Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fecho Integral de Módulos e Equisingularidade de Espaços Analíticos Complexos

por

Rodrigo Alves de Oliveira Arruda

João Pessoa - PB
Junho - 2008

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fecho Integral de Módulos e Equisingularidade de Espaços Analíticos Complexos

por

Rodrigo Alves de Oliveira Arruda †

sob orientação do

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - DM - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq-Brasil.

Fecho Integral de Módulos e Equisingularidade de Espaços Analíticos Complexos

por

Rodrigo Alves de Oliveira Arruda

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - DM - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal

Orientador

Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez-ICMC-USP

Profa. Dra. Jacqueline Rojas Arancíbia

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Junho/2008

Conteúdo

Resumo

Neste trabalho provamos o Teorema algebro-geométrico de Gaffney, o qual caracteriza completamente as condições de Whitney de famílias de espaços analíticos complexos com singularidades arbitrárias em termos do fecho integral de módulos naturalmente associados a estas famílias.

Palavras-chaves: condições de Whitney, fecho integral, módulo Jacobiano.

Abstract

In this work we prove Gaffney's algebro-geometric theorem, which completely characterizes the Whitney's conditions of families of complex analytic spaces with arbitrary singularities in terms of the integral closure of modules naturally associated with these families.

Keywords: Whitney's conditions, integral closure, Jacobian module.

Introdução

A teoria de equisingularidade trata do estudo de famílias de espaços analíticos complexos. Procura condições que garantam que os membros da família tenham o mesmo tipo de singularidade num certo sentido. Muitas das condições de equisingularidade, tais como as condições **(a)** e **(b)** de Whitney, a condição w de Verdier, a condição A_f de Thom e a condição relacionada a W_f, podem ser formuladas em termos de limites de espaços lineares. As condições **(a)** e **(b)** de Whitney foram introduzidas por ele mesmo em [16] com o intuito de encontrar condições geométricas suficientes no par (X, Y), onde X é um espaço analítico complexo e Y é um subespaço não-singular de X, que garantam a trivialidade topológica de X ao longo de Y. Ele mostrou através de um exemplo que a condição **(a)** não é suficiente para este propósito. Então ele propôs a condição **(b)** e conjecturou que as duas condições garantem a trivialidade topológica. Esta conjectura é agora um teorema, conhecido como *1º Teorema de Isotopia de Thom-Mather*.

Em [6], H. Hironaka introduziu uma versão modificada das condições de Whitney, chamada de condição **(a)** estrita com expoente e, e provou que as condições **(a)** e **(b)** de Whitney implicam na condição **(a)** estrita com expoente não preciso e. A condição **(a)** estrita com expoente 1 foi chamada por J. Verdier em [15] de condição w e ele provou que esta condição implica nas condições **(a)** e **(b)** de Whitney. B. Teissier em [13] provou a recíproca.

No início dos anos 70, Teissier começou a trabalhar numa teoria algébrica sobre as condições de Whitney. Seu ponto de partida foi no caso em que X é uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^n$. Em [12], ele desenvolveu a teoria infinitesimal e a teoria de invariantes geométricos necessária para estudar a equisingularidade de Whitney de famílias de hipersuperfícies analíticas complexas X_t com singularidades isoladas. O fecho integral de um ideal I, denotado por $\overline{I}$, no anel local de X_t na origem, é o ingrediente infinitesimal principal desta teoria. Para ideais de co-comprimento finito I, o Teorema de Rees (veja [10]) garante que o invariante que controla o fecho integral de I é a sua multiplicidade, denotada por $e(I)$. Os invariantes geométricos envolvidos no trabalho de Teissier é a sequência dos números de Milnor μ^*, onde μ^k é o número de Milnor da interseção de X_t com um k-plano genérico. O vínculo entre as duas teorias é proporcionado pela descrição, dada por Teissier em [12], da multiplicidade do produto do ideal maximal com o ideal jacobiano relativo em termos da seqüência dos números de Milnor. As idéias de Teissier culminaram no seguinte resultado:

Teorema 1 *Suponha que $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n+1}, 0) \to \mathbb{C}$ define uma hipersuperfície X com estrutura reduzida, $f_t(z) = F(t, z)$ define X_t, uma hipersuperfície reduzida em $\mathbb{C}^{n+1}$ com singularidades isoladas na origem e que $X - T$ é liso, onde $T = \mathbb{C} \times \{0\}$. Então, são equivalentes:*

1. *$X - T$ satisfaz as condições de Whitney ao longo de T*
2. *$\mu^*(X_t)$ são independentes de t*
3. $\frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{\mathfrak{m}_{n+1}(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}})}$
4. *$e(\mathfrak{m}_{n+1} J(f_t); \mathcal{O}_{X_t,0})$ é constante.*

Este trabalho de Teissier foi generalizado por T. Gaffney para famílias de interseções completas com singularidades isoladas em [4], substituindo a sequência dos números de Milnor μ^* de X_t pelas multiplicidades polares $m_k(X_t)$, o fecho integral de ideais pelo fecho integral de submódulos de módulos livres e a multiplicidade de um ideal pela multiplicidade de Buchsbaum-Rim de submódulos de co-comprimento finito num módulo livre, denotada por $e_{BR}(M)$. O teorema de Gaffney é o seguinte:

Teorema 2 *Suponha que $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^{n-d}$ define uma interseção completa X com estrutura reduzida, $f_t(z) = F(t, z)$ define X_t, uma interseção completa reduzida em $\mathbb{C}^n$ com singularidades isoladas na origem e que $X - T$ é liso, onde $T = \mathbb{C} \times \{0\}$. Então, são equivalentes:*

1. *$X - T$ satisfaz as condições de Whitney ao longo de T*
2. *as multiplicidades polares $m_k(X_t)$ são independentes de t*

3. $\frac{\partial F}{\partial t} \in \overline{\mathfrak{m}_n(\frac{\partial F}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_n})}$

4. $e_{BR}(\mathfrak{m}_n J(f_t); \mathcal{O}_{X_t,0})$ *é constante, onde* $\mathfrak{m}_n J(f_t)$ *é olhado como um submódulo de* $\mathcal{O}^{n-d}_{X_t,0}$

A demonstração do resultado acima aparece na literatura como segue: a equivalência 1. $\Leftrightarrow$ 2. em [3], a equivalência 1. $\Leftrightarrow$ 4. em [4] e a equivalência 1. $\Leftrightarrow$ 3. em [2]. Neste trabalho provaremos somente a última equivalência, que se encontra em [2]. De fato, a versão feita por Gaffney em [2] sobre esta equivalência é mais geral do que a apresentada acima pois diz respeito a famílias a t-parâmetros de espaços analíticos complexos de dimensão pura com singularidades arbitrárias, não necessariamente interseções completas com singularidades isoladas como estabelece o teorema acima.

A seguir faremos um breve resumo do conteúdo desta dissertação.

No Capítulo 1 definimos, na primeira seção, redução e fecho integral de ideais, estabelecendo no final uma relação entre estes conceitos. Na seção seguinte provamos o teorema que inspirou a teoria desenvolvida no capítulo seguinte.

No Capítulo 2 desenvolvemos a teoria de fecho integral de módulos no caso analítico complexo e provamos diferentes caracterizações deste conceito.

No Capítulo 3 apresentamos o teorema álgebro-geométrico de Gaffney que caracteriza completamente as condições de Whitney em termos de fecho integral de módulos.

No Apêndice estabelecemos as principais noções e resultados da teoria de esquemas, que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

Capítulo 1

Fecho Integral de Ideais

Para melhor compreendermos uma teoria de fecho integral de módulos é importante entendermos a teoria que a precedeu. Neste capítulo desenvolveremos os conceitos e principais resultados sobre fecho integral de ideais.

Na primeira seção faremos um tratamento puramente algébrico sobre reduções e sua relação com fecho integral de ideais para na seção seguinte tratarmos do que nos interessa: o caso analítico.

1.1 Redução e Fecho Integral

É muito estreita a relação entre fecho integral e redução, tanto no caso de ideais, quanto no de módulos. Por isso, ao tratarmos de fecho integral é importante falarmos sobre redução.

Começaremos com redução, e em seguida definimos o fecho integral. No Teorema 1.2 obtemos tal relação.

A referência principal para esta teoria é o livro de Vasconcelos [14].

Ao longo deste trabalho, todos os anéis são noetherianos, comutativos e com unidade.

Definição 1.1 *Considere A um anel e J, I ideais de A tais que $J \subseteq I$. Dizemos que J é uma* ***redução*** *de I se $I^{n+1} = JI^n$, para algum inteiro positivo n. O menor inteiro l tal que isto acontece é chamado* ***número de redução*** *de I com relação a J, sendo denotado por $r_J(I)$.*

Exemplo 1.1 *Sejam* $I = (x^2, y^2, xy)$ *e* $J = (x^2, y^2)$. *É fácil verificar que* $I^2 = JI$ *e, além disso,* $r_J(I) = 1$.

A seguir um exemplo mostrando que o número de redução depende do ideal menor.

Exemplo 1.2 *Seja* $I = (x^7, x^6y, x^2y^5, y^7) \subset K[x, y]$. *Considerando* $J = (x^7, y^7)$ *e* $L = (x^7, x^6y + y^7)$, *ambas reduções de* I, *temos* $r_J(I) = 4$ *e* $r_L(I) = 3$.

Observação 1.1 *Quando* A *é um anel local, cujo único ideal maximal é* $\mathfrak{m}$ *e o corpo residual* $k = A/\mathfrak{m}$ *é infinito, segue por [8, Teorema 8.6.6] que todo ideal* I *de* A *possui reduções em abundância.*

Agora, considere I ideal do anel A. Dizemos que $h \in A$ é **inteiro sobre I** se existe um polinômio mônico $P(z) = z^k + a_1z^{k-1} + \ldots + a_k$, com $a_i \in I^i$, tal que $P(h) = 0$.

Definição 1.2 *O* ***fecho integral*** *de* I, *denotado por* $\overline{I}$, *consiste de todos os elementos de* A *que são inteiros sobre* I. *Se* $I = \overline{I}$, *dizemos que* I *é* ***integralmente fechado***.

Note que se $J \subseteq I$, então $J \subseteq \overline{J} \subseteq \overline{I}$. Também, se h é inteiro sobre I, então, pela definição, h é zero de um polinômio mônico de grau k, assim $h^k \in I$, portanto $\overline{I} \subseteq \sqrt{I}$.

Seja $A[T]$ o anel de polinômios na variável T e com coeficientes em A. Definimos a álgebra de Rees de I, denotada por $\mathcal{R}(I)$, como sendo o subanel $\oplus_{n\in\mathbb{N}} I^nT^n$ de $A[T]$ e obtemos o seguinte resultado:

Proposição 1.1 *Sejam* $h \in A$ *e* I *um ideal de* A. *Então temos que:*

1. *h é inteiro sobre I se, e somente se, hT é inteiro sobre o anel $\mathcal{R}(I)$, no sentido usual (ver [17, Cap. V]);*
2. *$\overline{I}$ é um ideal de A;*
3. *$\overline{\overline{I}} = \overline{I}$.*

Demonstração:

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Se $h \in \overline{I}$, então $h^k + a_1h^{k-1} + \ldots + a_k = 0$, com $a_i \in I^i$. Logo $(hT)^k + (a_1T)(hT)^{k-1} + \ldots + (a_kT^k) = 0$ é uma relação de dependência inteira de hT sobre $\mathcal{R}(I)$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Se hT é inteiro sobre $\mathcal{R}(I)$, então $(hT)^k + b_1(hT)^{k-1} + \ldots + b_k = 0$, com $b_i \in \mathcal{R}(I)$. Desta igualdade concluímos que o coeficiente da potência T^k deve ser zero e, assim, obtemos uma relação de dependência inteira sobre I.

