Fundação Getúlio Vargas

Escola de Pós-Graduação em Economia – EPGE

Aplicações de Modelos de Procura para Bens Duráveis de Baixa Liquidez

Dissertação submetida à Escola de Pós-Graduação em Economia

da Fundação Getulio Vargas como requisito de obtenção

do título de Mestre em Economia

Aluno: Marcus Eduardo Mathias Studart

Orientador: Ricardo de Oliveira Cavalcanti

Rio de Janeiro

Junho 2009

Fundação Getúlio Vargas

Escola de Pós-Graduação em Economia – EPGE

Aplicações de Modelos de Procura para Bens Duráveis de Baixa Liquidez

Dissertação submetida à Escola de Pós-Graduação em Economia

da Fundação Getulio Vargas como requisito de obtenção

do título de Mestre em Economia

Aluno: Marcus Eduardo Mathias Studart

Banca Examinadora:

Ricardo de Oliveira Cavalcanti (EPGE/FGV)

Luis Henrique Bertolino Braido (EPGE/FGV)

Alexandre B. Cunha (IBMEC-RIO)

Rio de Janeiro

Junho 2009

Agradecimentos

Agradeço a todos os colegas de mestrado, pelos diversos momentos de companheirismo e por nossas inúmeras conversas diárias sobre Economia.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Ricardo Cavalcanti, pelas proveitosas discussões sobre Macroeconomia e pesquisa, e também pelo apoio dado a minha dissertação de mestrado.

Agradeço também ao Prof. Luis Braido, meu co-orientador, pelo apoio e pelos seus conselhos, importantes para a minha dissertação.

Por último, agradeço a Viviane, minha esposa, pela paciência e o apoio que me foi dado nos momentos díficeis durante estes anos de mestrado.

Resumo

Utilizo modelos de search para estudar mercados descentralizados de bens duráveis. Exploro o conceito de liquidez de mercado de Lippman e McCall(1986) e mostro que a teoria de procura ótima é útil para abordar as seguintes questões: O que governa o tempo necessário para realizar uma transação nestes mercados? Qual a relação entre o preço dos bens e o tempo necessário para realizar transações? Por que é ótimo esperar para comprar ou vender bens quando indivíduos descontam a utilidade futura? Qual é o nível de procura socialmente ótimo? Duas especificações são usadas, o modelo tradicional de job search e uma versão do modelo de Krainer e LeRoy(2001)

Abstract

I use Search models to study decentralized markets of durable goods. I explore the concept of market liquidity of Lippman and McCall (1986) and show that the theory of optimal search is useful to address the following issues: What governs the time required to make a transaction on these markets? What is the relationship between the price of goods and the time required to make transactions? Why is optimal to wait to make a transaction in markets where individuals discount future utility? What is the socially optima search level? Two specifications are used, the traditional model of job search and a version of Krainer and LeRoy (2001) model.

Palavras Chave: Search, liquidez, tempo até a venda.

Sumário

Introdução

Pesquisadores na área de economia possuem poucas teorias sobre o que governa o tempo para venda de um ativo. Nos modelos tradicionais de equilíbrio geral, o tempo exigido para realizar a negociação de um ativo é exatamente zero. Isto pode ser um indício de que as trocas ocorrem muito facilmente nesta tradição de modelos. O que não é surpreendente, visto que o leiloeiro walrasiano, como conhecedor das necessidades de cada indivíduo, é capaz intermediar todas as possíveis transações da economia. A cada nível de preço, ele reúne as ofertas individuais de cada agente e as distribui aos compradores conforme os desejos de cada um. O preço de equilíbrio é aquele que iguala a oferta à demanda agregada.

Em mercados de bens duráveis, como o de casas, os indivíduos participantes não dispõem de uma estrutura tão centralizada de trocas, onde é possível observar todos os ativos disponíveis para a venda e os serviços de cada bem. Talvez porque o custo social de instituir um sistema que disponibilize toda a informação necessária seja alto demais. Por mais que possamos ver fotos e descrições de apartamentos ou automóveis pela internet, algumas "qualidades" seriam dificilmente descobertas sem visita presencial. Por esta razão, o custo de obter informações sobre os serviços destes bens é uma realidade em determinados mercados. Além disso, mesmo que fosse viável este sistema perfeito de informação, nem todos os participantes podem estar presentes a todo instante, fazendo com que alguns desistam de transacionar na esperança de poder realizar no futuro o mesmo negócio com termos de troca mais favoráveis.

Ainda que modelos de equilíbrio geral tenham papel importante em muitas áreas de economia, o conceito de equilíbrio adotado impede que transações levem tempo para serem realizadas. Pode ser útil estudar o que governa o tempo necessário para realizar trocas pelo simples fato que o tempo perdido entre transações tem implicação direta sobre o bem estar dos indivíduos. Um estudo mais detalhado de economias onde as trocas não ocorrem tão facilmente pode, portanto, revelar questões pertinentes, como a relação entre o preço negociado e tempo necessário para realizar a venda, ou ainda por que postergar a compra ou a venda pode ser racional quando os agentes descontam a utilidade no tempo. Estas perguntas não podem ser respondidas se seguíssemos a tradição de equilíbrio geral.

Portanto a estrutura teórica deve ser outra. Por que modelos de search? Modelos de search foram muito utilizados na área de Labor Economics para estudar porque mesmo em momentos de grande crescimento econômico sempre existe uma parcela significante da população em desemprego. Os economistas da tradição keynesiana consideravam que o desemprego era um problema de rigidez nominal e muitas políticas econômicas foram propostas utilizando este diagnóstico. No entanto, durante a década de 70, um grupo de economistas revolucionou aquela área de pesquisa ao propor que ficar desempregado pode ser uma escolha racional e que o desemprego é um fenômeno de equilíbrio.

Modelos de Random Matching, como também são conhecidos, foram bastante empregados para estudar questões monetárias. O ambiente físico típico desta tradição de modelos reúne 2 características essenciais para que a moeda fiat tenha valor no equilíbrio: a anonimidade dos indivíduos e a impossibilidade da firmar compromissos futuros. A moeda tem valia porque reduz o tempo necessário para realizar as trocas.

Utilizo este tipo de modelo para abordar as questões relacionadas ao tempo necessário para realizar transações de bens duráveis, abstraindo das questões ligadas a moeda. A estrutura teórica adotada neste trabalho não é nova ou muito diferente do que já foi produzido em Labor ou Monetária. O que faço é empregar os desenvolvimentos já realizados, principalmente em Labor Economics, para mapear o funcionamento das trocas em mercados de bens duráveis com pouca liquidez, identificando como as fricções de troca afetam o preço negociado; o tempo necessário para a realização das transações; a distribuição de equilíbrio dos ativos; bem como o bem estar dos participantes do mercado.

Assim como Lippman e McCall(1986), defino o conceito de liquidez de mercado com uma característica do equilíbrio da economia, algo que é conseqüência do processo decisório dos indivíduos e da estrutura das trocas. Quase sempre, a liquidez do mercado esteve associada à velocidade ou rapidez de realização das transações, mas somente a partir do trabalho de Lippman e McCall, temos uma medida operacional e precisa deste conceito. Na visão destes autores, um mercado é mais líquido quanto menor é a média de tempo necessário para realizar uma transação considerando que indivíduos são racionais e maximizam a utilidade esperada.

Não obstante a dificuldade física de realizar transações estar sempre presente neste trabalho, podemos atribuir as causas da baixa liquidez de um mercado a apenas duas hipóteses primordiais: 1) Os indivíduos discordam quanto ao fluxo de serviços gerados pelos bens (heterogeneidade de preferências). 2) O indivíduo que faz a oferta não é capaz de extrair informação sobre as preferências da outra parte (informação assimétrica).Caso qualquer uma destas hipóteses falhe, não haveria porque não ocorrer a troca em um dado encontro entre comprador e vendedor. As transações ocorreriam lentamente no equilíbrio apenas quando houvesse restrições físicas que dificultassem o encontro das partes. Nestas circunstâncias, a baixa liquidez estaria determinada exogenamente o que tornaria o problema menos interessante do que realmente é.

É fácil perceber porque as duas hipóteses são suficientes para que as trocas não ocorram sempre durante um encontro. Caso todos tivessem as mesmas preferências sobre bens duráveis, a estratégia ótima para o vendedor seria cobrar exatamente a utilidade esperada descontada que indivíduo obtém com os fluxos de serviços do bem. O comprador aceitaria a oferta, pois o fluxo gerado compensa o investimento inicial, não havendo porque ele esperar pela próxima oferta. Por outro lado, caso fosse possível extrair o fluxo de serviços que o comprador espera receber com bem, de forma semelhante, o dono poderia cobrar a utilidade descontada do indivíduo, e este tipo de transação seria sempre realizada.

Este trabalho está dividido em duas partes. Na primeira seção, utilizo a estrutura de job search para definir o problema de procura ótima pela ótica do vendedor e discutir liquidez. Esta abordagem pode ser vista como uma análise de equilíbrio parcial, posto que as ofertas seguem uma distribuição exógena F. A simplicidade deste modelo permite extrair bastante informação sobre as variáveis de equilíbrio. Faço estáticas comparativas que identificam como preços e a liquidez variam com os parâmetros de especificação da economia.

