



**ESTIMAÇÃO EM SISTEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE  
E APLICAÇÕES EM ROBÓTICA MÓVEL E DE REABILITAÇÃO**

**GLAUCO GARCIA SCANDAROLI**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**FACULDADE DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**  
**FACULDADE DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

**ESTIMAÇÃO EM SISTEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE  
E APLICAÇÕES EM ROBÓTICA MÓVEL E DE REABILITAÇÃO**

**GLAUCO GARCIA SCANDAROLI**

**ORIENTADOR: PROF. GEOVANY ARAÚJO BORGES, ENE/UNB**  
**CO-ORIENTADOR: PROF. JOÃO YOSHIYUKI ISHIHARA, ENE/UNB**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**PUBLICAÇÃO: PPGENE.DM 398/09.**

**BRASÍLIA/DF: SETEMBRO – 2009.**



## **FICHA CATALOGRÁFICA**

SCANDAROLI, GLAUCO GARCIA

Estimação em sistemas com restrições de igualdade e aplicações em robótica móvel e de reabilitação [Distrito Federal] 2009.

xi, 113 pp., 210 x 297 mm (ENE/FT/UnB, Mestre, Engenharia Elétrica, 2009).

Dissertação de Mestrado – Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Elétrica

- |                             |   |
|-----------------------------|---|
| 1. Estimação de estados     | 2. Sistemas com restrições de igualdade |
| 3. Robótica de Reabilitação | 4. Robótica Móvel                       |
| I. ENE/FT/UnB               | II. Título (série)                      |

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA**

SCANDAROLI, G. G. (2009). Estimação em sistemas com restrições de igualdade e aplicações em robótica móvel e de reabilitação, Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Publicação PPGENE.DM 398/09, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 113 pp.

## **CESSÃO DE DIREITOS**

AUTOR: Glauco Garcia Scandaroli

TÍTULO: Estimação em sistemas com restrições de igualdade e aplicações em robótica móvel e de reabilitação.

GRAU: Mestre                      ANO:2009

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte dessa dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Glauco Garcia Scandaroli

Departamento de Eng. Elétrica (ENE) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil



*Aos meus pais: Celina e Toninho.*





## AGRADECIMENTOS

*É engraçado como esta foi a última parte a ser escrita e a primeira parte que será lida, ou talvez a única! No final do trabalho passa um filme pela minha cabeça deste período que trabalhei no mestrado. Há a lembrança de todos os momentos fáceis, difíceis e também de todos os que me ajudaram nesta realização. É como foi dito no filme do Rocky Balboa: “it [life] ain’t about how hard you hit, it is about how hard you can get hit and keep moving forward, how much can you take and keep moving forward”. E se não fossem por estas pessoas que estiveram me apoiando durante toda esta odisséia, nada disso seria possível.*

*Inicialmente agradeço à minha família: meus pais Toninho e Celina e meu irmão Thacio pelo apoio incondicional desde a decisão de cursar o mestrado. Saber que vocês estão do meu lado me faz ter a certeza de que este caminho que escolhi é mesmo o certo. E sempre que a vida tentar me dar o troco, sei que vocês estarão lá para que eu possa continuar em frente.*

*Ao Professor Geovany por ter proposto o desafio de realizar este trabalho. Além de todos os momentos dedicados na orientação, gostaria de agradecê-lo pelo grande exemplo de ética, profissionalismo e competência que tive nestes últimos dois anos do mestrado, e um ano da graduação.*

*Ao Professor Ishihara por ter aceitado se juntar à esta empreitada na minha orientação, ajudando nas horas em que o trabalho simplesmente não saía, e principalmente pelo incentivo e auxílio na publicação dos artigos.*

*Fica meu sincero agradecimento à Larissa por toda a paciência que teve comigo nestes dois anos, por todo o apoio sempre, por não me deixar desistir nos momentos mais difíceis e pela compreensão da minha ausência tantas vezes.*

*Meus amigos do LARA: Bruno Vilhena, Ener Beckmann, Dudu, Mariana, Pedro (Pi), Henrique (Gaguinho), Felipe, Bruno Amui, Luís (Postinho), Ramses pelo convívio e discussões seja sobre o trabalho de vocês, meu trabalho, ou qualquer assunto que aparecesse. É de idéias diferentes que vive o mundo, e muitas vezes quando olhamos o problema de fora é mais fácil encontrar a solução. Durante estes dois anos pude aprender muito com cada um de vocês, obrigado.*

*Aos amigos de toda a vida (vou deixar de citar nominalmente pelo espaço e também para não esquecer de nenhum) obrigado pela parceria e pela diversão que faz valer a pena todo o trabalho!*

*Agradeço ao pessoal da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo Departamento de Engenharia Elétrica, e ao pessoal da Inter-med Equipamento Médico Hospitalar por me financiarem e que conseqüentemente viabilizaram a realização deste trabalho em dedicação exclusiva.*



## **RESUMO**

### **ESTIMAÇÃO EM SISTEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE E APLICAÇÕES EM ROBÓTICA MÓVEL E DE REABILITAÇÃO**

**Autor: Glauco Garcia Scandaroli**

**Orientador: Prof. Geovany Araújo Borges, ENE/UnB**

**Co-orientador: Prof. João Yoshiyuki Ishihara, ENE/UnB**

**Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica**

**Brasília, 30 de setembro de 2009**

Esta dissertação é desenvolvida na área de estimação de estados em sistemas com restrições de igualdade. É feito um estudo de sistemas com restrições de igualdade e este trabalho apresenta uma forma de se utilizar sistemas descritores para realizar a estimação neste tipo de sistema. Também é apresentado um novo método para fusão de dados em sistemas com restrições de igualdade e correlação desconhecida. Para a validação destes estudos são desenvolvidas duas aplicações de robótica. Na área de robótica de reabilitação é feita a estimação de postura do pé de uma prótese robótica de perna. São apresentadas formas de se realizar essa tarefa utilizando mínimos quadrados não-lineares e os métodos de estimação com restrição. Os resultados obtidos comprovam que a utilização de estimadores que consideram as restrições melhora o processo de estimação. Na área de robótica móvel é proposto um método eficiente de estimação de localização utilizando teoria Bayesiana e dado as restrições existentes entre as estruturas de um mapa geométrico, avalia-se o método apresentado para fusão de dados em sistemas com restrições de igualdade e correlação desconhecida. Os resultados descritos corroboram que o mapa resultante é melhorado com o uso das restrições de igualdade e do método de localização proposto.



## **ABSTRACT**

### **ESTIMATION IN EQUALITY CONSTRAINED SYSTEMS AND APPLICATIONS IN MOBILE AND REHABILITATION ROBOTICS.**

**Author: Glauco Garcia Scandaroli**

**Advisor: Prof. Geovany Araújo Borges, ENE/UnB**

**Co-advisor: Prof. João Yoshiyuki Ishihara, ENE/UnB**

**Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica**

**Brasília, September 30, 2009**

This dissertation is developed in the field of state estimation in non-linear systems with equality constraints. Systems with equality constraints are studied, and a method that employs descriptor systems to accomplish the task of estimation in this kind of system is proposed. This manuscript also presents a method for data fusion in systems subject to equality constraints, and unknown correlation. For the validation of the developed studies, this manuscript also describes two applications in the field of robotics. In the field of rehabilitation robotics, this dissertation presents the estimation of a robotic leg prosthesis' foot with respect to ground. There are presented solutions to perform this task using non-linear least squares, and constrained estimation methods. The obtained results establish that the implementation using estimators that employ equality constraints improves the process of estimation. In the field of mobile robotics, this work proposes an efficient estimation method to accomplish the problem of localization based on the Bayesian theory. Also, given the existing constraints between the geometric map's structures, the method for data fusion in systems subject to equality constraints and unknown correlation is evaluated. Results described corroborate that the resulting map is improved with the application of such equality constraints and the presented localization method.



## SUMÁRIO

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | VISÃO GERAL SOBRE ROBÓTICA DE REABILITAÇÃO  | 2         |
| 1.2      | VISÃO GERAL SOBRE ROBÓTICA MÓVEL  | 4         |
| 1.3      | O ESTADO DA ARTE EM ESTIMAÇÃO COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE                                       | 6         |
| 1.4      | OBJETIVOS   | 7         |
| 1.5      | RESULTADOS ALCANÇADOS E CONTRIBUIÇÕES   | 8         |
| 1.6      | APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO  | 8         |
| <b>2</b> | <b>REVISÃO DE MÉTODOS PARA ESTIMAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE</b>     | <b>11</b> |
| 2.1      | DEFINIÇÃO DO PROBLEMA   | 11        |
| 2.2      | SOLUÇÕES PARA SISTEMAS LINEARES   | 12        |
| 2.2.1    | FILTRO DE KALMAN COM MEDIÇÕES AUMENTADAS  | 13        |
| 2.2.2    | FILTRO DE KALMAN COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE  | 15        |
| 2.2.3    | RELAÇÕES ENTRE FKMA E FKRI  | 17        |
| 2.3      | SOLUÇÕES PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES   | 19        |
| 2.3.1    | FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO COM MEDIÇÕES AUMENTADAS  | 19        |
| 2.3.2    | FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE  | 20        |
| 2.3.3    | COMPARAÇÃO ENTRE O FKEMA E FKERI  | 21        |
| <b>3</b> | <b>ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES SOBRE ESTIMAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE</b> | <b>23</b> |
| 3.1      | UMA ABORDAGEM COM SISTEMAS DESCRITORES PARA ESTIMAÇÃO EM SISTEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE   | 23        |
| 3.1.1    | APROXIMAÇÃO PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES  | 26        |
| 3.1.2    | EXTENSÃO UTILIZANDO FILTRAGEM ROBUSTA EM SISTEMAS DESCRITORES COM INCERTEZAS DE PARÂMETROS      | 28        |
| 3.2      | ESTIMAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE E CORRELAÇÃO DESCONHECIDA          | 29        |
| 3.2.1    | MÉTODO DE INTERSECÇÃO DE COVARIÂNCIAS   | 31        |
| 3.2.2    | MÉTODO DE INTERSECÇÃO DE COVARIÂNCIAS COM RESTRIÇÕES DE ESTADOS                                 | 32        |
| <b>4</b> | <b>ESTIMAÇÃO DE POSTURA DO PÉ DE UMA PRÓTESE ROBÓTICA</b>                                       | <b>35</b> |
| 4.1      | DESCRIÇÃO DO PROTÓTIPO  | 35        |
| 4.2      | VARIÁVEIS DE ORIENTAÇÃO E MEDIÇÃO   | 37        |
| 4.2.1    | MODELO DE PREDIÇÃO UTILIZANDO GIRÔMETROS  | 38        |



|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.2.2    | MODELO DE CORREÇÃO UTILIZANDO SENSORES INFRA-VERMELHOS                                    | 39         |
| 4.3      | DESCRIÇÃO DO APARATO EXPERIMENTAL   | 40         |
| 4.3.1    | ESTIMAÇÃO POR PREDIÇÃO UTILIZANDO GIRÔMETROS  | 40         |
| 4.3.2    | ESTIMAÇÃO UTILIZANDO MÍNIMOS QUADRADOS NÃO-LINEARES E SENSORES INFRA-VERMELHOS            | 42         |
| 4.3.3    | ESTIMAÇÃO UTILIZANDO FILTRO DE KALMAN COM MEDIÇÕES AUMENTADAS                             | 46         |
| 4.3.4    | ESTIMAÇÃO UTILIZANDO FILTRO DE KALMAN PARA SISTEMAS DESCRITORES                           | 50         |
| 4.3.5    | ESTIMAÇÃO UTILIZANDO FILTRO DE KALMAN ROBUSTO PARA SISTEMAS DESCRITORES                   | 55         |
| 4.4      | DISCUSSÃO   | 59         |
| <b>5</b> | <b>LOCALIZAÇÃO E MAPEAMENTO SIMULTÂNEOS</b>   | <b>65</b>  |
| 5.1      | AUTO-LOCALIZAÇÃO  | 66         |
| 5.1.1    | SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA   | 67         |
| 5.1.2    | CÁLCULO DA MATRIZ DE COVARIÂNCIAS   | 71         |
| 5.1.3    | ESTIMAÇÃO COMPLETA DA LOCALIZAÇÃO   | 73         |
| 5.1.4    | ANÁLISE DE RESULTADOS EM SIMULAÇÃO  | 73         |
| 5.1.5    | RESULTADOS EXPERIMENTAIS  | 79         |
| 5.1.6    | AMBIENTE A  | 80         |
| 5.1.7    | AMBIENTE B  | 82         |
| 5.2      | MAPEAMENTO  | 84         |
| 5.2.1    | ESTRUTURAS PRESENTES EM UM MAPA GEOMÉTRICO  | 84         |
| 5.2.2    | FUSÃO DE DADOS E APLICAÇÃO DAS RESTRIÇÕES   | 86         |
| 5.3      | RESULTADOS PARA LOCALIZAÇÃO E MAPEAMENTO SIMULTÂNEOS                                      | 87         |
| <b>6</b> | <b>CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS</b>  | <b>91</b>  |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>   | <b>93</b>  |
|          | <b>APÊNDICES</b>  | <b>103</b> |
| <b>A</b> | <b>EQUIVALÊNCIA ENTRE FILTRO DE KALMAN COM MEDIÇÕES AUMENTADAS E SISTEMAS DESCRITORES</b> | <b>105</b> |
| <b>B</b> | <b>CONCEITOS DE ROBÓTICA MÓVEL</b>  | <b>109</b> |
| B.1      | POSTURA DE UM ROBÔ E TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS   | 109        |
| B.2      | ELEMENTOS BÁSICOS DE UM MAPA GEOMÉTRICO   | 110        |
| B.2.1    | PONTOS  | 110        |
| B.2.2    | RETAS E SEGMENTOS DE RETA   | 110        |
| B.3      | REPRESENTAÇÃO UNIFICADA   | 111        |

## LISTA DE FIGURAS

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Joelhos protéticos comerciais. (a) C-leg da Otto Bock utiliza um atuador hidráulico. (b) Össur Rheo utiliza atuador magneto-rheológico. <sup>0</sup> .....  | 3  |
| 1.2  | Movimentos do pé. <sup>0</sup> .....  | 3  |
| 3.1  | Comparação das matrizes de covariância resultantes da utilização dos métodos de Filtro de Kalman com correlação conhecida e método da Intersecção de Covariâncias .....   | 32 |
| 3.2  | Fusão de dados em um sistema com restrição entre os estados e correlação desconhecida utilizando método da intersecção de covariâncias com minimização da covariância projetada (ICMCP) e método da intersecção de covariâncias com projeção da estimativa (ICPE) ..... | 34 |
| 4.1  | (a) Foto da prótese robótica em desenvolvimento (b) Vista lateral do pé com posicionamento dos giroscópios e sensores infra-vermelhos. (c) Posicionamento dos sensores infra-vermelhos na sola do pé e orientação das medições de velocidade dos giroscópios. ....      | 36 |
| 4.2  | Orientação do pé com relação ao solo e medidas dos sensores.....  | 38 |
| 4.3  | Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Somente girômetros.....   | 42 |
| 4.4  | Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Girômetros com restrição de norma unitária utilizando Filtro de Kalman com Projeção das Estimativas. ....   | 43 |
| 4.5  | Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Mínimos Quadrados Não-Lineares utilizando somente medidas dos sensores infra-vermelhos .....  | 45 |
| 4.6  | Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Fusão de dados dos girômetros e infra-vermelhos utilizando Filtro de Kalman de Medições Aumentadas. ....  | 49 |
| 4.7  | Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Fusão de dados dos girômetros e infra-vermelhos utilizando Filtro de Kalman para Sistemas Descritores .....   | 54 |
| 4.8  | Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Fusão de dados dos girômetros e infra-vermelhos utilizando Filtro de Kalman Robusto para Sistemas Descritores.....  | 58 |
| 4.9  | Erros de estimação da norma $\ n\ ^2$ para estimadores baseados em filtro de Kalman.....  | 61 |
| 4.10 | Comparativo dos erros de estimação da componente $n_x$ para estimadores baseados em filtro de Kalman. ....  | 62 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 5.1  | Estrutura da arquitetura utilizada na solução do problema de SLAM. $z$ representa a postura (posição e direção) do robô ao passo que $\mathcal{M}$ representa um mapa. ....   | 65 |
| 5.2  | Situação 1: duas retas ortogonais e um ponto encontrados. Uma única solução para o máximo de verossimilhança. (a) Estimativa <i>a priori</i> ; (b) Estimativa de máxima verossimilhança; (c) Estimativa <i>a posteriori</i> , estimada a partir da fusão das estimativas <i>a priori</i> e de máxima verossimilhança. ....  | 74 |
| 5.3  | Simulação 2: duas retas ortogonais e um ponto encontrados. Duas soluções para o máximo de verossimilhança. (a) Estimativa <i>a priori</i> ; (b) Estimativas de máxima verossimilhança (cinza), destaque para estimativa mais próxima da estimativa <i>a priori</i> (preto); (c) Estimativa <i>a posteriori</i> , estimada a partir da fusão das estimativas <i>a priori</i> e de máxima verossimilhança. .... | 75 |
| 5.4  | Simulação 3: duas retas ortogonais encontradas. Duas soluções para o máximo de verossimilhança. (a) Estimativa <i>a priori</i> ; (b) Estimativas de máxima verossimilhança (cinza), destaque para estimativa mais próxima da estimativa <i>a priori</i> (preto); (c) Estimativa <i>a posteriori</i> , estimada a partir da fusão das estimativas <i>a priori</i> e de máxima verossimilhança. ....            | 76 |
| 5.5  | Simulação 4: duas retas paralelas encontradas. Infinitas soluções para o máximo de verossimilhança. (a) Estimativa <i>a priori</i> ; (b) Estimativas de máxima verossimilhança (cinza), destaque para estimativa mais próxima da estimativa <i>a priori</i> (preto); (c) Estimativa <i>a posteriori</i> , estimada a partir da fusão das estimativas <i>a priori</i> e de máxima verossimilhança. ....        | 77 |
| 5.6  | Simulação 5: uma reta encontrada. Infinitas soluções para o máximo de verossimilhança. (a) Estimativa <i>a priori</i> ; (b) Estimativas de máxima verossimilhança (cinza), destaque para estimativa mais próxima da estimativa <i>a priori</i> (preto); (c) Estimativa <i>a posteriori</i> , estimada a partir da fusão das estimativas <i>a priori</i> e de máxima verossimilhança. ....                     | 79 |
| 5.7  | Experimento 1, (a) Mapa gerado a partir de giro-odometria utilizado no mapa global no experimento; (b) Erros de localização com relação à postura calculada utilizando dados de giro-odometria. ....  | 81 |
| 5.8  | Experimento 2, (a) Mapa gerado a partir de giro-odometria utilizado no mapa global no experimento; (b) Erros de localização com relação à postura calculada utilizando dados de giro-odometria. ....  | 83 |
| 5.9  | Representação das estruturas de um mapa Geométrico <sup>0</sup> . (a) Semiplano; (b) Borda; (c) Canto; (d) Índice fotométrico. ....   | 85 |
| 5.10 | Construção do mapa para o Ambiente A utilizando a estratégia proposta neste trabalho. (a) Com restrições entre as estruturas; (b) Sem restrições entre as estruturas. ....  | 88 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 5.11 | Construção do mapa para um ambiente mais complexo utilizando giro-odometria e proposta apresentada neste trabalho. (a) Visão completa do mapa. (b) Visão ampliada de uma região de interesse do mapa..... | 89  |
| B.1  | (a) Representação do sistema de coordenadas local $\mathcal{R}^l$ e global $\mathcal{R}^g$ . (b) Relação das coordenadas de um ponto em dois sistemas de coordenadas diferentes.                          | 110 |
| B.2  | Elementos geométricos no plano 2-D. (a) Ponto. (b) Reta. (c) Segmento de Reta. ....   | 111 |
| B.3  | Descrição dos elementos geométricos no plano 2-D.....   | 112 |



## LISTA DE ALGORITMOS

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Equações do Filtro de Kalman com Medições Aumentadas . . . . .   | 14 |
| 2.2 | Equações do filtro de Kalman com restrições de igualdade . . . . .   | 16 |
| 2.3 | Equações do Filtro de Kalman Estendido com Medições Aumentadas . . . . .   | 20 |
| 2.4 | Equações do filtro de Kalman estendido com restrições de igualdade . . . . .   | 22 |
| 3.1 | Estimação em sistemas lineares com restrições de igualdade utilizando filtro de Kalman para sistemas descritores . . . . .     | 25 |
| 3.2 | Estimação em sistemas com restrições não-lineares de igualdade utilizando filtro de Kalman para sistemas descritores . . . . . | 27 |
| 3.3 | Filtro de Kalman robusto para sistemas descritores . . . . .   | 30 |
| 3.4 | Estimação utilizando intersecção de covariâncias com minimização da covariância projetada . . . . .                            | 34 |
| 4.1 | Estimador sequencial utilizando girômetros . . . . .   | 41 |
| 4.2 | Estimador sequencial utilizando girômetros e restrição unitária . . . . .  | 43 |
| 4.3 | Estimador de Mínimos-Quadrados Não-Lineares . . . . .  | 45 |
| 4.4 | Filtro de Kalman de Medições Aumentadas . . . . .  | 48 |
| 4.5 | Filtro de Kalman para Sistemas Descritores . . . . .   | 53 |
| 4.6 | Filtro de Kalman Robusto para Sistemas Descritores . . . . .   | 57 |
| 5.1 | Estimativa de máxima verossimilhança para o problema de localização . . . . .  | 72 |



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Subscritos

|           |  |
|-----------|--|
| $k$       | índice da amostra                                      |
| $k k - 1$ | estimativa atual dado a estimativa da amostra anterior |

### Sobrescritos

|                 |                             |
|-----------------|-----------------------------|
| $\hat{\cdot}$   | estimativa                  |
| $\tilde{\cdot}$ | estimativa não projetada    |
| $\dot{\cdot}$   | derivada temporal           |
| ic              | Intersecção de Covariâncias |
| ma              | medição aumentada           |
| mv              | máxima verossimilhança      |
| ri              | com restrição de igualdade  |
| sd              | sistema descritor           |
| $\dagger$       | pseudo-inversa              |

### Siglas

|       |   |
|-------|---|
| CML   | Localização e mapeamentos concorrente,<br>do inglês <i>Concurrent localization and mapping</i>  |
| GRAV  | Grupo de Robótica, Automação e Visão  |
| GPDS  | Grupo de Processamento Digital de Sinais  |
| FK    | filtro de Kalman  |
| FKE   | filtro de Kalman Estendido  |
| FKMA  | filtro de Kalman com medições aumentadas  |
| FKPE  | filtro de Kalman com rojeção das estimativas  |
| FKSD  | filtro de Kalman para sistemas descritores  |
| FKRSD | filtro de Kalman robusto para sistemas descritores  |
| FKU   | filtro de Kalman <i>unscented</i>   |
| IC    | intersecção de covariâncias   |
| ICPE  | intersecção de covariâncias com projeção da estimativas   |
| ICMCP | intersecção de covariâncias com minimização da covariância projetada                            |
| MMNL  | método dos mínimos quadrados não-Lineares   |
| SLAM  | Localização e Mapeamento Simultâneos,<br>do inglês <i>Simultaneous Localization and Mapping</i> |





# 1 INTRODUÇÃO

*“Let’s work the problem people.  
Let’s not make things worse by guessing.”  
Gene Kranz (Apollo 13)*

Robôs e sistemas robóticos geralmente trabalham em ambientes imprevisíveis, portanto a estimação é uma parte muito importante no processo de desenvolvimento desses sistemas. A partir da estimação, pode-se obter informações sobre os estados do sistema em que se está trabalhando, e sobre o meio no qual esse sistema está ambientado. Primeiramente, sistemas robóticos utilizam sensores na percepção do ambiente. Esses sensores que geralmente são empregados possuem limitações em sua percepção. Essas limitações podem ser provenientes de diversas origens, como a distância ou a resolução que um sensor pode medir geralmente estão sujeitos a limitações físicas. Por exemplo, uma câmera não pode enxergar através de paredes, um sensor infravermelho possui uma distância máxima que pode ser medida. Esses sensores também estão sujeitos a ruídos de medição, que atrapalham sensivelmente a percepção do ambiente e podem levar a situações imprevisíveis. Igualmente, a importância da estimação vem do fato que em sistemas robóticos pode-se haver um acesso direto a todas as variáveis de interesse. Deve-se, portanto, a partir da medição de outras fontes e a partir de cálculos que as relacionem com as variáveis do sistema, computar o valor "mais provável" que as variáveis assumem durante a operação deste sistemas.

Com o intuito de ultrapassar algumas das adversidades presentes no ambiente, deseja-se calcular o valor "mais provável" de certa variável, e também a incerteza que a ela está associada. A partir destes resultados pode-se então ter conhecimento mais conciso sobre o ambiente no qual se está trabalhando, podendo-se controlar o sistema ou auxiliar na tomada de decisões de uma forma mais confiável. Neste trabalho, é proposta a utilização de estimação de estados em duas aplicações: (i) o desenvolvimento de um estimador de postura do pé (orientação e distância com relação ao solo) de uma prótese robótica de perna, (ii) contribuições em um sistema de localização e mapeamento simultâneos para um robô móvel.

A primeira aplicação possui como objetivo fornecer estimativas em tempo real da postura do pé de uma prótese robótica para amputados acima do joelho com relação ao solo. Este trabalho faz parte do desenvolvimento de um protótipo de prótese robótica de perna para amputados acima do joelho, realizado na Universidade de Brasília pelo Grupo de Robótica, Automação e Visão (GRAV) em parceria com o Grupo de Processamento Digital de Sinais (GPDS) [1]. Esta aplicação da estimação de postura do pé é desenvolvida a partir de informação proveniente de sensores giroscópios e infravermelhos. Com base nesta informação sobre a postura do pé, pode-se desenvolver controladores de forma a posicionar o pé da

prótese em uma posição desejada com relação ao solo.

A segunda aplicação consiste em trabalhar com a localização e o mapeamento simultâneos em robôs móveis. Este problema aparece quando o robô não possui um mapa do ambiente previamente, nem há conhecimento sobre a localização real do robô. Então este termo traduz diretamente o problema a ser resolvido: o robô constrói um mapa do ambiente no qual ele está inserido ao mesmo tempo em que se localiza dentro deste mapa. Este é um problema bem complexo na área de robótica, pois enquanto o robô se move em um ambiente, erros de odometria são acumulados, portanto a incerteza sobre a localização do robô também aumenta gradualmente e, conseqüentemente, as incertezas dos mapas gerados também aumentam substancialmente se o robô não for capaz de se localizar com razoável precisão.

## 1.1 VISÃO GERAL SOBRE ROBÓTICA DE REABILITAÇÃO

A perda de um membro pode prejudicar severamente a qualidade de vida de qualquer pessoa. Os estudos em reabilitação visam recuperar movimentos perdidos e corroborar o tratamento de disfunções motoras causadas por doenças ou amputações. O desenvolvimento de próteses obteve grandes êxitos ao melhorar a mobilidade de pacientes com amputações de membros inferiores, porém ainda carece de melhor evolução no que tange ao conforto, ao consumo de energia, à estabilidade e à simetria da marcha do indivíduo. Hoje em dia, a maioria das próteses de membros inferiores é passiva, ou seja, suas características mecânicas permanecem fixas independentemente da velocidade de caminhada ou do terreno no qual o paciente está. Esta característica implica em próteses passivas que devem ser individualmente otimizadas para cada caso e para cada paciente.

Atualmente, existem próteses ativas para amputados acima do joelho. Estas próteses são capazes de alterar a rigidez e o amortecimento do joelho protético através de atuadores hidráulicos–pneumáticos [2–4], ou magneto-rheológicos [5, 6], conforme ilustrado na Figura 1.1. Testes realizados em próteses comerciais, como da marca Ottobock C-Leg e Össur Rheo, indicam que as próteses ativas oferecem diversas vantagens sobre versões passivas [3, 7]. Dentre estas vantagens estão a maior suavização da marcha, redução da atividade metabólica e redução do trabalho exercido pelo quadril. No entanto, as próteses existentes para amputados acima do joelho não tratam do controle da parte responsável por substituir o pé.

Apesar do desenvolvimento de próteses de pé ativas, as próteses para amputados acima do joelho substituem a parte do pé por um molde de borracha. Ou então uma molde feito a partir de compósito de carbono. Em ambos os casos não existe atuação na junta do tornozelo. Contudo, tal qual em próteses acima do joelho, existem próteses de pé que modificam a elasticidade e o amortecimento para diferentes terrenos e velocidade de caminhada [8]. Em 1998, Klute *et al.* [9] foram os primeiros a desenvolver uma prótese capaz de produzir força baseada em atuadores conhecidos como músculos de McKibben. E recentemente, Au *et al.*



(a)



(b)

Figura 1.1: Joelhos protéticos comerciais. (a) C-leg da Otto Bock utiliza um atuador hidráulico. (b) Össur Rheo utiliza atuador magneto-rheológico.<sup>1</sup>

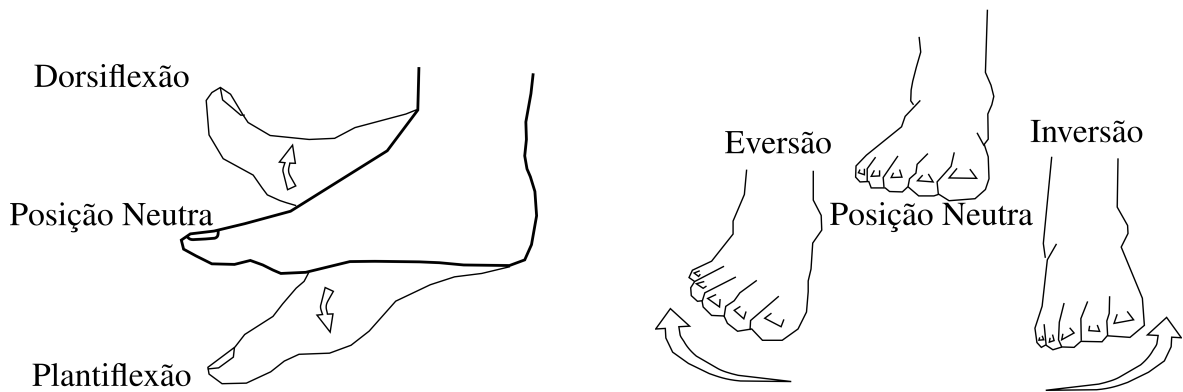


Figura 1.2: Movimentos do pé.<sup>2</sup>

[10] desenvolveram uma prótese ativa de pé que consiste em uma parte de compósito de carbono acoplado com um motor de corrente contínua e molas em série e paralelo.

Observa-se na literatura que as próteses ativas de pé atuam somente nos movimentos de dorsiflexão e plantiflexão, apresentados na Figura 1.2. Porém estas próteses não são capazes de produzir os movimentos de eversão e inversão [8, 10], movimentos que também são apresentados na Figura 1.2. Os movimentos de eversão e inversão são importantes na fase de apoio na prótese e no equilíbrio da marcha, fatos que são fortalecidos na área de pesquisa de locomoção bípede, visto que robôs humanóides possuem este grau de atuação [11–13].

O protótipo desenvolvido em [1] possui três graus de atuação: um para o joelho, relacionado com o auxílio na marcha do paciente, e outros dois para o conjunto pé-tornozelo o qual é voltado para o aumento de estabilidade do paciente. Estes graus de liberdade do

<sup>1</sup>Retirado de [7].

<sup>2</sup> Baseado em <http://www.hu.ufsc.br/grumad/anatomia.htm>

conjunto pé-tornozelo se referem aos movimentos de dorsiflexão e plantiflexão, e também aos movimentos de eversão e inversão. Em parte, a prótese é controlada pelo processamento de sinais eletromiográficos de superfície medidos em no paciente [14]. No entanto, outras informações, como a orientação do pé com relação ao solo, são utilizadas de forma a aumentar a confiabilidade no sistema em malha fechada, visto que este protótipo também possui um conjunto ativo. Portanto, de forma a realizar o controle deste conjunto, deve-se ter acesso às variáveis de orientação. Neste ponto, torna-se necessário o desenvolvimento de um estimador de orientação do pé com relação ao solo.

## 1.2 VISÃO GERAL SOBRE ROBÓTICA MÓVEL

Um dos problemas básicos de robótica móvel é o de localização e mapeamento simultâneos (SLAM do inglês *Simultaneous Localization and Mapping*), também chamado de localização e mapeamento concorrentes (CML do inglês *Concurrent Mapping and Localization*). Este problema vem sendo estudado exaustivamente nos últimos anos nas áreas de robótica e de inteligência artificial. O problema de SLAM origina-se quando um veículo móvel (*e.g.* um robô, avião, helicóptero ou até mesmo submarino) navega sem um mapa previamente para orientação. Por ser desconhecido, o mapa deve ser estimado ao mesmo tempo que a posição deste veículo no ambiente. O termo localização e mapeamento simultâneos traduz diretamente o problema a ser resolvido: o robô concebe um mapa do ambiente no qual ele está inserido, ao mesmo tempo em que se localiza dentro deste mapa que está sendo construído. E devido a esta definição, o problema é geralmente comparado com o problema do “ovo e da galinha”, pois quando um robô se move em um ambiente, erros de odometria são acumulados, portanto a incerteza sobre a localização do robô também aumenta gradualmente. Como a estimativa de localização é cada vez mais pobre, tem-se como consequência a degeneração gradual do mapa resultante.

Uma grande parte dos trabalhos desenvolvidos hoje em dia é fundamentada no trabalho desenvolvido por Smith e Cheeseman [15] que propõe o uso do filtro de Kalman Estendido (FKE) para a solução do problema de SLAM. Este trabalho considera que os erros no mapa e das estimativas de localização do robô estão naturalmente correlacionados, logo a matriz de covariâncias mantida pelo FKE expressa estas correlações. No entanto, as matrizes armazenadas pelo FKE possuem uma relação quadrática com a evolução do mapa e conseqüentemente a atualização destes mapas requer um tempo quadrático com relação ao número de estruturas presentes no mapa. Como forma de contornar este problema, Julier e Uhlman [16–18] propõem um método que visa sobre-estimar as matrizes de covariâncias das estruturas de um mapa de forma que as correlações entre estas possam ser desconsideradas. Com este método, a matriz de covariância de cada estrutura pode ser armazenada de forma individual, portanto o tempo de processamento evolui de forma linear com relação ao aumento do número de estruturas. Outra forma de se tratar este problema é através do método

FastSLAM proposto por Montemerlo *et. al* [19]. Este método emprega filtros de partículas baseando-se na característica de que no problema de SLAM, as estimativas das estruturas são condicionalmente independentes, dado o caminho do robô [20]. Desta forma, chega-se a um algoritmo que aumenta de tamanho na ordem  $O(MN)$ , com  $M$  sendo o número de partículas do filtro e  $N$  o número de estruturas do mapa, entretanto o tempo de atualização do mapa aumenta na ordem  $O(M \log(N))$ .

A parte de mapeamento se refere à forma de representação espacial que o robô utiliza para ambiente físico no qual este está localizado. Uma forma de representação muito utilizada na literatura é o algoritmo de grades de ocupação [21], que visa representar os mapas utilizando células alocadas lado a lado em forma de grade, e cada célula representa um espaço ocupado ou livre no ambiente. Os mapas topológicos [22,23] representam os ambientes através de uma lista de subambientes relevantes que são conectados por arcos. Estes arcos representam como o robô pode navegar de um ambiente para o outro. Esta abordagem de mapas topológicos pode ser considerada de certa forma híbrida, pois ainda que sejam consideradas as informações topológicas, ainda são necessárias informações geométricas para a construção destes mapas. Uma última forma de representação consiste nos chamados mapas estocásticos ou também mapas geométricos [24]. Esse tipo de mapa, assim como as grades de ocupação, resulta em uma representação geométrica do ambiente. A representação nestes casos é realizada na forma de estruturas geométricas, como linhas e pontos, que representam as fronteiras dos obstáculos presentes no ambiente.

Localização é o processo de atualização da posição do robô em um ambiente baseado em mapas e medições dos sensores. Este problema já foi referenciado como “o problema fundamental para se desenvolver um robô com capacidades autônomas” [25]. Existem diversas definições para o problema de localização [26–28]. Neste trabalho, o termo localização refere-se à solução para o problema de rastreamento da posição. Neste caso, a posição inicial do robô é conhecida, e o problema é compensar os erros incrementais provenientes da integração de medições de odometria do robô. Na literatura, este problema é abordado de diversas formas como utilizando a minimização de funções de custo [29–31], filtros de Kalman [32, 33] ou filtros de partículas [27, 28].

As aplicações desenvolvidas nesta dissertação buscam complementar o trabalho desenvolvido por Borges [34] que utiliza a abordagem de mapas geométricos. É utilizada uma abordagem de SLAM desacoplado, ou seja, a localização do robô é realizada em cima do mapa ao passo que este é construído. Para tanto é utilizado um método similar ao proposto em [16] para a fusão de dados das estruturas. São desenvolvidas novas formas para a localização do robô no mapa geométrico e também para a fusão das estruturas com restrições de estados. Estes desenvolvimentos visam em parte fundamentar as técnicas anteriormente utilizadas e também melhorar as soluções já propostas.

### 1.3 O ESTADO DA ARTE EM ESTIMAÇÃO COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

Restrições entre os estados podem aparecer de forma natural em diversos sistemas físicos. As restrições entre os estados podem ser inerentes aos sistemas e podem ser derivadas a partir de leis básicas da física como a conservação de energia de um sistema mecânico [35, 36], ou a conservação de massa em uma reação química dentro de um reator fechado [37]. Restrições também podem ser consideradas como informações suplementares sobre o sistema. No movimento de uma aeronave pode-se assumir, em alguns casos, que o vetor de aceleração é ortogonal ao vetor de velocidade [38, 39], portanto as restrições podem aparecer a partir de informações cinemáticas. No caso em que os estados são modelados como as componentes de um quatérnio, tem-se uma restrição matemática que obriga norma deste vetor ser unitária [40]. Em outros casos restrições podem ser de origem geométrica, como a relação entre as primitivas de planos e cilindros e suas posições relativas [41].

No início dos estudos desenvolvidos sobre estimação, pouca atenção foi empregada na solução de problemas com restrições de igualdade. Isto ocorreu em parte pela dificuldade em modelar estas restrições, e em parte pelo aumento do custo computacional resultante do aumento de informação a ser processada [42]. Na prática, entretanto, estas informações extras provenientes das restrições podem ser muito úteis. Desse modo, é importante saber como tirar proveito das informações que as restrições provêm sobre o sistema, pois as benesses resultantes do uso de restrições entre os estados são maiores do que o aumento do custo computacional associado à aplicação destas restrições. Além disso, hoje em dia o custo reduzido do esforço computacional torna quase imperceptível o acréscimo destes novos cálculos, dependendo do método utilizado. Ao se empregar as restrições durante o processo de estimação, pode-se verificar que a estimativa resultante tem valor diferente da não-restringida, e ainda a matriz de covariância tem seu traço reduzido substancialmente, devido ao fato que mais informação esta presente no novo modelo.

Com a evolução do desempenho dos computadores e também com a percepção da melhoria causada no processo de estimação pelo emprego das restrições, nos últimos anos foram realizados diversos estudos e na literatura estão disponíveis diversas abordagens para se tratar o problema de estimação em sistemas com restrições de igualdade. Uma forma de se tratar o problema é a partir da redução da parametrização dos sistemas [43]. Contudo esta reparametrização altera a forma das equações, e conseqüentemente altera o significado físico ou matemático associado a cada estado. Em se tratando de sistemas robóticos geralmente é desejável manter a forma das equações e o sentido físicos dos estados.

Outros trabalhos tratam da utilização de estimação com horizonte móvel [44–47]. Esta abordagem permite rescrever o problema de estimação na forma de programação quadrática utilizando uma janela de tamanho fixo (denominada horizonte), mas móvel no tempo resultando no horizonte móvel. A definição de um tamanho fixo para o horizonte é importante para limitar o tamanho da programação quadrática. Esta abordagem possui como

desvantagens o alto custo computacional do emprego de métodos de otimização quadráticos, e também pelo fato de não existir uma métrica, por exemplo matriz de covariâncias, que indique o erro de estimação. Outra abordagem existente utiliza o cálculo da estimativa de máxima verossimilhança [40, 48] de uma forma modificada devido à existência de matriz de covariância singular. Escolhendo a forma correta da função de custo, pode-se utilizar então do multiplicador de Lagrange, para encontrar as equações desta solução. No caso de sistemas não-lineares, a solução do lagrangiano também feita de forma não linear, e [48] empregada o método iterativo de Newton-Raphson para encontrar a solução. Outras soluções presentes na literatura, tratam de abordagens utilizando filtros de partículas [49–51] e soluções baseadas no método dos mínimos quadrados, *c.f.* [52, 53, e referências].

Neste trabalho serão tratadas com maior profundidade as soluções baseadas em filtro de Kalman (FK) para em sistemas lineares e, para sistemas não lineares, são estudadas as formas baseadas na linearização de primeira ordem [36, 38, 39, 41, 42, 54–64]. Não deixando de atentar ao fato de que soluções baseadas em transformação *unscented* e no filtro de Kalman *unscented* (FKU) [35, 36, 65–67] também já foram estudadas por alguns pesquisadores. As técnicas baseadas em FK possuem a vantagem de herdarem a forma recursiva e a otimalidade que o FK possui nos casos de estimação em sistemas lineares e com ruído aditivo e Gaussiano com covariâncias e correlações conhecidas.

## 1.4 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é o estudo e o desenvolvimento de técnicas de estimação voltado para aplicações em robótica. É notório que diversas aplicações possuem restrições de estados. O estudo e a implementação de técnicas voltadas para a estimação em sistemas com restrições podem melhorar bastante o desempenho dos estimadores. Neste sentido propõe-se trabalhar utilizando estimação com restrições de igualdade em robótica de reabilitação, e assim conferir a viabilidade de se resolver o problema de estimação de postura do pé de uma prótese robótica utilizando estas técnicas. Em robótica móvel, uma das áreas em que se pode aplicar a estimação com restrições é na localização e mapeamento simultâneos. Desta forma propõe-se a utilização de um método de estimação com restrição de igualdade na fusão de dados no processo de mapeamento de um robô móvel. Este trabalho também traça o estudo de um método para se realizar o problema de localização de robôs móveis em mapas geométricos. Neste contexto, o trabalho é intercalado com análises teóricas dos temas acima mencionados com as aplicações práticas em robótica móvel e de reabilitação, junto dos resultados obtidos a partir destas implementações.



## 1.5 RESULTADOS ALCANÇADOS E CONTRIBUIÇÕES

Neste trabalho, são descritas algumas contribuições na área de estimação em sistemas com restrições de igualdade, além de desenvolvimentos na área de robótica móvel e de reabilitação. São apresentadas formulações de como utilizar sistemas descritores no processo de estimação em sistemas com restrições de igualdade, e a extensão direta para aplicação em sistemas não-lineares e como empregar um estimador robusto a incertezas de parâmetros na estimação deste tipo de sistema. Esta formulação é utilizada, com êxito, na estimação de postura do pé de uma prótese robótica de perna, resultando em um avanço na aderência da restrição não-linear em comparação com a utilização da formulação que utiliza somente o sistema descritor linearizado. Uma segunda contribuição é um novo método para fusão de dados em sistemas com correlação desconhecida e restrições de igualdade. Esse resultado é aplicado na fusão de dados de um mapa geométrico resultando em mapas melhores com menos inconsistências. Este trabalho também apresenta a formalização de um método de autolocalização de um robô móvel utilizando mapas geométricos e resultados obtidos a partir deste método de localização.

Parte do conteúdo deste manuscrito já foi publicada em um capítulo de livro [68], e outra parte foi aceita e será publicada na forma de artigos em dois congressos científicos. O primeiro trabalho [69] será publicado e apresentado no IROS 2009, ao passo que o segundo [70] será publicado no BRC 2010. Em [68] é apresentada a aplicação da estimação utilizando sistemas descritores com incertezas de parâmetros na estimação de postura do pé de uma prótese robótica de perna. Em [69] são apresentados os resultados provenientes da utilização do filtro de Kalman com medições aumentadas nesta mesma estimação de postura do pé de uma prótese robótica. Em [70] é descrito o sistema de estimação de postura do pé de uma prótese robótica de perna com relação ao solo. É planejado a submissão de outros artigos para congressos da área, principalmente sobre o método de localização proposto e os resultados de robótica móvel apresentados neste trabalho.