2. Se $a \in A$ e $h \in \overline{I}$, segue imediatamente que $ah \in \overline{I}$. Sejam $g, h \in \overline{I}$. Como o fecho integral de $\mathcal{R}(I)$ em $A[T]$ é um subanel de $A[T]$, temos que $g + h$ também está em $\overline{I}$.

3. Seja $h \in \overline{\overline{I}}$. Então hT é inteiro sobre $\mathcal{R}(\overline{I})$, uma subálgebra de $\oplus_{n\in\mathbb{N}}\overline{I^n}T^n$. Logo hT também é inteiro sobre I. ■

O lema a seguir nos dá uma condição suficiente para um elemento estar no fecho integral de um ideal.

Lema 1.1 *Sejam A um anel e I um ideal de A. Se existe M um A-módulo finitamente gerado e fiel tal que $hM \subseteq IM$, então $h \in \overline{I}$.*

Demonstração: Suponha M um A-módulo finitamente gerado e fiel tal que $hM \subseteq IM$. Considere $e_1, \ldots, e_p$ um sistema de geradores de M. Então $h \cdot e_i = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} e_j$, com $\lambda_{ij} \in I$. Assim, $\sum_{j=1}^{p}(h\delta_{ij} - \lambda_{ij})e_j = 0$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Multiplicando à esquerda pela adjunta da matriz $(h \cdot Id - \Lambda)$ segue que $\det(h \cdot Id - \Lambda) \cdot M = 0$, onde Λ é a matriz (λ_{ij}). Por hipótese, M é fiel, o que nos dá $\det(h \cdot Id - \Lambda) = 0$, e isto é uma relação de dependência inteira. ■

Agora obtemos uma condição necessária para um elemento estar no fecho de um ideal. Primeiro precisaremos que A seja um domínio. Em seguida faremos o caso em que A é apenas **reduzido**, isto é, não possui elementos nilpotentes.

Lema 1.2 *Sejam A um domínio de integridade e I um ideal de A. Se $h \in \overline{I}$, então existe M um A-módulo finitamente gerado e fiel tal que $hM \subseteq IM$.*

Demonstração: Se $h \in \overline{I}$, então satisfaz uma relação de dependência da forma $h^k = a_1 h^{k-1} + \ldots + a_k$, com $a_i \in I^i$. Note que cada $a_i h^{k-i}$ está em $I(I + hA)^{k-1}$, logo $h^k \in I(I + hA)^{k-1}$. Por fim,

$$h(I + hA)^{k-1} = hI^{k-1} + h^k A + \sum_{\alpha=2}^{k-1} h^\alpha I^{k-\alpha} = I \cdot I^{k-2}h + h^k A + \sum_{\alpha=2}^{k-1} I \cdot I^{k-1-\alpha} h^\alpha,$$

onde cada uma destas últimas parcelas está contida em $I(I + hA)^{k-1}$. Portanto, $h(I + hA)^{k-1} \subseteq I(I + hA)^{k-1}$. Claramente $M = (I + hA)^{k-1}$ é finitamente gerado e fiel. ■

Finalmente obtemos uma caracterização da definição de fecho integral. Aqui temos o caso de ideais numa visão algébrica. No próximo capítulo obtemos algo similiar para módulos no caso analítico, veja Teoremas 2.1 e 2.2.

Teorema 1.1 *Sejam A um anel reduzido e I um ideal deste anel. Então $h \in \overline{I}$ se, e somente se, existe M um A-módulo finitamente gerado e fiel tal que $hM \subseteq IM$.*

Demonstração:

$\boxed{\Rightarrow}$ Se $h \in \overline{I}$, então $h+\mathfrak{p} \in \overline{I+\mathfrak{p}}$ em $A/\mathfrak{p}$, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$, em particular para todo $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(A) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$.

Segue do Lema 1.2 que para cada $\mathfrak{p}_i$ existe um $A/\mathfrak{p}_i$-módulo $M(\mathfrak{p}_i)$ finitamente gerado e fiel tal que $(h+\mathfrak{p}_i)M(\mathfrak{p}_i) \subseteq (I+\mathfrak{p}_i)M(\mathfrak{p}_i)$.

O homomorfismo sobrejetivo $\pi : A \to A/\mathfrak{p}_i$ induz uma estrutura de A-módulo no módulo $M(\mathfrak{p}_i)$, que denotaremos por $M(\mathfrak{p}_i)_A$. Definimos o seguinte A-módulo finitamente gerado.

$$M := M(\mathfrak{p}_1)_A \times \ldots \times M(\mathfrak{p}_s)_A.$$

Se $aM = 0$ então $aM(\mathfrak{p}_i)_A = 0$ para todo i. Então $(a+\mathfrak{p}_i)M(\mathfrak{p}_i) = 0$, o que resulta em $a + \mathfrak{p}_i = 0$ em $A/\mathfrak{p}_i$, pois $M(\mathfrak{p}_i)$ é fiel. Disto temos que $a \in \cap \mathfrak{p}_i = \text{Rad}(0) = \{0\}$, pois A é reduzido. Portanto M é fiel.

Por fim,

$$hM = (h+\mathfrak{p}_1)M(\mathfrak{p}_1)\times\ldots\times(h+\mathfrak{p}_s)M(\mathfrak{p}_s) \subseteq (I+\mathfrak{p}_1)M(\mathfrak{p}_1)\times\ldots\times(I+\mathfrak{p}_s)M(\mathfrak{p}_s) = IM.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Segue do Lema 1.1. ■

O seguinte lema mostra uma propriedade transitiva da noção de redução. Com ele obtemos o resultado cujo corolário nos dá a relação entre redução e fecho integral.

Lema 1.3 *Sejam $K \subseteq J \subseteq I$ ideais do anel A. Se K é redução de J e J é redução de I, então K é redução de I.*

Demonstração: Temos por hipótese $J^{l+1} = KJ^l$ e $I^{p+1} = JI^p$, para alguns l e p. Por indução temos $I^{p+n} = J^n I^p$, para todo inteiro positivo n. Portanto, $I^{p+l+1} = J^{l+1}I^p = KJ^lI^p = KI^{p+l}$, mostrando que K é uma redução de I. ■

Proposição 1.2 *J é uma redução de I se, e somente se, todo elemento de I é inteiro sobre J.*

Demonstração:

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponha que $I^{r+1} = JI^r$, para algum r. Para cada $x \in I$, temos $xI^r \subseteq JI^r$. Considere $e_1, \ldots, e_n$ um sistema de geradores de I^r. Então $x \cdot e_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j$, com $\lambda_{ij} \in J$. Assim, $\sum_{j=1}^{n} (x\delta_{ij} - \lambda_{ij})e_j = 0$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Multiplicando à esquerda pela adjunta da matriz $(x \cdot Id - \Lambda)$ segue que $\det(x \cdot Id - \Lambda) \cdot I^r = 0$, onde Λ é a matriz (λ_{ij}). Obtemos o elemento z na forma

$$z = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_i \in J^i$$

que está em $\mathrm{Ann}(I^r) \cap I$, logo $z^{r+1} = zz^r = 0$. Disto, obtemos uma relação de dependência inteira para x sobre J.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponhamos que $I \subseteq \overline{J}$. Seja $x \in I$, então $x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0$. Logo $J(J + xA)^{k-1} = (J + xA)^k$, isto é, J é uma redução de $J + xA$. Como $J \subseteq I$, existem $x_1, \ldots, x_m \in I$ tais que $I = J + (x_1, \ldots, x_m)$, o que nos dá a cadeia

$$J \subseteq (J, x_1) \subseteq (J, x_1, x_2) \subseteq \ldots \subseteq I,$$

onde $(J, x_1, \ldots, x_{i-1})$ é uma redução de $(J, x_1, \ldots, x_i)$. Pelo Lema 1.3, J é uma redução de I. ■

Segue então,

Teorema 1.2 *J é uma redução de I se, e somente se, $\overline{J} = \overline{I}$.*

A última caracterização é pelo critério valuativo de dependência inteira. Apenas enunciaremos sua forma algébrica, porém na próxima seção demonstraremos o caso analítico. Neste teorema abaixo, A não é necessariamente noetheriano.

Teorema 1.3 *Seja A um domínio de integridade e I um ideal do anel A. Então $\overline{I} = A \cap (\bigcap I \cdot V)$, onde V percorre os anéis de valoração de A.*

Se A é noetheriano, então $h \in \overline{I}$ se, e somente se, $\varphi(h) \in \varphi(I)V$ para todo homomorfismo $\varphi : A \to V$, onde V é um domínio de valoração discreto.

Demonstração: Veja [14, 1.39].

Finalizamos esta seção com o seguinte lema útil para a próxima seção.

Lema 1.4 *Seja A um anel normal (reduzido e integralmente fechado sobre o seu corpo total de frações). Seja I inversível, isto é, principal, gerado por um elemento g não-divisor de zero. Então* $I = \overline{I}$.

Demonstração: Seja $h \in \overline{I}$. Como I é principal, a equação $h^k + a_1 h^{k-1} + \ldots + a_k = 0$ pode ser reescrita assim $h^k + \alpha_1 g h^{k-1} + \ldots + \alpha_k g^k = 0$, onde $\alpha_i \in A$, para todo i. Como g não é divisor de 0, temos $(\frac{h}{g})^k + \alpha_1 (\frac{h}{g})^{k-1} + \ldots + \alpha_k = 0$, uma relação de dependência inteira sobre A de um elemento de $Tot(A)$. Por hipótese, A é normal, então $\frac{h}{g} \in A$, o que implica $h \in I$ e, portanto, $I = \overline{I}$, já que a outra inclusão é trivial. ■

1.2 Caso Analítico

Na seção anterior tivemos um tratamento puramente algébrico do fecho integral de um ideal. Agora trabalharemos no caso em que A é o anel local de uma variedade analítica complexa reduzida, isto é, $A = \mathcal{O}_{X,y}$. Isto nos dá algumas propriedades interessantes, além, claro, daquelas vistas na seção anterior.

Aqui precisaremos dos conceitos de Geometria Algébrica tais como feixes, esquemas e resultados desta teoria. Para quem não está familiarizado com a teoria de esquemas, no Apêndice apresentamos estes pré-requisitos.

Agora segue o resultado que motivou aquilo que veremos no capítulo seguinte, obtendo um análogo para o caso de módulos.

Teorema 1.4 *Sejam X um espaço analítico complexo reduzido e* $\mathcal{I}$ *um feixe coerente de ideais sobre X definindo um subespaço Y fechado e próprio. Dada uma função holomorfa h sobre X e* $y \in X$, *são equivalentes:*

1. $h_y \in \overline{\mathcal{I}_y}$.
2. *(Condição de crescimento) Para cada conjunto de geradores* (g_i) *de* $\mathcal{I}$, *existe uma vizinhança* $\mathcal{U}$ *de y e uma constante* $C > 0$ *tais que:*
$$\|h(z)\| \leq C \cdot \sup_i \|g_i(z)\|, \quad \forall\, z \in \mathcal{U}.$$
3. *(Critério Valuativo) Para toda* $\varphi : (\mathbb{D}, 0) \to (X, y)$, *temos* $\varphi^*(h_y) \in \varphi^*(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_1$.
4. *Existe L um* $\mathcal{O}_{X,y}$*-módulo finitamente gerado e fiel tal que* $h \cdot L \subseteq \mathcal{I} \cdot L$.