Na segunda seção, questiono de onde vêm as expectativas dos agentes com relação à distribuição de ofertas e faço o mesmo esforço para mapear a dependência das variáveis de equilíbrio com os parâmetros do modelo adotado. Nesta estrutura, tanto compradores quanto vendedores participam do processo de procura. O maior realismo na descrição do mercado torna mais difícil resolver o modelo. Para contornar esta dificuldade, somos obrigados a fazer hipóteses mais restritas sobre as preferências dos indivíduos. O equilíbrio é computado numericamente e no fim, faço uma breve análise sobre bem estar do mercado. Concluo que o nível de procura do equilíbrio está abaixo do nível que maximiza o bem estar social.

1 One Sided Search

Suponha que em determinada economia, indivíduos vivam isolados uns dos outros e que certo indivíduo deseja vender um bem durável do tipo X. A notícia sobre a venda do bem chega lentamente aos demais indivíduos e tempos diferentes, fazendo com que os interessados contactem o vendedor em diferentes momentos. Em todo instante, o vendedor decide se espera mais ofertas chegarem ou se sai do mercado. Caso decida parar, ele vende o bem para o último ofertante ou para aquele que fez a maior oferta até o momento.

Quando o vendedor estabelece um preço mínimo para transacionar o bem, a troca é realizada caso pelo menos um dos lances recebidos exceda este mínimo. Quando este mínimo é excessivamente alto, mas há poucos interessados em pagar acima daquele preço, a espera pode ser longa. Longas esperas são subótimas porque existe um custo de manutenção em cada período. Além disso, postergar demais o consumo pode não ser racional quando os indivíduos descontam a utilidade futura.

Por outro lado, caso o vendedor estabeleça um preço mínimo muito baixo, provavelmente a transação ocorrerá rápido. Entretanto, caso cobrasse um pouco mais pelo bem, é possível que o ganho de utilidade com a diferença obtida na venda compensasse o custo adicional e a espera maior. Por este motivo, a escolha do indivíduo se depara com um trade-off entre maior receita e maior tempo para realizar a venda.

Neste tipo de problema, a escolha do indivíduo é uma regra de parada que maximiza a sua utilidade esperada. Esta regra é função do custo de manter o ativo em carteira, da taxa de impaciência e do processo estocástico de ofertas.

1.1 Environment

Considere um indivíduo neutro ao risco que vive eternamente. O tempo é contínuo e o conjunto do tempo de chegada das ofertas é $\{S_i : i \in \mathbb{N}\}$, sendo $S_i = \sum_{j=1}^{i} T_j$, para todo i natural. Os tempos entre as ofertas, T_j, são variáveis aleatórias com distribuição conhecida pelo indivíduo e podem ser independentes ou não. Defina $\tilde{T}$ como o conjunto de tempo de paradas, X_i as ofertas aleatórias e Y_i como a última oferta recebida pelo indivíduo, ou o valor máximo i ofertas recebidas, caso seja possível o recall de lances passados.

O problema do indivíduo é escolher um tempo de parada que maximize seu ganho esperado do processo de venda

$$\max_{\tau \in \tilde{T}} E\left[R(\tau)\right] = E\left[e^{-r\tau} Y_{N(\tau)} - \int_0^{\tau} e^{-rt} c(t) dt\right]$$

$$s.a$$

$$Y_i = \begin{cases} X_i \\ \max\{X_1, X_2, X_{3,...}, X_i\} \end{cases}$$

$$N(\tau) = \max\{t : S_t \leq \tau\}$$

1.2 Liquidez

O tempo de parada ótimo τ^* é uma variável aleatória oriunda da maximização do indivíduo e que depende, portanto, da taxa de desconto r, da função custo $c(t)$ e do processo estocástico dos encontros e das ofertas. Neste sentido, uma realização favorável do tempo de venda depende da sorte do indivíduo em encontrar rapidamente compradores que ofertem valores acima do preço de reserva. Realizações extremamente desfavoráveis, isto é, poucos encontros e ofertas abaixo a média da distribuição, fazem com que o tempo efetivo seja acima da média de τ^*.

Pensando o problema acima como o de um vendedor representativo, podemos mensurar a liquidez do mercado através da média de τ^*, $E[\tau^*]$. Quanto menor é média de tempo necessário para realizar uma transação neste mercado, e quando as estratégias são racionais, maior é a liquidez.

Um ativo é perfeitamente líquido quando $E[\tau^*] = 0$ e não líquido quando $E[\tau^*] = \infty$. Casos intermediários são, no entanto, os mais comuns. Por ser um bem utilizado para intermediar trocas, podemos imaginar que a moeda desempenhe o papel do ativo perfeitamente líquido, pois pode ser trocado por outro bem qualquer instanteanemente. Um ativo ilíquido, por outro lado, não pode ser vendido no equilíbrio. Isto ocorre quando o ativo é mais valioso para vendedor do que para todos os possiveis compradores presentes no mercado. No modelo, o ganho descontado de aguardar mais ofertas sempre excede o ganho de aceitar uma oferta, talvez porque gere um fluxo de utilidade e seu valor trazido a valor presente pode ser maior do que maior o limite superior do suporte da densidade de ofertas. O vendedor sobreavalia o bem, porque o ativo pode ter um valor sentimental alto para o vendedor no entanto gera pouca utilidade para possiveis compradores, ou porque assimetrias informacionacionais induzem os compradores a subavaliarem o bem.

1.3 Search

A estrutura apresentada acima é bastante geral e abrange muitas possíveis especifições de mercados de bens duráveis. Mas muito pouco foi dito sobre a forma como as variáveis de equílibrio se relacionam no equilíbrio e de que maneira dependem da estrutura de ofertas, de custos e da impaciência dos indivíduos. É necessário, portanto, detalhar mais a estrutura da economia com a finalidade de responder as perguntas enunciadas no abstract.

Modelos estacionários de Job Search são extremamente utéis para este propósito. São matematicamente simples e o equílibrio depende de poucos paramêtros, o que possibilida fazer estáticas comparativas com uso de ferramentas básicas de cálculo.

O Environment definido na seção anterior pode ser modificado de forma a trazer o problema acima para este território conhecido com poucas alterações.

Suponha que o tempo entre as ofertas agora siga distribuição Poisson com arrival rate $\lambda > 0$, como na maioria dos modelos de job search em tempo contínuo. Este tipo de distribuição é extremamente conveniente para o tipo de problema com o qual vamos abordar. Quando chega uma oferta e valor ofertado é sorteado a partir de uma função distribuição $F : [0, \infty) \to [0, 1]$ com média finita. Assumo independência entre as ofertas recebidas e tambem que o custo líquido é constante no tempo e igual à $c \in \mathbb{R}$. Estas hipóteses permitem simplificar bastante o problema sem perder muita generalidade nos resultados à seguir. Desta maneira, temos apenas três parâmetros, r, λ e c, e uma função de distribuição parametrizando as variáveis de equilíbrio.

1.4 Equações de Bellman

Para encontrar soluções para o problema de maximização do vendedor, utilizamos programação dinâmica.

$$V(\Theta(t), t) = -ch + e^{-rh} E\left[\max\{V(\Theta(t+h), t+h), W(x)|\Theta(t); t\right]$$

$$V = -ch + e^{-rh}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(p(i,h)\int_0^{\infty}\max[V, W(x)]dG(x,i)\right) + p(0,h)\,(V)\right] \quad (1.1)$$

$$\frac{\left(1 - e^{-rh}\right)}{h}V = -c + \frac{e^{-rh}}{h}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(p(i,h)\int_0^{\infty}\max[0, W(x) - V]dF^i(x)\right)\right]$$

Considerando pequenos intervalos de tempo h, escrevo acima as equações de Bellman em tempo discreto. Na primeira equação, percebemos que a função valor do processo de venda em t, $V(\Theta(t), t)$, dado o conjunto de informação do indivíduo, é igual ao custo de manutenção do bem no período somado a esperança condicional do máximo entre a função valor do processo de venda em t+h e a receita $W(x)$ obtida com a venda

O conjunto de informação não evolui com o tempo, já que o vendedor não aprende nada além do que já sabe no período inicial. Dessa maneira, podemos omitir Θ e t como variáveis de estado do problema (e a regra de decisão é portanto estacionária). A segunda especificação ilusta com mais detalhes a estrutura estocástica de ofertas de compra e a distribuição empregada para calcular a esperança matemática.

Para todo i pertencentes ao números naturais e h aos reais, defina $p(i,h)$ como a probabilidade de receber i ofertas durante o período de tempo de tamanho h. A função distribuição do máximo entre as ofertas recebidas em h, $G : [0,\infty) \times \mathbb{N} \to [0,1]$, é definida por $G(x,i) = F^i(x)$ para todo i, pois as ofertas são independentes.

Segue que quando $h \to 0$ temos a versão em tempo contínuo da equação de Bellman. Na estrutura de ofertas adotada,

$$p(i,h) = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^i}{i!} \qquad \forall (i,h) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$$

e portanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{p(1,h)}{h} = \frac{(\lambda h)}{e^{\lambda h} h} = \lambda$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{p(i,h)}{h} = e^{-\lambda h}\frac{\lambda^i h^{i-1}}{i!} = 0 \qquad \forall i > 1 \tag{1.2}$$

Além disso, como $W(x) = x$, dado um $V > 0$ existe um valor de reserva x^*,tal que o indivíduo vende o objeto quando recebe ofertas maiores do x^* e rejeita a realização do negocio quando a oferta recebida é menor do que x^*, isto é $x^* = V$ (pois $W(x^*) = V$). Portanto a equação de Bellman em tempo contínuo é dada por

$$rV = -c + \lambda \int_0^\infty \max[0, W(x) - V]dF(x)$$

e valor de reserva de equilíbrio é determinado à partir da seguinte equação

$$x^* = \frac{-c}{r} + \frac{\lambda}{r}\int_{x^*}^\infty [x - x^*]dF(x)$$

que permite fazer algumas estáticas comparativas alterando os parâmetros de especificação do modelo. A demonstração de existência de solução da última equação é trivial, portanto é omitida.

