

Laboratório Nacional de Computação Científica
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**A Dinâmica Populacional do Pirarucu (*Arapaima gigas*) na
Reserva de Desenvolvimento Sustentável Mamirauá
(RDSM), Amazônia**

Por
Eliane dos Santos de Souza Coutinho

PETRÓPOLIS, RJ – BRASIL
NOVEMBRO DE 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

A DINÂMICA POPULACIONAL DO PIRARUCU (*ARAPAIMA GIGAS*) NA RESERVA
DE DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL MAMIRAUÁ (RDSM), AMAZÔNIA

Eliane dos Santos de Souza Coutinho

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO NACIONAL DE
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovado por:

Prof. Luiz Bevilacqua, Ph.D.
(Presidente)

Prof. Helder Lima de Queiroz, Ph.D.

Prof. Augusto César Noronha Galeão, D.Sc.

Prof. Michel Iskin Costa, D.Sc.

Prof. Jean Louis Valentin, Ph.D

Prof. Marat Rafikov, Ph.D

PETRÓPOLIS, RJ – BRASIL

NOVEMBRO DE 2008

Coutinho, Eliane dos Santos de Souza

C871d A dinâmica populacional do pirarucu (*Arapaima gigas*) na reserva de desenvolvimento sustentável Mamirauá (RDSM), Amazônia / Eliane dos Santos de Souza Coutinho -- Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2008.

XXIX, 191 p. : il. ; 29 cm.

Orientadores : Luiz Bevilacqua e Helder Lima de Queiroz

Tese (doutorado) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2008.

1.População biológica. 2. Modelos matemáticos. 3. Pirarucu. 4. Mamirauá. 5. Manejo de Pesca I. Bevilacqua, Luiz. II. Queiroz, Helder Lima de III. MCT/LNCC; IV.Título

CDD –577.88

*"Deus não escolhe os capacitados
capacita os escolhidos.
Fazer ou não fazer algo
só depende de nossa vontade
e perseverança"*
Albert Einstein

Ao Toni e à Mari

Agradecimentos

O item **Agradecimentos** é de extrema importância no momento em que encerro este trabalho. Os agradecimentos podem ser considerados mera formalidade, mas para mim, além de ser o espaço próprio para expressar o reconhecimento por toda a contribuição recebida, também é a oportunidade de olhar retrospectivamente para a memória emotiva e reconhecer a quem mais devo as condições que me levaram até onde estou.

O que sou começou com meus pais Nilza e Oswaldo, a quem agradeço pelo carinho e dedicação até me formar na universidade.

Ao meu marido Toni, uma pessoa especial, que a vida colocou em minha estrada, agradeço pela inteligência, pela incomensurável paciência e dedicação, por suprir papéis tradicionalmente meus, e por estar sempre presente durante todo o tempo em que estive envolvida na conclusão deste doutoramento.

Obrigada a minha filha Mariana, o meu bem mais precioso, pela compreensão em relação a minha ausência, pelo incentivo e carinho diário.

Agradeço ao Sr. Tuza e a Dona Cléa pelo carinho, compreensão e apoio nas horas mais difíceis.

Tenho dívidas especiais para com Flávia, Mauro e Cauê, que receberam em seu lar a minha Mariana, contribuindo com isso para a minha tranquilidade e paz de espírito nessa etapa final.

Sou também muitíssimo grata ao meu orientador, Prof. Dr. Luiz Bevilacqua, pela orientação que tem me oferecido. Sabedoria para lidar com pessoas e objetividade para lidar com as coisas da ciência são qualidades que tenho procurado desenvolver convivendo com

ele. O seu nível intelectual e cultural obriga-me a um esforço diário para tentar acompanhá-lo. E, se isso é exaustivo por um lado, por outro, me “puxa para cima” e tende a me fazer crescer muito a médio prazo. Nas discussões que tivemos durante a elaboração desta tese, aprendi mais que em muitos anos de solitárias tentativas e de muitas leituras.

Ao Prof. Dr. Helder Lima de Queiroz, que com todo seu carinho, dedicação, atenção e sabedoria despertou-me para a importância deste trabalho. Foi um privilégio tê-lo como meu co-orientador.

Aos professores do LNCC pelos conhecimentos transmitidos, em especial, aos professores Abimael Loula, Augusto Galeão, Michel Iskin, Regina Almeida, Renato Silva, Sandra Malta e Sônia Limoeiro.

À Cláudia Marins e ao Ricardo Amorim pela ajuda no inglês e pelas horas de descontração.

Ao Telles, Ana Wyse e Rubem pelas horas de estudo.

À Camila, Cláudia Mazza, Emerson, Fabíola, Guzman, Marcelo Nascimento, Simone e Rita pela hora do cafezinho.

Aos meus colegas Cláudia Adams, Erasmo, Geresa, Jaqueline, Marcelo Barros, Patrícia Sanz, Paula, Rosaluz e alguns outros colegas cuja companhia pude desfrutar em alguns momentos.

Durante a vida, algumas pessoas se tornam mais próximas, mais presentes e compartilham de mais momentos (bons e maus). É o caso de minha amiga Patrícia Drach a quem muito devo pelo carinho e companheirismo durante todo esse período.

Preciso agradecer a uma considerável quantidade de funcionários que, no decorrer dos anos, muito me ajudaram na conclusão deste trabalho, principalmente as meninas da secretaria de pós graduação, Ana Paula, Ângela, Maria do Carmo e em especial Ana Néri pelo

carinho e competência na parte burocrática, ao Gazoni pelo companheirismo e apoio técnico e a Beth por tornar meu ambiente de trabalho mais agradável.

Ao IDSM e aos colegas do GEOMA, especialmente ao Sr. Newton e à Eliete.

Aos colegas da Universidade Católica de Petrópolis, especialmente ao Elson Ferreira e aos professores Angela Gelli, Celso Schmid, Eduardo Barroso, Luiz Fernando Abend e Sérgio Vieira Nunes.

Agradeço ao CNPq e ao GEOMA pelo suporte financeiro.

Há pessoas que passam pela nossa vida e só passam, mas há outras que ficam para todo o sempre. Vocês são essas pessoas, muito importantes, muito significativas.

A Deus por ter me dado saúde, amor, paz e perseverança para trilhar este caminho e chegar até aqui.

Resumo da Tese apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

**A Dinâmica Populacional do Pirarucu (*Arapaima gigas*) na
Reserva de Desenvolvimento Sustentável Mamirauá (RDSM),
Amazônia**

Eliane dos Santos de Souza Coutinho

Novembro, 2008

Orientador: Luiz Bevilacqua, D.Sc.

Co-orientador: Helder Lima de Queiroz, D.Sc.

O Pirarucu (*Arapaima gigas*) tem sido um dos mais importantes recursos econômicos entre todas as espécies de peixe da Amazônia Brasileira por mais de três séculos. A introdução de tecnologias modernas de exploração trouxe graves ameaças à preservação desta espécie. Estratégias de manejo adequadas devem ser urgentemente introduzidas, a fim de evitar extinção. O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo matemático para a dinâmica populacional do pirarucu considerando peculiaridades da espécie e as diferentes taxas de pesca de modo a fornecer subsídios para a sua conservação. A fim de diferenciar seus respectivos papéis na reprodução, a população está dividida em dois grupos: machos e fêmeas. Os parâmetros assumidos no presente trabalho são parcialmente derivados de dados de campo limitados, mas seguros da Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá na região Amazônica Brasileira. Alguns outros parâmetros são estimados a partir de considerações biológicas.

Abstract of thesis presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Sciences (D.Sc.)

**PIRARUCU (*ARAPAIMA GIGAS*) POPULATION DYNAMICS OF MAMIRAUÁ
SUSTAINABLE DEVELOPMENT RESERVE (MRSR), AMAZONIAN**

Eliane dos Santos de Souza Coutinho

November, 2008

Advisor: Luiz Bevilacqua, D.Sc.

Co-advisor: Helder Lima de Queiroz

Pirarucu (*Arapaima gigas*) has been one of the most important economic resources among all the fish species of the Brazilian Amazon for more than three centuries. The introduction of modern technologies of exploitation brought serious threats to the preservation of this species. Adequate management strategies have to be urgently introduced in order to prevent extinction. The aim of this work is to present a mathematical model for the pirarucu population dynamics considering the species peculiarities and the different fishing rates to supply subsidies for its conservation. In order to differentiate its respective role in breeding, the population is divided into two groups: female and male. The parameters introduced in this paper are derived from limited but reliable field data collected at the Mamirauá Sustainable Development Reserve (MSDR) in the Brazilian Amazonian Region. Complementary parameters are estimated from biological considerations and commonsense.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O Pirarucu (<i>Araipama gigas</i>) da Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá	2
1.1.1	Projeto e Plano de Manejo na Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá	3
1.1.2	O Uso Sustentado do Pirarucu	6
1.1.3	Normas Específicas de Manejo de Pirarucus	7
1.2	Objetivo do Trabalho	7
1.3	Estrutura do Trabalho	8
2	Características Gerais do Pirarucu (<i>Araipama gigas</i>) da Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá	10
2.1	Aspectos da Biologia Reprodutiva de Pirarucus como Subsídios para a Modelagem de seu Recrutamento e da sua Dinâmica Populacional	11
2.1.1	Seleção Sexual, Formação de Casais, Construção do Ninho, Cuidado Parental e Sucesso Parental	15
2.2	Ciclo de vida do Pirarucu	20
2.3	Lagos e Conservação de Pirarucus	21

2.3.1	Lago Curuçá	23
2.3.2	Lago Serapião	24
3	Modelos Matemáticos de Dinâmica Populacional	27
3.1	Modelos Matemáticos de Populações de uma Espécie	28
3.1.1	Modelo de Malthus	28
3.1.2	Modelo de Verhulst	30
3.1.3	Exploração de Recursos Renováveis	32
3.1.3.1	Captura Independente da Densidade no Modelo Logístico	33
3.1.3.2	Captura Dependente da Densidade no Modelo Logístico	35
4	Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus (<i>Arapaima gigas</i>)	38
4.1	Modelo de Referência – Modelo Padrão	42
4.2	Estimação de Parâmetros	50
4.2.1.	Estimação de Parâmetros para a capacidade suporte $k = 40$	54
4.2.2.	Estimação de Parâmetros para a capacidade suporte $k = 100$	56
4.3	Simulações Numéricas para diferentes valores da Capacidade Suporte com Total Cuidado Parental	58
4.4	Considerações Finais	77
5	Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus (<i>Arapaima gigas</i>) com Influência de Cuidado Parental	79
5.1	Simulações Numéricas	83
5.2	Considerações Finais	104

6	Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus com a Influência da Pesca	106
6.1	Modelo – F: Captura Dependente da Densidade no Modelo Referência	106
6.2	Estimação de Parâmetros	111
6.3	Simulações Numéricas	113
6.4	Considerações Finais	146
7	Conclusões Gerais	148
	Referências Bibliográficas	152
	Apêndices	
A	Simulações Numéricas do Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus (<i>Arapaima gigas</i>) no Espaço de Fase $g_1 \times g_2 \times P$	158
B	Simulações Numéricas do Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus (<i>Arapaima gigas</i>) com Influência do Cuidado Parental no Espaço de Fase $g_1 \times g_2 \times P$	167
C	Simulações Numéricas do Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus (<i>Arapaima gigas</i>) com Influência do Cuidado Parental no Espaço de Fase $g_1 \times g_2 \times P$	176

Lista de Figuras

Figura

1.1	Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá. (Foto: Eliane Coutinho)	3
1.2	Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá. (Foto: Eliane Coutinho)	4
1.3	Mapa localizando a Área Subsidiária e a Área Focal da RDSM. (Fonte: Queiroz,1999)	5
2.1	Pirarucu capturado na Reserva de Mamirauá, no Programa de Pesca Sustentável do Instituto Mamirauá (Foto: Ellen Amaral)	10
2.2	Pirarucu cuidando de sua prole num cardume com aproximadamente 1800 indivíduos (Fonte: Proyecto CORPO AMAZONIA PRONATTA).	12
2.3	Frequência Relativa da reprodução de fêmeas durante seis anos consecutivos na Reserva Mamirauá.(Fonte: Queiroz,2000)	14
3.1	Decrescimento Exponencial $N x t$ para o Modelo de Malthus para $r < 0$ para três condições iniciais	29

3.2	Crescimento Exponencial $N \times t$ para o Modelo de Malthus para $r=0$ para três condições iniciais	30
3.3	Crescimento Exponencial $N \times t$ para o Modelo de Malthus para $r>0$ para três condições iniciais	30
3.4	Representação Esquemática das raízes da equação 3.3	31
3.5	Soluções do Modelo Verhulst para cinco condições iniciais	32
3.6	Gráfico da Curva de Captura Independente da Densidade	33
3.7	Modelo Logístico com Captura Independente da Densidade para cinco condições iniciais e $C > kr/4$	34
3.8	Modelo Logístico com Captura Independente da Densidade para cinco condições iniciais e $C < kr/4$	35
3.9	Gráfico da Curva de Captura Dependente da Densidade	36
3.10	Modelo Logístico com Captura Dependente da Densidade para cinco condições iniciais com $C > r$	36
3.11	Modelo Logístico com Captura Dependente da Densidade para seis condições iniciais para $C < r$	37
4.1	Ciclo de vida do pirarucu dividido em quatro estágios	39
4.2	Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 40$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 965$	60
4.3	Evolução da população de adultos no tempo com cinco condições iniciais para $\alpha = 0$; $k = 40$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 965$	61

4.4	Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\alpha = 0$; $k = 40, m_3 = 0,10, c_2 = 0,00014, a = 965$	61
4.5	Espaço de Fase $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 38600, g_2(0) = 28500, P(0) = 20$ e $Q(0) = 20$ para $\alpha = 0$; $k = 40, m_3 = 0,10, c_2 = 0,0014, a = 965$	63
4.6	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0) = 38600, g_2(0) = 28500, P(0) = 20$ e $Q(0) = 20$ para $\alpha = 0, k = 40, m_3 = 0,10, c_2 = 0,00014, a = 965$	63
4.7	Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais com $\alpha = 0, k = 40, m_3 = 0,20, c_2 = 0,00027, a = 1002$	66
4.8	Evolução da população de adultos no tempo com cinco condições iniciais para $\alpha = 0, k = 40, m_3 = 0,20, c_2 = 0,00027, a = 1002$	66
4.9	Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\alpha = 0, k = 40, m_3 = 0,20, c_2 = 0,00027, a = 1002$	67
4.10	Espaço de Fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 24000, g_2(0) = 17700, P(0) = 12, Q(0) = 12$ para $\alpha = 0, k = 40, m_3 = 0,20, c_2 = 0,00027, a = 1002$	68
4.11	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0) = 24000, g_2(0) = 17700, P(0) = 12, Q(0) = 12$ para $\alpha = 0, k = 40, m_3 = 0,20, c_2 = 0,00027, a = 1002$	68

4.12	Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais com $\alpha = 0$, $k = 100$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 386$	71
4.13	Evolução da população de adultos no tempo com cinco condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 100$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 386$	71
4.14	Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 100$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 386$	72
4.15	Espaço de Fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 88000$, $g_2(0) = 65000$, $P(0) = 46$, $Q(0) = 46$ para $\alpha = 0$, $k = 100$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 386$	73
4.16	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0) = 88000$, $g_2(0) = 65000$, $P(0) = 46$, $Q(0) = 46$ para $\alpha = 0$, $k = 100$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 386$	73
4.17	Bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para os parâmetros definidos no caso III	75
4.18	Zoom mostrando as bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para os parâmetros definidos no caso III	76
5.1	Raízes da equação (5.2) correspondendo aos pontos de equilíbrios $P_{2,i}^* = Q_{2,i}^*$ e $P_{3,i}^* = Q_{3,i}^*$ com a influência do cuidado parental medido por α_i	81
5.2	Representação esquemática das raízes da equação 5.5. O desempenho do macho representado por α_i aumenta com valores crescentes de i	84

5.3	Projeção no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\alpha = 30$ e $k = 100$	86
5.4	Evolução da população de adultos no tempo com cinco condições iniciais para $\alpha = 30$ e $k = 100$	86
5.5	Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\alpha = 30$ e $k = 100$	87
5.6	Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 170000$, $g_2(0) = 57000$, $P(0) = 40$ e $Q(0) = 40$ para $\alpha = 30$ e $k = 100$	88
5.7	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0) = 170000$, $g_2(0) = 57000$, $P(0) = 40$, $Q(0) = 40$ para $\alpha = 30$ e $k = 100$	88
5.8	Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\alpha = 100$ e $k = 100$	90
5.9	Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\alpha = 100$ e $k = 100$	91
5.10	Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\alpha = 100$ e $k = 100$	91
5.11	Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 167000$, $g_2(0) = 45800$, $P(0) = 32$ e $Q(0) = 32$ com $\alpha = 100$ e $k = 100$	92

5.12	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0)=167000$, $g_2(0)=45800$, $P(0)=32$ e $Q(0)=32$ com $\alpha=100$ e $k=100$	93
5.13	Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\alpha=221$ e $k=100$.	95
5.14	Zoom da seção do plano de fase $P \times g_2$ mostrando os pontos de equilíbrios P_2 e P_3 para $\alpha=221$ e $k=100$	95
5.15	Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\alpha=221$ e $k=100$	96
5.16	Evolução da população de larvas no tempo para quatro condições iniciais para $\alpha=221$ e $k=100$	96
5.17	Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0)=120000$, $g_2(0)=35000$, $P(0)=25$, $Q(0)=25$ para $\alpha=221$ e $k=100$	97
5.18	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0)=120000$, $g_2(0)=35000$, $P(0)=25$, $Q(0)=25$ para $\alpha=221$ e $k=100$	98
5.19	Limiar de Extinção em função do parâmetro α da tabela 5.3.....	100
5.20	Variação do número de ovos em função de α	102
5.21	Bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para $\alpha=221$ e $k=100$	103

5.22	Zoom mostrando as bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para $\alpha = 221$ e $k = 100$	104
6.1	Representação esquemática das raízes da equação 6.3	108
6.2	Representação Esquemática das raízes da equação 6.8 para $0 < f_3 \leq 0,1777$	111
6.3	Variação de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}f_3$ com f_3	112
6.4	Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	116
6.5	Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	116
6.6	Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	117
6.7	Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0)=130200$, $g_2(0)=96300$, $P(0)=30$, $Q(0)=30$ para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	118
6.8	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial $g_1(0)=130200$, $g_2(0)=96300$, $P(0)=30$, $Q(0)=30$ para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	118
6.9	Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais com $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	121

6.10	Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\hat{\alpha}=0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	121
6.11	Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha}=0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	122
6.12	Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0)=151100$, $g_2(0)=112100$, $P(0)=40, Q(0)=40$ para $\hat{\alpha}=0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	123
6.13	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial $g_1(0)=151100$, $g_2(0)=112100$, $P(0)=40$, $Q(0)=40$ para $\hat{\alpha}=0$ e $f_3 = f_4 = 0,15$	123
6.14	Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\hat{\alpha}=0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$	125
6.15	Evolução da população de adultos no tempo com cinco condições iniciais para $\hat{\alpha}=0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$	126
6.16	Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha}=0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$	126
6.17	Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0)=164000$, $g_2(0)=121000$, $P(0)=30, Q(0)=30$ para $\hat{\alpha}=0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$	127

6.18	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0)=164000$, $g_2(0)=121000$, $P(0)=30$, $Q(0)=30$ para $\hat{\alpha}=0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$	128
6.19	Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\hat{\alpha}=3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	131
6.20	Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\hat{\alpha}=3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	131
6.21	Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha}=3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	132
6.22	Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0)=151000$, $g_2(0)=91200$, $P(0)=42$, $Q(0)=42$ para $\hat{\alpha}=3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	133
6.23	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0)=151000$, $g_2(0)=91200$, $P(0)=42$, $Q(0)=42$ para $\hat{\alpha}=3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	133
6.24	Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\hat{\alpha}=7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	136
6.25	Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\hat{\alpha}=7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	136

6.26	Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	137
6.27	Espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0)=168400$, $g_2(0)=101500$, $P(0)=35$, $Q(0)=35$ para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	138
6.28	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0)=168400$, $g_2(0)=101500$, $P(0)=35$, $Q(0)=35$ para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	138
6.29	Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$	141
6.30	Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$	141
6.31	Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$	142
6.32	Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0)=135900$, $g_2(0)=91997$, $P(0)=25$, $Q(0)=25$ para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$	143
6.33	Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0)=135900$, $g_2(0)=91997$, $P(0)=25$, $Q(0)=25$ para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$	143

6.34	Bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para os parâmetros definidos no caso II	145
6.35	Zoom mostrando as bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para os parâmetros definidos no caso II	146

Apêndices

A.1	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha=0$, $k=40$, $m_3=0,10$, $c_2=0,00014$, $a=965$	160
A.2	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha=0$, $k=40$, $m_3=0,10$, $c_2=0,00014$, $a=965$	160
A.3	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha=0$, $k=40$, $m_3=0,20$, $c_2=0,00027$, $a=1002$	162
A.4	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha=0$, $k=40$, $m_3=0,20$, $c_2=0,00027$, $a=1002$	163
A.5	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha=0$, $k=100$, $m_3=0,10$, $c_2=0,00014$, $a=386$	165

A.6	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 100$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 386$	165
B.1	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 30$ e $k = 100$	169
B.2	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 30$ e $k = 100$	169
B.3	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 100$ e $k = 100$	171
B.4	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 100$ e $k = 100$	172
B.5	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 221$ e $k = 100$	174
B.6	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 221$ e $k = 100$	174

C.1	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	178
C.2	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	178
C.3	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	180
C.4	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	181
C.5	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$	183
C.6	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$	183
C.7	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	185

C.8	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$	186
C.9	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	188
C.10	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$	188
C.11	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$	190
C.12	Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$	191

Lista de Tabelas

Tabela

2.1	Estimação do recrutamento de ovos fertilizados de adultos de 5 a 10 anos em Mamirauá no período de 1993 a 1998	19
2.2	Densidade e Estrutura Etária no Lago Curuçá de 1992 a 1995	24
2.3	Densidade e Estrutura Etária no Lago Serapião de 1994 a 1995	25
4.1	Varição de c_2 e m_3 para $\sigma = 10$	53
4.2	Parâmetros para o Modelo de Referência com $k = 40$, $m_3=0,10$ e $c_2=0,00014$. .	55
4.3	Parâmetros para o Modelo de Referência com $k = 40$, $m_3=0,20$ e $c_2=0,00027$. .	56
4.4	Parâmetros para o Modelo de Referência com $k = 100$, $m_3=0,10$ e $c_2=0,00014$. .	57
4.5	Valores k, m_3, c_2 e a	58
4.6	Características das populações não extintas para os casos de I a III	74
5.1	Valores de α	83
5.2	Características das Populações para o caso III do capítulo 4 e para os casos de I a III do capítulo 5	99
5.3	Varição dos níveis das populações de equilíbrio P_2 e P_3 com o parâmetro α	101
6.1	Parâmetros para o Modelo- F	110

6.2	Valores de $\hat{\alpha}, f_3$ e f_4	114
6.3	Características das Populações não extintas para os casos de I a III.....	129
6.4	Características das Populações não extintas para os casos de IV a VI.....	144

Capítulo 1

Introdução

A Amazônia, região de maior biodiversidade do planeta é um dos maiores desafios científicos brasileiros no planejamento de um sistema de gestão territorial. Nesse planejamento deve-se levar em conta tanto a conservação de seus recursos naturais como a promoção do desenvolvimento social e econômico dos quase vinte milhões de habitantes que vivem nessa região (Vieira et al, 2005).

Um dos instrumentos mais eficientes na conservação da biodiversidade na Amazônia são as unidades de conservação, em especial as de uso sustentável (Kitamura, 2001). Dentre os modelos de conservação destacam-se os de criação e manejo de reservas de desenvolvimento sustentável (Queiroz, 2005).

A conciliação da conservação da natureza com o uso de parte de seus recursos naturais é o objetivo básico das unidades de uso sustentável (Brasil, 2000). Essa categoria de manejo foi proposta inicialmente pela Sociedade Civil Mamirauá em 1995 ao governo do Estado do Amazonas (Ribeiro, 1994) e criada pela Assembléia Legislativa do mesmo estado em 1996 (Amazonas, 1996).

Em 1986, atendendo à proposta do biólogo José Márcio Ayres e do fotógrafo Luis Cláudio Marigo à Secretária Especial de Meio Ambiente (SEMA) foi criada a Estação Ecológica Mamirauá (EEM), que em 9 de março de 1990, por meio do decreto nº. 12836 foi

transferida para a administração do governo do estado do Amazonas. Mais tarde a EEM foi re-categorizada no nível estadual, passando em 1996 à categoria de Reserva de Desenvolvimento Sustentável Mamirauá (RDSM) (Queiroz, 2005).

A pesca, a exploração de madeiras e a agricultura são as principais atividades econômicas da RDSM (Viana et al, 2004).

O Pirarucu (*Arapaima gigas*) é considerado um recurso pesqueiro de grande importância na região amazônica. A espécie é comercializada na forma de mantas secas e salgadas e, mais recentemente, também sob a forma de mantas resfriadas (Queiroz e Crampton, 1999). Dentre os peixes de escama de água doce do mundo, nenhum cresce tanto quanto o pirarucu, que pode alcançar cerca de 3,0 metros de comprimento e pesar aproximadamente 200 quilos. Diferente da maioria dos peixes, o pirarucu tem um duplo sistema respiratório e precisa subir até a superfície da água a cada 5-15 minutos para respirar tornando-se assim mais vulnerável a pesca (Queiroz e Crampton, 1999).

Na região amazônica a espécie representa não apenas um grande predador das várzeas que contribui para o equilíbrio da biota aquática, como também é de grande importância na economia local, já que ainda representa cerca de 25% da renda domiciliar média gerada anualmente em populações ribeirinhas da região (SCM, 1996). Por essa razão a preservação do pirarucu torna-se essencial também em seus aspectos sociais, porque o colapso da espécie significa também um colapso econômico em uma parte do país que já enfrenta inúmeros problemas sociais (Queiroz, 2001).

1.1 O Pirarucu (*Arapaima gigas*) da Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá

A Reserva de Desenvolvimento Sustentável Mamirauá (RDSM, figura 1.1) compreendendo uma área total de 1.124.000 ha, foi a primeira unidade de conservação que

preservou a biodiversidade local com intensa participação da população tradicional local, usando seus conhecimentos para manejar os recursos naturais de maneira sustentável. (SCM,1996)



Figura 1.1: Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá. (Foto: Eliane Coutinho)

1.1.1 Projeto e Plano de Manejo na Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá

Com o propósito de elaborar o primeiro Plano de Manejo da, então, Estação Ecológica Mamirauá, surgiu em 1991 o Projeto Mamirauá. O Plano de Manejo do Projeto Mamirauá visou a proteção dos recursos naturais e o envolvimento da população ribeirinha local (SCM,1996).

A atual Reserva de Desenvolvimento Sustentável Mamirauá, RDSM (figura 1.2) está localizada na região do médio Solimões, na confluência dos rios Solimões e Japurá, e pelo

Uati-Paraná, entre as bacias dos rios Solimões e Negro, próxima à cidade de Tefé, Estado do Amazonas (Viana et al, 2004).



Figura 1.2: Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá. (Foto: Eliane Coutinho)

Para a execução do Projeto Mamirauá, esta grande área foi subdividida em duas partes, permitindo uma maior otimização da logística e infra-estrutura entre os anos de 1996 e 2006. Uma Área Focal, com cerca de um sexto da área total (260.000 ha), e uma Área Subsidiária complementar (figura 1.3). A Área Focal está separada da Área Subsidiária complementar por um braço do Solimões que deságua no Japurá, o Paraná do Aranapu. As principais atividades do Projeto Mamirauá até 2005 foram desenvolvidas somente na Área Focal da RDSM. (SCM,1996).

Esta enorme floresta tropical é toda formada por várzeas, ou seja, florestas alagadas por pelo menos oito meses ao ano. Este alagamento cobre toda a área, transformando tudo num grande corpo d'água. A planície alagável onde se insere a RDSM é percorrida por uma

infinidade de canais e de pequenos lagos. Durante a cheia esses lagos são conectados a outros lagos, a canais, ou aos próprios rios por outros canais. Estas conexões podem se unir num único corpo d'água contínuo, e os lagos nestes momentos possuem uma natureza mais associadas à dos rios. (Queiroz Crampton, 1999).

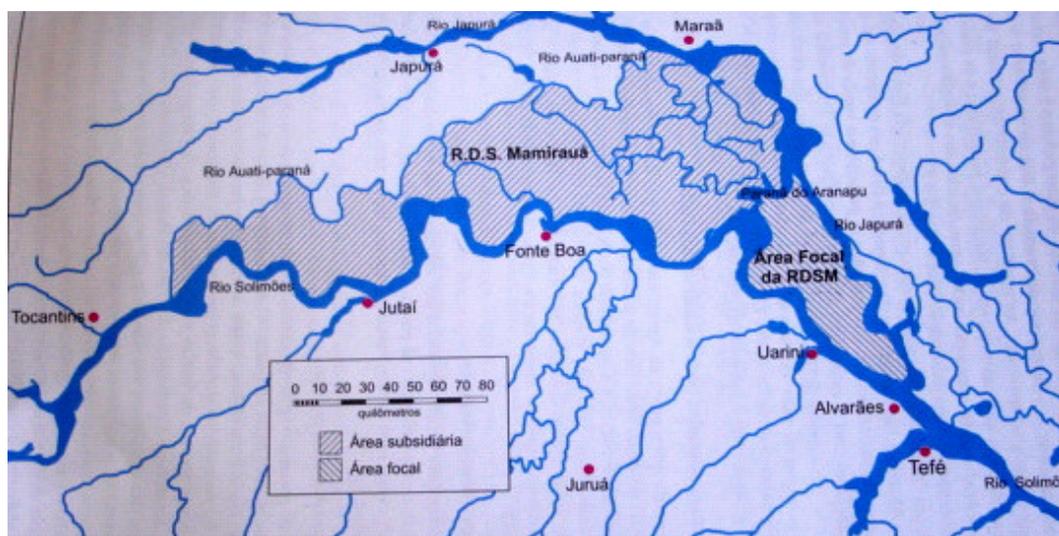


Figura 1.3: Mapa localizando a Área subsidiária e Área Focal da RDSM. (Fonte: Queiroz,1999)

O sistema de zoneamento original da RDSM dividia os lagos da região em três categorias principais: Lagos de Subsistência, de Comercialização e de Preservação. Os Lagos de Subsistência são aqueles onde são realizadas atividades para a pesca de subsistência dos membros daquela comunidade. Os Lagos de Comercialização são aqueles em que a atividade pesqueira comercial é realizada pelos moradores locais. Lagos de Preservação são definidos como aqueles onde a fauna de peixes deve ser preservada ou guardada para uso num momento indefinido do futuro, ou para fazer face à despesas em momentos difíceis da vida da comunidade naqueles casos em que outros lagos de uso rotineiro se mostrem insuficientes. (Queiroz e Crampton, 1999). Como este sistema não possuía muito embasamento na biologia dos recursos pesqueiros, foram propostas, em 1995, três categorias principais de zonas de

manejo: Zona de Assentamento Permanente, Zona de Usos Sustentados e Zonas de Preservação Total. Este sistema de zoneamento aplica-se à Área Focal (SCM, 1996).

A Zona de Proteção Total é a zona na qual a biodiversidade local e os recursos genéticos são mantidos intactos, não se permitindo quaisquer alterações humanas, inclusive visitas.

A Zona de Uso Sustentável é aquela na qual os recursos estão disponíveis aos usuários da RDSM desde que o seu uso seja regulado pelas normas do plano de manejo.

As comunidades estão localizadas nas Zonas de Assentamento. Nestas zonas são permitidas modificações do meio que se fazem necessárias para a manutenção da população local, como por exemplo, a agricultura (SCM, 1996).

1.1.2 O Uso Sustentado do Pirarucu

Uma das alternativas econômicas da RDSM é o manejo de pesca de pirarucus. As características biológicas dos pirarucus da Reserva, especialmente em relação a aspectos da dinâmica populacional como o recrutamento (por natalidade ou migração) e a mortalidade (natural ou induzida pelo uso) foram fundamentais para gerar recomendações de manejo destes peixes. Para tal, um conjunto de pesquisas foram desenvolvidas, descrevendo os principais aspectos da biologia da espécie (Queiroz, 1995, 1999 e 2000).

A exploração comercial do pirarucu é feita de maneira sustentável por meio de associações de pescadores. Os pescadores experientes envolvidos no processo de manejo, são capazes de estimar a abundância de pirarucus, pelas contagens que são feitas no momento da respiração aérea do peixe e, com apoio do Instituto Mamirauá e órgãos governamentais utilizam esta informação para determinar as cotas de pesca (Castello, 2004). Cada membro da associação de pescadores tem direito a uma fração da cota anual obtida junto ao IBAMA. Esta fração é determinada pela associação em função do desempenho do associado na participação

nos cursos, nos encontros promovidos, no sistema voluntário de vigilância e na sua obediência e adequação às normas do plano de manejo em geral (Queiroz, 2005).

1.1.3 Normas Específicas de Manejo de Pirarucus

- 1 - Proibir o abate de animais com comprimento total inferior a 150 cm.
- 2 - Proibir qualquer abate entre 01 de dezembro e 31 de maio todos os anos.
- 3 - Proibir a comercialização de mantas secas salgadas com comprimento total inferior a 115 cm e de mantas frescas ou salmoradas de comprimento total inferior a 125 cm.
- 4 - Proibir o uso de malhadeiras na pesca de pirarucus na RDSM.

1.2 Objetivo do Trabalho

A pesca manejada do pirarucu foi iniciada oficialmente em 1998 na Reserva Mamirauá. (Arantes et al, 2007), e começa a ser replicada com bastante sucesso na Reserva Amanã. Outras Reservas de Desenvolvimento Sustentável começam a aplicar boas práticas testadas e desenvolvidas pelo Instituto de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá em Mamirauá ou em Amanã (Queiroz,2005).

A modelagem matemática dos mais diversos modelos ecológicos é uma ferramenta essencial para o gerenciamento ambiental (Sá, 2003) e sistemas de equações diferenciais ordinárias são muito utilizadas na solução destes modelos ecológicos (Jorgensen,1994).

O objetivo deste trabalho é modelar matematicamente a Dinâmica Populacional de Pirarucus (*Arapaima gigas*) com e sem captura na Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá, Amazônia Brasileira. Matematicamente, este problema é modelado por um

sistema de equações diferenciais ordinárias que, ao contrário dos demais disponíveis no momento, dá uma atenção maior e mais aprofundada para a diferente contribuição de machos e fêmeas adultos no processo de recrutamento biológico da população. Por exemplo, uma característica importante do modelo é a inclusão de um termo que estuda o cuidado parental dos machos com sua prole. Este tratamento diferenciado para os adultos é devido às complexidades do processo de reprodução da espécie, conforme descrito no capítulo 2.

Os cenários apresentados buscam entender a ecologia da espécie na Reserva Mamirauá que podem auxiliar na preservação da biodiversidade da Amazônia, buscando meios para evitar a exploração excessiva do pirarucu e seu conseqüente risco à cadeia alimentar. Espera-se assim fornecer subsídios para o manejo da espécie com o uso sustentável dos recursos naturais na Reserva Mamirauá.

1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho foi organizado em sete capítulos que apresentam as características e os resultados dos estudos realizados na construção de modelos para a Dinâmica Populacional de Pirarucus (*Arapaima gigas*) na Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá.

Neste primeiro capítulo que se inicia com uma explanação geral da Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá como Unidade de Conservação, são apresentados uma introdução geral sobre o trabalho, relacionando os principais aspectos a serem abordados e seus objetivos.

No próximo capítulo são apresentadas as principais características do Pirarucu (*Arapaima gigas*). Nele, descrevem-se os principais aspectos da espécie na Reserva Mamirauá, que servirão de subsídios para a construção do Modelo Referência, que será apresentado no capítulo quatro.

No capítulo três é apresentado um breve histórico com alguns modelos clássicos da dinâmica populacional de uma espécie, em cenários com e sem captura de seus indivíduos.

No capítulo quatro descreve-se um modelo de referência, que será utilizado ao longo desta tese, para o estudo da Dinâmica Populacional do Pirarucu (*Arapaima gigas*) da Reserva Mamirauá. O Modelo é composto por um sistema de equações diferenciais considerando o ciclo de vida total da espécie. Este modelo só considera a mortalidade natural. São apresentadas as estimações dos parâmetros populacionais de acordo com as condições biológicas e observações de campo da espécie na Reserva Mamirauá. Em seguida são feitas simulações numéricas e são apresentados os valores atribuídos aos parâmetros utilizados que visaram verificar o comportamento qualitativo das variáveis, bem como permitir uma avaliação sobre a influência de alguns parâmetros no modelo.

O efeito da deficiência de cuidado parental exercida pelos machos com sua prole é analisado no capítulo cinco. Simulam-se alguns casos para estudo da dinâmica populacional decorrente desta variação na eficiência.

O capítulo seis inicia com a apresentação do modelo-F. Este modelo considera a evolução da população com a mortalidade adicional decorrente da pesca. Em seguida são feitas simulações numéricas para a projeção de cenários relacionados à estratégia de manejo no abate de adultos a fim de se obter informações quanto ao impacto sobre o recrutamento.

Finalmente, no capítulo sete são as conclusões gerais deste trabalho e perspectivas para futuras extensões do trabalho desenvolvido.

Capítulo 2

Características Gerais do Pirarucu (*Arapaima gigas*) da Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá

A palavra pirarucu, de origem indígena, é formada pela junção de “pira”, peixe, e “urucu”, vermelha, pois, o que mais chama a atenção ao observarmos um destes gigantes peixes é a coloração dominante vermelha da orla posterior das escamas de determinadas regiões do corpo (figura 2.1).



Figura 2.1: Pirarucu capturado na Reserva de Mamirauá, no Programa de Pesca Sustentável do Instituto Mamirauá. (Foto Ellen Amaral)

A intensidade da coloração varia de acordo com o sexo e a aproximação do período de desova (Flores,1980).

O pirarucu apresenta dois aparelhos respiratórios, as brânquias para a respiração aquática e a bexiga natatória que se comunica com o tubo digestivo e funciona como pulmão (Imbiriba,1994). O pirarucu é uma espécie endêmica, exclusiva da Amazônia. Estes animais são carnívoros, de topo da cadeia alimentar aquática, sua alimentação é baseada principalmente em outros peixes, crustáceos, insetos e moluscos (Queiroz, 2000).

2.1 Aspectos da Biologia Reprodutiva de Pirarucus como Subsídios para a Modelagem de seu Recrutamento e da sua Dinâmica Populacional

A reprodução do *Araipama gigas* é um ponto importante tanto para estabelecer estratégias de conservação da espécie quanto para definir as formas de manejar sustentavelmente a pesca destes animais.

Lagos e outros corpos d'água das florestas inundadas são os lugares ideais para o crescimento e reprodução dos pirarucus devido principalmente a abundância de alimentos naturais. Fontenele (1948) estudou reprodução de pirarucu em cativeiro, e Queiroz (2000) estudou a reprodução da espécie em condições de vida livre, em campo. A classificação da sua desova é parcial, forma na qual os gametas femininos maduros, disponíveis para a reprodução, são liberados parcialmente, em parcelas ou pequenas quantidades.

A reprodução do pirarucu está intimamente relacionada com a intensa dinâmica do nível das águas dos rios da Amazônia (Lowe-McConnell, 1987). Embora pareça existir sempre uma pequena parcela das populações reproduzindo-se por todo o ano, o pico de reprodução está associado ao início do período de enchente, que varia de acordo com o local específico da região amazônica sob análise (Queiroz e Sardinha, 1999). No Peru, os picos de

reprodução vão de agosto a dezembro (Flores, 1980) e na Amazônia Central Brasileira de novembro a janeiro (Queiroz e Sardinha,1999). Na Reserva de Mamirauá o período de intensa atividade reprodutiva ocorre de setembro a fevereiro (Queiroz, 2000).

O comportamento reprodutivo de *Arapaima gigas* é complexo, envolvendo a seleção sexual, a formação de casais monogâmicos, construção de ninhos e cuidado parental com o ninho e a prole (Queiroz e Sardinha,1999).

O cuidado parental com o ninho e a prole realizado pelos machos foi observado tanto em cativeiro (Fontenele, 1948 e 1953) quanto em condições naturais em campo (Queiroz, 2000). Na figura 2.2, observamos um pirarucu protegendo suas larvas em ambiente artificial.



Figura 2.2 : Pirarucu cuidando de sua prole num cardume com aproximadamente 1800 indivíduos.

Fonte: Proyecto CORPOAMAZONIA PRONATTA”

Através de estudos de uma amostra de 240 fêmeas variando de 115 a 225 cm de comprimento total, pescadas em seis aldeias da Reserva Mamirauá no período de 1993 a

1997, Queiroz (2000) obteve o tamanho da primeira maturação sexual para a espécie. Este tamanho é aquele a partir do qual mais de 50% da população de fêmeas encontra-se sexualmente madura. Os resultados obtidos neste estudo indicaram que este tamanho encontra-se entre 167 cm a 168,1 cm em comprimento total. Queiroz e Sardinha (1999) encontraram 163,0 cm para uma amostra de somente 170 fêmeas. Flores (1980), usando uma amostra grande com 697 fêmeas, obteve na Amazônia do Peru, como resultado de seu estudo 185 cm, medindo comprimentos dorsais (ao longo da curvatura natural do corpo) em vez de comprimentos totais (que são tomados em linha reta da extremidade da cauda até a extremidade do focinho dos animais). Segundo Flores (1980) este tipo de medida de comprimento pode ser responsável pela adição de cerca de 20 cm no comprimento total, o que poderia reduzir a estimativa dele de 185 a 165 cm, o que seria mais consistente com os resultados encontrados por Queiroz (2000).

Da análise de dados de crescimento feita por Queiroz (2000), as fêmeas de pirarucu da Reserva Mamirauá tiveram o tamanho da primeira maturação sexual em torno dos cinco anos de idade, como sugerido por Flores (1980) para uma população peruana de pirarucu.

Embora nenhuma amostra tenha sido estudada para definir a maturação sexual de machos de pirarucu acredita-se que eles apresentem um padrão de maturação sexual similar ao das fêmeas. Como ambos os sexos de pirarucu quando atingem cinco anos de vida apresentam uma queda brusca das taxas anuais de crescimento instantâneo, sugere-se que este realmente seja o momento do começo da vida reprodutiva para ambos os membros desta espécie (Queiroz, 2000).

As fêmeas de pirarucu são iteróparas (fêmeas que desovam mais de uma vez durante as suas vidas). Porém ainda não está claro para esta espécie se as fêmeas de pirarucu desovam a cada ano após atingirem a idade de maturação sexual, e nem qual é a duração de sua vida reprodutiva (Queiroz, 2000).