Demonstração:

- *1.* $\Leftrightarrow$ *2.*

$\boxed{\Rightarrow}$ Seja $(\pi, \pi^\sharp) : (\overline{X'}, \mathcal{O}_{\overline{X'}}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ a normalização do blowing-up de X ao longo de $\mathcal{I}$. Temos que $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'}}$ é um feixe inversível sobre um espaço normal (Proposição A.4). Assim, segue do Lema 1.4 que $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'}} = \overline{\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'}}}$.

Seja $h_y \in \overline{\mathcal{I}_y}$, então temos a seguinte relação de dependência

$$h_y^k + a_1 h_y^{k-1} + \ldots + a_k = 0, \quad a_i \in \mathcal{I}_y^i.$$

Como h_y é um germe de funções, podemos estendê-lo para uma vizinhança $\mathcal{U}$ de y em X, isto é, podemos obter $h \in \overline{H^0(\mathcal{U}, \mathcal{I})} \subseteq H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ tal que

$$< \mathcal{U}, h >= h_y \quad e \quad h^k + a_1 h^{k-1} + \ldots + a_k = 0,$$

e isto implica que $(h \circ \pi)_{x'}$ é inteiro sobre $(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'}})_{x'}$, para todo $x' \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$. Mais ainda, $(h \circ \pi)_{x'} \in (\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'}})_{x'}$, pois este é integralmente fechado. Portanto $h \in H^0(\mathcal{U}, \pi_*(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'}}) \cap \mathcal{O}_X)$. Como $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'}}$ é localmente principal (é um feixe inversível), para todo ponto $x' \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}_{x'}$ e uma constante $c_{x'} \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|h \circ \pi(w')\| \leq c_{x'} \cdot \|g_i \circ \pi(w')\| \ , \quad \forall \ w' \in \mathcal{V}_{x'} \ e \ i = 1, ..., p.$$

Desde que π é um morfismo próprio sobrejetivo, podemos cobrir $\pi^{-1}(y)$ por um número finito de abertos $\mathcal{V}_{y_i'}$, com $y_i' \in \pi^{-1}(y)$, tais que $\pi^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq \bigcup_i \mathcal{V}_{y_i'}$, onde $\mathcal{V}$ é uma vizinhança de y em $\mathcal{U}$. Colocando $C = \sup_i c_{y_i'}$ obtemos a desigualdade

$$\|h(x)\| \leq C \cdot \sup_{1 \leq i \leq p} \|g_i(x)\| \ , \quad \forall \ x \in \mathcal{V}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supondo agora que tal desigualdade é satisfeita para todo $x \in \mathcal{V}$, então a mesma é satisfeita para $h \circ \pi$ e $g_i \circ \pi$ em $\pi^{-1}(\mathcal{V})$. Entretanto, $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\pi^{-1}(\mathcal{V})}$ é inversível, então se $(g_1, ..., g_p)$ são os geradores do ideal $\mathcal{I}_y$ temos para cada ponto $y' \in \pi^{-1}(y)$ uma vizinhança $\mathcal{V}_{y'}$ tal que $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{,w'} = (g_i \circ \pi)_{w'} \mathcal{O}_{\overline{X'},w'}$, para algum g_i e para todo $w' \in \mathcal{V}_{y'}$.

A função $(h \circ \pi)_{w'}$ ser limitada pelos elementos de $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'},w'}$ é equivalente à função meromorfa $\frac{(h \circ \pi)_{w'}}{(g_i \circ \pi)_{w'}}$ ser limitada numa vizinhança de y'. Desde que $\overline{X'}$ é normal, implica $\frac{(h \circ \pi)_{w'}}{(g_i \circ \pi)_{w'}}$ ser holomorfa, ou seja, $(h \circ \pi)_{w'} \in \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'},w'} = \overline{\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'},w'}}$. Portanto, $h_y \in \overline{\mathcal{I}_y}$.

- *1.* $\Leftrightarrow$ *3.*

$\boxed{\Rightarrow}$ Se $h_y \in \overline{\mathcal{I}_y}$, então $\varphi^*(h_y) \in \overline{\varphi^*(\mathcal{I}_y) \cdot \mathcal{O}_1}$. Mas $\varphi^*(\mathcal{I}_y) \cdot \mathcal{O}_1$ é principal e $\mathcal{O}_1$ é normal, portanto $\varphi^*(\mathcal{I}_y) \cdot \mathcal{O}_1$ é integralmente fechado.

Assim, $\varphi^*(h_y) \in \varphi^*(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Seja $\pi : (\overline{X'}, y') \longrightarrow (X, y)$. Temos as seguintes equivalências:

$$h_y \in \overline{\mathcal{I}_y} \iff h \circ \pi \in \mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'},y'} \iff h \circ \pi = h' \cdot g,\ h' \in \mathcal{O}_{\overline{X'},y'}$$

$$\iff \frac{h \circ \pi}{g} \text{ é holomorfa numa vizinhança de } y'.$$

Suponhamos, por absurdo, que $\frac{h \circ \pi}{g}$ não é holomorfa, ou ainda, não é limitada. Considere um morfismo de tipo finito $p : (\overline{X'}, y') \longrightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$. Assim, $\frac{h\circ\pi}{g}$ é algébrica sobre $K(\mathbb{C}^d, 0) = Q(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^d,0})$, isto é, existe um polinômio mônico $P(t) \in Q(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^d,0})[t]$ que se anula em $\frac{h\circ\pi}{g}$:

$$\left(\frac{h \circ \pi}{g}\right)^n + p_1 \left(\frac{h \circ \pi}{g}\right)^{n-1} + \ldots + p_n = 0, \quad p_i \in Q(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^d,0}).$$

e, então, existe $\varphi : (\mathbb{D}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$ tal que $(p_i \circ \varphi)(t) \longrightarrow +\infty$, quando $t \longrightarrow +\infty$ e para algum i. E obtemos o seguinte diagrama comutativo pelo Critério Valuativo de Aplicações Próprias (Proposição A.3)

$$\begin{tikzcd} & (\overline{X'}, y') \arrow[d, "p"] \\ (\mathbb{D}, 0) \arrow[ur, dotted, "\varphi'"] \arrow[r, "\varphi"'] & (\mathbb{C}^d, 0) \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Assim $(p_i \circ p \circ \varphi')(t) \longrightarrow +\infty$, $t \longrightarrow +\infty$, o que nos dá uma relação análoga ao diagrama (1.1) para $\frac{h\circ\pi\circ\varphi'}{g\circ\varphi'}$.

Agora, como $\frac{h\circ\pi\circ\varphi'}{g\circ\varphi'} \in Q(\mathcal{O}_1)$, temos $\frac{h\circ\pi\circ\varphi'}{g\circ\varphi'} = us^n$, e se esta função não é holomorfa temos $\nu(h \circ \pi \circ \varphi') < \nu(g \circ \varphi')$, então $h \circ \pi \circ \varphi' \notin < g \circ \varphi' > \cdot \mathcal{O}_1$. Portanto, $\varphi^*(h \circ \pi) \notin \varphi^*(\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X'},y'})$, o que é absurdo.

- *1.* $\Leftrightarrow$ *4.*

Segue do Teorema 1.1. ■

Capítulo 2

Fecho Integral de Módulos

Neste capítulo trataremos do fecho integral de módulos. No capítulo anterior fizemos um tratamento algébrico e analítico para ideais. Aqui, porém, faremos o tratamento analítico para módulos. Existe também uma teoria algébrica sobre fecho integral para módulos desenvolvida principalmente por David Rees [11]. O que iremos apresentar aqui foi desenvolvido por Terence Gaffney em [2].

Começamos este capítulo com uma definição de fecho para módulos inspirada no critério valuativo mencionado no capítulo anterior (Teoremas 1.3 e 1.4). E partindo daí apresentamos propriedades análogas ao caso de ideais, encerrando com o Teorema 2.4, que é o análogo ao Teorema 1.4 para o caso de módulos.

Ao longo deste capítulo e do seguinte, (X, x) denotará um germe analítico complexo reduzido.

Seja M um submódulo de $\mathcal{O}^p_{X,x}$. Dizemos que $h \in \mathcal{O}^p_{X,x}$ é **inteiro sobre M** se para toda $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$, temos $h \circ \varphi \in (\varphi^*(M))\mathcal{O}_1$.

Definição 2.1 *O **fecho integral** de M, denotado por $\overline{M}$, consiste de todos os elementos de $\mathcal{O}^p_{X,x}$ que são inteiros sobre M.*

Como no caso de ideais também temos $M \subseteq \overline{M}$, $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ e $\overline{M}$ é um submódulo.

O exemplo a seguir ilustra melhor esta definição.

Exemplo 2.1 *Sejam $X = \mathbb{C}^2$ e $M \subseteq \mathcal{O}^2_2$ gerado por $\{(x, 0), (0, y), (y, x)\}$. Então $\overline{M} = \mathfrak{m}_2\mathcal{O}^2_2$.*

Demonstração: Considere $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (a_{n_1}t^{n_1} + \ldots, a_{n_2}t^{n_2} + \ldots) = (t^{n_1}A, t^{n_2}B)$, onde A e B são elementos inversíveis. Assim $\varphi^*(x, 0) = (\varphi_1, 0) = (t^{n_1}, 0)$, $\varphi^*(0, y) = (0, \varphi_2) = (0, t^{n_2})$, $\varphi^*(y, x) = (\varphi_2, \varphi_1) = (\mu_2 t^{n_2}, \mu_1 t^{n_1})$. Note então que $(\varphi^*(M))\mathcal{O}_1$ é gerado por $\{(t^n, 0), (0, t^n)\}$, onde $n = \min\{n_1, n_2\}$.

Por outro lado, $\mathfrak{m}_2\mathcal{O}_2^2$ é gerado por $\{(x, 0), (y, 0), (0, x), (0, y)\}$ e daí $(\varphi^*(\mathfrak{m}_2)\mathcal{O}_2^2)\mathcal{O}_1$ é gerado também por $\{(t^n, 0), (0, t^n)\}$.

Portanto, $\mathfrak{m}_2\mathcal{O}_2^2 \subseteq \overline{M}$. Como a outra inclusão é válida, temos, por fim, que $\overline{M} = \mathfrak{m}_2\mathcal{O}_2^2$. ■

Agora começaremos a desenvolver a teoria tendo em vista obter resultados similares ao Teorema 1.4. A primeira propriedade é uma generalização do Lema de Nakayama, como é fácil perceber.

Proposição 2.1 *Sejam $N \subseteq M$ submódulos de $\mathcal{O}_{X,x}^p$ e $\mathfrak{m}_x$ ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Então*

(i) Se $\overline{\mathfrak{m}_x\overline{M} + N} = \overline{M}$, então $\overline{N} = \overline{M}$.

(ii) Se $M \subseteq \mathfrak{m}_x\overline{M} + N \subseteq \overline{M}$, então $\overline{N} = \overline{M}$.