1.5 Tempo necessário até a Venda

Dado um valor de reserva estacionário, o tempo médio para venda, $E[t^*]$, é dado por $1/\lambda[1 - F(x^*)]$. Para demonstrar este resultado, primeiro precisamos calcular a distribuição da variável "tempo até a realização da venda ", até momento desconhecida. Defina a função $H : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0,1]$ sendo $H(t) = \Pr[\{\text{"realizar venda no intervalo } [0,t]\text{"}\}]$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. O evento complementar, "não realizar venda no intervalo $[0,t]$", pode ocorrer de diferentes maneiras: Não receber ofertas, ou receber uma oferta abaixo de x^*, receber duas ou tres, quatro, cinco, seis,... n, n+1,...., ofertas abaixo de x^*.

Utilizando a definição de $p(i,t)$ acima e lembrando que a distribuição do máximo entre i variáveis independentes é F^i encontramos o resultado:

$$H(t) = 1 - p(0,t) - \sum_{i=1}^{\infty} p(i,t)[F(x^*)]^i$$

$$H(t) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}[\lambda t.F(x^*)]^i}{i!} = 1 - e^{-\lambda t}.e^{\lambda F(x^*)t} = 1 - e^{-\lambda(1-F(x^*))t}$$

Portanto a função distribuição desta variável aleatória é a mesma de uma v. exponencial com parâmetro $\lambda[1-F[x^*]]$. Consequentemente, visto que a média de uma v.a $Exp(\beta)$ é $1/\beta$, a média do tempo necessário para realizar a venda é $1/\lambda[1 - F(x^*)]$. Como queríamos demonstrar.

1.6 Liquidez e Impaciência

Diante da estrutura apresentada, é intuitivo que quanto mais impaciente é o indivíduo, maior é a liquidez do mercado, visto que esperar mais tempo para realizar a venda é mais penoso quanto maior é a sua taxa de desconto. Por isso quanto mais impaciente é o indivíduo, menor será o preço de reserva de equilíbrio e menor será a média de tempo necessário para realizar a venda. Podemos concluir que a liquidez é, neste sentido, uma propriedade oriunda das preferências do vendedor. Entretanto, as variáveis de equilíbrio também são funções de c, λ e F, parâmetros que definem características intrínsicas do bem. Desta forma, a liquidez do mercado é também uma propriedade do ativo.

O arrival rate, λ, da distribuição das chegadas de ofertas pode ser entendido como uma medida do extensão do mercado. Quanto mais idiossincrático é o bem a venda, é mais dificil encontrar pessoas interessadas na compra. Se mercado é mais limitado, ofertas chegam mais lentamente. Se o bem possue mais aceitação entre um grupo grande de pessoas, vendedor tem mais chances de receber um determinado número de ofertas por período de tempo.

Incrementos em λ estão associadas a mudanças que facilitem o fluxo de informações sobre o bem a venda e possíveis compradores. Mais ofertas por período de tempo fazem com que o indivíduo fique mais seletivo, fazendo com que x^*aumente, já que a probabilidade de receber outra oferta em pouco tempo aumentou. Apesar disso, o efeito sobre a medida de liquidez é ambígua, porque ao mesmo tempo que a probabilidade condicional de realização do negócio, $1 - F(x^*)$, reduz, o indivíduo está recebendo mais ofertas por período de tempo.

Diferenciando x^* por λ na equação de determinação do preço de reserva temos os seguintes resultados.

$$\frac{\partial w^*(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\int_{x^*}^{\infty}[x - x^*]dF(x)}{r + \lambda[1 - F(x^*)]} > 0$$

$$\frac{\partial E[T(\lambda)]}{\partial \lambda} = \frac{-1}{(\lambda[1 - F(x^*)])^2}\left[[1 - F(x^*)] - \lambda F'(x^*)\frac{\partial w^*(\lambda)}{\partial \lambda}\right]$$

Uma condição suficiente para que a derivada acima seja positiva é que a função de densidade F' seja logcôncava, isto é $\partial^2 \log(F'(x))/\partial x \leq 0$ para todo x no seu domínio, resultado atribuido a Burdett (1981).

1.7 Efeito do Deslocamento da Distribuição sobre w^* e $E[T]$

O deslocamento da distribuição de ofertas pode ser entendido como um subsídio ad valorem recebido pelo vendedor no ato da venda. Se o subsídio de m unidades monétarias é dado ao vendedor, o total recebido por ele no momento da realização da troca é $m + x$ onde $x \geq x^*$.

Definindo $E_F[x] = \int_0^{\infty} x \; dF(x)$ e $E_G[x] = \int_0^{\infty} x \; dG(x)$, temos que $E_G[x] = E_F[x] + m$.O termo $\int_w^{\infty}[x - w] \; dG(x)$ pode ser reescrito utilizando integração por partes:

$$\int_w^{\infty}[x-w]dG(x) = \int_0^{\infty}[x-w]dG(x) - \int_0^{w}[x-w]dG(x) = E_G[x] - w + \int_0^{w} G(x)dx$$

Substituindo na equação de determinação do preço de reserva obtemos:

$$(r+\lambda)x^* = c + \lambda m + \lambda E_F[x] + \lambda \int_0^{x^*} F(x-m)dx.$$

Pelo Teorema das funções implicitas:

$$\frac{\partial x^*(m)}{\partial m} = \frac{\lambda[1-F(x^*-m)]}{r+\lambda[1-F(x^*-m)]} > 0 \ e < 1$$

$$\frac{\partial x^*(0)}{\partial m} = \frac{\lambda[1-F(x^*)]}{r+\lambda[1-F(x^*)]} > 0 \ e < 1$$

Logo x^*aumenta menos do que o deslocamento da distribuição.

Sendo $E[T] = 1/\lambda[1-G(w^*(m))] = 1/\lambda[1-F(w^*-m)]$ o deslocamento aumenta a liquidez do mercado.

$$\frac{\partial E[T(m)]}{\partial m} = \frac{1}{\lambda^2[1-F(w^*-m)]^2}[\lambda F'(w^*(m)-m)][\frac{\partial w^*(m)}{\partial m} - 1] < 0$$

Isto ocorre pois aumentamos a média e sem alterar a variância da distribuição. Se temos em mente o coeficiente de variação, podemos dizer o processo de venda ficou menos arriscado quando é dado um subsídio fixo aos vendedores. Por ser impaciente, $r > 0$, é melhor aceitar rapidamente a troca porque, independente do quanto o comprador oferta, ele receberá m unidades monétarias caso venda o bem.

Portanto o ganho de utilidade com a adição de subsídios para o vendedor é separável em dois tipos de efeitos. O primeiro efeito é via renda, pois o aumento do subsídio aumenta o valor esperado da receita e o segundo é via a taxa de desconto já que o tempo médio de espera diminui.

Caso o subsídio fosse uma taxa incidindo sobre o valor da venda, não haveria qualquer efeito sobre a liquidez do mercado. Isto porque o preço de reserva aumenta na mesma proporção da taxa, isto é, caso a taxa seja τ o indivíduo só aceitará a troca caso a oferta seja superior a $x^*(1+\tau)$. O efeito é diferente pois o subsídio multiplicativo altera também os outros momentos da distribuição de ofertas.

1.8 Efeito de um Mean Preserving Spread sobre x^* e $E[T]$.

O efeito de adicionar mais dipersão no processo estocástico de ofertas tem efeito ambiguo sobre o bem estar do vendedor. Mantendo a média constante, é ótimo para o indivíduo ser mais seletivo na pois assim pode obter lances maiores com mais facilmente quando há mais dispersão. No entanto, a liquidez pode tanto aumentar quanto diminuir dependendo da distribuição das ofertas.

Utilizo o conceito de mean preserving spread definido por Rothschild e Stiglitz (1970) para ilustrar o efeito. Dadas duas funções de distribuição com a mesma média, F_1 e F_2, a primeira é dita mais arriscada que a segunda caso $\int_0^w F_2(x)$ $dx \geq \int_0^w F_1(x)dx$ para todo x no suporte. Para facilitar a análise e possibilitar o uso de técnicas básicas de cálculo, podemos parametrizar o risco das distribuições com a mesma média. Portanto, defina a conjunto de funções de distribuição com mesma média μ, como sendo $\aleph = \{F(.,\sigma) : \sigma \in [0, B],$ $B \in \mathbb{R}_+\}$, onde para todo $\sigma_i > \sigma_j$ temos $\int_0^w F(x,\sigma_i)\ dx \geq \int_0^w F(x,\sigma_j)\ dx$ $\forall w > 0$ e $F(x,0) = F(x)$.

Logo $\lim_{\sigma\to 0^+} \int_0^w \frac{[F(x,\sigma)-F(x,0)]}{\sigma}\ dx \geq 0$.

