UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO
YURI OSTI BARBOSA

# MULTISIGNIFICADOS DE EQUAÇÃO: UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE AS CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UNIBAN
São Paulo
2009

UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO
YURI OSTI BARBOSA

# MULTISIGNIFICADOS DE EQUAÇÃO: UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE AS CONCEPÇÕES DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Bandeirante de São Paulo, como exigência parcial para a obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação do Professor Doutor Alessandro Jacques Ribeiro.

UNIBAN
São Paulo
2009

Banca Examinadora

Autorizo exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocópias ou eletrônicos.

______________________________          ______________________________

Assinatura          Local e data

Dedico este trabalho à minha esposa Michele, meu filho Felipe, minha mãe Ednea e ao grande amigo Alexandre.

# AGRADECIMENTOS

A Deus, pela força extra, pelos provimentos diversos e principalmente pelos constantes insights.

Ao meu orientador Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro pelo constante apoio e exaustiva atenção às minhas necessidades.

Ao Prof. Dr. Dario Fiorentini e à Profa. Dra. Tânia Maria Mendonça Campos por aceitarem participarem de minha banca e cujas inefáveis sugestões contribuíram para a execução do presente trabalho.

A Profa. Dra. Rosana Nogueira de Lima pelo auxílio e respostas a algumas de minhas inquietações.

A Profa. Dra. Siobhan Victoria Healy pelo auxílio em diversos momentos do trabalho.

A todas as personalidades que compartilharam de minhas inquietações, alegrias e tristezas, contribuindo com sugestões e críticas ao meu trabalho, em especial: Marcio Dorigo, Francivaldo Barbosa, Isabela Barbosa, Silvio Antônio da Silva, Cátia Cândida de Almeida, Josias Nogueira Badaró e Isabel Cristina Cereser Maretti.

# RESUMO

O presente estudo tem por objetivo investigar as Imagens de Conceito de professores de Matemática ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação. A fim de levantar os elementos presentes nas Imagens de Conceito dos professores por nós investigados, construímos um instrumento de coleta de dados que está fundamentado nos *Multisignificados de Equação*. Utilizamos esse instrumento durante as entrevistas semi-estruturadas que realizamos com três professores da Educação Básica. Para desenvolver as análises dos dados por nós levantados, utilizamos os resultados da teses de doutoramento de Ribeiro (2007), os *Multisignificados de Equação*, bem como a teoria de Imagem de Conceito e Definição de Conceito, de Tall & Vinner (1981). Buscando identificar os diferentes significados de equação que estão presentes na imagem de conceito desses professores, observamos que dois dos professores relacionavam a ideia de equação a um algoritmo de resolução, bem como a existência de uma incógnita. Por outro lado, um professor considerava de forma mais espontânea a utilização de meios aritméticos, utilizando-se de tentativas, por exemplo, em suas estratégias de resolução. Finalmente concluímos que os significados de equação *PROCESSUAL-TECNICISTA*, reconhecer uma equação por meio de seu processo de resolução e tratá-la por meio de técnicas de manipulações, e o *INTUITIVO-PRAGMÁTICO*, reconhecer uma equação em uma situação do cotidiano e tratá-la utilizando métodos aritméticos ou de tentativas, são os que apareceram com mais naturalidade na imagem de conceito dos três professores por nós investigados. Com isso, consideramos relevante a discussão dos demais significados que compõe os *Multisignificados de Equação* em ambientes de aprendizagem da formação inicial e continuada de professores. Nossa assertiva fundamenta-se nas possibilidades de que tais discussões possam trazer à ampliação da imagem de conceito dos professores, bem como a uma compreensão mais ampla dessa noção matemática.

**Palavras-Chave:** Equação. Multisignificados de equação. Concepção de equação de professores. Educação Algébrica.

# ABSTRACT

This study aims to investigate the concept images of mathematics that teachers see, interpret and deal with situation-problems related to equation. In order to raise the , teachers' conceptions for us investigated we built an instrument of collection of data that is based in Multimeanings of Equation. We used this instrument during the semi-structured interviews that we accomplished with three teachers of Basic Education. To develop the analysis of the data we collected, we use the results of the doctorate of Ribeiro (2007) about the Multimeanings of Equation and the theory of Concept Image and Concept Definition by Tall& Vinner (1981). Trying to identify the different meanings of the equation that are present in the concept image of these teachers, we found that two of them related the idea of an equation solving algorithm and the existence of an unknown. Moreover, the other teacher felt more spontaneous use of arithmetic means, making use of attempts, for example, in its resolution strategies. Finally we conclude that the meanings of equation PROCESSUAL TECNICIST, see an equation by a process and treat it with a tecnic, and the INTUITIVE PRAGMATIC, see an equation by a real situation and treat it with arithmetic ways, are the ones that had appeared with more naturalness in the image of the concept of these teachers. Thus, we consider relevant the discussion of other meanings that make up the Multimeaning Equation on environments of initial training and continuing education. Our assertion is based on the possibility that such discussions can bring about the expansion of the image of the concept that the teachers have as well as a broader understanding of the mathematical notion.



**Keywords**: Equation. Multimeanings of equation. The conception of equation of teachers. Algebraic Education.

# SUMÁRIO

# Apresentação

O presente trabalho insere-se num projeto mais amplo, coordenado pelo Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, com o título *Os Multisignificados de Equação no ensino e na aprendizagem de Matemática: investigando contribuições para a formação do professor*. Tal projeto esta sendo desenvolvido junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Bandeirante de São Paulo.

Essa dissertação buscou contribuir com o referido projeto, investigando as Imagens de Conceito dos professores de Matemática sobre a idéia de equação. Constitui assim, a fase diagnóstica do referido projeto. Na continuidade deste, outros pesquisadores investigarão, em ambientes de aprendizagem, quais as contribuições que os Multisignificados de Equação podem trazer para o processo de ensino e de aprendizagem de Álgebra.

Acreditamos que a presente dissertação pode fornecer dados importantes para os demais pesquisadores que farão a parte interventiva do projeto original, na medida em que tenta mapear as imagens de conceito de professores de Matemática, no que se refere à noção de equação.

Nesta direção, buscamos então investigar quais significados de equação estão presentes nas concepções dos professores de Matemática, e para isso utilizamo-nos de entrevistas semi-estruturadas.

No primeiro capítulo apresentamos nossa problemática de pesquisa, alguns dos motivos que levaram esse pesquisador a optar pela Educação Algébrica e também, apresentamos o objetivo de nossa pesquisa, quer seja, quais significados de equação estão presentes nas Imagens de Conceito dos professores de Matemática ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação.

No segundo capítulo apresentamos nosso referencial teórico-metodológico, sendo o mesmo constituído pelo modelo teórico dos Multisignificados de Equação (Ribeiro, 2007) e pela teoria de Imagem de Conceito e Definição de Conceito (Tall &

Vinner, 1981). Ainda nesse capítulo, apresentamos uma análise preliminar do instrumento de coleta de dados, onde relatamos algumas possíveis estratégias de resolução para cada atividade que compõe o referido instrumento.

Iniciamos o capítulo das análises, apresentando um perfil de cada professor, perfil este estabelecido a partir da observação de um questionário respondido pelos professores e elaborado para esse fim. Procedemos então à analise dos dados da entrevista.

As entrevistas foram áudio-gravadas e posteriormente transcritas para enriquecer os dados para análise. As análises foram realizadas item a item, para cada item foi desenvolvida a análise dos três professores.

Finalmente no último capítulo levantamos os elementos que nos permitiram traçar um “desenho” das imagens de conceito desses professores sobre a idéia de equação, relacionando-as aos Multisignificados de Equação.

Apontamos ainda nesse capítulo algumas considerações sobre a realização do presente trabalho e algumas questões para futuras pesquisas que acreditamos terem emergido durante a realização do mesmo.

# Capítulo I

# Problemática

## 1.1 INTRODUÇÃO

De meados dos anos 80 até meados dos anos 90 eu fui aluno da Educação Básica (até então ensino ginasial e ensino colegial) em diversas escolas no Estado de São Paulo. Nunca fui um bom aluno em Matemática, destacando-me mais na área de ciências humanas.

Ao contrário da maioria dos adolescentes eu, desde tenra idade, sabia qual profissão iria exercer: seria professor. O grande problema foi decidir por qual área do conhecimento eu possuía mais afinidade.

Optei pela Matemática, pois sempre admirei o alto grau de credibilidade que os professores de Matemática possuíam na sociedade, inclusive em meio a seus pares. A Matemática para mim, até então, constituía-se em uma série de regras, perfeitamente possíveis de serem “decoradas”, e embora “chatas” tornava-se legal quando conseguíamos “decorá-las”.

Foi durante a Licenciatura que compreendi que a Matemática é mais do que a aplicação de algoritmos. A Matemática desvelou-se, então, como um mundo de ideias, nas quais os números e as “letras” são apenas algumas maneiras de representar essas ideias.

Durante a graduação tive a oportunidade de descobrir alguns dos motivos daquelas regras e, da mesma forma que na Educação Básica, acabei por me envolver mais com a Álgebra, chegando a desenvolver um projeto de Iniciação Científica (BARBOSA, 2006). Neste trabalho discutia quais as concepções que alunos dos últimos anos do ensino fundamental, de uma escola pública estadual, possuíam sobre a noção de equação.

Minha experiência, de quatro anos como professor de Matemática da Educação Básica em escolas públicas e privadas, aponta para o fato de que, em algum momento, o sistema educacional não está funcionando bem, pois grande parte dos alunos não compreende bem, ideias básicas relacionadas à Álgebra, como por exemplo, o princípio de equivalência entre os membros de uma equação. Tal impressão confirma-se à luz de resultados oficiais de avaliações como: SARESP, ENEM e ENADE.

Uma questão que nasceu de minha pesquisa de Iniciação Científica foi "se a discussão epistemológica de equação com os professores pode agregar conhecimentos conceituais no processo de ensino e aprendizagem de equação" (BARBOSA, 2006, p. 42).

Em 2007 o pesquisador Alessandro Jacques Ribeiro definiu, em sua tese de doutorado, seis diferentes significados para equação, o que ele chamou de *Multisignificados de Equação*. Fazendo uma primeira análise de sua tese pude perceber que os multisignificados de equação constituíam-se como parte da fundamentação teórica que eu necessitava para responder à questão levantada na Iniciação Científica.

Nesta perspectiva, minha pesquisa de mestrado está inserida em um projeto mais amplo[1] que visa investigar "os multisignificados de equação no ensino e na aprendizagem de Matemática", projeto esse desenvolvido junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo, na linha de pesquisa "Ensino e Aprendizagem de Matemática e suas Inovações".

[1] ***OS MULTISIGNIFICADOS DE EQUAÇÃO NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA: INVESTIGANDO CONTRIBUIÇÕES PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR,*** coordenado pelo Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro. Tal projeto foi aprovado pela Comissão Científica da UNIBAN (235/08).

## 1.2 APRESENTANDO NOSSO PROBLEMA DE PESQUISA

Trabalhos como os de Ribeiro (2001), Dreyfus & Hoch (2004), Attorps (2006), Barbosa (2006), Martins (2008), entre outros, evidenciam que o ensino e aprendizagem de Álgebra é um tema que tem preocupado diversos educadores matemáticos ao redor do mundo. Tal preocupação é corroborada pelos resultados de avaliações oficiais como o SARESP, ENEM e ENADE, nos quais os alunos atingem um desempenho muito aquém do esperado.

Apresentaremos a seguir alguns trabalhos que exploraram a busca por significados relacionados à Álgebra e buscamos compor um cenário que possibilite ao leitor perceber a preocupação existente nas pesquisas recentes em Educação Matemática em propiciar um incremento das concepções de alunos e professores quanto a ideias relacionadas à Álgebra, principalmente de equação.

Lima (1999) apresenta em sua dissertação de mestrado uma alternativa para se trabalhar a resolução de equações polinomiais do terceiro grau com alunos utilizando um método geométrico.

Em sua pesquisa, um dos métodos utilizados pela autora foi o método histórico concebido por Omar Khayyam para encontrar as raízes de uma equação cúbica. Efetuando a decomposição da função cúbica a ela relacionada, em uma hipérbole e uma parábola, surge então a intersecção dessas duas curvas, que revelam as raízes da equação cúbica.

Omar Khayyam, em sua obra, *Risala fi-l-barahin ala masa' il al-gabr wa-l-muqabala* explica que "*a álgebra tem por objetivo determinar quantidades numéricas ou geométricas desconhecidas"* (Lima 1999, p. 15). Nessa mesma obra ele nos contempla com o método de resolução de equações cúbicas, sendo as mesmas escritas como uma igualdade entre uma parábola e uma hipérbole. Para proceder à resolução de tal equação basta traçar as respectivas curvas e observar os pontos de intersecção entre elas. Tais pontos são as raízes da equação cúbica original.

Lima (1999) utilizou em seu trabalho, entre outros referenciais, a dialética ferramenta-objeto e o jogo de quadros de Régine Douady. Conforme apresentado em Lima (1999):

> Um quadro na teoria de Régine Douady, é constituído de objetos de um ramo da matemática, da relação existente entre eles e das imagens mentais que se associam a tais objetos (LIMA, 1999, p. 6).
>
> Deixar um quadro e procurar respostas para o problema em outro, mesmo que não traduza totalmente o problema, traz formulações diferentes e envolve novos conceitos (LIMA, 1999, p. 6).
>
> Os *jogos de quadros* são as mudanças de quadro provocadas pela iniciativa do professor, para ter uma correspondência entre quadros e avançar na formulação do problema formulado (LIMA, 1999, p. 6).

Embora os alunos participantes da pesquisa apresentassem, inicialmente, preferência por trabalhar em um quadro algébrico, a pesquisadora constatou que ao término de sua pesquisa esses mesmos alunos passaram a considerar a opção de resolução de uma equação cúbica através de um quadro geométrico.

Lima (1999) propiciou aos alunos que participaram de sua pesquisa a possibilidade de ampliação de suas concepções e significados relacionados a equações polinomiais do terceiro grau, uma vez que esses alunos conheceram uma nova forma de representação e resolução de tais situações, agora por meio de uma situação geométrica.

Dominoni (2005) apresenta em sua dissertação de mestrado a preocupação de propiciar ao aluno situações que favoreçam a compreensão do conceito matemático de função exponencial, elaborando para isso uma seqüência didática baseando-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, no qual os alunos percorreram diversos registros de representação sem perder de vista o objeto matemático.

A referida autora nos revela que os alunos da primeira série do Ensino Médio que participaram de sua pesquisa compreenderam melhor o conceito de função exponencial quando apresentado através de diferentes registros de representação semiótica.

Dominoni (2005) propiciou aos alunos uma ampliação de suas concepções sobre o objeto matemático função exponencial, aumentando assim os significados desses alunos em relação a esse objeto matemático.

Encontramos em Pommer (2008) a preocupação do autor em desenvolver uma sequência didática baseada em equações diofantinas lineares, na qual o autor investigou quais conhecimentos os alunos do Ensino Médio conseguiam explicitar sobre essas equações.

Tal estudo revelou que os alunos utilizam o método de tentativas como uma estratégia para a resolução das atividades, evitando inicialmente a aplicação de algoritmos: "*A análise dos dados revelou a estratégia de tentativa e erro preponderante nas manifestações espontâneas dos alunos ...*" (POMMER, 2008, p. 123).

A pesquisa de Pommer (2008) nos revela que os alunos participantes de sua pesquisa tratam normalmente uma equação por meio do método de tentativas, ratificando esse significado para os alunos.

O baixo desempenho dos nossos alunos parece indicar que algo não está funcionando bem com a atividade docente. Embora não seja o objetivo de nossa pesquisa, encontramos em Attorps (2004) e em Figueiredo (2007), indicações importantes sobre as concepções de equação de professores de Matemática e de Educação Algébrica em um curso de Licenciatura em Matemática, respectivamente.

Em seu trabalho, Attorps (2006) utiliza conceito (às vezes substituído por noção) quando a ideia é concebida em sua forma "oficial", ou seja, apresentado em seu aspecto oficial, aceita pela comunidade científica. Enquanto por outro lado, as concepções constituem o aspecto particular do conhecimento, ou seja, aquele que subjaz ao conceito e está atrelado a ele e em nosso trabalho, utilizaremos a ideia de concepção da mesma forma que essa pesquisadora utiliza.

Attorps (2006) pesquisou junto a dez professores do ensino secundário quais as concepções que os mesmos apresentavam sobre a ideia de equação. Para tal estudo a pesquisadora utilizou o modelo teórico de Tall e Vinner (1981), sobre *imagem de conceito* e *definição de conceito*.

Eles sugerem que quando pensamos em um conceito, alguma coisa é evocada em nossa memória. Normalmente essas imagens não correspondem necessariamente à definição de um conceito, mesmo que o conceito seja teoricamente bem definido. Todas essas memórias evocadas são chamadas de imagem de conceito. Na teoria de Tall e Vinner, a imagem de conceito é toda uma estrutura cognitiva que está associada a um conceito. A imagem de conceito é gerada pelos conhecimentos anteriores e por todos os elementos que o indivíduo associa a definição do conceito.

Apresentar ao aluno a definição de conceito não garante a apreensão do significado daquele conceito. Os autores acreditam que o mais interessante para a aprendizagem de um conceito é que a imagem de conceito ligada a tal conceito seja bastante ampla, de forma a propiciar um significado mais abrangente do conceito. Os autores afirmam ainda que os alunos não utilizam a definição de conceito em seu cotidiano, pois a mesma não se faz necessária, como podemos ver pela citação abaixo:

> A maioria dos estudantes não utiliza definições quando resolvem tarefas porque o seu cotidiano agrega hábitos, fazendo com que eles não sintam a necessidade de consultar as definições formais. Em vários casos, referindo-se à imagem de conceito como totalmente correto. É sugerido que apenas problemas não rotineiros, como a identificação de exemplos e contra-exemplos de um dado conceito, situações-problema e provas matemáticas, podem encorajar os estudantes a usar a definição formal do conceito (VINNER 1991, apud. ATTORPS 2006).[2]

Attorps trabalhou em sua pesquisa com professores que possuíam diferentes tempos de experiência docente, pois a mesma acredita que diferentes tempos de experiência docente podem corroborar na construção de diferentes imagens de conceito.

Dentre outras conclusões, a autora aponta para o fato de que alguns dos professores pesquisados apresentaram em sua imagem de conceito, elementos diferentes da definição de conceito. Outra conclusão da tese foi que os professores ensinam equações da mesma forma que aprenderam e alguns só reconhecem uma equação quando conseguem "resolvê-la", ou seja, por meio das técnicas de resolução.

Attorps (2006) nos revela que os significados que os professores por ela pesquisados atribuem à noção de equação está bastante vinculada ao emprego de algoritmos de resolução.

Em sua tese de doutorado, Figueiredo (2007) revela que os alunos de um curso de Licenciatura em Matemática se ressentem de uma abordagem sobre temas algébricos em uma perspectiva que os ajude a compreender o "mecanicismo" empregado ao resolver problemas algébricos:

---

[2] Tradução nossa.

> Em relação aos conteúdos da Educação Básica, dentre eles os tópicos da Álgebra elementar, esses entrevistados parecem ressentir-se da falta de uma abordagem, já nos dois primeiros anos do curso de Licenciatura, que os capacite, ao atuarem como docentes, a justificar alguns dos porquês das soluções de atividades que são propostas pelo professores, para que não se limitem apenas, a saber, resolvê-los. Interpretamos que isso se refira a um trabalho que articule os aspectos sintáticos e semânticos da Álgebra elementar, de tal modo que essa articulação não só se manifeste nas atividades desenvolvidas na Licenciatura, mas que também os auxilie a vislumbrar trabalhos similares com seus futuros alunos da Educação Básica. (FIGUEIREDO, 2007, p. 272)

Conforme vimos em Figueiredo (2007), os alunos do curso de Licenciatura em Matemática que participaram de sua pesquisa se ressentem de uma abordagem que possibilite a eles, compreenderem o mecanicismo empregado em Álgebra elementar.

Figueiredo (2007) nos mostra que os alunos da graduação em Matemática por ela pesquisados se ressentem de conhecer, os “porquês” da Álgebra. Essa necessidade de ampliação de significados para as ideias da Álgebra se estende mais especificamente para a ideia de equação e podemos perceber isso em Dreyfus & Hoch (2004).

Dreyfus & Hoch (2004) realizaram uma pesquisa junto a alunos do ensino secundário em Israel, na qual os mesmos responderam a diversas questões sobre equações. No trabalho os pesquisadores buscaram investigar como esses alunos resolviam uma equação: 1) atentando-se para o aspecto estrutural, 2) atentando-se para as propriedades algébricas envolvidas – o que os pesquisadores chamaram de estrutura interna de uma equação, 3) se buscavam uma resolução através dos procedimentos de resolução (mesmo que extremamente longos), 4) utilizando as técnicas de resolução de equação conhecidas.

A referida pesquisa permitiu aos pesquisadores concluir que, embora os alunos investigados possuam relativa familiaridade com as técnicas de resolução algébricas, não possuem o hábito de observar as estruturas algébricas da equação, partindo sem muita reflexão para uma resolução procedimental.

Mostramos até o presente momento, em nossa revisão de literatura, que a ampliação dos significados relativos à Álgebra e mais especificamente à equação é uma preocupação legítima da comunidade acadêmica.

Martins (2008), em seu estudo do estado da arte, investigou em teses de doutorado e dissertações de mestrado o desenvolvimento das pesquisas envolvendo equações algébricas. Apesar da evidente importância atribuída às equações algébricas no currículo de Matemática, nos mais diversos níveis de ensino, o tema ainda é pouco pesquisado pelos educadores matemáticos.

Em sua dissertação de mestrado, Martins (2008) relata que, do ano de 1998 até o ano de 2004, foram produzidas oito dissertações de mestrado versando sobre equações algébricas, enquanto nenhuma tese de doutorado foi encontrada nessa mesma temática. A referida dissertação foi realizada com base em investigações nos sites da CAPES e das principais universidades brasileiras.

Podemos verificar, ainda em Martins (2008), que essa lacuna começou a ser preenchida com o trabalho de Ribeiro (2007), no qual o autor concebe os Multisignificados de Equação. Martins nos revela, em suas conclusões, que a busca de significados é o tema que mais atrai a atenção dos pesquisadores que abordaram o tema equações algébricas:

> Os resultados atestam uma dispersão nas categorias eleitas, dentre os objetivos buscados nas pesquisas selecionadas, exceto “busca de

> significados”, que aparece em cinco das nove dissertações selecionadas. Dessa forma podemos dizer que a maior parte dos pesquisadores que se propuseram a fazer uma pesquisa sobre esse tema se preocupou com a importância da busca de significados para o desenvolvimento desse tema em sala de aula (MARTINS, 2008, p. 102).

Essa busca por significados em equações levou diversos pesquisadores a investigar como ampliar os significados atribuídos pelos alunos a esse conteúdo matemático.

A presente pesquisa caminha no sentido de colaborar com a execução do projeto mais amplo, que busca a ampliação dos significados de alunos e professores de Matemática quanto à ideia de equação, através dos Multisignificados de Equação.

Acreditamos que seja importante nesse momento do trabalho explicitar um pouco melhor os objetivos do projeto, no qual esse trabalho pretende colaborar, para que o leitor possua uma visão panorâmica de tal projeto.

Esse projeto, coordenado pelo Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, tem como objetivo investigar quais as contribuições que a discussão dos Multisignificados de Equação pode trazer para professores e futuros professores de Matemática.

A presente dissertação busca investigar as concepções dos professores de Matemática quanto à forma de ver, interpretar e tratar uma equação apresentada através de situações-problema que remetam aos diferentes significados de equação concebidos por Ribeiro (2007) que são os Multisignificados de Equação.

Acreditamos que a presente pesquisa (que pertence a uma fase diagnóstica) poderá colaborar com o projeto mais amplo, no sentido de fornecer elementos importantes para a segunda fase desse projeto (fase interventiva), na qual outros pesquisadores irão levar os Multisignificados de Equação para ambientes de aprendizagem, com a intenção de construção, ou ampliação das imagens de conceito de equação junto a alunos e professores.

Considerando as reflexões propiciadas pela revisão de literatura que acabamos de desenvolver e também o fato do presente trabalho estar inserido no projeto mais amplo já apresentado, nosso objetivo nesta pesquisa é ***investigar as imagens de conceito de professores de matemática, quanto à forma de ver, interpretar e tratar situações-problema que envolva a ideia de equação***, observando se existe alguma relação entre essas imagens de conceito e os Multisignificados de equação.

A partir dessas reflexões apresentamos então nossa questão de pesquisa: ***Quais significados de equação são evidenciados nas imagens de conceito dos professores de Matemática ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação?***

# Capítulo II

# Fundamentação Teórico-Metodológica

Buscamos investigar ***quais significados de equação são evidenciados nas imagens de conceito dos professores de Matemática ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação***. Dentre os possíveis significados de equação presentes na imagem de conceito dos professores, acreditamos que os Multisignificados de Equação podem fazer parte da constituição dessas imagens de conceito.

Nosso trabalho está fortemente sustentado nos resultados da tese de doutoramento de Ribeiro (2007), no que se refere aos *Multisignificados de Equação*. Além dessa tese de doutoramento que está sendo utilizada na concepção e desenvolvimento de nossa pesquisa, utilizaremos os trabalhos de Tall & Vinner (1981), sobre *definição de conceito* e *imagem de conceito*, nas análises dos dados coletados.

## 2.1 MULTISIGNIFICADOS DE EQUAÇÃO.

O estudo da Álgebra tem recebido bastante atenção nos últimos anos no Brasil e no mundo. Encontrar um modo de ensinar Álgebra de forma que os alunos realmente se apropriem de seus significados é um dos principais objetivos de todo pesquisador em Educação Algébrica, e certamente um dos objetivos de todo professor que ensina Matemática.

Nesse contexto o trabalho de Ribeiro (2007) parece nos trazer uma nova abordagem para o ensino de equação. O referido trabalho investigou os diferentes significados que a noção de equação pode assumir no ensino de Matemática. Tal investigação se deu por meio de um estudo epistemológico e um estudo didático dessa ideia matemática. Com isso, a partir de suas análises, o autor concebe os *Multisignificados de Equação, a saber: Intuitivo-Pragmático, Dedutivo-Geométrico, Estrutural-Generalista, Estrutural-Conjuntista, Processual-Tecnicista e Axiomático-Postulacional.*

Ribeiro (2007) percebeu que as equações já eram trabalhadas pelos Babilônios e Egípcios em aproximadamente 1950 a.C., porém elas eram concebidas como igualdade entre valores e estavam sempre muito ligadas às ideias intuitivas, sendo tratadas de forma aritmética e estavam sempre vinculadas a problemas de ordem práticos. A partir dessas reflexões concebe o significado de equação **INTUITIVO-PRAGMÁTICO**.

Continuando sua pesquisa, Ribeiro percebeu que os gregos da Idade Heroica da Matemática (aproximadamente século V a.C.), reconheciam uma equação a partir de uma situação geométrica, ligadas a figuras geométricas, nas quais as incógnitas eram, normalmente, segmentos de reta, culminando em Diofanto de Alexandria (entre 250 d.C. e 350 d.C.) que além de reconhecer uma equação nesta perspectiva a tratava de forma dedutiva. Essas equações não mais emergiam necessariamente de situações práticas e eram tratadas de forma dedutiva. A partir dessas reflexões concebe o significado de equação **DEDUTIVO-GEOMÉTRICO**.

O significado DEDUTIVO-GEOMÉTRICO foi também reconhecido por Ribeiro (2007) nas intersecções de curvas de Omar Khayyam e na Geometria das Curvas. A ideia de equação continuou ganhando novas facetas nesse estudo e Ribeiro nos revela outro significado. Este novo significado emerge das concepções dos árabes e hindus, tendo seus principais representantes Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi e Bramhmagupta, respectivamente, que buscavam uma maneira de resolver classes de equações.

Seguindo essa mesma linha de raciocínio, e aprimorando-a, despontam-se os europeus renascentistas, quando os mesmos reconhecem uma equação a partir de sua generalização, quer sejam incógnita e parâmetros, e a tratam de forma estrutural. Isso significa dizer que para esses Europeus (Cardano, Tartaglia, Abel, Galois entre outros) o olhar estava sobre as propriedades algébricas envolvidas na resolução das equações. A partir dessas reflexões concebe o significado de equação **ESTRUTURAL-GENERALISTA**.

Continuando o estudo, Ribeiro identifica outro significado de equação que pode ser reconhecida na Matemática do grupo Bourbaki, e em matemáticos como Rogalski e Warusfel, onde as equações, embora ainda com um olhar sobre suas estruturas, são reconhecidas como sendo relações entre conjuntos e sempre tratadas de forma a observar as propriedades algébricas. A partir dessas reflexões concebe o significado de equação **ESTRUTURAL-CONJUNTISTA**.

Ao investigar pesquisas em Educação Matemática como Dreyfus & Hoch (2004), Ribeiro reconheceu outro significado para equação. Nesse, o indivíduo reconhece uma equação através do processo de resolução e a trata segundo técnicas de manipulações algébricas **(PROCESSUAL-TECNICISTA)**.

O sexto e último significado de equação concebido em Ribeiro (2007) é o significado de equação **AXIOMÁTICO-POSTULACIONAL**. Nesse significado o autor propõe que uma equação possa ser reconhecida como algo sem definição, de maneira análoga a um conceito primitivo da geometria. Dessa forma, é proposto que uma equação possa ser trabalhada mesmo sem uma definição formal.

