UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO

CASSIA OSORIO REIS SALES

EXPLORANDO FUNÇÃO ATRAVÉS DE REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS: NARRATIVAS DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

SÃO PAULO

2008

UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO

CASSIA OSORIO REIS SALES

EXPLORANDO FUNÇÃO ATRAVÉS DE REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS: NARRATIVAS DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Bandeirante de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profª. Dra. Lulu Healy (Siobhan Victoria Healy)**

SÃO PAULO

2008

Sales, Cássia Osório Reis
Explorando função através de representações dinâmicas: narrativas de estudantes do Ensino Médio / Cássia Osório Reis Sales. -- São Paulo: [s.n.], 2009.
144f; Il. ; 31 cm.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Bandeirante de São Paulo, Curso de Educação Matemática
Orientadora: Profª. Dra. Lulu Healy (Siobhan Victoria Healy)

1. Narrativa 2. Geometria Dinâmica 3. Funções I. Título

CASSIA OSORIO REIS SALES

EXPLORANDO FUNÇÃO ATRAVÉS DE REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS: NARRATIVAS DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO, COMO EXIGÊNCIA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Presidente e Orientador

NOME: DRA. SIOBHAN VICTORIA HEALY (LULU HEALY)

Titulação: Doutora em Educação Matemática (Universidade de Londres)

Instituição: Universidade Bandeirante de São Paulo

ASSINATURA: ____

2ª Examinador

Nome: Dra. Tânia Maria Mendonça Campos

Titulação: Doutora em Matemática (Universidade de Montpellier II)

Instituição: Universidade Bandeirante de São Paulo

ASSINATURA: ____

3ª Examinador

Nome: Dra. Sônia Pitta Coelho

Titulação: Doutora em Matemática (Universidade de São Paulo)

Instituição: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Assinatura: ____

Biblioteca
Bibliotecário:

Assinatura:____Data____/____/____

São Paulo, ___ de ________________ de 2009

Dedico esse trabalho à Lulu Healy, pessoa essencial na minha formação como pesquisadora.

AGRADECIMENTOS

Á Lulu Healy, por sua amizade, paciência, carinho, dedicação, incentivo e apoio incondicional para que eu concluísse este trabalho mesmo quando os obstáculos pereciam intransponíveis.

À Professora Doutora Tânia Campos, pelo carinho com que me acolheu no início do mestrado e pelas observações adequadas dadas na qualificação.

À professora Doutora Sônia Pitta, pelas sugestões pertinentes e enriquecedoras dadas na qualificação.

À Professora Doutora Solange Fernandes, pelas sugestões e carinho na finalização deste trabalho.

A meus pais Maria do Carmo e José Fernando, que me ensinaram a ser uma pessoa feliz e a amar a vida.

Ao marido Fábio e filhos Rafael e Manoela, pelo carinho e apoio. A vocês devo ainda agradecer por existirem e pelo privilégio de compartilhar nossa existência.

Ao irmãos Olívio e Fernanda, que mesmo distante, apoiaram, torceram e oraram pelo sucesso deste trabalho.

A todos os familiares pelo apoio, orações, carinho e compreensão pelas ausências.

Ao amigo e pesquisador Guilherme Baquara, pela disponibilidade, pelas ricas discussões e pelo ombro amigo sempre presente.

À amiga e pesquisadora Maisa, pelas anotações e sugestões neste trabalho.

A todos os amigos do mestrado, que de alguma forma contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

À amiga Elenice, pela dedicação e sugestões ao revisar o texto deste trabalho.

A todos os amigos com os quais partilho alegrias e angústias.

Aos estudantes e professores que participaram deste trabalho, pela colaboração incansável.

À Direção do Colégio Global, pela atenção e prontidão com que atenderam nossas necessidades durante o desenvolvimento do projeto de pesquisa.

À CAPES, pela bolsa a mim concedida, sem a qual seria difícil a realização deste trabalho.

Aos meus estudantes que me permitem aprender diariamente.

A todos que diretamente ou indiretamente ajudaram na realização deste trabalho o meu muito obrigado.

A Autora

RESUMO

Esse trabalho tem o objetivo de investigar as narrativas produzidas pelos estudantes diante de uma abordagem matemática sobre funções utilizando ambiente de geometria dinâmica. Apoiado nas considerações de Bruner (1997) sobre a centralidade do pensamento narrativo em cognição humana, buscou-se entender o papel das narrativas na aprendizagem matemática e identificar como a evocação de estórias contribui para a construção de conhecimentos e significados matemáticos.

A metodologia utilizada neste trabalho baseou-se no *design-based research methodologies* e, mais especificamente, envolveu um *design experiments* no qual estudantes do Ensino Médio interagiram com dois micromundos criados no Cabri-Géomètre. Esses micromundos apresentam as representações gráficas de funções de forma dinâmica, ora no plano cartesiano convencional (Cartesiangraph), ora com eixos coordenados configurados horizontalmente (Dynagraph). Nesses ambientes de geometria dinâmica foram realizadas sessões de ensino nas quais os estudantes, trabalhando em duplas, observavam os comportamentos apresentados nas representações gráficas de diferentes funções, descreviam e classificam-nas nomeando os grupos criados de acordo com os critérios observados e evidenciados por eles.

A análise dos resultados indicou que, durante as interações com as representações dinâmicas, os estudantes destacaram espontaneamente várias propriedades que caracterizam os diferentes tipos de função investigada, chamando atenção para, por exemplo, a diferença entre funções afins, funções quadráticas, e outros tipos de funções. Mostrou-se também, como os comportamentos das funções foram descritos em termos de narrativas, nas quais os estudantes atribuem sentidos para os fenômenos observados por meio de estórias que relacionam, metaforicamente, comportamentos matemáticos com comportamentos humanos.

Palavras-Chave: narrativa, micromundo, geometria dinâmica, funções, *design research*.

ABSTRACT

This study aims to investigate the narratives produced by students as they explore dynamic representations of functions. Drawing its theoretical support from the Bruner's (1997) considerations of the centrality of narrative thinking in human cognition, it seeks to understand the role of narratives in mathematics learning and to identify how the evocation of stories contributes to the construction of mathematical meanings and knowledge.

A design-based research methodology was chosen for the study and, more specifically, it involved a design experiments in which High School students interacted with two microworlds created using the software Cabri-Géomètre. These microworlds presented dynamic graphical representation of functions, be it using the conventional Cartesian axes or be it using coordinates represented on parallel axis configured horizontally. Within the two dynamic geometry environments, teaching sessions were realized in which the students, working in pairs, observed the behaviours presented in the representations of different functions, as the functions were described and classified into groups, then named by the students in accord with the criteria chosen by them.

Analysis of the results indicated that, during their interactions with the dynamic representations, the students spontaneously highlighted various properties which characterize the different types of functions investigated, emphasizing for example, differences between affine, quadratic and other functions. It evidenced also how the behaviour of the functions was described using narratives in which the students attributed meaning to the observed phenomena through stories which related, metaphorically, mathematical behaviour to human behaviour.

Keywords: narratives, microwords, dynamic geometry, mathematical functions, design research.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

Ao longo de nossa vida escolar, familiar e profissional escutamos e produzimos narrativas de histórias lidas, vividas ou fantasiadas. Ao consultar o dicionário (FERREIRA, 1993) encontramos o seguinte significado para a palavra narrativa: *“ato de narrar, por escrito ou oralmente”* (IBID., p.221).

No trabalho que desenvolvemos, a palavra narrativa exerce um papel importantíssimo, mas sua abordagem é mais abrangente que simplesmente narrar por escrito ou oralmente. Mas que abrangência deve ser essa se o próprio dicionário nos fornece exatamente tal descrição?

No próximo tópico explicamos detalhadamente em qual contexto e abordagem utilizamos a palavra narrativa e o seu entendimento é essencial para a leitura de todo o trabalho.

1.1 NARRATIVA COMO MODO COGNITIVO

Paul Ricouer (apud BRUNER, 1997), parafraseando o historiador-filósofo britânico W. B. Gallie, afirma que:

> *Uma história descreve uma seqüência de ações e experiências de um determinado número de personagens, sejam reais ou imaginários. Esses personagens são representados em situações que mudam.... às quais eles reagem. Essas mudanças, por sua vez, revelam aspectos ocultos das situações e dos personagens, dando lugar a uma nova condição que pede reflexão ou ação, ou ambos. A resposta a esta condição leva a história à sua conclusão. (IBID, p.46).*

De acordo com os neurocientistas Young e Saver (2001) a tendência de construir narrativas é uma característica essencialmente humana,

> *narrativa é a inevitável estrutura da experiência humana. Enquanto podemos ser treinados para pensar em formas geométricas, padrões de sons, poesias, movimentos, silogismos, o que predomina ou*

> *constituiu fundamentalmente nossas consciências é o entendimento de si e do mundo em forma de histórias. (ibid, p.72).*

Se nossa interpretação do mundo é mediada pelo uso de narrativas, parece pertinente indagar sobre seu papel em interpretar fenômenos matemáticos. Em anos recentes, esse assunto tem recebido atenção no campo da educação matemática com Burton (1996), Healy e Sinclair (2007), Mor e Noss (2008) entre outros.

Em busca de um quadro teórico para utilizar como lente na investigação da narrativa na aprendizagem matemática, encontramos um ponto de partida no trabalho de Bruner (1997). Para ele, narrativa é um modo de pensamento que pode ser contrastado com outro estilo de organização do pensamento humano chamado *paradigmático*. Enquanto na narrativa há um esforço para colocar os fenômenos matemáticos nas experiências particulares, localizando essas experiências no tempo e no espaço; o pensamento paradigmático busca transcender do particular através de níveis de abstração cada vez mais elevados, evidenciando o caráter de relações atemporais do conhecimento matemático. Em outras palavras, a narrativa busca dar uma interpretação particular ao conhecimento matemático e o paradigmático busca descrever o conhecimento matemático de maneira lógica e classificatória.

Narrativas são estórias[1]? Apesar de Bruner (1997), referir-se a palavra narrativa como um discurso com o intuito de dar sentido ao que está sendo realizado e a palavra estória para caracterizar a seqüência de eventos e a evolução implicada na reconstituição desses eventos, o próprio autor utiliza, em determinados momentos, as duas palavras com o mesmo sentido. Portanto, em nossa pesquisa, utilizamos as palavras *narrativas* e *estórias* como sinônimos. Para melhor identificar o modo narrativo, Bruner (1997) descreve quatro características numa narrativa:

<u>*Ter uma seqüência inerente*</u>: composta por uma seqüência singular de eventos, estados mentais, ocorrências envolvendo seres humanos como personagens ou autores, além da presença de sentido e relação temporal com o acontecimento, fato ou conhecimento matemático.

---

[1] Estória é uma narrativa de ficção, uma exposição romanceada de fatos, conto, fábula. (www.dicionariodeportugues.com – acesso em 10/09/2008). Apesar da palavra *história* abranger o significado da palavra estória, optamos por escrever em nosso trabalho a grafia estória para evidenciar a natureza das narrativas evocadas.

Poder ser real ou imaginário: em que é permitido que o real e o imaginário coexistam, mesmo que temporariamente. Muitas vezes uma “nova” matemática começa no mundo imaginário (no mundo das ideias) e aos poucos se insere no mundo real.

Criar conexões entre o excepcional e o ordinário: tentar colocar em palavras mais simples e mais acessíveis conhecimentos ou terminologias mais complexas.

Possuir uma qualidade dramática: caracterizada pelos antropomorfismos de objetos matemáticos ou inanimados.

A seqüência das sentenças, e não a verdade ou a falsidade de quaisquer dessas sentenças, é o que determina a configuração geral da narrativa. É essa seqüencialidade singular que é indispensável para a significância de uma estória e para o modo de organização mental em cujos termos ela será captada (BRUNER, 1997). É importante ressaltar, entretanto, que não estamos interessados em qualquer estória, mas naquelas suscitadas matematicamente e que indicam como os alunos estão tentando dar sentido para as formas matemáticas que estudam.

1.2 NARRATIVA E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Apesar de haver uma grande valorização do pensamento paradigmático na matemática, Burton (1996) atribui um papel importante para as narrativas na aprendizagem matemática, sugerindo que aspectos e características dos fenômenos matemáticos podem emergir se os estudantes forem estimulados a explorar o significado de suas experiências em aulas de matemática através de narrativas. Para Burton, as narrativas envolvem contextos matemáticos e personalização destes, criando um ambiente em que o aprendiz pode navegar. Entretanto, Burton não indica muito claramente o que ele considera exatamente como narrativa, dentro do contexto da matemática.

As pesquisadoras Healy e Sinclair também se interessam em estudar o modo narrativo de pensamento em situações matemáticas, oferecendo alguns exemplos do que elas classificam com narrativas matemáticas. Um desses exemplos envolve uma atividade em geometria dinâmica conhecida como *caixa-preta*. Nessa atividade é apresentada uma figura definida por propriedades geométricas, não reveladas ao estudante, e a este é pedido que tente reproduzir a figura apresentada com as mesmas características apresentadas. A intenção desse tipo de atividade é que os estudantes manipulem dinamicamente essa figura e, através dos comportamentos observados, consigam desvendar as propriedades geométricas embutidas em sua construção para então, utilizando as ferramentas adequadas de construção, poderem reproduzi-la.

A *caixa-preta* desenvolvida por Healy e Sinclair (2007) e aplicada a duas estudantes entre 12 e 13 anos, apresenta um "*boneco-palito*" (ver figura 1), definido por algumas propriedades geométricas e que apresenta determinados movimentos característicos das propriedades geométricas utilizadas.

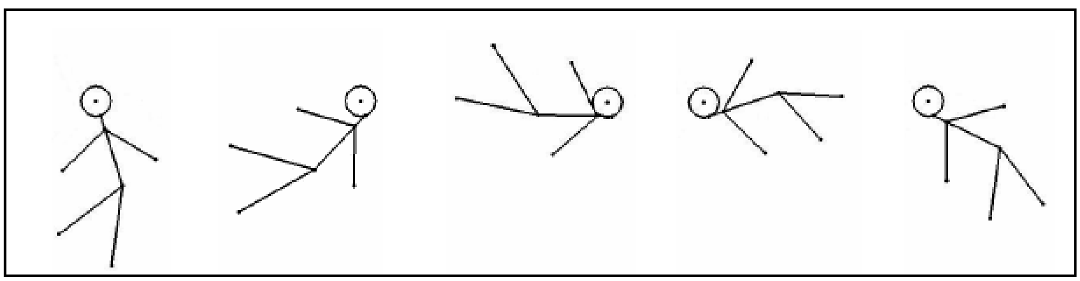


Figura 1: Boneco palito "dançando" (p.11, Healy e Sinclair)

As estudantes Meena e Haley (participantes da pesquisa desenvolvida por Healy e Sinclair), ao se depararem com o desafio de desvendar as relações da figura, começaram a se expressar em termos de dança:

> *Meena: Bem, ok, veja os braços podem ir e as pernas, as pernas podem ir desse modo, desse modo.*
>
> *Haley: Dançarino "da hora" (começa a cantar).*
>
> *Enquanto Haley cantava pedaços de músicas, Meena movia os pontos "em sincronia" com a música. A animação da figura também animou as estudantes e provocou-as a descrever essas ações em termos muito humanos como também termos geométricos. A dupla estava particularmente apaixonada pelo movimento "de quadril" do*

> *dançarino, que elas descobriram que traçava um círculo perfeito como dando cambalhotas por sobre a cabeça.*
>
> *Haley: Isso aí! (enquanto Meena rotaciona os "quadris" da figura sobre a "cabeça" da figura) E uma vez mais para ...(canta) Você está pronto? Aqui vamos nós..faça, faça, faça...*
>
> *Meena: Aqui vamos nós, e por cima ele vai, como um acrobata, de ponta-cabeça...*
>
> *Haley: ...de novo de ponta-cabeça...*
>
> *Meena: Hum, e em um círculo exato e perfeito.*
>
> *Haley: Faça-o dançar devagar um minuto. Ele mantém seu corpo reto durante todo o movimento, ele não ... dobra, e isso (o ponto do "quadril") está sempre a mesma distância disto, não disto. Esperto! (Healy e Sinclair, 2007,p.11)*

Nesse exemplo é possível identificar as quatro características do modo narrativo descrito por Bruner e, de acordo com Healy e Sinclair, essas características ajudam as meninas a identificarem as propriedades geométricas embutidas na construção da figura. Uma das qualidades em destaque é a qualidade dramática, evidenciada na descrição de um movimento surpreendente e impossível para os seres humanos de volta inteira do quadril sobre o corpo e para explicá-lo, as estudantes utilizam a palavra círculo, criando conexão entre o comportamento excepcional observado e o simples (ordinário) conhecimento de círculo. Ao descrever os movimentos do *boneco-palito,* que evidentemente não é humano, até pelos movimentos que realiza, como uma dança, as estudantes enfatizam a característica de que o real e o imaginário podem coexistir e ajudar a dar significado matemático para a figura observada. Por fim, as estudantes descrevem o movimento do *boneco-palito* como uma seqüência de círculos, identificados como um conjunto de pontos associados ao movimento de um boneco dançante que mantém sempre a mesma distância do ponto de junção da "cabeça" com o "tronco".

A estória contada por Meena e Haley é um bom exemplo de narrativa em situações matemáticas de aprendizagem. A descrição feita por elas dos comportamentos observados no *boneco-palito* pode ser associado a ideia de círculo como o lugar geométrico dos pontos equidistante de um determinado centro. E a descrição é feita de modo bastante significativo para elas, com muitos movimentos e até fundo musical. Healy e Sinclair (2007) identificam tais estórias como *narrativas* *produtivas*. As narrativas produtivas, segundo as autoras, são aquelas em que os estudantes são capazes de conectar objetos matemáticos e suas propriedades paradigmáticas, ou seja, que trazem à tona conhecimentos matemáticos relacionados com o modo paradigmático de pensar, fazendo uma relação deste com o modo narrativo. Em relação à Educação Matemática, as autoras afirmam que:

> *... a questão não (é) tanto se vamos adotar ou não a chamada abordagem narrativa – aprendizes, acreditamos, vão continuar construindo estórias como um resultado de sua participação (ou não participação) nas atividade matemáticas. Acima de tudo, nossa questão é como podemos apoiá-los na construção de narrativas produtivas. (ibid, p.20)*

O trabalho de Healy e Sinclair é um importante passo na educação matemática para tentar buscar o modo de pensamento narrativo em situações matemáticas de aprendizagem. Contudo para a produção de narrativas produtivas é preciso apresentar um ambiente propício para a criação de boas estórias. O uso de ambientes computacionais, mais precisamente de micromundos, pode ser uma boa escolha, pois os movimentos físicos de objetos computacionais nas telas de computador podem ser associados com experiências sensório-motoras dos estudantes no mundo real.

1.3 MICROMUNDO

Hoyles (1993) sugere que o termo "micromundo" foi utilizado inicialmente entre os pesquisadores da área de Inteligência Artificial para descrever um campo pequeno e coerente de objetos e atividades implementadas na forma de um programa de computador e correspondendo a uma parte de interesse do mundo real. Assim, os micromundos iniciais eram versões simplificadas da realidade, em que se esperava que o computador pudesse ajudar na resolução de problemas em campos simples e restritos. O conceito de micromundo e sua utilização foram bastante difundidos com o trabalho desenvolvido por Papert através da linguagem Logo, na década de 80, ganhando nessa difusão um novo significado. Hoyles e Noss (1987) descrevem micromundo como um caminho de interação entre o estudante e o programa (computacional), sendo bastante influenciado pela situação didática na qual as interações são feitas. Uma das características que distingue micromundo de outros ambientes computacionais de aprendizagem é que nele o usuário pode construir sobre o modelo dado, ou seja, o usuário pode obter ferramentas mais complexas a partir de combinações das ferramentas iniciais.

Os micromundos computacionais, segundo Hoyles e Noss (1987), são compostos por quatro componentes:

> *O componente técnico*: formado por uma linguagem de programação que promove a aprendizagem em um sistema de representações feito para o conhecimento de um enfoque matemático do micromundo.
>
> *O componente pedagógico*: formado pelo professor, livros, pôsteres, entre outros. Esse componente de um micromundo tem como objetivo estruturar a integração e exploração de conceitos envolvidos no componente técnico, para enfocar reflexão, sugerindo ordens de operações, indicando pontos de partida usuais e promovendo ligações com outras atividades.
>
> *O componente contextual*: composto pelo contexto em que o problema apresentado está inserido, pelo caminho proposto, pelo método escolhido e pelo modo como esse contexto é percebido pelo aprendiz, pois as estratégias adotadas em um componente técnico de micromundo dependem dos significados envolvidos no contexto da situação e nas emoções despertadas pela situação (por exemplo, se a tarefa é percebida como um jogo ou como um trabalho, se a tarefa é percebida como fazer matemática ou desenhar uma figura, ou ainda, como sendo fácil ou difícil).
>
> *O componente aprendiz*: o aprendiz é percebido pelo aspecto cognitivo (existência de conhecimentos e concepções parciais que os estudantes trazem para as situações de ensino e com o que eles tentam trabalhar em um micromundo) e pelo aspecto afetivo (estudantes tendem a ter uma ideia forte sobre o que eles são capazes de fazer e o que eles são capazes de entender em matemática).

Esses quatro componentes são importantes tanto nas questões de *design*[2] como nas questões de utilização de um micromundo, uma vez que cada componente tem uma função específica a ser considerada. Um bom exemplo de micromundo é o Cabri-Géomètre.

O micromundo Cabri-Géomètre[3] foi desenvolvido por um grupo de cientistas em informática, especialistas em educação e professores de matemática, coordenados por Jean Marie Laborde, do Institut d'Informatiqe et Mathematiques Appliquees, em Genobre, na França. Esse micromundo (ver figura 2) oferece, na tela do computador, uma barra de ferramentas com "régua e compassos eletrônicos" além de uma série de comandos que fazem com que os objetos sejam construídos a partir das propriedades que os definem. Por ser um ambiente interativo e dinâmico, o usuário pode deslocar ou mexer nas construções realizadas a partir dos elementos que as compõem mantendo as relações geométricas que caracterizam a construção.

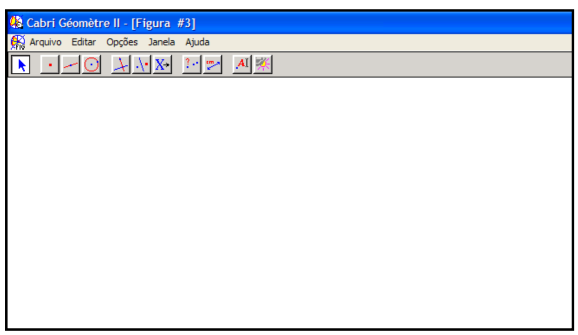


Figura 2: Tela do micromundo Cabri

No Cabri, o componente técnico é a linguagem de programação utilizada para desenvolver todos os comandos possíveis que esse micromundo oferece, o componente pedagógico (ver figura 3) é a atividade proposta que instiga o usuário a explorar e relacionar as ferramentas disponíveis com as propriedades conceituais envolvidas na construção de tal figura e as intervenções instigadoras e

---

[2] O termo design não tem uma tradução para o português, "o termo design envolve atividades como planejar, delinear, desenhar, esboçar, projetar, esquematizar, criar, inventar e executar."(Drisostes,2005, p.38)

[3] O nome Cabri foi inspirado na expressão francesa *Cahier de bouillon interractif*, que significa caderno de rascunho interativo.

esclarecedoras que o professor faz durante a realização da atividade. Já o componente contextual (ver figura 4) relaciona-se com o contexto em que o problema foi proposto (se é uma atividade, um desafio, uma atividade avaliativa) e o modo como as relações sociais, culturais e afetivas são despertadas. As ferramentas e os procedimentos utilizados pelo estudante para efetuar a construção solicitada também são considerados componentes contextuais. Na atividade proposta, não basta o estudante construir um triângulo retângulo, ele deve tentar construí-lo com o menor número de comandos possíveis. O estudante, com sua percepção e seus conhecimentos, completam o componente aprendiz.

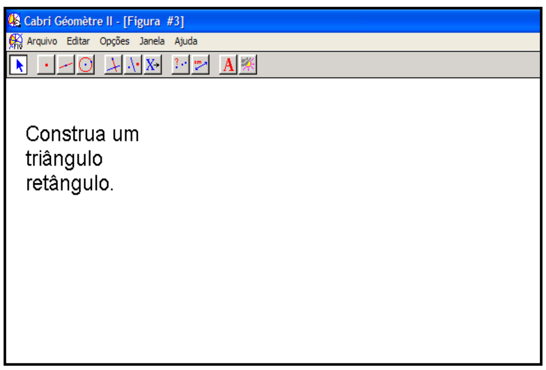


Figura 4: Componente pedagógico

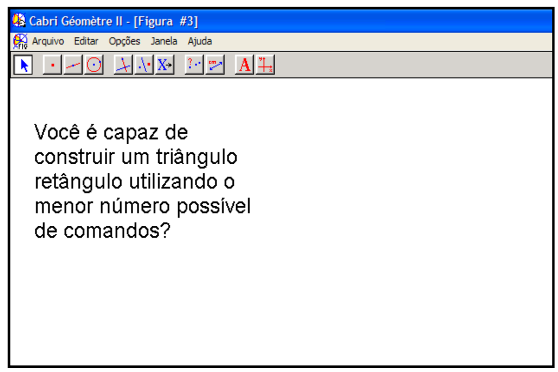


Figura 3: Componente contextual

O micromundo é um ambiente computacional que cresce com o. desenvolvimento de procedimentos/familiaridade com os recursos utilizados, já que se pode obter ferramentas mais complexas a partir de combinações das ferramentas iniciais. No exemplo dado, o estudante, depois de ter realizado a atividade proposta, pode formular e adicionar ao menu uma macro para triângulo retângulo, oferecendo uma nova ferramenta para futuras interações.

A parte técnica de um micromundo compõe o modelo formal – linguagem de programação utilizada e sistema de representações - e com o crescimento desse modelo, os usuários constroem seu próprio modelo do fenômeno sob estudo. Mas o modelo formal é apenas uma parte, o micromundo também conta com uma interface que permite uma interação do estudante com representações dinâmicas que mexem, agem e reagem a determinados comandos, produzindo uma seqüência de eventos aos olhos do usuário ou como resultado de conversas com o usuário que incentivam a criação de estórias na tentativa de explicar os eventos em questão. É em relação a esta interface que Healy e Sinclair (2007) destacam três recursos de micromundo que incentivam a criação de boas estórias:

> *Movimento*: os movimentos dos objetos na tela, muitas vezes reversíveis, convidam os estudantes a construírem narrativas dando vida aos objetos ou criando significados, que podem ser particulares ou relacionados com experiências anteriores, para tais movimentos. Em vista disso, elas sugerem que o movimento pode originar, nas estórias, a qualidade dramática e as relações entre o excepcional e o ordinário [duas, das quatro características de uma narrativa identificadas por Bruner (1997)] .
>
> *Tempo*: a agilidade dos programas e suas interações em tempo real permitem obter respostas bastante rápidas. A seqüência de comandos cuidadosamente ordenados dos programas tem ressonância com a seqüência das narrativas, pois produz-se uma necessidade de organizar as interações dos estudantes com os objetos computacionais em termos de uma seqüência significativa de eventos.
>
> *Agência:* a interação do estudante com o computador possibilita que os objetos computacionais sejam vistos como agentes dinâmicos que interagem, dentro de um micromundo, com situações supostamente paradigmáticas, em uma atividade do mundo real. Nesse sentido é possível produzir conexões entre o paradigmático e a narrativa.

Acreditamos que na interação desses três recursos e dos quatro componentes de um micromundo a matemática pode emergir, muitas vezes, de modo narrativo nas atividades propostas. Na visão narrativa, os micromundos devem ter potencialmente uma estrutura que incentive o aparecimento de estórias.

1.4 O ENFOQUE MATEMÁTICO

O enfoque matemático escolhido para essa dissertação foi *função* pois o mesmo desempenha um importante papel na educação matemática e em outras áreas do conhecimento, tanto como objeto de estudo em si quanto como auxílio para descrição e explicação de fenômenos ou relação entre fenômenos. Sua abordagem, na educação básica, tem grande ênfase, principalmente no Ensino Médio.

Grande parte dos professores de matemática concorda com a importância desse conteúdo matemático; porém, como Selden e Selden (1992) argumentam, poucos têm tempo para analisar como os estudantes compreendem as funções e como esse processo cognitivo é desenvolvido pelos mesmos.

Para entendermos melhor esse processo cognitivo e o modo como os estudantes compreendem as funções é importante saber o que é função, como ela pode ser representada e algumas dificuldades e complexidades encontradas em seu ensino.

1.4.1 Definições sobre Função

Segundo Selden e Selden (1992), o objeto matemático *função* pode ser percebido de diferentes maneiras, ou seja, existem diferentes abordagens para definir uma função. Dentre as várias maneiras de descrever uma função destacamos a relação entre grandezas variáveis, a imagem geométrica de um gráfico, a expressão algébrica como uma fórmula, uma máquina de input-output[4] e a definição moderna de conjunto-teórico, escrita inicialmente em 1939 por Bourbaki e que define função pela correspondência entre elementos de dois conjuntos através do par ordenado.

A definição abordada por Bourbaki, de acordo com Selden e Selden (1992), é considerada, por alguns pesquisadores, bastante abstrata, principalmente para uma abordagem inicial. Mas a função também pode ser vista como um tipo especial de *associação* entre dois conjuntos. Essa definição de função foi dada por Dirichlet em 1837. A abordagem do Dirichlet parece ser mais fácil de ser compreendida do que a definição de pares ordenados, apesar de, tecnicamente, as duas definições serem

[4] É importante ressaltar que a máquina de input e output nem sempre descreve uma função, mas como é muito utilizada como recurso para uma visualização de função nós adotamos essa descrição como uma maneira de definir função, reservando os casos em que essa descrição é uma relação, mas não uma função.

bastante semelhantes. A definição de Dirichlet pode facilitar a compreensão de domínio e contra domínio, como a noção do todo e do um por um.

A ideia de *variável dependente* é também usada para expressar o conceito de função. Essa ideia ocorre usualmente no contexto numérico e normalmente refere-se a uma fórmula ou uma expressão envolvendo a *variável independente*. O valor da *variável dependente* subordina-se ao valor atribuído à *variável independente* e da fórmula que a contém, ou seja, os valores da *variável dependente* não podem ser atribuídos aleatoriamente, mas estão vinculados diretamente aos valores da *variável independente*, que como o próprio nome sugere, tem independência quanto aos valores assumidos[5]. Estudantes que veem função inicialmente nessa restrita abordagem podem ter dificuldades para estender a noção de função, por exemplo, para expressões que envolvam duas fórmulas (Norman, Sfard, Vinner, *apud* SELDEN E SELDEN, 1992). As funções também podem ser relacionadas com uma máquina de input-output, em que através de comandos de entrada (inputs) exibe-se respostas (output) de acordo com a “lei de formação” da função. Essa ideia é ilustrada por Dante (2007, p.57) na figura 5. Nessa abordagem não há necessidade de haver uma fórmula ou uma expressão algébrica, a “lei de formação” pode ser explicitada em linguagem natural.

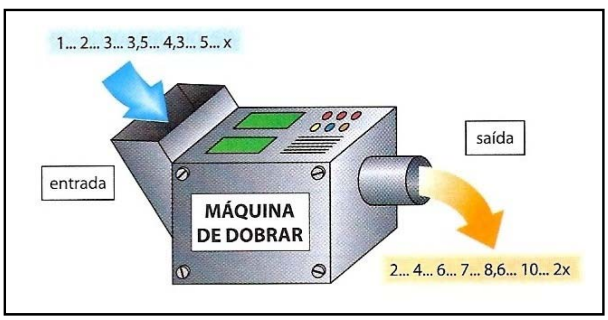


Figura 5: Máquina de input-output

Para ilustrar algumas dessas diferentes abordagens para a definição de função, destacamos, de livros didáticos, a ideia abordada por Bourbaki, como escreve Paiva (1999, p.59): “*Sejam A e B conjuntos diferentes do vazio. Uma*

---

[5] O único limitador para os valores assumidos pela variável independente é o universo em que a função está definida. Dentro desse universo os valores da variável independente podem ser escolhidos aleatoriamente.

relação[6] f *de A em B é função se, e somente se, todo elemento de A estiver associado, através de* f*, a um único elemento de B"*; e a idéia de Dirichlet, como descreve Dante (2007, p.59): *"Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento x* $\in$ *A a um único elemento y* $\in$ *B."* A notação utilizada para indicar a associação entre os elementos de A e B é f: A B ou $A \xrightarrow{f} B$ e lê-se: f é uma função de A em B. O conjunto A é chamado de *domínio* da função e o conjunto B de *contra domínio.*

De acordo com essa definição de função, a variável *x* é chamada de *variável independente*, pois pode assumir qualquer valor do conjunto A dado e a variável *y* é chamada de *variável dependente*, pois assume valores que dependem dos valores assumidos por *x*. Conforme o comportamento da variável dependente *y* em relação à variável independente *x* ou a lei de formação da função, podemos classificar as funções, considerando as estudadas na Educação Básica, como Função Afim, Função Linear, Função Quadrática, Função Modular, Função Exponencial, Função Logarítmica.

