contorno (6.10) e inicial (6.11). Lembrando que  $\langle \hat{Y} \rangle = \langle \hat{T} \rangle = 0$ , obtemos:

Para  $n = 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} - \nabla p^{(0)} = 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(0)} = 0, \\ \mathbf{q}^{(0)} = -K_G \nabla p^{(0)}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)}), \\ p^{(0)} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{q}^{(0)} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad t = 0. \end{array} \right. \quad (6.12)$$

$n = 1$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}\langle\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\rangle - \nabla\langle p^{(1)}\rangle = 0, \\ \operatorname{div}\frac{\partial\langle\mathbf{u}^{(1)}\rangle}{\partial t} + \operatorname{div}\langle\mathbf{q}^{(1)}\rangle = 0, \\ \langle\mathbf{q}^{(1)}\rangle = -K_G\nabla\langle p^{(1)}\rangle, \\ \langle\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\rangle = \lambda_G\operatorname{div}\langle\mathbf{u}^{(1)}\rangle\mathbf{I} + 2\mu_G\boldsymbol{\mathcal{E}}(\langle\mathbf{u}^{(1)}\rangle), \\ \langle p^{(1)}\rangle = 0, \quad \langle\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\rangle\mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \langle\mathbf{u}^{(1)}\rangle = 0, \quad \langle\mathbf{q}^{(1)}\rangle \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div}\langle\mathbf{u}^{(1)}\rangle = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad t = 0. \end{array} \right. \quad (6.13)$$

$n = 2$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}\langle\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\rangle - \nabla\langle p^{(2)}\rangle = 0, \\ \operatorname{div}\frac{\partial\langle\mathbf{u}^{(2)}\rangle}{\partial t} + \operatorname{div}\langle\mathbf{q}^{(2)}\rangle = 0, \\ \langle\mathbf{q}^{(2)}\rangle = -K_G\nabla\langle p^{(2)}\rangle - K_G\langle\hat{Y}\nabla p^{(1)}\rangle + \frac{\sigma_Y^2}{2}\mathbf{q}^{(0)}, \\ \langle\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\rangle = \lambda_G\operatorname{div}\langle\mathbf{u}^{(2)}\rangle\mathbf{I} + 2\mu_G\boldsymbol{\mathcal{E}}(\langle\mathbf{u}^{(2)}\rangle) + \left\langle\hat{T}\left(\lambda_G\operatorname{div}\mathbf{u}^{(1)}\mathbf{I} + 2\mu_G\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(1)})\right)\right\rangle + \frac{\sigma_T^2}{2}\boldsymbol{\sigma}^{(0)}, \\ \langle p^{(2)}\rangle = 0, \quad \langle\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\rangle\mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \langle\mathbf{u}^{(2)}\rangle = 0, \quad \langle\mathbf{q}^{(2)}\rangle \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div}\langle\mathbf{u}^{(2)}\rangle = 0, \quad \text{em } \Omega \quad t = 0. \end{array} \right. \quad (6.14)$$

Na ausência de termos de fonte e com condições de contorno e inicial homogêneas, o sistema (6.13) admite solução trivial  $\langle p^{(1)}\rangle = 0$ ,  $\langle\mathbf{u}^{(1)}\rangle = \langle\mathbf{q}^{(1)}\rangle = \mathbf{0}$  e  $\langle\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\rangle = \mathbf{0}$ . Portanto, as aproximações de segunda ordem para as médias de  $\{\mathbf{u}, p, \mathbf{q}, \boldsymbol{\sigma}\}$  são dadas por

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{u}\rangle(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \langle\mathbf{u}^{(2)}\rangle(\mathbf{x}, t), \\ \langle p\rangle(\mathbf{x}, t) &= p^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \langle p^{(2)}\rangle(\mathbf{x}, t), \\ \langle\mathbf{q}\rangle(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \langle\mathbf{q}^{(2)}\rangle(\mathbf{x}, t), \\ \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle(\mathbf{x}, t) &= \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \langle\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\rangle(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (6.15)$$

e suas respectivas flutuações são:  $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $p^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, t)$  e  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ .

Podemos observar que as leis de Darcy e Hooke não preservam a mesma forma do caso homogêneo, contendo termos de fonte que dependem das covariâncias cruzadas entre as variáveis dependentes e independentes, os quais devem ser computados antes da sua resolução. Para derivar as equações efetivas que governam estes momentos, definimos as covariâncias cruzadas entre os coeficientes e as variáveis poroelásticas, da forma

$$\mathbf{C}_{X\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \langle \hat{X}(\mathbf{x}), \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle, \quad \mathbf{C}_{X\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \langle \hat{X}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle, \quad (6.16)$$

$$\mathbf{C}_{Xp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \langle \hat{X}(\mathbf{x}), p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle, \quad \mathbf{C}_{X\mathbf{q}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \langle \hat{X}(\mathbf{x}), \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle. \quad (6.17)$$

onde  $X = Y$  ou  $X = T$ .

### 6.2.2 Equações efetivas para as covariâncias cruzadas

A seguir, derivamos as equações efetivas que governam as aproximações de segunda ordem para as covariâncias cruzadas  $\{\mathbf{C}_{X\mathbf{u}}, \mathbf{C}_{X\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{C}_{Xp}, \mathbf{C}_{T\mathbf{q}}\}$ . Para este fim, avaliamos o sistema de equações estocásticas do sistema (6.7), no par  $(\mathbf{y}, \tau) \in \Omega \times T$ . Em seguida, multiplicamos por  $\hat{X}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in \Omega$ , sendo  $\hat{X} = \hat{T}$  ou  $\hat{X} = \hat{Y}$ . Após tomarmos a esperança matemática obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle - \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{y}} p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle = 0, \\ \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial t} \rangle + \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle = 0, \\ \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle = -K_G \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{y}} p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle + \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \hat{Y}(\mathbf{y}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle, \\ \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle = \langle \lambda_G \hat{X}(\mathbf{x}) \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \hat{X}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau)) \rangle \\ \quad + \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \hat{T}(\mathbf{y}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle. \end{array} \right. \quad (6.18)$$

adotando o mesmo procedimento nas condições de contorno (6.10) e inicial (6.11), tomando  $n = 1$

$$\begin{aligned} \langle \hat{X}(\mathbf{x}) p^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle &= 0, & \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \mathbf{n} \rangle &= 0, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle &= 0, & \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} \rangle &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2. \\ \text{div}_{\mathbf{y}} \langle \hat{X}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle &= 0, & \text{em } \Omega \tau = 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Definindo

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}} [(\mathbf{C}_{X\mathbf{u}})(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)] = \frac{1}{2} [\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{X\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{X\mathbf{u}}^T(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)], \quad (6.20)$$

tomando  $\hat{X} = \hat{Y}$ , em (6.18) e (6.19) e usando a hipótese de independência entre os campos  $Y$  e  $T$  ( $\mathbf{C}_{YT} = 0$ ) derivamos o sistema de equações efetivas que governam as covariâncias cruzadas  $\{\mathbf{C}_{Y\mathbf{u}}, \mathbf{C}_{Yp}, \mathbf{C}_{Yq}, \mathbf{C}_{Y\boldsymbol{\sigma}}\}$ , da forma

$$\begin{cases} \text{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Y\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) - \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \\ \text{div}_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{C}_{Y\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} + \text{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \\ \mathbf{C}_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -K_G \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) + \mathbf{C}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \\ \mathbf{C}_{Y\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \lambda_G \text{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Y\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{Y\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)). \end{cases} \quad (6.21)$$

com as condições de contorno e inicial dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \mathbf{C}_{Y\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{n} &= \mathbf{0}, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{C}_{Y\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= \mathbf{0}, & \mathbf{C}_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \text{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Y\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \text{em } \Omega, \tau = 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Resta agora derivar as equações efetivas para as covariâncias cruzadas  $\{\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}, \mathbf{C}_{Tp}, \mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{C}_{Tq}\}$ . Tomando  $\hat{X} = \hat{T}$  em (6.18) e (6.19) e usando a hipótese de independência entre os campos  $Y$  e  $T$  ( $\mathbf{C}_{TY} = 0$ ) o sistema de equações que governa as

variáveis  $\{\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}, \mathbf{C}_{Tp}, \mathbf{C}_{T\sigma}, \mathbf{C}_{T\mathbf{q}}\}$  é dado da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) - \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Tp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} + \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\mathbf{q}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0. \\ \mathbf{C}_{T\mathbf{q}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = -K_G \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Tp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \\ \mathbf{C}_{T\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)) \\ \quad + \mathbf{C}_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \end{array} \right. \quad (6.23)$$

com condições de contorno e inicial dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{Tp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \mathbf{C}_{T\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= \mathbf{0}, & \mathbf{C}_{T\mathbf{q}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \text{em } \Omega \quad \tau &= 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Da mesma forma que no problema fracamente acoplado, devido a hipótese de estacionaridade dos campos  $Y$  e  $T$ , o lado esquerdo dos sistemas (6.21) e (6.23) exibe a mesma forma do problema determinístico. Devido à hipótese de independência entre os campos  $Y$  e  $T$  as covariâncias  $C_Y$  e  $C_T$  influenciam somente as leis de Darcy e de Hooke, respectivamente. Os termos de fonte adicionais que surgem são dados pelo produto entre a solução do problema determinístico e a covariância de  $Y$  ou  $T$ .

Estabelecidos os sistemas de equações determinísticas para as covariâncias cruzadas, retornamos agora ao problema para  $\{\mathbf{u}^{(2)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, p^{(2)}, \mathbf{q}^{(2)}\}$ . Os termos de segunda ordem das médias da velocidade e da tensão efetiva do sistema (6.14), podem ser reescritos da forma

$$\langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = -K_G \nabla \langle p^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) - K_G \left[ \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + \frac{\sigma_Y^2}{2} \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t), \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) &= \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle) + \frac{\sigma_T^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + \left[ \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Salientamos que as médias da velocidade e da tensão efetiva não são regidas por leis constitutivas lineares e exibem propriedades não locais. As não localidades de  $\langle \mathbf{q} \rangle$  e  $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  são ditadas pelos termos de covariância cruzada  $\mathbf{C}_{Yp}$  e  $\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}$ , respectivamente.

### 6.2.3 Equações efetivas para as autocovariâncias

Para fecharmos o sistema de equações efetivas poroelásticas resta obtermos equações determinísticas para as autocovariâncias de  $\{\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\sigma}, \text{ e } \mathbf{q}\}$ .

Definimos  $\mathbf{C}_{\mathbf{u}p}^M$  como a matriz de covariâncias cruzadas de segunda ordem entre o deslocamento e a pressão.

$$\mathbf{C}_{\mathbf{u}p}^M := \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & \mathbf{C}_{\mathbf{u}p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \\ \mathbf{C}_{p\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

onde  $\mathbf{C}_{\mathbf{u}}$  é a matriz de covariâncias entre as componentes de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{C}_{\mathbf{u}p}$  o vetor de covariâncias entre as componentes de  $\mathbf{u}$  e  $p$ ,  $\mathbf{C}_{p\mathbf{u}}$  o vetor de covariâncias entre  $p$  e as componentes de  $\mathbf{u}$ , e  $C_p$  a covariância de  $p$ . Quando  $d = 3$ , a matriz é escrita da seguinte forma

$$\mathbf{C}_{\mathbf{u}p}^M = \begin{pmatrix} C_{u_1}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_{u_1 u_2}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_{u_1 u_3}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_{u_1 p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \\ C_{u_2 u_1}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_{u_2}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_{u_2 u_3}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_{u_2 p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \\ C_{u_3 u_1}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_{u_3 u_2}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_{u_3}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_{u_3 p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \\ C_{p u_1}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_{p u_2}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_{p u_3}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) & C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \end{pmatrix}$$

A obtenção das equações efetivas que governam as componentes da matriz  $\mathbf{C}_{\mathbf{u}p}^M$  também é feita coluna por coluna: Denotando  $z^{(1)} = u_1^{(1)}$ , a primeira componente de  $\mathbf{u}^{(1)}$ , escrevemos (6.7) em termos do par  $(\mathbf{x}, t)$ , para em seguida multipli-

carros por  $z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau)$  com  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ . Após tomamos a média temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{x}} p^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle = 0, \\ \left\langle \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \right\rangle - \langle \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle = -K_G \langle \nabla_{\mathbf{x}} p^{(1)}(\mathbf{x}, \tau) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle + \langle \hat{Y}(\mathbf{x}) \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle, \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle = \langle \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t)) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle \\ \quad + \langle \hat{T}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle. \end{array} \right. \quad (6.28)$$

Analogamente para as condições de contorno (6.10) e inicial (6.11) segue que

$$\begin{aligned} \langle p^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle &= 0 & \langle z^{(1)}(\mathbf{x}, t) (\mathbf{y}, \tau) \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \mathbf{n} \rangle &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1 \\ \langle \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle &= 0 & \langle \mathbf{q}^{(1)} z^{(1)}(\mathbf{x}, t) (\mathbf{y}, \tau) \rangle \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2 \\ \langle \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle &= 0, \quad \text{em } \Omega, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Da mesma forma que na subseção anterior, introduzimos as seguintes definições

$$\mathbf{C}_{\mathbf{qz}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \langle \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle, \quad (6.30)$$

$$\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma z}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \langle \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t) z^{(1)}(\mathbf{y}, \tau) \rangle, \quad (6.31)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{\mathbf{uz}})(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \frac{1}{2} \left[ \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{\mathbf{uz}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{uz}}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \right], \quad (6.32)$$

Logo, de (6.28) e (6.29) obtemos o sistema de equações efetivas que governam as covariâncias cruzadas  $\mathbf{C}_{\mathbf{uz}}$  e  $C_{pz}$  correspondentes à primeira coluna da matriz  $\mathbf{C}_{\mathbf{up}}^M$  e as covariâncias cruzadas  $\mathbf{C}_{\mathbf{qz}}$  e  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma z}}$  da velocidade e tensão efetiva, respectivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma z}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) - \nabla_{\mathbf{x}} C_{pz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = 0, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{C}_{\mathbf{uz}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{qu}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = 0, \\ \mathbf{C}_{\mathbf{qz}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = -K_G \nabla_{\mathbf{y}} C_{pz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) + C_{Yz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma z}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{\mathbf{uz}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{\mathbf{uz}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)) \\ \quad + C_{Tz}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \end{array} \right. \quad (6.33)$$

sujeito às condições de contorno e inicial

$$\begin{aligned}
C_{pz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \mathbf{C}_{\sigma z}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)\mathbf{n} &= 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\
\mathbf{C}_{uz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \mathbf{C}_{qz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \\
\text{div}\mathbf{C}_{uz}(\mathbf{x}, 0; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & & & \text{em } \Omega.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

De forma análoga, as equações efetivas que governam as covariâncias cruzadas da segunda e terceira colunas da matriz  $\mathbf{C}_{up}^M$  são obtidas tomando  $z^{(1)} = u_2$  e  $z^{(1)} = u_3$ , respectivamente e adotando o mesmo procedimento. A obtenção das equações efetivas das covariâncias cruzadas  $\mathbf{C}_{up}$  e autocovariância  $\mathbf{C}_p$ , referente à quarta coluna, também segue procedimento análogo. Neste caso tomamos  $z^{(1)} = p^{(1)}$  para obter

$$\left\{ \begin{aligned}
&\text{div}_{\mathbf{x}}\mathbf{C}_{\sigma p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) - \nabla_{\mathbf{x}}C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = 0, \\
&\text{div}_{\mathbf{x}}\frac{\partial\mathbf{C}_{up}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{x}}\mathbf{C}_{qp}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = 0, \\
&\mathbf{C}_{qp}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = -K_G\nabla_{\mathbf{y}}C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) + C_{Yp}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)\mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t), \\
&\mathbf{C}_{\sigma p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \lambda_G\text{div}_{\mathbf{y}}\mathbf{C}_{Tu}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)\mathbf{I} + 2\mu_G\mathcal{E}_{\mathbf{y}}(\mathbf{C}_{Tu}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)) \\
&\quad + C_{Tp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)\boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau),
\end{aligned} \right. \tag{6.35}$$

sujeito as condições de contorno e inicial

$$\begin{aligned}
C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \mathbf{C}_{\sigma p}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)\mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_1, \\
\mathbf{C}_{up}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \mathbf{C}_{qp}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2 \\
\text{div}\mathbf{C}_{up}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & & & \text{em } \Omega, t = 0.
\end{aligned} \tag{6.36}$$

As equações efetivas obtidas para cada coluna da matriz  $\mathbf{C}_{up}^M$  também preservam no lado esquerdo a mesma estrutura do sistema determinístico. Entretanto, as leis de Darcy e Hooke são afetadas pelas covariâncias cruzadas  $C_{Yu}$  e  $C_{Tu}$  respectivamente, sendo representadas por equações não locais devido aos termos de fonte que surgem dados por produtos das soluções determinísticas com as covariâncias cruzadas  $C_{Tu}$  e  $C_{Yu}$ .

Finalmente, as covariâncias de segunda ordem da velocidade de Darcy  $\mathbf{C}_q$  e do tensor de tensões efetivas  $\mathbf{C}_\sigma$  são otidas da mesma forma que em (5.31) e (5.72) respectivamente.

O sistema de equações efetivas está agora completamente estabelecido. Então coletamos os resultados obtidos de equações efetivas nas Tabelas 6.2.3 e 6.2. De uma maneira geral, ele pode ser formulado da seguinte forma: Dados os momentos  $\{m_Y, m_T, C_Y, C_T\}$  dos coeficientes Gaussianos achar as variáveis  $\{p^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}^{(0)}\}$ ,  $\{C_{Y\mathbf{u}}, C_{Yp}, \mathbf{C}_{Y\mathbf{q}}, \mathbf{C}_{Y\boldsymbol{\sigma}}\}$ ,  $\{C_{T\mathbf{u}}, C_{Tp}, \mathbf{C}_{T\mathbf{q}}, \mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}}\}$ ,  $\{C_{\mathbf{u}z}, C_{pz}, \mathbf{C}_{z\mathbf{q}}, \mathbf{C}_{z\boldsymbol{\sigma}}\}$  e  $\{\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle, \langle p^{(2)} \rangle, \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle, \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle\}$  ( $z = u_1, u_2, u_3, p$ ), através da resolução sequencial dos sistemas apresentados nas Tabelas 6.2.3 e 6.2.

Nas Tabelas 6.2.3 e 6.4 apresentamos a formulação do sistema somente nas variáveis potenciais  $\mathbf{u}$  e  $p$ . Para isto eliminamos as variáveis envolvendo  $\mathbf{q}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  fazendo uso das suas respectivas leis constitutivas.

Tabela 6.1: Sistema de equações efetivas para as variáveis poroelásticas estendidas

<p><b>Problema <math>A_0</math>:</b> Dados <math>K_G</math>, <math>\lambda_G</math> e <math>\mu_G</math> achar <math>\{\mathbf{u}^{(0)}, p^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}^{(0)}\}</math>, satisfazendo</p> $\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(0)} - \nabla p^{(0)} &= 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}^{(0)} &= 0, \\ \mathbf{q}^{(0)} &= -K_G \nabla p^{(0)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)} &= \lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)}), \end{aligned} \right\} \text{ em } \Omega \times (0, T],$ <p>com:</p> $\begin{aligned} p^{(0)} &= 0, & \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \mathbf{n} &= \mathbf{h}, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{u}^{(0)} &= 0, & \mathbf{q}^{(0)} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} &= 0, & \text{em } \Omega, & & t = 0. \end{aligned}$
<p><b>Problema <math>A_{Yup}</math>:</b> Dados <math>K_G</math>, <math>\lambda_G</math>, <math>\mu_G</math>, <math>C_Y</math> e <math>\{\mathbf{u}^{(0)}, p^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}^{(0)}\}</math>, achar <math>\{\mathbf{C}_{Yu}, \mathbf{C}_{Yp}, \mathbf{C}_{Yq}, \mathbf{C}_{Y\sigma}\}</math>, satisfazendo</p> $\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_y \mathbf{C}_{Y\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) - \nabla_y \mathbf{C}_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, \\ \operatorname{div}_y \frac{\partial \mathbf{C}_{Yu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} + \operatorname{div}_y \mathbf{C}_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, \\ \mathbf{C}_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= -K_G \nabla_y \mathbf{C}_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) + C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{y}, \tau), \\ \mathbf{C}_{Y\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= \lambda_G \operatorname{div}_y \mathbf{C}_{Yu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_y(\mathbf{C}_{Yu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)). \end{aligned} \right\} \text{ em } \Omega \times (0, T],$ <p>com</p> $\begin{aligned} \mathbf{C}_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \mathbf{C}_{Y\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{n} &= \mathbf{0}, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{C}_{Yu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= \mathbf{0}, & \mathbf{C}_{Yq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div}_y \mathbf{C}_{Yu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \text{em } \Omega & & \tau = 0. \end{aligned}$
<p><b>Problema <math>A_{Tup}</math>:</b> Dados <math>K_G</math>, <math>\lambda_G</math>, <math>\mu_G</math>, <math>C_T</math> e <math>\{\mathbf{u}^{(0)}, p^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}^{(0)}\}</math>, achar <math>\{\mathbf{C}_{Tu}, \mathbf{C}_{Tp}, \mathbf{C}_{Tq}, \mathbf{C}_{T\sigma}\}</math>, satisfazendo</p> $\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_y \mathbf{C}_{T\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) - \nabla_y \mathbf{C}_{Tp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, \\ \operatorname{div}_y \frac{\partial \mathbf{C}_{Tu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} + \operatorname{div}_y \mathbf{C}_{Tq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, \\ \mathbf{C}_{Tq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= -K_G \nabla_y \mathbf{C}_{Tp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \\ \mathbf{C}_{T\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= \lambda_G \operatorname{div}_y \mathbf{C}_{Tu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_y(\mathbf{C}_{Tu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)) \\ &\quad + C_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{y}, \tau), \end{aligned} \right\} \text{ em } \Omega \times (0, T],$ <p>com</p> $\begin{aligned} \mathbf{C}_{Tp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{C}_{T\sigma}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \mathbf{C}_{Tu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= \mathbf{0}, & \mathbf{C}_{Tq}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div}_y \mathbf{C}_{Tu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \text{em } \Omega & & \text{para } \tau = 0. \end{aligned}$

Tabela 6.2: Sistema de equações efetivas para as variáveis poroelásticas estendidas

<p><b>Problema <math>A_{up}</math>:</b> Dados <math>K_G, \lambda_G, \mu_G, \{\mathbf{u}^{(0)}, p^{(0)}\}, \{\mathbf{C}_{Tu}, \mathbf{C}_{Tp}\},</math>  e <math>\{\mathbf{C}_{Yu}, \mathbf{C}_{Yp}, \mathbf{C}_{Yq}, \mathbf{C}_{Y\sigma}\}</math> achar <math>\{\mathbf{C}_u, \mathbf{C}_{pw}, \mathbf{C}_{qw}, \mathbf{C}_{\sigma w}\},</math>  com <math>w \in \{u_1, u_2, u_3, p\}, \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3),</math> satisfazendo</p> $\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_x \mathbf{C}_{\sigma w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) - \nabla_x \mathbf{C}_{pw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= 0, \\ \operatorname{div}_x \frac{\partial \mathbf{C}_{uw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)}{\partial t} + \operatorname{div}_x \mathbf{C}_{qw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= 0, \\ \mathbf{C}_{qw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= -K_G \nabla_x \mathbf{C}_{pw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) + \mathbf{C}_{Yw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}) \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{C}_{\sigma w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= \lambda_G \operatorname{div}_x \mathbf{C}_{uw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \mathcal{E}_x(\mathbf{C}_{uw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)) \\ &\quad + \mathbf{C}_{Tw}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{y}, \tau) \end{aligned} \right\} \text{em } \Omega \times (0, T],$ <p>com</p> $\begin{aligned} \mathbf{C}_{pw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \mathbf{C}_{\sigma w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{C}_{uw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= 0, & \mathbf{C}_{qw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div}_x \mathbf{C}_{uw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) &= 0 & \text{em } \Omega, & t = 0. \end{aligned}$
<p><b>Problema <math>A_2</math>:</b> Dados <math>K_G, \lambda_G, \mu_G, \{\mathbf{u}^{(0)}, p^{(0)}, \mathbf{q}^{(0)}, \boldsymbol{\sigma}^{(0)}\},</math>  <math>\{\mathbf{C}_{Tu}, \mathbf{C}_{Tp}, \mathbf{C}_{Tq}, \mathbf{C}_{T\sigma}\},</math> e <math>\{\mathbf{C}_{Yu}, \mathbf{C}_{Yp}, \mathbf{C}_{Yq}, \mathbf{C}_{Y\sigma}\}</math> achar  <math>\{\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle, \langle p^{(2)} \rangle, \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle, \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle\},</math> satisfazendo</p> $\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle - \nabla \langle p^{(2)} \rangle &= 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle &= 0, \\ \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) &= -K_G \nabla \langle p^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) - K_G \left[ \nabla_y \mathbf{C}_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \\ &\quad + \frac{\sigma_Y^2}{2} \mathbf{q}^{(0)}(\mathbf{x}, t), \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) &= \lambda_G \operatorname{div}_x \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) \mathbf{I} + 2\mu_G \mathcal{E}_x(\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle) + \frac{\sigma_T^2}{2} \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}, t) \\ &\quad + \left[ \lambda_G \operatorname{div}_x \mathbf{C}_{Tu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \mathbf{I} + 2\mu_G \mathcal{E}_x(\mathbf{C}_{Tu}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}, \end{aligned} \right\} \text{em } \Omega \times (0, T],$ <p>com</p> $\begin{aligned} \langle p^{(2)} \rangle &= 0, & \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle &= 0, & \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sobre } \Gamma_2 \\ \operatorname{div} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) &= 0 & \text{em } \Omega, & t = 0. \end{aligned}$

Tabela 6.3: Sistema de equações efetivas poroelásticas formulado nos campos potênciais

<p><b>Problema <math>u_0p_0</math>:</b> Dados <math>K_G</math>, <math>\lambda_G</math> e <math>\mu_G</math> achar <math>\{\mathbf{u}^{(0)}, p^{(0)}\}</math>, satisfazendo</p> $\begin{cases} \lambda_G \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} + 2\mu_G \operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)}), -\nabla p^{(0)} = 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} - K_G \nabla p^{(0)} = 0, \end{cases}$ <p>com:</p> $\begin{aligned} p^{(0)} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{q}^{(0)} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad \text{em } \Omega, \quad & t = 0. \end{aligned}$
<p><b>Problema <math>C_{Yup}</math>:</b> Dados <math>K_G</math>, <math>\lambda_G</math>, <math>\mu_G</math>, <math>C_Y</math> e <math>\{\mathbf{u}^{(0)}, p^{(0)}\}</math>, achar <math>\{C_{Y\mathbf{u}}, C_{Yp}\}</math>, satisfazendo</p> $\begin{cases} \lambda_G \nabla_{\mathbf{y}} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} C_{Y\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) + 2\mu_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(C_{Y\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)) - \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \frac{\partial C_{Y\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} - K_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \\ \quad - K_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} [C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau)], \end{cases}$ <p>com</p> $\begin{aligned} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \quad C_{Y\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad & \text{sobre } \Gamma_1, \\ C_{Y\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \mathbf{0}, \quad C_{Y\mathbf{q}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} C_{Y\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \quad \text{em } \Omega \quad \tau = 0. \end{aligned}$
<p><b>Problema <math>C_{Tup}</math>:</b> Dados <math>K_G</math>, <math>\lambda_G</math>, <math>\mu_G</math>, <math>C_T</math> e <math>\{\mathbf{u}^{(0)}, p^{(0)}\}</math>, achar <math>\{C_{T\mathbf{u}}, C_{Tp}\}</math>, satisfazendo</p> $\begin{cases} \lambda_G \nabla_{\mathbf{y}} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} C_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) + 2\mu_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{y}}(C_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)) - \nabla_{\mathbf{y}} C_{Tp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \\ \quad - \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \left\{ C_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)})] \right\}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \frac{\partial C_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} - K_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \end{cases}$ <p>com</p> $\begin{aligned} C_{Tp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \quad \operatorname{div}_{\mathbf{y}} C_{T\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{n} = 0, \quad & \text{sobre } \Gamma_1 \\ C_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = \mathbf{0}, \quad C_{T\mathbf{q}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} C_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau) = 0, \quad \text{em } \Omega \quad \text{para } \tau = 0. \end{aligned}$

Tabela 6.4: Sistema de equações efetivas poroelásticas formulado nos campos potenciais

<p><b>Problema <math>C_{up}</math>:</b> Dados <math>K_G, \lambda_G, \mu_G, \{\mathbf{u}^{(0)}, p^{(0)}\}, \{\mathbf{C}_{Y\mathbf{u}}, C_{Yp}\},</math> e <math>\{\mathbf{C}_{Y\mathbf{u}}, C_{Yp}\},</math> achar <math>\{\mathbf{C}_{\mathbf{u}}, C_{pw}\},</math> com <math>w \in \{u_1, u_2, u_3, p\}, \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3),</math> satisfazendo</p> $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_G \nabla_{\mathbf{x}} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{u}w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{I} + 2\mu_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathcal{E}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{\mathbf{u}w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)) - \nabla_{\mathbf{x}} C_{pw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \\ \qquad \qquad \qquad = -\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left\{ C_{Tw}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \mathcal{E}(\mathbf{u}^{(0)})] \right\}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \frac{\partial C_{\mathbf{u}w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau)}{\partial t} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} C_{pw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \\ \qquad \qquad \qquad - K_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} [C_{Yw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}) \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t)] \end{array} \right.$ <p>com</p> $\begin{array}{ll} C_{pw}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = 0, & \mathbf{C}_{\sigma w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{C}_{\mathbf{u}w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = 0, & \mathbf{C}_{\mathbf{q}w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{u}w}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = 0 & \text{em } \Omega, \quad t = 0. \end{array}$
<p><b>Problema <math>u_2p_2</math>:</b> Dados <math>K_G, \lambda_G, \mu_G, \{\mathbf{u}^{(0)}, p^{(0)}\}, \{\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}, C_{Tp}\},</math> e <math>\{\mathbf{C}_{Y\mathbf{u}}, C_{Yp}\}</math> achar <math>\{\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle, \langle p^{(2)} \rangle\},</math> satisfazendo</p> $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_G \nabla \operatorname{div} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) + \mu_G \operatorname{div} \mathcal{E}_{\mathbf{x}}(\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle) - \nabla \langle p^{(2)} \rangle = - \\ \qquad \qquad \qquad \left[ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left( \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}} \mathbf{I} + 2\mu_G \mathcal{E}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)) \right) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{\sigma_T^2}{2} \operatorname{div} [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \mathcal{E}(\mathbf{u}^{(0)})], \\ \operatorname{div} \frac{\partial \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle}{\partial t} - K_G \nabla \langle p^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = \\ \qquad \qquad \qquad \left[ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} K_G \nabla_{\mathbf{y}} C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + K_G \frac{\sigma_Y^2}{2} \operatorname{div} \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t), \end{array} \right.$ <p>com</p> $\begin{array}{ll} \langle p^{(2)} \rangle = 0, & \langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1 \\ \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle = 0, & \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_2 \\ \operatorname{div} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{em } \Omega, \quad t = 0. \end{array}$

### 6.3 Reprodução do modelo fracamente acoplado

Nesta seção fazemos a comparação entre as equações efetivas obtidas nos modelos totalmente e fracamente acoplados. Neste sentido o nosso objetivo principal é elucidar as hipóteses necessárias para reproduzir o sistema de equações efetivas fracamente acoplado a partir do sistema de equações efetivas totalmente acoplado.