Demonstração:

(i) Seja $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$. Então

$$\begin{aligned}
(\varphi^*(M))\mathcal{O}_1 &= (\varphi^*(\mathfrak{m}_x\overline{M} + N))\mathcal{O}_1 \\
&= (\varphi^*(\mathfrak{m}_x)\varphi^*(\overline{M}) + \varphi^*(N))\mathcal{O}_1 \\
&= (\varphi^*(\mathfrak{m}_x)\varphi^*(M) + \varphi^*(N))\mathcal{O}_1, \text{ pois } \overline{\overline{M}} = \overline{M} \\
&= (\mathfrak{m}_1\varphi^*(M))\mathcal{O}_1 + (\varphi^*(N))\mathcal{O}_1, \text{ pois } \varphi^*(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_1.
\end{aligned}$$

Pelo lema de Nakayama temos $(\varphi^*(M))\mathcal{O}_1 = (\varphi^*(N))\mathcal{O}_1$, isto é $\overline{M} = \overline{N}$.

(ii) Pela hipótese temos $\overline{\mathfrak{m}_x\overline{M} + N} = \overline{M}$. ■

A seguir demonstraremos uma generalização da Regra de Cramer. Antes, explicaremos alguns conceitos.

Observação 1

Considere M um submódulo de $\mathcal{O}^p_{X,x}$ gerado pelos elementos $h^1, \ldots, h^s$, onde $h^j = (h^j_1, \ldots, h^j_p)$, então a matriz $[M]$ associada ao módulo M será definida por

$$[M] = \begin{pmatrix} h^1_1 & \cdots & h^s_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h^1_p & \cdots & h^s_p \end{pmatrix}.$$

Também denotaremos por $J_k(M)$ o ideal gerado pelos menores $k \times k$ de $[M]$. Do ponto de vista algébrico, este ideal corresponde ao $(p-k)$-ésimo ideal de Fitting de $\mathcal{O}^p_{X,x}/M$, garantindo a independência da escolha dos geradores [1, 20.2]. Assim, definimos o posto do submódulo M como sendo o maior inteiro k tal que $J_k(M) \neq 0$. Por fim, (h, M) denota o submódulo gerado por h e M.

Observação 2

Dadas as matrizes-colunas $x = (x_i)$ e $C = (c_i)$ e a matriz $A = (a_{ij})_{k \times k}$, temos o sistema linear abaixo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix},$$

e pela regra de Cramer

$$\det A(x_1, \ldots, x_k) = (\det[C, A_1], \ldots, \det[C, A_k]),$$

onde $[C, A_j]$ denota a matriz obtida a partir de A pela substituição da j-ésima coluna da matriz A pela matriz-coluna C.

Agora enunciamos e demonstramos o seguinte resultado:

Lema 2.1 *Sejam $h \in \mathcal{O}^p_{X,x}$ e $M \subseteq \mathcal{O}^p_{X,x}$ um submódulo. Suponha $J_{k+1}((h, M)) = 0$ e que nenhum elemento de $J_k(M)$ é um divisor de zero em $\mathcal{O}_{X,x}$. Então*

$$J_k(M) \cdot h \subseteq M \cdot J_k((h, M)).$$

Demonstração: Sejam A uma submatriz $k \times k$ de $[M]$ e h_A a k-upla obtida pela eliminação dos elementos de h correspondentes às linhas deletadas de $[M]$ na obtenção de A.

O sistema linear $A \cdot x = \det A \cdot h_A$, onde h_A é vista como matriz-coluna, pela Regra de Cramer (Observação 2) tem como solução a seguinte k-upla de elementos de $J_k((h_A, A\mathcal{O}^k_{X,x}))$

$$q = (x_1, \dots, x_k) = (\det[h_A, A_1], \dots, \det[h_A, A_k]).$$

Agora, sejam $b = \det A$ e B a submatriz $p \times k$ de $[M]$ obtida pela eliminação das mesmas colunas de $[M]$ que foram eliminadas na obtenção de A. Definimos $g = (bh - Bq)$ e afirmamos que $g = 0$.

Suponha, por absurdo, que algum $g_i \neq 0$. Considere $\widetilde{g}$ o elemento obtido de g deletando os mesmos elementos que nos deram h_A, porém, mantendo o i-ésimo termo, e B_g a submatriz de B obtida pela eliminação das linhas correspondentes. Assim, por hipótese

$$\det[\widetilde{g}, B_g] = \pm g_i \det A = 0,$$

mas $\det A$ não é um divisor de zero, logo $g_i = 0$, o que é absurdo. Portanto, $g = 0$. E disto segue o que queríamos mostrar. ■

Na Proposição 2.2 mostraremos uma relação entre $\overline{M}$, fecho de um módulo, e $\overline{J_k(M)}$, fecho do ideal associado a este módulo. A seguir apresentamos alguns lemas que resultarão em tal relação.

Para os lemas a seguir consideraremos M um submódulo de $\mathcal{O}^p_{X,x}$, X irredutível e $h \in \mathcal{O}^p_{X,x}$.

Lema 2.2 *Seja $\varphi_1 : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ tal que:*

1. *$\varphi_1(t)$ está num aberto de X, se $t \neq 0$, onde o posto de (h, M) é k e*
2. *$\varphi_1^*(J_k((h, M))) \subseteq \varphi_1^*(J_k(M))$.*

Então $\varphi_1^*(h) \in \varphi_1^*(M)$.

Demonstração: Como $\varphi_1^*(J_k(M))$ é um ideal principal e pela inclusão da hipótese temos $\varphi_1^*(J_k((h, M))) = \varphi_1^*(J_k(M)) = (s)$.

Pelo Lema (2.1) temos $s \cdot (h \circ \varphi_1) \in (\varphi_1^*(M))\mathcal{O}_1 \cdot (\varphi_1^*(J_k((h, M))))\mathcal{O}_1$.

Portanto, sendo $\varphi_1^*(J_k((h, M))) = (s)$, temos $h \circ \varphi_1 \in (\varphi_1^*(M))\mathcal{O}_1$. ■

Para o lema seguinte utilizaremos um resultado, do qual omitiremos a demonstração.

Lema 2.3 *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local. Então, para M um A-módulo finito e $N \subseteq M$ um submódulo, temos*

$$\bigcap_{n>0} (N + \mathfrak{m}^n M) = N.$$

Demonstração: Veja Cap. 3, seção 8 de [9]. ■

Lema 2.4 *Sejam X suave e $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ tal que:*

1. $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq V(J_k((h, M)))$ *e*
2. $\varphi^*(J_k((h, M))) \subseteq \varphi^*(J_k(M))$.

Então $\varphi^*(h) \in \varphi^*(M)$.

Demonstração: Suponha que $\varphi^*(h) \notin \varphi^*(M)$, isto é, $\varphi^*(M) \subsetneq \varphi^*((h, M))$. Então segue do Lema (2.3) que existe k_0 tal que para todo $k > k_0$

$$\varphi^*((h, M))\mathcal{O}_1 \neq \varphi^*(M)\mathcal{O}_1 \pmod{\mathfrak{m}_1^k \mathcal{O}_1^p}.$$

(caso contrário, não teríamos a inclusão estrita).

Agora, trunque φ até o nível l, com $l \gg k_0$ e considere $\varphi_1 \equiv j^l\varphi \pmod{\mathfrak{m}_1^{l+1} \mathcal{O}_1^p}$ satisfazendo as mesmas hipóteses do Lema 2.2. Então,

$$\begin{aligned}
(\varphi_1^*(M))\mathcal{O}_1 &\equiv (\varphi^*(M))\mathcal{O}_1 \pmod{\mathfrak{m}_1^{l+1}\mathcal{O}_1^p};\\
(\varphi_1^*((h, M)))\mathcal{O}_1 &\equiv (\varphi^*((h, M)))\mathcal{O}_1 \pmod{\mathfrak{m}_1^{l+1}\mathcal{O}_1^p};\\
\varphi_1^*((h, M)) &= \varphi_1^*(M).
\end{aligned}$$

Logo, $(\varphi^*(M))\mathcal{O}_1 \equiv (\varphi^*((h, M)))\mathcal{O}_1 \pmod{\mathfrak{m}_1^{l+1}\mathcal{O}_1^p}$, o que é uma contradição. Portanto, $\varphi^*(h) \in \varphi^*(M)$. ■

Antes da proposição a seguir faremos um breve comentário sobre resolução suave de uma variedade. Assim, seja X uma variedade analítica, uma resolução suave de X consiste no par $(\widetilde{X}, \pi)$ tal que $\widetilde{X}$ é suave e $\pi : (\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to (X, x)$ é uma aplicação própria e birracional, isto é, existem $\widetilde{\mathcal{U}} \subseteq \widetilde{X}$ e $\mathcal{U} \subseteq X$ abertos densos tais que $\pi|_{\widetilde{\mathcal{U}}} : \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ é um isomorfismo. No caso analítico, tal resolução sempre existe, [7].

Dada $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ obtemos pelo Critério Valuativo de Aplicações Próprias (Proposição A.3) o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X}, \widetilde{x}) \arrow[d, "\pi"] \\ (\mathbb{C}, 0) \arrow[ur, dotted, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3] & (X, x) \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Note que $\varphi = \pi \circ \widetilde{\varphi}$ e, portanto, $\varphi^* = \widetilde{\varphi}^* \circ \pi^*$.

Vamos agora à demonstração da proposição que relaciona $\overline{M}$ e $\overline{J_k(M)}$.

Proposição 2.2 *Sejam X irredutível, M um submódulo de $\mathcal{O}^p_{X,x}$ e $h \in \mathcal{O}^p_{X,x}$. Então $h \in \overline{M}$ se, e somente se, $J_k((h, M)) \subseteq \overline{J_k(M)}$, onde k é o posto de (h, M).*

Demonstração:

$\boxed{\Rightarrow}$ Seja $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$, então

$$\begin{aligned}
(\varphi^*(J_k((h, M))))\mathcal{O}_1 &= J_k((\varphi^*((h, M)))\mathcal{O}_1) \\
&= J_k((\varphi^*(h), \varphi^*(M))\mathcal{O}_1) \\
&= J_k((\varphi^*(M))\mathcal{O}_1), \text{ pois } h \in \overline{M} \\
&= (\varphi^*(J_k(M)))\mathcal{O}_1.
\end{aligned}$$

Pelo critério valuativo do Teorema 1.4 obtemos $\overline{J_k((h, M))} = \overline{J_k(M)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Novamente seja $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$. Então temos dois casos:

(1.) $\varphi(t)$ está num aberto de X, onde o posto de (h, M) é k, para $t \neq 0$;

(2.) $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq V(J_k((h, M)))$.

O caso (1.) segue do Lema 2.2. O caso (2.) divide-se em duas situações. Se X for suave, o Lema 2.4 garante o resultado. Se X for singular, consideremos uma resolução suave $(\widetilde{X}, \pi)$ de X. O diagrama (2.1) é válido e como $\varphi(t) \in V(J_k((h, M)))$ temos $\widetilde{\varphi}(t) \in V(\pi^*(J_k((h, M))) = V(J_k((\widetilde{h}, \widetilde{M})))$.

Além disso, $\widetilde{\varphi}^*(J_k((\widetilde{h}, \widetilde{M}))) = \widetilde{\varphi}^*(\pi^*(J_k((h, M)))) = \varphi^*(J_k((h, M))) \subseteq \varphi^*(J_k(M)) = \widetilde{\varphi}^*(\pi^*(J_k(M))) = \widetilde{\varphi}^*(J_k(\widetilde{M}))$.

Pelo Lema 2.4 $\widetilde{\varphi}^*(\widetilde{h}) \in \widetilde{\varphi}^*(\widetilde{M})$. Logo $\varphi^*(h) \in \varphi^*(M)$. ∎

Observe que a hipótese de k ser o posto de (h, M) não foi utilizada na implicação $\boxed{\Rightarrow}$. Isto é, $h \in \overline{M}$ resultando em $J_k((h, M)) \subseteq \overline{J_k(M)}$ vale para todo k. Isto nos dá um corolário imediato.