- ♦ Segundo Lüling (1964) as fêmeas dessa espécie não desovam todos os anos.
- ♦ Para Cebrelli (1972) a reprodução se inicia após os quatro anos de vida do animal, e as fêmeas desovam somente uma vez a cada dois anos.
- ♦ Para Flores (1980) a primeira maturidade sexual ocorre com cinco anos de idade quando a fêmea tem cerca de 185cm.
- ♦ Para Imbiriba (1994) o pirarucu em cativeiro reproduz a partir do quinto ano de vida e podem ocorrer até três desovas por ano, obtendo-se de cada uma cerca de 2000 alevinos.

Nem todas as fêmeas adultas (fêmeas maiores que 160 cm de comprimento total) amostradas em Mamirauá apresentaram um ovário maduro desenvolvido durante os anos de estudo. Da amostra total de fêmeas adultas para cada ano de 1993 a 1998, foi calculada a frequência relativa das fêmeas com gônadas maduras. Estes dados estão representados na figura 2.3

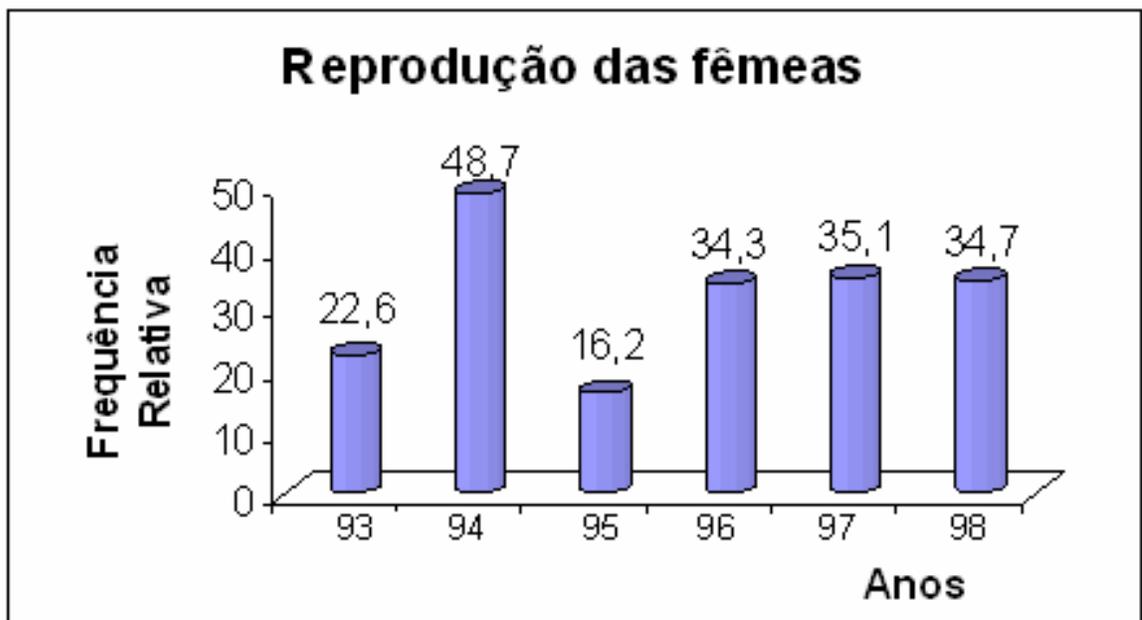


Figura 2.3: Frequência Relativa da reprodução de fêmeas durante seis anos consecutivos na Reserva Mamirauá. (Fonte: Queiroz, 2000)

Observa-se na figura 2.3, que uma média anual de 31.9% de fêmeas maduras com desvio padrão de 11.3, efetivamente tiveram gônadas maduras durante o período de estudo. Esta é uma forte evidência em defesa da idéia prévia que fêmeas maduras não geram sucessivamente todos os anos, mas uma vez em cada dois anos (Lüling, 1964 e Cebrelli, 1972), ou até mesmo uma vez em três anos.

2.1.1 Seleção Sexual, Formação de Casais, Construção do Ninho, Cuidado Parental e Sucesso Parental

O desenvolvimento ovacitário dos *Arapaima gigas* é do tipo assíncrono encontrando-se oócitos em diferentes estágios de desenvolvimento dispersos por toda a gônada, ocorrendo desovas múltiplas do tipo parcial. Este tipo de gônada lhe confere a possibilidade de reprodução várias vezes ao ano (Pronatta, 2004).

Fêmeas de pirarucus podem desovar repetidamente em uma estação reprodutiva. A totalidade de oócitos maduros disponíveis não estão expostos ao mesmo tempo, mas em poucos grupos, o que caracteriza as desovas do tipo parceladas (Queiroz, 2000).

As fêmeas maduras, independente de sua idade, sempre têm aproximadamente vinte mil óvulos para liberar em condições favoráveis (tais como localização de ninhos apropriados, parceiros competentes e pouca perturbação). A fertilidade das fêmeas aumenta com a idade, as fêmeas mais velhas e maiores tem possibilidade de repetir desovas mais vezes que as fêmeas menores (Queiroz, 2000).

O sucesso parental é mais claramente definido e medido pelo número de representantes que um ser vivo consegue estabelecer na geração seguinte, sob a forma de descendência.

Há algumas fases, ou eventos encadeados no processo reprodutivo anual, que determinam o sucesso reprodutivo de pirarucus (Queiroz, 2000).

O primeiro destes momentos é o acasalamento. Fêmeas e machos devem estar no mesmo lago ao começo da estação reprodutiva, quando o nível da água é baixo. Existe um número muito pequeno de lagos muito grandes, e um número muito grande de lagos muito pequenos. Uma porção da população de pirarucus fica isolada temporariamente em um lago típico durante a seca, mas como este lago é de tamanho pequeno, serão poucos os membros desta porção da população que terão tamanho igual ou maior que o tamanho da primeira maturação sexual. Portanto, serão poucos os que estarão em estado reprodutivo. Os machos conquistam e defendem seu sítio de nidificação, e as fêmeas começam a selecionar o parceiro. Nem todos os machos adultos reproduzem, apenas aqueles que foram selecionados pelas fêmeas. Em ambientes com baixa densidade de machos, a seletividade é baixa e qualquer macho reprodutivo será selecionado. Em ambientes com alta densidade de machos, somente os maiores machos são selecionados pelas fêmeas. O papel mais importante dos machos na reprodução da espécie é a proteção das recentes larvas eclodidas. Provavelmente, eles não serão envolvidos em qualquer outro acasalamento naquela particular estação reprodutiva, porque o cuidado parental realizado com a primeira prole os manterá ocupados ao longo de toda a estação (Queiroz, 2000).

O próximo momento é o da fecundação externa que ocorre no ninho. A fêmea realiza a desova no centro do ninho e posteriormente os ovos são fecundados com o líquido seminal do macho ocorrendo a fertilização (Pronatta, 2004). Como regra geral todos os peixes que exigem cuidado parental têm baixa fecundidade (Almeida, 1995). A fertilidade, definida pelo número de oócitos maduros desovados, é decisiva nesta fase.

O terceiro momento se trata da eficiência de machos no cuidado parental. Os machos devem ser eficientes, ao lutar (com ou sem fêmeas) contra outros machos pelo local para construção do ninho, e na defesa do ninho e da descendência contra predadores potenciais. Os

pouco experientes geram poucos filhotes (cuidam mal) e os muito experientes geram muitos filhotes (cuidam bem) (Queiroz, 2000).

A reprodução dos pirarucus ocorre muito tardiamente, em termos proporcionais, quando o animal tem cerca de cinco anos de idade, já estão grandes. Portanto, quando o cuidado parental está presente, ele é realizado por machos de tamanho grande, o que torna praticamente impossível um predador se alimentar de um pirarucu jovem. Provavelmente, a predação não é uma ameaça direta a pirarucus jovens, mas as pescarias podem privar estes jovens da proteção que eles precisam pela captura de machos adultos que estão envolvidos no cuidado parental (Queiroz, 2000).

O quarto momento crítico para o sucesso parental é completamente estocástico e imprevisível e está aqui considerado com “condições ambientais”. Muitas catástrofes diferentes podem acometer a um único ninho. As mudanças do nível ou fluxo da água, podem expor os ninhos antes da eclosão dos filhotes ou levar os ovos fertilizados para longe do ninho. Níveis muito baixos de oxigênio dissolvido na água podem matar os embriões (Queiroz, 2000).

Não é esperada muita variação no sucesso reprodutivo anual entre machos maduros, num único ano ou estação reprodutiva. E este valor também deve ser mantido constante entre anos, até o fim de sua vida reprodutiva. Já o sucesso parental da fêmea varia muito. Se as condições ambientais forem boas e se o ninho for protegido eficazmente, ela liberará seus primeiros 20.000 oócitos ou parte deles. Mas se houver qualquer tipo de problema que conduza ao fracasso nas primeiras tentativas, a fêmea pode desovar com este mesmo macho, outro grupo de oócitos até que a fertilização e eclosão aconteçam. Se o macho for eficiente no cuidado com a ninhada, então provavelmente o casal terá sucesso reprodutivo alto. Mas a fêmea pode repetir todo esse processo, gerando com outro macho que esteja disponível no

lago, enquanto o primeiro parceiro está muito ocupado com o cuidado de sua própria ninhada. Se não houver nenhum macho maduro disponível na vizinhança do primeiro, a fêmea não poderá gerar novamente na estação, e o sucesso reprodutivo da estação dependerá do sucesso do primeiro acasalamento. As fêmeas são a parte mais forte do processo reprodutivo desta espécie, devido a possibilidade de poderem tentar o processo mais de uma vez. Acredita-se que as fêmeas não podem gerar todos os anos, por razões desconhecidas, em contraste com machos que estão prontos assim que termina o período de cuidados parentais. (Queiroz, 2000).

Do ponto de vista masculino, se ele for um bom cuidador, o sucesso reprodutivo significa algo aproximado a 438 descendentes todos os anos. Mas do ponto de vista feminino, em condições normais, este mesmo número de 438 descendentes ocorre para fêmeas maduras jovens. Quando a fêmea envelhece este valor pode ser até triplicado se elas acasalarem com diferentes machos em uma única estação de desova. Pode haver um equilíbrio no sucesso parental de machos e fêmeas ao longo de suas vidas reprodutivas, devido ao fato que cada fêmea provavelmente só amadurece uma vez em dois ou três anos. Este equilíbrio pode ser dependente na frequência anual de fêmeas reprodutivas e o sucesso parental de machos como vigias, bem como pode ser dependente do tamanho das sub-populações de pirarucus reunidas em lagos durante a estação das secas. Portanto, a conformação física do ambiente é também um fator que influencia o sucesso reprodutivo e o balanço deste sucesso entre os gêneros (Queiroz, 2000).

No período de 1993 a 1998, Queiroz (2000) baseado em uma análise anatômica de cicatrizes de desovas de ovários de fêmeas maduras, estimou uma média de 438 ovos fertilizados por cada casal de pirarucus.

Queiroz (2000) estimou o número de ovos fertilizados para uma população hipotética

de adultos reprodutores num lago típico da Reserva Mamirauá para o período de 1993 a 1998. Sendo essa uma estimativa de recrutamento natural anual (tabela 2.1). Como nenhuma amostra foi colhida em 1992, a proporção de adultos reproduzindo nesse ano foi estimada com base na média das proporções de 1993 a 1998, ou 31,9% (figura 2.3).

Tabela 2.1 – Estimação do recrutamento de ovos fertilizados de adultos de 5 a 10 anos em Mamirauá no período de 1993 a 1998

Ano	Número de Adultos	Potencial de Pares Reprodutivos	Frequência de Reprodução	Número de Pares	Número de Ovos Fertilizados
1993	69,5	34,7	0,32	11,1	4862
1994	55,9	27,9	0,23	6,4	2803
1995	67,5	33,7	0,48	16,2	7096
1996	42,8	21,4	0,16	3,4	1489
1997	88,9	44,4	0,34	15,1	6614
1998	65,1	32,5	0,35	11,3	4959

Segundo Queiroz (2000), independente da quantidade de óvulos que são liberados pela fêmea (sejam 20000 ou 100000), apenas alguns deles conseguem ser mesmo depositados no ninho (aproximadamente 5000, quando o processo de acasalamento é completamente bem sucedido). E desses 5000, apenas uns 438 em média são fertilizados pelo macho, quando ele é um reprodutor experiente selecionado pela fêmea. Portanto, este seria um bom valor médio da prole de ovos fecundados, ou cerca de 438 por ninho (e por macho reprodutor). De 100 a 300 larvas em média daquela média de 438 ovos conseguirão provavelmente atingir a barreira de 6 a 7 dias de desenvolvimento larvário, e conseguirão transformar-se em pós-larvas. Destas 300 larvas, com condições ambientais favoráveis, provavelmente 3 ou 4 atingirão a idade

adulta. Partindo de um total de até 100.000 óvulos maduros no interior de uma fêmea adulta, se tudo der certo ela provavelmente vai gerar em média 4 adultos a cada ano.

2.2 Ciclo de vida do Pirarucu

Idealmente, o estudo da dinâmica de uma população tem em atenção diversas fases do seu ciclo de vida. Consideraremos nesse estudo duas fases: a fase pré-explorável e a fase explorável.

A primeira fase de vida é a fase não explorável, que se inicia a partir da postura (desova) que ocorre naturalmente em água parada, podendo acontecer entre três e cinco por cada estação reprodutiva anual, já que o pirarucu é considerado uma espécie de desova parcelada (Imbiriba, 1994).

Observando o acasalamento em cativeiro, Fontenele (1948 e 1953) descreveu que a construção de ninhos e o comportamento desempenhado por ambos os sexos duram de 3 a 5 dias. Após a eclosão das larvas, estas permanecem durante cinco dias no ninho, até a absorção da vesícula vitelínea. Essas larvas nadam sobre a cabeça do pai, que nessa época apresenta uma coloração vermelha e brilhante, enquanto fêmeas (ou o que ele supôs serem fêmeas) permaneceram com uma coloração geral mais castanha e manchas vermelhas menores mas tão intensas quanto as dos machos. Somente nove dias após eclodidas, as larvas começam a nadar em um grupo organizado enquanto vão à superfície protegido por seus pais, subindo de momento a momento à superfície da água para captar ar (Fontenele, 1948).

Posteriormente, os alevinos vivem em agrupamentos, protegidos pelos pais. Em ambiente artificial, Alcântara (1990) observou que a descendência é protegida até que eles alcancem 45 cm de comprimento total. Na Reserva Mamirauá, o período de cuidado parental provavelmente dura aproximadamente 5 a 6 meses (Queiroz, 2001).

Começa a partir deste momento o período juvenil. Os períodos de ovos e larvas são muito dependentes das condições ambientais em que se encontram, sendo a mortalidade elevadíssima. Já no período juvenil, as mortalidades são menores, mas os indivíduos ainda não se encontram totalmente em fase explorável. Nesta fase pré-explorável, quando são introduzidas as normas de manejo, só ocorrem mortalidades naturais.

Ao entrarem na fase explorável, diz-se que os animais entraram em recrutamento pesqueiro, ou em recrutamento de pesca. A fase explorável vai deste momento até aos últimos períodos de vida dos animais, sempre com mortalidades decorrentes de causas naturais e também de pesca realizada pelo homem.

2.3 Lagos e Conservação de Pirarucus

Para modelar o número de novos indivíduos produzidos por uma população num dado ano é necessário modelar a capacidade reprodutiva da espécie e a densidade da população. Para modelar a densidade da população é preciso ter boas noções da distribuição dos tipos e tamanhos de lagos.

Na Área Focal (figura 1.3) da RDSM existem oito grandes subsistemas de drenagem: Mamirauá, Jarauá, Tijuaca, Preguiça, Barroso, Aiucá e Cauaçu. O sistema Jarauá abrange cerca de 60% dos lagos de toda a Área Focal da Reserva (Queiroz, 1999).

Alguns autores acreditam na capacidade de recuperação ou repovoamento de lagos de várzea após serem submetidos ao sistema tradicional de manejo, durante a cheia subsequente (McGrath *et al.*, 1994). Em Mamirauá, existem cerca de 616 lagos. Queiroz (2000) examinou sob distintas formas de manejo tradicional 12 lagos da Reserva. Foram examinados lagos muito pescados todos os anos, lagos levemente pescados esporadicamente e lagos protegidos

ou sob levíssima pressão de pesca. Esses lagos foram divididos em dois tipos ou categorias ambientais, nomeadas como A e B.

Lagos tipo A: Esses lagos têm grandes quantidades de vegetação flutuante, as águas tendem a ser mais transparentes do que em outros lagos, os níveis de oxigênio são baixos e a fauna de invertebrados é dominada por insetos e moluscos.

Lagos tipo B: Esses lagos mostram a vegetação flutuante mais concentradas nas extremidades, os níveis de oxigênio são altos e a fauna de invertebrados é dominada por insetos e crustáceos.

Por razões ainda desconhecidas, dados apresentados (Queiroz, 2000) sugerem que os pirarucus tendem a viver mais densamente agregados em lagos tipo B. A disponibilidade de locais de ninhos ou a concentração de uma determinada alimentação poderiam explicar essa aparente preferência e isso deve ser investigado no futuro. Estes lagos são mais apropriados para recuperação de distúrbios causados pela pressão de pesca e são melhores candidatos para a pesca controlada do que os lagos tipo A.

A maioria das aldeias locais da Reserva de Mamirauá tem seus próprios lagos de preservação e de reserva. Os "Lagos de preservação" são escolhidos por aldeões locais como parte de seu sistema tradicional de manejo de pescas (Queiroz,1999).

As aldeias locais escolhem um ou alguns lagos para preservação e proteção. Os lagos escolhidos para preservação devem ser maiores que 3 ha. em superfície de água durante a seca, pois só lagos desse tamanho podem abrigar em torno de 10 animais sexualmente maduros, propiciando a reprodução local. Lagos menores que 3 ha não podem servir efetivamente como lagos de proteção por não possuírem porte suficiente para abrigar o

mínimo necessário de estoque reprodutor. Em 3 hectares, poderiam ser achados de 3 a 10 adultos, satisfazendo as exigências mínimas para acasalamento (Queiroz, 2000).

Após as inundações, os lagos podem restabelecer a sua estrutura formal. Evidências colhidas em um lago tipo A e em um lago tipo B sugerem que, apenas um ou em dois anos após a exploração, a população de pirarucus nos lagos do tipo B conseguiram se re-estabelecer, e atingir algo semelhante ao que poderia ser chamado de capacidade suporte (K) do ambiente, enquanto em lagos do tipo A isto poderia ser muito mais demorado.

A recuperação da população de pirarucus foi registrada no Lago Curuçá da Reserva Mamiraua de 1992 a 1995 e no Lago Serapião de 1994 a 1995 (Queiroz, 2000).

2.3.1 Lago Curuçá

O Lago Curuçá, um lago de reserva da aldeia Jarauá, é usado para ser explorado, uma vez a cada dois ou três anos. O lago foi auferido para pirarucus em agosto de 1992 (Queiroz e Sardinha, 1999), e as sessões de marcação-recaptura foram realizadas em 1993, 1994 e 1995, sempre durante a temporada de baixo nível da água. Houve alagamentos entre cada um desses eventos.

Em 1992, toda a população foi capturada, incluindo realmente os animais com mais de 2 anos de idade, uma vez que o total de recrutamento de pesca acontece em 3 anos. Após esta intensa pressão de pesca, o lago foi deixado para ser re-povoado e em 1993 uma pressão de pesca moderada foi registrada, ainda para este lago, quando a experiência de marcação estava sendo levada a cabo pela primeira vez. Em 1994 e 1995, o lago Curuçá foi considerado livre da pressão de pesca, mas algumas evidências de pesca ilegal foram detectadas em 1995. Na tabela 2.2 são apresentadas o total de indivíduos por idade capturados e recapturados no Lago Curuçá no período de 1992 a 1995 (Queiroz, 2000).

Tabela 2.2 –Densidade e Estrutura Etária no Lago Curuçá de 1992 a 1995

Idade	Nº de Indivíduos			
	1992	1993	1994	1995
1	0	0	0	0
2	0	0	93	37
3	78	2	73	32
4	26	1	7	13
5	11		14	3
6	6		6	
7	3		6	3
8	2		0	
9	1		0	1
10	1		0	
Total ind.	128	3	199	89
ind/ha	18,02	0,42	27,3	12,5

Embora o lago Curuçá tenha sido considerado livre da pesca, uma ligeira pressão de pesca foi registrada em 1995. A redução da densidade de 1994 a 1995 foi provavelmente, um resultado disso. Os dados sugerem que a capacidade suporte (K) do lago Curuçá, que é um lago do tipo A, se estabeleça entre 12,5 a 27,3 pirarucus por hectare de superfície da água.

2.3.2 Lago Serapião

Existem informações disponíveis sobre a estrutura de idade e densidades por dois anos sucessivos para um Lago tipo B, o Lago Serapião, apresentado na tabela 2.3. No caso do lago serapião, a capacidade suporte (K) provavelmente está entre 16 a 58 pirarucus por hectare de

superfície da água. Esta também é uma evidência das diferenças de densidade e abundância de pirarucu entre os tipos de lagos identificados, mas mais informações de lagos são necessárias para chegar a qualquer conclusão segura a respeito destes pontos.

Tabela 2.3 – Densidade e Estrutura Etária no Lago Serapião de 1994 a 1995

Nº de Indivíduos		
Idade	1994	1995
1	0	0
2	35	44
3	20	80
4	3	62
5	3	18
6		1
7		17
8	2	9
9		
10		
Total ind.	62	231
ind/ha	15,78	57,8

Ambos os casos mostraram que as populações de pirarucus em ambos os tipos de lagos podem se reestruturar após a exploração. No caso de pelo menos um lago do tipo B, após 2 anos de descanso desde a última grande exploração, a população local de pirarucus foi restaurada. No caso de pelo menos um lago tipo A, este prazo pode ser mais longo, e a estabilização pode ser mais demorada. Mas se há possibilidade de recuperação das populações

em lagos, a gestão da pesca na Reserva Mimirauá pode fazer uso de um sistema de uso rotativo para a exploração dos pirarucus nesses lagos (Queiroz, 2000).

Capítulo 3

Modelos Matemáticos de Dinâmica Populacional

O estudo das relações dos seres vivos entre si e o meio ambiente que os rodeia é o tema da Ecologia Populacional (Gomes,2002). A população que é a unidade fundamental deste estudo é considerada como um conjunto de indivíduos da mesma espécie que ocupam um território delimitado geralmente pelo ecossistema no qual esta espécie está presente, cujos atributos de distribuição espacial, densidade, estrutura etária, taxas de crescimento, e relações de interdependência podem ser estimados quantitativamente em condições experimentais ou de campo (Pinto-Coelho, 2000).

Um aspecto importante da Ecologia Populacional é o estudo da dinâmica populacional, cujo objetivo é entender, explicar e prever as variações da população ao longo do tempo e do espaço (Gomes,2002).

A utilização da matemática no estudo de dinâmica de populações começou em 1798, quando foi publicado anonimamente pelo economista inglês Thomas Robert Malthus o artigo “*An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society*”. Neste trabalho Malthus previa um crescimento em progressão geométrica para a população e em progressão aritmética para os meios de sobrevivência (capacidade suporte do ambiente), porém sua teoria não considerou que mais cedo ou mais tarde, toda a população seria forçada a encontrar limitações de alimento, água, ar ou espaço físico e com isso, se manteria estável

em um limite máximo de sobrevivência (Rafikov,2003). A segunda grande contribuição para o desenvolvimento da Dinâmica Populacional ocorreu por volta de 1838, quando o matemático belga Verhulst apresentou com o trabalho “*Notice sur la loi que la population suite dans son accroissement*” a equação logística (Gomes, 2002). No início do século XX, houve um crescente interesse pela dinâmica populacional. Entre os cientistas interessados destacam-se Lotka (1925) e Volterra (1926) com o modelo Lotka-Volterra (W.C. Ferreira, 2003).

Nos últimos anos surgiram muitos modelos populacionais aplicados às áreas de biologia, ecologia, epidemiologia, entre outros. Estes modelos descrevem a dinâmica de populações cujos indivíduos podem ser moléculas bioquímicas, bactérias, indivíduos infectados, insetos, peixes, etc (W.C. Ferreira, 2003).

3.1 Modelos Matemáticos de Populações de uma Espécie

3.1.1 Modelo de Malthus

O Modelo Malthusiano tem por hipótese que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população total do país naquele instante. Ou seja, quanto mais pessoas houver em um instante t , mais pessoas existirão no futuro.

Malthus descreveu o crescimento populacional através da seguinte equação:

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad (3.1)$$

onde $r = n^{\circ} \text{ nascimentos} - n^{\circ} \text{ mortes}$, é a taxa de crescimento da população N .

A solução da equação (3.1) é dada por

$$N_t = N_0 e^{rt} \quad (3.2)$$

Sendo N_0 a grandeza da população na origem da contagem do tempo e N_t a sua grandeza decorrido o tempo t .

Observa-se que a constante r pode ser positiva, negativa ou mesmo zero, dependendo da taxa de natalidade ser maior, menor ou igual, respectivamente, a taxa de mortalidade.

Para cada caso, a análise dada pelo modelo Malthusiano é a seguinte:

- ♦ Se $r < 0$, N será uma função decrescente, e quando $t \rightarrow \infty$, temos que $N \rightarrow 0$. Neste caso, a população decresce até ser extinta. (figura 3.1)
- ♦ Se $r = 0$, a população será mantida constante, igual a N_0 , independente do tempo decorrido. (figura 3.2)
- ♦ Se $r > 0$, a população irá crescer ao longo do tempo e quando $t \rightarrow \infty$, a população irá crescer ilimitadamente, ou seja $N \rightarrow \infty$. (figura 3.3)

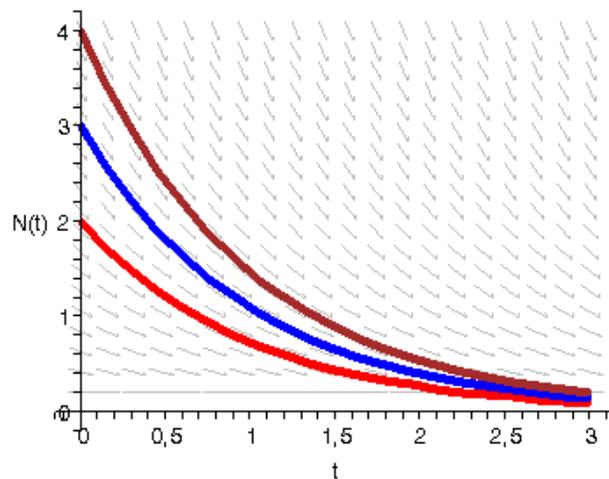


Figura 3.1 – Decrescimento Exponencial $N \times t$ para o Modelo de Malthus para $r < 0$ para três condições iniciais.

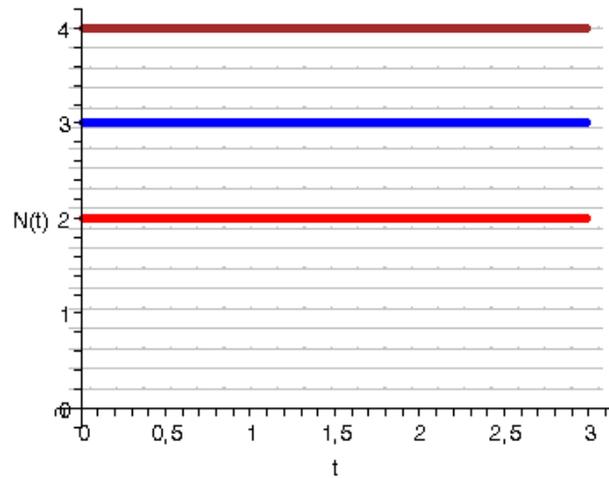


Figura 3.2 – Crescimento Exponencial $N \times t$ para o Modelo de Malthus para $r = 0$ para três condições iniciais

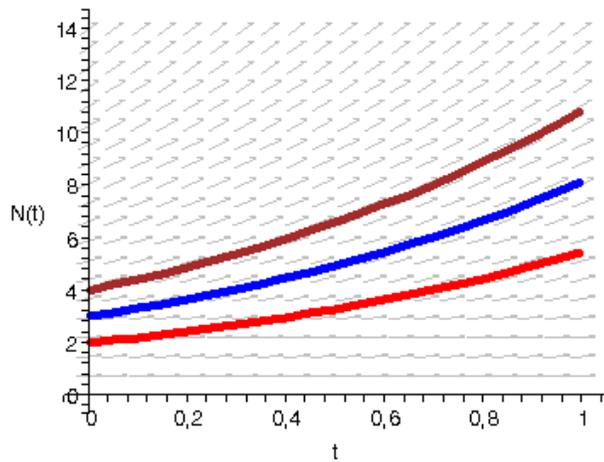


Figura 3.3 – Crescimento Exponencial $N \times t$ para o Modelo de Malthus para $r > 0$ para três condições iniciais.

Percebe-se que, no caso de $r > 0$, a população cresce indefinidamente, o que não ocorre visto que, a população acaba por encontrar limitações ambientais.

3.1.2 Modelo de Verhulst

Pierre Verhulst, por volta de 1838, estudou a limitação dos recursos e propôs uma

modificação ao modelo de Malthus. Este modelo supõe que, num determinado ambiente, a população de uma certa espécie atinge um limite máximo sustentável, dado por $N_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$. Considera ainda que a equação incorpore a queda de crescimento, à medida que a população cresce (Bassanezi, 1988). Verhulst apresentou a seguinte equação como uma descrição do crescimento populacional:

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K} \right) N \quad (3.3)$$

onde K é o nível de saturação da população. Nesse caso a população não chegaria a uma guerra pela sobrevivência, pois não ultrapassaria o limite K .

A equação (3.3) foi denominada por ele de “Equação Logística”.

Conforme mostrado na figura 3.4, a forma diferencial da equação logística (3.3) é uma parábola com raízes $N = 0$ e $N = k$ e vértice em $\left(\frac{k}{2}, \frac{rk}{4} \right)$,

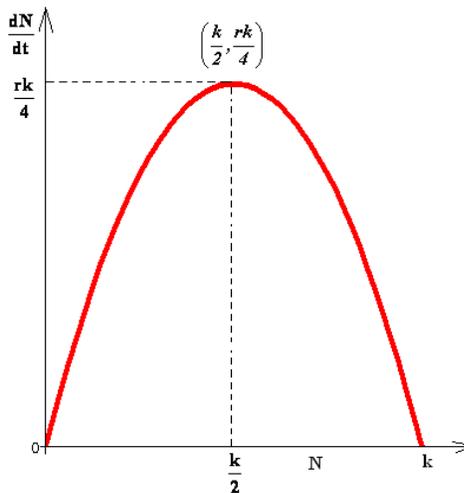


Figura 3.4 – Representação Esquemática das raízes da equação 3.3

A solução da equação (3.3) é

$$N_t = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \quad (3.4)$$

Atribuindo valores ao parâmetro K e r , podem-se determinar os sucessivos valores de N_t , à medida que t aumenta, por meio da equação (3.3). A figura 3.5 apresenta resultados para populações que se iniciam acima do equilíbrio ($N_0 > K$) e para populações que se iniciam abaixo do equilíbrio ($N_0 < K$).

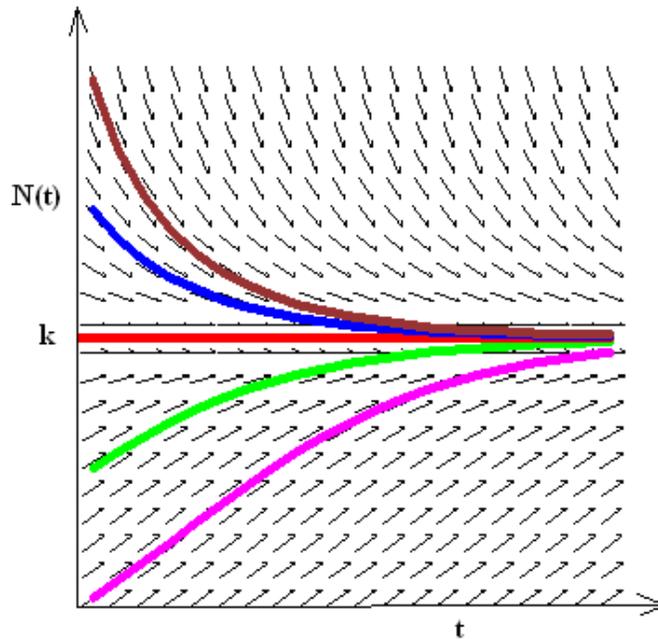


Figura 3.5 – Soluções do Modelo Verhulst para cinco condições iniciais

O Modelo de Verhulst não informa quando uma população estará extinta. Nota-se que, mesmo começando com uma população muito pequena, a população sempre tenderá para a capacidade limite do meio.

3.1.3 Exploração de Recursos Renováveis

Na Pesca é de fundamental importância o conhecimento da dinâmica de suas populações. A exploração de populações para ser economicamente viável, contínua e não destruir as espécies deve ser feita com base nos estudos de Ecologia Populacional. Através

desses estudos pode-se determinar a quantidade de indivíduos que poderão ser retirados da população sem grave prejuízo desta. O conhecimento do ciclo de vida e da biologia da reprodução da espécie explorada, também é um fator importante, para que a captura seja feita no período correto, isto é, fora do período de reprodução da espécie.

3.1.3.1 Captura Independente da Densidade no Modelo Logístico

O modelo logístico sob captura independente da densidade é descrito como:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{k} \right) - C \quad (3.5)$$

onde C é a constante de captura independente da densidade.

A solução da equação (3.5) proporciona duas populações de equilíbrio: N_1^* e N_2^*

$$N_1^* = \frac{rk - \sqrt{r^2k^2 - 4rck}}{2r} ; \quad N_2^* = \frac{rk + \sqrt{r^2k^2 - 4rck}}{2r}$$

O valor crítico de C acima do qual este tipo de captura leva a população à extinção para qualquer nível inicial é $C > \frac{rk}{4}$

A figura 3.6 mostra o gráfico da curva de crescimento (parábola) e captura constante (reta com inclinação nula) da equação (3.5).

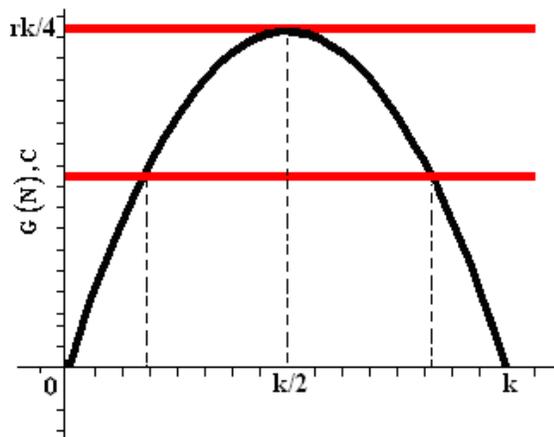


Figura 3.6 – Gráfico da Curva de Captura Independente da Densidade

onde $G(N) = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right)$

Na figura 3.6, observa-se que para valores de $C > \frac{kr}{4}$ a população tende à extinção.

A figura 3.7 apresenta a variação temporal da equação (3.5) para $C > \frac{kr}{4}$

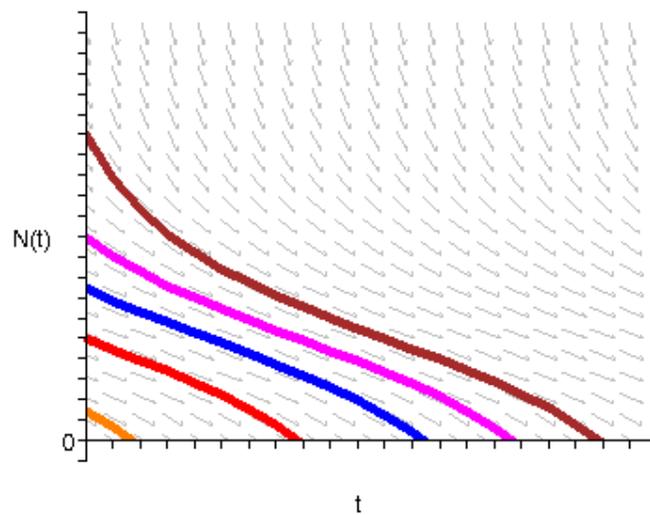


Figura 3.7 – Modelo Logístico com Captura Independente da Densidade

para cinco condições iniciais e $C > \frac{kr}{4}$.

Observa-se na figura 3.7 que para $C > \frac{kr}{4}$ a população tende à extinção para qualquer condição inicial.

Seja agora, um estudo para a captura $C < \frac{kr}{4}$. A figura 3.8 apresenta a variação temporal para a equação (3.5) para $C < \frac{kr}{4}$

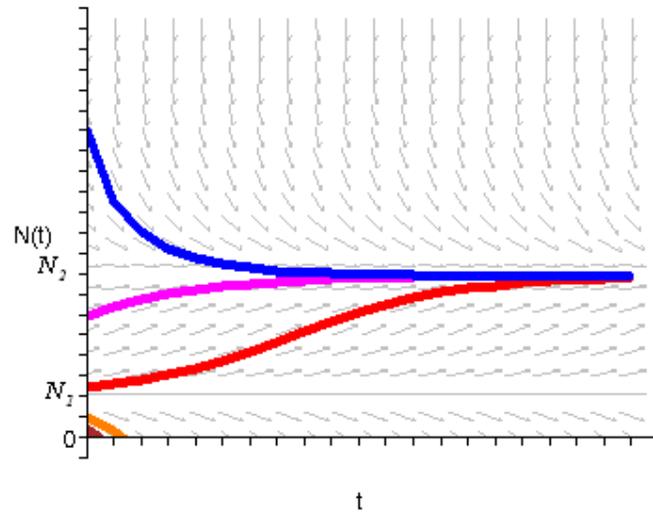


Figura 3.8 – Modelo Logístico com Captura Independente da Densidade

para cinco condições iniciais e $C < \frac{kr}{4}$.

Observa-se na figura 3.8 que se a população inicial N_0 for menor que N_1 a população $N(t)$ decrescerá para zero (extinção) em tempo finito, ao passo que se a população N_0 de inicial for maior que N_1 a população $N(t)$ tenderá população de equilíbrio N_2 .

3.1.3.2 Captura Dependente da Densidade no Modelo Logístico

O modelo logístico sob captura dependente da densidade é descrito como:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{k} \right) - CN \quad (3.6)$$

Onde C é a constante de captura dependente da densidade.

A solução da equação (3.6) proporciona duas populações de equilíbrio: N_1^* e N_2^*

$$N_1^* = 0 \text{ e } N_2^* = \frac{k(r-C)}{r}$$

O valor crítico de C acima do qual este tipo de captura leva a população à extinção para qualquer nível inicial é $C > r$.

A figura 3.9 mostra o gráfico da curva de crescimento (parábola) e captura proporcional fixa.

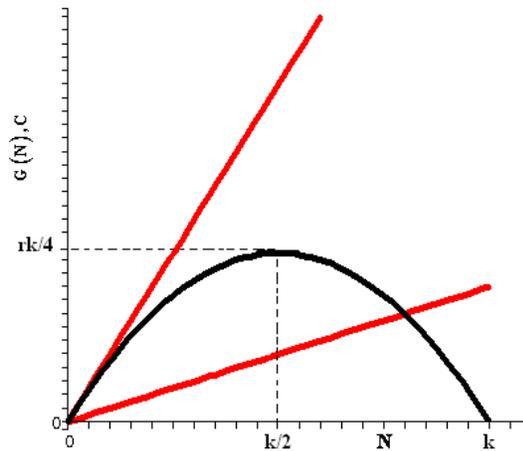


Figura 3.9 – Gráfico da Curva de Captura Dependente da Densidade

onde $G(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ e $\frac{dG}{dN} \Big|_{N=0} = r$

Na figura 3.10 está representado a variação temporal para valores de $C > r$

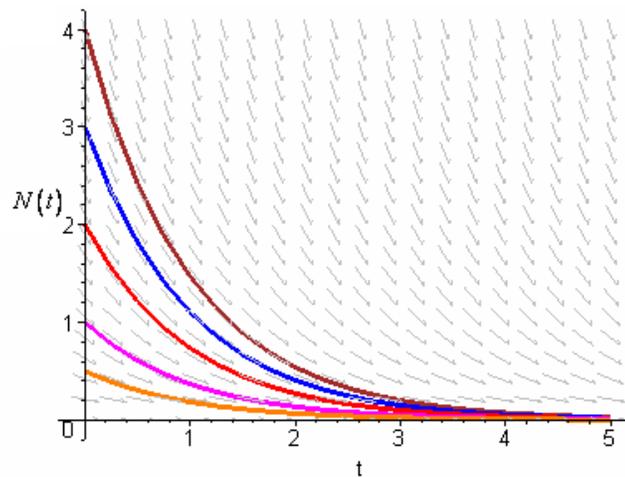


Figura 3.10 – Modelo Logístico com Captura Dependente da Densidade para cinco condições iniciais com $C > r$.

Observa-se que para $C > r$ a população tende à extinção para qualquer condição inicial.

Na figura 3.11 estão representados o retrato de fase para valores de $C < r$

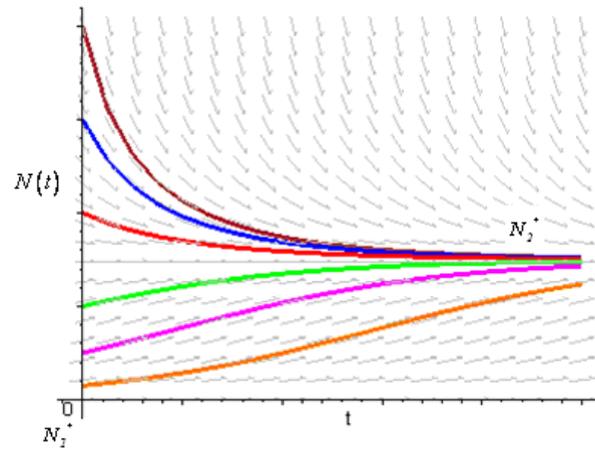


Figura 3.11 – Modelo Logístico com Captura Dependente da Densidade para seis condições iniciais para $C < r$

Observa-se que para $C < r$, a população tende a população de equilíbrio N_2^*

Capítulo 4

Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus (*Arapaima gigas*)

Para um estudo sobre a Dinâmica Populacional dos pirarucus foi desenvolvido um modelo matemático descrito por um sistema de equações diferenciais ordinárias considerando diferentes parâmetros populacionais da espécie e as diferentes taxas de pesca atuantes na população.