#### 6.3.1 Equação fracamente acoplada para a média de $p$

No presente contexto adotamos o mesmo procedimento proposto no Capítulo 3 [Gutierrez e Lewis (2002)] para a reprodução do modelo fracamente acoplado a partir do modelo totalmente acoplado. Considerando a média do tensor total  $\langle \sigma_T \rangle := \langle p \rangle \mathbf{I} + \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  dado pela soma das componentes em ordem  $\mathcal{O}(\sigma^0)$  e  $\mathcal{O}(\sigma^2)$  em (6.12) e (6.14)  $\left( \langle \boldsymbol{\sigma}_T \rangle = \boldsymbol{\sigma}_T^{(0)} + \langle \boldsymbol{\sigma}_T^2 \rangle \right)$ , tomando o traço, obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr} \langle \boldsymbol{\sigma}_T \rangle = & (d\lambda_G + 2\mu_G) \text{tr} \mathcal{E}(\mathbf{u}^{(0)}) - dp^{(0)} + (d\lambda_G + 2\mu_G) \text{tr} \mathcal{E} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle - d \langle p^{(2)} \rangle + \\ & (d\lambda_G + 2\mu_G) \left[ \text{tr} \mathcal{E}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + (d\lambda_G + 2\mu_G) \frac{\sigma_T^2}{2} \text{tr} \mathcal{E}(\mathbf{u}^{(0)}), \quad d = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Derivando em relação ao tempo e usando as relações (4.5)-(4.7) e entre as médias geométricas (4.10)  $[S_G = d/(d\lambda_G + 2\mu_G)]$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{S_G}{d} \frac{\partial \langle \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T \rangle}{\partial t} = & \frac{\partial \text{div} \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} - \frac{S_G \partial p^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \text{div} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle}{\partial t} - \frac{S_G \partial \langle p^{(2)} \rangle}{\partial t} + \\ & \left[ \frac{\partial \text{div} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}}{\partial t} \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + \frac{\sigma_T^2}{2} \frac{\partial \text{div}(\mathbf{u}^{(0)})}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Por outro lado, temos que a derivada temporal do traço do tensor total  $\boldsymbol{\sigma}_T^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}^{(0)} - p^{(0)} \mathbf{I}$ , em (6.12) é dada por

$$\frac{S_G}{d} \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial \text{div} \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} - S_G \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t}, \quad (6.38)$$

e a derivada temporal do traço da covariância  $\mathbf{C}_{T\sigma_T} := \mathbf{C}_{T\sigma} - C_{Tp}\mathbf{I}$  em (6.23) é dada por

$$\frac{S_G}{d} \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}_{T\sigma_T}}{\partial t} = \frac{\partial \text{div} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{\partial \text{div} \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} C_T - S_G \frac{\partial C_{Tp}}{\partial t}. \quad (6.39)$$

Usando (6.38) na equação acima temos

$$\frac{\partial \text{div} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}}}{\partial t} = \frac{S_G}{d} \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}_{T\sigma_T}}{\partial t} - \frac{S_G}{d} \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T^{(0)}}{\partial t} C_T - S_G \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} C_T + S_G \frac{\partial C_{Tp}}{\partial t}. \quad (6.40)$$

Introduzindo as relações (6.38) e (6.40) em (6.37), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{div} \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \text{div} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle}{\partial t} &= \frac{S_G}{d} \frac{\partial \text{tr} \langle \boldsymbol{\sigma}_T \rangle}{\partial t} + S_G \frac{\partial \langle p^{(2)} \rangle}{\partial t} + S_G \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} \\ &\quad - \left[ \frac{S_G}{d} \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}_{T\sigma_T}}{\partial t} - \frac{S_G}{d} \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T^{(0)}}{\partial t} C_T - S_G \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} C_T + S_G \frac{\partial C_{Tp}}{\partial t} \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \\ &\quad - \frac{\sigma_T^2}{2} \left[ \frac{S_G}{d} \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T^{(0)}}{\partial t} + S_G \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Fazendo uso das relações  $\sigma_T^2 = \sigma_R^2$ ,  $C_T = -C_R$ ,  $C_{Tp} = C_{Rp}$  e  $C_T|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} = \sigma_T^2$ , a equação acima pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{div} \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \text{div} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle}{\partial t} &= S_G \left[ \frac{\partial \langle p^{(2)} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial C_{Rp}}{\partial t} + \frac{\sigma_R^2}{2} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} \right] \\ &\quad + \frac{S_G}{d} \left[ \frac{\partial \text{tr} \langle \boldsymbol{\sigma}_T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}_{T\sigma_T}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \right]. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Por outro lado, a média do balanço de massa total é dada pela soma dos balanços de massa de  $\mathcal{O}(\sigma^0)$  em (6.12) e  $\mathcal{O}(\sigma^2)$  em (6.14)

$$\frac{\partial \text{div} \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \text{div} \langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle}{\partial t} + \text{div} \left[ \mathbf{q}^{(0)} + \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle \right] = 0. \quad (6.43)$$

Substituindo (6.42) em (6.43) temos

$$\begin{aligned} S_G \left[ \frac{\partial \langle p^{(2)} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial C_{Rp}}{\partial t} + \frac{\sigma_R^2}{2} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} \right] + \text{div} (\mathbf{q}^{(0)} + \langle \mathbf{q}^{(2)} \rangle) &= \\ - \frac{S_G}{d} \left[ \frac{\partial \text{tr} \langle \boldsymbol{\sigma}_T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}_{T\sigma_T}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \right]. \end{aligned} \quad (6.44)$$

O resultado acima é de suma importância e introduz nova física ao problema. Ao compararmos a média do balanço de massa em (6.44) com a soma da média dos balanços de massa em (5.32) e (5.36) podemos observar o surgimento do termo adicional

$$\frac{\partial \text{tr}\langle \boldsymbol{\sigma}_T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}_T}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}}.$$

Conseqüentemente, a reprodução do modelo fracamente acoplado requer hipótese de invariabilidade no tempo do  $\text{tr}\langle \boldsymbol{\sigma}_T \rangle$  e  $\text{tr} \mathbf{C}_{T\boldsymbol{\sigma}_T}$ . O presente critério de invariabilidade no tempo baseado nos momentos estatísticos de  $\boldsymbol{\sigma}_T$  generaliza o critério descrito em Gutierrez e Lewis (2002) para modelos poroelásticos homogêneos (Secção 3.2). A validade desta aproximação esta fortemente relacionada com a natureza das heterogeneidades presentes na permeabilidade e módulo de Young. Resultados computacionais serão apresentados posteriormente para ilustrar estas hipóteses.

### 6.3.2 Equação fracamente acoplada para a autocovariância de $p$

Para finalizar a análise adotamos o mesmo procedimento para reproduzir as equações de covariância de  $p$ . Tomando o traço do tensor total  $\mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}_{Tp}} := \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}_p} - C_p \mathbf{I}$  em (6.35) temos

$$\text{tr} \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}_{Tp}} = (d\lambda_G + 2\mu_G) \text{tr} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{\mathbf{u}p}) + C_{Tp} (d\lambda_G + 2\mu_G) \text{tr} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}^{(0)}) - dC_p,$$

Derivando em relação ao tempo e usando a relação do traço do tensor total de ordem zero (6.38), obtemos

$$\frac{S_G}{d} \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}_{Tp}}}{\partial t} = \frac{\partial \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{u}p}}{\partial t} + C_{Tp} \frac{S_G}{d} \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T^{(0)}}{\partial t} + C_{Tp} S_G \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} - S_G \frac{\partial C_p}{\partial t},$$

usando (6.38) e a relação  $C_{Rp} = -C_{Tp}$ , segue que

$$\frac{\partial \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{u}p}}{\partial t} = S_G \left[ \frac{\partial C_p}{\partial t} + C_{Rp} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} \right] + \frac{S_G}{d} \left[ \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}_{\boldsymbol{\sigma}_{Tp}}}{\partial t} - C_{Rp} \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T^{(0)}}{\partial t} \right].$$

Fazendo uso do resultado acima no balanço de massa (6.35), fornece

$$S_G \frac{\partial C_p}{\partial t} + C_{Rp} S_G \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_{\mathbf{q}p} = \frac{S_G}{d} \left[ C_{Rp} \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}_{\sigma_{Tp}}}{\partial t} \right]. \quad (6.45)$$

Adotando as hipóteses de Gutierrez e Lewis (2002) no caso determinístico temos  $\frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T^{(0)}}{\partial t} = 0$ . Analogamente ao caso anterior, a equação acima reproduz o balanço de massa (5.35) com a exceção do termo de fonte envolvendo o termo  $\text{tr} \mathbf{C}_{\sigma_{Tp}}$ . Este resultado é de suma importância pois elucida as hipóteses necessárias para a reprodução do momento de segunda ordem da pressão no modelo fracamente acoplado.

Os resultados (6.44) e (6.45) proporcionam uma nova forma para validar o modelo fracamente acoplado em formações geológicas heterogêneas. Tal como ilustrado nas simulações computacionais adiante, o cômputo dos termos de fonte dados acima fornece a correta escolha do modelo poroelástico a ser adotado.

Tabela 6.5: Métrica para os modelos fracamente e totalmente acoplados

Métrica no caso homogêneo	$\left  \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial t} \right $
Métrica no caso heterogêneo	<p>Média: <math>\left  \frac{\partial \text{tr} \langle \boldsymbol{\sigma}_T \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}_{T\sigma_T}}{\partial t} \Big _{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \right </math></p> <p>Covariância: <math>\left  C_{Rp} \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial \text{tr} \mathbf{C}_{\sigma_{Tp}}}{\partial t} \right </math></p>

# Capítulo 7

## Discretização dos modelos poroelásticos

Neste capítulo apresentamos a formulação variacional e a aproximação por elementos finitos das equações efetivas obtidas nos Capítulos 5 e 6, bem como para as equações determinísticas advindas de cada realização no contexto do método de Monte Carlo.

### 7.1 Notação unificada para as equações efetivas

Com o objetivo de representar os sistemas de equações efetivas de forma compacta e facilitar a notação subsequente, introduzimos os seguintes conjuntos cujos elementos surgem nas equações efetivas do modelo fracamente acoplado [ver Tabela 5.1]:

(i) Incógnitas

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \left\{ p^{(0)}(\mathbf{x}, t), C_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), C_p(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau), \langle p^{(2)} \rangle(\mathbf{x}, t) \right\},$$

(ii) termos de fonte

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \left\{ 0, K_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \left( C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau) \right), -S_G \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} C_R(\mathbf{x}; \mathbf{y}), \right. \\ \left. S_G \frac{\partial p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau)}{\partial \tau} C_{Rp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}) + K_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \left( C_{Yp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t) \right), \right. \\ \left. -S_G \frac{\partial C_{Rp}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x})}{\partial t} + K_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \left( C_{Yp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \nabla_{\mathbf{x}} p^{(0)}(\mathbf{x}, t) \right) \right. \\ \left. -S_G \frac{\hat{\sigma}_R^2}{2} \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} \right\},$$

(iii) condições iniciais,  $\mathcal{P}_D(\mathbf{x}) = \{p_D(\mathbf{x}), 0, 0, 0, 0\}$ ,

(iv) o conjunto dos tempos característicos  $\mathbf{t} = \{t, \tau, \tau, t, t\}$ ,

(v) e conjunto de subscritos  $\mathbf{z} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{x}\}$ .

Fazendo uso da notação acima podemos representar a sequência de equações efetivas da Tabela 5.1 de forma unificada como:

**Problema  $\mathcal{P}$**  : Dados  $S_G, K_G, \mathcal{P}_D$  e  $\mathcal{G}$ , encontrar  $\mathcal{P}$  tal que:

$$S_G \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{t}} - K_G \operatorname{div}_{\mathbf{z}} (\nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{P}) = \mathcal{G}, \quad \text{em } \Omega \times (0, T], \quad (7.1)$$

com condições de contorno e inicial

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{P} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ \mathcal{P} &= \mathcal{P}_D, \quad \text{em } \Omega, \mathbf{t} = 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

De forma análoga, para o sistema de equações efetivas do modelo poroelástico completamente acoplado [ver Tabelas 6.2.3 e 6.4] introduzimos os conjuntos compostos por:

(i) Variáveis potenciais do modelo poroelástico

$$\{\mathbf{U}, \mathcal{P}\}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \left\{ \{\mathbf{u}^{(0)}, p^{(0)}\}(\mathbf{x}, t), \{\mathbf{C}_{Y\mathbf{u}}, \mathbf{C}_{Yp}\}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \{\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}\mathbf{C}_{Tp}\}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \tau), \right. \\ \left. \{\mathbf{C}_{\mathbf{u}z}, \mathbf{C}_{pz}\}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau), \{\langle \mathbf{u}^{(2)} \rangle, \langle p^{(2)} \rangle\}(\mathbf{x}, t) \right\},$$

onde o par  $\{\mathbf{C}_{\mathbf{u}z}, \mathbf{C}_{pz}\}$  representa as quatro colunas da matriz de covariâncias  $\mathbf{C}_{\mathbf{u}p}^M$ , com  $z = u_1, u_2, u_3$  e  $p$ , sendo  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ .

(ii) Termos de fonte das equações de equilíbrio

$$\mathcal{G}_1(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \left\{ \mathbf{0}, \mathbf{0}, -\operatorname{div}_{\mathbf{y}} \left( \mathbf{C}_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)})] \right), \right. \\ -\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left( \mathbf{C}_{Tz}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)})] \right), \\ \left[ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \left( \lambda_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{T\mathbf{u}} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}_{T\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t)) \right) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \\ \left. - \frac{\sigma_T^2}{2} \operatorname{div} [\lambda_G \operatorname{div} \mathbf{u}^{(0)} \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{(0)})] \right\}.$$

(iii) Termos de fonte das equações de conservação de massa

$$\mathcal{G}_2(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \left\{ 0, -K_G \operatorname{div}_{\mathbf{y}} [\mathbf{C}_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \nabla p^{(0)}(\mathbf{y}, \tau)], 0, \right. \\ -K_G \operatorname{div}_{\mathbf{x}} [\mathbf{C}_{Yz}(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}) \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t)], \\ \left. \left[ \operatorname{div}_{\mathbf{x}} K_G \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{C}_{Yp}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} + K_G \frac{\sigma_Y^2}{2} \operatorname{div} \nabla p^{(0)}(\mathbf{x}, t) \right\}.$$

(iv) Condição de Neumann para as tensões efetivas

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{h}(\mathbf{x}), -\mathbf{C}_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{0}, -\mathbf{C}_{Tz}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau) \mathbf{h}(\mathbf{x}), \frac{\sigma_T^2}{2} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \right\}.$$

(v) O conjunto de variáveis temporais  $\mathbf{t} = \{t, \tau, \tau, t, t, t, t, t\}$ ,

(vi) e o conjunto de subscritos  $\mathbf{z} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}\}$ .

Fazendo uso da notação acima podemos representar a sequência de equações efetivas das Tabelas 6.2.3 e 6.4 de forma unificada como

**Problema  $\mathcal{UP}$**  : Dados  $\lambda_G, \mu_G, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  e  $\mathcal{H}$ , encontrar  $\{\mathbf{U}, \mathcal{P}\}$ , satisfazendo

$$\begin{aligned} \lambda_G \nabla_{\mathbf{z}} \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{U} + 2\mu_G \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{z}}(\mathbf{U}) - \nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{P} &= \mathcal{G}_1, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{t}} - K_G \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{P} &= \mathcal{G}_2, \end{aligned} \quad \text{em } \Omega \times (0, T], \quad (7.3)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= 0, & [\lambda_G \operatorname{tr} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{z}}(\mathbf{U}) \mathbf{I} + 2\mu_G \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{z}}(\mathbf{U})] \mathbf{n} &= \mathcal{H}, & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{U} &= 0, & -K_G \nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{P} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \end{aligned} \quad (7.4)$$

e condição inicial

$$\operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{t} = 0. \quad (7.5)$$

## 7.2 Notação adotada para o método de Monte Carlo

Antes de apresentar as formulações variacionais das equações efetivas, a seguir discutimos a notação utilizada para o método de Monte Carlo. Considerando a subdivisão do domínio  $\Omega$  em  $N_b$  blocos  $\Omega_b$  ( $b = 1, 2, \dots, N_b$ ), dadas as médias e covariâncias estatísticas do log da condutividade hidráulica e do módulo de Young, são geradas  $M$  realizações com distribuição de probabilidade uniforme  $K_k(\Omega_b)$  e  $E_k(\Omega_b)$  ( $k = 1, 2, \dots, M, b = 1, 2, \dots, N_b$ ), onde o tamanho do bloco é escolhido da mesma ordem da escala de heterogeneidade de tal forma que assumimos  $K_k$  e  $E_k$  constantes em cada bloco  $\Omega_b$ . Fazendo uso de (4.5)-(4.7) podemos gerar em cada bloco as constantes de Lamé  $\lambda_k, \mu_k$  bem como a compressibilidade  $S_k$  para cada realização. Desta forma, para cada  $k = 1, \dots, M$ , os problemas determinísticos para o modelo fracamente acoplado, posto em termos de  $p_k$  são dados por:

**Problema MCp**: Dados  $K_k$  e  $S_k, k = 1, \dots, M$ , encontrar  $p_k : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

para cada  $k$ , tal que

$$S_k \frac{\partial p_k}{\partial t} - \operatorname{div}(K_k \nabla p_k) = 0, \quad (7.6)$$

com condições de contorno e inicial

$$\begin{aligned}
p_k &= 0, & \text{sobre } \Gamma_1, \\
\nabla p_k \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2, \\
p_k &= p_D, & \text{em } \Omega, \text{ em } t = 0.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Da mesma forma temos os problemas determinísticos do modelo totalmente acoplado em termos de  $\{\mathbf{u}_k, p_k\}$ , da forma:

**Problema MCup:** Dados  $K_k, \lambda_k$  e  $\mu_k$ , para cada  $k = 1, \dots, M$ , encontrar

$\mathbf{u}_k : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $p_k : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo

$$\begin{aligned}
\nabla(\lambda_k \operatorname{div} \mathbf{u}_k) + \operatorname{div}[\mu_k(\nabla \mathbf{u}_k + \nabla \mathbf{u}_k^T)] - \nabla p_k &= 0, \\
\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} - \operatorname{div}(K_k \nabla p_k) &= 0,
\end{aligned} \tag{7.8}$$

com condições de contorno e inicial

$$\begin{aligned}
p_k &= 0, & \boldsymbol{\sigma}_k \mathbf{n} &= \mathbf{h}, & \text{sobre } \Gamma_1, \\
\mathbf{u}_k &= 0, & \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2 \\
\operatorname{div} \mathbf{u}_k &= 0, & \text{em } \Omega, & t = 0.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Após a construção do conjunto de soluções  $\{p_k\}$  e  $\{\mathbf{u}_k, p_k\}$   $k = 1, \dots, M$  em cada formulação, os momentos estatísticos das incógnitas são calculados numericamente usando (4.19)-(4.21).

### 7.3 Formulação variacional

Para apresentarmos a formulação fraca das equações apresentadas na seção anterior introduzimos a notação usual. Seja  $L^2(\Omega)$  o espaço de funções escalares

quadrado integráveis munido do produto interno e norma induzida:

$$(f, g) \equiv \int_{\Omega} fgd\Omega, \quad \|f\| = (f, f)^{1/2}, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega), \quad (7.10)$$

Seja  $H^1(\Omega)$  o espaço de Hilbert

$$H^1(\Omega) \equiv \{f \in L^2(\Omega), \nabla f \in L^2(\Omega)\}. \quad (7.11)$$

com produto interno e norma induzida

$$(f, g)_1 \equiv (f, g) + (\nabla f, \nabla g) \quad \|f\|_1 = (f, f)_1^{1/2}, \quad \forall f, g \in H^1(\Omega). \quad (7.12)$$

Para as condições de fronteira (7.2) e (7.4), adotadas neste trabalho, introduzimos os espaços  $\mathbf{U}$  e  $V$

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^d, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2 \right\}, \quad (7.13)$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega), \quad v = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1\}. \quad (7.14)$$

Multiplicando (7.1) por uma função  $v \in V$ , integrando por partes e usando as condições de contorno obtemos a formulação variacional do problema fracamente acoplado **Problema  $\mathcal{P}$**  da forma o seguinte problema:

**Problema  $\mathcal{P}V$**  : Dados  $S_G, K_G, \mathcal{P}_D$  e  $\mathcal{G}$  para cada  $\mathbf{t} \in (0, T]$ , achar  $\mathcal{P}(\mathbf{t}) \in V$ ,

tal que

$$S_G \left( \frac{\partial \mathcal{P}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}}, v \right) + K_G(\nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{P}(\mathbf{t}), \nabla_{\mathbf{z}} v) = (\mathcal{G}, v), \quad \forall v \in V, \quad (7.15)$$

$$(\mathcal{P}(0), v) = (\mathcal{P}_D, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

De forma análoga, para obter a formulação variacional do problema totalmente acoplado **Problema  $\mathcal{UP}$**  multiplicamos (7.3) por  $(\mathbf{w}, v) \in \mathbf{U} \times V$ , integramos por partes e utilizamos as condições de contorno (7.4), obtendo desta forma o seguinte

problema

**Problema  $\mathcal{UPV}$**  : Dados  $\lambda_G, \mu_G, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  e  $\mathcal{H}$ , para cada  $\mathbf{t} \in (0, T]$ , achar

$\{\mathcal{U}(\mathbf{t}), \mathcal{P}(\mathbf{t})\} \in \mathbf{U} \times V$ , tal que

$$\begin{cases} \lambda_G(\operatorname{div}_{\mathbf{z}}\mathcal{U}, \operatorname{div}_{\mathbf{z}}\mathbf{w}) + 2\mu_G(\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathcal{U}), \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})) \\ \quad -(\mathcal{P}, \operatorname{div}_{\mathbf{z}}\mathbf{w}) = \mathcal{F}(\mathbf{w}) + (\mathcal{G}_1, \mathbf{w}), & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{U}, \\ \left(\operatorname{div}_{\mathbf{z}}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{t}}, v\right) + K_G(\nabla_{\mathbf{z}}\mathcal{P}, \nabla_{\mathbf{z}}v) = (\mathcal{G}_2, v), & \forall v \in V, \end{cases} \quad (7.16)$$

com

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}) = \int_{\Gamma_1} \mathcal{H} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma,$$

e

$$(\operatorname{div}_{\mathbf{z}}\mathcal{U}, v) = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega), \quad (7.17)$$

Devido à condição inicial de incompressibilidade para o problema de poroelasticidade totalmente acoplado, a formulação variacional **Problema  $\mathcal{UP}$**  no instante inicial se reduz ao seguinte problema de elasticidade incompressível com restrição interna:

Achar o par  $(\mathcal{U}(0), \mathcal{P}(0)) \in \mathbf{U} \times L^2(\Omega)$ , tal que

$$\begin{cases} 2\mu_G(\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathcal{U})(0), \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{w})) - (\mathcal{P}(0), \operatorname{div}_{\mathbf{z}}\mathbf{w}) = \mathcal{F}(\mathbf{w}) + (\mathcal{G}_1, \mathbf{w}), & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{U}, \\ (\operatorname{div}_{\mathbf{z}}\mathcal{U}(0), v) = (\mathcal{G}_2, v), & \forall v \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (7.18)$$

De forma análoga são apresentadas as formulações variacionais dos problemas (7.6) e (7.8) indexados para cada realização no contexto do método de Monte Carlo:

**Problema MCpV**: Dados  $K_k, S_k$  e  $p_D$ , para cada  $t \in (0, T]$  e  $k = 1, \dots, M$ ,

encontrar  $p_k(t) \in V$ , tal que

$$\begin{aligned} \left( S_k \frac{\partial p_k(t)}{\partial t}, v \right) + (K_k \nabla p_k(t), \nabla v) &= 0, \quad \forall v \in V, \\ (p_k(0), v) &= (p_D, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega), \end{aligned} \quad (7.19)$$

**Problema MCupV:** Dados  $K_k, \lambda_k, \mu_k$  e  $\mathbf{h}$ , para cada  $t \in (0, T]$  e  $k = 1, \dots, M$ ,

achar o par  $\{\mathbf{u}_k(t), p_k(t)\} \in \mathbf{U} \times V$  tal que:

$$\begin{cases} (\lambda_k \operatorname{div} \mathbf{u}_k, \operatorname{div} \mathbf{w}) + (2\mu_k \mathcal{E}(\mathbf{u}_k), \mathcal{E}(\mathbf{w})) - (p_k, \operatorname{div} \mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}), & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{U}, \\ \left( \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t}, v \right) + (K_k \nabla p_k, \nabla v) = 0, & \forall v \in V, \end{cases} \quad (7.20)$$

com

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{h} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma,$$

e os dados iniciais  $\mathbf{u}_k(0)$  e  $p_k(0)$  satisfazendo o problema de ponto de sela:

Achar  $\{\mathbf{u}_k(0), p_k(0)\} \in \mathbf{U} \times L^2(\Omega)$ , tal que

$$\begin{cases} (2\mu_k \mathcal{E}(\mathbf{u}_k(0)), \mathcal{E}(\mathbf{w})) - (p_k(0), \operatorname{div} \mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}), & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{U}, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_k(0), v) = 0, & \forall v \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (7.21)$$

Existência e unicidade da formulação fraca (7.19)-(7.21) foram discutidas por Zenisek (1984).

## 7.4 Aproximação por elementos finitos

Consideramos agora a discretização dos problemas variacionais pelo método de Galerkin. É importante ressaltar que os espaços aproximantes para o deslocamento e pressão respectivamente não podem ser escolhidos independentemente, pois algumas combinações de interpolação (incluindo as de igual ordem) são instá-

veis devido à restrição de incompressibilidade imposta ao deslocamento no instante inicial [Murad e Loula (1994)]. A análise de estabilidade mostra que os espaços aproximantes devem satisfazer a condição de Babüska-Brezzi [Brezzi (1974)]. Na solução numérica do problema de Stokes, o qual corresponde ao problema de Biot em  $t = 0$ , modos espúrios no campo de pressão podem ser evitados adotando os elementos Taylor-Hood [Taylor e Hood. (1973)], com interpolação polinomial contínua com grau menor para a poro pressão em relação à interpolação do deslocamento.