## 1.6 APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO

Este trabalho está organizado em oito capítulos. Dentre estes, são seis capítulos regulares e dois capítulos apêndices. O manuscrito está dividido de tal forma que são intercalados capítulos com motivação teórica e capítulos de aplicações práticas da teoria apresentada.

O Capítulo 2 trata da teoria envolvida na estimação em sistemas com restrições de igualdade. Inicialmente o problema é definido e então é feita uma revisão de duas soluções baseadas em filtro de Kalman. Também são apresentadas as extensões presentes na literatura destes estimadores para sistemas não-lineares.

No Capítulo 3 são apresentadas contribuições sobre estimação com restrições de igual-

dade: são descritos os métodos que utilizam sistemas descritores para se realizar esta estimação, e também um método para fusão de dados em sistemas com correlação desconhecida e restrições de igualdade.

O Capítulo 4 realiza a aplicação da teoria apresentada nos Capítulos 2 e 3 na estimação de postura do pé de uma prótese robótica. É feita uma descrição do protótipo de prótese, um detalhamento da aplicação e por fim são apresentados os resultados da utilização dos estimadores presentes na literatura e dos estimadores propostos baseados em sistemas descritores.

O Capítulo 5 destaca a área de robótica móvel, mais especificamente em SLAM. É desenvolvida uma aplicação de autolocalização baseada na teoria de estimação bayesiana. Na sequência é proposta uma aplicação do estimador voltado para fusão de dados em sistemas com correlação desconhecida e restrições de igualdade nas estruturas de um mapa geométrico. São apresentados os resultados conjuntos utilizando o método de fusão e de autolocalização.

O Capítulo 6 encerra com as conclusões e considerações finais sobre o trabalho desenvolvido, e também as propostas de trabalhos futuros. Nos apêndices, o primeiro traz a equivalência entre o método proposto de estimação com restrições de igualdade em sistemas lineares, com o método filtro de Kalman com medições aumentadas. O segundo trata de conceitos básicos de robótica móvel utilizados no desenvolvimento da aplicação de SLAM.



## 2 REVISÃO DE MÉTODOS PARA ESTIMAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

*“Isn’t it enough to see that a garden is beautiful  
without having to believe that  
there are fairies at the bottom of it too?”*  
**Douglas Adams**

Neste capítulo, são apresentadas algumas soluções para a estimação de estados de sistemas dinâmicos com restrições de igualdade. É feita uma breve discussão dos prós e contras da utilização de cada solução, além da demonstração de equivalência para alguns casos. Serão tratadas com maior profundidade as soluções baseadas em filtro de Kalman [38, 39, 41, 42, 54–65].

### 2.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Considere o seguinte sistema não-linear discreto variante no tempo

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) + w_k \quad (2.1)$$

com a seguinte equação de medições

$$y_k = h_k(x_k) + v_k \quad (2.2)$$

e a seguinte equação refere-se as restrições entre os estados

$$c_k = g_k(x_k) + \nu_k \quad (2.3)$$

em que  $x_k \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema no instante  $k$ ;  $u_k \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de entradas de controle;  $w_k \in \mathbb{R}^n$  é um vetor aleatório representando o ruído de processo associado à perturbações presentes no sistema e também a erros de modelamento;  $y_k \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de medições e  $v_k \in \mathbb{R}^m$  é um vetor aleatório representando o ruído de medição. Assume-se que os vetores  $w_k$  e  $v_k$  são de distribuição gaussiana de média nula e segue que

$$\mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix} \delta_{kj}$$

em que  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  é o operador esperança,  $\delta_{kj}$  é a função delta de Kronecker (*i.e.*  $\delta_{kj} = 1$  se  $k = j$ , 0 caso contrário). As matrizes  $Q_k \geq 0$  e  $R_k > 0$  são conhecidas. O vetor de estados  $x_k$ , além da dinâmica (2.1), está sujeito às restrições (2.3), em que  $\nu_k$  é um vetor aleatório de

média nula e matriz de covariância  $U_k$ . Define-se restrição uma relação conhecida entre os seus estados. Para o caso em que se escreve (2.3), tem-se uma *restrição fraca*. As restrições fracas tem como principal característica “permitir” que a restrição possua uma região de soluções admissíveis. Esta região é definida pela matriz de covariância  $U_k$ , que representa, então, o nível de aderência dos estados à restrição [55]. Em suma, se  $U_k = 0$  tem-se que a restrição é uma restrição forte, e caso contrário o nível de aderência dos estados à restrição é dado por  $U_k \geq 0$ . As restrições podem igualmente serem escritas na seguinte forma

$$g_k(x_k) = c_k \quad (2.4)$$

em que  $c_k \in \mathbb{R}^q$  é um vetor conhecido. Tem-se que (2.4) é chamada de uma *restrição forte*. Uma restrição forte tem como principal objetivo representar relações que sejam conhecidas de forma exata [55].

## 2.2 SOLUÇÕES PARA SISTEMAS LINEARES

Para o caso linear, rescreve-se o sistema (2.1) como

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k \quad (2.5)$$

e a equação de medições (2.2) como

$$y_k = C_k x_k + v_k \quad (2.6)$$

em que as matrizes  $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $C_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  são conhecidas. As restrições entre os estados (2.3) também são rescritas na seguinte forma linear

$$c_k = D_k x_k + \nu_k \quad (2.7)$$

em que  $c_k \in \mathbb{R}^q$  é um vetor conhecido,  $D_k \in \mathbb{R}^{q \times n}$  é uma matriz conhecida e o número de restrições  $q$ .<sup>1</sup> Considera-se que a matriz  $D_k$  possui posto linha completo, ou seja posto  $q$ . Esta condição é simples e possui um significado simples. Se  $D_k$  não possui posto linha completo, isto significa que  $D_k$  possui restrições redundantes. Este caso é resolvido de forma simples, removendo as linhas linearmente dependentes de  $D_k$  até que a matriz possua posto linha completo.

A partir da seguinte mudança de variáveis

$$\bar{x}_k = x_k - D_k^\dagger c_k,$$

que visa realizar um descolamento dos estados de tal forma que a restrição possa ser escrita na forma

$$D_k \bar{x}_k = 0.$$

---

<sup>1</sup>Geralmente considera-se que a dimensão  $q < n$ . Pois nos casos de restrições fortes a estimação do estado  $x_k$  teria uma solução direta  $x_k = D_k^\dagger c_k$  para restrições fortes.

No trabalho realizado por Ko e Bitmead [59] alguns casos no que tange o modelamento de sistemas com restrições são tratados:

1.  $\{A_k \bar{x}_k, B_k u_k, w_k\} \in \text{Kernel}(D_k)$ ;
2.  $\{A_k \bar{x}_k, B_k u_k\} \notin \text{Kernel}(D_k)$ , e  $w_k \in \text{Kernel}(D_k)$ ;
3.  $\{A_k \bar{x}_k, B_k u_k, w_k\} \notin \text{Kernel}(D_k)$ .

Nos casos 1 e 2 o ruído de processo está restringido no espaço nulo de  $D_k$ . Estes casos podem descrever um sistema em que há certeza da dinâmica para alguns estados, e para os outros casos, o ruído é acrescentado de forma a compensar a incerteza sobre a dinâmica. Assim tem-se que a matriz de covariância do ruído de processo  $w_k$  é singular. No entanto, com o modelamento do sistema da forma apresentada no caso 3, as restrições não serão satisfeitas pelo ruído de processo. Nestes casos, há incerteza sobre a dinâmica em todos os estados. Portanto, a restrição atua como uma informação extra sobre esta dinâmica. Teixeira *et al.* [36, 64] apresenta as condições necessárias para que a dinâmica do sistema (2.5) e o ruído de processo  $w_k$  resultem em um sistema linear com restrição.

O Filtro de Kalman (FK) é a solução clássica para estimação de estados em sistemas lineares [71]. O FK é conhecido como o estimador ótimo linear, ou seja, o estimador que resulta no mínimo erro médio quadrático e no mínimo traço da matriz de covariância para sistemas dinâmicos lineares sujeitos a ruídos brancos Gaussianos no processo e medição [72], além de ser o estimador de máximo *a posteriori* [73]. Além disso, o FK possui uma formulação recursiva que torna a resolução simples e elegante. Como o FK é a solução ótima para este problema linear, é impossível melhorar suas estimativas. Porém, a partir de outras informações que são acrescentadas pelo uso das restrições, deseja-se obter estimativas melhores do que sem as restrições.

### 2.2.1 Filtro de Kalman com Medições Aumentadas

Na literatura, o trabalho desenvolvido por Tahk e Speyer [38] é geralmente referenciado como primeiro trabalho que trata este método de incorporação das restrições de igualdade no FK. O Filtro de Kalman com Medições Aumentadas (FKMA) “observa” as restrições a cada iteração. Ou seja, as restrições são tratadas como medições adicionais, também chamadas de *pseudo-medições*. Esta abordagem parte do pressuposto que a equação de correção do FK é dada pelo estado estimado  $\hat{x}_k$  que minimiza o custo dado por:

$$J(x_k) = \frac{1}{2}(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T P_{k|k-1}^{-1}(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + (y_k - C_k x_k)^T R_k^{-1}(y_k - C_k x_k). \quad (2.8)$$

Considerando a equação de restrições lineares (2.7), o custo  $J(x_k)$  é modificado para

$$J(x_k) = \frac{1}{2}(x_k - \hat{x}_{k|k-1})^T P_{k|k-1}^{-1}(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + (y_k - C_k x_k)^T R_k^{-1}(y_k - C_k x_k) + (c_k - D_k x_k)^T U_k^{-1}(c_k - D_k x_k) \quad (2.9)$$

---

**Algoritmo 2.1** Equações do Filtro de Kalman com Medições Aumentadas
 

---

1: **Inicialização.**

Defina  $\hat{x}_{0|0}^{\text{ma}}$ , e  $P_{0|0}^{\text{ma}}$ .

2: **para todo**  $k > 0$  **fazer**

3: *Predição:*

$$\hat{x}_{k|k-1}^{\text{ma}} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{ma}} + B_k u_k \quad (2.10)$$

$$P_{k|k-1}^{\text{ma}} = A_k P_{k-1|k-1}^{\text{ma}} A_k^T + Q_k \quad (2.11)$$

4: *Novas variáveis:*

$$y_k^{\text{ma}} = \begin{bmatrix} y_k \\ c_k \end{bmatrix}, \quad C_k^{\text{ma}} = \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix}, \quad R_k^{\text{ma}} = \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & U_k \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

5: *Correção e aplicação restrição:*

$$K_k^{\text{ma}} = P_{k|k-1}^{\text{ma}} (C_k^{\text{ma}})^T (C_k^{\text{ma}} P_{k|k-1}^{\text{ma}} (C_k^{\text{ma}})^T + R_k^{\text{ma}})^{-1} \quad (2.13)$$

$$\hat{x}_{k|k}^{\text{ma}} = \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ma}} + K_k^{\text{ma}} (y_k^{\text{ma}} - C_k^{\text{ma}} \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ma}}) \quad (2.14)$$

$$P_{k|k}^{\text{ma}} = (I_{n \times n} - K_k^{\text{ma}} C_k^{\text{ma}}) P_{k|k-1}^{\text{ma}} \quad (2.15)$$

6: **fim for**

---

de forma a considerar também a restrição. Em [38], as restrições fortes (aquelas com  $U_k = 0$ ) são transformadas em restrições fracas para que possam ser empregadas em (2.9). E a partir desta nova função de custo, é possível verificar que modificando o vetor de medições em uma forma aumentada, acrescentando as pseudo-medições provenientes das restrições

$$y_k^{\text{ma}} = \begin{bmatrix} y_k \\ c_k \end{bmatrix}$$

o custo (2.9), portanto, pode ser escrito na mesma forma que (2.8) [38]. Desta forma as equações do FK são modificadas para incorporar as restrições e resultando no FKMA. Estas equações são apresentadas no Algoritmo 2.1.

A principal vantagem em se utilizar as restrições durante a filtragem é a redução da incerteza associada à estimativa, ou seja, a matriz de covariância  $P_{k|k}^{\text{ma}}$  possui traço menor que a matriz de covariância estimada sem o uso da restrição  $P_{k|k}$ . Em [42], esta melhoria do FKMA sobre o FK, considerando uma iteração em que ambos estimadores são inicializados com a mesma estimativa e a mesma matriz de covariância

$$\hat{x}_{k|k-1}^{\text{ma}} = \hat{x}_{k|k-1}, \quad P_{k|k-1}^{\text{ma}} = P_{k|k-1}.$$

Após o cálculo de um passo utilizando (2.10)–(2.15) do Algoritmo 2.1 a matriz de covariância  $P_{k|k}^{\text{ma}}$  resultante pode ser escrita de uma forma comparativa com  $P_{k|k}$

$$P_{k|k}^{\text{ma}} = P_{k|k} - P_{k|k} D_k^T (D_k P_{k|k} D_k^T + U_k)^{-1} D_k P_{k|k} \quad (2.16)$$

que apresenta a melhora promovida pelo FKMA em uma iteração, ao se comparar com relação ao FK sem a utilização das restrições. Pode-se constatar que o traço da matriz  $P_{k|k}^{\text{ma}} < P_{k|k}$  após o cálculo de (2.16), pois acima  $P_{k|k}$  é subtraída de uma matriz semi-definida positiva.

### 2.2.2 Filtro de Kalman com Restrições de Igualdade

O filtro de Kalman com restrições de igualdade (FKRI) resume-se a calcular inicialmente a estimativa utilizando as equações do FK sem restrição e então calcular a projeção desta estimativa no hiperplano definido pelas restrições. O cálculo da projeção pode ser derivada para restrições fortes a partir do seguinte problema de minimização com restrições:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|k}^{\text{ri}} = \min_x (x - \hat{x}_{k|k}) P_{k|k}^{-1} (x - \hat{x}_{k|k}) \\ \text{sujeito à } D_k x = c_k \end{cases} \quad (2.17)$$

e resolver-se este problema definindo o Lagrangiano

$$L(x, \lambda) = \min_x (x - \hat{x}_{k|k}) P_{k|k}^{-1} (x - \hat{x}_{k|k}) + \lambda (D_k x - c_k)$$

que resulta na seguinte estimativa e matriz de covariância

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k}^{\text{ri}} &= x_{k|k} + P_{k|k} D_k^T (D_k P_{k|k} D_k^T)^{-1} (c_k - D_k x_{k|k}) \\ P_{k|k}^{\text{ri}} &= (I_{n \times n} - P_{k|k} D_k^T (D_k P_{k|k} D_k^T)^{-1} D_k) P_{k|k}. \end{aligned}$$

De fato, no problema (2.17) ao invés de se trabalhar com a matriz de covariância  $P_{k|k}$  é possível utilizar qualquer matriz  $W > 0$ . No entanto, dentre todas as escolhas possíveis para essa matriz de ponderação  $W$ , tem-se que a utilização de  $W^{-1} = P_{k|k}$  resulta na matriz de covariância  $P_{k|k}^{\text{ri}}$  com menor traço [57]. Consequentemente a escolha  $W^{-1} = P_{k|k}$  torna-se a mais conveniente. O desenvolvimento para restrições fracas é feita com uma mudança na função de custo a ser minimizada. Em suma, as equações do FK são utilizadas para calcular a estimativa não restringida, e a partir desta estimativa uma projeção no hiperplano das restrições é calculada utilizando a matriz de covariâncias da estimativa, as equações do FKRI são apresentadas no Algoritmo 2.2.

A utilização do FKRI pode ser facilmente estendida para casos em que o sistema possui restrições de desigualdade [74]. Em cada passo de amostragem, deve-se verificar se as restrições são satisfeitas. Se estas forem de fato satisfeitas, o problema das restrições de desigualdade está resolvido. Caso contrário, as restrições de igualdade são utilizadas de forma a resultar em uma estimativa que satisfaça a restrição. Este método para aplicação de restrições de desigualdade é corroborada pela programação não linear com restrições [75], em que o problema é resolvido desconsiderando os casos em que as restrições de desigualdade estão inativas, ou seja, as restrições são satisfeitas e tratando-as como restrições de igualdade quando estão ativas.



---

**Algoritmo 2.2** Equações do filtro de Kalman com restrições de igualdade

---

1: **Inicialização.**

Defina  $\hat{x}_{0|0}^{\text{ri}}$ , e  $P_{0|0}^{\text{ri}}$ .

2: **para todo**  $k > 0$  **fazer**3: *Predição:*

$$\hat{x}_{k|k-1}^{\text{ri}} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{ri}} + B_k u_k \quad (2.18)$$

$$P_{k|k-1}^{\text{ri}} = A_k P_{k-1|k-1}^{\text{ri}} A_k^T + Q_k \quad (2.19)$$

4: *Correção:*

$$K_k^{\text{ri}} = P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T (C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T + R_k)^{-1} \quad (2.20)$$

$$\tilde{x}_{k|k}^{\text{ri}} = \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ri}} + K_k^{\text{ri}} (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ri}}) \quad (2.21)$$

$$\check{P}_{k|k}^{\text{ri}} = (I_{n \times n} - K_k^{\text{ri}} C_k) P_{k|k-1}^{\text{ri}} \quad (2.22)$$

5: *Projeção da estimativa no hiperplano das restrições:*

$$\hat{x}_{k|k}^{\text{ri}} = \tilde{x}_{k|k}^{\text{ri}} + \check{P}_{k|k}^{\text{ri}} D_k^T (D_k \check{P}_{k|k}^{\text{ri}} D_k^T + U_k)^{-1} (c_k - D_k \tilde{x}_{k|k}^{\text{ri}}) \quad (2.23)$$

$$P_{k|k}^{\text{ri}} = \check{P}_{k|k}^{\text{ri}} - \check{P}_{k|k}^{\text{ri}} D_k^T (D_k \check{P}_{k|k}^{\text{ri}} D_k^T + U_k)^{-1} D_k \check{P}_{k|k}^{\text{ri}} \quad (2.24)$$

6: **fim for**

---

Na literatura, há incerteza no que diz respeito ao primeiro trabalho a apresentar este método. Norton [54] apresenta uma forma de se utilizar restrições na estimação de parâmetros a partir do FK. Porém não são feitas considerações sobre sistemas dinâmicos. Já Alouani e Blair [39] apresentam este método para resolver o problema de rastreamento de alvos com velocidade constante, mas a etapa de projeção é referenciada como de pseudo-medição. As equações são desenvolvidas a partir do FKMA apresentado em [38]. Mas o desenvolvimento é apenas heurístico. Também são apresentados estudos no que diz respeito à estabilidade do filtro projetado e sobre a estimativa resultante a fim de que não se torne enviesada para alguns casos específicos. Simon e Chia [57] apresenta este mesmo método em um trabalho posterior, porém com o argumento que o trabalho havia sido desenvolvido de forma independente em [76]. Neste trabalho é feita apresentação formal deste método, que é desenvolvida a partir de três princípios: máxima probabilidade, erro médio quadrático e projeção no hiperplano das restrições. Teixeira *et al.* [36, 64] apresenta uma derivação um pouco diferente para o problema de estimação com restrições lineares. A partir da função de custo utilizada para derivação da etapa de correção do FK [73] e da definição de um Lagrangiano, chega-se ao mesmo resultado encontrado no FKMA. Outra contribuição de [36, 64] refere-se a forma em que as equações são escritas de forma a facilitar a utilização em métodos não lineares [35, 36]. O FKRI também é tratado em [59, 61], em que outra forma para se escolher a incerteza de processo é apresentada. Se o sistema for modelado a partir dos

casos 1 e 2 apresentados na Seção 2.2, pode-se escolher para a incerteza de processo uma matriz de covariância de menor traço. Em [63, 65] são apresentados métodos que utilizam a projeção do ganho de Kalman.

### 2.2.3 Relações entre FKMA e FKRI

Com a formulação de dois métodos de estimação para sistemas com restrições lineares baseados no FK surge uma pergunta: como estariam relacionadas as estimativas e incertezas resultantes a partir do uso FKRI e do FKMA? Esta pergunta remete ao fato que ambos estimadores são desenvolvidos a partir do FK, mas formas diferentes são utilizadas na solução. Esta análise também está presente em [64], mas foi desenvolvida aqui de forma independente. Inicialmente pode-se fazer uma análise a partir do cálculo em uma etapa do FKRI. Como comparação das matrizes de covariâncias resultantes, utiliza-se a partir de um passo da resolução do FKRI (2.22) e (2.24), resultando em:

$$\begin{aligned} P_{k|k}^{\text{ri}} &= \left( P_{k|k-1}^{\text{ri}} - \left( P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T (C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T + R_k)^{-1} \right) \right) \\ &\quad - \left( P_{k|k-1}^{\text{ri}} - \left( P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T (C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T + R_k)^{-1} \right) \right) D_k^T \\ &\quad \times \left( D_k \left( P_{k|k-1}^{\text{ri}} - \left( P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T (C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T + R_k)^{-1} \right) \right) D_k^T + U_k \right)^{-1} \\ &\quad \times D_k \left( P_{k|k-1}^{\text{ri}} - \left( P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T (C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T + R_k)^{-1} \right) \right) \end{aligned}$$

e após algum trabalho algébrico, verifica-se

$$P_{k|k}^{\text{ri}} = P_{k|k-1}^{\text{ri}} - P_{k|k-1}^{\text{ri}} \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{11}^{-1} + S_{11}^{-1} S_{12} \Delta^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} & -S_{11}^{-1} S_{12} \Delta^{-1} \\ \Delta^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix} P_{k|k-1}^{\text{ri}}$$

em que:

$$\begin{cases} S_{11} = (C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T + R_k), & S_{12} = C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} D_k^T, \\ S_{21} = S_{12}^T = D_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T, & S_{22} = (D_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} D_k^T + U_k). \end{cases} \quad (2.25a)$$

$$\Delta = S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{21}. \quad (2.25b)$$

Utilizando o lema da inversão de matrizes ([77] p. 22), verifica-se:

$$P_{k|k}^{\text{ri}} = P_{k|k-1}^{\text{ri}} - P_{k|k-1}^{\text{ri}} \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix} P_{k|k-1} \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & U_k \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix} P_{k|k-1}^{\text{ri}}$$

comparando com a solução de (2.12) e (2.15) do FKMA, se ambos filtros forem inicializados com a mesma matriz de covariância  $P_{k-1|k-1}^{\text{ma}} = P_{k-1|k-1}^{\text{ri}}$ , para o caso linear conclui-se que as matrizes de covariância do FKRI e do FKMA são algebricamente equivalentes. Essa equivalência também pode ser verificada, pelo caminho contrário, a partir de (2.16)

$$P_{k|k}^{\text{ma}} = P_{k|k} - P_{k|k} D_k^T (D_k P_{k|k} D_k^T + U_k)^{-1} D_k P_{k|k}$$

e utilizando a matriz de covariâncias  $P_{k-1|k-1}^{\text{ri}} = P_{k-1|k-1}$  em (2.19), verifica-se que (2.22) resulta em

$$P_{k|k}^{\text{ri}} = P_{k|k} - P_{k|k} D_k^T (D_k P_{k|k} D_k^T + U_k)^{-1} D_k P_{k|k}^{\text{ri}}.$$

Com este resultado é possível constatar de novo a equivalência algébrica para as matrizes de covariância do FKRI e do FKMA. Com relação às estimativas, utiliza-se a partir de um passo da resolução do FKRI (2.21) e (2.23), resultando em

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k}^{\text{ri}} &= \left( \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ri}} + P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T (C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T + R_k)^{-1} (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ri}}) \right) \\ &\quad + \left( P_{k|k-1}^{\text{ri}} - P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T (C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T + R_k)^{-1} C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} \right) D_k^T \\ &\quad \times \left( D_k \left( P_{k|k-1}^{\text{ri}} - P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T (C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T + R_k)^{-1} C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} \right) D_k^T + U_k \right)^{-1} \\ &\quad \times \left( c_k - D_k \left( \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ri}} + P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T (C_k P_{k|k-1}^{\text{ri}} C_k^T + R_k)^{-1} (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ri}}) \right) \right) \end{aligned}$$

e após algum trabalho algébrico, verifica-se

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k}^{\text{ri}} &= \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ri}} + P_{k|k-1}^{\text{ri}} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S_{11}^{-1} + S_{11}^{-1} S_{12} \Delta^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} & -S_{11}^{-1} S_{12} \Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} y_k \\ c_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ri}} \right) \end{aligned}$$

com  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{21}$ ,  $S_{22}$  e  $\Delta$  dados por (2.25). Como feito para o caso da matriz de covariância, aplica-se o lema da inversão de matrizes ([77] p. 22), resultando em

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k}^{\text{ri}} &= \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ri}} + P_{k|k-1}^{\text{ri}} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix} P_{k|k-1}^{\text{ri}} \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & U_k \end{bmatrix} \right)^{-1} \left( \begin{bmatrix} y_k \\ c_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ri}} \right). \end{aligned}$$

Como feito para a matriz de covariância, comparando a equação acima com a solução de (2.12) e (2.14) do FKMA, se ambos filtros forem inicializados com a mesma estimativa  $\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{ri}} = \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{ma}}$  e matriz de covariância  $P_{k-1|k-1}^{\text{ri}} = P_{k-1|k-1}^{\text{ma}}$ , conclui-se para o caso linear que as estimativas do FKRI e do FKMA são algebricamente equivalentes.

Uma segunda forma de se observar esta equivalência entre os métodos é lembrando que a utilização da mudança de variáveis do FKMA (2.12) descreve que as medições  $y_k$  são independentes. E partindo desta idéia de independência das restrições e das medições, tem-se que todas as restrições  $c_k$  podem ser aplicadas de forma sequencial no FK, e portanto resultando no FKRI. Estendendo esta propriedade pode-se aplicar cada restrição no FKRI como uma etapa de projeção e de novo verifica-se a possibilidade da aplicação das restrições tanto de igualdade quanto de desigualdade, sendo que estas últimas não são tratadas diretamente quando se trabalha com o FKMA.

No quesito eficiência computacional, o método do FKRI possui vantagem sobre o FKMA. Isto ocorre pois a operação mais complexa nestes métodos é o cálculo da inversa no ganho de Kalman em (2.13) para o FKMA e em (2.20), (2.23) e (2.24) para o FKRI. O cálculo da

inversa é um algoritmo de ordem  $O(N^3)$  e enquanto no FKMA é necessário inverter uma matriz de dimensão  $(m + q) \times (m + q)$ . Por outro lado, no FKRI é necessário inverter uma matriz de dimensão  $(m \times m)$  e outra de dimensão  $(q \times q)$ . Porém em casos envolvendo dimensões pequenas o esforço computacional dos dois algoritmos não será muito diferente.

## 2.3 SOLUÇÕES PARA SISTEMAS NÃO-LINEARES

Até agora foram apresentadas as formas de se utilizar as restrições de igualdade para melhorar o desempenho do FK. As soluções baseadas em FK apresentadas na literatura são equivalentes algebricamente, porém em casos práticos podem chegar a resultados levemente diferentes [42]. Para sistemas não-lineares as soluções apresentadas são modificadas pela incapacidade do FK em tratar sistemas não-lineares em sua forma original e também pela inexistência de uma solução fechada que abranja todos os sistemas não-lineares e que seja ótima.

Uma das soluções mais utilizadas pela engenharia na estimação em sistemas não-lineares sem restrições é o filtro de Kalman estendido (FKE) [72, 73]. O FKE utiliza uma expansão em série de Taylor para aproximar o modelo formado por (2.1) e (2.2) por um novo modelo de pequenos sinais. Então as equações do FK são utilizadas para este modelo linearizado. Seguindo neste caminho, na literatura, também é proposto o filtro de Kalman estendido iterativo (FKEI) [73], uma aplicação iterativa que visa reduzir os erros produzidos pelo processo de linearização em troca de um esforço computacional maior. Da mesma forma que feito para o FK, deseja-se obter estimativas melhoradas utilizando as restrições comparado ao FKE e FKEI sem o uso de restrições.

### 2.3.1 Filtro de Kalman Estendido com Medições Aumentadas

No trabalho de Tahk e Speyer [38] apesar da definição heurística de medições aumentadas, ou pseudo-medições, ter sido feita para o caso linear, sua implementação considerava restrições não-lineares provenientes do movimento considerado para aeronaves ou mísseis aéreos. Desta forma as equações de predição (2.28) e correção (2.40) da matriz de covariância empregam a forma linearizada de propagação de incertezas e tornam-se semelhantes às equações do FKMA. As equações para o FKEMA estão apresentados no Algoritmo 2.3.

Como o FKE resulta de um truncamento da série de Taylor da função de observação aumentada (2.29) em [38, 55] é proposto que a matriz de covariância das pseudo-observações  $M_k$  utilizada seja não nula. Esta alteração compensaria erros provenientes da linearização, com a troca de que a restrição agora seria do tipo fraca e não são mais do tipo forte. Em De Geeter *et. al.* [41] trata-se diretamente das diferenças entre a aplicação das restrições lineares e não lineares. Neste trabalho, é apresentado que esta aplicação das restrições na

---

**Algoritmo 2.3** Equações do Filtro de Kalman Estendido com Medições Aumentadas

---

1: **Inicialização.**

Defina  $x_{0|0}^{\text{ma}}$ , e  $P_{0|0}^{\text{ma}}$ .

2: **para todo**  $k > 0$  **fazer**

3: *Calcular:*

$$A_k = \left. \frac{\partial f_k(x, u_k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{ma}}} \quad (2.26)$$

4: *Predição:*

$$\hat{x}_{k|k-1}^{\text{ma}} = f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{ma}}, u_k) \quad (2.27)$$

$$P_{k|k-1}^{\text{ma}} = A_k P_{k-1|k-1}^{\text{ma}} A_k^T + Q_k \quad (2.28)$$

5: *Novas variáveis:*

$$y_k^{\text{ma}} = \begin{bmatrix} y_k \\ c_k \end{bmatrix}, h_k^{\text{ma}}(x) = \begin{bmatrix} h_k(x) \\ g_k(x) \end{bmatrix}, C_k^{\text{ma}} = \left. \frac{\partial h_k^{\text{ma}}(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k|k-1}^{\text{ma}}}, R_k^{\text{ma}} = \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & M_k \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

6: *Correção e aplicação restrição:*

$$\hat{x}_{k|k}^{\text{ma}} = \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ma}} + K_k^{\text{ma}} (y_k^{\text{ma}} - h_k^{\text{ma}}(\hat{x}_{k|k-1}^{\text{ma}})) \quad (2.30)$$

$$P_{k|k}^{\text{ma}} = (I_{n \times n} - K_k^{\text{ma}} C_k^{\text{ma}}) P_{k|k-1}^{\text{ma}} \quad (2.31)$$

$$K_k^{\text{ma}} = P_{k|k-1}^{\text{ma}} (C_k^{\text{ma}})^T (C_k^{\text{ma}} P_{k|k-1}^{\text{ma}} (C_k^{\text{ma}})^T + R_k^{\text{ma}})^{-1} \quad (2.32)$$

7: **fim for**

---

forma linearizada acaba sendo afetada por dois tipos de erros: truncamento e ponto de linearização. Os erros de truncamento aparecem, pois a função não-linear é truncada a partir do primeiro termo. Uma forma de se superar este erro seria com a utilização de métodos iterativos como o FKEI [73] ou então o Pseudo Filtro de Kalman [56]. Porém o erro no ponto de linearização pode causar problemas permanentes à estimativa com restrição. Em [38, 55] a estimativa predita é utilizada na linearização da função de medições aumentadas.

### 2.3.2 filtro de Kalman estendido com restrições de igualdade

Assim como feito para sistemas lineares na Seção 2.2.2, o filtro de Kalman estendido com restrições de igualdade (FKERI) utiliza o FKE para calcular a estimativa sem a aplicação da restrição, então é feita a projeção no hiperplano das restrições. No entanto, as restrições são não-lineares e não existe uma forma direta para esta projeção, portanto, como apresentado em [57] utiliza-se uma forma linearizada da equação de restrição para se fazer a projeção, ou seja, para tanto considere a restrição (2.4) aplicada à estimativa  $\hat{x}_{k|k}^{\text{pe}}$

$$g_k(\hat{x}_{k|k}^{\text{pe}}) = c_k$$

então, a forma linearizada é obtida considerando a expansão em série de Taylor em torno da estimativa  $\tilde{x}_{k|k}^{\text{pe}}$

$$g_k(\hat{x}_{k|k}^{\text{pe}}) \approx D_k^{\text{pe}} \hat{x}_{k|k}^{\text{pe}} = c_k^{\text{pe}} \quad (2.33)$$

em que  $c_k^{\text{pe}} = c_k - g(\tilde{x}_{k|k}^{\text{pe}}) + D_k^{\text{pe}} \tilde{x}_{k|k}^{\text{pe}}$  e  $D_k^{\text{pe}} = \left. \frac{\partial g_k(x)}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}_{k|k}^{\text{pe}}}$ . Desta forma pode-se utilizar (2.23) e (2.23), porém ao se substituir (2.33) em (2.23), obtém-se

$$\hat{x}_{k|k}^{\text{pe}} = \tilde{x}_{k|k}^{\text{pe}} + \check{P}_{k|k}^{\text{pe}} (D_k^{\text{pe}})^T (D_k^{\text{pe}} \check{P}_{k|k}^{\text{pe}} (D_k^{\text{pe}})^T + M_k)^{-1} \left( c_k - g(\tilde{x}_{k|k}^{\text{pe}}) \right). \quad (2.34)$$

As equações para o FKERI são apresentadas no Algoritmo 2.4.

Em Simon e Chia [57], é apresentada esta forma de utilização do FKRI na forma de FKERI. Diferentemente do caso linear, não se pode afirmar que a utilização de  $\check{P}_{k|k}^{\text{pe}}$  na projeção resulta no estimador ótimo, pois a forma do FKERI é linearizada e portanto este estimador é subótimo desde a concepção. Em De Geeter *et. al.* [41] é apresentado um método iterativo para projeção das estimativas. Neste caso, a variância de cada estimativa é aumentada artificialmente, permitindo que a estimativa não fique no plano definido por uma restrição linearizada longe do ponto real. Em Julier e LaViola [62] é proposto um método que resulta em estimativas com matriz de covariância não singular. Após o cálculo da estimativa projetada, a matriz de covariância da estimativa sem a projeção é transladada para a nova média calculada com restrição.

### 2.3.3 Comparação entre o FKEMA e FKERI

Como visto na Seção 2.2.3, para o caso linear existe uma equivalência algébrica entre o FKMA e o FKRI. Contudo, para o caso não-linear esta equivalência não é mais válida. Enquanto o FKEMA utiliza a estimativa predita para linearizar a equação de medições-aumentadas e a partir desta operação obtém-se a estimativa com restrição, o FKRI utiliza a estimativa resultante de uma iteração do FKE para linearizar e projetar a estimativa no hiperplano das restrições. Portanto, a linearização realizada em pontos diferente resulta em estimativas diferentes.

---

**Algoritmo 2.4** Equações do filtro de Kalman estendido com restrições de igualdade
 

---

1: **Inicialização.**

Defina  $\hat{x}_{0|0}^{\text{pe}}$ , e  $P_{0|0}^{\text{pe}}$ .

2: **para todo**  $k > 0$  **fazer**

3: *Calcular:*

$$A_k = \left. \frac{\partial f_k(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{ma}}} \quad (2.35)$$

4: *Predição:*

$$\hat{x}_{k|k-1}^{\text{pe}} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{pe}} + B_k u_k \quad (2.36)$$

$$P_{k|k-1}^{\text{pe}} = A_k P_{k-1|k-1}^{\text{pe}} A_k^T + Q_k \quad (2.37)$$

5: *Calcular:*

$$C_k = \left. \frac{\partial h_k(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k|k-1}^{\text{pe}}} \quad (2.38)$$

6: *Correção:*

$$\check{x}_{k|k}^{\text{pe}} = \hat{x}_{k|k-1}^{\text{pe}} + K_k^{\text{pe}} (y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}^{\text{pe}}) \quad (2.39)$$

$$\check{P}_{k|k}^{\text{pe}} = (I_{n \times n} - K_k^{\text{pe}} C_k) P_{k|k-1}^{\text{pe}} \quad (2.40)$$

$$K_k^{\text{pe}} = P_{k|k-1}^{\text{pe}} C_k^T (C_k P_{k|k-1}^{\text{pe}} C_k^T + R_k)^{-1} \quad (2.41)$$

7: *Calcular:*

$$D_k^{\text{pe}} = \left. \frac{\partial g_k(x)}{\partial x} \right|_{x=\check{x}_{k|k}^{\text{pe}}} \quad (2.42)$$

8: *Projeção da estimativa no hiperplano das restrições:*

$$\hat{x}_{k|k}^{\text{pe}} = \check{x}_{k|k}^{\text{pe}} + \check{P}_{k|k}^{\text{pe}} (D_k^{\text{pe}})^T (D_k^{\text{pe}} \check{P}_{k|k}^{\text{pe}} (D_k^{\text{pe}})^T + M_k)^{-1} (c_k - g_k(\check{x}_{k|k}^{\text{pe}})) \quad (2.43)$$

$$P_{k|k}^{\text{pe}} = \check{P}_{k|k}^{\text{pe}} - \check{P}_{k|k}^{\text{pe}} (D_k^{\text{pe}})^T (D_k^{\text{pe}} \check{P}_{k|k}^{\text{pe}} (D_k^{\text{pe}})^T + M_k)^{-1} D_k^{\text{pe}} \check{P}_{k|k}^{\text{pe}} \quad (2.44)$$

9: **fim for**

---

### 3 ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES SOBRE ESTIMAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

*“You see, madness, as you know, is... like gravity...  
All it takes is a little push!”  
The Joker*

Neste capítulo, é apresentada uma forma de se utilizar sistemas descritores para representar sistemas com restrições de igualdade e, a partir deste novo sistema, há a possibilidade da estimação em sistemas com incertezas de parâmetros e restrições de igualdade. Também é apresentada um novo estimador para sistemas com restrições de igualdade em que a correlação entre as medições é desconhecida. Estas novas formulações são utilizadas nos capítulos posteriores para validação e demonstração de usabilidade.

#### 3.1 UMA ABORDAGEM COM SISTEMAS DESCRITORES PARA ESTIMAÇÃO EM SISTEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE

Como exposto na introdução, um dos objetivos deste trabalho consiste em apresentar uma formulação para a estimação de estados de sistemas com restrições na forma de um sistema descritor. Sistemas descritores lineares são equações dinâmicas que podem ser escritas como

$$E_{k+1}\chi_{k+1} = F_k\chi_k + w_k \quad (3.1)$$

e equação de medições similar à dos sistemas lineares (2.2)

$$y_k = H_k\chi_k + v_k \quad (3.2)$$

em que  $\chi_k \in \mathbb{R}^n$  e  $y_k \in \mathbb{R}^m$  são respectivamente os vetores de estados e de medições, e as matrizes  $E_{k+1} \in \mathbb{R}^{n \times j}$ ,  $F_k \in \mathbb{R}^{n \times j}$  e  $H_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  são conhecidas. O vetor  $w_k \in \mathbb{R}^j$  é um vetor aleatório que modela as incertezas de processo, ao passo que  $v_k \in \mathbb{R}^m$  é um vetor aleatório que modela as incertezas de medição. Para os sistemas descritores, assim como para a representação na forma de estados, assume-se que  $w_k$  e  $v_k$  tem distribuição Gaussiana de média nula e matriz de covariâncias conhecida e também sabe-se que

$$\mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} W_k & 0 \\ 0 & V_k \end{bmatrix} \delta_{kj}.$$

De forma a escrever o sistema com restrições lineares como um sistema descritor, considera-se inicialmente a forma do sistema linear (2.5) sem entradas externas

$$x_{k+1} = A_k x_k + w_k$$



com as seguintes restrições lineares de estados (2.7)

$$c = D_k x_k + v_k$$

e definindo  $\chi_k = \begin{bmatrix} x_k^T & c_{k+1}^T \end{bmatrix}^T$  como variável de estado do sistema descritor dado por (3.1), pode-se escrever o sistema da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times q} \\ D_k & 0_{q \times q} \\ 0_{n \times q} & I_{q \times q} \end{bmatrix} \chi_{k+1} = \begin{bmatrix} A_k & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & I_{q \times q} \\ 0_{n \times q} & I_{q \times q} \end{bmatrix} \chi_k + \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \\ 0_q \end{bmatrix},$$

somente para os casos em que o vetor  $c_{k+1} = c_k$ . Definindo  $y_k = y_k$  a a partir de (2.6), pode-se escrever (3.2) como

$$y_k = \begin{bmatrix} C_k & 0_{m \times q} \end{bmatrix} \chi_k + v_k.$$

E propõe-se que o sistema dado por (3.1) e (3.2) seja, portanto, utilizado na estimação de sistemas lineares com restrições de estados. O desenvolvimento do estimador para sistemas descritores lineares é feito da mesma forma que para o FK em [78, 79], o resultado é chamado filtro de Kalman para sistemas descritores (FKSD) devido a semelhança e as propriedades que compartilha com o FK. A estimação utilizando esta formulação está apresentada no Algoritmo 3.1. Um problema comum na estimação em sistemas descritores refere-se à invertibilidade das matrizes em (3.5) e (3.6). Nikoukhah *et. al.* [78] trata deste problema, e a existência da matriz inversa necessária para o cálculo segue do Lema 3.1.

**Lema 3.1** ([78]). Sejam  $Z \geq 0$  e  $X$  matrizes de posto coluna completo. Se  $\begin{bmatrix} Z & X \end{bmatrix}$  possui posto linha completo, então a matriz  $\begin{bmatrix} Z & X \\ X & 0 \end{bmatrix}$  é invertível.

Escrevendo a matriz  $Z = \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & V_k \end{bmatrix}$ , tem-se  $R \geq 0$  pois  $V_k > 0$  e  $F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k \geq 0$ . A matrix  $X = \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_k \end{bmatrix}$  possui posto coluna completo, portanto para existir a inversa de  $\begin{bmatrix} Z & X \\ X & 0 \end{bmatrix}$  precisa-se garantir que  $\begin{bmatrix} Z & X \end{bmatrix}$  tenha posto linha completo. Isto de fato ocorre, pois  $D_k$  possui posto linha completo e  $V_k > 0$ . Portanto, utilizando esta escolha de variáveis para o sistema descritor, um eventual resultado de singularidade em  $P_{k|k}^{\text{sd}}$  não é mais motivo de preocupação no processo de estimação. Da mesma forma que foi questionado se haveria uma relação entre os os métodos FKMA e FKRI, apresentados anteriormente. Pergunta-se: haveria alguma relação entre a utilização do FKSD proposta no Algoritmo 3.1 e o método FKMA? A resposta é positiva, existe uma equivalência algébrica entre os dois métodos de estimação com restrições e esta relação é demonstrada no Apêndice A. Porém, este método possui duas desvantagens com relação ao FKMA e ao FKRI:

---

**Algoritmo 3.1** Estimação em sistemas lineares com restrições de igualdade utilizando filtro de Kalman para sistemas descritores

---

1: **Inicialização.**

Defina  $\hat{x}_{0|0}^{\text{sd}}$ , e  $P_{0|0}^{\text{sd}}$ .