Para desenvolver um modelo consistente, devem ser levados em conta dados básicos sobre os hábitos mais significativos dos pirarucus em um ambiente natural. Para a análise presente o modelo divide o ciclo de vida dos pirarucus em quatro fases que representam quatro estágios diferentes do seu ciclo biológico: ovos fertilizados, larvas/pós-larvas, juvenis e adultos (figura 4.1). Apesar dos intervalos de tempo muito diferentes que correspondem a estas fases, elas apresentam certas características particulares que gostaríamos de enfatizar. A primeira fase definida como ovos, significa ovos fertilizados e, por conseguinte, exige a participação de machos e fêmeas. A segunda fase, concebida como larvas/pós-larvas, caracteriza-se pelo cuidado parental. Machos desta espécie mantêm vigilância até que as larvas possam sobreviver sem a proteção de adultos. A terceira fase corresponde aos juvenis, peixes imaturos com menos de 165 cm e imaturos sexualmente. A quarta fase corresponde à maturidade, a idade adequada para reprodução.

Consideramos neste estudo duas circunstâncias distintas de evolução da população. A primeira possibilidade assume fases do ciclo de vida onde não há nenhuma exploração de pesca significativa, e a segunda possibilidade introduz exploração como um fator importante na dinâmica da população.

A primeira fase começa com a desova que é realizada geralmente em água parada, podendo ocorrer de três a cinco desovas por cada estação reprodutiva anual, devido ao fato do pirarucu ser considerado uma espécie de desova parcelada (seção 2.2.1). Neste trabalho foi considerado o número médio acumulado de ovos da estação de reprodução inteira. A segunda fase corresponde ao cuidado parental.

A quarta fase corresponde à maturidade quando os peixes adultos são capazes de

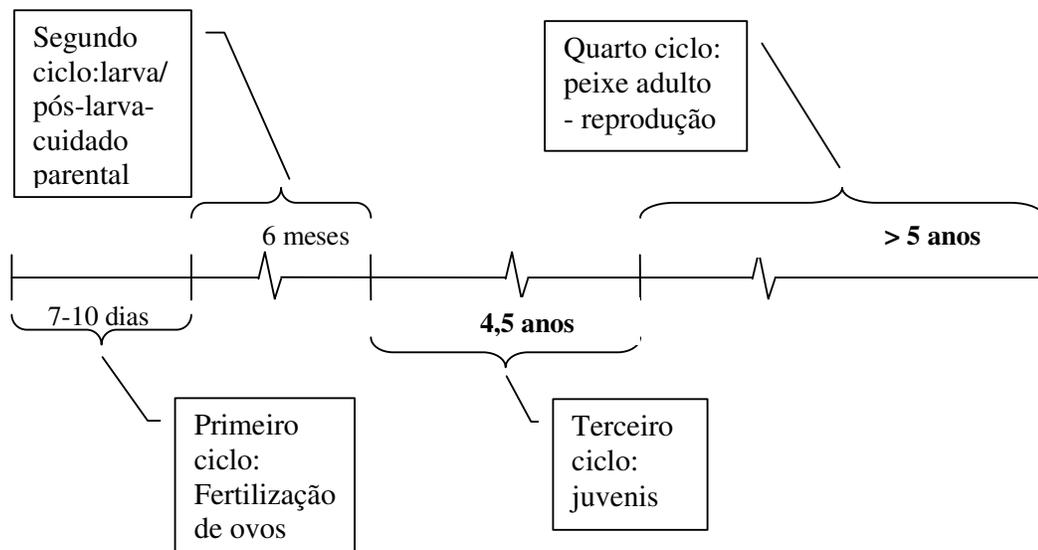


Figura.4.1. Ciclo de vida do pirarucu dividido em quatro estágios

acasalar e reproduzir. Então nesta fase é possível incluir atividades de pesca. Os dois possíveis caminhos de evolução começam nesta fase. Uma possibilidade corresponde à

evolução da população sem pesca, onde só ocorre mortalidade natural, e o outro admite as atividades de pesca, e a mortalidade é devida a causas naturais ou por pesca.

O modelo proposto aqui é um sistema dinâmico que considera a evolução das quatro fases mencionadas acima, com e sem pesca. Em princípio, o número de fêmeas e machos adultos podem ser diferentes. Portanto, machos adultos e fêmeas adultas serão introduzidos como duas variáveis independentes. Agora, uma vez que ovos e larvas não serão diferenciados, fêmeas e machos adultos só podem diferir em número se a atividade pesqueira tiver alguma preferência particular por machos ou fêmeas. Espera-se, portanto, que sob a evolução natural sem pesca, até mesmo se as duas ocorrências sexuais são consideradas no modelo como duas variáveis distintas, a solução sempre convergirá ao mesmo número de machos e fêmeas.

Entre outras razões, o modelo é simples porque os parâmetros introduzidos no sistema devem ser observáveis, e devem ser recolhidos dados suficientes para permitir uma avaliação numérica razoável.

Portanto, deve existir um compromisso entre o número de parâmetros necessários para se ter um modelo aceitável e o número de dados disponíveis. Foi construído um modelo consistente que requer o conhecimento dos dados mais fundamentais relacionados a taxas de mortalidade, taxas de natalidade, capacidade suporte e taxa de pesca. Estes dados poderão ser avaliados ou reavaliados a partir dos trabalhos de pesquisa biológica e de pesca realizados na Reserva Mamirauá. A expressão que corresponde ao cuidado parental foi estimada, uma vez que não foi possível adquirir informações detalhadas sobre este tipo de comportamento. A variação dos parâmetros que controlam o cuidado parental mostra que a variação da população correspondente é consistente.

As hipóteses introduzidas aqui ajustam-se bem à evolução da população de peixes que pode ser observada na Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá.

Na construção do modelo considerou-se que:

- (1) As duas primeiras fases correspondem aos ciclos de vida iniciais que envolvem a formação dos casais, a construção de ninhos e o cuidado parental realizado pelos machos;
- (2) A terceira fase corresponde a população de juvenis;
- (3) A quarta fase diz respeito a população de adultos que atingiram a maturidade sexual;
- (4) A população de adultos está dividida em dois grupos, machos e fêmeas;
- (5) A maturidade sexual de machos e fêmeas ocorre quando os peixes estão em torno de cinco anos de idade;
- (6) Nem todas as fêmeas adultas desovam numa estação reprodutiva;
- (7) Nem todos os adultos formam casais reprodutivos;
- (8) Fêmeas maduras não geram sucessivamente todos os anos.
- (9) Nem todos os casais alcançam o mesmo sucesso reprodutivo, dependendo da combinação entre a idade e a experiência de ambos os sexos.
- (10) Os fenômenos migratórios são omitidos.

Estas considerações são importantes para avaliar os parâmetros que entram no sistema dinâmico conforme observações de campo.

Um modelo elaborado para simular a dinâmica populacional desta espécie deve, tanto quanto possível, levar em conta as características peculiares de cada uma das quatro fases do ciclo acima mencionadas. A vigilância sobre os descendentes realizada pelos machos, que pode durar em média, cerca de 6 meses, é uma importante característica da segunda fase do ciclo de vida a ser introduzida no modelo. Tal como será explicado na próxima seção, a

segunda e terceira fases do ciclo serão aglomeradas em uma única fase. Isto simplificará a análise, enquanto a influência da vigilância do macho na dinâmica populacional será mantida.

Serão analisados três modelos ligeiramente diferentes correspondendo a duas hipóteses de evolução distintas. O primeiro e o segundo, que serão analisados respectivamente neste capítulo e no capítulo cinco, não consideram a pesca. A diferença entre eles deve-se ao efeito do cuidado parental. Serão denominados Modelo Referência e Modelo com a Influência do Cuidado Parental. O terceiro modelo, analisado no capítulo 6, inclui pesca e será chamado Modelo-F.

4.1 Modelo de Referência – Modelo Padrão

No modelo de referência será levada em conta somente a mortalidade natural. O ciclo de vida total, como discutido acima, é dividido em quatro fases principais, isto é: a fase dos ovos fertilizados, a fase das larvas/pós-larvas, a fase dos juvenis e a fase dos adultos. Os adultos são subdivididos em machos e fêmeas.

A dinâmica populacional do pirarucu para os fins do presente trabalho, como discutido anteriormente, considera cinco variáveis independentes associadas aos quatro ciclos descritos anteriormente. Vamos chamar essas variáveis g_1 , g_2 , \hat{g}_2 , P e Q representando respectivamente ovos fertilizados, larvas, juvenis (machos e fêmeas), machos adultos e fêmeas adultas que pertencem à mesma geração. Em outras palavras essas variáveis correspondem às diferentes fases de um mesmo grupo inicial.

A variação da população associada aos diferentes ciclos de vida correspondente a um acréscimo Δt no tempo, pode ser definida como:

Δg_1 : variação do número de ovos fertilizados

Δg_2 : variação da população de larvas/pós-larvas originadas de Δg_1

$\Delta\widehat{g}_2$: variação da população de juvenis originados da fase anterior Δg_2

$\Delta P, \Delta Q$: variação da população de adultos machos e fêmeas respectivamente correspondendo a contribuição do estágio anterior $\Delta\widehat{g}_2$

A variação da quantidade de ovos fertilizados Δg_1 é proporcional a $a_1 a_2 \overline{PQ}$, isto é, uma função da população atual de adultos reprodutivos, incluindo peixes de várias gerações disponíveis para reproduzir (com mais de 5 anos de idade).

O parâmetro a_1 é a probabilidade de sucesso de acasalamento e fertilização por macho, por ano:

$$a_1 = \frac{\text{(probabilidade de sucesso na fertilização dos ovos)}}{\text{(macho)(ano)}}$$

O parâmetro a_2 representa a eficácia de desova por fêmea. Este parâmetro também leva em conta a fração de fêmeas que participam do ciclo reprodutivo.

$$a_2 = \frac{\text{(número de ovos postos)}}{\text{(fêmea)}}$$

Observações de campo têm mostrado que o número de peixes adultos e extensão de lagos estão correlacionados. Nas subseções 2.3.1 e 2.3.2 foi sugerido através de estudos dos tipos de lagos e suas densidades, a capacidade suporte de dois lagos de Mamirauá (**entre 1 a 4 adultos** por hectare para o Lago Curuçá e **1 a 11 adultos** por hectare para o Lago Serapião). Recentes dados de densidade populacional em lagos amazônicos (Arantes *et al.*, 2007) sugere que a capacidade suporte normalizada pode ser estimada em 10 adultos / ha. Portanto a capacidade suporte de um lago com uma área igual a A ha é $\bar{k} = 10A$.

A quantidade de ovos fertilizados Δg_1 que corresponde ao período Δt é:

$$\Delta g_1 = a_1 a_2 \overline{PQ} \left(1 - \frac{\overline{P} + \overline{Q}}{\bar{k}} \right) \Delta t - c_1 g_1 \Delta t - m_1 g_1 \Delta t \quad (4.1 - a)$$

onde

- ♦ $m_1 g_1$ corresponde à mortalidade natural devido à ação de predadores, inundações e outros fatores físicos semelhantes.
- ♦ $c_1 g_1$ corresponde ao recrutamento dos ovos fertilizados para fase de larvas.

Então os parâmetros c_1 e m_1 podem ser definidos como:

$$c_1 = \frac{\text{fração de ovos que se tornam larvas}}{\text{unidade de tempo}}$$

$$m_1 = \frac{\text{fração de ovos removidos do sistema (mortalidade natural)}}{\text{unidade de tempo}}$$

A população g_2 de larvas / pós-larvas pertence ao segundo ciclo de vida, e, portanto, estão sob a proteção dos machos, a variação Δg_2 pode ser escrita como:

$$\Delta g_2 = c_1 g_1 \Delta t - \bar{h}(P) g_2 \Delta t - \bar{c}_2 g_2 \Delta t - \bar{m}_2 g_2 \Delta t \quad (4.1-b)$$

onde a contribuição para o crescimento é a migração do ciclo anterior dada por $c_1 g_1 \Delta t$ e a taxa de remoção está associada aos três termos:

$\bar{m}_2 g_2 \Delta t$ correspondendo a mortalidade natural 1 (doenças, parasitismo e catástrofes).

$\bar{c}_2 g_2 \Delta t$ correspondendo ao recrutamento da fase de larvas/pós-larvas para a fase juvenil.

$\bar{h}(P) g_2 \Delta t$ correspondendo a mortalidade natural 2 (predação por outros animais) induzida pela falta de vigilância adequada dos machos.

Com:

$$\bar{c}_2 = \frac{\text{fração de larvas a ser transferidas para a fase juvenil}}{\text{ano}}$$

$$\bar{m}_2 = \frac{\text{mortalidade das larvas/pós-larvas}}{\text{ano}}$$

A função $\bar{h}(P)$ representa a fração relativa de larvas/pós-larvas perdidas devido a falta de proteção por unidade de tempo.

A variação da população que corresponde à próxima fase do ciclo de vida completo segue o mesmo raciocínio. É facilmente obtida:

$$\Delta\hat{g}_2 = \bar{c}_2\hat{g}_2\Delta t - \hat{c}_2\hat{g}_2\Delta t - \hat{m}_2\hat{g}_2\Delta t \quad (4.1-c)$$

Onde \hat{c}_2 é a taxa de recrutamento da fase juvenil para a fase adulta e \hat{m}_2 é a taxa de mortalidade dos pirarucus juvenis.

Finalmente a quarta e quinta equações de diferenças são diretas. Desde que as larvas eclodem aleatoriamente em machos e fêmeas, a taxa de recrutamento será a mesma para machos e fêmeas, isto é, $\frac{\hat{c}_2}{2}$ para ambos os sexos.

Então:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\hat{c}_2\hat{g}_2\Delta t - m_3P\Delta t \quad (4.1-d)$$

$$\Delta Q = \frac{1}{2}\hat{c}_2\hat{g}_2\Delta t - m_4Q\Delta t \quad (4.1-e)$$

onde m_3 e m_4 são as mortalidades naturais de machos e fêmeas respectivamente.

A primeira variação Δg_1 envolve a população atual \bar{P} e \bar{Q} mas para esse sistema as variáveis relevantes são P e Q que são frações do grupo atual, respectivamente \bar{P} e \bar{Q} provenientes do mesmo grupo inicial.

Sabe-se que a maturidade do pirarucu é atingida quando o peixe tem cerca de 5 anos. Seja $\sigma = LF - 5$ onde LF é a média da expectativa de vida expressa em anos, então tem-se que $\bar{P} = \sigma P$ e $\bar{Q} = \sigma Q$. A variação Δg_1 como função de P e Q é

$$\Delta g_1 = \sigma^2 a_1 a_2 P Q \left(1 - \frac{P+Q}{k} \right) \Delta t - c_1 g_1 \Delta t - m_1 g_1 \Delta t \quad (4.1-f)$$

Se \bar{k} é a capacidade suporte total de algum lago específico, então $k = \bar{k} / \sigma$ é a capacidade desse lago suportar um número adicional de peixes adultos, fêmeas mais machos, pertencendo a uma única geração. Então a taxa de crescimento de ovos fertilizados que correspondem a uma única geração está limitada pelo fator

$$1 - \frac{P+Q}{k} = 1 - \frac{\bar{P} + \bar{Q}}{\bar{k}}$$

Admitindo que todas essas variáveis sejam funções suaves no tempo e dividindo as equações (4.1-b) a (4.1-f) por Δt , tem-se quando $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta g_1}{\Delta t} = \frac{dg_1}{dt},$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta g_2}{\Delta t} = \frac{dg_2}{dt},$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{g}_2}{\Delta t} = \frac{d\hat{g}_2}{dt},$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{dP}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt},$$

Então o conjunto de equações diferenciais que representa a dinâmica populacional do pirarucu pode ser escrita como:

$$\frac{dg_1}{dt} = \sigma^2 a_1 a_2 PQ \left(1 - \frac{P+Q}{k} \right) - c_1 g_1 - m_1 g_1 \quad (4.2-a)$$

$$\frac{dg_2}{dt} = c_1 g_1 - \bar{h}(P) g_2 - \bar{c}_2 g_2 - \bar{m}_2 g_2 \quad (4.2-b)$$

$$\frac{d\hat{g}_2}{dt} = \bar{c}_2 g_2 - \hat{c}_2 \hat{g}_2 - \hat{m}_2 \hat{g}_2 \quad (4.2-c)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} \hat{c}_2 \hat{g}_2 - m_3 P \quad (4.2-d)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \hat{c}_2 \hat{g}_2 - m_4 Q \quad (4.2-e)$$

O terceiro ciclo de vida não traz informação adicional para o atual modelo. Para simplificar o sistema de equações foi introduzida a seguinte hipótese:

$$\hat{g}_2 = \varepsilon g_2 \quad (4.3)$$

O parâmetro ε é constante. Quer dizer, o número de peixes jovens é uma função linear no tempo independente do número de larvas/pós-larvas. Observações de campo indicam que ε é um parâmetro muito pequeno. Isto significa que há uma perda significativa na transição de larvas/pós-larvas para peixes juvenis. Com esta suposição a equação (4.2-c) torna-se:

$$\varepsilon \frac{dg_2}{dt} = \bar{c}_2 g_2 - \varepsilon \hat{c}_2 g_2 - \varepsilon m_2 g_2 \quad (4.4)$$

Adicionando esta equação a equação (4.2-b) o parâmetro \bar{c}_2 é eliminado e obtém-se:

$$\frac{dg_2}{dt} = \frac{1}{1+\varepsilon} \left[c_1 g_1 - \bar{h}(P) g_2 - \varepsilon \hat{c}_2 g_2 - (\bar{m}_2 + \varepsilon \hat{m}_2) g_2 \right]$$

Agora, uma vez que ε é pequeno, pode-se escrever:

$$\frac{dg_2}{dt} = c_1 g_1 - \bar{h}(P) g_2 - c_2 g_2 - m_2 g_2$$

onde:

$$c_2 = \varepsilon \hat{c}_2 \text{ e } m_2 = \bar{m}_2 + \varepsilon \hat{m}_2$$

O conjunto de equações diferenciais (4.2) reduz-se a:

$$\frac{dg_1}{dt} = aPQ \left(1 - \frac{P+Q}{k} \right) - c_1 g_1 - m_1 g_1 \quad (4.5-a)$$

$$\frac{dg_2}{dt} = c_1 g_1 - \bar{h}(P) g_2 - c_2 g_2 - m_2 g_2 \quad (4.5-b)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} c_2 g_2 - m_3 P \quad (4.5-c)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} c_2 g_2 - m_4 Q \quad (4.5-d)$$

onde

$$a = \sigma^2 a_1 a_2$$

Não há nenhuma evidência de que em condições normais os índices de mortalidades m_3 e m_4 deveriam ser diferente. A dinâmica populacional simula peixes que vivem em reservas naturais. Por hipótese será considerado $P = Q$ e a equação (4.5-d) é suprimida.

As soluções de equilíbrio são obtidas de $dg_1/dt = dg_2/dt = dP/dt = 0$. Introduzindo estas condições no sistema (4.4) as seguintes relações são obtidas:

$$\left[-(P^*)^2 + \frac{k}{2} P^* - \frac{k}{a} \left(1 + \frac{m_1}{c_1} \right) \left(1 + \frac{m_2}{c_2} \right) m_3 - \frac{k}{a} \frac{m_3}{c_2} \left(1 + \frac{m_1}{c_1} \right) \bar{h}(P) \right] P^* = 0 \quad (4.6-a)$$

$$g_2^* = \frac{2m_3}{c_2} P^* \quad (4.6-b)$$

$$g_1^* = \frac{2m_3}{c_2 c_1} [\bar{h}(P^*) + c_2 + m_2] P^* \quad (4.6-c)$$

O conjunto $\{g_1^*, g_2^*, P^*\}$ representa uma solução geral de equilíbrio. A partir de (4.6-a) encontra-se três possíveis soluções de equilíbrio. Claramente, $P_1^* = 0$ ($Q_1^* = 0$) é uma solução. Esta solução de equilíbrio corresponde à extinção. As outras duas soluções são dadas pelas raízes da equação:

$$-(P^*)^2 + \frac{k}{2} P^* - \frac{k}{a} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \left(1 + \frac{m_2}{c_2}\right) m_3 = \frac{k}{a} \frac{m_3}{c_2} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \bar{h}(P^*) \quad (4.7-a)$$

Os valores correspondentes de g_1^* e g_2^* são obtidos respectivamente de (4.6-b) e (4.6-c).

Para uma impecável vigilância dos machos, isto é, $\bar{h}(P)=0$, a solução de equilíbrio não-trivial são as raízes de segunda ordem obtidas de (4.5) para $\bar{h}(P^*)=0$. Para esse caso específico, as outras duas, soluções de equilíbrio são:

$$P_{2,3}^* = \frac{k}{4} \left\{ 1 \pm \left[1 - \frac{16}{ka} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \left(1 + \frac{m_2}{c_2}\right) m_3 \right]^{1/2} \right\} \quad (4.7-b)$$

As raízes imaginárias ou complexas devem ser descartadas já que a população P é um número real e positivo, sendo assim as raízes P_2^* e P_3^* devem ser reais.

Então, como pode ser deduzido imediatamente da equação (4.7-b), a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\frac{16}{ka} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \left(1 + \frac{m_2}{c_2}\right) m_3 < 1 \quad (4.8-a)$$

Com os pontos de equilíbrio P_2^* e P_3^* permanecendo dentro do intervalo:

$$0 < P_2 < P_3 < \frac{k}{2}$$

Este é o resultado esperado, porque a população total ($P + Q$) é delimitada pela capacidade suporte k do ambiente e as raízes devem ser reais e positivas. Como será visto na seção 4.3, P_3 é estável e P_2 é instável. Ainda considerando o caso de pleno êxito na vigilância sobre as larvas pelos machos adultos, isto é, $\bar{h}(P^*) = 0$, e tendo em vista que obviamente $g_1^* > g_2^* > P^*$ são obtidas através das equações (4.6-b,c) as seguintes desigualdades:

$$\frac{2m_3}{c_2} > 1 \quad (4.8-b)$$

$$m_2 > c_1 - c_2 \quad (4.8-c)$$

Essas desigualdades são importantes para a estimação de parâmetros definidas na próxima seção.

4.2 Estimação de Parâmetros

Como explicado na seção 4.1, em condições ambientais ideais sem perturbações o conjunto de equações diferenciais (4.4) pode ser reescrita da seguinte forma reduzida:

$$\frac{dg_1}{dt} = aPQ \left(1 - \frac{P+Q}{k}\right) - c_1g_1 - m_1g_1 \quad (4.9-a)$$

$$\frac{dg_2}{dt} = c_1g_1 - c_2g_2 - m_2g_2 \quad (4.9-b)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}c_2g_2 - m_3P \quad (4.9-c)$$

Com $P = Q$ e $a = \sigma^2 a_1 a_2$. O termo $\bar{h}(P)$ foi retirado de (4.9-b) porque, neste capítulo, a vigilância do macho sobre as larvas será considerada ideal.

O sistema de equações diferenciais (4.9) que descreve a dinâmica populacional do pirarucu apresentado neste trabalho envolve um conjunto de parâmetros que estão relacionados com as condições biológicas e ambientais na Reserva Mamirauá.

A simulação da dinâmica populacional que é a solução do sistema (4.9), requer a determinação dos parâmetros introduzidos no sistema acima. Este é, talvez o ponto crítico desta análise desde que os dados disponíveis e observações de campo ainda são insuficientes para prover um conjunto completo que permita a determinação de todos os parâmetros do sistema (4.9). Por outro lado, até mesmo com uma estimativa crua de certos parâmetros, os resultados analíticos podem prover informação útil para guiar futuros experimentos de campo e coleta de dados, particularmente se o resultado é consistente com o comportamento global observado em alguns dos lagos da região amazônica.

Embora os resultados apresentados aqui tenham que ser considerados como uma primeira aproximação da dinâmica de população as simulações conduzem a soluções plausíveis como será visto posteriormente.

Observações de campo na Reserva de Desenvolvimento Sustentável Mamirauá, capítulo 2 seção 2.1.1, permite a avaliação das relações (número de larvas) / (número de ovos fertilizados) e (número de ovos fertilizados) / (número de machos adultos), isto é:

$$\frac{g_2^*}{g_1^*} \approx \frac{1}{1,35} \quad (4.10-a)$$

$$g_2^* \approx 75 \left(\overline{P^*} + \overline{Q^*} \right) \approx 150 \sigma P^* \quad (4.10-b)$$

Considerando o número de machos igual ao número de fêmeas e tem-se:

$$g_1^* \approx 200\sigma P^* \quad (4.10-c)$$

Dados coletados na Reserva Mamirauá indicam que a relação entre o número atual de adultos reprodutivos é $\beta(\overline{P^*} + \overline{Q^*})/2 = \beta\sigma P^*$ e o número de ovos fertilizados é dado por $g_1^* \approx 438\beta\sigma P^*$ onde β representa a fração de acasalamento bem sucedida e σP^* é o número de casais que pertencem ao ciclo reprodutivo. Comparando esta relação com (4.10-c) encontra-se $\beta \approx 0,46$ o que significa que do nº total de acasalamento só 46% realmente acontece. Essa estimativa é confirmada através de observações de campo (Queiroz,2000).

Agora de (4.6-a) e (4.6-b) com $h(P^*) = 0$ é fácil obter:

$$\frac{g_1^*}{g_2^*} c_1 = m_2 + c_2 \quad (4.11)$$

$$c_2 = \frac{2m_3 m_2}{c_1 \frac{g_1^*}{P^*} - 2m_3} \quad (4.12)$$

Com (4.10-a) a equação (4.11) pode ser reescrita como $1,35c_1 = m_2 + c_2$. A taxa de recrutamento de ovos fertilizados para larvas pode ser estimada a partir de observações de campo como 0,1 (capítulo 2 seção 2.1.1). Agora é esperado que $c_2 \ll m_2$ e dentro da gama de aproximação considerada aqui pode-se considerar $m_2 \approx 0,135$. Introduzindo este valor de m_2 em (4.12) e levando em conta que $g_1^* \approx 200\sigma P^*$ como dado por (4.10-c), obtém-se:

$$c_2 \approx \frac{0,27m_3}{200\sigma c_1 - 2m_3} \quad (4.13)$$

Finalmente, desde que $200 \sigma c_1 \gg 2m_3$, obtém-se a seguinte relação:

$$c_2 \approx \frac{0,0135}{\sigma} m_3 \quad (4.14)$$

Segundo dados de campo a expectativa de vida do pirarucu pode variar entre 10 e 15 anos. A tabela 4.1 mostra os valores de c_2 que corresponde a m_3 que varia no intervalo [0,1-0,3] para uma expectativa de vida esperada igual a 15 anos e conseqüentemente $\sigma = 10$.

Tabela 4.1: Variação de c_2 e m_3 para $\sigma = 10$

m_3	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
c_2	0,00014	0,00020	0,00027	0,00034	0,00041

Não existem informações suficientes para avaliar o valor de m_1 de observações de campo. É possível, porém estimar o valor desse coeficiente a partir da condição de equilíbrio dado pela equação (4.7-b). Espera-se que perto do ponto de equilíbrio sob condições ambientais ideais a população de peixes tenda a capacidade suporte do ambiente, ou seja:

$$P^* \approx (1 - \delta) \frac{k}{2} \quad (4.15)$$

onde $\delta \ll 1$

Esta expressão junto com $m_2/c_2 \approx 10^3$ e $m_3 \approx 0,1$ obtidas de cálculos anteriores e lembrando que δ é um parâmetro pequeno, da equação (4.7-b) tem-se que:

$$m_1 \approx 0,0002ka\delta \quad (4.16)$$

Das definições de a e k obtém-se facilmente $ak = 2\sigma^2 Pa_1 a_2$. Agora $\bar{P}a_1 = \sigma Pa_1$ é a probabilidade de ovos fertilizados por todos os machos e a_2 é o número de ovos fertilizados por fêmea numa estação reprodutiva. Pesquisas realizadas em Mamirauá (seção 2.1.1) indicam que $a_2 \approx 40000$. A probabilidade $\bar{P}a_1$ pode ser estimada como 5%. Com $\sigma = 10$

finalmente obtém-se que $ak \approx 40000$ e $m_1 \approx 8\delta$. Para uma população de peixe estabilizada em torno de 85% a 95% da capacidade suporte, tem-se $0,05 < \delta < 0,15$ que conduz a taxa de mortalidade no intervalo $0,4 \leq m_1 \leq 1,2$. O valor estimado para m_1 introduzido nas simulações seguintes é 0,8 consistente com estes intervalos.

É importante ressaltar que os valores estimados para os parâmetros podem variar dentro de um intervalo relativamente grande. O intervalo de variação de alguns parâmetros podem ser estreitados com o progresso de observações de campo. No entanto, há fortes indícios de que dependendo de alguns fatores físicos e biológicos alguns desses parâmetros podem apresentar uma grande variedade de flutuação. O modelo como apresentado aqui, é robusto, o que significa que ele não é muito sensível a variações de parâmetros dentro de intervalos aceitáveis. Uma das razões reside no fato de que $a = \sigma^2 a_1 a_2$ funciona como um parâmetro de controle e que pode de acordo com observações na dinâmica populacional adaptar o modelo para fornecer uma medida indireta para $a_1 a_2$.

Agora o parâmetro a controla as duas soluções de equilíbrio P_2 e P_3 .

Serão analisados dois possíveis valores para a capacidade suporte k : 40 e 100.

4.2.1 Estimação de Parâmetros para a capacidade suporte $k=40$

- Para os parâmetros $c_1 = 0,10$; $c_2 = 0,00014$; $m_2 = 0,135$; $m_3 = 0,10$; $m_1 = 0,80$ e com $k = 40$:

$$P_{2,3} = 10 \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{347}{a}} \right] \quad (4.17)$$

Claramente para soluções reais de $a > 347$, o máximo possível de populações de machos ou fêmeas ($P = Q$) é 20. Isto é evidente, pois a capacidade suporte do ambiente é igual a 40, 20 machos e 20 fêmeas. O máximo é alcançado no limite com $a \rightarrow \infty$.

Considerando o número total de peixes no lago em torno de 36, e tomando $P_3 = 18$ como a população de equilíbrio, obtém-se da equação (4.17), $a = 965$.

Os parâmetros obtidos estão dispostos na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Parâmetros para o Modelo de Referência com $k = 40$, $m_3 = 0,10$ e $c_2 = 0,00014$

Parâmetros	Valores
a	965
c_1	0,10
c_2	0,00014
m_1	0,80
m_2	0,135
m_3	0,10
m_4	0,10
k	40

- Para os parâmetros $c_1 = 0,10$; $c_2 = 0,00027$; $m_2 = 0,135$; $m_3 = 0,20$; $m_1 = 0,80$ e com $k = 40$ encontramos:

$$P_{2,3} = 10 \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{360}{a}} \right] \quad (4.18)$$

Claramente para soluções reais de $a > 360$, o máximo possível de populações de machos ou fêmeas ($P = Q$) é 20. Isto é evidente, pois a capacidade suporte do ambiente é igual a 40, 20 machos e 20 fêmeas. O máximo é alcançado no limite com $a \rightarrow \infty$.

Considerando o número total de peixes no lago em torno de 36, e tomando $P_3 = 18$ como a população de equilíbrio, obtém-se da equação (4.18), $a = 1002$.

Os parâmetros obtidos estão dispostos na tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros para o Modelo de Referência com $k = 40$, $m_3 = 0,20$ e $c_2 = 0,00027$

Parâmetros	Valores
a	1002
c_1	0,10
c_2	0,00027
m_1	0,80
m_2	0,135
m_3	0,20
m_4	0,20
k	40

4.2.2 Estimação de Parâmetros para a capacidade suporte $k=100$.

- $c_1 = 0,10$; $c_2 = 0,00014$; $m_2 = 0,135$; $m_3 = 0,10$; $m_1 = 0,80$ e com $k = 100$:

$$P_{2,3} = 25 \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{139}{a}} \right] \quad (4.19)$$

Claramente para soluções reais de $a > 139$, o máximo possível de populações de machos ou fêmeas ($P = Q$) é 50. Isto é evidente pois a capacidade suporte do ambiente é igual a 100, 50 machos e 50 fêmeas. O máximo é alcançado no limite com $a \rightarrow \infty$.

Considerando o número total de peixes no lago em torno de 90, e tomando $P_3 = 45$ como a população de equilíbrio, obtém-se da equação (4.19), $a = 386$. O principal papel do parâmetro a não é controlar o número de peixes mas a diferença entre a população máxima e mínima representada por P_3 e P_2 . Isto é:

$$P_3 - P_2 = 50 \sqrt{1 - \frac{386}{a}} \quad (4.20)$$

Valores grandes de a significa grande diferença entre a população máxima e mínima. Pequenos valores levam à aproximação dos valores máximos e mínimos até o limite para $a = 386$ quando ambos coincidem. Este ponto será discutido na seção 4.4.

Os parâmetros obtidos estão dispostos na tabela 4.4.

Tabela 4.4: Parâmetros para o Modelo de Referência com $k = 100$, $m_3 = 0,10$ e $c_2 = 0,00014$

Parâmetros	Valores
a	386
c_1	0,10
c_2	0,00014
m_1	0,80
m_2	0,135
m_3	0,10
m_4	0,10
k	100

4.3 Simulações Numéricas para diferentes valores da Capacidade Suporte com Total Cuidado Parental

O sistema (4.9) foi resolvido numericamente usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (Diprima e Boyce, 1998 , Hirsch , 2004). As simulações dos cenários descritos pelos modelos matemáticos foram desenvolvidos no ambiente Maple 9.

Com o intuito de verificar a dinâmica da população de pirarucus levando em conta a diversidade dos parâmetros de transição e mortalidade na segunda fase do ciclo de vida e na capacidade suporte em lagos de Mamirauá, as simulações realizadas foram subdivididas em três casos, conforme exibido na tabela 4.5

Para os três casos serão representados os retratos de fase no plano de fase $P \times g_2$, assim como as respectivas evoluções no tempo.

Tabela 4.5: Valores k, m_3, c_2 e a

Casos	k	m_3	c_2	a
I	40	0,10	0,00014	965
II	40	0,20	0,00027	1002
III	100	0,10	0,00014	386

Caso I : Os parâmetros utilizados nas simulações são os estimados na seção 4.2.1, tabela 4.2

Para $k = 40$ e $\sigma = 10$ é suposto que o lago pode suportar em torno de 400 peixes adultos.

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (4.9) :

♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,100, -0,100, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável : Nó

♦ $P_2 : \{g_1 = 3860, g_2 = 2857, P = 2, Q = 2\}$

Autovalores: $-0,858, -0,317, 0,040, -0,100$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 34740, g_2 = 25710, P = 18, Q = 18\}$

Autovalores: $-1,000, -0,064 + 0,30I, -0,064 - 0,30I, -0,100$ - Equilíbrio Estável : Foco

A solução do sistema mostra que os pontos de equilíbrio P_1^* e P_3^* são estáveis. O ponto de equilíbrio P_2^* é instável. Populações próximas a este ponto podem divergir para caminhos que conduzem à extinção. A distância entre o equilíbrio estável P_3 perto do ponto de saturação com aproximadamente 36 pirarucus adultos machos mais fêmeas, pertencentes a mesma geração e do equilíbrio instável P_2 , com aproximadamente 4 pirarucus adultos, é grande o suficiente para representar uma séria ameaça para a população. Então, em princípio, um adequado manejo poderia ser implementado.

A figura 4.2 mostra as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as figuras 4.3 e 4.4 mostram as correspondentes evoluções das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=2,Q(0)=2$

CI1a: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=3,Q(0)=3$

CI2: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=6,Q(0)=6$

CI3: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=12,Q(0)=12$

CI4: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=20,Q(0)=20$

CI5: $g_1(0)=0;g_2(0)=4000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI5a: $g_1(0)=0;g_2(0)=7744;P(0)=0,Q(0)=0$

CI6: $g_1(0)=0;g_2(0)=12000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0;g_2(0)=22000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0;g_2(0)=32000;P(0)=0,Q(0)=0$

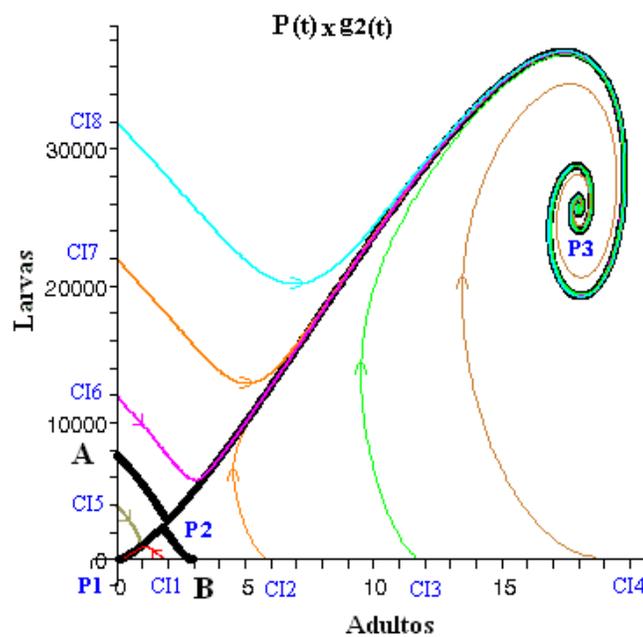


Figura 4.2: Projecção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 40$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 965$

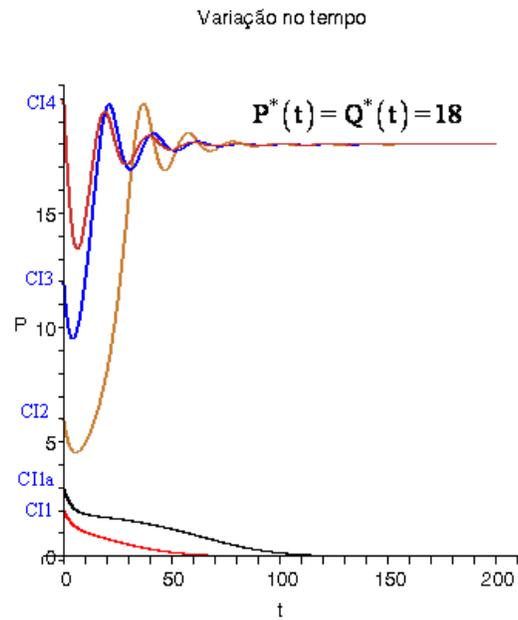


Figura 4.3: Evolução da população de adultos no tempo com cinco condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 40$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 965$

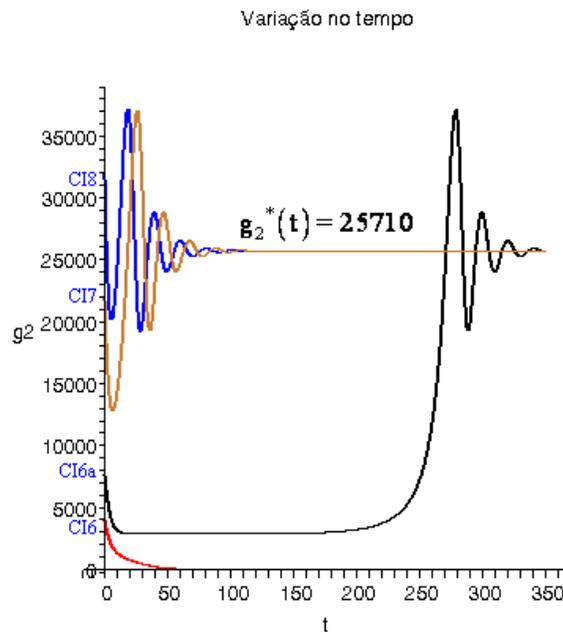


Figura 4.4: Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 40$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 965$

A separatriz AB mostrada na figura 4.2 divide as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$ em quatro regiões. Sob condições naturais, sem perturbações, as trajetórias projetadas no lado direito de AB convergem para a capacidade suporte do lago. As condições iniciais CI2, CI3 e CI4 localizadas no eixo horizontal representam as condições onde inicialmente a população no lago consiste somente de peixes adultos. Para as condições iniciais CI6, CI7 e CI8 localizadas no eixo vertical, os peixes adultos são excluídos, e a população em $t=0$ é constituída apenas de larvas. As trajetórias que correspondem a ambos os casos são consistentes com o comportamento esperado. Existe um decréscimo inicial na população de larvas e adultos. Depois de algum tempo a dinâmica populacional recupera o ciclo ovos-larvas-adultos-ovos e converge para o ponto de equilíbrio P_3 . Todas as trajetórias do lado esquerdo da separatriz AB convergem para o ponto de equilíbrio P_1 , extinção. Este ponto é um nó estável. Isto significa que as trajetórias que conduzem à extinção, como por exemplo CI1 e CI5 não orbitam ao redor da origem, que seria um grave inconveniente pois, nesse caso, as trajetórias passariam por uma região com populações negativas.

As figuras de 4.2 a 4.4 representam as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se só populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se somente as populações de larvas. Seja agora considerar as populações iniciais, CI9: $g_1(0) = 38600$, $g_2(0) = 28500$, $P(0) = 20$ e $Q(0) = 20$. A figura 4.5 mostra as trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ e a figura 4.6 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

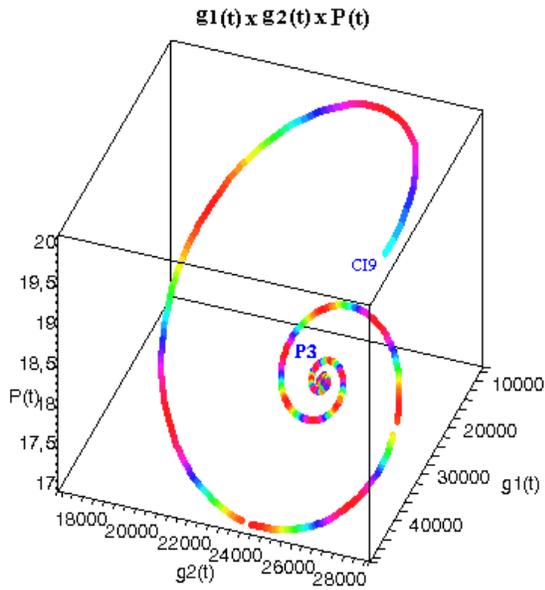


Figura 4.5: Espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição

inicial: $g_1(0) = 38600, g_2(0) = 28500, P(0) = 20, Q(0) = 20$

para $\alpha = 0, k = 40, m_3 = 0,10, c_2 = 0,00014, a = 965$

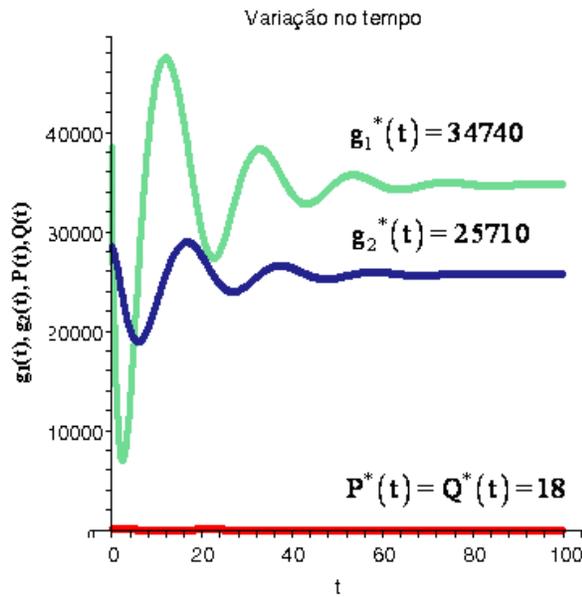


Figura 4.6: Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial:

$g_1(0) = 38600, g_2(0) = 28500, P(0) = 20, Q(0) = 20$ para

$\alpha = 0, k = 40, m_3 = 0,10, c_2 = 0,00014, a = 965$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras 4.2 e 4.5 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P_1 , na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P_3^* .