Por outro lado, Murad et al. (1996) mostraram que as oscilações presentes no campo de poro-pressão devido à adoção de funções aproximantes de mesma ordem para  $\mathbf{u}$  e  $p$  acontecem apenas por um curto período de tempo e tendem a decair rapidamente logo após o início do processo de drenagem do fluido intersticial. Nos instantes subseqüentes o campo de pressão tende a regularizar rapidamente com ausência de oscilações espúrias. Desta forma nas simulações numéricas adotamos interpolações da mesma ordem para  $\mathbf{u}$  e  $p$ .

#### 7.4.1 Formulação semidiscreta

Consideramos  $\Omega$  um domínio poligonal discretizado por uma malha de  $N_e$  elementos, tais que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \bar{\Omega}^e \quad \text{com} \quad \bigcap_{e=1}^{N_e} \bar{\Omega}^e = \emptyset \quad (7.22)$$

onde  $\Omega^e$  denota o interior de um elemento e  $\bar{\Omega}^e$  o seu fecho. O parâmetro de malha é dado por  $h = \max h_e$ ,  $1 \leq e \leq N_e$ , com  $h_e =$  diâmetro de  $\Omega^e$ .

Sejam  $S_h^{l_0}(\Omega)$  e  $S_h^{l_1}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  espaços de funções polinomiais de elementos finitos de classe  $\mathcal{C}^0$  de graus  $l_0$  e  $l_1$ . Definimos os subespaços de elementos finitos de  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{U}$ , como

$$\mathbf{V}_h = S_h^{l_0} \cap \mathbf{V}, \quad \mathbf{U}_h = (S_h^{l_1})^3 \cap \mathbf{U}.$$

A formulação semidiscreta de Galerkin para a problema **Problema  $\mathcal{PV}$**  é dada por :

**Problema  $\mathcal{P}V_h$** : Para  $\mathbf{t} \in (0, T]$  encontrar  $\mathcal{P}_h(\mathbf{t}) \in V_h$ , tal que

$$\begin{aligned} S_G \left( \frac{\partial \mathcal{P}_h(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}}, v_h \right) + K_G(\nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{P}_h(\mathbf{t}), \nabla_{\mathbf{z}} v_h) &= (\mathcal{G}, v_h), & \forall v_h \in V_h. \\ (\mathcal{P}_h(0), v_h) &= (\mathcal{P}_D, v_h), \end{aligned}$$

A formulação semidiscreta para o **Problema  $\mathcal{UPV}$**  é dada por:

**Problema  $\mathcal{UPV}_h$** : Para cada  $\mathbf{t} \in (0, T]$ , achar o par  $\{\mathbf{U}_h(\mathbf{t}), \mathcal{P}_h(\mathbf{t})\} \in \mathbf{U}_h \times V_h$ ,

tal que

$$\begin{aligned} \lambda_G(\operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{U}_h, \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{w}_h) + 2\mu_G(\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{U}_h), \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{w}_h)) - & & \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h \\ (\mathcal{P}_h, \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{w}_h) = \mathcal{F}(\mathbf{w}_h) + (\mathcal{G}_1, \mathbf{w}_h), & & \\ \left( \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial \mathbf{t}}, v_h \right) + K_G(\nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{P}_h, \nabla_{\mathbf{z}} v_h) = (\mathcal{G}_2, v_h), & & \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

com  $\mathbf{U}_h(0)$  e  $\mathcal{P}_h(0)$  satisfazendo

$$\begin{aligned} 2\mu_G(\mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{U}_h(0)), \mathcal{E}_{\mathbf{z}}(\mathbf{w}_h)) - (\mathcal{P}_h(0), \operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{w}_h) &= \mathcal{F}(\mathbf{w}_h) + (\mathcal{G}_1, \mathbf{w}_h), & \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h \\ (\operatorname{div}_{\mathbf{z}} \mathbf{U}_h(0), v_h) &= 0, & \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

No contexto do método de Monte Carlo, para cada realização  $k$  as aproximações de Galerkin das formulações variacionais dos modelos poroelásticos (7.19)-(7.20), são dados por:

**Problema  $\text{MCp}_h$** : Para  $t \in (0, T]$  e  $k = 1, 2, \dots, M$ , encontrar  $p_{kh}(t) \in V_h$ ,

tal que

$$\begin{aligned} S_{kh} \left( \frac{\partial p_{kh}(t)}{\partial t}, v_h \right) + (K_{kh} \nabla p_{kh}(t), \nabla v_h) &= 0, & \forall v_h \in V_h. \\ (p_{kh}(0), v_h) &= (p_D, v_h), \end{aligned}$$

**Problema  $\text{MCup}_h$** : Para  $t \in (0, T]$  e  $k = 1, 2, \dots, M$ , achar o par

$\{\mathbf{u}_{kh}(t), p_{kh}(t)\} \in \mathbf{U}_h \times V_h$  tal que:

$$\begin{aligned} (\lambda_{kh} \operatorname{div} \mathbf{u}_{kh}, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) + (2\mu_{kh} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_{kh}), \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{w}_h)) \\ - (p_{kh}, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) = \mathbf{f}(\mathbf{w}_h), \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_{kh}, v_h) + (K_{kh} \nabla p_{kh}, \nabla v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

com  $\mathbf{u}_h(0)$  e  $\mathbf{u}_h(0)$  satisfazendo

$$\begin{aligned} (2\mu_{kh} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_{kh}), \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{w}_h)) - (p_{kh}, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) = \mathbf{f}(\mathbf{w}_h), \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(0), v_h \right) = 0, \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

onde  $X_{kh}$ , denota a projeção de  $X_k$  ( $X_k \in \{K_k, S_k, \lambda_k, \mu_k\}$ ) no espaço  $P_h^0(\Omega^e)$  de funções constantes por partes sobre cada bloco geológico  $\Omega^e$  ( $e = 1, \dots, N_e$ ).

#### 7.4.2 Formulação completamente discreta

Consideramos agora as aproximações no espaço e tempo dos problemas (7.1), (7.3), (7.6) e (7.8). Seja  $\Delta \mathbf{t}$  o intervalo de tempo e seja  $\mathcal{P}^m$  a aproximação de  $\mathcal{P}(\mathbf{t})$  no instante  $\mathbf{t}_m = m\Delta \mathbf{t}$ , ( $m \geq 1$ ). O esquema de Euler implícito aproxima a derivada temporal da forma

$$\frac{\partial \mathcal{P}^m}{\partial \mathbf{t}} \approx \frac{\mathcal{P}^m - \mathcal{P}^{m-1}}{\Delta t} \quad (7.23)$$

As formulações completamente discretas dos problemas (7.1) e (7.3) são dadas por:

**Problema  $\mathcal{P}V_h^m$ :** Para cada  $t = t_m = m\Delta t$  e  $\tau = t_m = m\Delta t$  ( $m \geq 1$ ) achar

$\mathcal{P}_h^m \in V_h$ , tal que

$$\begin{aligned} S_G(\mathcal{P}_h^m, v_h) + \Delta t (\nabla_{\mathbf{z}} \mathcal{P}_h^m, \nabla_{\mathbf{z}} v_h) = \Delta t (\mathcal{G}, v_h) - (\mathcal{P}_h^{m-1}, v_h) \\ (\mathcal{P}_h^m(0), v_h) = (\mathcal{P}_D, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

e

**Problema  $\mathcal{UPV}_h^m$** : Para cada  $t = t_m = m\Delta t$  e  $\tau = t_m = m\Delta t$  ( $m \geq 1$ ) achar

o par  $\{\mathbf{u}_h^m, \mathcal{P}_h^m\} \in \mathbf{U}_h \times V_h$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_G(\operatorname{div}_z \mathbf{u}_h^m, \operatorname{div}_z \mathbf{w}_h) + 2\mu_G(\boldsymbol{\mathcal{E}}_z(\mathbf{u}_h^m), \boldsymbol{\mathcal{E}}_z(\mathbf{w}_h)) \\ \quad - (\mathcal{P}_h^m, \operatorname{div}_z \mathbf{w}_h) = \mathcal{F}(\mathbf{w}_h) + (\mathcal{G}_1, \mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h \\ (\operatorname{div}_z \mathbf{u}_h^m, v_h) + \Delta t K_G(\nabla_z \mathcal{P}_h^m, \nabla_z v_h) = (\operatorname{div}_z \mathbf{u}_h^{m-1}, v_h) \\ \quad + \Delta t (\mathcal{G}_2, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

com  $(\mathbf{u}_h^0, \mathcal{P}_h^0)$  satisfazendo

$$\begin{aligned} 2\mu_G(\boldsymbol{\mathcal{E}}_z(\mathbf{u}_h^0), \boldsymbol{\mathcal{E}}_z(\mathbf{w}_h)) - (\mathcal{P}_h^0, \operatorname{div}_z \mathbf{w}_h) &= \mathcal{F}(\mathbf{w}_h) + (\mathcal{G}_1, \mathbf{w}_h), \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h \\ (\operatorname{div}_z \mathbf{u}_h^0, v_h) &= 0 \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

As formulações completamente discretas dos problemas determinísticos para cada realização no contexto do método de Monte Carlo são dados por:

**Problema  $\text{MCp}V_h^m$** : Para cada  $t = t_m = m\Delta t$  ( $m \geq 1$ ) e  $k = 1, \dots, M$  achar

$p_{kh}^m \in V_h$ , tal que

$$\begin{aligned} (S_{kh} p_{kh}^m, v_h) + \Delta t (K_{kh} \nabla p_{kh}^m, \nabla v_h) &= (S_{kh} p_{kh}^{m-1}, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \\ (\mathcal{P}_{kh}^0, v_h) &= (\mathcal{P}_D, v_h), \end{aligned}$$

**Problema  $\text{MCup}V_h^m$** : Para cada  $t = t_m = m\Delta t$  ( $m \geq 1$ ) e  $k = 1, \dots, M$

encontrar o par  $\{\mathbf{u}_{kh}^m, p_{kh}^m\} \in \mathbf{U}_h \times V_h$ , tal que:

$$\begin{aligned} (\lambda_{kh} \operatorname{div} \mathbf{u}_{kh}^m, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) + (2\mu_{kh} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_{kh}^m), \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{w}_h)) - (p_{kh}^m, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_{kh}^m, v_h) + \Delta t (K_{kh} \nabla p_{kh}^m, \nabla v_h) &= (\operatorname{div} \mathbf{u}_{kh}^{m-1}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

com  $\mathbf{u}_{kh}^0$  e  $p_{kh}^0$  satisfazendo

$$\begin{aligned}(2\mu_{kh}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_{kh}^0), \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{w}_h)) - (p_{kh}^0, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_h), \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_{kh}^0, v_h) &= 0, \quad \forall v_h \in V_h.\end{aligned}$$

Após o cômputo dos campos potenciais  $\{\mathcal{U}_h^n, \mathcal{P}_h^n\}$ , a velocidade e as tensões efetivas podem ser calculadas por um esquema de pós-processamento, considerando as formas discretas da lei de Darcy e da lei de Hooke.

# Capítulo 8

## Simulações Numéricas

Neste capítulo apresentamos as simulações numéricas dos modelos discretos na resolução do problema de extração primária de óleo em reservatórios de petróleo, onde a produção de óleo deve-se, exclusivamente, a diferença de pressão entre o poço recém aberto e o fluido inicialmente confinado e submetido a alta pressão devido ao peso das camadas geológicas superiores. A geometria do reservatório é ilustrada na Figura 8.1.

Primeiramente verificamos a qualidade dos campos gerados pelo método de decomposição LU para sua utilização na simulação de Monte Carlo. Em seguida, ilustramos a deterioração da solução das equações efectivas obtidas pelo método de expansão assintótica para variâncias elevadas. Finalmente ilustramos numericamente os resultados obtidos via teoria de perturbação estocástica, em particular a performance dos modelos fracamente e totalmente acoplados.

Denotando por  $\{x, y\}$  as coordenadas retangulares bidimensionais, o problema consiste de um reservatório produtivo, delimitado por uma parede rígida impermeável na base ( $y = 0$ ), sujeito ao carregamento devido ao peso das formações geológicas situadas acima dele ( $y = H$ ). Na fronteira superior carregada é introduzido um poço horizontal que conecta a poro pressão com a pressão atmosférica ( $p_o$ ). As fronteiras laterais são consideradas impermeáveis e com tensões de cisalhamento nulas.

Denotando as componentes cartesianas do deslocamento e da tensão efetiva

como  $\mathbf{u} = (u, v)$  e  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ , denotando  $h_y$  a densidade de carregamento na direção  $y$ , as condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_y = h_y, \quad p = 0, \quad \text{em } 0 \leq x \leq L \quad y = H, \\ u = 0, \quad K \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \text{em } x = 0, x = L, \quad 0 \leq y \leq H, \\ u = v = 0, \quad K \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \text{em } y = 0 \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (8.1)$$

e condição inicial

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{em } [0, L] \times [0, H], \quad t = 0. \quad (8.2)$$

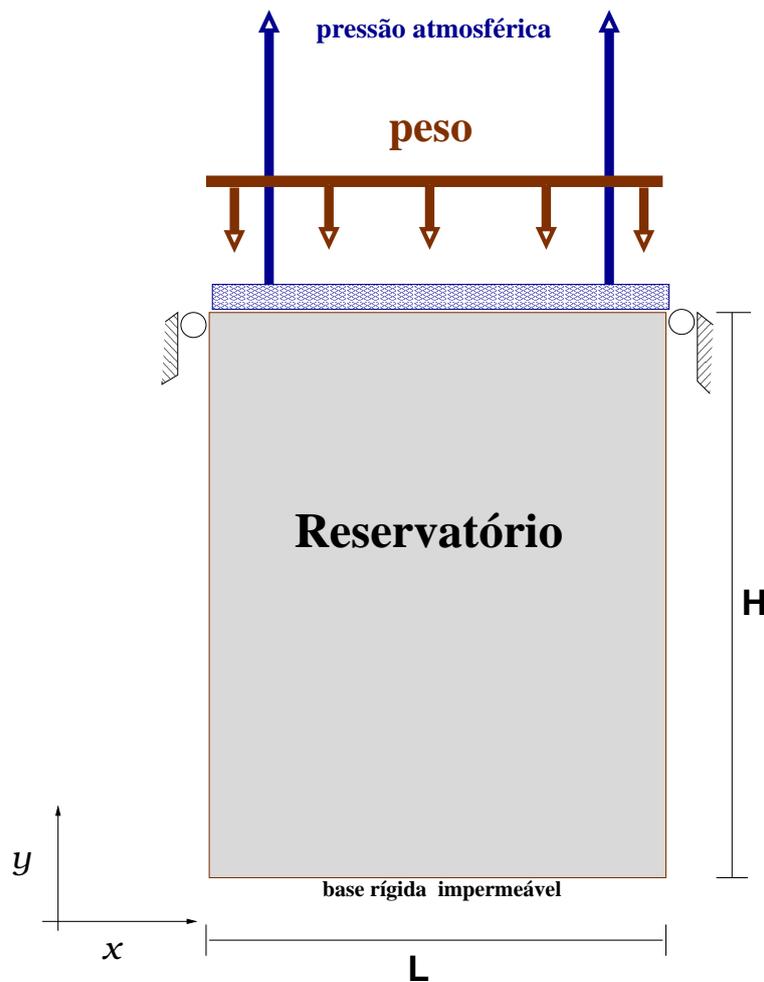


Figura 8.1: Exemplo utilizado para validação da teoria bidimensional

Os valores adotados para as propriedades do reservatório são apresentados na Tabela 8.1

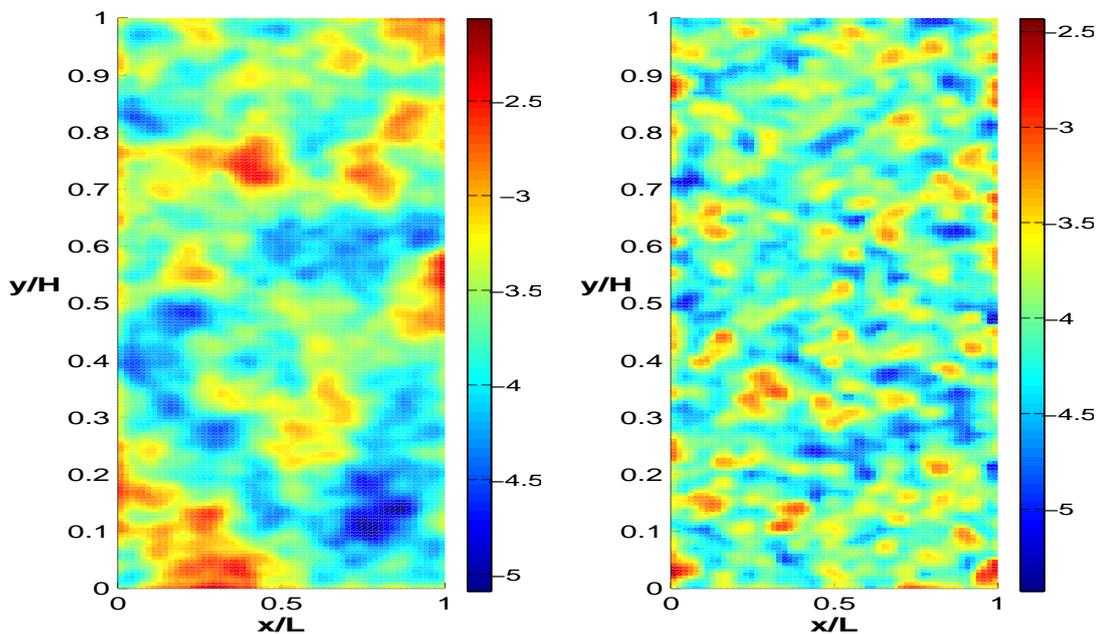
Média Geométrica do módulo de Young	$E_G=17600$ MPa
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0$
Média Geométrica da compressibilidade	$S_G = 5.13 \times 10^{-5}/\text{MPa}$
Média Geométrica da condutividade hidráulica	$K_G = 0.0484m^2/ \text{MPa dias}$
Expoente de Hurst	$\beta = 0.5$
Faixa de variância da heterogeneidade	$\sigma^2 \in [0.04, 4]$
Faixa de comprimento de correlação	$\lambda_Y \in [1, 15m]$
Carragamento aplicado	$h_y = 50\text{Mpa}$
Dimensões do domínio utilizado	$L \times H=30m \times 90m$

Tabela 8.1: Propriedades do reservatório

## 8.1 Geração dos campos aleatórios

Como mencionamos anteriormente, neste trabalho utilizamos o método de decomposição LU para geração dos campos aleatórios correspondentes aos parâmetros envolvidos na modelagem estocástica. Nesse sentido, admitimos a estacionariedade dos campos de tal forma que a matriz de covariâncias dependa somente da distância entre os pontos onde a variável aleatória é definida. Sendo assim, subdividimos o domínio geológico em  $N_b$  blocos, que denotaremos como  $\Omega_b$  e respectivos centros  $\mathbf{x}_b$ , com  $b = 1, 2, \dots, N_b$ , salientando que a os campos aleatórios assim gerados são constantes em cada elemento  $\Omega_b$  da malha geológica. Desta forma, a matriz de covariâncias de ordem  $N_b \times N_b$  é construída em relação a distância entre os centros dos blocos e segue uma lei de decaimento exponencial ou polinomial, esta última também chamada fractal.

O parâmetro envolvido na taxa de decaimento na função de covariância exponencial ou fractal está associado ao “comprimento de correlação” que representa fisicamente a distância sobre a qual as correlações prevalecem. Desta forma, um reservatório que apresente baixa variabilidade nas suas propriedades mecânicas corresponde a comprimentos de correlação altos e em geral são representados por um função de covariância exponencial. Na Figura 8.2(a) apresentamos uma realização de um campo aleatório da permeabilidade governado por uma lei de covariância exponencial na qual observamos regiões bem definidas de valores do campo gaussiano. Por outro lado, a alta variabilidade dos parâmetros nos reservatórios heterogêneos corresponde a pequenos valores de comprimento de correlação, em geral modelados por leis fractais com expoente de Hurst baixos. Na Figura 8.2(b) temos um exemplo no qual a função de covariância é fractal, exibindo regiões pouco nítidas dos valores da permeabilidade como campo aleatório.



(a) Campo  $Y$  com covariância exponencial (b) Campo  $Y$  com covariância fractal

Figura 8.2: Realizações do campo Gaussiano  $Y = \ln K$  com  $m_Y = -3.028$ , (a) covariância exponencial  $\sigma_Y = 1$  e  $\lambda_Y = 10$  e (b) covariância fractal  $\sigma_Y = 1$  e  $\beta = 0.5$

Para verificar a qualidade dos campos gerados com a técnica de fatoração  $LU$  plotamos as covariâncias de  $Y = \ln K$  em função da distância entre dois pontos nas direções  $x$  e  $y$ . Nas Figuras 8.3 e 8.4 os pontos mostram os valores discretos computados com 8000 realizações e a linha continua o ajuste da curva por mínimos quadrados.

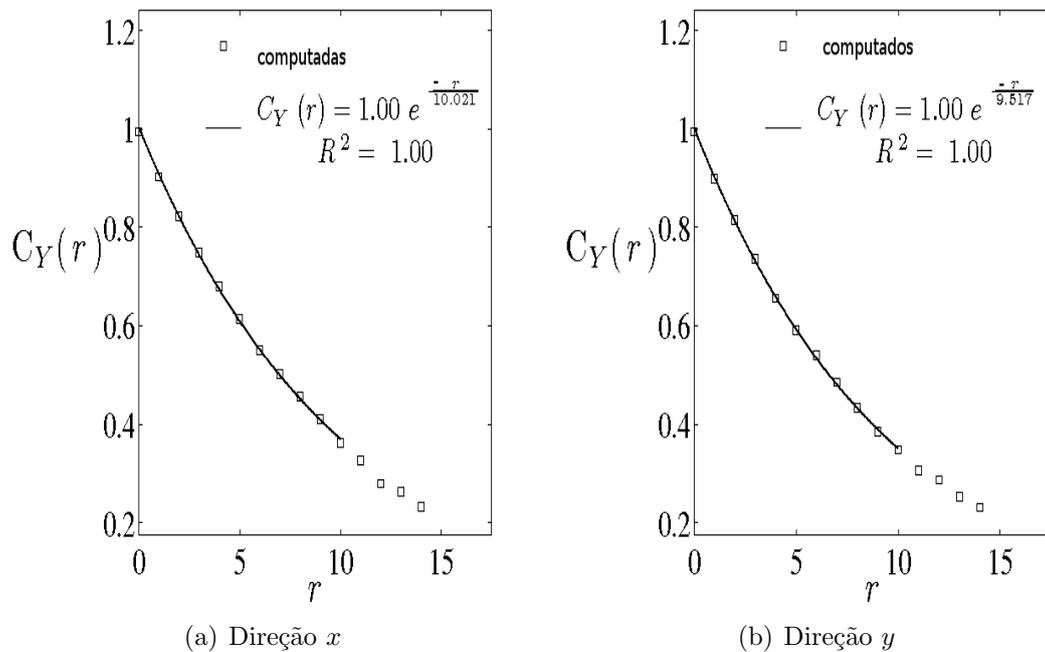
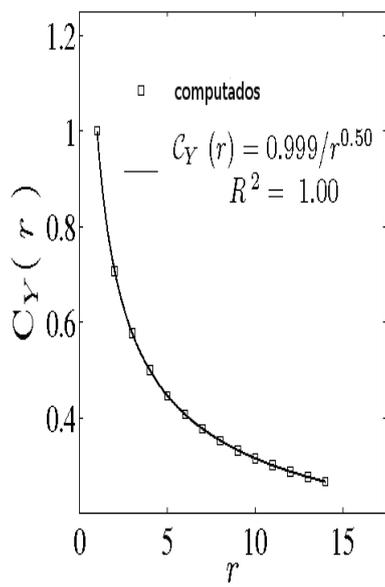
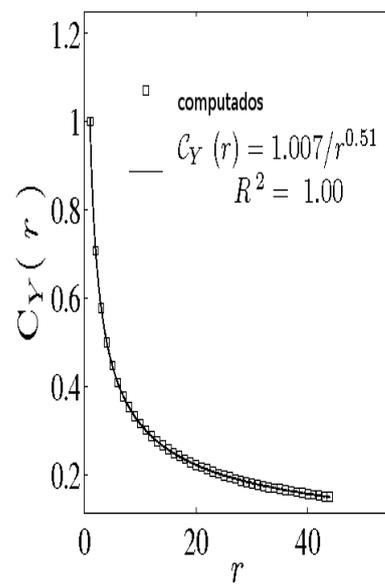


Figura 8.3: Covariância exponencial dos campos gerados com a factoração  $LU$

A Figura 8.3 mostra o decaimento exponencial nas direções  $x$  e  $y$ . Podemos notar que as curvas de ajuste mostram que as covariâncias foram aproximadas com precisão. A Figura 8.4 mostra o decaimento da covariância fractal nas direções  $x$  e  $y$ . Da mesma forma, podemos observar uma boa aproximação das curvas de ajuste para a lei de potência (“*power-law*”). Notamos que o decaimento da covariância fractal para  $\beta = 0.5$  é bem mais lento quando comparado ao caso exponencial.



(a) Direção  $x$

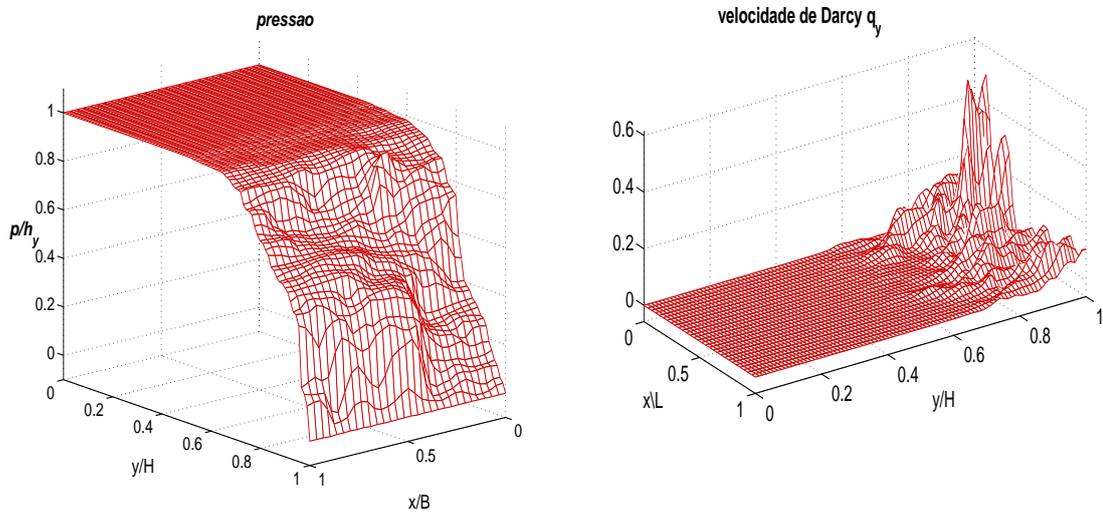


(b) Direção  $y$

Figura 8.4: Covariância fractal dos campos gerados com a factoração LU

As figuras seguintes ilustram o efeito da variabilidade da condutividade hidráulica  $Y = \ln K$  e do módulo de Young  $T = \ln E$  sobre os campos de pressão, velocidade de Darcy, deslocamento e tensão efetiva. As simulações apresentadas são o resultado de considerar realizações com covariância exponencial e fractal. Os campos  $Y$  e  $T$  com covariância exponencial têm variância  $\sigma_Y^2 = \sigma_T^2 = 1$  e comprimentos de correlação  $\lambda_T = \lambda_Y = L/5$ . Para os campos fractais  $Y$  e  $E$  consideramos o expoente de Hurst  $\beta_T = \beta_Y = 0.5$  e  $\sigma_Y = \sigma_T = 1$ .