2: **para todo**  $k > 0$  **fazer**

3: Defina as matrizes:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{k+1} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times q} \\ D_k & 0_{q \times q} \\ 0_{n \times q} & I_{q \times q} \end{bmatrix}, \quad F_k = \begin{bmatrix} A_k & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & I_{q \times q} \\ 0_{n \times q} & I_{q \times q} \end{bmatrix}, \\ W_k = \begin{bmatrix} Q_k & 0_{n \times q} & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & U_k & 0_{q \times q} \\ 0_{q \times n} & 0_{q \times m} & 0_{q \times q} \end{bmatrix}, \quad H_k = \begin{bmatrix} C_k & 0_{q \times m} \end{bmatrix}, \quad V_k = R_k. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

4: *Variáveis utilizadas no cálculo da estimativa:*

$$\hat{\chi}_{k-1|k-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}} \\ c_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{k-1|k-1} = \begin{bmatrix} P_{k-1|k-1}^{\text{sd}} & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & 0_{q \times q} \end{bmatrix}, \quad y_k = y_k \quad (3.4)$$

5: *Cálculo da estimativa:*

$$\hat{\chi}_{k|k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0_{n \times m} & E_{k+1} \\ 0_{m \times n} & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0_{m \times m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_k \hat{\chi}_{k-1|k-1} \\ y_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\mathcal{P}_{k|k} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0_{n \times m} & E_{k+1} \\ 0_{m \times n} & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0_{m \times m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

6: *Recuperação dos estados e matriz de covariâncias:*

$$\hat{x}_{k|k}^{\text{sd}} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \hat{\chi}_{k|k}, \quad P_{k|k}^{\text{sd}} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

7: **fim for**

---

1. O FKSD não é dividido em etapas de predição e correção, existe somente uma etapa de assimilação de dados. Isto é uma desvantagem em aplicações que em alguns períodos de amostragem as medições não estão disponíveis, pois deve-se alterar a forma de (3.5) e (3.6).
2. É necessário inverter uma matriz de dimensões maiores, aumentando tempo de processamento.

### 3.1.1 Aproximação para sistemas não-lineares

Anteriormente, foi apresentado um método para estimação de estados em sistemas lineares com restrições lineares utilizando uma formulação baseada em sistemas descritores. Em geral, aplicações na engenharia apresentam alguma não-linearidade, seja no modelo de processo ou medição ou nas restrições, desta forma torna-se importante o desenvolvimento de filtros não-lineares. Um dos filtros não-lineares baseados no FK é o FKE e uma das sua formalização é feita a partir de um modelo de pequenos sinais do modelo não-linear [73]. Então, é feita a expansão por série de Taylor de (2.5) em torno de  $\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}$  e desconsiderando os termos de ordem maior que um para modelo de processo (2.1), tem-se que

$$f_k(x_k, u_k) \approx f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}, u_k) + \mathcal{F}_k(x_k - \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}),$$

em que  $\mathcal{F}_k = \left. \frac{\partial f_k(x, u_k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}}$ . Para as medições não-lineares (2.2), tem-se

$$h_k(x_k) \approx h_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}) + \mathcal{H}_k(x_k - \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}),$$

em que  $\mathcal{H}_k = \left. \frac{\partial h_k(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}}$ , ao passo que para as restrições não-lineares (2.3), tem-se

$$g(x_k) \approx g(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}) + \mathcal{D}_k(x_k - \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}),$$

em que  $\mathcal{D}_k = \left. \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}}$ . E a partir destas linearizações, pode-se rescrever (2.1), (2.2), (2.3) da seguinte forma

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathcal{F}_k x_k - \mathcal{F}_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}} + f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}, u_k) + w_k, \\ y_k + \mathcal{H}_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}} - h_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}) &= \mathcal{H}_k x_k + v_k, \\ c_k + \mathcal{D}_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}} - g(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}) &= \mathcal{D}_k x_k + \nu_k. \end{aligned}$$

A partir da seguinte definição de novas variáveis

$$\begin{aligned} u_k &= f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}, u_k) - \mathcal{F}_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}, \\ y_k &= y_k + \mathcal{H}_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}} - h_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}), \\ c_k &= c_k + \mathcal{D}_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}} - g(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}), \\ \chi_k &= \begin{bmatrix} x_k^T & c_k^T \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

então, pode-se escrever o problema da estimação do sistema não-linear na seguinte forma linearizada

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times q} \\ \mathcal{D}_k & 0_{q \times n} \\ 0_{q \times n} & I_{q \times q} \end{bmatrix} \chi_{k+1} &= \begin{bmatrix} \mathcal{F}_k & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & I_{q \times q} \\ 0_{q \times n} & I_{q \times q} \end{bmatrix} \chi_k + \begin{bmatrix} u_k \\ 0_q \\ 0_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k \\ \nu_k \\ 0_q \end{bmatrix}, \\ y_k &= \begin{bmatrix} H_k & 0_{m \times q} \end{bmatrix} \chi_k + v_k, \end{aligned}$$

---

**Algoritmo 3.2** Estimação em sistemas com restrições não-lineares de igualdade utilizando filtro de Kalman para sistemas descritores

---

1: **Inicialização.**

Defina  $\hat{x}_{0|0}^{\text{sd}}$ , e  $P_{0|0}^{\text{sd}}$ .

2: **para todo**  $k > 0$  **fazer**

3: *Calcule as matrizes linearizadas:*

$$\mathcal{F}_k = \left. \frac{\partial f_k(x, u_k)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}}, \quad \mathcal{H}_k = \left. \frac{\partial h_k(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}}, \quad \mathcal{D}_k = \left. \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}} \quad (3.8)$$

4: *Defina as matrizes:*

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{k+1} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times q} \\ \mathcal{D}_k & 0_{q \times n} \\ 0_{q \times n} & I_{q \times q} \end{bmatrix}, \quad F_k = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_k & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & I_{q \times q} \\ 0_{n \times q} & I_{q \times q} \end{bmatrix}, \\ W_k = \begin{bmatrix} Q_k & 0_{n \times q} & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & U_k & 0_{q \times q} \\ 0_{q \times n} & 0_{q \times m} & 0_{q \times q} \end{bmatrix}, \quad H_k = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_k & 0_{q \times m} \end{bmatrix}, \quad V_k = R_k. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

5: *Variáveis utilizadas no cálculo da estimativa:*

$$\begin{aligned} u_k &= f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}, u_k) - \mathcal{F}_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}, \\ y_k &= y_k + \mathcal{H}_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}} - h_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}), \\ c_k &= c_k + \mathcal{D}_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}} - g(\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}), \\ \hat{\chi}_{k-1|k-1} &= \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}} \\ c_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{k-1|k-1} = \begin{bmatrix} P_{k-1|k-1}^{\text{sd}} & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & 0_{q \times q} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6: *Cálculo da estimativa:*

$$\hat{\chi}_{k|k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0_{n \times m} & E_{k+1} \\ 0_{m \times n} & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0_{m \times m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_k \hat{\chi}_{k-1|k-1} + u_k \\ y_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathcal{P}_{k|k} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0_{n \times m} & E_{k+1} \\ 0_{m \times n} & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0_{m \times m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

7: *Recuperação dos estados e matriz de covariâncias:*

$$\hat{x}_{k|k}^{\text{sd}} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \hat{\chi}_{k|k}, \quad P_{k|k}^{\text{sd}} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \mathcal{P}_{k|k} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

8: **fim for**

---

e utilizando o mesmo procedimento de [78] para o desenvolvimento do filtro, resulta no FKSD aplicado ao sistema com restrições linearizado, que é apresentado no Algoritmo 3.2.

A partir deste desenvolvimento, é possível se fazer a estimação de estados em sistemas não-lineares utilizando sistemas descritores. No entanto, alguns pontos devem ser observados. Primeiramente, este é um estimador subótimo e assim como feito para o FKE, o modelo linear utilizado é, na verdade, uma linearização do sistema não-linear original. Esta linearização pode causar problemas com relação ao ponto de operação. Igualmente, devido ao truncamento da série de Taylor, a situação é “piorada” devido ao fato que a linearização é realizada tomando como ponto de operação a estimativa realizada no instante anterior. Ao contrário do FKE que possuindo duas etapas, utiliza a estimativa anterior na etapa de predição e a estimativa predita na etapa de correção. E devido às linearizações antecipadas, esta formulação, provavelmente, não obterá um resultado melhor do que as abordagens que utilizam a formulação em duas etapas. Porém, esta abordagem abre um novo espaço no que diz respeito à utilização de estimadores robustos.

### 3.1.2 Extensão utilizando filtragem robusta em sistemas descritores com incertezas de parâmetros

Em alguns casos, o modelamento feito para sistemas lineares pode apresentar incertezas com relação aos parâmetros de projeto. Um sistema descritor linear variante no tempo com incertezas de parâmetros é escrito da seguinte forma

$$(E_{k+1} + \delta E_{k+1})\chi_{k+1} = (F_k + \delta F_k)\chi_k + w_k \quad (3.12)$$

com a equação de medições dada por

$$y_k = (H_k + \delta H_k)\chi_k + v_k \quad (3.13)$$

em que  $E_{k+1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $F_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , e  $H_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$  são às matrizes nominais conhecidas,  $\delta E_{k+1} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\delta F_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\delta H_k \in \mathbb{R}^{p \times n}$  são matrizes variantes que representam as incertezas associadas as matrizes nominais. Assume-se que as incertezas possam ser escritas nas seguintes estruturas

$$\delta E_k = M_{e,k} \Delta_k N_{e,k}, \quad \delta F_k = M_{f,k} \Delta_k N_{f,k}, \quad \delta H_k = M_{h,k} \Delta_k N_{h,k}$$

em que  $M_{e,k}$ ,  $M_{f,k}$ ,  $M_{h,k}$ ,  $N_{e,k}$ ,  $N_{f,k}$  e  $N_{h,k}$  são matrizes conhecidas, e  $\Delta_k$  é uma matriz limitada com norma menor ou igual a 1.

Em robótica, geralmente não se consideram as incertezas associadas às matrizes do modelo do sistema. Pode-se utilizar como exemplo sistemas não-lineares utilizados em sua forma linearizada. A partir da expansão das funções não-lineares em série de Taylor, os termos de ordem superior são desconsiderados. Porém, mesmo que estes termos de ordem superior não estejam escritos de forma explícita, estes podem ser adicionados nas matrizes

de incertezas. Com relação ao problema de linearização fora do ponto de operação. Estas também podem ser igualmente acrescentadas nas incertezas das matrizes. No caso de estimação em sistemas com restrições de igualdade não-lineares, a utilização deste método visa aumentar a aderência dos estados às restrições.

O desenvolvimento de um estimador para este sistema parte da premissa de se obter a estimativa que minimize o erro médio quadrático das estimativa e ao mesmo tempo maximize as incertezas admissíveis. Filtros que consideram esta premissa, são chamados de filtros robustos a incertezas de parâmetros. Em se tratando de sistemas descritores, um resultado conhecido é o chamado filtro de Kalman robusto para sistemas descritores (FKRSD) [80]. A solução deste filtro passa pela determinação de um parâmetro escalar  $\lambda$  e então calcular os seguintes parâmetros estendidos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{W}_k := W_k - \lambda_k^{-1} M_{f,k} M_{f,k}^T, \quad \mathcal{W}_k := \begin{bmatrix} \hat{W}_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ \hat{V}_k := V_k - \lambda_k^{-1} M_{h,k} M_{h,k}^T, \quad \mathcal{V}_k := \begin{bmatrix} \hat{V}_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ \hat{E}_{k+1} := \begin{bmatrix} \hat{E}_{k+1} \\ \sqrt{\lambda_k} N_{e,k+1} \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_k := \begin{bmatrix} \hat{F}_k \\ \sqrt{\lambda_k} N_{f,k} \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_k := \begin{bmatrix} \hat{H}_k \\ \sqrt{\lambda_k} N_{h,k} \end{bmatrix}, \quad z_k := \begin{bmatrix} y_k \\ 0 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

a partir destes parâmetros estendidos, pode-se calcular a estimativa  $\hat{x}_{k|k}$  e a matriz de covariâncias  $\mathcal{P}_{k|k}$  da seguinte forma

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} 0_{n \times q} \\ 0_{n \times m} \\ I_{n \times n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0_{n \times m} & E_{k+1} \\ 0_{m \times n} & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0_{m \times m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k-1|k-1} \\ z_k \\ 0_n \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{P}_{k|k} = - \begin{bmatrix} 0_{n \times q} \\ 0_{n \times m} \\ I_{n \times n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0_{n \times m} & E_{k+1} \\ 0_{m \times n} & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0_{m \times m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n \times q} \\ 0_{n \times m} \\ I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Pode-se verificar a semelhança deste método com o método original do FKSD, com a vantagem da forma ser e muito similar à forma sem o acréscimo de robustez. O método de resolução para sistemas com restrições de igualdade escritos na forma descritora com incertezas de parâmetros é apresentado no Algoritmo 3.3.

### 3.2 ESTIMAÇÃO DE ESTADOS EM SISTEMAS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE E CORRELAÇÃO DESCONHECIDA

Como exposto anteriormente, o Filtro de Kalman (FK) é a solução clássica na estimação de estados em sistemas lineares. Em sua concepção, os ruídos de processo e de medição

---

**Algoritmo 3.3** Filtro de Kalman robusto para sistemas descritores
 

---

1: **Inicialização.**

Defina  $\hat{x}_{0|0}^{\text{sd}}$ , e  $P_{0|0}^{\text{sd}}$ .

2: **para todo**  $k > 0$  **fazer**

3: Defina as matrizes:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{k+1} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times q} \\ D_k & 0_{q \times q} \\ 0_{n \times q} & I_{q \times q} \end{bmatrix}, \quad F_k = \begin{bmatrix} A_k & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & I_{q \times q} \\ 0_{n \times q} & I_{q \times q} \end{bmatrix}, \quad W_k = \begin{bmatrix} Q_k & 0_{n \times q} & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & U_k & 0_{q \times q} \\ 0_{q \times n} & 0_{q \times m} & 0_{q \times q} \end{bmatrix}, \\ H_k = \begin{bmatrix} C_k & 0_{q \times m} \end{bmatrix}, \quad V_k = R_k. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

4: Variáveis utilizadas no cálculo da estimativa:

$$\hat{\chi}_{k-1|k-1} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}} \\ c_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_{k-1|k-1} = \begin{bmatrix} P_{k-1|k-1}^{\text{sd}} & 0_{n \times q} \\ 0_{q \times n} & 0_{q \times q} \end{bmatrix}, \quad y_k = y_k$$

5: Definir  $\lambda_k \neq 0$  ou calculá-lo utilizando otimização [80].

6: Calcular as variáveis estendidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{W}_k := W_k - \lambda_k^{-1} M_{f,k} M_{f,k}^T, \quad \mathcal{W}_k := \begin{bmatrix} \hat{W}_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ \hat{V}_k := V_k - \lambda_k^{-1} M_{h,k} M_{h,k}^T, \quad \mathcal{V}_k := \begin{bmatrix} \hat{V}_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ \hat{E}_{k+1} := \begin{bmatrix} \hat{E}_{k+1} \\ \sqrt{\lambda_k} N_{e,k+1} \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_k := \begin{bmatrix} \hat{F}_k \\ \sqrt{\lambda_k} N_{f,k} \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_k := \begin{bmatrix} \hat{H}_k \\ \sqrt{\lambda_k} N_{h,k} \end{bmatrix}, \quad z_k := \begin{bmatrix} y_k \\ 0 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

7: Cálculo da estimativa:

$$\hat{\chi}_{k|k} = \begin{bmatrix} 0_{n \times q} \\ 0_{n \times m} \\ I_{n \times n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0_{n \times m} & E_{k+1} \\ 0_{m \times n} & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0_{m \times m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_k \hat{\chi}_{k-1|k-1} \\ z_k \\ 0_n \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathcal{P}_{k|k} = - \begin{bmatrix} 0_{n \times q} \\ 0_{n \times m} \\ I_{n \times n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0_{n \times m} & E_{k+1} \\ 0_{m \times n} & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0_{m \times m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n \times q} \\ 0_{n \times m} \\ I_{n \times n} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

8: Recuperação dos estados e matriz de covariâncias:

$$\hat{x}_{k|k}^{\text{sd}} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \hat{\chi}_{k|k}, \quad P_{k|k}^{\text{sd}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{k|k} \end{bmatrix}$$

9: **fim for**

---

devem ser variáveis aleatórias Gaussianas e expressas de forma completa, ou seja, devem possuir média e matriz de covariância conhecidas. Igualmente, deve-se conhecer a correlação de todos os dados utilizados na fusão. Se o modelo for conhecido de forma exata, a utilização do FK resulta na estimativa ótima, ou seja, na estimativa de mínimo erro médio quadrático e de mínima variância. Infelizmente, se a informação sobre a correlação entre as fontes de informação for desconhecida ou incompleta o FK não pode ser aplicado. Em situações como esta, geralmente, assume-se que os dados são independentes, então a correlação é simplesmente ignorada no processo de fusão. A desconsideração da correlação pode levar o filtro a obter estimativas demasiadamente otimistas, podendo levar a divergência do filtro [81]. Isto ocorre, pois o FK subestima o valor da matriz de covariância da estimativa. Uma forma de se contornar este problema é utilizar o método de intersecção de covariâncias [16]. Este método de fusão de dados utiliza uma combinação convexa das médias e matrizes de covariância, resultando em estimativas consistentes independentemente do grau de correlação entre as variáveis aleatórias. Este método é principalmente utilizado na estimação de mapas em robôs móveis [18]. Na abordagem tradicional a matriz de covariância de todos os elementos deve ser guardada de forma completa. No entanto se os elementos do mapa são considerados descorrelacionados, somente a parte referente à diagonal desta matriz de covariâncias precisa ser armazenada mas esta informação sobre a correlação dos elementos fica perdida. Desta forma surgem elementos cuja correlação é desconhecida.

### 3.2.1 Método de Intersecção de covariâncias

O método de intersecção de covariâncias (IC) trata da fusão de dados quando a correlação entre as variáveis é desconhecida. Considere por exemplo o caso em que deve-se realizar a fusão da informação proveniente de dois dados  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ .  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  podem ser dados provenientes a partir de dois sensores ou  $\mathcal{A}$  pode ser a estimativa resultante da etapa predição do FK e  $\mathcal{B}$  a informação de um sensor. Estimativas consistentes para  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são dadas pelos pares  $\{\hat{a}, A\}$  e  $\{\hat{b}, B\}$ , respectivamente média e covariância dos dados  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , respectivamente. A correlação entre os dados é desconhecida.

O método IC para fusão de dados resulta no seguinte par de média e matriz de covariância  $\{\hat{c}, C\}$  [16]

$$C^{-1} = \omega A^{-1} + (1 - \omega)B^{-1} \quad (3.21)$$

$$\hat{c} = C \left( \omega A^{-1} \hat{a} + (1 - \omega)B^{-1} \hat{b} \right) \quad (3.22)$$

em que  $\omega \in [0, 1]$  resulta em uma estimativa consistente. Pode-se interpretar este método de forma geométrica, para tanto considere a Figura 3.1.

Na Figura 3.1 (a) é apresentada a fusão de dados para casos em que a correlação entre os dados é conhecida, e na Figura 3.1 (b) é apresentada a fusão de dados utilizando o método IC para diversos  $\omega$ . Pode-se verificar a matriz de covariâncias resultante nos casos em que a correlação é conhecida está sempre na região de intersecção das duas elipses. No entanto,



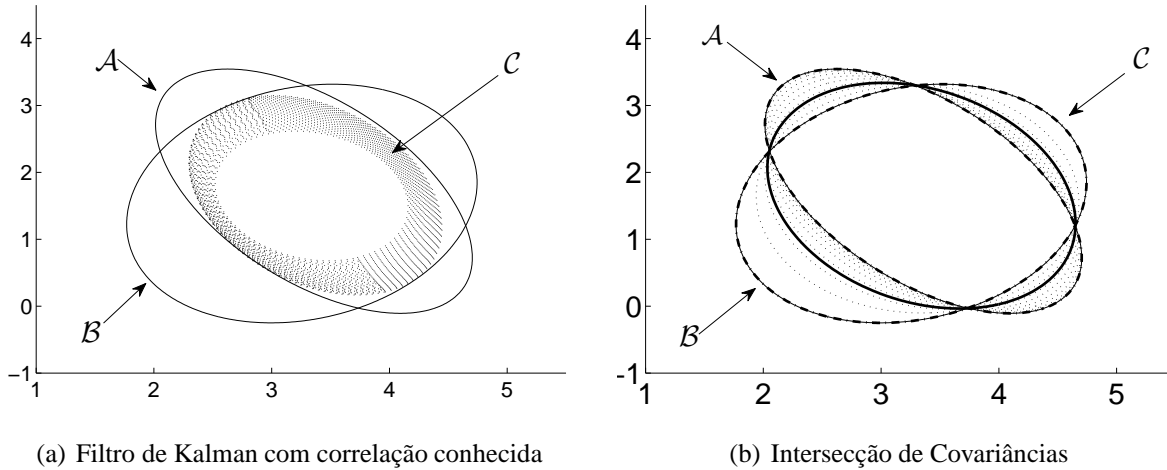


Figura 3.1: Comparação das matrizes de covariância resultantes da utilização dos métodos de Filtro de Kalman com correlação conhecida e método da Intersecção de Covariâncias

como a correlação é desconhecida não se pode saber qual é a elipse correta. No caso em que a correlação não é conhecida e o método IC é utilizado, verifica-se que a matriz de covariâncias resultante sempre é maior que a região definida pela intersecção das elipses. Na Figura 3.1 são apresentados os resultados para diversos valores de  $\omega \in [0, 1]$ , porém como no caso do FK, é importante obter a matriz de covariância de mínima variância, então o valor de  $\omega$  deve ser escolhido de acordo com algum critério. Neste trabalho utiliza-se o método *Golden Section Search* [75] para se encontrar  $\omega_{min}$  que satisfaça o critério de mínimo traço da matriz de covariância.

Ainda com a análise da Figura 3.1, pode-se verificar o que ocorre para os casos  $\omega = 0$  e  $\omega = 1$ . Se após a realização da otimização de  $\omega$  for obtido um destes valores para  $\omega_{min}$  tem-se que um dos dois dados utilizados é descartado na fusão. Para contornar este problema, em [34] é proposta uma modificação no método IC alterando o intervalo de otimização de  $\omega$  para  $\gamma \leq \omega \leq 1 - \gamma$ , em que  $\gamma$  é um parâmetro definido para cada aplicação e  $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$ . Pela definição do parâmetro  $\gamma$  pode-se verificar que no caso em que  $\gamma = 0$  recai-se no problema tradicional de IC, já nos casos em que  $\gamma = 1$  recai-se no caso em que a estimativa obtida é equivalente à estimativa proveniente do FK, porém a matriz de covariâncias resultante é o dobro da calculada pelo FK. Já para valores intermediários de  $\gamma$ , tem-se que ambos os dados influenciarão na estimativa final.

### 3.2.2 Método de Intersecção de covariâncias com restrições de estados

Como visto anteriormente, o método de intersecção de covariâncias foi definido para a fusão quando não se sabe qual o valor da correlação entre os dados. No caso de estimação em sistemas com restrições de estados, não existe uma forma definida para tal. Contudo, uma abordagem inicial para realizar a estimação em sistemas com restrições e correlação cruzada conhecida, seria utilizar o FKRI com uma alteração, ao invés de se utilizar (2.21)

e (2.22), deve-se aplicar uma forma desenvolvida a partir de (3.21) e (3.22), resultando em:

$$\begin{aligned}\check{P}_{k|k} &= \omega^{-1}(I_{n \times n} - K_k)P_{k|k} \\ \check{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}) \\ K_k &= (1 - \omega)P_{k|k-1}C_k^T \left( (1 - \omega)C_k P_{k|k-1}C_k^T + \omega R_k \right)^{-1}.\end{aligned}$$

com  $\omega$  sendo escolhido por meio da otimização de  $\min_{\omega} \text{Tr}(\check{P}_{k|k})$ . Na sequencia utiliza-se a etapa de projeção dada por (2.23) e (2.24). No entanto esta minimização pode não resultar em um resultado de traço mínimo para a matriz de covariâncias projetada. Considere o caso de um sistema com restrições fracas, para se obter a estimativa com matriz de covariâncias de traço mínimo. Então, utiliza-se a seguinte função de custo:

$$\begin{aligned}J(x) &= (x - x_{k|k-1})^T \left( \omega P_{k|k-1}^{-1} \right) (x - x_{k|k-1}) + (y_k - C_k x)^T \left( (1 - \omega) R_k^{-1} \right) (y_k - C_k x) \\ &\quad + (D_k x - d)^T U_k^{-1} (D_k x - d)\end{aligned}$$

que é similar à função de custo utilizada em [38] na derivação do FKMA. Contudo, tem-se agora que as matrizes de covariância da predição e de correção são ponderadas por um parâmetro  $\omega$ . A partir da minimização da função de custo  $J(x)$  chega-se à um resultado similar ao FKMA, apresentado no Algoritmo 3.4. Utilizando o método de intersecção de covariâncias com minimização da covariância projetada (ICMCP) pode resultar em uma matriz de covariâncias de traço menor do que utilizando o método IC com projeção da estimativa (ICPE).

Na Figura 3.2 é apresentado um caso de aplicação dos métodos ICPE e ICMCP. Pode-se verificar a redução na matriz de covariâncias calculada pelo ICMCP com relação à calculada pelo ICPE. Esta melhora ocorre devido ao momento em que se faz a minimização do traço da matriz de covariâncias, que no caso do ICPE, é feito sem o uso das restrições, enquanto no ICMCP esta minimização já é feita para a matriz de covariâncias projetada. Para o caso não linear pode-se utilizar as mesmas equações do ICMCP, no entanto, deve-se utilizar a forma linearizadas das funções em questão. No caso não linear deve-se pensar no compromisso entre o ponto em que se faz a linearização e o ponto em que se faz a minimização do traço da matriz de covariâncias.

---

**Algoritmo 3.4** Estimação utilizando intersecção de covariâncias com minimização da covariância projetada

---

1: **Inicialização.**

Defina  $\hat{x}_{0|0}^{\text{ic}}, P_{0|0}^{\text{ic}}$  e  $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$ .

2: **para todo**  $k > 0$  **fazer**

3: *Predição:*

$$\hat{x}_{k|k-1}^{\text{ic}} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{ic}} + B_k u_k \quad (3.23)$$

$$P_{k|k-1}^{\text{ic}} = A_k P_{k-1|k-1}^{\text{ic}} A_k^T + Q_k \quad (3.24)$$

4: *Novas variáveis:*

$$y_k^{\text{ic}} = \begin{bmatrix} y_k \\ c_k \end{bmatrix}, \quad C_k^{\text{ic}} = \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix}, \quad R_k^{\text{ic}} = \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & \omega^{-1} U_k \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

5: *Cálculo da matriz de covariâncias em função de  $\omega$ , e minimização da matriz de covariâncias:*

$$P(\omega) = \frac{1}{\omega} \left( I_n - P_{k|k-1}^{\text{ic}} (C_k^{\text{ic}})^T \left( C_k^{\text{ic}} P_{k|k-1}^{\text{ic}} (C_k^{\text{ic}})^T + \left( \frac{\omega}{1-\omega} \right) R_k^{\text{ic}} \right)^{-1} C_k^{\text{ic}} \right) P_{k|k-1}^{\text{ic}}$$

$$\hat{\omega} = \min_{\omega} \text{Tr}(P(\omega)), \quad \gamma \leq \omega \leq 1 - \gamma.$$

6: *Cálculo da estimativa e matriz de covariâncias*

$$K_k^{\text{ic}} = (1 - \hat{\omega}) P_{k|k-1}^{\text{ic}} (C_k^{\text{ic}})^T \left( (1 - \hat{\omega}) C_k^{\text{ic}} P_{k|k-1}^{\text{ic}} (C_k^{\text{ic}})^T + \hat{\omega} R_k^{\text{ic}} \right)^{-1} \quad (3.26)$$

$$P_{k|k}^{\text{ic}} = \hat{\omega}^{-1} (I_{n \times n} - K_k^{\text{ic}} C_k^{\text{ic}}) P_{k|k-1}^{\text{ic}} \quad (3.27)$$

$$\hat{x}_{k|k}^{\text{ic}} = \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ic}} + K_k^{\text{ic}} (y_k^{\text{ic}} - C_k^{\text{ic}} \hat{x}_{k|k-1}^{\text{ic}}) \quad (3.28)$$

7: **fim for**

---

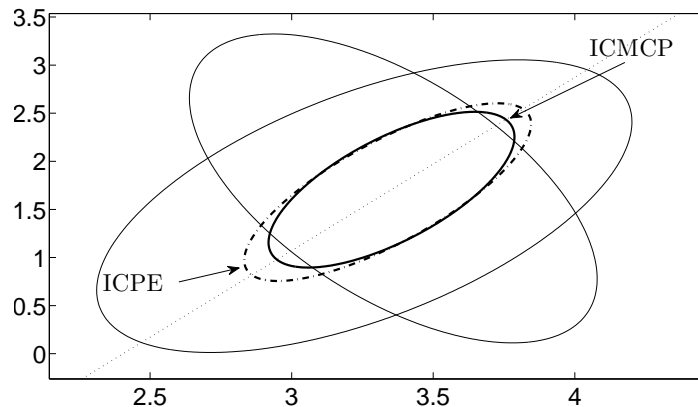


Figura 3.2: Fusão de dados em um sistema com restrição entre os estados e correlação desconhecida utilizando método da intersecção de covariâncias com minimização da covariância projetada (ICMCP) e método da intersecção de covariâncias com projeção da estimativa (ICPE)

## 4 ESTIMAÇÃO DE POSTURA DO PÉ DE UMA PRÓTESE ROBÓTICA

*“With great powers comes great responsibility”*

*Ben Parker*

Este capítulo apresenta uma aplicação, cujo intuito é fornecer estimativas em tempo real da postura do pé (orientação e distância com relação ao solo) de uma prótese robótica para amputados acima do joelho, com relação ao solo. Este trabalho é parte do desenvolvimento de um protótipo de prótese na Universidade de Brasília pelo Grupo de Robótica, Automação e Visão (GRAV) em parceria com o Grupo de Processamento Digital de Sinais (GPDS). O protótipo em questão, apresentado na Figura 4.1 (a), possui três graus de atuação: um para o joelho e outros dois para o conjunto pé-tornozelo. A atuação no joelho visa auxiliar na marcha, enquanto os dois graus de atuação no conjunto pé-tornozelo visa aumentar a estabilidade e equilíbrio do paciente. Um grau de atuação se refere à dorsiflexão e pantiflexão, enquanto o outro é responsável pelos movimentos de eversão e inversão.

Esta aplicação da estimação de postura do pé é desenvolvida a partir de informação proveniente de sensores giroscópios e infra-vermelhos. As medições destes sensores são apresentadas como informações suficientes para o desenvolvimento de modelos de processo e correção. Então, estes modelos são aplicados como forma de viabilizar o desenvolvimento de estimadores de orientação para o pé da prótese. Além de utilizar os modelos de processo e correção, uma equação de restrição também pode ser utilizada de forma a manter a coerência das estimativas.

De forma a validar os estudos em estimação com restrição, são apresentados resultados utilizando diversos estimadores. Primeiramente a estimação é feita utilizando somente uma fonte de informação, ou seja, somente dados do giroscópio ou somente dados dos sensores infra-vermelhos. De forma a melhorar o estimador, na seqüência, é feita a fusão de dados destes dois sensores utilizando o filtro de Kalman com medições aumentadas. Também são avaliadas duas proposições deste trabalho: estimação com restrições de estado utilizando filtro de Kalman para sistemas descritores (forma linearizada) e o filtro de Kalman robusto para sistemas descritores.

### 4.1 DESCRIÇÃO DO PROTÓTIPO

A Figura 4.1 (a) apresenta uma foto da prótese em desenvolvimento. Esta prótese é baseada no modelo de joelho passivo 3R15 da Ottobock [82] e, após algumas adaptações, o protótipo possui três graus de atuação: um para o joelho (plano sagital) e outros dois

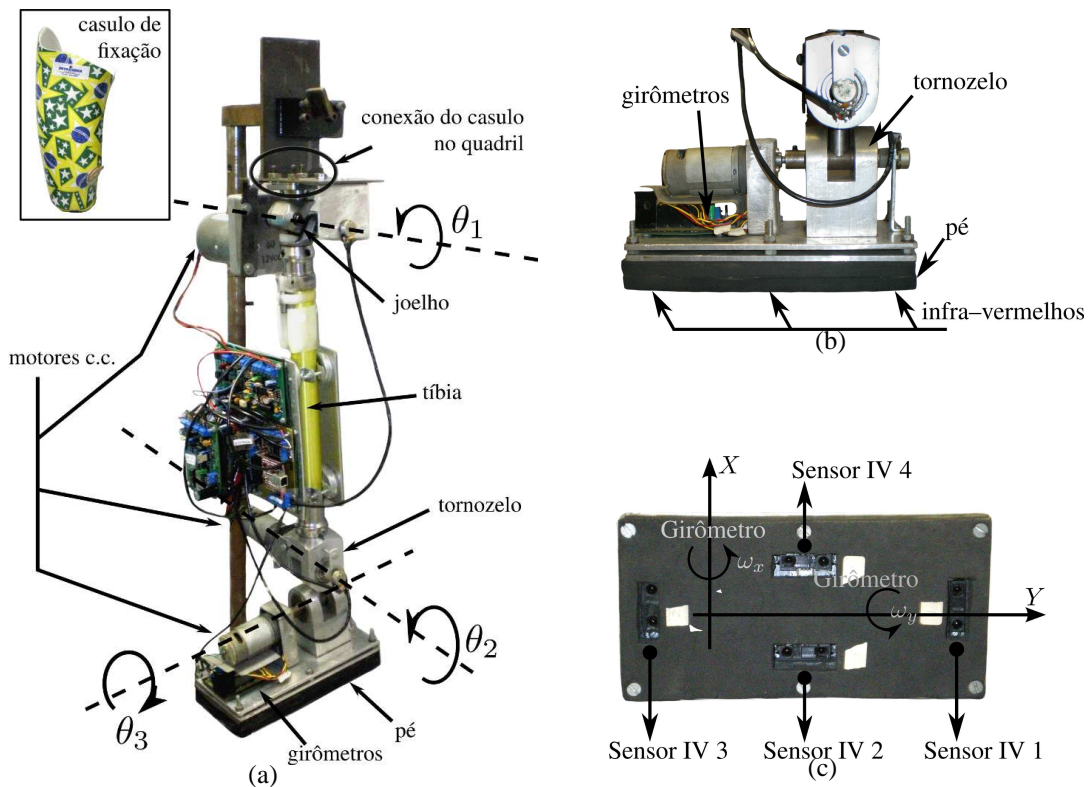


Figura 4.1: (a) Foto da prótese robótica em desenvolvimento (b) Vista lateral do pé com posicionamento dos giroscópios e sensores infra-vermelhos. (c) Posicionamento dos sensores infra-vermelhos na sola do pé e orientação das medições de velocidade dos giroscópios.

para o tornozelo (planos sagital e frontal). A atuação no joelho visa ajudar na marcha do paciente, enquanto os graus de atuação no tornozelo são direcionados a aumentar o nível de estabilidade do paciente. Os três graus de liberdade estão associados aos ângulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  e cada junta é controlada por um motor de corrente contínua e uma fonte chaveada de corrente. A escolha de motores elétricos se deve ao fato que, hoje em dia, estão disponíveis motores eficientes, rápidos e com grande torque e também existem baterias de tamanho relativamente pequenos.

O controle da prótese é feito em parte utilizando sinais eletromiográficos de superfície [14], e outras informações como, por exemplo, a orientação do pé com relação ao solo são utilizadas para aumentar a confiabilidade no sistema em malha fechada, posto que o protótipo também possui um conjunto tornozelo-pé ativo. O protótipo será fixado na parte de cima da perna amputada através de um casulo, que conterà o módulo para medição e processamento de sinais eletromiográficos. Atualmente a prótese está fixada em uma plataforma desenvolvida para auxiliar na montagem dos circuitos eletrônicos e também para realização de experimentos iniciais.

Considerando que uma variedade muito grande de sensores está disponível hoje em dia e também que somente as medidas de distância e velocidades rotacionais são utilizadas pelos

modelos utilizados, pode-se discutir sobre os tipos de sensores que serão empregados. Na literatura, o uso de acelerômetros e magnetômetros são utilizados na estimação de orientação em veículos aéreos não tripulados, como apresentado em [83]. Esta aplicação poderia ser alterada de forma a ser utilizada na estimação de postura do pé. Porém este método não consideraria as variações com relação à posição do solo, pois as estimativas seriam realizadas com relação ao eixo da gravidade e ao eixo magnético da terra. Uma outra abordagem seria o uso de potenciômetros acoplados à cada junta. Neste caso, as medições seriam realizadas com relação à tíbia da prótese. Estas abordagens até então discutidas não fornecem informação sobre a distância do pé com relação ao solo. Portanto, para estimar esta distância, uma opção seria o uso de sensores ultra-som para medição de distância. Esta abordagem foi de fato considerada, mas devido aos grandes ângulos das medições e também à grande incerteza de medição para pequenas distâncias, sensores infra-vermelhos para medição de distância foram utilizados.

Com respeito à parte responsável por substituir o pé na prótese, esta está equipada com dois girômetros ADXRS300 da *Analog Devices*<sup>1</sup> montados na planta do pé (Figura 4.1 (b)), e quatro sensores infra-vermelhos GP2D120<sup>2</sup> da Sharp montados na sola do pé (Figura 4.1 (c)). Cada girômetro é responsável por fornecer medidas de velocidade angular do pé para um certo eixo de rotação, já cada sensor infra-vermelhos fornece uma medida de distância com relação ao solo. A partir das quatro medições de distância é possível obter uma estimativa para a postura do pé.

Um microcontrolador AT91SAM7S64 de 32-bits baseado em um núcleo ARM7 da AT-MEL ® é responsável pelo controle das juntas, pela coleta dados dos sensores e pela comunicação com o computador através de uma rede serial RS-485. Os seis sensores analógicos (dois giroscópios e quatro infra-vermelhos) estão conectados a um conversor analógico-digital de 10-bits. Nas três juntas de atuação também estão acoplados três potenciômetros de forma a medir diretamente o ângulo relativo entre o fêmur, tíbia e tornozelo. Cada potenciômetro está conectado à um canal do conversor digital-analógico de 10-bits. Todos os dados são coletados a um período de amostragem de 10 *ms*, pois este valor considerado como o mínimo para executar o processo de estimação em um sistema embarcado.

## 4.2 VARIÁVEIS DE ORIENTAÇÃO E MEDIÇÃO

De forma a descrever a orientação do pé com relação ao solo, define-se  $X \times Y \times Z$  como o sistema de referência, descrito na Figura 4.2. Nesta figura,  $X \times Y$  é o plano do pé e o plano do chão é representado por  $\Xi$ . A orientação do pé com relação ao solo é descrito por

---

<sup>1</sup>Datasheet disponível em: <http://www.analog.com/en/ADXRS300/productsearch.html>

<sup>2</sup>Datasheet disponível em: <http://www.sharpsma.com/Page.aspx/americas/en/part/GP2D120/>

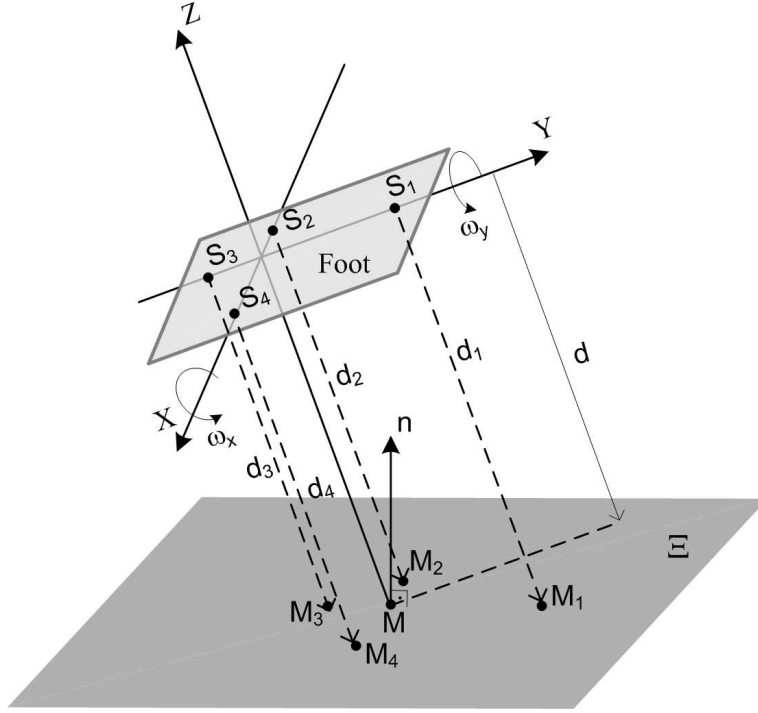


Figura 4.2: Orientação do pé com relação ao solo e medidas dos sensores

$n = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}^T$ ,  $n$  é o vetor unitário normal a  $\Xi$  descrito no sistema de referência  $X \times Y \times Z$ , e  $d$  é a distância no eixo  $Z$  do plano do solo à origem de  $X \times Y \times Z$ .

#### 4.2.1 Modelo de predição utilizando girômetros

Os dois girômetros fornecem medições para movimentos angulares do pé segundo os eixos  $X$  e  $Y$ . Tais medições são as velocidades angulares  $\omega_x$  e  $\omega_y$ , como apresentado na Figura 4.2, e fazem efeito em  $n$  de acordo com a seguinte equação diferencial:

$$\dot{n} = \frac{\partial n}{\partial \phi_x} \omega_x + \frac{\partial n}{\partial \phi_y} \omega_y$$

em que  $\omega_x = \frac{d\phi_x}{dt}$  e  $\omega_y = \frac{d\phi_y}{dt}$  e  $\phi_x$  e  $\phi_y$  são ângulos de rotação nos eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Desta forma, as derivadas parciais são computadas como:

$$\frac{\partial n}{\partial \phi_x} = \lim_{\Delta \phi_x \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta \phi_x} = \lim_{\Delta \phi_x \rightarrow 0} \frac{R_X(\Delta \phi_x)n - n}{\Delta \phi_x}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \phi_y} = \lim_{\Delta \phi_y \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta \phi_y} = \lim_{\Delta \phi_y \rightarrow 0} \frac{R_Y(\Delta \phi_y)n - n}{\Delta \phi_y}$$

com a matriz de rotação  $R_X(\theta)$  e  $R_Y(\theta)$  :

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

$$R_Y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

sendo as rotações básicas de ângulo  $\theta$  em torno os eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Continuando o desenvolvimento, obtém-se o seguinte resultado para a evolução do vetor unitário de orientação  $n$ :

$$\dot{n} = \begin{bmatrix} -n_z\omega_y \\ n_z\omega_x \\ -n_y\omega_x + n_x\omega_y \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Deve-se salientar que a velocidade angular sobre o eixo  $Z$  é considerada pequena se comparado a  $\omega_x$  e  $\omega_y$ . Esta hipótese é verdadeira, considerando que os movimentos de rotação do pé em torno do eixo  $Z$  são pequenos em um período de amostragem durante a marcha.

#### 4.2.2 Modelo de correção utilizando sensores infra-vermelhos

Sejam  $S_1, S_2, S_3$  e  $S_4$  as posições dos sensores infra-vermelhos no plano do pé. Considere-se que os sensores fazem medições perpendiculares ao plano  $X \times Y$  e na direção de  $\Xi$ . Estas medições são feitas nos pontos  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  e são representadas por  $d_j, j = 1, \dots, 4$ , todas as medições possuem a mesma variância  $\sigma_d^2$ , ou seja, todos os sensores infra-vermelhos possuem o mesmo nível de incerteza. As coordenadas  $m_j$  em  $X \times Y \times Z$  de  $M_j \in \Xi$  são representadas por:

$$m_j = s_j + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{j,x} \\ s_{j,y} \\ -d_j \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

em que  $s_j = \begin{bmatrix} s_{j,x} & s_{j,y} & 0 \end{bmatrix}^T$  são as coordenadas previamente conhecidas de  $S_j$  correspondente ao posicionamento do  $j$ -ésimo sensor infra-vermelho. Como  $M \in \Xi$ , com coordenadas  $m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d \end{bmatrix}^T$ , tem-se

$$n^T(m_j - m) = 0$$

para cada medição do sensor infra-vermelho, que resulta

$$d_j = \frac{dn_z + s_{j,y}n_y + s_{j,x}n_x}{n_z} \quad (4.3)$$

como sendo a equação que relaciona a medição  $d_j$  do  $j$ -ésimo sensor com as variáveis de orientação  $n$  e  $d$ .



### 4.3 DESCRIÇÃO DO APARATO EXPERIMENTAL

Como forma de avaliar os estimadores de orientação do pé com relação ao solo, foi realizado um experimento com medidas dos girômetros e infra-vermelhos, além de medidas angulares fornecidas por um potenciômetro localizado no tornozelo. Como forma de comparação, todos os estimadores foram avaliados com o mesmo conjunto de dados.