Nas figuras 4.3, 4.4, e 4.6 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio igual a $g_1^*(t) = 34740, g_2^*(t) = 25710, P^*(t) = 18$ e $Q^*(t) = 18$ ou vão para a extinção.

Caso II : Os parâmetros utilizados nas simulações são os estimados na seção 4.2.1, tabela 4.3

Os coeficientes c_2 e m_2 são maiores neste caso, do que os adotados no caso I. Isto significa que a taxa de transferência de larvas para adultos e a taxa de mortalidade dos adultos são mais elevadas. O valor de a foi ajustado para fixar o número de peixes adultos ao ponto de equilíbrio P_3^* para ambos os sistemas.

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (4.9) :

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,200, -0,200, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável : Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 4010, g_2 = 2964, P = 2, Q = 2\}$

Autovalores: $-0,775, -0,515, 0,054, -0,200$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

- ♦ $P_3 : \{g_1 = 36080, g_2 = 26670, P = 18, Q = 18\}$

Autovalores: $-1,097, -0,069 + 0,416I, -0,069 - 0,416I, -0,200$ - Equilíbrio Estável : Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 18$ são estáveis e $P = 2$ é instável

A figura 4.7 mostra as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as figuras 4.8 e 4.9 mostram as correspondentes evoluções das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

$$\text{CI1: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=2, Q(0)=2$$

$$\text{CI1a: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=4, Q(0)=4$$

$$\text{CI2: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=6, Q(0)=6$$

$$\text{CI3: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=12, Q(0)=12$$

$$\text{CI4: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=20, Q(0)=20$$

$$\text{CI5: } g_1(0)=0; g_2(0)=2000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI6: } g_1(0)=0; g_2(0)=4000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI6a: } g_1(0)=0; g_2(0)=5829; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI7: } g_1(0)=0; g_2(0)=15000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI8: } g_1(0)=0; g_2(0)=22000; P(0)=0, Q(0)=0$$

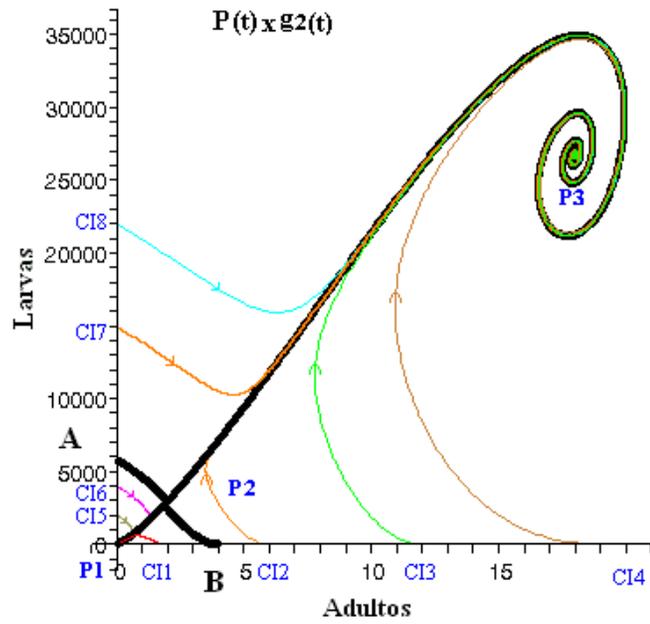


Figura 4.7: Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 40$, $m_3 = 0,20$, $c_2 = 0,00027$, $a = 1002$

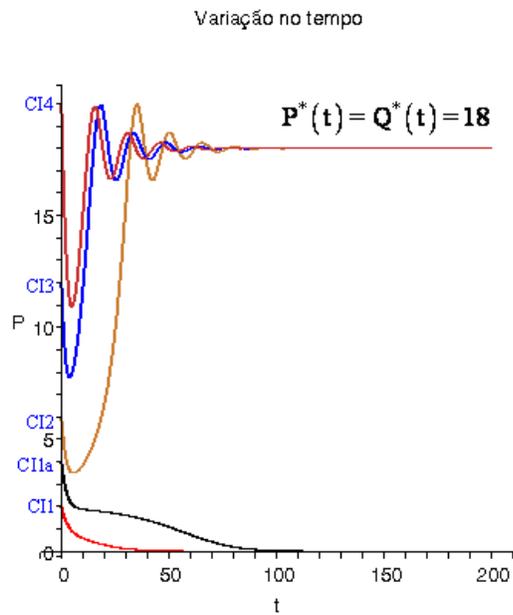


Figura 4.8: Evolução da população de adultos no tempo com cinco condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 40$, $m_3 = 0,20$, $c_2 = 0,00027$, $a = 1002$

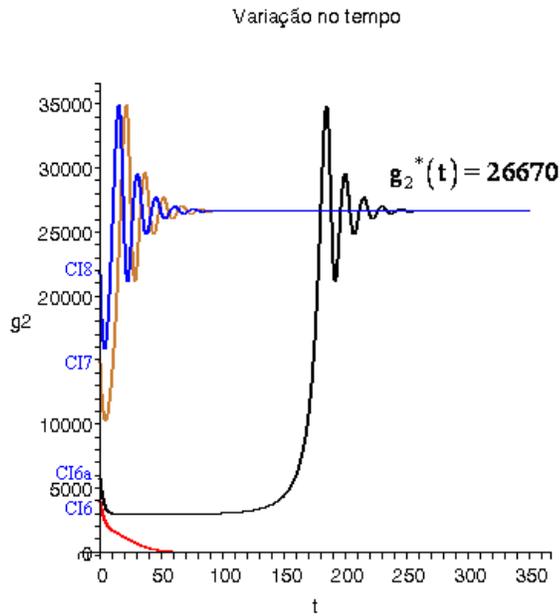


Figura 4.9: Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 40$, $m_3 = 0,20$, $c_2 = 0,00027$, $a = 1002$

Nesse caso, observa-se que as quantidades de ovos fertilizados e larvas são ligeiramente maiores do que no caso I, para compensar a taxa de mortalidade de peixes adultos que passaram de 0,1 a 0,2.

As figuras de 4.7 a 4.9 representam as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se só populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se somente as populações de larvas. Seja agora considerar as populações iniciais, CI9: $g_1(0) = 24000$, $g_2(0) = 17700$, $P(0) = 12$ e $Q(0) = 12$. A figura 4.10 mostra as trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ e a figura 4.11 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

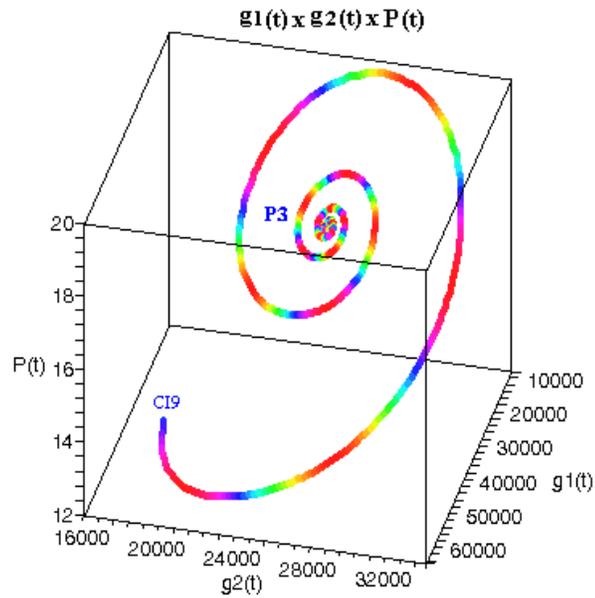


Figura 4.10: Espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 24000, g_2(0) = 17700, P(0) = 12, Q(0) = 12$ para $\alpha = 0, k = 40, m_3 = 0,20, c_2 = 0,00027, a = 1002$

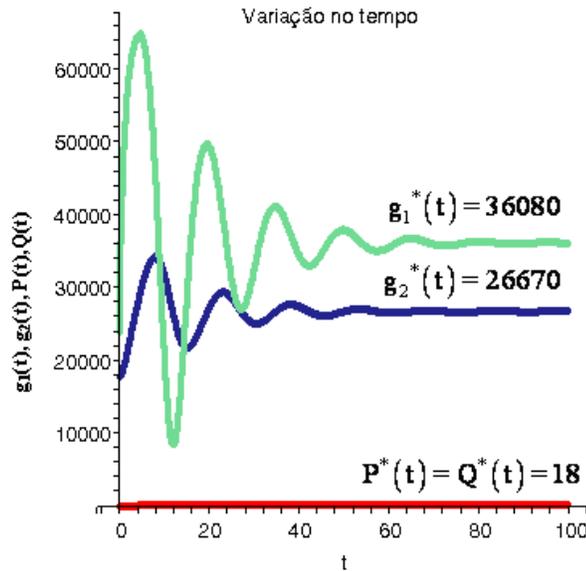


Figura 4.11: Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0) = 24000, g_2(0) = 17700, P(0) = 12, Q(0) = 12$ para $\alpha = 0, k = 40, m_3 = 0,20, c_2 = 0,00027, a = 1002$

Para os parâmetros representados na tabela 4.3 e conforme se observa nas figuras 4.7 e 4.10 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P_1 , na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P_3 .

Nas figuras 4.8, 4.9, e 4.11 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio igual a $g_1^* = 36080, g_2^* = 26670, P^* = 18$ e $Q^* = 18$ ou vão para a extinção.

Caso III : Os parâmetros utilizados nas simulações são os estimados na seção 4.2.2, tabela 4.4

Neste caso a capacidade suporte do lago, é duas vezes e meia maior do que no caso I, porém as duas simulações são iguais.

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (4.9) :

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,100, -0,100, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável : Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 9650, g_2 = 7143, P = 5, Q = 5\}$

Autovalores: $-0,858, -0,317, 0,040, -0,100$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

- ♦ $P_3 : \{g_1 = 86850, g_2 = 64290, P = 45, Q = 45\}$

Autovalores: $-1,00, -0,064 + 0,30I, -0,064 - 0,30I, -0,100$ - Equilíbrio Estável : Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 45$ são estáveis e $P = 2$ é instável.

A figura 4.12 mostra as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as figuras 4.13 e 4.14 mostram as correspondentes evoluções das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

$$\text{CI1: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=6, Q(0)=6$$

$$\text{CI1a: } \mathbf{g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=8, Q(0)=8}$$

$$\text{CI2: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=12, Q(0)=12$$

$$\text{CI3: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=26, Q(0)=26$$

$$\text{CI4: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=50, Q(0)=50$$

$$\text{CI5: } g_1(0)=0; g_2(0)=6000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI6: } g_1(0)=0; g_2(0)=12000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI6a: } \mathbf{g_1(0)=0; g_2(0)=19360; P(0)=0, Q(0)=0}$$

$$\text{CI7: } g_1(0)=0; g_2(0)=26000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI8: } g_1(0)=0; g_2(0)=32000; P(0)=0, Q(0)=0$$

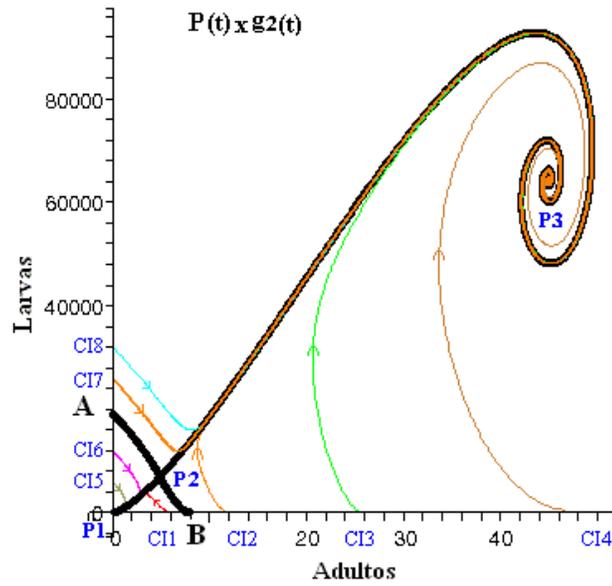


Figura 4.12: Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 100$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 386$

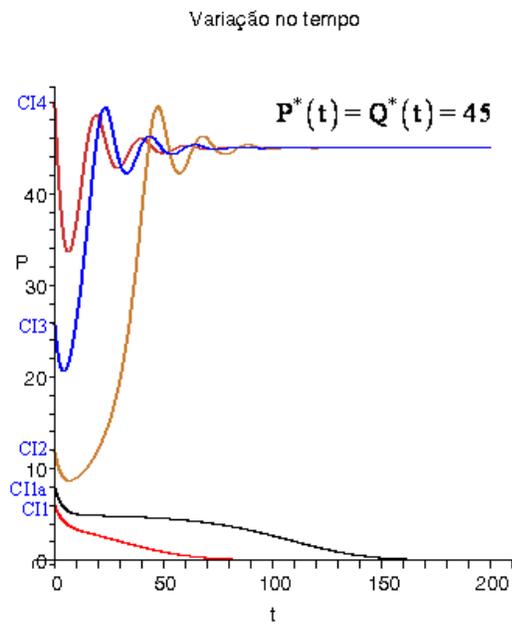


Figura 4.13: Evolução da população de adultos no tempo com cinco condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 100$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 386$

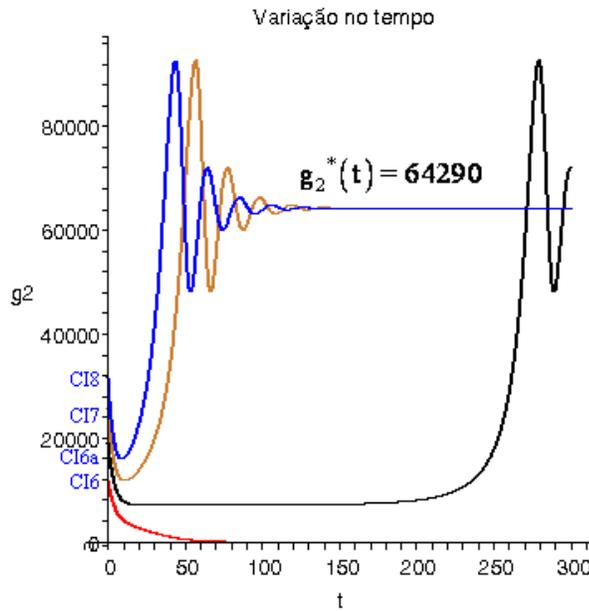


Figura 4.14: Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 100$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 386$

As figuras de 4.12 a 4.14 representam as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se só populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se somente as populações de larvas. Seja agora considerar as populações iniciais, CI9: $g_1(0) = 88000$, $g_2(0) = 65000$, $P(0) = 46$ e $Q(0) = 46$. A figura 4.15 mostra as trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ e a figura 4.16 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

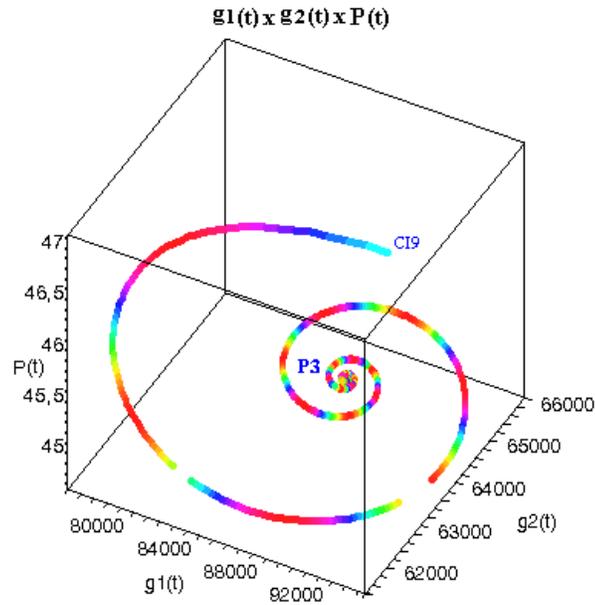


Figura 4.15: Espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 88000, g_2(0) = 65000, P(0) = 46, Q(0) = 46$ para $\alpha = 0, k = 100, m_3 = 0,10, c_2 = 0,00014, a = 386$

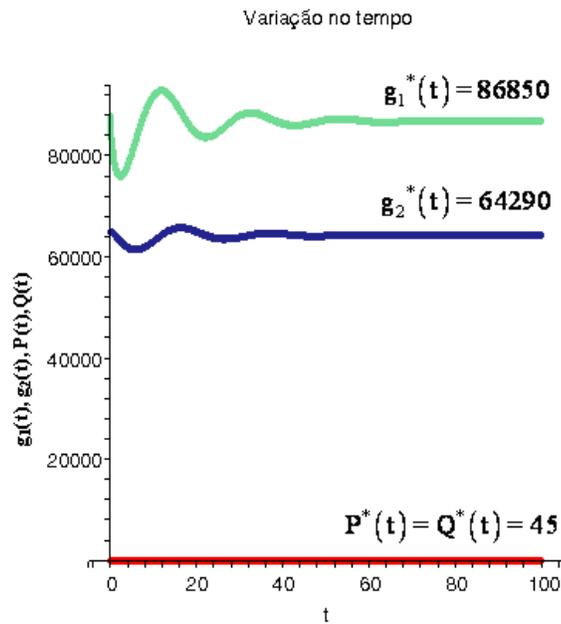


Figura 4.16: Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0) = 88000, g_2(0) = 65000, P(0) = 46, Q(0) = 46$ para $\alpha = 0, k = 100, m_3 = 0,10, c_2 = 0,00014, a = 386$

A população ao equilíbrio estável P_3^* próxima da capacidade suporte é consistente com o resultado esperado. Ovos fertilizados e larvas / pós-larvas são aproximadamente duas vezes e meia maior do que os valores correspondentes para um lago com limite de saturação igual 40 como deveria ser.

O resultado para este caso também preserva as mesmas características que os obtidos para os casos I e II.

O sistema tem se revelado robusto. As soluções variam dentro de limites esperados, na direção certa de acordo com pesquisas de campo.

Para os parâmetros representados na tabela 4.4 e conforme se observa nas figuras 4.12 e 4.15 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P3.

Nas figuras 4.13, 4.14, e 4.16 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio igual a $g_1^* = 86850, g_2^* = 64290, P^* = 45$ e $Q^* = 45$ ou vão para a extinção.

Tabela 4.6: Características das populações não extintas para os casos de I a III

Casos		P_3	g_1	g_2	P_2	g_1	g_2
		(est.)	(P_3)	(P_3)	(inst.)	(P_2)	(P_2)
I	$k = 40$	18	34740	25710	2	3860	2857
II	$k = 40$	18	36080	26670	2	4010	2964
III	$k = 100$	45	86850	64290	5	9650	7143

Bacia de Atração

As projeções das trajetórias no espaço de fase $P - g_2$ convergem para os atratores P_1 ou P_3 dependendo das condições iniciais, ou seja, dependendo dos valores de $P(0)$ e $g_2(0)$. A bacia de atração de um determinado atrator é definida como o lugar de todos os pontos $P(0)$ e $g_2(0)$ do plano $P \times g_2$ cujas trajetórias convergem para este atrator. Cada ponto crítico assintoticamente estável tem a sua bacia de atração, que é limitada por uma das separatrizes que passa pelo ponto de sela P_2 .

As figuras 4.17 e 4.18 representam as bacias de atração, projeção no espaço de fase $P \times g_2$, referente ao caso III definido nesta seção.

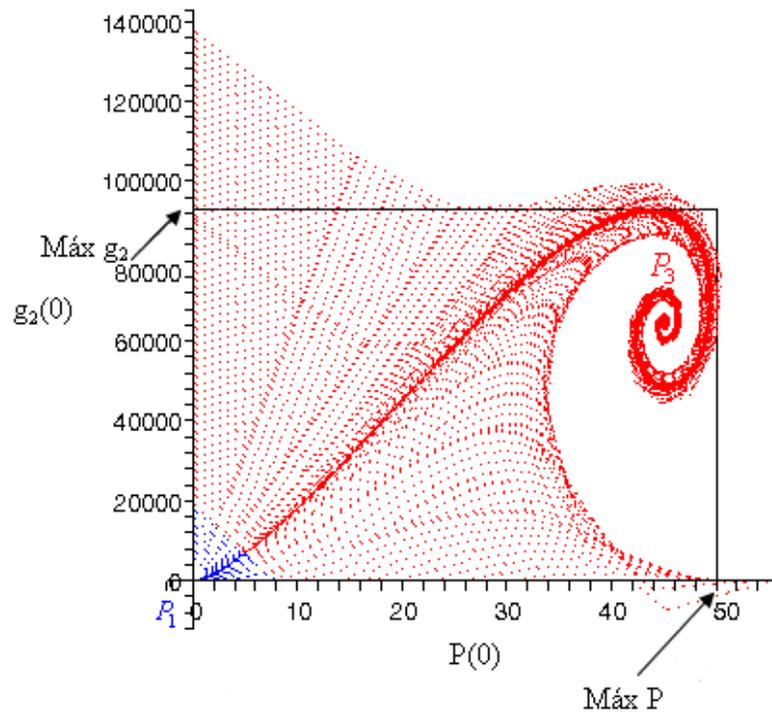


Figura 4.17: Bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para os parâmetros definidos no caso III

Na figura 4.17 os pontos assinalados em vermelho referem-se à bacia de atração relativa ao ponto de equilíbrio P_3 . O subconjunto dessa bacia admissível dentro das restrições

práticas impostas pela dinâmica populacional do pirarucu é mais restrito. Esse subconjunto contém os pontos de origem das trajetórias que ficam contidas da região com superiores máx P e máx g_2 e inferiores $P=0$ e $g_2=0$. São os valores máximos admissíveis para o modelo. Para os parâmetros referentes ao caso II, encontram-se os valores máx $P = 50$ e $Max g_2 = 93000$. Em azul observa-se o subconjunto da bacia de atração para o ponto de extinção P_1 . Limitada por $P=0$ e $g_2=0$. Não se admitem populações negativas.

A figura 4.17 mostra o gráfico da seção do plano de fase $P \times g_2$ numa janela retangular de $[-2,52, 56,11]$ por $[-11960, 142700]$. Para obter uma visão mais completa dos pontos de equilíbrio P_1 e P_2 , foi dado um zoom de $[0,10]$ a $[0,20000]$, conforme mostrado na figura 4.18.

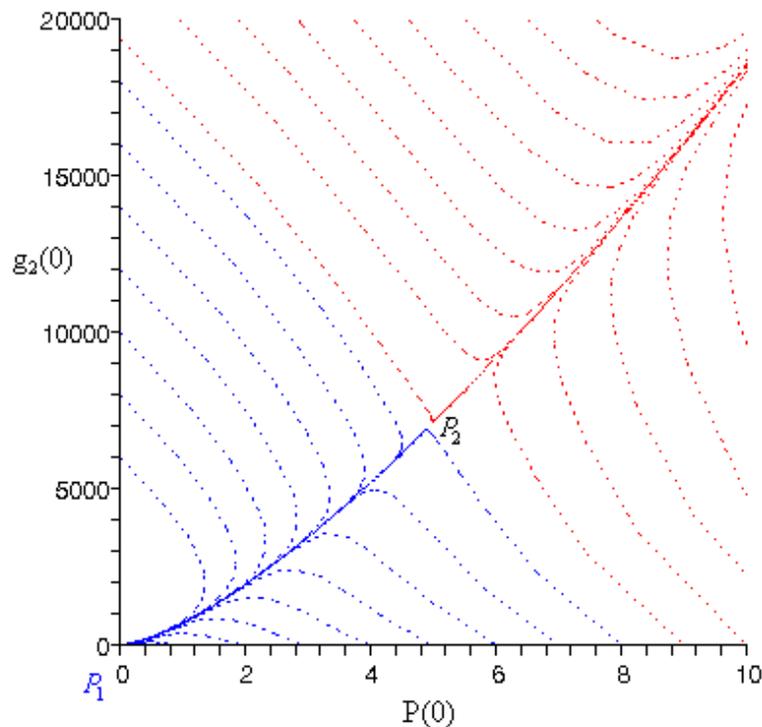


Figura 4.18: Zoom mostrando as bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para os parâmetros definidos no caso III

4.4 Considerações Finais

Os valores atribuídos ao parâmetro k , referente à capacidade suporte do meio, foram baseados em dados de apenas dois pequenos lagos preservados na Reserva Mamirauá, e da média obtida em um estudo de abundâncias em áreas protegidas ou de pesca moderada na mesma reserva. A dinâmica das populações foi semelhante nos dois casos, sugerindo que poderão ser atribuídos valores maiores para a capacidade suporte k de acordo com o tamanho dos lagos de preservação existentes em Mamirauá. O crescimento foi determinado pelo valor atribuído ao parâmetro k , referente a capacidade suporte, ou seja, a população cresceu o quanto lhe foi permitido pelas condições do meio.

Está claro pelos autovalores que correspondem aos três pontos de equilíbrio analisados na seção anterior para os dois valores da capacidade suporte que P_1 e P_3 são estáveis e P_2 é instável (Diprima e Boyce, 1998, Hirsch, 2004). A separatriz **AB** mostradas nas figuras 4.2, 4.7 e 4.12, divide as projeções das trajetórias no plano de fase projetado $P \times g_2$ em quatro regiões. Todas as trajetórias projetadas no lado direito de **AB** convergem para a população de equilíbrio P_3 e todas as trajetórias do lado esquerdo vão para P_1 , extinção. Isto significa que existe um número mínimo de peixes que pode iniciar um crescimento auto-sustentado atingindo a população de equilíbrio estável P_3 . Para os casos apresentados este número é aproximadamente oito, quatro machos e quatro fêmeas (caso I); dez, cinco machos e cinco fêmeas (caso II) e dezoito, nove machos e nove fêmeas. Semelhantemente todas as trajetórias acima da separatriz **AB** com $P=Q=0$ tendem à população de equilíbrio estável P_3 . Quer dizer, se fosse possível introduzir larvas com a proteção apropriada, um crescimento próspero ocorreria somente se o grupo de larvas correspondesse a um ponto localizado sobre a interseção da separatriz **AB** com o eixo $P=0$. Para os casos I, II e III a população entraria

em um ciclo de evolução positivo somente se com $P=0$, $g_2 > 7744,5829$ e 19360 respectivamente.

Foi visto na seção 4.2 que o parâmetro a controla a distância entre as soluções P_2 , instável e P_3 estável. A diferença entre estes dois valores é proporcional a a . Isto significa que o número inicial de peixes a ser lançado em um lago poderia ser relativamente pequeno, o sistema é robusto e as condições de instabilidade estão muito longe do equilíbrio estável. Isso é, o sistema pode suportar impactos indesejáveis relativamente grandes. Esta conclusão é consistente com o significado de a que representa a força dos pares reprodutivos. Valores grandes deste parâmetro são associados com abundante fertilidade e alta capacidade de fertilização relativa pelos machos. Se este não é o caso, a tende a diminuir as populações estáveis e instáveis que estão por vir. Isto indica um sistema muito sensível onde pequenas mudanças introduzidas por fatores externos poderão acarretar grave perigo para a preservação da população.

Nota-se também que em lagos grandes a extinção pode ocorrer com mais peixes do que em lagos pequenos. Isto porque a probabilidade de encontro em lagos grandes é menor.

Talvez o valor de $(P)/(\text{extensão do lago})$, isto é, a densidade de peixes que leva à extinção seja a mesma.

O nosso estudo não está normalizado para densidades de peixes, considera o número absoluto de peixes, daí a aparente incongruência.

O modelo definido por (4.9) com os parâmetros definidos nos três casos, para lagos ideais onde prevalecem as condições ambientais, pode agora ser alargado para analisar os efeitos das perturbações provenientes de várias origens. Será analisado no próximo capítulo o efeito da perturbação causada por um comportamento peculiar desta espécie, o cuidado parental exercido pelos machos sob a população de larvas.

Capítulo 5

Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus (*Arapaima gigas*) com Influência de Cuidado Parental

Seja considerar agora no Modelo de Referência o efeito da variação da eficiência do cuidado parental. O cuidado parental com a prole é realizado pelos machos. Se o macho for eficiente no cuidado com a ninhada, então provavelmente o casal terá sucesso reprodutivo mais alto. Este efeito vai ser analisado através do termo $h(P)$. O modelo para este caso corresponde ao sistema (4.4).

$$\frac{dg_1}{dt} = aPQ \left(1 - \frac{P+Q}{k} \right) - c_1g_1 - m_1g_1 \quad (4.4-a)$$

$$\frac{dg_2}{dt} = c_1g_1 - \bar{h}(P)g_2 - c_2g_2 - m_2g_2 \quad (4.4-b)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2}c_2g_2 - m_3P \quad (4.4-c)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2}c_2g_2 - m_4Q \quad (4.4-d)$$

Na equação (4.4b) é introduzida a função $\bar{h}(P)$, para simular um comportamento bastante peculiar desta espécie. Durante um certo período de tempo no início da fase larval e terminando apenas quando os descendentes são capazes de sobreviver autonomamente, os

machos adultos desta espécie protegem a prole para mantê-los seguros contra ameaça externa. Esse comportamento tem uma influência importante sobre a dinâmica populacional e certamente a expectativa de vida das larvas depende da capacidade de proteção exercida pelos machos. A função $\bar{h}(P)$ foi, portanto, introduzida para simular a eficiência de proteção do macho.

No capítulo 4 foi analisada a evolução normal da população. Isto é, o caso em que temos total cuidado parental. Sob esta hipótese $\bar{h}(P) = 0$.

Este termo introduzido especificamente para modificar a evolução das larvas considera aproximadamente um comportamento homogêneo de todos os machos que cuidam de seus respectivos descendentes. Isto é, estão sendo descartados casos isolados de abandono do ninho. O termo $\bar{h}(P)$ representa a fração de larvas por unidade de tempo excluídas do sistema por falta de cuidados adequados pelo macho encarregado.

Temos então:

$$\bar{h}(P) = \frac{\text{fração de larvas perdidas por falta de cuidado parental}}{\text{unidade de tempo}}$$

Será examinada a perturbação introduzida pela função $\bar{h}(P)$ nas soluções de equilíbrio. Assumindo uma distribuição uniforme de machos e de fêmeas, as condições para o equilíbrio do sistema (4.4) e $P = Q$, conduz a:

$$\left[-(P^*)^2 + \frac{k}{2}P^* - \frac{k}{a} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \left(1 + \frac{m_2}{c_2}\right) m_3 - \frac{k}{a} \frac{m_3}{c_2} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \bar{h}(P^*) \right] P^* = 0 \quad (5.1)$$

Uma das soluções é $P^* = 0$ e as outras duas são:

$$-(P^*)^2 + \frac{k}{2}P^* - \frac{k}{a} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \left(1 + \frac{m_2}{c_2}\right) m_3 = \frac{k}{a} \frac{m_3}{c_2} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \bar{h}(P^*) \quad (5.2)$$

As soluções são dadas pelos pontos de intersecção da parábola do lado esquerdo com a curva do lado direito. A figura 5.1 ilustra a determinação geométrica da solução. As raízes

correspondem à interseção das curvas $f(P^*)$ e $D\alpha h(P^*)$. A parábola $f(P^*)$ e a curva $D\alpha h(P^*)$ são dadas pela expressão do lado direito e esquerdo respectivamente da equação (5.2):

$$f(P^*) = -(P^*)^2 + \frac{k}{2}P^* - \frac{k}{a} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \left(1 + \frac{m_2}{c_2}\right) m_3 \quad (5.3)$$

$$D\alpha h(P^*) = \frac{k}{a} \frac{m_3}{c_2} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \bar{h}(P^*) \quad (5.4)$$

Onde $D = \frac{k}{a} \frac{m_3}{c_2} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right)$ e $\bar{h}(P^*) = \alpha h(P^*)$

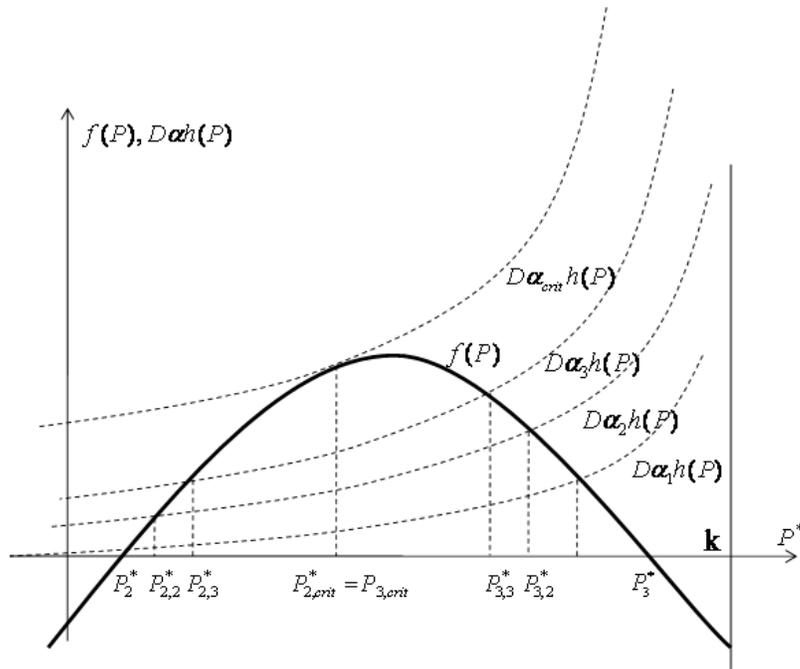


Figura 5.1: Raízes da equação (5.2) correspondendo aos pontos de equilíbrios $P_{2,i}^* = Q_{2,i}^*$ e

$$P_{3,i}^* = Q_{3,i}^* \text{ com a influência do cuidado parental medido por } \alpha_i$$

O parâmetro α controla a deficiência do cuidado parental. Quanto maior o valor de α pior é o desempenho do guardador. Existem várias possibilidades para a escolha de $h(P^*)$.

É desejável preservar as características principais do modelo de referência com $h(P^*) = 0$.

Particularmente, é importante preservar os três pontos de equilíbrio com as mesmas

características de estabilidade. A função $h(P^*)$ deverá satisfazer a três condições importantes:

- 1) $D\alpha h(P^*)$ deverá interceptar a parábola $f(P^*)$ em dois e apenas em dois pontos compreendidos no intervalo entre os pontos de equilíbrio P_2^* e P_3^* , que são os pontos de equilíbrio para $\alpha = 0$.
- 2) $D\alpha h(P^*) > 0$ para todo P, caso contrário a inabilidade na tarefa de vigilância contribuiria para o crescimento de larvas, que é uma contradição
- 3) $\lim_{P \rightarrow \frac{k}{2}} [D\alpha h(P^*)] \rightarrow \infty$, pois é razoável esperar-se que se todos os machos são incapazes de cuidar de sua prole, o colapso é catastrófico.

Uma função satisfatória para $h(P^*)$ é

$$h(P^*) = \frac{1}{(P^* - k/2)^2}$$

Substituindo $h(P^*) = \frac{1}{(P^* - k/2)^2}$ na equação 5.2, obtém-se:

$$-(P^*)^2 + \frac{k}{2}P^* - \frac{k}{a} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \left(1 + \frac{m_2}{c_2}\right) m_3 = \frac{k}{a} \frac{m_3}{c_2} \left(1 + \frac{m_1}{c_1}\right) \frac{\alpha}{(P - k/2)^2} \quad (5.3)$$

O parâmetro α controla a deficiência do cuidado parental. Nota-se também que, para valores relativamente grandes de α , a população estável P_3^* e a população instável P_2^* se aproximam como no caso do Modelo de Referência.

Substituindo $h(P^*) = \frac{\alpha}{(P^* - k/2)^2}$ no sistema (4.4), obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{dg_1}{dt} = aPQ \left(1 - \frac{P+Q}{k} \right) - (m_1 + c_1) g_1 \\ \frac{dg_2}{dt} = c_1 g_1 - \frac{\alpha}{\left(P - k/2 \right)} g_2 - (m_2 + c_2) g_2 \\ \frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} c_2 g_2 - m_3 P \end{cases} \quad (5.4)$$

Por questão de simplicidade será assumindo novamente que as populações de machos e de fêmeas são iguais.

As soluções não triviais P_2^* e P_3^* são as raízes da equação (5.3).

5.1 Simulações Numéricas

As simulações numéricas apresentadas nessa seção foram resolvidas usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (Boyce e Diprima ,1998 , Hirsch, 2004). As simulações dos cenários descritos pelos modelos matemáticos foram desenvolvidos no ambiente Maple 9.

Para a análise da influência do parâmetro de deficiência do cuidado parental, foram realizadas três simulações. Foi tomado como referência o caso III introduzido no capítulo 4. Foram atribuídos três valores para o parâmetro α . A tabela 5.1 exhibe os casos que serão simulados. Para todos os casos serão representados os retratos de fase no plano de fase $P \times g_2$ com as respectivas evoluções no tempo.

Tabela 5.1: Valores de α

Casos	α
I	30
II	100
III	221

Substituindo os parâmetros da tabela 4.4 na equação 5.3 obtém-se:

$$-P^2 + 50P - 225 = \frac{1666\alpha_i}{(P-50)^2} \quad (5.5)$$

As soluções de (5.5) são dadas pelos pontos de intersecção da parábola do lado esquerdo com a curva do lado direito, conforme ilustrado esquematicamente na figura 5.2.

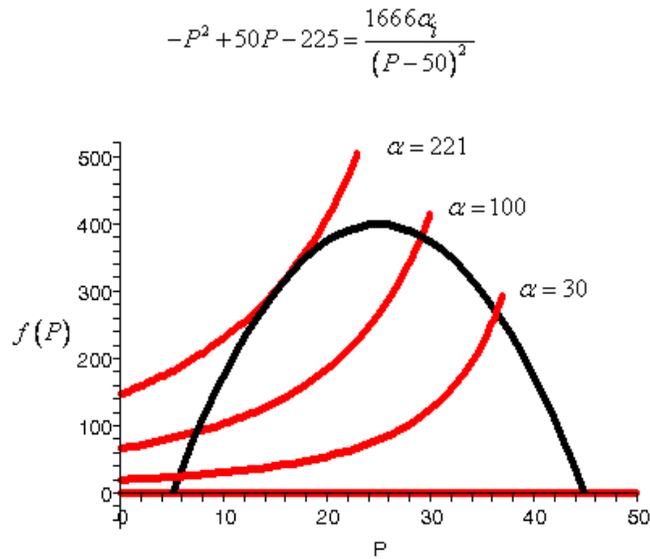


Figura 5.2: Representação esquemática das raízes da equação 5.5. O desempenho do macho, representado por α_i , aumenta com valores crescentes de i .

Observa-se na figura 5.2 que α varia entre 0 e 221

- Caso I: Os parâmetros utilizados nas simulações são $\alpha=30$ e os estimados na seção 4.2.2, tabela 4.4

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (5.4):

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,100, -0,100, -0,147, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

♦ $P_2 : \{g_1 = 12130, g_2 = 8065, P = 6, Q = 6\}$

Autovalores: $-0,852, -0,338, 0,040, -0,100$ - Equilíbrio Instável : Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 154600, g_2 = 52000, P = 36, Q = 36\}$

Autovalores: $-0,930, -0,184 + 0,31I, -0,184 - 0,31I, -0,100$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P=0$ e $P=36$ são estáveis e $P=6$ é instável.