(a) Campos de pressão e velocidade, para covariância exponencial



(b) Campos de pressão e velocidade, para covariância fractal

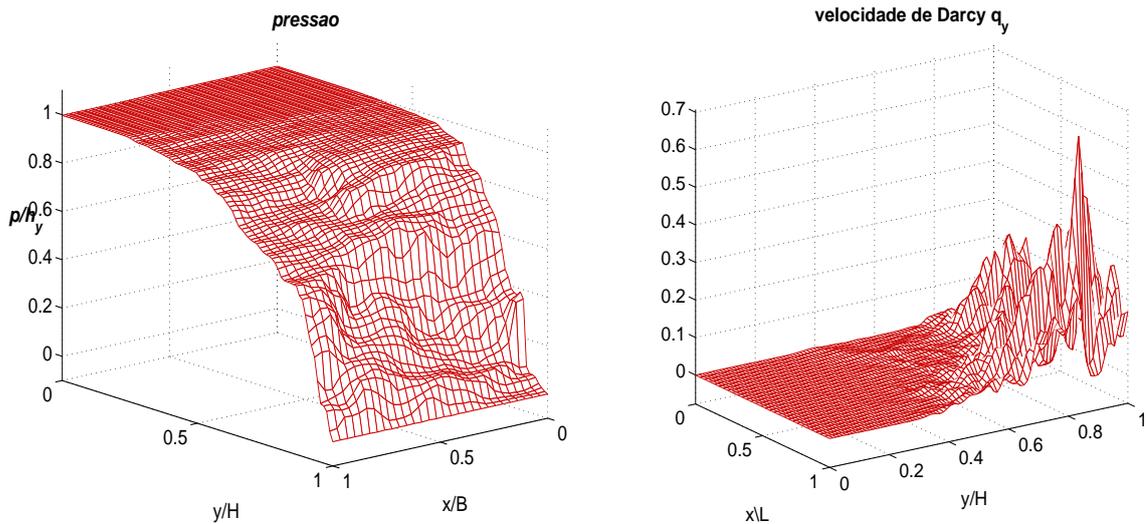
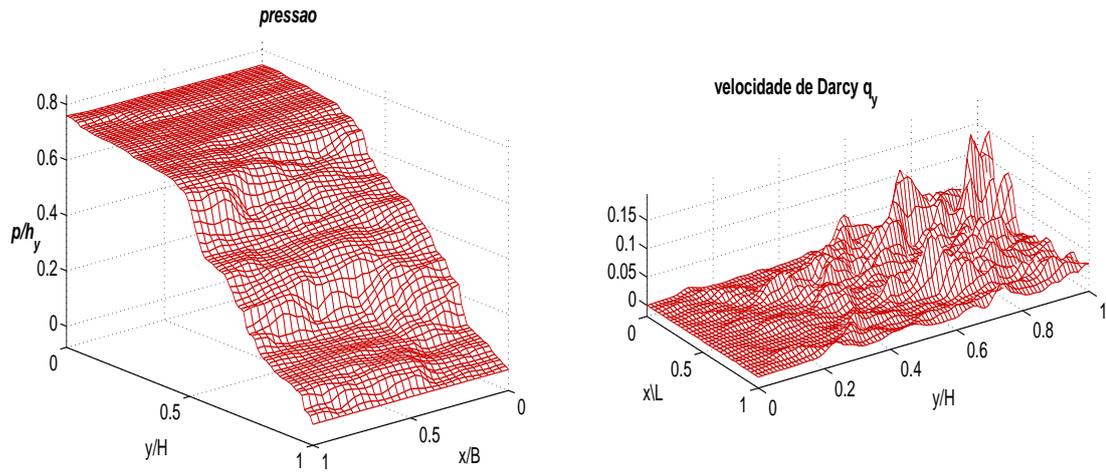


Figura 8.5: Campos de pressão normalizado pelo carregamento vertical e da segunda componente da velocidade para  $t=2$  dias

(a) Campos de pressão e velocidade, para covariância exponencial



(b) Campos de pressão e velocidade, para covariância fractal

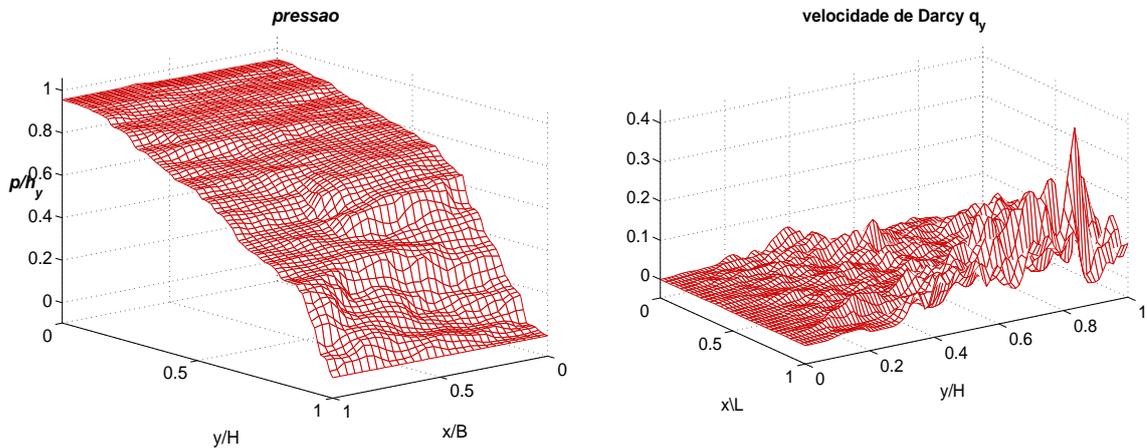


Figura 8.6: Campos de pressão normalizado pelo carregamento vertical e da segunda componente da velocidade para  $t=36$  dias

A Figura 8.5 mostra os campos de pressão e da segunda componente da velocidade de Darcy no início do processo de produção para  $t = 2$  dias. Podemos observar nos instantes iniciais que os campos apresentam uma região de camada limite junto ao poço, onde a condição de contorno de Dirichlet é imposta. Podemos observar também que a heterogeneidade do meio poroso dá origem a formação de caminhos preferenciais para o escoamento fazendo com que a velocidade apresente valores acentuados em certas regiões do domínio. A presença destes caminhos preferenciais é mais pronunciada no caso de geologia fractal com correlações longas

possuindo influência significativa nas taxas de produção de óleo, antecipando a chegada do fluido no poço de produção em relação ao caso homogêneo.

A Figura 8.6 mostra os campos de pressão e da segunda componente da velocidade de Darcy para  $t = 36$  dias. Podemos notar o avanço dos caminhos preferenciais e uma gradual dissipação do campo da pressão, típica do processo de consolidação.

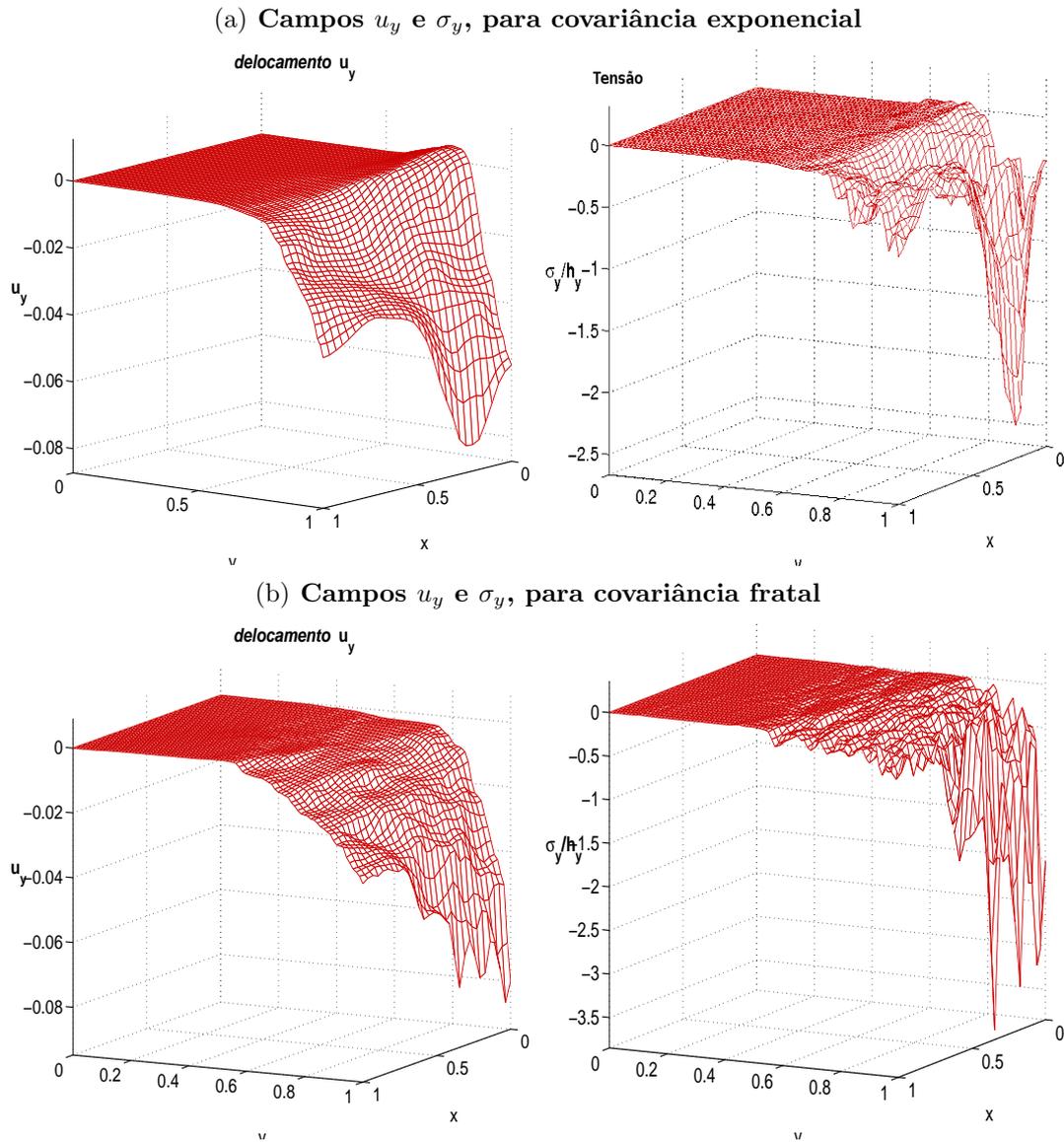


Figura 8.7: Campo das componentes do deslocamento vertical e da tensão normal para  $t = 2$  dias

A Figuras 8.7 e 8.8 mostram os campos das componentes vertical do deslocamento  $\mathbf{u}_y$  e normal da tensão efetiva  $\boldsymbol{\sigma}_y$ , no início da produção  $t = 2$  dias e para o

tempo  $t = 36$  considerando covariâncias exponencial e fractal. Tal como podemos observar o deslocamento vertical do sólido é bem mais acentuado na vizinhança do poço, onde exhibe forte camada limite e se anula próximo a base rígida [Figura 8.7]. A tensão efetiva normal exhibe comportamento semelhante com fortes gradientes junto ao poço. À medida que o tempo evolui ocorre um processo de regularização no campo de deslocamento e o incremento da tensão efetiva é propagado ao longo do domínio [Figura 8.8].

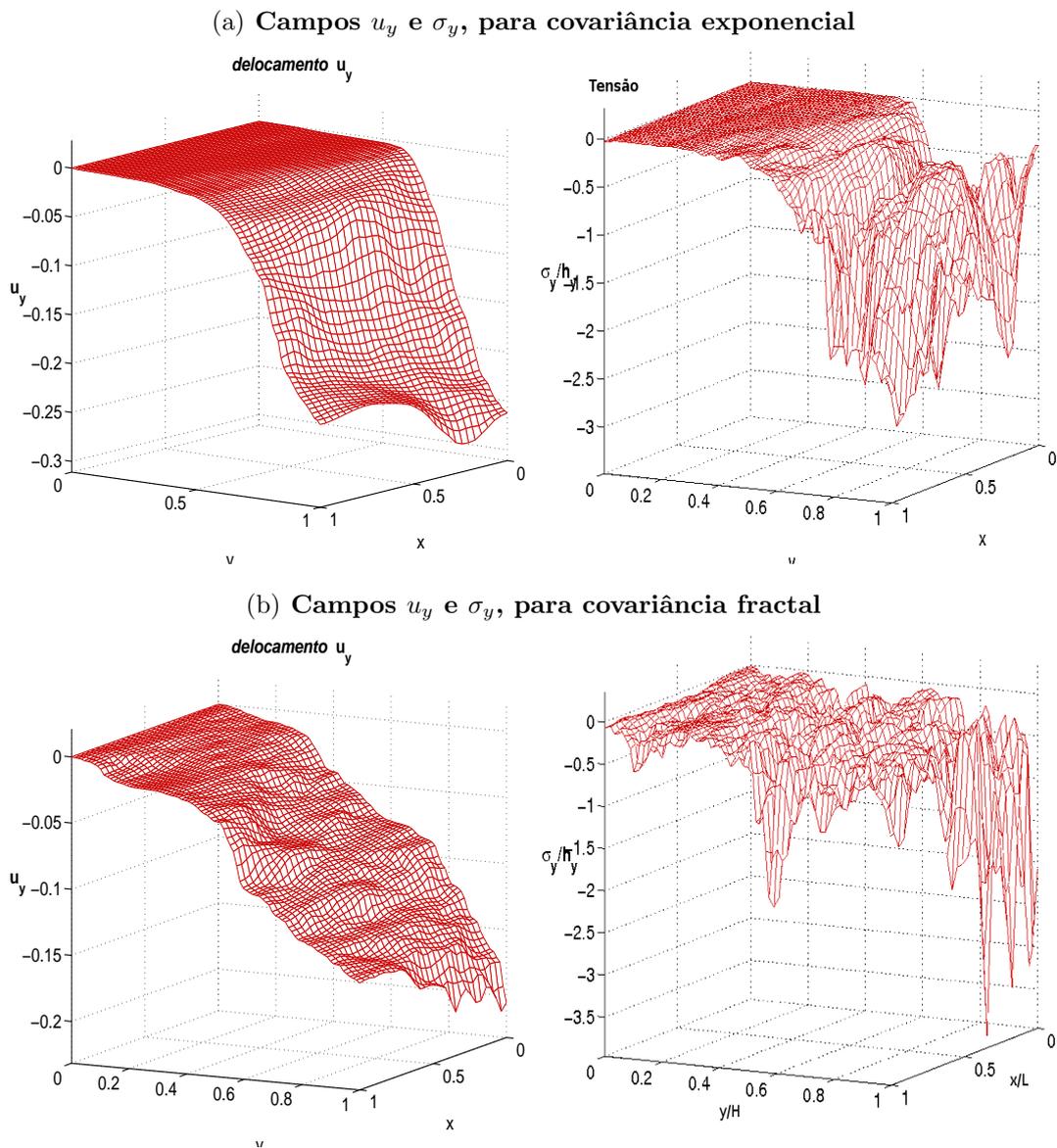


Figura 8.8: Campo das componentes do deslocamento vertical e da tensão normal para  $t = 36$  dias

## 8.2 Estudo numérico da convergência estatística

Para ilustrar numericamente a convergência estatística do método de Monte Carlo plotamos a evolução do erro relativo da média e variância da pressão como função do número de realizações. Para uma tolerância prescrita  $\epsilon$  o critério de convergência é dado por:  $|Er(m_p^{M+1}) - Er(m_p^M)| < \epsilon$ , onde o erro relativo é dado por

$$Er(m_p^M) := \frac{\|m_p^M - m_p^{M-1}\|}{\|m_p^M\|}, \quad (8.3)$$

com  $\|\cdot\|$  designando a norma do máximo.

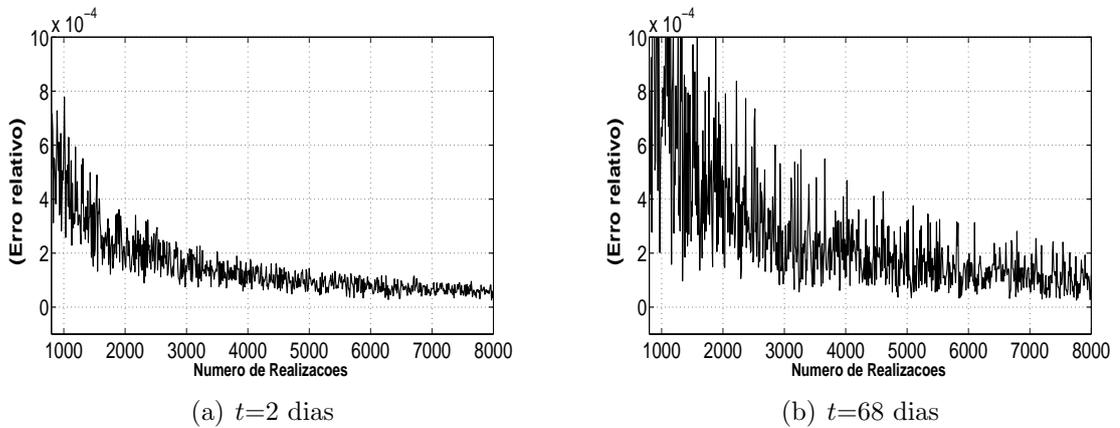


Figura 8.9: Convergência estatística do primeiro momento da pressão para covariância exponencial

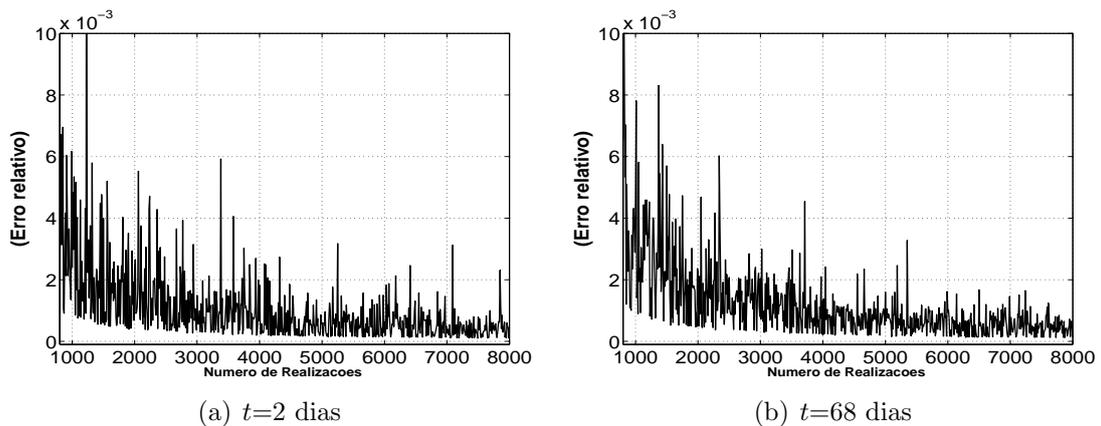


Figura 8.10: Convergência estatística do segundo momento da pressão para covariância exponencial

As Figuras 8.9-8.12 ilustram a convergência estatística da média e variância

da pressão no ponto  $(x, y) = (L/2, H/2)$  para dois tempos, com covariância exponencial [Figuras 8.9 e 8.10] e covariância fractal [Figuras 8.11 e 8.12]. Tal como esperado, após um certo número de realizações o erro relativo dos momentos converge para zero. Podemos observar que tempos maiores demandam maior número de realizações para atingir a convergência estatística. Tal evidência deve-se ao fato que a solução para a realização  $k = 1, \dots, M$  no tempo  $t_n$  herda a aproximação dos tempos anteriores via esquema de Euler regressivo. Notamos também que o segundo momento da pressão demanda maior número de realizações para atingir convergência estatística.

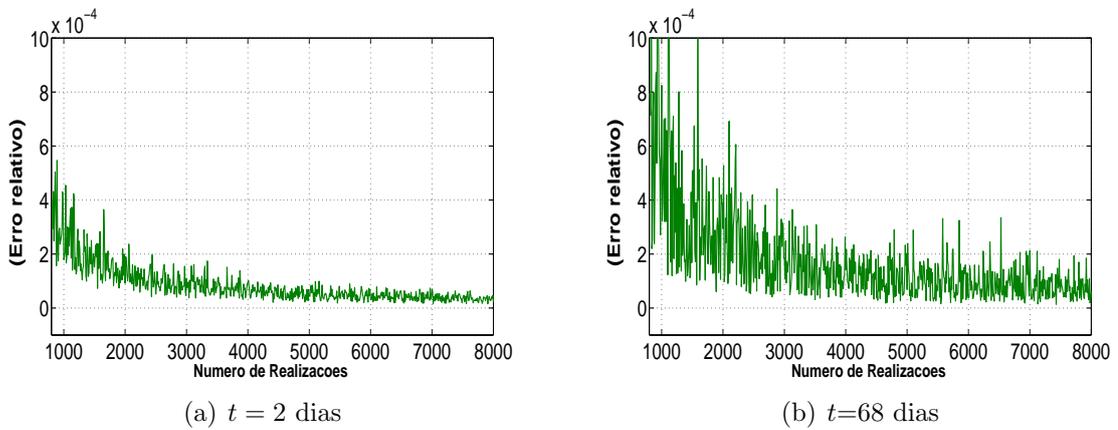


Figura 8.11: Convergência estatística do primeiro momento da pressão para covariância fractal

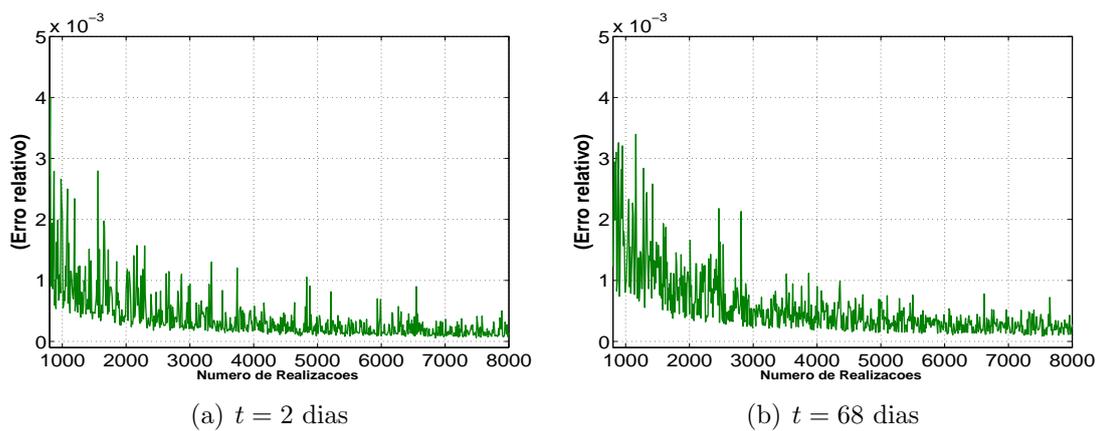


Figura 8.12: Convergência para o segundo momento da pressão para covariância fractal

### 8.3 Deterioração da solução das equações efetivas para variâncias elevadas

A próxima seqüência de Figuras objetiva ilustrar numericamente a conjectura inerente ao problema de fechamento da técnica de expansão assintótica, a qual restringe a teoria para meios com baixo grau de heterogeneidade. Para este fim, consideramos el modelo fracamente acoplado y adotamos como solução “exata” ou padrão a obtida pelo método de Monte Carlo e calculamos o erro relativo na norma do máximo para o primeiro momento da pressão.

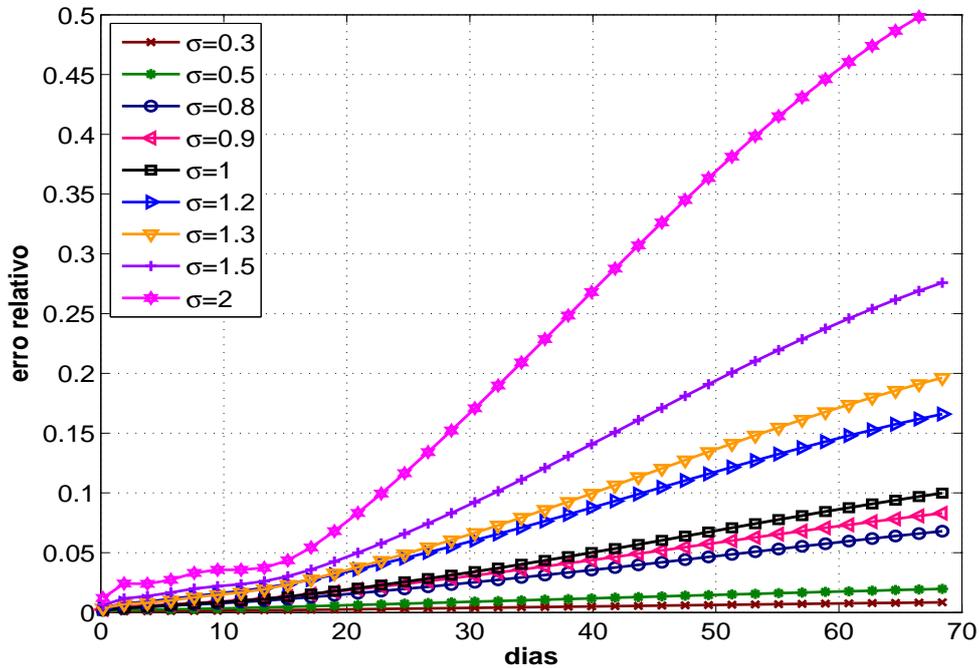


Figura 8.13: Evolução temporal do erro relativo da média da pressão entre os métodos de Monte Carlo e expansão assintótica, para diferentes variâncias.

As Figuras 8.13 e 8.14 mostram o erro relativo entre as soluções obtidas via Monte Carlo e expansão assintótica para campos com covariância exponencial em função do tempo. Observamos em ambas figuras que o método perturbativo diverge à medida que o tempo evolui. Primeramente fixamos o valor de comprimento de correlação  $\lambda_Y = 10m$  e variamos  $\sigma$  em uma faixa de valores  $[0.3, 2]$  [ver Figura 8.13]. Em seguida fixamos um valor baixo da variância  $\sigma_Y^2 = \sigma_T^2 = 0.09$  e variamos o comprimento de correlação da forma  $\lambda_T = \lambda_Y \in [1m, 15m]$  [ver Figura 8.14].

Além da evolução no tempo analisamos o efeito do comprimento de correlação e da variância sobre a acurácia do método perturbativo. Na Figura 8.13 analisamos a sensibilidade do erro com diferentes valores da variância dos campos  $Y$  e  $T$ . Tal como esperado, podemos observar que o erro relativo é menor para variâncias baixas. Em particular, quando  $\sigma < 1$  o erro relativo permanece limitado. Por outro lado, notamos que para  $\sigma > 1$  o erro cresce substancialmente com o tempo. Este resultado ilustra a deterioração das soluções das equações efetivas na faixa  $\sigma > 1$ .

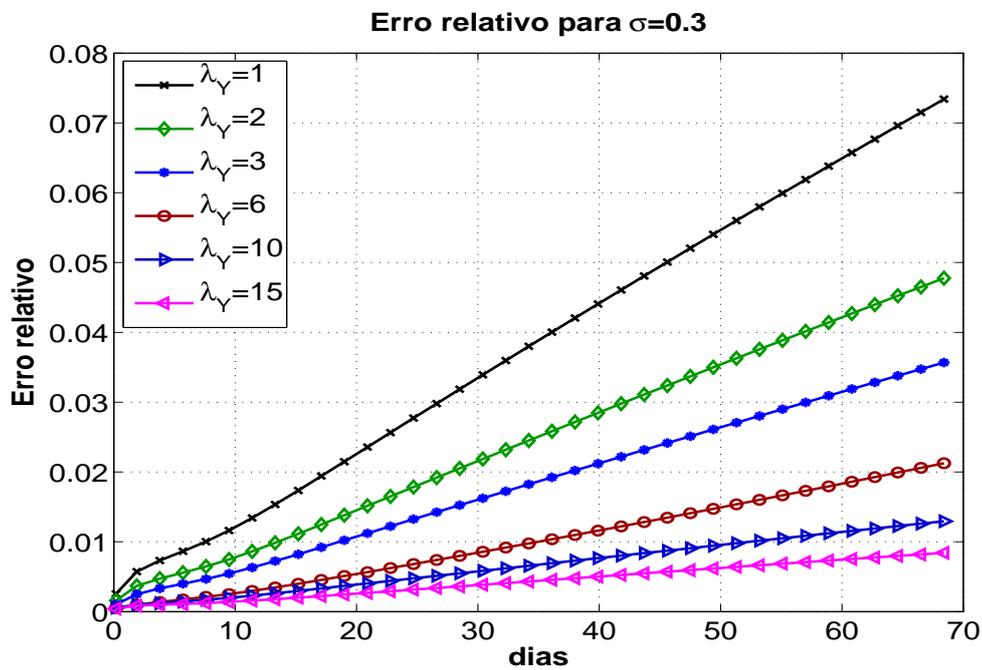


Figura 8.14: Erro relativo da média da pressão com o tempo, para diferentes escalas de correlação.