Corolário 2.1 *Sejam X um germe analítico complexo com componentes irredutíveis (V_i) e M um submódulo de $\mathcal{O}^p_{X,x}$. Então $h \in \overline{M}$ se, e somente se, $J_{k_i}((h, M_i)) \subseteq \overline{J_{k_i}(M_i)}$, onde M_i é o submódulo de $\mathcal{O}^p_{V_i,x}$ induzido de M e k_i é o posto de (h, M_i) em V_i. Se k_i é independente de i, então $h \in \overline{M}$ se, e somente se, $J_{k_i}((h, M)) \subseteq \overline{J_{k_i}}(M)$.*

Agora estamos prontos para desenvolvermos caracterizações para fecho integral de módulos análogas ao Teorema 1.4.

Teorema 2.1 *Sejam M um submódulo de $\mathcal{O}^p_{X,x}$ e $h \in \mathcal{O}^p_{X,x}$. Então $h \in \overline{M}$ se, e somente se, em cada componente V_i, x de X, x existe um ideal $I \subseteq \mathcal{O}_{V_i,x}$, $I \neq 0$, tal que $I \cdot h \subseteq I \cdot M$ em $\mathcal{O}^p_{V_i,x}$.*

Demonstração: Note que $h \in \overline{M} \Leftrightarrow h \in \overline{M_i}$, onde M_i é o submódulo em $\mathcal{O}^p_{V_i,x}$ induzido por M. Assim, podemos assumir que X é irredutível, ou equivalentemente, $\mathcal{O}_{X,x}$ é um domínio.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pela caracterização no Teorema 1.2 existe l tal que

$$\left(\overline{J_k(M)}\right)^{l+1} = \left(\overline{J_k(M)}\right)^{l} \cdot J_k(M), \tag{2.2}$$

onde k é o posto de M. Supondo $h \in \overline{M}$,

$$\begin{aligned}
(\overline{J_k(M)})^{l+1} \cdot h &= (\overline{J_k(M)})^{l} \cdot J_k(M) \cdot h \\
&\subseteq (\overline{J_k(M)})^{l} \cdot (M \cdot J_k((h, M))) \\
&\subseteq (\overline{J_k(M)})^{l+1} \cdot M, \text{ pela Proposição 2.2.}
\end{aligned}$$

Na primeira inclusão aplicamos a Regra de Cramer (Lema 2.1) pois, sendo $\mathcal{O}_{X,x}$ um domínio, nenhum elemento de $J_k(M)$ é divisor de zero, e o posto de (h, M) também é k por $h \in \overline{M}$ e k ser o posto de M.

Claramente $(\overline{J_k(M)})^{l+1} \neq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponha que exista um ideal I, $I \neq 0$, tal que $I \cdot h \subseteq I \cdot M$. Consideremos o seguinte conjunto $S^k(h) = \{\text{menores } k \times k \text{ de } [(h, M)] \text{ que envolvem } h\}$, onde k é o posto de (h, M). Se $a \in I$, então $aS^k(h) = S^k(ah)$ e $S^k(ah) \subseteq I \cdot J_k(M)$, pois $I \cdot h \subseteq I \cdot M$. Como vale para todo $a \in I$, temos que $S^k(h) \subseteq \overline{J_k(M)}$, conforme o Teorema 1.4. Os outros menores $k \times k$ que não envolvem h já estão contidos em $\overline{J_k(M)}$, isto significa que $J_k((h, M)) \subseteq \overline{J_k(M)}$. Portanto, segue da Proposição 2.2 que $h \in \overline{M}$. ∎

Rigorosamente, o teorema acima difere daquele sobre ideais pois o resultado garante a existência de ideais. Abaixo temos um resultado mais próximo daquele, porém precisamos de uma hipótese sobre o posto de M em cada uma das componentes.

Teorema 2.2 *Sejam $h \in \mathcal{O}^p_{X,x}$ e M um submódulo de $\mathcal{O}^p_{X,x}$ de posto p ou 0 em cada componente de X. Então $h \in \overline{M}$ se, e somente se, existe I um submódulo fiel de $\mathcal{O}_{X,x}$ tal que $I \cdot h \subseteq I \cdot M$.*

Demonstração:

$\boxed{\Rightarrow}$ Seja (g_j) o ideal de funções que se anulam nas componentes de X onde o posto de M_i é p. Considere $I = \left(\overline{J_p(M)}\right)^{l+1} + (g_j)$, onde l é tomado como na equação (2.2). Como o posto de M_i é p e $h \in \overline{M_i}$ o posto de (h, M_i) também é p. Então $J_p(M) \cdot h \subseteq M \cdot J_p((h, M))$, pois podemos aplicar a Regra de Cramer sem precisar de hipóteses sobre divisores de zero.

Pelo fato de h ser um elemento do fecho integral de M, segue que as funções componentes de h anulam-se naquelas componentes de X onde o posto de M_i é zero. Então

$$\begin{aligned} I \cdot h = (\overline{J_p(M)})^{l+1} \cdot h + (g_j) \cdot h &= (\overline{J_p(M)})^{l} \cdot J_p(M) \cdot h \\ &\subseteq (\overline{J_p(M)})^{l} \cdot M \cdot J_p((h, M)) \\ &\subseteq (\overline{J_p(M)})^{l+1} \cdot M \\ &\subseteq I \cdot M \end{aligned}$$

Seja $g \in \mathcal{O}_{X,x}$ tal que $gI = 0$. Por um lado, $g \cdot (\overline{J_p(M)})^{l+1} = 0$ resulta em g ser zero em todas as componentes de X onde o posto de M_i é p. Por outro lado, $g \cdot (g_j) = 0$ resulta em g ser zero naquelas componentes onde o posto é zero. Logo, $g \equiv 0$ em X, e segue que I é fiel.

$\boxed{\Leftarrow}$ Basta utilizar o mesmo argumento que no teorema anterior, afinal temos a mesma inclusão. ■

A seguir apresentamos a última caracterização de fecho integral, neste caso, uma condição de crescimento. É esta caracterização que utilizaremos na demonstração do teorema principal do próximo capítulo.

$\Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}))$ denotará seções do fibrado vetorial $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C})$.

Teorema 2.3 *Sejam $h \in \mathcal{O}^p_{X,x}$ e M um submódulo de $\mathcal{O}^p_{X,x}$. Então $h \in \overline{M}$ se, e somente se, para cada conjunto de geradores $\{s_i\}$ de M existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x e uma constante $C > 0$ tais que para toda $\varphi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}))$ temos*

$$\|\varphi(z)(h(z))\| \leq C \sup_i \|\varphi(z)(s_i(z))\|, \quad \forall\ z \in \mathcal{U}$$

Demonstração: Podemos assumir que X é irredutível e que o posto de M é k. Além disso, um conjunto de geradores $\{s_i\}$ de M nos dá um conjunto de geradores $\{S_i\}$ de $J_k(M)$. Por fim, escolhemos uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x tal que $\|g(z)\| \leq C \cdot \sup_i \|S_i(z)\|$, $C > 0$, para todo $z \in \mathcal{U}$ se, e somente se, $g \in \overline{J_k(M)}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponha $h \in \overline{M}$. Então o posto de (h, M) também é k. Para $\|S(z)\| = \sup_i \|S_i(z)\|$ temos $Sh = \sum_l s_l a_l$, com $a_l \in J_k((h, M)) \subseteq \overline{J_k(M)}$. Lembrando que X é irredutível $\Leftrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ é um domínio, logo podemos aplicar o Lema 2.1.

Inicialmente, consideremos $z \in \mathcal{U} - V(J_k(M))$ e $\varphi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}))$. Logo

$$\begin{aligned} \|\varphi(z)(h(z))\| &= \left\| \sum_l \frac{a_l(z)}{S(z)} \varphi(z)(s_l(z)) \right\| \\ &\leq \sum_l \frac{\|a_l(z)\|}{\|S(z)\|} \|\varphi(z)(s_l(z))\| \leq CN \sup_l \|\varphi(z)(s_l(z))\|, \end{aligned}$$

onde N é o número de geradores de M.

Como todas as funções são contínuas em $\mathcal{U}$ e esta desigualdade é válida num aberto denso de $\mathcal{U}$, então é válida em todo o aberto $\mathcal{U}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Fixe S uma submatriz de ordem $k \times (k-1)$ de M (digamos que $\mathbf{i} = i_1, \ldots, i_k$ denote as linhas escolhidas). Dado $w = (w_1, \ldots, w_p) \in \mathbb{C}^p$ denotamos por $w_\mathbf{i} := (w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}) \in \mathbb{C}^k$. Dada $f = (f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{O}^p_{X,x}$ denotamos por $f_\mathbf{i} := (f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}) \in \mathcal{O}^k_{X,x}$.

Agora definimos $\varphi_S \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}))$ do seguinte modo: dado $z \in X, x$

$$\begin{aligned} \varphi_S(z) : \ \mathbb{C}^p &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\longmapsto \det(w_\mathbf{i}, S(z)), \end{aligned}$$

onde $(w_\mathbf{i}, S(z))$ denota a matriz $k \times k$ cuja primeira coluna é o vetor $w_\mathbf{i}$ e o resto é a matriz S aplicada no vetor z.

Note que $\varphi_S(z)$ é linear, para todo $z \in X, x$, e que

$$\begin{aligned} \varphi_S(z)(h(z)) &= \det(h_\mathbf{i}(z), S(z)) \text{ é um típico elemento de } J_k((h, M))(z) \\ e \quad \varphi_S(z)(s(z)) &= \det(s_\mathbf{i}(z), S(z)), \text{ onde } s \text{ é um gerador de } M. \end{aligned}$$

Pela desigualdade da hipótese aplicada a $\varphi_S \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}))$ obtemos

$$\|\varphi_S(z)(h(z))\| \leq C \cdot \sup_{s \in \{s_i\}} \|\varphi_S(z)(s(z))\|$$

e então

$$\| \det(h_{\mathbf{i}}(z), S(z))\| = \| \det(h_{\mathbf{i}}, S)(z)\| \leq C \cdot \sup_{s \in \{s_i\}} \| \det(s_{\mathbf{i}}, S)(z)\| = \| \det(s_{\mathbf{i}}(z), S(z))\|.$$

Como $\det(h_{\mathbf{i}}, S)$ e $\det(s_{\mathbf{i}}, S)$ são típicos elementos de $J_k((h, M))$ e $J_k(M)$, respectivamente, segue do Teorema 1.4 que $J_k((h, M)) \subseteq \overline{J_k(M)}$. Portanto, pelo Teorema 2.2, $h \in \overline{M}$. ■

O seguinte teorema para módulos é o análogo ao caso de ideais (Teorema 1.4), o qual segue da definição 2.1 e dos Teoremas 2.1 e 2.3.