A figura 5.3 mostra as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as figuras 5.4 e 5.5 mostram a correspondente evolução da população do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=6, Q(0)=6$

CI1a: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=8, Q(0)=8$

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=18, Q(0)=18$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=26, Q(0)=26$

CI4: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=49, Q(0)=49$

CI5: $g_1(0)=0; g_2(0)=8000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=12000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0; g_2(0)=23100; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=42800; P(0)=0, Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0; g_2(0)=53400; P(0)=0, Q(0)=0$

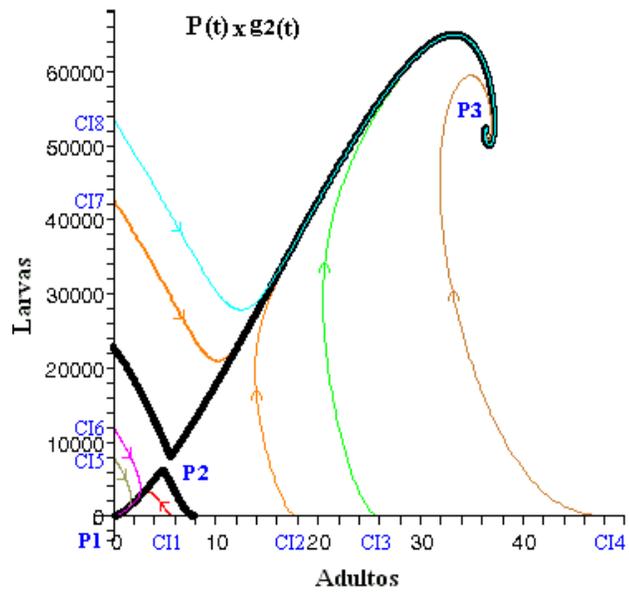


Figura 5.3: Projeção no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\alpha = 30$ e $k = 100$

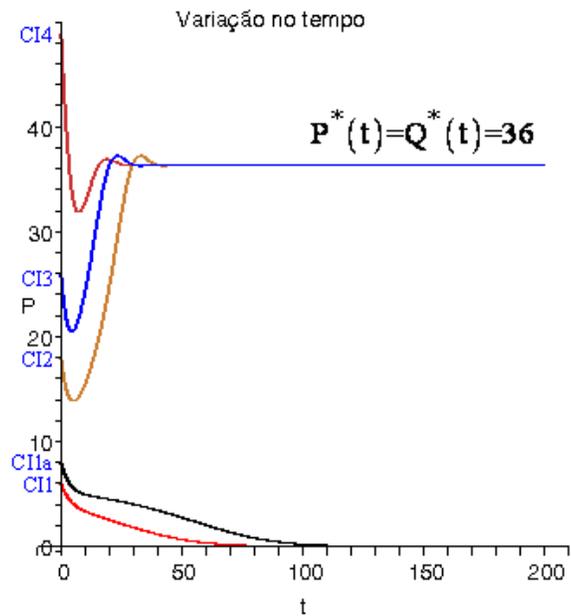


Figura 5.4 Evolução da população de adultos no tempo com cinco condições iniciais para $\alpha = 30$ e $k = 100$

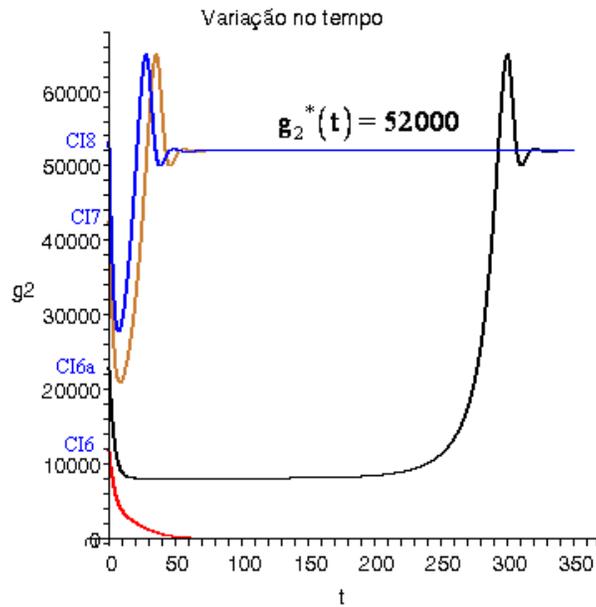


Figura 5.5: Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\alpha = 30$ e $k = 100$

As figuras de 5.3 a 5.5 representam a projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se só populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se só as populações de larvas. Seja agora considerar as populações iniciais CI9: $g_1(0) = 170000$, $g_2(0) = 57000$, $P(0) = 40$ e $Q(0) = 40$. A figura 5.6 mostra a trajetória no espaço $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ e a figura 5.7 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

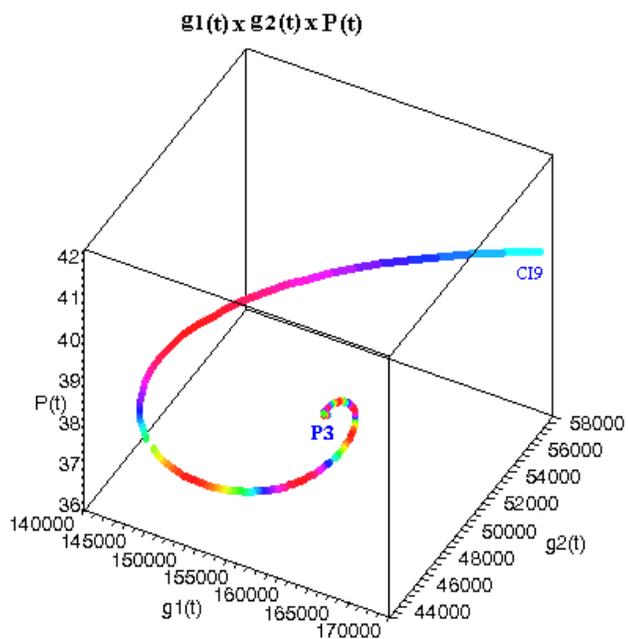


Figura 5.6: Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 170000, g_2(0) = 57000, P(0) = 40, Q(0) = 40$ para $\alpha = 30$ e $k = 100$

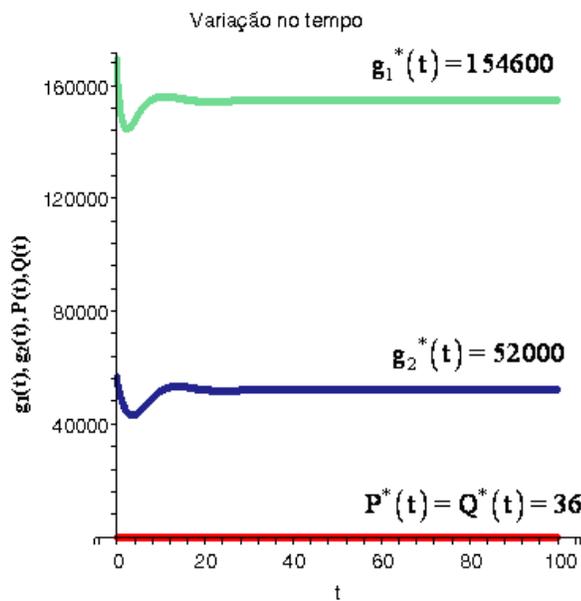


Figura 5.7: Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0) = 170000, g_2(0) = 57000, P(0) = 40, Q(0) = 40$ para $\alpha = 30$ e $k = 100$

Para os parâmetros representados na tabela 4.4 e $\alpha=30$ conforme se observa nas figuras 5.3 e 5.6 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P3.

Nas figuras 5.4, 5.5 e 5.7 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio igual a $g_1^* = 154600$, $g_2^* = 52000$, $P^* = 36$ e $Q^* = 36$ ou vão para a extinção.

- Caso II : Os parâmetros utilizados nas simulações são $k=100$ e $\alpha=100$ e os estimados na seção 4.2.2, tabela 4.4

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0., g_2 = 0., P = 0., Q = 0.\}$

Autovalores: $-0,100, -0,100, -0,175, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 20260., g_2 = 10640, P = 7., Q = 7.\}$

Autovalores: $-0,834, -0,394, 0,038, -0,100$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

- ♦ $P_3 : \{g_1 = 151900., g_2 = 41630., P = 29., Q = 29.\}$

Autovalores: $-0,854, -0,255 + 0,13I, -0,255 - 0,13I, -0,100$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P=0$ e $P=29$ são estáveis e $P=7$ é instável.

A figura 5.8 mostra as trajetórias no plano $P \times g_2$, e as figuras 5.9 e 5.10 mostram as correspondentes evoluções das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=6,Q(0)=6$

CI1a: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=11,Q(0)=11$

CI2: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=18,Q(0)=18$

CI3: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=26,Q(0)=26$

CI4: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=49,Q(0)=49$

CI5: $g_1(0)=0;g_2(0)=12000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI6: $g_1(0)=0;g_2(0)=22000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0;g_2(0)=34474;P(0)=0,Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0;g_2(0)=43000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0;g_2(0)=54000;P(0)=0,Q(0)=0$

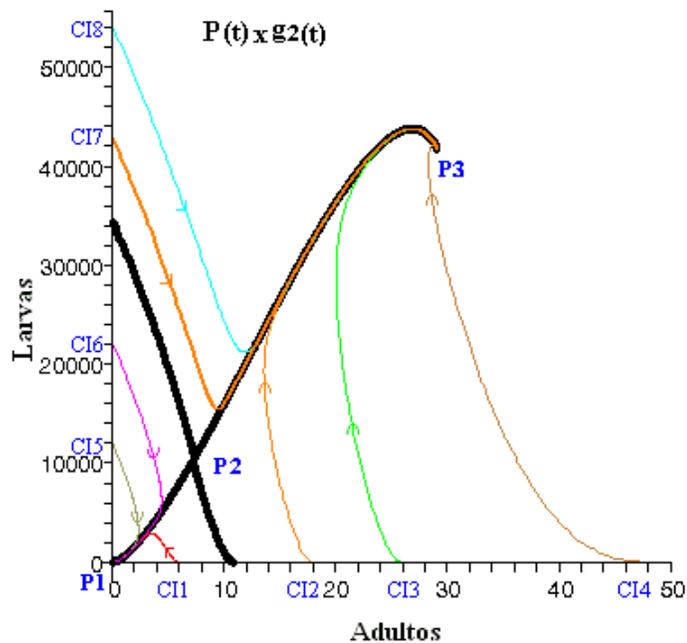


Figura 5.8: Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\alpha = 100$ e $k = 100$

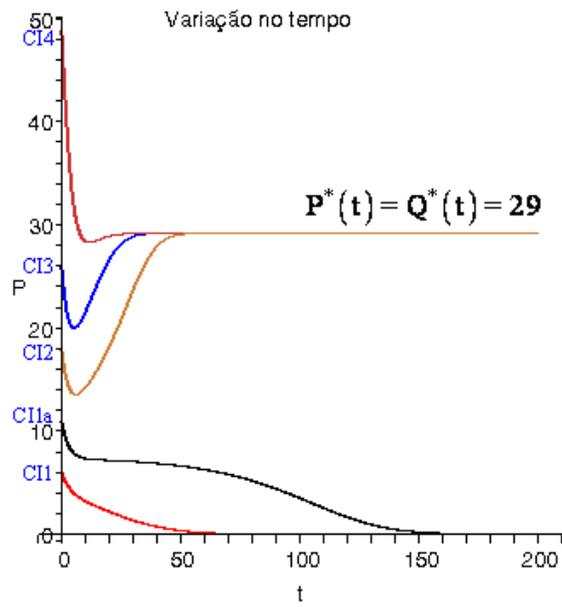


Figura 5.9: Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais.
para $\alpha = 100$ e $k = 100$

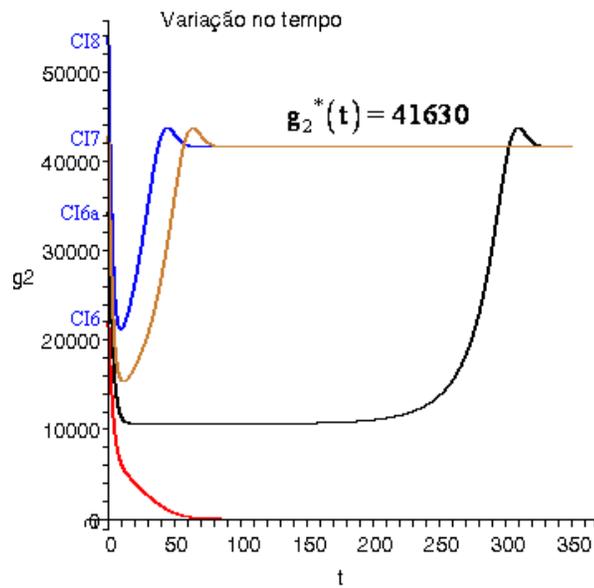


Figura 5.10: Evolução da população de larvas no tempo para quatro condições iniciais.
para $\alpha = 100$ e $k = 100$

As figuras de 5.8 a 5.10 representam a projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se somente populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se somente as populações de larvas. Seja agora considerar as populações iniciais CI9: $g_1(0) = 167000$, $g_2(0) = 45800$, $P(0) = 32$ e $Q(0) = 32$. A figura 5.11 mostra as trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ e a figura 5.12 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

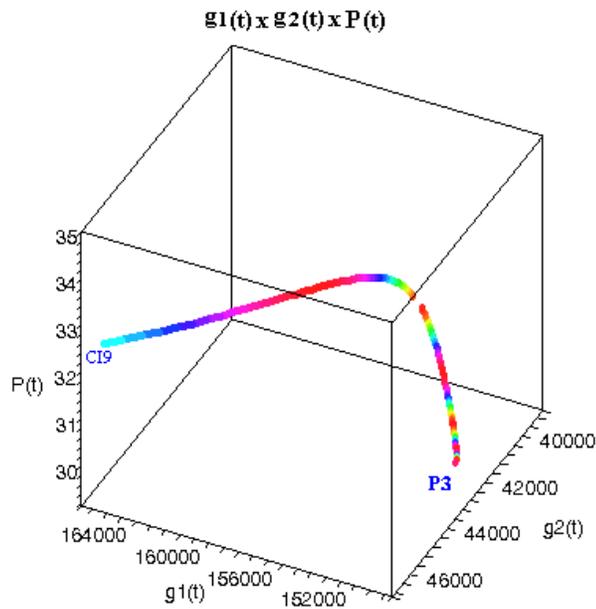


Figura 5.11: Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para

a condição inicial: $g_1(0) = 167000, g_2(0) = 45800, P(0) = 32, Q(0) = 32$

para $\alpha = 100$ e $k = 100$

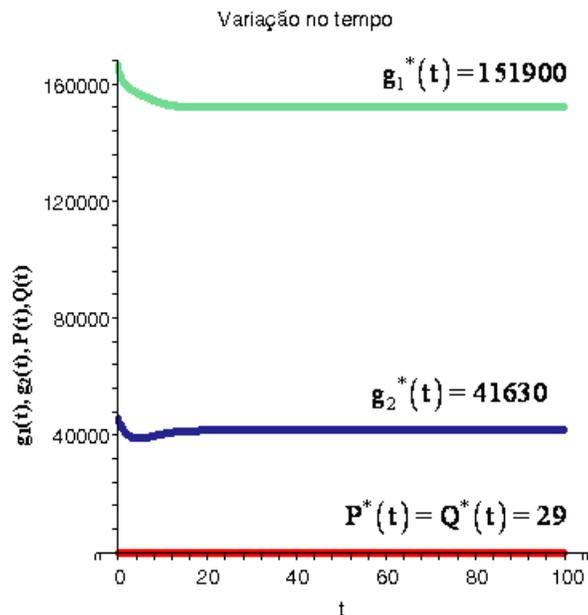


Figura 5.12: Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial:

$$g_1(0) = 167000, g_2(0) = 45800, P(0) = 32, Q(0) = 32$$

para $\alpha = 100$ e $k = 100$

Para os parâmetros representados na tabela 4.4 e $\alpha = 100$ conforme se observa nas figuras 5.8 e 5.11 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P3.

Nas figuras 5.9, 5.10 e 5.12 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio igual a $g_1^* = 151900$, $g_2^* = 41630$, $P^* = 29$ e $Q^* = 29$ ou vão para a extinção.

- Caso III : Os parâmetros utilizados nas simulações são $k = 100$ e $\alpha = 221$ e os estimados na seção 4.2.2, tabela 4.4

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (5.4):

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0., g_2 = 0., P = 0., Q = 0.\}$

Autovalores: $-0,100, -0,100, -0,223, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

♦ $P_2 : \{g_1 = 68840, g_2 = 21690, P = 15, Q = 15\}$

Autovalores: $-0,750, -0,572, 0,004, -0,100$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 77590, g_2 = 23440, P = 16, Q = 16\}$

Autovalores: $-0,740, -0,587, -0,005, -0,100$ - Equilíbrio Estável: Nó

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P=0$ e $P=16$ são estáveis e $P=15$ é instável.

As figuras 5.13 e 5.14 mostram as trajetórias no plano $P \times g_2$ e as figuras 5.15 e 5.16 mostram as correspondentes evoluções das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=12, Q(0)=12$

CI1a: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=21, Q(0)=21$

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=22, Q(0)=22$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=36, Q(0)=36$

CI4: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=48, Q(0)=48$

CI5: $g_1(0)=0; g_2(0)=60000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=70000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0; g_2(0)=88400; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=110000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0; g_2(0)=130000; P(0)=0, Q(0)=0$

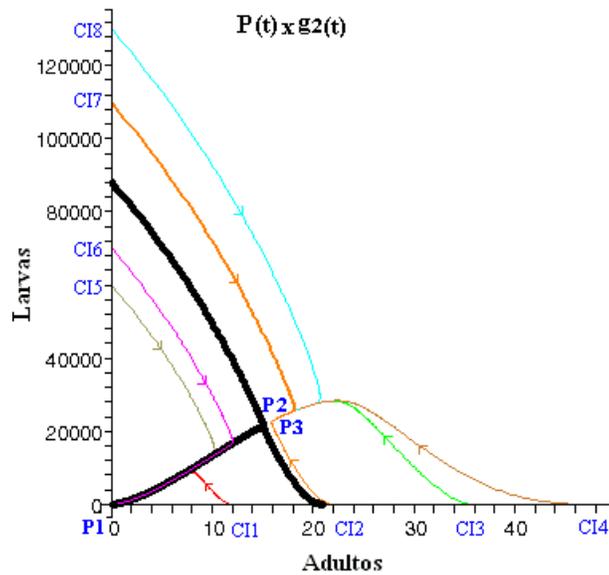


Figura 5.13 Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\alpha = 221$ e $k = 100$

A figura 5.13 mostra o gráfico da seção do plano de fase $P(t) \times g_2(t)$ numa janela retangular de $[-1,05, 49,47]$ por $[-3500,135300]$. Para obter uma visão mais completa dos pontos de equilíbrios P_2 e P_3 , foi dado um zoom de $[12,17]$ por $[10000,28000]$, conforme mostrado na figura 5.14

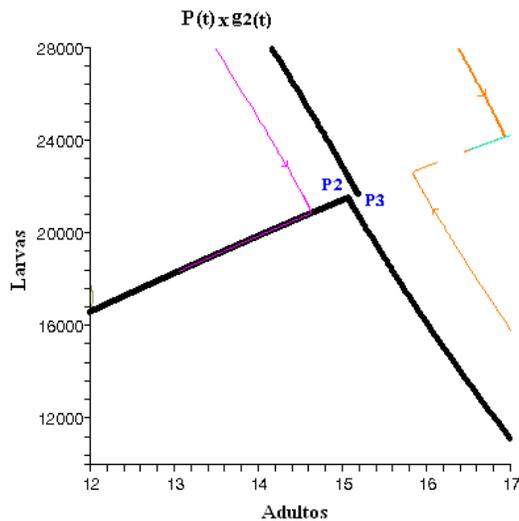


Figura 5.14: Zoom da Seção do plano de fase $P \times g_2$ mostrando os pontos de equilíbrios P_2 e P_3 para $\alpha = 221$ e $k = 100$

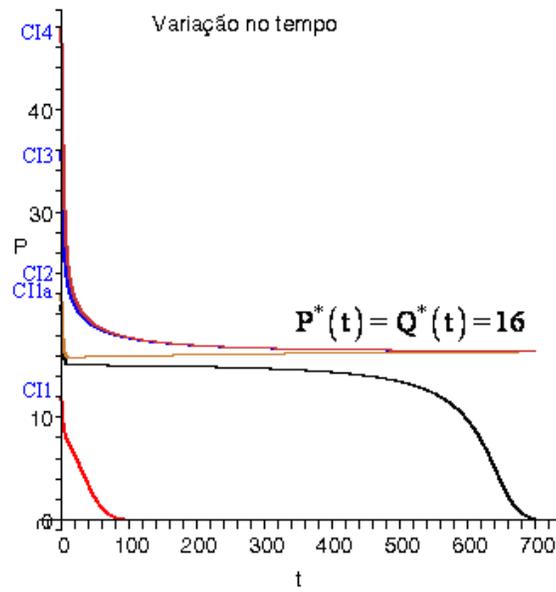


Figura 5.15 Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\alpha = 221$ e $k = 100$

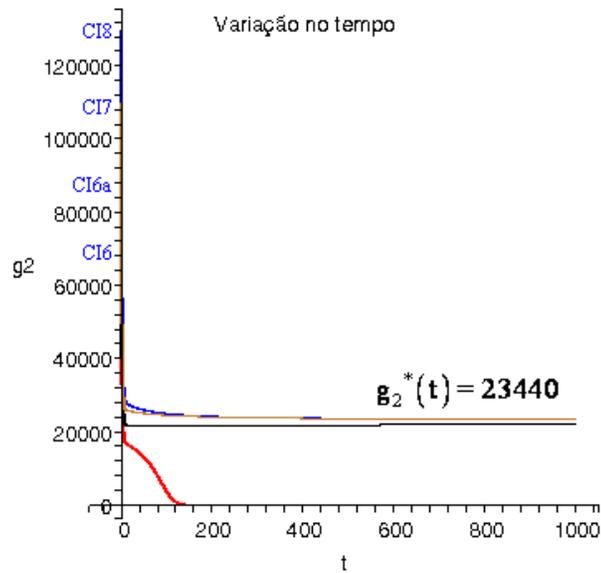


Figura 5.16 Evolução da população de larvas no tempo para quatro condições iniciais para $\alpha = 221$ e $k = 100$

As figuras de 5.13 a 5.16 representam a projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se somente populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se somente as populações de larvas. Seja agora considerar as populações iniciais CI9: $g_1(0) = 120000$, $g_2(0) = 35000$, $P(0) = 25$ e $Q(0) = 25$. A figura 5.17 mostra as trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ e a figura 5.18 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

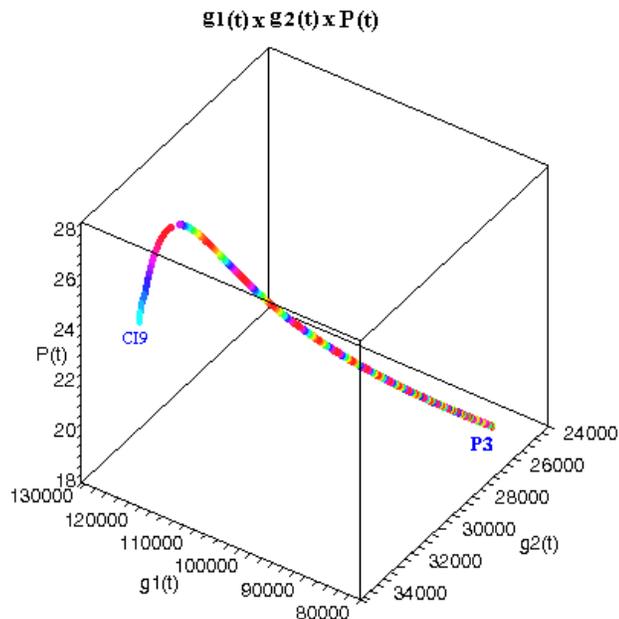


Figura 5.17 Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 120000$, $g_2(0) = 35000$, $P(0) = 25$, $Q(0) = 25$ para $\alpha = 221$ e $k = 100$

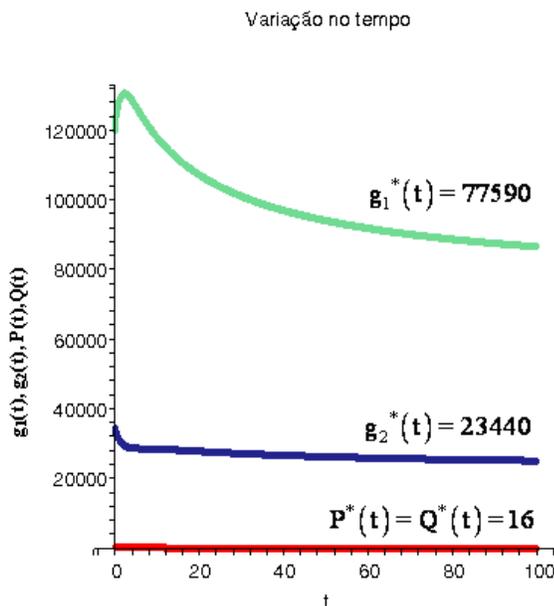


Figura 5.18 Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial:

$$g_1(0) = 120000, g_2(0) = 35000, P(0) = 25, Q(0) = 25$$

para $\alpha = 221$ e $k = 100$

Para os parâmetros representados na tabela 4.1 com $\alpha = 221$ conforme se observa nas figuras 5.13 e 5.17 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou tendem para o ponto estável P3.

Nas figuras 5.15, 5.16 e 5.18 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio igual a $g_1^* = 77590$, $g_2^* = 23440$, $P^* = 16$ e $Q^* = 16$ ou vão para a extinção.

A tabela 5.2 mostra os resultados numéricos obtidos nas simulações das duas populações de equilíbrio que não foram extintas para os casos de I a III deste capítulo e para o caso III do capítulo 4.

Tabela 5.2. Características das populações para o caso III do capítulo 4 e casos I a III do capítulo 5

		g_1^*	g_2^*	$P^* = Q^*$	Tipo de Equilíbrio
	P1	0	0	0	Estável: nó
$\alpha=0$	P2	9650	7143	5	Instável: sela
	P3	86850	64290	45	Estável: foco
	P1	0	0	0	Estável: nó
$\alpha=30$	P2	12130	8065	6	Instável: sela
	P3	154600	52000	36	Estável: foco
	P1	0	0	0	Estável: nó
$\alpha=100$	P2	20260	10640	7	Instável: sela
	P3	151900	41630	29	Estável: foco
	P1	0	0	0	Estável: nó
$\alpha=221$	P2	68840	21690	15	Instável: sela
	P3	77590	23440	16	Estável: nó

Os tipos de estabilidades para os três pontos de equilíbrio para $\alpha \leq 100$ são os mesmos. Com o aumento do valor do parâmetro α o número de pirarucus que atingem a maturidade diminui como consequência da falta de cuidado parental na fase anterior. O número de peixes no ponto de equilíbrio P_2^* , ao contrário aumenta. Longe de ser um cenário favorável, um grande número de peixes na vizinhança de um ponto de equilíbrio instável, pode camuflar a situação real, dando a impressão que um número relativamente alto de indivíduos evitaria um colapso rápido para a extinção.

O modelo sugere que acontece justamente o contrário. A medida do perigo não é a distância até a condição de extinção ($g_1^* = 0, g_2^* = 0, P^* = Q^* = 0$), mas a distância entre a

população de equilíbrio estável não trivial P_3^* e a população de equilíbrio instável P_2^* . Para o presente caso a população de equilíbrio instável P_2^* cresce de 5, quando o cuidado parental é eficiente ($\alpha = 0$), para 15 quando P_3^* e P_2^* praticamente coincidem. Este cenário surge quando $\alpha \approx 220$ correspondendo ao nível crítico de proteção α_{crit} . Entretanto, a população não diminui continuamente de 45 a zero, indo para a extinção. Ela diminui de 45 a 15 quando o sistema entra em colapso e inevitavelmente tende para a extinção.

A aproximação entre os pontos P_2^* e P_3^* para crescentes valores de α é mostrado na figura 5.19. Para o valor particular de $\alpha = \alpha_{crit}$ onde a curva $D\alpha h(P^*)$ tangencia a parábola $f(P^*)$, veja figura 5.1, os dois pontos coincidem e $P_2^* = P_3^*$ é o único ponto estável do sistema é a solução trivial $P_1^* = 0$ correspondendo à extinção.

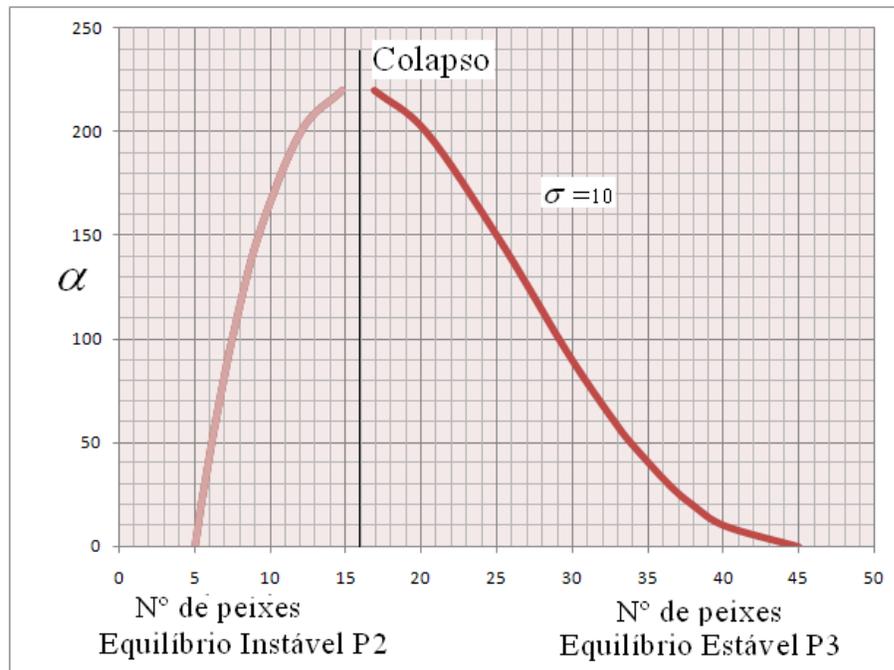


Figura 5.19 Limiar de Extinção como função do parâmetro α da tabela 5.3

Outro resultado interessante do modelo consiste da variação de ovos fertilizados com o parâmetro α . À medida que o valor de α cresce é esperado que a quantidade de larvas e conseqüentemente a quantidade de peixes adultos diminua. Estes resultados são confirmados pelo modelo como indicado na tabela 5.3.

Tabela 5.3. Variação dos níveis das populações de equilíbrio P2 e P3 com o parâmetro α .

α	Ponto de equilíbrio P3			Ponto de equilíbrio P2		
	P_3^*	g_1^*	g_2^*	P_2^*	g_1^*	g_2^*
0	45	86850	64290	5	9650	7143
10	40,13	136300	57330	5,2	10420	7441
20	38	148700	54280	5,4	11250	7748
30	36,4	154600	52000	5,64	12130	8065
50	33,89	158700	48420	6,1	14060	8731
60	32,83	158700	46890	6,35	15130	9082
80	30,90	156400	44140	6,88	17510	9828
100	29,14	151900	41630	7,45	20260	10640
150	25,01	134100	35730	9,19	29550	13130
200	20,32	105100	29030	11,98	46780	17110
220	16,89	81040	24130	14,73	65660	21050

A variação do número de ovos fertilizados poderia a princípio seguir mesmo esta tendência. Entretanto, o cenário revelado pelo modelo não confirma esta hipótese. A quantidade de ovos fertilizados g_1^* do ponto de equilíbrio estável P_3^* inicialmente aumenta

com o aumento do parâmetro α . Em outras palavras, o modelo prevê que a falta de cuidado dos machos ativa um tipo de processo de autodefesa. Esta tendência persiste até um valor de $\alpha \approx 60$ conforme representado na figura 5.20. Depois disso, o número de ovos fertilizados segue a tendência natural e começa a declinar. Portanto, seria interessante métodos que confirmem a realidade.

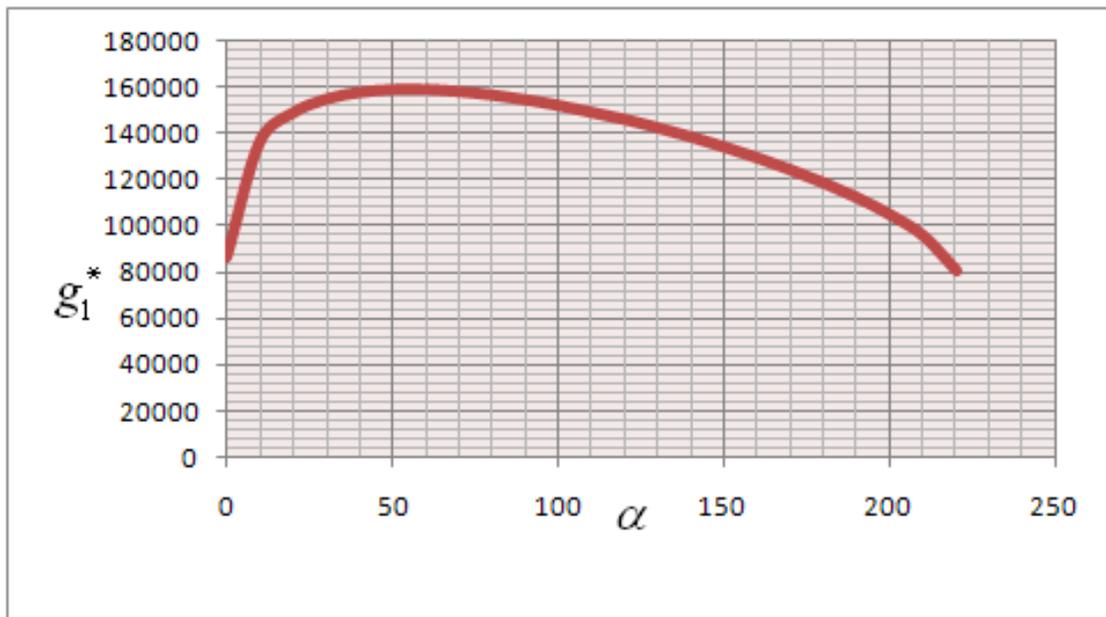


Figura 5.20 Variação do número de ovos em função de α

Este resultado inesperado freqüentemente pode traduzir um tipo de resiliência natural encontrado na natureza.

Bacia de Atração

As bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para o caso III definido nesta seção estão representadas nas figuras 5.21 e 5.22.

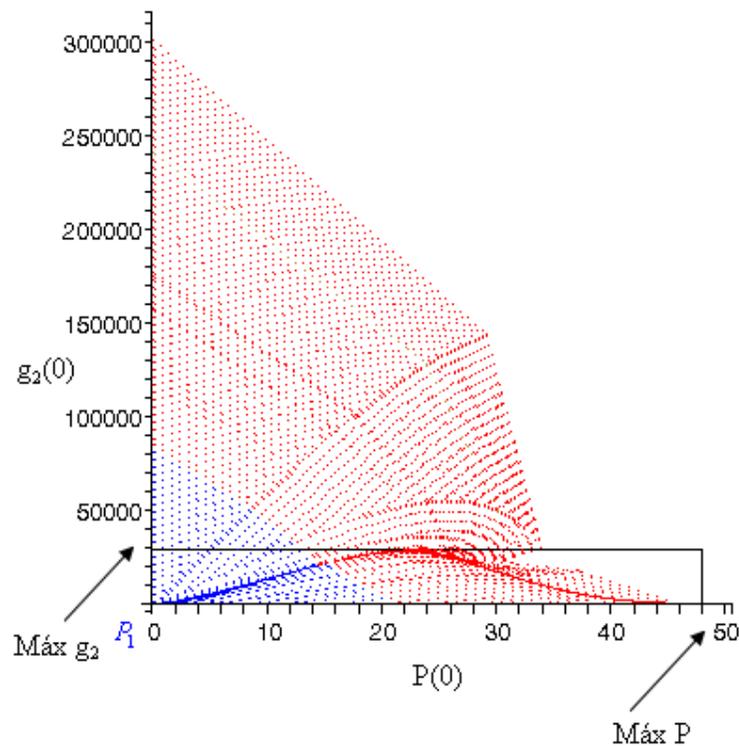


Figura 5.21: Bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para $\alpha = 221$ e $k = 100$

Na figura 5.21 os pontos assinalados em vermelho referem-se à bacia de atração relativa ao ponto de equilíbrio P_3 . O subconjunto dessa bacia admissível dentro das restrições práticas impostas pela dinâmica populacional do pirarucu é mais restrito. Esse subconjunto contém os pontos de origem das trajetórias que ficam contidas da região com superiores $\text{máx } P$ e $\text{máx } g_2$ e inferiores $P=0$ e $g_2=0$. São os valores máximos admissíveis para o modelo. Para os parâmetros referentes ao caso III, encontram-se os valores $\text{máx } P = 48$ e $\text{Max } g_2 = 28400$. Em azul observa-se o subconjunto da bacia de atração para o ponto de extinção P_1 . Limitada por $P=0$ e $g_2=0$. Não se admitem populações negativas.

A figura 5.21 mostra o gráfico da seção do plano de fase $P \times g_2$ numa janela retangular de $[-1,7, 50,5]$ por $[-4100, 316000]$. Para obter uma visão mais completa dos pontos de

equilíbrio P_1, P_2 e P_3 , foi dado um zoom de $[0,10]$ a $[-4100, 40000]$, conforme mostrado na figura 5.22.

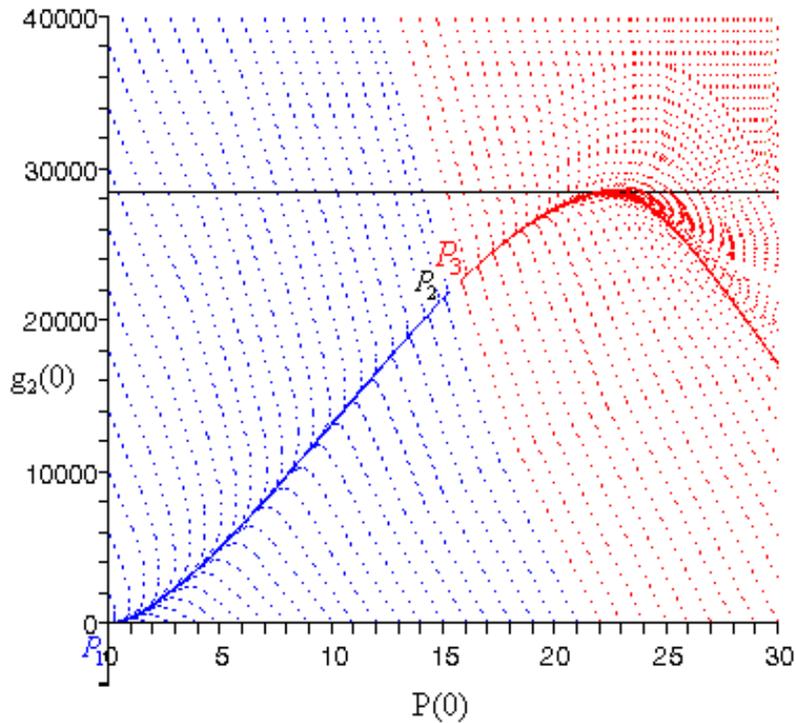


Figura 5.22: Zoom mostrando as bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para $\alpha = 221$ e $k = 100$

5.2 Considerações Finais

A dinâmica das populações de pirarucus apresentou-se semelhante àquelas discutidas no capítulo anterior. Os três cenários apresentados tiveram por objetivo a análise das tendências decorrentes dos efeitos causados pela falta ou diminuição do cuidado parental. Esta deficiência como definida anteriormente é controlada pelo parâmetro α . É evidente que para o aumento dos valores de α o desempenho do macho diminui. A diferença entre a população de equilíbrio estável diferente de zero, e a instável deve ser tanto menor quanto maior for α . Isto significa que para baixas taxas de cuidado parental o equilíbrio populacional fica muito

prejudicado há forte tendência para a instabilidade. O comportamento previsto pelo modelo indica que, por algum instinto natural a espécie reage tentando evitar a extinção. Nota-se que, inicialmente, o número de ovos que conduzem ao equilíbrio estável aumenta ao tentar compensar a falta de adequada vigilância que deve ser prestada pelos machos. Este resultado positivo funciona até um certo nível de fracasso masculino relativo à proteção da descendência. Porém além de um determinado ponto esta tentativa não é suficiente para impedir o efeito de aniquilação de larvas devido a falta de cuidado parental. Então, acima de um índice de incompetência implícito no parâmetro α a resistência natural não é capaz de evitar o colapso em direção à extinção e o número de ovos diminui até zerar com a extinção total da espécie. É observado um crescimento contínuo de ovos e larvas para a população de equilíbrio P_2 mas este é um equilíbrio instável e não pode manter a população num estado estacionário.

Este tipo de comportamento é muito plausível e pode ser observado em vários fenômenos naturais. A resiliência de certas espécies muito perto da extinção é um tipo de comportamento semelhante ao que foi discutido anteriormente.

A interpretação das trajetórias no plano de fase e a solução no tempo são as mesmas que no capítulo anterior.

Capítulo 6

Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus com a Influência da Pesca

Nos capítulos 4 e 5 foram apresentados modelos matemáticos que descrevem a dinâmica populacional de pirarucus (*Arapaima gigas*) na Reserva Mamirauá sem pesca. Estes modelos foram designados como Modelo Referência e Modelo com a Influência do Cuidado Parental. No modelo Referência foi considerado como parâmetro de decréscimo somente a mortalidade natural e no Modelo com Influência do Cuidado Parental além da mortalidade natural por doenças, parasitismo e catástrofes, foi considerado também como decréscimo, a mortalidade natural induzida pela ausência de cuidado parental.

Neste capítulo será apresentado um modelo para a pesca de pirarucus na Reserva Mamirauá. Serão considerados como parâmetros de decréscimo além da mortalidade natural e da ausência de cuidado parental, a captura de pirarucus. Este modelo será designado como Modelo -F.

6.1 Modelo – F : Captura Dependente da Densidade no Modelo Referência

A pesca considerada no Modelo-F ocorre somente na fase adulta, quando os animais tem cerca de cinco anos de idade, medem em torno de 165 cm e atingiram a maturidade sexual.

O Modelo-F que descreve a dinâmica populacional de pirarucus na Reserva Mimirauá é representado por um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares.

Conforme nos modelos anteriores o ciclo de vida total, também é dividido em quatro fases principais, isto é: a fase dos ovos, a fase das larvas/pós larvas, fase dos juvenis e a fase dos adultos. Os adultos são subdivididos em machos e fêmeas.

Considere o sistema (6.1) abaixo. A mortalidade induzida pela pesca é introduzida através dos parâmetros f_3 e f_4 . Agora, além do termo $h(p)$ normalizado em relação a quantidade de larvas g_2 , ou seja, a variável referente à população de larvas será dividida pelo tamanho da população total de larvas, é introduzido na equação (6.1b) um novo termo $\hat{h}(P)$ associado à pesca. Este termo não é normalizado em relação à quantidade de larvas g_2 , isto é, $\hat{h}(P)$ tem a densidade de larvas/tempo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dg_1}{dt} = a PQ \left(1 - \frac{P+Q}{k} \right) - (m_1 + c_1) g_1 \end{array} \right. \quad (6.1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dg_2}{dt} = c_1 g_1 - \hat{h}(P) - h(P) g_2 - (m_2 + c_2) g_2 \end{array} \right. \quad (6.1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} c_2 g_2 - m_3 P - f_3 P \end{array} \right. \quad (6.1c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} c_2 g_2 - m_4 Q - f_4 Q \end{array} \right. \quad (6.1d)$$

onde $f_3 P$ e $f_4 Q$ são as capturas por unidade de tempo de machos e fêmeas respectivamente sendo f_3 e f_4 medidas dos esforços dispendidos.

A solução do sistema é dada por :

$$\left[-P^2 + \frac{k}{2}P - K_1 m_3 - K_3 m_3 h(P) - K_1 f_3 - K_2 \frac{\hat{h}(P)}{P} - K_3 f_3 h(P) \right] P = 0 \quad (6.2)$$

onde

$$K_1 = \frac{k}{a} \left(1 + \frac{m_1}{c_1} \right) \left(1 + \frac{m_2}{c_2} \right); \quad K_2 = \frac{k}{2a} \left(1 + \frac{m_1}{c_1} \right) \quad \text{e} \quad K_3 = \frac{k}{ac_2} \left(1 + \frac{m_1}{c_1} \right)$$

uma das soluções é $P_1 = 0$ e as outras duas, $P_{2,3}$ são dadas por:

$$-P^2 + \frac{k}{2}P - K_1 m_3 = K_1 f_3 + K_2 \frac{\hat{h}(P)}{P} + K_3 f_3 h(P) + K_3 m_3 h(P) \quad (6.3)$$

A solução $P_1 = 0$ corresponde à extinção. As outras duas estão associadas à $P_3 > P_2$.