Inicialmente, a tíbia da prótese foi posicionada em uma posição perpendicular com relação ao solo e na sequência vários sinais de controle foram enviados para os motores responsáveis pela rotação nos eixos  $X$  e  $Y$ . Medições dos girômetros e dos sensores infra-vermelhos foram coletadas em tempo real durante 35 s com um período de amostragem  $T = 10$  ms. Um potenciômetro localizado no tornozelo fornece medições diretas sobre o ângulo no eixo  $x$ . Estas medições podem ser utilizadas para avaliar parcialmente o desempenho dos estimadores no cálculo do vetor de orientação  $n$ , pois a partir do ângulo medido pode-se calcular diretamente a componente  $n_x$ . Entretanto, as medições do potenciômetro não podem substituir o estimador, nem serem utilizadas como uma nova fonte de informação, pois as medições do potenciômetro são feitas com respeito à tíbia da prótese e não com relação ao solo. Portanto, neste experimento, o conhecimento prévio da posição da tíbia com relação ao solo é o que viabiliza a utilização do potenciômetro na avaliação dos estimadores. Todavia, este não é o caso de um paciente utilizando a prótese, em que o posicionamento da tíbia com relação ao solo não é conhecido previamente e, também, este posicionamento pode variar no tempo.

#### 4.3.1 Estimação por predição utilizando girômetros

O movimento angular medido pelos girômetros possui uma relação com a orientação do pé dada por (4.1). Uma primeira alternativa para a solução do problema de estimação da orientação do pé com relação ao solo, seria estimar esta orientação utilizando somente as medidas capturadas pelos girômetros. Assim, considere  $n_k = \begin{bmatrix} n_{x,k} & n_{y,k} & n_{z,k} \end{bmatrix}^T$  como o vetor unitário de orientação do pé em um certo instante  $k$ , e  $u_k = \begin{bmatrix} \omega_{x,k} & \omega_{y,k} \end{bmatrix}^T$  as medidas dos girômetros. O seguinte modelo representa a evolução do vetor de orientação:

$$\begin{aligned} n_{k+1} &= f(n_k, u_k) + w_k \\ &= \begin{bmatrix} n_{x,k} - T n_{z,k} \omega_{y,k} \\ n_{y,k} + T n_{z,k} \omega_{x,k} \\ n_{z,k} - T n_{y,k} \omega_{x,k} + T n_{x,k} \omega_{y,k} \end{bmatrix} + w_k. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Esta equação é escrita a partir de (4.1) utilizando a aproximação de primeira ordem de Euler com período de amostragem  $T$ .  $w_k$  é um vetor de ruído gaussiano que corresponde a incerteza associada às medidas dos girômetros e também a rotação no eixo  $Z$ . Este procedimento é apresentado no Algoritmo 4.1. Na inicialização deste estimador deve-se utilizar o vetor de orientação  $n_0$  mais próximo do real quanto possível, pois neste caso a estimação de po-

sição será sempre incrementada. Como não há correção utilizando sensores exteroceptivos, qualquer erro inicial será propagado durante todo o experimento.

**Observação 4.1.** Pelo modelo (4.4) não é possível estimar a distância do pé com relação ao chão. Portanto este método não é adequado para resolver o problema de estimação da orientação do pé com relação ao solo. Entretanto esta abordagem é uma boa alternativa para se verificar inicialmente a evolução do vetor de orientação do pé.

A realização do experimento descrito na Seção 4.3 utilizando somente os girômetros para estimação de orientação é apresentada na Figura 4.3. A Figura 4.3 (a) ilustra o resultado para a componente  $n_x$  do vetor de orientação. No início do experimento, até cerca de 7 s, o resultado pode seguir relativamente perto o que foi medido pelo potenciômetro. No entanto, depois de 7 s o estimador começa a divergir chegando até a obter valores maiores que 1 para a componente  $n_x$ , resultado absurdo posto que a norma do vetor de orientação  $n$  deve ser unitária. Nas Figuras 4.3 (b) e (c) são apresentados os resultados para as componentes  $n_y$  e  $n_z$ . Não existe um valor real para se comparar às componentes estimadas, porém na estimação de ambas componentes  $n_y$  e  $n_z$  são verificadas estimativas maiores que a unidade. Na Figura 4.3 (c) verificam-se estimativas negativas. Isto, de acordo com o que foi apresentado na Seção 4.2, é absurdo, pois valores negativos de  $n_z$  indicam que a sola do pé está voltada para cima. Na Figura 4.3 (d) é apresentada a evolução da norma do vetor  $n$ . Como é esperado pelos resultados das componentes, verifica-se que a restrição de norma unitária não é respeitada utilizando somente a evolução do modelo.

Para melhorar o resultado obtido previamente, considera-se que o sistema dado por (4.4) deve respeitar a seguinte restrição:

$$g(n_k) = \|n_k\|^2 = n_{x,k}^2 + n_{y,k}^2 + n_{z,k}^2 = 1 \quad (4.5)$$

e como visto na Seção 2.2.2, uma das formas de se aplicar esta restrição ao sistema (4.4) é utilizando Filtro de Kalman com Projeção das Estimativas. O resultado do experimento descrito na Seção 4.3 utilizando somente os girômetros e restrição de norma unitária para o vetor de orientação é apresentado na Figura 4.4. O resultado para a componente  $n_x$  é

---

**Algoritmo 4.1** Estimador sequencial utilizando girômetros

---

1: **Inicialização**,  $k = 0$ .

*Escolher a orientação  $n_0$*

2: **para todo** amostra  $k \geq 1$  **fazer**

3: *Ler os dados dos girômetros*

$$u_k = \begin{bmatrix} \omega_{x,k} & \omega_{y,k} \end{bmatrix}^T$$

4: *Calcular a predição do estado utilizando*

$$\hat{n}_k = f_k(\hat{n}_{k-1}, u_k)$$

5: **fim for**

---

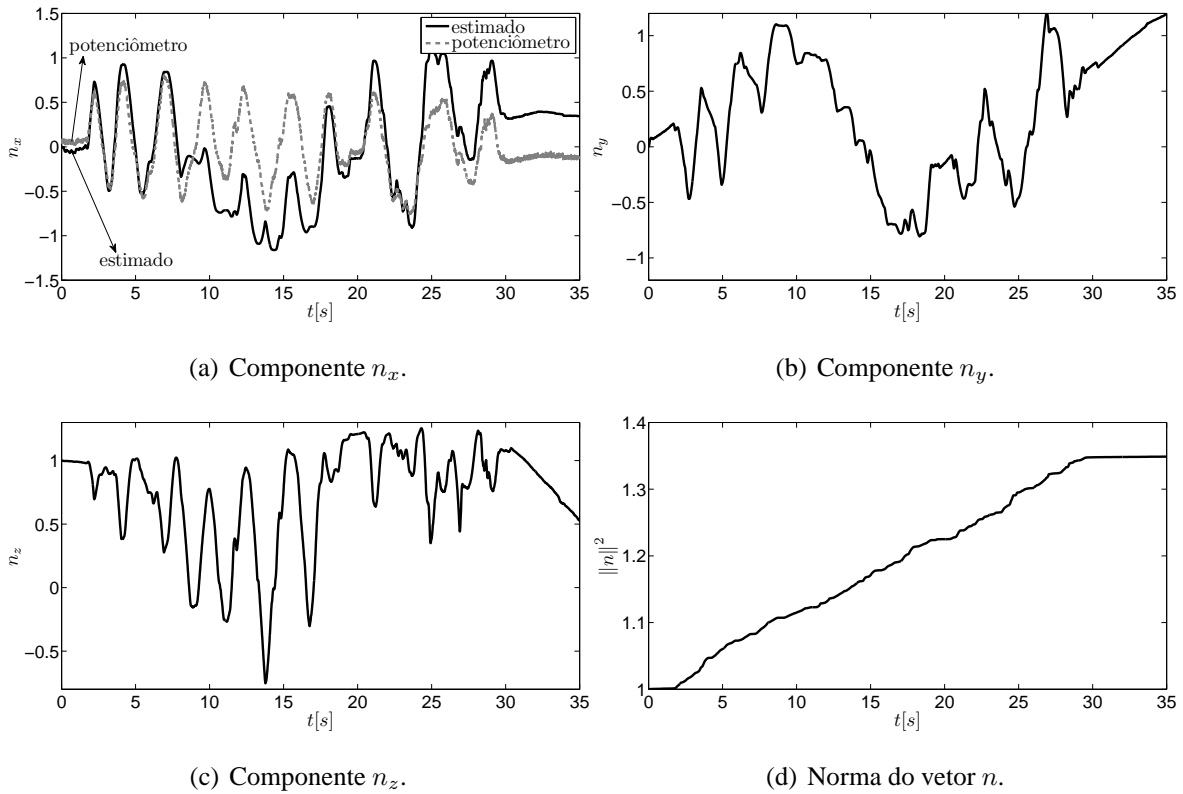


Figura 4.3: Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Somente girômetros.

apresentado na Figura 4.4 (a). Como verificado anteriormente, o resultado é compatível com o medido pelo potenciômetro até cerca de 7 s. Os resultados para as componentes  $n_y$  e  $n_z$  são apresentados nas Figuras 4.4 (b) e (c), respectivamente. Diferentemente do verificado anteriormente, estas componentes são sempre menores que a unidade. Ainda na Figura 4.4 (c) pode-se verificar valores negativos para a componente  $n_z$ . Na Figura 4.4 (d) é apresentada a evolução da norma do vetor  $n$  e que, com a utilização do Filtro de Kalman com Projeção das Estimativas, a restrição de norma unitária (4.5) é visualmente respeitada.

Ao final destes dois experimentos, constata-se que o resultado obtido não é consistente com desejado. De forma geral, os resultados utilizando somente girômetros servem de guia para a direção em que o pé está se movimentando. Devido a fontes de erro como a *bias* nestes girômetros, as estimativas não foram boas o suficiente e com o passar do tempo chegam a valores absurdos, como componentes  $n_z$  negativas. Uma forma de se melhorar estas estimativas seria utilizando fusão com outros dados de sensores presentes no pé, neste caso os sensores infra-vermelhos.

### 4.3.2 Estimação utilizando mínimos quadrados não-lineares e sensores infra-vermelhos

Conforme apresentado na Seção 4.2.2, a orientação do pé também possui uma relação direta com as medições dos sensores infra-vermelhos. Uma segunda abordagem para solu-

---

**Algoritmo 4.2** Estimador sequencial utilizando girômetros e restrição unitária

---

1: **Inicialização**,  $k = 0$ .

*Escolher a orientação  $n_0$  e a matriz de covariância  $P_0$ .*

2: **para todo** amostra  $k \geq 1$  **fazer**

3: *Ler os dados dos girômetros*

$$u_k = \begin{bmatrix} \omega_{x,k} & \omega_{y,k} \end{bmatrix}^T$$

4: *Calcular a predição do estado utilizando*

$$\begin{aligned} \tilde{n}_k &= f_k(\hat{n}_{k-1}, u_k) \\ \check{P}_k &= P_{k-1} + \delta I_{3 \times 3}, \quad \text{em que } \delta = 10^{-8}. \end{aligned}$$

5: *Calcular a projeção do estado no espaço da restrição unitária utilizando*

$$\begin{aligned} D_k &= \left. \frac{\partial g(n_k)}{\partial n_k} \right|_{n_k = \tilde{n}_k}, \quad c_k = 1 \\ \hat{n}_k &= \tilde{n}_k + \check{P}_k D_k^T (D_k \check{P}_k D_k^T)^{-1} (c_k - D_k \tilde{n}_k) \\ P_k &= \check{P}_k - \check{P}_k D_k^T (D_k \check{P}_k D_k^T)^{-1} D_k \check{P}_k \end{aligned}$$

6: **fim for**

---

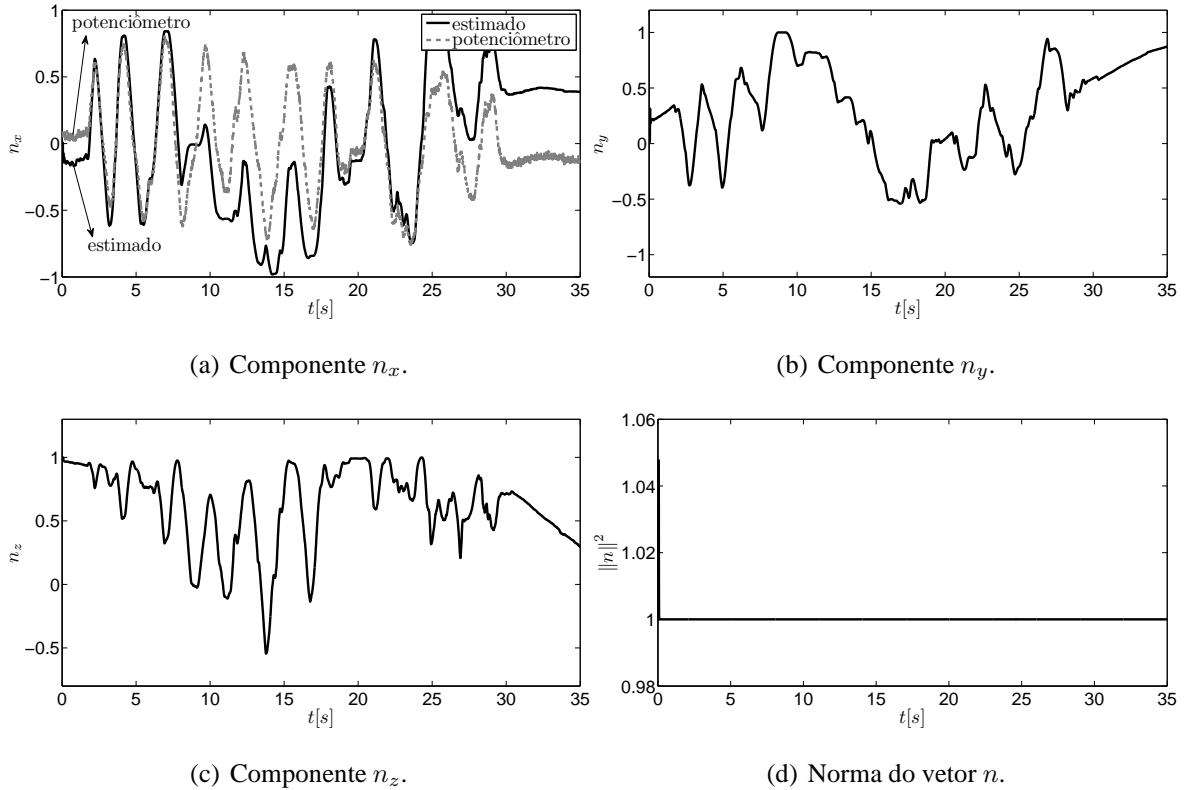


Figura 4.4: Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Girômetros com restrição de norma unitária utilizando Filtro de Kalman com Projeção das Estimativas.

ção da estimação da orientação do pé sem utilizar fusão de dados é calcular diretamente a estimativa da orientação a partir de medições dos sensores infra-vermelhos. Por exemplo, considere

$$\varphi = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{n_x}{n_z} & \frac{n_y}{n_z} & d \end{bmatrix}^T, \quad (4.6)$$

$$\theta_j = \begin{bmatrix} s_{j,x} & s_{j,y} & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (4.7)$$

Assim, as medições dos sensores infra-vermelhos (4.3) podem ser rescritas como uma equação de medição linear de forma

$$d_{j,k} = \theta_j^T \varphi_k. \quad (4.8)$$

Um método muito conhecido para se calcular a estimativa de um vetor baseado em diversas medições de mesma variância é o método dos mínimos quadrados [84]. Desta forma, dado a seguinte equação de medição linear para um caso linear genérico

$$y = \Phi \varphi,$$

a estimativa ótima  $\hat{\varphi}$  é dada portanto

$$\hat{\varphi} = (\Phi^T \Phi)^{-1} y. \quad (4.9)$$

Esta técnica de estimação é desenvolvida utilizando as medidas dos quatro sensores infra-vermelhos  $d_1, d_2, d_3$  e  $d_4$ . Com estas medidas é possível determinar uma estimativa completa de orientação do pé com relação ao chão, ou seja, o vetor normal  $n_k$  e a distância do pé com relação ao chão  $d_k$ . Logo, a partir de (4.8) define-se

$$\begin{cases} y_k = \begin{bmatrix} d_{1,k} & d_{2,k} & d_{3,k} & d_{4,k} \end{bmatrix}^T, \\ \Phi = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix}^T. \end{cases} \quad (4.10)$$

Portanto em cada instante de tempo  $k$  o vetor  $\hat{\varphi}_k$  é estimado utilizando (4.9) com (4.6), (4.7) e (4.10). Após a realização deste cálculo, o vetor normal  $n_k = \begin{bmatrix} n_{x,k} & n_{y,k} & n_{z,k} \end{bmatrix}^T$  e a distância do pé com relação ao chão podem ser recuperadas utilizando a seguinte mudança não-linear de variáveis:

$$\begin{cases} n_{x,k} = \frac{-\hat{a}}{\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 1}} \\ n_{y,k} = \frac{-\hat{b}}{\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 1}} \\ n_{z,k} = \frac{1}{\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 1}} \\ d_k = \hat{c} \end{cases}$$

resultando no estimador de mínimos-quadrados não lineares. Este método é apresentado de forma resumida no Algoritmo 4.3.

**Observação 4.2.** A partir de (4.11) é fácil ver que o estimador de mínimos-quadrados não-lineares garante que todas as estimativas do vetor normal  $n_k$  são unitárias.

---

**Algoritmo 4.3** Estimador de Mínimos-Quadrados Não-Lineares

---

1: **Inicialização**,  $k = 0$ .

Calcular  $\Phi$  como

$$\Phi = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T$$

com  $\theta_j, j = \{1, 2, 3, 4\}$  dado por (4.7)

2: **para todo** amostra  $k \geq 0$  **fazer**

3: Ler os dados dos sensores infra-vermelhos

$$y = \begin{bmatrix} d_{1,k} & d_{2,k} & d_{3,k} & d_{4,k} \end{bmatrix}^T$$

4: Calcular a estimativa linear ótima

$$\hat{\varphi} = \begin{bmatrix} \hat{a} & \hat{b} & \hat{c} \end{bmatrix}^T = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$$

5: Calcular a estimativa  $\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \hat{n}_k^T & \hat{d}_k \end{bmatrix}^T$  como

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \frac{-\hat{a}}{\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 1}} & \frac{-\hat{b}}{\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 1}} & \frac{1}{\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 1}} & \hat{c} \end{bmatrix}^T$$

6: **fim for**

---

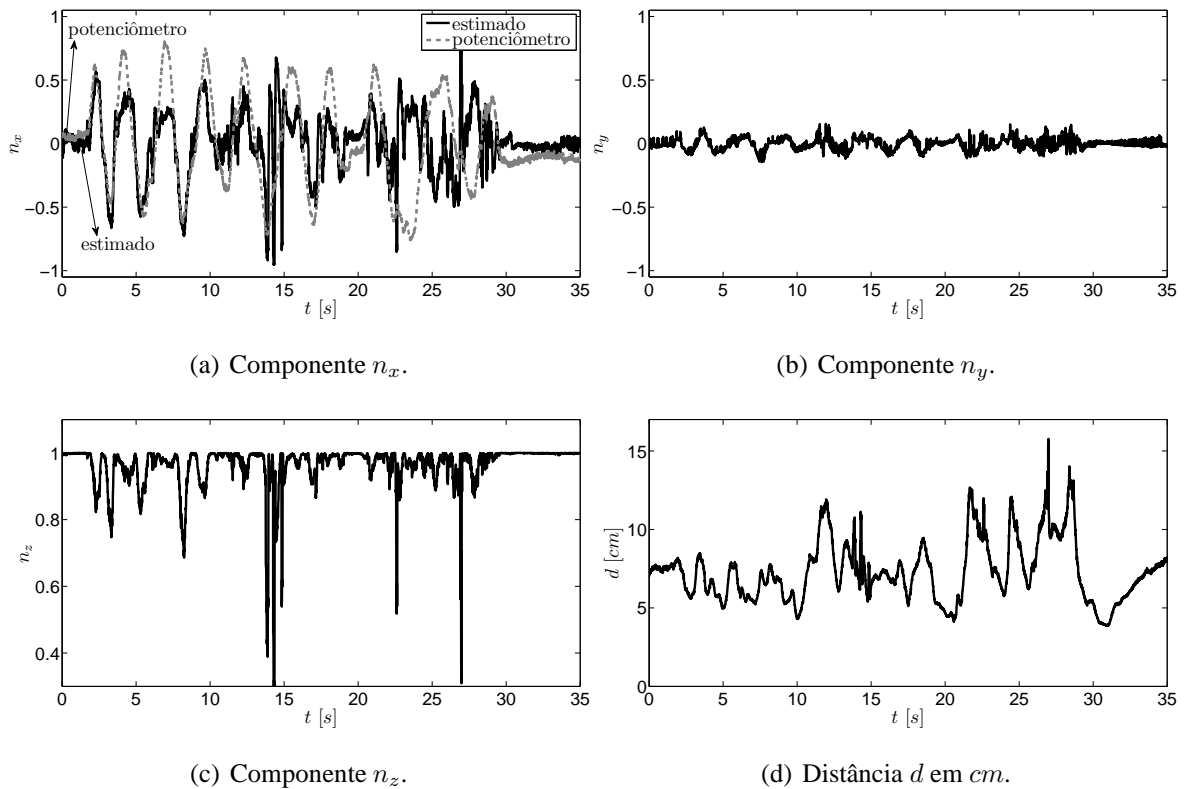


Figura 4.5: Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Mínimos Quadrados Não-Lineares utilizando somente medidas dos sensores infra-vermelhos

**Observação 4.3.** Pode-se argumentar que o estimador de Mínimos-Quadrados Recursivo [84] poderia ser utilizado para acrescentar mais uma informação ao estimador. Esta técnica não é interessante, pois os parâmetros estimados variam no tempo e o uso de informações anteriores levaria o sistema a polarizar as estimativas.

A Figura 4.5 apresenta uma realização do experimento apresentado na Seção 4.3 utilizando o método dos Mínimos-Quadrados Não-Lineares. A Figura 4.5 (a) apresenta a componente  $n_x$  estimada e a projeção baseada em medidas do potenciômetro. Durante os primeiros 3 s do experimento, a componente estimada segue próxima da projeção medida pelo potenciômetro. Deste instante até 13 s, as estimativas começam a divergir da projeção medida, e então as estimativas não se parecem mais com a projeção do potenciômetro. É nítido que aos 23 s algum tipo de erro aconteceu com os sensores infra-vermelhos. As estimativas obtidas após este instante divergem largamente das medições feitas pelo potenciômetro e somente após 30 s as estimativas voltam a se estabilizar.

A Figura 4.5 (b) e (c) ilustra os resultados para as componentes  $n_y$  e  $n_z$ . Não há medições comparativas para estas componentes, mas é perceptível que as estimativas apresentam uma grande variabilidade, ao passo que as medições para a componente  $n_x$ , obtida pelas medições do potenciômetro, foram suaves. Esta evolução suave leva a concluir que a evolução das componentes  $n_y$  e  $n_z$  também deveriam ser suaves, ao contrário do que é apresentado nas Figuras 4.5 (b) e (c). Também pode ser observado que a componente  $n_y$  teve pequenas variações, o que não era esperado visto que os sinais de controle alteraram de forma significativa a orientação do pé durante o experimento. A Figura 4.5 (d) apresenta a estimativa da distância  $d$  com respeito ao chão. Igualmente não existe uma medição para se fazer uma comparação, tal qual ocorrido para as componentes  $n_y$  e  $n_z$ .

### 4.3.3 Estimação utilizando Filtro de Kalman com Medições Aumentadas

Nas seções anteriores, foram apresentados estimadores que utilizam somente uma fonte de informação: medidas dos girômetros ou medidas provenientes dos sensores infra-vermelhos. Visando melhorar os estimadores obtidos anteriormente, é proposto utilizar fusão dos dados girômetros e dos sensores infra-vermelhos. Estendendo o desenvolvimento feito na Seção 4.3.1, define-se  $x_k = \begin{bmatrix} n_k^T & d_k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} n_{x,k} & n_{y,k} & n_{z,k} & d_k \end{bmatrix}^T$  a variável de estados em tempo discreto  $k$  do sistema correspondente à postura do pé (vetor de orientação e distância do pé com relação com solo) e seja  $u_k = \begin{bmatrix} \omega_{x,k} & \omega_{y,k} \end{bmatrix}^T$  as medidas dos girômetros em tempo discreto  $k$ . O seguinte modelo descreve a evolução dos estados entre medições:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_k \\ &= \begin{bmatrix} n_{x,k} - T n_{z,k} \omega_{y,k} \\ n_{y,k} + T n_{z,k} \omega_{x,k} \\ n_{z,k} - T n_{y,k} \omega_{x,k} + T n_{x,k} \omega_{y,k} \\ d_k \end{bmatrix} + w_k. \end{aligned} \quad (4.11)$$

A Equação (4.11) é escrita a partir de (4.1) utilizando a aproximação de Euler de primeira ordem com período de amostragem  $T$ .  $w_k$  é um vetor de variáveis aleatórias gaussianas que abrange as incertezas dos girômetros tanto quanto à desconsideração da rotação no eixo  $Z$ . Também foi considerada uma evolução aleatória para  $d_k$  de distribuição gaussiana, repre-

sentada pelo último elemento de  $w_k$ . Como apresentado na Seção 4.3.1, tem-se que (4.11) não garante que a norma  $n_{k+1}$  será unitária, portanto a seguinte restrição também deve ser considerada pelo estimador:

$$g(x_k) = n_{x,k}^2 + n_{y,k}^2 + n_{z,k}^2 = 1. \quad (4.12)$$

Com respeito à utilização dos sensores infra vermelhos, de acordo com (4.3), um conjunto de medições  $y_k = \begin{bmatrix} d_{1,i} & d_{2,i} & d_{3,i} & d_{4,i} \end{bmatrix}^T$  está relacionado com o sistema pela seguinte equação:

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (4.13)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d_k n_{z,k} + s_{1,y} n_{y,k} + s_{1,x} n_{x,k}}{n_{z,k}} \\ \frac{d_k n_{z,k} + s_{2,y} n_{y,k} + s_{2,x} n_{x,k}}{n_{z,k}} \\ \frac{d_k n_{z,k} + s_{3,y} n_{y,k} + s_{3,x} n_{x,k}}{n_{z,k}} \\ \frac{d_k n_{z,k} + s_{4,y} n_{y,k} + s_{4,x} n_{x,k}}{n_{z,k}} \end{bmatrix} + v_k \quad (4.14)$$

com  $v_k \sim N(0, R)$  sendo o ruído de medição. A equação acima corresponde a um modelo de medição não-linear e este modelo considera que todos os sensores infra-vermelhos possuem o mesmo nível de incerteza representados pela variância  $\sigma_d^2$ , o que foi de fato observado na prática.

A idéia inicial do filtro de Kalman de medições aumentadas (FKMA) é incorporar as equações restrição do sistema junto do modelo medição. Portanto rescreve-se o modelo de medição (4.14) incluindo a restrição (4.12) resultando em:

$$y_k^{ma} = h^{ma}(x_k) + v_k^{ma} \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} y_k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_k) \\ g(x_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

portanto em cada passo de amostragem  $k$ , as medições dos girômetros são utilizadas na etapa de predição do FKMA utilizando o modelo de processo dado por (4.11). Os sensores infra-vermelhos são utilizados na etapa de correção utilizando a equação aumentada de medição–restrição (4.16). A inicialização deste algoritmo é feita no passo de amostragem  $k = 0$ , executando uma etapa do estimador de mínimos quadrados não-linear (Algoritmo 4.3), que resulta em  $\hat{x}_{0|0}^{ma}$  e na sequência uma matriz de covariância conveniente  $P_{0|0}^{ma}$  é escolhida. Este método é apresentado de forma resumida no Algoritmo 4.4.

Com respeito à inicialização do estimador FKMA, foi utilizada a seguinte matriz de covariâncias:

$$P_{0|0}^{ma} = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 15 \end{bmatrix} \right).$$

A matriz de covariâncias  $P_{0|0}^{ma}$  possui elementos da diagonal relativamente grandes, se comparado ao estado que cada um está associado. Esta escolha faz com que  $\hat{x}_{0|0}^{ma}$  seja rapidamente esquecido a partir da chegada de novos conjuntos de medições  $y_k$ . A escolha desta



---

**Algoritmo 4.4** Filtro de Kalman de Medições Aumentadas

---

1: **Inicialização**,  $k = 0$

*Executar um passo do Algoritmo 4.3.*

*Na sequência escolher uma matrix de covariância conveniente.*

*Este procedimento resulta em  $\hat{x}_{0|0}^{ma}$  e  $P_{0|0}^{ma}$ .*

2: **para todo** amostra  $k \geq 1$  **fazer**

3: *Ler os dados dos girômetros*

$$u_k = \begin{bmatrix} \omega_{x,k} & \omega_{y,k} \end{bmatrix}^T$$

4: *Calcular a predição do estado utilizando (4.11) da seguinte forma*

$$A_k = \nabla f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^{ma}, u_k)$$

$$\hat{x}_{k|k-1}^{ma} = f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}^{ma}, u_k)$$

$$P_{k|k-1}^{ma} = A_k P_{k-1|k-1}^{ma} A_k^T + Q_k$$

*Resultando em  $\hat{x}_{k|k-1}^{ma}$  e  $P_{k|k-1}^{ma}$ .*

5: *Ler os dados dos sensores infra-vermelhos*

$$y = \begin{bmatrix} d_{1,k} & d_{2,k} & d_{3,k} & d_{4,k} \end{bmatrix}^T$$

6: *Calcular estimativa utilizando (4.14), (4.12) e (4.16) da seguinte forma*

$$C_k^{ma} = \nabla h^{ma}(\hat{x}_{k|k-1}^{ma})$$

$$K_k^{ma} = P_{k|k-1}^{ma} (C_k^{ma})^T \left( C_k^{ma} P_{k|k-1}^{ma} (C_k^{ma})^T + R_k^{ma} \right)^{-1}$$

$$P_{k|k}^{ma} = (I - K_k^{ma} C_k^{ma}) P_{k|k-1}^{ma}$$

$$x_{k|k}^{ma} = x_{k|k-1}^{ma} + K_k^{ma} \left( y_k^{ma} - C_k^{ma} x_{k|k-1}^{ma} \right)$$

*Resultando em  $\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \hat{n}_k^T & \hat{d}_k \end{bmatrix}^T$  e  $P_k$ .*

7: **fim for**

---

matriz visa deixar o sistema pouco sensível a erros na escolha do estado inicial, devido à falta de conhecimento sobre o mesmo. As matrizes  $Q$  e  $R$  foram escolhidas baseando-se nas especificações dos sensores utilizados e também considerando uma evolução aleatória da distância  $d_k$  do pé com relação ao solo. Esta última escolha deve-se ao fato de ter-se considerado uma evolução desconhecida para este estado em específico. Os parâmetros  $Q$  e  $R$  utilizados foram

$$Q = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 10^{-8} & 10^{-8} & 10^{-8} & 10^{-4} \end{bmatrix} \right)$$
$$R = \sigma_d^2 I_4 = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 0, 1^2 & 0, 1^2 & 0, 1^2 & 0, 1^2 \end{bmatrix} \right).$$

Então os resultados obtidos para o experimento descrito na Seção 4.3 são apresentados na Figura 4.6.

A Figura 4.6 (a) apresenta a componente  $n_x$  estimada e a projeção corresponde proveniente de medições feitas pelo potenciômetro. Pode-se verificar que a componente  $n_x$  segue muito próxima das medições do potenciômetro durante todo o experimento. Entretanto percebe-se uma inconsistência entre as estimativas e as medições por volta de 25 s. Foi neste período em que houve as maiores diferenças na avaliação dos estimadores anteriormente, em-

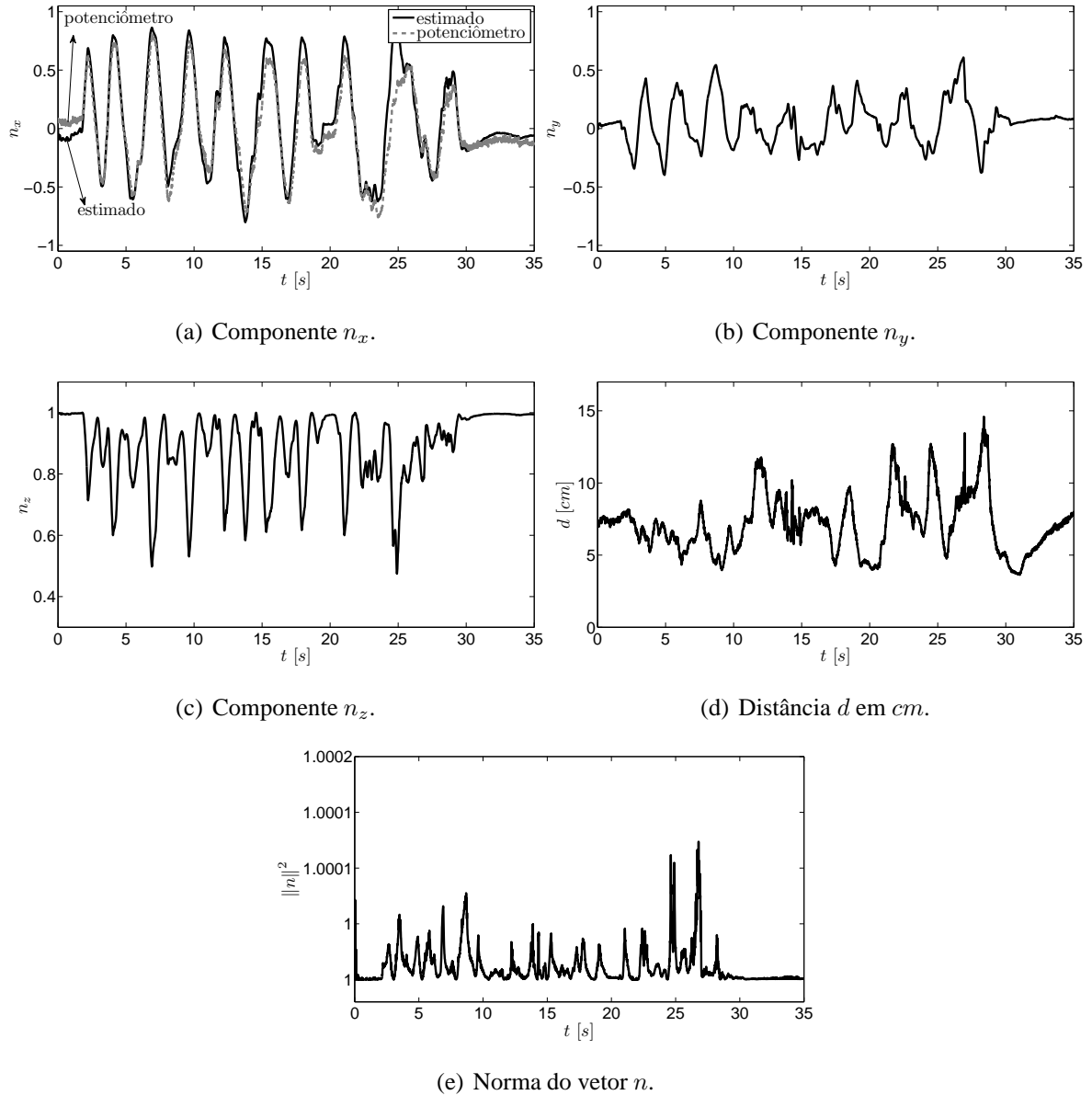


Figura 4.6: Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Fusão de dados dos girômetros e infra-vermelhos utilizando Filtro de Kalman de Medições Aumentadas.

pregavam somente sensores infra-vermelhos ou girômetros. Porém nesta aplicação, pode-se verificar que os erros foram drasticamente atenuados. Neste ponto é apresentado o progresso alcançado com a utilização da fusão das medições feitas pelos girômetros e pelos sensores infra-vermelhos. Em aproximadamente  $27 s$  pode-se verificar que a componente  $n_x$  volta a ser estimada com valor próximo das medições feitas pelo potenciômetro e assim continua até o fim do experimento. A partir deste último fato, contata-se que o estimador é capaz recuperar boas estimativas, mesmo trabalhando com erros de medição em curtos períodos de tempo.

A Figuras 4.6 (b) e (c) expõem os resultados para as componentes  $n_y$  e  $n_z$ , respectivamente. Como visto anteriormente, não há valores para comparação com estas estimativas.

Porém, comparando com o experimento de mínimos quadrados são notáveis as variações nos valores das estimativas para componente  $n_y$ . Estas variações corroboram a assertiva de movimentos tanto nos eixo  $X$  quanto  $Y$ . Igualmente, pode-se perceber a evolução suave de ambas componentes  $n_y$  e  $n_z$ . Esta evolução suave é esperada, pois sistemas mecânicos geralmente se comportam desta forma, e também a evolução da componente  $n_x$  calculada a partir de medições do potenciômetro na Figura 4.6 (a) se comportou de forma suave.

A Figura 4.6 (d) apresenta o resultado da estimativa para a distância  $d_k$  do pé com relação ao chão. Como ocorrido para as componentes  $n_y$  e  $n_z$ , não há uma medição base para se comparar. Porém, pode-se verificar que as estimativas são de aproximadamente 7 cm em ambos início e final do experimento. Isto significa que quando as estimativas do FKMA indicam que o pé está aproximadamente paralelo com relação ao solo, a distância  $d_k$  do pé com relação ao solo é estimada com valores próximos. Este é um resultado interessante, considerando que durante o experimento não houve movimento da tíbia e desta forma deveria-se obter aproximadamente a mesma distância  $d$ .

A Figura 4.6 ilustra o resultado da norma calculada para o vetor  $\hat{n}_k$  durante todo o experimento. Pode-se constatar que o resultado é bem próximo do desejado, com pequenos erros inferiores a 0,02%, mesmo com a linearização da equação de medição-restrição (4.16) sendo feita com relação ao estado predito  $\hat{x}_{k|k-1}$ .

#### 4.3.4 Estimação utilizando Filtro de Kalman para Sistemas Descritores

Na seção anterior, pôde-se verificar que a utilização de fusão de dados em conjunto com estimação de sistemas com restrição de estados melhora o desempenho no processo de estimação de orientação do pé com relação ao solo. Um dos objetivos deste trabalho é proposição de se rescrever o sistema com restrições de estados em forma de um sistema descritor e então utilizar o Filtro de Kalman para Sistemas Descritores (FKSD). Nesta seção é apresentada uma aplicação utilizando o FKSD apresentado na Seção 3.1.

Inicialmente é feito o mesmo desenvolvimento da Seção 4.3.3, considerando

$$x_k = \begin{bmatrix} n_k^T & d_k \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} n_{x,k} & n_{y,k} & n_{z,k} & d_k \end{bmatrix}^T$$

a variável de estados em tempo discreto  $k$  do sistema correspondente à postura do pé, vetor de orientação e distância do pé com relação com solo, e seja  $u_k = \begin{bmatrix} \omega_{x,k} & \omega_{y,k} \end{bmatrix}^T$  as medidas dos girômetros em tempo discreto  $k$ . Da mesma forma que em (4.11), o seguinte modelo descreve a evolução dos estados entre duas medições:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_k \\ &= \begin{bmatrix} n_{x,k} - T n_{z,k} \omega_{y,k} \\ n_{y,k} + T n_{z,k} \omega_{x,k} \\ n_{z,k} - T n_{y,k} \omega_{x,k} + T n_{x,k} \omega_{y,k} \\ d_k \end{bmatrix} + w_k. \end{aligned}$$

Rescrevendo (4.11) como

$$x_{k+1} = A(u_k)x_k + w_k \quad (4.17)$$

com

$$A(u_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -T\omega_{y,k} & 0 \\ 0 & 1 & -T\omega_{x,k} & 0 \\ T\omega_{y,k} & T\omega_{x,k} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a evolução das variáveis de estado termina em uma representação linear dado o par  $(w_{x,k}, w_{y,k})$ . Para o uso da restrição de norma unitária, primeiramente verifica-se como (4.12) é não-linear, esta deve ser linearizada de forma a se utilizar no algoritmo do FKSD. Portanto a restrição é linearizada na estimativa anterior e desta forma é rescrita da seguinte forma

$$D_k x_k = c_k \quad (4.18)$$

com

$$D_k = \begin{bmatrix} 2\hat{n}_{x,k-1|k-1} & 2\hat{n}_{y,k-1|k-1} & 2\hat{n}_{z,k-1|k-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$c_k = 1 + \hat{n}_{x,k-1|k-1}^2 + \hat{n}_{y,k-1|k-1}^2 + \hat{n}_{z,k-1|k-1}^2.$$

Tem-se também que a equação de medição dos sensores infra-vermelhos dada por (4.14)

$$y_k = h(x_k) + v_k$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d_k n_{z,k} + s_{1,y} n_{y,k} + s_{1,x} n_{x,k}}{n_{z,k}} \\ \frac{d_k n_{z,k} + s_{2,y} n_{y,k} + s_{2,x} n_{x,k}}{n_{z,k}} \\ \frac{d_k n_{z,k} + s_{3,y} n_{y,k} + s_{3,x} n_{x,k}}{n_{z,k}} \\ \frac{d_k n_{z,k} + s_{4,y} n_{y,k} + s_{4,x} n_{x,k}}{n_{z,k}} \end{bmatrix} + v_k$$

é não-linear e de forma a se adequar ao algoritmo do FKSD deve ser linearizada, mesmo procedimento realizado na adequação da restrição. Este procedimento resulta em:

$$y'_k = C(\hat{x}_{k-1|k-1})x_k + v_k \quad (4.19)$$

com

$$C(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{s_{1,x}}{n_{z,k}} & \frac{s_{1,y}}{n_{z,k}} & \frac{s_{1,x} n_{x,k} + s_{1,y} n_{y,k}}{n_{z,k}^2} & 1 \\ \frac{s_{2,x}}{n_{z,k}} & \frac{s_{2,y}}{n_{z,k}} & \frac{s_{2,x} n_{x,k} + s_{2,y} n_{y,k}}{n_{z,k}^2} & 1 \\ \frac{s_{3,x}}{n_{z,k}} & \frac{s_{3,y}}{n_{z,k}} & \frac{s_{3,x} n_{x,k} + s_{3,y} n_{y,k}}{n_{z,k}^2} & 1 \\ \frac{s_{4,x}}{n_{z,k}} & \frac{s_{4,y}}{n_{z,k}} & \frac{s_{4,x} n_{x,k} + s_{4,y} n_{y,k}}{n_{z,k}^2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$y'_k = y_k - h(\hat{x}_{k|k-1}) + C(\hat{x}_{k-1|k-1})\hat{x}_{k-1|k-1}.$$

e com as definições destas novas equações, pode-se utilizar a mudança de variáveis proposta na Seção 3.1 e obter

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k-1}^{sd} = \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ d_k \end{bmatrix}, \quad P_{k-1}^{sd} = \begin{bmatrix} P_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_{k+1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad F_k = \begin{bmatrix} A_k(\hat{x}_{k-1|k-1}) & 0 \\ 0 & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ H_k = \begin{bmatrix} C(\hat{x}_{k-1|k-1}) & 0 \end{bmatrix}, \quad V = R, \quad z_k = y'_k. \end{array} \right.$$

E esta mudança de variáveis resulta no seguinte sistema descritor:

$$\begin{aligned} E_{k+1}x_{k+1}^{sd} &= F_kx_k^{sd} + w_k^{sd} \\ z_k &= H_kx_k^{sd} + v_k^{sd} \end{aligned}$$

A inicialização deste algoritmo é feito da mesma maneira que no FKMA, executando uma etapa do estimador de mínimos quadrados não-linear, Algoritmo 4.3, que resulta em  $\hat{x}_0$  e na sequência uma matriz de covariância conveniente  $\Sigma_0$  é escolhida. Este método é apresentado de forma resumida no Algoritmo 4.5.