Podemos perceber que cada significado de equação apresentado por Ribeiro (2007), foi categorizado com nome composto, apresentando diferentes perspectivas de reconhecer e de tratar uma equação.

A presença dessa relação entre o “ver” (reconhecer e interpretar uma equação) e o “fazer” (tratar uma equação) em diferentes povos ao longo da história da humanidade, bem como em livros didáticos e em de pesquisas em Educação Matemática, trouxeram alguns dos elementos necessários para a concepção dos Multisignificados de Equação.

Ressaltamos que quando mencionamos “ver” estamos nos referindo à forma de reconhecer e interpretar uma equação, enquanto que “fazer” refere-se à forma de tratá-la.

Apresentamos a seguir uma análise dos Multisignificados de Equação, resgatando um pouco do estudo teórico feito por Ribeiro (2007) e buscando contemplar ainda a relação entre o “ver” e o “fazer” implícito em cada significado de equação que constituem os Multisignificados de Equação.

**1. Intuitivo-Pragmático**: a noção de equação é concebida de forma intuitiva e está relacionada à igualdade entre duas quantidades. Os povos que conceberam equação prioritariamente dessa maneira foram os Babilônios e os Egípcios. Podemos contemplar a relação entre o “ver” e o “fazer” se manifestando nesse significado por meio da relação entre o **Pragmático**, o indivíduo reconhece uma equação que emerge de uma situação prática, do cotidiano - e o **Intuitivo** – o indivíduo a trata de forma intuitiva, utilizando-se de raciocínios aritméticos ou do método de tentativas, por exemplo.

**2. Dedutivo-Geométrico**: a noção de equação aparece ligada a entes e figuras geométricas, como os segmentos, por exemplo. Sua utilização ocorre nos cálculos e operações com segmentos e na intersecção de curvas. Os gregos possuíam essa compreensão de equação. A relação entre o “ver” e o “fazer” se manifesta neste significado na interação entre reconhecer uma equação apresentada na forma **Geométrica**, e tratá-la através de um processo **Dedutivo**.

**3. Estrutural-Generalista**: a noção de equação é vista como portadora de uma estrutura que possui propriedades próprias. Aqui a equação é vista isoladamente, não havendo a ligação de sua resolução com um problema prático. Matemáticos como al-Khowarizmi, Descartes, Abel e Galois consideravam as equações sob esse significado. A relação entre o “ver” e o “fazer” se manifesta nesse significado através da interação entre reconhecer uma equação apresentada em linguagem matemática simbólico-formal, mesmo que parametrizada, conferindo-lhe um caráter **Generalista**, e tratá-la sob a perspectiva das estruturas algébricas, não importando se a incógnita é um número, um segmento de reta ou uma função, atentando assim para seu aspecto **Estrutural**.

**4. Estrutural-Conjuntista**: a noção de equação continua sendo vista como portadora de uma estrutura, porém recebe forte apelo conjuntista, passando a ser concebida como uma relação entre conjuntos. Podemos citar como principal representante desse significado o grupo Bourbaki. A relação entre o “ver” e “fazer” se manifesta nesse significado através do reconhecimento de uma equação apresentada por meio de uma relação entre conjuntos, **Conjuntista**, e tratá-la de forma **Estrutural**, atentando para as estruturas algébricas envolvidas.

**5. Processual-Tecnicista**: a noção de equação emerge dos processos utilizados para resolvê-la, ao contrário dos estruturalistas que concebem uma estrutura e propriedades bem definidas. Tal concepção de equação pode ser verificada em pesquisas em Educação Matemática como Dreyfus & Hoch (2004). Na perspectiva desse significado a relação entre o “ver” e o “fazer” emerge do reconhecimento de uma equação no processo utilizado para resolvê-la, de onde surge o termo **Processual**, e na utilização de técnicas para resolvê-la, **Tecnicista**.

**6. Axiomático-Postulacional**: a noção de equação é apresentada como uma noção da Matemática que não precisa ser definida. Ela pode ser assumida como uma noção primitiva a partir da qual, outras ideias, outras noções – matemáticas ou não – podem ser construídas. No que se refere à relação (ver-fazer), acreditamos que o “ver” é contemplado pelo axiomático, enquanto o “fazer” pelo postulacional.

Vale ressaltar que tal significado pode ser assumido como um ponto de partida – pressupor equação como “algo” conhecido e trabalhar com esta ideia – e também pode ser assumido como um ponto de chegada – uma “compressão” de todos os outros significados que permite uma sistematização, uma formalização dos conhecimentos adquiridos.

Podemos perceber que cada significado de equação, concebido em Ribeiro (2007) nasceu da observância das diferentes perspectivas utilizadas em: ver, tratar e interpretar situações-problema envolvendo a ideia de equação.

Para investigarmos se na imagem de conceito de um indivíduo são contemplados os diferentes significados que compõem os Multisignificados de Equação, iremos adotar a mesma perspectiva que Ribeiro (2007) adotou em seu trabalho, quer seja: observar a forma como esse indivíduo reconhece (o “ver”) e trata ( o “fazer”) uma equação, quando se depara com situações que envolvam esta ideia matemática.

Na proposta apresentada no projeto maior, a qual foi discutida anteriormente, levantamos a conjectura de que a inserção do indivíduo em situações que contemplem os multisignificados de equação pode favorecer a ampliação da *imagem de conceito* que o mesmo já possua sobre a noção de equação. Nesta perspectiva, consideramos relevante investigar se e quais dos diferentes significados que compõem os Multisignificados de Equação fazem parte da imagem de conceito dos professores de Matemática.

## 2.2 IMAGEM DE CONCEITO E DEFINIÇÃO DE CONCEITO

Investigar elementos que constituem a imagem de conceito de pessoas não é tarefa simples e para tal, buscamos na teoria desenvolvida por Tall & Vinner, sobre *imagem de conceito* uma teoria que nos possibilite tal investigação. Na referida teoria *imagem de conceito* é definida como:

> [...] a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (TALL & VINNER, 1981 apud GIRALDO, 2004, p.8).

Baseando-se na definição acima, não faz sentido falarmos de uma imagem de conceito pautada puramente na definição de conceito. A imagem de conceito é formada por todas as associações mentais e cognitivas que o indivíduo realiza ao evocar determinada situação, podendo ou não a imagem de conceito englobar a definição de conceito.

A imagem de conceito dos indivíduos são sempre individuais e compostas por elementos que estão de alguma forma atrelados ao conceito. Por exemplo, quando falamos de equação podemos, ou não, encontrar na imagem de conceito do indivíduo elementos como: igualdade, incógnita, princípio de equivalência, função, parâmetros, segmentos, curvas, vetores, enfim tudo aquilo que o sujeito relaciona com o conceito de equação.

Encontramos no trabalho de Giraldo (2004) uma caracterização de definição de conceito, associando-a à imagem de conceito:

> Além disso, os autores afirmam que um indivíduo pode ou não utilizar sentença de palavras para especificar um dado conceito, denominada definição de conceito. (TALL & VINNER, 1981 apud GIRALDO, 2004, p.8).

Segundo Tall & Vinner a declamação de um teorema, por exemplo, não significa que o indivíduo realmente possua a definição de conceito daquele conhecimento matemático, o indivíduo pode simplesmente ter decorado o teorema e seus passos de dedução lógico-matemáticos. Para que um sujeito possua a definição de conceito de um conhecimento matemático é necessário que o mesmo possua uma imagem de conceito ampla e abrangente, englobando diversas situações e estruturas mentais subjacentes que servirão de base para a construção da definição de conceito.

As imagens de conceito são individuais, não fazendo sentido falarmos de imagem de conceito de um grupo, ou de imagem de conceito ligada exclusivamente à definição de conceito. A imagem de conceito de um indivíduo não é uma estrutura estática e está em constante processo de assimilação e acomodação, tornando-se mais amplo e por vezes até distante da definição de conceito.

Segundo Vinner (1991), não é possível o indivíduo formar uma definição de conceito sem antes possuir uma imagem de conceito que ampare essa construção. Quanto maior e mais ampla for a imagem de conceito do indivíduo, maiores serão os subsídios que o mesmo possuirá para construir a definição de conceito.

O indivíduo pode ainda possuir uma definição de conceito que não seja coerente com a definição de conceito aceita pela comunidade científica, ou seja, a definição de conceito também pode ser individual e a ampliação da imagem de conceito pode auxiliar na reconstrução dessa definição de conceito, aproximando-se cada vez mais da definição aceita pela comunidade científica.

A pesquisa de Attorps (2006), já discutida em nossa revisão de literatura, que também utilizou em seu referencial teórico o trabalho de Tall & Vinner (1981) sobre imagem de conceito e definição de conceito, relata que a definição de conceito remete diretamente à descrição do conhecimento aceita pela comunidade acadêmica como sendo verdadeira, podendo dessa forma a imagem de conceito divergir da definição de conceito.

No processo de construção da imagem de conceito, elementos contraditórios do ponto de vista cognitivo podem aparecer e vir a se tornar um conflito, ao qual o Tall & Vinner (1981) chamaram de *conflito cognitivo*.

Esses autores ressaltam ainda que esses elementos contraditórios presentes na imagem de conceito do indivíduo permanecem velados, ocultos, e somente se tornam um conflito cognitivo quando evocados. Enquanto esses elementos não são evocados eles recebem o nome de fatores de *conflito potencial*.

Embora possa parecer que a exposição de indivíduos a situações que provoquem conflitos cognitivos seja arriscada, especialmente quando estamos nos referindo a conceitos matemáticos, segundo (Tall & Vinner, 1981) a execução desses conflitos é necessária para que haja assim um aprendizado mais profundo do conceito matemático em questão.

Retomando novamente a pesquisa de Attorps (2006), encontramos lá uma indicação que nos parece coerente com as ideias acima discutidas, no que se refere à importância de que os indivíduos sejam expostos a conflitos cognitivos sempre que possível. Esses momentos de exposição podem desvinculá-los de situações que contemplem somente procedimentos mecanizados e/ou situações ancoradas somente em definições "formais" do conceito abordado:

> A interação entre os diferentes tipos de representação propicia um entendimento matemático mais profundo sobre os conceitos. Quando a imagem de conceito de um estudante se torna mais ampla, ele adquire uma concepção mais rica e abrangente do conceito matemático (ATTORPS, 2006, p. 111).[3]

A premissa apresentada acima por Attorps, assim como as discussões de Tall & Vinner, parecem fortalecer ainda mais nossas convicções de que a abordagem dos Multisignificados de Equação nas aulas de Matemática auxiliará na expansão da imagem de conceito de professores e de alunos, propiciando assim uma melhor compreensão do conceito de equação.

[3] Tradução nossa.

Uma imagem de conceito ampla pode propiciar uma significação mais rica à definição de conceito (Giraldo, 2004). A concepção dos Multisignificados de Equação se deu por meio de um estudo onde Ribeiro (2007) observou a maneira pela qual diferentes povos, em diferentes momentos da história, reconheciam e tratavam equações. Tal estudo foi complementado pela investigação em livros didáticos, dicionários, e pesquisas em Educação Matemática.

Assumindo a premissa de que cada significado de equação (Ribeiro, 2007) se constitui por meio da relação entre a forma de se reconhecer uma equação e a forma de tratá-la, buscamos, contribuindo com o projeto mais amplo, investigar ***quais significados de equação estão presentes nas concepções dos professores de Matemática ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação.***

## 2.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nossa pesquisa foi desenvolvida segundo uma abordagem qualitativa. Passamos agora a discutir os procedimentos adotados e os instrumentos de coleta de dados utilizados para o desenvolvimento do presente estudo.

Considerando o objetivo de nossa pesquisa que busca investigar *quais significados de equação são evidenciados nas imagens de conceito dos professores de Matemática ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação*, nos pareceu bastante apropriado a utilização de entrevistas para a coleta de dados.

A entrevista é um paradigma de pesquisa bastante utilizado em ciências sociais e pode ser compreendido etimologicamente como:

> Etimologicamente, a palavra entrevista é construída a partir de duas palavras: entre (lugar ou espaço que separa duas pessoas ou coisas) e vista (ato de ver, perceber). Ou seja, a entrevista é uma comunicação bilateral. (FIORENTINI & LORENZATO, 2006. p. 120)

Optamos por realizar entrevistas semi-estruturadas, com o auxilio de um questionário elaborado especialmente para tal. Esse paradigma de pesquisa pareceu mostrar-se o mais apropriado às nossas pretensões, pois permitiu uma maior flexibilidade no desenvolvimento das entrevistas.

O instrumento de coleta de dados serviu como um condutor da entrevista, permitindo ao pesquisador fazer perguntas ao professor entrevistado sempre que a necessidade de maiores explicações se fez presente.

> Essa modalidade é muito utilizada nas pesquisas educacionais, pois o pesquisador, pretendendo aprofundar-se sobre um fenômeno ou questão específica, organiza um roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo de acordo com o desenvolvimento da entrevista, alterar a ordem dos mesmos e, inclusive, formular questões não previstas inicialmente. (FIORENTINI & LORENZATO, 2006. p, 121)

Optamos em nossa pesquisa, assim como Attorps (2006) fez em sua pesquisa, trabalhar com professores com diferentes tempos de experiência docente, pois acreditamos que o tempo de exercício docente pode acarretar em diferentes imagens de conceito sobre equações.

Iniciamos a pesquisa com seis professores participantes e ao término, conforme sugestão da banca examinadora do material de qualificação, optamos em fazer a análise de apenas três desses professores. Tal fato se justifica pelo caráter da presente pesquisa, ou seja, por tratar-se de uma pesquisa qualitativa a análise de três professores propiciou um aprofundamento das discussões e das análises.

Dessa maneira, trabalhamos com três professores da Educação Básica, sendo um deles estudante do último semestre do curso de Licenciatura em Matemática, mas que já exerce a função de docente. Com relação ao tempo de magistério, este último professor (Professor B) tem aproximadamente 1 ano de experiência, um outro professor (Professor C) com aproximadamente dezesseis anos de experiência e um professor (Professor A) com 20 anos de experiência docente.

As entrevistas foram precedidas por uma conversa informal, na qual o professor entrevistado respondeu a um questionário que tinha por objetivo traçar o perfil do entrevistado (vide Anexo B). Além disso, o pesquisador teve a oportunidade de explicar em termos gerais como se desenvolveria a presente pesquisa.

As entrevistas foram áudio-gravadas, com a autorização dos participantes, e posteriormente transcritas pelo pesquisador, a entrevista dos professores A e B aconteceram em suas residências, enquanto a entrevista com o professor C ocorreu na escola onde leciona.

Optamos por realizar as entrevistas, sempre que possível, em local onde o entrevistado pudesse se sentir o mais confortável possível. Acreditamos que tal fato possibilitaria uma maior “fluência” das ideias e concepções desses professores, uma vez que:

> ... na entrevista a relação que se cria é de interação, havendo uma atmosfera de influência recíproca entre quem pergunta e quem responde. Especialmente nas entrevistas não totalmente estruturadas, onde não há a imposição de uma ordem rígida de questões, o entrevistado discorre sobre o tema proposto com base nas informações que ele detém e que no fundo são a verdadeira razão da entrevista. Na medida em que houver um clima de estímulo e de aceitação mútua, as informações fluirão de maneira notável e autêntica. (LÜDKE & ANDRÉ, 1986. p. 33-34).

O instrumento de coleta de dados utilizado durante as entrevistas foi concebido de forma a nos possibilitar uma investigação acerca de quais significados de equação estão presentes nas imagens de conceito dos professores de Matemática ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação.

Com o intuito de fornecer um panorama geral sobre os sujeitos da pesquisa, apresentamos a seguir, um quadro-resumo do perfil dos professores entrevistados. Ao iniciar as análises da entrevista de cada professor, será apresentado e discutido, quando necessário, um relato mais detalhado do perfil de cada professor entrevistado.

| Professor | Idade (anos) | Sexo M (masculino) F (feminino) | Tempo de Experiência Docente | Leciona em Escola Pública ou Privada | Número de Escolas que Leciona | Pós-Gradução |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 52 | M | 20 anos | Pública | 2 | Sim |
| B | 33 | F | 1 ano | Pública | 4 | Não |
| C | 41 | F | 16 ano | Pública | 1 | Não |

### 2.3.1 Análises preliminares das atividades desenvolvidas

O instrumento de coleta de dados[4] foi concebido especificamente com o intuito de investigar quais significados de equação estão presentes nas imagens de conceito dos professores de Matemática ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação.

O instrumento é composto por duas atividades subdivididas em itens, sendo a primeira subdividida em 12 itens e a segunda em 2. Cada situação apresentada aos professores, ou foi elaborada especificamente para a presente pesquisa, ou adaptada de outras fontes, como livros e dissertações de mestrado.

As entrevistas foram individuais e com hora marcada. Os professores A e B optaram por realizar a entrevista em um único encontro e em suas residências, enquanto que o professor C preferiu realizar a entrevista na escola em que trabalha. As entrevistas foram realizadas todas em um único encontro, tendo uma média de duas horas de duração. Tal fato se deu por opção dos professores entrevistados. Todas as

[4] Ver Anexo 1. Optamos por elaborar um encarte que irá acompanhar a versão final da dissertação, este tem o propósito de facilitar a consulta e a utilização das situações matemáticas que compõem o instrumento de coleta de dados.

entrevistas ocorreram com o silêncio e isolamento necessários, a entrevista realizada na escola ocorreu em um sábado pela manhã, sem interferência de alunos ou outros funcionários.

A gravação do áudio se fez necessária por acreditarmos que muitos elementos que compõem as concepções desses professores poderiam não se revelar apenas com o instrumento escrito, sendo preciso então uma sondagem verbal por parte do pesquisador, instigando-os a falar sobre suas concepções acerca dos itens apresentados.

Considerando o paradigma de pesquisa adotado, de uma pesquisa semi-estruturada, os itens da primeira atividade poderiam ser apresentados aos professores em outra ordem, que não a da formatação do próprio instrumento, podendo inclusive ser suprimido um ou outro item segundo a dinâmica da entrevista. O professor que assim optasse, poderia parar a execução de algum item e retomá-lo posteriormente, enquanto ele ainda estivesse realizando a atividade 1.

Pretendíamos com o instrumento de coleta de dados utilizado em nossa pesquisa levantar subsídios que nos possibilitasse investigar se e quais dos diferentes significados que compõe os Multisignificados de Equação (Ribeiro, 2007) que estavam presentes nas imagens de conceitos dos professores que entrevistamos.

Contudo, penetrar na imagem de conceito das pessoas não é uma tarefa simples e de forma alguma este trabalho possui a pretensão de esgotar o assunto. Certamente não foi possível aqui sondar toda a imagem de conceito de cada um dos professores investigados. Dessa forma, a dinâmica utilizada por nós propiciou uma maior flexibilidade durante a entrevista, pois possibilita ao pesquisador trilhar diferentes caminhos ao longo do processo, alguns deles que não haviam sido previamente concebidos.

Esse instrumento foi idealizado e concebido para ser utilizado em dois momentos distintos e com duas diferentes atividades: a primeira delas buscou investigar se os professores reconheciam equações nas situações apresentadas e como eles as tratavam; na segunda atividade buscamos retomar a primeira, aprofundando a investigação sobre a questão do reconhecimento de uma equação em uma das situações matemáticas postas.

Os professores puderam utilizar o tempo que acharam necessário para realizar cada item das atividades. As intervenções por parte do pesquisador ocorreram apenas nos momentos em que o professor manifestou o desejo de desistir do item, deixando a resposta “em branco” ou incompleta e passar ao item seguinte, ou ainda, quando o pesquisador acreditou que outros elementos poderiam emergir de sua imagem de conceito.

A primeira atividade apresentou aos professores, situações matemáticas compostas por situações-problema em linguagem natural, situações algébricas e situações geométricas que remetiam em sua maior parte a uma equação. Acreditamos que a inserção de itens que não remetiam à equação poderiam nos apontar indícios sobre as concepções desses professores acerca de como eles reconhecem e interpretam as outras atividades que remetem à equação. A segunda atividade foi dividida em dois momentos: o primeiro em que o professor precisou elencar todos os objetos matemáticos que ele reconhecia nas situações matemáticas apresentadas na atividade 1, e o segundo, em que ficou explicitado para o professor que o objeto matemático em questão era equação.

Caso o professor reconhecesse uma equação permeando os itens da atividade 1 como o objeto matemático mencionado na atividade 2a e a utilizasse para classificação da atividade 1, então a atividade 2b poderia se tornar desnecessária, cabendo ao pesquisador a escolha de excluí-la.

Considerando a possibilidade de não atendimento de nossas perspectivas apenas com a primeira atividade, pois a mesma poderia não ser capaz de averiguar com a profundidade que desejamos, a maneira que os professores reconhecem uma equação, acreditamos que as duas atividades do instrumento acabam se complementando. Conjecturamos que somente mediante a análise das duas atividades é que poderíamos obter indícios que nos mostrassem se e quais significados de equação estão presentes nas imagens de conceito dos professores de Matemática, por nós investigados, ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação.

Passamos agora às análises preliminares dos dados, onde buscamos explicitar o que é e com que objetivo foi concebido o instrumento de coleta de dados.

**Atividade 1. Observe as situações a seguir e responda cada uma delas**:

Essa atividade tinha por objetivo investigar a forma pelo qual o professor trata uma equação. A presente atividade encontra-se dividida em 12 itens, onde cada item, que contempla a noção de equação, apresenta uma situação matemática que remete a um significado de equação ou à interação de dois significados.

Como dito acima, o principal objetivo da atividade 1 é investigar como os professores tratam as situações matemáticas às quais eles foram apresentados, ou seja, investigar a segunda parte da relação entre o “ver” e o “fazer”. Por outro lado, esses mesmos itens serão utilizados na atividade 2, quando buscamos investigar a primeira parte da relação entre o “ver” e o “fazer”. Vale destacar que, algumas das situações matemáticas que são apresentadas na atividade 1, não estão relacionadas à equação. Tal escolha está diretamente ligada ao objetivo da atividade 2 e isto será melhor justificado quando apresentarmos as suas análises.

Dentre os itens aos quais nos referimos acima, estão os itens *d*, *g* e *i* não remetem à ideia de equação e sim de fórmula, inequação e de igualdade envolvendo matrizes, respectivamente. Levantamos a conjectura de que esses conceitos são normalmente confundidos e que a investigação desses itens pode nos revelar importantes indícios das concepções dos professores entrevistados quanto à ideia de equação.

A seguir apresentamos a análise preliminar de cada situação que compõe a atividade 1. Nessa análise consideramos o objetivo de cada item, o significado ao qual entendemos que a situação matemática é remetida, além de possíveis estratégias de resolução que os professores poderão utilizar.

**a) Determine os valores de y para os quais a expressão $(y-1)^2$ é igual a -4y.**

O objetivo deste item é o de apresentar ao professor uma situação matemática que contemple uma equação polinomial do segundo grau. Tal situação remete ao significado PROCESSUAL-TECNICISTA.

Acreditamos que essa situação seja uma representante do significado PROCESSUAL-TECNICISTA. A forma pela qual ela é apresentada no enunciado da situação, parece-nos indicar o imediato emprego de técnicas de manipulações algébricas, que podem facilitar o trabalho para a sua resolução. Algumas dessas técnicas ainda podem propiciar uma economia de tempo e esforço.

Algumas possíveis estratégias de resolução para este item:

I. Traduzir o enunciado para a linguagem matemática e utilizar técnicas conhecidas de resolução de equações para encontrar o valor da incógnita. Dentre as possíveis técnicas utilizadas durante o processo, temos o emprego do trinômio quadrado perfeito e da fórmula conhecida como fórmula de Báskara:

$(y-1)^2=-4y \Rightarrow y^2-2.y.1+1^2=-4y \Rightarrow y^2-2y+4y+1=0 \Rightarrow y^2+2y+1=0$

$\Delta=b^2-4.a.c$

$\Delta=(2)^2-4.1.1$

$\Delta=4-4$

$\Delta=0$

$y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow y=\frac{-2\pm 0}{2.1} \Rightarrow y_1=y_2=-1$

II. Igualar algebricamente as sentenças apresentadas e a partir disso resolver a equação atentando para as propriedades algébricas envolvidas, como distributividade do produto em relação à soma, comutatividade, associatividade, regular, etc.:

$(y-1)^2=-4y \Rightarrow (y-1).(y-1)=-4y \Rightarrow y^2-y-y+1=-4y \Rightarrow y^2-2y+1=-4y$

$y^2-2y+4y+1=-4y+4y \Rightarrow y^2+2y+1=0$

A partir desse momento ele poderá utilizar um dos métodos conhecidos para a resolução da equação. Embora ele possa utilizar a fórmula de Báskara, colocamos como opção a redução da equação a um trinômio quadrado perfeito, pois já apresentamos o desenvolvimento pela técnica “fórmula de Báskara” no item I.

$y^2+2y+1=0 \Rightarrow (y+1)^2=0 \Rightarrow y+1=\pm\sqrt{0} \Rightarrow y_1=y_2=-1$

III. Através do método de tentativas, encontrar os valores que satisfazem a equação:

Ao tentar substituir o 0 na igualdade $(y-1)^2=-4y$, verifica-se que $(0-1)^2=-4.0 \Rightarrow 1=0$ o que é não é verdadeiro;

Ao substituir y=-1, temos $(-1-1)^2=-4.-1 \Rightarrow 4=4$. Verificando que a igualdade é verdadeira, o valor -1 é uma das raízes da equação.

Desta forma, dependendo das escolhas que fizer, o professor poderá chegar rapidamente ao resultado ou utilizar o método diversas vezes, até chegar ao resultado esperado.

**b) Um boato se espalha da seguinte maneira: no 1º dia duas pessoas ficam sabendo do boato, no 2º dia cada uma dessas duas pessoas conta o boato para outras duas pessoas, no 3º dia cada uma das quatro pessoas conta o boato para outras duas pessoas, e assim por diante.**

- **Quantas pessoas saberão do boato após 5 dias?**
- **Quantos dias deverão se passar para que 1.048.576 pessoas saibam do boato?**
- **Independente do número de dias como essa situação pode ser traduzida matematicamente?** [5]

O objetivo deste item é o de apresentar ao professor uma situação matemática que contemple uma equação exponencial. Tal situação remete à interação dos significados de equação ESTRUTURAL-CONJUNTISTA e INTUITIVO-PRAGMÁTICO.

Acreditamos que essa situação seja uma representante do significado ESTRUTURAL-CONJUNTISTA, pois pode ser modelada como uma equação do tipo $y=a^x$, onde x representa a quantidade de dias e y a quantidade de pessoas que passam a saber do boato, quer seja, a relação entre dois conjuntos.

Essa situação remete também ao significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO, pois a equação pode ser reconhecida a partir de uma situação prática e

[5] A presente questão foi adaptada da Dissertação de Mestrado de Nilcéia Regina Ferreira Dominoni, com o título: Utilizações de Diferentes Registros de Representação: Um Estudo Envolvendo Funções Exponenciais. UEL-PR, 2005. p. 57.

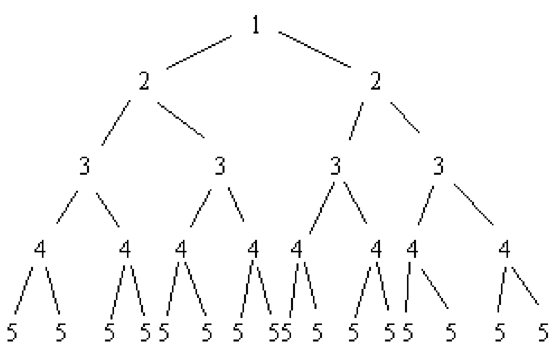
tratada de forma intuitiva, ou seja, por meio de operações aritméticas ou o do diagrama de árvores, por exemplo.

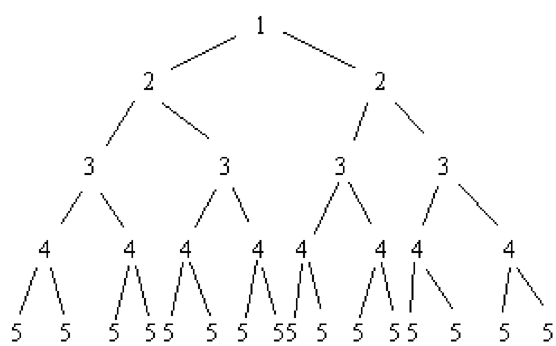
Algumas possíveis estratégias de resolução para este item são:

***Para descobrir quantas pessoas saberão do boato após 5 dias:***

I. Multiplicar por o número de pessoas por 2, dia após dia até chegar ao resultado desejado:
   Primeiro dia:
   2 pessoas
   Segundo dia:
   2 x 2 = 4 pessoas
   Terceiro dia:
   4 x 2 = 8 pessoas
   Quarto dia:
   8 x 2 = 16 pessoas
   Quinto dia:
   16 x 2 = 32 pessoas

II. Utilizar um diagrama de árvore para visualizar melhor a situação e descobrir quantas pessoas saberão do boato após 5 dias.





III. Escrever essa relação entre números de dias e números de pessoas que sabem do boato como uma função exponencial:

$y = 2^x$

onde y representa o número de pessoas e x o número de dias, temos então que após cinco dias 32 pessoas saberão do boato.