Como será visto na seção 6.2, P_3 é estável e P_2 é instável.

As soluções são dadas pelos pontos de intersecção da parábola do lado esquerdo com a curva do lado direito, conforme ilustrado esquematicamente na figura 6.1.

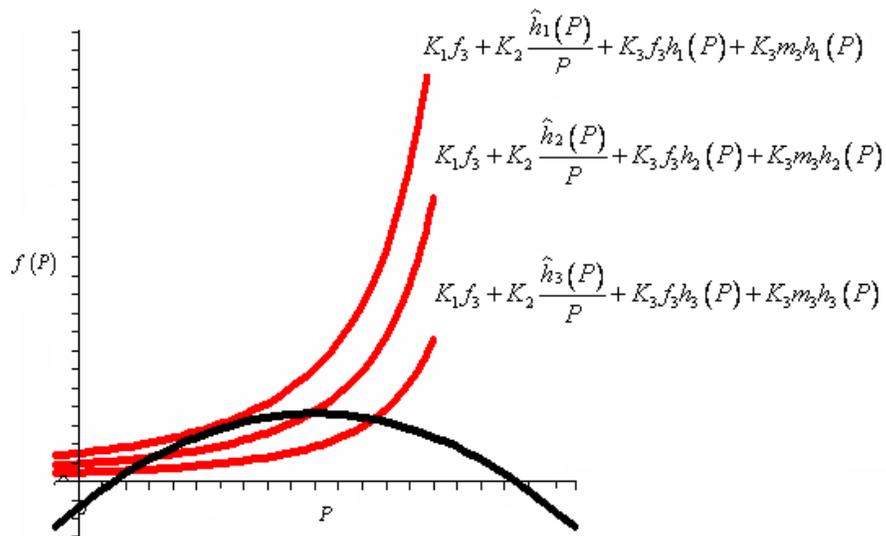


Figura 6.1: Representação esquemática das raízes da equação 6.3.

Existem várias possibilidades para a escolha de $\hat{h}(P)$. É desejável preservar as características principais do modelo de referência com $h(P)=0$. Particularmente, é importante preservar os três pontos de equilíbrio com as mesmas características de estabilidade.

Partindo do princípio que a falta do cuidado parental é devida somente a pesca o termo $h(P)$ é retirado da equação (6.3) e os pontos de equilíbrio $P_{2,3}$ são dados por:

$$-P^2 + \frac{k}{2}P - K_1m_3 = K_1f_3 + K_2 \frac{\hat{h}(P)}{P} \quad (6.4)$$

Seguindo um raciocínio semelhante que foi sugerido para a função dependente da densidade $h(P)$, pode-se definir:

$$\hat{h}(P) = \hat{\alpha}f_3 \left(\frac{P/(k/2)}{P/(k/2) - 1} \right)^2 \Rightarrow \hat{h}(P) = \frac{\hat{\alpha}f_3P^2}{(P - (k/2))^2} \quad (6.5)$$

O parâmetro f_3 em (6.5), correspondente à mortalidade devido a pesca, reduz automaticamente o impacto da falta de cuidado parental e $\hat{\alpha}$ é introduzido para ajustar esse efeito aos resultados reais esperados.

Substituindo o termo $\hat{h}(P)$ definido em (6.5) na equação (6.4) encontra-se:

$$-P^2 + \frac{k}{2}P - \frac{k}{a} \left(1 + \frac{m_1}{c_1} \right) \left(1 + \frac{m_2}{c_2} \right) (m_3 + f_3) = K_2 \frac{\hat{\alpha}f_3P}{(P - (k/2))^2} \quad (6.6)$$

Seja agora analisar no Modelo-F as possíveis variações dos parâmetros relacionados com a pesca (f_3 e f_4), e com o termo $\hat{h}(P)$ independente da densidade associado a pesca.

Por simplicidade serão assumidos a pesca de machos igual a pesca de fêmeas, ($f_3=f_4$).

Substituindo na equação (6.6) os mesmos parâmetros utilizados nos modelos dos capítulos 4 e 5, descritos na tabela 6.1

Tabela 6.1: Parâmetros para o Modelo-F

Parâmetros	Valores
a	386
c_1	0,10
c_2	0,00014
m_1	0,80
m_2	0,135
m_3	0,10
m_4	0,10
k	100

tem-se :

$$-P^2 + 50P - 225 = 1,17 \frac{\hat{h}(P)}{P} + 2251f_3 \quad (6.7)$$

Para obter o máximo valor do parâmetro f_3 a equação (6.7) foi resolvida para $\hat{h}(P)=0$, encontrando-se:

$$-P^2 + 50P - 225 = 2251f_3 \quad (6.8)$$

As soluções são dadas pelos pontos de intersecção da parábola do lado esquerdo com a curva do lado direito, conforme ilustrado esquematicamente na figura 6.2.

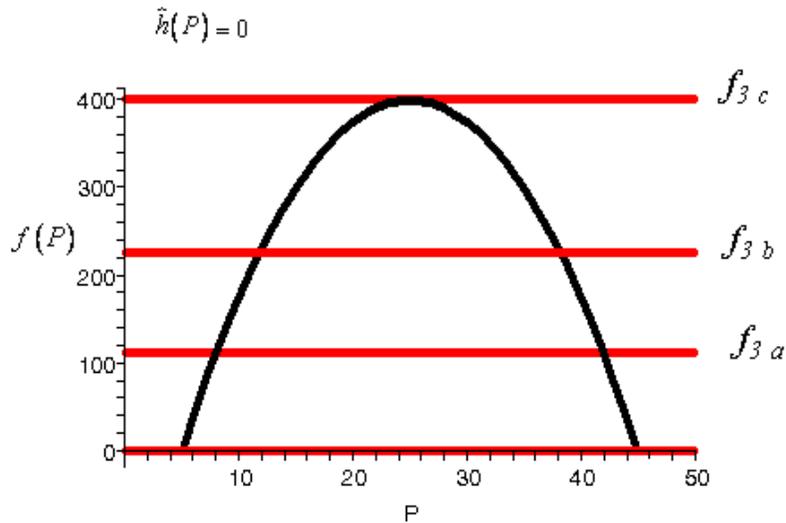


Figura 6.2 : Representação Esquemática das raízes da equação 6.8 para $0 < f_3 \leq 0,1777$

O máximo valor de f_3 obtém-se portanto da condição:

$$-\frac{(2500-900)}{-4} - 2251f_3 = 0 \text{ ou } f_3 = \frac{400}{2251} = 0,1777$$

Então se forem consideradas as perdas devido a falta de cuidado parental depois da pesca representada pelo termo $\hat{h}(P)$, o valor de f_3 que conduz a extinção deverá ser **maior** que 0,1777.

6.2 Estimação de Parâmetros

Os parâmetros estimados nos capítulos 4 e 5 para os Modelos Matemáticos da Densidade Populacional de Pirarucus valem para o Modelo-F aqui proposto. Serão estimados então os parâmetros relativos a pesca, quais sejam f_3, f_4 e $\hat{\alpha}$.

Observa-se na figura 6.2 que dependendo da pressão de pesca exercida sobre a população de Pirarucus, os parâmetros f_3 e f_4 variam no intervalo $(0, 0,1777]$.

Tomando $f_3 = 0,15$ é possível calcular o valor correspondente que conduz a extinção. O par $(f_3 = 0,15$ e $\hat{\alpha} = 10800)$ é uma combinação plausível para extinção devido a pesca e por conseguinte abandono de descendência. Agora com este par que representa a situação crítica que conduz a extinção foi assumida como primeira aproximação a relação linear $\hat{\alpha} = 72000f_3$. O coeficiente $\hat{\alpha} f_3$ na equação (6.5) varia então com o quadrado de f_3 como mostrado na figura 6.3

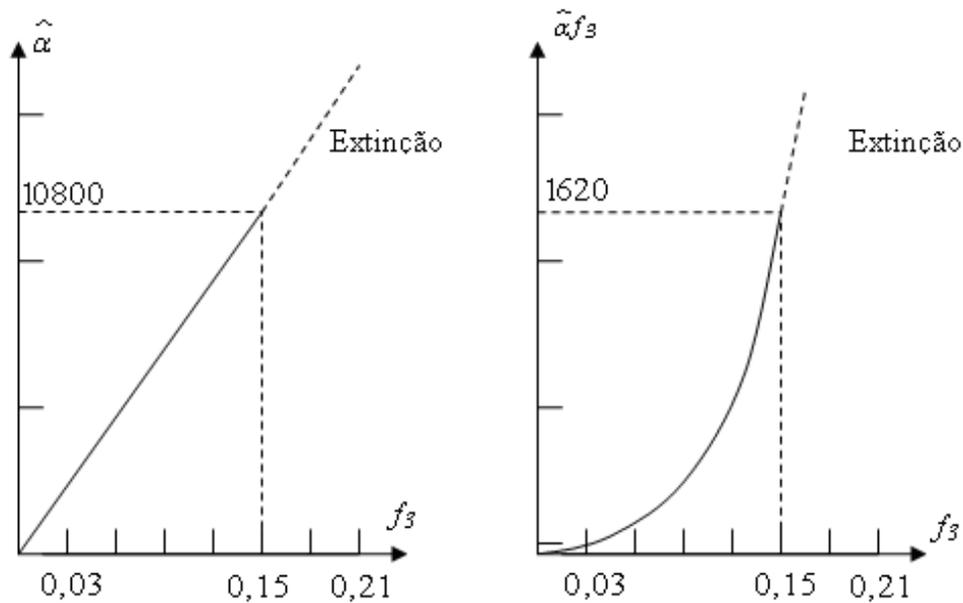


Figura 6.3 : Variação de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}f_3$ com f_3 .

Da relação linear $\hat{\alpha} = 72000f_3$, podemos estimar os pares $f_3 = 0,05$ e $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = 0,10$ e $\hat{\alpha} = 7200$.

6.3 Simulações Numéricas

O sistema (6.9) foi resolvido numericamente usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (Diprima e Boyce ,1998 e Hirsch 2004). As simulações dos cenários descritos pelos modelos matemáticos foram desenvolvidos no ambiente Maple 9.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dg_1}{dt} = a PQ \left(1 - \frac{P+Q}{k} \right) - (m_1 + c_1) g_1 \\ \frac{dg_2}{dt} = c_1 g_1 - \frac{\hat{\alpha} P f_3}{(P - k/2)^2} - (m_2 + c_2) g_2 \\ \frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} c_2 g_2 - m_3 P - f_3 P \\ \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} c_2 g_2 - m_4 Q - f_4 Q \end{array} \right. \quad (6.9)$$

A seguir serão apresentadas algumas simulações para a projeção de cenários relacionados a estratégia de manejo no abate de pirarucus adultos, com o objetivo de se obter informações quanto ao impacto sobre o recrutamento.

As simulações serão divididas em seis casos, definidos de forma a mostrar a dinâmica da população com as diferentes pressões de pesca. Nos três primeiros casos, considerou-se $\hat{h}(P)=0$ para três valores distintos de f_3 e f_4 . Os outros três casos foram escolhidos levando em conta a relação linear $\hat{\alpha} = 72000 f_3$.

A tabela 6.2 exhibe os seis casos que serão simulados.

Tabela 6.2: Valores de $\hat{\alpha}$, f_3 e f_4

	$\hat{\alpha}$	$f_3 = f_4$
Caso I	0	0,05
Caso II	0	0,10
Caso III	0	0,1777
Caso IV	3600	0,05
Caso V	7200	0,10
Caso VI	10800	0,15

- Caso I: Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 0$; $f_3 = f_4 = 0,05$ e os exibidos na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem o sistema (6.9) :

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,150 \quad -0,150, \quad -0,135, \quad -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 23290, g_2 = 17240, P = 8, Q = 8\}$

Autovalores: $-0,830, \quad -0,399, \quad 0,045, \quad -0,150$ - Equilíbrio Instável : Ponto de Sela

- ♦ $P_3 : \{g_1 = 121500, g_2 = 89910, P = 42, Q = 42\}$

Autovalores: $-0,983, -0,101 + 0,260I, -0,101 - 0,260I, -0,150$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 42$ são estáveis e $P = 8$ é instável.

A figura 6.4 mostra as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as figuras 6.5 e 6.6 mostram a correspondente evolução da população do peixe passando pelos seguintes pontos:

$$\text{CI1: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=8, Q(0)=8$$

$$\text{CI1a: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=15, Q(0)=15$$

$$\text{CI2: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=22, Q(0)=22$$

$$\text{CI3: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=28, Q(0)=28$$

$$\text{CI4: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=50, Q(0)=50$$

$$\text{CI5: } g_1(0)=0; g_2(0)=10000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI6: } g_1(0)=0; g_2(0)=25000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI6a: } g_1(0)=0; g_2(0)=38098; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI7: } g_1(0)=0; g_2(0)=50000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI8: } g_1(0)=0; g_2(0)=60000; P(0)=0, Q(0)=0$$

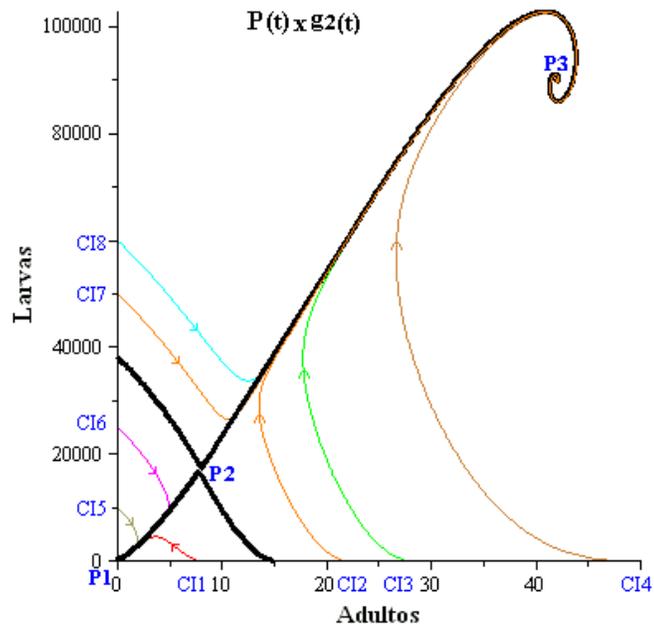


Figura 6.4: Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais com $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$.

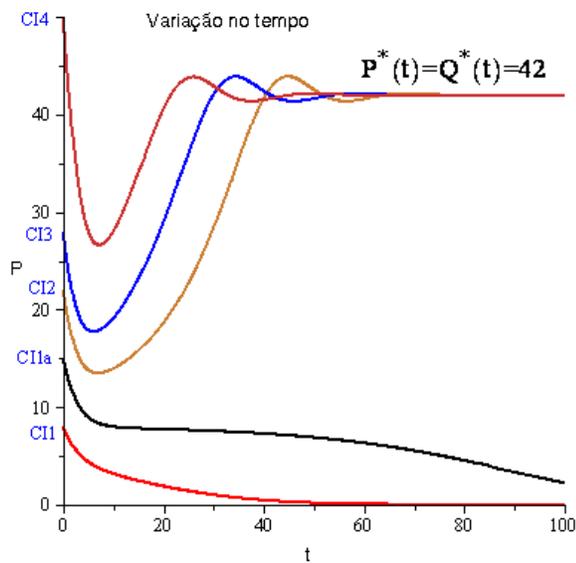


Figura 6.5 : Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$.

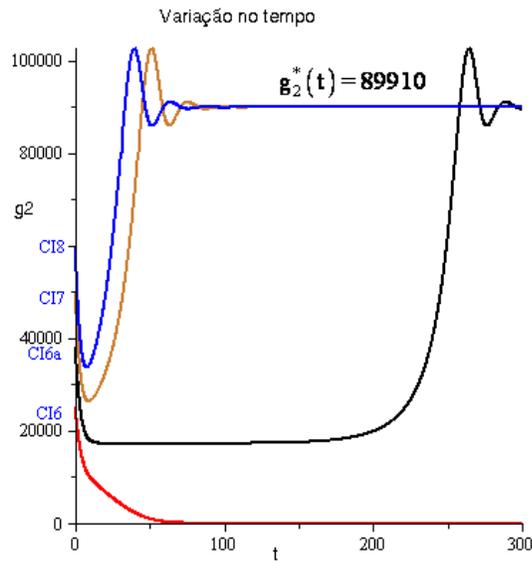


Figura 6.6: Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

As figuras de 6.4 a 6.6 representam a projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se só populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se somente as populações de larvas. Seja agora considerar as populações iniciais, CI9: $g_1(0) = 130200$, $g_2(0) = 96300$, $P(0) = 30$ e $Q(0) = 30$. A figura 6.7 mostra a trajetória no espaço $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ e a figura 6.8 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

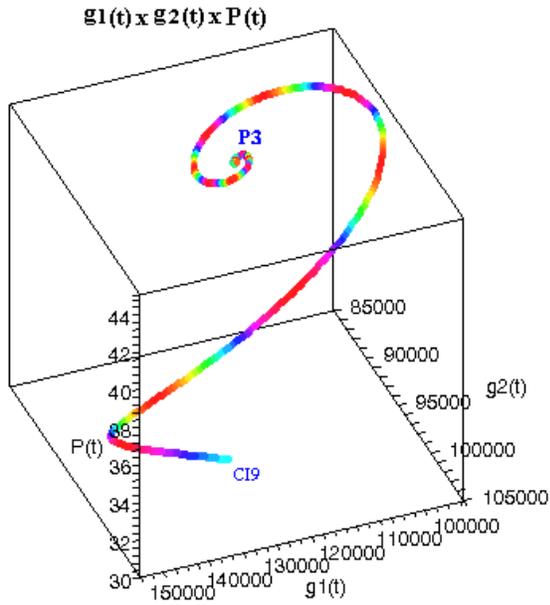


Figura 6.7: Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 130200, g_2(0) = 96300, P(0) = 30, Q(0) = 30$ para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

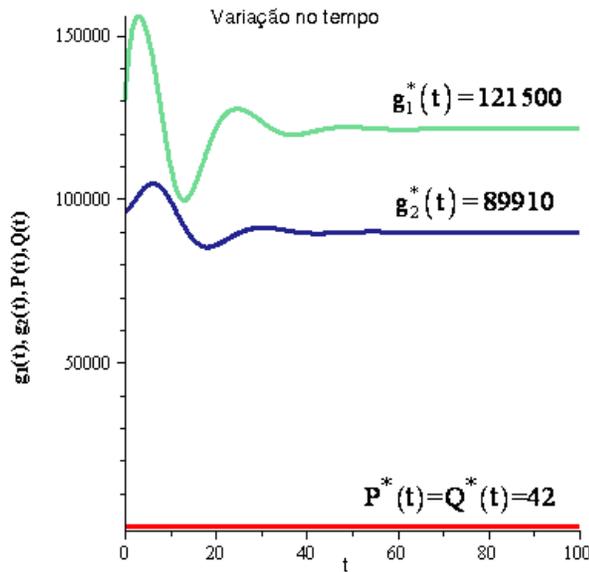


Figura 6.8: Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0) = 130200, g_2(0) = 96300, P(0) = 30, Q(0) = 30$ para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

Para os parâmetros representados na tabela 6.1, $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$ conforme se observa nas figuras 6.4 e 6.7 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P3.

Nas figuras 6.5, 6.6 e 6.8 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio igual a $g_1(t)^* = 121500$, $g_2(t) = 89910$ e $P(t)^* = Q(t)^* = 42$ ou vão para a extinção.

- ♦ Caso II: Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 0$; $f_3 = f_4 = 0,10$ e os mostrados na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem o sistema (6.9) :

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,200, -0,200, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 45440, g_2 = 33630, P = 12, Q = 12\}$

Autovalores: $-0,795, -0,484, 0,044, -0,200$ - Equilíbrio Instável : Ponto de Sela

- ♦ $P_3 : \{g_1 = 147600, g_2 = 109200, P = 38, Q = 38\}$

Autovalores: $-0,950, -0,143 + 0,193I, -0,143 - 0,193I, -0,200$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 38$ são estáveis e $P = 12$ é instável.

A figura 6.9 mostra as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as figuras 6.10 e 6.11 mostram a correspondente evolução da população do peixe passando pelos seguintes pontos:

$$\text{CI1: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=18, Q(0)=18$$

$$\text{CI2: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=26, Q(0)=26$$

$$\text{CI2a: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=28, Q(0)=28$$

$$\text{CI3: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=36, Q(0)=36$$

$$\text{CI4: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=50, Q(0)=50$$

$$\text{CI5: } g_1(0)=0; g_2(0)=30000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI6: } g_1(0)=0; g_2(0)=55000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI6a: } g_1(0)=0; g_2(0)=65538; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI7: } g_1(0)=0; g_2(0)=75000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\text{CI8: } g_1(0)=0; g_2(0)=90000; P(0)=0, Q(0)=0$$

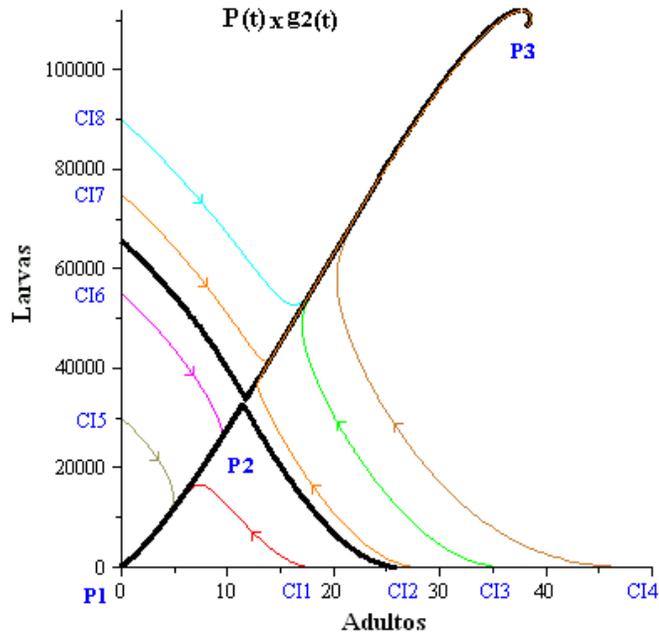


Figura 6.9: Projção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais com $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$.

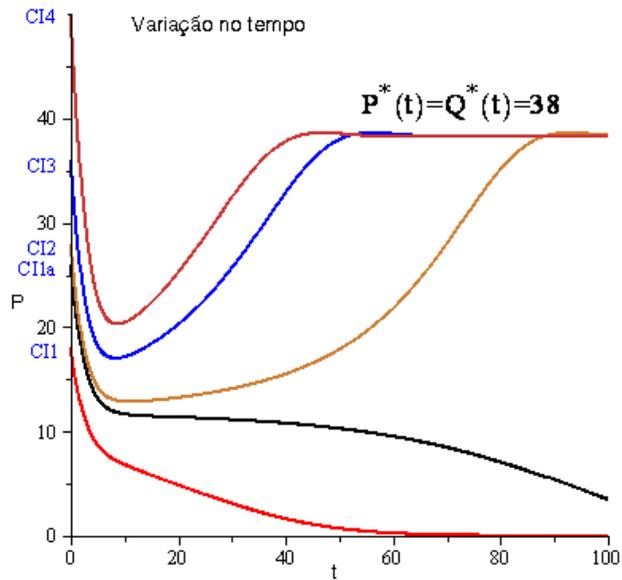


Figura 6.10 : Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$

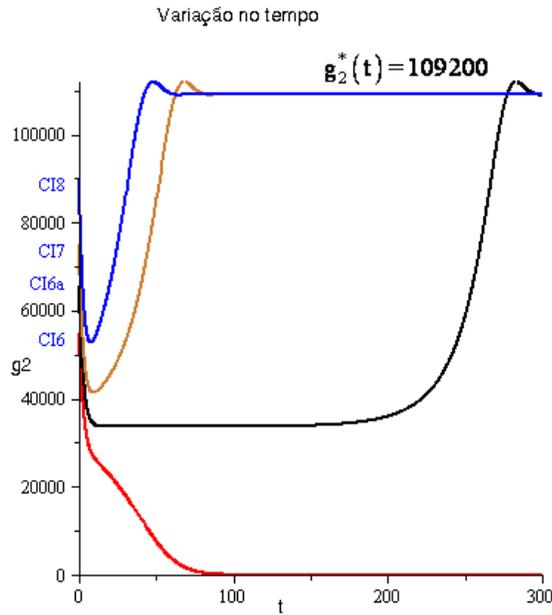


Figura 6.11: Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$

As figuras de 6.9 a 6.11 representam a projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se só populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se somente as populações de larvas.

Seja agora considerar as populações iniciais, CI9: $g_1(0) = 151500, g_2(0) = 112100, P(0) = 40, Q(0) = 40$. A figura 6.12 mostra a trajetória no espaço $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ e a figura 6.13 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

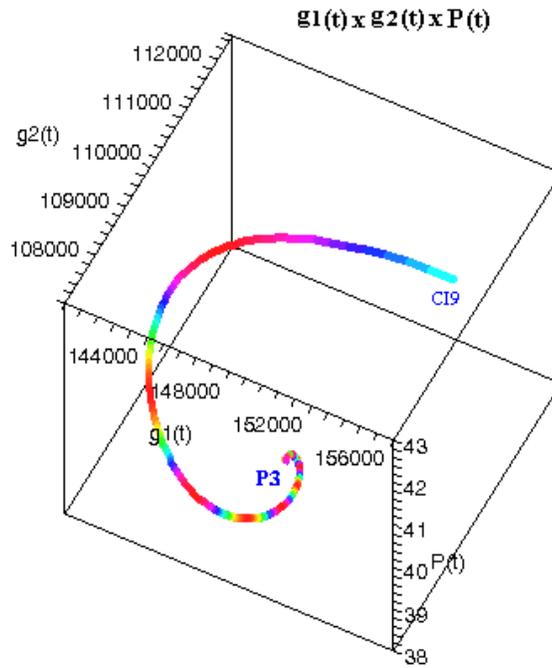


Figura 6.12: Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 151100, g_2(0) = 112100, P(0) = 40, Q(0) = 40$ para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$

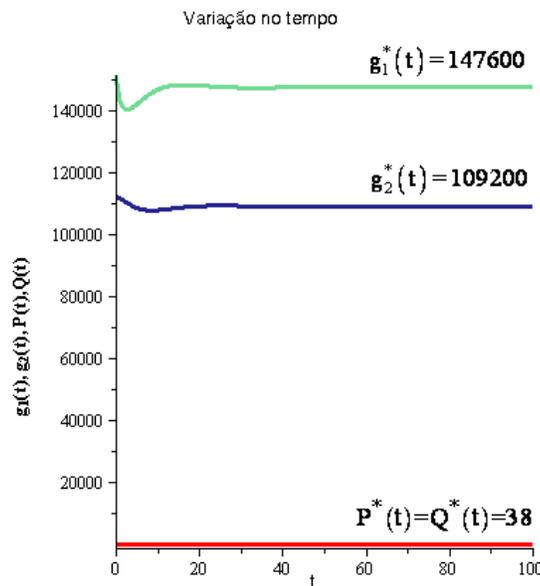


Figura 6.13: Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0) = 151100, g_2(0) = 112100, P(0) = 40, Q(0) = 40$ para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$

Para os parâmetros representados na tabela 6.1, $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$ conforme se observa nas figuras 6.9 e 6.12 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P3.

Nas figuras 6.10, 6.11 e 6.13 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio igual a $g_1(t)^* = 147600$, $g_2(t) = 109200$ e $P(t)^* = Q(t)^* = 38$ ou vão para a extinção.

- Caso III : Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = 0,1777$ e os mostrados na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem o sistema (6.9) :

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,278, -0,278, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 131700, g_2 = 97520, P = 24, Q = 24\}$

Autovalores: $-0,800, -0,516, 0,003, -0,278$ - Equilíbrio Instável : Ponto de Sela

- ♦ $P_3 : \{g_1 = 136200, g_2 = 100800, P = 25, Q = 25\}$

Autovalores: $-0,809, -0,501, -0,003, -0,278$ - Equilíbrio Estável : Nó

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 25$ são estáveis e o ponto $P_2 = 24$ é instável.

A figura 6.14 mostra as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as figuras 6.15 e 6.16 mostram a correspondente evolução da população do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=14,Q(0)=14$

CI1a: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=23,Q(0)=23$

CI2: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=32,Q(0)=32$

CI3: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=38,Q(0)=38$

CI4: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=50,Q(0)=50$

CI5: $g_1(0)=0;g_2(0)=100000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI6: $g_1(0)=0;g_2(0)=150000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0;g_2(0)=164299;P(0)=0,Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0;g_2(0)=180000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0;g_2(0)=240000;P(0)=0,Q(0)=0$

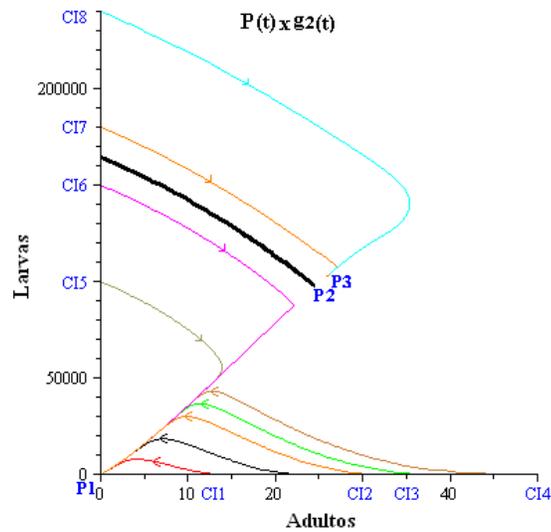


Figura 6.14 : Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as

trajetórias para oito condições iniciais com $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$

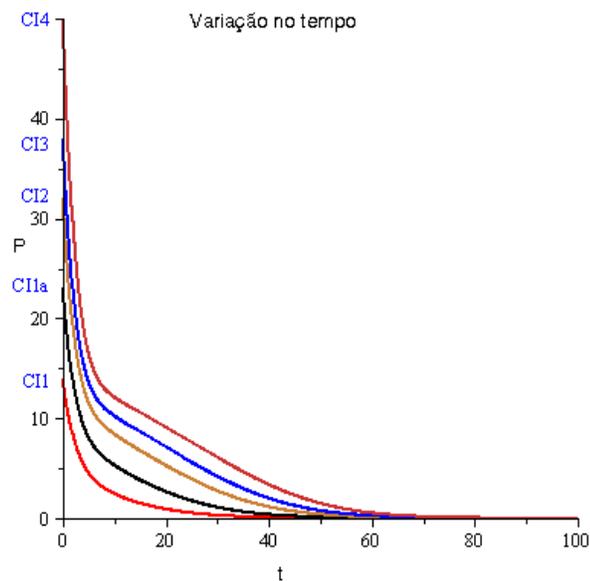


Figura 6.15: Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$.

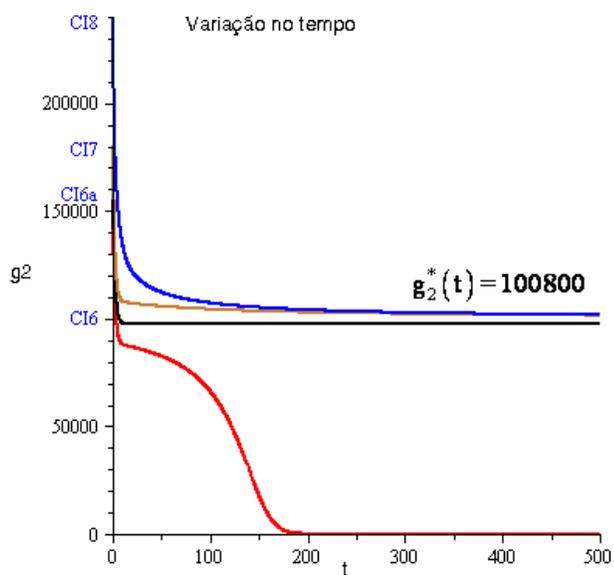


Figura 6.16: Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$.

As figuras de 6.14 a 6.16 representam a projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se somente populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se somente as populações de larvas. Seja agora considerar as populações iniciais, CI9: $g_1(0) = 164000$, $g_2(0) = 121000$, $P(0) = 30$, $Q(0) = 30$. A figura 6.17 mostra a trajetória no espaço $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ e a figura 6.18 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

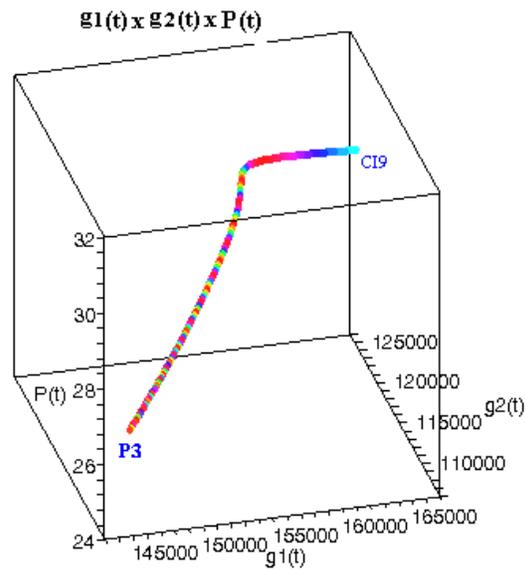


Figura 6.17: Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 164000$, $g_2(0) = 121000$, $P(0) = 30$, $Q(0) = 30$

para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$

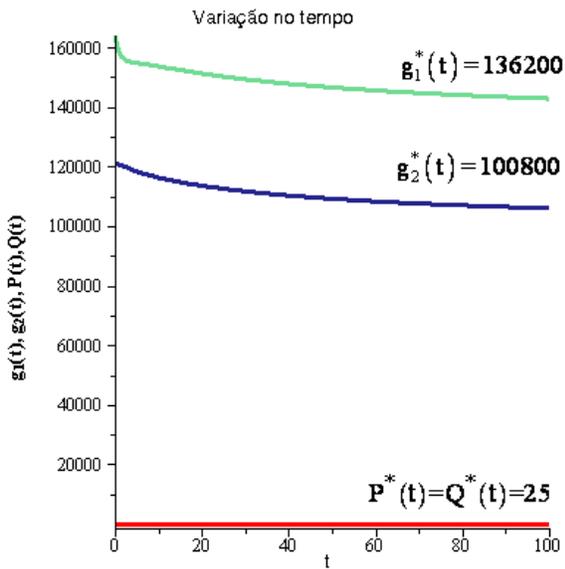


Figura 6.18: Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial:

$$g_1(0) = 164000, g_2(0) = 121000, P(0) = 30, Q(0) = 30$$

$$\text{para } \hat{\alpha} = 0 \text{ e } f_3 = f_4 = 0,1777$$

Para os parâmetros representados na tabela 6.1, $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$ conforme se observa nas figuras 6.14 e 6.17 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou tendem para o ponto estável P3.

Nas figuras 6.15, 6.16, e 6.18 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio igual a $g_1(t)^* = 136200$, $g_2(t)^* = 100800$ e $P(t)^* = Q(t)^* = 25$ ou decrescem para zero (extinção) em tempo finito.

Tabela 6.3: Características das populações não extintas para os casos de I a III

Casos	P_3	g_1	g_2	P_2	g_1	g_2
	(est.)	(P_3)	(P_3)	(inst.)	(P_2)	(P_2)
I - $\hat{\alpha}=0$; $f_3 = f_4 = 0,05$	42	121500	89910	8	23290	17240
II- $\hat{\alpha}=0$; $f_3 = f_4 = 0,10$	38	147600	109200	12	45440	33630
III- $\hat{\alpha}=0$; $f_3 = f_4 = 0,1777$	25	136200	100800	24	131700	97520

As simulações apresentadas nas figuras de 6.4 a 6.18 descrevem a dinâmica populacional do pirarucu supondo o termo associado à pesca, $\hat{h}(P)=0$. Pode-se concluir pela tabela 6.3, que à medida que se aumenta a captura representada pelos parâmetros f_3 e f_4 a diferença entre a população de equilíbrio estável diferente de zero e a instável diminui. Isto significa que para altas taxas de esforço de pesca, há forte tendência para a instabilidade e o equilíbrio populacional fica muito prejudicado, podendo levar a população à extinção. Para os parâmetros estimados neste estudo, o valor de f_3 e f_4 que conduz a extinção é 0,1777.

A seguir alguns cenários foram elaborados, a partir da relação linear $\hat{\alpha} = 72000f_3$

- Caso IV: Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$ e os mostrados na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (6.9):

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,150, -0,150, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

♦ $P_2 : \{g_1 = 23440, g_2 = 17300, P = 8, Q = 8\}$

Autovalores: $-0,830, -0,400, 0,044, -0,150$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 140200, g_2 = 84740, P = 39, Q = 39\}$

Autovalores: $-0,956, -0,114 + 0,298I, -0,114 + 0,298I, -0,150$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 39$ são estáveis e $P = 8$ é instável.

As figuras 6.19 e 6.20 mostram as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as figuras 6.21 e 6.22 mostram a correspondente evolução da população do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=8, Q(0)=8$

CI1a: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=15, Q(0)=15$

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=18, Q(0)=18$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=28, Q(0)=28$

CI4: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=40, Q(0)=40$

CI5: $g_1(0)=0; g_2(0)=20000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=30000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0; g_2(0)= 38235; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=50000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0; g_2(0)=60000; P(0)=0, Q(0)=0$

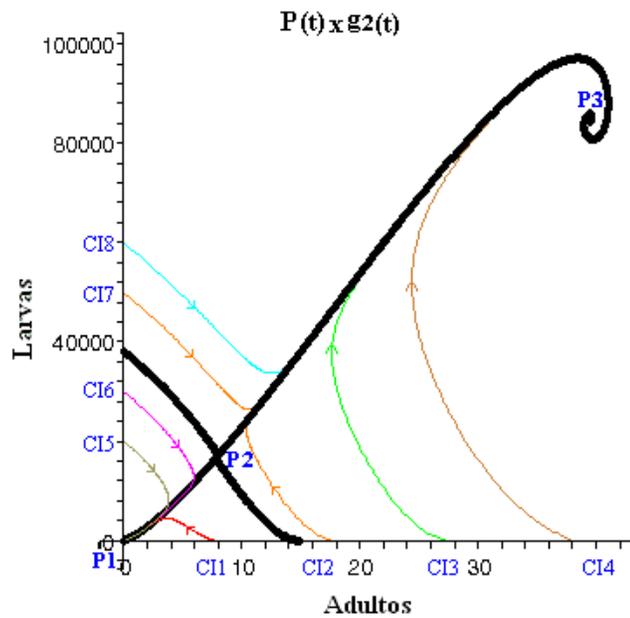


Figura 6.19 : Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

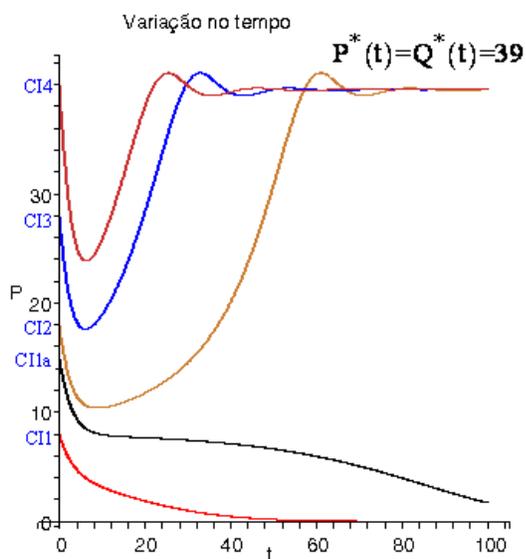


Figura 6.20: Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

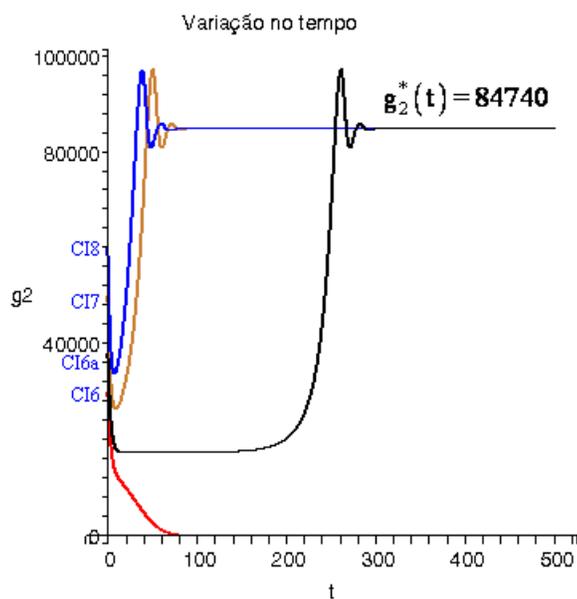


Figura 6.21: Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

As figuras de 6.19 a 6.21 representam a projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se só populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se somente as populações de larvas. Seja agora considerar as populações iniciais, CI9: $g_1(0) = 151000$, $g_2(0) = 91200$, $P(0) = 42$ e $Q(0) = 42$. A figura 6.22 mostra a trajetória no espaço $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ e a figura 6.23 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

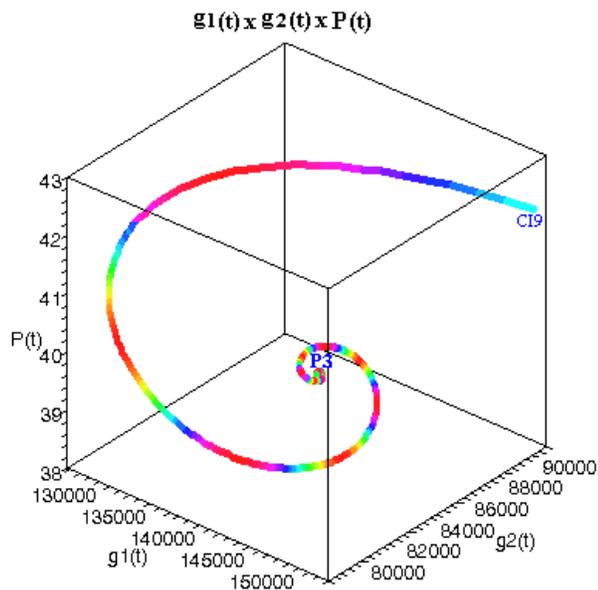


Figura 6.22: Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória

para a condição inicial: $g_1(0) = 151000, g_2(0) = 91200, P(0) = 42, Q(0) = 42$

para $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

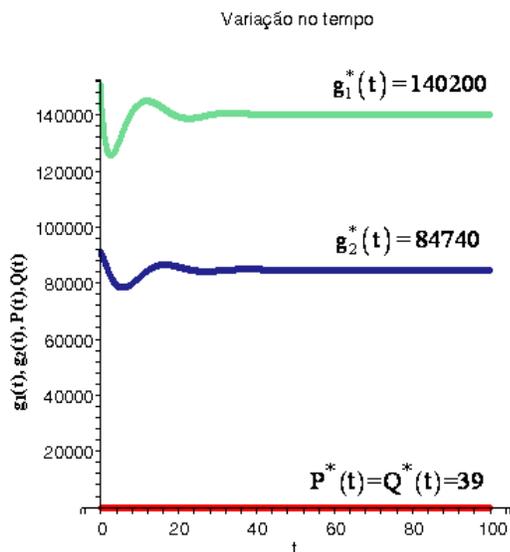


Figura 6.23: Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial:

$g_1(0) = 151000, g_2(0) = 91200, P(0) = 42, Q(0) = 42$

para $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

Para os parâmetros representados na tabela 6.1, $\hat{\alpha} = 1100$ e $f_3 = f_4 = 0,05$ e conforme se observa nas figuras 6.19 e 6.22 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P3.