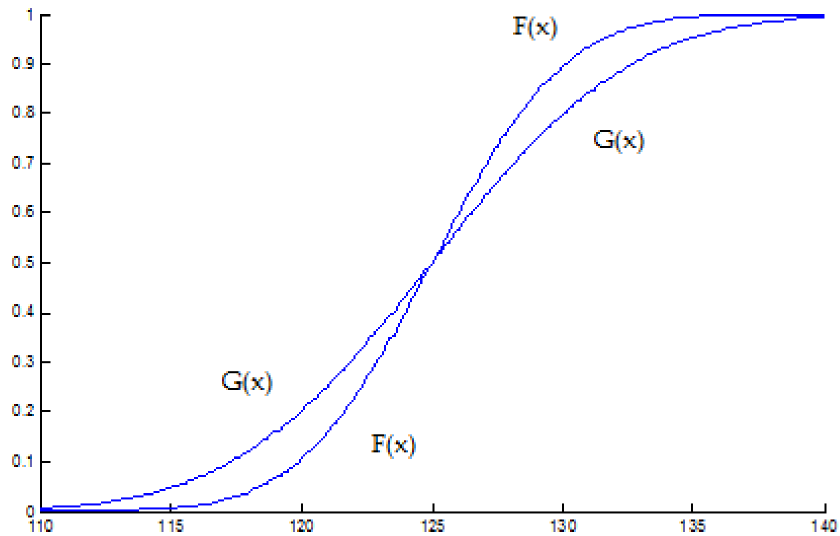
Derivando implicitamente a equação que determina o preço de reserva como função do parâmetro de risco da distribuição σ, concluimos que o preço de reserva sofre aumento com um incremento na dispersão de ofertas.

$$\frac{\partial w^*(\sigma)}{\partial\sigma} = \frac{\lambda \int_0^w F_\sigma(x,\sigma)dx}{r + \lambda[1 - F(w^*,\sigma)]} > 0$$

Todavia o efeito de um aumento na dispersão sobre a liquidez de equilíbrio, isto é, $E[T]$ é ambíguo:

$$\frac{\partial E[T]}{\partial\sigma} = \frac{[F_w(w^*,\sigma)\frac{\partial w^*}{\partial\sigma} + F_\sigma(w^*,\sigma)]}{\lambda[1 - F(w^*)]^2}$$

Isto porque o sinal da função F_σ avaliada em (w^*,σ) é, a príncipio, desconhecido. Por este motivo, a liquidez aumenta caso F_σ assuma valores negativos que superem $F_w(w^*,\sigma)[\partial x^*/\partial\sigma]$, ou pode diminuir caso $F_\sigma(w^*,\sigma)$ seja maior do que zero. Para exemplificar a questão, construo um gráfico. As duas funções na figura são funções de distribuição com a mesma média, no entanto $G(x)$ é mais arriscada do que $F(x)$, isto é $G(x) = F(x,\sigma)$ e $F(x) = F(x,0)$ com $\sigma > 0$. Portanto caso x^*se encontre abaixo do ponto onde as distribuições se cruzam, a variação de distruibuição acumulada é positiva ($F_\sigma(x,0) > 0$), caso contrário há um decréscimo de probabilidade acumulada em x^* ($F_\sigma(w^*,0) < 0$).



2 Two Sided Search

O modelo apresentado na seção anterior é flexivel já que o problema de procura pode ser analisado tanto pela ótica do vendedor quando a do comprador. Apesar de ser bastante simples, a estrutura de job search provou ser útil para abordar o funcionamento de mercados descentralizados de bens duravéis. No entanto devemos notar que toda a análise foi feita considerando que F, a distribuição das ofertas, é exógena. É legítimo, pois, questionar a origem das expectativas do vendedor com relação a distribuição de ofertas. Se compradores soubessem que vendedores estão dispostos a aceitar qualquer oferta acima x^*, não seria racional para os primeiros comprar o bem pagando valores superiores a x. Assim o equilíbrio estaria colapsado neste ponto.

A maneira mais natural de modelar as trocas de bens duravéis com pouca liquidez é fazendo com que ambas partes entrem no processo de procura. A estrutura que será utilizada nesta seção ficou conhecida na literatura de Labor Economics como Equilibrium Search ou Two Sided Search. A hipótese básica é que um bem durável, como qualquer ativo, tem valia para um indivíduo porque ele produz um fluxo de serviços por um determinado período de tempo.

É interessante supor que os indivíduos não possuem as mesmas preferências sobre os bens que visitam. Porque dessa maneira a compra e a venda um bem pode levar tempo. Se o dono estabelece um preço fixo para a venda, existirão indivíduos que não compram o ativo porque o preço cobrado excede, na sua opinião, a utilidade esperada do fluxo de serviços descontado o custo de oportunidade da procura, bem como indivíduos que àquele preço estão dispostos a comprar o bem, pois o fluxo gerado compensa o investimento. Neste ponto, assumimos que há informação assimetrica entre as partes de um encontro: o vendedor determina o seu preço, o comprador avalia os serviços que o bem pode gerar, entretanto o dono não é capaz de extrair do comprador o seu tipo. Compreendemos a baixa liquidez como consequência de heterogeneidade de preferêrencias e informação assimétrica. Ressalto que caso uma destas duas hipóteses falhe sempre haveria transação num encontro entre vendedores e compradores.

Definimos um equílibrio, onde o preço ótimo (que maximiza a utilidade esperada) é escolhido com base na distribuição de preferências e no processo estocástico de encontros, considerando que indivíduos interessados no bem comportam-se de forma ótima. Por sua vez, o comprador escolhe uma regra de decisão tomando como dada a estratégia de precifição do vendedor representativo, a distribuição de serviços do estoque de bens existentes e também a estrutura estocástica de encontros, (portanto o equílibrio que desejamos calcular é de Nash).

O problema fica mais interessante quando adicionamos depreciação estocástica do bem durável. O seu dono é obrigado a vendê-lo quando, de forma aleatória, o bem pára de prover serviços. Imagine que isto ocorra quando, por exemplo, o dono de uma casa tem descobre que vai ter filhos e necessita de um imóvel maior, ou quando um indivíduo não gosta mais do local devido a um desgaste com seu vizinho. Por mais que não gere utilidade ao seu dono, o bem tem valor porque outras pessoas podem desfrutar dos seus serviços.

2.1 Environment

O tempo é contínuo e o horizonte é infinito. A economia é habitada por uma infinidade de indivíduos com medida unitária [0,1], que descontam o consumo no tempo a taxa $r \in [0,1]$. Há um contínuo de bens de capital indivisiveis com medida [0,1] e um bem perecível B, infinitamente divisível. Este último pode ser produzido ao custo de desutilidade linear na quantidade do bem (idêntico entre entre indivíduos) C(B)=B, e quando consumido fornece utilidade u(B)=B. A estrutura das preferências dos indivíduos são idênticas e representadas pela função utilidade $U = E_0[\int_0^\infty e^{-rt}[h(t) + b(t)]dt$.

A variável $b(t) \in \mathbb{R}$ é definida como o consumo líquido do bem perecível em t, consumo menos produção no instante t. Por sua vez $h(t)$ são os fluxos de serviços gerados por um bem de capital em t. Para consumir estes serviços é necessário possuir um match, não sendo possível mais do que um match período. Sem match $h(t) = 0$.

Apesar da simetria no formato das preferências, os indivíduos diferem na valoração do fluxo dos bens de capital. Isto significa que para um dado bem de capital $K' \in [0,1]$, cada um obtem utilidade instantânea z, a realização de uma variável aleatoria com distribuição uniforme $[0,1]$, conhecida por todos.

Os Matches são desfeitos no tempo com distribuição Poisson, com arrival rate igual a $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$. Quando ocorre o fim do match, o seu dono pode vender o bem a um indivíduo em procura de um match. Há um setor de trocas onde indivíduos com estoque de K procuram por compradores e pessoas sem match procuram por K's a venda. Compradores e vendedores encontram-se em pares, de forma aleatória. Os encontros ocorrem no tempo com distribuição Poisson com parâmetro $\theta \in \mathbb{R}_{++}$. Durante um encontro no setor de trocas, o vendedor estabelece um preço em quantidades do bem B, sem saber a valoração do possivel comprador. Após revelado z, o comprador decide se realiza a troca. Caso aceite os termos do vendedor, a troca é executada quando o comprador produz a quantidade do bem B exigida pelo dono o bem de capital a venda. Ambos continuam no setor de trocas caso contário.

Para um indivíduo típico nesta economia existe uma quantidade enumeravel e infinita de estados possiveis. Um estado é representado pelo o par ordenado $(i,j) \in \{0,1\} \times \{0\} \cup \mathbb{N}$, sendo i um indicador de o agente possui ou não um match. Já a variável j indica a quantidade total de bens de capital que o indivíduo possui em estoque. Portanto, qualquer pessoa pode acumular n bens em estoque, desde que acumule matches desfeitos e não encontre compradores interessados no seu estoque.

A solução para este problema dinâmico pode ser bastante complicada. No entanto, a linearidade nas preferências facilitam bastante a abordagem, já que o problema do comprador e do vendedor são independentes.

Nesta análise, buscaremos um equilíbrio simétrico e estácionário. Definirei adiante o conceito de equilíbrio adotado, porém defino informalmente um equilíbrio nesta economia como um conjunto de estratégias para a compra e venda de bens de capital, e distribuições de indivíduos entre os estados, invariantes no tempo. Este equilíbrio é simétrico porque as funções políticas ótimas são idênticas entre os participantes da economia.