$y = 2^5$

$y = 32$ pessoas

IV. Reconhecer que a situação pode ser representada através de uma progressão geométrica e utilizar o fórmula do termo geral de uma PG para determinar quantas pessoas saberão do boato após 5 dias:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = 2 \cdot 2^{5-1}$

$a_n = 2 \cdot 2^4$

$a_n = 2 \cdot 16$

$a_n = 32$ pessoas

***Quantos dias deverão se passar para que 1.048.576 pessoas saibam do boato?***

I. Pegar o valor de 1.048.576 e dividir por dois, sucessivamente, até encontrar quociente igual a um.

1.048.576 : 2 = 524.288

524.288 : 2 = 262.144

131.072 :2 = 65.536

.

.

.

2 : 2 = 1

Então o professor conta o número de divisões executadas e chega a 20, o número de dias, porém não explicita uma equação exponencial.

II. Fazer o cálculo dia a dia até encontrar o valor desejado de 1.048.576, explicitando uma equação exponencial.

Primeiro dia:

2 pessoas

Segundo dia:

2 x 2 = 4 pessoas

Terceiro dia:

4 x 2 = 8 pessoas

Quarto dia:

8 x 2 = 16 pessoas

Quinto dia:

16 x 2 = 32 pessoas

.

.

Décimo nono dia:

262.144 x 2 = 524.288

Vigésimo dia:

524.288 x 2 = 1.048.576 pessoas

III. Escrever a função algébrica $f(x) = 2^x$ e utilizá-la para encontrar os valores solicitados no enunciado do problema. Substituindo o valor de y por 1.048.576 tem-se a equação exponencial $1.048.576 = 2^x$, onde ele encontra em que dia 1.048.576 pessoas estarão sabendo do boato.

$1.048.576 = 2^x$

$2^{20} = 2^x$

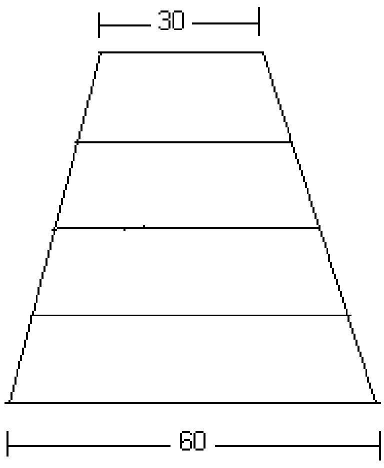
Logo $x = 20$

***Independente do número de dias como essa situação pode ser traduzida matematicamente?***

I. Apresentar a função $f(x) = 2^x$, onde f(x) representa o número de pessoas e x o número de dias.

II. Apresentar a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, onde $a_n$ representa quantas pessoas saberão do boato no n-ésimo dia, $a_1$ representa quantas pessoas sabem do boato no primeiro dia e $q$ a razão da PG.

**c) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm conforme a figura. Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira. Qual deve ser o comprimento dessa peça, desconsiderando os lados da escada?** [6]




[6] Essa atividade foi contemplada no ENEM e foi retirada do livro didático Coleção Matemática – 1ª Série, do autor Luiz Roberto Dante, p. 198. A atividade sofreu uma pequena adaptação, uma vez que a atividade original apresenta alternativas para as respostas.

O objetivo desse item é apresentar uma situação matemática que remeta a uma integração entre os significados INTUITIVO-PRAGMÁTICO e DEDUTIVO-GEOMÉTRICO.

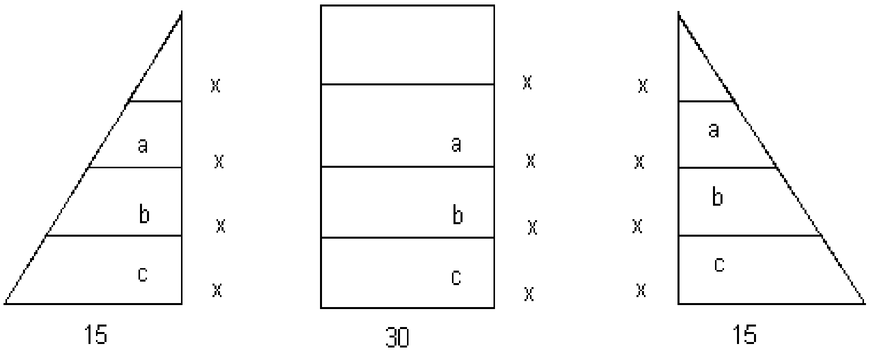
O item acima apresenta uma situação prática, do cotidiano, por exemplo, enfrentada por um marceneiro em sua prática profissional, que pode ser transformada em uma sentença matemática, na qual a modelagem resulta em uma equação, onde suas incógnitas são segmentos de reta.

Acreditamos que essa situação seja semelhante com as situações matemáticas trabalhadas pelos gregos, durante a fase heroica da Matemática (por volta do século V a.C.), onde as incógnitas de suas equações eram comumente segmentos de retas.

Algumas possíveis estratégias de resolução desse item são:

I. Estabelecer quantos centímetros uma tábua varia em relação à outra. A partir disso, encontrar a medida desejada, ou seja, entre as madeiras de medidas 30 cm e 60 cm existem quatro segmentos de mesma medida. Assim, fazendo 60 - 30 e dividindo o resultado por 4, temos 7,5 cm, que é a diferença de medida entre uma tábua e outra. A seguir, fazemos 30+(30+7,5)+(30+7,5+7,5)+(30+7,5+7,5+7,5)+60=225 cm.

II. Dividir a figura em dois triângulos e um retângulo e através de casos de semelhança de triângulos encontra-se as medidas desejadas.




$\frac{x}{4x} = \frac{a}{15} \Rightarrow 15x = 4xa \Rightarrow \frac{15x}{4x} = a \Rightarrow$ a=3,75

$\frac{2x}{4x} = \frac{b}{15} \Rightarrow$ b=7,5

$\frac{3x}{4x} = \frac{c}{15} \Rightarrow$ c=11,25

2.(3,75 + 7,5 + 11,25 + 15) + 5 . 30 = 75 + 150 = 225 cm

**d) Calcule o comprimento de uma circunferência de raio 2 cm.**

O objetivo desse item é propor ao professor uma situação matemática que não seja traduzida por uma equação, mas sim, por uma fórmula matemática. Como anunciamos brevemente no início dessas análises, a inserção desse item aqui está relacionada com a atividade 2 e será melhor justificada quando da discussão da atividade 2.

Algumas possíveis estratégias de resolução:

I. O professor utiliza a fórmula matemática C=2π.r e descobre que o comprimento da circunferência é, aproximadamente, 12,56 cm;

II. O professor procura através de aproximações um valor para o comprimento da circunferência.

**e) Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD custa R$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R$ 70,00?**[7]

O objetivo deste item é o de apresentar ao professor uma situação matemática que pode ser traduzida por uma equação diofantina linear, a qual admite somente soluções inteiras. Tal situação remete ao significado INTUITIVO-PRAGMÁTICO, uma vez que emerge de uma situação do cotidiano e pode ser tratada de forma intuitiva.

A escolha de uma equação diofantina linear para representar uma equação que remeta ao significado INTUITIVO-PRAGMÁTICO deve-se ao fato de que as possibilidades de resolução das mesmas não estão condicionadas à aplicação de algoritmos.

Acreditamos que dessa maneira as resoluções de tais equações possibilitem aos entrevistados raciocinar de forma muito semelhante aos egípcios e babilônios (aproximadamente 1800 a.C.), que por não possuírem um método geral de resolução de equações, utilizavam-se do Método da Falsa Posição e de aproximações, através do método de tentativa e refinamento.

Algumas das possíveis estratégias de solução para esse item são:

---

[7] Essa questão foi adaptada da Dissertação de Mestrado de Wagner Marcelo Pommer, com o título: Equações Diofantinas Lineares – Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio. PUC-SP. 2008. p. 63.

I. Procurar resolver o problema utilizando-se de tentativas, seja por meio de cálculos mentais ou cálculos no "papel e lápis";

II. Modelar o problema por meio da equação linear $12x + 16y = 70$, onde x simboliza o número de CDs e y o número de DVDs. Encontra a equação $6x + 8y = 35$, equivalente à equação original, na qual verifica-se que uma solução inteira é impossível, pois a soma de dois números pares não remete a um número ímpar.

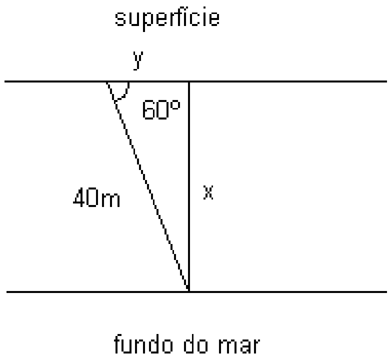
**f) Um mergulhador percorreu uma distância de 40m entre a superfície e o fundo do mar, segundo uma trajetória retilínea que forma um ângulo de 60º com a superfície.**
***a*) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?**
***b*) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?**

O objetivo de desse item é o de apresentar ao professor uma situação-problema que contemple uma equação envolvendo elementos de trigonometria no triângulo retângulo, a qual remete aos significados de equação PROCESSUAL-TECNICISTA e INTUITIVO-PRAGMÁTICO.

Acreditamos que tal situação seja uma representante da interação entre esses significados, pois a equação resultante da modelização emerge de uma situação prática (INTUITIVO-PRAGMÁTICO). Contudo, depois de modelado, o professor pode utilizar seus conhecimentos sobre as técnicas e processos de resolução de uma equação que envolve conhecimentos relativos a trigonometria no triângulo retângulo (PROCESSUAL-TECNICISTA).

Algumas possíveis estratégias de resolução para esse item são:

I. Fazer um desenho para visualizar melhor a situação-problema:




a) Após construir o desenho, ele utiliza as relações trigonométricas no triângulo retângulo para encontrar a profundidade em que se encontra o mergulhador (no desenho representado pela letra x) e a distância que o mesmo estaria do ponto em que mergulhou (no desenho representado pela letra y):

sen 60º = $\frac{x}{40}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{40}$

$\frac{40\sqrt{3}}{2}$ = x

x = $20\sqrt{3}$ m

b) Para encontrar o valor de y o professor utiliza a relação trigonométrica do cosseno de um ângulo:

cos 60º = $\frac{y}{40}$

$\frac{1}{2} = \frac{y}{40}$

$\frac{40}{2}$ = y

y = 20 m

II. Utiliza a relação trigonométrica do cosseno de um ângulo ou do seno de um ângulo e encontra os valores de y ou x, respectivamente. Após descoberto o valor de uma das incógnitas utiliza o teorema de Pitágoras para descobrir a outra.

a) Escolhendo o seno:

sen 60º = $\frac{x}{40}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{40}$

$\frac{40\sqrt{3}}{2} = x$

x = $20\sqrt{3}$ m

b) Utilizando o teorema de Pitágoras:

$40^2 = (20\sqrt{3})^2 + y^2$

$1600 = 400.3 + y^2$

$1600 = 1200 + y^2$

$1600 – 1200 = y^2$

$400 = y^2$

$\sqrt{400} = y$

y = +20 ou -20

Como y representa uma distância temos que y=+20 m

a) Escolhendo o cosseno:

cos 60º = $\frac{y}{40}$

$\frac{1}{2} = \frac{y}{40}$

$\frac{40}{2} = y$

$y = 20$ m

b) Utilizando o teorema de Pitágoras:

$40^2 = 20^2 + x^2$

$1600 = 400 + x^2$

$1600 – 400 = x^2$

$1200 = x^2$

$\sqrt{1200} = x$

$x = 20\sqrt{3}$ m

III. Outra forma de resolução, que acreditamos ser possível é a do professor utilizar uma das estratégias acima, porém em sua resolução deixar explicito as propriedades algébricas que ele está utilizando, como por exemplo:

a) Vamos demonstrar o caso em que o professor escolhe utilizar a relação trigonométrica do seno de um ângulo para encontrar a profundidade alcançada pelo mergulhador e depois utiliza o teorema de Pitágoras para encontrar a distância que o mergulhador, subindo verticalmente para a superfície, se encontra do ponto em que mergulhou.

$\text{sen } 60^o = \frac{x}{40}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{40}$

$40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{40} \cdot 40$

$\frac{40\sqrt{3}}{2} = \frac{40x}{40}$

$20\sqrt{3} = x$

$x = 20\sqrt{3}$ m

b) Utilizando o teorema de Pitágoras para encontrar o valor de y:

$40^2 = (20\sqrt{3})^2 + y^2$

$1600 = 400 . 3 + y^2$

$1600 = 1200 + y^2$

$1600 – 1200 = 1200 + y^2 – 1200$

$400 = y^2$

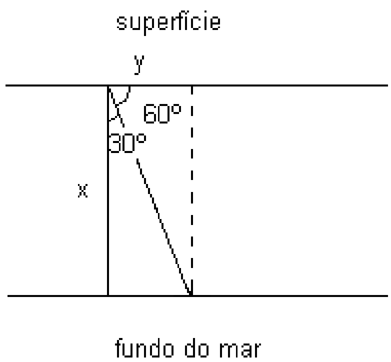
$\sqrt{400} = \sqrt{y^2}$

$\pm 20 = y$

Como já vimos y=+20 por tratar-se de uma distância.

O mesmo tipo de resolução pode ocorrer com todas as possibilidades anteriores, ou seja, independente da forma de resolução escolhida pelo professor, ele poderá dar ênfase às propriedades algébricas envolvidas.

IV. Considerando o desenho a seguir, outras versões do desenho original poderão aparecer. Além disso, o professor poderá escolher os ângulos complementares para realizar as operações.




Onde o professor consideraria o ângulo de 30º, ou o de 60º na base do triângulo (cuja base está no fundo do mar).

**g) Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.**

- **O plano A cobra R$ 100,00 de inscrição e R$ 50,00 por consulta num certo período;**

- **O plano B cobra R$ 180,00 de inscrição e R$ 40,00 por consulta no mesmo período.**

**Em que condições podemos afirmar que o Plano A é mais econômico que o Plano B?**

O objetivo desse item é apresentar ao professor uma situação matemática que remeta à ideia de inequação. Como já justificado anteriormente no item d, a inserção deste item aqui também será melhor fundamentada quando da discussão da atividade 2.

Algumas possíveis estratégias de resolução:

I. Experimenta diversos valores para os números de consultas, até encontrar o número de consultas em que um plano é mais econômico do que o outro. Assim trabalha com uma função linear para cada consulta e vai comparando os resultados.

1ª consulta

| Plano A | Plano B |
|---|---|
| C(x) = 50x + 100 | C(x) = 40x + 180 |
| C(1) = 50.1 + 100 | C(1) = 40.1 + 180 |
| C(1) = 50 + 100 | C(1) = 40 + 180 |
| C(1) = 150 | C(1) = 220 |

2ª consulta

| Plano A | Plano B |
|---|---|
| C(2) = 50.2 + 100 | C(2) = 40.2 + 180 |
| C(2) = 100 + 100 | C(2) = 80 + 180 |
| C(2) = 200 | C(2) = 260 |

3ª consulta

| Plano A | Plano B |
|---|---|
| C(3) = 50.3 + 100 | C(3) = 40.3 + 180 |
| C(3) = 150 + 100 | C(3) = 120 + 180 |
| C(3) = 250 | C(3) = 300 |

4ª consulta

| Plano A | Plano B |
|---|---|
| C(4) = 50.4 + 100 | C(4) = 40.4 + 180 |
| C(4) = 200 + 100 | C(4) = 160 + 180 |
| C(4) = 300 | C(4) = 340 |

5ª consulta

| Plano A | Plano B |
|---|---|
| C(5) = 50.5 + 100 | C(5) = 40.5 + 180 |
| C(5) = 250 + 100 | C(5) = 200 + 180 |
| C(5) = 350 | C(5) = 380 |

6ª consulta

| Plano A | Plano B |
|---|---|
| C(6) = 50.6 + 100 | C(6) = 40.6 + 180 |
| C(6) = 300 + 100 | C(6) = 240 + 180 |
| C(6) = 400 | C (6) = 420 |

7ª consulta

| Plano A | Plano B |
|---|---|
| C(7) = 50.7 + 100 | C(7) = 40.7 + 180 |
| C(7) = 350 + 100 | C(7) = 280 + 180 |
| C(7) = 450 | C(7) = 460 |

8ª consulta

| Plano A | Plano B |
|---|---|
| C(8) = 50.8 + 100 | C(8) = 40.8 + 180 |
| C(8) = 400 + 100 | C(8) = 320 + 180 |
| C(8) = 500 | C(8) = 500 |

Portanto, até a oitava consulta o Plano A é mais econômico do que o Plano B. Na oitava consulta os planos são equivalentes e após a oitava consulta o Plano B é o mais econômico.

II. Modela a situação por meio através de uma inequação. Ao resolver a inequação, encontra as condições em que o Plano A é mais econômico do que o Plano B. Podemos estabelecer uma função custo para ambos os planos:

Plano A: C(x)=50x+100 Plano B: C(x)=40x+180

Desejamos saber quando o Plano A é mais econômico que o Plano B então:

$50x+100<40x+180$

$50x-40x<180-100$

$10x<80 \Rightarrow x<8$

**h) Um mutuário comprou um apartamento por R$100.000,00 financiado por um banco com taxa de juros compostos de 15% ao ano. Logo no primeiro mês ele perdeu o emprego e não pagou nenhuma parcela. O mutuário demorou algum tempo para conseguir uma recolocação no mercado de trabalho e durante esse período não pagou as prestações do apartamento. Quando foi verificar sua dívida junto ao banco, descobriu que agora devia um total de R$152.087,50. Quantas prestações ele deixou de pagar?**

O objetivo desse item é apresentar ao professor uma situação que contemple uma equação logarítmica, a qual remete à interação dos significados INTUITIVO-PRAGMÁTICO e PROCESSUAL-TECNICISTA.

Acreditamos que o significado INTUITIVO-PRAGMÁTICO se manifeste nesse item, uma vez que a situação matemática emerge da necessidade de se resolver um problema de ordem prática.

Embora essa situação possa ser reconhecida em um problema de ordem prática (”ver”) e ser tratada de forma intuitiva (utilizando-se de operações aritméticas, “fazer”), a utilização de técnicas algébricas podem ser fortes aliadas na resolução do problema (PROCESSUAL-TECNICISTA).

O significado PROCESSUAL-TECNICISTA presente nesse item implica na habilidade do professor em utilizar corretamente técnicas de manipulações algébricas (”fazer”), envolvendo equações logarítmicas. Essa habilidade para ser reconhecida dentro da perspectiva desse significado encerra em si a possibilidade do professor em reconhecer todo o processo (“ver”) e não apenas a manipulação de regras sem sentido.

Algumas possíveis estratégias de resolução são:

I. Faz o cálculo ano a ano:
   No primeiro ano, teríamos:
   Juros = Capital vezes a taxa de juros (anual)
   J = 100.000,00 . 0,15
   J = 15.000
   O total da dívida ao término do primeiro ano é de R$115.000,00
   No segundo ano teríamos:
   J = 115.000,00 . 0,15
   J = 17.250,00
   O total da dívida ao término do segundo ano é de R$132.250,00

No terceiro ano teríamos:

J = 132.250,00 . 0,15

J = 19.837,50

O total da dívida ao término do terceiro ano é de R$152.087,50

Portanto o mutuário deixou de pagar as prestações do apartamento por 3 anos ou 36 meses.

II. Utiliza a fórmula dos juros compostos para encontrar o número de meses que o mutuário deixou de pagar o apartamento. Ao utilizar a fórmula dos juros compostos o professor recai em uma equação logarítmica.

$M = C . (1 + i)^n$

$152.087,50 = 100.000,00 (1 + 0,15)^n$

$152.087,50 = 100.000,00 (1,15)^n$

$\frac{152.087,50}{100.000,00} = 1,15^n$

$1,520875 = 1,15^n$

$\log 1,520875 = \log 1,15^n$

$\log 1,520875 = n . \log 1,15$

$0,182093 = n . 0.060697$

$\frac{0,182093}{0,060697} = n$

n = 3 anos ou 36 meses

**i) Em uma determinada cidade, 30% das mulheres casadas se divorciam e 20% das mulheres solteiras se casam por ano. Existem 8000 mulheres casadas e 2000 mulheres solteiras. Supondo que a população total de mulheres permanece**

**constante, quantas mulheres estarão casadas e quantas estarão solteiras depois de 1 ano? E depois de 2 anos?** [8]

O objetivo desse item é apresentar ao professor uma situação que não remeta à ideia de equação, mas sim uma igualdade envolvendo matrizes. Assim justificado nos itens *d* e g, a inserção deste item aqui será melhor explicada quando da discussão da atividade 2.

Algumas possíveis estratégias de resolução:

I. Procura encontrar a solução fazendo sucessivos cálculos envolvendo porcentagens.

Temos para o primeiro ano:

70% de 8000 é 5600 casadas, logo, agora temos 8000-5600=2400 novas solteiras.

80% de 2000 é 1600 solteiras, logo, agora temos 2000-1600=400 novas casadas.

Somando o número de mulheres que permaneceram casadas ao número de novas casadas temos: 5600+400=6000 casadas após um ano.

Somando o número de mulheres que permaneceram solteiras ao número de novas solteiras temos 1600+2400=4000 solteiras após um ano.

Temos para o segundo ano:

70% de 6000 é 4200 casadas, logo, agora temos 6000-4200=1800 novas solteiras.

80% de 4000 é 3200 solteiras, logo, agora temos 4000-3200=800 novas casadas.

---

[8] Essa situação foi retirada do livro Álgebra Linear com Aplicações, 4.ed. do autor Steven J. Leon, ano de 1998.

Somando o número de mulheres que permaneceram casadas ao número de novas casadas temos 4200+800=5000.

Somando o número de mulheres que permaneceram solteiras ao número de novas solteiras temos 3200+1800=5000.

Depois de 2 anos metade das mulheres estarão casadas e metade estarão solteiras.

II. Modela a situação utilizando uma igualdade matricial.

A= $\begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}80 \end{pmatrix}$

Se X= $\begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix}$, o número de mulheres casadas e solteiras depois de 1 ano pode ser obtido multiplicando-se A por X.

A.X= $\begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix}$

Depois de 1 ano, 6000 mulheres estarão casadas e 4000 estarão solteiras. Para encontrar o número de mulheres casadas e solteiras depois de 2 anos, calcula-se:

$A^2$.X=A.(A.X)= $\begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6000 \\ 4000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \end{pmatrix}$

Depois de 2 anos metade das mulheres estarão casadas e metade estarão solteiras.

**j) O que é possível fazer diante da situação abaixo?**

$$\frac{4z\sqrt{4x^2+12xy+9y^2}}{4zx+6yz}$$

O objetivo desse item é apresentar ao professor uma situação que não contemple uma equação, mas sim uma expressão algébrica. Assim como justificado anteriormente nos itens *d, g* e *i*, a inserção deste item aqui será melhor explicada quando da discussão da atividade 2.

Algumas possíveis estratégias de resolução são:

I. Afirmar que é possível simplificar a expressão, porém não se apresentar nenhuma forma para se fazer isso.

II. Proceder à simplificação:

$$\frac{4z\sqrt{4x^2+12xy+9y^2}}{4zx+6yz} =$$

$$\frac{4z\sqrt{(2x+3y)^2}}{2z(2x+3y)} =$$

$$\frac{4z(2x+3y)}{2z(2x+3y)} =$$

$$\frac{4z}{2z} = 2$$

III. Colocar um sinal de igual e resolver a expressão como se fosse uma equação, tentando encontrar os valores das letras.

**k) Resolva a sentença matemática abaixo, encontrando o(s) valore(s) de x.** [9]

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}=1$$

O objetivo desse item é propor ao professor uma situação que remeta ao significado ESTRUTURAL-GENERALISTA. Acreditamos que a situação acima remeta ao significado ESTRUTURAL-GENERALISTA, uma vez que está explícita uma expressão matemática, na qual a sua resolução exige a observância de propriedades estruturais da Álgebra.

Algumas possíveis estratégias de resolução para esse item são:

I. resolver a equação utilizando-se de técnicas de resolução de equação comumente utilizadas, ou seja, encontra o menor múltiplo comum entre os denominadores e proceder à resolução;

II. observar a estrutura da equação e procura uma forma de simplificá-la;

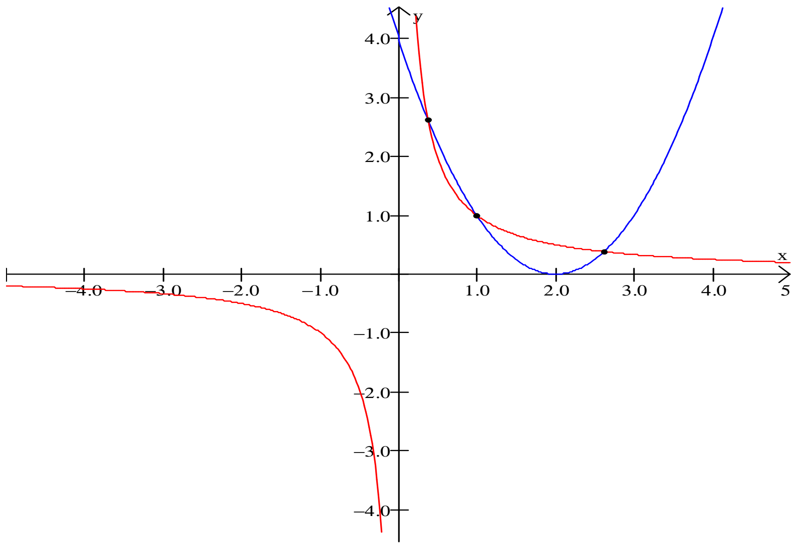
III. atribuir valores inteiros para a, b e c e busca a solução através de substituições;

IV. perceber, analisando a estrutura da equação, que quando x = a, x = b ou x = c a igualdade se torna verdadeira.

---

9 Essa atividade foi retirada da pesquisa de Dreyfus & Hoch (2004) com o título Equations: A structural approach. Proceedings of the 28th Conference Of International Group for the PME, 2004, p. 1-152 – 1-155

**l) O poeta, filósofo e matemático árabe Omar Khayyam descobriu uma forma de resolver alguns problemas matemáticos que na época pareciam impossíveis de serem resolvidos. Abaixo está apresentada a maneira como Khayyam tratava o problema matemático em questão. Afinal, de qual problema estamos falando e que ajudou a Omar Khayyam se tornar uma importante figura na história da Matemática?**[10]




O objetivo desse item é apresentar ao professor uma situação matemática que remeta ao significado DEDUTIVO-GEOMÉTRICO, pois aborda uma situação envolvendo a intersecção de curvas. Pretendemos assim investigar se o professor reconhece que uma intersecção de curvas é uma das formas de se representar uma equação.

Optamos por não chamar a atenção no enunciado desse item para os pontos de intersecção entre a parábola e a hipérbole. Pretendemos com isso investigar se os professores se atentarão para aqueles pontos de forma natural, porém caso isso não ocorra, o pesquisador durante a entrevista, poderá perguntar ao professor o que tais pontos lhe sugerem.

---

10 Essa questão foi adaptada da Dissertação de Mestrado de Rosana Nogueira de Lima com o título: Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas. PUC-SP. 1999.

Dessa maneira pretendemos oferecer nesse item, uma situação matemática que contemple uma equação representada geometricamente, que pode ser reconhecida e modelada como uma equação cúbica (“ver”), e tratada de forma dedutiva (“fazer”).

Algumas possíveis respostas para essa situação são:

I. reconhecer o gráfico como uma intersecção de curvas e apontá-lo como duas funções independentes, não relacionando em nenhum momento a intersecção à representação de uma equação;

II. escrever a situação apresentada como sendo duas funções independentes – uma quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 4$ e uma hipérbólica $g(x) = 1/x$ – mas sem relacionar as duas funções com uma equação;

III. reconhecer que a situação apresentada no gráfico pode ser interpretada como a intersecção de duas curvas, porém não consegue explicitá-las, relatando apenas que a situação pode ser representada por $f(x) = g(x)$;

IV. apontar que o gráfico representa a intersecção de duas curvas $f(x)$ e $g(x)$ e que essas intersecções podem ser percebidas como as raízes de uma equação;

V. reconhecer que o gráfico representa a intersecção de duas curvas, uma parábola e uma hipérbole e que tal intersecção são as raízes de uma equação cúbica.

**Atividade 2a. Existe um objeto matemático que está presente em algumas das situações da Atividade 1. Qual é este objeto matemático e em quais situações ele está presente? Justifique como você chegou a esta conclusão.**

O objetivo dessa atividade é investigar se a ideia de equação se manifesta na imagem de conceito dos professores entrevistados de forma “natural”. Queremos observar se os mesmos relacionam equação como um objeto matemático e, em caso afirmativo, em quais das situações apresentadas na atividade 1 isto acontece. Enfim, pretendemos investigar se os professores reconhecem equação nas situações apresentadas.

Algumas possíveis respostas e/ou justificativas para essa atividade são:

I. Os professores classificam os itens da atividade 1 em Álgebra, Aritmética e Geometria.

II. Os professores classificam os itens da atividade 1 quanto aos procedimentos e às operações utilizadas por eles nas resoluções.

III. Os professores reconhecem nos itens da atividade 1, funções, expressões, inequações e equações, sem especificar em qual situação cada um está contemplado.

IV. Os professores reconhecem que estamos nos referindo à equação. Apresentam que esse objeto matemático está contemplado nos itens *a, b, c, e, f, h, k, l*. Nas justificativas relatam que se trata de equação por apresentar uma igualdade entre valores, onde um (ou mais) desse(s) valor(es) deve(m) ser encontrados.