<u>Função Afim</u>: Uma função f: $R \rightarrow R$ chama-se função afim quando existem dois números reais **a** e **b** tais que f(x) = ax + b, para todo x $\in$ R.

<u>Função Linear</u>: Uma função f: $R \rightarrow R$ chama-se função linear quando existe um número real **a** tal que f(x) = ax para todo x $\in$ R. A função linear é um caso particular da função afim.

<u>Função Quadrática</u>: Uma função f: $R \rightarrow R$ chama-se função quadrática quando existem números reais **a**, **b**, **c**, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo x $\in$ R.

<u>Função Modular</u>: Denomina-se função modular a função f, de R em R, tal que f (x) = IxI, ou seja, $f(x)= \begin{cases} x, \text{ para } x \geq 0 \\ -x, \text{ para } x<0 \end{cases}$.

---

[6] PAIVA(1999) define relação R de A em B como todo subconjunto do produto cartesiano A X B, ou seja, se (x,y) $\in$ R, então dizemos que x e y estão associados através de R.

Função exponencial: Dado um número real **a** (a > 0 e a $\neq 1$), denomina-se função exponencial de base **a** a uma função f de R em R^*_+ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$

Função logarítmica: A inversa[7] da função exponencial de base **a** é a função $\log_a$: R^*_+ – R, que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado logaritmo de x na base **a**, com **a** real positivo e **a** $\neq 1$ e tal que:

$$\log_a x = y \text{ se e somente se } a^y = x.$$

Além dessa classificação, existem algumas características importantes para descrever uma função que podem auxiliar na classificação das mesmas, como o fato de serem crescentes ou não crescentes, contínuas ou não contínuas, se possuem assíntota[8], valor máximo ou valor mínimo[9].

Crescente: Uma função f é crescente em A, A $\subset$ D(f)[10], se e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 do conjunto A, se $x_2 \geq x_1$, então $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Não crescente: Uma função f é não crescente em A, A $\subset$ D(f), se e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 do conjunto A, se $x_2 \geq x_1$, então $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Contínua e não contínua: Uma função f é contínua em **a** $\in$ D(f) quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Quando f é contínua em todo o domínio, dizemos que f é contínua. Uma função f, que não é contínua em algum **a** $\in$ D(f) é não contínua.

---

[7] Dada uma função f: A B, bijetiva, denomina-se função inversa de f a função g: B A tal que, se f(a) = b, então g(b) = a, com a A e b B.

[8] Assíntota é a reta que limita um determinado gráfico de uma função

[9] A identificação por vários aspectos mais gráficos de uma função deve-se ao fato de, em nossa pesquisa, utilizarmos a representação gráfica da função e essas características são evidenciadas e observadas.

[10] Denominamos D(f) o domínio da função, que é composto pelos primeiros elementos dos pares associados pela função f.

Valor máximo e valor mínimo: $y_1 \in \text{Im}(f)$[11] é o valor máximo da função f se, e somente se, para todo $y \in \text{Im}(f)$, temos que $y_1 \geq y$. $y_2 \in \text{Im}(f)$ é o valor mínimo da função f se, e somente se, para todo $y \in \text{Im}(f)$, temos que $y_2 \leq y$.

A notação f(x), muito utilizada para descrever a lei de formação de uma função ou algum elemento da imagem da função, foi implanta pelo matemático Leonhard Euler (EVES, p.472, 1995), que tem contribuições em diversas notações matemáticas. Além das diferentes concepções e características das funções, há uma gama de possibilidades para representar uma função.

1.4.2 REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÕES

As funções podem ser representadas de diferentes formas, como diagramas de Venn, fórmulas, tabelas, gráficos e descrições verbais.

A representação por diagramas de Venn permite uma visualização simples e fácil da associação entre cada elemento do Domínio com um único elemento do Contra - domínio (ver figura 6).

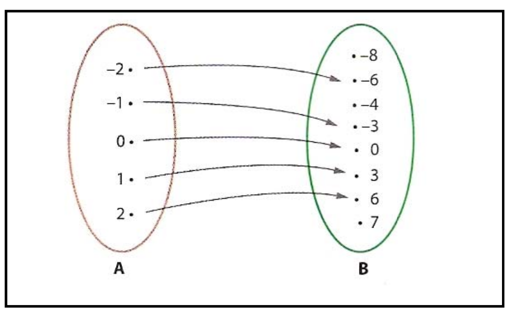


Figura 6: Diagrama de Venn

O diagrama também é bastante utilizado nos livros didáticos para exemplificar quando uma relação não descreve uma função (ver figuras 7 e 8). A relação representada na figura 7 não corresponde a uma função porque o elemento 0 do conjunto A está associado a três elementos distintos do conjunto B, já a relação de A

11 Denomina-se Im(f) a imagem da função f.

em B representada na figura 8 não é função, pois existem elementos do conjunto A que não estão associados a nenhum elemento do conjunto B.

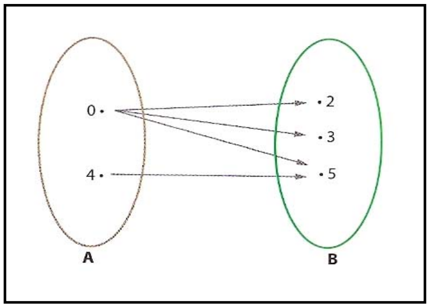


Figura 7: Relação que não é função

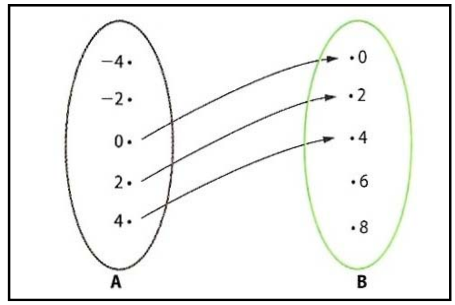
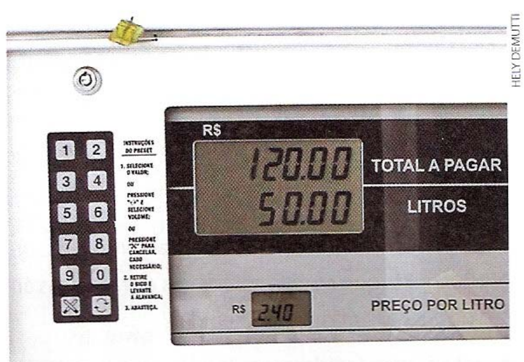


Figura 8: Relação que não é função

As tabelas são bastante utilizadas para representar duas grandezas que dependem uma da outra, como por exemplo, o preço a pagar de acordo com a quantidade (em litros) de combustível (ver figura 9).



Número de litros	**Preço a pagar** (R$)
1	2,40
2	4,80
3	7,20
4	9,60
. . .	. . .
40	96,00

Figura 9: Tabela de preços

Nas funções de reais em reais utilizamos, com freqüência, gráficos para. representá-las. Os gráficos promovem um acesso imediato à imagem pictórica usada na explicação do crescimento, decrescimento, concavidade, máximos, mínimos, pontos de inflexão, domínio e imagem, embora alguns estudantes enxerguem os gráficos como ícones a partir dois quais extraem, no máximo, informações pontuais (MONK, 1990). Isso pode ser devido a o estudante depender das informações seqüenciais encontradas em livros e em leituras confundindo com informações gráficas naturalmente não seqüenciais (DREYFUS e EISENBERG, 1990).

Cabe aos professores de matemática fazerem uma associação do assunto que os estudantes previamente já aprenderam com os gráficos de função.

Em livros, revistas, jornais e Internet, frequentemente, encontramos gráficos e tabelas que descrevem ou retratam determinadas situações, que podem representar funções entre as grandezas representadas e a observação das características apresentadas retratam o comportamento da função, quando existe.

1.4.3 ENSINO DE FUNÇÕES: COMPLEXIDADES E DIFICULDADES

Nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, conhecido como PCN+ (BRASIL, 2002) são indicadas algumas competências gerais a serem desenvolvidas pelas disciplinas científicas[12] como a matemática:

> *O domínio de linguagens, para a representação e a comunicação científico-tecnológicas, é um campo comum a toda ciência e a toda a tecnologia, com sua nomenclatura, seus símbolos e códigos, suas designações de grandeza e unidades (...). A articulação dessa nomenclatura, desses códigos e símbolos em sentenças, diagramas, gráficos, esquemas e equações, a leitura e interpretação destas linguagens, seu uso em análises e sistematizações de sentido prático ou cultural, são construções características dessa área do conhecimento, (...). Por isso, o desenvolvimento de códigos e linguagens em ciência e tecnologia deve ser tomado como um aspecto formativo de interesse amplo. (BRASIL, 2002, p.24)*

Nessas competências há uma ênfase ao domínio e interpretação das linguagens, das nomenclaturas, dos símbolos, digramas e gráficos. O estudo de funções abrange domínio, interpretação e relação das linguagens algébrica, gráfica e natural. Segundo o PCN+ (2002),

---

[12] As disciplinas científicas do Ensino Médio são biologia, química, física e matemática.

> *“O **estudo das funções**, permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construído modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de funções e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.” (IBID, p.121, grifos do autor)*

O estudo das funções, com a ênfase defendida pelo PCN+, não é uma tarefa muito simples, pois as diversas maneiras de definir ou representar uma função fazem com que esse tema possua uma grande complexidade, como descreve Tall (1992) ao abordar a função como um processo no qual cada elemento de um conjunto (o domínio) é designado a um único elemento do outro (o contra domínio). Segundo ele, nessa abordagem não é possível obter toda gama de possibilidades dos conjuntos envolvidos, pois os mesmos podem envolver conjuntos de números, pontos no espaço n-dimensional, figuras geométricas, matrizes, ou qualquer outro tipo de objeto, incluindo outras funções. Os métodos de relações entre os dois conjuntos podem ser através de uma fórmula, um processo interativo ou recursivo, uma transformação geométrica, uma lista de valores ou outra combinação qualquer que preserve a unicidade estabelecida na definição da relação entre os elementos dos conjuntos.

A ideia de função como um processo é sempre vinda à tona quando há ênfase nas muitas representações do conceito de função – fórmula, gráfico, relação variável, entre outras. Entretanto, em algumas representações, esse processo no qual cada elemento de um conjunto (o domínio) é designado a um único elemento do outro (o contra domínio) não é percebido com muita clareza. DUBINSKY (1990) cita, por exemplo, que embora os gráficos representem uma excelente maneira de pensar em uma função, poucos estudantes percebem a relação do gráfico para entender o processo funcional [pega um ponto no eixo x, traça uma linha vertical para o gráfico e então uma linha horizontal pra o eixo y para encontrar o valor de y = f(x)]. O que acontece, normalmente, é os estudantes verem um gráfico simplesmente como um objeto, uma curva estática e não como representação de uma função.

Em relação à representação gráfica, Goldenberg, Lewis e O’Keefe (1992) descrevem, em sua pesquisa, algumas dificuldades que os estudantes têm ao interpretar gráficos de funções. Uma das dificuldades descrita por eles é uma função ser definida em R, mas seu gráfico é representado em R^2, sendo que, nem sempre o estudante tem consciência desse fato. Outra dificuldade apresentada na pesquisa é a ambigüidade encontrada nas representações simbólicas e no que os gráficos pretendem representar, principalmente quando são utilizados gráficos tradicionais[13]. Em particular, ao iniciar seus estudos sobre gráficos, normalmente, os estudantes apresentam dificuldade em distinguir as variáveis (independente e dependente) dos parâmetros que também podem variar[14].

Os autores também relatam que os estudantes, muitas vezes, ao interpretar modificações de uma expressão simbólica em termos de transformações correspondentes no gráfico (translação, reflexão, dilatação) associam essas transformações à simples "movimentação" do gráfico para esquerda ou para direita, na vertical ou na horizontal de acordo com a "operação" dentro ou fora do parêntese na expressão simbólica. Ou seja, a ênfase no trabalho com transformações é puramente sintática e não matemática.

Além dessas dificuldades já mencionadas, quando o estudante é defrontado com um novo conceito, normalmente tenta significá-lo ou compreendê-lo utilizando-se do repertório cognitivo já construído. Por isso, TALL (1989) sugere que, ao iniciar um conceito que contenha elementos não familiares ao estudante, deve-se tentar encontrar uma abordagem na qual os conceitos construídos tenha duplo papel: ser familiar ao estudante e promover uma base para o desenvolvimento matemático futuro. Esse conceito é chamado pelo autor de uma *raiz cognitiva* (TALL, 1989, p.497). Segundo Tall (1989), uma *raiz cognitiva* é um conceito que permite conexões entre os conhecimentos iniciais do estudante e aqueles que serão desenvolvidos. Tais *raízes cognitivas* não são fáceis de serem encontradas, pois requerem uma combinação de pesquisa empírica (para encontrar o que é apropriado ao estudante

---

[13] Entendemos como representações gráficas tradicionais as representações gráficas estáticas, encontradas nos livros didáticos, onde não é possível manipular dinamicamente as variáveis e os parâmetros.

[14] Entendemos com parâmetros, "uma constante ou variável que distingui casos particulares de uma expressão matemática geral" (p. 244; DAINTITH e NELSON, 1989 Dictionary of Mathmatics, Penguin). Por exemplo, na expressão y = ax + b, temos os parâmetros a e b, representando o coeficiente angular e coeficiente linear respectivamente de uma reta específica.

em cada fase de desenvolvimento) e conhecimento matemático (para ter certeza da relevância dos termos matemáticos).

Inspirados no conceito de *raiz cognitiva, decidimos* chamar de uma *raiz narrativa*, uma estória que emerge com certa frequência nas narrativas dos estudantes e que captura, mesmo de maneira não formal, aspectos de uma propriedade, uma relação, uma definição matemática.

Muitas pesquisas que investigam a aprendizagem de função investem no uso de novas tecnologias, pois o uso do computador para introduzir o conceito de função muda a concepção de função a partir de uma regra básica, o processo ponto a ponto para uma visualização global de todo o comportamento. Nessa nova abordagem, por exemplo, é possível ver as formas no gráfico (retas, curvas, descontinuidades, ...) para sugerir relações algébricas ou trigonométricas (Dugdale & Kibbey, 1989; Schwartz, 1990).

A abordagem de função através do computador pode trazer também um grande potencial para diferentes representações gráficas. Por exemplo, o gráfico pode parecer bem diferente quando utilizamos diferentes domínios (Demana & Waits, 1988) bem como quando mudamos a escala dos eixos (Goldenberg et al., 1988). O uso do computador propicia um ambiente educacional que permite inúmeras interações imediatas, visualizações e interpretações, mas ele, por si só, não é capaz de gerar uma metodologia de ensino. É preciso muita pesquisa para obter dados e insights das concepções dos estudantes geradas por seu uso e para o desenvolvimento de uma metodologia.

As abordagens possíveis em ambientes digitais, com certeza, permitem um acesso mais fácil para inúmeros gráficos de funções de complexidade diferente, possibilitando conexões entre suas diferentes formas de representação. Estas ferramentas computacionais oferecem possibilidades para explorar potenciais *raízes narrativas*, talvez menos presentes ou óbvias quando utilizado papel e lápis. A pesquisa desenvolvida por Goldenberg et al (1992) que retrata uma preocupação em ajudar a superar algumas das dificuldades que os estudantes têm ao interpretar gráficos de funções parece-nos fazer uma abordagem de funções contemplando o conceito de *raízes narrativas*. Nesta pesquisa, eles propõem uma intervenção com estudantes utilizando como ambiente de ensino a Geometria Dinâmica, mais precisamente, um ambiente cuja representação gráfica de uma função tem a variável independente e sua imagem representadas separadamente (e não juntas como nos gráficos convencionais) e suas variações são dinamicamente manipuladas pelo estudante (ver figura 10). Essa intervenção através de um ambiente de Geometria Dinâmica visa propiciar narrativas que tentam dar significado ao comportamento (não muito usual) observado e que explicam alguns fenômenos matemáticos.

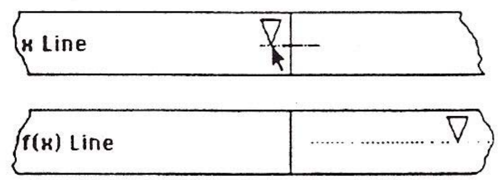


Figura 10: Dynagraph (Goldenberg, 1992, p.247)

1.5 RESUMO

Nesse capítulo definimos e caracterizamos dois termos importantes para o nosso trabalho: narrativa e micromundo. Além disso, transcrevemos um pequeno estudo sobre funções, abordando as diferentes concepções e representações, as complexidades e dificuldades presentes em seu ensino, além de algumas definições matemáticas sobre funções. Outro aspecto importante nesse capítulo foi a definição de raízes cognitivas e como essas são importantes, principalmente na introdução de um novo conceito, raiz narrativa.

Em nossa pesquisa estamos interessados em estudar as narrativas produzidas pelos estudantes diante da abordagem matemática sobre funções, buscando entender o papel das narrativas na aprendizagem matemática e como a evocação das estórias contribui para a construção de conhecimentos e significados matemáticos. Mais especificamente, pretendemos identificar as narrativas que emergem durante explorações de fenômenos matemáticos e os momentos nos quais elas ficam mais evidentes. Pretendemos também investigar se os estudantes buscam, e de que forma buscam, em seus conhecimentos anteriores e nas suas experiências, argumentos que possam dar sentido e o ajudem a compreender o comportamento observado, ou seja, pretendemos identificar narrativas que caracterizam *raízes narrativas.* Para enfocar os nossos interesses, formulamos as seguintes questões de pesquisa:

1) *Qual o papel das narrativas na construção do conhecimento de função entre estudantes do Ensino Médio?*

2) *Em quais atividades as narrativas emergem com mais freqüência?*

3) *Podemos identificar estórias que representam raízes narrativas em relação ao estudo de função?*

No próximo capítulo, trataremos da metodologia de pesquisa e da intervenção empírica com alunos do 1º ano do Ensino Médio. Para essa intervenção, utilizamos a representação gráfica em ambiente de Geometria Dinâmica dos estudos de Goldenberg, Lewis e O'Keefe, fazendo algumas adaptações em relação ao proposto na pesquisa deles, além da representação cartesiana, também utilizando Geometria Dinâmica. A escolha por ambientes de geometria dinâmica deve-se ao fato de acreditarmos que estes ambientes podem promover oportunidades para produção de narrativa nas atividades matemática propostas aos estudantes, devido a seu caráter interativo e dinâmico.

CAPÍTULO 2

Escolhemos como metodologia norteadora de nossa pesquisa o *Design Experiments*[15] e os motivos de tal escolha são explicados e compreendidos à medida que descrevemos tal metodologia. É importante ressaltar que o termo *design* não tem uma tradução para o português, "*o termo design envolve atividades como planejar, delinear, desenhar, esboçar, projetar, esquematizar, criar, inventar e executar."(*DRISOSTES, 2005, p.38).

2.1 DESIGN EXPERIMENTS

Segundo Steffe e Thompson (2000), o principal objetivo para usar a metodologia *Design Experiments* é pesquisar, em primeira mão, as aprendizagens e o raciocínio matemático dos estudantes. Sem a experiência que o ensino da matemática proporciona não se teria base para chegar a entender o poder dos conceitos e das operações matemáticas construídas pelos alunos ou até supor que esses conceitos e operações podem ser diferentes dos pesquisadores.

Segundo Steffe e Thompson (2000) a base para a construção da matemática dos estudantes é composta por duas restrições: as restrições que a linguagem e as operações são capazes de produzir e as restrições relacionadas aos erros dos estudantes. A primeira restrição está relacionada com a construção da matemática dos estudantes e a segunda com as limitações dos conhecimentos matemáticos dos aprendizes.

Steffe et al (2000) apontam uma diferença entre "a matemática dos estudantes[16]" (quando se refere ao conhecimento matemático particular, individual

---

[15] Em algumas publicações o termo Design Experiments é traduzido como Experimentos de Design ou Experimento de Ensino. Em nosso trabalho optamos por não traduzir o termo Design Experiments.
[16] Tradução adotada para o termo "students´ mathematics"

do estudante) e “modelos de matemática dos estudantes[17]” (quando se refere a interpretação do pesquisador dos conceitos matemáticos dos aprendizes), pois para o *Design Experiments* o conhecimento matemático do estudante é independente do conhecimento matemático do pesquisador, ou seja, os conhecimentos matemáticos dos aprendizes resultam também de suas interações com o meio físico e sociocultural, além do conhecimento puro da matemática, o qual, desse ponto de vista, é impessoal, atemporal, não histórico e universal. O *Design Experiments* pretende estudar e tentar compreender, através do que os estudantes falam ou fazem, o entendimento dos objetos matemáticos, considerando a matemática como um objeto vivo, em constante interação com o meio e os indivíduos. Mas como e onde surge essa metodologia?

2.1.1 SURGIMENTO DO DESIGN EXPERIMENTS COMO METODOLOGIA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A metodologia *Design Experiments* surge nos Estados Unidos aproximadamente em 1970. Esse surgimento deve-se principalmente ao fato de se utilizar métodos de pesquisa desenvolvidos fora da educação matemática e com objetivos não educativos para fazer a “matemática dos estudantes”; o que acarreta outro fator determinante ao surgimento de uma nova metodologia: a grande brecha entre a prática de pesquisa e a prática de ensino.

Depois de um grande esforço por utilizar esses métodos de pesquisa para estudar o desenvolvimento matemático dos estudantes, fica claro que é necessário novos métodos de pesquisa com raízes na educação matemática. Alguns pesquisadores compreendem que os educadores matemáticos não podem simplesmente tomar emprestado métodos vindo do campo da epistemologia genética, filosofia ou psicologia; é preciso criar uma metodologia com raízes na educação matemática e que inclui os progressos dos estudantes ao longo de suas interações com as atividades matemáticas e não apenas que compare os resultados

---

[17] Tradução adotada para o termo “*mathematics of students*”

obtidos antes de uma intervenção de estudo ou tratamento assim como os resultados obtidos depois da intervenção de estudo ou tratamento, com o intuito de especificar as diferenças entre eles. Essa metodologia, com raízes no "paradigma da agricultura", assumia o fato de ser a manipulação experimental algo de causa e efeito.

O *Design Experiments* surge não como uma metodologia padrão ou com o intuito de padronizar algo, mas sim como uma ferramenta conceitual que os pesquisadores usam para organizar suas atividades.

2.1.2. CARACTERÍSTICAS DA METODOLOGIA

O Design Experiments é uma ferramenta exploratória, derivada das intervenções clínicas [18] de Piaget e tem como objetivo explorar a "matemática dos estudantes" para compreender os "modelos de matemática dos estudantes". Com tal objetivo, Cobb at al (2003) identificam, nessa metodologia, cinco características que se cruzam:

1ª: O propósito do *Design Experiments* é desenvolver uma classe de teorias tanto sobre o processo de aprendizagem como os meios para dar suporte a tal aprendizagem. Seja a aprendizagem individual do estudante, de uma classe, da comunidade de professores ou de uma organização de ensino.

2ª: O caráter extremamente *intervencionista* dessa metodologia acarreta a busca por novas formas de aprendizagem, pois a intervenção passo-a-passo permite uma observação melhor de cada etapa e uma identificação por formas diferentes e inéditas de aprendizagem.

---

[18] O método clínico de Piaget consiste num diálogo com a criança, de forma sistemática, de acordo com o que ela vai respondendo ou fazendo. Em certas situações cumpre uma tarefa, em outras explica algum fenômeno físico ou biológico. Piaget iniciou esse método de conversa com o intuito de aprender a seqüência dos pensamentos da criança. Ao invés de contabilizar o número de respostas pré-determinadas como corretas, sistema comum dos testes já existentes, Piaget fixou-se na análise das justificativas que as crianças davam ao responder suas indagações. (http://www.pedagogiaemfoco.pro.br/edinf02.htm, consulta em 31/1/2008)

3ª: O Design Experiments possui dois lados: *prospectivo e reflexivo*. No lado prospectivo são construídos as hipóteses do processo de aprendizagem e os suportes para tais hipóteses; já no lado reflexivo são conduzidos continuamente testes de análise que podem confirmar ou refutar uma determinada hipótese.

4ª: O *design interativo* tem sua origem no caráter prospectivo e reflexivo dessa metodologia, pois as conjecturas são geradas e talvez refutadas, novas conjecturas são desenvolvidas e submetidas a testes.

5ª: O desenvolvimento de teorias durante o processo de experimentação é uma característica que reflete o caráter interativo dessa metodologia, pois não existem conjecturas prontas e inalteráveis que devem ser simplesmente aplicadas e comparadas com resultados anteriores.

Essas características não devem ser analisadas separadamente, pois umas acarretam ou são acarretadas pelas outras ou se interceptam em algum aspecto. Além dessas características, existem alguns elementos dessa metodologia.

2.1.3. ELEMENTOS DA METODOLOGIA

O *Design Experiments* envolve uma seqüência de sessões de ensino (Steff, apud STEFF et al, 2000). As sessões de ensino incluem um professor (ou professor/pesquisador), um ou mais estudantes, uma testemunha das sessões de ensino e um método para captar o que ocorre durante o episódio para que possa ajudar na análise das atividades e também para preparar as sessões subseqüentes (caráter reflexivo e interativo dessa metodologia). Em nossa pesquisa, a cada sessão realizada, refletimos sobre nossas intervenções e as atitudes dos estudantes utilizando os instrumentos de captação dos momentos vivenciados nas sessões (sistemas de áudio e vídeo, além de captação dos movimentos na tela do computador executados pelos estudantes) e modificamos algumas práticas por outras de acordo com as atitudes observadas.

Antes de iniciar as sessões de ensino, o professor/pesquisador deve realizar o ensino exploratório. Esse momento é importante porque o pesquisador pode fazer um estudo preliminar dos conhecimentos matemáticos dos estudantes e das operações que eles podem fazer, a fim de, posteriormente, fazer comparações para tomar atitudes diferentes de acordo com o progresso dos estudantes.

O professor-pesquisador também tem de estar atento às suas concepções e a seus conhecimentos, visto que nem sempre são as concepções e conhecimentos dos aprendizes, pois “a matemática dos estudantes” (quando se refere ao conhecimento matemático particular, individual do estudante) é independente da matemática do professor e sofre influência do meio físico e sociocultural, além do conhecimento puro da matemática.

Após cada sessão de ensino, o professor/pesquisador deve retornar à hipótese de pesquisa para poder gerar uma ou mais hipóteses que possam ser testadas na próxima sessão de ensino e para ter certeza de não estar desviando a investigação. O pesquisador pode ser forçado a abandonar uma hipótese quando, ao interagir com os aprendizes, necessita criar novas hipóteses. Mas para formular novas hipóteses, o professor/pesquisador deve estar atento para compreender qual fazer os aprendizes fazem. A interação entre professor/pesquisador e estudante é fundamental no uso dessa metodologia.

Em nossa pesquisa destacamos duas fases distintas. A primeira fase consiste no design dos micromundos *Cartesiangraph* e *Dynagraph*; e a segunda fase na experimentação desses micromundos com estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

2.2. Fase de Design

Em nossa pesquisa estamos interessados em abordar de maneira mais significativa a representação gráfica de uma função, em ambiente de Geometria Dinâmica, o significado dela para o estudante e a relação da representação gráfica de uma função com sua expressão simbólica. Os gráficos permitem uma percepção direta da imagem pictórica usada, por exemplo, na explicação do crescimento, decrescimento, concavidade[19], máxima, mínima, pontos de inflexão, domínio e imagem e podem facilitar o entendimento do comportamento da função. Nesse contexto selecionamos os micromundos[20] *Cartesiangraph* e *Dynagraph* para desenvolvermos nosso experimento.

2.2.1. CARTESIANGRAPH

O micromundo *Cartesiangraph* é desenvolvido em Cabri Géomètre, que apresenta, na tela do computador, representações de gráficos no plano cartesiano. Os gráficos representados são dinâmicos, permitindo aos usuários uma observação do comportamento da função à medida que movem a coordenada x ao longo do eixo das abscissas. Escolhemos escrever o número 1 em cada eixo para indicar em qual escala estamos trabalhando e qual a direção para os valores positivos e, consequentemente, acreditamos que os estudantes sejam capazes de identificar qual a direção dos valores negativos. Optamos por não escrever vários números nos eixos, apesar de haver pequenas marcas indicando os números inteiros localizados nos eixos, com o intuído de permitir uma maior liberdade para o estudante ao observar o comportamento da função. Para melhor compreender o funcionamento de uma representação gráfica nesse micromundo, escolhemos a função $f(x) = -x^2$ (aplicada aos estudantes) para exemplificar esse micromundo.

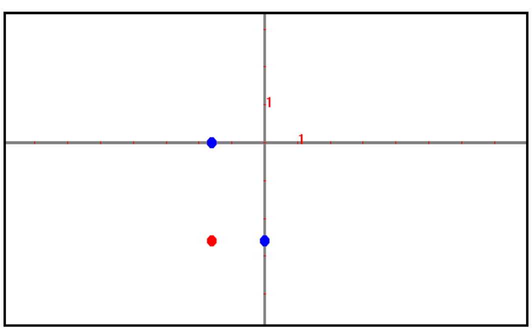


Figura 12: Representação gráfica da função $f(x) = -x^2$, para um valor negativo de x.

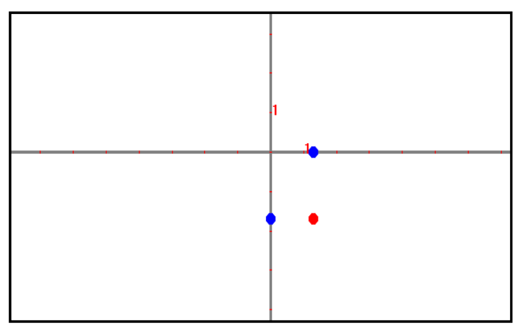


Figura 11: Representação gráfica da função $f(x) = -x^2$, para um valor positivo de x.

---

[19] Concavidade é a abertura para cima ou para baixo de uma parábola.
[20] Como visto no capítulo anterior, Hoyles e Noss (1987) descrevem micromundo como um caminho de interação entre o aluno e o programa (computacional), sendo bastante influenciado pela situação didática na qual as interações são feitas

No Cartesiangraph, os estudantes têm disponível a ferramenta *rastro*[21]. Essa ferramenta auxilia na observação do comportamento da função. Apresentamos a função f(x) = – x^2, agora com o uso da ferramenta *rastro*.

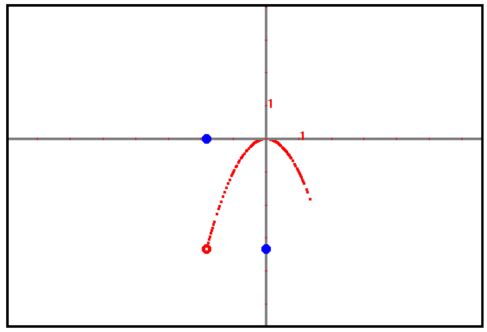


Figura 13: Representação gráfica da função $f(x) = -x^2$, utilizando a ferramenta *rastro.*

2.2.2. DYNAGRAPH

O micromundo *Dynagraph* (inspirado nos estudos de Goldenberg, Lewis e O'Keefe) é desenvolvido em Cabri Géomètre, que apresenta, na tela do computador, representações gráficas de funções nas quais os eixos x e y são configurados horizontalmente. Esses gráficos são dinâmicos, ou seja, a variável independente pode ser dinamicamente controlada via mouse pelo movimento de uma "bolinha" em uma linha "numérica" (eixo das abscissas), enquanto sua imagem se move paralelamente em uma linha "numérica" (eixo das ordenadas), permitindo uma observação do comportamento da imagem da função à medida que movemos a coordenada x ao longo do eixo das abscissas.

No Dynagraph, o estudante pode mover livremente os valores da variável independente da função e sua imagem assume valores de acordo com o movimento feito em x e com sua lei de formação. Optamos por não apresentar os eixos totalmente numerados, colocando apenas os valores de -1, 0 e 1 respectivamente em cada linha "numerada". A escolha em não fornecer os valores numéricos da

[21] O rastro é uma ferramenta do software Cabri Géomètre que permite obter um rastro visual do movimento do par ordenado (x,y).

função teve o intuito de providenciar uma maior liberdade aos estudantes para descrever o comportamento da função observada na representação gráfica, pois Goldenberg, Lewis e O'Keefe (1992) observaram que ao colocar números os estudantes ficam mais direcionados a explicar os números por si só do que o comportamento como um todo da função.