2.2 Equações de Bellman

$$rW(z) = z + \alpha(V_S + V_B - W(z)) \tag{1}$$

$$rV_B = \theta \int_0^1 \max\{W(z) - p - V_B, 0\} dz \tag{2}$$

$$rV_S = \max_p \theta\mu[p - V_S] \tag{3}$$

As três equações acima são as equações de Bellman para o indivíduo com match, o processo de compra, e o processo de venda. Defina respectivamente $W : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, $V_B \in \mathbb{R}_+$,$V_S \in \mathbb{R}_+$,como funções valor estacionárias para o indivíduo com match, para o indivíduo em processo de procura por match, e para cada bem de capital a venda que agente possui. Portanto a riqueza descontada de um indivíduo no estado estacionário desta economia é dada por $V(z,\omega,n) \overset{\text{def}}{\equiv} \omega(t)W(z) + (1-\omega(t))V_B + nV_S,\ \forall t \in \mathbb{N}$. onde $\omega(t) = 1$ se há match em t e $\omega(t) = 0$ caso contrário. Por sua vez, n é o número de bens de capital que o indivíduo possui em estoque para a venda e $z \in [0,1]$.

A primeira equação evidencia que o fluxo instantâneo de utilidade para o indivíduo com match z é igual a quanto extrai de utilidade com o bem, mais o ganho líquido de utilidade quando o match é desfeito. O fluxo de utilidade do comprador é igual a uma média do ganho de utilidade, descontado o valor pago pelo bem e custo de oportunidade de continuar a procura, tudo isto ajustado pela taxa de encontros do setor de trocas da economia. Para o vendedor a ideia é semelhante: o fluxo de utilidade com a venda é o preço menos o custo de oportunidade de continuar a busca, ajustado pela probabilidade condicional de venda μ e taxa de encontros da economia.

Dado que $W'(z) > 0$, temos que $W(z) - p - V_B$ também é crescente em z. Portanto, se suponho que $\exists x \in [0,1]$ tal que $W(x) - p - V_B = 0$ (4), a função política invariante para o comprador é $g : [0,1] \to \{compra, não\ compra\}$, compra se $z > x$ e não compra $se\ z \leqslant x$. A variável x é o valor de cut-off para o agente, isto é durante um encontro o comprador observa o quanto o bem e decide comprá-lo caso a utilidade que prove execede x. Obviamente x é função de p, $W(.)$ e de V_B, variáveis e funções que serão determinadas em equilíbrio.

O vendedor escolhe p, a quantidade exigidada do bem B para realizar a transação, de modo a maximar a equação (3). Vimos que a função política do comprador depende de p, logo o vendedor deve considerar o efeito negativo que um preço mais alto tem sobre a probabilidade de venda. O trade-off para o vendedor é o seguinte: um preço mais alto ao mesmo tempo em que fornece mais utilidade caso a venda seja concretizada, torna menos atrativa para o comprador a aquisicao do bem. Dada a anonimicidade dos indivíduos, o resultado é obvio, dado que somente quando z for suficientemente grande a venda será realizada. Pela condição de primeira ordem da equação (3) sabemos que no equilíbrio p deve atender a:

$$\frac{\partial\mu}{\partial p}[p - V_S] + \mu = 0 \overset{(4)\text{ e TFI}}{\Longrightarrow} (r+\alpha)(V_S - p) + \mu = 0$$

No equilíbrio a probabilidade esperada de venda, μ, é consistente com a política ótima de compra: Dado que z ~ $U[0,1]$, significa que $\mu = 1 - x$.

Para completar o conceito de equilíbrio necessitamos da medida de agentes entre estados e como ocorre a transição desta medida ao longo do tempo. Defina portanto $M = \{com\ match,\ sem\ match\}$, $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$ e as σ-álgebras geradas por estes conjuntos, $\tilde{\boldsymbol{M}}$ e $\tilde{\boldsymbol{N}}$. Podemos definir ainda a medida $\lambda_t : \tilde{\boldsymbol{M}} \times \tilde{\boldsymbol{N}} \to [0,1]$ e por fim o espaço de medida em t $(M \times N, \tilde{\boldsymbol{M}} \times \tilde{\boldsymbol{N}}, \lambda_t)$. O conjunto de eventos quando particionamos $\mathbb{R}_+$ em pequenos períodos de tempo Δ é $E = S_1 \times S_2 \times S_3$, onde $S_1 = \{há\ quebra\ de\ match,\ não\ há\ quebra\ de\ match\}$, $S_2 = \{há\ encontro, não\ há\ encontro\}$ e $S_3 = \{venda, não\ venda\}$. Os conjuntos $\boldsymbol{S}_1,\ \boldsymbol{S}_2,\ \boldsymbol{S}_3$ são as σ-algebras geradas por S_1, S_2, S_3 respectivamente. Portanto o espaço de medida associado é $(E, \varepsilon, P_\Delta)$, onde $\varepsilon = \boldsymbol{S}_1 \times \boldsymbol{S}_2 \times \boldsymbol{S}_3$ e $P_\Delta : \varepsilon \times M \times N \to [0,1]$ a medida de probabilidade associada ao processo estocástico de encontros, de quebra de match e de venda.

Em seguida podemos construir a função de transição da seguinte forma: primeiro defina $f : M \times N \times E \to M \times N$, a função que mapeia o estado do indivíduo e o evento ocorrido no novo estado. Para todo conjunto $A \in M \times N$ defina $Q(A, m, n) = P_\Delta(e \in \varepsilon : f(m, n, e) \in A)$ para m, n pertencentes a $M \times N$. Podemos mostrar que para cada par (m, n) $Q(., m, n)$ é uma medida de probabilidade em $\tilde{\boldsymbol{M}} \times \tilde{\boldsymbol{N}}$ e que $Q(A, ., .)$ é mensurável para todo A.Logo a transição ocorre da seguinte forma:

$$\forall A \in \tilde{\boldsymbol{M}} \times \tilde{\boldsymbol{N}}, \lambda_{t+\Delta}(A) = \sum_{(m,n) \in M \times N} Q(A, m, n) \lambda_t(m, n)$$

A medida de indivíduos nos estados é dita estácionária caso:

$$\lambda(A) = \sum_{(m,n) \in M \times N} Q(A, m, n) \lambda(m, n) \qquad \forall A \in M \times N$$

2.3 Equilíbrio

Definition 2.1. Um equilíbrio simétrico e estácionário é um vetor $(V_B,\ V_S,\ p, x, \mu) \in \mathbb{R}_+^4$, uma função $W : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ solução para o sistema abaixo e uma medida estacionária de indivíduos entre os estados da economia:

$$rV_B = \theta \int_x^1 \{W(z) - p - V_B\} dz \quad (1')$$

$$rV_S = \theta\mu[p - V_S] \quad (2')$$

$$W(z) = \frac{z + \alpha(V_S + V_B)}{r + \alpha} \quad (3')$$

$$(r + \alpha)(V_S - p) + \mu = 0 \quad (4')$$

$$W(x) - p - V_B = 0 \quad (5')$$

$$\mu = 1 - x \quad (6')$$

2.4 Existência de Equilíbrio

O equilíbrio acima pode ser calculado numericamente da seguinte forma: Dados $(\alpha, r, \theta) \in \mathbb{R}^3_{++}$ e $\mu \in [0, 1]$ arbitrário, à partir de $(2')$ e $(4')$ encontramos soluções únicas para$V_S(\mu)$ e $p(\mu)$. Em seguida, com uso das equações $(1')$, $(3')$ e $(5')$, duas soluções para $x(\mu)$. Por fim, através de $(6')$, cada solução $x(\mu)$ define um operador$T : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Encontrando um ponto fixo do operador, $\mu^* \in [0, 1]$ tal que $T[\mu^*] = \mu^*$, podemos substituir μ^* nas equações do sistema, obtendo $(V^*_{B,} V^*_S, p^*, x^*, \mu^*)$.

O fato de que $T[m]$ possa assumir valores complexos não deve ser visto com estranheza. O operador envolve polinômios do segundo grau e raízes, logo nem sempre assume valores reais no intervalo $[0, 1]$. Contudo pode ser demonstrado que existe um único equilíbrio para esta economia, desde que $\alpha, r, \theta > 0$. A demonstração não utiliza teoremas formais de ponto fixo, pois não garantem a unicidade do ponto fixo. Utilizo apenas teorema do valor intermediário para fazer a demonstração.

2.4.1 Idéia da Prova

Uma das soluções de μ^*é sempre negativa, logo podemos definir a funcao T, associando cada μ em $[0, 1]$ a outra solução, que assume tanto valores positivos quanto negativos no intervalo. Esta função é estritamente decrescente e contínua em $[0, 1]$. Primeiro, mostro que existe um único $\bar{\mu} \in [0, 1]$ tal que $T[\bar{\mu}] = 0$.Em seguida mostro que assume valores reais em $[0, \bar{\mu}]$ e que $T[0] > 0$. Definindo $\varphi(x) = T[x] - x$ para todo $x \in [0, \bar{\mu}]$,temos que $\varphi(0) > 0$ e $\varphi(\bar{\mu}) < 0$. Como φ é contínua em $[0, \bar{\mu}]$, existe pelo teorema do valor médio existe x real tal que $\varphi(x) = 0$, um ponto fixo da função T.