Com respeito à inicialização da matriz de covariância  $P_{0|0}$  no estimador FKSD, foi utilizada a mesma matriz de covariância  $P_{0|0}^{ma}$  do FKMA

$$P_{0|0} = \text{diag} \left( \left[ \begin{array}{cccc} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 15 \end{array} \right] \right),$$

visando facilitar a comparação dos estimadores. Para as matrizes

$$\begin{aligned} Q &= \text{diag} \left( \left[ \begin{array}{cccc} 10^{-8} & 10^{-8} & 10^{-8} & 10^{-4} \end{array} \right] \right) \\ R &= \sigma_d^2 I_4 = \text{diag} \left( \left[ \begin{array}{cccc} 0,1^2 & 0,1^2 & 0,1^2 & 0,1^2 \end{array} \right] \right). \end{aligned}$$

também foram utilizados os mesmos valores do FKMA visando igualmente a comparação entre os estimadores. Os resultados obtidos para o experimento apresentado na Seção 4.3 são apresentados na Figura 4.7.

A Figura 4.7 (a) mostra a componente  $n_x$  estimada e a projeção correspondente baseada nas medições feitas pelo potenciômetro. Como visto anteriormente no FKMA, a estimativa segue bem próxima da projeção do potenciômetro até cerca de 25 s, quando os problemas provenientes dos girômetros e infra-vermelhos se tornam maiores, fazendo aparecer um erro de estimação considerável. Em aproximadamente 29 s o estimador recupera-se e seu resultado continua próximo da projeção medida até o final do experimento. Este estimador também se apresentou robusto aos erros de medição, porém houve uma demora maior na recuperação da estimativa com relação ao resultado obtido anteriormente. Isto deve-se principalmente ao fato de que este filtro é linearizado com relação à estimativa calculada no período de amostragem anterior e não mais com relação à uma estimativa de predição.

---

**Algoritmo 4.5** Filtro de Kalman para Sistemas Descritores

---

1: **Inicialização**,  $k = 0$

*Executar um passo do Algoritmo 4.3.*

*Na sequência escolher uma matrix de covariância conveniente.*

*Este procedimento resulta em  $\hat{x}_{0|0}$  e  $P_{0|0}$ .*

2: **para todo** amostra  $k \geq 1$  **fazer**

3: *Ler os dados dos girômetros*

$$u_k = \begin{bmatrix} \omega_{x,k} & \omega_{y,k} \end{bmatrix}^T$$

4: *Ler os dados dos sensores infra-vermelhos*

$$y_k = \begin{bmatrix} d_{1,k} & d_{2,k} & d_{3,k} & d_{4,k} \end{bmatrix}^T$$

5: *Definir as variáveis do sistema Descritor*

$$x_{k-1|k-1}^{sd} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1} \\ c_k \end{bmatrix}, P_{k-1|k-1}^{sd} = \begin{bmatrix} P_{k-1|k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6: *Calcular as matrizes e o vetor linearizados*

$$A(u_k), C(\hat{x}_{k-1|k-1}), e y'_k$$

7: *Definir as matrizes e o vetor do sistema descritor*

$$E_{k+1}, F_k, W, V, H_k, z_k$$

8: *Calcular estimativa utilizando*

$$P_{k|k}^{sd} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k P_{k-1|k-1}^{sd} F_k^T + W_k & 0 & E_{k+1} \\ 0 & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$x_{k|k}^{sd} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k P_{k-1|k-1}^{sd} F_k^T + W_k & 0 & E_{k+1} \\ 0 & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} F_k x_{k-1|k-1}^{sd} \\ z_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

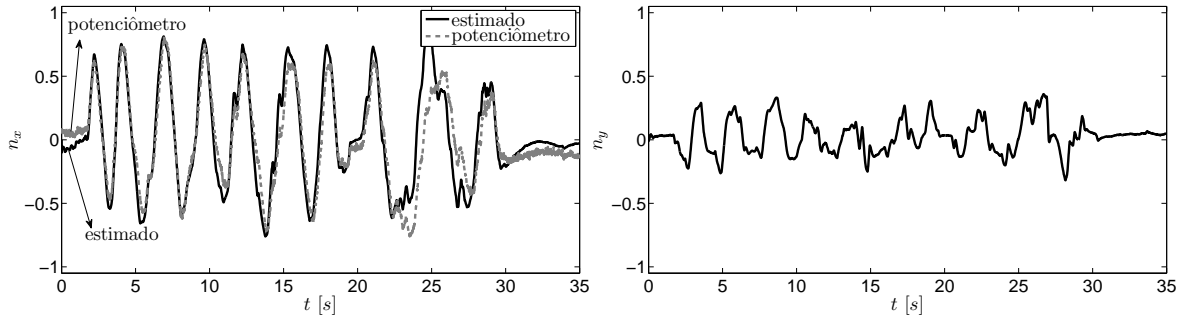
$$\text{Resultando em } \hat{x}_k = \begin{bmatrix} \hat{n}_k^T & \hat{d}_k \end{bmatrix}^T \text{ e } P_k.$$

9: **fim for**

---

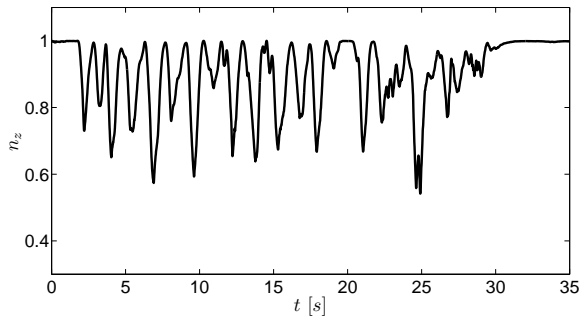
A Figura 4.7 (b) e (c) ilustra o resultado da estimação das componentes  $n_y$  e  $n_z$ . Como afirmado anteriormente, não existe uma base real de comparação para estas estimativas. O que se pode notar é a evolução mais suave de ambas componentes comparado ao estimador de mínimos quadrados, mas não é possível verificar uma diferença com relação à suavidade da evolução com relação do FKMA. Uma diferença, no entanto, é que a amplitude das estimativas para as componentes  $n_y$  e  $n_z$  são menores no FKSD. Neste caso não há como fazer uma afirmação sobre qual filtro obteve resultado mais preciso, devido à falta de um valor real para a comparação destas componentes.

A Figura 4.7 (d) apresenta o resultado da distância  $d_k$  do pé com relação ao solo. Da mesma forma que foi ocorrido com as componentes  $n_y$  e  $n_z$ , não existe uma medição para se tomar como base de comparação das estimativas. Porém, da mesma forma que se pôde perceber com o FKMA, tanto no início quanto no fim do experimento as estimativas  $d_k$  foram

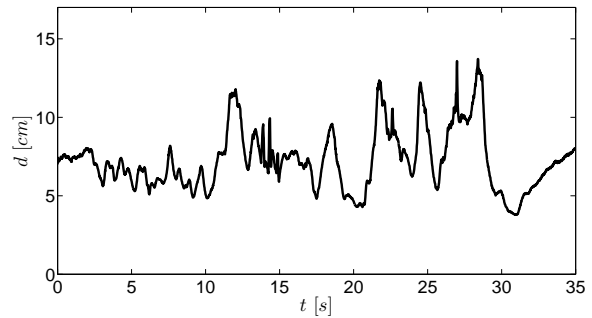


(a) Componente  $n_x$ .

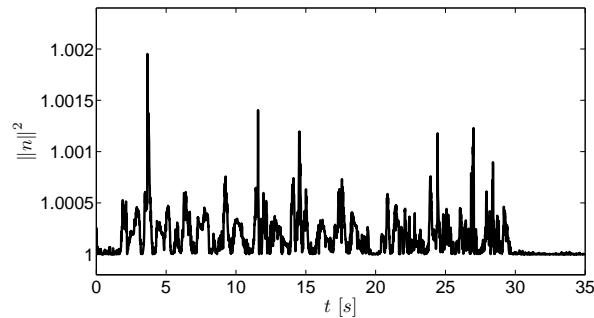
(b) Componente  $n_y$ .



(c) Componente  $n_z$ .



(d) Distância  $d$  em  $cm$ .



(e) Norma do vetor  $n$ .

Figura 4.7: Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Fusão de dados dos girômetros e infra-vermelhos utilizando Filtro de Kalman para Sistemas Descritores

de aproximadamente  $7\text{ cm}$ . Este é um resultado importante, pois tanto no início quanto no final do experimento o pé estava em aproximadamente na mesma posição. E como não houve movimento da tíbia, o estimador não deveria apresentar mudança na estimativa da distância do pé com relação ao solo.

A Figura 4.7 (e) apresenta a evolução da norma do vetor de orientação  $n_k$  durante o experimento. Pode-se verificar que a norma calculada possui um erro menor que 0.2% com relação à norma unitária desejada. Este resultado pode ser considerado bom, pois houve uma linearização com relação à estimativa anterior  $\hat{x}_{k-1|k-1}$ , é um aumento de 10 vezes no erro se comparar com o FKMA.

### 4.3.5 Estimação utilizando Filtro de Kalman Robusto para Sistemas Descritores

Na seção anterior foi apresentada uma aplicação para o método de estimação com restrições a partir do uso do Filtro de Kalman para Sistemas Descritores, em um sistema rescrito a partir do sistema original. No entanto, apesar da solução ter resultado em valores próximos do aferido pelo potenciômetro, houve uma sensível redução na aderência à restrição de norma unitária. Como originalmente o filtro de sistemas descritores foi projetado para sistemas lineares, uma versão linearizada do modelo foi utilizada e esta linearização feita com a estimativa anterior como ponto de operação. Nesta seção é avaliada a utilização de um Filtro de Kalman Robusto para Sistemas Descritores (FKRSD) visando forma a compensar estes erros devido às equações linearizadas.

Da mesma forma que no desenvolvimento do FKSD, o sistema originalmente definido pelas equações (4.11) de modelo, (4.12) de norma unitária e (4.14) de medição, e linearizado resultando em:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(u_k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -T\omega_{y,k} & 0 \\ 0 & 1 & -T\omega_{x,k} & 0 \\ T\omega_{y,k} & T\omega_{x,k} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C(x_k) = \begin{bmatrix} \frac{s_{1,x}}{n_{z,k}} & \frac{s_{1,y}}{n_{z,k}} & \frac{s_{1,x}n_{x,k}+s_{1,y}n_{y,k}}{n_{z,k}^2} & 1 \\ \frac{s_{2,x}}{n_{z,k}} & \frac{s_{2,y}}{n_{z,k}} & \frac{s_{2,x}n_{x,k}+s_{2,y}n_{y,k}}{n_{z,k}^2} & 1 \\ \frac{s_{3,x}}{n_{z,k}} & \frac{s_{3,y}}{n_{z,k}} & \frac{s_{3,x}n_{x,k}+s_{3,y}n_{y,k}}{n_{z,k}^2} & 1 \\ \frac{s_{4,x}}{n_{z,k}} & \frac{s_{4,y}}{n_{z,k}} & \frac{s_{4,x}n_{x,k}+s_{4,y}n_{y,k}}{n_{z,k}^2} & 1 \end{bmatrix} \\ D_k = \begin{bmatrix} 2\hat{n}_{x,k-1|k-1} & 2\hat{n}_{y,k-1|k-1} & 2\hat{n}_{z,k-1|k-1} & 0 \end{bmatrix}, \\ c_k = 1 + \hat{n}_{x,k-1|k-1}^2 + \hat{n}_{y,k-1|k-1}^2 + \hat{n}_{z,k-1|k-1}^2. \end{array} \right.$$

e o sistema descritor é escrito da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{k-1}^{rsd} = \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ d_k \end{bmatrix}, P_{k-1}^{rsd} = \begin{bmatrix} P_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_{k+1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, F_k = \begin{bmatrix} A_k(\hat{x}_{k-1|k-1}) & 0 \\ 0 & I \\ 0 & I \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ H_k = \begin{bmatrix} C(\hat{x}_{k-1|k-1}) & 0 \end{bmatrix}, V = R, z_k = y'_k. \end{array} \right.$$

resultando no seguinte sistema descritor:

$$\begin{aligned} E_{k+1}x_{k+1}^{rsd} &= F_kx_k^{rsd} + w_k^{rsd} \\ z_k &= H_kx_k^{rsd} + v_k^{rsd} \end{aligned}$$

O acréscimo de incertezas é baseado nas seguintes premissas:

1. A estimativa de orientação  $\hat{n}_{k+1}$  não é igual ao estado  $n_{k+1}$ , portanto a matriz  $E_{k+1}$  do sistema descritor será representada por uma matriz nominal, além de ser acrescida de uma incerteza associada, resultando na forma

$$(E_{k+1} + \delta E_{k+1}).$$



e a incerteza  $\delta E_{k+1}$  é escolhida de forma a considerar uma região na qual se espera que os estados  $n_{k+1}$  estejam localizados. Desta forma, deseja-se que os estados desta região resultem o mais próximo da norma unitária (4.12).

2. As medições dos girômetros podem ser aferidas com erros de escala, viés e com ruído proveniente da conversão analógica-digital. Por conseguinte, a matriz de processo  $F_k$  é substituída pela matriz nominal, acrescida de uma incerteza associada

$$(F_k + \delta F_k)$$

com a incerteza  $\delta F_k$  responsável por considerar a região de possíveis  $F(u_k)$ .

3. A matriz de medição  $H_k$  é uma forma linearizada de (4.14), portanto os erros de linearização são incorporados nas incertezas  $\delta H_k$  na forma

$$(H_k + \delta H_k).$$

que permitem rescrever o sistema acrescido das incertezas como

$$\begin{aligned} (E_{k+1} + \delta E_{k+1})x_{k+1}^{rsd} &= (F_k + \delta F_k)x_k^{rsd} + w_k^{rsd} \\ z_k &= (H_k + \delta H_k)x_k^{rsd} + v_k^{rsd} \end{aligned}$$

com as incertezas escritas da forma:

$$\delta E_k = M_{e,k} \Delta_k N_{e,k}, \quad \delta F_k = M_{f,k} \Delta_k N_{f,k}, \quad \delta H_k = M_{h,k} \Delta_k N_{h,k}$$

com:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{d,i} = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 10^{-6} & 10^{-6} & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{a,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 2.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^{-4} \\ M_{f,i} = \begin{bmatrix} M_{a,i} & 0_{4 \times 1} & 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \\ 0_{1 \times 4} & 0 & M_{d,i} & 0_{1 \times 4} \\ 0_{1 \times 4} & 0 & 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 4} \end{bmatrix}, \quad M_{h,i} = 10^{-2} \begin{bmatrix} 1_{4 \times 3} & 0_{4 \times 2} \end{bmatrix} \\ N_{e,i} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{1 \times 4} & 1 \\ I_4 & 0_{4 \times 1} \\ 0_{4 \times 4} & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{f,i} = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \\ 0_{1 \times 4} & 0 \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 1} \\ 0_{4 \times 4} & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{h,i} = I_5 \end{array} \right.$$

A escolha destas matrizes é feita a partir de uma análise dos erros. No entanto não existe uma forma definida para se fazer esta escolha, pois as matrizes  $M_{i,i}$  e  $N_{i,i}$  podem ter dimensões quaisquer. Apenas o resultado do produto  $M_{i,i} \Delta N_{i,i}$  deve ter a dimensão correta.

A inicialização do método é feito da mesma forma que para o FKSD e para o FKMA, executando uma etapa do estimador de mínimos quadrados não-linear (Algoritmo 4.3), que

---

**Algoritmo 4.6** Filtro de Kalman Robusto para Sistemas Descritores
 

---

1: **Inicialização**,  $k = 0$

Definir  $\lambda = 50$ .

Executar um passo do Algoritmo 4.3.

Na sequência escolher uma matriz de covariância conveniente.

**Este procedimento resulta em**  $\hat{x}_{0|0}$  e  $P_{0|0}$ .

2: **para todo** amostra  $k \geq 1$  **fazer**

3: Ler os dados dos girômetros

$$u_k = \begin{bmatrix} \omega_{x,k} & \omega_{y,k} \end{bmatrix}^T$$

4: Ler os dados dos sensores infra-vermelhos

$$y_k = \begin{bmatrix} d_{1,k} & d_{2,k} & d_{3,k} & d_{4,k} \end{bmatrix}^T$$

5: Definir as variáveis do sistema Descritor

$$x_{k-1|k-1}^{sd} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1|k-1} \\ c_k \end{bmatrix}, \quad P_{k-1|k-1}^{sd} = \begin{bmatrix} P_{k-1|k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6: Calcular as matrizes e o vetor linearizados

$$A(u_k), C(\hat{x}_{k-1|k-1}), e y'_k$$

7: Definir as matrizes e o vetor do sistema descritor

$$E_{k+1}, F_k, W, V, H_k, z_k$$

8: Calcular as matrizes do FKRS

$$\hat{E}_{k+1}, \hat{F}_k, \mathcal{W}, \mathcal{V}, \hat{H}_k, \mathcal{Z}_k$$

9: Calcular estimativa utilizando

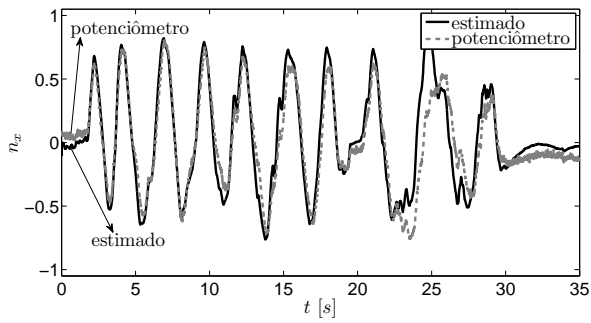
$$P_{k|k}^{rsd} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_k P_{k-1|k-1}^{rsd} \hat{F}_k^T + \mathcal{W}_k & 0 & \hat{E}_k \\ 0 & \mathcal{V}_k & \hat{H}_k \\ \hat{E}_{k+1}^T & \hat{H}_k^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$x_{k|k}^{rsd} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_k P_{k-1|k-1}^{rsd} \hat{F}_k^T + \mathcal{W}_k & 0 & \hat{E}_{k+1} \\ 0 & \mathcal{V}_k & \hat{H}_k \\ \hat{E}_{k+1}^T & \hat{H}_k^T & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \hat{F}_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{rsd} \\ \mathcal{Z}_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

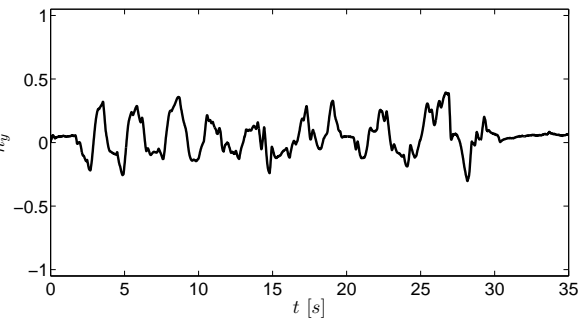
Resultando em  $\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \hat{n}_k^T & \hat{d}_k \end{bmatrix}^T$  e  $P_k$ .

10: **fim for**

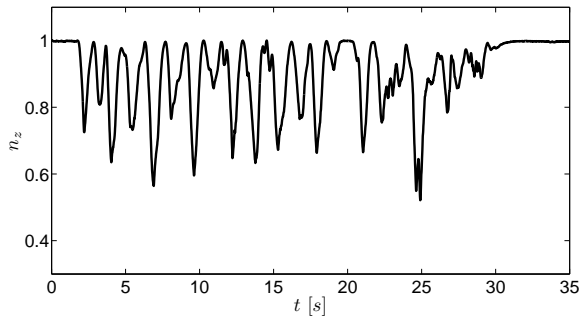
---



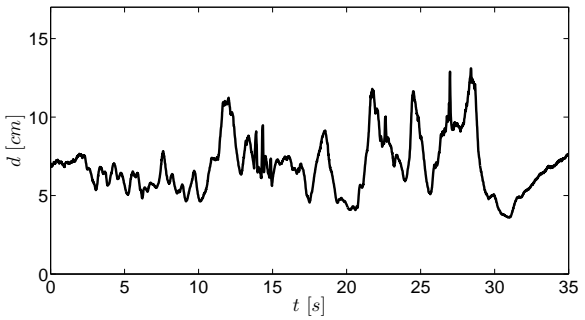
(a) Componente  $n_x$ .



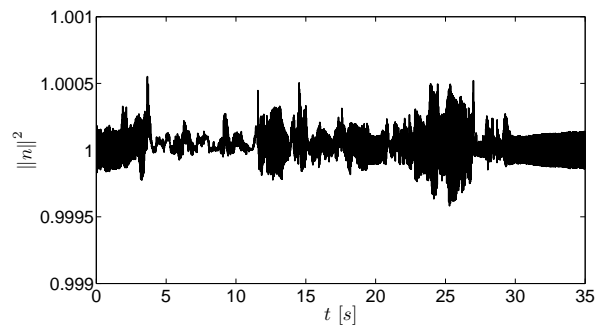
(b) Componente  $n_y$ .



(c) Componente  $n_z$ .



(d) Distância  $d$  em  $cm$ .



(e) Norma do vetor  $n$ .

Figura 4.8: Estimação de orientação do pé com relação ao solo – Fusão de dados dos girômetros e infra-vermelhos utilizando Filtro de Kalman Robusto para Sistemas Descritores

resulta em  $\hat{x}_{0|0}$  e uma matriz conveniente  $\Sigma_0$  deve ser escolhida. Este método é apresentado de forma resumida no Algoritmo 4.6. E os resultados da aplicação deste método são apresentados na Figura 4.8.

A Figura 4.8 (a) apresenta a evolução da componente estimada  $n_x$  e a projeção baseada nas medições feitas pelo potenciômetro correspondente. Como visto até agora nos resultados baseados em fusão de dados, a estimativa  $\hat{n}_x$  é bem próxima do medido pelo potenciômetro até os 25 s. Após este instante os problemas dos girômetros e infra-vermelhos tornam-se evidentes, pois a estimativa se distancia de forma considerável. Por volta de 29 s o estimador é capaz recuperar destes erros e seu resultado continua próximo da projeção medida até o final do experimento. Além da robustez com relação à incerteza dos parâmetros, este estimador se mostrou relativamente robusto aos erros de medição. Entretanto, como ocorrido no caso do FKSD, foi necessário um tempo maior para se recuperar destes erros. Este entrave pode ser relacionado à linearização calculada com relação à estimativa do período de amostragem anterior e não com respeito à predição.

As Figuras 4.7 (b) e (c) ilustram o resultado da estimação das componentes  $n_y$  e  $n_z$ . Como afirmado anteriormente, não existe uma base real de comparação para estas estimativas. Visualmente não houve muita diferença entre a estimativa utilizando FKSD e o FKRS. Com relação ao FKMA, existe uma redução na amplitude das componentes  $n_y$  e  $n_z$ . Neste caso não há como se fazer uma afirmação sobre qual filtro obteve resultado mais preciso, devido à falta de um valor real para a comparação destas componentes.

A Figura 4.7 (d) apresenta o resultado da distância  $d_k$  do pé com relação ao solo. Igualmente às componentes  $n_y$  e  $n_z$ , não existe uma medição para se tomar como base de comparação das estimativas. Porém, tanto no início quanto no fim do experimento, às estimativas  $d_k$  foram aproximadamente 7 cm. E como não houve movimento da tíbia, o estimador não deveria apresentar mudança na estimativa da distância do pé com relação ao solo.

A Figura 4.7 (e) apresenta a norma do vetor de orientação  $n_k$ . Pode-se verificar que a norma calculada possui um erro inferior a 0,05% com relação ao resultado desejado de norma unitária. Ao final da aplicação constata-se uma evolução na aderência à norma unitária, Comparando com o FKMA, o erro máximo de aderência à norma dobrou, porém este foi reduzido a um quarto com relação ao FKSD. Este resultado é excelente, devido ao fato da linearização ter sido realizada com relação à estimativa anterior  $\hat{x}_{k-1|k-1}$ .

#### 4.4 DISCUSSÃO

Este capítulo apresenta uma aplicação da teoria de estimação com restrições descrita no Capítulo 2, na área de robótica de reabilitação. Foi proposto um sistema de instrumentação de forma a realizar estimação da postura do pé de uma prótese robótica de perna com respeito ao solo. Foram implementados um total de seis métodos para se resolver este problema e os

resultados foram apresentados.

Os dois primeiros métodos consistiram na utilização de sensores girômetros para estimação da orientação do pé. Entretanto, utilizando somente os girômetros não é possível obter uma estimativa para a distância do pé com relação ao solo. Primeiramente verificou-se que as estimativas geradas utilizando somente os sensores girômetros são inconsistentes, pois muitas vezes uma única componente foi observada com valor maior que a unidade. Este fato é absurdo, pois o vetor resultante deve ser unitário. Houve um avanço na estimação quando foi empregada a restrição de norma unitária a partir do Filtro de Kalman Projetado. Contudo, a melhoria proveniente da utilização da restrição não foi suficiente para se obter valores consistentes com o aferido pela potenciômetro na componente  $n_x$ . Estes erros podem ter ocorrido devido à erros de escala e viés na medição dos girômetros. Como não houve a utilização de sensores exteroceptivos para a correção das estimativas, estas divergiram em muito do esperado.

O terceiro método consistia na utilização de um estimador baseado no método dos mínimos quadrados não-linear (MMNL). Este método utiliza informação proveniente somente dos sensores infra-vermelhos. As estimativas fornecidas por este método foram extremamente ruidosas comparando-se com o aferido pelo potenciômetro e também pelos dois primeiros métodos utilizando sensores girômetros. No entanto, a partir do emprego deste método, pode-se estimar todos os estados da postura, ou seja, orientação e distância do pé com relação ao solo. Logo, a partir da fusão de dados dos sensores girômetros e infra-vermelhos, espera-se obter uma resposta mais precisa.

O filtro de Kalman de medições aumentadas (FKMA) foi o primeiro estimador testado que utiliza fusão de dados dos sensores girômetros e infra-vermelhos. Este método utiliza a informação proveniente dos sensores girômetros para fazer a predição da orientação do pé e na sequencia os sensores infra-vermelhos são utilizados para fazer a fusão com a estimativa fornecida pela predição. No que tange às componentes do vetor de orientação, os resultados foram muito mais suaves se comparados aos resultados obtidos pelo estimador utilizando MMNL. O resultado para a componente  $n_x$  esteve sempre mais identificado com a projeção medida pelo potenciômetro, fato que é evidenciado em torno dos 23 s. Ao invés de se obter grandes ruídos como o MMNL, o resultado do FKMA foi um pequeno deslocamento que pode ser corrigido em pouco tempo.

O quinto método utilizado baseou-se na transformação de um sistema com restrições de estados em sistema descritor, apresentado na Seção 3.1. Como a estimação da orientação do pé com relação ao solo é um caso não-linear, uma versão linearizada do sistema foi implementada. No caso de sistemas descritores, a informação dos sensores girômetros e dos sensores infra-vermelhos são utilizados na mesma etapa, resultando em uma estimativa após a utilização do filtro de Kalman para sistemas descritores (FKSD). Como ocorrido para o FKMA, as componentes estimadas de orientação evoluíram de forma mais suaves que quando comparadas às componentes do MMNL. Houve pequena diferença visual na

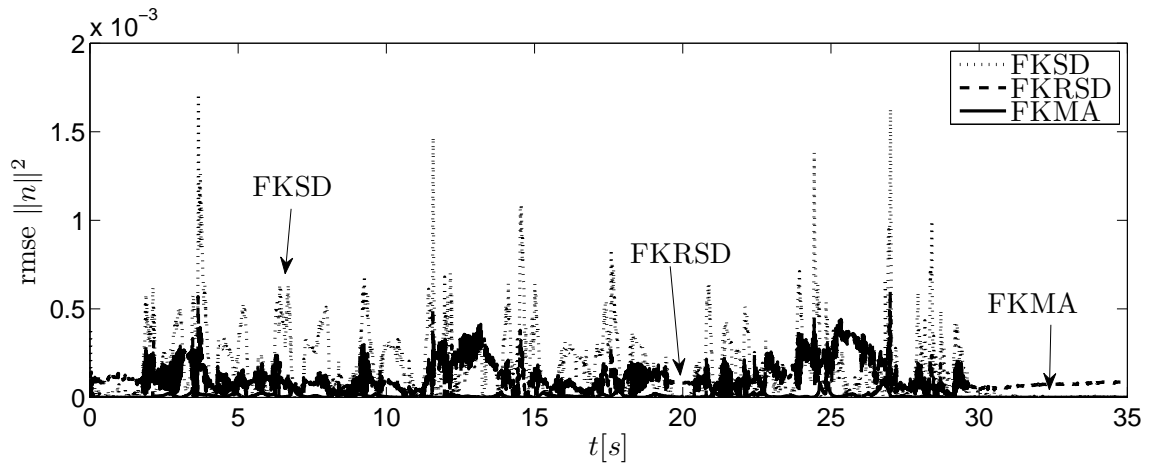
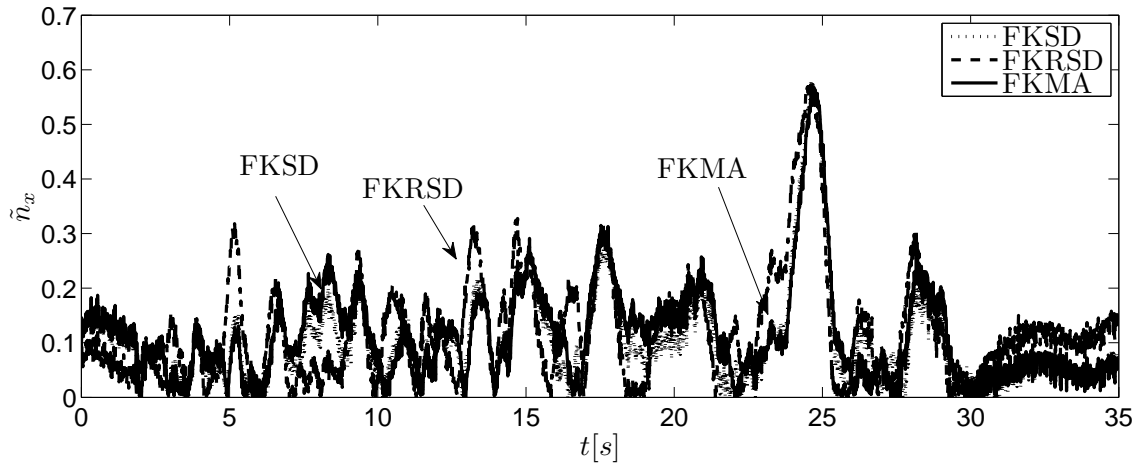


Figura 4.9: Erros de estimação da norma  $\|n\|^2$  para estimadores baseados em filtro de Kalman

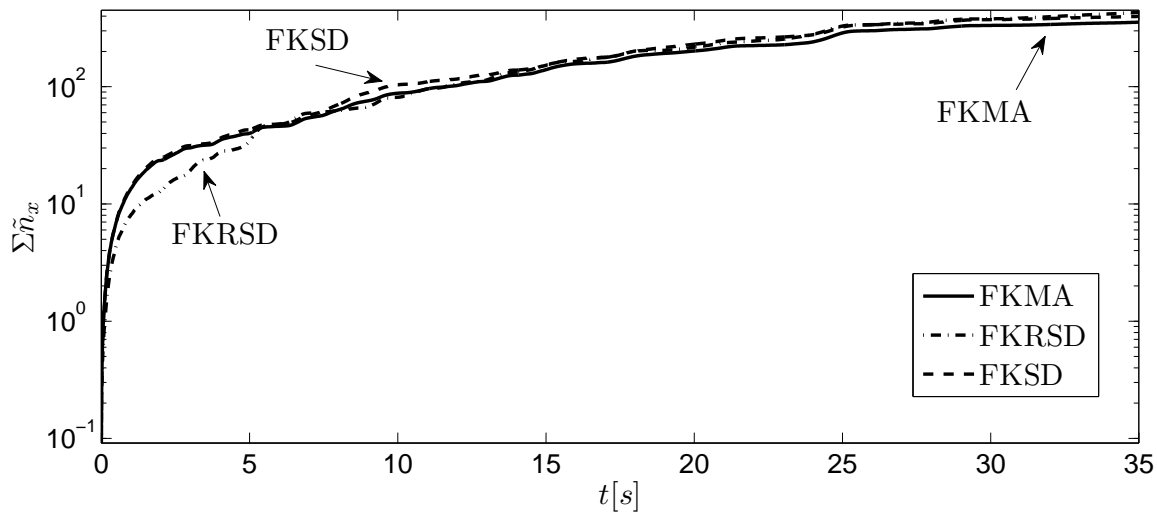
estimação das componentes  $n_y$  e  $n_z$  dos estimadores baseados em fusão de dados, porém não pode-se dizer qual obteve resultado mais acurado, visto que não há uma base real para se comparar com o resultado obtido para estas componentes. A principal diferença entre o FKMA e o FKSD diz respeito ao nível de aderência à restrição. Na aplicação do FKSD a restrição foi menos respeitada do que no FKMA.

O último método implementado também utilizou a transformação do sistema com restrições de estados em um sistema descritor. Da mesma forma que no FKSD, foi utilizada uma versão linearizada do sistema. Contudo a estimativa era fornecida pelo filtro de Kalman robusto para sistemas descritores (FKRS). Por inferência, foi feita a escolha de valores razoáveis para as matrizes associadas às incertezas, e então o FKRS foi utilizado. Os resultados obtidos foram visualmente similares aos obtidos pelo FKSD, porém verificou-se que o nível de aderência à restrição aumentou. Entretanto o nível de aderência continuou menor do que o apresentado pelo FKMA.

Foram apresentados os resultados de cada estimador, porém, esta apresentação em separado permite apenas uma avaliação visual superficial de cada método. De forma a melhor comparar os métodos baseados em filtro de Kalman, a Figura 4.9 apresenta superpostos o erro médio quadrático das normas calculadas a partir das estimativas do FKMA, FKSD e FKRS e a unidade, enquanto a Figura 4.10 apresenta superpostos o erro de estimação da componente da orientação do pé  $n_x$  a partir das estimativas do FKMA, FKSD e FKRS com a projeção dada pela medição de um potenciômetro posicionado no tornozelo da prótese. Com a análise da Figura 4.9, pode-se concluir que a norma calculada a partir das estimativas do FKMA é de fato muito menor que as normas resultantes da estimação utilizando sistemas descritores. Contudo, é nítida a grande redução do erro da norma com o emprego do FKRS com relação ao FKSD. Durante quase todo o experimento, este erro é pelo menos metade do erro apresentado pelo FKSD. Quanto ao erro de estimação da componente  $n_x$ , pode-se verificar a partir da Figura 4.10 (a) que as três componentes possuem erros similares até por



(a) Erro instantâneo



(b) Erro acumulado

Figura 4.10: Comparativo dos erros de estimação da componente  $n_x$  para estimadores baseados em filtro de Kalman.

25 s, quando pode-se constatar um erro de medição nos sensores girômetros e nos sensores infra-vermelhos. Neste instante a diferença entre os três estimadores torna-se evidente. O FKMA possui menor erro com relação à projeção, seguido pelo FKRSD e por último o FKSD. Esta vantagem do FKMA com relação aos filtros baseados em sistemas descritores deve-se ao momento que a linearização é realizada. A linearização no FKMA é feita após a predição e esta linearização posterior garante convergência mais rápida para este filtro. Entretanto, mesmo com uma linearização realizada de forma prematura, os filtros baseados em sistemas descritores foram capazes de se recuperar dos erros de medição, tanto dos sensores infra-vermelhos, quanto girômetros. A Figura 4.10 (b) ilustra o erro acumulado de estimação de cada filtro. Para os três filtros pode-se observar que o erro acumulado é bem próximo durante todo o experimento. Nos filtros baseados em sistemas descritores o erro é menor até os 25 s, mas como visto anteriormente, o FKMA recuperou-se dos erros de medição mais rapidamente que os outros filtros, resultando então no filtro com menor erro acumulado.

Ao final deste capítulo constata-se, para este problema em específico, que a utilização do FKMA é melhor do que as implementações baseadas em sistemas descritores FKSD e FKRS. Contudo os resultados corroboram a proposição que sistemas com restrições podem ser escritos na forma apresentada pela Seção 3.1. A principal vantagem desta modificação é a possibilidade de utilização de um filtro robusto que pode reduzir fortemente o erro de estimação em sistemas com incertezas de parâmetros.





## 5 LOCALIZAÇÃO E MAPEAMENTO SIMULTÂNEOS

*“Life is like a box of chocolates...  
You never know what you’re gonna get.”  
Forrest Gump*

Este trabalho segue como uma complementação do desenvolvimento de Borges [34] que utiliza a abordagem de mapas geométricos. A arquitetura utilizada para resolver este problema é apresentada na Figura 5.1. Este capítulo propõe contribuições em duas frentes: (i) nova forma de se realizar a localização do robô, dado um mapa global, (ii) nova forma de se tratar a fusão de dados com restrições dado que a correlação entre as medições é desconhecida. A solução original de localização foi proposta de forma *ad-hoc*, portanto este trabalho busca um embasamento probabilístico para a solução de localização. Originalmente, foi definida uma função de custo que é resolvida utilizando o método dos mínimos quadrados ponderados (MQP). Após o cálculo da estimativa utilizando (MQP), a fusão da informação com a estimativa *a priori* é realizada utilizando o filtro de Kalman. No entanto, apesar desta solução ser muito semelhante com a proposta nesta dissertação, não há nenhum embasamento teórico sobre a função de custo e sobre o motivo de se realizar fusão de dados desta maneira. Estes pontos serão justificados e discutidos na seção seguinte, de forma que será apresentado como um método embasado na teoria de estimação Bayesiana. Mesmo o algoritmo original sendo relativamente antigo sua análise é interessante, pois este ainda é estudado em trabalhos recentes [31]. Fora destas duas contribuições, todo o procedimento de SLAM utilizado é o mesmo que está descrito no documento do trabalho motivador, portanto neste manuscrito serão explicadas somente as contribuições aqui propostas. Para maiores informações sobre qualquer um dos outros módulos o leitor é direcionado para [34].

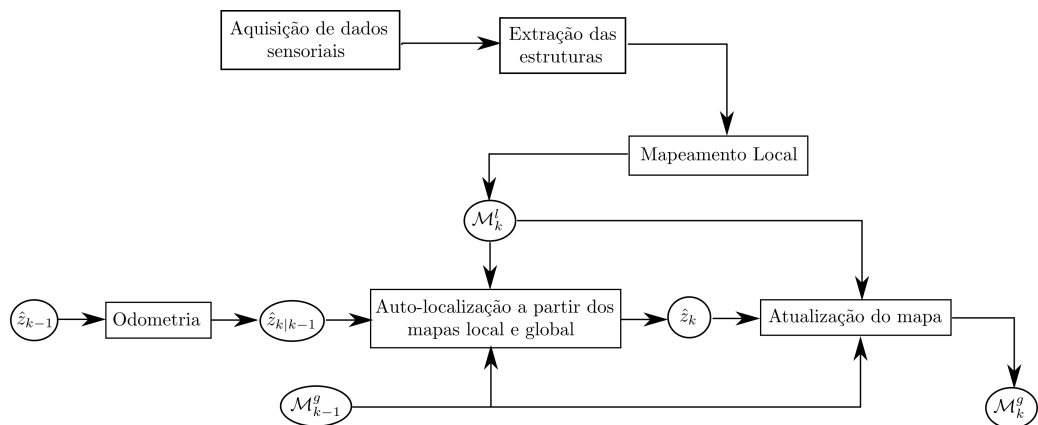


Figura 5.1: Estrutura da arquitetura utilizada na solução do problema de SLAM.  $z$  representa a postura (posição e direção) do robô ao passo que  $\mathcal{M}$  representa um mapa.

## 5.1 AUTO-LOCALIZAÇÃO

Em se tratando da linguagem probabilística, a localização pode ser caracterizada como o processo de se determinar probabilidade de um robô ser encontrado com uma certa postura  $z_k$ , dado medições dos sensores. Na prática, pode ser muito complicado descrever todas as influências das medições dos sensores e da integração das posições medidas durante todo o tempo de funcionamento do robô. Em vez de tentar descrever todas estas influências, pode-se escrever a seguinte função densidade de probabilidade

$$p(z_k | u_{1:k-1}, \mathcal{M}_{1:k}^l, \mathcal{M}^g) \quad (5.1)$$

em que  $u_{1:k-1} = \{u_1, \dots, u_k\}$  é o conjunto de entradas de controle dos instantes 1 até  $k - 1$  aplicadas ao robô,  $\mathcal{M}_{1:k}^l = \{\mathcal{M}_1^l, \dots, \mathcal{M}_k^l\}$  é o conjunto de mapas locais medidos pelo robô dos instantes 1 até  $k - 1$  e  $\mathcal{M}^g$  o mapa global. Pode-se utilizar o Teorema de Bayes para reescrever (5.1) resultando em

$$p(z_k | u_{1:k-1}, \mathcal{M}_{1:k}^l, \mathcal{M}^g) = \frac{p(\mathcal{M}_k^l | z_k, \mathcal{M}^g) p(z_k | u_{1:k-1}, \mathcal{M}_{1:k-1}^l, \mathcal{M}^g)}{p(\mathcal{M}_k^l | u_{1:k-1}, \mathcal{M}_{1:k-1}^l, \mathcal{M}^g)} \quad (5.2)$$

em que  $p(\mathcal{M}_k^l | z_k, \mathcal{M}^g)$  é a função de verossimilhança,<sup>1</sup>  $p(z_k | u_{1:k-1}, \mathcal{M}_{1:k-1}^l, \mathcal{M}^g)$  se refere à densidade *a priori* e  $p(\mathcal{M}_k^l | u_{1:k-1}, \mathcal{M}_{1:k-1}^l, \mathcal{M}^g)$  é a constante de normalização.

Sabe-se que em mapas geométricos, o mapa local  $\mathcal{M}_k^l$  consiste de  $h_{1:N} = \{h_1, \dots, h_N\}$  elementos geométricos e estes se referem a  $f_{1:N} = \{f_1, \dots, f_N\}$  elementos geométricos do mapa global  $\mathcal{M}^g$ . Assume-se que as observações de quaisquer dois elementos  $h_i$  e  $h_j$  com  $i \neq j$  são eventos descorrelacionados. Pode-se realizar tal consideração, pois o método de estimação do mapa proposto em [34], que é o mesmo utilizado aqui, é realizado a partir da intersecção de covariâncias que resulta em elementos geométricos cuja matriz de covariâncias é majorada como forma de desconsiderar as correlações cruzadas. Um outro ponto é a correspondência de elementos dos mapas local e global. Se por ventura alguns elementos locais não possuam correspondência no mapa global, estes não são considerados no cálculo da estimativa. Baseado nestas premissas, pode-se reescrever a função de verossimilhança

$$p(\mathcal{M}_k^l | z_k, \mathcal{M}^g) = \prod_{i=1}^N p(h_i | z_k, f_i). \quad (5.3)$$

É conhecido que estimadores Bayesianos podem ser escritos na forma recursiva [73, 85–87]. No entanto esta solução pode ser difícil ou até mesmo impossível para casos não-lineares. Porém, se a função de verossimilhança for não-linear, mas resultar em uma distribuição Gaussiana, a distribuição *a posteriori* pode ser calculada de forma fechada a partir de uma soma ponderada da solução de máxima verossimilhança e da solução *a priori* [86].

---

<sup>1</sup>Esta distribuição quando escrita em sua forma completa seria  $p(\mathcal{M}_k^l | z_k, u_{1:k-1}, \mathcal{M}_{1:k-1}^l, \mathcal{M}^g)$ . No entanto nem as entradas de controle  $u_{1:k-1}$ , nem os mapas anteriores  $\mathcal{M}_{1:k-1}^l$  possuem influência na verossimilhança da postura  $z_k$  com relação ao mapa local  $\mathcal{M}_k^l$ . Desta forma, reescrever a distribuição de verossimilhança como  $p(\mathcal{M}_k^l | z_k, \mathcal{M}^g)$  é, de fato, razoável.