Como na pesquisa desenvolvida por Goldenberg et al. (1992), na nossa, o domínio e a imagem estão numa mesma escala na reta numérica. Enquanto a informação da escala pode ser mostrada na forma de marcas na linha numérica, também podemos esconder essa informação (no caso da pesquisa citada eles fizeram um pequeno traço, sem indicar o número, para localizar o zero em cada eixo; também não havia nenhuma linha já traçada em cada eixo). Para melhor compreender o funcionamento de uma representação gráfica nesse micromundo, escolhemos a função $f(x) = -x^2$ (aplicada aos estudantes), para exemplificar esse micromundo.

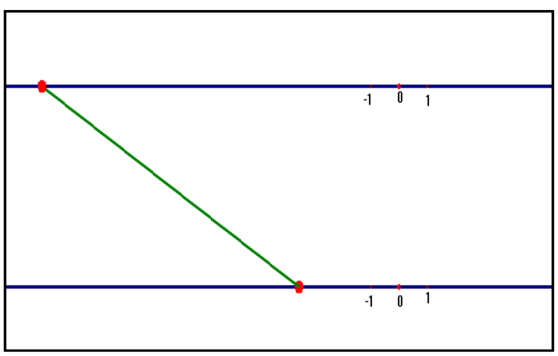


Figura 14: Representação gráfica da função $f(x) = -x^2$, para um valor negativo de x.

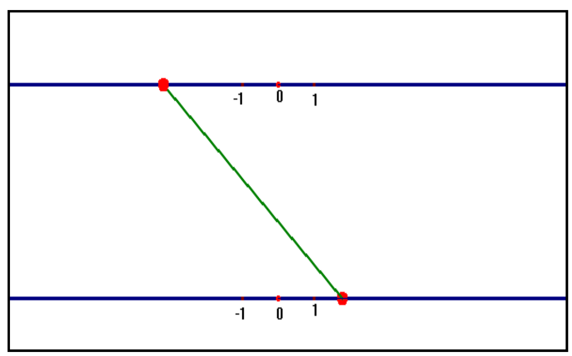


Figura 15: Representação gráfica da função $f(x) = -x^2$, para um valor positivo de x.

Segundo Goldenberg et al. (1992), a ideia do Dynagraph é providenciar uma conexão entre o ponto na representação cartesiana que representa um elemento da função (de acordo com a definição de Bourbaki[22]) e distinguir as duas partes da informação que o ponto codifica. Essa mudança no padrão do comportamento pode

---

[22] Segundo Selden e Selden (1992), Bourbaki define função pela correspondência entre elementos de dois conjuntos através do par ordenado.

trazer um elemento “excepcional”, uma das características fundamentais na criação de narrativas.

2.3. Fase de Experimentação

A fase de experimentação foi dividida em dois momentos: elaboração de atividades e escolha das funções presente nas atividades e aplicação das atividades desenvolvidas no primeiro momento acompanhada de análise e ajustes das atividades à medida que as sessões de ensino ocorriam. O processo de elaboração das atividades (1º momento da fase de experimentação) continuou no segundo momento, pois o *Design Experiments* tem como característica um design interativo e um caráter extremamente intervencionista, além dos aspectos *prospectivo e reflexivo*, o que acarreta na busca por novas formas de aprendizagem e no desenvolvimento de uma classe de teorias tanto sobre o processo de aprendizagem como nos meios para dar suporte a tal aprendizagem.

2.3.1. Primeiro Momento: Definição das funções e elaboração das atividades

A primeira decisão foi definir quais e quantos tipos de funções seriam apresentadas na fase de experimentação. Num primeiro momento, pensamos em apresentar 12 funções, abrangendo 5 tipos: funções afins, funções quadráticas, funções descontínuas, funções que possuem assíntota e funções trigonométricas, com um número diferente de funções em cada tipo, pois pretendíamos quebrar a tendência de sempre dividirmos igualmente o número total de objetos, no nosso caso, de funções. As 12 funções, divididas por tipo são:

$$\text{Funções afins: } \begin{cases} 1)\ y = x - 2 \\ 2)\ y = 2x + 1 \\ 3)\ y = -x + 2 \\ 4)\ y = x \ \text{(função linear)} \end{cases}$$

Funções quadráticas: $\begin{cases} 5)\ y = x^2 + 1 \\ 6)\ y = -x^2 \\ 7)\ y = 3x^2 - 2 \end{cases}$

Função descontínua: 8) y = maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$

Funções que possuem assíntota: $\begin{cases} 9)\ y = x + \dfrac{1}{x} \\ 10)\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Funções trigonométricas: $\begin{cases} 11)\ y = \cos x \\ 12)\ y = 2 \operatorname{sen} x \end{cases}$

Escolhemos 12 funções e 5 tipos, pois acreditamos ser interessante abranger, um pouco, a grande variedade das funções. Entretanto, percebemos, com auxílio da aplicação de uma professora de matemática e com algumas reflexões, que havia um grande número de funções e que era uma quantidade excessiva de tipos, principalmente para que fossem todas trabalhadas em uma única sessão de ensino. A decisão por quantas e quais retirar não foi fácil, mas fez-se necessária. Analisando, tentamos evitar ter vários tipos de função representada por um só exemplo. Isso nos motivou a tirar todo um grupo. Sendo as afins e as quadráticas, provavelmente, as mais familiares e a descontínua com um comportamento interessante, tivemos que decidir entre as funções trigonométricas e aquelas que possuem assíntota. Como o comportamento do segundo grupo é mais “animado”, optamos por tirar as funções trigonométricas, ficando com um total de 10 funções, classificadas em 4 tipos: funções afins, funções quadráticas, funções que possuem assíntotas e funções descontínuas.

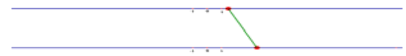
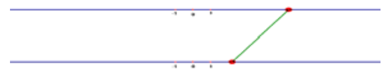
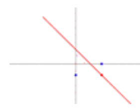
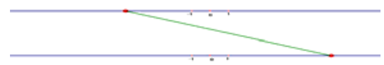
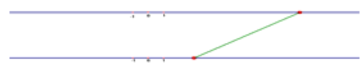
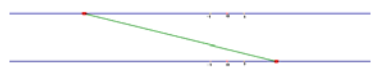
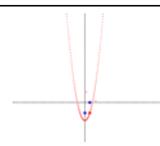
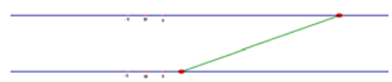
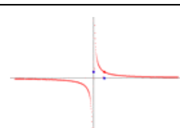
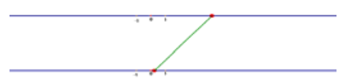
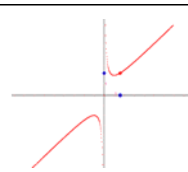
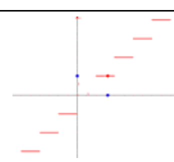
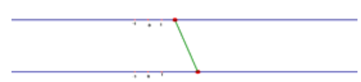
Representação Algébrica	Cartesiangraph	Dynagraph
$y = x - 2$		
$y = 2x + 1$		
$y = -x - 2$		
$y = x$		
$y = x^2 + 1$		
$y = -x^2$		
$y = 3x^2 - 2$		
$y = \frac{1}{x}$		
$y = x + \frac{1}{x}$		
y = o dobro do maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$		

Tabela 1: Funções escolhidas

Apresentar, dentro de uma atividade com 4 tipos de funções diferentes, mais de uma função de um mesmo tipo, auxilia os estudantes a estabelecerem padrões de comportamentos comuns, o que facilita a percepção de comportamentos diferentes, que podem caracterizar outro tipo de função.

Nos livros didáticos, geralmente, o estudo de funções é composto por um capítulo introdutório sobre esse assunto sem o objetivo de observar os comportamentos e características de cada tipo e sim de definir função e as nomenclaturas que serão utilizadas ao longo do estudo de cada tipo de função, estudadas separadamente. Cada tipo de função é vista apenas isoladamente, com um capítulo específico para cada uma delas. Para ilustrar tal comentário, destacamos o sumário de um livro do Ensino Médio:

> Capítulo 1 – Introdução; explorando intuitivamente a noção de função; a noção de função via conjunto; domínio, contradomínio e conjunto imagem; funções definidas por fórmulas matemáticas; estudo do domínio de uma função real; gráfico de uma função; função par e função ímpar; função crescente e função decrescente; função injetiva, sobrejetiva e bijetiva; função composta; função inversa.
>
> Capítulo 2 – Função afim: Introdução; definição de função afim; casos particulares importantes da função afim $f(x) = ax + b$; valor de uma função afim; determinação de uma função afim conhecendo-se seus valores em dois pontos distintos; taxa de variação da função afim $f(x) = ax + b$; caracterização da função afim; gráfico da função afim $f(x) = ax + b$; função afim e geometria analítica; uma propriedade característica da função afim $f(x) = ax + b$; gráfico de uma função definida por mais de uma sentença; função afim crescente e decrescente; estudo do sinal da função afim; zero da função afim; estudo do sinal da função afim; inequações do 1º grau com uma variável em R; proporcionalidade e função linear.
>
> Capítulo 3 – Função Quadrática: Introdução; definição de função quadrática; situações em que aparece a função quadrática; valor da função quadrática em um ponto; zeros da função quadrática; forma canônica da função quadrática; gráfico da função quadrática; a parábola e suas intersecções com os eixos;

vértice da parábola, valor máximo e mínimo e imagem da função quadrática; estudo do sinal da função quadrática; inequações do 2º grau.

Capítulo 4 – Função Modular: Módulo de um número real; distância entre dois pontos na reta; função modular; equações modulares; inequações modulares.

Capítulo 5 – Função Exponencial: Introdução; revisão de potenciação; revisão de radiciação; simplificações de expressões; função exponencial; equações exponenciais; inequações exponenciais; as funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = a^{-x}$; o número irracional e ***e*** a função exponencial $\boldsymbol{e^x}$; aplicações da função exponencial.

Capítulo 6 – Logaritmo e Função Logarítmica: Logaritmo; função logarítmica; outras aplicações da função logarítmica e dos logaritmos

Com esse exemplo, é possível observar um ensino bastante compartimentalizado sobre funções, apresentando cada tipo de função separadamente e desenvolvendo o estudo de um determinado tipo até se esgotarem todos os tópicos envolvidos para, só então, ser apresentado um outro tipo de função.

Em nossa pesquisa procuramos, ao elaborar as atividades (que ao final do processo originaram três fichas de atividades), apresentar vários tipos de funções numa mesma sessão de ensino com o intuito de possibilitar uma visão mais global sobre o assunto como também uma percepção de que as mesmas possuem ora comportamentos semelhantes ora comportamentos diferentes e, portanto, podem ser classificadas, segundo essas semelhanças e diferenças, em diferentes grupos, justificando a existência de vários tipos de função.

Das três fichas de atividades elaboradas; em duas, a tarefa dos estudantes é agrupar as funções apresentadas de forma dinâmica na tela do computador a partir das observações de comportamentos semelhantes ou diferentes dessas funções. Os critérios para classificação de cada grupo de funções é definido pelos próprios aprendizes, que justificam os critérios escolhidos. Essa maneira de trabalhar com funções não é muito usual nem nos livros didáticos nem nas escolas, que, comumente, optam pelo ensino compartimentalizado.

As duas primeiras fichas orientam atividades nos dois micromundos elaborados (Cartesiangraph e Dynagraph), pois na 1ª sessão de ensino, na qual utilizamos a ficha 1, utilizamos o Cartesiangraph com um grupo de estudantes e o Dynagraph com outro grupo de aprendizes. Consequentemente, na segunda sessão de ensino, orientada pela ficha 2, a utilização dos micromundos se invertem, tendo novamente uma parte dos estudantes no Dynagraph e outra no Cartesiangraph. As fichas 1 e 2 são apresentadas em seguida a fim de observarmos algumas semelhanças e diferenças entre as mesmas.

Ficha 1: 1ª sessão de ensino

Dupla: ______________________________________ Data: __________

1) Escreva **tudo** que vêm a sua cabeça quando escuta ou pronuncia a palavra **função**.

2) Sua tarefa agora é observar o comportamento de cada função, anotar comportamentos pertinentes, interessantes, engraçados etc.... e então dividir as funções dadas em grupos explicando seus critérios de seleção.

A ordem de realização da tarefa é livre.

OBS: Cada função está identificada por uma letra para facilitar a referência a ela.

Bom trabalho!!

Ficha 2: 2ª sessão de ensino

Dupla: ______________________________________ Data: __________

1) Vocês já aprenderam algo sobre **função**, na escola? Em caso afirmativo, escreva o que aprenderam.

2) Observe o comportamento de cada função, anote comportamentos pertinentes, interessantes, engraçados etc.... e então divida as funções dadas em grupos, os quais devem ser nomeados, explicando seus critérios de seleção.

OBS: Cada função está identificada por uma letra para facilitar a referência a ela.

Há duas diferenças que podem ser observadas entre as fichas 1 e 2: a pergunta inicial, que na ficha 1 enfatiza um aspecto mais amplo para a palavra função com o intuito de fazer uma sondagem sobre os conhecimentos prévios sobre o assunto e sobre o entendimento da palavra, sendo que na ficha 2 o enfoque é para um significado mais matemático; e a caracterização dos grupos formados, pois na ficha 2 é pedido, além da justificativa dos critérios de seleção, um nome para cada grupo selecionado. O nome escolhido deve retratar uma característica ou um comportamento observado. Essa segunda diferença deve-se a reflexões feitas após a primeira sessão de ensino, pois inicialmente as duas fichas teriam os mesmos enunciados[23].

A ficha 3, utilizada na 3ª sessão de ensino, apresenta a representação algébrica das 10 funções trabalhadas nos micromundos *Cartesiangraph* e *Dynagraph*. A primeira pergunta dessa ficha pretende averiguar o que os estudantes já aprenderam sobre funções na escola, pois o estudo desse assunto foi iniciado paralelamente às sessões de ensino e como estas tinham um espaço de 15 dias entre uma e outra, entre a primeira e a terceira sessão de ensino passaram-se 30

[23] A mudança nos enunciados da ficha 2 deu-se durante a aplicação das atividades, mas resolvemos escrevê-la nessa sessão de elaboração das atividades por uma questão de organização do trabalho.

dias (tempo suficiente para que os estudantes adquirissem algumas noções sobre função).

Já a segunda questão da ficha propõe que os estudantes relacionem a representação algébrica de cada função (apresentada na ficha) com as representações gráficas apresentadas nas duas sessões de ensino anteriores (que os estudantes têm acesso pelo computador). Nossa intenção é perceber se os comportamentos observados nas representações gráficas das funções podem auxiliar ou influenciar no reconhecimento de suas representações algébricas ou, pelo menos, de alguns padrões algébricos, de acordo com alguns padrões de comportamento observados e explicitados.

Ficha 3: 3º Encontro

Dupla: ______________________________________ Data: __________

1) O que vocês podem escrever sobre **função**, no contexto da matemática?

2) Nas sessões anteriores foram apresentadas 10 funções no Cartesiangraph e no Dynagraph. A tarefa de vocês é associar cada expressão algébrica com seu respectivo gráfico no Cartesiangraph e no Dynagraph de acordo com os comportamentos observados.

1) $y = 2x + 1$

2) $y = -x^2$

3) $y = x$

4) $y = x - 2$

5) $y = 3x^2 - 2$

6) $y = \frac{1}{x}$

7) $y = x^2 + 1$

8) $y = -x + 2$

9) $y = x + \frac{1}{x}$

10) $y = \text{dobro do maior inteiro menor que } \frac{x}{2}$

Obs: As funções apresentadas no Cartesiangraph são as mesmas apresentadas no Dynagraph.

Para a definição dessas três fichas de atividade muitas reflexões, intervenções, interações e hipóteses de aprendizagem foram feitas, testadas e analisadas.

2.3.2. Segundo momento: Aplicação das atividades

As atividades desenvolvidas no primeiro momento foram aplicadas primeiramente a três pessoas (ciclo 1) com o objetivo de refinar os enunciados[24] e avaliar em qual ano de Ensino Médio seria mais apropriado realizar nosso estudo empírico, dadas as nossas questões de pesquisa e critérios que serão explicitados ao longo desse segundo momento. Em seguida, as atividades foram aplicadas a um grupo de estudantes do 1º Ano do Ensino Médio (ciclo 2).

2.3.2.1. Ciclo 1

Nas aplicações no ciclo 1 participaram uma professora de matemática, uma estudante do 3º ano do Ensino Médio e um estudante do 1º ano do Ensino Médio.

Com a professora percebemos que havíamos selecionado um grande número de funções, 12 no total, além de haver muitas características diferentes apresentadas de modo muito misturado. Após essa primeira aplicação, essas observações foram determinantes para diminuirmos para 10 o número total de funções a serem trabalhadas, apresentando de forma seguida algumas funções com características comuns, além de envolver um número menor de tipos de função, conforme já explicado.

O fato de em alguns momentos as funções do mesmo tipo aparecerem seguidas umas das outras ajuda a perceber características comuns entre elas e

---

[24] Os enunciados apresentados nas 3 fichas de atividades (primeiro momento) passaram por algumas alterações. Essas alterações foram realizadas durante a aplicação realizada, inicialmente, com as três pessoas citadas no texto, outras na aplicação com os estudantes do Ensino Médio.

serve de padrão para diferenciá-las de outras. Mas também julgamos importante intercalar um pouco os diferentes tipos de função para que as diferenças fiquem mais acentuadas. Em nosso trabalho, escolhemos não apresentar todos os exemplos da mesma função juntos.

Após discussão sobre a atividade com a professora e, em consequência, algumas adaptações, era hora de aplicá-la a algum estudante. Até então, estávamos em dúvida entre envolver estudantes do 1º ano do Ensino Médio (sem experiência escolar sobre funções) ou do 3º ano do Ensino Médio (já com uma boa bagagem escolar sobre funções).

Quando realizamos uma sessão de ensino com uma estudante do 3º ano do Ensino Médio, observamos que a mesma estava mais interessada nos termos matemáticos e em relacionar os assuntos já estudados com as funções apresentadas do que em descrever os comportamentos observados em cada função para então relacioná-los com algum conteúdo estudado. Para ilustrar tal afirmação destacamos uma fala da estudante, ao ser-lhe apresentada a função $f(x) = sen\,x$ no micromundo Cartesiangraph:

> ***Estudante do 3º ano****: Ai que droga,... aí que droga, estou vendo o conteúdo no meu caderno... é aquela que tem o máximo e o mínimo, é aquele que tem os pontinhos abertos e fechados, não é? Eu não lembro. É... ai meu Deus.*

Nesse trecho, a estudante demonstra uma grande preocupação em relacionar o conteúdo registrado em seu caderno com o que está vendo na tela do computador. Outro exemplo é a descrição do comportamento da função $g(x) = -x + 4$ apresentada no micromundo Dynagraph.

> ***Estudante do 3º ano****: É.. meio que o oposto... mas não é um número... meio que simétrico... só que não chega a ser exatamente simétrico, por exemplo, quando x é menor que zero aqui o g(x) é maior que zero. Mas até um ponto de x ele... o g(x) é zero. Eu não lembro o nome da função porque ... o nome eu não vou lembrar mesmo.*

Nesse trecho, a estudante está mais preocupada com os termos matemáticos e com o nome da função que ela quer lembrar-se do que descrever o comportamento da função e destacar aspectos interessantes. Nesse sentido achamos que os estudantes que não tivessem iniciado seu estudo sobre funções poderiam ter mais liberdade ao descrever comportamentos observados, já que não estariam muito preocupados em relacioná-los com assuntos já estudados e com termos matemáticos mais específicos. Esse fato foi observado na aplicação experimental com o estudante do 1º ano do Ensino Médio, que teve mais liberdade de expressão ao tentar explicar, com suas próprias palavras, os comportamentos observados, como o descrição do grupo, por ele identificado como grupo 2, e que englobava as quatro funções afins:

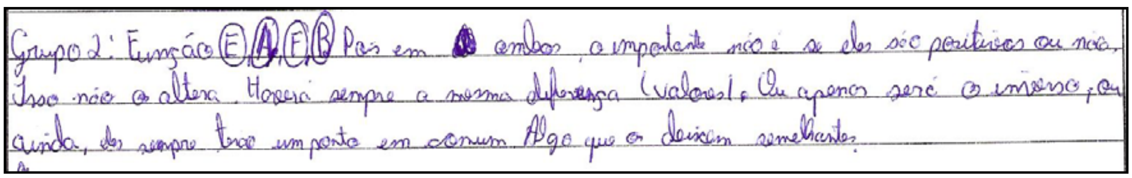

Grupo 2: Função E A F B Pois em ambos, o importante não é se eles são positivos ou não. Isso não os altera. Haverá sempre a mesma diferença (valores). Ou apenas será o inverso, ou ainda, eles sempre terão um ponto em comum. Algo que os deixam semelhantes.

Figura 16: Agrupamento das funções afins feito pelo aluno do 1º ano do Ensino Médio

Comparando as intervenções com os estudantes do 1º e do 3º ano do Ensino Médio, achamos que em nossa pesquisa seria mais interessante trabalhar com estudantes do 1º ano do Ensino Médio, já que eles poderiam ter uma liberdade maior para expressar suas observações devido ao fato de estarem lidando com um conhecimento matemático não trabalhado em sua vida escolar. Outros aspectos importantes para a escolha desse público-alvo foi o fato de resgatarem em suas experiências anteriores repertório para explicar os fenômenos matemáticos observados e a possibilidade de identificarmos *raízes narrativas*.

2.3.2.2. Ciclo 2

Dentro desse contexto foi escolhida uma escola onde o estudo de funções pudesse ser iniciado após ou paralelamente as nossas intervenções. Além disso, por uma questão de localização e acesso, optou-se por uma escola particular da cidade de São Paulo. Os estudantes que participaram da pesquisa foram selecionados pela disponibilidade de horário, já que as sessões de ensino ocorreram fora do horário escolar e pelo interesse e curiosidade em participar de um projeto de pesquisa. As duplas de trabalho foram definidas pela afinidade entre os estudantes selecionados, pois uma das intenções do trabalho em dupla é que os estudantes produzam narrativas e a amizade entre colegas facilita a produção dessas narrativas ao descrever o comportamento de cada função apresentada.

A importância do relato, da comunicação na Educação Matemática, também é enfatizada pelos PCN+ (2002), que entre vários aspectos a serem desenvolvidos no ensino da matemática, destaca:

> *Outro aspecto que se deve enfatizar é a* ***importância da comunicação*** *em Matemática, por ser uma competência valiosa como relato, registro e expressão.*
> *Nas aulas de Matemática, a comunicação, e conseqüentemente o desenvolvimento das competências relacionadas à representação e comunicação, pode ser realizada por meio de propostas de elaboração pelos alunos de textos diversos... (BRASIL, 2002, p. 129, grifos do autor)*

As sessões de ensino na escola ocorreram nos meses de maio e junho de 2007, envolvendo 8 estudantes do 1º ano do Ensino Médio, com idades entre 14 e 15 anos, divididos em 4 duplas. Cada dupla participou de 3 sessões de ensino com duração média de 90 minutos, totalizando, 4,5 horas de sessões de ensino por dupla. As quatro duplas formadas, após algumas discussões com o professor dos estudantes foram:

Dupla	**Afinidade**	**Observações do professor**
Carolina e Juliana	São muito amigas	São boas estudantes, embora Carolina tenha mais interesse e facilidade em matemática do que sua parceira.
Helio e Vinícius	Formam uma boa parceria de trabalho.	São questionadores, gostam de entender os procedimentos e conceitos e não apenas decorá-los.
Adriano e Luciano	São amigos.	Adriano é um estudante atento e esforçado, já o Luciano tem desempenho regular.
Natália e Geiza	Fazem uma boa parceria de trabalho.	São estudantes com desempenho regular em matemática.

Tabela 2: Caracterização dos estudantes participantes da pesquisa

Além dos estudantes, todas as sessões de ensino tiveram a presença da professora/pesquisadora e do professor dos estudantes. Em algumas sessões, a orientadora da pesquisa esteve presente. Para a captação dos fatos ocorridos nas sessões de ensino, utilizamos gravação em áudio e vídeo das duplas participantes e gravação do movimento na tela do computador das respectivas duplas, além das respostas das questões propostas nas fichas de trabalho, uma para cada sessão de ensino.

2.4. PAPEL DO PROFESSOR/PESQUISADOR

Usualmente tinham duas professoras/pesquisadoras presentes nas sessões de ensino além do professor dos estudantes envolvidos, que esteve presente em todas as sessões de ensino. Nossa intenção, enquanto professoras/pesquisadoras foi permitir que os aprendizes fossem responsáveis por suas hipóteses, discussões, refutações e conclusões. No início de cada sessão de ensino cabia-nos explicar a atividade proposta e observar atentamente as interações de cada dupla (seus diálogos, gestos e registros) captadas por gravação em vídeo e pelos movimentos executados na tela do computador (também devidamente gravados). Em alguns momentos a intervenção da professora/pesquisadora fazia-se necessária para responder alguma dúvida mais técnica, instigar outra perspectiva de observação ou incentivar as interações.

2.5. ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos dados coletados através da gravação de todas as sessões de ensino, anotações das duplas e captação dos movimentos realizados na tela do computador foram norteados pela metodologia escolhida – Design Experiments – e pelo embasamento teórico de nossa pesquisa.

De acordo com a metodologia utilizada refletimos sobre as interações dos estudantes após cada sessão de ensino a fim de confirmar ou de refutar estratégias adotadas e hipóteses formuladas, planejando assim a nossa postura na próxima sessão de pesquisa. Uma análise mais profunda é realizada ao final de todas as sessões de pesquisa, procurando identificar:

Estratégias utilizadas pelos estudantes ao longo das sessões de ensino;

Propriedades de funções destacadas em descrições dos comportamentos observados das funções apresentadas dinamicamente;

Indícios de pensamento narrativo e relações entre este modo e o modo paradigmático de pensamento;

Indícios de *raízes narrativas;*

Diferenças e semelhanças expressas pelos estudantes ao lidarem com os diversos ambientes computacionais.

Nosso propósito é, à luz das falas dos estudantes e dos registros captados, relembrar as experiências vividas e delas identificar e analisar os aspectos já destacados.

2.6. RESUMO

Neste capítulo descrevemos nossa metodologia de pesquisa, o Design Experiments, destacando suas características e seus elementos. Descrevemos também o desenvolvimento dos ambientes computacionais Cartesiangraph e Dynagraph, a elaboração das 3 fichas de atividades utilizadas nas sessões de ensino e os refinamentos e reflexões que nos levaram a definir o público-alvo da parte empírica de nossa pesquisa: estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

No próximo capítulo analisaremos as três sessões de ensino de cada dupla participante, tentando identificar, entre outras coisas, indícios de pensamento narrativo, estratégias adotadas, características das funções e possíveis *raízes narrativas*.

CAPÍTULO 3

Neste capítulo descrevemos, em detalhe, cada uma das sessões de ensino e suas implicações, reflexões e interações. A opção que fizemos por agrupar os estudantes em dupla, de valorizar e de incentivar a comunicação oral entre ambos e com a pesquisadora é embasada nos PCNs (BRASIL, 2002); pois

> *...a comunicação oral tem como instrumento para seu desenvolvimento o trabalho de grupo ou duplas, quando os alunos, além de aprenderem uns com os outros, precisam organizar o que sabem para se fazerem entender e, para isso, usam a linguagem que está sendo aprendida. (IBID, p.129 e 130)*

Para a análise das sessões de ensino e a apresentação dos resultados, dividimos as quatro duplas em dois grupos: o primeiro utiliza o Cartesiangraph, na 1ª sessão de ensino e o Dynagraph, na 2ª sessão de ensino. O segundo grupo, na ordem inversa. Essa diferença tem o intuito de verificar, se possível, diferenças e semelhanças quanto ao uso da ferramenta, levando em consideração o fato de ser a primeira ou a segunda sessão de ensino, pois imaginamos que, na segunda sessão, os estudantes estariam mais à vontade com a proposta e com a pesquisadora, independentemente da ferramenta computacional utilizada. A 3ª sessão de ensino é similar para os dois grupos.

3.1 SESSÕES DE ENSINO

As sessões de ensino são divididas em três encontros. No 1º encontro, duas das quatro duplas de estudantes envolvidas, utilizam o Cartesiangraph e no 2º encontro, o Dynagraph. Já as outras duas duplas utilizam o Dynagraph, na 1ª sessão e o Cartesiangraph, na 2ª sessão de ensino. Em cada uma das duas primeiras sessões de ensino são apresentadas representações geométricas de 10 funções, ora no ambiente Cartesiangraph, ora no Dynagraph. Aos estudantes, cabe descrever os comportamentos observados em cada função e agrupar as 10 funções apresentadas geometricamente, segundo critérios definidos e, claramente, justificados por eles próprios. Na 3ª sessão de ensino, são apresentadas as expressões algébricas das 10 funções e os estudantes devem relacionar as expressões algébricas com as representações gráficas trabalhadas nas duas sessões anteriores. Nessa sessão, os aprendizes têm à disposição os dois micromundos (Cartesiangraph e Dynagraph), e a manipulação de ambos pode ser feita a qualquer momento, além das anotações feitas, em papel, durante as duas primeiras sessões.

Em cada sessão de ensino participam uma dupla de estudantes, a pesquisadora, o professor dos estudantes e a orientadora da pesquisa (presente em algumas sessões de ensino). O material utilizado para o desenvolvimento de cada sessão de ensino é uma ficha de atividade com espaço para anotações e um computador. A captação das atividades desenvolvidas é feita por gravação em áudio e vídeo, pela gravação, no computador, dos movimentos realizados pela dupla de estudantes e pelas anotações das duplas participantes e da pesquisadora. Em seguida, descrevemos, em detalhes, as sessões de ensino de cada um dos grupos.

3.1.1. SESSÃO DE ENSINO COM CARTESIANGRAPH

O ambiente computacional Cartesiangraph (descrito no capítulo anterior) é utilizado pelo primeiro grupo (as duplas Carolina e Juliana, Adriano e Luciano), na primeira sessão de ensino e pelo segundo (as duplas Geiza e Natália, Helio e Vinícius), na segunda sessão de ensino. Para descrever as sessões de ensino dividimo-las em três momentos: o primeiro consiste na resposta da primeira pergunta da ficha, que, para o primeiro grupo, discorre sobre o que os estudantes lembram quando escutam a palavra função (contida na ficha 1), e para o segundo grupo, sobre o que já aprenderam a respeito de função na escola (contida na ficha 2). O segundo momento é a descrição de cada uma das 10 funções apresentadas; e o terceiro momento, o agrupamento das funções, de acordo com os comportamentos observados.

3.1.1.1. Primeiro Momento

Para iniciar os estudos, achamos importante saber o significado que os estudantes trazem da palavra *função*, por isso, na primeira ficha de atividades inserimos a questão: “*Escreva* ***tudo*** *que vêm à sua cabeça quando escuta ou pronuncia a palavra* ***função***.” E para tal questionamento, obtemos as seguintes respostas:

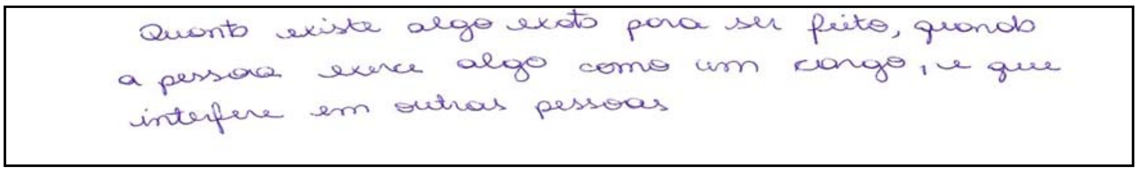

Quanto existe algo exato para ser feito, quando a pessoa exerce algo como um cargo, e que interfere em outras pessoas

Figura 17: Ficha 1: resposta de Carolina e Juliana para pergunta 1

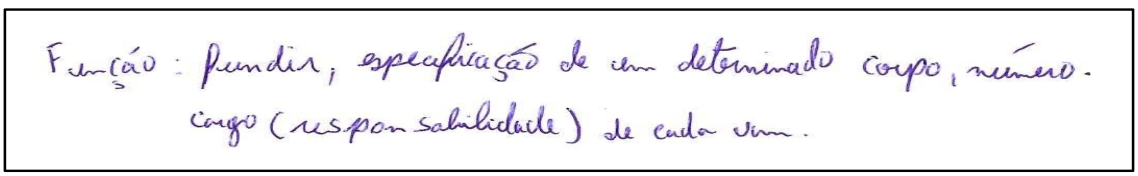

Função: fundir, especificação de um determinado corpo, número. cargo (responsabilidade) de cada um.