Proposition 2.2. $\forall\ (\alpha, r, \theta) \in \mathbb{R}^3_{++}$ *existe um único equilíbrio.*

Lemma 2.3. *Para todo vetor* $(\alpha, r, \theta) \in \mathbb{R}^3_{++}$, *existe um único* $\bar{\mu} \in (0, 1]$ *tal* *que* $T[\bar{\mu}] = 0$

PROOF. Assuma $(\alpha, r, \theta) \in \mathbb{R}^3_{++}$. Primeiro definimos operador $T : [0,1] \to \mathbb{C}$

$$T[\mu] = -(r+\alpha)/\theta + [-2\theta^2\mu^2 - 2\theta(r+\alpha)\mu + \ \alpha^2 + 2\theta(r+\alpha) + 2\alpha r]^{1/2}/\theta$$

para todo μ pertencente ao intervalo $[0,1]$. Note que

$$\bar{\mu} = \left[-(r+\alpha) + \sqrt{r+\alpha}\sqrt{r+\alpha+4\theta}\right]/2\theta$$

é a única solução positiva para $T[\mu] = 0$. Falta mostrar que $\bar{\mu} \in (0,1]$. Segue que $\bar{\mu} > 0$. Isto é trivial, pois

$$\bar{\mu} = \frac{-(r+\alpha) + \sqrt{r+\alpha}\sqrt{r+\alpha+4\theta}}{2\theta} > \frac{-(r+\alpha) + \sqrt{r+\alpha}\sqrt{r+\alpha}}{2\theta} = 0$$

Para mostrar que $\bar{\mu} \leq 1$, assuma o contrário, $\bar{\mu} > 1$. Perceba que

$$\tfrac{-(r+\alpha)+\sqrt{r+\alpha}\sqrt{r+\alpha+4\theta}}{2\theta} > \ 1 \Leftrightarrow \ 0 > 4\theta^2$$

e portanto chegamos a um absurdo matemático. Logo $\bar{\mu} \leq 1$.

Lemma 2.4. *Para todo vetor* $(\alpha, r, \theta) \in \mathbb{R}^3_+$ *e para todo* $\mu \in [0, \bar{\mu}]$, *as seguintes afirmações são verdadeiras: a)*$T'[\mu] < 0$, *b)* $T[0] > 0$.

PROOF. Pela definição do operador $T[.]$, note que

$$T'[\mu] = (-4\theta^2\mu - 2\theta(r+\alpha))/2\theta\sqrt{G(\mu)}$$

onde

$$G(\mu) = -2\theta^2\mu^2 - 2\theta(r+\alpha)m \ + \alpha^2 + 2\theta(r+\alpha) + 2\alpha r$$

para todo $\mu \in [0,1]$. Defina $\mu^*_{1,2} = [-\theta(r+\alpha) \pm \ \sqrt{\theta^2(r+\alpha)(4\theta + 3(r+\alpha))}]/2\theta^2$, as raízes do polinômio $G(\mu)$. Portanto para todo $\mu \in \ [\mu^*_1, \mu^*_2]$, $G(\mu) \geq 0$, pois $-2\theta^2 < 0$.Perceba que $\mu^*_1 \leq 0$ e $\mu^*_2 \geq 0$. Se demonstramos que $\bar{\mu} \in [0, \mu^*_2]$, concluimos que para todo μ pertencente ao intervalo $[0, \bar{\mu}]$, $T'[\mu] < 0$ e $T[\mu]$ é real positivo. Para chegar a uma contradição suponha que $\bar{\mu} \geq \mu^*_2$.Portanto

$$[-(r+\alpha) + \sqrt{r+\alpha}\sqrt{r+\alpha+4\theta}]/2\theta \geq$$

$$[-\theta(r+\alpha)+\sqrt{\theta^2(r+\alpha)(4\theta+3(r+\alpha))}]/2\theta^2$$

$$\Updownarrow$$

$$[-\theta(r+\alpha)+\sqrt{\theta^2(r+\alpha)^2+4\theta(r+\alpha)}]/2\theta^2 \geq$$

$$(-\theta(r+\alpha)+\sqrt{\theta^2(r+\alpha)(4\theta+3(r+\alpha))})/2\theta^2$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \geq 2\theta^2(r+\alpha)$$

contradição! Logo $\bar{\mu} \in [0, \mu_2^*]$ e $T'[\mu] < 0$ neste intervalo.Para demonstrar que $T[0] > 0$, assuma que $T[0] \leq 0$. Observe que

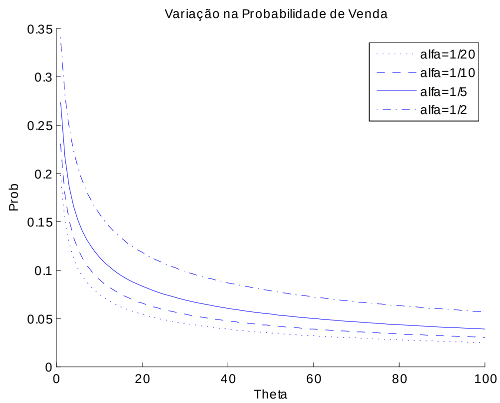
$$\frac{r+\alpha-\sqrt{(.)}}{2\theta} \geq 0 \iff (r+\alpha)^2 \geq \ \alpha^2+2r\theta+r^2+2\alpha\theta+2\alpha r \iff 0 \geq \ \theta(r+\alpha),$$

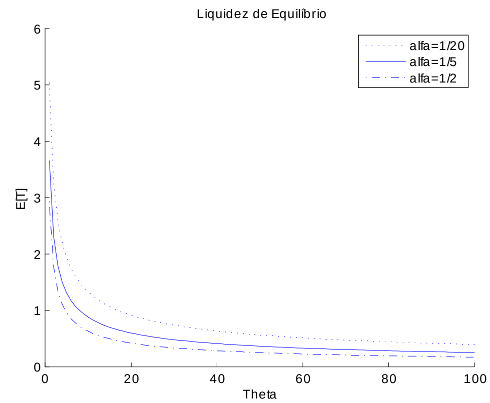
o que contradiz o fatode $\alpha, \theta, r > 0$.Concluimos portanto que $T[0] > 0$.Como queriamos demonstrar.

PROOF. Defina $\varphi(\mu) = T[\mu] - \mu$ para todo $\mu \in [0, \bar{\mu}]$. Portanto $\varphi(0) > 0$ e $\varphi(\bar{\mu}) < 0$. Como $\varphi(.)$ é contínua em $[0, \bar{\mu}]$, pelo teorema do valor intermediário $\exists \mu^{**} \in [0, \bar{\mu}]$ tal que $\varphi(\mu^{**}) = 0$. Dado que $T[.]$ é decrescente em $[0, \bar{\mu}]$, temos que $\varphi(.)$ é decrescente e μ^{**} é único no intervalo. Sabemos que $\mu^{**} \in [0, 1]$, pois T[.] assume valores reais em $[0, \bar{\mu}]$. Como T[.] é sempre decrescente em $[0,\mu_2^*]$, e T[.] assume valores complexos após μ_2^*, concluimos que μ_2^{**} é a única solução para o problema. Substituindo nas outras equações temos solução únicas para as demais variáveis.

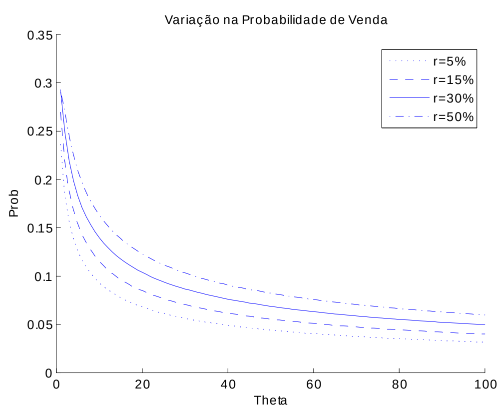
2.4.2 Análise Númerica

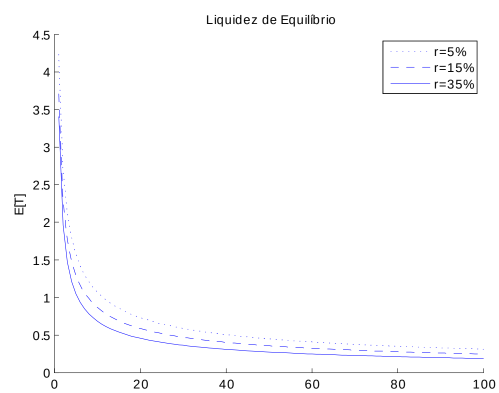
Faço uma análise numérica na tentativa de encontrar uma relação entre os parâmetros e sobre as variavéis de equilíbrio. Utilizo os paramêtros base $r = 5\%$, $\alpha = \frac{1}{9}$, (média de duração do match de 9 anos).e faço θ variar no intervalo $[1, 100]$.Um aumento em θ implica em aumento da liquidez. Intuimos que quando é mais facil o encontro de compradores com vendedores, ambos ficam mais exigentes quanto nas suas variáveis de escolha. O comprador está disposto a comprar bens que lhe dê fit maior, pois sabe que é mais provável que um novo encontro aconteça em breve. O vendedor pensa de forma semelhante, pode cobrar mais pois encontrará alguém interessado no bem mais rapidamente. Consequentemente a probabilidade de venda condicional a um encontro é reduzida. No entanto, a média de tempo para a realização da venda é reduzida (lembre que $E[T] = 1/\mu\theta$) A não linearidade do efeito da variação em θ sobre a liquidez é interessante. Note nos gráficos abaixo que quando o parâmetro de encontros no setor de trocas é baixo, o efeito da variação em θ é maior do que quando o parâmetro é grande.





Adicionalmente faço variar α, r .Um aumento em α significa que a chance de haver a quebra do match mais cedo é maior, enquanto que um aumento em r significa que o indivíduo valoriza mais o presente.





A intuição é simples: o comprador sabe que com α maior não é ótimo esperar demasiadamente para realizar uma obter um fit mais alto, pois é mais provável que ele tenha que se desfazer do bem em pouco tempo. Portanto no equilíbrio, o comprador fica menos exigente quanto ao fit mínimo exigido do bem. Logo a probabilidade venda aumenta e $E[T]$ diminui.O aumento em r implica, por sua vez, que é mais penoso para os indivíduos ficarem sem match e para os vendedores a demora na realização da venda. Consequentemente a probabilidade de venda de equilíbrio aumenta e a liquidez também.