Na Figura 8.14 os gráficos são plotados para diferentes valores do comprimento de correlação. Podemos observar que o erro relativo é menor para comprimento de correlações grandes e aumenta quando o comprimento de correlação diminui. Porém para variâncias baixas o erro permanece limitado na faixa de 0 a 10%.

A seguir, apresentamos as comparações dos momentos das variáveis poroelásticas obtidos pelos métodos de expansão assintótica e Monte Carlo.

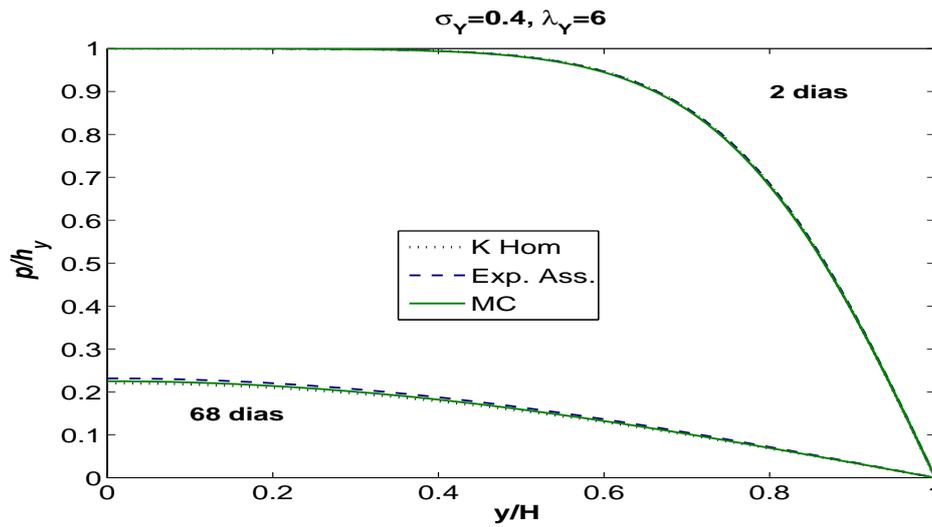
A Figura 8.15 mostra a dependência espacial da média do campo de pressão para dois tempos obtida pelos métodos perturbativo e de Monte Carlo. Nos instantes iniciais ( $t = 2$  dias) os perfis apresentam uma região de camada limite junto ao poço, onde a condição de contorno de Dirichlet é imposta. À medida que o tempo evolui o perfil tende a regularizar, característica típica da solução de problemas parabólicos. Para variância baixa ( $\sigma = 0,4$ ) os perfis obtidos pelos dois métodos estão próximos, em oposição ao comportamento para variâncias altas. Os valores da média da pressão obtido via método de expansão assintótica tendem a superestimar a magnitude da pressão.

A Figura 8.16 ilustra a dependência espacial do desvio padrão da pressão para dois tempos distintos  $t = 2$  dias e  $t = 68$  dias. Os perfis se anulam no poço onde é imposta condição de Dirichlet determinística. Nos instantes iniciais, a solução exibe gradientes elevados junto ao poço e um “plateau” próximo de zero devido à forte influência dos dados iniciais determinísticos. À medida que o tempo evolui a influência dos dados iniciais diminui e, conseqüentemente, os valores do desvio padrão aumentam. Para tempos longos o erro decresce novamente tendendo para o caso estacionário quando a pressão se anula. Podemos notar também diferenças acentuadas entre os perfis obtidos por cada método quando a variância é alta.

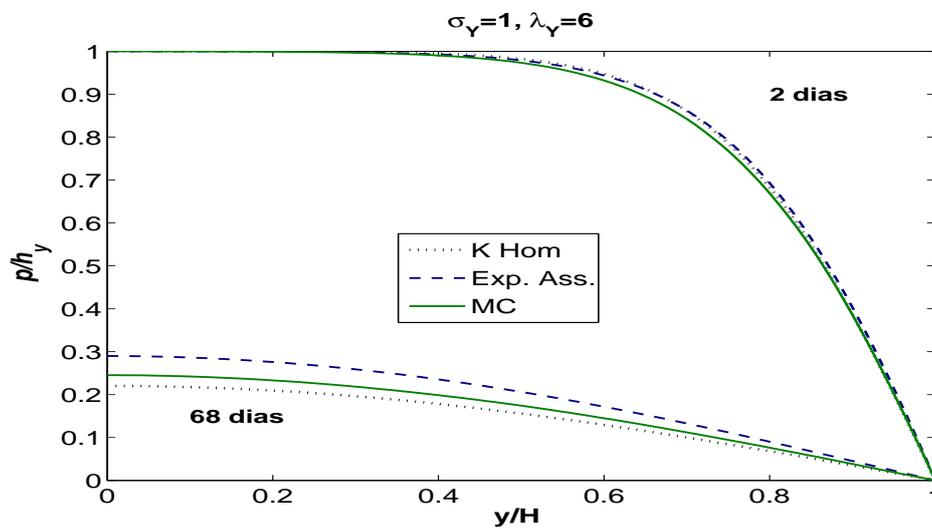
A Figura 8.17 ilustra os perfis da esperança matemática da componente vertical da velocidade de percolação obtida pelos dois métodos. A função se anula próximo à base rígida impermeável onde é imposta a condição de Neumann homogênea e possui valor máximo na vizinhança do poço, onde os gradientes de pressão são elevados. À medida que o tempo evolui os perfis tendem a decair assintoticamente para a solução nula estacionária.

Na Figura 8.18 apresentamos a evolução do desvio padrão da velocidade Darciana vertical. De forma análoga à média da velocidade, a função se anula no contorno onde a condição de Neumann homogênea é imposta e também exibe valor máximo na vizinhança do poço. A evolução temporal conduz à solução nula associada ao perfil estacionário, cuja média é também identicamente nula.

(a) Pressão normalizada  $\sigma = 0.4, \lambda_Y = 6$



(b) Pressão normalizada  $\sigma = 0.7, \lambda_Y = 6$



(c) Pressão normalizada  $\sigma = 1.5, \lambda_Y = 6$

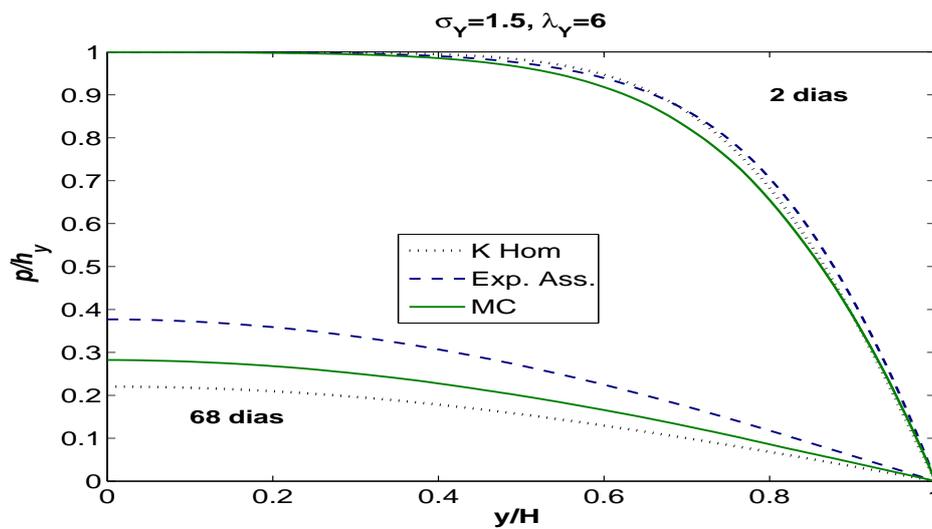
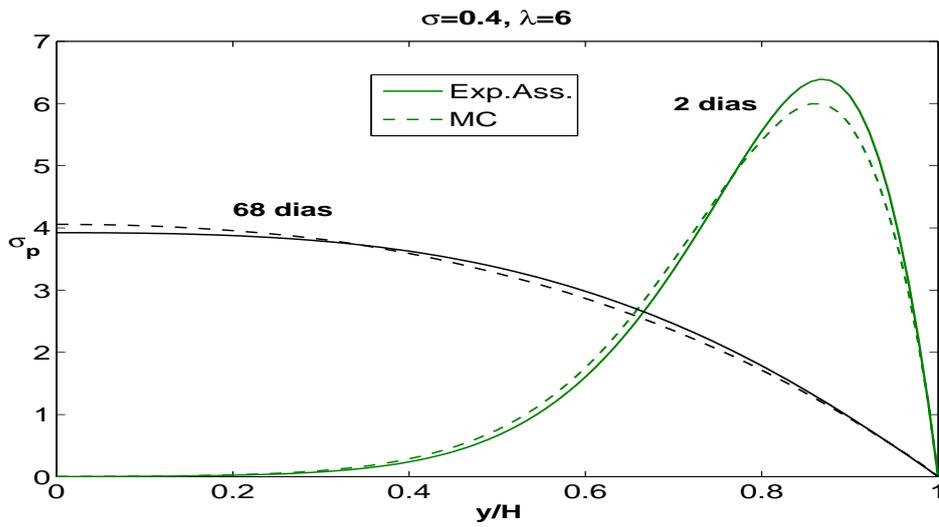
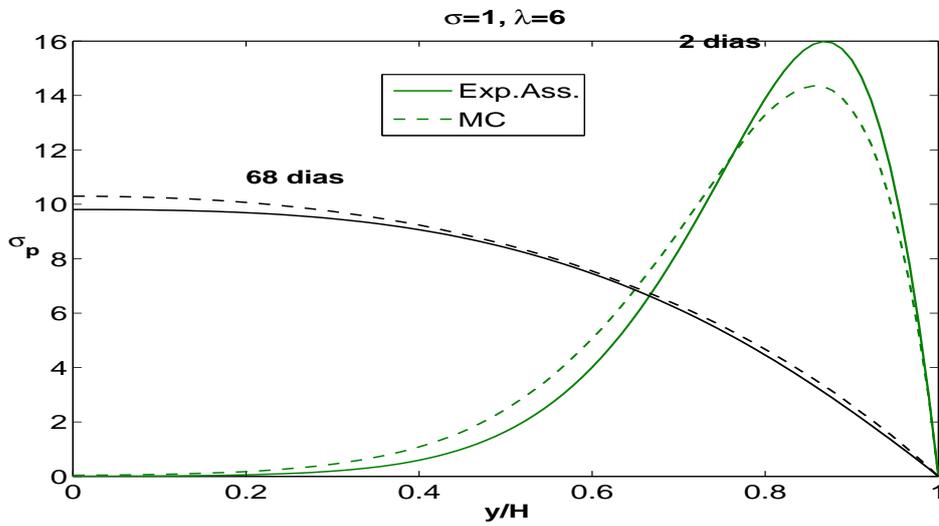


Figura 8.15: Comparação entre os perfis da média da pressão normalizada obtidas via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos com diferentes graus de heterogeneidade

(a) Desvio padrão da pressão



(b) Desvio padrão da pressão



(c) Desvio padrão da pressão

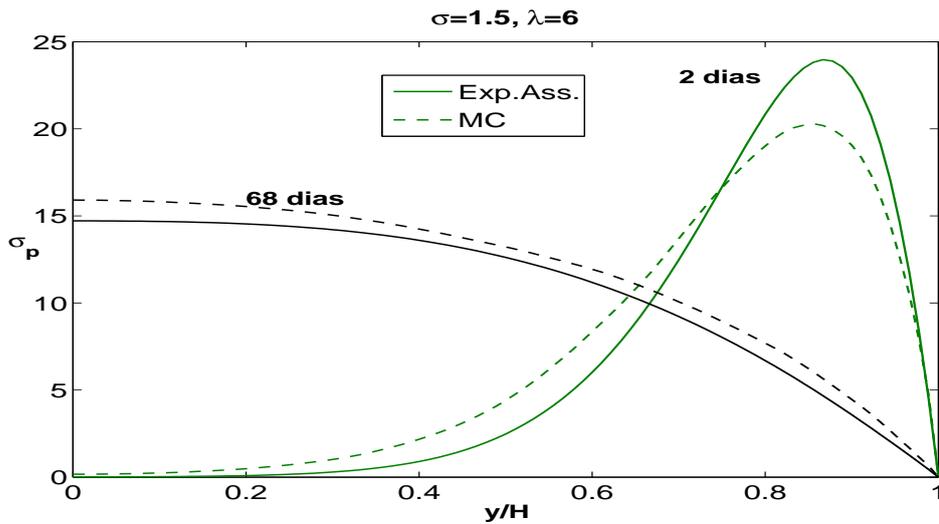
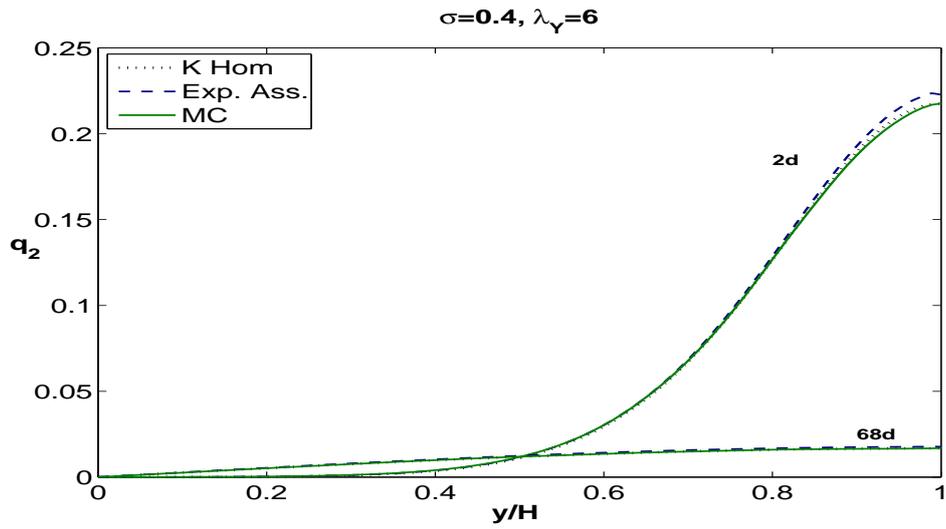
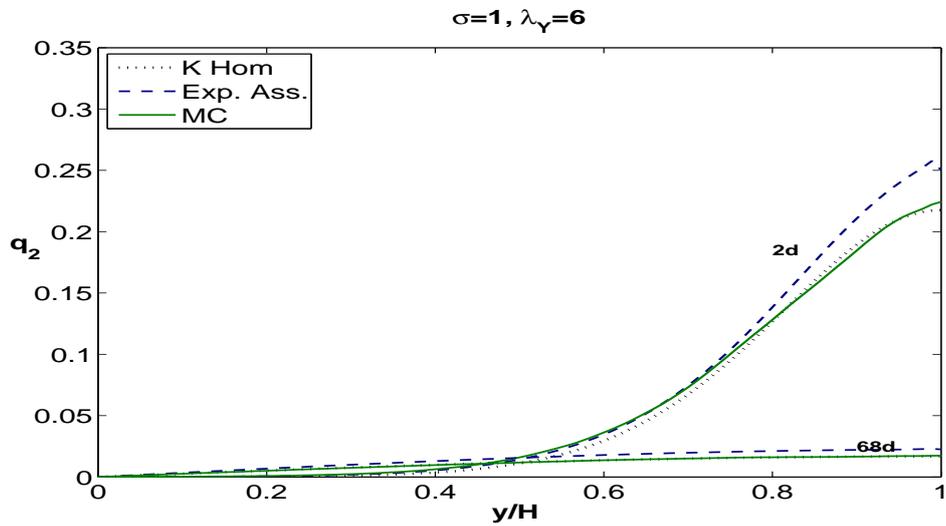


Figura 8.16: Comparação entre os perfis do desvio padrão da pressão obtidas via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos com diferentes graus de heterogeneidade

(a) Velocidade de Darcy na direção  $y$



(b) Velocidade de Darcy na direção  $y$



(c) Velocidade de Darcy na direção  $y$

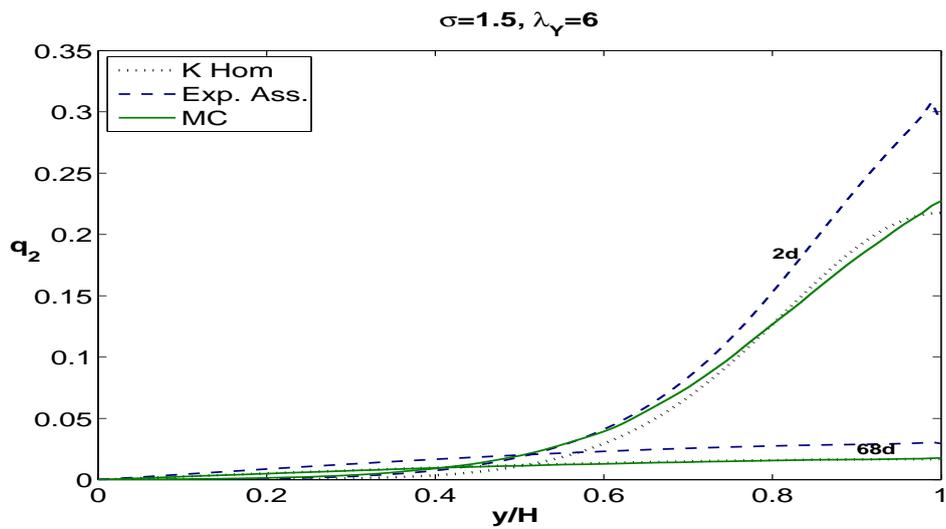
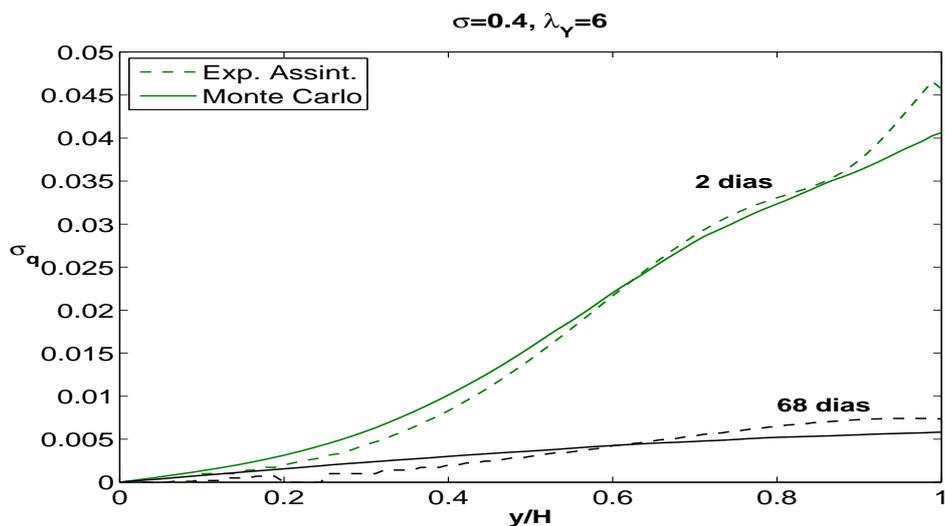
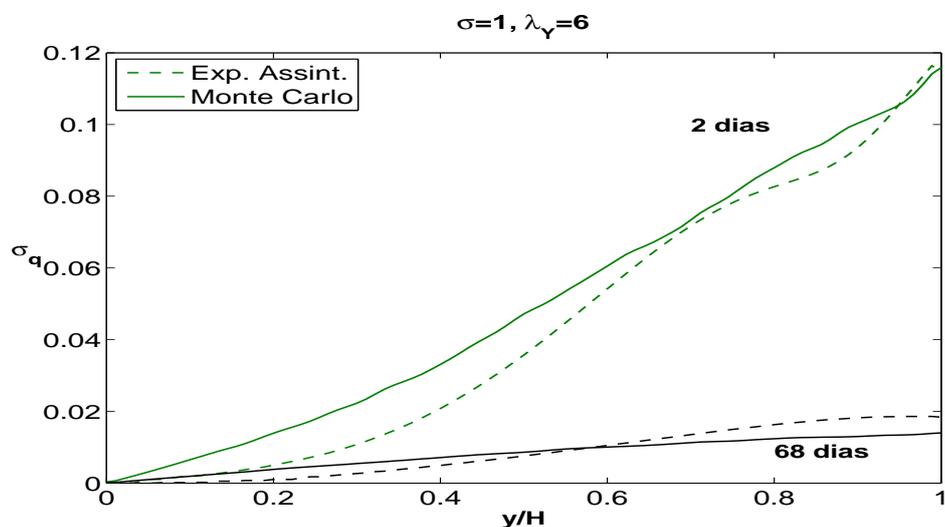


Figura 8.17: Comparação entre os perfis médios da segunda componente da velocidade de Darcy obtidos via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos com diferentes graus de heterogeneidade

(a) Desvio padrão da velocidade de Darcy na direção  $y$



(b) Desvio padrão da velocidade de Darcy na direção  $y$



(c) Desvio padrão da velocidade de Darcy na direção  $y$

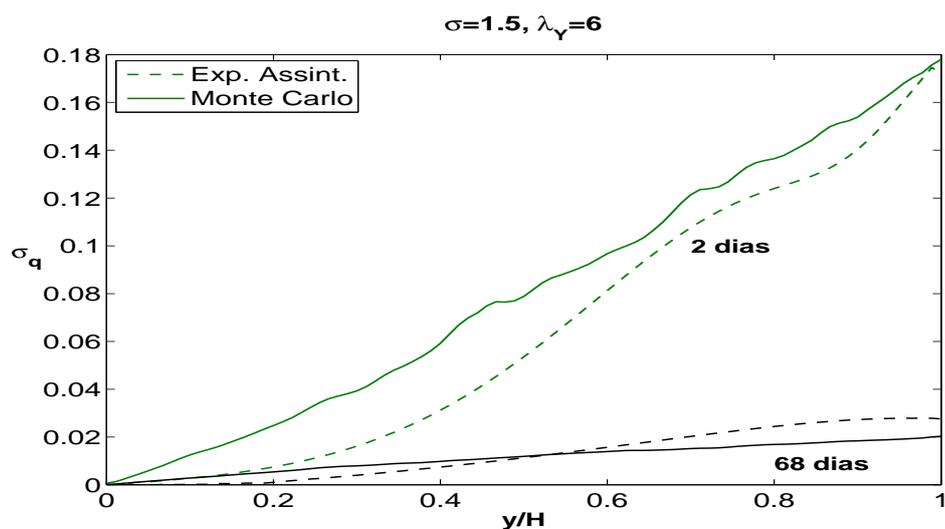


Figura 8.18: Comparação entre os perfis do desvio padrão da segunda componente da velocidade de Darcy obtidos via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos com diferentes graus de heterogeneidade

A Figura 8.19 mostra a dependência espacial da média do deslocamento vertical do meio poroso para dois tempos. No início do processo a deformação do meio é mais pronunciada próximo ao poço do reservatório onde é imposto o carregamento. À medida que o tempo evolui a deformação avança até alcançar a base rígida onde os deslocamentos são nulos. Tal como nos casos anteriores os métodos de Monte Carlo e perturbação exibem resultados próximos somente para faixas de variância baixa.

Finalmente, a Figura 8.20 ilustra o perfil da componente normal do tensor efetivo na direção  $y$  normalizada pelo carregamento vertical. No ponto de aplicação do carregamento o valor se mantém constante durante todo o processo de compactação do reservatório. À medida que o processo de consolidação evolui a dissipação da pressão é transferida para a tensão efetiva, a qual aumenta tendendo assintoticamente para o caso estacionário governado pela elasticidade linear.

Os resultados numéricos apresentados nesta seção objetivaram ilustrar o comportamento dos momentos estatísticas das variáveis poroelásticas bem como a acurácia das soluções numéricas das equações efetivas tomando como soluções “exatas” os momentos obtidos pelo método de Monte Carlo. Observamos que o método de perturbação exhibe boa aproximação somente na faixa de variâncias baixas e a medida que a variância aumenta produz resultados inferiores.

Os resultados numéricos apresentados a seguir confirmam a principal conjectura deste trabalho relacionada com a acurácia dos modelos fracamente o totalmente acoplados em meios altamente heterogêneos

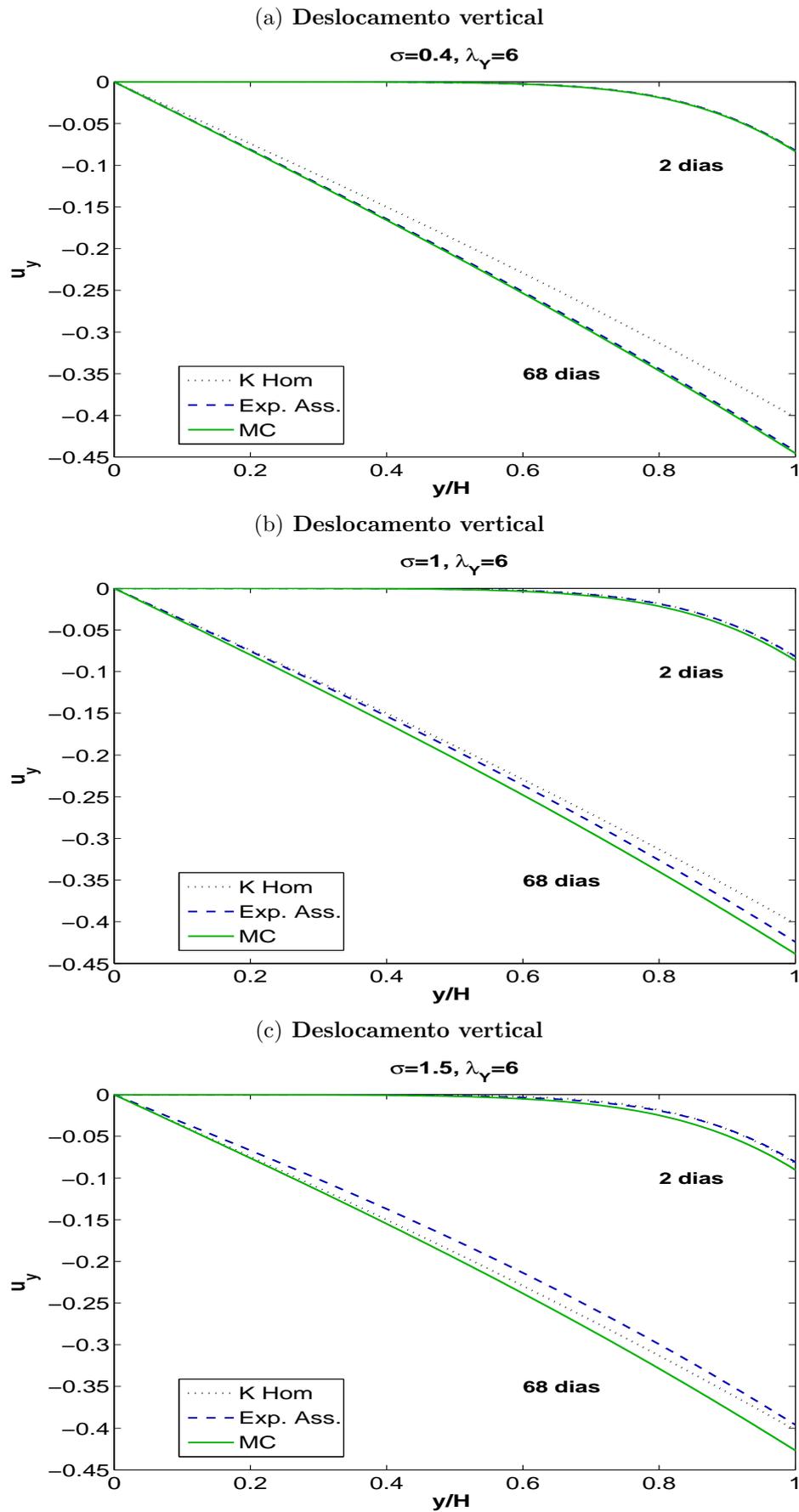


Figura 8.19: Comparação entre os perfis médios do deslocamento vertical obtidos via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos

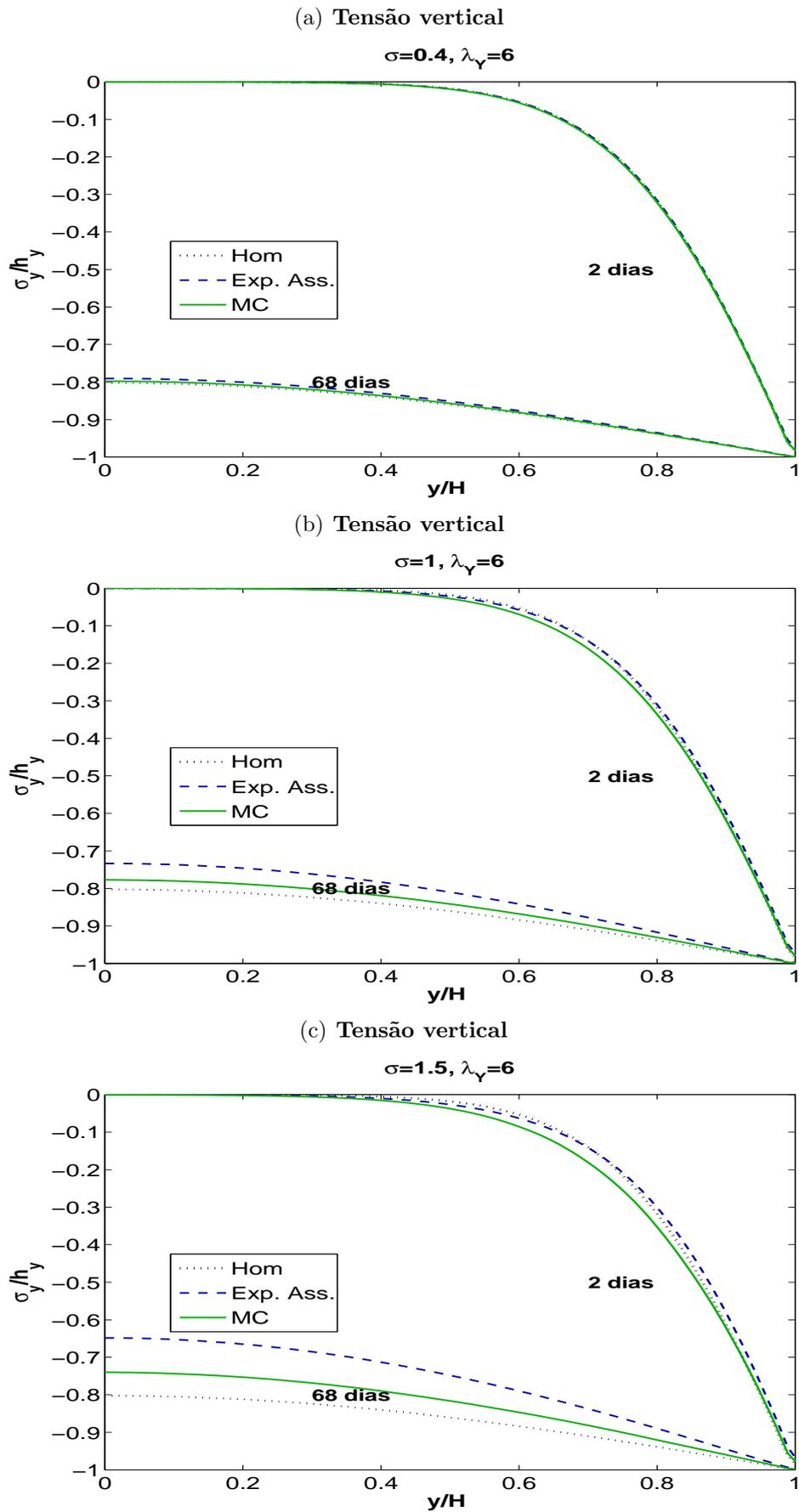


Figura 8.20: Comparação entre os perfis médios da tensão vertical obtidos via método de Monte Carlo e expansão assintótica para dois tempos

## 8.4 Comparação entre os modelos totalmente e fracamente acoplados

A seguir ilustramos numericamente o principal resultado deste trabalho que consiste em analisar a performance do modelo fracamente acoplado na presença de heterogeneidades geológicas. Para atingir este objetivo o exemplo numérico e as condições de contorno foram escolhidas de tal forma que o problema se reduz ao problema de Terzaghi no caso homogêneo onde os dois modelos produzem o mesmo resultado. Nesta situação unidimensional de homogeneidade do meio o divergente da tensão total se confunde com o gradiente e portanto  $\sigma_T$  é constante e igual a carga externa aplicada. Conseqüentemente o termo de fonte na equação (3.18) envolvendo a derivada temporal de  $\sigma_T$  se anula  $\left(\frac{\partial}{\partial t}(\text{tr}\sigma_T) = 0\right)$  e as respostas dos modelos coincidem.