Teorema 2.4 *Sejam X, x um germe analítico complexo, M um submódulo de $\mathcal{O}^p_{X,x}$ e $h \in \mathcal{O}^p_{X,x}$. Então são equivalentes as afirmações:*

1. *$h \in \overline{M}$*
2. *(Condição de crescimento) Para cada conjunto de geradores $\{s_i\}$ de M existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x e uma constante $C > 0$ tais que para toda $\varphi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}))$ temos*
$$\|\varphi(z)(h(z))\| \leq C \sup_i \|\varphi(z)(s_i(z))\|, \quad \forall\ z \in \mathcal{U}$$
3. *(Critério Valuativo) Para toda $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$, temos $h \circ \varphi$ em $(\varphi^*(M))\mathcal{O}_1$.*
4. *Em cada componente V_i, x de X, x existe um ideal $I \subseteq \mathcal{O}_{V_i,x}$, $I \neq 0$, tal que $I \cdot h \subseteq I \cdot M$ em $\mathcal{O}^p_{V_i,x}$.*

O resultado a seguir mostra que a relação entre M e $J_k(M)$ dá origem a um feixe coerente. Para isto, usaremos uma descrição de $\overline{M}$ em termos do *blowing-up*.

Este resultado não será utilizado no decorrer da dissertação, portanto, apenas faremos um esboço da demonstração destacando os pontos principais.

Proposição 2.3 *Seja M um feixe coerente de submódulos de $\mathcal{O}^p_X$. Então existe um único feixe coerente $\overline{M}$ em X tal que para cada $x \in X$, temos $(\overline{M})_x = \overline{M_x}$ em $\mathcal{O}^p_{X,x}$.*

Demonstração: Primeiro suponhamos que M tem posto k em cada componente. Consideremos $NB_{J_k(M)}(X)$ a normalização do blowing-up de X ao longo de $J_k(M)$, com projeção π. Pela demonstração do Teorema 1.4, equivalência 1. $\Leftrightarrow$ 2. temos que $J_k((h,M)) \subseteq \overline{J_k(M)}$ se, e somente se, $\pi^*(J_k((h,M)))\otimes\mathcal{O}_{NB(X)} = \pi^*(J_k(M))\otimes\mathcal{O}_{NB(X)}$. Consideremos, também, o feixe em $NB(X)$ gerado por $\pi^*(M)$.

- $((\pi_*(\pi^*(M)\otimes\mathcal{O}_{NB(X)}))\cap\mathcal{O}^p_{X,x})_x = \overline{M_x}$

  Se $h \in \overline{M_x}$, então $\pi^*(J_k((h,M)))\otimes\mathcal{O}_{NB(X)} = \pi^*(J_k(M))\otimes\mathcal{O}_{NB} = J_k(\pi^*(M)\otimes\mathcal{O}_{NB})$. Como $J_{k+1}(\pi^*(M)\otimes\mathcal{O}_{NB}) = \pi^*(J_{k+1}(M)\otimes\mathcal{O}_{NB}) = 0$, em $NB(X)$, segue do Lema 2.1 que $h\circ\pi \in \pi^*(M)\otimes\mathcal{O}_{NB}$. Isto significa que em cada ponto de $V(\pi^*(J_k(M))\otimes\mathcal{O}_{NB})$, $\pi^*(J_k(M))\otimes\mathcal{O}_{NB}$ é principal, então podemos dividir.

  Se $h\circ\pi\in\pi^*(M)\otimes\mathcal{O}_{NB}$, então

  $$\pi^*(J_i((h,M)))\otimes\mathcal{O}_{NB} = J_i(\pi^*((h,M))\otimes\mathcal{O}_{NB}) = J_i(\pi^*(M)\mathcal{O}_{NB}).$$

  E disto resulta que o posto de (h,M) também é k e $J_k((h,M)) \subseteq \overline{J_k(M)}$. Por fim, a igualdade desejada segue do Corolário 2.1. Este feixe é coerente pelo fato de π ser uma aplicação própria.

Para o caso geral, denote por V_i a união das componentes de X nas quais o posto é i. Se $i>0$, em V_i, pela construção acima temos um feixe coerente $\overline{M_i}\subseteq\mathcal{O}^p_{V_i}$ onde $\overline{M}_{i,x} = \overline{M_{i,x}}$. Neste caso, $M_{i,x}$ é o submódulo de $\mathcal{O}^p_{V_i}$ induzido de M_x. Caso $i=0$, definimos $\overline{M_0}=0$.

Sejam $\widetilde{\overline{M_i}}$ o núcleo do morfismo de feixes $\mathcal{O}^p_X \to \mathcal{O}^p_{V_i}/\overline{M_j}$ e $\overline{M} = \cap\widetilde{\overline{M_i}}$, então $h\in(\overline{M})_x \Leftrightarrow h\in\overline{M_{i,x}}$, para todo $i \Leftrightarrow h\in\overline{M_x}$. ■

Finalizamos este capítulo com uma observação útil para o próximo capítulo, baseada na demonstração acima.

Observação 3

Suponha que o posto de M_i seja k em cada componente V_i de X. Segue da descrição de $\overline{M}$ acima que se $h\in\overline{M_x}$, então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x e um representante $\mathbf{h}$ de h tal que numa vizinhança de cada $z\in(\mathcal{U} - V(J_k(M))) - \mathrm{Sing}X$, $\mathbf{h}(\tilde{z}) = \sum_i a_{i,z}(\tilde{z})s_i(\tilde{z})$ e $\|a_{i,z}(\tilde{z})\| \leq C$, C dependendo apenas de $\mathcal{U}$ e dos geradores s_i. Isto se deve ao fato de π ser uma equivalência sobre $(\mathcal{U} - V(J_k(M))) - \mathrm{Sing}X$, e $\mathcal{U}$ poder ser escolhido de forma que estas desigualdades sejam satisfeitas em $\pi^{-1}(\mathcal{U})$.

Capítulo 3

Condições de Whitney

Uma vez desenvolvida a teoria de fecho integral de módulos podemos relacioná-la com a noção de equisingularidade de Whitney. A importância do teorema deste capítulo está em estabelecer uma relação entre o conceito algébrico de fecho integral de módulos e o conceito analítico de equisingularidade via condições de Whitney.

Antes de demonstrarmos este teorema apresentamos algumas definições relacionadas à equisingularidade e provamos um lema.

Definição 3.1 *Sejam A e B subespaços vetoriais de $\mathbb{C}^n$, definimos a* ***distância entre A e B*** *do seguinte modo:*

$$\operatorname{dist}(A,B) = \sup_{\substack{u \in B^{\perp}-\{0\} \\ v \in A-\{0\}}} \frac{|(u,v)|}{\|u\|\|v\|}.$$

Observe que nem sempre $\operatorname{dist}(A,B) = \operatorname{dist}(B,A)$. Também, se $C \subseteq B$, então $B^{\perp} \subseteq C^{\perp}$, logo $\operatorname{dist}(A,B) \leq \operatorname{dist}(A,C)$, entretanto $\operatorname{dist}(C,A) \leq \operatorname{dist}(B,A)$.

Segue diretamente da desigualdade de Schwarz que $\operatorname{dist}(A,B) \leq 1$.

Definição 3.2 *Sejam $X \subseteq \mathbb{C}^N$ um espaço analítico complexo de dimensão pura d e $Y \subseteq X$ um fechado próprio não-singular. Denotemos por $X^0 = X - SingX$ a parte não-singular de X. Dizemos que o par (X^0, Y) satifaz as* ***condições (a) e (b) de Whitney em*** *0 se:*

(a) *para toda seqüência de pontos $x_i \in X^0$ convergindo para $0 \in Y$ e tal que as direções dos espaços tangentes $T_{x_i}X^0$ convergem para um d-plano T, temos $T_0Y \subseteq T$.*

(b) *dadas as seqüências de pontos* $x_i \in X^0$ *e* $y_i \in Y$, *com* $x_i \to 0$ *e* $y_i \to 0$, *tais que* $T_{x_i}X^0$ *converge para um d-plano* T *e a direção da secante* $\overline{y_i x_i} \subseteq \mathbb{C}^N$ *converge para uma reta* l, *temos* $l \subseteq T$.

Definição 3.3 *Dizemos que o par* (X^0, Y) *satifaz a* ***condição*** w ***em*** 0 *se existe uma constante* $C > 0$ *e uma vizinhança* $\mathcal{U}$ *de* 0 *tal que:*

$$\operatorname{dist}(T_0Y, T_xX) \leq C\operatorname{dist}(x, Y), \text{ para todo } x \in \mathcal{U} \cap X^0.$$

No contexto analítico complexo Verdier em [15] e Teissier em [13] provaram a equivalência entre a condição w em 0 e as condições **(a)** e **(b)** de Whitney em 0.

O seguinte lema nos será útil na demonstração do teorema principal.

Lema 3.1 *Sejam* $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x)$ *o anel local da variedade analítica complexa irredutível* X, x *e* $N \subseteq M$ *submódulos de* $\mathcal{O}^p_{X,x}$. *Então*

1. $\operatorname{posto}(\mathfrak{m}_x M) = \operatorname{posto}(M)$;

2. Se $\overline{N} = \overline{M}$, *então* $\operatorname{posto}(N) = \operatorname{posto}(M)$.

Demonstração:

1. Suponha que $\operatorname{posto}(M) = k$. Como $\mathfrak{m}_x M \subseteq M$, temos $\operatorname{posto}(\mathfrak{m}_x M) \leq k$. Por outro lado, note que $J_k(\mathfrak{m}_x M) = \mathfrak{m}_x^k J_k(M)$. Como X, x é irredutível ($\mathcal{O}_{X,x}$ é um domínio) temos que $\operatorname{posto}(\mathfrak{m}_x M) \geq k$. Portanto, $\operatorname{posto}(\mathfrak{m}_x M) = k$.

2. Por um lado, $\operatorname{posto}(N) \leq \operatorname{posto}(M) = k$. Como $N \subseteq M$, então $M = N + (h_1, \ldots, h_s)$, assim podemos supor sem perda de generalidade que $M = N + (h)$. Disto segue que $h \in \overline{M} = \overline{N}$. Assim $J_k(M) = J_k((h, N)) \subseteq \overline{J_k(N)}$. A inclusão segue da Proposição 2.2. Por fim, se $\operatorname{posto}(N) < k$, obtemos $J_k(M) = 0$, o que é absurdo. Portanto, $\operatorname{posto}(N) = k$. ■

Agora podemos demonstrar nosso principal resultado. Primeiro fixemos notações. Seja $F : (\mathbb{C}^t \times \mathbb{C}^N, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ cujas coordenadas são escolhidas de modo que $\mathbb{C}^t \times \{0\} = Y$ e F defina X (de dimensão pura d) com estrutura reduzida ($X = F^{-1}(0)$). Seja $\mathfrak{m}_Y = (z_1, \ldots, z_N)$ o ideal que define Y em $\mathbb{C}^t \times \mathbb{C}^N$.

Teorema 3.1 *Suponham válidas as condições acima, então* (X^0, Y) *satisfaz as condições de Whitney em* 0 *se, e somente se,* $\dfrac{\partial F}{\partial s} \in \overline{(\mathfrak{m}_Y J_z F)}_{\mathcal{O}^p_{X,0}}$ *para todo vetor tangente* $\dfrac{\partial}{\partial s}$ *a* $\mathbb{C}^t \times \{0\}$.

Demonstração:

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponhamos que $(X^0, \mathbb{C}^t \times \{0\})$ satifaz a condição w em 0.

Seja $\pi : \mathbb{C}^t \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^t$ a projeção sobre $\mathbb{C}^t$. Pela hipótese, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ da origem tal que para todo $z \in \mathcal{U} \cap X^0$

$$\mathrm{dist}(\mathbb{C}^t \times \{0\}), T_z X) \leq C \mathrm{dist}(z, \mathbb{C}^t) < 1. \tag{3.1}$$

A princípio, essa vizinhança não garante a última desigualdade, porém podemos redefinir $\mathcal{U}$ por $\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{U} \mid \mathrm{dist}(x, \mathbb{C}^t) < \frac{1}{C}\}$, mas neste caso manteremos a mesma notação.