2.4.3 Estática Comparativa

Para realizar analisar o comportamento das variáveis de equilíbrio diante de mudanças na distribuição de z, faço uma transformação afim nesta v. aleatória. Para todo $z \in [0,1]$ defina $H(z) = az + b$ como a utilidade instantânea do bem com fit z. Desta maneira alteramos as avaliações dos indivíduos sem alterar muito as equações de equilíbrio. Ao multiplicar z por $a \in \mathbb{R}_+$ a avaliação de cada indivíduo a respeito de determinado bem sofre um aumento ou decrescimento percentual. A constante b é desloca avaliação da indivíduos na mesma quantidade e de forma não proporcional.

Os resultados desta estática comparativa são semelhantes aos da primeira seção. Um variação proporcional nas avaliações dos indivíduos em nada afeta a a liquidez da economia, $E[T]$. Portanto, se todos avaliam x% a mais os bens de capital, preços e utilidades descontadas de equilíbrio aumentam exatamente x%, assim como o valor de cut-off dos agentes.

É fácil notar que o vetor de equilíbrio com a nova especificação atende o sistema:

Definition 2.5. Um equilíbrio simétrico e estácionário é um vetor $(V_B, V_S, p, x, \mu) \in \mathbb{R}^4_+$, uma função $W : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ solução para o sistema abaixo e uma medida estacionária de indivíduos entre os estados da economia:

$$rV_B = \theta \int_x^1 \{W(z) - p - V_B\} dz$$

$$rV_S = \theta\mu[p - V_S]$$

$$W(z) = \frac{az + b + \alpha(V_S + V_B)}{r + \alpha}$$

$$\tfrac{1}{a}(r + \alpha)(V_S - p) + \mu = 0$$

$$W(x) - p - V_B = 0$$

$$\mu = 1 - x$$

Proposition 2.6. *Se* $(V_B^*, V_S^*, p^*, x^*, \mu^*)$ *solução para o sistema acima com* $(a, b) = (1, 0)$*, então* $(aV_B^*, aV_S^*, ap^*, x^*, \mu^*)$ *é solução para o sistema com* $a > 0$ *e* $b = 0$.

PROOF. Devemos mostrar que $(aV_B^*, aV_S^*, ap^*, x^*, \mu^*)$ e $W^a : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ é solução para o sistema acima. Tome $(\alpha, r, \theta) \in \mathbb{R}^3_+$.e defina o vetor $(V_B^*, V_S^*, p^*, x^*, \mu^*)$ e a função $W^* : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ como a solução do sistema composto pelas equações $(1'), (2'), (3'), (4'), (5')$ e $(6')$. Note que para todo $z \in [0,1]$, $W^a(z) = aW^*(z)$.Dessa forma, temos que

$rV_B = \theta \int_x^1 \{W(z) - p - V_B\} dz \Longrightarrow raV_B^* = \theta \int_{x^*}^1 \{W^a(z) - ap^* - aV_B^*\} dz.$

$rV_S^* = \theta\mu[p^* - V_S^*] \Longrightarrow raV_S = \theta\mu[ap^* - aV_S^*]$

$W^a(x^*) - ap^* - V_B^* = aW^*(x^*) - ap^* - aV_B^* = 0$

$\mu^* = 1 - x^*$

$\frac{1}{a}(r + \alpha)(aV_S^* - ap^*) + \mu = (r + \alpha)(V_S^* - p^*) + \mu^* = 0$

Como queriamos demonstrar.

Por outro lado, quando deslocamos a distribuição de preferências, isto é quando $a = 1$ e b>0, a liquidez aumenta. Este resultado é bastante ao obtido na estrutura de job search da seção anterior. Nossa demonstração é numérica.

2.4.4 Medida de Agentes entre Estados.

Considerando as estratégias de equilíbrio descritas acima, calculo numericamente a distribuiçao estacionária aproximada dos indivíduos entre os estados. O tempo é discreto e o intervalo entre os períodos de tempo (Δ) deve ser da ordem de grandeza proxima a zero, para que o erro de aproximação seja pequeno. Note que a matriz de transição do problema possui infinitas linhas e colunas, pois $j \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, o que torna o problema intratável do ponto de vista computacional. Truncando a matriz no estado $(1, n)$, (n>50), é possivel calcular a distribuiçao invariante para qualquer combinação dos parâmetros α, r, θ com o uso do computador. Veremos que truncagem da matriz da forma realizada é uma boa aproximação para a distribuição, dado que para diversas combinações de parâmetros a distruibuição estacionária mostrou-se muito concentrada nos estados X_{ij} $i = \{0, 1\}$ e $j = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, com medida nula em estados maiores do que X_{17}.

2.4.5 Algoritmo de Solução

$$
P(x_1,x_2,y_1,y_2) = \begin{cases}
se\, x_1 = 0 \begin{cases}
se\, y_1 = 0 \begin{cases} se\, y_2 \geq x_2 + 1 \; ou \; y_2 < 0 \Rightarrow P[.] = 0 \\ y_2 < x_2 + 1 \Rightarrow P[.] = (1-\theta\Delta\mu)\binom{x_2}{x_2 - y_2}(\theta\Delta\mu)^{x_2 - y_2}(1-\theta\Delta\mu)^{y_2} \end{cases} \\
se\, y_1 = 1 \begin{cases} y_2 < 1 \Rightarrow P[.] = 0 \\ y_2 \geq 1 \begin{cases} y_2 \leq x_2 + 1 \Rightarrow P[.] = \theta\Delta\mu\binom{x_2}{x_2 + 1 - y_2}(\theta\Delta\mu)^{x_2+1-y_2}(1-\theta\Delta\mu)^{y_2 - 1} \\ y_2 > x_2 + 1 \Rightarrow P[.] = 0 \end{cases} \end{cases}
\end{cases} \\
se\, x_1 = 1 \begin{cases}
se\, y_1 = 0 \begin{cases} y_2 < 0 \Rightarrow P[.] = 0 \\ y_2 > 0 \begin{cases} y_2 \leq x_2 \Rightarrow \alpha\Delta\binom{x_2}{x_2 - y_2}(\theta\Delta\mu)^{x_2 - y_2}(1-\theta\Delta\mu)^{y_2} \\ y_2 > x_2 \Rightarrow P[.] = 0 \end{cases} \end{cases} \\
se\, y_1 = 1 \begin{cases} y_2 < 1 \Rightarrow P[.] = 0 \\ y_2 \geq 1 \begin{cases} y_2 \leq x_2 \Rightarrow (1-\alpha\Delta)\binom{x_2 - 1}{x_2 - y_2}(1-\theta\Delta\mu)^{y_2 - 1}(\theta\mu\Delta)^{x_2 - y_2} \\ y_2 > x_2 \Rightarrow P[.] = 0 \end{cases} \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Para a construção da matriz de transição primeiro defina $P_\Delta : \{0,1\} \times \{0,1,2,...,n\} \times \{0,1\} \times \{0,1,2,...,n\} \rightarrow [0,1]$, $P[.]$ assumindo valores descritos na figura acima. Esta funcão associa dois estados quaisquer a probabilidade de transição do primeiro para o segundo estado. Em seguida, crie a função g que mapeia $\{1,2,3,...2n+1\}$ nos estados da seguinte forma: $g(1) = (0,0)$, $g(2) = (1,0)$ e $g(i) = (1,(i-2)/2)$ se i é par, e $g(i) = (0,(i-1)/2)$ caso contrário. A matriz M é definida por $M_{ij} = P(g(i); g(j))$.Uma medida de agentes é um vetor $\lambda \in [0,1]^{2n+1}$, tal que $\sum_{k=1}^{2n+1} \lambda_k = 1$. A evolução da medida ocorre durante o tempo seguindo o padrão $\lambda_{t+\Delta} = \lambda_t M$. Dizemos que a distribuição é invariante caso $\parallel \lambda_{t+\Delta} - \lambda_t \parallel < 10^{-15}$, onde $\parallel . \parallel$ é a norma do supremo em $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Na tabela abaixo consta o resultado para sete combinações de parâmetros. Os valores estão reportados em porcentagem. As siglas CM e SM designam com match e sem match respectivamente.