A sequencia de Figuras a seguir mostra o cômputo do termo de fonte  $\frac{\partial \langle \sigma_T \rangle}{\partial t}$  em (6.44) para diversos valores de  $\sigma_Y$ ,  $\sigma_T$  e  $\lambda_Y = \lambda_T$ . Ilustramos a influência da variabilidade dos coeficientes sobre a dependência espacial da derivada temporal do traço da média do tensor total  $\langle \sigma_T \rangle$  para tempos distintos.

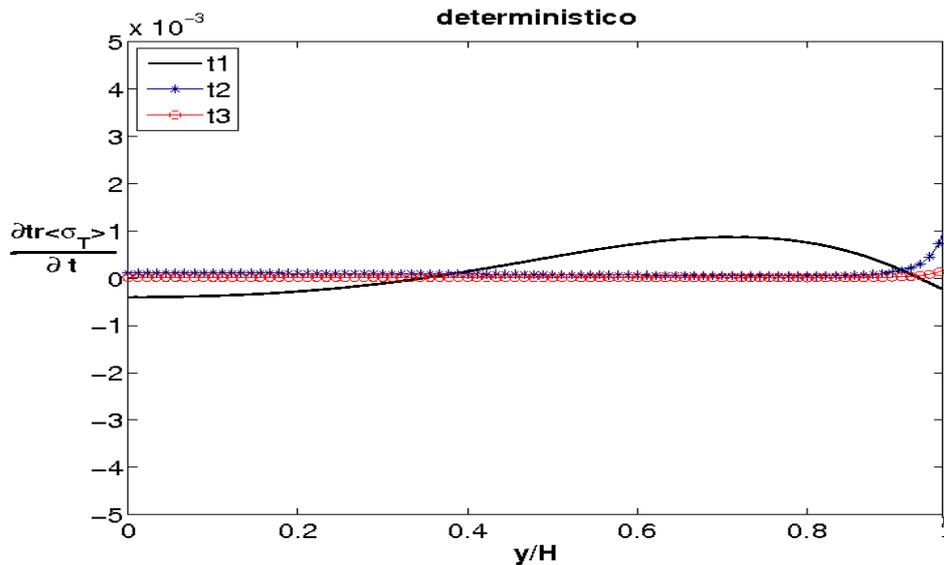


Figura 8.21: Dependência espacial da derivada do traço da média do tensor total para três tempos:  $t_1 = 2$  dias,  $t_2 = 36$  dias e  $t_3 = 68$  dias. Meio é homogêneo

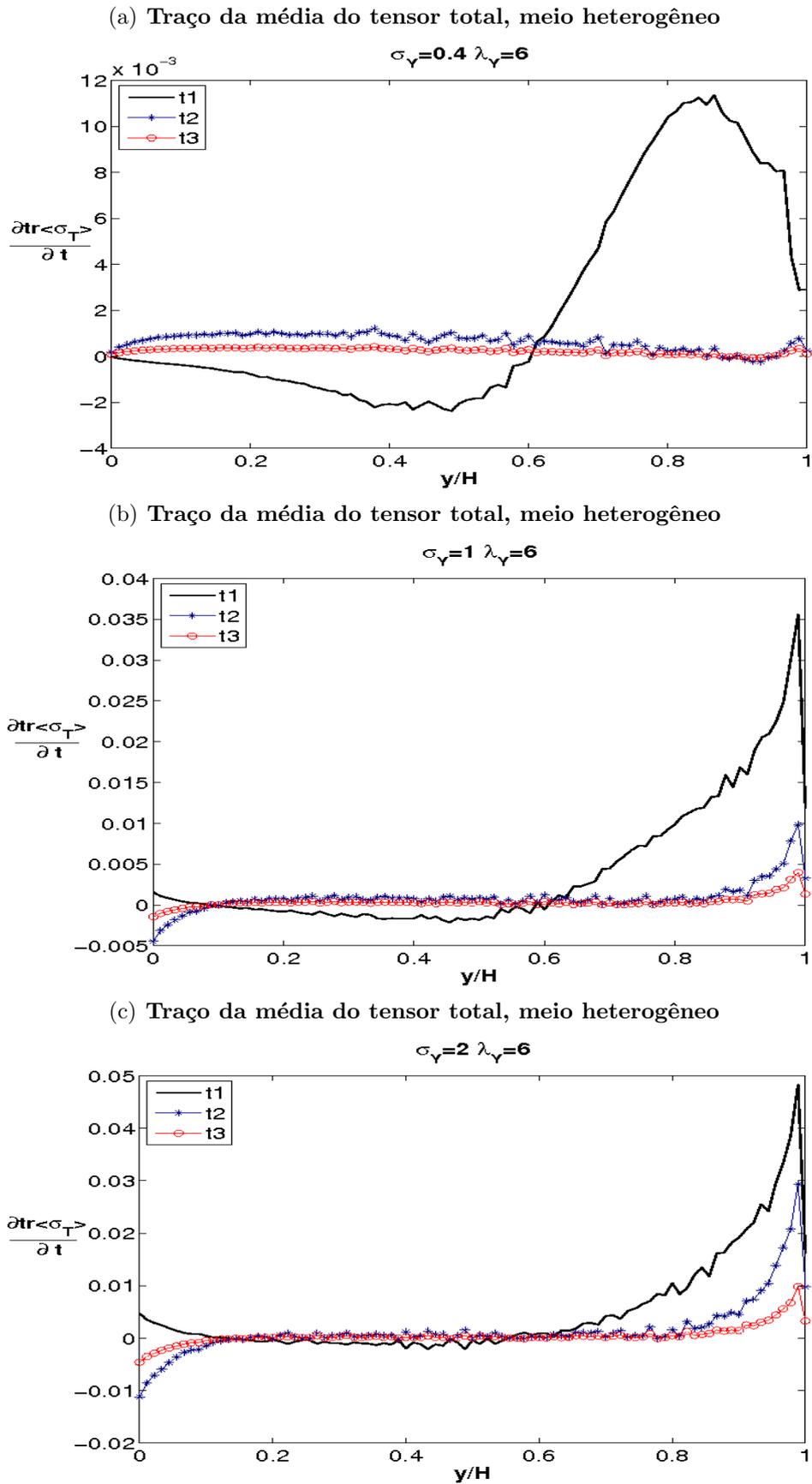


Figura 8.22: Dependência espacial da derivada do traço da média do tensor total para três tempos:  $t_1 = 2$  dias,  $t_2 = 36$  dias e  $t_3 = 68$  dias. Meio heterogêneo,  $E$  determinístico e  $K$  aleatório, covariância exponencial

### Traço da média do tensor total, meio heterogêneo, covariância fractal

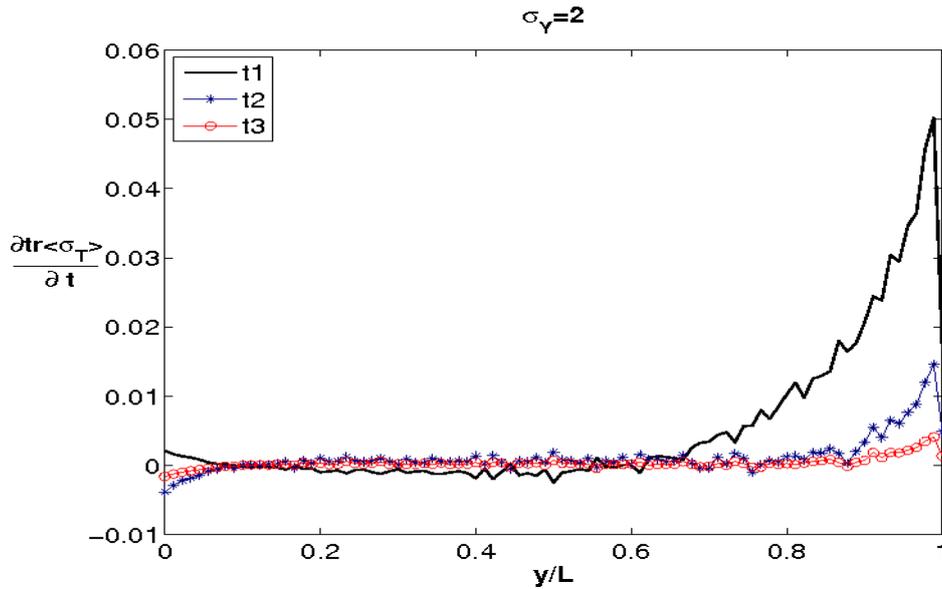
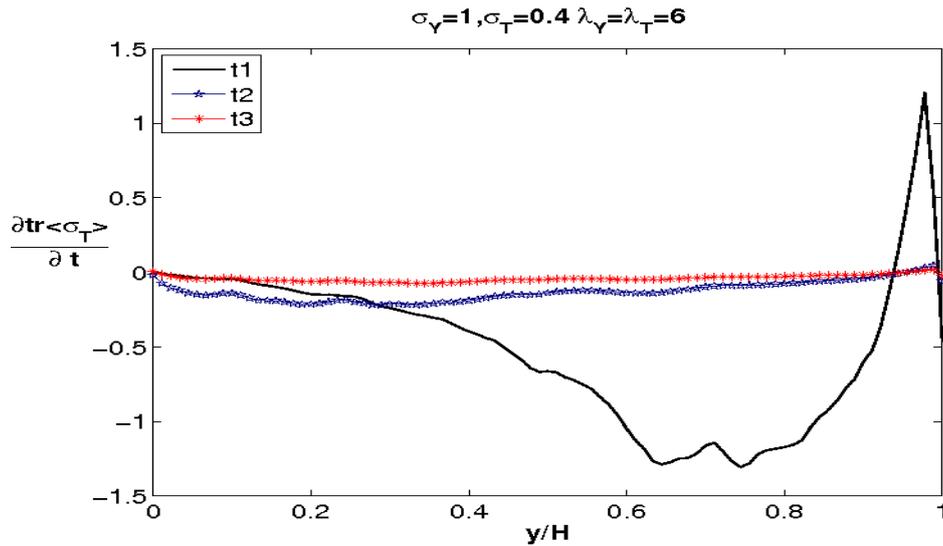


Figura 8.23: Dependência espacial da derivada do traço da média do tensor total para três tempos:  $t1 = 2$  dias,  $t2 = 36$  dias e  $t3 = 68$  dias. Meio é heterogêneo  $E$  determinístico e  $K$  aleatório, covariância fractal

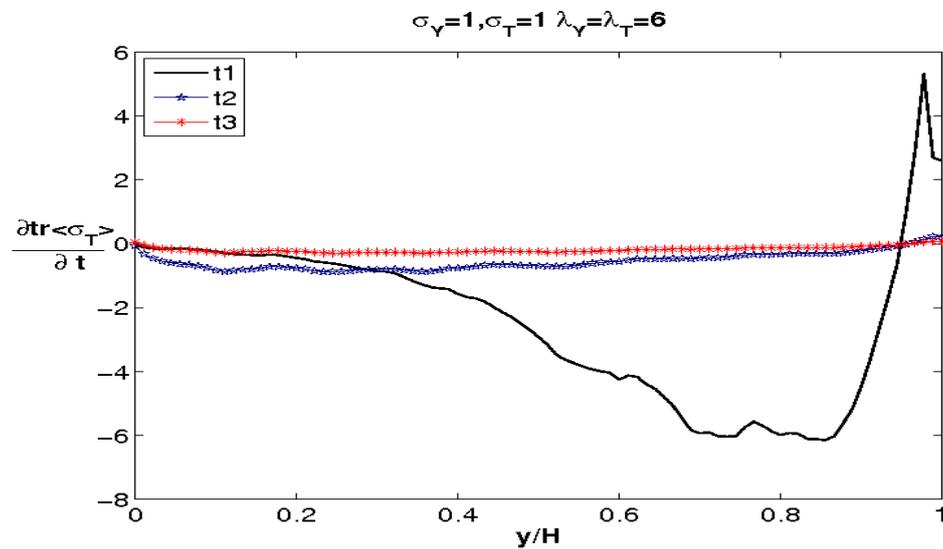
Tal como esperado, o perfil se anula no caso homogêneo [Figura 8.21], Enquanto que, para  $K$  aleatório exibe flutuações em torno de zero para covariâncias fractais [ver Figuras 8.23] tais flutuações são amplificadas para covariâncias exponenciais [Figura 8.22]. À medida que a variância aumenta a flutuação em torno de zero se amplifica, ilustrando um regime de inacurácia do modelo fracamente acoplado mesmo no caso onde o módulo de Young é determinístico.

Finalmente a Figura 8.24 mostra os efeitos da variabilidade do módulo de Young sobre  $\frac{\partial}{\partial t}\langle\sigma_T\rangle$ . Tal como esperado o desvio com relação ao caso homogêneo é amplificado substancialmente mostrando a completa deterioração do modelo fracamente acoplado em prever o comportamento das tensões totais atuantes no reservatório.

(a) Traço da média do tensor total, meio heterogêneo, covariância exponencial



(b) Traço da média do tensor total, meio heterogêneo, covariância exponencial



(c) Traço da média do tensor total, meio heterogêneo, covariância fractal

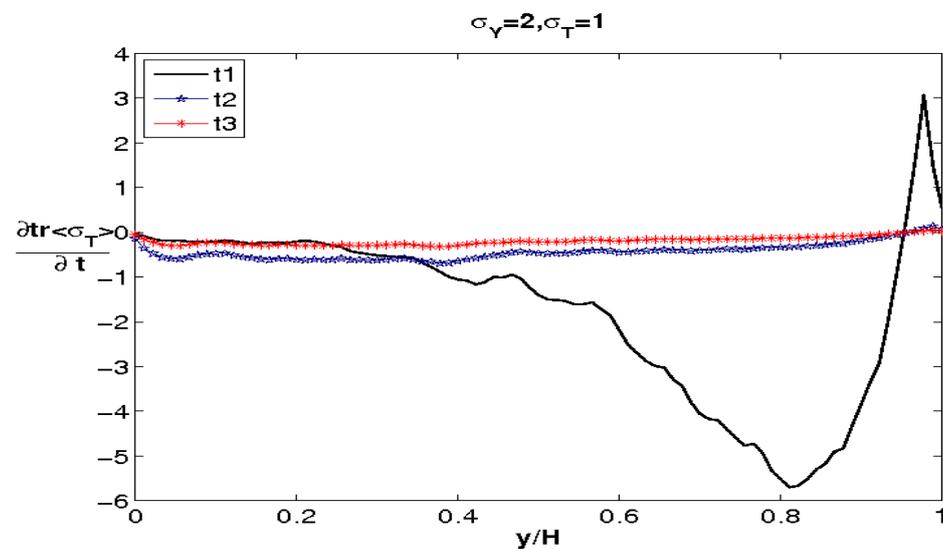


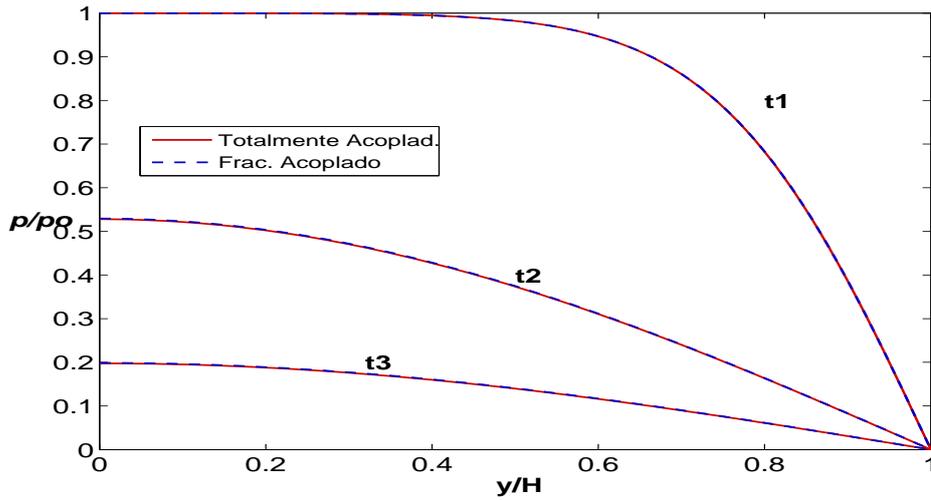
Figura 8.24: Gráfico da dependência espacial da derivada do traço da média do tensor total para três tempos:  $t_1 = 2$  dias,  $t_2 = 36$  dias e  $t_3 = 68$  dias, quando  $K$  e  $E$  são aleatórios

A seguir, as consequências dos resultados obtidos anteriormente para os momentos da tensão total os quais espelham a performance do modelo fracamente acoplado, são agora ilustrados através de comparações entre os momentos das variáveis poroelásticas obtidos pelos dois modelos.

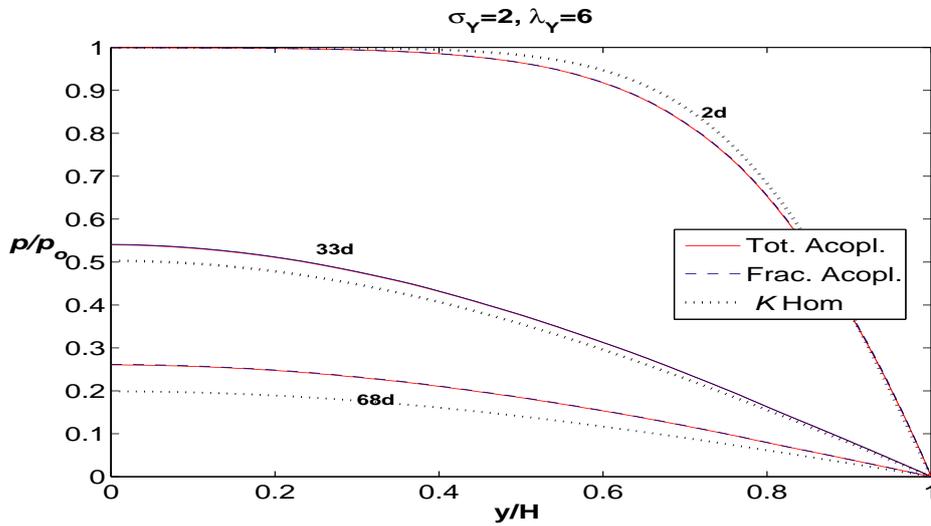
As Figuras 8.25 e 8.26 mostram a evolução dos perfis do primeiro momento da pressão para diversos graus de heterogeneidade obtidos pelas duas formulações. Tal como esperado os perfis coincidem quando o meio é homogêneo [Figura 8.25(a)]. Quando consideramos a condutividade hidráulica  $K$  aleatório as soluções dos modelos fracamente e totalmente acoplados ainda mostram-se próximas [Figura 8.25(b) e 8.25(c)]. Entretanto, quando incorporamos variabilidade também no módulo de elasticidade  $E$ , os modelos fracamente e totalmente acoplados não fornecem resultados próximos, aumentando a disparidade entre eles quando a variabilidade de  $E$  aumenta. Na Figura 8.26 mostramos os perfis da pressão para alguns valores da variância de  $E$ . Embora a compressibilidade do modelo fracamente acoplado (parâmetro obtido a partir de  $E$ ) possa ser tratada aleatoriamente, tal fato mascara as informações provenientes dos efeitos da componente desviadora sobre a porosidade produzindo resultados inaccurados. Podemos observar que, devido a não inclusão da tensão desviadora, o modelo fracamente acoplado tende a retardar o processo de compactação.

As Figuras 8.27 e 8.28 mostram a comparação entre os modelos fracamente e totalmente acoplados para os perfis da média da velocidade na direção  $y$ . De forma análoga à pressão observamos também a proximidade entre os modelos quando o meio é homogêneo [Figura 8.27(a)] ou quando somente  $K$  é considerado aleatório [Figura 8.27(b), 8.27(c)]. Novamente quando consideramos aleatoriedade nos parâmetros elásticos, os resultados obtidos pelos modelos divergem entre si, distanciando-se cada vez mais quando a variabilidade dos parâmetros elásticos aumentam [Figura 8.28].

(a) Pressão, meio homogêneo



(b) Pressão,  $E$  determinístico e  $K$  aleatório, covariância exponencial



(c) Pressão,  $E$  determinístico e  $K$  aleatório, covariância fractal

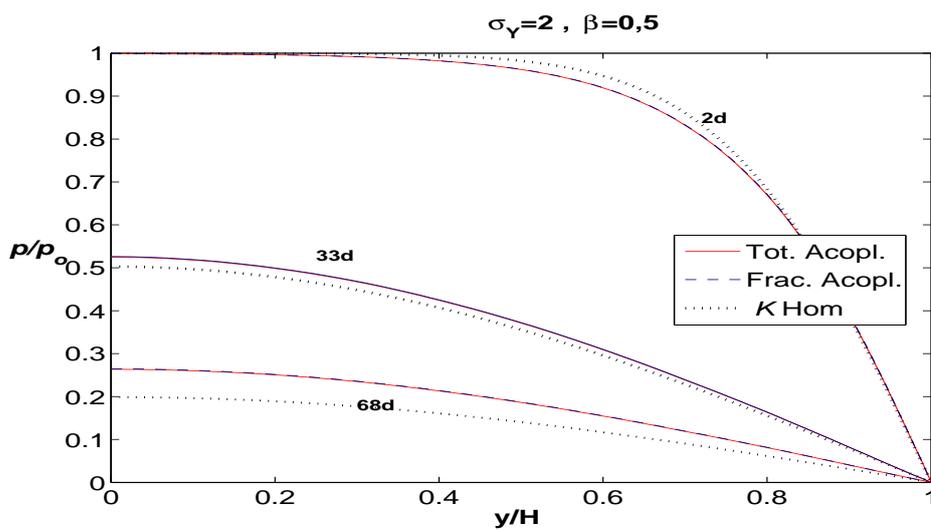
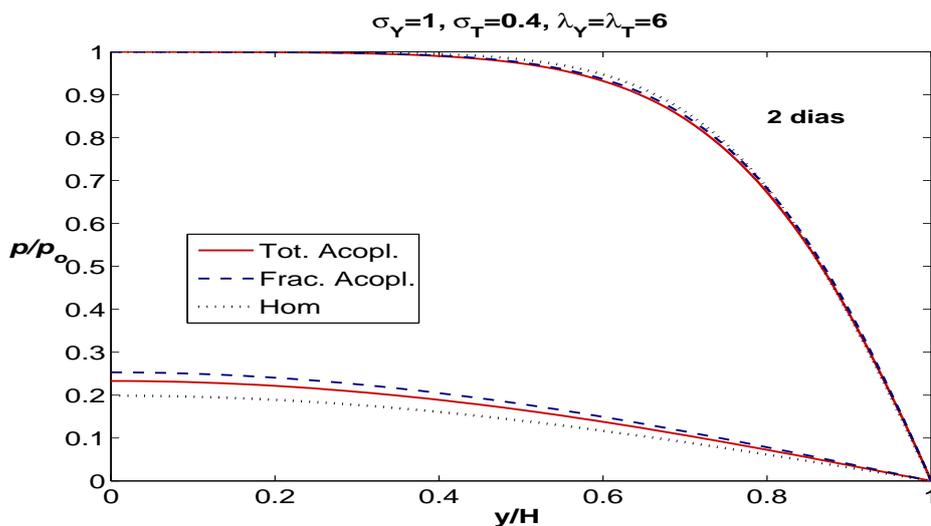
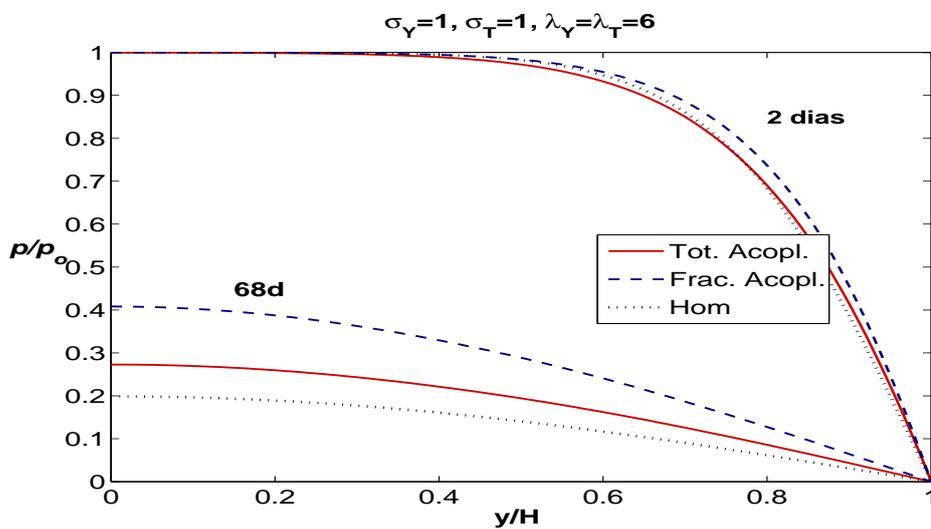