Considere $\pi|_{T_z X} : T_z X \to T_{\pi(z)} \mathbb{C}^t \simeq \mathbb{C}^t$, logo $\ker(\pi|_{T_z X}) = \{0\} \times \mathbb{C}^N \cap T_z X$. Note que

$$\pi|_{T_z X} \text{ é submersão} \Leftrightarrow \dim(\mathbb{C}^t \times \{0\} \cap (T_z X)^\perp) = 0$$

$$e \qquad \sup_{\substack{u \in (T_z X)^\perp - \{0\} \\ v \in \mathbb{C}^t - \{0\}}} \frac{|(u, v)|}{\|u\| \|v\|} = 1 \Leftrightarrow (T_z X)^\perp \cap \mathbb{C}^t \neq \{0\}.$$

Segue destas observações e da desigualdade em (3.1) que $\pi|_{T_z X}$ é submersão e, portanto, $\pi^{-1}(0) \cap T_z X$ é subespaço linear de codimensão t.

Denote por V_z o vetor em $T_z X$ ortogonal a $\pi^{-1}(0) \cap T_z X$ que se projeta em $\frac{\partial}{\partial s_i}$. Sejam l_z e l_i as retas determinadas por V_z e $\frac{\partial}{\partial s_i}$, respectivamente. Assim

$$\dim_{\mathbb{C}^t \times \mathbb{C}^N} l_z^\perp = t + N - 1 \qquad \text{e}$$

$$l_z^\perp = (\pi^{-1}(0) \cap T_z X) \oplus (T_z X)^\perp \oplus (\text{o resto da base de } \mathbb{C}^t).$$

lembrando que $\mathbb{C}^t \simeq (\pi^{-1}(0) \cap T_z X)^\perp$.

Então novamente pela desigualdade (3.1)

$$\mathrm{dist}(l_i, l_z) = \mathrm{dist}(l_i, T_z X) \leq \mathrm{dist}(\mathbb{C}^t, T_z X) \leq C \mathrm{dist}(z, \mathbb{C}^t),$$

(a igualdade ocorre porque só precisamos considerar os vetores $u \in l_z^\perp$ tais que $u \in (T_z X)^\perp$).

Uma outra base de vetores ortogonais a l_z é $\{w_j\}$, formada do seguinte modo: considere $V_z = (0, \ldots, 1, \ldots, 0, v_{t+1}, \ldots, v_{t+N})$, com 1 na i-ésima coordenada. Então w_j

será o vetor obtido pela substituição de 1 por $-\overline{v}_j$, v_j por 1 e as outras entradas zero. Então das desigualdades acima temos

$$\operatorname{dist}(l_i, l_z) \leq \sup_i \|v_i\| \leq C\operatorname{dist}(z, \mathbb{C}^t), \quad z \in \mathcal{U} \cap X^0.$$

Como V_z é um vetor tangente, $DF(z) \cdot V_z = 0$ o que resulta em $\dfrac{\partial F}{\partial s_i}(z) = \sum_j -v_j \dfrac{\partial F}{\partial z_j}(z)$.

Seja $\varphi(z) \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C})$, então

$$\begin{aligned} \left\|\varphi(z)\left(\frac{\partial F}{\partial s_i}(z)\right)\right\| &= \left\|\sum_j -v_j \varphi(z)\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}(z)\right)\right\| \\ &\leq CN\operatorname{dist}(z, \mathbb{C}^t) \sup_j \left\|\varphi(z)\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}(z)\right)\right\| \\ &= CN \sup_{i,j} \left\|\varphi(z)\left(z_i \frac{\partial F}{\partial z_j}(z)\right)\right\|. \end{aligned}$$

Portanto, segue do Teorema 2.3 que $\dfrac{\partial F}{\partial s_i} \in \overline{\mathfrak{m}_Y J_z F}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Provaremos que $(X^0, Y) = (X^0, \mathbb{C}^t \times \{0\})$ satifaz a condição w em 0.

Como $\mathfrak{m}_Y J_z F \subseteq J_z F \subseteq JF$ e $\dim X = d$ temos

$$\operatorname{posto}(\mathfrak{m}_Y J_z F) \leq \operatorname{posto}(J_z F) \leq \operatorname{posto}(JF) = t + N - d$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial s} \in \overline{\mathfrak{m}_Y J_z F} \subseteq \overline{J_z F} \Rightarrow \overline{J_z F} = \overline{JF}$$

Segue do Lema 3.1 que $\operatorname{posto}(\mathfrak{m}_Y J_z F) = t + N - d$ em cada componente de X. Também

$$\operatorname{Sing}(X) = V(J_{t+N-d}(JF)) \subseteq V(J_{t+N-d}(\mathfrak{m}_Y J_z F)),$$

pois $\mathfrak{m}_Y J_z F \subseteq JF \Rightarrow J_{t+N-d}(\mathfrak{m}_Y J_z F) \subseteq J_{t+N-d}(JF)$.

Recordando a observação feita no final do capítulo anterior, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de 0 tal que numa vizinhança de cada $z \in (\mathcal{U} - V(J_{t+N-d}(\mathfrak{m}_Y J_z F)))$ temos

$$\frac{\partial F}{\partial s_k}(\tilde{z}) = \sum_{i,j} a^k_{i,j,z}(\tilde{z}) \tilde{z}_j \frac{\partial F}{\partial z_i}(\tilde{z}) \quad e \quad \|a^k_{i,j,z}(\tilde{z})\| \leq C_k,\ C_k \text{ independente de } z.$$

Considere o campo de vetores tangentes a $T_z X$ dado por

$$V_{z,k} = \frac{\partial}{\partial s_k} - \sum_{i,j} a^k_{i,j,z}(z) z_j \frac{\partial}{\partial z_i},$$

e denotamos por S_z o espaço de dimensão t gerado por $(V_{z,k})$. O conjunto de vetores ortogonais a S_z é gerado por $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{k,j} \overline{a}^k_{i,j,z} \overline{z}_j \dfrac{\partial}{\partial s_k} \right\}$, que são N vetores linearmente independentes. Observe que

$$\begin{aligned}
\sup \frac{\left| \left(\dfrac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{k,j} \overline{a}^k_{i,j,z} \overline{z}_j \dfrac{\partial}{\partial s_k}, \dfrac{\partial}{\partial s_k} \right) \right|}{\left\| \dfrac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{k,j} \overline{a}^k_{i,j,z} \overline{z}_j \dfrac{\partial}{\partial s_k} \right\| \left\| \dfrac{\partial}{\partial s_k} \right\|} &\leq \sup \sqrt{\frac{\left\| \sum_j \overline{a}^k_{i,j,z} \overline{z}_j \right\|^2}{1 + \left\| \sum_j \overline{a}^k_{i,j,z} \overline{z}_j \right\|^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\sup \left\| \sum_j \overline{a}^k_{i,j,z} \overline{z}_j \right\|^2}{1 + \sup \left\| \sum_j \overline{a}^k_{i,j,z} \overline{z}_j \right\|^2}} \\
&\leq \sup \left\| \textstyle\sum_j \overline{a}^k_{i,j,z} \overline{z}_j \right\|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{dist}(\mathbb{C}^t \times \{0\}, S_z) \leq C' \sup_j \|\overline{z}_j\| \leq C' \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}^t),$$

onde $C' = N \sup_k C_k$.

Portanto,

$$\operatorname{dist}(\mathbb{C}^t \times \{0\}, T_z X) \leq C' \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}^t).$$

■

Apêndice A

Feixes e Esquemas

O objetivo deste apêndice é de apenas resumir os conceitos e resultados utilizados nos capítulos anteriores. Por isso apenas enunciaremos as proposições e teoremas sem demonstrações. A principal referência é [5].

A.1 Feixes

Começamos com as definiçoes de pré-feixes e feixes, essenciais para a teoria de esquemas.

Definição A.1 *Seja X um espaço topológico. Um* ***pré-feixe $\mathcal{F}$ de anéis*** *em X consiste dos objetos:*

- *para todo aberto $U \subseteq X$, temos um anel $\mathcal{F}(U)$ e*
- *para toda inclusão $V \subseteq U$ de abertos de X, temos um morfismo de anéis $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$,*

satisfazendo as condições:

1. $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$;
2. ρ_{UU} *é a aplicação identidade de* $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$;
3. *se $W \subseteq V \subseteq U$ são três abertos, então $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.*

Se $\mathcal{F}$ é um pré-feixe em X, nos referimos a $\mathcal{F}(U)$ como as *seções* do pré-feixe $\mathcal{F}$ sobre o aberto U, e algumas vezes usaremos a notação $\Gamma(U, \mathcal{F})$ para denotar o anel $\mathcal{F}(U)$. Chamaremos as aplicações ρ_{UV} de *restrições* e algumas vezes escreveremos $s|_V$ no lugar de $\rho_{UV}(s)$, para $s \in \mathcal{F}(U)$.

Definição A.2 *Um pré-feixe $\mathcal{F}$ num espaço topológico X é um **feixe** se:*

1. *para todo aberto U, $\{V_i\}$ cobertura aberta de U e $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = 0$ para todo i, então $s = 0$;*

2. *para todo aberto U, $\{V_i\}$ cobertura aberta de U e $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$, para cada i, tais que para cada i, j, vale a igualdade $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$, então existe um único elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para cada i. (a unicidade vem da condição (1.)).*

Definição A.3 *Se $\mathcal{F}$ é um pré-feixe em X e p é um ponto de X, definimos o **stalk** $\mathcal{F}_p$ de $\mathcal{F}$ em p sendo o limite direto dos anéis $\mathcal{F}(U)$ para todos os abertos U contendo p, por meio das restrições ρ.*

Convém fazermos uma observação importante sobre esta última definição. Um elemento de $\mathcal{F}_p$ é representado pelo par (U, s), onde U é uma vizinhança de p e s é um elemento de $\mathcal{F}(U)$. Portanto, dois pares (U, s) e (V, t) definem o mesmo elemento de $\mathcal{F}_p$ se, e somente se, existe uma vizinhança aberta W de p, com $W \subseteq U \cap V$, tal que $s|_W = t|_W$. Deste modo, podemos falar dos elementos de $\mathcal{F}_p$ como germes de seções de $\mathcal{F}$ no ponto p. No caso de uma variedade X e seu feixe de funções holomorfas $\mathcal{O}_X$, o *stalk* $\mathcal{O}_p$ no ponto p é exatamente o anel local de p em X, denotado por $\mathcal{O}_{X,p}$.

Definição A.4 *Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são pré-feixes em X. Um **morfismo de pré-feixes** $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ consiste em uma família de morfismos de anéis $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ para cada aberto U, tais que para qualquer $V \subseteq U$ o diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

*comuta. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são feixes em X, usamos a mesma definição para um **morfismo de feixes**. Um **isomorfismo** é um morfismo com inversa a direita e a esquerda.*

Abaixo o nosso primeiro resultado.

Proposição A.1 *Seja $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ um morfismo de feixes em um espaço topológico X. Então φ é um isomorfismo se, e somente se, a aplicação induzida $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ é um isomorfismo para todo $p \in X$.*

A proposição seguinte nos dá a definição de feixe associado a um pré-feixe.