Portanto, considerando que a solução de (5.2) resulta em uma distribuição bem aproximada por uma distribuição gaussiana, pode-se desenvolver um estimador recursivo fundamentado na solução do problema de máxima verossimilhança de (5.3) e na fusão com dados provenientes da estimativa *a priori*. Pode-se debater que, em alguns casos, a distribuição de verossimilhança pode ser multimodal. Portanto, esta distribuição não poderia ser aproximada por uma Gaussiana, contudo, se ambas as modas puderem ser descritas como distribuições gaussianas e se a distribuição *a priori* estiver relativamente próxima de somente uma moda, tem-se que a distribuição *a posteriori* também pode ser aproximada por uma gaussiana e que esta pode ser bem representada pela soma ponderada da estimativa *a priori* e da estimativa de máxima verossimilhança mais próxima desta moda. Utilizando esta formulação, nas próximas seções são descritos os passos necessários para se realizar esta tarefa de estimação de postura além de resultados baseados em simulação e em dados reais coletados pelo robô Omni em [34].

### 5.1.1 Solução para o problema de máxima verossimilhança

No apêndice B são apresentados conceitos básicos de robótica móvel com a descrição da postura de um robô, os tipos de elementos geométricos e a forma de rotação de um elemento escrito na forma unificada. Assim, a distribuição de verossimilhança para cada elemento geométrico pode ser escrita com base na representação unificada como

$$p(h_i|z_k, f_i) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( h_i - R(\theta_k)(f_i - E_i v_k) \right)^T P_{h,i}^{-1} \left( h_i - R(\theta_k)(f_i - E_i v_k) \right) \right\} \quad (5.4)$$

em que  $R(\theta_k)$  apresenta a matriz de rotação para um certo ângulo de orientação  $\theta_k$ ,  $v_k$  representa uma posição do robô no espaço,  $h_i$  representa um elemento geométrico no mapa local,  $P_{h,i}$  é a matriz de covariâncias deste elemento do mapa local,  $f_i$  um elemento no mapa global e  $E_i$  é uma matriz conhecida para elementos do tipo reta ou do tipo ponto. então a solução do máximo de verossimilhança é dado por

$$\hat{z}_k^{\text{mv}} = \arg \max_{z_k} p(\mathcal{M}_k^l | z_k, \mathcal{M}^g) = \arg \max_{z_k} \prod_{i=1}^N p(h_i | z_k, f_i) \quad (5.5)$$

que é equivalente a solução do seguinte problema de minimização:

$$\hat{z}_k^{\text{mv}} = \min_{z_k} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( E_i v_k + R(\theta_k)^T h_i - f_i \right)^T R(\theta_k)^T P_{h,i}^{-1} R(\theta_k) \left( E_i v_k + R(\theta_k)^T h_i - f_i \right)$$

como forma de simplificação dos resultados, considera-se que a matriz de covariâncias  $P_{h,i}$  de cada elemento geométrico  $h_i$  pode ser escrita na forma  $P_{h,i} = \sigma_{h,i}^2 I_2$

$$\hat{z}_k^{\text{mv}} = \min_{z_k} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} \left( E_i v_k + R(\theta_k)^T h_i - f_i \right)^T \left( E_i v_k + R(\theta_k)^T h_i - f_i \right). \quad (5.6)$$

Pode-se então definir as seguintes variáveis auxiliares:

$$\beta = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}^T, \text{ e } H_i = \begin{bmatrix} h_{x,i} & -h_{x,i} \\ h_{y,i} & h_{y,i} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

a minimização de (5.6) pode ser reescrita no seguinte problema

$$\hat{z}_k^{\text{mv}} = \min_{v_k, \beta_k} J(v_k, \beta_k) = \min_{v_k, \beta_k} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} (E_i v_k + H_i \beta_k - f_i)^T (E_i v_k + H_i \beta_k - f_i) \quad (5.8)$$

sujeito a  $\beta_k^T \beta_k = 1$ , e  $\theta_k = \arctan(b_2/b_1)$ . Tem-se que, neste problema, os mínimos locais são dados pelas seguintes condições:

$$\frac{\partial J(v_k, \beta_k)}{\partial v_k} = 0, \quad \frac{\partial J(v_k, \beta_k)}{\partial \beta_k} = 0 \quad (5.9)$$

e também

$$\frac{\partial^2 J(v_k, \beta_k)}{\partial v_k \partial v_k^T} > 0, \quad \frac{\partial^2 J(v_k, \beta_k)}{\partial \beta_k \partial \beta_k^T} > 0, \quad (5.10)$$

Pelas condições (5.9), obtém-se o seguinte sistema de equações matriciais:

$$\begin{cases} M v_k = q - N \beta_k \\ W \beta_k = r - N^T v_k \end{cases} \quad (5.11)$$

em que as matrizes são definidas como

$$M = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} E_i E_i, \quad N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} E_i H_i, \quad W = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} H_i^T H_i, \\ q = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} E_i f_i, \quad r = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} H_i^T f_i.$$

Se a matriz  $M$  e o termo  $W - N^T M^{-1} N$  forem invertíveis, a solução para a postura de máxima verossimilhança  $\hat{z}_k^{\text{mv}} = \begin{bmatrix} (\hat{v}_k^{\text{mv}})^T & \hat{\theta}_k^{\text{mv}} \end{bmatrix}$  é dada de forma direta pelas seguintes equações

$$\hat{\beta}_k = (W - N^T M^{-1} N)^{-1} (r - N^T M^{-1} q) = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & \hat{b}_2 \end{bmatrix}^T \quad (5.12)$$

$$\hat{v}_k^{\text{mv}} = M^{-1} (q - N \hat{\beta}_k) \quad (5.13)$$

$$\hat{\theta}_k^{\text{mv}} = \arctan(\hat{b}_2/\hat{b}_1). \quad (5.14)$$

Pela definição de  $M$  e  $W$ , a solução de  $\hat{z}_k^{\text{mv}}$  leva as condições (5.10) a serem satisfeitas diretamente. Como foi obtida somente uma solução, esta sempre será a solução de mínimo global, equivalente a solução para postura  $\hat{z}_k^{\text{mv}}$  de máxima verossimilhança. No entanto, problemas de condicionamento numérico podem aparecer quando a matriz  $M$  ou o termo  $W - N^T M^{-1} N$  forem singulares, estes problemas ocorrem devido à simetria do mapa local obtido e dependendo do caso pode-se obter duas ou infinitas soluções para a postura. Estes casos podem ser divididos em quatro e serão analisados na sequência.

**Caso 1.** Solução com dois máximos de ângulos. Este caso ocorre quando a matriz  $M$  é invertível, no entanto o termo  $W - N^T M^{-1} N$  é singular mas diferente de zero. Neste caso a solução (5.12) não pode ser calculada desta forma. Uma opção é calcular as soluções utilizando a pseudo-inversa  $(W - N^T M^{-1} N)^\dagger$  desenvolvida a partir da decomposição em valores singulares (SVD). A SVD é uma decomposição de matrizes que resulta em

$$(W - N^T M^{-1} N) = USV^T,$$

e a pseudo-inversa é escrita como

$$(W - N^T M^{-1} N)^\dagger = VS'U^T$$

em que os elementos da diagonal de  $S'$  são iguais ao inverso dos elementos da diagonal de  $S$ , exceto pelos elementos que possuem valor zero, ou próximos de zero na resolução de ponto flutuante. Portanto todas as soluções possíveis de  $\hat{\beta}_k$  podem ser escritas de acordo com a seguinte parametrização em função de  $\lambda \in \mathbb{R}$  [88, Seção 2.6]

$$\hat{\beta}_k(\lambda) = \xi + \lambda\omega \quad (5.15)$$

em que

$$\xi = (W - N^T M^{-1} N)^{-1}(r - N^T M^{-1} q)$$

e  $\omega$  é o vetor coluna de  $V$  que corresponde ao valor singular de  $S$ . No entanto a solução (5.15) proposta considera todas as soluções para  $\hat{\beta}_k$  com qualquer norma, não considerando somente as soluções de  $\hat{\beta}_k$  com norma unitária. Estas soluções com norma unitária são dadas por (5.15) com  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  sendo os zeros do seguinte polinômio

$$a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (5.16)$$

em que  $a_1 = \omega^T \omega$ ,  $a_2 = \omega^T \xi$ , e  $a_3 = \xi^T \xi - 1$ . Portanto a partir das duas soluções  $\hat{\beta}_k(\lambda_1)$  e  $\hat{\beta}_k(\lambda_2)$  obtidas, verifica-se o ângulo  $\theta_k$  que possui menor distância com relação à estimativa *a priori*  $\theta_{k|k-1}$ . Na sequência é possível calcular a estimativa para posição  $\hat{v}_k^{\text{mv}}$  utilizando (5.13) e estimativa de máxima verossimilhança da postura é dada por  $\hat{z}_k^{\text{mv}} = \left[ (\hat{v}_k^{\text{mv}})^T \quad \hat{\theta}_k^{\text{mv}} \right]^T$ .

**Caso 2** (Solução com infinitos máximos de posição). Este caso ocorre quando a matriz  $M$  é singular, e a matriz  $W - N^T M^+ N$  é invertível. Neste caso, não se pode calcular a inversa de  $M$ , portanto utiliza-se a SVD para calcular a pseudo-inversa  $M^\dagger$  e de forma análoga ao que foi realizado para obter as soluções de  $\beta$  no Caso 1, a partir de (5.13), pode-se escrever todas as soluções possíveis para a posição  $v_k$  como a seguinte parametrização em função de  $\delta \in \mathbb{R}$

$$\hat{v}_k^{\text{mv}}(\delta) = M^{-1}(q - N\hat{\beta}_k) + \delta v \quad (5.17)$$

em que  $v$  é o vetor coluna de  $V$  que corresponde ao valor singular de  $S$ . A solução  $\delta = 0$  corresponde à posição mais próxima da origem. Neste caso, para o qual a matriz  $W - N^T M^+ N$  é invertível, tem-se somente uma solução de ângulo para todas as posições resultantes da parametrização (5.17), então a solução para o ângulo de máxima verossimilhança é dada por uma modificação de (5.12) de forma a considerar a pseudo-inversa  $M^\dagger$ , resultando em

$$\hat{\beta}_k = (W - N^T M^\dagger N)^{-1} (r - N^T M^{-1} q) \quad (5.18)$$

contudo a solução de máxima verossimilhança para postura é dada por aquela com menor distância com relação à estimativa *a priori*  $v_{k|k-1}$ . Sendo assim, a estimativa de verossimilhança é dada pelo seguinte parâmetro

$$\delta = \frac{v^T (v_{k|k-1} - \hat{v}_k^{\text{mv}}(0))}{v^T v}, \quad (5.19)$$

Na sequência, é possível calcular a estimativa para a posição  $\hat{v}_k^{\text{mv}}$ . Utilizando (5.17) e estimativa de máxima verossimilhança da postura é dada por  $\hat{z}_k^{\text{mv}} = \left[ (\hat{v}_k^{\text{mv}})^T \quad \hat{\theta}_k^{\text{mv}} \right]^T$ .

**Caso 3** (Solução com dois máximos de ângulo e infinitos máximos de posição). Este caso ocorre quando a matriz  $M$  e o termo  $W - N^T M^+ N$  são ambos não singulares. Neste caso deve-se utilizar a SVD para calcular tanto a pseudo-inversa de  $M$  quanto a pseudo-inversa do termo  $W - N^T M^+ N$ . Com o resultado da pseudo-inversa de  $W - N^T M^+ N$  deve-se executar os mesmos passos descritos no Caso 1 para se determinar os ângulos possíveis, e então escolher o ângulo  $\hat{\theta}_k^{\text{mv}}$  de menor diferença com relação à estimativa *a priori*. A diferença com relação ao Caso 1 está no fato de que a solução não proverá somente uma posição de máximo, mas infinitas posições. Desta forma, deve-se utilizar o método apresentado no Caso 2 para se determinar a posição  $\hat{v}_k^{\text{mv}}$  com menor diferença com relação à estimativa *a priori* e, então, pode-se determinar qual é a estimativa de máxima verossimilhança  $\hat{z}_k^{\text{mv}} = \left[ (\hat{v}_k^{\text{mv}})^T \quad \hat{\theta}_k^{\text{mv}} \right]^T$ .

**Caso 4** (Caso sem solução existente). Este caso ocorre quando a matriz  $M$  é invertível e o termo  $W - N^T M^{-1} N$  é singular e igual a zero. Neste caso, não é possível obter informação alguma sobre a posição de ângulo, pois (5.12) resultaria somente em  $\hat{\beta}_k = 0$ , o que é impossível pois  $\hat{\beta}_k$  deve ter norma unitária. Desta forma, não se pode tratar este caso devido à falta de informação.

Com a análise destes quatro casos alheios à solução direta, pode-se então determinar um método geral que resolva todas as situações. Este método geral é descrito no Algoritmo 5.1. Para solucionar o problema, o método deve receber como entrada a estimativa *a priori*, os elementos geométricos encontrados no mapa local e também os elementos do mapa global correspondentes. É necessário que esse método receba no mínimo um elemento geométrico local e global, este número é o mínimo necessário para se realizar a estimação de posição. Ao final deste método, é obtida a estimativa de máxima verossimilhança de postura  $\hat{z}_k^{\text{mv}}$ . No entanto, este método por si só não resolve o problema por completo devido à incapacidade

de fornecer uma informação sobre a incerteza da estimativa obtida. A próxima seção aborda uma estratégia para se estimar também a matriz de covariâncias do máximo de verossimilhança.

### 5.1.2 Cálculo da matriz de covariâncias

Além de se calcular a estimativa de máxima verossimilhança, deve-se fornecer uma informação sobre a incerteza desta estimativa, ou seja, deve-se associar uma matriz de covariâncias  $P_{z,k}^{mv}$  à estimativa de máxima verossimilhança  $\hat{z}_k^{mv}$ . De forma análoga ao método de cálculo utilizado em [34], a função de custo definida por (5.6) relaciona as incertezas dos elementos geométricos globais e locais, além da posição, podendo ser escrita como:

$$J(z_k, \mathcal{M}^l, \mathcal{M}^g) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} (E_i v_k + R(\theta_k)^T h_i - f_i)^T (E_i v_k + R(\theta_k)^T h_i - f_i) \quad (5.20)$$

e o resíduo de estimação definido como

$$r_i \triangleq (E_i v_k + R(\theta_k)^T h_i - f_i)^T (E_i v_k + R(\theta_k)^T h_i - f_i). \quad (5.21)$$

Os resíduos são considerados de média nula e estes possuem a seguinte matriz de covariâncias, a qual pode ser estimada empiricamente como [29]

$$P_r = \frac{\sum_{i=1}^N 1/\sigma_{h,i}^2 (r_i r_i^T)}{\sum_{i=1}^N 1/\sigma_{h,i}^2}. \quad (5.22)$$

As outras incertezas são geradas pelos elementos geométricos utilizados na estimação, e suas matrizes de covariâncias são representadas por  $P_{h,i}$  e  $P_{f,i}$  para os elementos locais e globais, respectivamente. Utilizando a forma proposta por Haralick [89], a matriz de covariâncias  $P_{z,k}^{mv}$  pode ser calculada como:

$$P_{z,k}^{mv} = \left( \frac{\partial g}{\partial \hat{z}_k^{mv}} \right)^{-1} (\Sigma_r + \Sigma_h + \Sigma_f) \left( \frac{\partial g}{\partial \hat{z}_k^{mv}} \right)^{-1} \quad (5.23)$$

em que  $g = \partial J(\hat{z}_k^{mv}, \mathcal{M}^l, \mathcal{M}^g) / \partial \hat{z}_k^{mv}$  e

$$\Sigma_r = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial g}{\partial r_i} \right) P_r \left( \frac{\partial g}{\partial r_i} \right)^T, \quad (5.24)$$

$$\Sigma_h = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial g}{\partial h_i} \right) P_h \left( \frac{\partial g}{\partial h_i} \right)^T, \quad (5.25)$$

$$\Sigma_f = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial g}{\partial f_i} \right) P_f \left( \frac{\partial g}{\partial f_i} \right)^T. \quad (5.26)$$

No entanto, esta formulação utilizando a matriz de covariâncias pode não funcionar nos casos em que há infinitas soluções de posição ou ângulo. Neste caso convém utilizar a matriz



---

**Algoritmo 5.1** Estimativa de máxima verossimilhança para o problema de localização

---

**Require:** Estimativa *a priori*  $\hat{z}_{k|k-1}$ . Mais de um elemento geométrico,  $N \geq 1$ .

- 1: Calcular 
$$M = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} E_i E_i, \quad q = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} E_i f_i, \quad N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} E_i H_i,$$
$$W = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} H_i^T H_i, \quad r = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{h,i}^2} H_i^T f_i;$$
  - 2: **if**  $\text{rank}(M) = 2$  **then**
  - 3:  $M^\dagger = M^{-1};$
  - 4: **else**
  - 5:  $[U, S, V] \leftarrow \text{SVD}(M);$
  - 6:  $M^\dagger = V S' U^T;$
  - 7:  $v \leftarrow$  coluna de  $V$  correspondente ao valor nulo de  $S;$
  - 8: **fim if**
  - 9: **if**  $\text{rank}(W - N^T M^\dagger N) = 2$  **then**
  - 10:  $\hat{\beta}_k = (W - N^T M^\dagger N)^{-1} (r - N^T M^\dagger q);$
  - 11:  $\hat{\theta}_k^{\text{mv}} = \arctan(b_2/b_1);$
  - 12: **else if**  $\text{rank}(W - N^T M^\dagger N) = 1$  **then**
  - 13:  $[U, S, V] \leftarrow \text{SVD}(W - N^T M^\dagger N);$
  - 14:  $\xi = (V S' U^T) (r - N^T M^\dagger q);$
  - 15:  $\omega \leftarrow$  coluna de  $V$  correspondente ao valor nulo de  $S;$
  - 16:  $a_1 = \omega^T \omega, a_2 = \omega^T \xi, e a_3 = \xi^T \xi - 1;$
  - 17:  $[\lambda_1, \lambda_2] \leftarrow \text{roots}(a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0);$
  - 18:  $\beta_1 = \xi + \lambda_1 \omega, \quad \beta_2 = \xi + \lambda_2 \omega;$
  - 19:  $\theta_1 = \arctan(b_{1,2}/b_{1,1}), \quad \theta_2 = \arctan(b_{1,2}/b_{1,1});$
  - 20: **if**  $\|\theta_1 - \hat{\theta}_{k|k-1}\| < \|\theta_2 - \hat{\theta}_{k|k-1}\|$  **then**
  - 21:  $\hat{\theta}_k^{\text{mv}} = \theta_1, \quad \hat{\beta}_k = \beta_1;$
  - 22: **else**
  - 23:  $\hat{\theta}_k^{\text{mv}} = \theta_2, \quad \hat{\beta}_k = \beta_2;$
  - 24: **fim if**
  - 25: **else**
  - 26: Solução inexistente;
  - 27: **fim if**
  - 28:  $\hat{v}_k^{\text{mv}} = M^\dagger (q - N \hat{\beta}_k);$
  - 29: **if**  $\text{rank}(M) = 1$  **then**
  - 30:  $\delta = v^T (\hat{v}_{k|k-1} - \hat{v}_k^{\text{mv}}) / v^T v;$
  - 31:  $\hat{v}_k^{\text{mv}} = \hat{v}_{k|k-1} + \delta \cdot v;$
  - 32: **fim if**
  - 33:  $\hat{z}_k^{\text{mv}} = \left[ (\hat{v}_k^{\text{mv}})^T \quad \hat{\theta}_k^{\text{mv}} \right]^T.$
-

de informação, pois esta forma possui maior estabilidade numérica. Assim a matriz  $(P_{z,k}^{\text{mv}})^{-1}$  é calculada da seguinte forma:

$$(P_{z,k}^{\text{mv}})^{-1} = \left( \frac{\partial g}{\partial \hat{z}_k^{\text{mv}}} \right) (\Sigma_r + \Sigma_h + \Sigma_f)^{-1} \left( \frac{\partial g}{\partial \hat{z}_k^{\text{mv}}} \right). \quad (5.27)$$

### 5.1.3 Estimação completa da localização

Com a obtenção da estimativa de máxima verossimilhança e a matriz de covariâncias, a distribuição de verossimilhança está caracterizada e pode-se então realizar a etapa de fusão das estimativas de predição e da obtida pelo máximo de verossimilhança. Em alguns casos, esta última estimativa  $\hat{z}_k^{\text{mv}}$  pode ter alguns elementos da matriz de covariâncias  $P_k^{\text{mv}}$  associada que tendem ao infinito. Logo, vale-se utilizar a forma de matriz de informação  $(P_{z,k}^{\text{mv}})^{-1}$ , pois estes valores que tendem a infinito serão representados por valores próximos de zero. Como dito anteriormente, esta a fusão de dados é realizada através de uma soma ponderada e o resultado ótimo é dado pela etapa de correção do Filtro de Kalman (FK). Como somente a matriz de covariâncias da função de verossimilhança pode não ser bem condicionada, utiliza-se a seguinte forma do de informação do FK:

$$K_k = I_3 - \left( P_{z,k|k-1}^{-1} + (P_{z,k}^{\text{mv}})^{-1} \right)^{-1} P_{z,k|k-1}^{-1} \quad (5.28)$$

$$\hat{z}_{k|k} = \hat{z}_{k|k-1} + K_k (\hat{z}_k^{\text{mv}} - \hat{z}_{k|k-1}), \quad (5.29)$$

$$P_{z,k} = (I_3 - K_k) P_{z,k|k-1}. \quad (5.30)$$

Esta forma tem como principal vantagem a utilização da matriz de informação e não a matriz de covariâncias da estimativa de máxima verossimilhança. Esta formulação pode ser vista como o estimador ótimo para o caso em que a matriz de covariâncias dos elementos geométricos do mapa local possam ser escritas da forma  $P_{h,i} = \sigma_i^2 I_2$ . Quando esta assertiva não for verificada, este estimador resulta em um caso sub-ótimo, no entanto, a consideração da matriz de covariâncias  $P_{h,i}$  na forma geral, resultaria em um desenvolvimento muito mais complexo no que tange a solução de máxima verossimilhança.

### 5.1.4 Análise de resultados em simulação

A análise de dados em simulação é realizada com o intuito de demonstrar a validade do método proposto para estimação de postura de robôs apresentada neste capítulo. São verificadas seis situações em diferentes configurações de mapas diferentes. Cada situação visa simular casos com diferentes soluções de máximo de verossimilhança, como uma única solução, duas soluções de ângulo, infinitas soluções de posição e infinitas soluções de ângulo. Para todas as simulações, assume-se que a posição real do robô é  $z = \begin{bmatrix} 2 \text{ m} & 3 \text{ m} & 120^\circ \end{bmatrix}$ . Os elementos presentes no mapa global são apresentados com um respectivo número de identificação. Para cada elemento identificado no mapa global, calcula-se então qual seria o elemento local identificado, com uma perturbação  $\sigma_h$  definida. Nos casos de elementos do

tipo reta, utiliza-se  $\sigma_{h,\rho}^2 = 1$  para o parâmetro  $\rho$  e  $\sigma_{h,\alpha}^2 = 1/36$  para o parâmetro  $\alpha$ . Para os elementos do tipo ponto, utiliza-se  $\sigma_{h,x}^2 = \sigma_{h,y}^2 = 1$ .

Na análise feita das simulações, será dada maior importância para a computação da estimativa de máxima verossimilhança. Três são os pontos de principal interesse: posto das matrizes  $M$  e  $W - N^T M^\dagger N$ , existência de soluções de máxima verossimilhança e a matriz de covariâncias da função de verossimilhança. São apresentados os resultados da estimativa *a priori* e da estimativa *a posteriori* apenas como ilustração dos resultados. Nas figuras que apresentam os resultados das simulações, as posições  $v$  das estimativas são dadas por um marco em forma de  $\times$ , ao passo que a seta representa a orientação  $\theta$ . O círculo em volta representa a matriz de covariâncias da posição utilizando o intervalo de confiança  $3\sigma$ . Os cinco casos são os mesmos apresentados em [30] e a análise das simulações é realizada a seguir.

**Simulação 1.** Nesta simulação, o mapa global possui duas retas ortogonais e um ponto ao final da reta 1 e a solução é apresentada na Figura 5.2. Este problema é também apresentado em [29] como um caso de solução completa, ou seja, uma única solução. Como paralelo do método apresentado neste capítulo, pode ser visto na Figura 5.2 (b) que há apenas uma solução de máxima verossimilhança. Esta solução unica pode ser constatada pela análise da matriz  $M$  utilizada no cálculo da posição  $v$

$$M = \begin{bmatrix} 0,880 & 0 \\ 0 & 1,074 \end{bmatrix} \times 10^3, \quad \text{autovalor}(M) = \begin{bmatrix} 0,880 \\ 1,074 \end{bmatrix} \times 10^3,$$

note que  $M$  possui posto completo pela análise dos autovalores. Também, pela análise do termo  $W - N^T M^{-1} N$  utilizado no cálculo do ângulo  $\theta$

$$W - N^T M^{-1} N = \begin{bmatrix} 3,558 & 1,668 \\ 1,667 & 1,306 \end{bmatrix} \times 10^3, \quad \text{autovalor}(W - N^T M^{-1} N) = \begin{bmatrix} 4,445 \\ 0,419 \end{bmatrix} \times 10^3$$

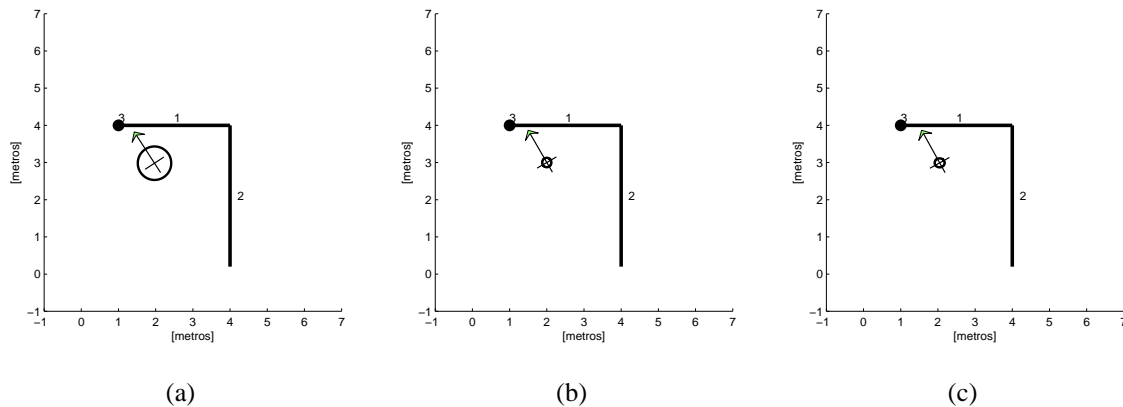


Figura 5.2: Situação 1: duas retas ortogonais e um ponto encontrados. Uma única solução para o máximo de verossimilhança. (a) Estimativa *a priori*; (b) Estimativa de máxima verossimilhança; (c) Estimativa *a posteriori*, estimada a partir da fusão das estimativas *a priori* e de máxima verossimilhança.

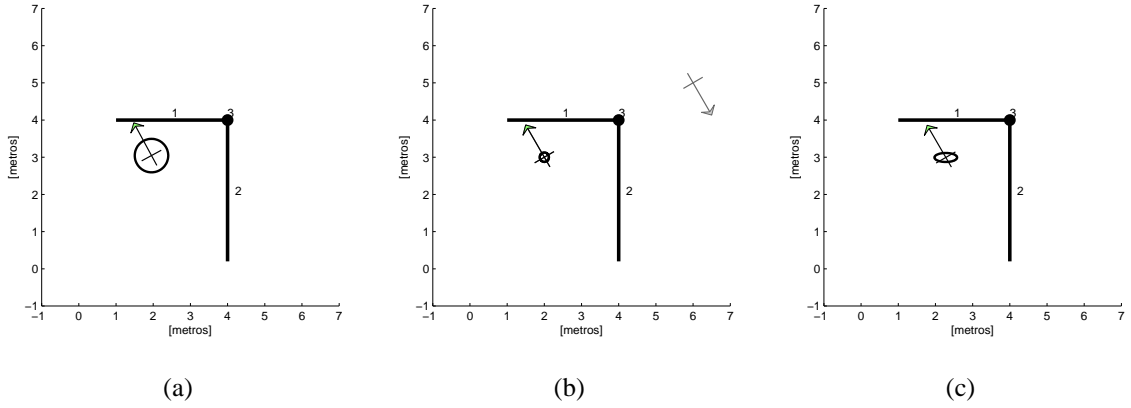


Figura 5.3: Simulação 2: duas retas ortogonais e um ponto encontrados. Duas soluções para o máximo de verossimilhança. (a) Estimativa *a priori*; (b) Estimativas de máxima verossimilhança (cinza), destaque para estimativa mais próxima da estimativa *a priori* (preto); (c) Estimativa *a posteriori*, estimada a partir da fusão das estimativas *a priori* e de máxima verossimilhança.

note que  $w - N^T M^{-1} N$  também possui posto completo pela análise dos autovalores. Como há apenas uma solução de máxima verossimilhança, espera-se que a matriz de informação da função de verossimilhança  $P_k^{mv}$  possua somente elementos diferentes de zero, ou seja, que a matriz de covariâncias seja definida. Esta solução é verificada a partir do cálculo da matriz de informação

$$(P_k^{mv})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,609 & 0 & -0,058 \\ 0 & 0,602 & -0,054 \\ -0,058 & -0,054 & 3,518 \end{bmatrix} \times 10^3,$$

**Simulação 2.** Nesta simulação, o mapa global possui duas retas ortogonais e um ponto. Contudo, ao invés de estar localizado no final de uma das retas, como na simulação anterior, o ponto está localizado no vértice das duas retas ortogonais. A solução é apresentada na Figura 5.3. Para esta configuração existem duas soluções de máxima verossimilhança, como pode ser visto na Figura 5.3 (b). Pelo cálculo da matriz  $M$  verifica-se

$$M = \begin{bmatrix} 0,880 & 0 \\ 0 & 1,074 \end{bmatrix} \times 10^3, \quad \text{autovalor}(M) = \begin{bmatrix} 0,880 \\ 1,074 \end{bmatrix} \times 10^3$$

e pela análise dos autovalores de  $M$ , verifica-se que esta possui posto completo. Portanto, este caso possui uma única solução de posição para cada solução de ângulo. Já calculando a matriz  $W - N^T M^{-1} N$  verifica-se

$$W - N^T M^{-1} N = \begin{bmatrix} 3,437 & 1,984 \\ 1,984 & 1,146 \end{bmatrix} \times 10^3, \quad \text{autovalor}(W - N^T M^{-1} N) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4,583 \end{bmatrix} \times 10^3$$

e pela análise dos autovalores de  $W - N^T M^{-1} N$  verifica-se que esta matriz é singular, portanto é invertível. Isto significa que deve-se utilizar a solução baseada em SVD, a partir

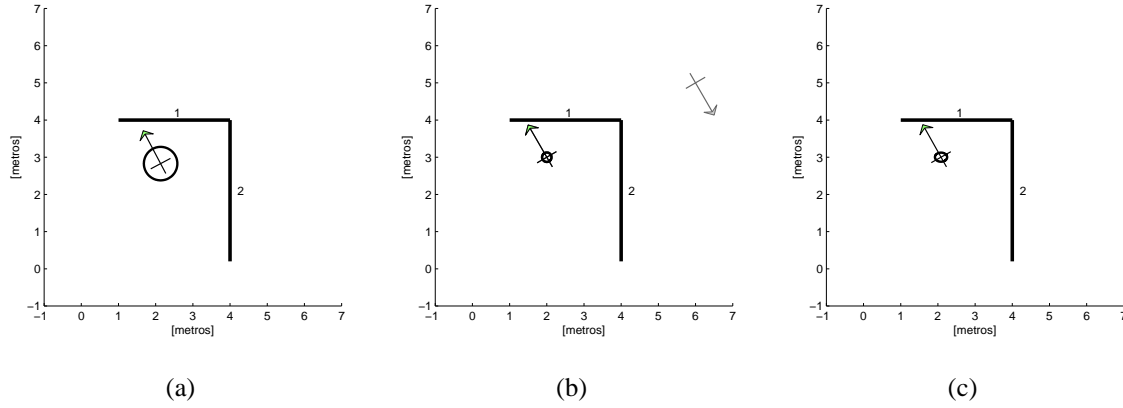


Figura 5.4: Simulação 3: duas retas ortogonais encontradas. Duas soluções para o máximo de verossimilhança. (a) Estimativa *a priori*; (b) Estimativas de máxima verossimilhança (cinza), destaque para estimativa mais próxima da estimativa *a priori* (preto); (c) Estimativa *a posteriori*, estimada a partir da fusão das estimativas *a priori* e de máxima verossimilhança.

de (5.16), resulta em dois ângulos de máxima verossimilhança,  $\theta_1 = 120^\circ$  e  $\theta_2 = -60^\circ$ , como apresentado na Figura 5.3 (b). De acordo com a Figura 5.3 (a) pode-se verificar que o ângulo de menor distância com relação à estimativa *a priori* é  $\theta_1 = 120^\circ$ , desta forma resultando no máximo que será utilizado como solução. Apesar de haver duas soluções, pode-se verificar a partir do cálculo da matriz de informação

$$(P_k^{mv})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,610 & 0 & -0,058 \\ 0 & 0,602 & 0,109 \\ -0,0581 & 0,109 & 3,702 \end{bmatrix} \times 10^3$$

que há uma incerteza limitada para todos os elementos  $x^{mv}$ ,  $y^{mv}$ , e  $\theta^{mv}$  da solução de máxima verossimilhança, mesmo havendo duas soluções possíveis para o problema.

**Simulação 3.** Nesta simulação, o mapa global possui duas retas ortogonais, e a solução é apresentada na Figura 5.4. Tal qual o caso anterior, esta configuração apresenta duas soluções de máxima verossimilhança, como pode ser visto na Figura 5.4 (b). Pelo cálculo da matriz  $M$  verifica-se

$$M = \begin{bmatrix} 0,830 & 0 \\ 0 & 1,024 \end{bmatrix} \times 10^3, \quad \text{autovalor}(M) = \begin{bmatrix} 0,830 \\ 1,024 \end{bmatrix} \times 10^3$$

e pela análise dos autovalores de  $M$ , pode-se verificar que a matriz possui posto completo, por conseguinte existe uma única solução de posição para cada solução de ângulo encontrada. A partir do cálculo de  $W - N^T M^{-1} N$  verifica-se

$$W - N^T M^{-1} N = \begin{bmatrix} 3,258 & 1,881 \\ 1,881 & 1,086 \end{bmatrix} \times 10^3, \quad \text{autovalor}(W - N^T M^{-1} N) = \begin{bmatrix} 4,344 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^3$$

e analisando os autovalores de  $W - N^T M^{-1} N$  verifica-se que esta matriz é singular, portanto não é invertível. Da mesma forma que feito no caso anterior, utilizando a solução baseada

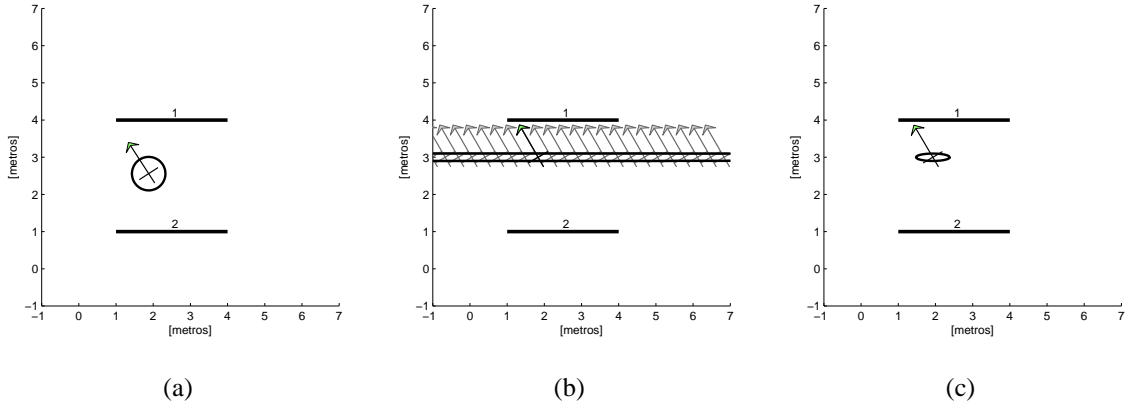


Figura 5.5: Simulação 4: duas retas paralelas encontradas. Infinitas soluções para o máximo de verossimilhança. (a) Estimativa *a priori*; (b) Estimativas de máxima verossimilhança (cinza), destaque para estimativa mais próxima da estimativa *a priori* (preto); (c) Estimativa *a posteriori*, estimada a partir da fusão das estimativas *a priori* e de máxima verossimilhança.

em SVD, a partir de (5.16), resulta em dois ângulos de máxima verossimilhança  $\theta_1 = 120^\circ$  e  $\theta_2 = -60^\circ$ , estas soluções são apresentadas na Figura 5.4 (b). Comparando com a solução *a priori* da Figura 5.4 (a), o ângulo de menor distância é  $\theta_1 = 120^\circ$ , desta forma resultando no máximo que será utilizado como solução. Da mesma forma que para o caso anterior, a solução da matriz de informação

$$(P_k^{mv})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,556 & 0 & 0 \\ 0 & 0,556 & 0 \\ 0 & 0 & 3,397 \end{bmatrix} \times 10^3$$

resulta em valores diferentes de zero para todos os elementos, o que significa que há uma incerteza limitada da postura escolhida, mesmo havendo duas soluções de máxima verossimilhança.

**Simulação 4.** Nesta simulação, o mapa global possui duas retas paralelas, e a solução é apresentada na Figura 5.5. Para esta configuração existem infinitas soluções de máxima verossimilhança, como pode ser visto na Figura 5.5 (b). Como forma de se verificar esta afirmação deve-se primeiramente calcular

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1,855 \end{bmatrix} \times 10^3, \quad \text{autovalor}(M) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,855 \end{bmatrix} \times 10^3$$

e pela análise dos autovalores conclui-se que a matriz  $M$  é singular e portanto não se pode calcular sua inversa diretamente. Em casos como este deve-se empregar a solução que utiliza SVD, calculando e utilizando na sequência a matriz pseudo-inversa  $M^\dagger$ , obtém-se então infinitas soluções de posição. Então com base neste resultado calculando

$$W - N^T M^\dagger N = \begin{bmatrix} 4,290 & 0,094 \\ 0,094 & 4,181 \end{bmatrix} \times 10^3, \quad \text{autovalor}(W - N^T M^\dagger N) = \begin{bmatrix} 4,345 \\ 4,127 \end{bmatrix} \times 10^3,$$

pode-se verificar pelos autovalores que o termo  $W - N^T M^\dagger N$  é invertível, logo há uma solução única para o ângulo. A partir desta solução, pode-se calcular as estimativas de máxima verossimilhança apresentadas na Figura 5.5 (b) e verificar a partir de (5.19) a estimativa de posição mais próxima da estimativa *a priori* apresentada na Figura 5.5 (a). A estimativa dada por (5.19), destacada em preto na Figura 5.5 (b), é utilizada na fusão de dados. Com a escolha da estimativa de máxima verossimilhança mais próxima da estimativa *a priori*, pode-se computar a matriz de informação

$$(P_k^{\text{mv}})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,099 & 0 \\ 0 & 0 & 7,839 \end{bmatrix} \times 10^3,$$

Verificar-se que os valores correspondentes à componente de posição  $v_x$  na matriz de informação possuem valor zero. Este resultado corrobora o esperado, ou seja, que não existe informação sobre esta componente e seu valor na matriz de covariâncias tenderia ao infinito. Neste caso pode-se então confirmar que o emprego da matriz de informação é mais estável que o uso da matriz de covariâncias, e pode-se verificar também que neste caso não há problemas no cálculo da estimativa *a posteriori* apresentada na Figura 5.5 (c).

**Simulação 5.** Nesta simulação, o mapa global possui uma única reta, e a solução é apresentada na Figura 5.6. Para esta configuração existem infinitas soluções de máxima verossimilhança, como pode ser visto na Figura 5.6 (b). Contudo esta situação é diferente da solução anterior, pois agora existem também duas soluções de máxima verossimilhança para o ângulo  $\theta$ . Para se confirmar esta assertiva, calcula-se primeiramente

$$M = \begin{bmatrix} 3,334 & 4,547 \\ 4,547 & 6,200 \end{bmatrix} \times 10^2, \quad \text{autovalores}(M) = \begin{bmatrix} 0 \\ 9,535 \end{bmatrix} \times 10^2$$

e pela análise dos autovalores verifica-se que a matriz  $M$  é singular e portanto não se pode calcular a inversa, deve-se então utilizar a solução que utiliza SVD e calcula-se a matriz pseudo-inversa  $M^\dagger$  e neste caso obtém como resultado infinitas soluções de posição. Utilizando a pseudo-inversa  $M^\dagger$  pode-se calcular

$$W - N^T M^\dagger N = \begin{bmatrix} 1,397 & 0,807 \\ 0,807 & 0,466 \end{bmatrix} \times 10^3, \quad \text{autovalores}(W - N^T M^\dagger N) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,863 \end{bmatrix} \times 10^3$$

e então pode-se verificar pela análise dos autovalores que o termo  $W - N^T M^\dagger N$  é singular, portanto não é invertível. Utilizando então a solução baseada em SVD, a partir de (5.16), resulta em dois ângulos de máxima verossimilhança  $\theta_1 = 120^\circ$  e  $\theta_2 = -60^\circ$ . Para cada um destes dois ângulos existem infinitas soluções de máxima verossimilhança apresentadas na Figura 5.6 (b). Pode-se verificar a partir distância entre os ângulos obtidos na solução e a estimativa *a priori* da Figura 5.6 (a), que o ângulo mais próximo é  $\theta_1 = 120^\circ$ , portanto a solução de máxima verossimilhança mais próxima da estimativa *a priori* passa pela escolha deste ângulo. Na sequência, a partir de (5.19), a estimativa de posição mais próxima da

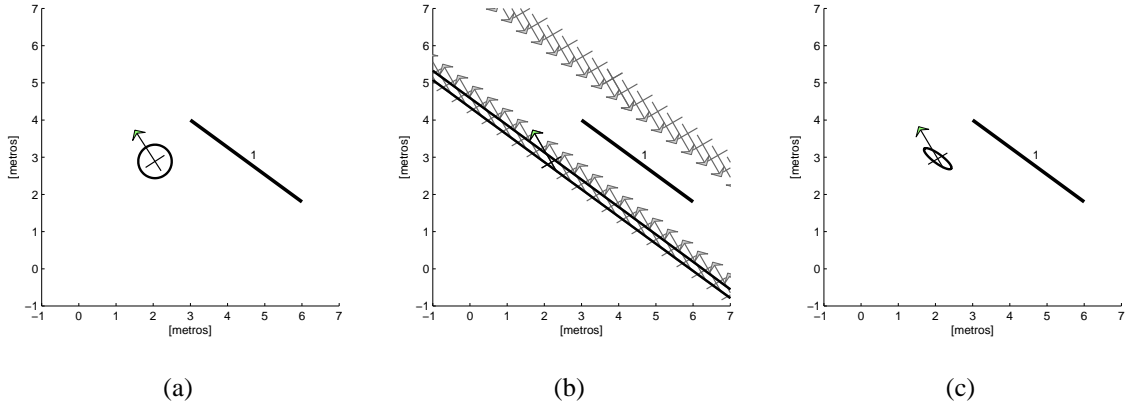


Figura 5.6: Simulação 5: uma reta encontrada. Infinitas soluções para o máximo de verossimilhança. (a) Estimativa *a priori*; (b) Estimativas de máxima verossimilhança (cinza), destaque para estimativa mais próxima da estimativa *a priori* (preto); (c) Estimativa *a posteriori*, estimada a partir da fusão das estimativas *a priori* e de máxima verossimilhança.

estimativa *a priori* é calculada e esta é utilizada na fusão de dados. A estimativa escolhida está destacada em preto na Figura 5.6 (b). Com a escolha desta estimativa pode-se computar a matriz de informação

$$(P_k^{mv})^{-1} = \begin{bmatrix} 1,942 & 2,649 & 0 \\ 2,649 & 3,613 & 0 \\ 0 & 0 & 9,519 \end{bmatrix} \times 10^2$$

e esta matriz de informação, diferentemente da encontrada no caso anterior, não possui valores nulos. No entanto, ao verificar os autovalores encontram-se  $\lambda_1 = 5.555 \times 10^2$ ,  $\lambda_2 = 9.519 \times 10^2$ , e  $\lambda_3 = 0$ , significando que a matriz de informação é singular. Pode-se constatar que a segunda linha é uma combinação linear da primeira, representando então que há uma incerteza infinita combinada nos dois eixos, da mesma forma que representado na Figura 5.6 (b). Como no caso anterior pode-se confirmar a vantagem em se empregar a matriz de informação pois não há problemas no cálculo da estimativa *a posteriori* apresentada na Figura 5.6 (c).