Dentre as possíveis justificativas que foram apresentadas pelos professores, acreditamos que estas deverão ser melhor explicadas ou justificadas, durante o desenvolvimento da atividade 2b, considerando o objetivo já apresentado para tal atividade. Assim, optamos por explorar mais detalhadamente as possíveis justificativas que os professores poderão apresentar, quando estivermos desenvolvendo as análises preliminares da atividade 2b.

**Atividade 2b. O objeto matemático ao qual nos referimos na Atividade 2a é EQUAÇÃO. Retomando as situações da Atividade 1, em quais delas você reconhece este objeto matemático? Justifique sua resposta.**

O objetivo dessa atividade é verificar se, ao declarar que o objeto matemático em questão é uma equação, os professores reconhecem em quais situações matemáticas elas estão contempladas e apresentam suas justificativas.

Ao analisar tais justificativas, acreditamos encontrar – ainda que de forma implícita – os diferentes significados que podem ser atribuídos à equação - Multisignificados de Equação (Ribeiro, 2007).

Esta atividade se faz necessária em nossa perspectiva, uma vez que os professores podem não reconhecer uma equação como um objeto matemático na atividade 2a. Por outro lado, esta atividade pode se fazer desnecessária, caso os professores reconheçam e utilizem o objeto matemático equação na atividade anterior.

Apresentamos a seguir algumas das respostas possíveis para cada item da atividade 1.

**Atividade 1 – Item a**

I. Reconhecer uma equação, podendo classificá-la como sendo uma equação do 2º grau.

II. Ao traduzir o enunciado do problema para uma sentença matemática, o mesmo a relaciona com uma equação, porém não consegue justificar sua escolha.

III. Não reconhecer uma equação permeando o item *a*, pois ela não aparece explícita no enunciado da situação, ou seja, não é apresentada na forma $(y-1)^2=-4y$ ou ainda, na forma $y^2+2y+1=0$.

**Atividade 1 – Item b**

I. Reconhecer uma equação permeando o item *b*, apontando a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica.

II. Reconhecer uma equação implícita na função $y = 2^x$

III. Declarar que a equação existe, mas não mostra de que forma ela se manifesta.

IV. Não reconhecer uma equação permeando o item *b*.

**Atividade 1 – Item c**

I. Reconhecer uma equação, a qual se relaciona com as fórmulas de áreas que podem ser utilizadas para resolver tal situação.

II. Reconhecer uma equação permeando o item, porém não consegue dizer de que forma isso acontece e nem consegue explicitá-la.

III. Reconhecer uma equação através das proporções empregadas na semelhança de triângulos.

IV. Não reconhecer uma equação por se tratar de uma situação geométrica.

**Atividade 1 – Item d**

I. O professor não reconhece uma equação e afirma tratar-se de uma fórmula matemática.

II. Embora este item não contemple uma equação, o professor pode afirmar que existe sim uma equação permeando essa situação, reconhecendo-a na fórmula do comprimento de uma circunferência. Conjecturamos que, ao fazer isto, ele pode não diferenciar uma fórmula de equação.

III. Embora este item não contemple uma equação, o professor afirma que a equação existe, pois existe uma igualdade e um valor a ser determinado.

**Atividade 1 – Item e**

I. Reconhecer que existe uma equação permeando o item, porém sem explicitá-la e nem apresentar justificativas.

II. Reconhecer que existe uma equação permeando o item. Contudo pode justificar que faltam dados para montar um sistema de equações.

III. Reconhecer uma equação permeando a situação, modelando-a por meio da equação $12x + 16y = 70$, onde $y$ representa a quantidade de DVDs e $x$ a quantidade de CDs.

**Atividade 1 – Item f**

I. Reconhecer uma equação envolvendo conhecimentos da trigonometria.

II. Reconhecer uma equação, utilizando-se do teorema de Pitágoras.

III. Não reconhecer uma equação nessa situação, justificando se tratar de trigonometria, e não de equação.

**Atividade 1 – Item g**

I. Afirmar não se tratar de uma equação, mas sim de uma inequação.

II. Embora este item não contemple uma equação, o professor afirma sim existir uma equação permeando o item, porém ele não é capaz de explicitá-la.

III. Embora este item não contemple uma equação, o professor reconhece uma equação, relacionando tal equação à função custo de cada plano de saúde. Contudo, ao fazer isto, não se atenta ao fato de existir uma desigualdade entre elas, tratando-as de forma separadas.

**Atividade 1 – Item h**

I. Reconhecer uma equação, utilizando-se para isto, da fórmula dos juros compostos.

II. Reconhecer uma equação, utilizando-se para isto, do cálculo com porcentagens.

III. Dizer que não existe uma equação permeando esse item, por tratar-se de uma situação que envolve logaritmos.

**Atividade 1 – Item i**

I. Não reconhece uma equação.

II. Embora este item não contemple uma equação, o professor afirma que existe sim uma equação, pois a relaciona ao cálculo com porcentagem.

III. Embora este item não contemple uma equação, o professor reconhece a situação como um sistema de equações.

IV. Alegar existir uma equação permeando o item, contudo não a explicita.

V. Afirmar não ser uma equação, pois se trata de operação entre matrizes.

VI. Reconhecer uma equação matricial.

**Atividade 1 – Item j**

I. Não reconhecer nesse item uma equação, alegando tratar-se de uma expressão algébrica.

II. Embora este item não contemple uma equação, ao inserir o sinal de igual para operar com frações equivalentes, o professor alega tratar-se de uma equação, pois, a partir daí, existe um sinal de igual e um valor desconhecido a ser descoberto.

**Atividade 1 – Item k**

I. Reconhecer uma equação, pois existem incógnitas e uma igualdade, ainda que não encontre uma estratégia de resolvê-la.

II. Não se trata de equação uma vez que os métodos por ele conhecidos não foram suficientes para resolver a situação.

III. Não se trata de uma equação, pois não tem coeficientes numéricos, mas somente coeficientes literais e parâmetros.

**Atividade 1 – Item l**

I. Não existe uma equação permeando o item, uma vez que trata-se de uma situação envolvendo gráficos.

II. Existe uma equação permeando o item, a qual é reconhecida por meio do gráfico de cada função.

III. Existe uma equação permeando o item, a qual se relaciona com a intersecção das curvas representadas na situação.

As análises que acabamos de apresentar, de forma alguma possuem a pretensão de esgotar todas as possibilidades de resolução das situações matemáticas que constam do presente instrumento de coleta de dados. Pretendemos aqui apresentar algumas possíveis estratégias de resolução, as quais estão, em parte, fundamentadas em nossa experiência acadêmico-profissional, assim como nas pesquisas que constam de nossa revisão de literatura.

Apresentaremos no próximo capítulo, as análises descritivas por nós construídas, a partir dos dados coletados com o referido instrumento. Nossas opiniões serão mais explicitamente reveladas no Capítulo IV, quando exporemos nossas conclusões finais., sendo tais análises complementadas pelas gravações em áudio que fizemos durante as entrevistas.

# Capítulo III

## *Análises dos Dados*

Antes de iniciarmos a presente análise, acreditamos ser pertinente revisitar nosso objetivo de pesquisa, para evidenciar o fio condutor que conduzirá nossas reflexões, quer seja: *Quais significados de equação são evidenciados nas imagens de conceito dos professores de Matemática ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação?*

Além disso, apresentaremos um relato sobre o perfil dos professores. Para isso foi solicitado aos professores que respondessem um questionário que buscou levantar subsídios que nos permitisse traçar um perfil profissional de cada um deles (Anexo B).

No intuito de preservar o anonimato dos professores entrevistados, continuaremos utilizando letras de “A” a “C” para identificá-los. A associação de cada um dos professores às letras correspondentes se deu de forma aleatória. Nos protocolos das entrevistas, toda vez que houver relação ao pesquisador, será utilizada a letra “P”.

## 3.1 PERFIL DOS PROFESSORES

### Professor A.

Esse professor é do sexo masculino. Possui 52 anos, leciona a disciplina de Matemática há 20 anos e tem atuado na docência do Ensino Médio no decorrer desse período. Nos últimos quinze anos, ele ministrou aulas também no Ensino Fundamental II.

O professor A atua como professor contratado na rede pública estadual de São Paulo, lecionando em duas escolas com o cargo de PEB II (Professor de Educação Básica II).

Ele possui duas graduações, sendo ambas cursadas em universidades particulares, do Estado de São Paulo. A primeira graduação foi a de Licenciatura Plena em Matemática, concluída em 1981, e com duração de quatro anos. A segunda, concluída em 1991, também com duração de quatro anos, conferiu-lhe o título de Contador.

Esse professor cursou uma especialização *Lato Sensu*, com duração de dois anos, em Ensino de Matemática em uma universidade privada do Estado de São Paulo.

**Professor B**

Esse professor é do sexo feminino. Possui 33 anos e leciona a disciplina de Matemática há 1 ano, tendo atuado na docência do Ensino Fundamental II e também no Ensino Médio durante esse período.

O professor B leciona em quatro escolas públicas na rede estadual de ensino do Estado de São Paulo, na função de PEB II. Embora o entrevistado seja do gênero feminino, optamos em manter o gênero no masculino a fim de uniformizar as análises.

Esse professor cursa o último ano da Licenciatura em Matemática em uma universidade particular do Estado de São Paulo, tendo seu término previsto para o mês de dezembro de 2008.

**Professor C**

Esse professor é do sexo feminino. Possui 41 anos e leciona a disciplina de Matemática há 16 anos, tendo atuado na docência do Ensino Fundamental II no decorrer de todo esse período. Nos últimos sete anos ministrou aulas também no

Ensino Médio. Embora o entrevistado seja do gênero feminino, optamos também em manter o gênero no masculino, a fim de uniformizar as análises.

O professor C é efetivo no cargo de PEB II, na rede pública estadual de São Paulo e leciona em apenas uma escola.

Ele possui duas graduações, sendo a primeira cursada no Estado de São Paulo e a segunda no Estado do Rio de Janeiro. Sua primeira graduação foi de Licenciatura Curta em Matemática, tendo sido concluída em 1990, com duração de 4 anos e a segunda foi a Licenciatura Plena em Matemática, concluída em 2004, com duração de 1 ano na modalidade semi-presencial.

## 3.2 ANÁLISE DAS ENTREVISTAS

As análises que apresentamos a seguir foram realizadas item a item, nas quais iremos discutir os dados produzidos por cada um dos três professores. Optamos por essa dinâmica de análise, tendo em vista o propósito de, num primeiro momento, apresentar um panorama geral de cada professor, levando em conta os posicionamentos específicos de cada um deles. Com isso, acreditamos que, ao final das análises, será possível um cruzamento de dados e um panorama global dos três professores.

Utilizaremos no decorrer de nossas análises as letras PR para representar os protocolos obtidos a partir da entrevista com os professores entrevistados e TE para representar as transcrições das entrevistas, obtidas a partir da gravação do áudio das mesmas.

Passamos agora para as análises:

### 3.2.1 Análises da atividade 1

**Item a**

**a) Determine os valores de y para os quais a expressão $(y-1)^2$ é igual a -4y.**

Considerando o objetivo do item 1, quer seja: investigar de que maneira o professor trata uma situação matemática que remete ao significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA, apresentamos as seguintes análises:

**Professor A**

Esse professor reescreveu a equação em sua base canônica e procedeu a resolução utilizando a fórmula de Báskara, que foi empregada corretamente e o professor mostrou estar bem adaptado a essa ferramenta matemática.

A atitude desse professor confirma nossa hipótese, apontada nas análises preliminares, quanto à utilização da fórmula de Báskara para encontrar as raízes da equação do 2º grau.

Com o intuito de investigar como esse professor reconhece a equação apresentada, o pesquisador perguntou ao professor sobre o procedimento utilizado para justificar o fato de -4y "aparecer" do outro lado do sinal de igual como +4y:

A: Ahã, usando a propriedade da adição, é essa a propriedade da adição? Tá, porque é erroneamente você falar que se passa de um lado para o outro com a troca de sinal, tá? Normalmente isso aqui se usa, usa a ... usando a propriedade da adição, tá? O que é que eu faço, quando eu quero eliminar um lado, tá? Você faz a soma do outro lado, como assim... usando a propriedade da multiplicação que você usa para fazer no primeiro membro, o que você faz, a multiplicação que você usa para fazer no primeiro membro, você faz no segundo membro também.

TE 1

Observando a transcrição acima, percebemos que o professor parece não demonstrar muita segurança em suas afirmações, pois tem dificuldade em expressar seus conhecimentos sobre as propriedades algébricas envolvidas. Podemos observar ainda que esse professor procura falar sobre as propriedades algébricas de oposto aditivo, inverso multiplicativo e princípio de equivalência.

O professor nos revela em seu depoimento e em sua resolução que possui domínio em utilizar a fórmula de Báskara, como uma técnica de resolução de equação do 2º grau. Embora esses elementos encontrem-se “meio desorganizados” em sua imagem de conceito, ele é conhecedor de algumas propriedades algébricas envolvidas no processo.

Concluímos assim que os elementos que emergem da imagem de conceito desse professor parecem nos mostrar que o significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA está presente em sua imagem de conceito. Contudo, vale observar que a parte da relação que implica em reconhecer uma equação por meio de um processo, parece mostrar-se um pouco deficiente. Tal fato se evidencia na transcrição acima, na qual o professor, embora tenha resolvido com bastante desenvoltura a equação, não consegue explicitar com clareza o processo.

**Professor B**

O professor B demonstrou dificuldade em resolver esse item e não obteve sucesso na utilização da fórmula de Báskara. Podemos constatar que esse professor não desenvolve corretamente o quadrado da diferença, ao observarmos o PR 1:

$$(y-1)^2 = -4y$$
$$y^2 - 2y \cdot -1) + 1^2 = -4y$$
$$y^2 + 2y + 1 = -4y$$

PR 1

Devido ao erro cometido no desenvolvimento do quadrado da diferença, esse professor chegou a uma equação na base canônica cujo discriminante não apresenta raiz inteira:

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$
$$\Delta = 36 - 4$$
$$\Delta = 32)$$

PR 2

A análise da argumentação apresentada parece indicar que o professor não está habituado a trabalhar com situações diferentes daquelas trabalhadas na escola:

equações do segundo grau onde o discriminante é um número cuja raiz quadrada é um número não inteiro.

Após encontrar o valor indicado na TE 2, vale observar a seguinte discussão, apresentada pelo professor B.

> B. Então eu cheguei num ponto aqui que ou eu errei o sinal, ou raiz de 32 não vai ter como conseguir, algum passo aqui deve estar... alguma coisa que não está... se for para achar o valor no caso aqui, raiz de 32... aqui alguma coisa...
> P. Não existe raiz de 32?
> B. Não, assim... só nos números complexos, né?

TE 2

Apesar das dificuldades apresentadas anteriormente, o professor B parece nos revelar que possui em sua imagem de conceito a ideia de igualdade relacionada à de equação. Ao ser questionado pelo pesquisador como ele explicaria a "passagem" do -4y como +4y para o outro lado do sinal de igual, ele nos revela ainda, que também possui em sua imagem de conceito ideias relativas ao princípio de equivalência. Vejamos a TE 3:

> B. Por que eu fiz? Porque é pra, é... tem a igualdade. Então quando você vai transferir do outro lado da igualdade aí você tem que estar mudando, mudando alguma coisa.
> B. Por que mudar? Porque... ai e agora, pego essa... por quê? Por quê?... Então... é uma regra que existe que deve ser quando tem igualdade se você vai... tudo que se faz de um lado tem que fazer do outro, aí quando você vai mudar, transferir do outro lado do sinal do igual, existe essa regra que teria que mudar, o porque realmente no momento eu não estou lembrando, eu sei o porque mas agora no momento.

TE 3

Concluímos então que os elementos que emergem da imagem de conceito desse professor nos indicam que o mesmo reconhece uma equação a partir de seu processo de resolução e é capaz de utilizar essa técnica.

Acreditamos que isso se evidência quando o professor reconhece o princípio de equivalência entre os membros de uma equação e é capaz de empregar a técnica de resolução.

**Professor C**

O professor C demonstrou segurança ao resolver esse item. Primeiro trabalhou a situação matemática de forma a escrevê-la na base canônica de uma equação do 2º grau, e posteriormente utilizou a fórmula de Báskara para encontrar as raízes da equação. A fórmula de Báskara foi empregada corretamente e o professor mostrou estar bem adaptado a essa ferramenta matemática.

Quando solicitado pelo pesquisador, que explicasse o que ele havia feito na resolução desse item, o professor justificou dizendo que utilizou "a distributiva" e "Báskara", conforme transcrição a seguir:

| |
|---|
| C. Igualdade, e tive que aplicar a distributiva também, né? Potenciação, com igualdade, eu coloquei produto notável, depois Báskara, equação do segundo grau. |

TE 4

O professor nos revela em seu depoimento e em sua resolução que possui domínio em utilizar a fórmula de Báskara como uma técnica de resolução de equação do 2º grau. Além disso, demonstra que conhece algumas propriedades algébricas envolvidas no processo.

Concluímos assim que os elementos que emergem da imagem de conceito desse professor parecem nos mostrar que o significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA está presente em sua imagem de conceito. Vale observar que o professor demonstrou alguma dificuldade em reconhecer uma equação na perspectiva desse significado, ou seja, reconhecer a equação a partir do reconhecimento de todo o processo. Afirmamos isso a partir das dificuldades apresentadas em seu discurso para explicitar, com clareza, o processo utilizado.

**Item b**

**b) Um boato se espalha da seguinte maneira: no 1º dia duas pessoas ficam sabendo do boato, no 2º dia cada uma dessas duas pessoas conta o boato para outras duas pessoas, no 3º dia cada uma das quatro pessoas conta o boato para outras duas pessoas, e assim por diante.**

- **Quantas pessoas saberão do boato após 5 dias?**
- **Quantos dias deverão se passar para que 1.048.576 pessoas saibam do boato?**

**Independente do número de dias como essa situação pode ser traduzida matematicamente?**

O objetivo desse item foi investigar de que maneira os professores tratam uma situação matemática que remeta ao significado de equação ESTRUTURAL-CONJUNTISTA.

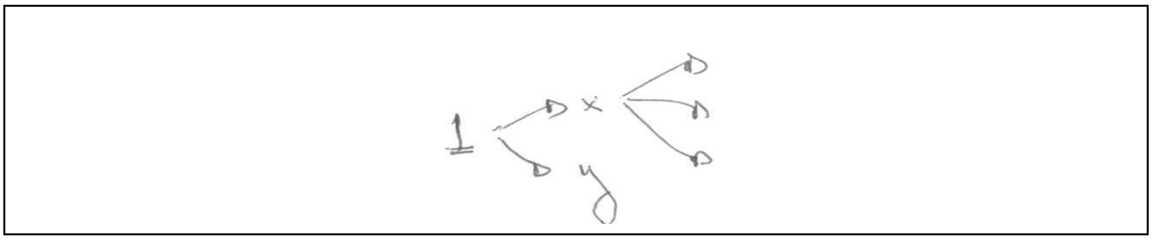
**Professor A**

O professor A mostrou grande dificuldade em trabalhar com esse item e preferiu deixá-lo para o final. Podemos perceber na transcrição da entrevista, que o mesmo não estava certo sobre qual raciocínio empregar.

> A: Aqui está se referindo a progressão? Aritmética, ou... pode ser pela progressão aritmética, ou combinação, né? Você me pega eu no pulo hein, meu? Um boato, se espalha da seguinte maneira, primeiro dia... no segundo dia,,, eu não estou conseguindo raciocinar... deixa essa, passa outra, depois eu dou uma olhada.

TE 5

Esse professor pareceu indeciso quanto à utilização de séries matemáticas ou da utilização de raciocínio combinatório, acabando por desistir do item. A estratégia de resolução utilizada pelo professor está contemplada dentre as estratégias por nós apontada nas análises preliminares: a do diagrama de árvore, conforme podemos averiguar na figura 9. Ainda assim, o mesmo desistiu após alguns momentos de reflexão.




PR 3

Ainda que professor tenha mencionado a possível utilização de uma progressão aritmética, que pode ser vista como uma função linear, ao escolher a progressão aritmética no lugar da progressão geométrica, parece nos indicar que o mesmo não possui clareza quanto à relação existente entre esses conjuntos, em outras palavras, no que se refere ao comportamento da função envolvida na situação.

Analisando a figura 8 e a argumentação apresentada pelo professor na entrevista, não encontramos elementos, em sua imagem de conceito, que caracterizasse a situação apresentada como uma relação entre conjuntos.

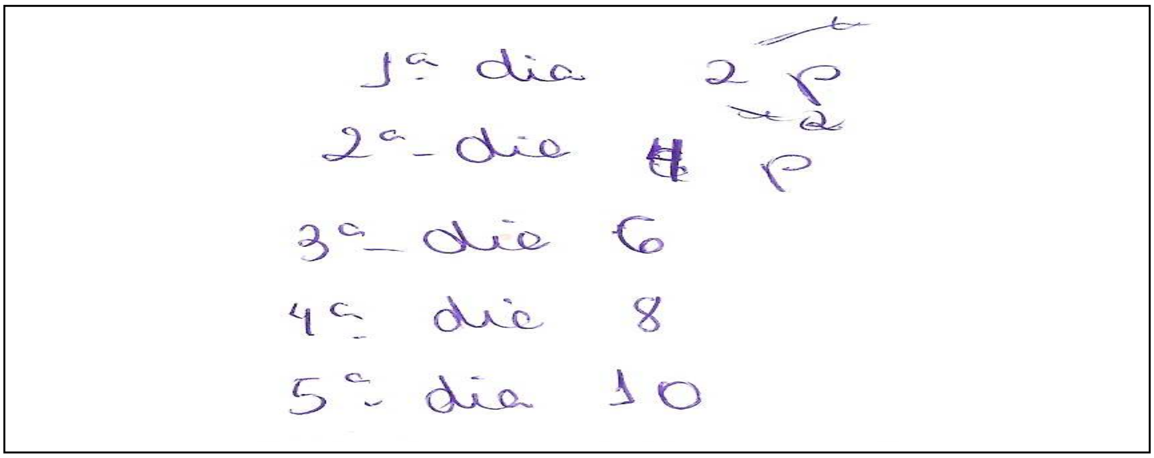
**Professor B**

O professor B, após breve análise da situação concluiu que o problema remetia à uma PA (progressão aritmética), conforme transcrição a seguir:

| |
|---|
| B. Então tem, acho que um método aqui que facilite essa conta, mas eu não to lembrada de fórmulas agora. Acho que PA, PG, uma PA, né? |

TE 4

Por não se recordar da fórmula da PA, e por acreditar que se trata de uma PA o professor trata a situação de forma intuitiva, ou seja, estabelece uma PA de razão de 2, sem se utilizar de uma fórmula. Não obtendo sucesso o professor acaba por desistir do item. Vejamos PR 5:



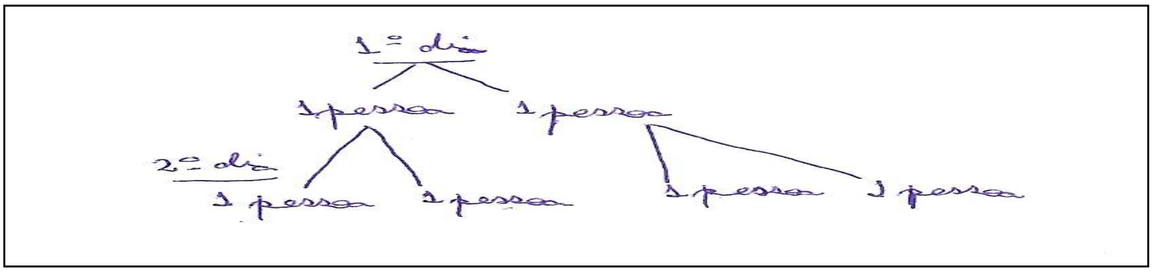

PR 5

Embora o professor B, da mesma forma que o professor A, tenha mencionado a possível utilização de uma progressão aritmética, que pode ser vista como uma função linear, a escolha da progressão aritmética no lugar de uma progressão geométrica, nos traz indícios de que o professor não possui clareza quanto à relação existente entre esses conjuntos, em outras palavras, no comportamento dessa função.

Analisando o desempenho do professor na entrevista, também não conseguimos encontrar elementos, em sua imagem de conceito, que caracterizasse a situação apresentada como uma relação entre conjuntos.

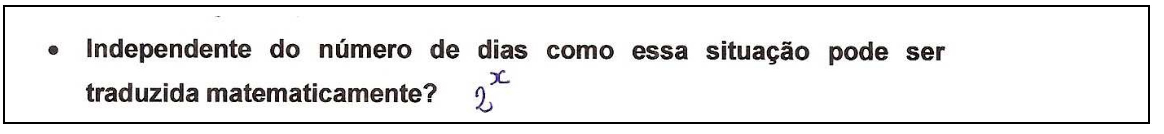
**Professor C**

O professor C optou por uma das estratégias contemplada em nossas análises preliminares e utilizou assim o diagrama de árvores:




PR 6

Esse professor conseguiu esboçar também seu raciocínio através de linguagem matemática simbólica, quando escreve $2^x$,conforme podemos averiguar no protocolo abaixo:



- **Independente do número de dias como essa situação pode ser traduzida matematicamente?** $2^x$

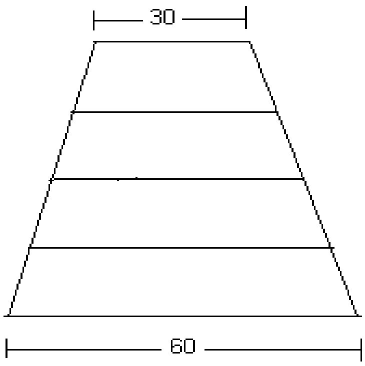
PR 7

Concluímos assim que, analisando as figuras e argumentos dos professores na entrevista, percebemos que esse professor possui em sua imagem de conceito a ideia de que a situação apresentada nesse item pode ser reconhecida como uma relação entre conjuntos e acreditamos que isso se evidencie quando o mesmo escreve $2^x$.

**Item c**

**c) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm conforme a figura. Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça**

**linear de madeira. Qual deve ser o comprimento dessa peça, desconsiderando os lados da escada?** [11]




Este item foi concebido no intuito de averiguar de que forma os professores tratam uma situação matemática que remete à interação entre os significados de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO e DEDUTIVO-GEOMÉTRICO.

**Professor A**

Logo ao iniciar a resolução desse item o professor A buscou de imediato a utilização da fórmula da área do trapézio, conforme aponta a seguinte transcrição:

| |
|---|
| A: Linear? Nossa não lembro da área do trapézio, cara. |

TE 6

Entendendo que tal informação não interferiria nos resultados da pesquisa, o pesquisador confirmou para o professor a fórmula da área do trapézio. Após várias

[11] Essa atividade foi contemplada no ENEM e foi retirada do livro didático Coleção Matemática – 1ª Série, do autor Luiz Roberto Dante, p. 198. A atividade sofreu uma pequena adaptação, uma vez que a atividade original apresenta alternativas para as respostas.

tentativas, percebendo que não era possível resolver a situação utilizando-se do emprego direto da área do trapézio, o professor desistiu da questão.

A tentativa de utilização da fórmula da área do trapézio para a resolução dessa situação matemática nos traz indícios de que o professor possui suas concepções sobre equação fortemente amparadas no emprego de técnicas de resolução e fórmulas de manipulação.

Não conseguimos observar em sua resolução, ou na abordagem utilizada na presente situação, algum indício que nos permita concluir que o professor A reconhece uma equação apresentada em uma situação geométrica e nem a trate de forma dedutiva.

**Professor B**

O professor B relacionou a situação ao emprego da fórmula da área do trapézio, conforme podemos verificar no PR 7:

$$AT = \frac{B+b}{2}$$

$$AT = \frac{60+30}{2}$$

$$AT = \frac{90}{2}$$

$$AT = 45$$

PR 7

A transcrição a seguir reforça essa ideia:

B. É também... vai ter que usar alguma... mas como que se resolve, a única coisa que me veio a cabeça foi a área do trapézio, porque eu vi um trapézio, daí do restante, não tem a ver com geometria, tem a ver com outra coisa aqui, né?

TE 7

Não encontramos elementos na imagem de conceito desse professor, quando da tentativa de resolução desse item que relacionasse a situação a uma equação.

A tentativa de utilização da fórmula da área do trapézio parece nos indicar que as concepções desse professor também estão bastante vinculadas a algoritmos de resolução.

**Professor C**

Ao tentar resolver esse item o professor C levou um certo tempo buscando compreender o que o enunciado do problema estava dizendo. Após alguns minutos de reflexão o entrevistado resolveu desistir do item. O pesquisador perguntou então ao professor qual estratégia de resolução ele acha que poderia ser adotada na resolução desse item. Podem ser observadas suas reflexões na TE 8:

C. Estratégia? Humm... base? Base maior, base menor?
P. Usando a fórmula da área do trapézio? É isso que você está dizendo?
C. É, pra achar a base, não a área.
P. Tá, pra achar a base.
C. Pra achar a base, não a área.

TE 8

**Item d**

**a) Calcule o comprimento de uma circunferência de raio 2 cm.**

Este item teve por objetivo propor ao professor uma situação matemática que não remetia à ideia de equação e sim à utilização de uma fórmula.