Figura 8.25: Comparação dos perfis da média da pressão normalizada obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para três tempos

(a) Pressão,  $E$  e  $K$  aleatórios, covariância exponencial



(b) Pressão,  $E$  e  $K$  aleatórios, covariância exponencial



(c) Pressão,  $E$  e  $K$  aleatórios, covariância fractal

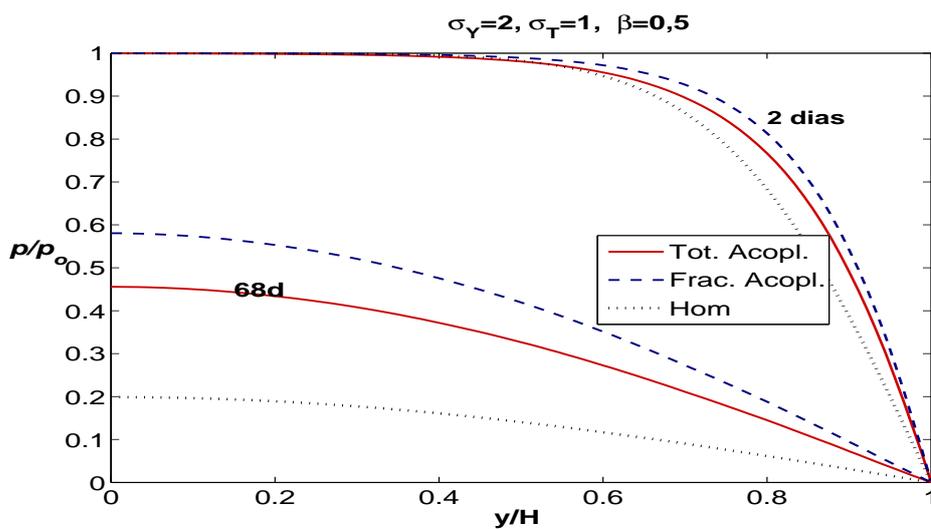
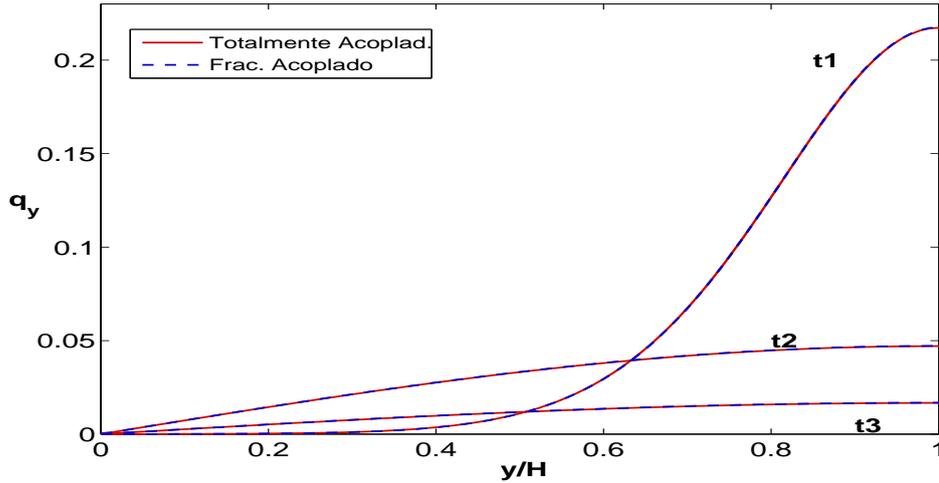
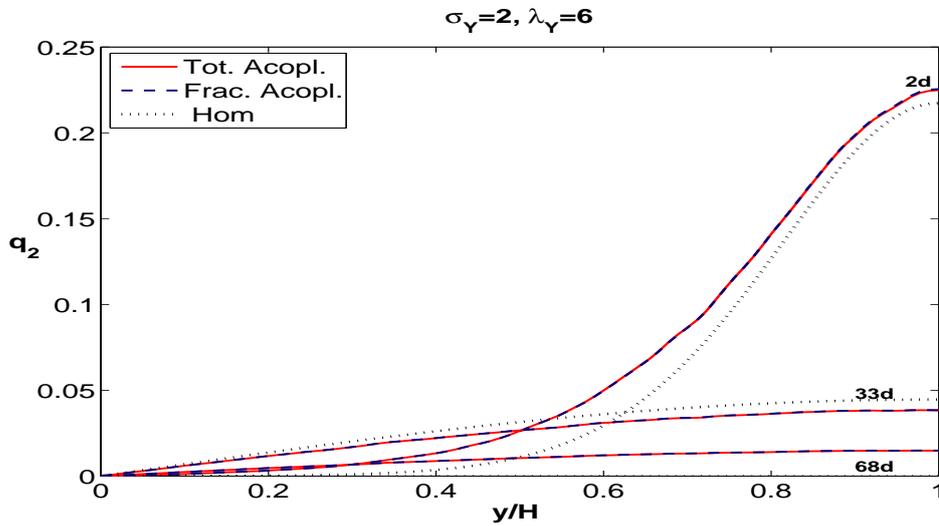


Figura 8.26: Comparação entre os perfis da média da pressão normalizada obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para dois tempos

(a) Velocidade de darcy na direção  $y$ , meio homogêneo



(b) Velocidade de darcy na direção  $y$ ,  $E$  determinístico e  $K$  aleatório covariância exponencial



(c) Velocidade de darcy na direção  $y$ ,  $E$  determinístico e  $K$  aleatório covariância fractal

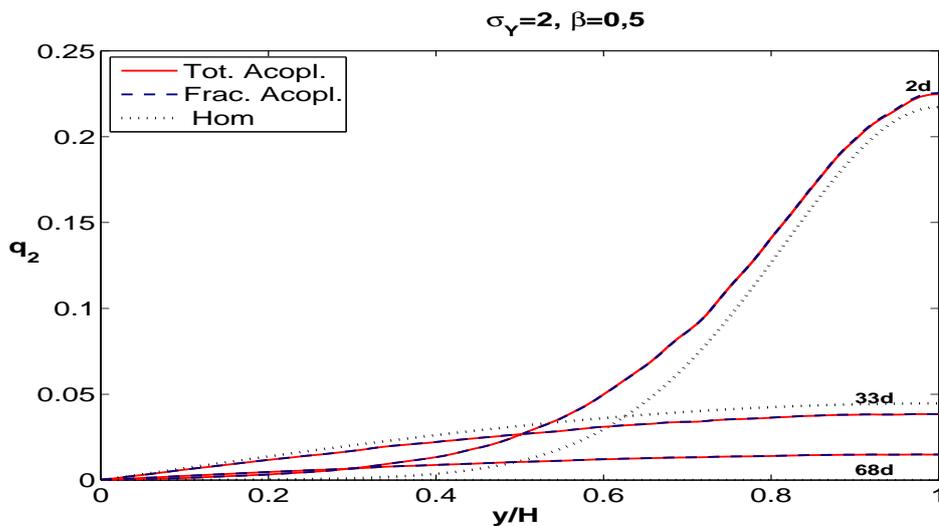
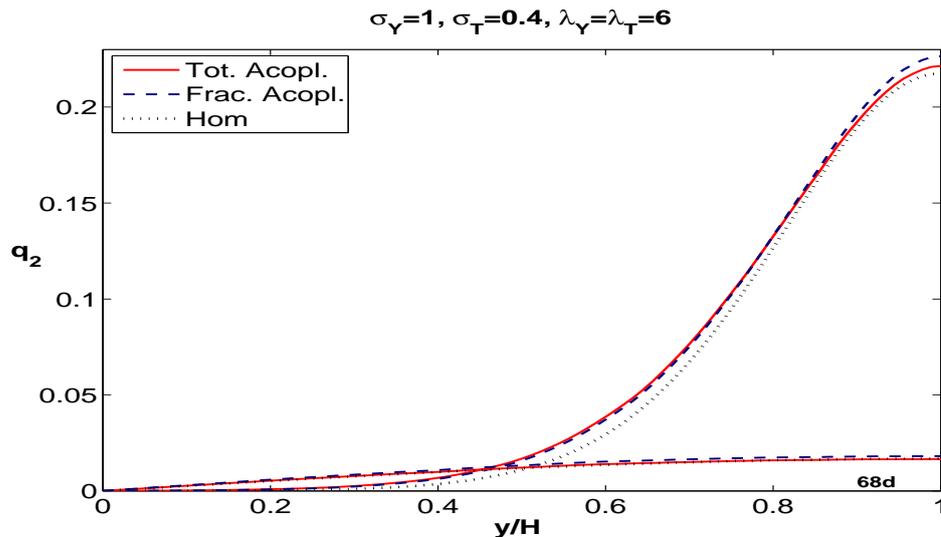
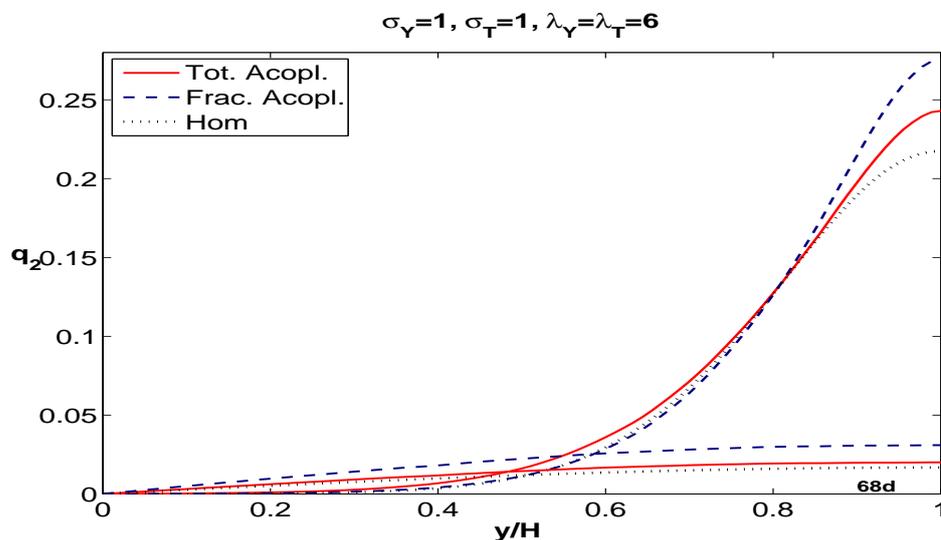


Figura 8.27: Comparação entre os perfis da velocidade de Darcy na direção  $y$  obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para três tempos

(a) Velocidade de darcy na direção  $y$ ,  $E$  e  $K$  aleatórios, covariância exponencial



(b) Velocidade de darcy na direção  $y$ ,  $E$  e  $K$  aleatórios, covariância exponencial



(c) Velocidade de darcy na direção  $y$ ,  $E$  e  $K$  aleatórios, covariância fractal

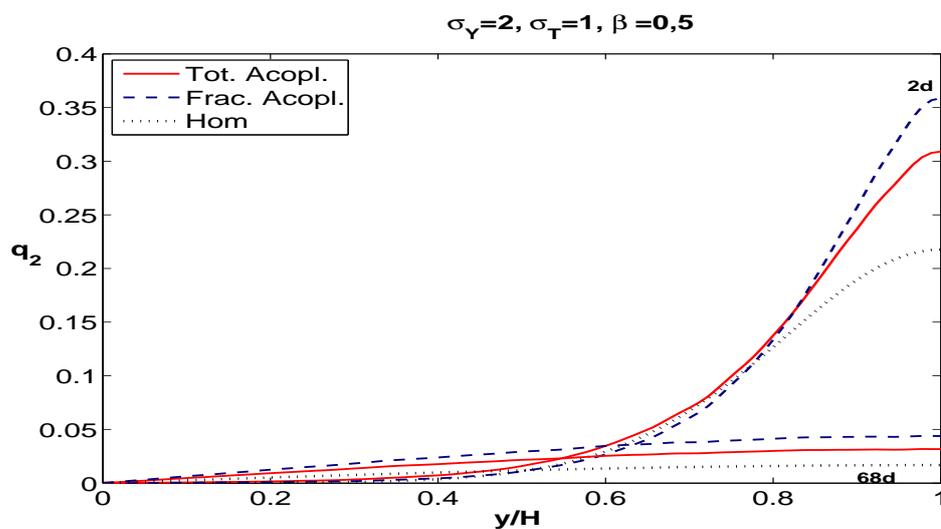
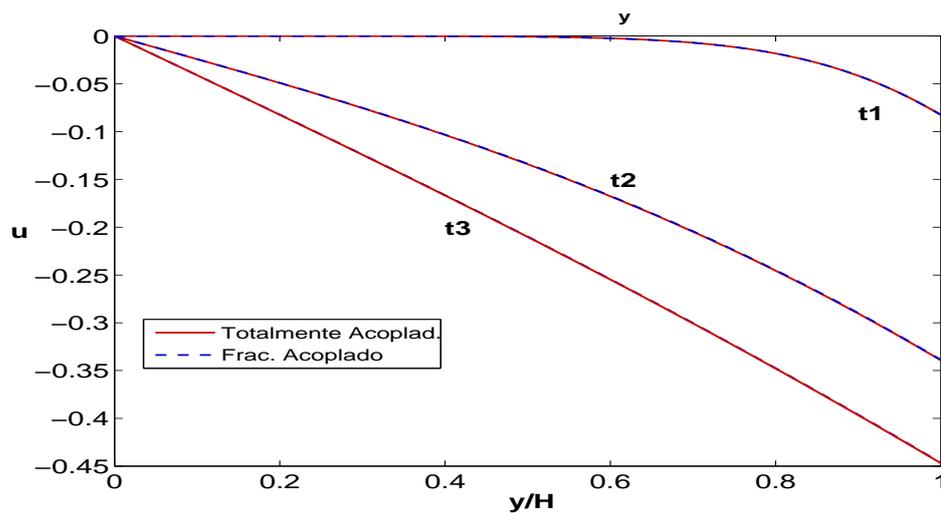


Figura 8.28: Comparação entre os perfis da velocidade de Darcy na direção  $y$  obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para dois tempos

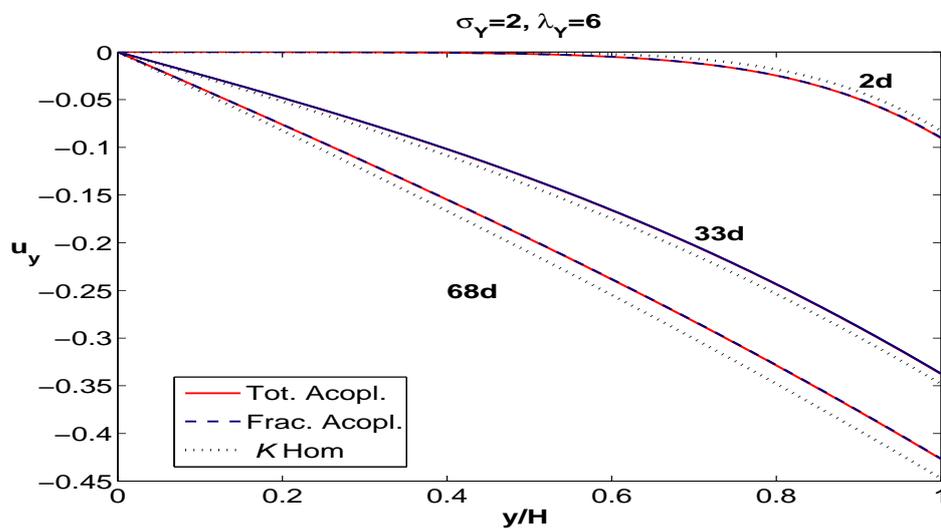
As Figuras 8.29 e 8.30 mostram a comparação entre os perfis da média do deslocamento vertical obtidos pelas duas formulações. Novamente para meios homogêneos [Figura 8.29(a)] e para  $K$  aleatório [Figuras 8.29(b) e 8.29(c)] os perfis encontram-se próximos não exibindo disparidade significativa entre eles de forma que possa comprometer a confiabilidade das simulações numéricas. Para meios heterogêneos com  $K$  e  $E$  aleatórios, notamos que devido a incorporação das tensões de cisalhamento sobre a compactação da matriz porosa a média do deslocamento obtido pelo modelo totalmente acoplado está sempre a frente do perfil obtido pelo modelo fracamente acoplado [Figura 8.30].

As Figuras 8.31 e 8.32 mostram a comparação entre os perfis da componente normal da média da tensão efetiva  $\langle \sigma_T \rangle$  obtidos pelos modelos de poroelasticidade para diferentes níveis de heterogeneidade. Da mesma forma que no caso anterior, quando  $K$  e  $E$  são considerados aleatórios, ao desprezarmos os efeitos distorcionais do esqueleto sobre a porosidade no modelo fracamente acoplado obtemos um atraso na evolução da tensão quando comparada com o caso completamente acoplado.

(a) Deslocamento vertical, meio homogêneo



(b) Deslocamento vertical,  $E$  determinístico e  $K$  aleatório covariância exponencial



(c) Deslocamento vertical,  $E$  determinístico e  $K$  aleatório covariância fractal

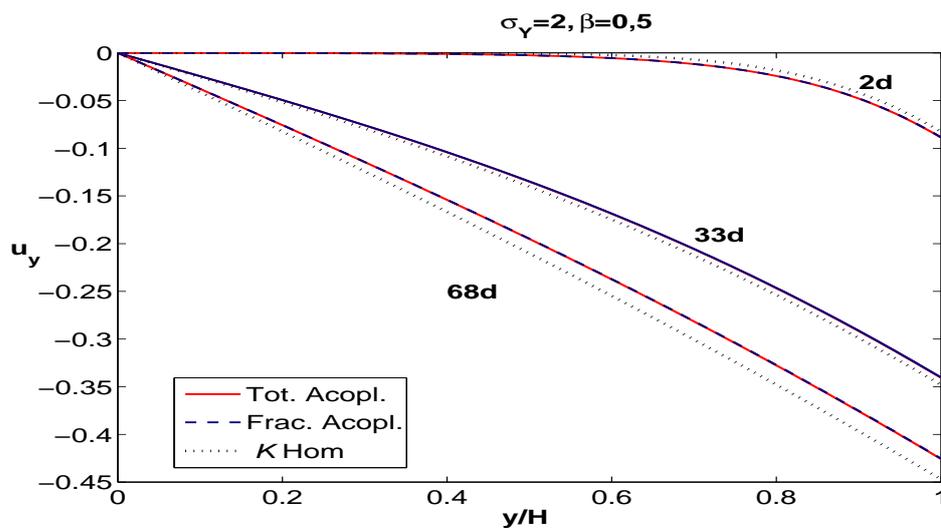
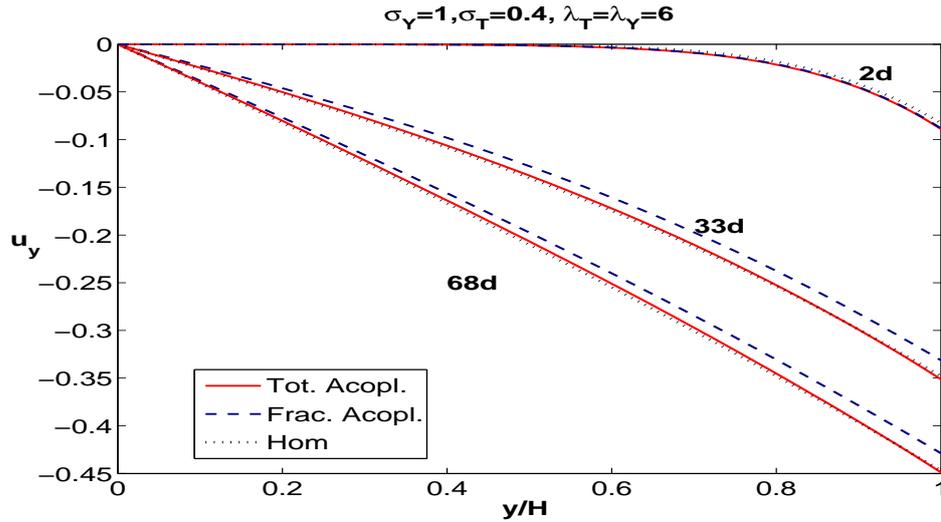
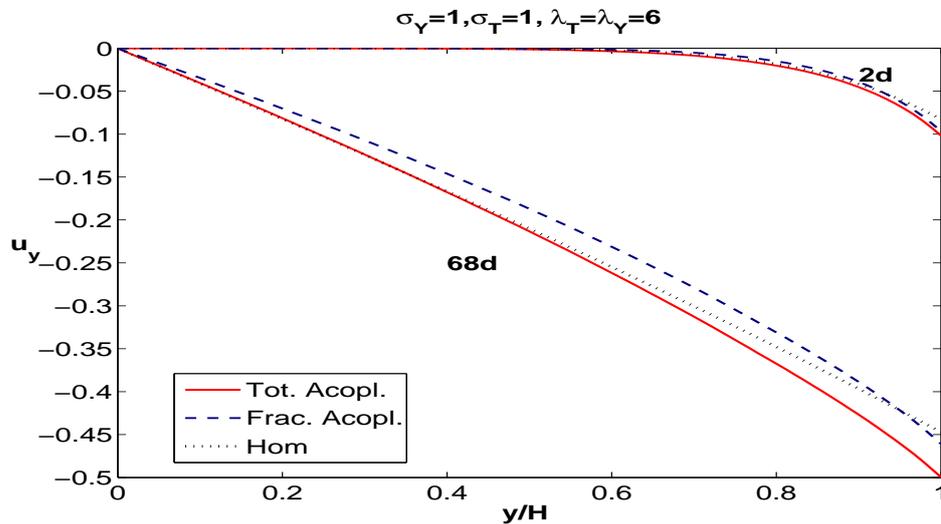


Figura 8.29: Comparação entre os perfis da médias do deslocamento vertical do sólido obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para três tempos

(a) Deslocamento vertical  $E$  e  $K$  aleatórios covariância exponencial heterogeneidade baixa



(b) Deslocamento vertical  $E$  e  $K$  aleatórios covariância exponencial heterogeneidade alta



(c) Deslocamento vertical,  $E$  e  $K$  aleatórios covariância fractal heterogeneidade alta

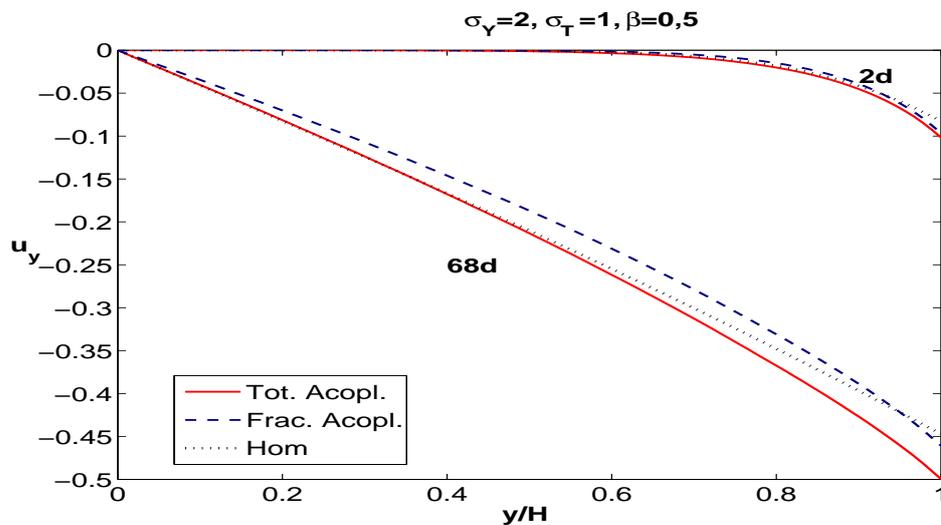
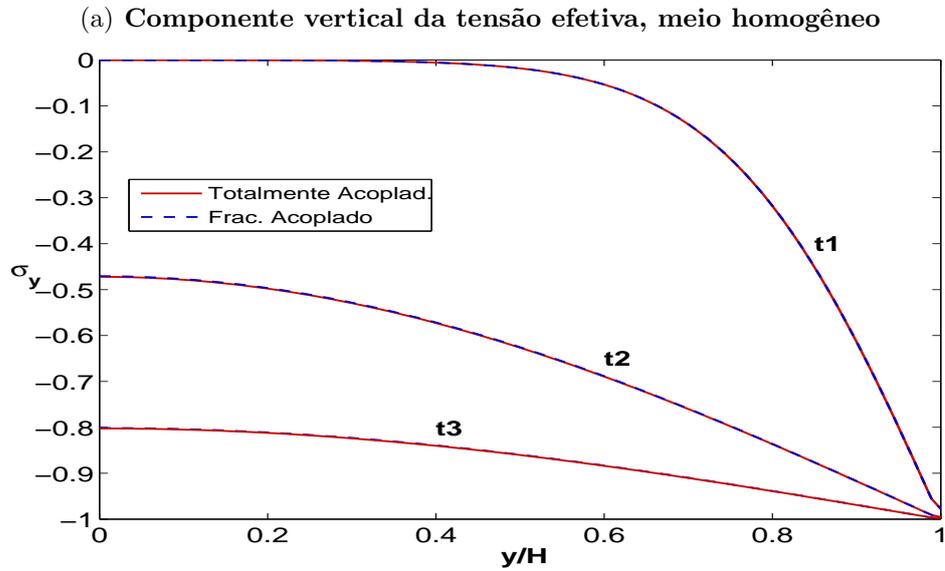
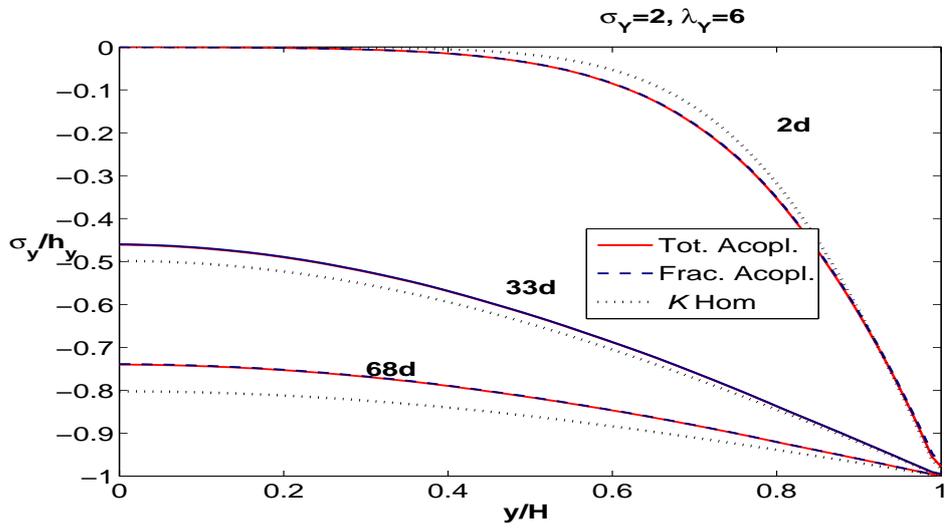


Figura 8.30: Comparação entre os perfis da médias do deslocamento vertical do sólido ao longo do entre os modelos totalmente e fracamente acoplados para dois tempos



(b) Componente vertical da tensão efetiva,  $E$  determinístico e  $K$  aleatório covariância exponencial



(c) Componente vertical da tensão efetiva,  $E$  determinístico e  $K$  aleatório covariância fractal