Proposição A.2 *Dado um pré-feixe $\mathcal{F}$, existe um feixe $\mathcal{F}^+$ e um morfismo $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, com a propriedade de que para qualquer feixe $\mathcal{G}$ e qualquer morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, existe um único morfismo $\psi : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal que $\varphi = \psi \circ \theta$. $\mathcal{F}^+$ é chamado de **feixe associado** ao pré-feixe $\mathcal{F}$.*

Finalizamos esta seção com a seguinte definição.

Definição A.5 *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos.*

*Para qualquer feixe $\mathcal{F}$ em X, definimos o **feixe de imagem direta** $f_*\mathcal{F}$ em Y por*

$$(f_*\mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

para qualquer aberto $V \subseteq Y$.

*Para qualquer feixe $\mathcal{G}$ em Y, definimos o **feixe de imagem inversa** $f^{-1}\mathcal{G}$ em X como sendo o feixe associado ao pré-feixe $U \mapsto \lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$, onde U é um aberto em X e o limite é tomado sobre todos os abertos V de Y contendo $f(U)$.*

A.2 Esquemas afins e arbitrários

Sabemos que dado um anel A temos um espaço topológico Spec$A$. Agora iremos definir o *sprectrum* de A. Antes, definiremos o feixe de anéis $\mathcal{O}$ em Spec$A$.

Para um aberto $U \subseteq$ Spec$A$, definimos $\mathcal{O}(U)$ como o conjunto de funções $s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ tal que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$, para cada $\mathfrak{p}$, e tal que s é localmente o quociente de elementos de A.

Definição A.6 *O **spectrum** de A é o par* $(\mathrm{Spec}A, \mathcal{O})$,

Um **espaço anelado** é um par $(X, \mathcal{O}_X)$ consistindo do espaço topológico X e do feixe de anéis $\mathcal{O}_X$ em X. Um **morfismo de espaços anelados** de $(X, \mathcal{O}_X)$ em $(Y, \mathcal{O}_Y)$ é um par $(f, f^\sharp)$, onde $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua e $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ é um morfismo de feixes de anéis em Y. O espaço anelado $(X, \mathcal{O}_X)$ é dito **espaço anelado localmente** se para cada ponto $p \in X$, o stalk $\mathcal{O}_{X,p}$ é um anel local. Um **morfismo de espaços anelados localmente** é um morfismo de espaços anelados $(f, f^\sharp)$ tais que para cada ponto $p \in X$, a aplicação induzida de anéis locais $f_p^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ é um homomorfismo local de anéis locais.

Agora podemos definir esquemas.

Definição A.7 *Um* ***esquema afim*** *é um espaço anelado* $(X, \mathcal{O}_X)$ *isomorfo (como espaço anelado localmente) ao spectrum de algum anel. Um* ***esquema*** *é um espaço anelado localmente* $(X, \mathcal{O}_X)$ *no qual todo ponto tem uma vizinhança* U *tal que o espaço topológico* U*, juntamente com o feixe restrito* $\mathcal{O}_X|_U$*, é um esquema afim. Um* ***morfismo de esquemas*** *é um morfismo de espaços anelados localmente. Dizemos que um esquema* $(X, \mathcal{O}_X)$ *é* ***reduzido*** *se para todo aberto* U *de* X *o anel* $\mathcal{O}_X(U)$ *não possui elementos nilpotentes.*

Denotaremos apenas por X o esquema $(X, \mathcal{O}_X)$.

Definiremos morfismo próprio e enunciaremos um importante resultado: o Critério Valuativo de Propriedade.

Definição A.8 *Um morfismo* $f : X \to Y$ *é* ***próprio*** *se é separado, de tipo finito e universalmente fechado.*

Proposição A.3 *Seja* $f : X \to Y$ *um morfismo de esquemas de tipo finito, onde* X *é noetheriano. Então* f *é própria se, e somente se, as condições seguintes são válidas. Para qualquer corpo* K *e qualquer anel de valoração* R *com corpo quociente* K*, denotemos por* $i : \mathrm{Spec}K \to \mathrm{Spec}R$ *o morfismo induzido pela inclusão* $R \subseteq K$*. Dados um morfismo de* $\mathrm{Spec}R$ *em* Y *e um morfismo de* $\mathrm{Spec}K$ *em* X *que formam um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}K \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}R \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd},$$

então existe um único morfismo de $\mathrm{Spec}R$ *em* X *fazendo todo o diagrama comutar.*

Observação A.1 X *é noetheriano se pode ser coberto por um número finito de abertos afins* $\mathrm{Spec}A_i$*, onde cada* A_i *é um anel noetheriano.*

Finalizamos esta seção com a definição:

Definição A.9 *Um esquema é* ***normal*** *se todos os seus anéis locais são domínios integralmente fechados.*

Observação A.2 *Seja* X *um esquema integral (isto é, reduzido e irredutível). Para cada aberto afim* $U = \mathrm{Spec}A$ *de* X*, seja* $\tilde{A}$ *o fecho integral de* A *no seu corpo de frações, e seja* $\tilde{U} = \mathrm{Spec}\tilde{A}$*. É possível provar que os esquemas* $\tilde{U}$ *podem ser grudados para obtermos um esquema integral normal* $\tilde{X}$*, chamado de* ***normalização*** *de* X*. Além disso, se* X *é de tipo finito*

A.3 Feixe de Módulos

Definição A.10 *Seja $(X, \mathcal{O}_X)$ um espaço anelado. Um* ***feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos*** *é um feixe $\mathcal{F}$ em X tal que, para cada aberto $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U)$ é um $\mathcal{O}_X(U)$-módulo, e para cada inclusão de abertos $V \subseteq U$ o homomorfismo restrito $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ é compatível com a estrutura de módulo via o homomorfismo de anéis $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$. Um* ***morfismo de feixes de módulos*** *$\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é um morfismo de feixes tal que, para cada aberto $U \subseteq X$, a aplicação $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ é um homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$-módulos.*

Sejam A um anel e M um A-módulo. Definimos o **feixe associado** a M sobre Spec$A$, denotado por $\widetilde{M}$, como segue. Para um aberto $U \subseteq \text{Spec}A$, definimos $\mathcal{O}(U)$ como o conjunto de funções $s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}$ tal que $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$, para cada $\mathfrak{p}$, e tal que s é localmente o quociente de elementos de M por elementos de A.

Definição A.11 *Um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{F}$ é* ***quasi-coerente*** *se X pode ser coberto por abertos afins $U_i = \text{Spec}A_i$ tais que para cada i existe um A_i-módulo M_i com $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M_i}$. Se cada M_i pode ser tomado como um A_i-módulo finitamente gerado, dizemos que $\mathcal{F}$ é* ***coerente****.*

Definição A.12 *Um* ***feixe de ideais*** *em X é um feixe de módulos $\mathcal{I}$ que é um subfeixe de $\mathcal{O}_X$, isto é, para cada aberto U, $\mathcal{I}(U)$ é um ideal em $\mathcal{O}_X(U)$.*

Seja $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ um morfismo de espaços anelados. Se $\mathcal{F}$ é um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos, então $f_*\mathcal{F}$ é um feixe de $f_*\mathcal{O}_X$-módulos. O morfismo $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ dá a $f_*\mathcal{F}$ uma estrutura natural de feixe de $\mathcal{O}_Y$-módulos, é o que chamamos de **imagem direta** de $\mathcal{F}$ pelo morfismo f.

Seja $\mathcal{G}$ um feixe de $\mathcal{O}_Y$-módulos. Então $f^{-1}\mathcal{G}$ é um feixe de $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-módulos. Temos o morfismo $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ de feixes de anéis em X. Definimos $f^*\mathcal{G}$ pelo produto tensorial $f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. Portanto $f^*\mathcal{G}$ é um feixe de $\mathcal{O}_X$-módulos e o chamamos de **imagem inversa** de $\mathcal{G}$ pelo morfismo f.

Por fim, sejam $f : X \to Y$ um morfismo de esquemas e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_Y$ um feixe de ideais em Y. Considere f como uma aplicação contínua entre espaços topológicos e seja $f^{-1}\mathcal{I}$ o feixe de imagem inversa, como na Definição A.5. Então $f^{-1}\mathcal{I}$ é um feixe de ideais no feixe de anéis $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ sobre o espaço topológico X. Existe um homomorfismo natural $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ de feixes de anéis em X.

Definição A.13 *O* ***feixe de ideais de imagem inversa*** *é o feixe de ideais em $\mathcal{O}_X$ gerado pela imagem de $f^{-1}\mathcal{I}$, denotado por $f^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_X$ ou simplesmente por $\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_X$.*

Observação A.3 *Considerando* $\mathcal{I}$ *como um feixe de* $\mathcal{O}_Y$*-módulos, nem sempre* $f^*\mathcal{I}$ *é igual a* $f^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_X$.

Finalizamos com o seguinte resultado:

Proposição A.4 *Sejam* X *um esquema noetheriano,* $\mathcal{I}$ *um feixe coerente de ideais em* X *e* $\pi : X' \to X$ *o blowing-up de* X *ao longo de* $\mathcal{I}$*. Então o feixe de ideais de imagem inversa* $\mathcal{I}' = \pi^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{X'}$ *é um feixe inversível em* X'.

Bibliografia

[1] Eisenbud, D., *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, **150**. Springer-Verlag, New York, (1995), xvi+785 pp.

[2] Gaffney, T., *Integral closure of modules and Whitney equisingularity.* Invent. Math. **107** (1992), no. 2, 301–322.

[3] Gaffney, T., *Polar multiplicities and equisingularity of map germs.* Topology **32** (1993), no. 1, 185–223.

[4] Gaffney, T., *Multiplicities and equisingularity of ICIS germs*, Invent. Math. **123** (1996), 209–220.

[5] Hartshorne, R., *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, **52**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1977), xvi+496 pp.

[6] Hironaka, H., *Normal cones in analytic Whitney stratifications.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **36** (1969), 127–138.

[7] Hironaka, H., *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero.* I, II. Ann. of Math. (2) **79** (1964), 109–203; ibid. (2) **79** (1964), 205–326.

[8] Huneke, C. e Swanson, I., *Integral closure of ideals, rings, and modules.* London Mathematical Society Lecture Note Series, **336**, Cambridge University Press, Cambridge, (2006), xiv+431 pp.

[9] Matsumura, H., *Commutative ring theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **8**. Cambridge University Press, Cambridge, (1989), xiv+320 pp.

[10] Rees, D., *a-transform of local rings and a theorem on multiplicities of ideals.* Proc. Cambridge Philos Soc. (2) **57** (1961), 8-17.

[11] Rees, D., *Reduction of modules.* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **101**, (1987), 431-449.

[12] Teissier, B., *Cycles évanescents, sections planes et condition de Whitney.* Singularités à Cargèse (Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci. Cargèse, 1972), Astŕisque, Nos. **7** et **8**, Soc. Math. France (1973), 285-362.

[13] Teissier, B., *Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney.* Algebraic geometry (La Rábida, 1981), 314–491, Lecture Notes in Math., **961**, Springer, Berlin, (1982).

[14] Vasconcelos, W., *Integral closure. Rees algebras, multiplicities, algorithms.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, (2005), xii+519 pp.

[15] Verdier, J. L., *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard.* Invent. Math. **36** (1976), 295–312.

[16] Whitney, H., *Tangents to an analytic variety.* Ann. of Math. (2) **81** (1965), 496–549.

[17] Zariski, O. e Samuel, P., *Commutative algebra, Volume I.* The University Series in Higher Mathematics. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, (1958), xi+329 pp.