Os três professores que participaram da pesquisa tiveram comportamento semelhante no que diz respeito à resolução desse item: todos resolveram o item utilizando-se da fórmula do comprimento da circunferência, conforme estratégia contemplada por nós nas análises preliminares.

**Item e**

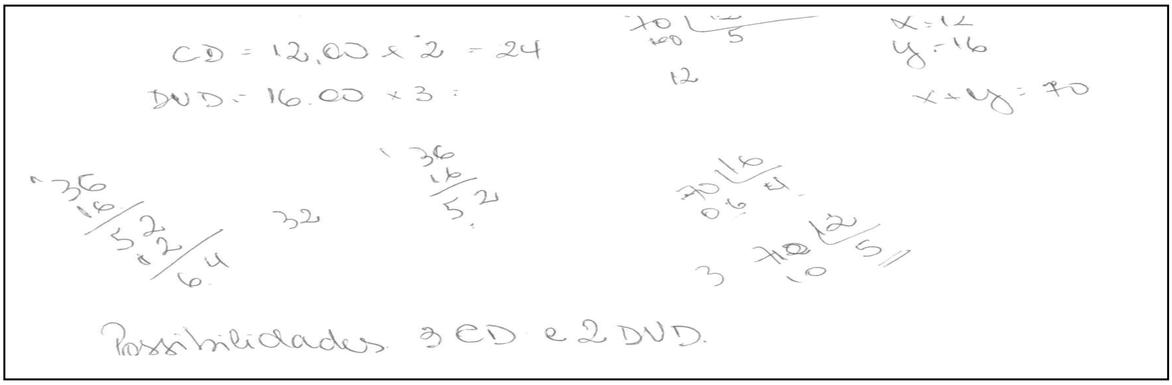
**e) Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD custa R$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R$ 70,00?**

Esse item buscou investigar de que maneira os professores tratam uma situação matemática que remete ao significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO.

**Professor A**

Ao tentar resolver esse item o professor A utilizou como estratégia de resolução uma das estratégias por nós contempladas nas análises preliminares. Ele procurou em várias tentativas, utilizando a calculadora, encontrar valores que satisfizessem a situação matemática apresentada. Por não encontrar um valor possível, o professor anota duas quantidades, mas não consegue sistematizar matematicamente suas ideias.

Percebemos ao analisar a figura abaixo que o professor A, em um determinado momento, tentou modelar uma equação para retratar a situação, chegando a x+y=70. Contudo não conseguiu conceber a equação 12x+16y=70 e acabou desistindo da tarefa, preferindo dar continuidade ao método das tentativas:




PR 8

Ao analisar o protocolo acima notamos que o professor A faz uso do método das tentativas para resolver o problema. Ele trata a situação de forma coerente com o significado de equação que ela representa, quer seja, o significado INTUITIVO-PRAGMÁTICO, ainda que não apresente uma solução correta para a situação.

**Professor B**

Ao tentar resolver esse item o professor B procurou por meio de diversas tentativas, chegar ao resultado de setenta reais. Ao não conseguir um resultado que o satisfizesse acabou por se ressentir, do esquecimento de uma fórmula que resolvesse a situação.

> B. Por tentativa assim eu não consegui achar qual seria as possibilidades, sem usar fórmula nenhuma, tentando assim, por tentativa, colocando, comprando dois DVDs, um CD, não sei o quê... ou então usando...

TE 9

Buscando levantar indícios que nos permitisse reconhecer algumas das concepções de equação desse professor, no que se refere a presente situação-problema, o pesquisador pergunta ao professor se ele não conseguiria imaginar uma outra estratégia para resolver o item além da que estava utilizando. O mesmo respondeu:

> B. Existe eu acho que as fórmulas, mas no momento também, não estou assim, me lembrando das fórmulas, eu estou tentando por tentativas só, e por tentativa eu não cheguei a nenhuma possibilidade que desse para gastar exatamente setenta reais, pode ser que tenha, mas assim por tentativas tá meio complicado para estar encontrando qual seria a resposta certa, se utilizasse uma fórmula chegaria, aí daria para resolver.

TE 10

A transcrição acima parece nos revelar que esse professor possui em sua imagem de conceito uma grande segurança na utilização de fórmulas. Em nenhum momento esse professor mencionou a possibilidade de encontrar uma equação que traduzisse a situação-problema apresentada. Ele buscou uma resolução intuitiva, através de tentativas, mas não obtendo êxito, continuou na busca de uma fórmula que solucionasse o problema.

**Professor C**

Ao tentar resolver esse item o professor C buscou escrever uma equação que representasse a situação matemática apresentada nesse item:

$$12x + 16y = 70$$

PR 9

Embora o professor tenha escrito corretamente a equação, não conseguiu chegar a uma resposta por meio dessa equação. Nesses momentos se ressentiu da existência de outra equação para formar um sistema de equações.

> C. Se eu atribuir valores para x e para y, se não, não dá, ou se eu tivesse outra equação montar um sistema.

TE 11

A hipótese levantada pelo professor em “testar” valores para x e y na equação modelada, se mostra de acordo com o significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO, uma vez que ele reconheceu uma equação a partir de uma situação prática (“ver”) e ainda conseguiu explicitá-la. Além disso, ele também trata essa equação de forma intuitiva (“fazer”).

**Item f**

**f) Um mergulhador percorreu uma distância de 40m entre a superfície e o fundo do mar, segundo uma trajetória retilínea que forma um ângulo de 60º com a superfície.**

**b) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?**

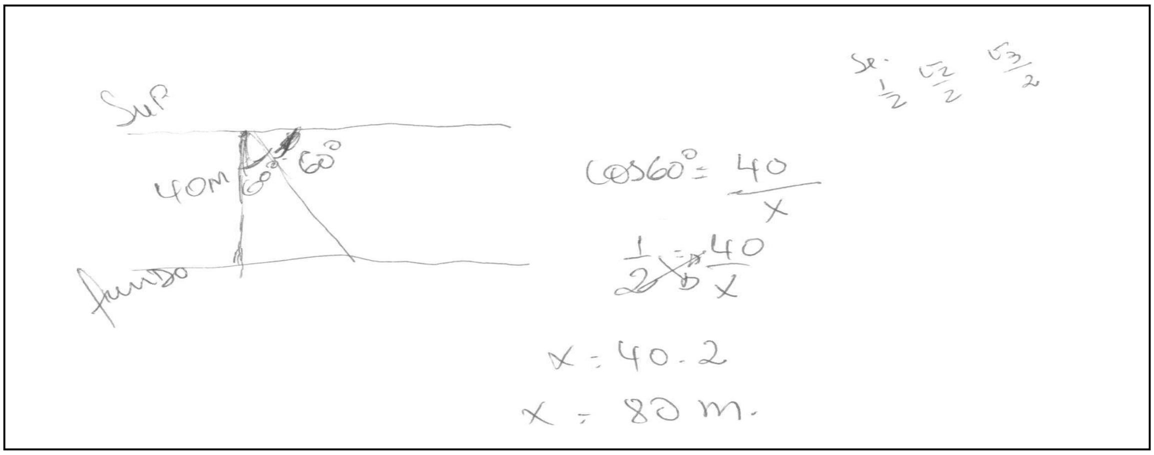
**c) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?**

Buscamos com esse item investigar como os professores tratam uma situação matemática que remete à interação dos significados de equação PROCESSUAL-TECNICISTA e INTUITIVO-PRAGMÁTICO.

**Professor A**

O professor A não consegue encontrar um desenho que traduza, de forma adequada, a situação-problema apresentada em linguagem natural. Acreditamos que esse fato pode ter contribuído para que ele não chegasse a um resultado correto.

Podemos perceber no protocolo abaixo, que o professor faz um desenho para melhor visualizar a situação, porém ele inverte o desenho e faz os cálculos sobre o seu desenho invertido.




PR 10

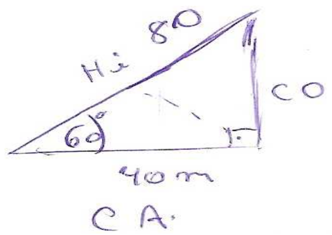
A resolução do presente item se mostra incorreta, porém podemos perceber que o professor buscou resolver o problema de forma coerente com uma das estratégias previstas por nós. Embora o protocolo nos mostre que o professor utiliza corretamente os procedimentos envolvendo a trigonometria no triângulo retângulo, o mesmo confunde-se ao traduzir a situação-problema.

Ainda, com base no protocolo acima, podemos afirmar que o professor faz uso correto das técnicas relacionadas à trigonometria no triângulo retângulo, reconhece uma equação a partir de uma situação prática, mas não é capaz de encontrar uma solução correta por ter utilizado um desenho que não representa a situação proposta.

**Professor B**

O professor B não consegue encontrar um desenho que traduza, de forma adequada, a situação-problema apresentada em linguagem natural. Acreditamos que esse fato tenha contribuído para os erros que ocorreram na resolução desse item.

Podemos perceber no protocolo abaixo, que o desenho feito pelo professor para visualizar a situação mostra-se incorreto. Tal desenho nos sugere que esse professor tenha interpretado incorretamente o enunciado da situação-problema.




PR 11

Podemos perceber no protocolo abaixo que esse professor não possui claramente as técnicas utilizadas na resolução das equações que envolvem situações trigonométricas em sua imagem de conceito.

$$\cos = \frac{CA}{Hi} = \frac{40}{x}$$
$$\cos 60^\circ = \frac{40}{x}$$
$$\frac{0,5}{1} = \frac{40}{x}$$
$$0,5x = 40$$
$$x = \frac{40}{\frac{1}{2}}$$
$$x = 40 \times 2$$
$$x = 80\ m$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{80}$$
$$2x = \sqrt{3} \cdot 80$$
$$x = 240$$
$$x = \frac{240}{2}$$
$$x = 120\ m$$

PR 12

Observando as figuras retiradas da entrevista e os diálogos que se seguiram, acreditamos que esse professor reconheça uma equação na presente situação e que utiliza corretamente as técnicas de resolução envolvidas, errando apenas no desenho que retrata a situação matemática apresentada.

**Professor C**

O professor C não encontra problemas em resolver esse item e utilizou corretamente as relações trigonométricas, precisando do auxílio do pesquisador apenas para lembrar o valor do seno de 30°. Observe o prot ocolo abaixo:

$$\text{sen}\,30^\circ = \frac{y}{40}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{y}{40}$$
$$2y = 40$$
$$y = 20$$

$$40^2 = x^2 + 20^2$$
$$1600 = x^2 + 400$$
$$1600 - 400 = x^2$$
$$1200 = x^2$$
$$x = 20\sqrt{3}\ m$$

PR 13

A resolução do presente item está correta e corresponde a uma das estratégias previstas por nós nas análises preliminares. Esse professor demonstrou segurança ao utilizar a trigonometria no triângulo retângulo e também o teorema de Pitágoras na resolução do presente item.

**Item g**

**g) Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.**

- **O plano A cobra R$ 100,00 de inscrição e R$ 50,00 por consulta num certo período;**

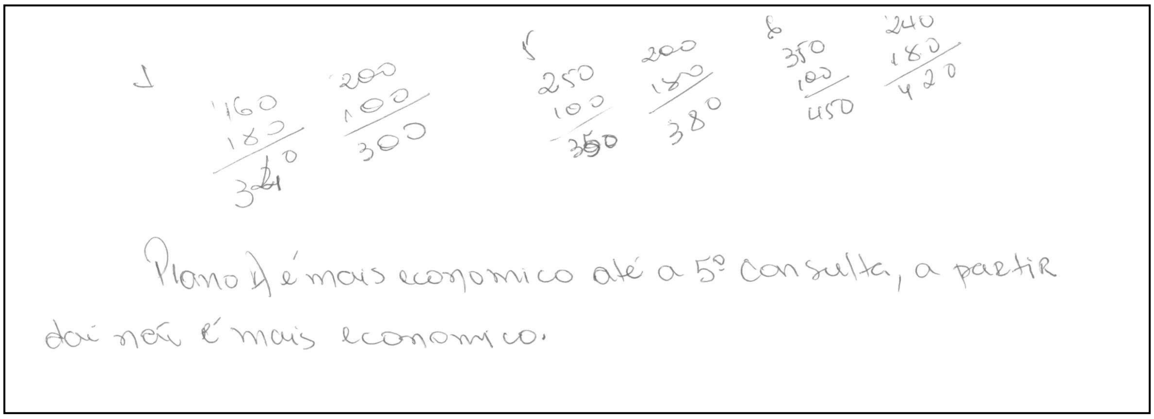
- **O plano B cobra R$ 180,00 de inscrição e R$ 40,00 por consulta no mesmo período.**

**Em que condições podemos afirmar que o Plano A é mais econômico que o Plano B?**

Discutimos em nossas análises preliminares que esse item apresenta uma situação matemática que remete à ideia de inequação. Vejamos as estratégias e discussões apresentadas pelos professores:

**Professor A**

O professor não conseguiu encontrar um modelo matemático que expressasse a situação e, utilizando-se da calculadora, fez alguns cálculos, chegando à conclusão de que o Plano A é mais econômico até a 5° consulta.


Plano A é mais economico até a 5º consulta, a partir daí não é mais economico.

PR 14

Tal estratégia de resolução relaciona-se com a primeira estratégia apresentada por nós nas análises preliminares. Ele busca conhecer qual é o Plano mais econômico, fazendo o teste, mês a mês, para ambos os planos. Pudemos observar que mais uma vez o professor A utilizou-se de métodos aritméticos na resolução de problemas.

**Professor B**

O professor não conseguiu encontrar um modelo matemático que expressasse a situação e utilizou-se de métodos aritméticos na resolução do presente item. Tal estratégia de resolução relaciona-se com a primeira estratégia apresentada por nós nas análises preliminares. A transcrição abaixo aponta para o fato de que esse professor busca uma resolução através de tentativas, devido ao fato de não se recordar de uma fórmula que pudesse ser utilizada na presente situação.

> B. Então essa eu respondi também por tentativa, porque eu não lembrava nenhuma fórmula que eu pudesse estar utilizando para fazer, então por tentativa, quando, é, se... a inscrição cem reais e cada consulta cinquenta, então com cinco consultas, no plano A, cinco consultas duzentos e cinquenta, mais cem da inscrição trezentos e cinquenta, no B, cento e oitenta de inscrição e cinco consultas duzentos, aí somando os dois trezentos e oitenta, ficaria... o A ainda é mais vantajoso, aí a partir do momento que seriam dez consultas no mês, aí ficaria cem da inscrição mais quinhentos da consulta, o plano A daria seiscentos e o B seria mais vantajoso porque é dez consultas quatrocentos mais cento e oitenta, quinhentos e oitenta, a partir da, do, conforme vai aumentando o número de consultas aí vai sendo mais vantajoso o B.

TE 12

Podemos concluir que assim como o professor A, o professor B também se utiliza por diversas vezes de métodos aritméticos, na resolução de problemas.

**Professor C**

O professor atribui valores em ambos os planos e conclui que o plano A é mais vantajoso até a terceira consulta. Embora o professor tenha encontrado uma inequação para representar o problema, ele não a utilizou para chegar a uma conclusão sobre esse item.

$$100 + 50.x < 180 + 40.x$$

PR 15

**Item h**

**h) Um mutuário comprou um apartamento por R$100.000,00 financiado por um banco com taxa de juros compostos de 15% ao ano. Logo no primeiro mês ele perdeu o emprego e não pagou nenhuma parcela. O mutuário demorou algum tempo para conseguir uma recolocação no mercado de trabalho e durante esse período não pagou as prestações do apartamento. Quando foi verificar sua dívida junto ao banco, descobriu que agora devia um total de R$152.087,50. Quantas prestações ele deixou de pagar?**

Esse item teve por objetivo investigar de que forma os professores tratavam uma situação problema que remetia à interação entre os significados de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO e PROCESSUAL-TECNICISTA.

**Professor A**

O professor mostrou-se com muitas dúvidas quanto ao método que deveria ser empregado na resolução da situação-problema. Podemos observar isso na transcrição 13:

| |
|---|
| A: A conta? O meu vai ser assim, é... vou fazer essa conta aqui oh, raiz décima segunda, tá? Aqui eu transformo em números decimais, aí eu vou chegar aos juros compostos, porque os juros compostos ele seria assim, né? Seria não, é né? A taxa, né? Seria a taxa,,, 0,15,,, é elevada a um expoente aqui, seria doze ao ano, para saber ao mês... da potenciação eu tiro a raiz, tá? Então tiro a raiz, raiz quadrada, raiz a décima segunda de quinze. |

TE 13

Após algumas tentativas por parte do professor em recordar a fórmula de juros compostos, o pesquisador informou-lhe a fórmula e então o professor prosseguiu com a resolução.

Embora a utilização de juros simples fosse suficiente para resolver a situação o professor se mostrou extremamente dependente da utilização da fórmula de juros compostos.

Quando perguntado sobre as técnicas utilizadas para encontrar o resultado da equação obtida a partir da fórmula de juros compostos, o professor não conseguiu explicar as propriedades algébricas envolvidas e acabou no “passa pra cá”, “passa pra lá”, conforme podemos constatar na transcrição 14:

| |
|---|
| A: Tá, eu fiz assim, log... fiz por aproximação tá bom? Log, elevado a n, achei os dois... tudo bem? Então foi isso que eu fiz aqui, tá? n eu passei para cá... tudo bem? |

TE 14

Analisando o desempenho desse professor podemos perceber que ele precisa da fórmula de juros compostos para resolver o problema. Embora ele demonstre estar bastante atrelado aos procedimentos, ele não consegue explicitar coerentemente as técnicas utilizadas.

**Professor B**

O professor alegou não ter tido muito "contato" com esse tipo de situação matemática que não se recordava da fórmula dos juros compostos. Quando o professor ia desistir do item, o pesquisador forneceu-lhe a fórmula, para estimulá-lo a continuar trabalhando com a situação.

O professor de posse da fórmula, procedeu à resolução, desistindo do item no momento em que não conseguia determinar o valor de *n* na equação. Podemos verificar a resolução deste professor no protocolo 16:

$$152.087{,}50 = 100000{,}00(1+0{,}15)^n$$
$$152.087{,}50 = 100.000{,}00(1+15)^n$$
$$152.087{,}50 - 100.000{,}00 = 1{,}15^n$$
$$52087{,}5 = 1{,}15^n$$

PR 16

Analisando o desempenho desse professor podemos perceber que ele não possui claro em sua imagem de conceito as técnicas utilizadas na resolução de equações exponenciais.

**Professor C**

O professor demonstrou relacionar a ideia dos juros compostos com a de acumular juros simples, mês a mês. Conforme transcrição abaixo:

| |
|---|
| C. Cem mil que é o valor do apartamento mais os juros do primeiro mês, eu tenho que somar depois calcular o juros sobre esse valor, novamente, aí soma o juros ao capital inicial de cem mil, tem que calcular juros sobre juros. |

TE 15

Após algumas tentativas por parte do professor em recordar a fórmula de juros compostos, o pesquisador lembrou-lhe a fórmula, porém, após alguns instantes de reflexão o professor optou por desistir do item.

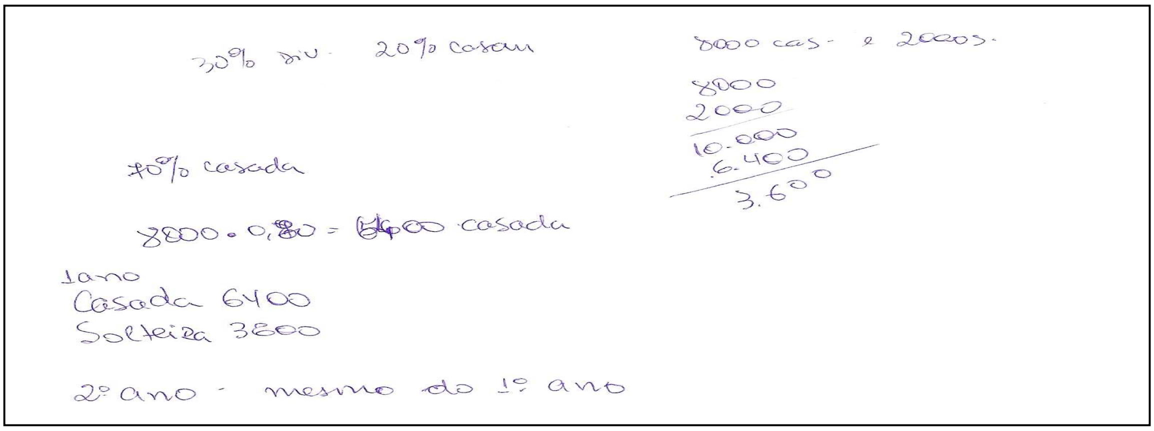
**Item i.**

**i) Em uma determinada cidade, 30% das mulheres casadas se divorciam e 20% das mulheres solteiras se casam por ano. Existem 8000 mulheres casadas e 2000 mulheres solteiras. Supondo que a população total de mulheres permanece constante, quantas mulheres estarão casadas e quantas estarão solteiras depois de 1 ano? E depois de 2 anos?**

O presente item remetia à ideia de igualdade entre matrizes e teve por objetivo investigar como os professores tratavam tal situação matemática.

**Professor A**

O professor busca resolver a situação utilizando-se de uma das estratégias previstas nas análises preliminares desse item: utilizar sucessivas porcentagens. Contudo ele erra na resolução, conforme podemos averiguar no protocolo 17:


30% div. 20% casam
8000 cas. e 2000s.
8000
2000
10.000
6.400
3.600
70% casada
8000 · 0,80 = 6400 casada
1 ano
Casada 6400
Solteira 3800
2º ano - mesmo do 1º ano

PR 17

**Professor B**

O professor busca resolver a situação utilizando-se de uma das estratégias previstas nas análises preliminares para esse item: o uso de sucessivas porcentagens, porém erra na resolução.

Um fato que nos chamou a atenção foi que esse professor procura modelar uma equação, utilizando-se da regra de três, para resolver o problema.

$$8.000 \text{ — } 100\%$$
$$x \text{ — } 30\%$$
$$x\,100 = 8000 \cdot 30$$
$$x\,100 = 240.000$$
$$x = \frac{240.000}{100}$$
$$\boxed{x = 2.400}$$

PR 18

Tal fato parece nos indicar que na imagem de conceito desse professor a ideia de equação também está ligada à de resolução de problemas e porcentagens, através da regra de três.

**Professor C**

O professor C busca resolver a situação da mesma forma que os professores A e B, ou seja, através de porcentagens:

depois de 1 ano → casados = 5600
→ solteiros = 1600
depois de 2 anos → casados = 3920
→ solteiros = 1280

PR 19

**Item j**

**j) O que é possível fazer diante da situação abaixo?**

$$\frac{4z\sqrt{4x^2+12xy+9y^2}}{4zx+6yz}$$

O presente item buscou investigar de que maneira os professores tratam uma fração algébrica.

**Professor A**

Nessa situação o professor procede à simplificação da fração algébrica, conforme uma das estratégias de resolução apontada em nossas análises preliminares. Não encontra dificuldades para encontrar a fração equivalente, cometendo um erro apenas na simplificação final.

**Professor B**

Nessa situação o professor se mostra bastante indeciso quanto ao procedimento a ser adotado. Pode-se observar na transcrição a seguir que ele acredita tratar-se de uma divisão de polinômios.

| |
|---|
| B. Isso aí é, é divisão de polinômios?<br>B. É, eu sei que aparenta isso, mas eu não sei como é que faz a divisão. Já vi em livros, não peguei para mim fazer, não sei como é que... tenho várias letras juntas aqui, o que que... |

TE 16

Embora esse professor pudesse realmente ter executado a divisão de polinômios, ele acabou por desistir do item por admitir não estar familiarizado com o algoritmo de resolução.

**Professor C**

Nessa situação o professor procede à simplificação da fração algébrica e não encontra dificuldades para encontrar a fração equivalente.

**Item k**

**k) Resolva a sentença matemática abaixo, encontrando o(s) valore(s) de x.**

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}=1$$

Nesse item buscamos investigar como os professores tratam uma situação matemática que remete ao significado de equação ESTRUTURAL-GENERALISTA.

**Professor A**

O professor A se mostrou bastante confuso e após breve análise alegou que o item ficaria muito longo, conforme transcrição a seguir:

A: Esse vai ser longo para...
P: O que você faria que ficaria tão longo?
A: Resolver o produto? Depois, aí... a simplificação, peguei, olhando o numerador com denominador eu não consigo fazer a simplificação, tá, oh, direto eu não consigo fazer, a simplificação. Aqui teria que resolver para fazer a simplificação, para achar o valor de x, tá? Porque se eu tenho condições de ter a igualdade para fazer a simplificação, aí é simplificar depois você faz o produto, sabe? Que aqui é um produto. Então aí eu não... condições de fazer nem nada de simplificação, tenho de resolver esse produto, tá? Resolver esse e resolver esse, aí resolvendo esse eu vou achar os termos semelhantes para poder simplificar, ou não?

TE 17

O professor então demonstrou que iria desistir do item. Nesse momento, o pesquisador, com o intuito de aprofundar as discussões para o presente item, diz ao professor que aquela poderia não ser a melhor estratégia. Contudo ele responde:

A: Por que não? Olha aqui, oh! Menos com menos vai dar mais, quer ver? Eu vou só resolver o debaixo aqui oh! Eu vou ter $c^2$ – cb –ac + ac + ab, tá? Fazendo a multiplicação... menos com menos vai dar mais, esse eu já conseguiria.

TE 18

O protocolo 20 revela o que o professor estava escrevendo enquanto travava este diálogo com o pesquisador:

$$\frac{x^2 - xb - ax + \cancel{ab}}{c^2 - cb - ac + \cancel{ab}}$$

PR 20

Ao analisar as respostas do professor podemos perceber que ele tentou observar as estruturas da equação e evitou partir para uma resolução muito longa. Os conhecimentos algébricos do mesmo, mostraram-se insuficientes para resolver a questão e então o professor passou a incorrer em erros de simplificação.

O professor A, em sua estratégia de resolução para esse item, parece fazer uso das estratégias de resolução I e II constantes em nossas análises preliminares: ele procura fazer uso das técnicas de manipulações algébricas que ele conhece (estratégia I) e logo após procedendo às simplificações.

Apesar de possuir um “olhar” para as estruturas da equação, acreditamos que os conhecimentos que o professor possuía naquele momento não permitiram que ele resolvesse tal atividade.

**Professor B**

O professor B iniciou seu trabalho aplicando as técnicas de resolução de equações que normalmente são utilizadas: ele tentou primeiramente reescrever essa equação na forma canônica.

Tal procedimento mostrou-se inadequado por tornar a resolução extremamente longa, como podemos observar no protocolo abaixo:

$$\frac{(x^2 - xb - ax + ab) + (x^2 - xc - bx + bc) + (x^2 - xc - ax + ac)}{(c^2 - cb - ac + ab) \cdot (a^2 - ac - ba + bc)(b^2 - bc - ab + a}$$

$$\frac{3x^2 - 2xb - 2ax - 2xc + ab + bc + ac}{(c^2 - cb - ac + ab)}$$

PR 21

Esse professor manifestou a vontade de desistir da resolução do exercício, gerando o seguinte diálogo:

> P. Desistiu?
> B. Desisti, eu não cheguei a conclusão nenhuma, eu abri os quadrados aqui e não...
> P. E o que você faria depois?
> B. Então, aqui embaixo quando tem a multiplicação eu não sei como funciona, e aí, em cima, oh, ficou uma coisa enorme e eu não consegui eliminar muita coisa e, a forma não seria essa, eu comecei a abrir os quadrados, multiplicar um pelo outro aqui prá... aí eu não sei, ou, ou poderia chamar... não. Não sei fazer.

TE 19

Podemos observar que esse professor não encontra em sua imagem de conceito ferramentas que possibilitem a resolução dessa equação por meios diferentes da aplicação de técnicas.

Ao analisar as respostas do professor podemos perceber que ele buscou uma resolução através das técnicas geralmente empregadas, não atentando para as estruturas da equação, corroborando assim com Dreyfus & Hoch (2004).

**Professor C**

O professor C se mostrou bastante confuso quanto a esse item. Após uma breve análise, ele alegou que faria o M.M.C. (Menor Múltiplo Comum), o que tornaria o desenvolvimento do item muito longo. Observemos o diálogo que ocorreu durante a realização desse item:

| |
|---|
| C. MMC, aí corta os denominadores.<br>C. Não pode ser assim, se não fica muito longo, na verdade não é por aqui, não é por aqui, não é por aqui porque fica muito longo, o que eu posso... já vi um exercício parecido com esse, mas... igualado a um. |

TE 20

Ao analisar as respostas do professor podemos perceber que ele reconheceu que a “tradicional” abordagem tecnicista não seria a mais adequada para resolver esse item, porém ele não foi capaz de explicitar uma estratégia que contemplasse um “olhar” para as estruturas dessa equação.

A estratégia adotada por esse professor parece convergir com uma das estratégias das análises preliminares, porém esse professor não obteve sucesso desistindo do item.

Uma vez que o item l da atividade 1 buscou investigar se os professores entrevistados reconheciam uma equação por meio da intersecção de curvas, deixamos as análises referentes a este item para que sejam desenvolvidas juntamente com a atividade 2b. Tal fato justifica-se, uma vez que, quando da elaboração do instrumento, os itens da atividade 1 foram concebidos de forma a investigar, principalmente, a maneira como esses professores tratavam uma situação matemática que remetia à ideia de equação, enquanto que a atividade 2b buscou investigar se esses professores reconheciam uma equação por meio das situações apresentadas.