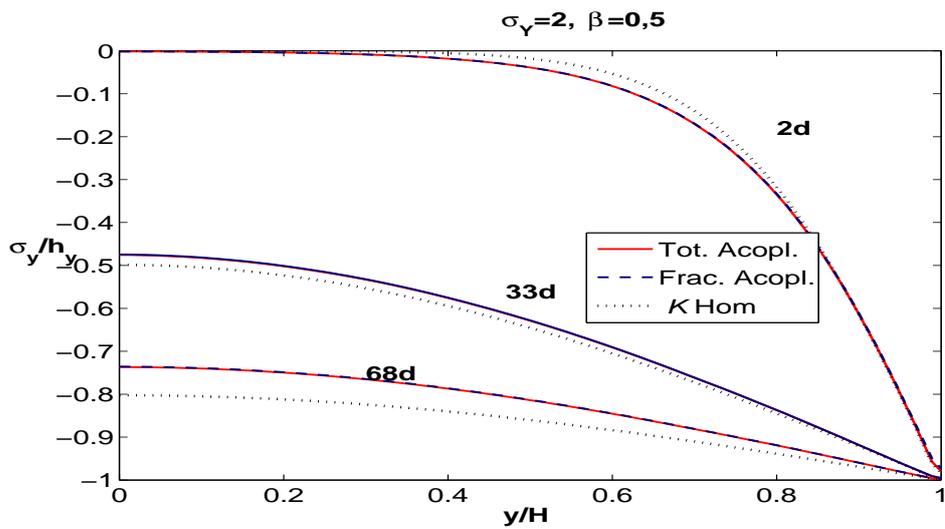
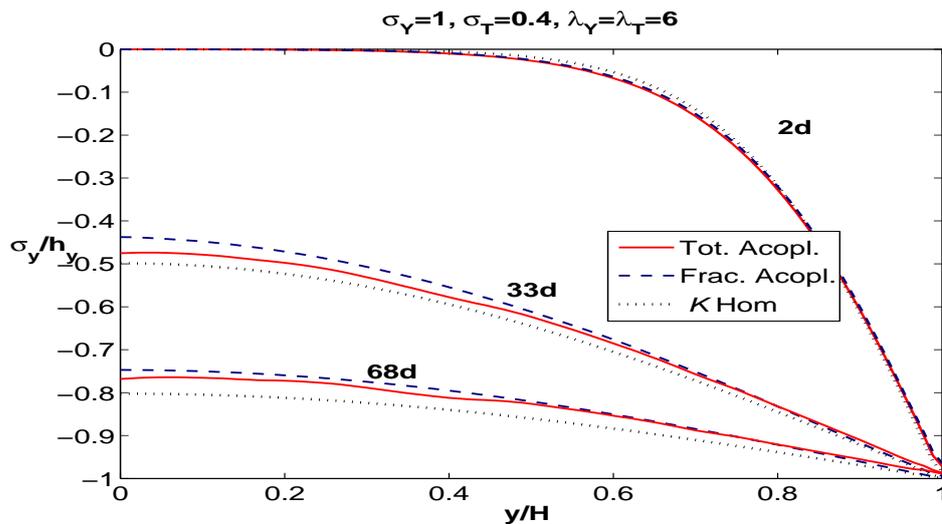
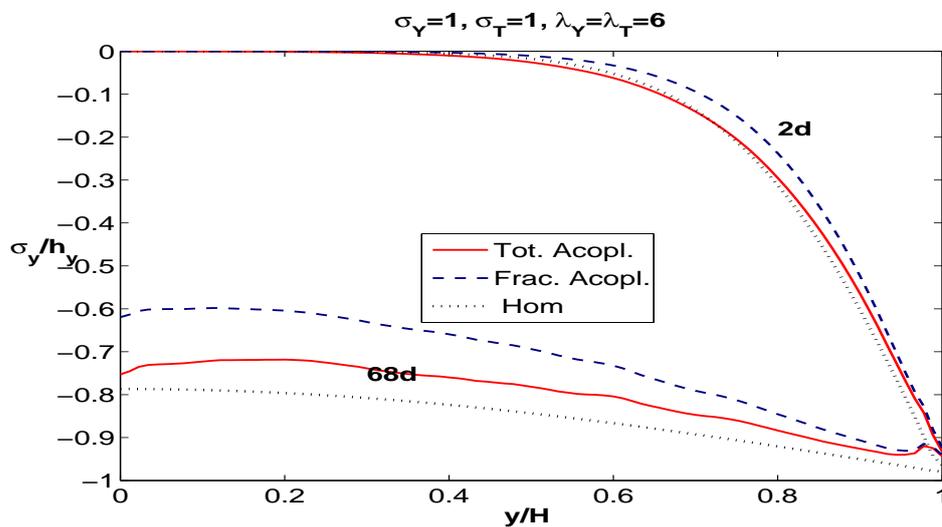


Figura 8.31: Comparação entre os perfis da média da tensão efetiva vertical obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para três tempos

(a) Componente vertical da tensão efetiva,  $E$  e  $K$  aleatórios, covariância exponencial



(b) Componente vertical da tensão efetiva,  $E$  e  $K$  aleatórios, covariância exponencial



(c) Componente vertical da tensão efetiva,  $E$  e  $K$  aleatórios, covariância exponencial

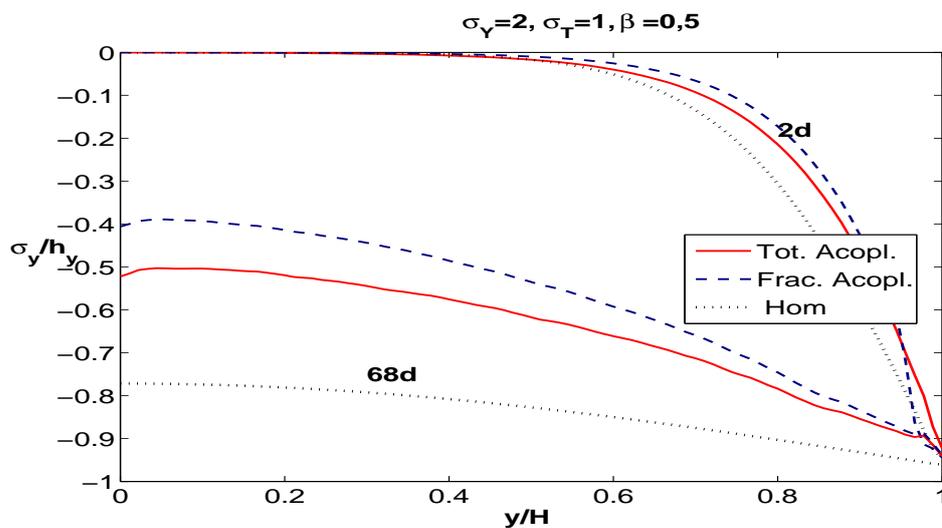


Figura 8.32: Comparação entre os perfis da média da tensão efetiva vertical do sólido obtidos pelos modelos totalmente e fracamente acoplados para dois tempos

Finalmente, mostramos a comparação entre os perfis da vazão de petróleo no poço de produção. No início do processo, a vazão é afetada pela camada limite da velocidade junto ao poço ocorrendo um pico de produção [ Figura 8.33] seguido de uma queda rápida e à medida que o tempo evolui a produção tende para zero.

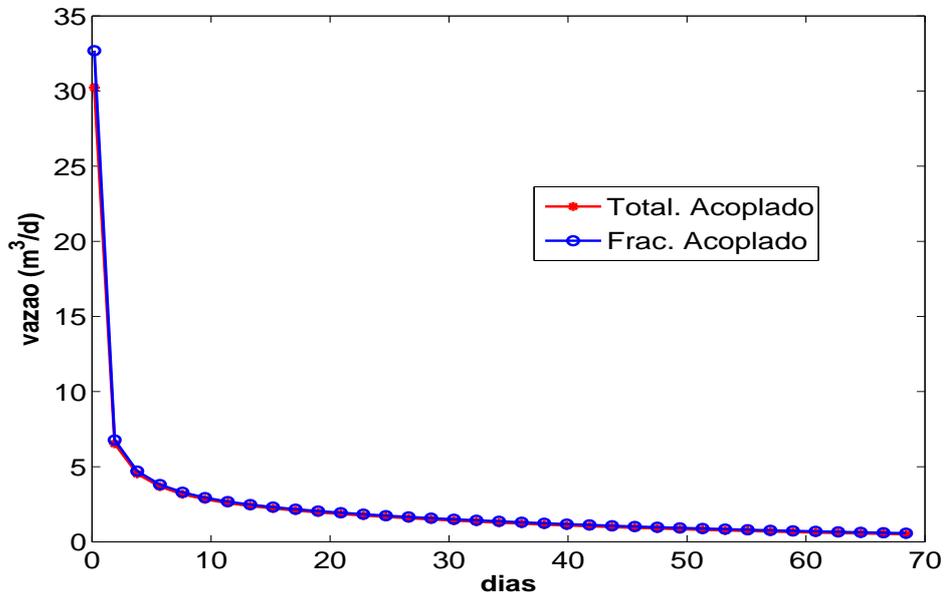
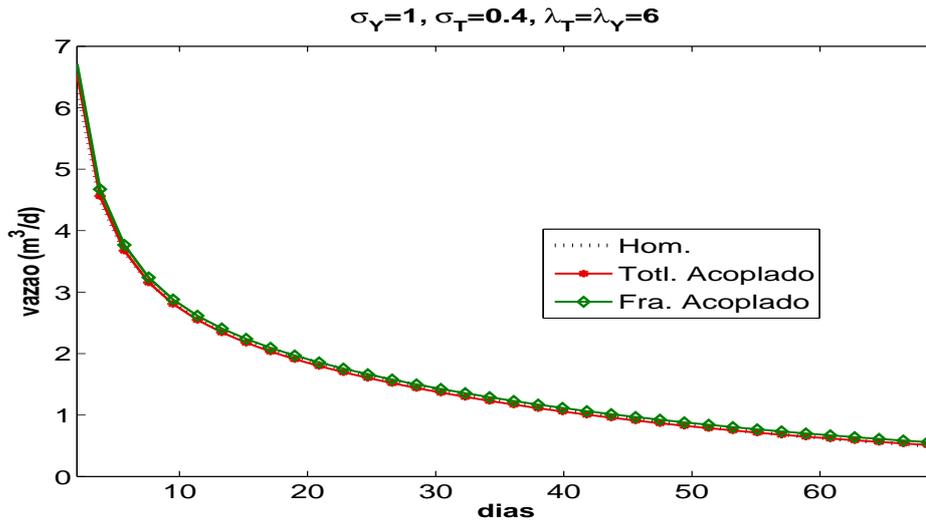


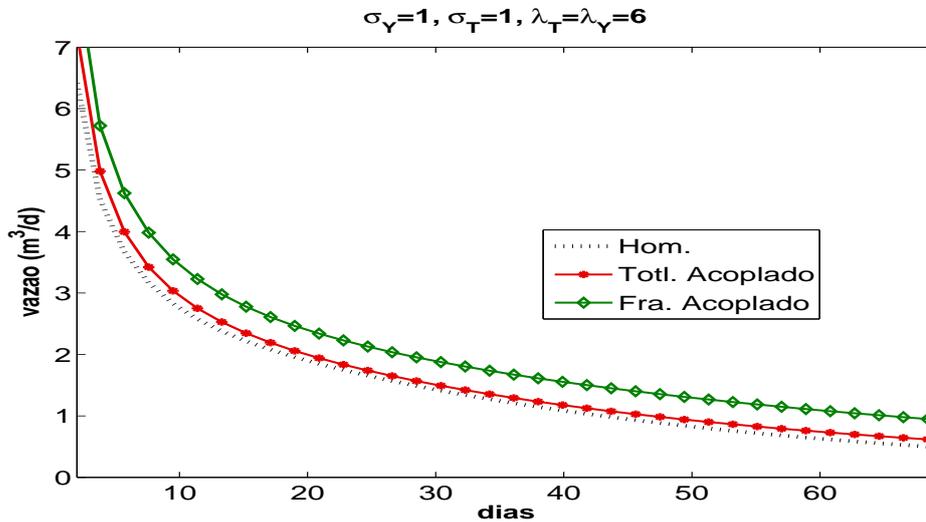
Figura 8.33: Comparação entre as curvas médias de produção de óleo obtidas pelos modelos fracamente e totalmente acoplados em meios homogêneos

Podemos observar a diferença entre as curvas de produção obtidas pelos modelos fracamente e totalmente acoplados quando o módulo de Young é aleatório [Figura 8.34]. Notamos que à medida que a variância aumenta o atraso do modelo fracamente acoplado que não incorpora os efeitos desviadores que retardam a captura da compactação gerando curvas de produção que superestimam a vazão do petróleo.

(a) Curvas de Produção de óleo, heterogeneidade baixa



(b) Curvas de Produção de óleo, heterogeneidade alta, covariância exponencial



(c) Curvas de Produção de óleo, heterogeneidade alta, covariância fractal

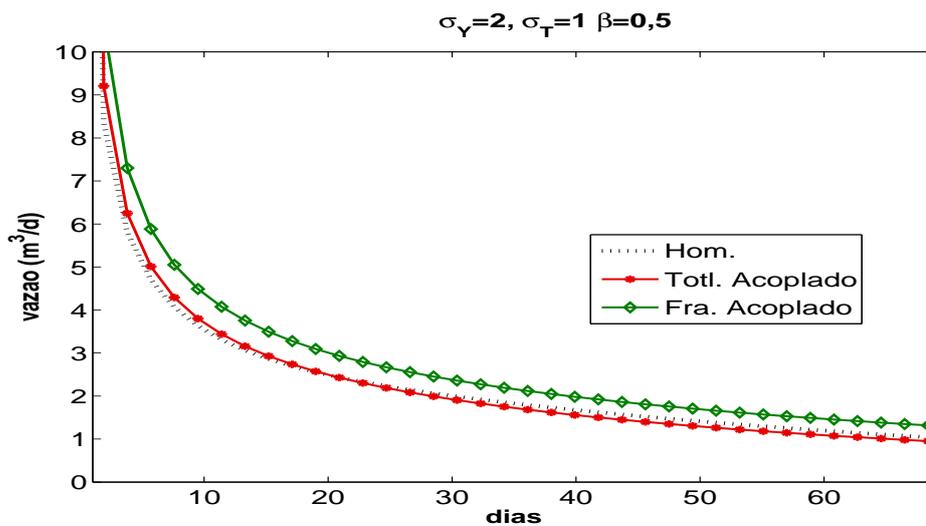


Figura 8.34: Comparação entre as curvas médias de produção de óleo obtidas pelos modelos fracamente e totalmente acoplados em meios heterogêneos

# Capítulo 9

## Conclusões

Considerando formações geológicas altamente heterogêneas, neste trabalho estabelecemos um critério de comparação entre os modelos de poroelasticidade fracamente acoplado, baseado na compressibilidade da rocha, e totalmente acoplado proposto por Biot, os quais são caracterizados por diferentes intensidades de acoplamento entre a hidrodinâmica e a poromecânica.

Nesta direção fizemos uso das técnicas de perturbação estocástica e elucidamos como se comportam as soluções dos momentos dos modelos poroelásticos na presença de variabilidade e incerteza dos parâmetros de entrada tais como condutividade hidráulica e constantes elásticas.

Neste sentido, exploramos a técnica de expansão assintótica para a derivação de equações poroelásticas efetivas para descrever meios heterogêneos. Embora a técnica de perturbação forneça resultados fortemente dependentes da natureza do problema de fechamento, exibindo acurácia somente para variâncias baixas, ela pode ser fortemente explorada para a construção de novos critérios de acurácia para a validação de diversos modelos poroelásticos.

A metodologia adotada neste trabalho permitiu caracterizar precisamente a validade dos modelos fracamente e completamente acoplados de poroelasticidade, analisando a precisão destes em reservatórios poroelásticos heterogêneos. Como resultado principal foi derivada uma generalização do critério proposto por Gutierrez e Lewis (2002) para meios heterogêneos, baseado nos momentos estatísticos da

derivada temporal da média da tensão total. O resultado obtido é ilustrado através de termos adicionais nas equações efetivas obtidas, cuja ordem de magnitude estabelece precisamente a acurácia do modelo poroelástico empregado.

Formulações variacionais e aproximação por elementos finitos foram propostos na discretização dos modelos. A validação do critério foi ilustrada em diversas simulações numéricas de um problema oriundo da prospecção primária do óleo fazendo uso do método de elementos finitos em conjunção com o algoritmo de Monte Carlo. Os resultados apresentam aspectos inovadores que podem futuramente ser explorados na escolha do modelo poromecânico apropriado para simular Reservatórios de Petróleo com acoplamento Geomecânico.

Os resultados obtidos neste trabalho podem ser explorados para propor um novo critério de validade para o modelo fracamente acoplado em meios porosos altamente heterogêneos. O novo critério é bastante promissor e surge baseado somente nos momentos estatísticos da derivada temporal da tensão total. O cômputo desta grandeza mesmo no caso de condições de carregamento externo uniformemente distribuído, onde é bem conhecido que os dois modelos coincidem exatamente para meios homogêneos, fornece a acurácia do modelo fracamente acoplado. Observamos que, à medida que a variabilidade do módulo de Young aumenta, a precisão do modelo fracamente acoplado deteriora-se. Em particular no caso de formações geológicas com alta variabilidade das constantes elásticas, o modelo fracamente acoplado apresenta resultados pobres sendo necessário a utilização do modelo totalmente acoplado na resolução do problema. O critério baseado no cômputo dos momentos estatísticos da derivada de  $\sigma_T$  é inovador e pode ser incorporado aos simuladores de reservatório que descrevem o acoplamento hidrogeomecânico em meios altamente heterogêneos.

A utilização do método de Monte Carlo pode se tornar inviável devido ao elevado custo computacional. Em vista disto o método de Colocação Estocástica [Babůska et al. (2007), Nobile et al. (2008)] surge como uma alternativa promissora para este tipo de problema. A proposta de um trabalho futuro consiste em agregar

conhecimento à metodologia já desenvolvida através da resolução do problema estocástico via método de Colocação Estocástica.

## Referências Bibliográficas

- V. Alvarado, L. E. Scriven, e H. T. Davis. Stochastic-perturbation analysis of a one-dimensional dispersion-reaction equation: Effects of spatially-varying reaction rates. **Transport in Porous Media**, 32:139–161, 1998.
- I. Babůska e Panagiotis Chatzipantelidis. On solving elliptic stochastic partial differential equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 191:4093–4122, 2002.
- I. Babůska, T. Nobile, e Raúl Tempone. A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. **SIAM-Journal on numerical on numerical analysis**, 45(3):1005–1034, 2007.
- A. Bakr, A. Gelhar, A. Gutjhar, e J. MacMillam. Stochastic anaysis of spatial variability in subsurface flows 1.comparison of one and three dimensional flows. **Water Resouces Research**, 14(2):263–271, april 1978.
- G. B. Beacher e T. S. Ingra. Stochastic fem in settlement predictions. **Journal Geotechnical Engrg, ASCE**, 107:449–463, 1981.
- J. Bear. **Hydraulics of groundwater**. MCGRAW-HILL, 1979.
- M. Beran. **Statical Continuum Theories**. New york, Interscience Publishers, 1969.
- M. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. **J. Appl.Phys.**, 12: 155–164, 1941.

- M. Biot. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. **J. Appl. Phys.**, 33:182–185, 1955.
- M. Biot. General solutions of the equation of elasticity and consolidation for a porous material. **J. Appl. Mech.**, 78:91–96, 1956a.
- M. Biot. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. **J. Appl. Phys.**, 27:459–467, 1956b.
- M. Biot e D.G Willis. The elastic coefficients of the theory of consolidation. **J. Appl. Mech.**, 79:594–601, 1957.
- F. A. Bonilla e J. H. Cushman. Role of boundary conditions in convergence and nonlocality of solutions to stochastic flow problems in bounded domains. **Water resources research**, 36:981–997, 2000.
- F. A. Bonilla e J. H. Cushman. On perturbative expansions to stochastic flow problem. **Transport in Porous Media**, 42:3–35, 2001.
- F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers. **Math. Anal. Numér.**, 8:129–151, 1974.
- W. Chen e D.J. Han. **Plasticity for Structural Engineers**. New York, Springer-Verlag, 1988.
- G. Christakos. **Random Field Models in Earth Sciences**. New York Dover Publications, 2005.
- O. Coussy. **Poromechanics**. France, John Wiley & Sons, Ltd, 1st edição, 2004.
- John H. Cushman, Lynn S. Bennethum, e Bill X. Hu. A primer on upscaling tools for porous media. **Advances in Water Resources**, 25:1043–1067, 2002.
- G. Dagan. **Flow and transport in porous formations**. Berlin, Springer-Verlag., 1989.

- G. Dagan. An overview of stochastic modeling groundwater flow and transport: From theory to applications. **EOS, Transactions American Geophysical Union**, 83(53):621, 2002.
- R.H. Dean, X. Gai, C.M. Stone, e S.E. Minkoff. A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics. **SPE**, 1:132–140, 2006.
- E. Fjaer, R.M. Holt, P. Horsrud, A. M. Raaen, e R. Risnes. **Petroleum Related Rock Mechanics**. New York, ELSEVIER, 1992.
- R. A. Freeze. A stochastic conceptual analysis of one dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media. **Water Resouces Research**, 11(5):725–741, 1975.
- G.D. Frias, M. Murad, e F. Pereira. Stochastic computational modeling of highly heterogeneous poroelastic media with long-range correlations. **J. Numer. Anal. Methods Geomech**, 2004.
- Y. C. Fung. **Biomechanics: motion, flow, stress and growth**. New York Springer-Verlag, 1990.
- Giuseppe Gambolati, Pietro Teatini, Domenico Bau, e Massimiliano Ferronato. Importance of poroelastic coupling in dynamically active aquifers of the po river basin, italy. **Water Resouces Research**, 36:2443–2459, 2000.
- L. W. Gelhar. Stochastic subsurface hydrology from theory to applications. **Water Resouces Research**, 22(9):135S–145S, 1986.
- L.W. Gelhar. **Stochastic subsurface hydrology**. New Jersey, Prentice Hall., 1993.
- R. G. Ghanem. Probablistic characterization of transport in heterogeneous media. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 158:199–220, 1998.
- R.G. Ghanem e P. D. Spanos. **Stochastic Finite Elements a Spectral Approach**. New York, Springer-Verlag, 1991.

- J. Glimm e D. H. Sharp. A random field model for anomalous diffusion in heterogeneous porous media. **Journal of Statical Physics**, 1-2:415–424, 1991.
- A. Guadagnini e P. S. Neuman. On perturbative expansions to stochastic flow problem. **Transport in Porous Media**, 42:37–67, 2001.
- M. S. Gutierrez e R. W. Lewis. Coupling of fluid flow and deformation in underground formations. **J. Engrg. Mech.**, 128(7):779–787, 2002.
- A. L. Gutjhar e L. W. Gelhar. Stochastic models of subsurface flow: Infinite versus finite domains and stationarity. **Water Resouces Research**, 17(2):337–350, 1981.
- Th. Harter. **Unconditional and Conditional Simulation of Flow and Transport in Heterogeneous, Variably Saturated Porous Media**. Tese de Doutorado, University of Arizona, 1994.
- Bill X. Hu, Hai Huang, Ahmed E. Hassan, e John H. Cushman. Stochastic reactive transport in porous media: higher-order closures. **Advances in Water Resource**, 25:513 – 531, 2002.
- J. B. Keller. Flow in random porous media. **Transport in Porous Media**, 43:395–406, 2001.
- R. W. Lewis e B. A. Schrefler. **The finite element method in the Deformation and Consolidation of Porous Media**. New York, John Wiley & Sons., 1987.
- R. W. Lewis, B. A. Schrefler, e L. Simoni. Coupling versus uncoupling in soil consolidation. **International Journal for Numerica and Aplication Methods in Geomechanics**, 15:533–548, 1991.
- L. Li, H. A. Tchelepi, e D. Zhang. Perturbation-based moment equations approach for flow in heterogeneous porous media: Applicability range and analysis of high-order terms. **Journal Computational Physics**, 188:296–317, 2003.

- SG. Li, D. McLaughlin, e H.S. Liao. The accuracy stochastic perturbation solutions to subsurface transport problems. **Advances in Water Resources**, 27:47–56, 2004.
- P. Longuemare, M. Mainguy, P. Lemonnier, A. Onaisi, C. GÃ©rard, e N. Koutsabeloulis. Geomechanics in reservoir simulation: Overview of coupling methods and field case study. **Oil and Gas Science and Technology**, 57:471–483, 2002.
- Z. Lu e D. Zhang. Conditional simulations of flow in randomly heterogeneous porous media using a kl-based moment-equation approach. **Advances in Water Resources**, 27:859–874, 2004.
- P. Lumb. The variability of natural soils. **Canadian**, 27:859–874, 1966.
- M. Mainguy e P. Longuemare. Coupling fluid flow and rock mechanics: Formulations of the partial coupling between reservoir and geomechanical simulators. **Oil & Gas Science and Technology**, 57(4):355–367, 2002.
- B.B. Mandelbrot e J.W. Wallis. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. **SIAM Review**, 10:422–437, 1968.
- A. Mantoglou e J. L. Wilson. The turnig bands methods for simulations of random fields using lines generations by spectral method. **Water Resources Research**, 18:1379–1388, 1982.
- Hermann G. Matthies e Andreas Keese. Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, 194:1295–1331, 2005.
- Márcio A. Murad e Abimael F. D. Loula. On stability and convergence of finite element approximations of biot’s consolidation problem. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 37(4):645 – 667, 1994.

- Márcio A. Murad, Vidar Thomée, e Abimael F. D. Loula. Asymptotic behavior of semidiscrete finite-element approximations of biot's consolidation problem. **SIAM J. Numer. Anal.**, 33(3):1065–1083, 1996. ISSN 0036-1429.
- Sholmo P. Neuman e Sholmo Orr. Prediction of steady state flow in nonuniform geologic media by conditional moments: Exact nonlocal formalism, effective conductivities, and weak approximation. **Water Resources Research**, 29(2): 341–364, February 1993.
- F. Nobile, R. Tempone, e C. G. Webster. A sparse grid stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. **SIAM J. Numer. Anal.**, 46(5):2309–2345, 2008.
- H. Osness. Stochastic analysis of head spatial variability in bounded rectangular heterogeneous aquifers. **Water Resources Research**, 31:2981–2990, 1995.
- G. M. Paice, D. V. Griffiths, e G.A. Fenton. Finite element modeling of settlements on spatially random soil. **Water Resources Research**, 122(9):777–779, 1996.
- A Papoulis. **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**. McGraw-Hill Kogakusha, 1965.
- E. Parzen. **Stochastic Processes**. San francisco Holden day, 1962.
- R. Valéry Roy e S. T. Grilli. Probabilistic analysis of flow in random porous media by stochastic boundary elements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 19:239–255, 1997.
- Y. Rubin. Stochastic modeling of macrodispersion in heterogeneous porous media. **Water Resources Research**, 26(1):133–141, 1990.
- Y. Rubin. **Applied Stochastic Hydrogeology**. New York, Oxford university press, 2003.
- P. Samier e S. De Gennaro. Practical iterative coupling of geomechanics with reservoir simulation. In: **Society of Petroleum Engineers**, 2007.

- P. Samier, A. Onaisi, e G. Fontaine. Comparisons of uncoupled and various coupling techniques for practical field examples. **Soc. Petrol. Eng. J.**, páginas 89–102, 2006.
- G. Samorodnitsky e Murad S. Taqqu. **Stable Non-Gaussian random processes Sochatic Models with Infinite Variance**. Chapman & Hall, 2000.
- A. Settari e F.M. Mourits. A coupled reservoir and geomechanical simulation system. **SPE Journal**, páginas 219–226, 1998.
- R. L. Shiffman, A. T. Chen, e Jane C. Jordan. An analysis of consolidation theories. **Journal of the soil mechanics and foundations division**, 1:285–312, 1969.
- D. M. Tartakovsky e S. P. Neuman. Transient flow in bounded randomly heterogeneous domains 1. Localization of conditional mean equations and temporal nonlocality effects. **Water Resour. Res.**, 34(1):1–12, 1998.
- D. M. Tartakovsky e S. P. Neuman. Extension of "transient flow in bounded randomly heterogeneous domains 1. Exact conditional moment equations and recursive approximations". **Water Resour. Res.**, 35(6):1921–1925, 1999.
- C. Taylor e P. Hood. A numerical solution of the navier-stokes equations using the finite element technique. **Comput. and Fluids**, 1:73–100, 1973.
- K. Terzaghi e Peck R. **Mecánica dos Solos**. Ao Livro Técnico S. A., 1962.
- A. Verruijt. **OFFSHORE SOIL MECHANICS**. Delft University of Technology, 2006.
- H. Wang. **Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology**. New York, Princeton series in geophysics, 2000.
- Dongbin Xiu e George Em Karniadakis. The wiener-asky polynomial chaos for stochastic differential equations. **SIAM J. Sci. Comput.**, 24(2):619–644, 2002.

- D.G Zeitoun e R. Baker. A stochastic approach for settlement predictions of shallow foundations. **Geotechnique**, 42(4):617–629, 1992.
- A . Zenisek. The existence and uniqueness theorem in biot consolidation theory. **Applications of Mathematics**, 29:194–211, 1984.
- D. Zhang. Quantification of uncertainty for flow in heterogeneous petroleum reservoirs. **Physica D**, 133:488–497, 1999.
- D. Zhang. **Stochastic Methods for Flow in Porous Media**. Los Alamos, Academic Press, 2002.
- D. Zhang e Z. Lu. An efficient, high-order perturbation approach for flow in random porous media via karhunen loève and polinomial expansions. **Journal of Computacional Physics**, 194:773–794, 2004.
- D. Zhang e C.I. Winter. Momente equations aproach to single fluid flow in heterogeneous reservoirs. **Soc. Petrol. Eng. J.**, 4:118–127, 1999.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)