Figura 18: Ficha 1: resposta de Adriano e Luciano para pergunta 1

Essa ideia da palavra função no sentido de exercer um cargo também é obtida na fala de:

Adriano*: Ah, sei lá, função é exercer alguma coisa.*

A pesquisadora incentiva os estudantes a pensarem em outros significados para essa palavra, no entanto não há nenhuma resposta fora do contexto já contemplado. Assim, com essas respostas, percebermos que os estudantes não expressam um significado matemático para a palavra *função*.

Para o segundo grupo, a pergunta é diferente, eles utilizam a ficha 2, em que aparece a pergunta: *Vocês já aprenderam algo sobre* ***função*** *na escola? Em caso afirmativo, escreva o que aprenderam*. Diante desse questionamento, obtemos as seguintes respostas:

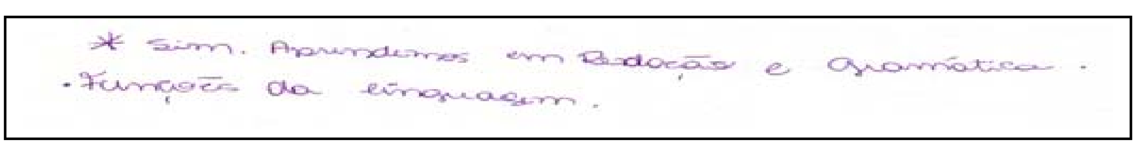

* Sim. Aprendemos em Redação e Gramática.
· Funções da linguagem.

Figura 19: Ficha 2: resposta de Geiza e Natalia para pergunta 1

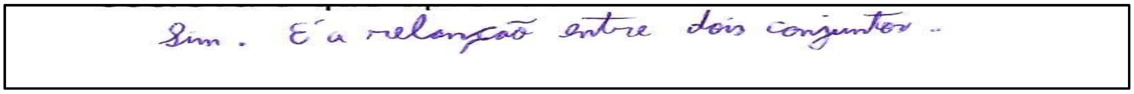


Figura 20: Ficha 2: resposta de Helio e Vinicius para pergunta 1

Vale ressaltar que a dupla Geiza e Natalia ainda não tinha iniciado seus estudos sobre função, e Helio e Vinicius, sim.

3.1.1.2. Segundo Momento

Para a observação de cada função, os estudantes visualizam a representação geométrica de cada função no Cartesiangraph, observam seus comportamentos, fazem suas anotações, para, em seguida, passar para a função seguinte.

3.1.1.2.1. Função a (x) = x – 2

Escolhemos, como primeira função a ser apresentada, a *função afim,* por esta descrever uma reta de fácil percepção para os estudantes, de modo geral. E, como prevíamos, todos eles percebem facilmente que o comportamento da função descreve uma reta. Nessa primeira função, apenas a dupla Carolina e Juliana atentam para o fato da reta não passar pela origem.

> ***Carolina****: Ela faz uma reta.*
> ***Juliana****: Uma linha vertical.*
> ***Carolina****: E não passa pelo zero.*
> ***Adriano****: É uma reta.*
> ***Luciano****: É uma reta transversal.*
> ***Natalia****: Está reto, quer dizer, reto para lá (fazendo um movimento de linha inclinada com as mãos).*
> ***Geiza****: Ela fica... inclinada.*
> ***Vinicius****: É bem retilínea.*

Além dessas observações, os estudantes do grupo 1 (Carolina e Juliana, Adriano e Luciano) descrevem que o ponto (x;y) é o encontro de x e y traçando-se uma reta a partir de cada um deles. Nas palavras de Carolina: *"Ela mexe onde vão as duas bolinhas, então, se você traçar uma reta em cada uma, vai dar a vermelha, onde está a vermelha."* E nas palavras do Adriano: "*É o encontro das duas retas. Encontro das duas bolinhas*", (ver figura 21).

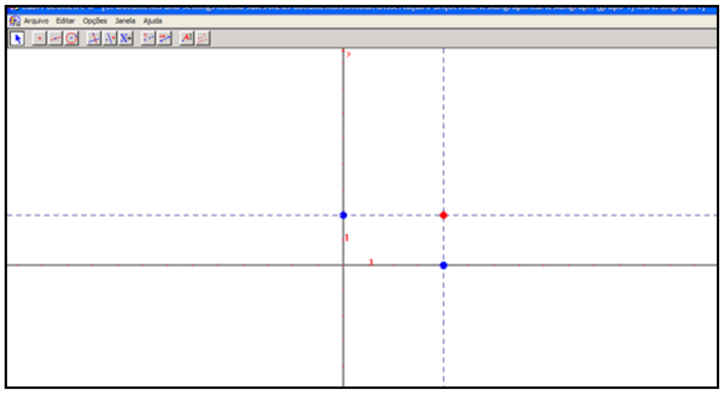


Figura 21: Representação gráfica da fala dos estudantes

A natureza dinâmica do ambiente computacional parece ter incentivado a "desconstrução" do gráfico, mostrando, de certa forma, uma preocupação com a dependência entre as variáveis, e a forma pela qual um gráfico cartesiano é construído.

Um outro aspecto importante destacado pela Carolina e Juliana é a variação proporcional entre as incógnitas x e y. Nas palavras de Carolina: "A*s bolinhas se mexem de maneira proporcional. Quando a bolinha horizontal* (*x*) *tá no 4 e a bolinha* (y) *tá no 2, a bolinha vermelha é tipo a média dos dois."*

Ao final das observações e discussões, os estudantes fazem o seguinte registro sobre a função:

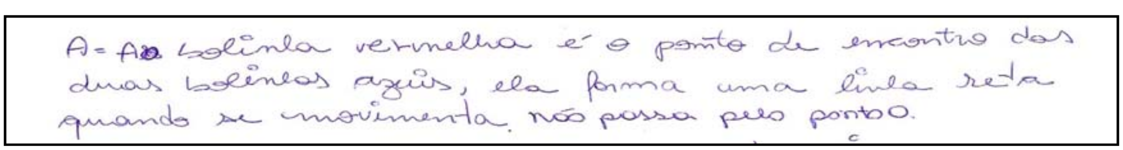


Figura 22: Registro da função a no Cartesiangraph pela Carolina e Juliana

1. a bolinha vermelha corta o plano cartesiano transversalmente
2. quando as bolinhas ~~-~~ se cruzam formam um triângulo.
3 - são paralelas e transversais
4 - formam uma figura retangular na reta.
5 - quando a bolinha se aproxima em direção a reta o ângulo é menor
quando se distancia ele é maior.

Figura 23: Registro da função a no Cartesiangraph pelo Adriano e Luciano

* A → Conforme levamos a bolinha azul para a esquerda, as outras bolinhas (azul e vermelha) se movem para "baixo" e quando a bolinha azul inicial passa pelo ~~[illegible]~~ ponto 2 do eixo x, a bolinha vermelha se encontra com ela, passando do "atrito" entre elas, a bolinha vermelha segue seu caminho inclinado e ao chegar ao ponto -2 do eixo y, ela se atrita com a outra bolinha azul.

Figura 24: Registro da função a no Cartesiangraph pela Geiza e Natalia

"corta"
A: É regular, bem definido → Q 4 → alinha-se no eixo X e Y.

Figura 25: Registro da função a no Cartesiangraph pelo Helio e Vinicius

Todas as quatro duplas percebem facilmente que a função *a* descreve uma reta, como verificado em suas falas, porém para o grupo 2, que já havia mexido no Dynagraph em uma sessão de ensino anterior, a "desconstrução" do gráfico não tem tanto destaque, pois a dependência entre as variáveis já não é uma novidade para eles.

3.1.1.2.2. Função b (x) = 2x + 1

Escolhemos outra *função afim* para auxiliar os estudantes a perceberem um padrão de comportamento e para podermos identificar quais as semelhanças e diferenças que seriam mais notadas em um mesmo tipo de função. Os estudantes percebem que é uma reta, e alguns já a relacionam com a função anterior.

> ***Juliana**: Ela faz uma reta.*
>
> ***Luciano**: Forma uma linha reta.*

***Geiza**: É, de novo...só que aí ela faz... parece que é menor a inclinação. Na (função) a, sei lá , parece que ela (a inclinação) estava maior. Aqui ela está menor.*

***Vinicius**: Mesma coisa do primeiro, só que virado mais para cá (faz o gesto com as mãos). Tipo, o y vai estar um pouco mais em cima do que o outro.*

Uma característica que chama a atenção das duplas, mais do que na primeira função, é o fato da reta não cruzar o eixo x na origem. Essa preocupação, de passar ou não pela origem, vira uma estratégia repetida várias vezes, principalmente para o Adriano e Luciano.

***Juliana:** A bolinha vermelha ... encontra a bolinha que está na horizontal negativa, e a vertical, positiva, né?*

***Adriano**: Ela não passa pelo centro... exatamente. As outras duas passam (se referindo as bolinhas azuis), ela não.*

Ao final das observações e discussões os estudantes registraram:

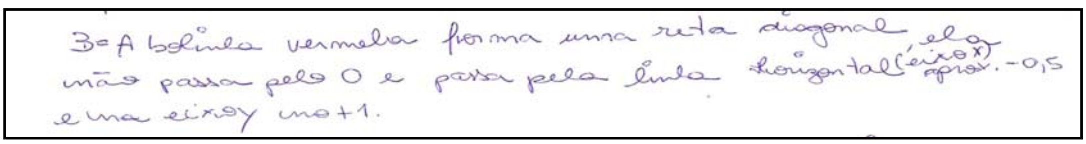

3 = A bolinha vermelha forma uma reta diagonal, ela não passa pelo 0 e passa pela linha horizontal (eixo x) aprox. -0,5 e na eixo y no +1.

Figura 26: Registro da função b no Cartesiangraph pela Carolina e Juliana

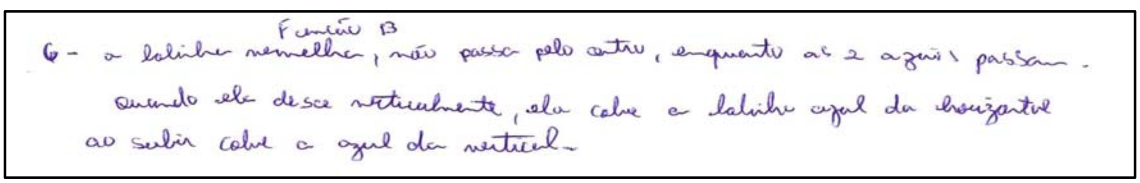

6 - Função B
a bolinha vermelha, não passa pelo centro, enquanto as 2 azuis passam.
Quando ela desce verticalmente, ela cobre a bolinha azul da horizontal
ao subir cobre a azul da vertical.

Figura 27: Registro da função b no Cartesiangraph pelo Adriano e Luciano

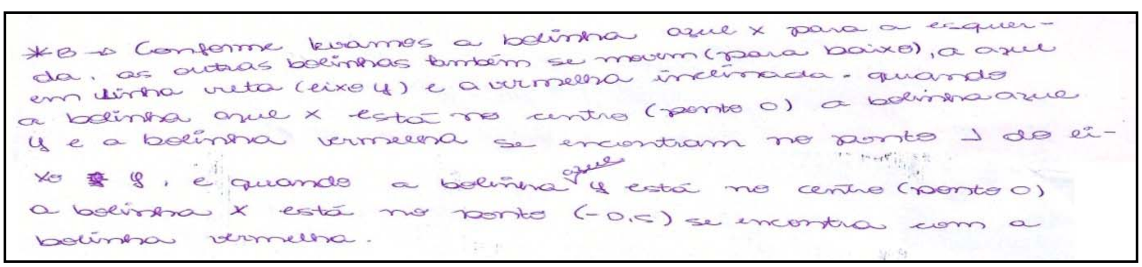

*B → Conforme levamos a bolinha azul x para a esquerda, as outras bolinhas também se movem (para baixo), a azul em linha reta (eixo y) e a vermelha inclinada. quando a bolinha azul x está no centro (ponto 0) a bolinha azul y e a bolinha vermelha se encontram no ponto 1 do eixo y, e quando a bolinha azul y está no centro (ponto 0) a bolinha x está no ponto (-0,5) se encontra com a bolinha vermelha.

Figura 28: Registro da função b no Cartesiangraph pela Geiza e Natalia

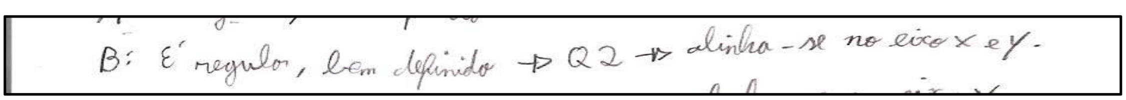

B: É regular, bem definido → Q2 → alinha-se no eixo x e y.

Figura 29: Registro da função b no Cartesiangraph pelo Helio e Vinicius

A relação que a maioria das duplas faz da função *b* com a anterior (função a) é importante como observação dos comportamentos que caracterizam funções afins.

3.1.1.2.3. Função c (x) = x^2 + 1

A terceira função apresentada é uma função quadrática e seu gráfico descreve uma curva conhecida como parábola. Ao apresentar essa função, temos a intenção de provocar uma ruptura com os comportamentos observados nas duas funções anteriores, que descrevem uma reta. Os estudantes percebem facilmente que a figura formada é uma curva:

***Carolina**: Não, agora ela não vai mais formar uma reta.*
***Juliana**: Faz uma curva.*
***Luciano**: Tem outro tipo de movimento. Não é movimento reto, linha reta.*
***Adriano**: Ela forma um arco. Ela faz isso: tchuuuu... (fala acompanhada de gesto de uma curva semelhante a uma parábola).*
***Natalia**: Ai... parece que... a bolinha nunca anda assim (faz um movimento de régua com as mãos)... anda assim (faz um movimento semelhante a uma parábola com as mãos), ah, não sei explicar. É difícil explicar. Ela vai lá em baixo e volta.*
***Helio**: É uma função bem redondinha (e faz o movimento de curva com as mãos assoviando)*

A dupla Helio e Vinicius chega a fazer uma relação do comportamento observado com a representação algébrica, quando Vinicius afirma: "*Função ao quadrado forma um parábola, né?".* As estudantes Carolina e Juliana, ao tentarem descrever a curva, afirmam:

***Carolina**: (É) tipo de um V ... ou um U.*
***Juliana**: É.*
***Carolina**: Então ela faz uma curva, né? ... Não, é que eu quero falar tipo que ela é decrescente nos pontos e depois aumenta de novo, na parte negativa.*
***Pesquisadora**: Ela vai decrescendo onde?*
***Carolina**: Nos pontos, nas marcações na parte positiva e depois começa a aumentar na parte negativa.*

As estudantes percebem que o gráfico da função é uma curva e, para dar um bom significado ao comportamento observado, comparam-no com as letras V e U, que são conhecimentos já contidos em seu repertório cognitivo. Elas destacam que a função é decrescente em determinado trecho e crescente em outro trecho diferente. Em particular, distinguem entre o que acontece quando *x* é negativa e quando *x* é positiva. Não falam sobre ponto mínimo, aspecto esse sempre presente nos livros didáticos quando o assunto são as funções quadráticas. Esse tipo de comportamento – ponto máximo ou mínimo – só é observado no Dynagraph. Como síntese do comportamento observado, eles escrevem:

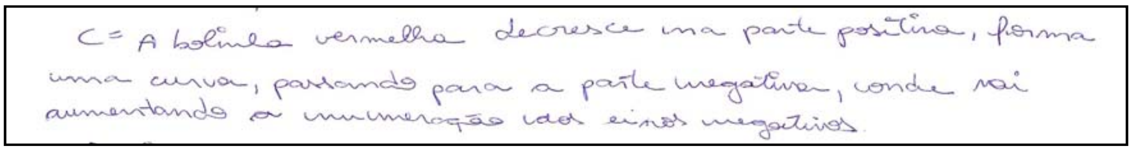

C= A bolinha vermelha decresce na parte positiva, forma uma curva, passando para a parte negativa, onde vai aumentando a numeração dos eixos negativos.

Figura 30: Registro da função c no Cartesiangraph pela Carolina e Juliana

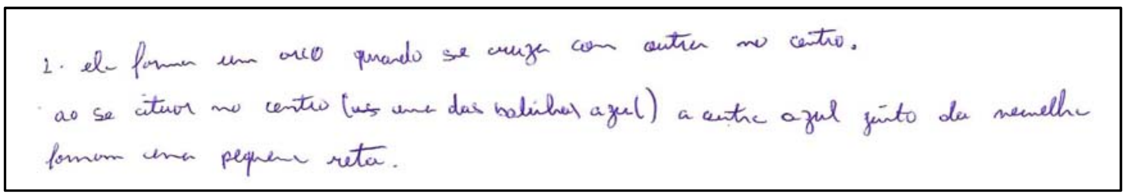

1. ela forma um arco quando se cruza com outra no centro.
ao se cituar no centro (uma das bolinhas azul) a outra azul junto da vermelha formam uma pequena reta.

Figura 31: Registro da função c no Cartesiangraph pelo Adriano e Luciano

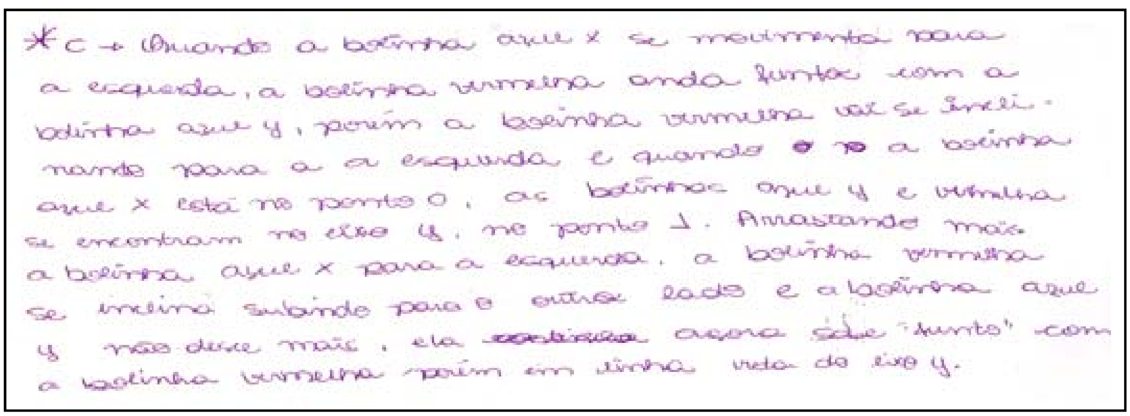

* c → Quando a bolinha azul x se movimenta para a esquerda, a bolinha vermelha anda junto com a bolinha azul y, porém a bolinha vermelha vai se inclinando para a a esquerda e quando a bolinha azul x está no ponto 0, as bolinhas azul y e vermelha se encontram no eixo y, no ponto 1. Arrastando mais a bolinha azul x para a esquerda, a bolinha vermelha se inclina subindo para o outro lado e a bolinha azul y não desce mais, ela ~~[illegible]~~ agora sobe "junto" com a bolinha vermelha porém em linha reta do eixo y.

Figura 32: Registro da função c no Cartesiangraph pela Geiza e Natalia

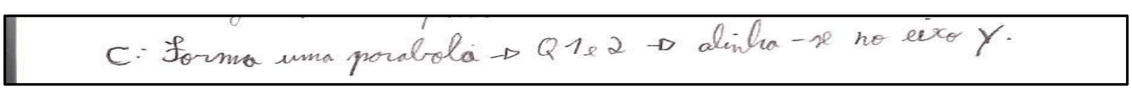

C: Forma uma parabola → Q1 e 2 → alinha-se no eixo Y.

Figura 33: Registro da função c no Cartesiangraph pelo Helio e Vinicius

A ruptura que pensamos ao propor a função *c* foi alcançada, pois as quatro duplas percebem e descrevem que o comportamento da função *c* não é retilíneo, portanto essas funções não devem ser do mesmo tipo, isto é, para as duplas não devem ser classificadas no mesmo grupo (como verificaremos mais adiante na separação dos grupos de funções).

3.1.1.2.4. Função d (x) = – x + 2

Com essa função afim, temos o objetivo de mostrar a eles que um mesmo comportamento pode reaparecer, mesmo mudando o sentido da figura já observada, além de evidenciar que funções com comportamentos semelhantes podem ter diferenças pequenas ou mais significativas.

Como prevíamos, os estudantes conseguem identificar a reta formada e relacioná-la com as retas já observadas anteriormente.

Carolina*: Ela foma uma reta de novo.*
Luciano*: É uma reta. Igualzinho a primeira.*
Geiza*: É igual a 1 (referindo-se a função a).*
Vinicius*: Não, essa aqui faz uma risca só, só que ao contrário (da primeira função). A reta tem sentido oposto.*
Adriano*: "Aqui mudou a direção da reta, né?" (fazendo o gesto da direção da reta).*

Ao final das observações, dizem:

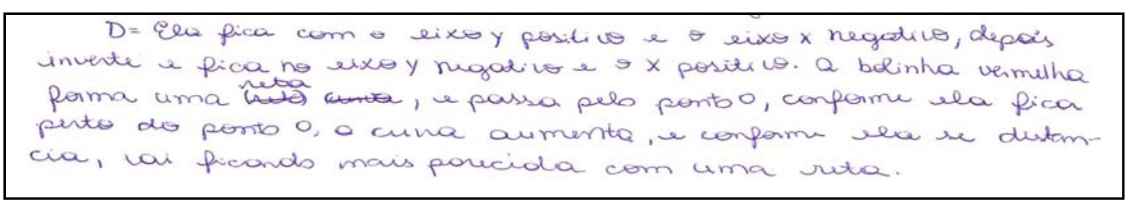

D= Ela fica com o eixo y positivo e o eixo x negativo, depois inverte e fica no eixo y negativo e o x positivo. a bolinha vermelha forma uma reta ~~curva~~, e passa pelo ponto 0, conforme ela fica perto do ponto 0, a curva aumenta, e conforme ela se distancia, vai ficando mais parecida com uma reta.

Figura 34: Registro da função d no Cartesiangraph pela Carolina e Juliana

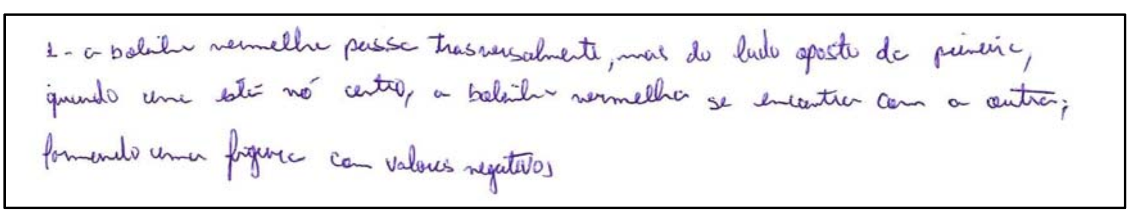

1 - a bolinha vermelha passa trasversalmente, mas do lado oposto da primeira, quando uma está nó centro, a bolinha vermelha se encontra com a outra; formando uma figura com valores negativos

Figura 35: Registro da função d no Cartesiangraph pelo Adriano e Luciano

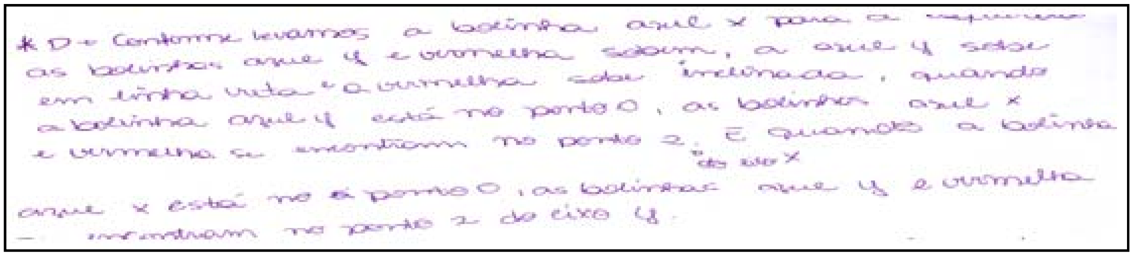


Figura 36: Registro da função d no Cartesiangraph pela Geiza e Natalia

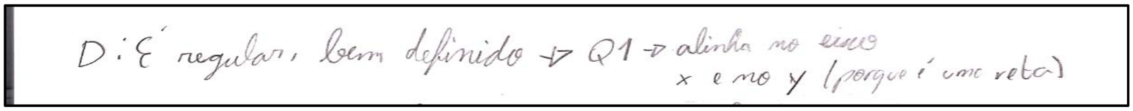


Figura 37: Registro da função d no Cartesiangraph pelo Helio e Vinicius

Os estudantes relacionam rapidamente a função *d* com as duas primeiras funções (que descrevem também uma reta). Entretanto, a percepção das diferenças entre as funções, como a reta estar no sentido contrário em relação às outras duas funções afins (funções *a* e *b*), só é destacada pela dupla Adriano e Vinicius.

3.1.1.2.5. Função e (x) = – x^2

O comportamento dessa função quadrática é descrito de diferentes maneiras pelos estudantes:

> ***Carolina**: Ela está só no eixo y negativo, que ela passa pelo zero, então ela faz uma curva.*
> ***Adriano**: Aqui ela forma um arco, mas (essa função) também é diferente (da outra que forma um arco). Ela faz assim oh! (acompanha com gesto semelhante a uma parábola com concavidade para baixo).*
> ***Natalia**: É igual a... igual a (função) c. Ela faz assim (faz o movimento de parábola nas mãos). Parece uma bola mesmo, vai lá em baixo e volta.*
> ***Vinicius**: Ual! Essa daqui também é parábola. Só que ela passa pelo ponto zero.*

Outra questão levantada, de modo interessante e não muito usual, pela dupla Adriano e Luciano é o fato da função passar pelo ponto (0,0), nas palavras do Luciano: "*As três bolinhas se cruzam ao mesmo tempo.*"

Ao final de suas observações, escrevem:

E= Quando a bolinha azul está do lado positivo do eixo x, a vermelha "desce" pelo eixo Y e conforme se aproxima do ponto 0, a bolinha vermelha faz uma curva pequena, e em seguida acompanha o lado positivo do eixo X.

Figura 38: Registro da função e no Cartesiangraph pela Carolina e Juliana

as 3 bolinhas se cruzam no centro do plano, formando ao movimento total um arco diferente da função c, posicionado para baixo nas terminações.

Figura 39: Registro da função e no Cartesiangraph pelo Adriano e Luciano

* E → Conforme a bolinha azul x vai para a esquerda, as outras bolinhas se movem para cima, a bolinha vermelha que anda junto com a bolinha azul y, se inclina, e quando as 3 passam juntos pelo ponto 0, a bolinha vermelha se inclina descendo para o outro lado e a bolinha azul y ~~[illegible]~~ volta a descer.

Figura 40: Registro da função e no Cartesiangraph pela Geizae Natalia

E: Forma uma parabola → Q3 e 4 → alinhava no y (e no zero)

Figura 41: Registro da função e no Cartesiangraph pelo Helio e Vinicius

Todas as duplas descrevem o comportamento de curva da função e. Das quatro duplas, três relacionam a função *e* com a função *c,* e a dupla Adriano e Luciano cita a concavidade de cada função (mesmo não utilizando esse vocabulário) como uma diferença entre as funções, embora elas tenham um mesmo tipo de comportamento, possuem particularidades diferentes.

3.1.1.2.6. Função f (x) = $\frac{1}{x}$

Num primeiro momento, as duas duplas do grupo 1 têm dificuldades em descrever o comportamento observado da função, porém as do grupo 2, que já haviam visto essa função no Dynagraph, expressam que a função tem comportamento diferente e não se intimidam ao descrevê-la:

> ***Carolina**: É, pois é. Como é que eu falo o que eu estou vendo?*
>
> ***Luciano**: É, passa a bolinha de um lado pro outro, como é que vou explicar isso aqui?*
>
> ***Geiza**: Ah não! Não acredito! De novo isso esquisito.*
>
> ***Vinicius**: Nossa! Esse aqui é legal. Uma coisa diferente.*

Passado o estranhamento inicial, Adriano (estudante do grupo 1) não demoram muito e começa a descrever o que está observando:

> ***Adriano**: A (bolinha) vermelha ela não.... sei lá.... como tive uma .... como se o centro expelisse quando ela entrasse em contato, expelisse a (bolinha) vermelha, a tendência era ela se distanciar a medida que a bolinha azul se aproxima do centro, quanto mais a azul se aproxima do meio, mais ela... se distancia.*

Nesse trecho, podemos destacar que o centro (origem) do plano cartesiano interage dinamicamente com a "bolinha", expelindo-a quando dele se aproxima. Esta possibilidade do ambiente computacional - permitir que objetos sejam vistos como agentes - é um dos três recursos de um micromundo que auxiliam na criação de boas estórias, segundo Healy e Sinclair (2007).

As meninas do grupo 1 (Carolina e Juliana), expressam suas observações assim que lhes é pedido que descrevam o comportamento da função ao professor, que nos acompanha e que não havia visto o comportamento da função. Essa técnica é bastante utilizada em outras situações.

Ao tentar descrever o comportamento observado ao professor, Carolina diz: *"Então, é que uma hora ela (a bolinha vermelha) está passando pela parte que tem o eixo y e o eixo x positivo, ela faz um movimento de curva, mas depois ela passa a ser reta, ela começa a acompanhar o eixo e depois quando você vai acompanhando a bolinha pro outro lado, ela fica com eixo x e y..."*

Sobre o comportamento da função, quando x é igual a zero, as duplas do grupo 1 (Carolina e Juliana, Adriano e Luciano) afirmam que a função faz uma curva; no caso dos meninos, uma circunferência, mesmo que esta não seja observável na tela do computador. Para as duplas, a função está definida para x igual a 0.

***Juliana**: Ela faz uma curva mais distante do zero, antes ela estava mais perto e ela tipo, sai de perto do zero.*

***Pesquisadora**: E vai pra onde?*

***Juliana**: Ela faz a curva um pouquinho longe do 0 e continua seguindo o eixo.*

***Carolina**: A bolinha vermelha vem acompanhando a eixo y, depois ela faz a curva e começa a caminhar junto com o eixo x.*

***Luciano**: Então, a bolinha vermelha vai se distanciando de uma bolinha azul, para passar pra outra bolinha azul conforme vai chegando ao centro, aí parece que dá uma volta na circunferência.... e repete o mesmo movimento do outro lado. (...) Ela vem reta e txchum... (acompanha com movimento circular para frente do braço).*

Para as duplas do grupo 2, a "bolinha" desaparece, ou seja, a função não está definida para x igual a zero:

***Natalia**: A bolinha some (risos).*

***Vinicius**: Ela some, desaparece.*

***Helio**: Ela não está em lugar nenhum.*

Ao final da discussão, registram:

Carolina e Juliana: Não registram nada sobre a função f

a bolinha vermelha se movimenta tanto de um lado para o outro
quando uma das bolinhas azul se aproxima no centro a bolinha vermelha se
distância rapidamente seguindo o caminho da outra que acabou de sair do centro.

Figura 42: Registro da função f no Cartesiangraph pelo Adriano e Luciano

* F → Quando a bolinha azul x está no ponto 0,
as outras bolinhas somem dos eixos de cima e
quando mexemos a azul x para o − , elas aparecem em baixo. A bolinha vermelha se inclina.

Figura 43: Registro da função f no Cartesiangraph pela Geiza e Natalia

*F: Forma duas parabolas, não simetricas ⇒ Q2, 3 → só alinha no x

Figura 44: Registro da função f no Cartesiangraph pelo Helio e Vinicius

Na função f, as percepções são distintas entre os grupos 1 e 2. Para compreendermos essa diferença, temos que ressaltar que o grupo 2 já havia visto essas funções no Dynagraph (mesmo sem terem sidas explicitadas a eles). Tanto que a dupla Geiza e Natalia a relacionam com a função observada no referido ambiente computacional com a observada no Cartesiangraph.

3.1.1.2.7. Função g (x) = x

As duplas descrevem rapidamente o comportamento da função, visto que esse comportamento descreve uma reta, e isso já fora observado em outras três funções anteriores:

> ***Carolina****: Agora os pontos estão no mesmo lugar do x e do y. Então a bolinha vai formando a reta porque ela está sempre no mesmo lugar assim (faz o gesto com a mão), é proporcionalmente. A numeração das duas bolinhas são sempre iguais.*
> ***Adriano****: Ela passa pelo centro.*
> ***Luciano****: Na diagonal. Uma reta diagonal.*
> ***Natalia****: Essa é que nem a primeira. As retas se encontram no meio.*
> ***Vinicius****: Essa reta passa pelo zero.*
> ***Helio****: Ela passa pelos dois eixos ao mesmo tempo, olha!*

Com a descrição das duplas, percebemos duas características particulares dessa reta: os valores sempre iguais das variáveis e o fato da reta passar pela origem. Ao final das observações, anotam:

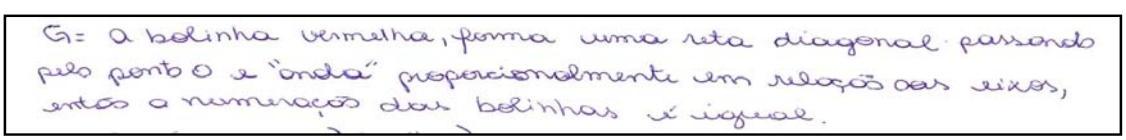

G= a bolinha vermelha, forma uma reta diagonal passando pelo ponto 0 e "anda" proporcionalmente em relação aos eixos, então a numeração das bolinhas é igual.