### 3.2.2 Análises da atividade 2a

O objetivo dessa atividade foi investigar se a ideia de equação emergia “naturalmente” da imagem de conceito dos professores entrevistados e se os mesmos utilizariam tal ideia na classificação dos itens apresentados na atividade 1. Nossas análises foram desenvolvidas utilizando-se dos protocolos produzidos pelos professores e da transcrição das gravações em áudio.

**Professor A**

O professor A destacou como objetos matemáticos fórmulas, conceitos e propriedades. Tal fato nos revela um importante elemento, presente em sua imagem de conceito, que associa objetos matemáticos (ou “coisas” da matemática em última instância) ao processo de resolução das situações matemáticas, evidenciando a tendência de associar objeto matemático com o processo de resolução.

Tal fato é corroborado pela pesquisa de Attorps (2006) já discutida em nosso trabalho, pois tal pesquisadora também concluiu que os professores de Matemática por ela investigados relacionam uma equação a seu procedimento de resolução.

O professor A declara ainda que deixou de resolver alguns itens da atividade 1 por ter esquecido esses conhecimentos (fórmulas, conceitos e propriedades). Isto parece ser revelado a seguir:

> O conhecimentos de fórmulas, conceitos e propriedades. No desenvolvimento da atividade 1 foram colocados os conhecimentos e conceitos; assim que esqueci deste conhecimento deixei de resolver a atividade.

PR 22

Complementando nossas análises, a observação da transcrição a seguir parece apontar para o fato de que o professor não costuma buscar resoluções “alternativas” para situações matemáticas. Ele sente a necessidade de utilizar uma fórmula “convencional” para resolver as situações e quando não se recorda de uma fórmula, desisti do problema:

> A: Eu acho que... quer ver? No que eu, é lógico que eu não ia lembrar, tá? Se vê, eu esqueci fórmulas, tá? Por isso que tem coisas que eu não consegui resolver, eu... não consegui assimilar, o que realmente, eu estava precisando para desenvolver o exercício, qual foi a dificuldade, se vê, quando envolveu as fórmulas que eu tinha conhecimento foi rápido o exercício, tá? Então aí é que é, hoje é o processo que a gente trabalha, tudo é um mecanismo que você tem que conhecer, ter conhecimento da Matemática, dos o quê? Das regras, das regras, das propriedades, tá? Aí você fala... eu comecei desenvolver, quando você falou uma coisa no exercício que eu estava fazendo da porcentagem, tá? Na hora que cheguei na coisa, eu lembrei do logaritmo, tá? Se você não conhece a propriedade do logaritmo você também não desenvolve o exercício, por que qual foi o conhecimento que eu usei, usando a propriedade, de que? Da potenciação de logaritmo.

TE 21

Durante a realização da atividade 2a, o objeto matemático equação não foi em momento algum mencionado por este professor. Com isso, foi reforçada nossa hipótese assumida quando da elaboração do instrumento de que seria necessário uma atividade 2b, caso o professor não reconhecesse “espontaneamente” equação como um objeto matemático, na atividade 2a.

**Professor B**

O professor B destacou como objetos matemáticos álgebra, geometria, trigonometria, juros compostos, porcentagem e função, conforme podemos observar no protocolo abaixo.

algebra pelo formado da expressão
geometria (c) e (d) pelo desenho e expressão
circunferência
trigonometria (f) pelo ângulo e associação de distância
juros composto (h) pelo problema
porcentagem (i) pelo enunciados do problema
função (L) pelo gráfico

PR 23

Durante a realização da atividade 2a, o objeto matemático equação não foi em momento algum mencionado por esse professor. Com isso, foi reforçada nossa hipótese assumida quando da elaboração do instrumento sobre a necessidade de uma atividade 2b.

**Professor C**

O professor C destacou como objetos matemáticos álgebra, aritmética e geometria. Da mesma forma como o professor A, o professor C não mencionou o objeto matemático equação em nenhum momento.

Todos os professores entrevistados se mostraram confusos quanto ao termo “objeto matemático” o que ratifica a necessidade da atividade 2b.

### 3.2.3 Análises do desempenho dos professores entrevistados quanto à atividade 2b

O objetivo de tal atividade foi investigar se os professores reconhecem uma equação apresentada em uma situação-problema.

Como nenhum dos professores participantes da pesquisa reconheceram equação como um objeto matemático na atividade 2a, na presente atividade eles retomaram os itens da atividade 1, agora tendo sido declarado para eles que o objeto matemático que eles deveriam atentar era equação.

Esclarecemos que por motivo de fluência e clareza das análises apresentadas a seguir, optamos por omitir o enunciado de cada situação matemática, uma vez que os mesmos já foram enunciados anteriormente.

**Item a**

**a) Determine os valores de y para os quais a expressão $(y-1)^2$ é igual a -4y.**

**Professor A**

O professor reconhece uma equação permeando este item e para justificar sua posição associa equação às técnicas e algoritmos de resolução, como podemos perceber na transcrição abaixo:

> A: Certo? Que foi resolvido aqui uma equação, tá? Então foi... enxergada como uma equação, tá? Então aí é que ta, oh, usei a equação, o conhecimento da equação e o conhecimento da propriedade, eu não fiquei colocando... resolvendo a potenciação, eu já fui direto naquela fórmula: quadrado do primeiro, duas vezes o primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo, tá? Então aqui eu ponho o quê? É... foi visto como uma equação e resolvido.

TE 22

**Professor B**

O professor reconhece uma equação permeando o item. Tal justificativa baseia-se na resolução, no procedimento, conforme podemos observar no protocolo abaixo.

> a) é uma equação porque $(y-1)^2 = -4y$ é preciso encontrar o valor de y.

PR 24

A justificativa dada por esse professor parece corroborar com a pesquisa de Attorps (2001) que relata que os professores de sua pesquisa relacionam equação com o seu procedimento de resolução.

**Professor C**

O professor reconhece uma equação permeando o item e para justificar sua posição associa equação às técnicas e algoritmos de resolução, como podemos perceber na transcrição abaixo:

| |
|---|
| É, então a letra *a* é uma equação do segundo grau com uma incógnita, o y onde eu desenvolvi e achar o valor de y, os valores. |

TE 23

**Item b**

**b) Um boato se espalha da seguinte maneira: no 1º dia duas pessoas ficam sabendo do boato, no 2º dia cada uma dessas duas pessoas conta o boato para outras duas pessoas, no 3º dia cada uma das quatro pessoas conta o boato para outras duas pessoas, e assim por diante.**

- **Quantas pessoas saberão do boato após 5 dias?**
- **Quantos dias deverão se passar para que 1.048.576 pessoas saibam do boato?**

**Independente do número de dias como essa situação pode ser traduzida matematicamente?**

**Professor A**

Nesse item o professor reconhece que existe uma equação permeando a situação, porém não é capaz de explicitá-la. Ele se mostrou muito dependente das fórmulas e quando o pesquisador lembrou que ao responder a atividade 1 ele mencionou que poderia ser uma progressão aritmética, novamente ele se ressentiu por não se recordar da fórmula usada para trabalhar com progressões aritméticas, conforme podemos observar na seguinte transcrição:

P: O senhor indicou que poderia ser uma PA por exemplo.
A: Também, né? Na dúvida... esqueci a fórmula...

TE 24

**Professor B**

Nesse item o professor reconhece que existe uma equação permeando a situação e tal fato novamente está associado à resolução, ao fato de precisar se encontrar “algo desconhecido”.

b) É uma equação porque precisamos encontrar o número de dias e pessoas.

PR 25

Tal justificativa parece ratificar novamente a pesquisa de Attorps (2001). Fato que nos chama atenção é que parece evidente na imagem de conceito desse professor à presença de um valor desconhecido, relacionado à ideia de equação.

**Professor C**

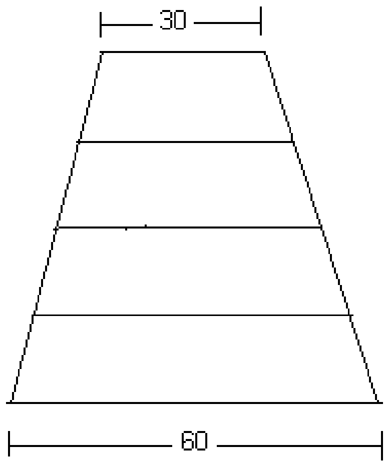
Nesse item o professor não reconhece uma equação permeando o item e diz tratar-se de uma potenciação. Com o intuito de elucidar quais as concepções desse professor sobre equação, o pesquisador lhe pergunta por que não é uma equação:

P. Não, por quê? O que falta para você associar com uma equação?
C. Eu tenho uma incógnita
C. Não, não falta nada... falta uma igualdade.
P. Uma igualdade.
C. É uma igualdade, igual a quê?... a base elevado a um expoente, a uma incógnita, eu não sei não tenho igualdade, é, é verdade não é?

TE 25

**Item c**

**c) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm conforme a figura. Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira. Qual deve ser o comprimento dessa peça, desconsiderando os lados da escada?** [12]




[12] Essa atividade foi contemplada no ENEM e foi retirada do livro didático Coleção Matemática – 1ª Série, do autor Luiz Roberto Dante, p. 198. A atividade sofreu uma pequena adaptação, uma vez que a atividade original apresenta alternativas para as respostas.

**Professor A**

Nesse item o professor reconhece que existe uma equação permeando a situação, porém não associa essa equação com relações de proporções entre segmentos e sim à fórmula da área do trapézio. O seguinte protocolo nos mostra que o professor A associa a equação ao procedimento de resolução através da fórmula.

c) sim. esqueci a fórmula da h.

PR 26

No intuito de ratificar a posição do professor A em relação à existência de uma equação nesse item, acreditamos que a seguinte transcrição possa elucidar a situação:

P: OK. Então essa equação que o senhor me disse que estaria neste item, item c, seria através dessa fórmula?
A: Sim, por causa da área.

TE 26

**Professor B**

O professor reconheceu uma equação através da existência de um valor desconhecido, que no caso é o comprimento dos degraus, conforme podemos observar no seguinte protocolo.

| |
|---|
| (C) é também porque temos que encontrar o ~~valor~~ comprimento dos degraus |

PR 27

**Professor C**

Nesse item o professor reconhece que existe uma equação permeando a situação, porém não é capaz de explicitá-la e as relações por ele apresentadas são as existentes na fórmula da área do trapézio. O seguinte protocolo nos mostra que o professor C reconhece uma equação permeando o item, identificando a incógnita, porém não é capaz de identificar a igualdade.

| |
|---|
| C. Precisa ter uma igualdade. Uma incógnita é o comprimento da peça. |

TE 27

**Item d**

**d) Calcule o comprimento de uma circunferência de raio 2 cm.**

**Professor A**

O professor A alega não existir uma equação permeando esse item, pois trata-se de uma fórmula. Tal postura parece nos mostrar uma contradição em suas concepções, pois coloca em questão a avaliação que o mesmo faz dos itens anteriores, quando ele associa uma equação a uma fórmula, seja da PA (progressão aritmética) ou da área do trapézio.

Buscando elucidar esse ponto, o pesquisador pergunta ao professor qual sua posição a respeito do ocorrido. O mesmo procura então estabelecer uma diferenciação entre fórmula e nos revela que, em sua imagem de conceito que estão presentes elementos que poderiam atuar nessa diferenciação. Observe a transcrição de um dos diálogos que se seguiram durante a realização desse item:

> P. O item d não é uma equação por quê?
> A: Porque já tinha os dados, né? O raio que era minha incógnita eu já tenho aqui, o meu $\pi$ ele já é dado, tá? E o dois que é a constante.
> P: Então qual a diferença deste item d para o item c, que também seria uma fórmula?
> A: Que aqui oh, ele não tinha a variável, para resolver o comprimento da circunferência eu não tinha variável, poderia ter sim se a ... por exemplo variável fosse dado em diâmetro para achar o raio, então aqui eu não tenho a variável, eu só tinha a preocupação de resolver a fórmula, só.

TE 28

**Professor B**

Nesse item o professor diz não existir uma equação e alega que tal fato se deve à existência de uma fórmula, demonstrando assim, existir em sua imagem de conceito uma distinção entre fórmulas e equações, conforme o protocolo abaixo.

d) não porque ~~[illegible]~~ temos a fórmula para encontrar o ~~[illegible]~~ comprimento.

PR 28

**Professor C**

O professor C alega existir uma equação permeando esse item, pois é possível identificar variáveis e uma igualdade, conforme podemos observar na seguinte transcrição:

C. Encontro, tenho variáveis e uma igualdade.
P. Então você tem uma equação?
C. Tenho uma equação.

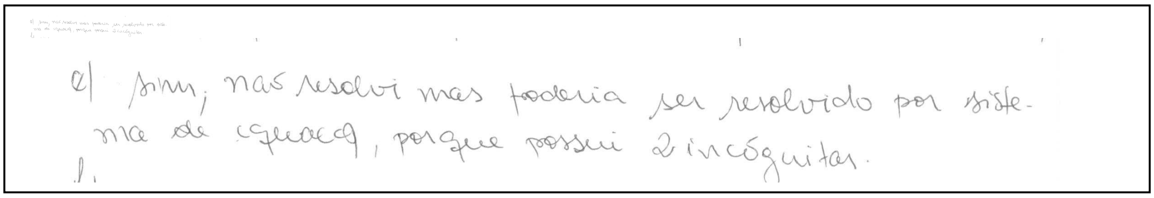
TE 29

**Item e**

**e) Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD custa R$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R$ 70,00?**

**Professor A**

A equação foi reconhecida nesse item, apontando mais uma vez que tal reconhecimento se deu por meio das técnicas de resolução de equações. O professor A alega que a equação existe devido à existência de duas incógnitas que podem ser traduzidas em um sistema de equações. Veja o protocolo desse item.


e) Sim, não resolvi mas poderia ser resolvido por sistema de equação, porque possui 2 incógnitas.

PR 29

Embora a solução da situação matemática apresentada nesse item não remetesse a um sistema de equações, o professor procurou utilizar os algoritmos com os quais ele estava mais familiarizado. Não conseguindo modelar o sistema de equações, acreditou que o erro fosse dele, por não conseguir encontrar tal modelo. Verificamos ainda que ele não encontra outro caminho, sem a utilização de um sistema de equações:

> A: a, b, c, d, e, esse aqui foi outro também, oh! É uma equa... tá? Aqui... poderia ter resolvido por um sisteminha de equação, para achar o valor de um depois o valor do outro, tá? Esse daqui poderia ter resolvido, não fiz, mas eu poderia ter resolvido por um sistema de equação, tá? Eu vou por aqui, oh, não resolvi mas não... ter resolvido por sistema de equação. Têm duas incógnitas, por isso eu monto um sistema pra saber, tá? Seria x e y, que eu não consigo trabalhar com duas incógnitas, só consigo resolver através de um sistema, tá?

TE 30

**Professor B**

O professor associa a situação-problema apresentada nesse item à existência de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. O que nos chamou atenção é o fato desse professor não relacionar um sistema de equações à existência de uma equação, uma vez que ele afirma não reconhecer uma equação permeando esse item.

| |
|---|
| e ~~é uma equação~~ não é uma equação e sim um sistema |

PR 30

**Professor C**

A equação foi reconhecida nesse item e o professor C a escreveu conforme mostramos anteriormente no PR 15. Para justificar a existência de uma equação o professor se apegou novamente na existência de variáveis e da igualdade.

| |
|---|
| E. Sim, com duas incógnitas, uma igualdade. |

TE 31

**Item f**

**f) Um mergulhador percorreu uma distância de 40m entre a superfície e o fundo do mar, segundo uma trajetória retilínea que forma um ângulo de 60º com a superfície.**

***a*) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?**

***b*) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?**

**Professor A**

O professor A reconheceu uma equação permeando esse item utilizando-se daquilo que chamou de uma equação do cosseno. Veja o protocolo abaixo.

f) sim, usando a equação do cosseno.

PR 31

**Professor B**

Esse professor relata não se tratar de uma equação, pois existe a presença de trigonometria na resolução da situação-problema apresentada nesse item. Tal fato parece nos indicar que esse professor não possui em sua imagem de conceito a ideia de equação relacionada a situações trigonométricas. Podemos constatar tais indicações no protocolo abaixo:

f) não é uma equação porque usamos a trigonometria para resolver.

PR 32

**Professor C**

O professor C reconheceu uma equação permeando esse item. Quando ele indicou ser uma equação trigonométrica. Com o intuito de aprofundar as investigações sobre esse item, perguntamos-lhe se onde aparecem a relação de seno de um ângulo também existia uma equação, o que após alguns instantes de reflexão o professor relatou que sim, pois era possível realizar uma substituição e encontrar o valor de x.

P. Aqui quando você tem seno de 30º é igual a y sobre 40, você tem uma equação?
C. Aqui em cima... sim porque eu posso substituir e encontrar o valor de y.

TE 32

Essa fala do entrevistado nos revela que ele reconhece uma equação a partir da possibilidade de resolvê-la, tal fato corrobora mais uma vez com a pesquisa de Attorps (2006).

**Item g**

**g) Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.**

- **O plano A cobra R$ 100,00 de inscrição e R$ 50,00 por consulta num certo período;**
- **O plano B cobra R$ 180,00 de inscrição e R$ 40,00 por consulta no mesmo período.**

**Em que condições podemos afirmar que o Plano A é mais econômico que o Plano B?**

**Professor A**

Nesse item o professor A alega existir uma equação permeando o item, porém ele não conseguiu explicitá-la ou utilizá-la. Ele buscou resolver a situação por meio de tentativas, o que ele chamou de dedução. Podemos observar isto em sua resposta apresentada no protocolo 33:

> g) sim; não lembrei, resolvi através de dedução.

PR 33

**Professor B**

Novamente o professor B diz que a situação não remete a uma equação por tratar-se de um sistema. Tal fato aponta no sentido de que esse professor não associa um sistema de equações à ideia de equação.

g não é uma equação é uma sistema

PR 34

**Professor C**

Nesse item o professor C alega existir uma inequação permeando o item, e não uma equação. Tal assertiva confirma o que havíamos previsto em uma das estratégias apresentadas nas análises preliminares:

E. Não eu tenho uma inequação.
P. Uma inequação?
E. É, uma desigualdade.

TE 33

**Item h**

**h) Um mutuário comprou um apartamento por R$100.000,00 financiado por um banco com taxa de juros compostos de 15% ao ano. Logo no primeiro mês ele perdeu o emprego e não pagou nenhuma parcela. O mutuário demorou algum tempo para conseguir uma recolocação no mercado de trabalho e durante esse período não pagou as prestações do apartamento. Quando foi verificar sua dívida junto ao banco, descobriu que agora devia um total de R$152.087,50. Quantas prestações ele deixou de pagar?**

**Professor A**

O professor afirma que sim, existe uma equação permeando a situação. Isto pode ser verificado em todas as equações equivalentes deduzidas a partir da fórmula de juros compostos.

Em seguida, ao ser questionado pelo pesquisador se a equação na qual aparece o logaritmo também era uma equação, o professor respondeu que sim e sua justificativa se apoiou na existência da incógnita:

> P: Estamos encontrando equações equivalentes, aqui o senhor colocou o log em ambos os membros da equação, corretamente, tudo. Aqui ainda é uma equação? Continua sendo uma equação quando você usa o log?
> A: Sim, ainda continua porque eu tenho uma variável, tenho incógnita.

TE 34

**Professor B**

Nesse item o professor volta a associar a ideia de equação à ideia de encontrar um valor desconhecido, ou seja, a presença da incógnita. O que nos chamou a atenção é que esse professor não explicita a ideia de incógnita em um sistema de equações, como ele relata nos itens *e* e *g*.

> h) é uma equação porque procura um valor desconhecido

PR 35

**Professor C**

O professor afirma que sim, existe uma equação permeando a situação, e ela pode ser verificada a partir da fórmula de juros compostos.

| |
|---|
| E. Tem uma equação. Posso substituir...<br>P. Então, isso daqui seria a equação, M é igual a C abre parênteses um mais i, fecha parênteses, elevado a n?<br>E. Sim. |

TE 35

Podemos constatar mais uma vez que esse professor parece associar equação aos seus procedimentos de resolução. Ao afirmar, na TE 35 a possibilidade de realizar uma substituição, ele parece voltar-se mais uma vez para uma perspectiva onde uma equação está relacionada às técnicas de resolução.

**Item i**

**i) Em uma determinada cidade, 30% das mulheres casadas se divorciam e 20% das mulheres solteiras se casam por ano. Existem 8000 mulheres casadas e 2000 mulheres solteiras. Supondo que a população total de mulheres permanece constante, quantas mulheres estarão casadas e quantas estarão solteiras depois de 1 ano? E depois de 2 anos?**

**Professor A**

Nesse item o professor A relata que sim, existe uma equação permeando o item, e ela pode ser reconhecida por meio dos cálculos de porcentagem. Contudo, mais uma vez parece haver uma contradição em suas concepções, pois tal justificativa contraria as condições anteriormente apresentadas por esse professor: sempre relacionar a ideia de equação com a existência de uma ou mais incógnitas. Veja a seguir o protocolo desse item:

i) Sim. utilizando porcentagem

PR 36

**Professor B**

O professor relata que não se trata de uma equação, uma vez que ele utiliza regra de três para encontrar a porcentagem. Vejamos o protocolo 37:

i) naõ é uma equaçaõ resolvo por regra de três para encon-
trar a porcentagem

PR 37

Um fato curioso é que, embora a situação não remetesse à ideia de equação, conforme descrevemos anteriormente, a equação se evidencia em seu processo de resolução, por meio da regra de três, conforme pudemos perceber anteriormente na figura 35.

**Professor C**

Nesse item o professor C relata que sim, existe uma equação permeando o item, e ela pode ser reconhecida através de uma equação do 1º grau. Contudo, esse professor não escreveu tal equação.

| |
|---|
| C. Uma equação de primeiro grau, primeiro grau. |

TE 36

**Item j**

**j) O que é possível fazer diante da situação abaixo?**

$$\frac{4z\sqrt{4x^2+12xy+9y^2}}{4zx+6yz}$$

**Professor A**

O professor A diz reconhecer uma equação nesse item, pois ele utiliza de propriedades de simplificação, voltando a associar equação com procedimentos:

2) Sim. para resolver foi utilizado as propriedades de simplificação

PR 38

**Professor B**

O professor relata existir uma equação permeando o item e tal reconhecimento se dá através das incógnitas, conforme podemos perceber no protocolo abaixo:

1) é uma equação com vários valores desconhecidos

PR 38

Podemos perceber que na imagem de conceito de equação desse professor a ideia de um valor desconhecido (incógnita), está bastante forte, enquanto que o mesmo não acontece com a ideia de igualdade, a qual em nenhum momento é mencionada.

**Professor C**

O professor C diz reconhecer uma equação nesse item, pois é possível identificar incógnitas e uma igualdade.

E. É uma equação.

TE 37

**Item k**

**k) Resolva a sentença matemática abaixo, encontrando o(s) valore(s) de x.** [13]

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}=1$$

**Professor A**

O professor relaciona nesse item equação com procedimentos de resolução, mas fica em dúvida se o item apresenta uma equação ou não. Esse professor perguntou ao pesquisador se poderia colocar como resposta a palavra dúvida. Vejamos o diálogo abaixo:

A: OK eu fiquei na dúvida... eu vou por assim oh! Dúvida, posso por?
P: Qual é a dúvida do senhor?
A: A dúvida é que eu não consegui visualizar como é que eu ia resolver esse exercício.
P: Mas é uma equação ou não é uma equação?
A: Sim, porque ela está pedindo o valor de x. Se está pedindo o valor de x então está trabalhando com uma equação. Agora o tipo de equação eu não consegui visualizar, o modo de resolver, tá? Então eu vou por assim: não... ou poderia ter resolvido através da propriedade distributiva e resolvido o exercício, tá? Ai seria o caminho mais longo, iria resolver pelo caminho mais longo, porque aí eu poderia ter resolvido, feito a adi... o produto, feito a adição, tá? E fazendo a multiplicação, depois eu iria fazer a multiplicação, eu iria pelo caminho mais longo, aí eu ia resolver, tá? Então... sim?

TE 38

Observando a transcrição acima podemos apontar para o fato de que o professor A busca, ao classificar a situação matemática como equação ou não equação,

13 Essa atividade foi retirada da pesquisa de Dreyfus & Hoch (2004) com o título Equations: A structural approach. Proceedings of the 28th Conference Of International Group for the PME, 2004, p. 1-152 – 1-155

justificativas relacionadas aos procedimentos de resolução da mesma. Outro fato que nos chamou a atenção foi a necessidade apresentada pelo professor de querer adjetivar a equação.

**Professor B**

Nesse item o professor relata existir uma equação e tal fato se deve à existência de incógnitas.

| |
|---|
| K é uma equacão com várias valores desconhecidos |

PR 39

**Professor C**

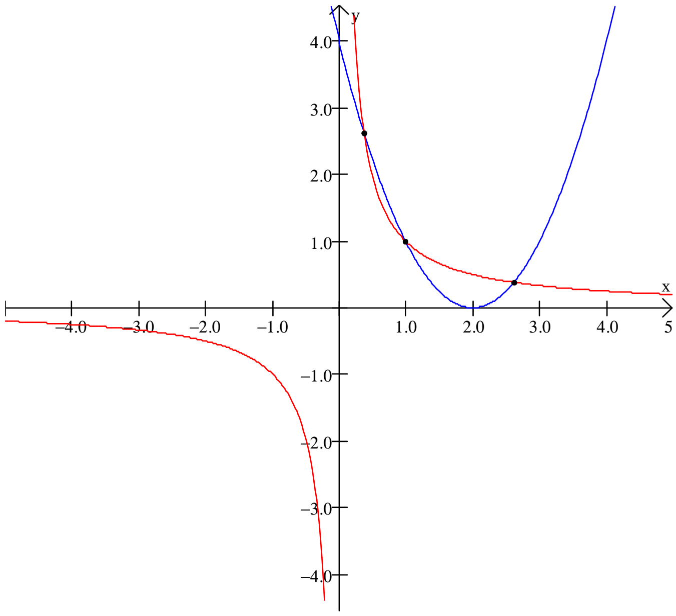
O professor relaciona nesse item uma equação à existência de incógnitas e de uma igualdade.

| |
|---|
| C. A *k*, a *k*, acho que também.<br>P. Também, porque que ela é uma equação?<br>C. Porque tem variáveis, uma igualdade. |

TE 39

**Item I**

**I) O poeta, filósofo e matemático árabe Omar Khayyam descobriu uma forma de resolver alguns problemas matemáticos que na época pareciam impossíveis de serem resolvidos. Abaixo está apresentada a maneira como Khayyam tratava o problema matemático em questão. Afinal, de qual problema estamos falando e que ajudou a Omar Khayyam se tornar uma importante figura na história da Matemática?**




Conforme discutimos anteriormente em nossas análises preliminares, o objetivo desse item foi o de apresentar ao professor uma situação matemática que remeta ao significado DEDUTIVO-GEOMÉTRICO.

Optamos por realizar as análises deste item somente neste momento do trabalho, pois acreditamos que o mesmo tenha por objetivo investigar a forma como os professores reconhecem uma equação quando a mesma é apresentada em uma situação geométrica que remete à intersecção de curvas de funções.

Esse item apresenta as intersecções de duas curvas, que podem ser interpretadas como as raízes de uma equação do terceiro grau.

**Professor A**

O professor reconheceu o gráfico de duas funções na situação apresentada a ele, sendo elas manifestas por uma função do segundo grau e por uma função logarítmica:

> A: Bom eu estou enxergando aqui uma equação do segundo grau, tá? Uma equação do segundo grau, eu estou vendo logaritmo, tá? Por que aqui eu tenho logaritmo, o que eu tô enxergando aqui é isso, tá?

TE 40

Com o intuito de chamar a atenção do professor para a possível presença de uma equação através da intersecção das curvas, o pesquisador pergunta-lhe o que sugerem aqueles pontos. Sua resposta parece nos indicar que ele tentou se pautar em algumas características das funções logarítmicas, conforme transcrição abaixo:

> P: E... uma pergunta: Esses pontos de intersecções dessas funções eles te sugerem alguma coisa?
> A: Não... lógico que sim... aqui, quer ver? Aqui oh! Eles fizeram aqui, tanto aqui como aqui, aqui nesse ponto na função de logaritmo ele diz que você tem que passar do 1, né? Não existe negativo nem nada. Por isso que eu estou definindo que é uma função de logaritmo, devido ao par ordenado que ele está passando no 1, se você pegar a função de logaritmo ela nunca passa no zero e não pode fazer isso, tá? E nem, e nem, ele cruza as coordenadas, tá? Ele chega próximo às coordenadas, porque não tem logaritmo na base 10, você tem o que? O... você define os logaritmos pela base, os menores que zero, né? Que são indicados pelos... de 0 a 1 é o intervalo, ta? Então a base tem que ser sempre o quê? Maior que zero, tá? Ou entre 0 e , tá? Então aqui esse ponto aqui, ele me define exatamente o quê? O... a função de logaritmo que passa no 1, tá? No par ordenado.

TE 41

O professor A associou a situação matemática apresentada nesse item como uma função quadrática e uma função logarítmica. Podemos perceber que esse professor não reconheceu uma hipérbole na situação apresentada e buscou em sua imagem de conceito elementos que pudessem ajudá-lo a justificar o reconhecimento que fez para a referida curva.