Nas figuras 6.20, 6.21, e 6.23 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio iguais a $g_1^* = 140200$, $g_2^* = 84740$, $P^* = 39$ e $Q^* = 39$ ou vão para a extinção.

- Caso V: Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$ e os mostrados na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (6.9):

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,200, -0,200, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 47190, g_2 = 34400, P = 12, Q = 12\}$

Autovalores: $-0,794, -0,483, 0,042, -0,200$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

- ♦ $P_3 : \{g_1 = 158800, g_2 = 95670, P = 33, Q = 33\}$

Autovalores: $-0,901, -0,167 + 0,193I, -0,167 - 0,193I, -0,200$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 33$ são estáveis e $P = 12$ é instável.

A figura 6.24 mostra as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as figuras 6.25 e 6.26 mostram a correspondente evolução da população do peixe passando pelos seguintes pontos:

$$CI1: g1(0)=0; g2(0)=0; P(0)=12, Q(0)=12$$

$$CI1a: g1(0)=0; g2(0)=0; P(0)=18, Q(0)=18$$

$$CI2: g1(0)=0; g2(0)=0; P(0)=26, Q(0)=26$$

$$CI3: g1(0)=0; g2(0)=0; P(0)=30, Q(0)=30$$

$$CI4: g1(0)=0; g2(0)=0; P(0)=34, Q(0)=34$$

$$CI5: g1(0)=0; g2(0)=50000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$CI6: g1(0)=0; g2(0)=60000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$CI6a: g1(0)=0; g2(0)=67030; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$CI7: g1(0)=0; g2(0)=75000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$CI8: g1(0)=0; g2(0)=90000; P(0)=0, Q(0)=0$$

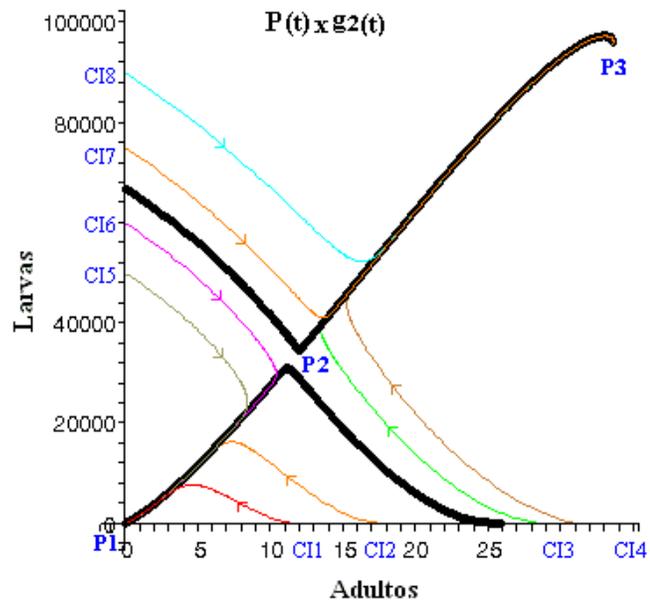


Figura 6.24 : Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$.

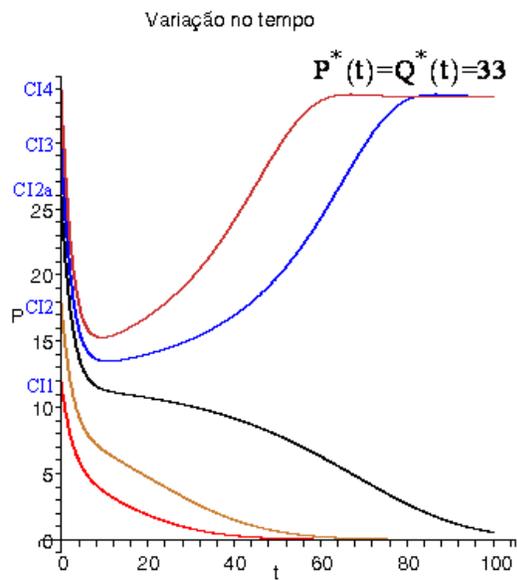


Figura 6.25: Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$.

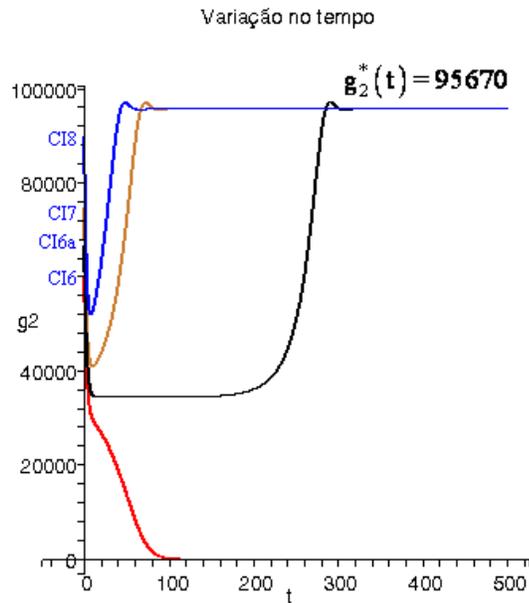


Figura 6.26: Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$

As figuras de 6.24 a 6.26 representam a projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se só populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se somente as populações de larvas. Seja agora considerar as populações iniciais, CI9: $g_1(0) = 168400$, $g_2(0) = 101500$, $P(0) = 35$ e $Q(0) = 35$. A figura 6.27 mostra a trajetória no espaço $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ e a figura 6.28 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

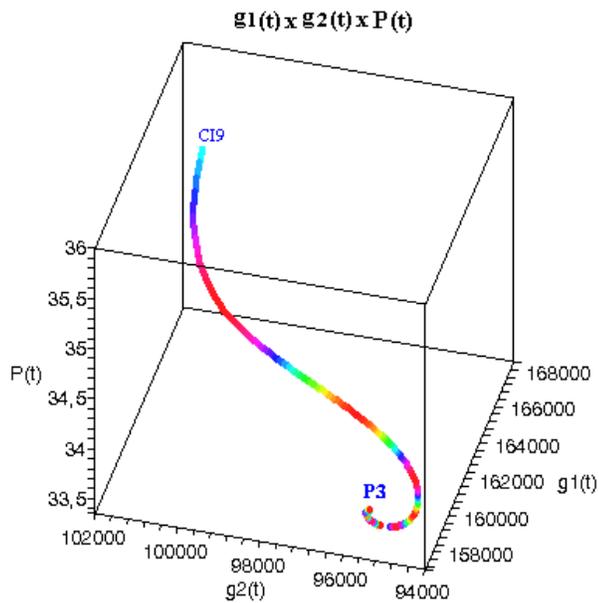


Figura 6.27: Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetória para a condição inicial: $g_1(0) = 168400, g_2(0) = 101500, P(0) = 35, Q(0) = 35$ para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$

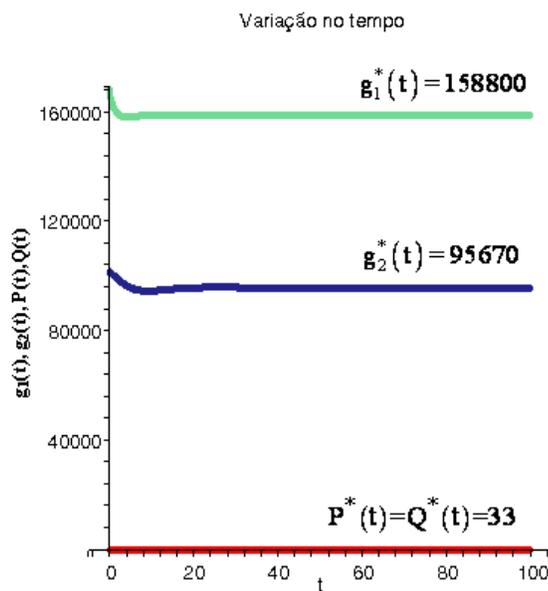


Figura 6.28: Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial: $g_1(0) = 168400, g_2(0) = 101500, P(0) = 35, Q(0) = 35$ para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$

Para os parâmetros representados na tabela 6.1, $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$ e conforme se observa nas figuras 6.24 e 6.27 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P3.

Nas figuras 6.25, 6.26, e 6.28 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio iguais a $g_1^* = 158800, g_2^* = 95670, P^* = 33$ e $Q^* = 33$ ou vão para a extinção.

- Caso VI : Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$ e os mostrados na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (6.9):

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: - -0,250, -0,250, -0,135, -0,900 Equilíbrio Estável: Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 111800, g_2 = 76130, P = 21, Q = 21\}$

Autovalores: -0,783, -0,507, 0,004, -0,250 - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 119600, g_2 = 80940, P = 22, Q = 22\}$

Autovalores: $-0,793, -0,486, -0,005, -0,250$ -Equilíbrio Estável: N6

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 22$ são estáveis e $P = 21$ é instável.

A figura 6.29 mostra as projeções das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as figuras 6.30 e 6.31 mostram a correspondente evolução da população do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=12, Q(0)=12$

CI1a: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=18, Q(0)=18$

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=22, Q(0)=22$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=26, Q(0)=26$

CI4: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=30, Q(0)=30$

CI5: $g_1(0)=0; g_2(0)=90000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=12000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0; g_2(0)=133959; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=150000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0; g_2(0)=160000; P(0)=0, Q(0)=0$

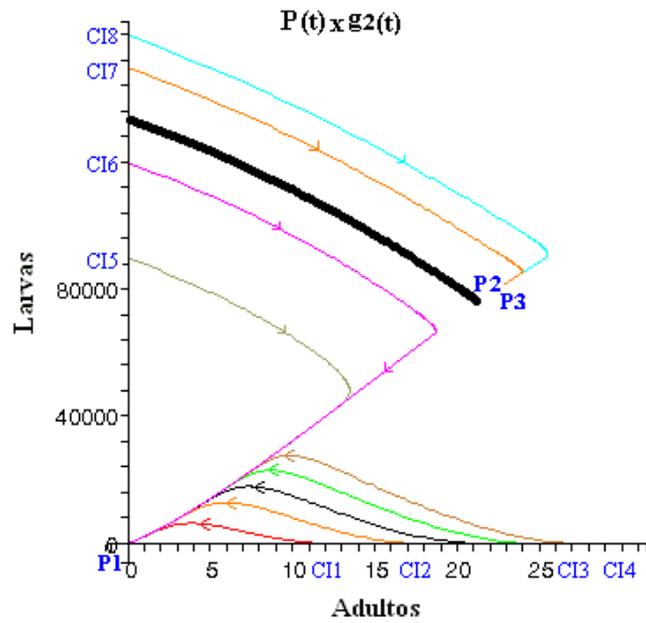


Figura 6.29 : Projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para oito condições iniciais para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$.

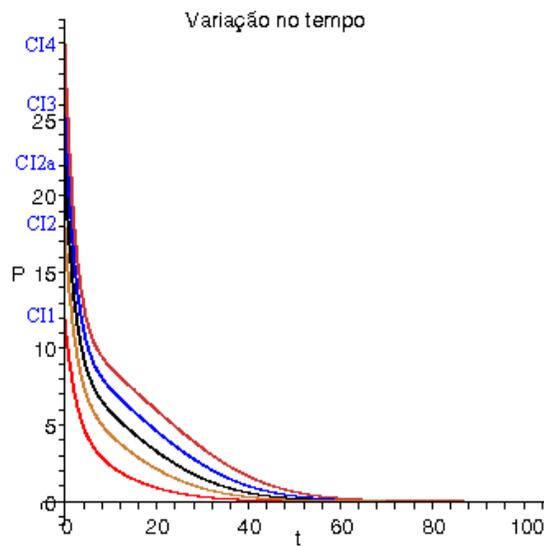


Figura 6.30: Evolução da população de adultos no tempo para cinco condições iniciais para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$.

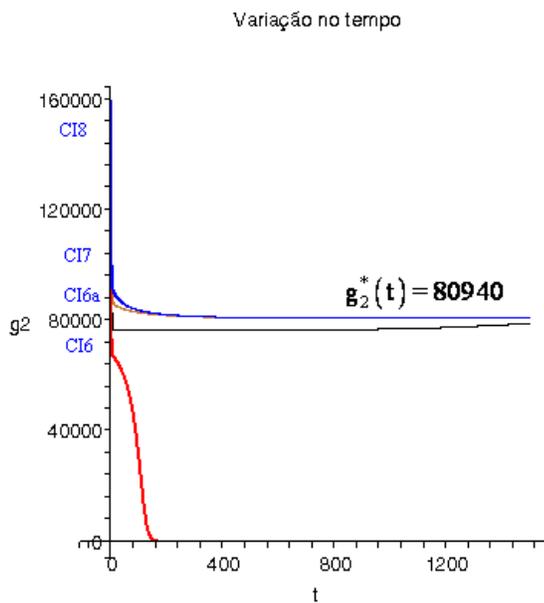


Figura 6.31: Evolução da população de larvas no tempo com quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$

As figuras de 6.29 a 6.31 representam a projeção das trajetórias no plano $P \times g_2$, e as variações no tempo $P(t)$ e $g_2(t)$, onde as populações iniciais de cada fase foram consideradas isoladas, ou seja, nas condições iniciais CI1 a CI4, considerou-se só populações de adultos, nas condições iniciais de CI5 a CI8 considerou-se somente as populações de larvas. Seja agora considerar as populações iniciais, CI9: $g_1(0) = 135900$, $g_2(0) = 91997$, $P(0) = 25$ e $Q(0) = 25$. A figura 6.32 mostra a trajetória no espaço $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ e a figura 6.33 mostra a evolução no tempo para essas populações iniciais.

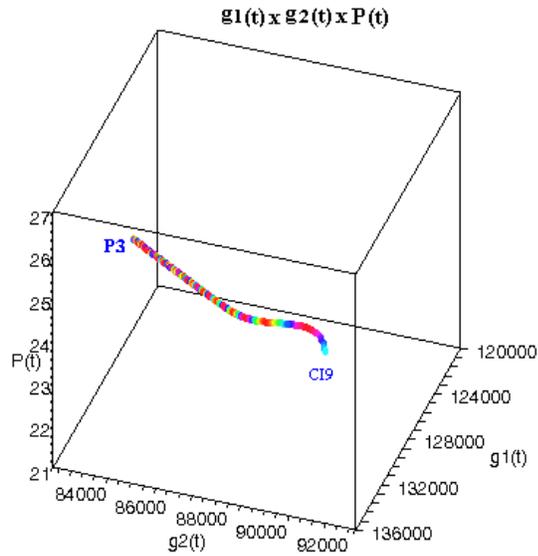


Figura 6.32: Espaço de fase $g_1(t) \times g_2(t) \times P(t)$ mostrando a solução de equilíbrio e a trajetórias

para a condição inicial: $g_1(0) = 135900, g_2(0) = 91997, P(0) = 25, Q(0) = 25$

para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$

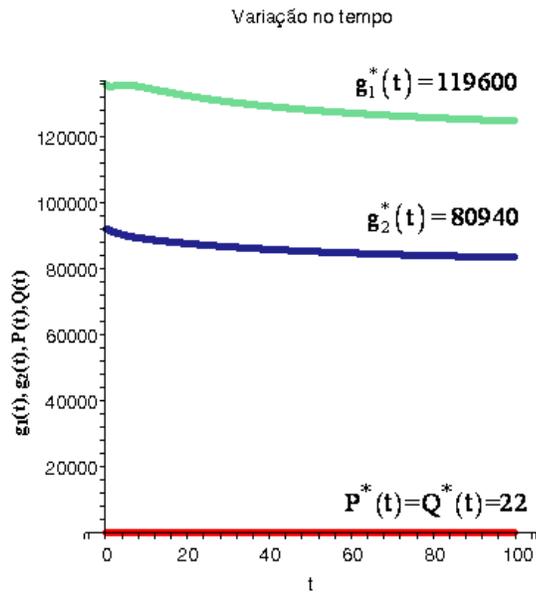


Figura 6.33: Evolução da população de ovos, larvas e adultos no tempo para a condição inicial:

$g_1(0) = 135900, g_2(0) = 91997, P(0) = 25, Q(0) = 25$

para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$

Para os parâmetros representados na tabela 6.1, $\hat{\alpha} = 3000$ e $f_3 = f_4 = 0.15$ conforme se observa nas figuras 6.29 e 6.32 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou tendem para o ponto estável P3.

Nas figuras 6.30, 6.31 e 6.33 estão as curvas típicas das três fases da população de pirarucus em função do tempo. Pode-se perceber que dependendo das condições iniciais, as populações de ovos, larvas e adultos atingem um nível de equilíbrio igual a $g_1(t)^* = 119600$, $g_2(t) = 80940$ e $P(t)^* = Q(t)^* = 22$ ou vão para a extinção.

A tabela 6.4 mostra as características das duas populações de equilíbrio que não foram extintas para os casos de IV a VI

Tabela 6.4: Características das populações não extintas para os casos de IV a VI

Casos	P ₃	g ₁	g ₂	P ₂	g ₁	g ₂
	(est.)	(P ₃)	(P ₃)	(inst.)	(P ₂)	(P ₂)
IV - $\hat{\alpha} = 3600$; $f_3 = f_4 = 0,05$	39	140200	84740	8	23440	17300
V - $\hat{\alpha} = 7200$; $f_3 = f_4 = 0,10$	33	158800	95670	12	47190	34400
VI - $\hat{\alpha} = 10800$; $f_3 = f_4 = 0,15$	22	119600	80940	21	111800	76130

Bacia de Atração

As bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para o caso III definido nesta seção estão representadas nas figuras 6.34 e 6.35.

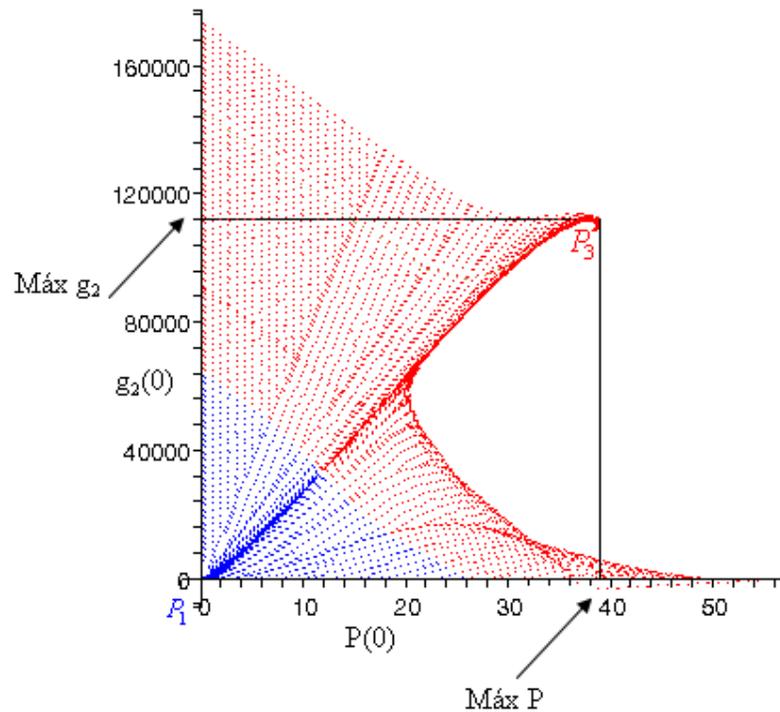


Figura 6.34: Bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para os parâmetros definidos no caso II

Na figura 6.35 os pontos assinalados em vermelho referem-se à bacia de atração relativa ao ponto de equilíbrio P_3 . O subconjunto dessa bacia admissível dentro das restrições práticas impostas pela dinâmica populacional do pirarucu é mais restrito. Esse subconjunto contém os pontos de origem das trajetórias que ficam contidas da região com superiores $\text{máx } P$ e $\text{máx } g_2$ e inferiores $P=0$ e $g_2=0$. São os valores máximos admissíveis para o modelo. Para os parâmetros referentes ao caso II, encontram-se os valores $\text{máx } P = 39$ e $\text{Max } g_2 = 112000$. Há uma bacia de atração para cada valor de f_3 e f_4 . Em azul observa-se o subconjunto da bacia de atração para o ponto de extinção P_1 . Limitada por $P=0$ e $g_2=0$. Não se admitem populações negativas.

A figura 6.35 mostra o gráfico da seção do plano de fase $P \times g_2$ numa janela retangular de $[-2,52, 56,11]$ por $[-11960, 142700]$. Para obter uma visão mais completa dos pontos de

equilíbrio P_2 e P_3 , foi dado um zoom de $[0,10]$ a $[0,20000]$, conforme mostrado na figura 6.36

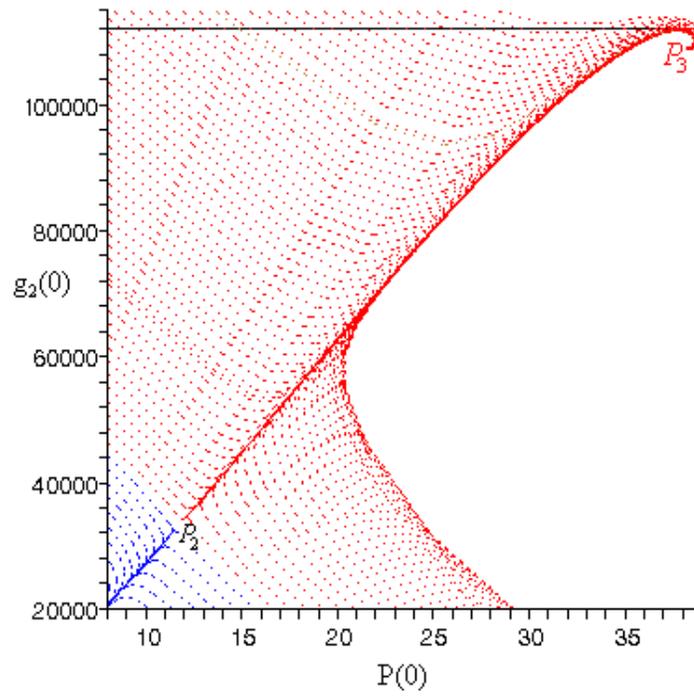


Figura 6.35: Zoom mostrando as bacias de atração do espaço de fase $P(0)$ e $g_2(0)$ para os parâmetros definidos no caso II

6.4 Considerações Finais

A simulação de diferentes cenários, para uma avaliação do impacto da pesca, propicia uma relevante contribuição para o controle de manejo de pesca de pirarucus. Neste sentido foram simulados seis situações para diferentes valores para os parâmetros envolvidos com a pesca.

Para os casos de I a VI está claro pelos autovalores que corresponde ao três pontos de equilíbrio que P_1 e P_3 são estáveis e P_2 é instável (Boyce e Diprima 2004, Hirsch, 2004).

Pode-se verificar que à medida que os esforços de pesca f_3 e f_4 aumentam a população de equilíbrio estável P_3 diminui e a população de equilíbrio instável P_2 aumenta. Nota-se que para valores relativamente grandes do esforço de pesca (casos III e VI) as populações P_2 e P_3 se aproximam muito, e o equilíbrio populacional fica muito prejudicado, com tendência à instabilidade. Então, para um determinado valor crítico de f_3 e f_4 , a população tende à extinção.

Nos casos de I a III para $\hat{\alpha} = 0$ nota-se que à medida que a pesca aumenta, o número de ovos e larvas para a população de equilíbrio P_2 crescem, mas este é um equilíbrio instável e como tal não pode manter a população num estado estacionário.

A interpretação das trajetórias no plano de fase e a solução no tempo é a mesma que nos modelos anteriores.

Capítulo 7

Conclusões Gerais

Os modelos aqui apresentados são uma primeira abordagem para a dinâmica das populações de *Arapaima gigas*, um peixe de água doce nativo da região amazônica. Esta espécie é muito importante para a economia da região e uma das mais importantes fontes de proteína para os povos nativos. Com este modelo obtivemos alguns resultados que poderão nos orientar para nossos objetivos de preservação da biodiversidade da Amazônia, evitando a exploração excessiva do pirarucu. Suas aplicações podem ser usadas para:

- 1- Orientar na elaboração de regras de controle e políticas de manejo;
- 2- Detectar possíveis divergências no cenário natural atual devido a perturbações inesperadas e possivelmente ocultas.
- 3- Levantar hipóteses acerca da biologia da espécie que podem vir a ser testadas em experimentos naturais com a população natural.

O sistema representando a dinâmica populacional de pirarucus aqui proposto parte de observações de campo disponíveis e razoavelmente confiáveis. Pesquisas em andamento na Reserva de Desenvolvimento Sustentável de Mamirauá certamente irão adicionar informações importantes para melhorar o conjunto de equações dinâmicas. Por outro lado, os parâmetros

introduzidos para desenvolver o modelo podem oferecer indícios para explorações adicionais, que de outro modo seriam ignoradas.

Há três soluções de equilíbrio, duas estáveis e uma instável. Uma das soluções estáveis representa a ausência de população, e a outra uma combinação de peixes adultos, ovos e larvas que se mantém estável durante todo o período desde que não haja nenhuma alteração significativa nas condições ambientais.

As simulações numéricas, não só com a pesca, mas também sem pesca, indicam que o sistema dinâmico que descreve a evolução populacional apresenta dois atratores, um corresponde à extinção e o outro para um número estável de machos e fêmeas. Estes dois atratores estão situados em lados opostos de uma separatriz que contém um ponto de sela instável. Está claro no modelo que existe um número crítico de peixes separando extinção de preservação estável. Isto é, se um certo número de peixes é introduzido num lago acima do limite crítico, a tendência da população é crescer até um certo ponto. Em caso contrário a população tende a extinção. Esse número crítico se aplica tanto no caso de colonização de um ambiente vazio, como na manutenção da sua ocupação ao longo do tempo.

Ameaças provenientes de modificações do ambiente, causadas por catástrofes ambientais, doenças dos peixes ou devido a intensa pesca, podem introduzir perturbações críticas no sistema induzindo instabilidade. Observa-se que não há nenhum declínio suave da população se aproximando da extinção. O modelo antecipa um estado crítico onde o pólo de atração salta de uma população estável diferente de zero a um pólo atrativo correspondente à extinção. Ou seja, o sistema evolui rapidamente de uma situação de estabilidade para extinção. Este comportamento é perigoso desde que o número de indivíduos pode ocasionar interpretações errôneas. Se não pudermos identificar o ponto crítico, ou seja, a solução instável, a proteção da espécie contra o perigo de extinção poderia ser problemática.

Outro resultado muito interessante é a reação da espécie tentando compensar a ameaça de extinção. Na presença de alguma ameaça, o modelo retorna como uma primeira reação da espécie com a injeção de um número extra de ovos fertilizados. Isto pode funcionar se a mortalidade induzida por fatores externos parar ou diminuir, sem esta reação positiva e com outras condições externas desfavoráveis a espécie poderá se extinguir. Convém salientar que uma dificuldade que afeta o modelo é a avaliação de alguns parâmetros introduzidos no sistema. Observações diretas que pudessem ajustar os valores de c_1 e c_2 seriam de grande ajuda. O parâmetro a_1 relacionado com a probabilidade de ovos fertilizados por machos é muito difícil de ser determinado. Mas, a_2 pode ser determinado com uma boa aproximação se a capacidade suporte é conhecida, conforme visto na seção 4.2. O valor de a_1 pode ser estimado como visto anteriormente. Outros parâmetros, particularmente aqueles que envolvem a guarda dos machos, podem ser estimados de dados concretos de campo. Estamos conscientes que modelos sem uma validação completa com dados de campo às vezes são questionáveis. Mas também achamos que modelos plausíveis são muito úteis para a concepção de novos experimentos e para fornecer indícios para selecionar as variáveis mais importantes a serem observadas. Isto é, modelagem e observação de campo podem trocar informações, a fim de melhorar a representação do mundo real.

O modelo aqui proposto sugere que existe um ponto crítico para permanência e sobrevivência da população que está diretamente relacionado com a capacidade suporte do ambiente.

Nas simulações numéricas apresentadas, percebe-se que existe um valor crítico de α , conforme gráfico 5.20, acima do qual haverá uma maior probabilidade de evolução da população para extinção local. Ou seja, existe um valor máximo para a pesca que mantém a população estável. E, quando são pescados animais que realizam cuidado parental aumenta a instabilidade, aumentando o risco de extinção.

Com a abordagem introduzida aqui é possível prever mudanças na evolução da população e checar os resultados com os dados de campo para validar o modelo. Neste trabalho assumimos que a mortalidade devido à pesca é a mesma para machos e fêmeas. Entretanto é exclusivamente por falta de informação, não é uma limitação do modelo. Assim que as informações estiverem disponíveis para introduzir diferentes parâmetros de mortalidade para machos e fêmeas, a influência deste fato será analisada.

Certamente ainda há muito a ser explorado neste modelo. As análises matemáticas poderão ser muito interessantes desde que existam claramente pontos de bifurcações. Detalhes matemáticos podem ser encontrados em Cassiano et al, 2007. Observe que o ponto de equilíbrio de uma população estável diferente de zero a partir de um foco muda para um nó, já que a mortalidade induzida pela falta de cuidado parental aumenta. Novas investigações, para avaliar a interação entre parâmetros introduzidos no sistema dinâmico e os resultados correspondentes para serem comparados com dados de campo, são planejadas para trabalho futuro.

Certamente a validação do modelo ainda necessita de vários dados de campo. Mas observações preliminares são encorajadoras e não apresentam qualquer incongruência grave com a distribuição observada dessas três fases do ciclo de vida.

Referências Bibliográficas

- Alcântara, F.B. Observaciones sobre el comportamiento reproductivo del paiche, *Arapaima gigas*, em cautiverio. **Folia Amazônica IIAP**, 2:165-168. 1990.
- Allegretti, M. H. “Reservas extrativistas: parâmetros para uma política de desenvolvimento sustentável na Amazônia”. Em ANDERSON, A. *et. al.* (orgs.). *O destino da floresta: reservas extrativistas e desenvolvimento sustentável na Amazônia*. Rio de Janeiro, **Relume**, pp. 17-48. 1994
- Amazonas. Lei nº 2.411 de 16 de julho de 1996. **Diário Oficial do Estado do Amazonas**. Nº **38481**, 22:1-2, 1996.
- Arantes C.C., L. Castello, e D. Garcez. Densidades de pirarucus (*Arapaima gigas*, Teleostei, Osteoglossidae) nas Reservas de Desenvolvimento Sustentável Mamirauá e Amanã, Amazonas, Brasil. **Uakari**, 2:37-43, 2007.
- Arantes, C. C., Castello, L. & Garcez, D. S. Variações entre contagens de *Arapaima gigas* (Schinz) (Osteoglossomorpha, Osteoglossidae) feitas por pescadores individualmente em Mamirauá, Brasil, **Pan-American Journal of Aquatic Sciences** 2 (3): 263-269, 2007
- Bard, J. & Imbiriba, E.P.. Piscicultura do pirarucu, *Arapaima gigas*,. **Boletim Embrapa Cepatu**, 52: 1-17. 1986
- Begon, Michael., Harper, J.L. and Townsend, C.R. - **Ecology**: individuals, populations and communities. Blackwell Science Ltd, 1996.

- Beverton, R.J.H., Holt, S.J. On the dynamics of exploited fish populations. Fish. Invest. **Minist.Agric.Fish.Food** G.B. (2 sea Fish.), 19:553 p. 1957
- Boyce, William E. e Richard C. Dprima. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **LTC**, 1998.
- Brasil. **Sistema Nacional das Unidades de Conservação**. Lei nº 9.985, 18 de julho de 2000.
- Bassanezi, R.C. Equações Diferenciais com Aplicações. **Ed. Harbra**, S.Paulo. 1988.
- Bevilacqua, J.S. (Org); Rafikov, M. (Org); Guedes, C.L.C. (Org). Modelagem em Biomatemática. São Carlos, SP: SBMAC, 2003, 86p.
- Cassiano J., Bevilacqua L., Um estudo sobre bifurcações na dinâmica populacional do pirarucu, Congresso da Sociedade Latino-americana de Biologia Matemática, XIV CLAB e IX ELAEM, 2007.
- Castello, L. A method to count pirarucu: fishers, assessment and management. **North-American Journal of Fisheries Management North American J. Fish, Management**, 24: 379-389, 2004.
- Cebrelli, C.B. Estudio del factor de condición del “paiche” *Arapaima gigas* (Cuvier) en la zona reservada del Rio Pacaya entre los anos 1959 a 1960. **Tesis para el grado de Bachiller**, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú. 1972.
- De Almeida, Val. Fishes of the amazon and their environment. **Ed. Springer**. Germany. 1995.
- Flores, H.G. Desarrollo sexual del paiche (*Arapaima gigas*) en las zonas reservadas del estado (rios Pacaya y Samiria) 1971-1975. **Informe Instituto del Mar del Perú**, n. 67. 1980

- Fontenele, O. Contribuição para o conhecimento da biologia do pirarucu, *Arapaima gigas* (Cuvier), em cativo (Actinopterygii, Osteoglossidae), Rev. Bras. Biol. 8 (4): 445-459. 1948.
- Fontenele, O. Hábitos de desova do pirarucu, *Arapaima gigas*, (Cuvier) (Pisces: Isospondyli, Arapaimidae), e a evolução de sua larva. DENOCS Publ. N. 153 ser. I-C. Fortaleza, 22pp. 1953.
- Gomes, M.C. Introdução à Dinâmica Populacional. **Seção de Genética e Dinâmica Populacional do Departamento de Biologia Vegetal da Faculdade de Lisboa**. 2002.
- Hilborn, R., Walters, C.J. Quantitative fisheries stock assessment. Choice, dynamics and uncertainty. Chapman, Hall. London. 1992
- Hirsch W.M., Smale S., Devaney R.L., Differential Equations, Dynamic Systems and an Introduction to Chaos, **Elsevier Academic Press**, 2004.
- Hrbek, T. ; Farias, I. P. ; Crossa, M. ; Sampaio, I. ; Porto, J. I. R. ; Meyer, A. Population genetic analysis of *Arapaima gigas*, one of the largest freshwater fishes of the Amazon basin: implications for its conservation. **Animal Conservation, England**, v. 8, n. 3, p. 297-308, 2005
- Imbiriba, E.P. Reprodução, Larva e Alevinagem do Pirarucu (*Arapaima gigas*). Recomendações básicas , 26. **EMBRAPA/CPATU**. Belém, PA. 1994
- Jorgensen, S.E. **Fundamentals of Ecological Modelling**. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1994.
- Kitamura, P.C. Biodiversidade na Amazônia: por uma abordagem regional das unidades de conservação. In: **Conservação da Biodiversidade em Ecossistemas Tropicais: avanços conceituais e revisão de normas e metodologias de avaliação e monitoramento.**, pp. 102-111, (Garay, I & Dias, B. Org's.). Ed. Vozes, Petrópolis, RJ. 430 p, 2001.

- Lowe-McConnell. **Ecological Studies in Tropical Fish Communities**. Cambridge University Press. Cambridge. 1987.
- Lüling, K.H. Zur Biologie und Ökologie von *Arapaima gigas* (Pisces, Osteoglossidae). **Z. Morph. Okol. Tiere**, 54: 436-530. 1964.
- May, Robert M. **Stability And Complexity In Model Ecosystems**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 1974
- McGrath, D.G., Castro, F.& Futemma, C. Reservas de Lago e Manejo Comunitário da Pesca no Baixo Amazonas: Uma avaliação Preliminar. In: **Amazônia e a Crise da Modernização**. (D'INCAO, M.A. & SILVEIRA, I.M. ed's.). Publicações do Museu Paraense Emilio Goeldi. Belém. 389-402. 1994
- Murray, J.D.. **Mathematical Biology**, 2ed.,Springer, 1993
- Projeto Mamirauá. **Mamirauá Reserve Management Plan**. A summary, English version. SCM-CNPq, ODA.Brasilia.62pp. 1996.
- Pronatta – **Programa Nacional de Transferência de Tecnologia Agropecuária, Colômbia**. Aprovechamiento Sostenible de Pirarucus. 2004.
- Pinto-Coelho, R.M. **Fundamentos em Ecologia**. Porto alegre: Artes Médicas Sul, 2000.
- Queiroz, H. L. Alguns índices relevantes acerca da pesca, das pescarias e dos pescadores na EEM segundo dados disponíveis até o momento. Relatório Semestral 6 (Projeto Mamirauá).manuscrito não publicado. 1995.
- Queiroz, H.L. & Crampton, W.G.R. (editors) **Estratégias de Manejo de recursos Pesqueiros em Mamirauá**. SCM, MCT-CNPq. Brasília. 197 pp. 1999.
- Queiroz, H.L. & Sardinha, A,D. A preservação e o uso sustentado dos pirarucus (*Arapaima gigas*, Osteoglossidae) em Mamirauá. In: **Estratégias para Manejo de Recursos**

- Pesqueiros em Mamirauá.** (Queiroz, H.L. & Crampton, W. ed's.). SCM-CNPq / MCT. Brasília. 197 pp. 1999.
- Queiroz, H.L. Natural history and conservation of pirarucu *Arapaima gigas*, at the Amazonian Várzea: Red giants in muddy waters. **Ph.D. Thesis.** University of St. Andrews. 2000.
- Queiroz, H. L. Subsídios para o ordenamento do uso dos pirarucus (*Arapaima gigas*) na Amazônia brasileira. In: Workshop sobre ordenamento da pesca nos Estados do Pará e Amazonas. **Projeto Manejo dos Recursos Naturais da Várzea-Provárzea.** Centro de Pesquisa e Extensão Pesqueira do Norte do Brasil CEPNOR. Anexo 08. 2001.
- Queiroz H. L. A Reserva de Desenvolvimento Sustentável Mamirauá: um modelo de alternativa viável para a proteção e conservação da biodiversidade na Amazônia. **Estudos Avançados** – Dossiê Amazônia, São Paulo, v.54, n.2, p.138-204, 2005.
- Rafikov, M. Aplicação dos modelos matemáticos no controle de populações. **Relatório técnico,** Florianópolis-SC,UFSC, Escola de Verão, 2003.
- Ribeiro, N. F. Um novo modelo de proteção ambiental para Mamirauá. **Anteprojeto de Lei. Relatório de Consultoria. Manuscrito não-publicado,** 25 p. 1994
- Sá, C.B.P. Calibração Automática de Modelos Ecológicos baseados em Equações Diferenciais Ordinárias utilizando Algoritmos Genéticos. **Tese de Doutorado,** UFRJ, 2003.
- SCM. Síntese do Plano de Manejo, RDSM. **Relatório técnico,** Sociedade Civil Mamirauá, SCM-IPAAM, MCT/CNPQ- Brasília, 96p, 1996.
- Viana, J.P., Damasceno, J.M., Castello, L.E. e Crampton, W.G.R. Economic Incentives for Sustainable Community Management of Fishery Resources in the Mamirauá Sustainable Development Reserve, Amazonas, Brazil. In: E. Kruger (editor), **K.M. Silvius and R.**

Bodmer and J.M.V. Fragoso (eds.). People in Nature: wildlife conservation in South and Central America, páginas 61-70. Columbia University, Curitiba, 2004.

Vieira, I.C.G., Silva, J.M.C., Toledo, P.M. Estratégias para evitar a perda de biodiversidade na Amazônia. **Estudos Avançados**, 19:153-164, 2005.

W.C. Ferreira Jr., Comportamento individual e dispersão social, em “Proceedings do Congresso Latino Americano de Biomatemática, X ALAB – V ELAEM”, PP.1-17, IMECC – UNICAMP, Campinas, 2001.

Apêndice A

Simulações Numéricas do Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus (*Arapaima gigas*) no Espaço de Fase $g_1 \times g_2 \times P$

No capítulo 4, seção 4.3 foram realizadas simulações numéricas para diferentes valores da capacidade suporte com total cuidado parental para o Modelo de Referência. As simulações foram subdivididas em três casos (tabela 4.5). Para cada caso foram representados os retratos de fase no plano $P \times g_2$. Complementando essas simulações, serão apresentados neste apêndice, alguns cenários nos espaços de fase $g_1 \times g_2 \times P$ para os três casos.