Figura 45: Registro da função g no Cartesiangraph pela Carolina e Juliana

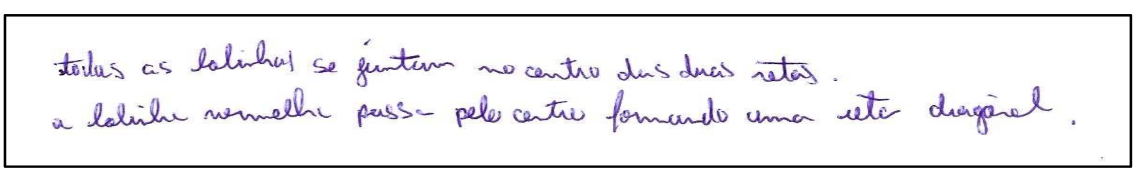

todas as bolinhas se juntam no centro das duas retas.
a bolinha vermelha passa pelo centro formando uma reta diagonal.

Figura 46: Registro da função g no Cartesiangraph pelo Adriano e Luciano

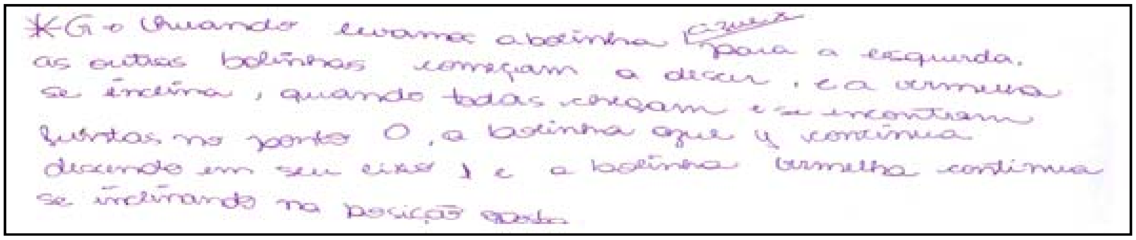

*G → Quando levamos a bolinha azul para a esquerda, as outras bolinhas começam a descer, e a vermelha se inclina, quando todas chegam e se encontram juntas no ponto O, a bolinha azul y continua descendo em seu eixo y e a bolinha vermelha continua se inclinando na posição oposta

Figura 47: Registro da função g no Cartesiangraph pela Geiza e Natalia

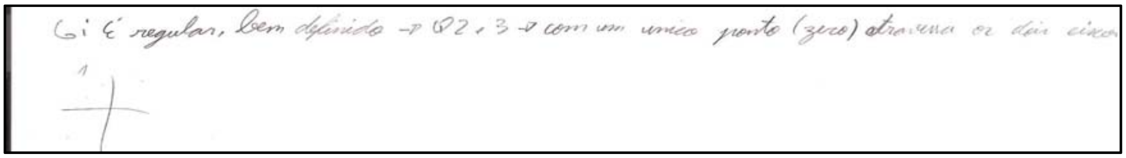


Figura 48: Registro da função g no Cartesiangraph pelo Helio e Vinicius

3.1.1.2.8. Função h (x) = o dobro do maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$

Sobre essa função, realizam falas parecidas:

Carolina*: Ela vai formando traços.*

Juliana*: Parece uma escada.*

Carolina*: ... parece uma escada, a bolinha vai subindo uma escada. (risadas). Ela vai formando traços...*

Luciano*: O movimento dela é tipo uma escada.*

Adriano*: O movimento não forma uma reta, não é contínua... ela sofre desvios (acompanha com movimento de corpo e com os braços).*

Natalia*: Espera aí. A bolinha vermelha vem para cá, aí vem pra cá e vem pra cá aí pula.*

Geiza*: Ela vai pulando de 2 em 2, parece uma escada.*

Vinicius*: Parece uma escada. Sabe o degrau? Vai formando degrau pulando. Tipo... ela não é contínua assim. Forma degraus, só que sem nenhuma ligação. E cada degrau é paralelo ao eixo x.*

Ao descrever que a função forma uma escada (objeto que visualmente tem semelhanças com a representação geométrica da função (ver fig 48)), as duplas percebem a descontinuidade da função. E, para dar significado ao movimento observado, as duplas descrevem a trajetória como a "*bolinha*" que "*pula*" ou que "*forma traços*" e, é nesse movimento, nesse aspecto dinâmico da "*bolinha*", que podemos destacar a palavra "*pulo*" como uma *raiz narrativa* que caracteriza certas funções descontínuas.

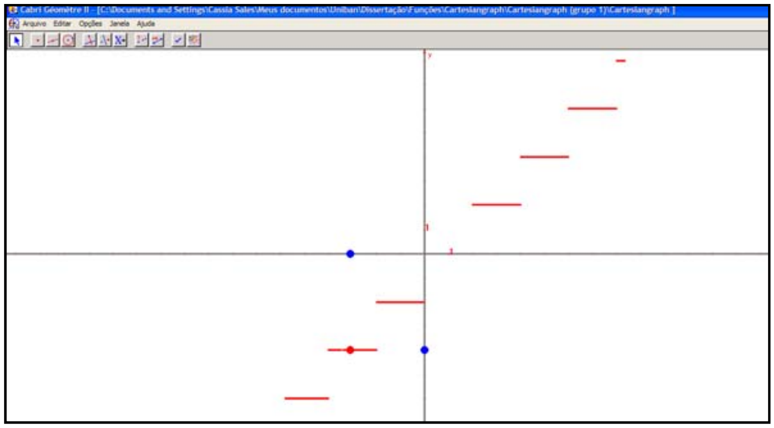
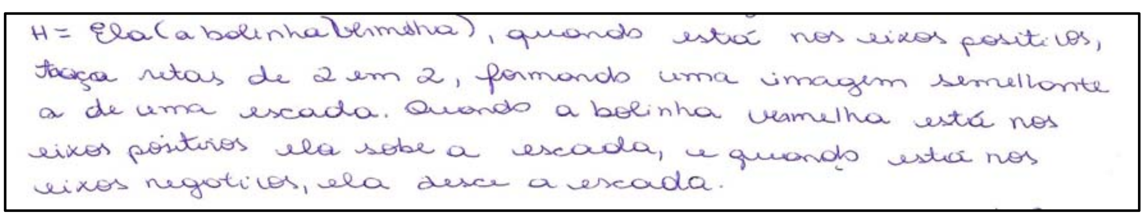


Figura 49: Representação gráfica da função h(x) = o dobro do maior inteiro menor que x/2

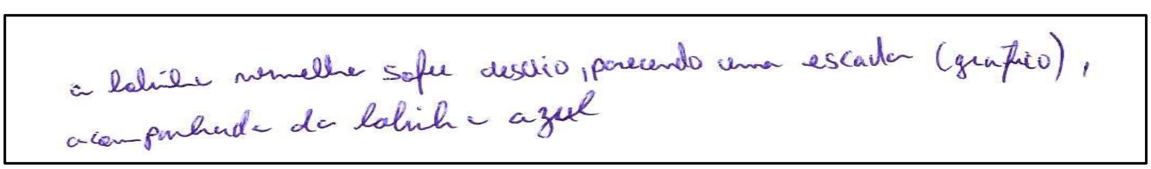
A qualidade dramática (uma das quatro características de uma narrativa) também pode ser destacada na descrição do comportamento observado pela dupla das meninas do grupo 1, pois segundo Carolina *"... quando a bolinha vai indo pra direita, ou seja, pro lado positivo do eixo x aí a bolinha vermelha sobe a escada, quando ela vai indo pro lado negativo do eixo x a bolinha desce a escada."* Ou seja, a bolinha vermelha cria vida e é capaz de subir e descer escada.

Os estudantes registram os seguintes comentários:



H = Ela (a bolinha vermelha), quando está nos eixos positivos, traça retas de 2 em 2, formando uma imagem semelhante a de uma escada. Quando a bolinha vermelha está nos eixos positivos ela sobe a escada, e quando está nos eixos negativos, ela desce a escada.

Figura 50: Registro da função h no Cartesiangraph pela Carolina e Juliana



a bolinha vermelha sofre desvio, parecendo uma escada (gráfico), acompanhada da bolinha azul

Figura 51: Registro da função h no Cartesiangraph pelo Adriano e Luciano

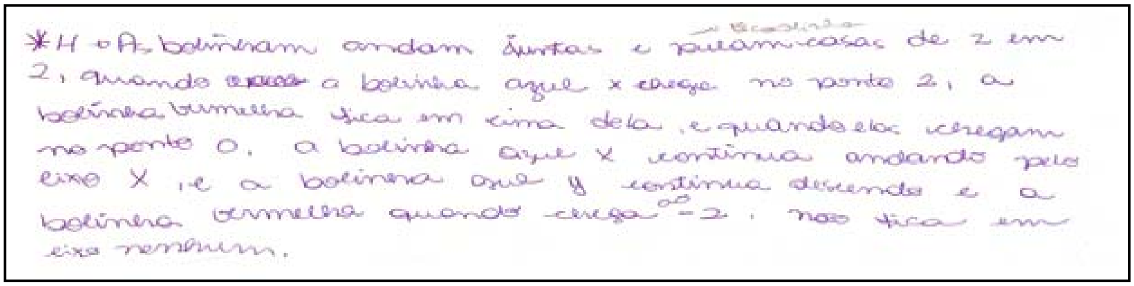

* H → As bolinhas andam juntas e pulam casas de 2 em 2, quando ~~chega~~ a bolinha azul x chega no ponto 2, a bolinha vermelha fica em cima dela, e quando elas chegam no ponto 0, a bolinha azul x continua andando pelo eixo X, e a bolinha azul y continua descendo e a bolinha vermelha quando chega ao -2, não fica em eixo nenhum.

Figura 52: Registro da função h no Cartesiangraph pela Geiza e Natalia

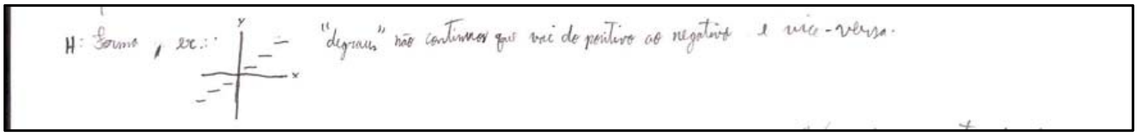


Figura 53: Registro da função h no Cartesiangraph pelo Helio e Vinicius

3.1.1.2.9. Função i (x) = $x+\frac{1}{x}$

Essa função gera discussões e percepções diferentes entre os estudantes. Os meninos do grupo 1 (Adriano e Luciano) logo a relacionam com a função f:

> ***Luciano***: *Ela some. É... ela.... deve estar... do outro lado da circunferência.*
>
> ***Adriano***: *É o mesmo que passa com a (função) f .*
>
> ***Luciano***: *Quando uma bolinha azul está no centro ela (a bolinha vermelha) parece estar do outro lado da circunferência. Dá volta isso, vupt... ela some da tela, parece estar do outro lado da circunferência (acompanha com gesto circular com as mãos para frente) e sai do outro lado.*

Já as meninas do grupo 1 e as duas duplas do grupo 2 descrevem que há uma interrupção do movimento, quando x é igual a zero.

> ***Carolina***: *No 0 as bolinhas somem. A bolinha azul e a outra (bolinha) vermelha.*
>
> ***Pesquisadora***: *Por que será que somem?*
>
> ***Carolina***: *Eu acho que não dá pra ver porque ela (a bolinha vermelha) vai se teletransportar para a linha de baixo.*
>
> ***Geiza***: *Olha lá, sumiu de novo (referindo-se ao comportamento da função f(x) = 1/x).*
>
> ***Natalia***: *É a mesma coisa que a outra aqui.*

***Helio**: Você chega no zero, some, aparece lá em cima. A* bolinha passa de um quadrante pro outro com extrema velocidade sem ficar no eixo... y.

Na descrição dessas três duplas, a função não está definida para x igual a 0, e as alunas do grupo 1 expressam que a imagem "subitamente" inverte de lado se "teletransportando". Os meninos do grupo 2 utilizam essa mesma expressão, mas ela só aparece quando estão agrupando e nomeando os grupos, nas palavras do Helio: "*grupo de teletransporte porque tipo, elas somem daqui e...",* provocando exclamação do colega Vinicius*: "Nossa!" (risos de todos que estavam na sala)*. No "teletransporte" há a idéia de rompimento de um movimento para outro, retratando muito bem o comportamento observado e explicado com significado para a dupla. Ao final das descrições, as duplas escrevem:

I: Quando a bolinha do eixo x se localiza no ponto 0,
a bolinha vermelha e a azul somem. A bolinha vermelha,
(~~acompanha~~) acompanha de perto o eixo y positivo, e quando
desce (~~por~~) perto dele faz uma pequena curva para o
eixo x, depois subindo (~~pelo eixo~~) e formando uma
figura parecida com o símbolo da nike.

Figura 54: Registro da função i no Cartesiangraph pela Carolina e Juliana

no lado superior direito forma um arco.
no lado inferior esquerdo forma um arco.
ao dar a volta nos da a impressão que esta dando volta
na circunferência

Figura 55: Registro da função i no Cartesiangraph pelo Adriano e Luciano

* I : Quando a bolinha azul está no ~~eixo~~ ponto 0,
as bolinhas por cima, desaparecem e quando
movemos a azul x para o - elas aparecem
por baixo.
A bolinha vermelha se inverte.

Figura 56: Registro da função i no Cartesiangraph pela Geiza e Natalia

x I: Formas duas parábolas simétricas, e quando a bolinha vermelha vai se alinhar ela inverte de 1/4 ao

Figura 57: Registro da função i no Cartesiangraph pelo Helio e Vinicius

3.1.1.2.10. Função j (x) = $3x^2 - 2$

Essa função descreve uma curva, mas com comportamento bem diferente da curva descrita pela função anterior. As duplas percebem que o comportamento dessa função é bem distinto da função anterior e a relacionam com outras funções quadráticas já observadas.

> ***Carolina****: ... essa também faz curva. Essa aqui parece com aquele outro que a gente viu, um dos primeiros, eu acho, só que era ao contrário.*
>
> ***Adriano****: O arco é ... faz assim, pega assim e faz assim (faz o movimento de uma parábola, com concavidade para cima, no ar).*
>
> ***Luciano****: Então, quando a bolinha horizontal chega ao centro, a bolinha que está na vertical se alinha junto com a vermelha... Forma, passando de um lado, aí conforme eu distancio a bolinha horizontal do centro, a bolinha vermelha também vai se distanciando, oh, oh.*
>
> ***Natalia****: Esse é igual aquela lá. Acho que é a c (referindo-se a função c(x) =* x^2*+ 1).*
>
> ***Helio****: Lembra aquela parábola virada pra cima? É tipo um U, tipo uma letra U.*

Na observação dos alunos do grupo 1 (Adriano e Luciano), destacamos a percepção de simetria axial do gráfico em relação ao eixo vertical, quando Adriano afirma: *"Esse arco divide-se na verdade na metade. A mesma distância em relação ao centro e a reta maior."*

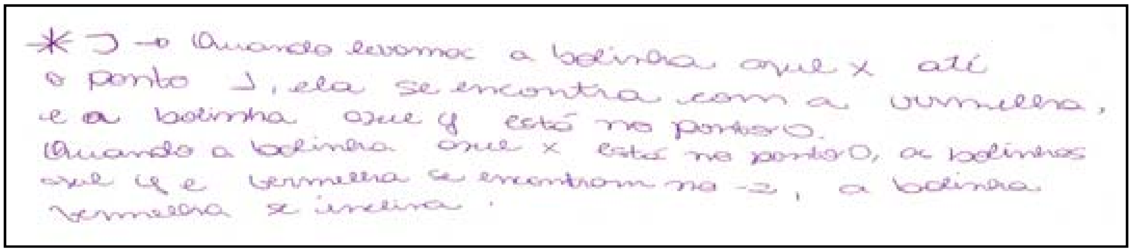
Ao final das discussões, os estudantes registram:

J= Ela decresce nos eixos positivos depois, quando chega
no x positivo e o y negativo ela faz uma curva, e a parte
onde a curva é mais acentuada é no ponto -2 do eixo x.

Figura 58: Registro da função j no Cartesiangraph pela Carolina e Juliana

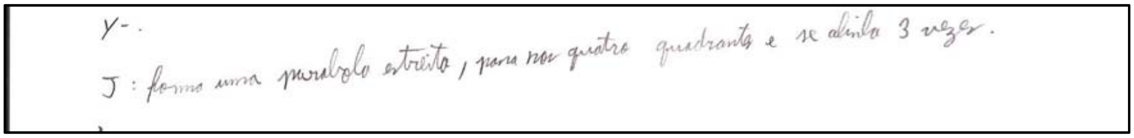
Quando as bolinhas formam uma reta, surge o arco
passando de um lado para o outro.
Elas estão em paralelo de um lado do arco, cruzando-se
no ~~centro~~ meio do arco que divide o plano.

Figura 59: Registro da função j no Cartesiangraph pelo Adriano e Luciano



* J → Quando levamos a bolinha azul x até o ponto J, ela se encontra com a vermelha, e a bolinha azul y está no ponto 0.
Quando a bolinha azul x está no ponto 0, as bolinhas azul y e vermelha se encontram no -2, a bolinha vermelha se inclina.

Figura 60: Registro da função j no Cartesiangraph pela Geiza e Natalia



y-.
J: forma uma parabola estreita, para nos quatro quadrantes e se alinha 3 vezes.

Figura 61: Registro da função j no Cartesiangraph pelo Helio e Vinicius

Percebemos que os estudantes já descrevem, com bastante naturalidade, o comportamento observado e o relacionam com outras funções já descritas. Quando as meninas do grupo 2 (Geiza e Natalia), dizem que a função é igual a função *c* (também função quadrática), elas explicitam que percebem um padrão no comportamento dessas funções e, portanto, não precisam descrever o comportamento, já que o mesmo foi descrito ao observar a outra função.

3.1.1.3. Terceiro Momento

Após descrever os comportamentos de cada função, é hora de agrupar as funções, nomear e justificar os agrupamentos feitos. Antes de iniciar tal atividade, os estudantes perguntam se podem ter uma mesma função em grupos diferentes e a resposta da pesquisadora é afirmativa, desde que haja uma justificativa.

As meninas do grupo 1 (Carolina e Juliana), de acordo com esse critério, agrupam as funções em 5 grupos distintos, e algumas funções estão presentes em mais de um grupo. Observe que no nome escolhido já há uma justificativa do grupo.

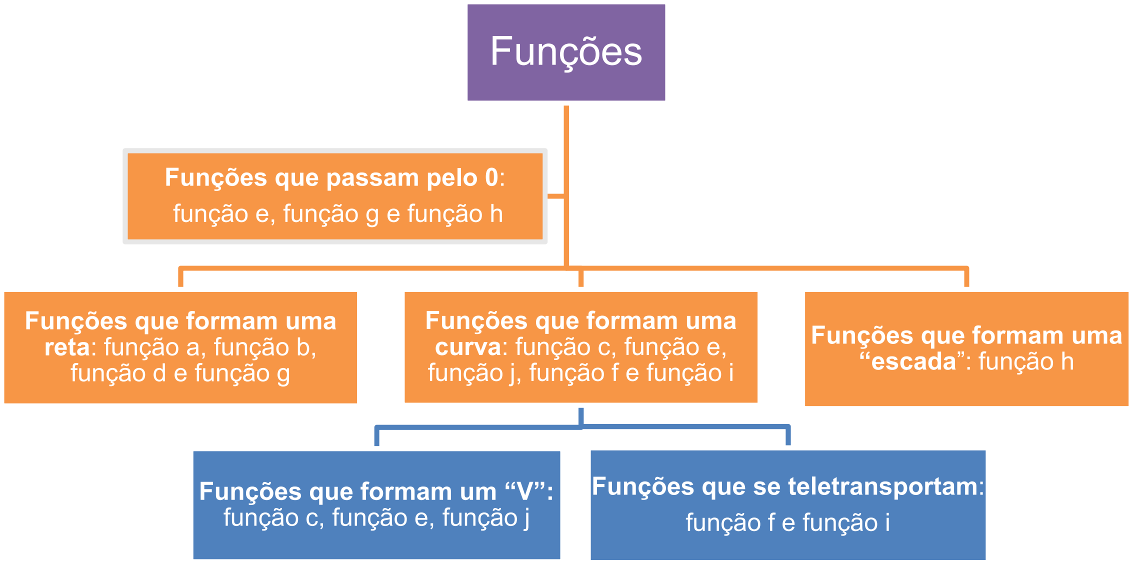


Tabela 3: Agrupamento das funções no Cartesiangraph feito pela Carolina e Juliana

Os alunos do grupo 1 (Adriano e Luciano) ficam um pouco indecisos quanto aos critérios que devem utilizar para agrupar as funções, pois Luciano defende a posição de comparar a forma das funções (se é curva ou não, se é reta ou não), já Adriano pensa que o critério mais importante é identificar as funções que passam pelo centro e as que não passam.

> ***Pesquisadora**: Por que você acha que o centro é importante? E por que você acha que o arco é mais importante?*
> ***Adriano**: Porque o centro ele é a referência do plano.*
> ***Luciano**: Eu acho que o centro não mostra nada e o arco sim que é importante.*
> ***Adriano**: O arco é apenas, sei lá, eu acho que o centro passa a ser mais importante que o arco, porque o arco, sei lá.*
> ***Luciano**: O que importa é se é linha reta ou não.*
> ***Adriano**: Ela pode formar qualquer arco, pode formar uma reta, pode formar qualquer coisa. O arco ele não é válido, ele não precisa, sei lá, existir se a bolinha não passa pelo centro. E acho que não forma só um arco, forma uma reta como nesse caso aqui (referindo-se a função A).*

Depois de algumas discussões tentanto contemplar os dois critérios levantados, eles agrupam as funções em 5 grupos distintos, em que há dois subgrupos dentro de um dos grupos. Observe que a função *i*, mesmo sendo identificada, na descrição das funções (segundo momento), com comportamento parecido com o da função *f;* na classificação dos grupos, fica em outro grupo. Essa decisão origina-se do fato de Adriano prestar mais atenção se a função passa ou não, pelo centro - é ele quem está registrando os agrupamentos -, isso mesmo depois de Luciano alertar que a função i é do tipo *"circunferência":*

> ***Adriano****: Não passa pelo centro mas forma um arco.*
> ***Luciano****: É, um arco, mesmo do outro... Então é circunferência...*
> ***Adriano****: Essa aqui também não passa pelo centro.*

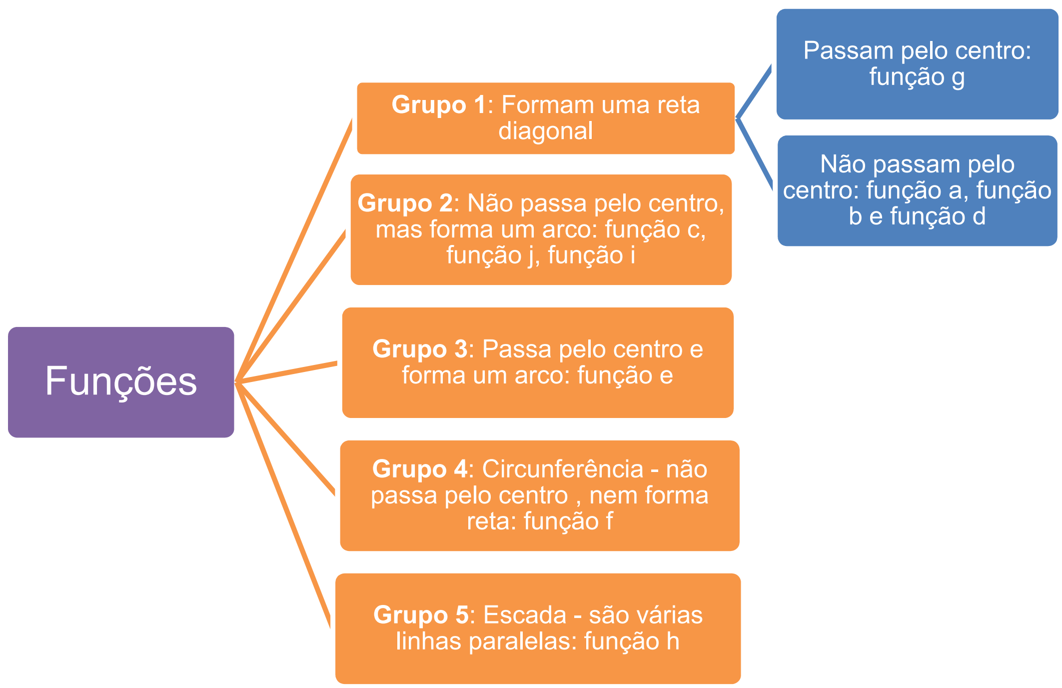


Tabela 4: Agrupamento das funções no Cartesiangraph feito pelo Adriano e Luciano

Observe que na classificação feita pela dupla Adriano e Luciano (grupo 1) não há nomes para os grupos, visto que, em nosso primeiro dia de aplicação da pesquisa, que também representa a primeira sessão de ensino para essa dupla e para a dupla Geiza e Natalia (utilizando o Dynagraph), isso não é pedido. E, como mencionado no capítulo anterior, depois de analisarmos a sessão de ensino verificamos que seria interessante pedir aos estudantes que nomeassem os grupos com nomes significativos. Essa mudança é inserida na 2ª ficha de atividade e os estudantes que fazem a primeira sessão de ensino, na semana seguinte, são orientados, pela pesquisadora, a nomear seus grupos.

As duplas do grupo 2, como utilizaram o Cartesiangraph na 2ª sessão de ensino, já no enunciado da ficha lhes é pedido para que nomeiem os grupos formados e justifiquem os nomes escolhidos. As duas duplas são bem criativas na escolha dos nomes escolhidos, e as justificativas são coerentes com esses mesmos nomes.

As alunas Geiza e Natalia agrupam as 10 funções em 4 grupos distintos e a classificação feita coincide com os tipos de função: função linear, função quadrática, função com assíntota e função descontínua.

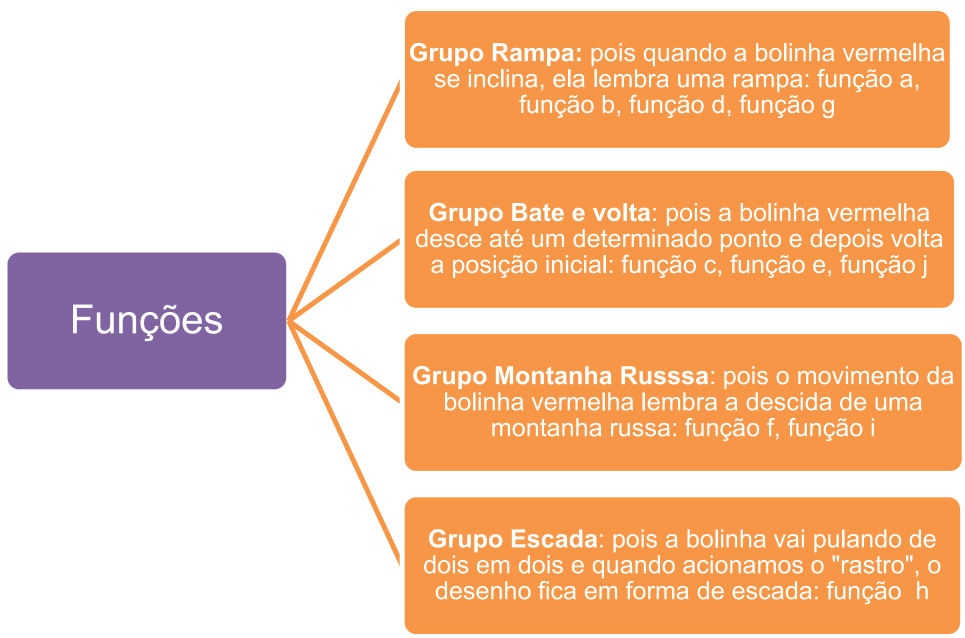


Tabela 5: Agrupamento das funções no Cartesiangraph feito pela Geiza e Natalia

A dupla Helio e Vinicius (grupo 2) dividem as 10 funções em 3 grupos distintos. A classificação da função *h* causa divergência entre os dois, pois Vinicius acha que essa função deve ser classificada separadamente, mas Helio defende que ela deve ser classificada junto com as funções *f* e *i*. Eles não conseguem chegar a um consenso, com isso Vinicius afirma: *"Eu vou colocar no teletransporte, mas se estiver errado a culpa é sua"*. Ou seja, ele não está convencido da classificação feita, mas resolve acatar a decisão do colega.

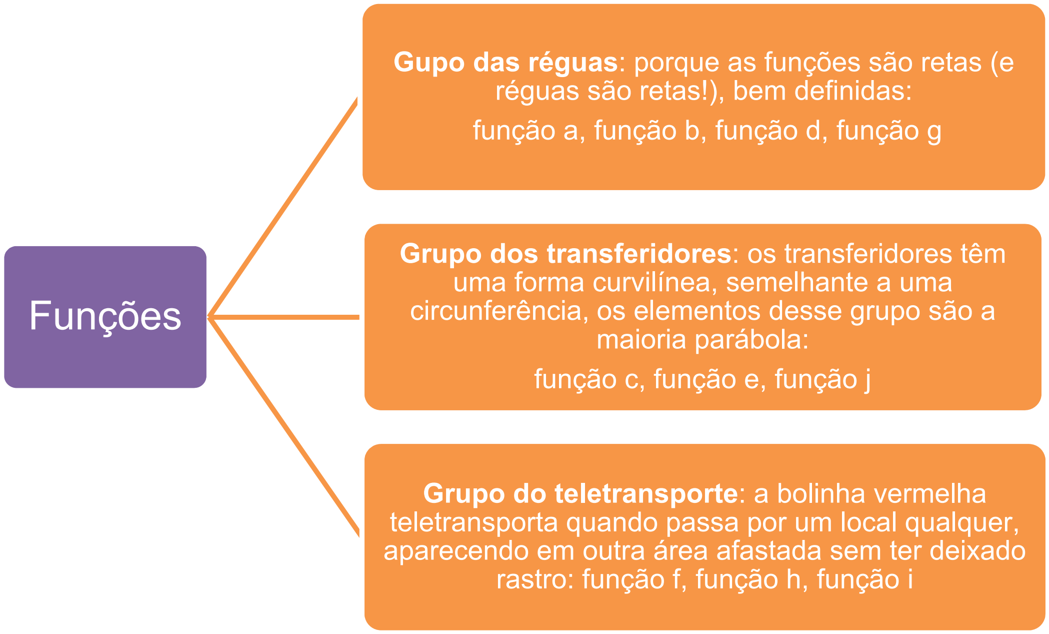


Tabela 6: Agrupamento das funções no Cartesiangraph feito pelo Helio e Vinicius

Podemos observar que as classificações dos grupos são bastante parecidas, salvo algumas exceções que dizem respeito às funções que estão em cada grupo, ou seja, de um modo geral, os estudantes envolvidos na pesquisa, percebem regularidades entre as funções afins, quadráticas, descontínuas ou com assíntota, mesmo não tendo ainda domínio desse vocabulário nem desse assunto. Podemos perceber também que as duplas do grupo 2 são mais criativas e ousados ao nomear seus grupos, pensando em nomes que façam sentido, mas sem se preocupar, necessariamente, com o vocábulo matemático. Isso pode ser justificado devido estarem já na 2ª sessão de ensino e, portanto, mais à vontade com a proposta e com a pesquisadora.

3.1.2 Sessão de ensino com Dynagraph

O ambiente computacional Dynagraph (explicado no capítulo anterior) foi utilizado pelo primeiro grupo (duplas Carolina e Juliana, Adriano e Luciano), na 2ª sessão de ensino e pelo segundo grupo (duplas Geiza e Natalia, Helio e Vinicius), na 1ª sessão de ensino. A ficha de atividade, utilizada para orientar a proposta de trabalho e para fazer algum tipo de anotação, sofre uma pequena diferença entre os dois grupos: a ficha 1 orienta a 1ª sessão de ensino, e a ficha 2, a 2ª sessão de ensino, o que significa que os estudantes do grupo 1 utilizam a ficha 2, e os estudantes do grupo 2, a ficha 1 de atividades. A diferença das fichas está na pergunta inicial: a pergunta da ficha 1 tem um intuito de perceber os pré-requisitos dos estudantes sobre função, e a pergunta da ficha 2 é mais objetiva e direta em relação ao estudo de funções na matemática. Com relação a segunda questão das fichas, há mudanças (da ficha 1 para a ficha 2) devido às reflexões feitas pela pesquisadora e pela orientadora após a primeira sessão de ensino.