	X_{00}	X_{01}	X_{11}	X_{02}	X_{12}	X_{03}	X_{13}	X_{04}	X_{14}	CM	SM
$\alpha = 1/9, r = 5\%, \theta = 1$	15.0325	15.0014	55.9488	1.8549	11.2544	0.0943	0.7826	0.0026	0.0284	68.0143	31.9857
$\alpha = 1/9, r = 5\%, \theta = 10$	5.2425	5.1953	84.5131	0.1899	4.7661	0.0026	0.0896	0	0.0008	89.3697	10.6303
$\alpha = 1/9, r = 5\%, \theta = 20$	3.7491	3.6994	88.9511	0.0938	3.4608	0.0009	0.0446	0	0.0003	92.4568	7.5432
$\alpha = 1/20, r = 5\%, \theta = 1$	9.7056	9.6878	71.2993	0.7118	8.2442	0.0207	0.3238	0.0003	0.0063	79.8738	20.1262
$\alpha = 1/5, r = 5\%, \theta = 1$	19.3623	19.3185	43.7647	3.3170	12.6281	0.2443	1.2852	0.0101	0.0675	57.7476	42.2524
$\alpha = 1, r = 5\%, \theta = 1$	30.0283	29.9503	15.5496	10.0299	9.7639	1.7157	2.4110	0.1795	0.3280	28.0647	71.9352
$\alpha = 1/9, r = 30\%, \theta = 1$	13.1233	13.0891	61.4350	1.3075	10.3142	0.0578	0.5940	0.0174	0.0003	72.3609	27.6391

2.4.6 Nível Ótimo de Procura

Imagine que nesta economia exista a figura do Planejador Central que, de forma autoritária, é capaz de extrair o tipo de cada participante e é obrigá-los a realizar trocas. Sua principal preocupação, entretanto, é com o bem estar do conjunto de indivíduos. O nível de procura socialmente ótimo é aquele que maximiza a função de Bem Estar que pondera igualmente a utilidade dos agentes envolvidos nas trocas.

$$U^* = \int_0^\infty e^{-rt} \left[H(t)U_H(t) + (1 - H(t))\, U_{1-H}(t)\right] dt$$

Portanto a função U^*é o valor presente da média entre a utilidade instantanea dos indivíduos que possuem match $U_H(t)$ e a utilidade do grupo de pessoas procurando bens, $U_{1-H}(t)$.

Para tornar o problema mais simples e coerente com o conceito de equilíbrio adotado anteriormente, limitamos a análise de bem estar ao estado estacionário. Considerando que existe simetria nesta economia o Planejador, escolhe x^* de modo a maximizar U^*, exigindo que todos os compradores aceitem a troca quando o fit exceder x^*.Procedendo desta maneira, o Planejador é capaz de alterar tanto a medida quanto a esperança da utilidade dos indivíduos com match.

Em cada período, a utilidade das pessoas estão procurando por bens é exatamente zero, pois sem match não há como extrair serviços de um bem e não há nada que Planejador possa fazer a respeito disso. Os demais indivíduos gozam de $x \geq x^*$unidades de utilidade até ocorrer a depreciação total do bem, ganhando em média

$$E[x|x \geq x^*] = \int_{x^*}^1 \frac{x}{1 - F(x^*)}\, dF(x) = \frac{1 + x^*}{2}$$

de utilidade em cada período.

Fixado um preço de reserva x^*, a parcela $\theta\,[1 - x^*]\,[1 - H(t)]$ de agentes sem match estão realizando uma compra e $\alpha H(t)$ dos indivíduos com match iniciam uma nova procura por bens.

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = \theta\,[1 - x^*]\,[1 - H(t)] - \alpha H(t)$$

No estado estacionário, quantidade pessoas realizando novos matches é igual ao volume de indivíduos que colocam novos bens a venda. Portanto $\frac{\partial H(t)}{\partial t} = 0$ e a medida estacionária de indivíduos com match associada x^*é

$$H^* = \frac{\theta(1-x^*)}{\alpha + \theta(1-x^*)}$$

$$U^* = \frac{1}{r} H^*(x^*) E[x|x \geq x^*] + (1 - H^*)0$$

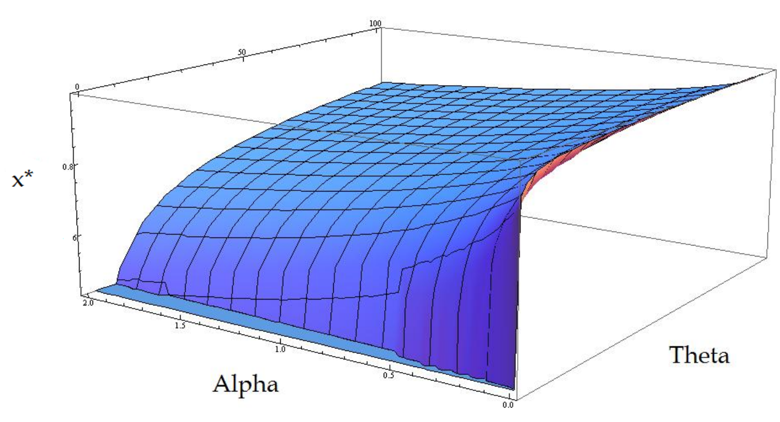
O Problema do Planejador Central é escolher x^*pertencente ao intervalo $[0, 1)$ que maximize a função

$$\max_{x^* \in [0,1]} \frac{1}{r} \left[\frac{\theta(1-x^*)}{\alpha + \theta(1-x^*)} \left(\frac{1+x^*}{2} \right) \right]$$

As condições de primeira ordem são suficientes posto que $U^*(x)$ é côncava em todo o domínio, caso $\theta > 0$ e $\alpha > 0$. O valor de reserva que maximiza a função de Bem Estar Social solução $\theta x^2 - 2(\theta + \alpha)x + \theta = 0$,mas o único elemento que atende as restrições do problema é

$$x^* = \frac{\theta + \alpha}{\theta} - \left[\left(\frac{\theta + \alpha}{\theta} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$$

Diferentemente da variável x^* do equilíbrio "de mercado" definido anteriormente, ótimo social não depende da taxa de desconto r, .já que o Planejador se importa apenas com estoque de pessoas com match e utilidade instantânea deste grupo. Dependendo taxa de desconto, o nível de procura de equilíbrio pode ser maior ou menor do que o nível ótimo social. Para ilustrar o resultado, represento o valor de reserva do Planejador Social como função do par $(\theta, \alpha) \in [0.01, 100] \times [0.01, 2]$.



3 Conclusão

Esta dissertação teve o propósito de estudar mercados decentralizados de bens duráveis, onde as transações não ocorrem de maneira imediata. Explorei o conceito de liquidez de mercado de Lippmann e McCall(1986) utilizando duas classes de modelos de Search. Modelos One Sided Search, abordados na primeira seção, foram a base da literatura de Labor Economics nos anos 70 e 80, e já foram objeto de estudo em algumas revisões bibliográficas, como em Lippman e McCall (1976). A linguagem tradicional de Job Search é útil para estudar o processo decisório de um indivíduo representativo, vendedor ou comprador do bem durável, considerando a distribuição das ofertas como exógena. Esta simplificação, que faz desta análise um tipo de equilíbrio parcial, permitiu realizar estáticas comparativas sem grande dificuldade matemática e sem a necessidade de recorrer ao uso da computação. As estáticas possibilitaram responder as perguntas contidas no abstract. Duas delas, o deslocamento da distribuição de ofertas e a adição de variância, podem ser encontradas com menos detalhes em Mortensen(1986). Desconheço, no entanto, fontes adicionais.

Na segunda seção, questiono a origem das expectativas dos agentes com relação à distribuição de ofertas utilizando um tipo de modelo mais complexo. Nesta estrutura, tanto compradores quanto vendedores participam do processo de procura. Modelos desta natureza não são novidade, tenho consciência que modelos de Equilibrium Search ganharam notoriedade à partir do artigo de Diamond(1982). No entanto, o modelo apresentado na última seção tem origens mais recentes: é uma versão aperfeiçoada daquela encontrada em Krainer e LeRoy(2001), podendo ser tipificada como uma economia de trocas similar a de Kiyotaki e Wright(1991) com comodity money. A diferença é que o bem que gera serviços ao comprador é durável, portanto gera um fluxo de utilidade para o comprador, e o bem que é utilizado para trocas pode, quando necessário, ser produzido com perda de utilidade. Outra diferença é que o indivíduo pode trocar os tipos de bens que não lhe geram serviços, enquanto extrai utilidade de um bem com match.

O equilíbrio foi computado numericamente, já que o sistema de equações gerado pelas condições do equilíbrio não é linear. Esta análise numérica reproduz o esforço de mapear o equilíbrio, como foi feito na primeira seção e tanto as estáticas comparativas quanto o algoritmo solução são originais. Apesar do maior realismo e complexidade do modelo, os resultados são bastante semelhantes às obtidas na primeira seção. Adicionalmente, realizo uma análise de Bem Estar, inexistente na primeira seção, utilizando como função objetivo do Planejador uma média ponderada das utilidades dos indivíduos desta Economia. Concluo que o nível de procura do equilíbrio está abaixo do nível que maximiza o bem estar social.

4 Referências Bibliográficas

Diamond, P.: "Aggregate Demand Management in Search Equilibrium," Journal of Political Economy 90, 881-894.(1982)

Kiyotaki, N., Wright, R.:"A Contribution to the Pure Theory of Money," Journal of Economic Theory 53, 215-235 (1991).

Kiyotaki, N., Wright, R.:"A Search-Theoretic Approach to Monetary Economics," American Economic Review 83, 63-77 (1993)

Krainer, J.; LeRoy, S.: "Equilibrium valuation of illiquid assets", Econonic Theory 19, 223-242 (2001)

Lippman, S. A., McCall, J. J.: "An operational measure of liquidity". American Economic Review 76, 43–55 (1986)

Mortensen, D.:"Job search and labor market analysis" in O. Ashenfelter and R. Layard, eds., Handbook of Labor Economics. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, (1986)

Stokey, N. Lucas, R. E., Prescott, E. C.: "Recursive Methods in Economic Dynamics. Cambridge ", MA: Harvard University Press (1989)

Wheaton, W. C.: "Vacancy, search, and prices in a housing market matching model ". Journal of Political Economy 61, 1270–1292 (1990)

Williams, J. T.: "Pricing real assets with costly search ". Review of Financial Studies 8, 55–90 (1995)

Wright, R.; Rogerson, R., Shimer, R.:"Search-Theoretic Models of the Labor Market: A Survey" JEL 43, 959-988. (2005)