Caso I : Os parâmetros utilizados nas simulações são os estimados na seção 4.2.1, tabela 4.4

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (4.7) :

♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,100, -0,100, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável : Nó

♦ $P_2 : \{g_1 = 3860, g_2 = 2857, P = 2, Q = 2\}$

Autovalores: $-0,858, -0,317, 0,040, -0,100$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 34740, g_2 = 25710, P = 18, Q = 18\}$

Autovalores: $-1,000, -0,064 + 0,30I, -0,064 - 0,30I, -0,100$ - Equilíbrio Estável : Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 45$ são estáveis e $P = 5$ é instável

As figuras A.1 e A.2 mostram as trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1a: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=3, Q(0)=3$

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=6, Q(0)=6$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=12, Q(0)=12$

CI4: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=20, Q(0)=20$

CI5: $g_1(0)=0; g_2(0)=4000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI5a: $g_1(0)=0; g_2(0)=7744; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=12000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=22000; P(0)=0, Q(0)=0$

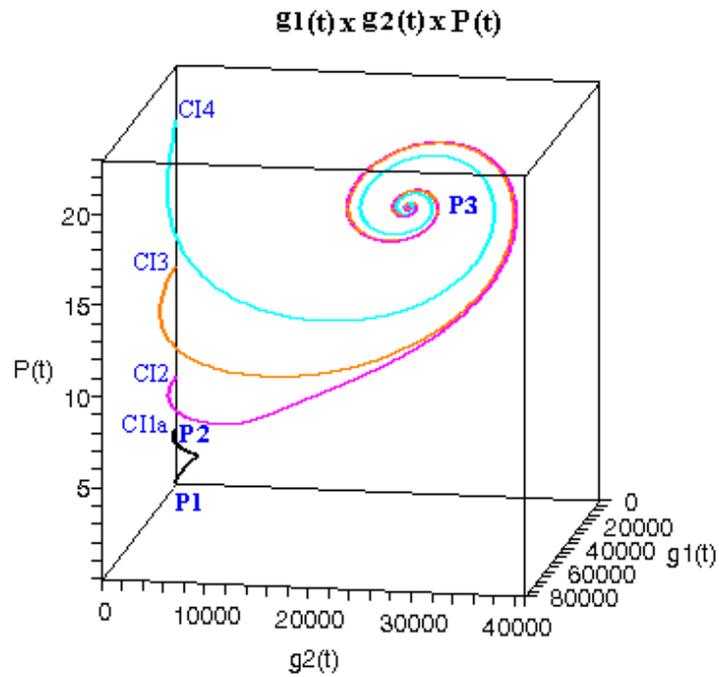


Figura A.1: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 40$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 965$

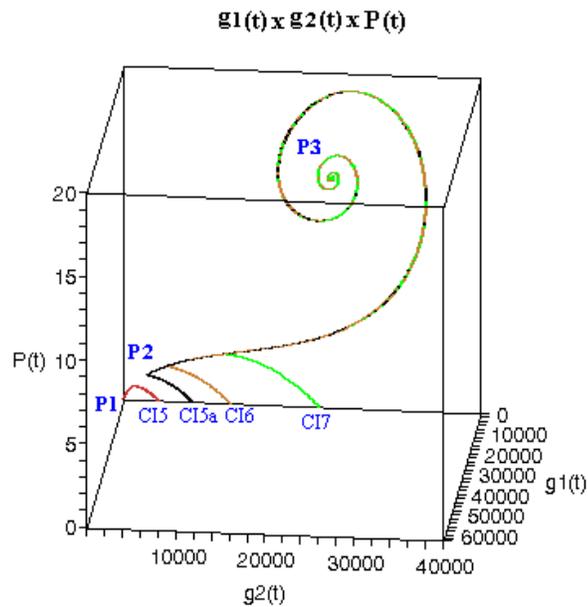


Figura A.2: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 40$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 965$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras A.1 e A.2 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P3.

Caso II : Os parâmetros utilizados nas simulações são os estimados na seção 4.2.1, tabela 4.3

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (4.9) :

♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,200, -0,200, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável : Nó

♦ $P_2 : \{g_1 = 4010, g_2 = 2964, P = 2, Q = 2\}$

Autovalores: $-0,775, -0,515, 0,054, -0,200$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 36080, g_2 = 26670, P = 18, Q = 18\}$

Autovalores: $-1,097, -0,069 + 0,416I, -0,069 - 0,416I, -0,200$ - Equilíbrio Estável : Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 18$ são estáveis e $P = 2$ é instável

As figuras A.3 e A.4 mostram as trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1a: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=4,Q(0)=4$

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=6, Q(0)=6$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=12, Q(0)=12$

CI4: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=20, Q(0)=20$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=4000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0; g_2(0)=5829; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=15000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0; g_2(0)=22000; P(0)=0, Q(0)=0$

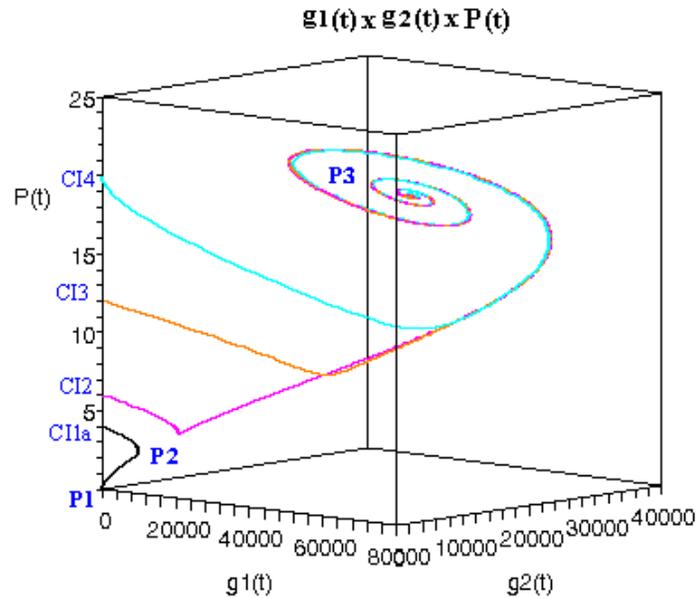


Figura A.3: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 40$, $m_3 = 0,20$, $c_2 = 0,00027$, $a = 1002$

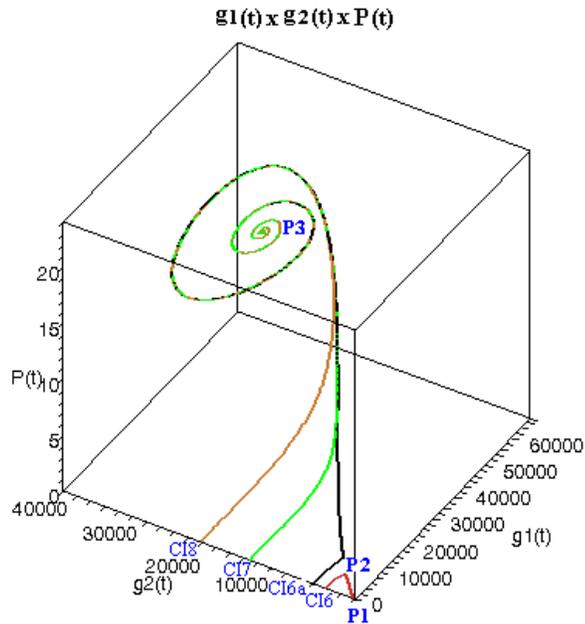


Figura A.4: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 40$, $m_3 = 0,20$, $c_2 = 0,00027$, $a = 1002$

Para os parâmetros representados na tabela 4.3 e conforme se observa nas figuras A.3 e A.4 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P3.

Caso III : Os parâmetros utilizados nas simulações são os estimados na seção 4.2.2, tabela 4.4

Neste caso a capacidade suporte do lago, é duas vezes e meia maior do que no caso I, porém as duas simulações são iguais.

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (4.9) :

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,100, -0,100, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável : Nó

♦ $P_2 : \{g_1 = 9650, g_2 = 7143, P = 5, Q = 5\}$

Autovalores: $-0,858, -0,317, 0,040, -0,100$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 86850, g_2 = 64290, P = 45, Q = 45\}$

Autovalores: $-1,00, -0,064 + 0,30I, -0,064 - 0,30I, -0,100$ - Equilíbrio Estável : Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 45$ são estáveis e $P = 2$ é instável.

As figuras A.5 e A.6 mostram as trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1a: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=8, Q(0)=8$

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=12, Q(0)=12$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=26, Q(0)=26$

CI4: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=50, Q(0)=50$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=12000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0; g_2(0)=19360; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=26000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0; g_2(0)=32000; P(0)=0, Q(0)=0$

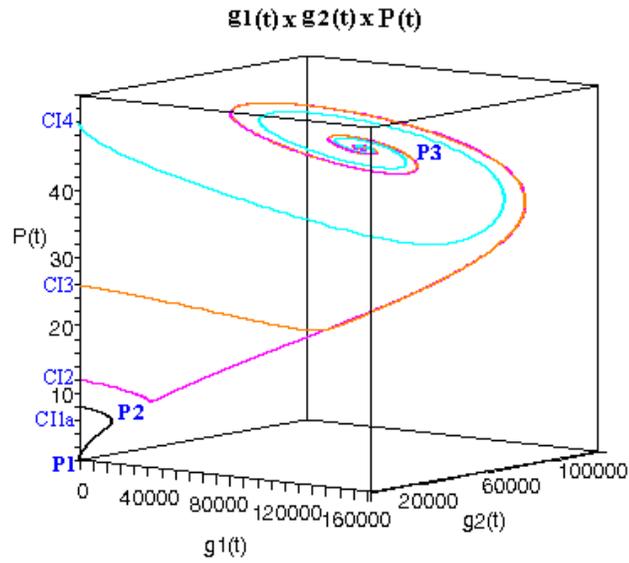


Figura A.5: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 100$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 386$

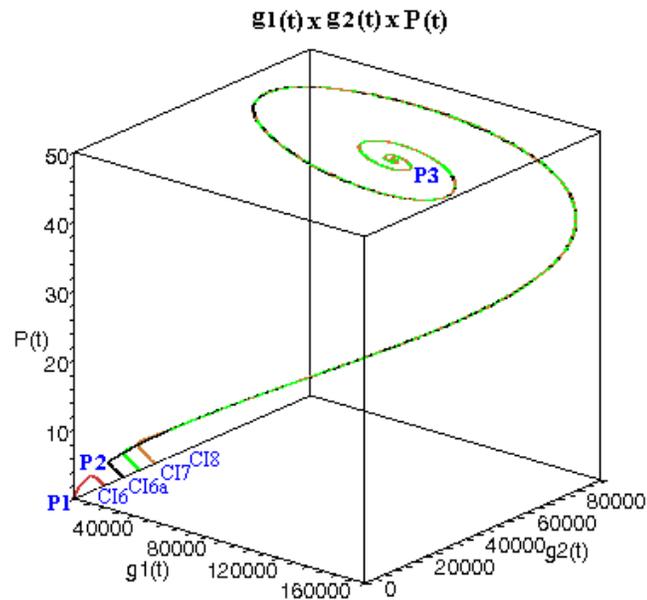


Figura A.6: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 0$, $k = 100$, $m_3 = 0,10$, $c_2 = 0,00014$, $a = 386$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras A.5 e A.6 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou são espirais que tendem para o ponto estável P3.

Apêndice B

Simulações Numéricas do Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus (*Arapaima gigas*) com Influência de Cuidado Parental no Espaço de Fase $g_1 \times g_2 \times P$

No capítulo 5, seção 5.1 foram realizadas simulações numéricas para análise da influência dos parâmetros referentes à capacidade de saturação de lagos de Mamirauá e do parâmetro de deficiência do cuidado parental. As simulações foram subdivididas em nove casos (tabela 5.1). Para cada caso foram representados os retratos de fase no plano $P \times g_2$. Complementando essas simulações, serão apresentados neste apêndice, alguns cenários nos espaços de fase $g_1 \times g_2 \times P$ para os nove casos.

- Caso I: Os parâmetros utilizados nas simulações são $k=100$ e $\alpha=30$ e os estimados na seção 4.2.2, tabela 4.4

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações sistema (5.4):

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,100, -0,100, -0,147, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

$$\diamond P_2 : \{g_1 = 12130, g_2 = 8065, P = 6, Q = 6\}$$

Autovalores: $-0,852, -0,338, 0,040, -0,100$ - Equilíbrio Instável : Ponto de Sela

$$\diamond P_3 : \{g_1 = 154600, g_2 = 52000, P = 36, Q = 36\}$$

Autovalores: $-0,930, -0,184 + 0,31I, -0,184 - 0,31I, -0,100$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 36$ são estáveis e $P = 6$ é instável.

As figuras B.1 e B.2 mostram as projeções das trajetórias no espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

$$\mathbf{CI1a: } g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=8, Q(0)=8$$

$$CI2: g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=18, Q(0)=18$$

$$CI3: g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=26, Q(0)=26$$

$$CI4: g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=49, Q(0)=49$$

$$CI6: g_1(0)=0; g_2(0)=12000; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$\mathbf{CI6a: } g_1(0)=0; g_2(0)=23100; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$CI7: g_1(0)=0; g_2(0)=42800; P(0)=0, Q(0)=0$$

$$CI8: g_1(0)=0; g_2(0)=53400; P(0)=0, Q(0)=0$$

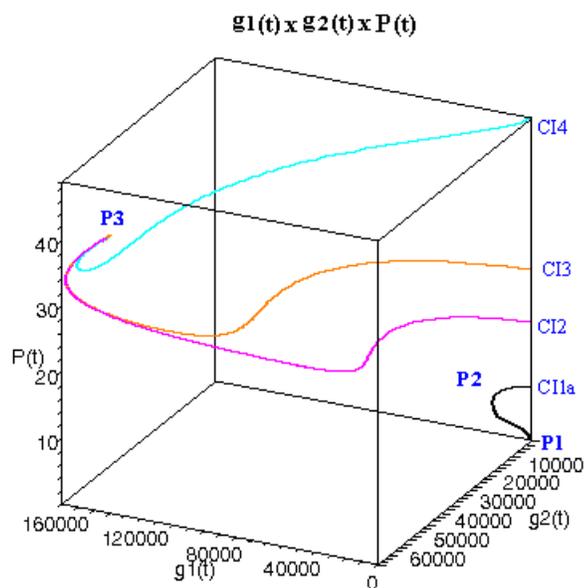


Figura B.1: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 30$ e $k = 100$

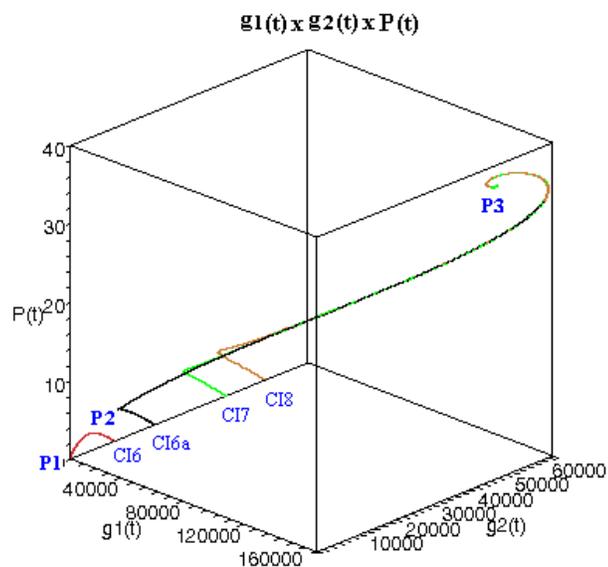


Figura B.2: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 30$ e $k = 100$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras B.1 e B.2 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem tendem para o ponto estável P3.

- Caso II : Os parâmetros utilizados nas simulações são $k = 100$ e $\alpha = 100$ e os estimados na seção 4.2.2, tabela 4.2

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,100, -0,100, -0,175, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 20260, g_2 = 10640, P = 7, Q = 7\}$

Autovalores: $-0,834, -0,394, 0,038, -0,100$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

- ♦ $P_3 : \{g_1 = 151900, g_2 = 41630, P = 29, Q = 29\}$

Autovalores: $-0,854, -0,255 + 0,13I, -0,255 - 0,13I, -0,100$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 29$ são estáveis e $P = 7$ é

As figuras B.3 e B.4 mostram as projeções das trajetórias no espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1a: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=11, Q(0)=11$

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=18, Q(0)=18$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=26, Q(0)=26$

CI4: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=49, Q(0)=49$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=22000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0; g_2(0)=34474; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=43000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0; g_2(0)=54000; P(0)=0, Q(0)=0$

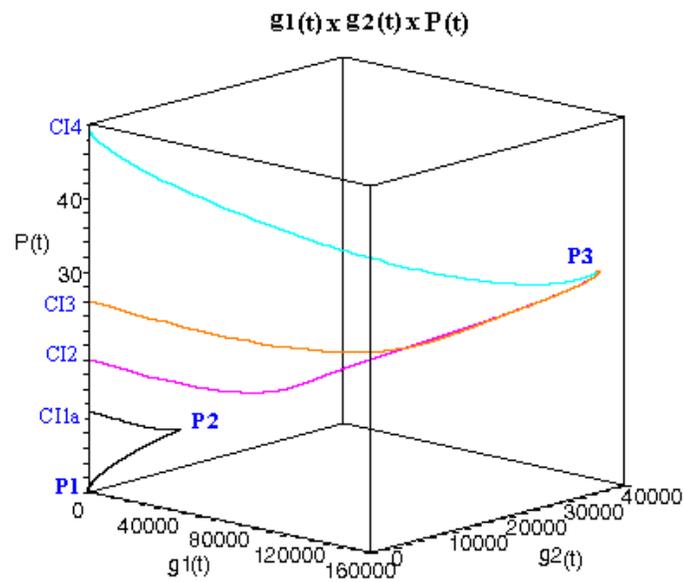


Figura B.3: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 100$ e $k = 100$

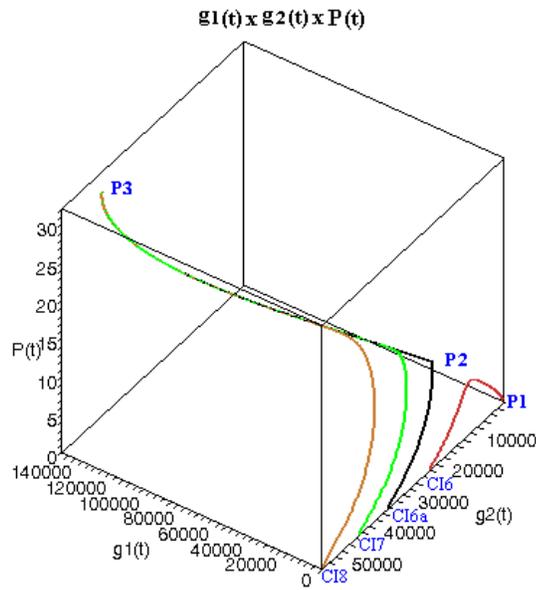


Figura B.4: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 100$ e $k = 100$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras B.3 e B.4 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou tendem para o ponto estável P3.

- Caso III : Os parâmetros utilizados nas simulações são $k = 100$ e $\alpha = 221$ e os estimados na seção 4.2.2, tabela 4.4

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (5.4):

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,100, -0,100, -0,223, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Não

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 68840, g_2 = 21690, P = 15, Q = 15\}$

Autovalores: $-0,750, -0,572, 0,004, -0,100$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 77590, g_2 = 23440, P = 16, Q = 16\}$

Autovalores: $-0,740, -0,587, -0,005, -0,100$ - Equilíbrio Instável: Nó

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P=0$ e $P=16$ são estáveis e $P=15$ é instável.

As figuras B.5 e B.6 mostram as projeções das trajetórias no espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1a: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=21, Q(0)=21$

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=22, Q(0)=22$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=36, Q(0)=36$

CI4: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=48, Q(0)=48$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=70000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0; g_2(0)=88400; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=110000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0; g_2(0)=130000; P(0)=0, Q(0)=0$

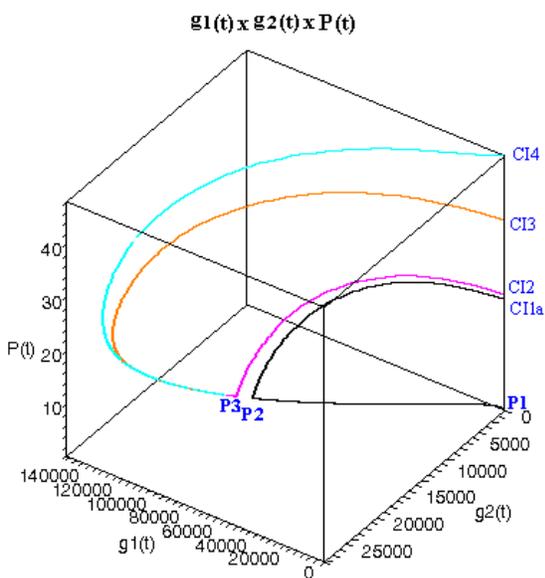


Figura B.5: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 221$ e $k = 100$

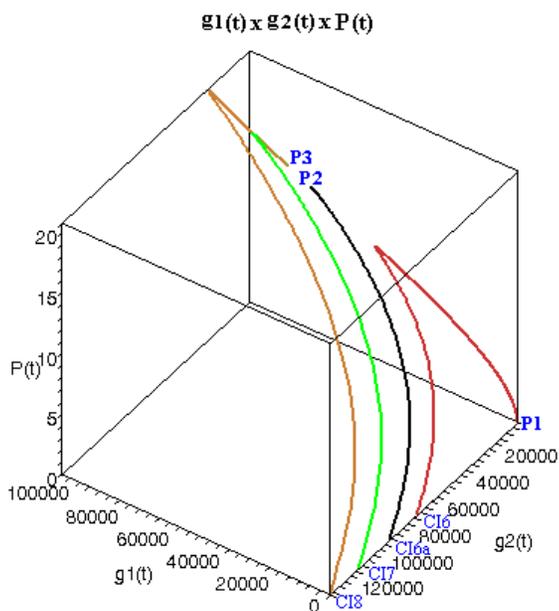


Figura B.6: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\alpha = 221$ e $k = 100$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras B.5 e B.6 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou tendem para o ponto estável P3.

Apêndice C

Simulações Numéricas do Modelo Matemático da Dinâmica Populacional de Pirarucus com a Influência da Pesca no Espaço de Fase $g_1 \times g_2 \times P$

No capítulo 6, seção 6.2 foram realizadas simulações numéricas para análise da influência da pesca de pirarucus na Reserva Mampirauá. As simulações foram subdivididas em seis casos (tabela 6.2). Para cada caso foram representados os retratos de fase no plano $P \times g_2$. Complementando essas simulações, serão apresentados neste apêndice, alguns cenários nos espaços de fase $g_1 \times g_2 \times P$ para os seis casos.

- Caso I: Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 0$; $f_3 = f_4 = 0.05$ e os exibidos na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem o sistema (6.9) :

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,150, -0,150, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

♦ $P_2 : \{g_1 = 23290, g_2 = 17240, P = 8, Q = 8\}$

Autovalores: $-0,830, -0,399, 0,045, -0,150$ - Equilíbrio Instável : Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 121500, g_2 = 89910, P = 42, Q = 42\}$

Autovalores: $-0,983, -0,101 + 0,260I, -0,101 - 0,260I, -0,150$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 42$ são estáveis e $P = 8$ é instável.

As figuras C.1 e C.2 mostram as projeções das trajetórias no espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1a: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=15, Q(0)=15$

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=22, Q(0)=22$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=28, Q(0)=28$

CI4: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=50, Q(0)=50$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=25000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0; g_2(0)=38098; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=50000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0; g_2(0)=60000; P(0)=0, Q(0)=0$

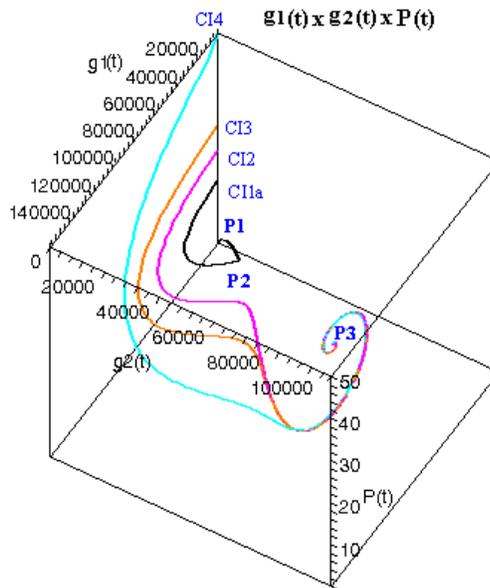


Figura C.1: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

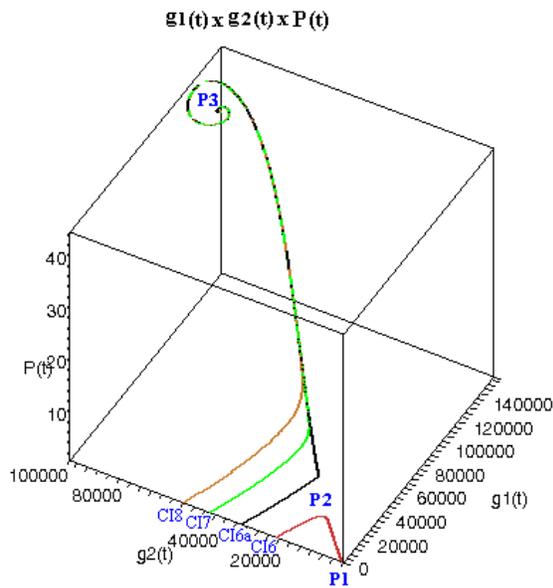


Figura C.2: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras C.1 e C.2 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou tendem para o ponto estável P3.

- ♦ Caso II: Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 0$; $f_3 = f_4 = 0.10$ e os mostrados na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem o sistema (6.9) :

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,200, -0,200, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 45440, g_2 = 33630, P = 12, Q = 12\}$

Autovalores: $-0,795, -0,484, 0,044, -0,200$ - Equilíbrio Instável : Ponto de Sela

- ♦ $P_3 : \{g_1 = 147600, g_2 = 109200, P = 38, Q = 38\}$

Autovalores: $-0,950, -0,143 + 0,193I, -0,143 - 0,193I, -0,200$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 38$ são estáveis e $P = 12$ é instável.

As figuras C.3 e C.4 mostram as projeções das trajetórias no espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=26, Q(0)=26$

CI2a: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=28, Q(0)=28$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=36, Q(0)=36$

CI4: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=50, Q(0)=50$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=55000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0; g_2(0)=65538; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=75000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0; g_2(0)=90000; P(0)=0, Q(0)=0$

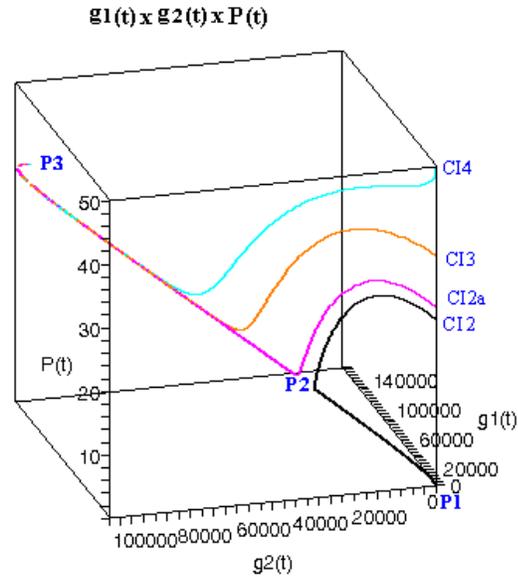


Figura C.3: Projção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais

para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$

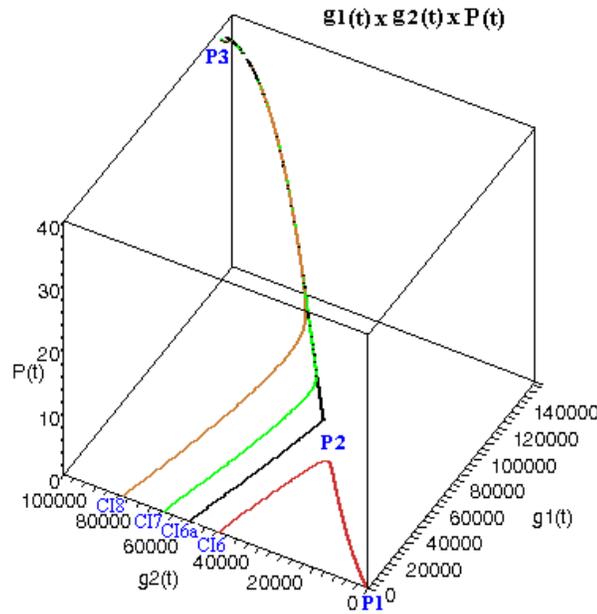


Figura C.4: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais

para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,10$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras C.3 e C.4 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou tendem para o ponto estável P3.

- Caso III : Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = 0,1777$ e os mostrados na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem o sistema (6.9) :

♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,278, -0,278, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

♦ $P_2 : \{g_1 = 131700, g_2 = 97520, P = 24, Q = 24\}$

Autovalores: $-0,800, -0,516, 0,003, -0,278$ - Equilíbrio Instável : Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 136200, g_2 = 100800, P = 25, Q = 25\}$

Autovalores: $-0,809, -0,501, -0,003, -0,278$ - Equilíbrio Instável : Nó

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 25$ são estáveis e o ponto $P_2 = 24$ é instável.

CI1a: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=23,Q(0)=23$

CI2: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=32,Q(0)=32$

CI3: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=38,Q(0)=38$

CI4: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=50,Q(0)= 50$

CI6: $g_1(0)=0;g_2(0)=150000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0;g_2(0)=164299;P(0)=0,Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0;g_2(0)=180000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0;g_2(0)=240000;P(0)=0,Q(0)=0$

As figuras C.5 e C.6 mostram as projeções das trajetórias no espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

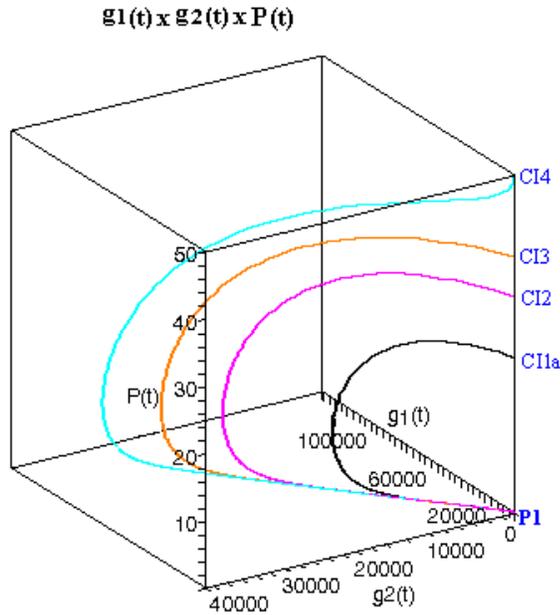


Figura C.5: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$

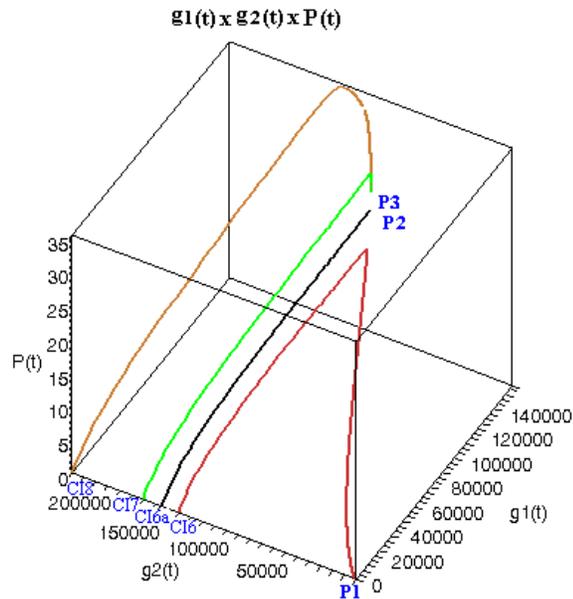


Figura C.6: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais para $\hat{\alpha} = 0$ e $f_3 = f_4 = 0,1777$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras C.5 e C.6 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou tendem para o ponto estável P3.

- Caso IV: Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$ e os mostrados na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (6.9):

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,150, -0,150, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 23440, g_2 = 17300, P = 8, Q = 8\}$

Autovalores: $-0,830, -0,400, 0,044, -0,150$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

- ♦ $P_3 : \{g_1 = 140200, g_2 = 84740, P = 39, Q = 39\}$

Autovalores: $-0,956, -0,114 + 0,298I, -0,114 + 0,298I, -0,150$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 39$ são estáveis e $P = 8$ é instável.

As figuras C.7 e C.8 mostram as projeções das trajetórias no espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1a: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=15,Q(0)=15$

CI2: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=18,Q(0)=18$

CI3: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=28,Q(0)=28$

CI4: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=40,Q(0)=40$

CI6: $g_1(0)=0;g_2(0)=30000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0;g_2(0)= 38235;P(0)=0,Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0;g_2(0)=50000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0;g_2(0)=60000;P(0)=0,Q(0)=0$

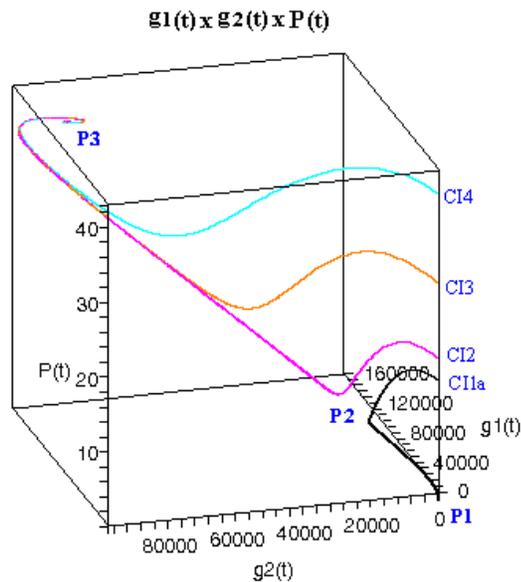


Figura C.7: Projção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e

as trajetórias para quatro condições iniciais

para $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

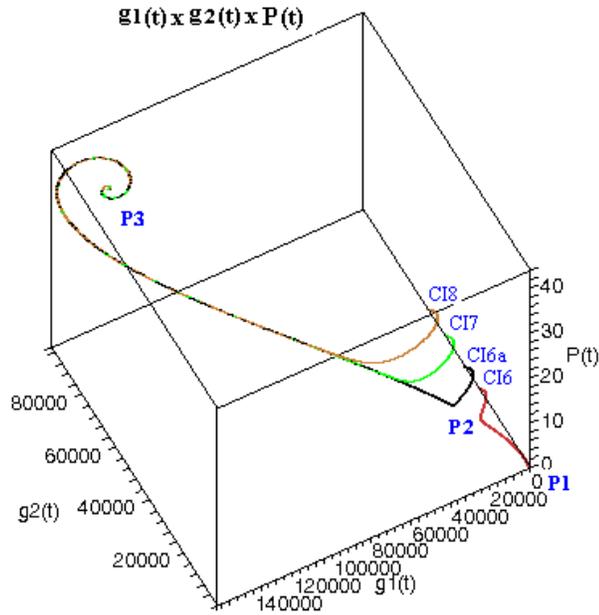


Figura C.8: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais

para $\hat{\alpha} = 3600$ e $f_3 = f_4 = 0,05$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras C.7 e C.8 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou tendem para o ponto estável P3.

- Caso V: Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$ e os mostrados na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (6.9):

♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: $-0,200, -0,200, -0,135, -0,900$ - Equilíbrio Estável: Nó

♦ $P_2 : \{g_1 = 47190, g_2 = 34400, P = 12, Q = 12\}$

Autovalores: $-0,794, -0,483, 0,042, -0,200$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

♦ $P_3 : \{g_1 = 158800, g_2 = 95670, P = 33, Q = 33\}$

Autovalores: $-0,901, -0,167 + 0,193I, -0,167 - 0,193I, -0,200$ - Equilíbrio Estável: Foco

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 33$ são estáveis e $P = 12$ é instável.

As figuras C.9 e C.10 mostram as projeções das trajetórias no espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=12, Q(0)=12$

CI1a: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=18, Q(0)=18$

CI2: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=26, Q(0)=26$

CI3: $g_1(0)=0; g_2(0)=0; P(0)=30, Q(0)=30$

CI6: $g_1(0)=0; g_2(0)=60000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0; g_2(0)=67030; P(0)=0, Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0; g_2(0)=75000; P(0)=0, Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0; g_2(0)=90000; P(0)=0, Q(0)=0$

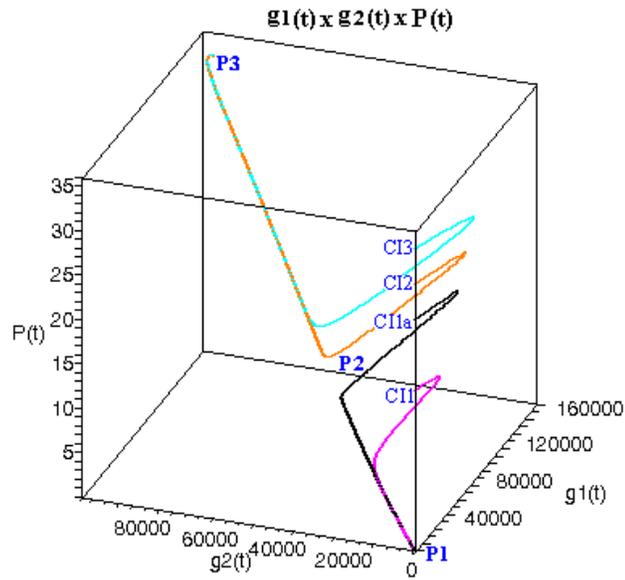


Figura C.9: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais

para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$

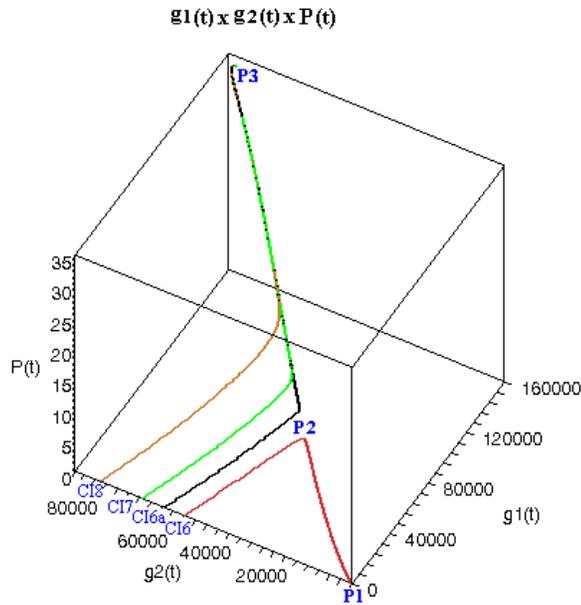


Figura C.10: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais

para $\hat{\alpha} = 7200$ e $f_3 = f_4 = 0,10$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras C.9 e C.10 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou tendem para o ponto estável P3.

- Caso VI : Os parâmetros utilizados nas simulações são $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$ e os mostrados na tabela 6.1

Existem três pontos de equilíbrio que satisfazem as equações do sistema (6.9):

- ♦ $P_1 : \{g_1 = 0, g_2 = 0, P = 0, Q = 0\}$

Autovalores: - $-0,250, -0,250, -0,135, -0,900$ Equilíbrio Estável: Nó

- ♦ $P_2 : \{g_1 = 111800, g_2 = 76130, P = 21, Q = 21\}$

Autovalores: $-0,783, -0,507, 0,004, -0,250$ - Equilíbrio Instável: Ponto de Sela

- ♦ $P_3 : \{g_1 = 119600, g_2 = 80940, P = 22, Q = 22\}$

Autovalores: $-0,793, -0,486, -0,005, -0,250$ - Equilíbrio Estável: Nó

Pelos autovalores verificamos que os pontos de equilíbrio $P = 0$ e $P = 22$ são estáveis e $P = 21$ é instável.

As figuras C.11 e C.12 mostram as projeções das trajetórias no espaço de fase $g_1 \times g_2 \times P$ das populações do peixe passando pelos seguintes pontos:

CI1: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=12,Q(0)=12$

CI1a: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=18,Q(0)=18$

CI2: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=22,Q(0)=22$

CI3: $g_1(0)=0;g_2(0)=0;P(0)=26,Q(0)=26$

CI6: $g_1(0)=0;g_2(0)=120000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI6a: $g_1(0)=0;g_2(0)=133959;P(0)=0,Q(0)=0$

CI7: $g_1(0)=0;g_2(0)=150000;P(0)=0,Q(0)=0$

CI8: $g_1(0)=0;g_2(0)=160000;P(0)=0,Q(0)=0$

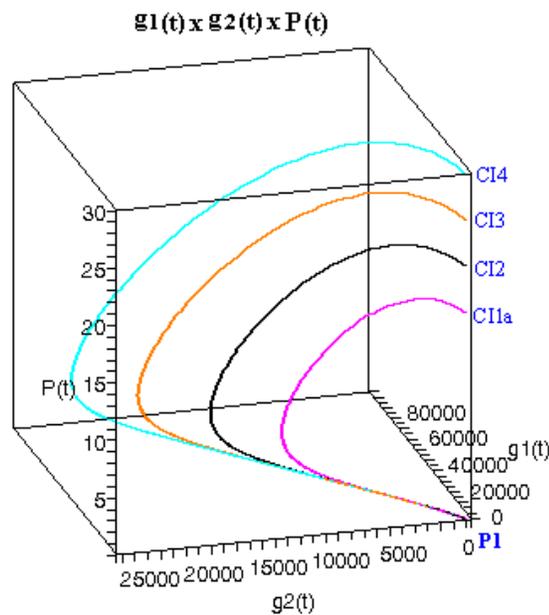


Figura C.11: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais

para $\hat{\alpha} = 10800$ e $f_3 = f_4 = 0,15$

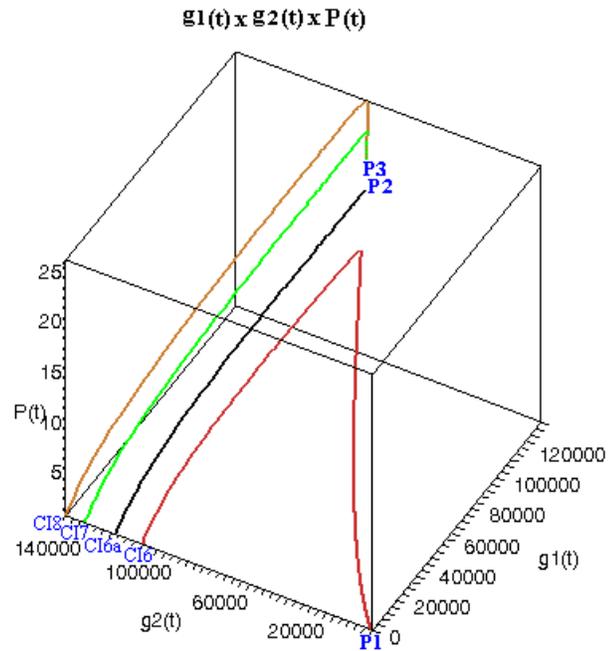


Figura C.12: Projeção das trajetórias no espaço $g_1 \times g_2 \times P$ mostrando as três soluções de equilíbrio e as trajetórias para quatro condições iniciais

$$\text{para } \hat{\alpha} = 10800 \text{ e } f_3 = f_4 = 0,15$$

Para os parâmetros representados na tabela 4.2 e conforme se observa nas figuras C.11 e C.12 dependendo das condições iniciais as trajetórias ou se aproximam do ponto crítico P1, na origem ou tendem para o ponto estável P3.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)