No Dynagraph (ambiente computacional utilizado) só há o registro da variação do y em relação à variação do x, o que facilita perceber qual "bolinha" o estudante tem que descrever o comportamento. Para descrever as sessões de ensino das duplas, dividimo-las em três momentos: o primeiro consiste na resposta da primeira pergunta da ficha, o segundo momento é a descrição de cada uma das 10 funções apresentadas, e o terceiro momento é o agrupamento das funções, de acordo com os comportamentos observados. As 10 funções trabalhadas na sessão com Dynagraph são as mesmas trabalhadas com Cartesiangraph, embora isso não fique explicitado pela pesquisadora e nem percebido pelos sujeitos de pesquisa.

3.1.2.1. Primeiro momento

O grupo 1 (duplas Carolina e Juliana, Adriano e Luciano), guiado pela ficha 2, é orientado a responder a pergunta: "*Vocês já aprenderam algo sobre* **funções** *na escola? Em caso afirmativo, escreva o que aprenderam."* Os meninos Adriano e Luciano respondem que não tinham aprendido nada ainda, pois realmente não haviam iniciado seus estudos sobre esse assunto nas aulas de matemática. Já as estudantes Carolina e Juliana (que tiveram a 2ª sessão de ensino uma semana depois dos meninos) apresentam uma resposta bem diferente da deles e da resposta dada no primeiro encontro, visto que o enfoque da pergunta é especificamente escolar (evidenciando o aspecto matemático da palavra) e o estudo na escola sobre funções foi iniciado no dia seguinte da 2ª sessão de ensino do Adriano e do Luciano. Portanto, agora elas já conseguem escrever alguns tópicos no âmbito da abordagem matemática. Os tópicos levantados pelas meninas caracterizam uma fase inicial no estudo sobre funções.

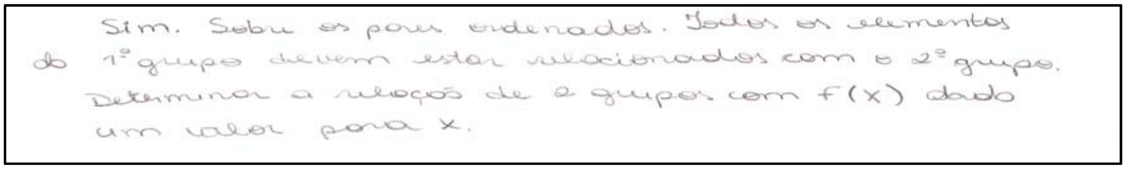


Figura 62: Ficha 2: resposta de Carolina e Juliana para pergunta 1

Figura 63: Ficha 2: resposta de Adriano e Luciano para pergunta 1

O grupo 2 (duplas Geiza e Natalia, Helio e Vinicius), orientado pela ficha 1, está em sua primeira sessão de ensino, portanto espera-se perceber o que eles entendem como função em um sentido mais geral. Assim, a primeira pergunta da ficha 1 é: *"Escreva tudo o que vem à sua cabeça quando escuta ou pronuncia a palavra função"*. E, para tal questionamento, obtemos as seguintes respostas:

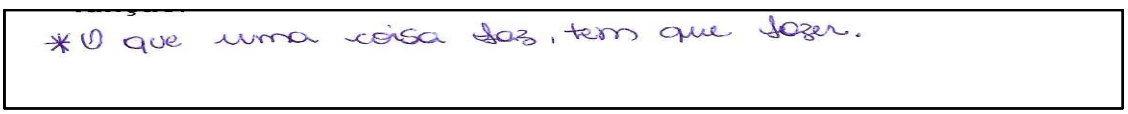


Figura 64: Ficha 1: resposta de Geiza e Natalia para pergunta 1

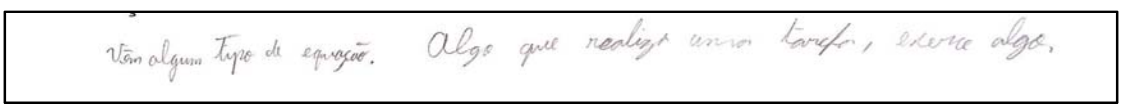


Figura 65: Ficha 1: resposta de Helio e Vinicius para pergunta 1

Com essas respostas, percebemos que a dupla Geiza e Natalia não tem nenhum conhecimento matemático sobre função. Entretanto, a dupla Helio e Vinicius já possui algumas noções matemáticas para tal palavra:

> ***Pesquisadora****: O que vem a cabeça de vocês quando vocês escutam essa palavra (função)?*
>
> ***Vinicius****: Ah, vem uma equação, uma conta.*
>
> ***Pesquisadora****: Como assim uma equação?*
>
> ***Vinícius****: Uma equação, qualquer, número que tem uma incógnita, sei lá, mistura, Bhaskara, você descobrir Celsus, conversão, qualquer equação... para mim, função*

parece ... relacionado ... que você tem que expor no gráfico, sei lá. Esse número e tem que expor no gráfico, uma coisa assim.

3.1.2.2. Segundo momento

Nesse momento, os estudantes abrem separadamente cada função, descrevem os comportamentos observados e, em alguns momentos, relacionam as características destacadas entre funções já observadas, utilizando-se de metáforas, gestos, enfim, buscando comunicar suas idéias, sem preocupação com o rigor matemático.

Os estudantes do grupo 1, em contraste com a primeira sessão de ensino, estão bem mais confortáveis para exprimir suas opiniões sobre os comportamentos observados. Em suas verbalizações, permitem-se ser mais criativos, com mais liberdade ao utilizar termos matemáticos ou não utilizá-los.

Os estudantes do grupo 2 têm atitudes diferentes diante da proposta apresentada. A dupla Helio e Vinicius gosta muito de discutir e refletir sobre os comportamentos observados e é muito criativa em suas colocações, mas, na maioria das vezes, não registra no papel as observações destacadas. Já Geiza e Natalia dialogam e discutem menos, mas fazem os registros em todas as 10 funções apresentadas.

3.1.2.2.1. Função a(x) = x – 2

A primeira função é descrita sem nenhuma dificuldade pelos estudantes. A constância do distanciamento entre os valores de *x* e *y* é enfatizada:

Carolina*: A bolinha de cima está sempre na mesma distância da bolinha de baixo.*
Juliana*: É, elas estão na mesma distância.*
Carolina*: Elas se movem horizontalmente de maneira retilínea.*
Adriano*: Ela acompanha... paralelamente... em relação ao segmento que as une.*

***Geiza**: Essas medidas, tirando essa daqui (apontando para a tela), elas estão retas, alinhadas. Só que quando passo essa aqui, esas duas bolinhas estão, sei lá... não estão retas (no sentido de estar um pouco inclinado o segmento de reta que une as variáveis).*

***Natalia**: Ela (a bolinha de cima) vai junto.*

***Helio**: Então a distância vai ser uniforme.*

***Vinicius**: Vai ser sempre uniforme.*

***Helio**: Não importa onde quer que arraste vai ficar assim.*

No ambiente Dynagraph, em que os eixos coordenados são apresentados horizontalmente, fica mais evidente a questão da distância entre as variáveis, já que há um segmento de reta que une as duas variáveis (ver fig 66).

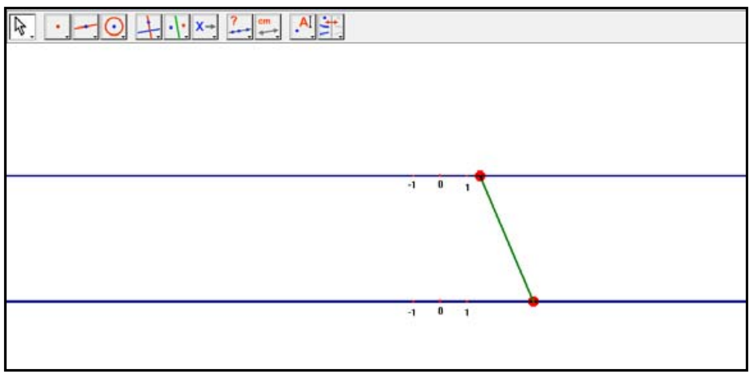


Figura 66: Representação gráfica da função f(x)= x – 2

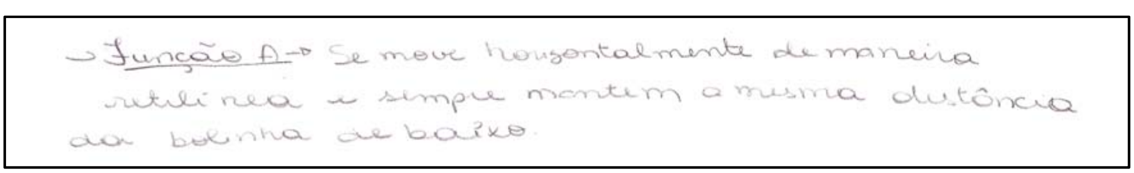
A dupla Helio e Vinicius (grupo 2) percebe também o valor da distância entre as variáveis:

***Helio**: A distância dos dois pontos são 2, né?*

***Vinicius**: Uhum.*

***Helio**: Bom, isso parece que não muda, né? Não importa onde a gente esteja. Essa distância de um ponto pro outro, por exemplo, se aqui em baixo tá 1 aqui em cima vai estar -1.*

Ao final das discussões os estudantes registram:



→ Função A → Se move horizontalmente de maneira retilinea e sempre mantem a mesma distância da bolinha de baixo.

Figura 67: Registro da função a no Dynagraph pela Carolina e Juliana

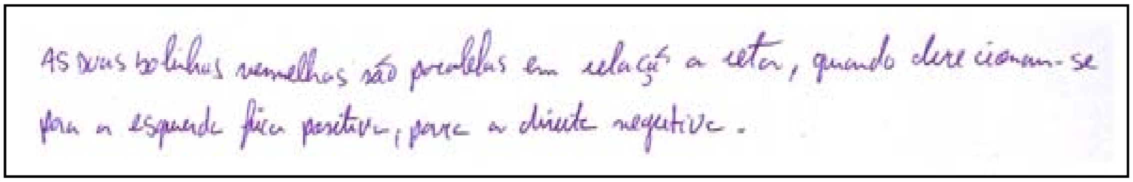

AS duas bolinhas vermelhas são paralelas em relação a reta, quando direcionam-se para a esquerda fica positivo, para a direita negativo.

Figura 68: Registro da função a no Dynagraph pelo Adriano e Luciano

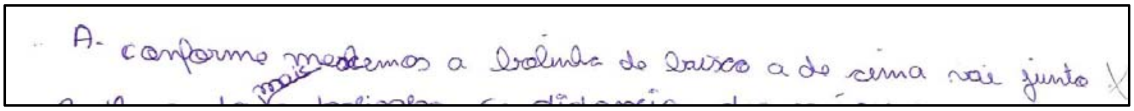

A- conforme mais mexemos a bolinha de baixo a de cima vai junto

Figura 69: Registro da função a no Dynagraph pela Geiza e Natalia

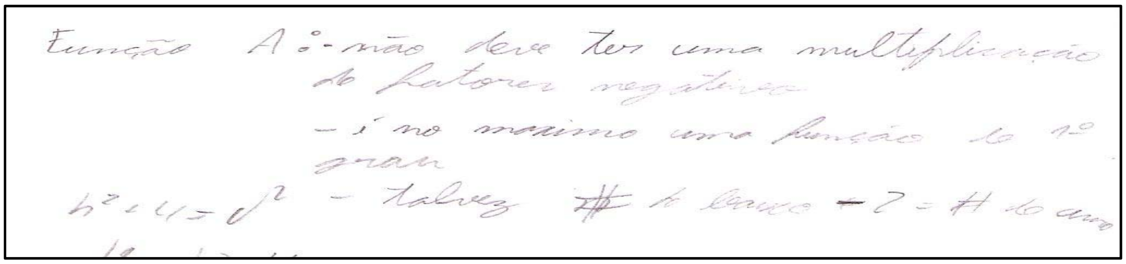

Função A°- não deve ter uma multiplicação de fatores negativos
- é no máximo uma função do 1º grau
$h^2 + 4 = d^2$ - talvez

Figura 70: Registro da função a no Dynagraph pelo Helio e Vinicius

3.1.2.2.2. Função b(x) = 2x + 1

Essa função, que também é afim, é percebida com comportamento parecido com a anterior, mas a diferença está no distanciamento entre as variáveis (independente e dependente).

> ***Carolina***: *... na 1ª (função apresentada) a bolinha andava sempre na mesma distância da outra bolinha e na outra (a função em questão) a distância vai aumentando.*
>
> ***Luciano***: *É a mesma coisa, dá o dobro dela mesma.*
>
> ***Adriano***: *Aqui, elas ficam paralelas (apontando para o valor -1 da variável independente). Aí depois tomam uma distância entre elas.*
>
> ***Natalia***: *Quanto mais vai para os lados, mais a bolinha de cima se distancia dos números.*
>
> ***Geiza***: *Quando ela é negativa ela se inclina para o outro lado.*
>
> ***Natalia***: *Quanto mais se ditancia dos números, mais a bolinha de cima se inclina, sei lá. Anda mais do que a de baixo.*

Segundo Helio e Vinicius, o distanciamento entre os valores das variáveis é constante.

> ***Vinicius**: Vai variar, não é a mesma coisa, a outra (função A) era bem uniforme... ele (o valor de y) tá aumentando o mesmo tanto, não é verdade?*
> ***Helio**: Não é um movimento normal mas tem um padrão.*
> ***Vinicius**: Assim, porque o outro era sempre o mesmo resultado, esse aqui vai ser assim o resultado com a mesma seqüência.*

Em relação à expressão *"se distancia dos números"* ´proferida dupla Geiza e Natália (grupo 2), elas estão se referindo ao distanciamento dos números explicitados no ambiente computacional, que são o -1, 0 e o 1. Sendo assim, podemos interpretar como o distanciamento da origem (ver figura 71).

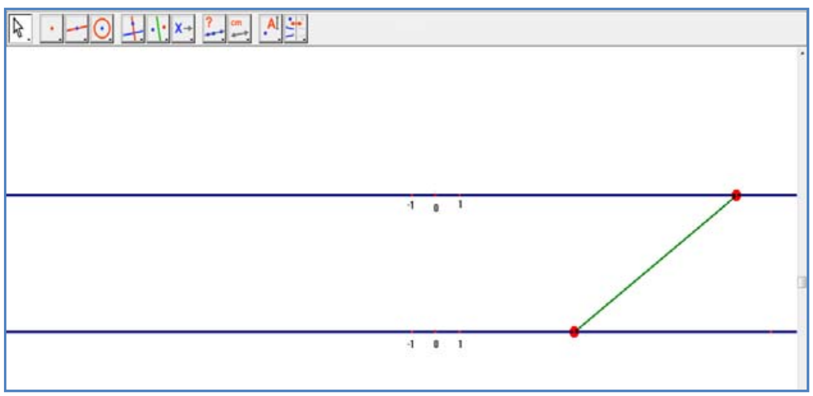


Figura 71: Distanciamento dos valores de y a medida que os valores de x aumentam.

Ao final das discussões as duplas registram:

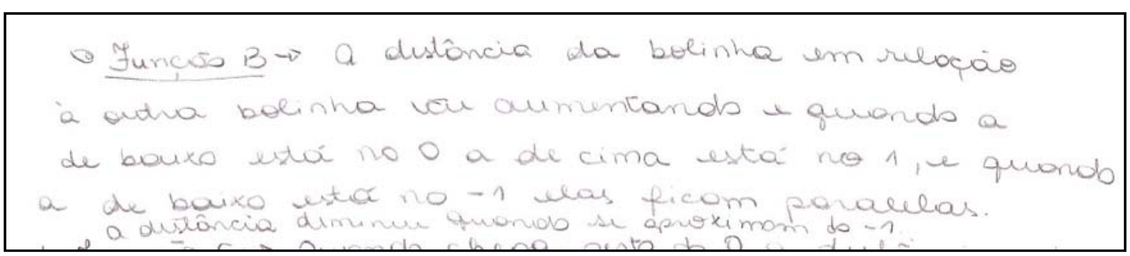


Figura 72: Registro da função b no Dynagraph pela Carolina e Juliana

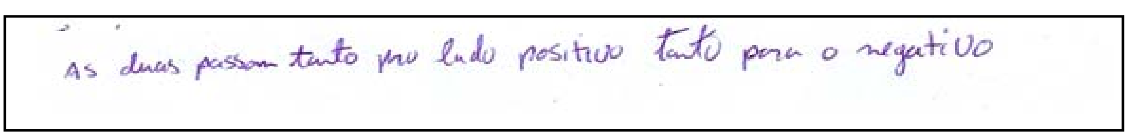


Figura 73: Registro da função b no Dynagraph pelo Adriano e Luciano

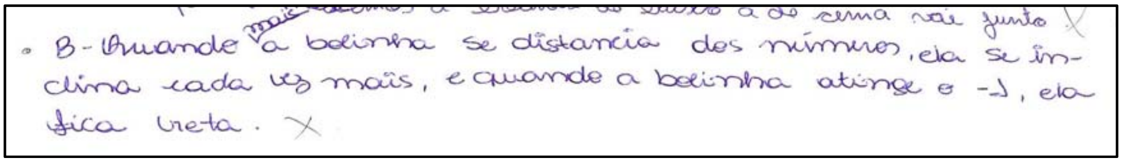

• B- Quando a bolinha se distancia dos números, ela se in-
clina cada vez mais, e quando a bolinha atinge o -1, ela
fica reta. X

Figura 74: Registro da função b no Dynagraph pela Geiza e Natalia

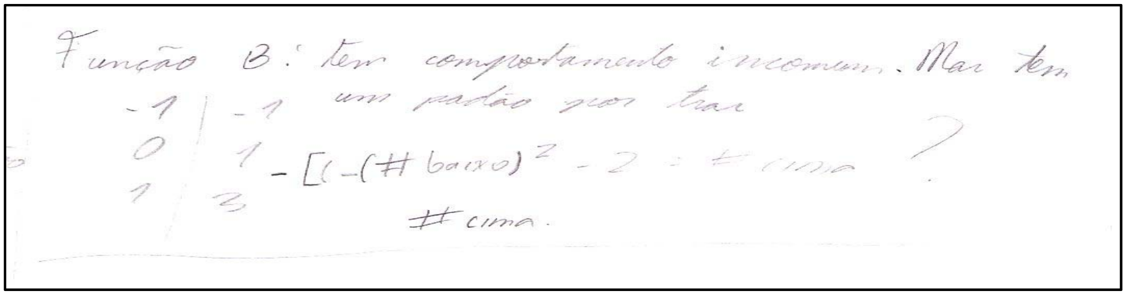

Função B: tem comportamento incomum. Mas tem
um padrão por trás
-1 | -1
0 | 1 - [(-(# baixo)² - 2 = # cima ?
1 | 3
cima.

Figura 75: Registro da função b no Dynagraph pelo Helio e Vinicius

3.1.2.2.3. Função $c(x) = x^2 + 1$

Ao abrir a função na tela, Natalia (grupo 2) ri ao observar o comportamento da função. Helio e Vinicius (grupo2) ficam logo empolgados:

Vinícius*: Nossa! Que legal!!*
Helio*: Nossa! Gostei dela.*

Essa euforia evidencia o clima de descontração, principalmente da dupla Helio e Vinicius. O grande envolvimento com a atividade proposta permite várias narrativas, algumas bem criativas, como veremos mais adiante na descrição de outras funções.

Das características que diferenciam essa função das anteriores, duas são percebidas pelos estudantes: o distanciamento mais rápido entre as variáveis e o "sentido único" da variável dependente. Contudo cada dupla percebe tais características de forma particular.

Carolina*: "Ao mexer a bolinha (de baixo) ela (a bolinha de cima) cresce muito mais.*

***Luciano**: ... a bolinha vermelha de cima vai andando mais rápido... Então, vai aumentando. Mas vai aumentando cada vez mais... A cada um vai dobrando*[25]*. Não, vai de um por um. Cada unidade que eu ando aqui em baixo, ando o dobro lá em cima... Não é o dobro da de baixo, mas... Assim, se andar um aqui não vai andar dois. Que se eu andar 3 não vai andar 6, vai andar o dobro do que ela (a bolinha de cima) já está. Se em cima tá com 1 vai pro 2 aí de 2 pra 4.*

***Adriano**: Olha lá, a bolinha de cima não vai pro lado negativo.*

***Natalia**: Quanto mais vai para lá (sentido negativo), mais vem para cá (sentido positivo). (risos). É isso. Vai deitando mais assim (vai o movimento com as mãos). Quando você vai para a esquerda, ela começa a inclinar para a direita...*

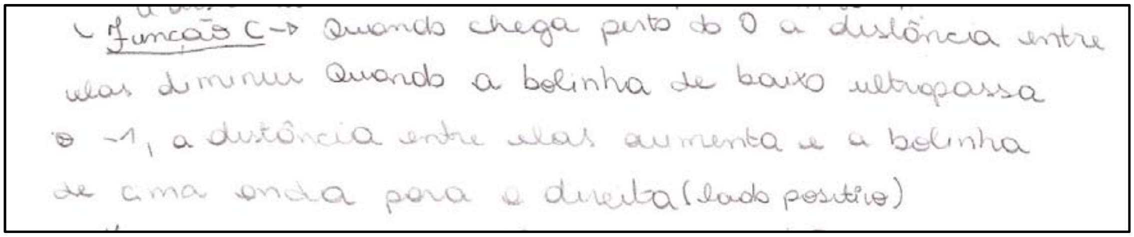
***Geiza**: Quando ela (a "bolinha de cima") chega no 1 ela começa a voltar, ela volta... Quando ela passa do 1, ela começa a se inclinar mais, a aumentar. E para direita também. Ela se inclina mais ainda... Ela está vindo assim (faz o movimento de mão inclinada com as mãos), e quando chega no 1, a de baixo continua e a de cima vai pra lá (direita), entendeu. A de baixo continua e a de cima vai pra lá (direita).*

***Vinicius**: Você muda aqui ("bolinha de baixo") na escala pequenos números ficam grandes números (nos valores de y), aqui (eixo x) números bem baixos aqui (eixo y) números bem altos. Ele (o valor da "bolinha de cima") tem um certo limite, quando chega aqui ele volta (apontando para o lado esquerdo da tela); entendeu? Quando ele (a "bolinha de baixo") passa do 0, ele (a "bolinha de cima") consegue chegar até o 1, então ele tem um limite.*

É interessante observar como o Luciano (grupo 1) explica o crescimento rápido, dizendo que os valores da "bolinha de cima" vão dobrando em relação ao valor anterior da mesma "bolinha". Se observarmos o comportamento dessa função, isso realmente não acontece, mas na fala dos alunos a ênfase está no distanciamento das variáveis e, como não há uma marcação dos valores nos eixos, eles não têm como mensurar com exatidão os valores da imagem.

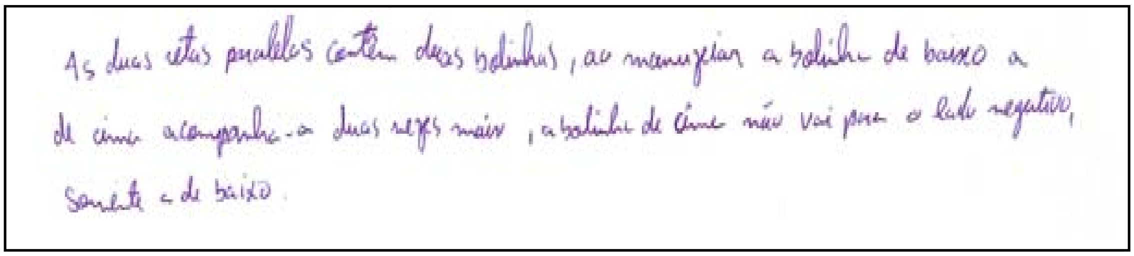
Ao final das descrições, escrevem:

[25] Para o estudante Luciano dobrar é fazer um número vezes ele mesmo, ou seja, na verdade a operação que ele realiza é a potenciação com expoente 2. Na terceira sessão de ensino ele explicita seu "conceito" para dobro: *" x anda o dobro , x vezes x. Andou 3 aqui, e vezes 3 é nove. Vai andar nove aqui."*



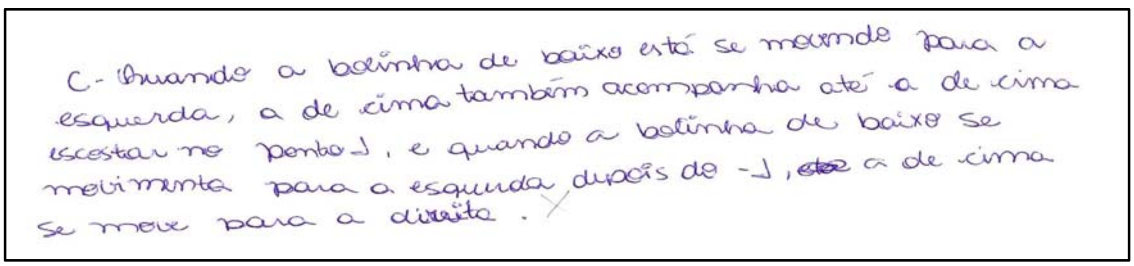
Função C -> Quando chega perto do 0 a distância entre elas diminui Quando a bolinha de baixo ultrapassa o -1, a distância entre elas aumenta e a bolinha de cima anda para a direita (lado positivo)

Figura 76: Registro da função c no Dynagraph pela Carolina e Juliana



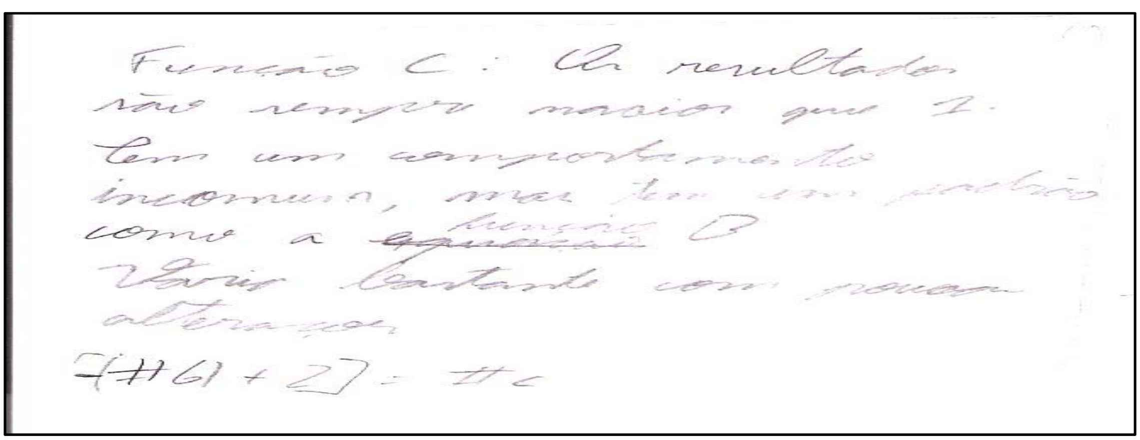
As duas retas paralelas contém duas bolinhas, ao manusear a bolinha de baixo a de cima acompanha-a duas vezes mais, a bolinha de cima não vai para o lado negativo, somente a de baixo.

Figura 77: Registro da função c no Dynagraph pelo Adriano e Luciano



C- Quando a bolinha de baixo está se movendo para a esquerda, a de cima também acompanha até a de cima escostar no ponto -1, e quando a bolinha de baixo se movimenta para a esquerda depois do -1, ~~ela~~ a de cima se move para a direita.

Figura 78: Registro da função c no Dynagraph pela Geiza e Natalia



Função C: Os resultados são sempre maiores que 1. Tem um comportamento incomum, mas tem um padrão como a ~~equação~~ função B. Varia bastante com poucas alterações.
[(#6) + 2] = #c

Figura 79: Registro da função c no Dynagraph pelo Helio e Vinicius

3.1.2.2.4. Função d(x) = – x + 2

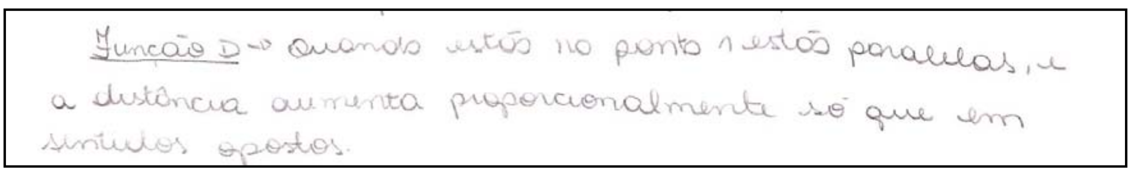
A repetição de uma função afim logo depois de uma função quadrática permite percebermos se as estudantes são capazes de observar diferenças e semelhanças entre as funções apresentadas. As características evidenciadas em suas falas são o sentido oposto entre as variáveis e o distanciamento proporcional entre elas.

> ***Carolina**: Quando elas estão no ponto 1, elas estão paralelas, depois vão se afastando proporcionalmente... elas (as bolinhas) estão sempre... elas estão caminhando "opostamente". Quando a de baixo vai pra direita a de cima vai pra esquerda, quando a de baixo vai pra esquerda a de cima vai pra direita.*
> ***Juliana**: Tipo assim, elas caminham proporcionalmente só que em sentidos opostos.*
> ***Luciano**: As bolinhas, a medida que eu mexo com a bolinha vermelha de baixo, a qual eu tenho controle, elas vão sempre no sentido oposto, na mesma proporção. Se eu movimento 1 cm pra cá vai 1 cm pra lá.*
> ***Adriano**: Elas vão em sentidos opostos.*
> ***Natalia**: Elas se distanciam... se distanciam igualmente.*
> ***Geiza**: Quando ela (a "bolinha de baixo") está indo para a direita a ("bolinha") de cima está indo para esquerda e quando a de baixo está indo para esquerda a de cima está indo para direita... E aqui ele são meio opostos, entendeu?*
> ***Helio**: Uaul! Não parece que tem tipo um ponto de apóio aqui (apontando para tela)?*
> ***Vinicius**: É, se você reparar, exatamente, tem uma alavanca, entendeu? Quando for 1 aqui, 2 vai ser 0, vai ser sempre a mesma seqüência porque ele está sempre no mesmo eixo, isso é ser um eixo, né? Porque o eixo está apoiando o centro, isso daqui, como se fosse o centro de um elástico.*

Na narrativa de Helio e de Vinicius, o centro ou ponto de apóio do tal eixo, alavanca ou elástico é o local onde os valores de x e y se igualam, nesse caso, o ponto (1,1), e a partir desse ponto as direções se invertem (observe figura 80).

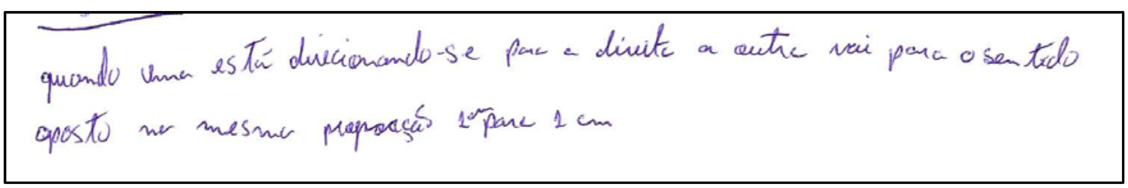
Figura 80: A função d, no ponto (1,1) inverte o sentido. O segmento que une as variáveis é chamado de eixo, alavanca ou elástico

A proporcionalidade é destacada como uma característica das funções afins nas duas duplas do grupo 1 (veremos mais adiante que na classificação a proporcionalidade é utilizada para nomear os grupos das funções afins). Dentro desse contexto, podemos identificar um aspecto mais paradigmático na descrição das funções afins. Observem as semelhanças no registro final dessa função.



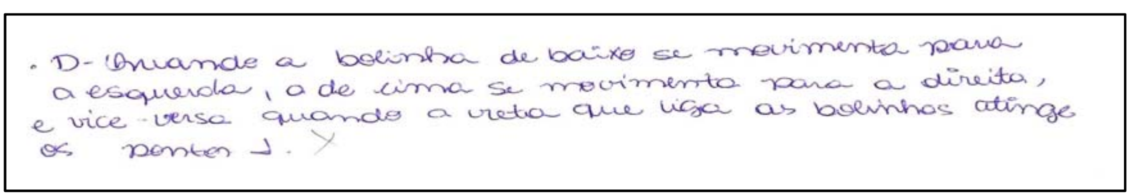
Função D → Quando estão no ponto 1 estão paralelas, e a distância aumenta proporcionalmente só que em sentidos opostos.