Ao reconhecer o ponto de coordenadas (1,1) como pertencente ao gráfico da função, ele se recorda que uma função logarítmica diz *"algo sobre a curva sempre passar em 1"*. Na verdade, ele não relaciona corretamente o fato de uma função logarítmica sempre "cortar" o eixo dos x no ponto (1,0).

Analisando as transcrições acima podemos perceber que o professor não associou os pontos de intersecção das curvas apresentadas como as raízes de uma equação do terceiro grau.

Nesse item o professor relatou que sim, existe uma equação permeando o item, porém ele reconheceu que essa equação se manifestava nos gráficos das funções das curvas apresentadas na situação matemática, as quais ele identificou como uma função do 2º grau e uma função logarítmica. Podemos perceber essa relação estabelecida pelo professor A entre equação e função ao analisar o seguinte protocolo:

l) Sim, aonde visualizei as funcões de logaritmicos e do 2º grau.

PR 40

**Professor B**

O professor B reconheceu principalmente a ideia de função na situação geométrica apresentada, contudo podemos perceber no protocolo abaixo que a ideia de equação também se manifesta na imagem de conceito desse professor, relacionada à ideia de equação do 2º grau.

limite tende a x e limite tende y
funçaõ logaritma
parabola volta para cima positiva equaçaõ de 2º grau

PR 41

Esse professor parece relacionar de forma bastante íntima a ideia de limite à de curvas que se aproximam indefinidamente dos eixos x e y do plano cartesiano.

B. Voltada para cima, então seria uma, e o formato da, que elas tão, passa próximo de zero, perto da reta x, mas nunca se aproxima, vai ficar bem próximo, mas nunca vai encostar, ela tende a um, ao infinito, aqui...
P. Essa é a tangente que você se refere?
B. Não, tangente é... uma coisa... têm os pontos, você traça uma reta, isso não seria a tangente, isso aqui é limite, né?

TE 42

O professor afirma existir uma equação permeando o item e que tal afirmação pauta-se na existência de funções, conforme podemos observar no protocolo a seguir.

| |
|---|
| (1) sim ~~para~~ é uma equação porque ~~o~~ reconheço os pontos através de função |

PR 42

O pesquisador pergunta então ao professor: o que os pontos de intersecção entre as curvas apresentadas na presente situação lhe sugerem? Ele responde:

| |
|---|
| B. Reconheço por pontos através da função. |

TE 43

A transcrição acima nos revela que os pontos de intersecção apresentados nesse item significam para o professor, pontos que pertencem à função, não associando assim, a intersecção de curvas com a ideia de equação.

**Professor C**

O professor reconheceu na situação apresentada a ele: as curvas de uma função e um sistema de equações, conforme observamos no protocolo 43:

Podemos trabalhar funções, num sistema, o ponto de encontro entre duas retas.

PR 43

O professor C reconhece nas intersecções das curvas apresentadas nesse item a possível representação de um sistema de equações. Esse fato gera uma certa insegurança uma vez que ele só conhece esse tipo de representação quando relacionados equações do 1º grau com duas variáveis:

C. Em retas. Aqui é uma parábola, né? Esses pontos, como eu posso explicar? Onde o evento acontece? Nessa parábola, nessa função, em azul e na vermelha.

TE 44

Enfim, o professor relatou que sim: existe uma equação permeando o item, e ela se relaciona aos gráficos das funções das curvas apresentadas na situação matemática e através de um sistema de equações. O fato desse professor associar a situação apresentada a um sistema de equações, parece nos indicar que o mesmo fez uma associação com a resolução de um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas por meio da intersecção de duas funções lineares, normalmente trabalhado no Ensino Básico.

| |
|---|
| C. Equac... é... uma função, equação se for uma reta, se forem retas.<br>P. Se fossem retas você teria equações?<br>C. Não, mesmo uma equação, equação, é uma equação.<br>P. Então nesse caso você também tem equação?<br>C. Tem. |

TE 45

# Capitulo IV

# Conclusões e Considerações Finais

## 4.1 RELACIONANDO OS RESULTADOS DAS ENTREVISTAS AOS MULTISIGNIFICADOS DE EQUAÇÃO

- **Relação com o significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA.**

O significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA foi concebido por Ribeiro (2007), a partir da observação de pesquisas em Educação Matemática, como Dreyfus & Hoch (2004) e contempla a seguinte perspectiva: reconhecer uma equação por meio do processo envolvido em sua resolução e tratar tal equação utilizando-se de uma técnica, um algoritmo.

Os itens *a*, *g* e *h* remetiam ao significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA. O professor não teve problemas em resolver tais situações matemáticas, a partir do momento que possuía uma técnica ou um algoritmo de resolução. Assim, concluímos que a segunda parte da relação (fazer) está presente na imagem de conceito desse professor.

**Professor A**

Analisando as respostas desse professor A na entrevista concluímos que sua idéia sobre equação parece estar fortemente embasada nos algoritmos de resolução das mesmas, pois em diversas situações o mesmo não encontra argumentos fundamentados para explicitar o que ele entende por equação.

Observamos que, embora ele consiga utilizar com relativo sucesso os algoritmos por ele conhecidos, existem elementos de conflito potencial em sua imagem de conceito, elementos estes que, quando confrontados, tornam-se fatores de conflito cognitivo. Exemplo disso pode ser encontrado no item *a* da atividade 1, quando o professor utiliza corretamente a técnica de resolução de equações do 2º grau, porém não consegue explicar claramente o processo.

Outro exemplo acontece no item *h* da atividade 1, onde o professor A se mostrou muito dependente da fórmula dos juros compostos para proceder à resolução da situação matemática. Ainda assim, após utilizar a fórmula, sentiu dificuldades em expressar as propriedades utilizadas.

Ao responder as perguntas formuladas pelo pesquisador, o professor nos revelou em sua imagem de conceito fatores de conflito cognitivo no que tange à compreensão dos processos de resolução de equações.

Tais conflitos cognitivos surgiram quando o professor tentou explicitar os processos utilizados, demonstrar sua compreensão desses processos. Nesse ponto percebemos então, que ele não possui claramente formado em sua imagem de conceito, a primeira parte da relação (ver).

Acreditamos que a idéia de equação desse professor vai ao encontro dos resultados de Attorps (2006), uma vez que tal concepção relaciona de forma bastante íntima a existência de uma equação aos seus procedimentos de resolução.

Enfim, a partir das análises acima, não podemos afirmar de forma conclusiva que o professor possui o significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA, pois conflitos cognitivos existem em sua imagem de conceito, no que se refere ao reconhecer uma equação por meio de seu processo, uma vez que o mesmo não reconhece a idéia de igualdade nas situações postas.

**Professor B**

Analisando as respostas do professor B na entrevista concluímos que a concepção de equação desse professor parece estar embasada nos algoritmos de resolução das mesmas, relatando em diversos momentos que uma equação está diretamente relacionada com a existência de uma ou mais incógnitas.

Esse professor demonstrou uma maior desenvoltura quando utilizava técnicas de resolução de equação comumente utilizada na Educação Básica. Podemos perceber isso observado seu desempenho no item *a* e no item *f*, onde ele utilizou técnicas bastante abordadas no Ensino Fundamental II.

Ao responder as perguntas formuladas pelo pesquisador, o professor nos revelou em sua imagem de conceito fatores de conflito cognitivo no que tange à compreensão dos processos de resolução de equações.

Tal fato se evidencia na seguinte transcrição.

| |
|---|
| P. Por que você fez isso? Menos quatro y passou para o outro lado do sinal de igual como mais quatro y? Por que você fez isso?<br>B. Por que eu fiz? Porque é pra, é... tem a igualdade. Então quando você vai transferir do outro lado da igualdade aí você tem que estar mudando, mudando alguma coisa. |

TE 46

A colocação acima parece corroborar os resultados apresentados por Figueiredo (2007) que mostra que os alunos da Licenciatura em Matemática se ressentem de uma disciplina que proporcione uma abordagem dos “porquês”, que explique o mecanicismo empregado nas manipulações algébricas.

O professor não teve problemas em resolver as situações matemáticas que remetiam ao significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA, a partir do momento que possuía uma técnica ou um algoritmo de resolução. Assim, concluímos que a segunda parte da relação (fazer) está presente na imagem de conceito desse professor.

Enfim, a partir das análises acima, não podemos afirmar de forma conclusiva que o professor possui o significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA, pois conflitos cognitivos existem em sua imagem de conceito, no que se refere tanto ao tratar quanto ao reconhecer uma equação na perspectiva desse significado. Da mesma forma que o professor A, o professor B não reconhece a idéia de igualdade vinculada à idéia de equação.

**Professor C**

Analisando as respostas do professor C na entrevista concluímos que a concepção de equação desse professor, assim como a dos demais professores, parece estar fortemente embasada aos algoritmos de resolução das mesmas, pois em diversas situações ele não encontra argumentos fundamentados para explicitar o que ele entende por equação.

Observamos que, embora o professor C consiga utilizar com relativo sucesso os algoritmos por ele conhecidos, existem elementos de conflito potencial em sua imagem de conceito, elementos esses que, quando confrontados, tornam-se fatores de conflito cognitivo. Exemplo disso pode ser encontrado no item 1 da atividade 1, quando o professor utiliza corretamente a técnica de resolução de equações do 2º grau, porém não consegue explicar claramente o processo.

Ao responder as perguntas formuladas pelo pesquisador, o professor nos revelou em sua imagem de conceito fatores de conflito cognitivo no que tange à compreensão dos processos de resolução de equações e também se mostrou indeciso quanto à existência do objeto matemático equação.

Observando o item *j* da atividade 1 podemos perceber que ao classificar o item como uma equação o professor considera a igualdade constante da resolução da expressão algébrica como sendo a mesma igualdade que "aparece" nas equações.

Esse professor também não teve problemas em resolver as situações matemáticas que remetiam ao significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA, a partir do momento que possuía uma técnica ou um algoritmo de resolução. Assim, concluímos que esse professor possui em sua imagem de conceito elementos que permitem que o mesmo trate uma equação na perspectiva desse significado de equação.

Contudo, conflitos cognitivos surgiram quando o professor tentava explicitar os processos utilizados, demonstrar sua compreensão desses processos. Nesse ponto percebemos então, que ele possui dificuldades em reconhecer o processo.

Acreditamos que a concepção de equação desse professor vai ao encontro dos resultados de Attorps (2006), uma vez que tal concepção relaciona de forma bastante intima a existência de uma equação aos seus procedimentos de resolução.

- **Relação com o significado de equação DEDUTIVO-GEOMÉTRICO.**

O significado de equação DEDUTIVO-GEOMÉTRICO foi concebido por Ribeiro (2007), principalmente, a partir da observação dos *Elementos de Euclides* e da Geometria das Curvas de Omar Khayyam e contempla a seguinte perspectiva: reconhecer uma equação em uma situação geométrica e tratar tal equação de forma dedutiva.

Os itens *c* e *l* da atividade 1 remetiam ao significado de equação DEDUTIVO-GEOMÉTRICO.

**Professor A**

Podemos perceber que o professor, embora tenha reconhecido uma equação em ambos os itens, em nenhum deles isso ocorreu em consonância com o significado DEDUTIVO-GEOMÉTRICO.

No item c o professor associa a existência da equação à fórmula da área do trapézio e não à proporcionalidade de segmentos de reta, ou à semelhança de triângulos. Já no item *l* o professor associa uma equação com a existência de funções algébricas representadas pelas curvas existentes naquele item, e não com os pontos de intersecção entre as curvas de uma parábola e de uma hipérbole.

Considerando a análise acima, acreditamos que esse professor não possui claro em sua imagem de conceito a ideia de equação ligada a situações geométricas.

**Professor B**

Podemos perceber que o professor embora tenha reconhecido uma equação em ambos os itens, isso não ocorreu em nenhum item em consonância com o significado DEDUTIVO-GEOMÉTRICO.

No item *c* o professor associa a existência da equação à ideia de incógnita, onde ele relata que a equação se manifesta uma vez que é necessário encontrar o comprimento dos degraus. Já no item *l* o professor associa uma equação com a existência de funções algébricas representadas pelas curvas existentes naquele item, e não com os pontos de intersecção entre as curvas de uma parábola e de uma hipérbole.

Em nenhum momento conseguimos obter indícios de que esse professor relacione em sua imagem de conceito a ideia de equação a uma situação geométrica, tampouco que ele a trate de forma dedutiva.

**Professor C**

Podemos perceber que o professor, embora tenha reconhecido uma equação em ambos os itens que remetiam ao significado de equação DEDUTIVO-GEOMÉTRICO, em nenhum deles isso ocorreu em consonância com esse significado.

No item *c* o professor associa a existência da equação à fórmula da área do trapézio e não à proporcionalidade de segmentos de reta, ou à semelhança de triângulos. Já no item *l* o professor associa uma equação com a existência de funções algébricas e também por meio dos pontos de intersecção das curvas representadas naquele item, porém esse professor deixa claro a associação de tais pontos com um sistema de equação do 1º grau com duas incógnitas e não com a igualdade entre equações ou com uma equação cúbica. Acreditamos que tal fato seja devido a sua formação, uma vez que o mesmo cursou Licenciatura Curta em Matemática e a Planificação se deu num período de um ano em curso semi-presencial. Outro fato é de que sua prática sempre esteve vinculada ao ensino de Matemática de 5ª a 8ª séries.

Analisando o item *l* percebemos que esse professor possui em sua imagem de conceito a ideia de equação relacionada à intersecção de curvas, quando afirma que a situação poderia remeter a um sistema de equações. Embora tais imagens pareçam um tanto nebulosas, podemos perceber claramente que elas estão presentes na imagem de conceito desse professor.

### ➢ Relação com o significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO

O significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO foi concebido por Ribeiro (2007), a partir da observação de livros didáticos como Bourdon, Imenes e Lelis, bem como a forma pela qual egípcios e babilônios (aproximadamente 1800 a.C.) tratavam e reconheciam uma equação. Tal significado contempla a seguinte perspectiva: reconhecer uma equação em um problema prático, do cotidiano e tratar tal equação utilizando-se de métodos não vinculados a uma algoritmo, como métodos aritméticos ou de tentativas.

O significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO foi contemplado nos itens *b*, *c*, *e*, *f*, *h* da atividade 1.

**Professor A**

Durante vários momentos da entrevista, esse professor mostrou reconhecer uma equação a partir de situações que emergem do cotidiano, utilizando-se em algumas dessas situações de métodos aritméticos ou de aproximações para encontrar a solução do problema.

No item *b* da primeira atividade o professor associou a situação apresentada a uma progressão aritmética. Por não se lembrar de uma fórmula para resolver o problema, ele utiliza-se do diagrama de árvore, um método mais intuitivo e não condicionado a algoritmos. Contudo, após algumas tentativas frustradas, ele desiste da resolução da situação matemática proposta.

No item *c* o professor reconhece uma equação emergindo de uma situação do cotidiano, porém não é capaz de tratá-la de forma intuitiva e procura resolvê-la através do emprego de fórmulas. Como as fórmulas utilizadas não foram eficazes na resolução da situação-problema, ele então desistiu do item.

No item *e* o professor não consegue modelar uma equação que traduza a situação matemática apresentada e passa então a buscar uma resposta utilizando-se de diversas tentativas. Ele relata que existe uma equação permeando a situação, porém a reconhece em um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas.

Nos itens *f* e *h* o professor reconheceu uma equação permeando cada item, mas tratou-as de forma técnica, utilizando-se de fórmulas. No item *h*, apenas após o pesquisador lembrar-lhe a fórmula de juros compostos é que o professor conseguiu resolver a questão.

Enfim, observamos que o professor buscou, na maioria das situações matemáticas que remetiam ao significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO, resolver a situação utilizando-se de métodos aritméticos e de tentativas. Observamos ainda, que o professor reconhece equação em situações que envolvam problemas de origem prática.

**Professor B**

Durante vários momentos da entrevista esse professor mostrou reconhecer uma equação a partir de situações que emergem do cotidiano, utilizando-se em algumas dessas situações de métodos aritméticos ou de aproximações para encontrar a solução do problema.

No item *b* da primeira atividade o professor associou a situação apresentada a uma progressão aritmética e a uma progressão geométrica. Por não se lembrar de uma fórmula para resolver o problema, ele utiliza-se de um método mais intuitivo e não condicionado a algoritmos e busca encontrar o valor dia após dia, até chegar ao resultado esperado.

No item *c* o professor reconhece uma equação emergindo de uma situação do cotidiano, porém não é capaz de concebê-la e dessa forma não chega a tratá-la, desistindo do item.

No item *e* o professor não consegue modelar uma equação que traduza a situação matemática apresentada e passa então a buscar uma resposta utilizando-se de diversas tentativas. Ele relata que existe uma equação permeando a situação, porém não consegue resolver a situação-problema por não se recordar de uma fórmula.

No item *f* o professor alega não reconhecer uma equação permeando o item por tratar-se de um sistema de equações, já no item *h* o professor reconheceu uma equação permeando o item, mas não conseguiu encontrar um resultado pois alegou não estar acostumado a tratar esse tipo de situação.

Enfim, observamos que o professor buscou, na maioria das situações matemáticas que remetiam ao significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO, resolver a situação utilizando-se de métodos aritméticos e de tentativas. Observamos ainda, que o professor reconhece equação em situações que envolvam problemas de origem prática.

**Professor C**

Durante vários momentos da entrevista esse professor mostrou reconhecer uma equação a partir de situações que emergem do cotidiano, utilizando-se em algumas dessas situações de métodos aritméticos ou de aproximações para encontrar a solução do problema.

No item *b* da primeira atividade o professor associou a situação apresentada a uma progressão aritmética. Ele utiliza-se do diagrama de árvore, um método mais intuitivo e não condicionado a algoritmos na tentativa de resolução do item. Contudo, após algumas tentativas frustradas, ele desiste da resolução da situação matemática proposta.

No item *c* o professor reconhece uma equação emergindo de uma situação do cotidiano, porém não é capaz de tratá-la de forma intuitiva e procura resolvê-la através do emprego de fórmulas. Como as fórmulas utilizadas não foram eficazes na resolução da situação-problema, ele então desistiu do item.

No item *e* o professor não consegue modelar uma equação que traduza a situação matemática apresentada e passa então a buscar uma resposta utilizando-se de diversas tentativas. Ele relata que existe uma equação permeando a situação, porém a reconhece em um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas.

Nos itens *f* e *h* o professor reconheceu uma equação permeando cada item, mas tratou-as de forma técnica, utilizando-se de fórmulas. No item *h*, apenas após o pesquisador lembrar-lhe a fórmula de juros compostos é que o professor conseguiu resolver a questão.

Enfim, observamos que o professor buscou, na maioria das situações matemáticas que remetiam ao significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO, resolver a situação utilizando-se de métodos aritméticos e de tentativas. Observamos ainda, que o professor reconhece equação em situações que envolvam problemas de origem prática.

### ➢ Relação com o significado de equação ESTRUTURAL-CONJUNTISTA

O significado de equação ESTRUTURAL-CONJUNTISTA foi concebido por Ribeiro (2007) a partir da observação de obras como Rogalski, Warusfel e Bourbaki. Tal significado de equação contempla a seguinte perspectiva: reconhecer uma equação como uma relação entre conjuntos e tratá-la de forma a atentar para suas estruturas.

Buscamos contemplar o significado de equação ESTRUTURAL-CONJUNTISTA no item b, onde a equação emergia de uma situação matemática que remetia à relação entre conjuntos. Vale lembrar que tal situação foi proposta como uma interação desse significado com o INTUITIVO-PRAGMÁTICO.

**Professor A**

O professor reconhece uma equação, mas não associou essa situação a uma relação entre conjuntos. Ele reconhece uma equação permeando o item, porém por meio da fórmula da PA (progressão aritmética).

Durante a entrevista o professor se mostrou bastante confiante em seus conhecimentos e acreditou que a situação matemática presente nesse item poderia ser facilmente resolvida, caso ele se lembrasse da fórmula da PA.

Ainda que ele não se recordasse da fórmula da PA, o mesmo ensaiou uma tentativa de utilizar o diagrama de árvores para solucionar o problema, porém sua certeza na infalibilidade de uma fórmula foi mais forte, fazendo com que o professor desistisse do item.

Mais uma vez, acreditamos que a imagem de conceito desse professor no que dia respeito à idéia de equação vai ao encontro dos resultados de Attorps (2006), uma vez que em tal imagem de conceito a Ideia de equação aparece bastante vinculada à ao seus procedimentos de resolução.

**Professor B**

O professor reconhece uma equação, mas não associou essa situação a uma relação entre conjuntos. Embora inicialmente ele tenha mencionado a possibilidade de uma PG (progressão geométrica) permeando o item, ele acabou por optar pela ideia da PA (progressão aritmética). Isto nos revela que o mesmo não possui clara a relação entre esses conjuntos.

Esse professor encontrou um resultado através de um método mais intuitivo, que foi acumulando valores dia a dia, porém sempre incerto quanto ao resultado ou o método, mostrando assim não estar acostumado a resolver situações-problema através de métodos intuitivos.

Mais uma vez, acreditamos que a concepção de equação desse professor vai ao encontro dos resultados de Attorps (2006), uma vez que tal concepção relaciona de forma bastante íntima a existência de uma equação aos seus procedimentos de resolução, nesse caso evidenciado pela fórmula da PA (progressão aritmética).

**Professor C**

O professor reconhece uma equação, mas não associou essa situação a uma relação entre conjuntos. Esse professor chegou a escrever $2^x$, porém no item *b* da segunda atividade ele afirma não se tratar de uma equação por não existir uma igualdade, relacionando a situação a uma potenciação.

Esse professor não relacionou a situação matemática apresentada à uma equação por se ressentir da igualdade.

- **Relação com o significado de equação ESTRUTURAL-GENERALISTA**

O significado de equação ESTRUTURAL-GENERALISTA foi concebido por Ribeiro (2007) a partir da observação da maneira como os árabes (como al-Khwarizmi) e os europeus (como Descartes, Abel a Galois)  tratavam e reconheciam equações. Tal significado de equação contempla a seguinte perspectiva: reconhecer uma equação por meio da generalidade de suas proposições e tratá-la de forma a atentar para suas estruturas.

O item k contemplou o significado de equação ESTRUTURAL-GENERALISTA. A busca pela solução de tal equação dependia de um olhar atento para suas estruturas.

**Professor A**

O professor reconheceu durante a resolução da presente situação matemática que o emprego de técnicas de manipulações algébricas tornaria o problema extremamente longo, buscando assim outras maneiras de resolvê-lo.

Esse professor resolveu então aplicar a propriedade distributiva do produto em relação à soma, no numerador e no denominador da equação dada. Terminado esse procedimento ele então procura uma forma de simplificar a equação, recaindo em um procedimento bastante extenso, o que pode ter colaborado para os erros de simplificação que ocorreram na resolução do item.

Embora esse professor tenha reconhecido uma equação nesse item, não possuímos elementos suficientes para julgar se o mesmo o fez em consonância com o significado ESTRUTURAL-GENERALISTA.

**Professor B**

O professor reconheceu durante a resolução da presente situação matemática que o emprego de técnicas de manipulações algébricas tornaria o problema extremamente longo e que esse não seria o melhor caminho.

Embora esse professor tenha reconhecido que o emprego das técnicas de manipulações algébricas não seria a melhor opção para resolver o item, o mesmo também não conseguiu exprimir uma outra possibilidade, ou caminho, de resolução.

**Professor C**

O professor, corroborando com Dreyfus & Hoch (2004) reconheceu durante a resolução da presente situação matemática que o emprego de técnicas de manipulações algébricas tornaria o problema extremamente longo, porém não buscou resolver essa situação através da observação de suas estruturas.

- **Relação com o significado de equação AXIOMÁTICO-POSTULACIONAL**

De acordo com as premissas que sustentam a existência do significado de equação AXIOMÁTICO-POSTULACIONAL, quer sejam, permitir que uma equação seja trabalhada, seja estudada, sem preocupações com uma definição, acreditamos que esse significado de equação seja mais do que um ponto de partida.

Entendemos que ele permeie todos os outros significados e torna-se mais estruturado, na medida em que os demais significados sejam construídos ou consolidados na imagem de conceito dos indivíduos.

Dessa forma podemos dizer que o significado de equação AXIOMÁTICO-POSTULACIONAL está presente na imagem de conceito dos três professores na direção deste como um ponto de partida. Contudo, como os demais significados de equação ou não estão presentes ou não estão consolidados na imagem de conceito do professor, o AXIOMÁTICO-POSTULACIONAL ainda tem muito potencial de desenvolvimento, à medida que os outros significados se estruturem em suas imagens de conceito.

As análises desenvolvidas até o presente momento objetivaram um estudo mais pontual dos dados obtidos nas entrevistas. Passaremos então à realização de uma análise mais aberta, onde buscaremos apontar alguns elementos presentes na imagem de conceito de cada professor.

## 4.2 DESENHANDO A IMAGEM DE CONCEITO DOS PROFESSORES QUANTO À IDEIA DE EQUAÇÃO

O professor A buscou, na maioria das vezes, utilizar uma fórmula, ou algoritmo para resolver as situações-problemas a ele apresentadas.

> A: Ahã, usando a propriedade da adição, é essa a propriedade da adição? Tá, porque é erroneamente você falar que se passa de um lado para o outro com a troca de sinal, tá? Normalmente isso aqui se usa, usa a ... usando a propriedade da adição, tá? O que é que eu faço, quando eu quero eliminar um lado, tá? Você faz a soma do outro lado, como assim... usando a propriedade da multiplicação que você usa para fazer no primeiro membro, o que você faz, a multiplicação que você usa para fazer no primeiro membro, você faz no segundo membro também.

TE 1

Embora ele tenha utilizado corretamente as fórmulas que conhecia, podemos averiguar na TE 1 que o mesmo não sentiu segurança em falar sobre o processo. Tal posicionamento parece ratificar a pesquisa de Dreyfus & Hoch (2004), onde os alunos resolveram as situações matemáticas através de técnicas de resolução, não atentando para as propriedades estruturais envolvidas.

O significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA está presente na imagem de conceito desse professor, uma vez que ele utiliza corretamente as técnicas de resolução de equações, porém esse significado pode se estruturar melhor, em sua imagem de conceito, à medida que esse professor compreenda melhor o processo envolvido na resolução.

A dificuldade desse professor em compreender o processo de resolução das situações que envolviam equações corrobora com a pesquisa de Figueiredo (2007), que relata que os alunos da graduação em Matemática que participaram de sua pesquisa se ressentem de uma disciplina que explique melhor as técnicas utilizadas em Álgebra.

O método de tentativas foi utilizado por esse professor sempre que o mesmo não se recordava de uma fórmula, porém em nenhuma das situações apresentadas esse professor utilizou esse método de forma eficiente, conseguindo encontrar uma resposta correta.

O significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO está presente na imagem de conceito desse professor, uma vez que o mesmo associava a idéia de equação a uma situação prática e a tratava de forma intuitiva.

Esse professor apresenta em sua imagem de conceito uma diferenciação entre equações e fórmulas, e tal diferenciação parece estar fundamentada na existência de uma incógnita, ou variável, conforme podemos observar na figura 56.

P. O item d não é uma equação por quê?
A: Porque já tinha os dados, né? O raio que era minha incógnita eu já tenho aqui, o meu $\pi$ ele já é dado, tá? E o dois que é a constante.
P: Então qual a diferença deste item d para o item c, que também seria uma fórmula?
A: Que aqui oh, ele não tinha a variável, para resolver o comprimento da circunferência eu não tinha variável, poderia ter sim se a ... por exemplo variável fosse dado em diâmetro para achar o raio, então aqui eu não tenho a variável, eu só tinha a preocupação de resolver a fórmula, só.

TE 28

A ideia da incógnita relacionada a equação se mostra bastante forte na imagem de conceito desse professor, assim como as técnicas são normalmente utilizadas por ele, para justificar a existência de uma equação.

Fato curioso é que em nenhum momento esse professor mencionou a ideia de igualdade vinculada à ideia de equação.

Tal fato parece evidenciar-se quando o professor relata que o item j trata-se de uma equação, conforme podemos averiguar na figura 75.

j) Sim. para resolver. foi utilizado as propriedades de simplificação

PR 38

O professor A, na maioria das vezes, buscou um caminho mais rápido para as resoluções das situações apresentadas, se ressentiu por esquecer algumas fórmulas e demonstrou uma confiança muito grande na utilização dessas fórmulas.

Esse professor apresenta também em sua imagem de conceito a ideia de equação ligada a um algoritmo de resolução. Podemos observar no protocolo abaixo que ele busca no item e da atividade 2b, justificar a ideia de equação através, daquilo que ele julgou, possíveis estratégias de resolução.

> A: a, b, c, d, e, esse aqui foi outro também, oh! É uma equa... tá? Aqui... poderia ter resolvido por um sisteminha de equação, para achar o valor de um depois o valor do outro, tá? Esse daqui poderia ter resolvido, não fiz, mas eu poderia ter resolvido por um sistema de equação, tá? Eu vou por aqui, oh, não resolvi mas não... ter resolvido por sistema de equação. Têm duas incógnitas, por isso eu monto um sistema pra saber, tá? Seria x e y, que eu não consigo trabalhar com duas incógnitas, só consigo resolver através de um sistema, tá?

TE 30

O PR 38 e a TE 30 ressaltam que esse professor apresenta em sua imagem de conceito a ideia de equação atrelada aos procedimentos de resolução da mesma, tal perspectiva parece corroborar com Attorps (2003) onde os professores entrevistados associaram a ideia de equação a um algoritmo de resolução.