### 5.1.5 Resultados Experimentais

Esta seção apresenta os resultados experimentais para o método de localização proposto em dois ambientes. O robô Omni navegando nos dois ambientes coletou dados provenientes do girômetro, de odometria, ladar e câmeras. Desta forma pode-se realizar a estimação *off-line* de posição. Os dados utilizados e a parte de mapeamento utilizada aqui são provenientes dos trabalhos [30, 34]. A construção do mapa foi realizada utilizando a integração dos dados de giro-odometria e as posturas medidas pela giro-odometria são utilizadas como referência  $z_k$  durante todos os experimentos. Após a construção do mapa, o experimento é realizado com o robô partindo da posição inicial e os dados de predição são integrados a partir de

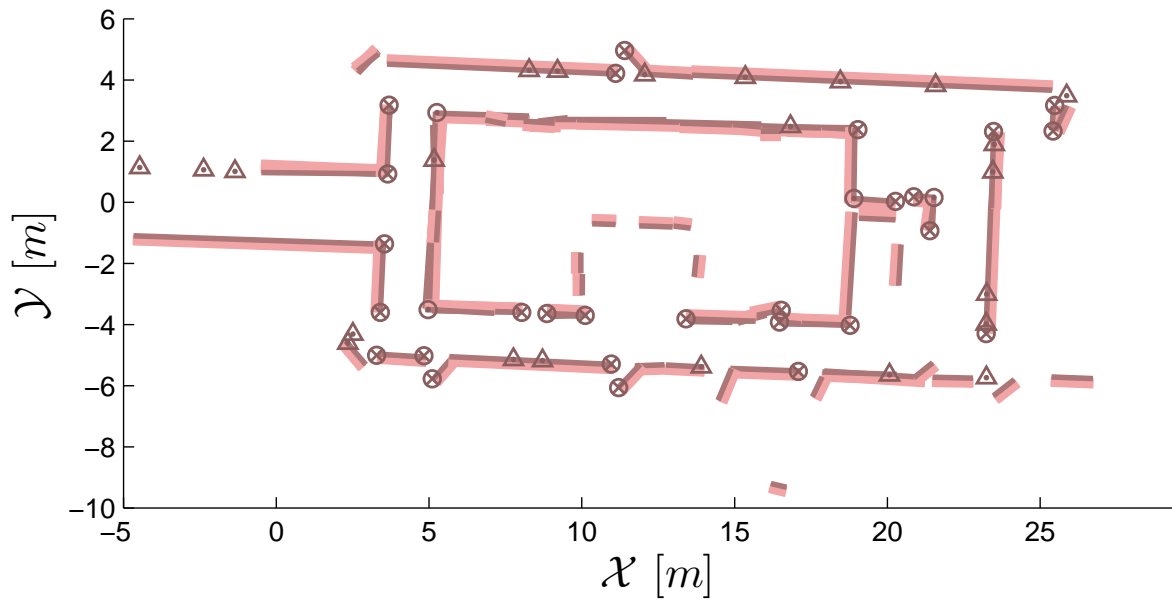


informações somente de odometria e a correção é feita utilizando o método proposto. Como medidas de desempenho, são utilizadas as métricas  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ , e  $\varepsilon_\theta$  que representam os erros de estimação das componentes  $v_x$ ,  $v_y$ , e  $\theta$  da postura estimada  $\hat{z}_k$ . A partir destas métricas são avaliadas a média aritmética  $\bar{\varepsilon}_x$ ,  $\bar{\varepsilon}_y$ ,  $\bar{\varepsilon}_\theta$ , as médias dos erros absolutos  $\|\bar{\varepsilon}_x\|$ ,  $\|\bar{\varepsilon}_y\|$ ,  $\|\bar{\varepsilon}_\theta\|$  e também o percentual de estimativas de cada componente que estão fora do intervalo de confiança  $3\sigma$  dado pela matriz de covariâncias das estimativas  $\hat{z}_k$ . Estas estimativas visam ser uma métricas para o viés residual de estimação, além de uma métrica de consistência das estimativas.

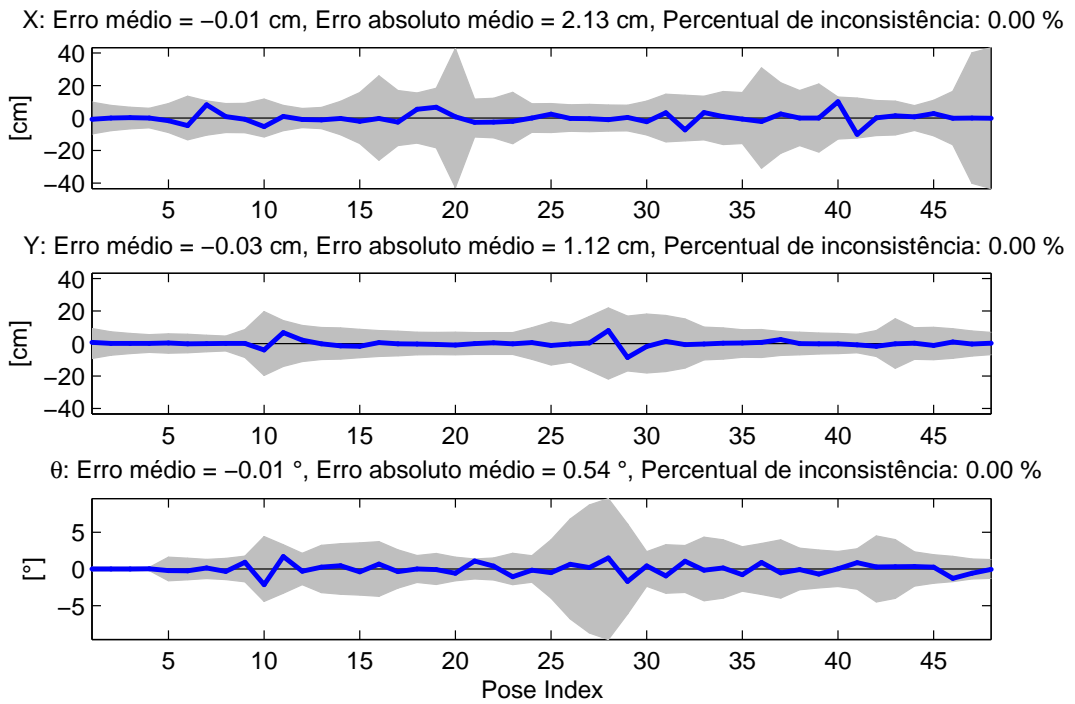
### 5.1.6 Ambiente A

O primeiro ambiente consiste de um corredor onde o robô executa uma trajetória fechada, ou seja, a partir do início este executa uma volta e ao final retorna à posição inicial. A trajetória realizada possui 55,93 m e as velocidades máximas (rotacional e translacional) são de 85,94 cm/s e 24,61°/s. O mapa global é obtido utilizando giro-odometria como método de estimação de posição, e é apresentado na Figura 5.7 (a). Como o método de localização utilizado na construção do mapa global é a giro-odometria, então todo o mapa é construído a partir da posição inicial do robô e não a partir de um ponto global. Desta forma, para se avaliar o método proposto de localização, a posição inicial do robô é inicializada na origem  $\hat{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \text{ cm} & 0 \text{ cm} & 0^\circ \end{bmatrix}$  do sistema global. Então somente os dados de odometria do robô são empregados no cálculo da estimativa *a priori* da posição e o método proposto utilizando o cálculo da estimativa de máxima verossimilhança e fusão de dados com a estimativa *a priori* é empregado na estimação de posição.

O resultado do experimento de localização para o Ambiente A está ilustrado na Figura 5.7 (b). O primeiro gráfico apresenta tanto o erro de estimação da componente  $v_x$  quanto o intervalo de confiança  $3\sigma$ . Pode-se verificar que durante todo o experimento as estimativas são consistentes, pois para esta componente o erro de estimação em nenhum momento foi maior que o intervalo de confiança. O erro médio de estimação resultante foi realmente pequeno, da ordem de 0,01 cm, no entanto este resultado poderia ser mascarado por grandes erros de igual amplitude mas de sinais opostos. Como forma de se verificar que este tipo de erro não ocorre pode-se observar os erros absolutos. Desta forma, verifica-se que o erro absoluto médio é de 2,13 cm, ou seja, um valor pequeno se comparado às incertezas dos elementos utilizados na estimação. O segundo gráfico apresenta o erro de estimação da componente  $v_y$  e o intervalo de confiança  $3\sigma$ . Assim como foi obtido no primeiro resultado, durante o experimento as estimativas da componente  $v_y$  estão dentro do intervalo  $3\sigma$  e o erro médio é pequeno da ordem de 0,03 cm. Apesar do pequeno acréscimo no erro médio, pode-se constatar que houve uma redução no erro absoluto médio para 1,12 cm. O último gráfico ilustra o resultado da estimação da componente associada ao ângulo  $\theta$  do robô. Assim como nos resultados obtidos para as outras duas componentes, as estimativas foram todas consistentes e foi obtido um pequeno erro médio da ordem de 0,01°. Com relação ao erro absoluto



(a)



(b)

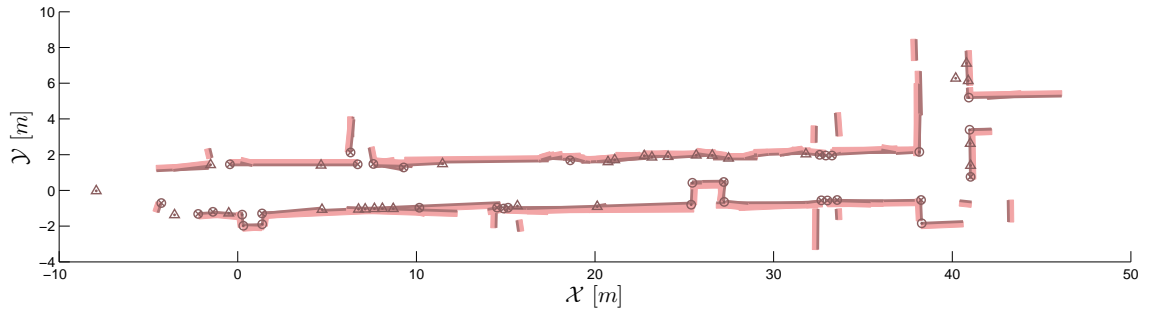
Figura 5.7: Experimento 1, (a) Mapa gerado a partir de giro-odometria utilizado no mapa global no experimento; (b) Erros de localização com relação à postura calculada utilizando dados de giro-odometria.

médio, obteve-se um resultado de  $0,54^\circ$ , que também é considerado pequeno com relação às incertezas associadas aos elementos utilizados no processo de estimação de postura. A consistência das estimativas obtida é um resultado muito bom, no entanto este resultado pode ser analisado como muito conservador, pois o resultado do intervalo de confiança obtido a partir da matriz de covariâncias é muito grande se comparado aos erros de estimação.

### 5.1.7 Ambiente B

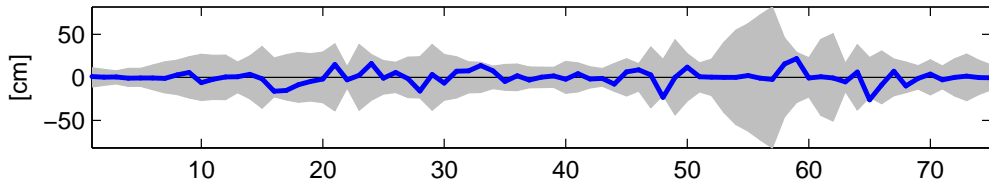
O segundo ambiente também consiste de um corredor onde o robô execute uma trajetória fechada. No entanto este ambiente é diferente pois o robô executa sua trajetória com velocidades máximas maiores que as anteriores, ou seja, com velocidade translacional de  $91,83 \text{ cm/s}$  e rotacional de  $39,4^\circ/s$ . O mapa global também é obtido utilizando giro-odometria como método de estimação de posição e é apresentado na Figura 5.8 (a). Da mesma forma e pelos mesmos motivos que para o ambiente anterior, a posição inicial do robô é inicializada na origem  $\hat{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \text{ cm} & 0 \text{ cm} & 0^\circ \end{bmatrix}$  do sistema global. Então somente os dados de odometria do robô são empregados no cálculo da estimativa *a priori* da posição, e o método proposto utilizando o cálculo da estimativa de máxima verossimilhança e fusão de dados com a estimativa *a priori* é empregado na estimação de posição.

O resultado do experimento de localização para o Ambiente B está ilustrado na Figura 5.8 (b). O primeiro gráfico apresenta o erro de estimação da componente  $v_x$  e o intervalo de confiança  $3\sigma$ . Pode-se verificar que as estimativas obtidas para esta componente são consistentes, pois durante todo o experimento as estimativas estão dentro do intervalo de confiança. Na estimação desta componente, o erro médio obtido menor que  $0,01 \text{ cm}$ . No entanto, este resultado não quer dizer que o erro sempre esteve próximo de zero. Analisando o erro absoluto médio, verifica-se um resultado de  $5,12 \text{ cm}$ . Este resultado é o dobro do verificado anteriormente e acontece principalmente pelo fato deste mapa ser constituído principalmente por retas paralelas. O segundo gráfico apresenta o erro de estimação para a componente  $v_y$ . Neste caso aconteceu algo de diferente, houve a verificação da inconsistência de uma estimativa. Esta inconsistência ocorreu na estimativa de índice 67 e, como pode-ser visto na Figura 5.8 (b), esta inconsistência não é visualmente perceptível, significando que apesar da estimativa estar fora do intervalo de confiança, o resultado está bem próximo deste e pode ter sido causado por algum ruído numérico na estimação. Estes resultados confirmam que mesmo obtendo uma estimativa inconsistente, o estimador foi capaz de se recuperar e fornecer somente estimativas dentro do intervalo de confiança. O erro médio aferido é de cerca de  $0,27 \text{ cm}$  junto de um erro absoluto de  $1,17 \text{ cm}$ , que são resultados compatíveis com as incertezas dos elementos utilizados no mapa e com os resultados obtidos no experimento anterior. O último gráfico apresenta os resultados para a componente que representa o ângulo  $\theta$  do robô. Para esta componente, todas estimativas que foram obtidas resultaram em estimativas consistentes. Com relação aos erros médios, obteve-se como erro médio relativo um valor inferior a  $0,01^\circ$  e erro absoluto médio de  $0,63^\circ$ . Resultados

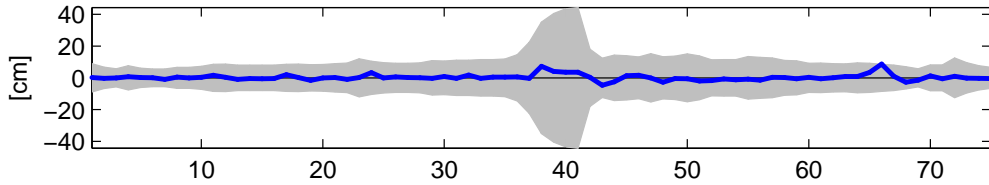


(a)

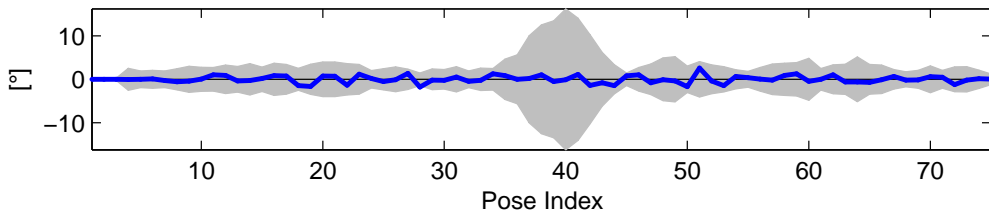
X: Erro médio =  $-0.00$  cm, Erro absoluto médio =  $5.12$  cm, Percentual de inconsistência:  $0.00$  %



Y: Erro médio =  $0.27$  cm, Erro absoluto médio =  $1.17$  cm, Percentual de inconsistência:  $1.33$  %



$\theta$ : Erro médio =  $0.00$  °, Erro absoluto médio =  $0.63$  °, Percentual de inconsistência:  $0.00$  %



(b)

Figura 5.8: Experimento 2, (a) Mapa gerado a partir de giro-odometria utilizado no mapa global no experimento; (b) Erros de localização com relação à postura calculada utilizando dados de giro-odometria.

que são compatíveis com os obtidos no experimento anterior. Assim como no experimento anterior, pode-se verificar que estas estimativas são conservadoras, contudo mesmo com o resultado da matriz de covariâncias conservadora foi obtida uma estimativa inconsistente. Isto significa que apesar da matriz de covariâncias ser maior que o necessário, ela representa realmente a ordem da incerteza de estimação.

## 5.2 MAPEAMENTO

De uma forma geral, mapas são representações de um ambiente. Estas representações são utilizadas para possibilitar e auxiliar a navegação em regiões já exploradas. Em paralelo com a localização, o mapeamento é considerado um dos problemas básicos na viabilização de robôs autônomos [90]. Seguindo os mesmos procedimentos de [34], neste trabalho, é utilizada a representação de mapas geométricos, ou seja, a representação do ambiente é feita por elementos geométricos. Em geral, estas representações são suficientes para ambientes internos, visto que estes geralmente são construídos a partir de plantas arquitetônicas. Para a elaboração dos mapas são utilizados dois sensores exteroceptivos: um radar a laser que capta a distância do robô até os obstáculos mais próximos em um ângulo de aproximadamente  $270^\circ$  e uma câmera utilizada na captação de imagens do ambiente. Nesta etapa de mapeamento, existem várias sub-etapas como a segmentação das imagens das câmeras, correção e identificação de retas e pontos provenientes das medições do radar a laser, correspondência das estruturas do mapa local e global e fusão e dados. Todas estas etapas foram desenvolvidas previamente por G. A. Borges e estão descritas em [34]. Esta parte do trabalho visa propor uma alteração na forma de aplicação das restrições entre as estruturas presentes no mapa geométrico.

### 5.2.1 Estruturas presentes em um Mapa Geométrico

Como visto anteriormente, elementos do tipo linha e ponto são suficientes para se representar um mapa geométrico capaz de fornecer informações necessárias para se realizar a localização de um robô móvel com grande precisão. Estes elementos são compostos por primitivas em duas dimensões, no caso das linhas, estas podem ser representados pelas coordenadas polares  $l = \begin{bmatrix} \rho & \alpha \end{bmatrix}^T$  e no caso dos pontos, estes podem ser representados pelas coordenadas cartesianas  $p = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ , como melhor explicado no Anexo B. Estes elementos estão associados à ruídos gaussianos de média nula com matriz de covariância  $P_l$  e  $P_p$  associados à  $l$  e  $p$  respectivamente. Contudo, estas representações simples podem ser classificadas de acordo com outras identidades de mais alto nível, chegando à quatro estruturas ilustradas na Figura 5.9 e descritas a seguir:

---

<sup>1</sup>Adaptada de [91].

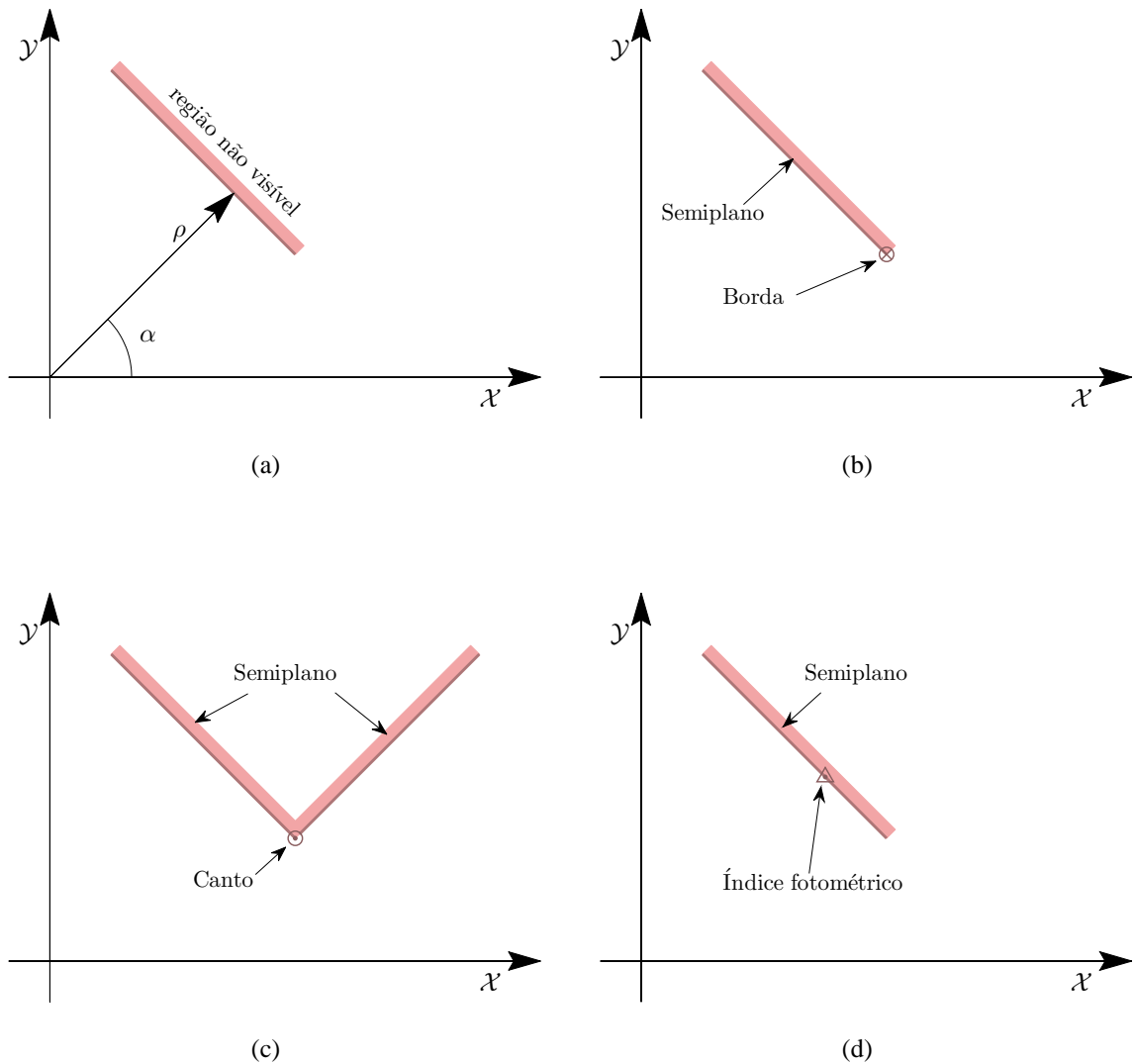


Figura 5.9: Representação das estruturas de um mapa Geométrico<sup>1</sup>. (a) Semi-plano; (b) Borda; (c) Canto; (d) Índice fotométrico.

1. *Semiplanos* correspondem a paredes e outros objetos planos. Os semiplanos são representados por três entidades: (i) uma linha infinita representando o obstáculo, (ii) dois pontos indicando o início e o fim do semiplano, (iii) um índice que indica o lado de observação do obstáculo.
2. *Bordas* correspondem as extremidades dos semiplanos, quando possuem uma incerteza compatível, elementos do tipo borda são representados por um ponto.
3. *Cantos* correspondem à intersecção de dois semiplanos. Elementos do tipo canto são representados por pontos.
4. *Índices fotométricos* correspondem a linhas verticais que foram observadas nas imagens de vídeo, mas não correspondem nem a elementos do tipo borda, e nem a ele-

mentos do tipo canto. Índices fotométricos são representados por pontos.

Estas estruturas são suficientes para representar diversos tipos de ambientes interiores e ainda pode-se deduzir algumas relações dentre estes elementos que podem auxiliar o processo de estimação do mapa:

1. Toda borda está associada a um semiplano, ou seja, o ponto que representa a estrutura do tipo borda deve estar sobre a linha que representa a estrutura do tipo semiplano que a borda está associada;
2. Todo canto está associado a dois semiplanos adjacentes, ou seja, o ponto que representa a estrutura do tipo canto deve estar sobre ambas as linhas que representam as estruturas do tipo semiplano ao qual o canto está associado.

Desta forma, as relações supracitadas podem ser utilizadas como restrições entre os estados na atualização do mapa. No entanto devido às incertezas associadas à todas as estruturas presentes no mapa geométrico, as restrições entre as estruturas devem ser satisfeitas de forma suave. Neste caso as estruturas do tipo borda podem não estar exatamente sobre a linha do semiplano associado, mas sim estar perto o suficiente em uma distância compatível com as incertezas das estruturas.

### 5.2.2 Fusão de dados e aplicação das restrições

Na estratégia original de [34] o método de intersecção de covariâncias (IC) [16] é utilizado na fusão de dados de todas as estruturas do mapa. A fusão das estruturas do mapa ocorre após a construção de um mapa local e da auto-localização do robô no mapa global. A partir desta nova estimativa da postura do robô, é feita a rotação e a translação do mapa local, então é feita a fusão de dados das estruturas correspondentes no mapa global. A utilização do método IC é aplicado em casos de estimação com correlação cruzada desconhecida, e resulta em estimativas consistentes, mas conservadoras devido ao desconhecimento da correlação. Como a covariância cruzada entre as estruturas não é mantida durante a estimação, a utilização deste método leva a melhores resultados do que os obtidos utilizando o filtro de Kalman (FK) em sua concepção original, pois as correlações não são mais conhecidas e então o FK não é mais o filtro ótimo. Para a fusão de dados a estrutura do mapa global é considerada como a estimativa *a priori*  $\hat{x}_{k|k-1}$  e a estrutura do mapa local (após a realizada rotação e translação) é considerada como a medição  $y_k$ . Portanto, tem-se que a medição é feita diretamente na seguinte forma linear:

$$y_k = \hat{x}_{k|k-1} + v_k$$

em que  $v_k$  é a incerteza associada à estrutura do mapa local. Como apresentado na seção anterior, a abordagem de mapas geométricos proposta em [34] sugere a utilização de restrições

do tipo: “um ponto  $p$  está posicionado sobre as linhas  $l_1, l_2, \dots, l_N$ ”. De acordo com o Anexo B, as restrições de um ponto podem ser escritas utilizando os parâmetros das retas na seguinte forma linear

$$c_k = D_k x_k + \nu_k$$

em que:

$$c_k = \begin{bmatrix} \rho_1 \end{bmatrix}, \quad D_k = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) \end{bmatrix}, \quad x_k = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}, \quad \nu_k = \begin{bmatrix} \sigma_{\nu,1} \end{bmatrix},$$

para estruturas do tipo borda, ou então

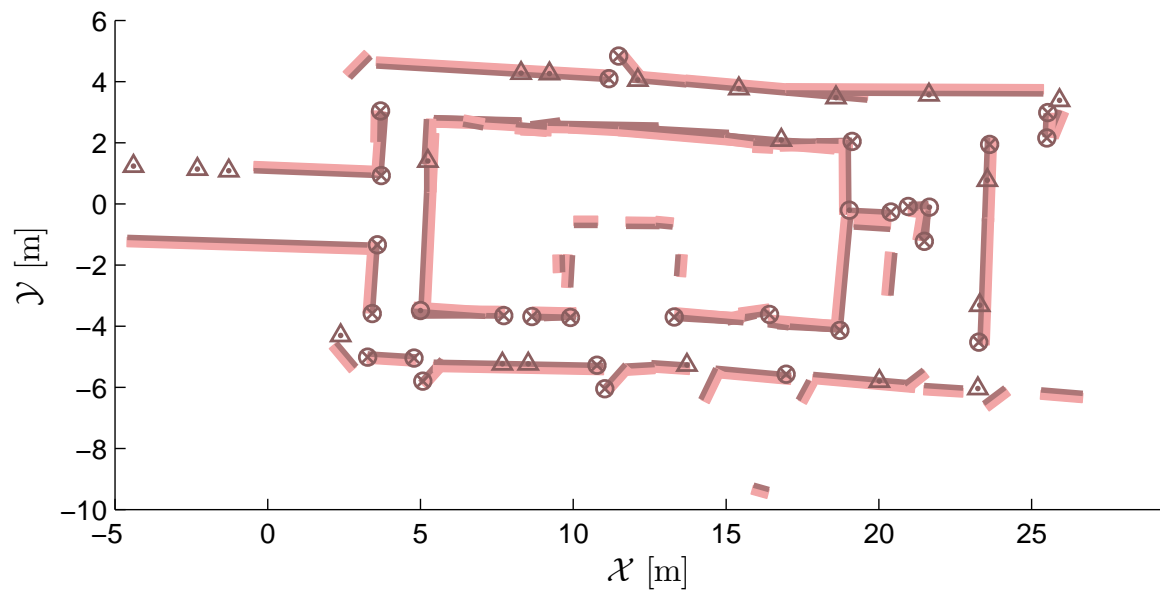
$$c_k = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}, \quad D_k = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) & \sin(\alpha_2) \end{bmatrix}, \quad x_k = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}, \quad \nu_k = \begin{bmatrix} \sigma_{\nu,1} \\ \sigma_{\nu,2} \end{bmatrix},$$

para estruturas do tipo canto. Também  $\sigma_{\nu,i}$  representa  $i$ -ésimo ruído branco gaussiano de média nula e variância obtida a partir da propagação de incertezas calculada utilizando o ponto  $p$  e a linha  $l_i$ . Definidos o modelo de medição e as restrições, pode-se então utilizar o método proposto para fusão de dados em sistemas com restrições e correlação desconhecida proposto na Seção 3.2, mais precisamente o Algoritmo 3.4, nos casos de bordas e cantos. Ou então pode-se utilizar o método de IC tradicional para os casos de semiplanos e índices fotométricos.

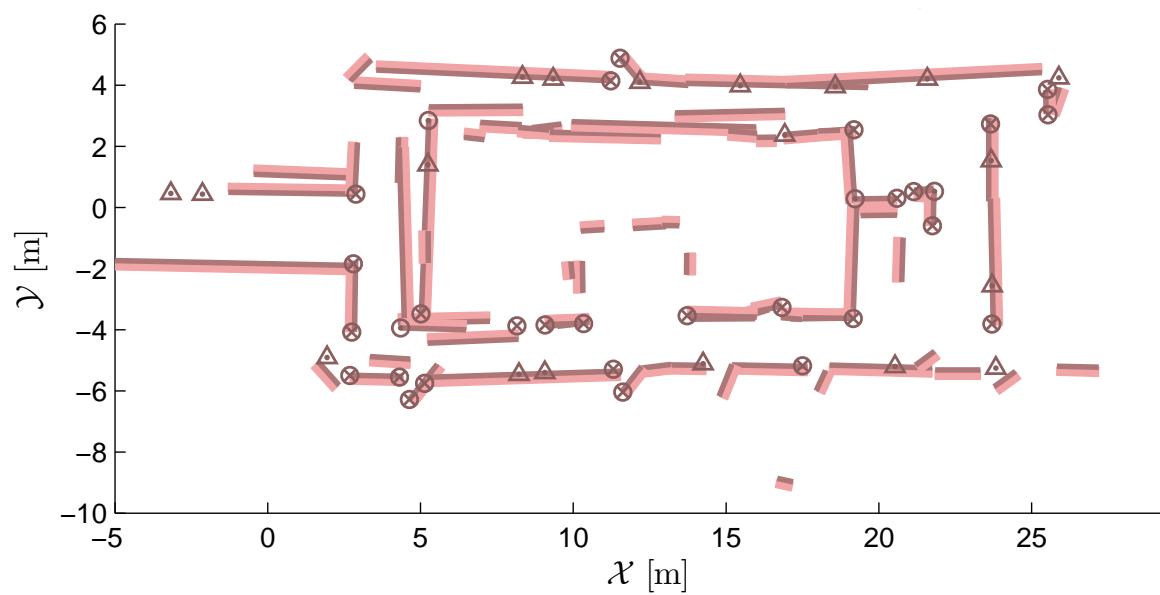
### 5.3 RESULTADOS PARA LOCALIZAÇÃO E MAPEAMENTO SIMULTÂNEOS

Esta seção apresenta os resultados experimentais para o método de localização e mapeamento simultâneos (SLAM) proposto neste trabalho. O robô Omni navegando em dois ambientes coletou dados provenientes do girômetro, de odometria, ladar e câmeras. Desta forma pode-se realizar o experimento de SLAM *off-line*. Os dados utilizados aqui são provenientes dos trabalhos [30, 34, 91]. Sabe-se que uma das formas de se avaliar a qualidade da estimativa de um mapa é utilizar ambientes com uma trajetória fechada. Então, neste trabalho, o método é avaliado em dois ambientes com esta característica. Os resultados para o primeiro ambiente são apresentados na Figura 5.10. Este ambiente é o mesmo utilizado neste capítulo para validar o método de auto-localização proposto. Neste experimento, 48 imagens foram coletadas a uma taxa de  $0,5 \text{ Hz}$ . A distância total percorrida é de  $55,93 \text{ m}$  com velocidades máximas de translação e rotação de  $85,94 \text{ cm/s}$  e  $24,61^\circ$  respectivamente. Como critério de validação, a Figura 5.7 (a) foi construída utilizando giro-odometria. Como a distância percorrida não foi muito grande, os dados provenientes da giro-odometria são medidas confiáveis da posição real relativa à posição inicial do robô. A Figura 5.10 (a) foi construída a partir do método proposto neste trabalho. A predição da postura do robô é realizada utilizando somente dados de odometria, que tende a aumentar os erros no processo



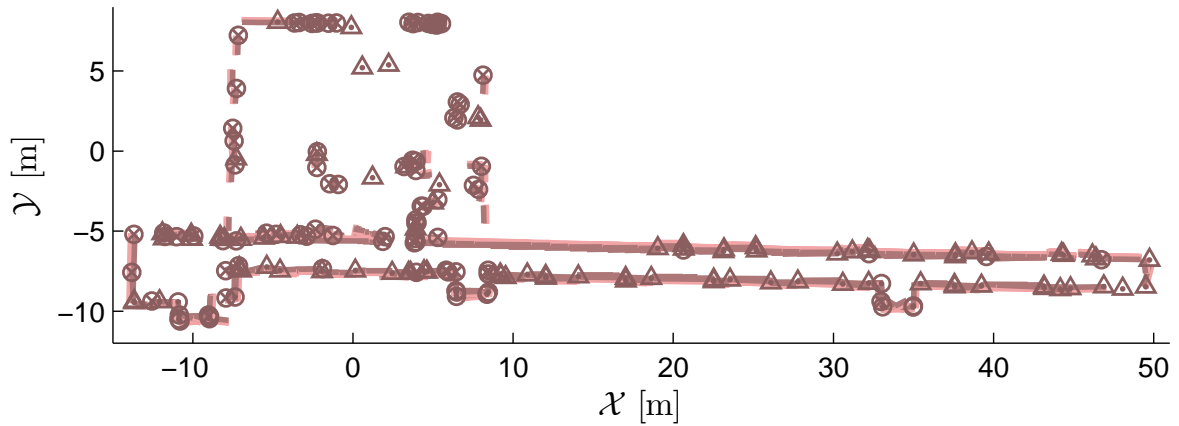


(a)

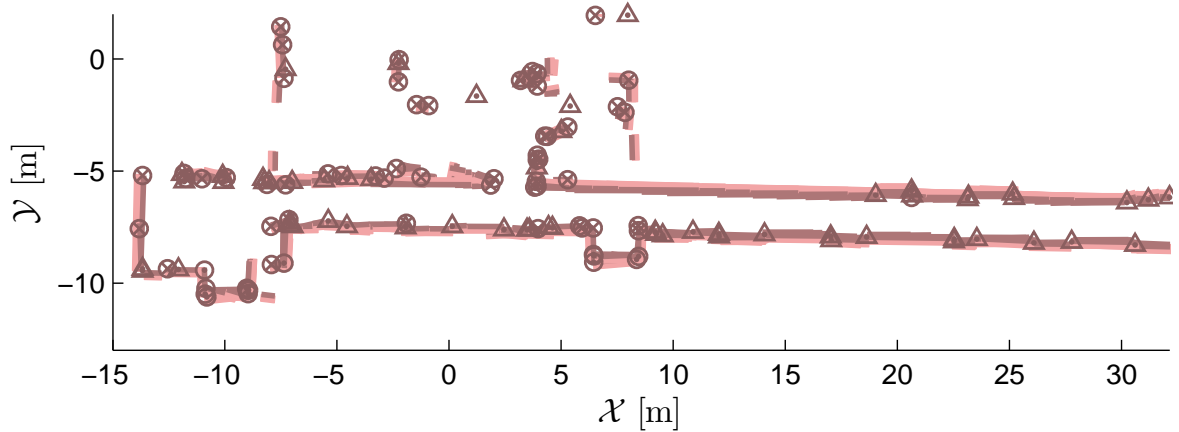


(b)

Figura 5.10: Construção do mapa para o Ambiente A utilizando a estratégia proposta neste trabalho. (a) Com restrições entre as estruturas; (b) Sem restrições entre as estruturas.



(a)



(b)

Figura 5.11: Construção do mapa para um ambiente mais complexo utilizando giro-odometria e proposta apresentada neste trabalho. (a) Visão completa do mapa. (b) Visão ampliada de uma região de interesse do mapa.

de auto-localização. No entanto analisando o mapa resultante fica claro que a utilização do método de localização proposto reduz os erros oriundos destas estimativas obtidas a partir da odometria. Pode-se destacar duas diferenças entre os mapas resultantes: o canto localizado em  $(5\text{ m}, 2\text{ m})$  não foi encontrado pelo método aqui proposto e há uma descontinuidade na parede localizada por volta de  $4\text{ m}$  no eixo  $\mathcal{Y}$ . Estes bons resultados no mapeamento também são consequência do emprego das restrições nas estruturas do mapa geométrico. Os avanços relacionados com a utilização das restrições pode ser verificada com a análise da Figura 5.10 (b) que é resultado do mesmo procedimento utilizado na construção do mapa, no entanto as restrições entre as estruturas não são utilizadas. Pode-se constatar que ambos mapas se parecem, no entanto os semiplanos da parte central do corredor não estão superpostos.

Os resultados para o segundo ambiente são apresentados na Figura 5.11. Neste ambiente

é navegada uma distância maior que no ambiente anterior, totalizando 133 *m*. Foram coletadas 162 imagens a uma taxa de 0,5 *Hz*. As velocidades máximas de translação e rotação foram de 58 *cm/s* e 25°/*s*, respectivamente. No ambiente anterior, o mapa construído a partir das estimativas obtidas a partir da giro-odometria era confiável, contudo isto não é mais válido quando se trata de trajetórias muito grandes. Nestes casos, mapas construídos utilizando a giro-odometria podem apresentar divergência após algum tempo. A solução para este ambiente consiste em utilizar os dados de giro-odometria para realizar a etapa de predição da postura do robô e o método proposto de localização para reduzir os erros que possam ocorrer após certo tempo. Na Figura 5.11 (a) está apresentado o mapa completo gerado após a última posição do robô. Pode-se verificar que o mapa convergiu, no sentido que o grande corredor está bem construído sem paredes descontínuas ou superpostas. A Figura 5.11 (b) ilustra a visão aproximada do mapa resultante confirmando que não há incoerências na região onde o robô fechou o laço da trajetória. Este resultado corrobora a eficiência do método proposto de localização e de aplicação das restrições.

## 6 CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

*“I find your lack of faith disturbing.”*

*Darth Vader*

Esta dissertação propôs o desenvolvimento de aplicações em robótica móvel e de reabilitação, os quais fazem parte de tópicos relacionados à estimação de estados. Foram propostas três aplicações: (i) sistema para realizar estimação de postura e da distância do pé com relação ao solo em uma prótese robótica de perna, (ii) método de estimação recursiva fundamentado pela teoria de estimação bayesiana com o intuito de realizar a auto-localização de um robô móvel utilizando mapas geométricos, (iii) método de fusão de estruturas com a correlação desconhecida e restrição de igualdade entre os estados nas estruturas do mapa geométrico. Para se chegar aos resultados destas aplicações, foram realizados estudos em estimação com restrição de igualdade.

Inicialmente, foi realizada uma investigação sobre sistemas com restrição de igualdade e sobre métodos baseados em filtro de Kalman previamente existentes na literatura para se resolver o problema de estimação para este tipo de sistema. Foi feita a comparação dos métodos filtro de Kalman com medições aumentadas (FKMA) e do filtro de Kalman com projeção da estimativa (FKPE), e demonstrado que ambos são equivalentes dadas certas condições. Foram revisadas as extensões não-lineares para estes métodos e então foi realizada a comparação destas extensões e foram apresentadas as diferenças para estas duas abordagens. Na sequência, foram descritas três contribuições deste trabalho em estimação com restrição de igualdade: uma abordagem para utilização de sistemas descritores na estimação de sistemas com restrição de igualdade e a extensão da estimação deste tipo de sistema utilizando filtragem robusta. Por fim, trata-se da terceira contribuição deste trabalho no que diz respeito a fusão de dados para sistemas com restrição de igualdade e correlação desconhecida.

Na sequência, foi apresentada a aplicação em robótica de reabilitação. Esta aplicação correspondeu à estimação de postura e da distância do pé com relação ao solo em uma prótese robótica de perna. O protótipo da prótese robótica foi apresentado com os sensores disponíveis e os requisitos do sistema. Também foram apresentados os modelos dinâmico e de medição, que utilizam, respectivamente, informação proveniente dos girômetros e sensores infra-vermelhos para medição de distância. Foram avaliados experimentalmente alguns métodos para a solução deste problema. Inicialmente utilizou-se somente o modelo dinâmico e os girômetros. A estimação da postura não foi satisfatória pois resultados absurdos foram obtidos, como exemplo toma-se que em alguns momentos o vetor unitário foi verificado com componentes de módulo superior a unidade. Como forma de eliminar este tipo de erro a segunda abordagem apresentada também utilizou somente o modelo dinâmico e os girômetros, no entanto foi empregado o FKPE de forma a garantir a norma unitária do

vetor de postura. Este resultado foi melhor que o inicial no que tange a erros absurdos como norma superior a unidade, no entanto devido ao viés inerente aos sensores girômetros, os resultados não foram satisfatórios, além da impossibilidade de se estimar a distância do pé com relação ao solo utilizando somente os girômetros. Portanto estes resultados levaram a terceira abordagem, que utilizou somente os sensores-infra vermelhos e o modelo de medição. Foi apresentado um método baseado na solução dos mínimos quadrados, e a solução foi em parte satisfatória, pois com a utilização deste modelo pôde-se estimar de forma completa a postura (postura e distância do pé com relação ao solo), porém o sistema ficou muito suscetível a ruídos de medição causando oscilações nas estimativas em diversos momentos do experimento de validação.

Uma forma de contornar os problemas obtidos até então foi a utilização da fusão de dados provenientes dos modelos dinâmico e de medição. Neste sentido foi implementado um método utilizando FKMA e o resultado obtido foi de qualidade amplamente superior aos anteriores. Durante quase a totalidade do experimento as estimativas foram compatíveis com o esperado, mas em um certo momento o estimador tendeu a divergir. Apesar desta divergência inicial, este estimador foi capaz de se recuperar e obter resultados compatíveis com a medida de referência. Com o intuito de se avaliar os estimadores propostos baseados em sistemas descritores, também foi implementada a estimação utilizando uma versão linearizada do sistema e aplicado em um sistema descritor. As estimativas foram compatíveis com o esperado, no entanto esta aplicação apresentou uma aderência menor a restrição de norma unitária. Esta menor aderência deve-se ao fato do sistema ser linearizado com relação à estimativa *a priori* de postura e isto causa uma diferença nos parâmetros do modelo como um todo. Como forma de contornar esta diferença nos parâmetros foi implementada uma versão robusta à incerteza dos parâmetros para o sistema descritor linearizado. Com este estimador, o resultado obtido foi melhor que na forma linearizada em todos os sentidos. O erro com relação à medida de referência foi menor e houve uma maior aderência à restrição de norma unitária. Contudo esta aplicação utilizando sistemas descritores exige uma eficiência computacional maior pois há cálculos de matrizes inversas de dimensão maior se comparado à solução baseada em FKMA. Ao final pôde-se constatar o êxito das soluções baseadas em fusão de dados e também a funcionalidade dos métodos propostos baseados em sistemas descritores, mesmo em sistemas não-lineares.