Figura 81: Registro da função d no Dynagraph pela Carolina e Juliana



quando uma está direcionando-se para a direita a outra vai para o sentido oposto na mesma proporção 1º para 1 cm

Figura 82: Registro da função d no Dynagraph pelo Adriano e Luciano



• D- Quando a bolinha de baixo se movimenta para a esquerda, a de cima se movimenta para a direita, e vice-versa quando a reta que liga as bolinhas atinge os pontos 1. X

Figura 83: Registro da função d no Dynagraph pela Geiza e Natalia

Helio e Vinicius: Não registraram

3.1.2.2.5. Função e(x) = – x^2

Nessa função, as duplas logo percebem as mesmas características destacadas na função *c* e a semelhança entre elas.

> ***Carolina****: ... quando a bolinha de baixo vai pra esquerda ela (a bolinha de cima) também vai pra esquerda só que bem mais distante. Quando vai pra direita ela também vai pra esquerda, ela sempre vai pra esquerda.*
> ***Luciano****: A bolinha só vai pra um lado.*
> ***Adriano****: É a (função) c, só era o contrário.*
> ***Natalia****: Essa daqui é igual a (função) c. Só que só muda o lado?... É que a (função) c, você vai com a bolinha de baixo para esquerda ou para a direita e a bolinha de cima vai sempre para a direita. E essa, para esquerda ou para direita com a bolinha de baixo a de cima vai sempre para a esquerda.*
> ***Helio****: Tem o mesmo comportamento só que inverso, né?*
> ***Vinicius****: Ele chega num certo limite.*
> ***Lulu*** *(orientadora): E esse para em qual?*
> ***Vinícius****: No 0. Parece que ele tem um limite no 0, ele vem e volta, não passa pra lá, não vai além, não chega a ser positivo. Então (os valores de y) estão dentro dos números negativos.*

Ao final das descrições os estudantes registram:

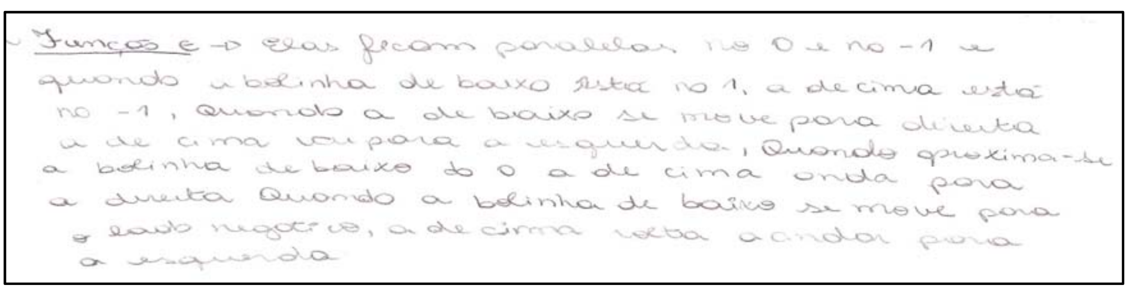

Funçao e → Elas ficam paralelas no 0 e no -1 e quando a bolinha de baixo esta no 1, a de cima está no -1, Quando a de baixo se move para direita a de cima vai para a esquerda, Quando aproxima-se a bolinha de baixo do 0 a de cima anda para a direita Quando a bolinha de baixo se move para o lado negativo, a de cima volta a andar para a esquerda

Figura 84: Registro da função e no Dynagrapg pela Carolna e Juliana

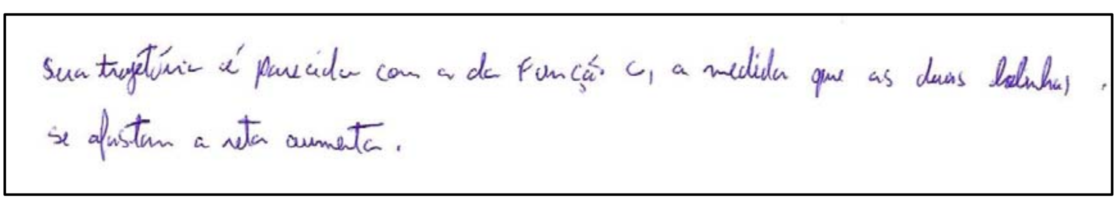

Sua trajetória é parecida com a da função c, a medida que as duas bolinhas se afastam a reta aumenta.

Figura 85: Registro da função e no Dynagrapg pelo Adriano e Luciano

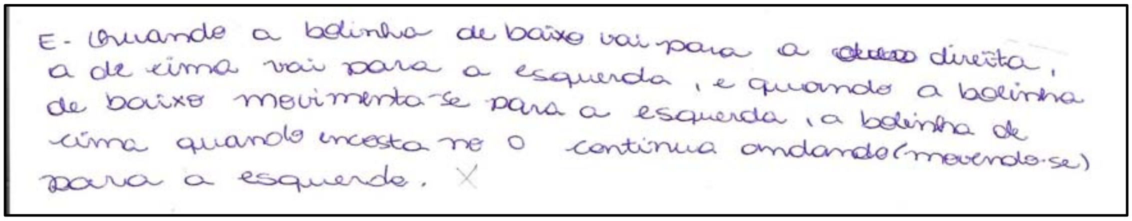

E- Quando a bolinha de baixo vai para a direita, a de cima vai para a esquerda, e quando a bolinha de baixo movimenta-se para a esquerda, a bolinha de cima quando encosta no 0 continua andando (movendo-se) para a esquerda.

Figura 86: Registro da função e no Dynagrapg pela Geiza e Natalia

Helio e Vinicius: Não registraram

3.1.2.2.6. Função f (x) = $\frac{1}{x}$

Os estudantes descrevem percepções parecidas quanto ao comportamento da função, quando os valores de x crescem ou decrescem muito.

> ***Carolina**: Sempre que a bolinha de baixo vai pra esquerda, a bolinha de cima fica no 0.*
> ***Natalia**: Quando você vai muito para a direita ou muito para esquerda com a bolinha de baixo, a bolinha de cima fica parada no 0.*
> ***Vinicius**: ... o padrão dela (função k), depois de um certo ponto, a bolinha (de cima) limita-se a 0.*

Eles dizem que *"a bolinha de cima fica parada no 0"* porque à medida que os valores de x aumentam ou diminuem muito, os valores de y aproximam-se cada vez mais do zero e, como os valores de y são identificados no ambiente virtual com uma bolinha, visualmente parece que o valores de y são sempre 0 "depois de um certo ponto" (ver figura 87).

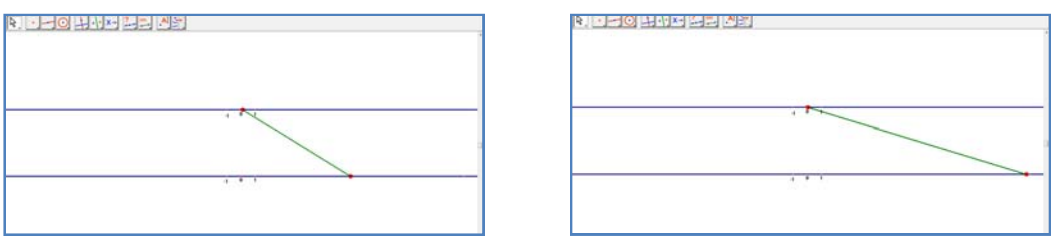


Figura 87: Comportamento da função f a medida que os valores de x crescem.

Entretanto a surpresa e as dificuldades surgem ao tentarem explicar o que acontece ou o que observam, quando a “bolinha de baixo” está exatamente no 0. E as explicações têm conotações bem diferentes entre os grupos,

***Carolina**: Quando (a bolinha de baixo) está no 0, é..., quando ela está no 0 a outra some. Se você for pra direita ela aparece na direita, se você for pra esquerda ela aparece na esquerda.*

***Juliana**: Ela some. E aparece a onde?... Ela dá a volta no quarteirão. (risos)*

***Carolina**: Ela gira. Pra fora da tela (risos)*

***Luciano**: A bolinha que está em cima dá uma volta de 360º. Bom, ela aparece de um lado e passa pro outro. Ah, dá uma volta assim (faz o gesto de uma circunferência horizontal).*

***Adriano**: Sim. É ela faz isso mesmo, agora que eu vi. Ela vai daqui pra li. A bolinha de cima, ela some.*

***Natalia**: Ele pula, espera aí... a bolinha de cima vai pro lado contrário da bolinha de baixo. A bolinha de cima saiu. Sumiu. A bolinha de cima e a reta.*

***Helio**: Eu acho que o 0 separa um grupo do outro, porque quando está no grupo do negativo o resultado vai ser negativo e quando está no grupo do positivo o resultado vai ser positivo. E o 0, como não é nem uma coisa nem outra, o resultado é nulo, assim, não ia ter resultado.*

Para as duplas do grupo 1 (Carolina e Juliana, Adriano e Luciano) o domínio dessa função são todos os números reais, ou seja, para eles, aparentemente, a função tem valor, para x igual a zero, e este valor está em algum lugar atrás de tela. Para explicar o movimento observado, elas “criam” um movimento, não observado na tela (giro ou volta para fora da tela), que dá sentido ao que estão vendo. Goldemberg et al. (1992), em suas experiências com Dynagraph, também observa uma tendência dos aprendizes em descrever uma circunferência para interligar os valores de y, como no nosso caso, as meninas dizem:

***Carolina**: Uma circunferência que não aparece? Uma semicircunferência.*

***Juliana**: Uma semicircunferência entre uma linha e outra.*

***Carolina**: Porque se você imaginar que esse aqui é o diâmetro (apontando pra o eixo y na tela) e que só eles se margeiam parece que ela dá uma volta aqui e volta pra lá sabe?*

Para as duplas do grupo 2 (Geiza e Natalia, Helio e Vinicius), podemos ousar dizer que os estudantes tentam explicar o fato da função não estar definida para x= 0 (mesmo que eles não tenham conhecimento matemático desse fato), portanto não temos imagem para tal valor, quando dizem palavras como *some, pula* ou *não tem resultado*. O comentário escrito dos estudantes dessa função resume bem as principais discussões registradas:

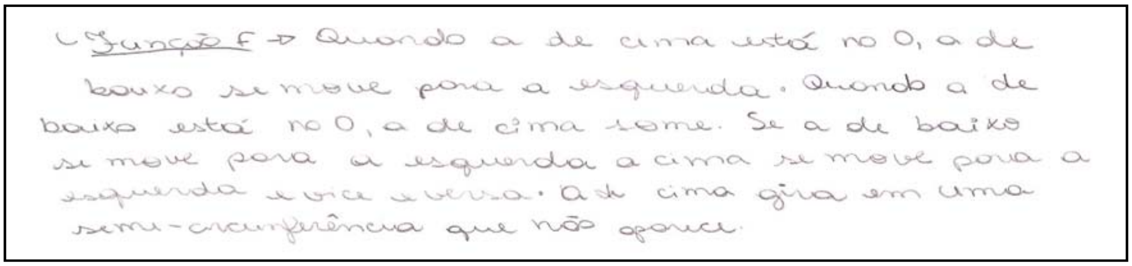

Função f → Quando a de cima está no 0, a de baixo se move para a esquerda. Quando a de baixo está no 0, a de cima some. Se a de baixo se move para a esquerda a cima se move para a esquerda e vice versa. A de cima gira em uma semi-circunferência que não aparece.

Figura 88: Registro da função f no Dynagrapg pela Carolina e Juliana

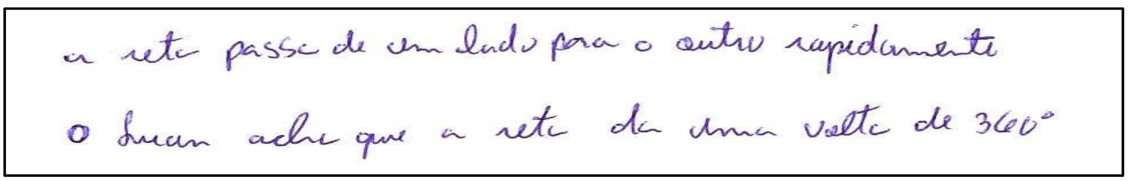

a reta passa de um lado para o outro rapidamente
o Luan acha que a reta da uma volta de 360°

Figura 89: Registro da função f no Dynagrapg pelo Adriano e Luciano

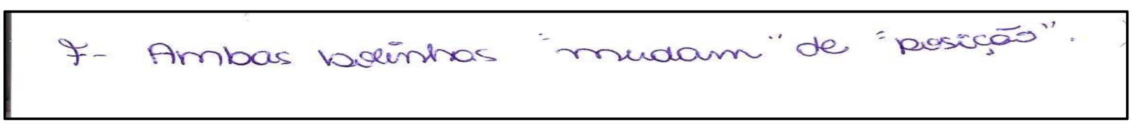

7- Ambas bolinhas "mudam" de "posição".

Figura 90: Registro da função f no Dynagrapg pela Geiza e Natalia

Helio e Vinicius: Não registraram

3.1.2.2.7. Função g(x) = x

Para descrever essa função, os estudantes observam que as bolinhas se movem paralelamente:

> ***Juliana**: Elas se movem paralelamente. Não importa o lado, sendo positivo ou negativo.*

***Luciano**: Ah, a bolinha vermelha, as duas bolinhas vermelhas são paralelas. Elas vão na mesma direção, tá?*

***Adriano**: Elas são paralelas, descrevem esse movimento (pega uma caneta e a movimenta na posição vertical para um lado e para o outro).*

***Geiza**: Essa é fácil.*

***Natalia**: A bolinha de cima sempre está... sempre está em cima da bolinha de baixo.*

A descrição dessa função é feita rapidamente entre as meninas do grupo 2 (menos de meio minuto de gravação). Já os meninos do mesmo grupo (Helio e Vinicius) levaram um pouco mais de tempo, uma vez que é pedido ao Vinicius que descreva para o Helio, que não estava olhando para a tela do computador, o comportamento observado. Esse procedimento (já utlizado outras vezes), permitiu uma caracterização muito interessante para a função.

***Vinicius**: Você sabe como funciona um trem? Sabe as duas rodas que ficam no trilho?*

***Helio**: Uhum.*

***Vinicius**: Elas não ficam paralelas?*

***Helio**: Sim.*

***Vinicius**: Aqui está a mesma coisa.*

***Helio**: Mas o tempo todo paralelo?*

***Vinicius**: Uhum. Elas ficam seguindo paralela uma a outra em qualquer direção.*

***Helio**: Então, o ângulo com o trilho, vamos dizer assim, fica sempre o mesmo?*

***Vinicius**: Sim.*

***Pesquisadora**: Desenha o que você conseguiu imaginar.*

***Helio**: Eu imaginei que aqui seria o trilho (desenhando um dos eixos no papel), tá? Aqui o outro trilho (referindo-se ao outro eixo). O ângulo ficaria sempre o mesmo, não importa se deitado ou em pé.*

***Vitor**: O grupo aqui é o que não tem alteração de ângulo.*

***Helio**: Grupo da locomotiva. (risos)*

Na narrativa desenvolvida pelos estudantes destacamos a palavra *locomotiva* como uma raiz narrativa, pois ela caracteriza um comportamento de algumas funções lineares. E depois desse momento, os estudantes Helio e Vinicius passam a se referir a essa função (e a função f) como *função locomotiva*. Ao final das discussões as respostas dos estudantes são:

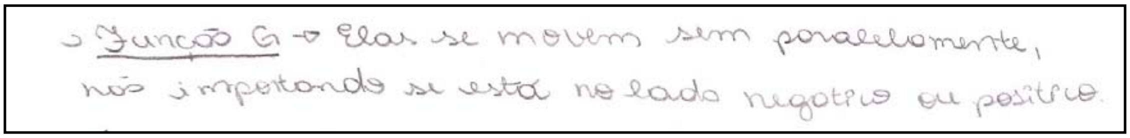

→ Função G → Elas se movem sem paralelamente, nós importando se está no lado negotivo ou positivo.

Figura 91: Registro da função g no Dynagrapg pela Carolina e Juliana

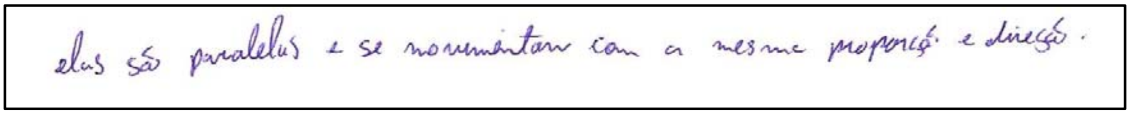

elas são paralelas e se movimentam com a mesma proporçã e direção.

Figura 92: Registro da função g no Dynagrapg pelo Adriano e Luciano

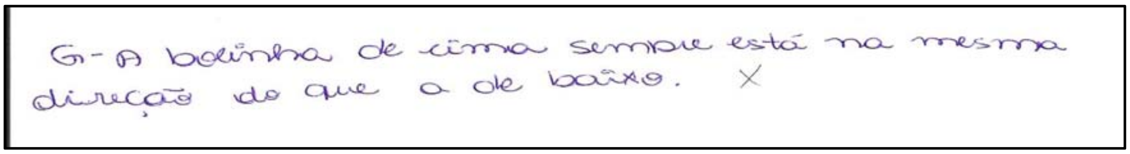

G - A bolinha de cima sempre está na mesma direção do que a de baixo. X

Figura 93: Registro da função g no Dynagrapg pela Geiza e Natalia

Helio e Vinicius: Não registraram

3.1.2.2.8. Função h(x) = o dobro do maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$

As duplas logo observam que os valores de y vão *“pulando de 2 em 2”*

Carolina*: Ela (a bolinha de cima) não para no ponto do -1.*

Juliana*: Ela passa, mas não para em cima do -1*

Carolina*: Ela não para em cima. Ela pula para o próximo número.*

Juliana*: Ela passa, mas não para em cima do -1. Ela dá uma puladinha.*

Carolina*: É... É a bolinha coelhinho.*

Luciano*: A bolinha vermelha (de baixo) desliza pela linha. A outra vai pulando de centímetro em centímetro. A de cima não anda, ela só pula, oh.*

Adriano*: É como se ela pulasse, passasse de um número pro outro. Do 1 ela passasse pro 3, pro 5, assim. Ela pula... é.*

Geiza*: Quando a de baixo se distancia ela tem um limite, entendeu? Tem um certo limite. Ela... ela não consegue se distanciar mais do que isso, porque a de cima pula, sei la. Ela acompanha e a de baixo ela nunca vai ficar, é... sei lá. Parece que ela está fugindo da outra.*

***Helio**: Oh, o ponto de cima pula de 2 em 2, né? Independente do de baixo. O de baixo se move normalmente e o de cima só vai pulando de 2 em 2. Mesmo assim, vai ter um momento em que se alinha, ai o ponto de baixo sai do alinhamento e o ponto de cima vai na direção que o ponto de baixo está se locomovendo, entendeu?*

Observe, mesmo que estaticamente, a ideia desse movimento aos pulos na figura 94.

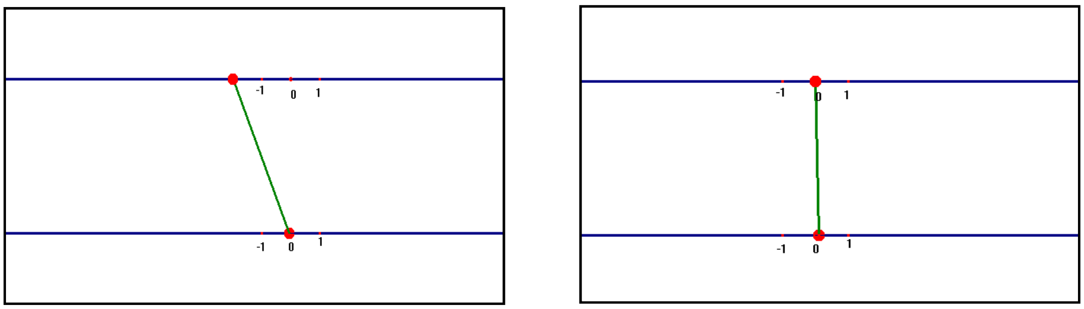


Figura 94: Representação gráfica de h(x)= o dobro do maior inteiro menor que x/2

Todos os estudantes utilizam a palavra “pulo” para caracterizar o movimento descontinuo da função *h*. Na fala das meninas do grupo 1, o movimento observado da função ganha significado quando comparado aos pulos de um coelho, onde os olhos do coelho são os valores de y. Lembrando nossa definição para *raízes narrativas*, pode ser que o movimento de pulos sirva como raiz para alguns tipos de funções descontinuas.

***Carolina**: Ela salta como um coelhinho de olhos vermelhos.*
***Juliana**: É porque ele é branquinho da cor do fundo, não dá pra ver.*
***Carolina**: Ele (o coelhinho) é invisível.*

As descrições da função feitas pelas duplas ao final da discussão foram:

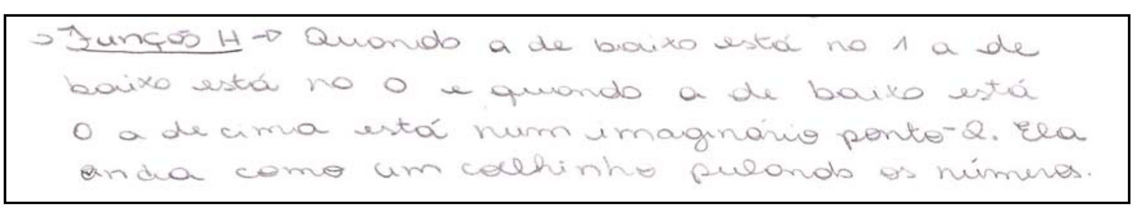

=> Função H -> Quando a de baixo está no 1 a de baixo está no 0 e quando a de baixo está 0 a de cima está num imaginário ponto -2. Ela anda como um coelhinho pulando os números.

Figura 95: Registro da função h no Dynagrapg pela Carolina e Juliana

Enquanto a bolinha vermelha de baixo continua seu movimento constantemente
a de cima interrompe pulando de cm em cm (seguindo a outra)

Figura 96: Registro da função h no Dynagrapg pelo Adriano e Luciano

H - A bolinha de cima só se move em função da de baixo.
A de baixo está "fugindo" da de cima, que à partir
de uma certa distância se encontra com a de baixo.

Figura 97: Registro da função h no Dynagrapg pela Geiza e Natalia

Helio e Vinicius: Não registraram

3.1.2.2.9. Função i (x) = $x + \frac{1}{x}$

Ao abrir a tela com a representação gráfica dessa função, os estudantes rapidamente a relacionam com a função f:

Carolina*: Essa é igual aquela outra lá que gira, né?*
Juliana*: (Porque) ela gira quando a (bolinha) de baixo está no 0.*
Carolina*: Ela só gira quando está bem próxima do 0.*

Adriano*: Mais ou menos como a função f, mais ou menos a mesma função.*
Luciano*: Porque ela também faz a circunferência.*

Natalia*: Ah! De novo essa!*
Pesquisadora*: De novo o que?*
Natalia*: Some a reta. (risos). Ela some um pouco depois volta.*

Vinicius*: É a mesma coisa que o outro, né?*
Helio*: Eu acho que dá para enquadrar naquele grupo lá (referindo-se ao grupo da função f(x) = 1/x) porque no 0 não tem resultado nenhum.*

Mais uma vez, para as duplas do grupo 1, o movimento está definido para todos os valores de x, ou seja, o domínio é o conjunto dos números reais e há um ponto de encontro entre $-\infty \; e \; +\infty$ no eixo das ordenadas e para as duplas do grupo 2, a função não está definida para x = 0. Essas conclusões podem ser observadas nas anotações das duplas:

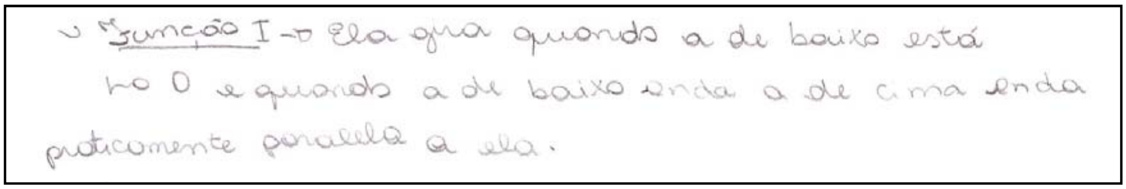

Função I → Ela gira quando a de baixo está no 0 e quando a de baixo anda a de cima anda praticamente paralela a ela.

Figura 98: Registro da função i no Dynagrapg pela Carolina e Juliana


As funções são parecidas com a da F

Figura 99: Registro da função i no Dynagrapg pelo Adriano e Luciano

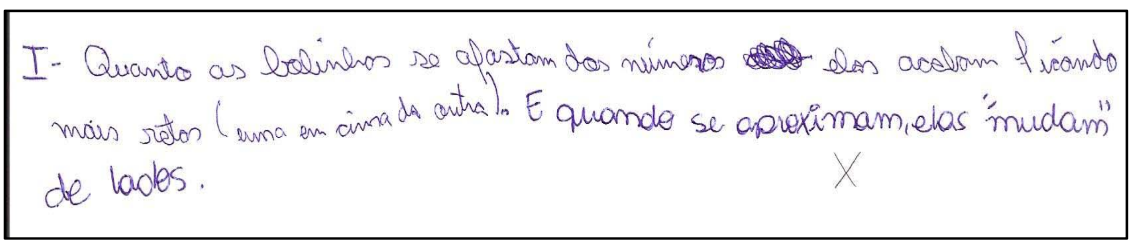

I- Quanto as bolinhas se afastam dos números elas acabam ficando mais retos (uma em cima da outra). E quando se aproximam, elas "mudam" de lados.

Figura 100: Registro da função i no Dynagrapg pela Geiza e Natalia

Helio e Vinicius: Não registraram

3.1.2.2.10. Função j(x) = $3x^2 - 2$

Duas características importantes são destacadas na fala das estudantes. O fato do crescimento ou decrescimento bem rápido dos valores de y e a permanência dos valores de y positivo quando os valores de x são positivos ou negativos – com exceção dos valores de x no intervalo entre -1 e 1. Nesse intervalo, os valores de y são negativos.

***Adriano**: (A "bolinha de baixo") faz esse movimento pra lá. Para cá, ela não vai. Ela chega num determinado momento do lado negativo que ela volta. Enquanto a outra (a "bolinha de baixo") avança, ela volta.*

***Luciano**: Ela volta.*

***Carolina**: Quando você vai pondo a bolinha de baixo pro lado negativo, a de cima vai pro positivo cada vez mais distante... Quando você vai pondo a bolinha de baixo pro lado negativo, a de cima vai pro positivo cada vez mais distante. E quando você põe a bolinha de baixo no 0, a de cima tá no negativo. Depois quando você vai afastando a bolinha no positivo, a bolinha (de cima) volta a se afastar pro lado positivo com números maiores.*

***Geiza**: Oh, quando a bolinha de baixo está no 0 e começa a ir pro 1, dá a impressão que a bolinha de cima vai continuar indo para esquerda só que ela não continua e quando ela passa no 1 e quando elas ficam retas e a de cima começa a ir apra direita e a de baixo também.*

***Vinicius**: Ela também tem um limite, né?*

***Helio**: Tem. No -2. Bom essa daí é uma daquelas funções que têm limite, né?*

***Vinicius**: Claro que tem.*

Eles percebem novamente o sentido único dos valores da variável dependente, e os meninos do grupo 2 a caracterizam, como nas outras funções quadráticas (funções *c* e *d* respectivamente), como função que tem limite, que não ultrapassa um determinado valor. Podemos identificar a palavra *limite* como uma raíz narrativa que caracteriza certos tipos de funções quadráticas.

Ao final das discussões as duplas registraram:

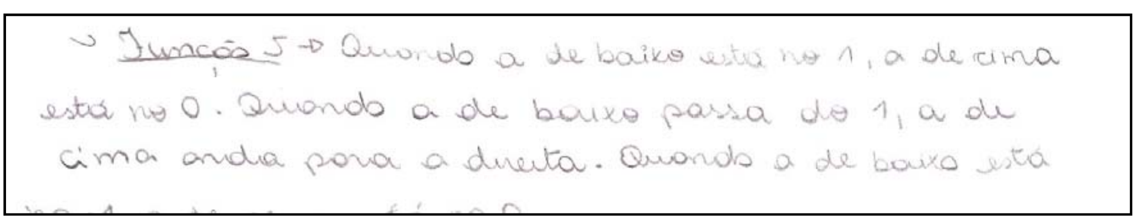

→ Função J → Quando a de baixo está no 1, a de cima está no 0. Quando a de baixo passa do 1, a de cima anda para a direita. Quando a de baixo está

Figura 101: Registro da função j no Dynagrapg pela Carolina e Juliana

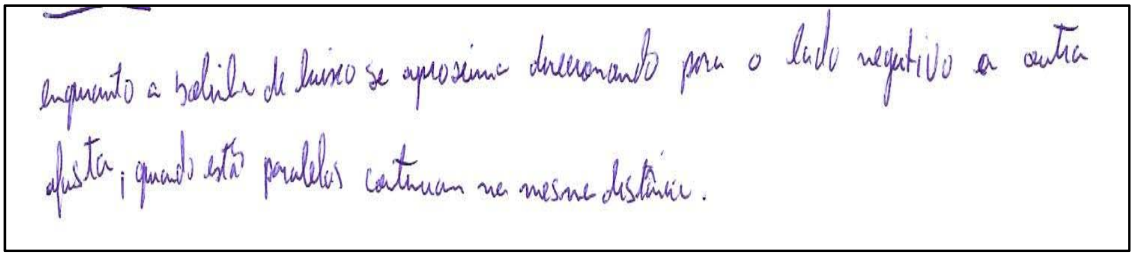

enquanto a bolinha de baixo se aproxima direcionando para o lado negativo a outra
afasta; quando estão paralelos continuam na mesma distância.

Figura 102: Registro da função j no Dynagrapg pelo Adriano e Luciano

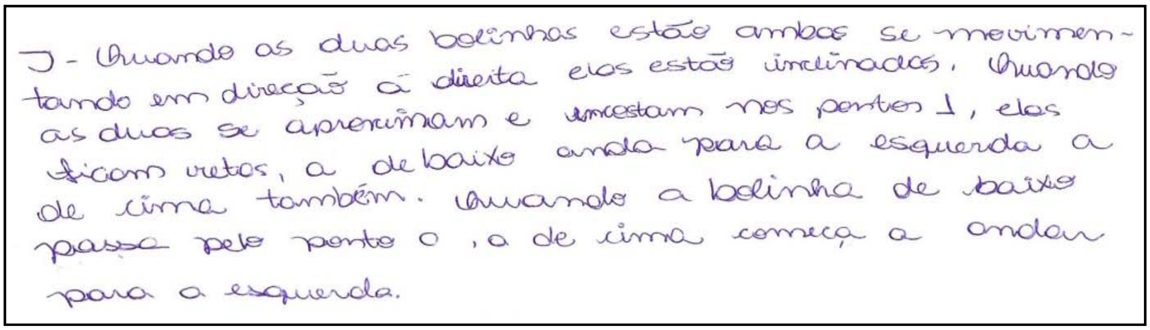

J - Quando as duas bolinhas estão ambos se movimen-
tando em direção à direita elas estão inclinados. Quando
as duas se aproximam e encostam nos pontos ⊥, elas
ficam retos, a de baixo anda para a esquerda a
de cima também. Quando a bolinha de baixo
passa pelo ponto o, a de cima começa a andar
para a esquerda.

Figura 103: Registro da função j no Dynagrapg pela Gaiza e Natalia

Helio e Vinicius: Não registraram

Antes de iniciarmos o terceiro momento, é importante salientar que em várias funções é destacado o fato da "bolinha" ter uma ação bem humananizada como caminhar e pular. Essas características destacadas em funções matemáticas são incentivadas pelas três características de micromundo destacadas por Healy e Sinclair (2007) – movimento, tempo e agência.

3.1.2.3. Terceiro Momento

Na identificação e nomeação dos grupos, algumas características humanizadas aparecem, como o grupo que gira, o movimento giratório, o grupo coelho, o grupo elástico ou as bolinhas opostas e suas explicações são, no mínimo, interessantes.

Os estudantes das quatro duplas classificam as 10 funções em 5 agrupamentos distintos - as funções que estão em cada agrupamento são as mesmas para as duas duplas de cada grupo. As meninas do grupo 1 fazem apenas um agrupamento a mais, a partir das funções proporcionais.