O professor B parece ter a ideia de equação fortemente atrelada às técnicas de resolução das mesmas. Embora esse professor tenha conseguido utilizar corretamente as técnicas de resolução de equações necessárias nas atividades apresentadas, o mesmo não conseguiu explicitar com clareza o processo.

B. Por que eu fiz? Porque é pra, é... tem a igualdade. Então quando você vai transferir do outro lado da igualdade aí você tem que estar mudando, mudando alguma coisa.
B. Por que mudar? Porque... ai e agora, pego essa... por quê? Por quê?... Então... é uma regra que existe que deve ser quando tem igualdade se você vai... tudo que se faz de um lado tem que fazer do outro, aí quando você vai mudar, transferir do outro lado do sinal do igual, existe essa regra que teria que mudar, o porque realmente no momento eu não estou lembrando, eu sei o porque mas agora no momento.

TE 3

Podemos averiguar na TE 3 que a ideia do princípio de equivalência não está presente na imagem de conceito desse professor, uma vez que suas justificativas se parecem mais com a memorização de outra regra que a da idéia de igualdade ou do princípio de equivalência. Tal fato parece corroborar uma vez mais com Figueiredo (2007), onde os alunos se ressentem de uma disciplina na graduação em Matemática, que aborde os "porquês" da Álgebra elementar.

O significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA está presente na imagem de conceito desse professor, embora esse significado pode se estruturar melhor à medida que esse professor vá compreendendo melhor o processo envolvido nas técnicas utilizadas na resolução de equações.

A figura abaixo explicita a associação que esse professor faz da ideia de equação com as técnicas de resolução das mesmas.

(a) é uma equação porque $(y-1)^2 = -4y$ é preciso encontrar o valor de y.

PR 24

Esse professor associa a ideia de equação com "achar algo", "encontrar o valor da incógnita".

(b) é uma equação porque ~~podemos~~ precisamos encontrar o número de dias e pessoas.

PR 25

O significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO está presente na imagem de conceito desse professor à medida que o mesmo reconheceu uma equação nas situações matemáticas que remetiam a tal significado e buscou em diversos momentos utilizar meios intuitivos, como o método de tentativas, na resolução de tais situações.

Esse professor apresenta em sua imagem de conceito a ideia de equação associada a um algoritmo de resolução, tal fato corrobora com Attorps (2003) onde os professores associaram equação com um método de resolução.

(e) ~~é uma equação~~ não é uma equação e sim um sistema

PR 30

No PR 30 podemos observar que o professor associa a situação apresentada no item e da atividade 2b a um sistema de equações, o que parece nos indicar, que da mesma forma que o professor A, esse professor associa a ideia de equação a um procedimento.

Outro posicionamento do professor que parece corroborar uma vez mais com Attorps (2003) é que o mesmo não associa a ideia de equações a situações matemáticas que remetem a situações que envolvem trigonometria.

(f) não é uma equação porque usamos a trigonometria para resolver.

PR 32

Fato marcante é que esse professor não relaciona a ideia de igualdade à ideia de equação, em diversos momentos ele justifica a existência de uma equação na atividade 2b por meio da existência de uma ou mais incógnitas, porém a igualdade em nenhum momento foi mencionada.

(j) é uma equação com vários valores desconhecidos

PR 38

Conforme averiguamos na figura 76, embora o item j não remetesse a uma equação, esse professor relatou que sim e sua justificativa se pautou na existência de “vários valores desconhecidos”, não atentando para inexistência de uma igualdade.

O professor C apresenta em sua imagem de conceito o significado de equação PROCESSUAL-TECNICISTA, uma vez que o mesmo reconhece uma equação através de seu processo e a trata por meio de técnicas de resoluções das mesmas, corroborando com Dreyfus & Hoch (2004).

O significado de equação INTUITIVO-PRAGMÁTICO também está presente na imagem de conceito desse professor uma vez que o mesmo reconhece uma equação a partir de uma situação prática e a trata de forma intuitiva, geralmente utilizando o método de tentativas.

Não podemos afirmar que o significado de equação ESTRUTURAL-CONJUNTISTA esteja presente na imagem de conceito desse professor, uma vez que embora o mesmo tenha reconhecido, no item b da atividade 2b, uma progressão aritmética, a referida situação matemática remetia à idéia de uma progressão geométrica, o que nos revela que esse professor não compreende bem io comportamento dessa função.

Tal fato se evidencia no momento em que ele busca escrever a função exponencial que retrataria a situação matemática apresentada, conforme podemos constatar na figura PR 7. Embora ele escreva $2^x$ a idéia de igualdade não aparece nesse item.

- **Independente do número de dias como essa situação pode ser traduzida matematicamente?** $2^x$

PR 7

Podemos perceber também que o significado de equação DEDUTIVO-GEOMÉTRICO está presente na imagem de conceito desse professor, uma vez que o mesmo reconhece uma equação apresentada através de uma situação geométrica e apresenta indícios de que a trataria de forma dedutiva. Tal fato se evidencia na figura 89 quando ele associa a intersecção das curvas apresentadas no item *l* da atividade 1, à um sistema de equações.

| |
|---|
| Podemos trabalhar funções, num sistema, o ponto de encontro entre duas retas. |

PR 43

Embora o referido item não remetesse ao encontro de duas retas o relato do professor nos sugere que o mesmo reconhece o encontro de duas retas no plano cartesiano como uma possível representação de um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas e tal fato propiciou a esse professor induzir que tal conclusão poderia se estender à situação apresentada no item *l*, ou seja, associas as intersecções da hipérbole com a parábola como um sistema e equações.

A figura 89 corrobora ainda com Lima (1991) que nos revela a importância de se trabalhar a resolução de equações polinomiais do terceiro grau por meio da intersecção de curvas. Tal perspectiva, contemplada em Lima (1999) poderia ser útil para auxiliar esse professor a “organizar” esses elementos em sua imagem de conceito. Podemos observar ainda, que a ideia de igualdade e de incógnita estão presentes na imagem de conceito desse professor, como podemos observar na figura 56.

| |
|---|
| E. Precisa ter uma igualdade. Uma incógnita é o comprimento da peça. |

TE 27

Fato curioso é que no item *j* o professor relata existir uma equação permeando a situação matemática posta, uma vez que ele identifica uma igualdade e a existência de incógnitas, porém o sinal que o professor utiliza na resolução não nos fornece a ideia do princípio de equivalência e sim, a ideia de “indicar um resultado”, como normalmente esse sinal é empregado em expressões, conforme podemos averiguar na PR 44.

**j) O que é possível fazer diante da situação abaixo?**

$$\frac{4z\sqrt{4x^2+12xy+9y^2}}{4zx+6yz} = \frac{4z\sqrt{(2x+3y)^2}}{2z(2x+3y)} =$$

$$= \frac{4z.(2x+3y)}{2z.(2x+3y)} = 2$$

PR 44

Apresentamos a seguir, uma síntese da imagem de conceito desses professores:

*Significado PROCESSUAL-TECNICISTA.*
*Idéia de equação vinculada à existência de incógnita.*
*Idéia de equação relacionada a técnicas de resolução.*
*Ausência da igualdade como equivalência.*
*Ausência de igualdade como condição de existência de uma equação.*

**Professor A**

*Significado PROCESSUAL-TECNICISTA.*
*Idéia de equação vinculada à existência de incógnita.*
*Idéia de equação relacionada a técnicas de resolução.*
*Ausência da igualdade como equivalência.*
*Ausência de igualdade como condição de existência de uma equação.*

**Professor B**

*Significado PROCESSUAL-TECNICISTA.*
*Significado INTUITIVO-PRAGMÁTICO.*
*Indício do significado de equação ESTRUTURAL-CONJUNTISTA.*
*Significado de equação DEDUTIVO-GEOMÉTRICO.*
*Idéia de equação vinculada à existência de incógnita.*
*Idéia de equação relacionada à presença do sinal de igual.*
*Idéia de equação relacionada a técnicas de resolução.*

**Professor C**

## 4.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Buscamos em nossa pesquisa investigar quais significados de equação (Ribeiro, 2007) estão presentes nas concepções dos professores de Matemática ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação.

Para isso desenvolvemos uma pesquisa de caráter qualitativo, composta por entrevistas semi-estruturadas, nas quais os professores participantes buscaram resolver duas atividades elaboradas especificamente para nossa coleta de dados. O objetivo da primeira atividade foi levantar informações que nos revelasse de que forma os professores tratam situações matemáticas que remetem à ideia de equação. A segunda atividade teve por objetivo investigar se os professores reconheciam uma equação permeando algumas das situações matemáticas contempladas na primeira atividade.

O paradigma de pesquisa por nós utilizado permitiu ao pesquisador uma maior flexibilidade quanto à utilização do instrumento de coleta de dados, podendo o mesmo intervir sempre que se fizer necessário. Vale lembrar que utilizamos as ideias de Multisignificados de Equação e de Imagem de Conceito e Definição de Conceito em nossas análises.

Nosso estudo revelou que os professores por nós investigados utilizam corretamente as técnicas envolvidas na resolução de equações. Contudo, observamos que eles sentem dificuldades em explicar os procedimentos utilizados. Assim, ratificamos algumas das considerações apontadas em Figueiredo (2007), nas quais alunos da Licenciatura em Matemática se ressentem de uma abordagem de ensino nos primeiros anos da graduação que explique um pouco dos porquês envolvidos das soluções de atividades em Álgebra Básica.

A constatação de que os professores utilizam corretamente as técnicas de manipulações algébricas, porém não compreendem muito bem o processo, parece ainda corroborar também com a pesquisa desenvolvida por Dreyfus & Hoch (2004). Observamos que os professores de nossa pesquisa, assim como os sujeitos investigados por estes últimos pesquisadores, não reconhecem a estrutura interna da equação, como o princípio de equivalência, e partem para a utilização de manipulações algébricas.

Constamos que apenas um dos significados que compõe os Multisignificados de Equação está presente na imagem de conceito dos três professores participantes da pesquisa: o significado PROCESSUAL-TECNICISTA. Contudo, esse significado ainda se mostra pouco estruturado na imagem de conceito desses indivíduos, uma vez que conflitos cognitivos surgiram no momento em que esses professores buscavam justificar as técnicas de resolução utilizadas.

Um dos professores apresentou em sua imagem de conceito, além dos significados mencionados acima, o significado DEDUTIVO-GEOMÉTRICO. Porém, podemos observar nas reflexões a seguir, que tal significado ainda não está pouco estruturado em sua imagem de conceito.

No item *b* da atividade 1 (que remetia ao significado de equação Estrutural-Conjuntista) o professor escreve $2^x$, porém busca uma resolução através do método de tentativas, enquanto que no item *l* da atividade 2b (que remetia ao significado de equação Dedutivo-Geométrico), o professor reconhece os pontos de intersecção das curvas apresentadas como representações de um sistema de equações, porém no item *c* da atividade 1 (que remetia ao mesmo significado de equação) ele abandonou o item não esboçando nenhuma estratégia de resolução.

Ao buscar identificar quais significados de equação (Ribeiro, 2007) estavam presentes na imagem de conceito dos professores participantes da pesquisa, outros elementos se manifestaram. Um deles podemos dizer que é a ideia de equação vinculada a um algoritmo de resolução, o que vem a corroborar com a pesquisa de Attorps (2006), pois ela relata que alguns dos professores, por ela investigados, só reconheciam uma equação quando conheciam um algoritmo de resolução para aquela situação.

Outro elemento que aparece bastante contundente na imagem de conceito dos três professores é a ideia de equação vinculada à ideia de incógnita. Isto parece nos indicar uma vez mais que esses professores relacionam a ideia de equação a um algoritmo de resolução, quer seja, “achar o valor de x”.

A ideia de igualdade não parece estar tão presente quanto a de incógnita, uma vez que a primeira delas raramente foi mencionada. Um fato interessante em relação à essa questão ficou por conta do Professor C. Ele utilizou a existência de incógnita e o sinal de igual para justificar a existência de uma equação, ou seja, ele não considerou a ideia de igualdade ou o princípio de equivalência, mas sim, o sinal de igual. Percebemos isso quando ele relata existir uma equação no item *j* da atividade 1, que na verdade se tratava de uma expressão algébrica.

Já em relação aos professores A e B, pudemos observar que o princípio de equivalência entre os membros de uma equação não está presente em suas imagens de conceito, pois eles relatam que “o que você faz de um lado tem que fazer do outro”, como alguém que cita mais uma “regra decorada”, sem ser capaz de explicar essa regra.

Percebemos em nossa pesquisa que a presença de diferentes significados de equação na imagem de conceito dos professores ainda é bastante limitada, estando muito vinculada a ideia do princípio de equivalência e principalmente à técnicas de resolução, e à existência de incógnita. A ideia de igualdade aparece mais estruturada nas concepções do Professor C do que na dos demais professores. O Professor C relaciona tal ideia ao princípio de equivalência embora se confunda quando o sinal de igual remete à ideia de operação, como no caso da expressão aritmética do item j da atividade 1. O Professor A não menciona a ideia de igualdade ao classificar as situações da atividade 2b, enquanto o Professor B se mostra bastante propenso a utilização de métodos aritméticos.

Podemos perceber que embora os três professores possuam elementos parecidos em sua imagem de conceito sobre a ideia de equação o Professor A foi o que mais se ressentiu da ausência de fórmulas e buscou com mais veemência encontrá-las. O professor B foi o que se mostrou mais aberto a buscar métodos intuitivos na resolução das situações matemáticas postas, enquanto o professor C também demonstrou uma certa dependência das fórmulas de resolução.

Como nos revela Martins (2008), a busca por significados de equações algébricas nas pesquisas por ele analisadas é o assunto que mais interessa a pesquisadores em educação algébrica. Neste sentido, acreditamos que a abordagem dos Multisignificados de Equação com professores de Matemática possa ampliar suas concepções, aumentando sua imagem de conceito a respeito da ideia de equação.

Acreditamos que com esses elementos a continuação do projeto mais amplo, quer seja, investigar quais as contribuições que a discussão dos Multisignificados de equação pode trazer para professores e futuros professores de Matemática, seja favorecida à medida que os futuros pesquisadores poderão ter uma mapeamento das imagens de conceito de alguns professores de Matemática quanto à ideia de equação. Assim, na fase interventiva, eles podem se atentar para quais significados de equação precisam ser “apresentados” aos professores a fim de se ampliar suas concepções e quanto à ideia de equação.

Esperamos com este trabalho colaborar com nossos colegas professores de Matemática levantando reflexões quanto aos significados que normalmente atribuímos à ideia de equação e as maneiras como nossas imagens de conceito podem ser ampliadas. Essa ampliação pode nos possibilitar compreender melhor, os diferentes significados que podem ser atribuídos a essa ideia matemática.

Investigar a imagem de conceito de indivíduos não é uma tarefa fácil. Buscamos no decorrer de todo o trabalho, respeitar a individualidade e os limites dos professores envolvidos e sermos os mais honestos e imparciais possíveis. A utilização de uma metodologia de pesquisa pautada em entrevistas semi-estruturadas pareceu-nos o mais adequado às nossas ambições de pesquisa. Precisávamos de um instrumento de pesquisa que nos desse a necessária flexibilidade para "percorrer" partes da imagem de conceito dos professores e resgatarmos o máximo de informações que os mesmos pudessem nos revelar.

Devido a diferentes limitações que qualquer pesquisa sempre apresenta, gostaríamos de contribuir com novas pesquisas, com alguns de nossos questionamentos:

- Como se dá a produção de significados relacionados à equação na imagem de conceito dos indivíduos?

- Propiciando uma problematização dos Multisignificados de Equação na formação inicial e/ou na formação continuada dos professores, podemos auxiliar na ampliação da imagem de conceito desses professores e contribuir assim com sua prática?

- Propiciando aos alunos da Educação Básica, situações de aprendizagem em que sejam contemplados os Multisignificados de Equação, podemos auxiliar na ampliação da imagem de conceito desses alunos?

- Como desenvolver uma metodologia de pesquisa, devidamente reconhecida pela comunidade científica, que seja capaz de investigar com profundidade boa parte das estruturas cognitivas referentes à imagem de conceito de indivíduos?

# Referências

ATTORPS, I. **Mathematics teachers' conceptions about equations**. Helsinki, 2006. 250 p. (Thesis in Applied Education). University of Helsinki.

ATTORPS, I. Teachers' Images of the 'Equation' Concept. In: European Research in Mathematics Education III, 2003. Disponível em **internet** no site http://ermeweb.free.fr/cerme3/groups/tg1/tg1_list_html, acessado em 15/12/2006, às 19h53.

BARBOSA, Y. O. **Estudando as concepções de equação de alunos das últimas séries do Ensino Fundamental**. São Paulo, 2006. 60 p. Iniciação Científica. Universidade Paulista.

BOOTH, W. C.; COLOMB, G, G.; WILLIAMS, J. M. **A Arte da Pesquisa**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

DANTE, L. R. **Matemática – 1ª série**. São Paulo: Ática, 2005.

DOMINONI, N. **Utilização de diferentes registros de representação: um estudo envolvendo funções exponenciais**. Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, 2005.

DREYFUS, T.; HOCH, M. Equations: A structural approach. **Proceedings of the 28th Conference Of International Group for the PME**, 2004, p. 1-152 – 1-155.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In MACHADO, S. D. A. (org) **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33.

FIGUEIREDO, A. **Saberes e Concepções de Educação Algébrica em um Curso de Licenciatura em Matemática**. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática; percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A., MIGUEL, A. Contribuição para um repensar ... a Educação Algébrica Elementar**. Pro-Posições**, Faculdade de Educação da Unicamp, vol 4, n. 1[10], PP. 79-91, mar, 1993.

______. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? **Pro-Posições**, Faculdade de Educação da Unicamp, vol 3, n. 1[7], PP. 39-54, mar, 1992.

GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos Computacionais o Caso da Derivada**. Rio de Janeiro, 2004. 229 p. Tese (Doutorado em Ciências). Universidade Federal do Rio de Janeiro.

LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

LIMA, R. N. **Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas**. São Paulo, 1999. 173 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MARTINS, A. M. **Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no Ensino Fundamental**. São Paulo, 2008. 121 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

POMMER, W. M. **EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio**. São Paulo, 2008. 153 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PONTE, J. P. **Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação**. Educação Matemática: temas de investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, p. 185-239.

.
RIBEIRO, A. J. **Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP**. São Paulo, 2001. 116 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

______.**Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico**. São Paulo, 2007. 141 p. (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, n. 22, 1991, p. 1-36.

TALL, D.; VINNER, S. 1981. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. In D.O. Tall (ad.), **Educational Studies in Mathematics**, 12. 151-169.

VINNER, S. 1991. The Role of Definitions in the Teaching and Learning Mathematics. In D.O. Tall (ed.), **Advanced Mathematical Thinking**, Kluwer, Dordrecht, pp. 65-81.

VINNER, S.; DREYFUS, T. 1991. Images and definitions for the concept of function. **Journal of Research in Mathematics Education**, 20 (5), pp. 356-366.

# ANEXOS

# ANEXO A

# INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

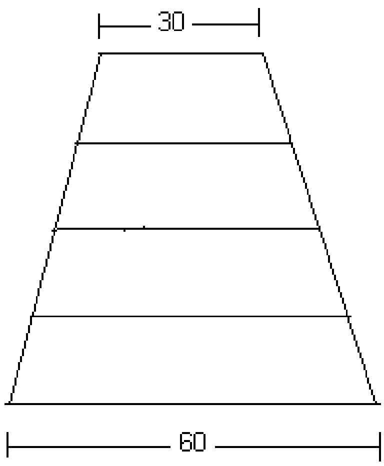
**Atividade 1. Observe as situações a seguir e responda cada uma delas:**

a) Determine os valores de y para os quais a expressão $(y-1)^2$ é igual a -4y.

b) Um boato se espalha da seguinte maneira: no 1º dia duas pessoas ficam sabendo do boato, no 2º dia cada uma dessas duas pessoas conta o boato para outras duas pessoas, no 3º dia cada uma das quatro pessoas conta o boato para outras duas pessoas, e assim por diante.

- Quantas pessoas saberão do boato após 5 dias?
- Quantos dias deverão se passar para que 32768 pessoas saibam do boato?
- Independente do número de dias como essa situação pode ser traduzida matematicamente?

c) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm conforme a figura. Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira. Qual deve ser o comprimento dessa peça (para construir apenas os 5 degraus)?




d) Calcule o comprimento de uma circunferência de raio 2 cm.

e) Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD custa R$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R$ 70,00?

f) Um mergulhador percorreu uma distância de 40m entre a superfície e o fundo do mar, segundo uma trajetória retilínea que forma um ângulo de 60º com a superfície.

*a*) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

*b*) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?

g) Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.

- O plano A cobra R$ 100,00 de inscrição e R$ 50,00 por consulta num certo período;
- O plano B cobra R$ 180,00 de inscrição e R$ 40,00 por consulta no mesmo período.

Em que condições podemos afirmar que o Plano A é mais econômico que o Plano B?

h) Um mutuário comprou um apartamento por R$100.000,00 financiado por um banco com taxa de juros de 15% ao ano. Logo no primeiro mês ele perdeu o emprego e não pagou nenhuma parcela. O mutuário demorou algum tempo para conseguir uma recolocação no mercado de trabalho e durante esse período não pagou as prestações do apartamento. Quando foi verificar sua dívida junto ao banco, descobriu que agora devia um total de R$152.087,50. Quantas prestações ele deixou de pagar?

i) Em uma determinada cidade, 30% das mulheres casadas se divorciam e 20% das mulheres solteiras se casam por ano. Existem 8000 mulheres casadas e 2000 mulheres solteiras. Supondo que a população total de mulheres permanece constante, quantas mulheres estarão casadas e quantas estarão solteiras depois de 1 ano? E depois de 2 anos?

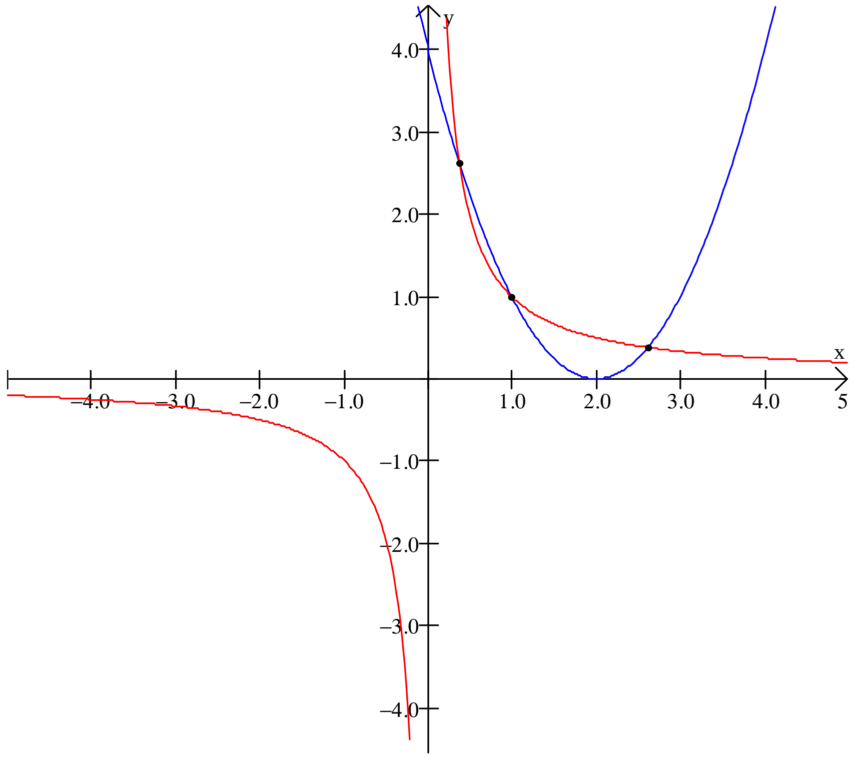
j) O que é possível fazer diante da situação abaixo?

$$\frac{4z\sqrt{4x^2+12xy+9y^2}}{4zx+6yz}$$

k) Resolva a sentença matemática abaixo, encontrando o(s) valore(s)
de x.

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}=1$$

l) O poeta, filósofo e matemático árabe Omar Khayyam descobriu uma forma de resolver alguns problemas matemáticos que na época pareciam impossíveis de serem resolvidos. Hoje conseguimos resolver problemas como aquele com a ajuda de ferramentas matemáticas desconhecidas na época de Omar Khayyam. Abaixo está apresentada a maneira como Khayyam tratava o problema matemático em questão. Afinal, de qual problema estamos falando e que ajudou a Omar Khayyam se tornar uma importante figura na história da Matemática?




**Atividade 2a. Existe um objeto matemático que está presente em algumas das situações da Atividade 1. Qual é este objeto matemático e em quais situações ele está presente? Justifique como você chegou a esta conclusão.**

**Atividade 2b. O objeto matemático ao qual nos referimos na Atividade 2a é EQUAÇÃO. Retomando as situações da Atividade 1 em quais delas você reconhece este objeto matemático? Justifique sua resposta.**

# ANEXO B

# QUESTIONÁRIO DO PERFIL DO PROFESSOR

**Este questionário tem por finalidade de investigar o perfil do professor entrevistado. Tal perfil refere-se aos aspectos profissionais e acadêmicos.**

Nome_____________________________________________ (pode ser um pseudônimo)

Sexo: M ( ) F ( )

Idade:___________________

Aspectos Profissionais

Em quantas escolas você leciona?

_________________________________________________________________

A(s) escola(s) onde você leciona pertence à rede:

( ) Pública ( ) Privada ( ) Uma Pública outra Privada

Há quanto tempo você leciona?_______________________________________

Séries e Níveis de Ensino que já trabalhou:

| Nível | Séries | Tempo em exercício |
|---|---|---|
| Fundamental I | | |
| Fundamental II | | |
| Ensino Médio | | |
| Ensino Superior | | |

Séries e Níveis de Ensino que trabalha atualmente:

| Nível | Séries |
|---|---|
| Fundamental I | |
| Fundamental II | |
| Ensino Médio | |
| Ensino Superior | |

Aspectos Acadêmicos

O Ensino Médio que você cursou foi:

( ) Público ( ) Particular ( ) Regular ( ) Supletivo ( ) Diurno ( ) Noturno

No quadro abaixo especifique sua formação acadêmica. Caso você possua mais do que um título em qualquer dos itens, cite-os também.

| Formação | Instituição Pública ou Privada | Ano de Conclusão | Horário do Curso | Tempo de Duração do Curso | Modalidade do Curso (EAD, normal, semi-presencial) |
|---|---|---|---|---|---|
| Graduação | | | | | |
| Especialização com carga horária inferior a 360 horas | | | | | |
| Especialização com carga horária superior a 360 horas | | | | | |
| Formação | Instituição Pública ou Privada | Ano de Conclusão | Horário do Curso | Tempo de Duração do Curso | Modalidade do Curso (EAD, normal, semi-presencial) |
| Mestrado (qual área) | | | | | |
| Doutorado (qual área) | | | | | |
| Outros | | | | | |

# ANEXO C

# TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

**UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO**
**CONSELHO DA PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA**
**Programa de Pós-graduação *stricto sensu* em**
**Educação Matemática**

**Pesquisa:** ***Investigando os Multisignificados de Equação em Professores de Matemática.***

**Termo de Consentimento Livre e Esclarecido**

Eu, ____________________________________________________________, com ___ anos de idade, portador (a) do RG ________________________, residente na ____________________________________________________, com número de telefone ____________________________ e e-mail _____________________________, abaixo assinado, dou meu consentimento livre e esclarecido para participar como voluntário da pesquisa supra citada, desenvolvida pelo aluno de mestrado Yuri Osti Barbosa, sob a responsabilidade e orientação do Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, no curso de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da UNIBAN.

Assinando este Termo de Consentimento, estou ciente de que:

1) O objetivo da pesquisa é investigar as concepções de equação presentes em professores de Matemática;
2) A realização desta pesquisa é de fundamental importância para avanços nas reflexões sobre o ensino e aprendizagem de Álgebra;
3) O estudo limita-se às respostas aos questionários e a uma entrevista sobre os conhecimentos de Álgebra;
4) Assim que for terminada a pesquisa, terei acesso aos resultados globais do estudo;
5) Estou livre para interromper, a qualquer momento, minha participação nesta pesquisa;
6) Minha participação nesta pesquisa é voluntária e não remunerada;
7) Meus dados pessoais serão mantidos em sigilo e os resultados obtidos com a pesquisa serão utilizados apenas para alcançar os objetivos do trabalho, incluindo a publicação na literatura científica especializada e apresentação dos resultados em eventos nacionais e internacionais;

8) Poderei entrar em contato com os pesquisadores sempre que julgar necessário. Com Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, no telefone (11) 9633-5253 ou pelo e-mail alessandro.ribeiro@uniban.br, com o mestrando Yuri Osti Barbosa, no telefone (11) 7227-4810 ou pelo e-mail profyuribarbosa@gmail.com;
9) Obtive todas as informações necessárias para poder decidir conscientemente sobre a minha participação na referida pesquisa;
10) Este Termo de Consentimento é feito em duas vias, de maneira que uma permanecerá em meu poder e a outra com os pesquisadores responsáveis.

São Paulo, ______de ____________________ de 2009.

_________________________________________

assinatura do participante

_________________________

Prof. Dr. Alessandro Jacques Ribeiro
RG 19.801.977

_________________________

Mestrando Yuri Osti Barbosa
RG 22.069.695.0