A última parte deste trabalho trata de uma aplicação desenvolvida para o problema de localização e mapeamento simultâneos (SLAM). Este trabalho serviu para complementar algumas partes do trabalho desenvolvido por Borges [34]. Inicialmente foi detalhado o desenvolvimento de um método de auto-localização utilizando conceitos de estimação bayesiana. Este método passa pela minimização de uma função de custo similar à encontrada em [34], no entanto a partir de uma mudança de variáveis verifica-se uma função mais simples de ser resolvida e que nos casos em que as matrizes são bem condicionadas, o método apresentado possui uma única solução direta, não sendo necessária a avaliação da matriz Hessiana. Este método foi avaliado em simulação e com base em um experimento *off-line* implementado a

partir de dados coletados pelo robô Omni. Estes resultados corroboram a eficiência do método proposto. Na sequência foi trabalhada a utilização de restrições entre as estruturas de um mapa geométrico como forma de melhorar o resultado no processo de SLAM. Utilizando a formulação proposta para a fusão de dados com correlação desconhecida e restrições de igualdade foram desenvolvidos mapas para dois ambientes. A partir destes resultados, são sugeridos os avanços relacionados à utilização dos métodos de localização e fusão de dados propostos.

Com o intuito de complementar e enriquecer os trabalhos desenvolvidos e os resultados alcançados até aqui, são feitas algumas propostas de trabalhos futuros na mesma linha do que foi apresentado neste documento. Estas propostas são:

1. O desenvolvimento de métodos robustos com relação a falsas medidas para o estimador de postura da prótese;
2. O desenvolvimento de um método para estimação com restrições de igualdade e correlação desconhecida utilizando descritores;
3. Utilizar os princípios de estimação robusta a incertezas de parâmetros no método de auto-localização;
4. Melhorar o método de auto-localização em robôs móveis, principalmente considerando outras formas para a matriz  $P_{h,i}$  além de  $P_{h,i} = \sigma I_2$ .



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] C. A. Cascão Jr., R. U. Ferreira, E. Beckmann, G. A. Borges, J. Y. Ishihara, e A. da Rocha, “Estudo e desenvolvimento de uma prótese ativa de perna comandada por sinais eletromiográficos,” *VII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente / II IEEE Latin-American Robotics Symposium*, 2005.
- [2] S. Zahedi, “The results of the field trail of the ENDOLITE intelligent prosthesis,” *Proceedings XII International Congress INTERBOR*, 1993.
- [3] J. Kastner, R. Nimmervoll, e I. P. Wagner, “What are the benefits of the Otto Bock C-leg? A comparative gait analysis of C-leg, 3R45 and 3R80,” *Med. Orthop. Tech*, vol. 119, pp. 131–137, 1999.
- [4] D. Zlatnik, B. Steiner, e G. Schweitzer, “Finite-state control of a trans-femoral (TF) prosthesis,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 3, pp. 408–420, 2002.
- [5] J.-H. Kim e J.-H. Oh, “Development of an above knee prosthesis using MR damper and leg simulator,” *Proceedings 2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, pp. 3686–3691, 2001.
- [6] H. Herr e A. Wilkenfeld, “User-adaptive control of a magnetorheological prosthetic knee,” *Industrial Robot: An International Journal*, vol. 30, no. 1, pp. 42–55, 2003.
- [7] J. L. Johansson, D. M. Sherrill, P. O. Riley, B. Paolo, e H. Herr, “A clinical comparison of variable-damping and mechanically passive prosthetic knee devices,” *American Journal of Physical Medicine & Rehabilitation*, vol. 84, pp. 563–575, 2005.
- [8] C. Li, M. Tokuda, J. Furusho, K. Koyanagi, S. Morimoto, Y. Hashimoto, A. Nakagawa, e Y. Akazawa, “Research and development of the intelligently–controlled prosthetic ankle joint,” *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pp. 1114–1119, Jun 2006.
- [9] G. Klute, J. Czerniecki, e B. Hannaford, “Development of powered prosthetic lower limb,” *Proceedings of the 1st National Mtg, Veterans Affairs Rehab*, Oct 1998.
- [10] S. K. Au, J. Weber, e H. Herr, “Powered ankle–foot prosthesis improves walking metabolic economy,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 25, no. 1, pp. 51–66, Feb 2009.
- [11] K. Hirai, M. Hirose, Y. Haikawa, e T. Takenaka, “The development of Honda humanoid robot,” *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 1321–1326, May 1998.



- [12] Y. Sakagami, R. Watanabe, C. Aoyama, S. Matsunaga, N. Higaki, e K. Fujimura, “The intelligent ASIMO: system overview and integration,” *IEEE International Conference on Intelligent Robots and System, 2002*, vol. 3, pp. 2478–2483, 2002.
- [13] I.-W. Park, J.-Y. Kim, J. Lee, e J.-H. Oh, “Mechanical design of humanoid robot platform KHR-3 (KAIST humanoid robot 3: HUBO),” *5th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 321–326, Dec 2005.
- [14] A. Delis, J. Carvalho, A. da Rocha, F. Nascimento, e G. Borges, “Development of a myoelectric controller based on knee angle estimation,” *Proceedings 2nd International Conference on Biomedical Electronics and Devices*, pp. 97–103, 2009.
- [15] R. Smith e P. Cheeseman, “On the representation and estimation of spatial uncertainty,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 5, no. 4, pp. 56–68, 1986.
- [16] S. Julier e J. Uhlmann, “A non-divergent estimation algorithm in the presence of unknown correlations,” vol. 4, Jun 1997, pp. 2369–2373 vol.4.
- [17] J. K. Uhlmann, S. J. Julier, e M. Csorba, “Nondivergent simultaneous map building and localization using covariance intersection,” S. A. Speigle, Ed., vol. 3087, no. 1. SPIE, 1997, pp. 2–11.
- [18] S. J. Julier e J. K. Uhlmann, “Using covariance intersection for SLAM,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 55, no. 1, pp. 3 – 20, 2007.
- [19] M. Montemerlo, S. Thrun, D. Koller, e B. Wegbreit, “FastSLAM: A factored solution to the simultaneous localization and mapping problem,” in *Proceedings of the AAAI National Conference on Artificial Intelligence*. Edmonton, Canada: AAAI, 2002.
- [20] K. P. Murphy, “Bayesian map learning in dynamic environments,” in *In Neural Info. Proc. Systems (NIPS)*. MIT Press, 2000, pp. 1015–1021.
- [21] A. Elfes, “Occupancy grids: a probabilistic framework for robot perception and navigation,” Tese de Doutorado, Pittsburgh, PA, USA, 1989.
- [22] B. Kuipers e Y.-T. Byun, “A robot exploration and mapping strategy based on a semantic hierarchy of spatial representations,” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 8, no. 1-2, pp. 47–63, 1991.
- [23] S. Thrun, W. Burgard, e D. Fox, “A probabilistic approach to concurrent mapping and localization for mobile robots,” *Mach. Learn.*, vol. 31, no. 1-3, pp. 29–53, 1998.
- [24] J. J. Leonard, H. Jacob, e S. Feder, “Decoupled stochastic mapping,” *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, vol. 26, pp. 561–571, 1999.
- [25] I. Cox, “Blanche: An experiment in guidance and navigation of an autonomous robot vehicle,” *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, vol. 7, pp. 193–204, 1991.

- [26] B. Yamauchi e R. Beer, “Spatial learning for navigation in dynamic environments,” *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, vol. 26, no. 3, pp. 496–505, Jun 1996.
- [27] S. Thrun, D. Fox, W. Burgard, e F. Dellaert, “Robust monte carlo localization for mobile robots,” *Artificial Intelligence*, vol. 128, no. 1-2, pp. 99–141, 2000.
- [28] S. I. Roumeliotis e G. A. Bekey, “Bayesian estimation and kalman filtering: A unified framework for mobile robot localization,” in *ICRA*, 2000, pp. 2985–2992.
- [29] G. A. Borges e M. J. Aldon, “Optimal mobile robot pose estimation using geometrical maps,” *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, vol. 18, no. 1, pp. 87–94, 2002.
- [30] ———, “Robustified estimation algorithms for mobile robot localization based on geometrical environment maps.” *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 45, pp. 131–159, mar 2003.
- [31] L. Armesto, G. Ippoliti, S. Longhi, e J. Tornero, “Probabilistic self-localization and mapping - an asynchronous multirate approach,” *Robotics & Automation Magazine, IEEE*, vol. 15, no. 2, pp. 77–88, June 2008.
- [32] J.-S. Gutmann e C. Schlegel, “Amos: comparison of scan matching approaches for self-localization in indoor environments,” in *Advanced Mobile Robot, 1996., Proceedings of the First Euromicro Workshop on*, Oct 1996, pp. 61–67.
- [33] F. Lu e E. Milios, “Globally consistent range scan alignment for environment mapping,” *Auton. Robots*, vol. 4, no. 4, pp. 333–349, 1997.
- [34] G. A. Borges, “Cartographie de l’environnement et localisation robuste pour la navigation de robots mobiles,” Tese de Doutorado, Département de Robotique, LIRMM/CNRS/ Université Montpellier II, Montpellier, France, 2002.
- [35] B. O. S. Teixeira, J. Chandrasekar, L. A. B. Torres, L. A. Aguirre, e D. S. Bernstein, “Unscented filtering for equality-constrained nonlinear systems,” *American Control Conference, 2008*, pp. 39–44, Jun 2008.
- [36] ———, “State estimation for linear and non-linear equality-constrained systems,” *International Journal of Control*, vol. 82, no. 5, pp. 918–936, May 2009.
- [37] E. L. Haseltine e J. B. Rawlings, “A critical evaluation of extended Kalman filtering and moving horizon estimation,” Texas-Wiscosin Modeling and Control Consortium (TWMCC), Tech. Rep., 2003.
- [38] M. Tahk e J. L. Speyer, “Target tracking problems subject to kinematic constraints,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 35, no. 3, pp. 324–326, Mar 1990.

- [39] A. T. Alouani e W. D. Blair, “Use of a kinematic constraint in tracking constant speed, maneuvering targets,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 7, pp. 1107–1111, Jul 1993.
- [40] Y. T. Chiang, L. S. Wang, F. R. Chang, e H. M. Peng, “Constrained filtering method for attitude determination using GPS and gyro,” *Radar, Sonar and Navigation, IEE Proceedings -*, vol. 149, no. 5, pp. 258–264, Oct 2002.
- [41] J. De Geeter, H. Van Brussel, e J. De Schutter, “A smoothly constrained Kalman filter,” *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, vol. 19, no. 10, pp. 1171–1177, Oct 1997.
- [42] G. Nachi, “Kalman filtering in the presence of state space equality constraints,” *Chinese Control Conference CCC 2007.*, pp. 107–113, 2007.
- [43] W. Wen e H. F. Durrant-Whyte, “Model based active object localisation using multiple sensors,” *Intelligent Robots and Systems '91. Intelligence for Mechanical Systems, Proceedings IROS '91. IEEE/RSJ International Workshop on*, pp. 1448–1452 vol.3, Nov 1991.
- [44] C. V. Rao, J. B. Rawlings, e J. H. Lee, “Constrained linear state estimation—a moving horizon approach,” *Automatica*, vol. 37, no. 10, pp. 1619 – 1628, 2001.
- [45] C. V. Rao, J. B. Rawlings, e D. Q. Mayne, “Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: stability and moving horizon approximations,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 2, pp. 246–258, Feb 2003.
- [46] Z. Wang, Z. Liu, R. Pei, e X. Ban, “A moving horizon estimation approach to constrained linear system with uncertain model,” *American Control Conference. Proceedings of the 2003*, vol. 3, pp. 2726–2731, Jun 2003.
- [47] J. B. Mare e J. A. D. Doná, “Symmetry between constrained reference tracking and constrained state estimation,” *Automatica*, vol. 45, no. 1, pp. 207–211, 2009.
- [48] L. S. Wang, Y. T. Chiang, e F. R. Chang, “Filtering method for nonlinear systems with constraints,” *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, vol. 149, no. 6, pp. 525–531, Nov 2002.
- [49] Y. Cheng e T. Singh, “Efficient particle filtering for road-constrained target tracking,” *Information Fusion, Proceedings of the 8th International Conference on*, vol. 1, p. 8, Jul 2005.
- [50] L. Lang, W. shiang Chen, B. R. Bakshi, P. K. Goel, e S. Ungarala, “Bayesian estimation via sequential Monte Carlo sampling—constrained dynamic systems,” *Automatica*, vol. 43, no. 9, pp. 1615 – 1622, 2007.

- [51] J. Prakash, S. C. Patwardhan, e S. L. Shah, “Constrained state estimation using the ensemble particle filters,” *Proceedings of the IFAC 17th World Congress*, pp. 6472–6477, 2008.
- [52] G. N. Korres, “A robust method for equality constrained state estimation,” *Power Engineering Review, IEEE*, vol. 21, no. 12, pp. 69–69, Dec 2001.
- [53] K. Mahata e T. Söderström, “Improved estimation performance using known linear constraints,” *Automatica*, vol. 40, no. 8, pp. 1307 – 1318, 2004.
- [54] J. P. Norton, “Estimation of linearly constrained parameters via Kalman filter,” *Electronics Letters*, vol. 15, no. 22, pp. 319–320, 1979.
- [55] W. Wen e H. F. Durrant-Whyte, “Model-based multi-sensor data fusion,” *Robotics and Automation, Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on*, vol. 2, pp. 1720–1726, May 1992.
- [56] T. Viéville e P. Sander, “Using pseudo Kalman filters in the presence of constraints, application to sensing behaviours,” Valbonne, France, Tech. Rep. 1669, 1992.
- [57] D. Simon e T. L. Chia, “Kalman filtering with state equality constraints,” *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 1, pp. 128–136, Jan 2002.
- [58] A. E. Nordsjo, “A constrained extended Kalman filter for target tracking,” *Radar Conference, 2004. Proceedings of the IEEE*, pp. 123–127, Apr 2004.
- [59] S. Ko e R. R. Bitmead, “State estimation of linear systems with state equality constraints,” *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, 2005.
- [60] C. Yang e E. Blasch, “Kalman filtering with nonlinear state constraints,” *Information Fusion, Proceedings of the 9th International Conference on*, pp. 1–8, Jul 2006.
- [61] S. Ko e R. R. Bitmead, “State estimation for linear systems with state equality constraints,” *Automatica*, vol. 43, no. 8, pp. 1363–1368, 2007.
- [62] S. J. Julier e J. J. LaViola, “On Kalman filtering with nonlinear equality constraints,” *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 55, no. 6, pp. 2774–2784, Jun 2007.
- [63] G. Nachi e R. Hauser, “Kalman filtering with equality and inequality state constraints,” 2007.
- [64] B. O. S. Teixeira, J. Chandrasekar, L. A. B. Torres, L. A. Aguirre, e D. S. Bernstein, “State estimation for equality-constrained linear systems,” *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*, pp. 6220–6225, Dec 2007.

- [65] B. O. S. Teixeira, J. Chandrasekar, H. J. Palanthandalam-Madapusi, L. A. B. Torres, L. A. Aguirre, e D. S. Bernstein, “Gain-constrained Kalman filtering for linear and nonlinear systems,” *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 9, pp. 4113–4123, Sep 2008.
- [66] R. Kandepu, L. Imsland, e B. A. Foss, “Constrained state estimation using the unscented Kalman filter,” *Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on*, pp. 1453–1458, Jun 2008.
- [67] S. Kolas, B. A. Foss, e T. S. Schei, “Constrained nonlinear state estimation based on the UKF approach,” *Computers & Chemical Engineering*, vol. In Press, Corrected Proof, pp. –, 2009.
- [68] J. Y. Ishihara, M. H. Terra, G. A. Borges, G. G. Scandaroli, R. S. Inoue, e V. Grassi Jr., “Applications of robust descriptor Kalman filter in robotics,” in *Kalman Filter: Recent Advances and Applications.*, V. M. Moreno e A. Pigazo, Eds. Vienna, Austria: I-Tech Education and Publishing KG, April 2009, pp. 507–534.
- [69] G. G. Scandaroli, G. A. Borges, J. Y. Ishihara, M. H. Terra, A. F. da Rocha, e F. A. de O. Nascimento, “Estimation of foot orientation with respect to ground for an above knee robotic prosthesis,” in *Intelligent Robots and Systems, 2009. IROS 2009. IEEE/RSJ International Conference on*, Oct 2009.
- [70] G. G. Scandaroli, G. A. Borges, J. Y. Ishihara, A. F. Rocha, e F. A. de Oliveira Nascimento, “Foot pose estimation system for robotic leg prostheses,” in *ISSNIP Biosignals and Biorobotics Conference 2010*, Vitoria, Brazil, Jan. 2010.
- [71] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering*, no. 82 (Series D), pp. 35–45, 1960.
- [72] B. D. O. Anderson e J. B. Moore, *Optimal Filtering*. Dover Publications, Jan 2005.
- [73] A. H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, 1970.
- [74] D. Simon e D. Simon, “Kalman filtering with inequality constraints for turbofan engine health estimation,” *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, vol. 153, no. 3, pp. 371–378, May 2006.
- [75] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, 2<sup>o</sup> ed. Addison–Wesley, May 1989.
- [76] T. Chia, “Parameter identification and state estimation of constrained systems,” Tese de Doutorado, Case Western Reserve University, Cleveland, OH, 1985.
- [77] K. Zhou, J. C. Doyle, e K. Glover, *Robust and optimal control*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1996.

- [78] R. Nikoukhah, A. Willsky, e B. Levy, “Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 37, no. 9, pp. 1325–1342, Sep 1992.
- [79] J. Y. Ishihara, M. H. Terra, e J. C. T. Campos, “Optimal recursive estimation for discrete-time descriptor systems,” *Intern. J. Syst. Sci.*, vol. 36, no. 10, pp. 605–615, 2005.
- [80] ———, “Robust Kalman filter for descriptor systems,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 51, no. 8, pp. 1354–1354, Aug 2006.
- [81] P. S. Maybeck, *Stochastic models, estimation, and control*, ser. Mathematics in Science and Engineering, 1979.
- [82] G. G. Scandaroli, G. A. Borges, A. F. da Rocha, e F. A. O. Nascimento, “Adaptive knee joint control for an active amputee prosthesis,” in *Robotic Symposium, 2008. LARS '08. IEEE Latin American*, Salvador, Brazil, Oct 2008, pp. 164–169.
- [83] I. Bar-Itzhack e R. Harman, “Optimized triad algorithm for attitude determination,” *AIAA J. of Guidance, Control, and Dynamics (Engineering Note)*, vol. 20, no. 1, pp. 208–211, 1997.
- [84] D. Simon, *Optimal State Estimation*. Wiley & Sons, 2006.
- [85] Y. Ho e R. Lee, “A Bayesian approach to problems in stochastic estimation and control,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 9, no. 4, pp. 333–339, Oct 1964.
- [86] Y. Bar-Shalom e T. E. Fortmann, *Tracking and data association*. San Diego, CA, USA: Academic Press Professional, Inc., 1987.
- [87] A. Papoulis e U. S. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, Dec 2001.
- [88] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, e B. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 2<sup>o</sup> ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992.
- [89] R. M. Haralick, “Propagating covariances in computer vision,” in *Proceedings of International Conference on Pattern Recognition ICPR94*, Jerusalem, Israel, Set. 1994, pp. 493–498.
- [90] S. Thrun, W. Burgard, e D. Fox, *Probabilistic Robotics (Intelligent Robotics and Autonomous Agents)*. The MIT Press, Sep 2005.
- [91] G. A. Borges e M. J. Aldon, “A decoupled approach for simultaneous stochastic mapping and mobile robot localization,” in *Intelligent Robots and System, 2002. IEEE/RSJ International Conference on*, 2002, pp. 558–563.



## APÊNDICES





## A EQUIVALÊNCIA ENTRE FILTRO DE KALMAN COM MEDIÇÕES AUMENTADAS E SISTEMAS DESCRITORES

Neste capítulo é apresentada a equivalência entre o Filtro de Kalman de Medições Aumentadas (FKMA) e a formulação de estimação com sistemas descritores apresentada na Seção 3.1. Os três lemas seguintes são necessários para tal.

**Lema A.1** (Inversão de Matrizes – [73] pp. 261-262). Sejam  $P$ ,  $R$ ,  $M$  matrizes de dimensões compatíveis. Suponha  $P \geq 0$  e  $R > 0$ . São válidas as seguintes relações:

$$(i) (I + PM^T R^{-1} M)^{-1} = I - PM^T (P^{-1} + MR^{-1} M^T)^{-1}$$

$$(ii) (I + PM^T R^{-1} M)^{-1} PM^T R^{-1} = PM^T (MPM^T + R)^{-1}$$

e se  $P > 0$ :

$$(iii) (I + PM^T R^{-1} M)^{-1} P = (P^{-1} + M^T R^{-1} M)^{-1}$$

**Lema A.2.** Sejam  $P$ ,  $R$ ,  $M$  matrizes de dimensões compatíveis, e também  $P > 0$  e  $R > 0$ . Portanto as seguintes relações são válidas:

$$(i) P - PM^T (MPM^T + R)^{-1} MP = (P^{-1} + M^T R^{-1} M)^{-1}$$

$$(ii) I - PM^T (MPM^T + R)^{-1} M = (P^{-1} + M^T R^{-1} M)^{-1} P^{-1}$$

$$(iii) PM^T (MPM^T + R)^{-1} = (P^{-1} + M^T R^{-1} M)^{-1} M^T R^{-1}$$

**Demonstração.** Imediato a partir do Lema A.1. □

**Lema A.3** ([78]). Sejam  $R > 0$ , e  $A$  possui posto coluna completo, as matrizes possuem dimensões compatíveis. Portanto,  $A^T R^{-1} A$  é invertível, e tem-se:

$$(i) (A^T R^{-1} A)^{-1} = - \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$(ii) (A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto faz-se a seguinte proposição de equivalência entre o FKMA e o Filtro de Kalman para Sistemas Descritores (FKSD).

**Proposição A.4.** Assuma que

$$\hat{x}_{k-1|k-1}^{sd} = \hat{x}_{k-1|k-1}^{ma}, \quad e \quad P_{k-1|k-1}^{sd} = P_{k-1|k-1}^{ma}.$$

Então o resultado obtido por uma etapa do FKSD aplicado ao Algoritmo 3.1 é algebricamente equivalente ao FKMA, ou seja,  $\hat{x}_{k|k}^{sd} = \hat{x}_{k|k}^{ma}$  e  $P_{k|k}^{sd} = P_{k|k}^{ma}$ .

**Demonstração.** Considere inicialmente (3.6)

$$\mathcal{P}_{k|k} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0 & E_{k+1} \\ 0 & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

utilizando o Lema A.3, rescreve-se como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k|k} &= \left( \begin{bmatrix} E_{k+1}^T & H_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0 \\ 0 & V_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_k \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ \mathcal{P}_{k|k} &= (E_{k+1}^T (F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k)^{-1} E_{k+1} + H_k^T V_k^{-1} H_k)^{-1} \end{aligned}$$

neste caso considera-se que  $(F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k)$  é invertível, no entanto, se esta premissa não for verdade, pode-se igualmente utilizar a pseudo-inversa. A partir da mudança de variáveis (3.3) e da definição (3.4), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k|k} &= \left( \begin{bmatrix} I & 0 \\ D_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & U_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ D_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_k^T R_k^{-1} C_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^\dagger \\ \mathcal{P}_{k|k} &= \left( \begin{bmatrix} (A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k)^{-1} + D_k^T U_k^{-1} D_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_k^T R_k^{-1} C_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^\dagger \\ \mathcal{P}_{k|k} &= \begin{bmatrix} ((A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k)^{-1} + D_k^T U_k^{-1} D_k + C_k^T R_k^{-1} C_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

a partir da mudança de variáveis (3.7), obtém-se

$$\begin{aligned} P_{k|k}^{\text{sd}} &= ((A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k)^{-1} + D_k^T U_k^{-1} D_k + C_k^T R_k^{-1} C_k)^{-1} \\ P_{k|k}^{\text{sd}} &= \left( (A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k)^{-1} + \begin{bmatrix} C_k^T & D_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & U_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix} \right)^{-1} \end{aligned}$$

e a partir do Lema A.2, escreve-se

$$P_{k|k}^{\text{sd}} = \left( I - P_{k|k-1} \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix} P_{k|k-1} \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} R_k & 0 \\ 0 & U_k \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} C_k \\ D_k \end{bmatrix} \right) P_{k|k-1}$$

em que  $P_{k|k-1} = A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k$ . Portanto considerando  $P_{k-1|k-1}^{\text{sd}} = P_{k-1|k-1}^{\text{ma}}$ , e também a mudança de variáveis (2.12) e o cálculo da matriz de covariâncias (2.15), verifica-se

$$P_{k|k}^{\text{sd}} = \left( I - P_{k|k-1}^{\text{ma}} (C_k^{\text{ma}})^T (C_k^{\text{ma}} P_{k|k-1}^{\text{ma}} (C_k^{\text{ma}})^T + R_k^{\text{ma}})^{-1} C_k^{\text{ma}} \right) P_{k|k-1} = P_{k|k}^{\text{ma}}$$

portanto segue a igualdade no cálculo da matriz de covariâncias para o FKMA e o FKSD.

Para a estimativa, deve-se considerar inicialmente (3.5)

$$\hat{x}_{k|k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0 & E_{k+1} \\ 0 & V_k & H_k \\ E_{k+1}^T & H_k^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \hat{x}_{k-1|k-1} \\ y_k \end{bmatrix}$$

e a partir da utilização do Lema A.3 e (3.6) pode-se escrever

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{k|k} &= \mathcal{P}_{k|k} \begin{bmatrix} E_{k+1} \\ H_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k & 0 \\ 0 & V_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \hat{\chi}_{k-1|k-1} \\ y_k \end{bmatrix} \\ \hat{\chi}_{k|k} &= \mathcal{P}_{k|k} \left( E_{k+1}^T (F_k \mathcal{P}_{k-1|k-1} F_k^T + W_k) F_k \hat{\chi}_{k-1|k-1} + H_k^T V_k y_k \right)\end{aligned}$$

e utilizando (A.1), as mudanças de variáveis (3.3), a definição (3.4) e (3.7), pode-se escrever

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k}^{\text{sd}} &= \left( (A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k)^{-1} + D_k^T U_k^{-1} D_k + C_k^T R_k^{-1} C_k \right)^{-1} \\ &\quad \times \left( (A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k)^{-1} A_k \hat{x}_{k-1|k-1} + D_k^T U_k^{-1} c_k + C_k^T R_k^{-1} y_k \right)\end{aligned}$$

definindo  $\hat{x}_{k|k-1}^{\text{sd}} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}}$ ,  $P_{k|k-1} = A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k$ , e utilizando o Lema A.2 com a mudança de variáveis (2.12) verifica-se

$$\hat{x}_{k|k}^{\text{sd}} = \hat{x}_{k|k-1}^{\text{sd}} + P_{k|k-1} C_k^{\text{ma}} (C_k^{\text{ma}} P_{k|k-1} (C_k^{\text{ma}})^T + R_k^{\text{ma}})^{-1} (y_k^{\text{ma}} - C_k \hat{x}_{k|k-1}^{\text{sd}}).$$

Portanto considerando  $\hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{sd}} = \hat{x}_{k-1|k-1}^{\text{ma}}$  e  $P_{k-1|k-1}^{\text{sd}} = P_{k-1|k-1}^{\text{ma}}$  verifica-se a equivalência algébrica para o cálculo das estimativas para o FKMA e o FKSD.



## B CONCEITOS DE ROBÓTICA MÓVEL

Neste capítulo são apresentados conceitos básicos de robótica móvel como transformação de coordenadas, a definição dos elementos básicos presentes em um mapa geométrico e também a representação unificada para estes elementos.

### B.1 POSTURA DE UM ROBÔ E TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Em aplicações de robótica móvel é comum definir um vetor  $z = \begin{bmatrix} v^T & \theta \end{bmatrix}^T$ , em que  $v = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ , e  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  como representação da postura (posição e orientação) de um robô genérico em um sistema de coordenadas global  $\mathcal{R}^g = \mathcal{X}\mathcal{Y}$ . A postura  $z$  de um robô relaciona o sistema de coordenadas global  $\mathcal{R}^g$  com o sistema de coordenadas local  $\mathcal{R}^l = \mathcal{X}'\mathcal{Y}'$  posicionado no robô, como apresentado na Figura B.1 (a). De uma outra forma,  $\begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}^T$  corresponde à posição relativa do robô no sistema de coordenadas global  $\mathcal{R}^g$ , e a orientação dado pelo ângulo  $\theta$  com respeito ao eixo  $\mathcal{X}$ . Como apresentado na Figura B.1 (b), pode-se relacionar um ponto  $p = \begin{bmatrix} p_x & p_y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$  no sistema de coordenadas global  $\mathcal{R}^g$  com o sistema de coordenadas local  $\mathcal{R}^l$  da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} - v \right), \quad (\text{B.1})$$

pode-se definir

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

em que  $R(\theta)$  é chamada matriz de rotação e suas propriedades resultam nas relações:

$$R^T(\theta) = R^{-1}(\theta) \quad (\text{B.3})$$

$$R^T(\theta)R(\theta) = I_2 \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial R(\theta)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{bmatrix} = R(\pi/2)R(\theta) = R(\theta)R(\pi/2) \quad (\text{B.5})$$

Neste trabalho de robótica móvel, considera-se que o robô move-se sobre um plano. Assim, a notação  $z = \begin{bmatrix} v_x & v_y & \theta \end{bmatrix}^T$  representa que o robô está localizado nas coordenadas  $(v_x, v_y)$  com um certo ângulo de rotação  $\theta$ . Esta definição pode ser estendida de forma que incertezas na posição e ângulo sejam acrescentadas no modelo. Desta forma, supõe-se que a postura  $z$  seja perturbada por um ruído de distribuição  $\mathcal{N}(0, P_z)$ . Desta forma a posição do robô é formado pelo par:

$$\mathcal{Z} = \{z, P_z\}. \quad (\text{B.6})$$

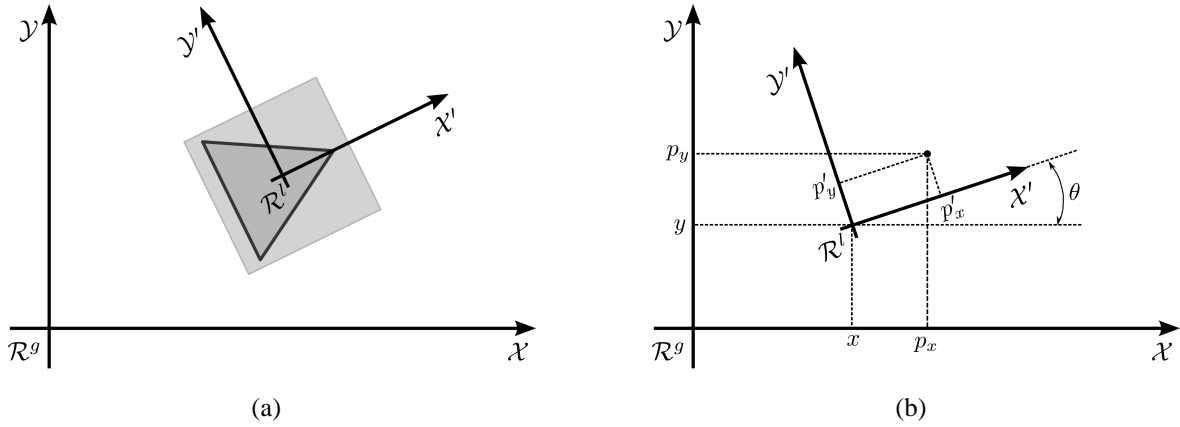


Figura B.1: (a) Representação do sistema de coordenadas local  $\mathcal{R}^l$  e global  $\mathcal{R}^g$ . (b) Relação das coordenadas de um ponto em dois sistemas de coordenadas diferentes.

## B.2 ELEMENTOS BÁSICOS DE UM MAPA GEOMÉTRICO

### B.2.1 Pontos

Um ponto é representado por  $\mathcal{P} = \{p, P_p\}$ , com  $p = [p_x \ p_y]^T$  as coordenadas em um sistemas de coordenadas  $\mathcal{R}$  (c.f. Figura B.2 (a) ). Considera-se que  $p$  é conhecido porém com incerteza associada, ou seja,  $p$  é perturbado por um ruído  $\varepsilon$  gaussiano de média nula com matriz de covariâncias associada  $P_p$ . Em um mapa geométrico, pontos podem representar a localização do final das retas, intersecção de duas retas ou mesmo índices fotométricos capturados do ambiente.

No caso em que deseja-se escrever o ponto  $\mathcal{P}^g$ , inicialmente no sistema de coordenadas  $\mathcal{R}^g$  global, em função do sistema de coordenadas local  $\mathcal{R}^l$  posicionado no robô, a transformação é dada diretamente por (B.1)

$$p^l = R(\theta)(p^g - v) \quad (\text{B.7})$$

### B.2.2 Retas e Segmentos de Reta

Retas são elementos constituídos por infinitos pontos  $(x, y)$  em um sistema de coordenadas  $\mathcal{R}$  que satisfazem a seguinte relação:

$$ax + by = 1 \quad (\text{B.8})$$

em que  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Uma forma de representar a reta  $\mathcal{L} = \{l, P_l\}$ , com  $l = [\rho \ \alpha]^T$  as coordenadas polares do ponto mais próximo desta reta à origem do sistema de coordenadas  $\mathcal{R}$  (c.f. B.2 (b) ), e considera-se que  $l$  é conhecida porém com incerteza associada, ou seja, perturbada por um ruído  $\varepsilon$  gaussiano de média nula com matriz de covariâncias associada  $P_l$ . As restrições  $\rho \geq 0$  e  $-\pi < \alpha < \pi$  são impostas às coordenadas. Desta forma, os pontos

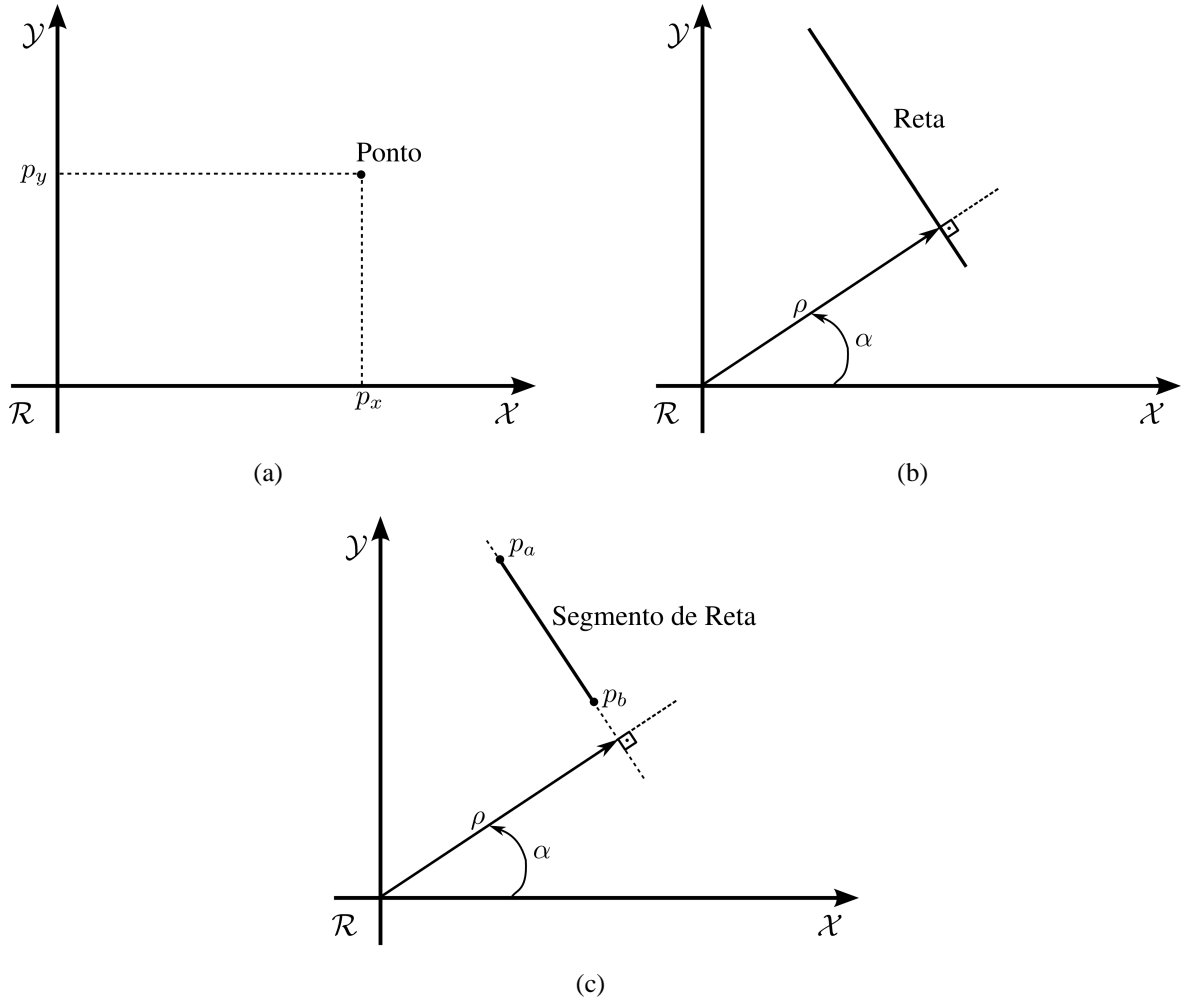


Figura B.2: Elementos geométricos no plano 2-D. (a) Ponto. (b) Reta. (c) Segmento de Reta.

$(x, y)$  que pertecem a esta reta respeitam a seguinte equação:

$$\rho - x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) = 0 \quad (\text{B.9})$$

Um segmento de reta é definido como uma reta de parâmetros  $l = [\rho \ \alpha]^T$  delimitada por dois pontos  $p_a$  e  $p_b$ , como apresentado na Figura (B.2) (c). Este elemento é representado por  $\mathcal{S} = \{l, P_l, p_a, p_b\}$ . Os pontos  $p_a$  e  $p_b$  não possuem matrizes de covariâncias associadas, pois esta é dada por uma transformação a partir da incerteza  $P_l$  da reta. Em um mapa geométrico, retas e segmentos de reta representam as paredes e obstáculos presentes no ambiente.

### B.3 REPRESENTAÇÃO UNIFICADA

Uma representação unificada para pontos e retas no espaço Euclidiano (c.f. Figura B.3) é proposta em [29]. Desta forma, os cálculos de mudança de sistemas de coordenadas os elementos geométricos representados por retas e pontos são representados por uma equação comum. Para se representar o sistema desta forma, define-se  $f_i = [f_{x,i} \ f_{y,i}]^T$  como o



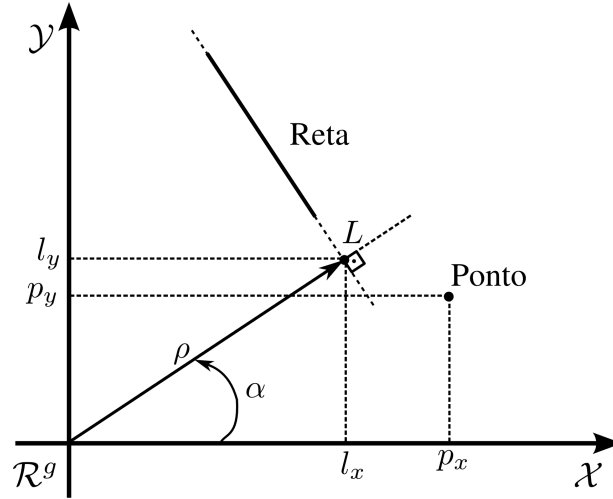


Figura B.3: Descrição dos elementos geométricos no plano 2-D.

$i$ -ésimo elemento geométrico com coordenadas no sistema global  $\mathcal{R}^g$  ao passo que  $h_j = [h_{x,j} \ h_{y,j}]^T$  o  $j$ -ésimo elemento geométrico com coordenadas no sistema local  $\mathcal{R}^l$ . A transformação de pontos e retas da representação original para representação unificada é feita da seguinte forma:

- Para pontos:

no sistema de coordenadas global:  $f_i = [f_{x,i} \ f_{y,i}]^T = [p_{x,i} \ p_{y,i}]^T$ ;

no sistema de coordenadas local:  $h_j = [h_x \ h_y]^T = [p_x \ p_y]^T$ .

- Para retas:

no sistema de coordenadas global:  $f_i = [f_{x,i} \ f_{y,i}]^T = [\rho_i \cos(\alpha_i) \ \rho_i \sin(\alpha_i)]^T$ ;

no sistema de coordenadas local:  $h_i = [h_{x,i} \ h_{y,i}]^T = [\rho_i \cos(\alpha_i) \ \rho_i \sin(\alpha_i)]^T$ .

Como apresentado em seção anterior, a Eq. (B.1) relaciona um ponto no sistema de coordenadas global  $\mathcal{R}^g$  com o sistema de coordenadas local  $\mathcal{R}^l$ . Esta fórmula é o ponto de partida para a representação unificada, pois a relação entre um elemento  $h_i$  e  $f_i$  para pontos é dada diretamente por (B.1), resultando na seguinte forma

$$h_i = R(\theta)(f_i - v) \quad (\text{B.10})$$

em que  $z = [v^T \ \theta]^T$  é o vetor que representa a postura do robô.

Para o desenvolvimento de uma forma para a mudança de sistemas de coordenadas de elementos do tipo reta, utiliza-se uma forma paramétrica para representar todos os pontos  $p(\delta)$  desta reta parametrizada em função de um parâmetro  $\delta$ . Define-se, portanto, a seguinte função de parametrização da reta

$$p(\delta) = f + \delta \cdot u, \quad (\text{B.11})$$

em que  $\delta$  é um escalar e  $u = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}^T$  é o vetor unitário que indica a direção da reta. Utilizando a transformação de coordenadas (B.1) para um ponto arbitrário  $p(k)$  no sistema de coordenadas global resulta em

$$p'(\delta) = R(\theta)(f + \delta u - v), \quad (\text{B.12})$$

e pela definição de uma reta apresentada anteriormente, uma reta  $h$  no sistema de coordenadas local é representada pelas coordenadas do ponto mais próximo da origem de  $\mathcal{R}^l$ . Este ponto representado por  $\bar{p}'$  tal que

$$\bar{p}' = \min_k \|p'(k)\|^2 \quad (\text{B.13})$$

resolvendo esta minimização encontra-se  $\bar{p}' = u^T v$ , que substituindo em (B.12) resulta em

$$h_i = R(\theta) \left( f_i - (I_2 - u \cdot u^T) v \right) \quad (\text{B.14})$$

Após o desenvolvimento das transformações de coordenadas para pontos e para retas utilizando a representação unificada, pode-se verificar uma similaridade entre (B.10) e (B.14), e esta similaridade permite escrever a seguinte forma unificada para transformação de coordenadas

$$h_i = R(\theta)(f_i + E_i v) \quad (\text{B.15})$$

em que

$$E_i = \begin{bmatrix} a^2 & c \\ c & b^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

e a matriz  $E$  depende do tipo de elemento que é avaliado. Nos casos em que o elemento  $f_i$  é do tipo ponto deve-se utilizar  $a = b = 1$ , e  $c = 0$ , já nos casos em que o elemento  $f_i$  é do tipo reta deve-se utilizar  $a = \cos(\alpha)$ ,  $b = \sin(\alpha)$ , e  $c = \cos(\alpha) \sin(\alpha)$ .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)