A classificação da dupla Carolina e Juliana (grupo 1) fica assim:

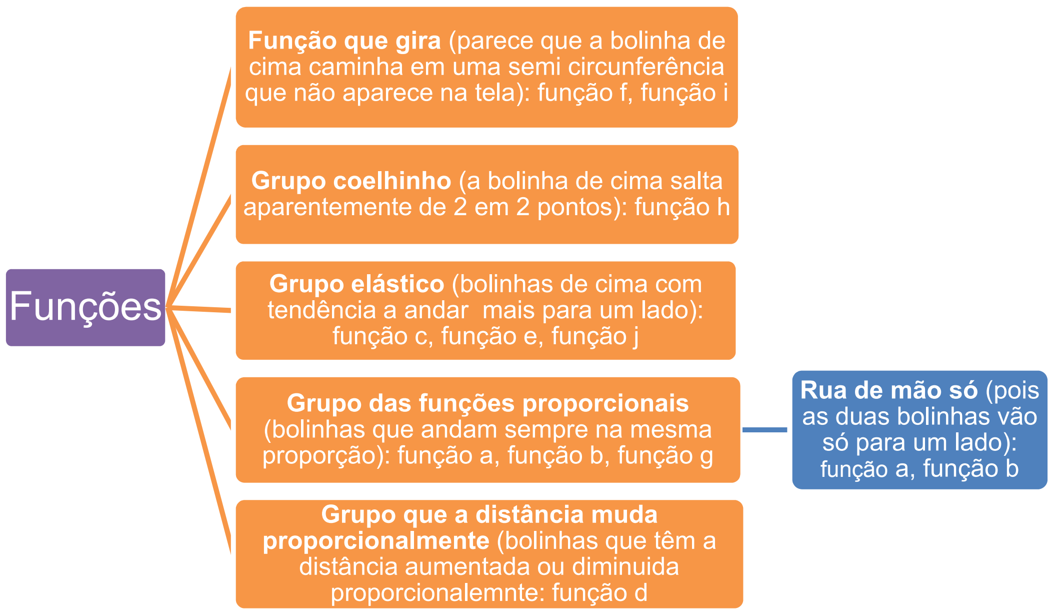


Tabela 7 Agrupamento das funções no Dynagraph feito pela Carolina e Juliana

A classificação da dupla Adriano e Luciano (grupo 1) fica assim:

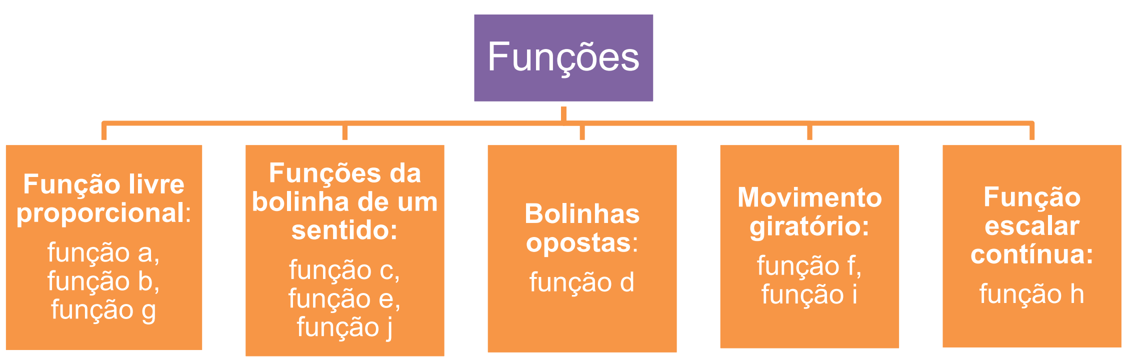


Tabela 8: Agrupamento das funções no Dynagraph feito pelo Adriano e Luciano

A classificação da dupla Geiza e Natalia (grupo 2) fica assim:

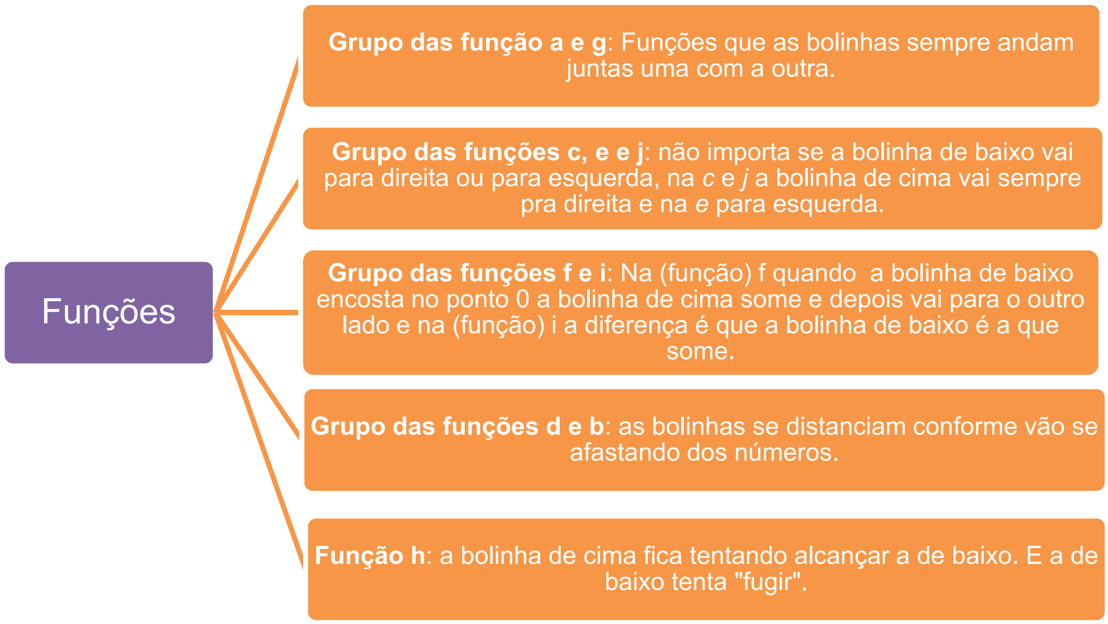


Tabela 9: Agrupamento das funções no Dynagraph feito pela Geiza e Natalia

A classificação da dupla Helio e Vinicius (grupo 2) fica assim:

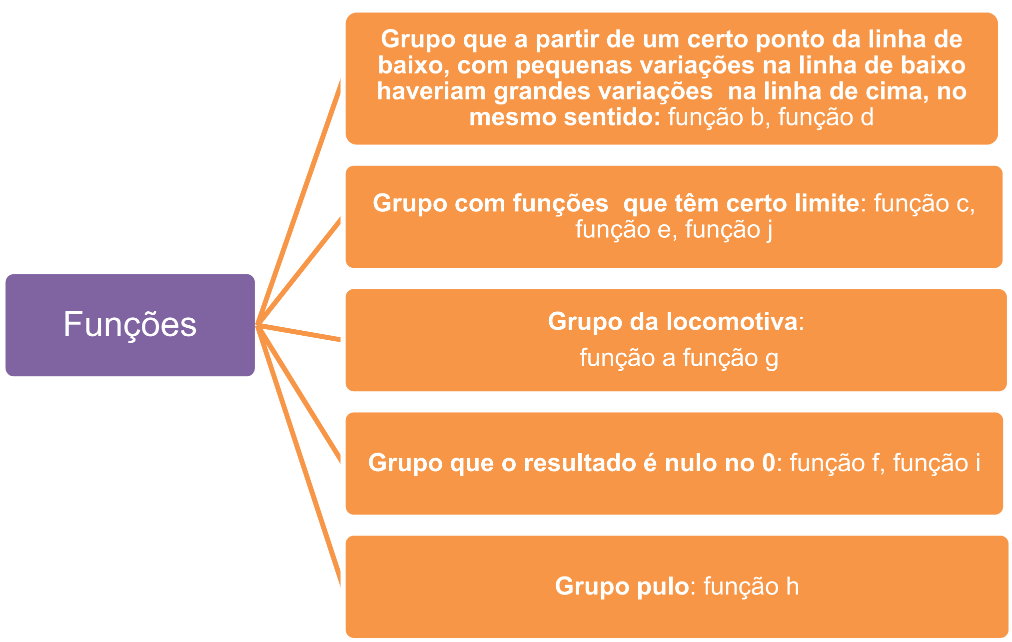


Tabela 10: Agrupamento das funções no Dynagraph feito pelo Helio e Vinicius

É interessante perceber as semelhanças das duplas tanto na caracterização dos grupos quanto nas funções contidas em cada grupo. Esse fato nos leva a refletir que abordar o ensino de funções sobre essa perspectiva pode ser frutífero e proveitoso para os estudantes.

Em comparação a classificação das funções exploradas no Cartesiangraph, notamos que, embora, de modo geral, as descrições sobre as funções tenham saído rapidamente, as classificações são bem mais demoradas e suscitam algumas narrativas interessantes.

3.1.3. TERCEIRA SESSÃO DE ENSINO

As atividades da terceira sessão de ensino são orientadas pela ficha 3 (explicitada no capítulo anterior) que contém duas questões. A primeira questão sobre o que podem escrever sobre *funções* no contexto da matemática. A essa questão, a resposta dos estudantes é:

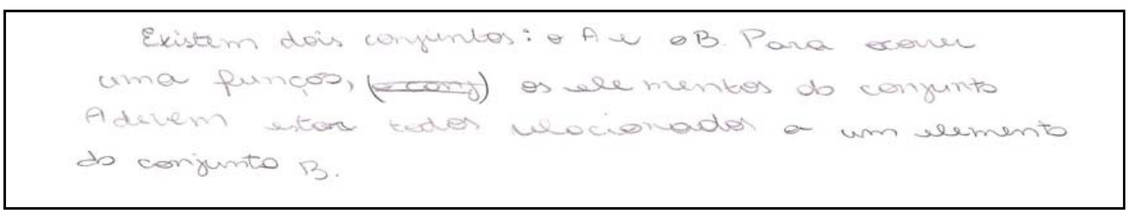

Existem dois conjuntos: o A e o B. Para ocorrer uma funções, (~~[illegible]~~) os elementos do conjunto A devem estar todos relacionados a um elemento do conjunto B.

Figura 104: Ficha 3: resposta de Carolina e Juliana para pergunta1

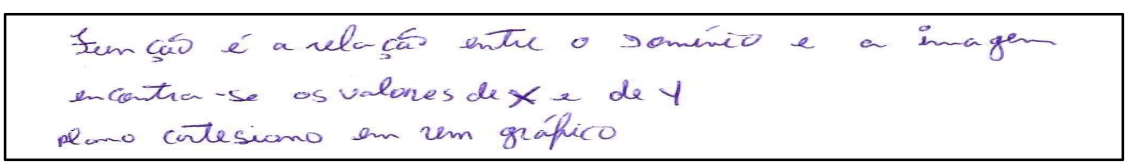

Função é a relação entre o domínio e a imagem
encontra-se os valores de x e de y
plano cartesiano em um gráfico

Figura 105: Ficha 3: resposta de Adriano e Luciano para pergunta1


* funções de x, y, 1, 2, etc...
- Bem a ver com intervalos.
- Eixo x e y.

Figura 106: Ficha 3: resposta de Geiza e Natalia para pergunta1

Relação de dois grupos, que têm os elementos relacionados; os elementos do primeiro grupo não pode se relacionar com dois do 2º grupo.

Figura 107: Ficha 3: resposta de Helio e Vinicius para pergunta1

Percebemos que a resposta das meninas do grupo 1 (Carolina e Juliana) e dos meninos do grupo 2 (Helio e Vinícius) tem bastante semelhança com a dada na segunda sessão de ensino, apenas acrescentam-se alguns dados. Já os meninos do grupo 1 (Adriano e Luciano) e as meninas do grupo 2 (Geiza e Natalia) respondem bem diferente (em relação a 2ª sessão de ensino). Isso acontece porque as duas primeiras duplas já haviam iniciado seus estudos sobre função antes da 2ª sessão de ensino, fato que não acontece com a duas últimas duplas, que só iniciam seus estudos sobre função na escola depois da 2ª sessão de ensino. Percebemos também que as respostas dadas pelas duplas são formuladas pensando no que haviam estudado em suas aulas de matemática na escola e não pensando no que vêm ou aprendem em nossas sessões de ensino.

A segunda questão propõe associar as representações algébricas das 10 funções trabalhadas nas sessões anteriores com suas respectivas representações gráficas, tanto no Cartesiangraph como no Dynagraph. Essas representações algébricas estão na ficha três (em ordem diferente da apresentada nos ambientes computacionais) e os estudantes dispõem das anotações realizadas nas outras duas sessões, além do computador com acesso livre aos dois ambientes computacionais e das representações gráficas de cada função (no ambiente virtual, a ordem das funções é a mesma, mas os estudantes desconhecem esse fato inicialmente).

Intencionamos que os estudantes utilizem os comportamentos observados, os agrupamentos e as anotações feitas nas sessões anteriores para auxiliá-los nas associações. Esses procedimentos são feitos em alguns momentos e por algumas duplas, mas, de modo geral, não é a principal estratégia adotada pelas duplas. Uma das estratégias utilizada por todos os grupos é fazer uma tabela de valores para compará-los com os encontrados nas duas representações (gráfica e algébrica).

A dupla Carolina e Juliana (grupo 1), para relacionar as representações algébricas com suas respectivas representações gráficas, opta exclusivamente por primeiro fazer uma tabela de valores (com 3 ou 4 pontos) a partir das funções escritas na ficha 3, ou seja, a partir das expressões algébricas, depois fazer um esboço do gráfico (ver fig 107) para, por fim, comparar o esboço com o seu respectivo gráfico no ambiente computacional.

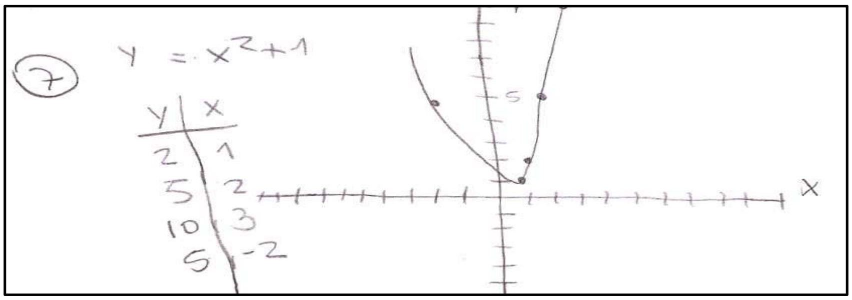


Figura 108: Tabela de valores e esboço da função $y = x^2 + 1$

Já a dupla Adriano e Luciano (grupo 1) tenta capturar os comportamentos observados e as classificações realizadas nas sessões anteriores, utilizando-se dos ambientes computacionais e de algumas das anotações, para perceber padrões e tentar associar a representação algébrica; além de utilizar-se de tabela de valores ou de uma associação de valores no próprio gráfico, para verificar ou refutar o que pensou inicialmente. Ao observar a representação gráfica, no Dynagraph, da função y = x – 2 a pesquisadora pergunta:

Pesquisadora*: Então como você vai saber que função que é?*

Luciano*: Observando o comportamento.*

Adriano*: Então, x é igual a y, está na mesma proporção que uma bolinha se movimenta a outra também se movimenta. Elas fazem o mesmo trajeto. ... tanto o y como o x.*

Diante dessa afirmação, os estudantes acham que a representação algébrica para a função observada é y = x (terceira função do papel). Mas, ao verificarem os valores da tabela (ver figura 107) montada para a função representada graficamente, percebem que os mesmos não pertencem à função representada por y = x e, depois de uma nova tentativa, encontram a representação algébrica y = x – 2 como função correspondente à representação gráfica observada. É interessante perceber que os estudantes, tentam as funções lineares, pois consultam os agrupamentos feitos nas sessões anteriores.

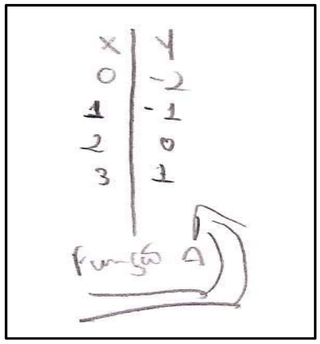


Figura 109: Tabela da função a feita por Adriano e Luciano

Ao observar o comportamento da função y = 2x + 1, no Cartesiangraph, comentam:

> ***Luciano****: Aqui é positivo depois no negativo, 1, 2. Parece tipo 2 pra 1 mas...*
> ***Adriano****: y = 2x + 1?*
> ***Luciano****: É, porque quando está no ponto zero aqui, oh, começa no ponto 1 e depois só dobra. É isso.*
> ***Adriano****: Dobro mais um, né?*

Para essa função, os meninos nem fazem uma tabela de valores, pois só pela observação do comportamento eles se sentem confortáveis em afirmar a representação algébrica correspondente.

A dupla Geiza e Natalia (grupo 2), utiliza, em alguns momentos, os comportamentos observados nas representações gráficas das funções e as classificações feitas nas sessões anteriores para auxiliá-las na associação entre as duas representações (gráfica e algébrica) e utiliza também a tabela de valores para conferir ou refutar as idéias levantadas. Outra associação que a dupla faz é identificar na ficha 3 algumas representações algébricas que possuem algo em comum ou alguma diferença.

> ***Geiza****: Tem umas que são – x, outras que são x^2, umas que só tem x, que só teve uma, duas, e outras que tem x menos ou mais algumas coisa. Eu diria que (na*

função) quatro[26], três... onde mais..., não tem, tipo assim, multiplicação, tipo 2x, sabe? E também (na função) quatro, também não tem, sabe? Em uma é y igual a x sozinho e na outra só está o x – 2, sabe? No y só está o y e o x só está o x. Acho que eu colocaria no mesmo grupo a (função) sete com a (função) cinco porque tem potência nos dois. Colocaria a (função) nove e a (função) seis porque elas têm letra na fração, tem...

A associação feita entre algumas representações algébricas facilita o trabalho, pois as estudantes não conferem expressão por expressão, mas apenas aquelas que são agrupadas como semelhantes, como por exemplo, na representação algébrica das funções quadráticas, as estudantes observam a função $y = x^2 + 1$, depois já observam a função $y = -x^2$, e em seguida a função $y = 3x^2 - 2$.

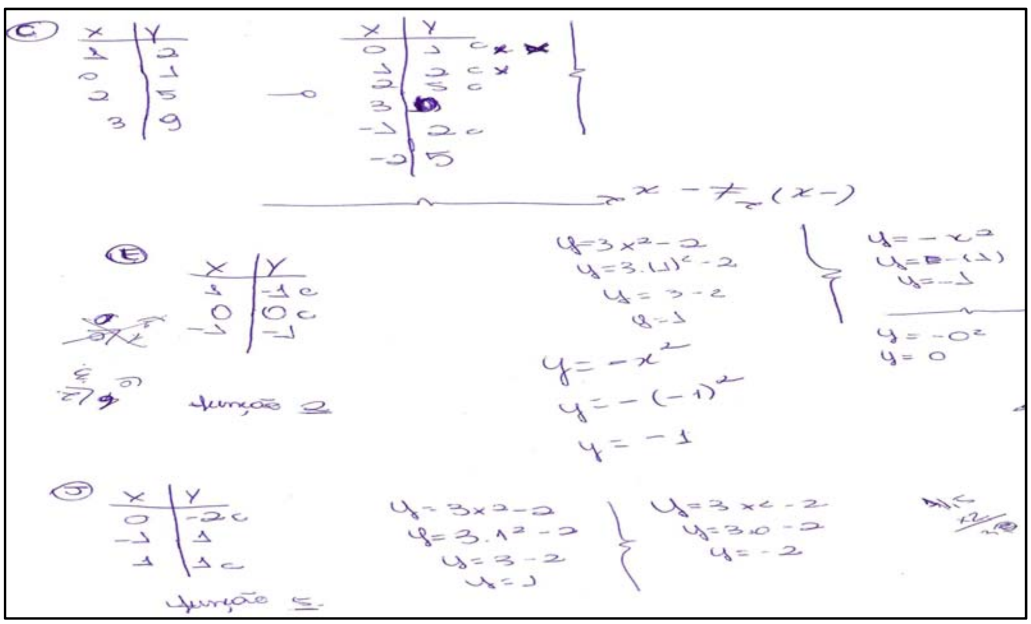


Figura 110: Tabelas das funções quadráticas produzidas pela Geiza e Natalia

Em outros momentos, a dupla utiliza exclusivamente a tabela de valores e compara ponto a ponto os valores encontrados no gráfico com os valores

---

[26] Os números representam a ordem em que as representações algébricas das funções foram apresentadas na ficha 3. O número 3 corresponde a função $y = x$, o 4 corresponde a função $y = x – 2$, o 7 corresponde a função $y = x^2 + 1$, o 5 corresponde a função $y = 3x^2 – 2$, o 9 corresponde a função $y = x + 1/x$ e o número 6 corresponde a função $y = 1/x$.

encontrados na representação algébrica, como na primeira comparação da função $y = 2x + 1$.

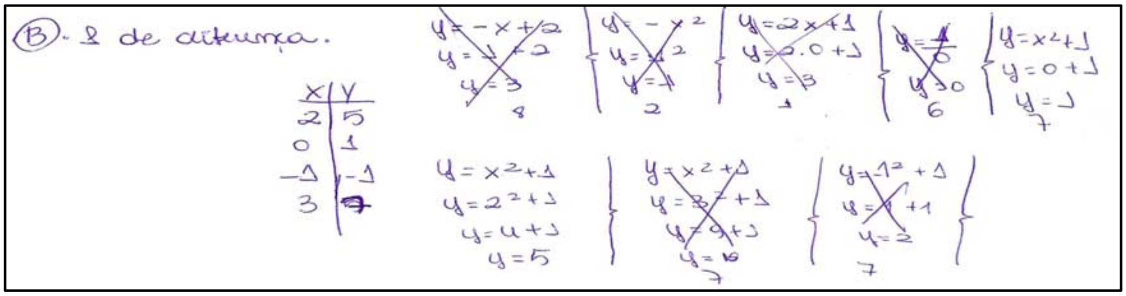


Figura 111: Tabela da função b feita pela Gaiza e Natalia e a comparação ponto a ponto com as expressões algébricas.

A dupla Helio e Vinicius (grupo 2) observa o comportamento da representação gráfica e relaciona com a respectiva representação algébrica, ora privilegiando a verificação ponto a ponto, ora privilegiando as características observadas da função, ora mesclando as duas opções. Quanto às anotações feitas nas sessões anteriores, eles preferem não as utilizar, pois nas palavras do Helio: "*Eu acho que vai acabar atrapalhando*".

Um bom exemplo dessa dupla, em que há o privilégio da verificação "ponto-a-ponto" é na função $y = x - 2$.

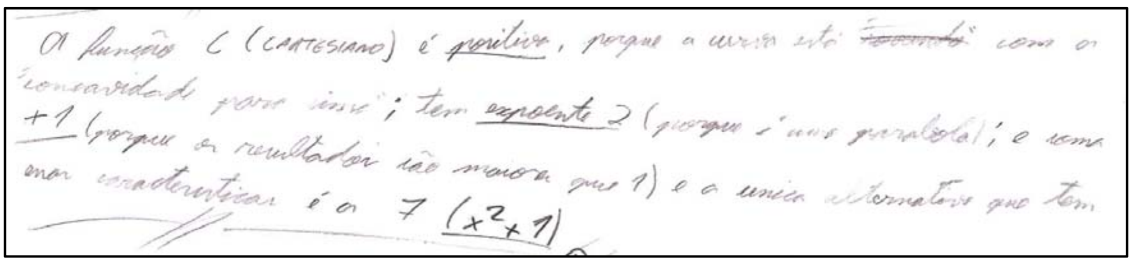
> ***Helio**: 0 (valor de y)... 2 (valor de x), tem que ser mais 2 alguma coisa (...) - x + 2 (apontando para a função y = -x + 2 na ficha). Vamos pegar um número. Coloca em cima de um número (e pega o lápis). Esse aqui quando você deixa no 0, fica 2 (verificando o valor da expressão algébrica do papel). Quer dizer, 0 no x, fica no -2 (valor de y). Aqui (na representação gráfica), vai dar 0 e +2 . Está errada, não é essa (referindo-se a função y = -x + 2 da ficha). Olha, tipo assim. Se for x – 2? Será que é essa? Tenta um número... 1, vai dar 1 negativo... 0 vai dar 2 negativo... é essa mesma, a equação (função) y = x - 2.*

Entretanto, eles não se esquecem de considerar que é uma função afim, pois quando Vinicius pergunta: *"Não dá para ser x^2 + 1? Põe o x no 1 ali."* Helio logo responde: *"A linha é reta, certo? Se fosse x^2 ia ser curva."*

Para relacionar a representação algébrica da função y = x^2 + 1 com sua respectiva representação gráfica, os meninos privilegiam o comportamento da representação gráfica da função em detrimento da verificação "ponto-a-ponto".

> ***Helio****: Essa daqui é o quadrado mais 1, porque uma função ao quadrado fica sempre uma parábola.*

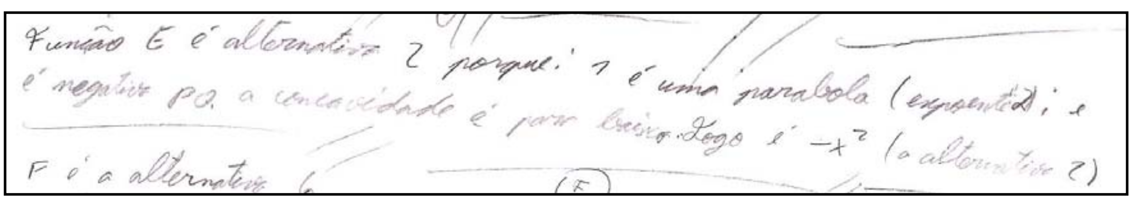
A concavidade para cima da parábola é caracterizada pelo Helio: *"O sorriso é positivo."* E ele comenta com o colega, antes de fazer seu registro: *"Eu vou colocar que a curva está sorrindo, dá para entender, não dá? Porque a curva está feliz."* Mas seu colega Vinicius acha melhor escrever de modo mais clássico: *"Coloca que a concavidade está para cima."* E o Helio faz a anotação sugerida pelo colega.



A função C (CARTESIANO) é positivo, porque a curva está ~~sorrindo~~ com a concavidade para cima; tem expoente 2 (porque é uma parábola); e soma +1 (porque os resultados são maiores que 1) e a única alternativa que tem essas características é a 7 (x^2+1)

Figura 112: Descrição da função c(x)= x^2 + 1 feita pelo Helio e Vinicius

Ao se deparar com a função y = - x^2, Helio exclama: *"É ao quadrado e ela está triste, olha lá!"* Evidenciando como triste a concavidade para baixo da parábola, mas mais uma vez essa maneira de descrever a função não se torna presente em sua escrita.



Função E é alternativa 2 porque: 1 é uma parábola (expoente 2); é negativo P.Q. a concavidade é para baixo. Logo é $-x^2$ (a alternativa 2)
F é a alternativa 6

Figura 113: Descrição da função e(x) = - x^2 feita pelo Helio e Vinicius

O uso dos ambientes computacionais (Cartesiangraph e Dynagraph) e a ordem para utilizá-los fica a critério de cada dupla, já que tencionávamos perceber em qual ambiente computacional os alunos se sentiriam mais à vontade.

A dupla Carolina e Juliana (grupo 1) decide comparar todas as representações algébricas do papel com as representações gráficas no

Cartesiangraph e só depois comparar essas mesmas representações no Dynagraph. Para iniciar as associações, Juliana pede a colega*: "pega o papel e começa a fazer uma tabela de valores para a primeira função representada algebricamente no papel."* Com alguns pontos determinados na tabela, elas os localizam no eixo cartesiano e, em seguida, realizam um pequeno esboço no papel. Esse esboço é comparado com as representações gráficas no Cartesiangraph, através da ferramenta *rastro*. Nas palavras da Carolina: *"A gente tá fazendo os gráficos e a gente vê qual que está batendo."*

Esse procedimento é repetido para quase todas as funções, no Cartesiangraph, salvo algumas em que o esboço se torna um pouco difícil, como nas funções com assíntota. Para essas funções (deixadas por último) usa-se a comparação "ponto-a-ponto" – da tabela com a representação gráfica (do ambiente virtual). A identificação de narrativas, nesse procedimento, mostra-se praticamente nula, pois o foco é verificar "ponto-a-ponto" sem observar e discutir o comportamento da função, ou seja, não há muitas idéias para serem debatidas, refletidas ou refutadas.

Ao iniciar a associação das representações algébricas e gráficas das funções no Dynagraph, elas observam que o "traçado" observado nesse ambiente é bem diferente do esboço feito no papel:

> ***Juliana****: O primeiro (referindo-se a primeira representação algébrica da folha) é uma reta, não é? Cadê a folha do desenho?*
> ***Carolina****: Mas os do.... (Dynagraph) desse outro aqui, ele só anda assim Juliana (fazendo um movimento horizontal de vai e vem com as mãos). Eles não fazem curva.*

Após algumas associações, não é difícil perceber que a ordem das funções é a mesma nos dois ambientes computacionais, o que simplifica bastante o trabalho de relacionar as representações algébricas com seus respectivos gráficos. Entretanto, alguns comportamentos de função são observados e discutidos, como a função $y = -x^2$:

***Carolina**: O y nunca vai pra parte positiva. Ele nunca tá no ... tá vendo (observando o comportamento da função na tela), olha.*

E a função y = x:

***Juliana**: Agora a gente vai no g (letra que identifica a função y = x no Dynagraph).*
***Carolina**: Acho que a (função) g é no 3 (terceira expressão algébrica apresentada na ficha)... Pode colocar que é o 3 porque é o que é tudo igual.*

É interessante observar, que, apesar do trabalho limitado no Dynagraph, pois logo fica claro que as funções estão na mesma ordem nos dois ambientes computacionais, há um pequeno diálogo sobre o comportamento da função, o que praticamente não ocorre no Cartesiangraph, pois as estudantes limitam-se a construir tabelas, esboçar gráficos e comparar, com as representações gráficas, função por função, na ordem em que são apresentadas na ficha.

A dupla Adriano e Luciano (grupo 1), como partem da representação gráfica, vão logo perguntando:

***Luciano**: Mas são 20 funções aqui, né? Nos dois grupos.*
***Pesquisadora**: Não, as funções que eu apresentei no Cartesiangraph são as mesmas que apresentei no Dynagraph.*
***Adriano**: São as mesmas?*
***Pesquisadora**: Sim. Só que a apresentação era diferente.*
***Luciano**: Na mesma ordem?*
***Pesquisadora**: Sim. Só não está na mesma ordem aqui (referindo-se a representação algébrica).*

Como os estudantes, depois dos primeiros questionamentos, já sabem que a ordem das funções são as mesmas nos dois ambientes computacionais, não ficam preocupados em responder em cada um separadamente. Mas, no decorrer da atividade, privilegiam o uso do Dynagraph, tanto que expressam sua preferência verbalmente:

***Pesquisadora**: Vocês estão achando melhor trabalhar com o Dynagraph do que trabalhar com o Cartesiangraph?*

***Adriano**: É, esse aqui (Dynagraph) é mais fácil. Perceber, nesse aqui, é muito mais fácil.*

***Luciano**: O Cartesiano lá é mais difícil.*

***Pesquisadora**: Perceber o que? Você acha que é mais fácil perceber o que?*

***Adriano**: Os valores, as diferenças, semelhanças, tudo.*

A dupla Geiza e Natalia (grupo 2) inicia a atividade observando a primeira função (y = x – 2) do Dynagraph, e depois de associá-la com a sua respectiva representação algébrica, observa a primeira função do Cartesiangraph e percebe que é associada a mesma representação algébrica. Diante desse fato, pergunta se a ordem nos ambientes virtuais é a mesma e obtém uma resposta afirmativa da pesquisadora. Dito isso, as estudantes optam por trabalhar só com o Cartesiangraph, pois se sentem confusa com o Dynagraph:

***Geiza**: No Dynagraph eu me confundo inteira.*

***Pesquisadora**: E você Natalia?*

***Natalia**: Eu também prefiro o outro.*

Essa dupla não volta a abrir o Dynagraph em nenhum outro momento, pois como sabem que as funções são as mesmas não se dão ao trabalho de conferir nesse ambiente as associações encontradas no Cartesiangraph.

A dupla Helio e Vinicius (grupo 2) opta por verificar todas as funções primeiramente no Cartesiangraph para depois associar as representações no Dynagraph. Ao verificar a primeira função do Dynagraph (y = x – 2), Helio indaga: *"Vê se é ao quadrado."* Mas logo depois já completa: *"Melhor... Não, não é ao quadrado. Se fosse ao quadrado só ia ficar para lá, entendeu?"* E passa a procurar, nas representações gráficas, a função que pode ser associada a representação algébrica $y = x^2 + 1$.

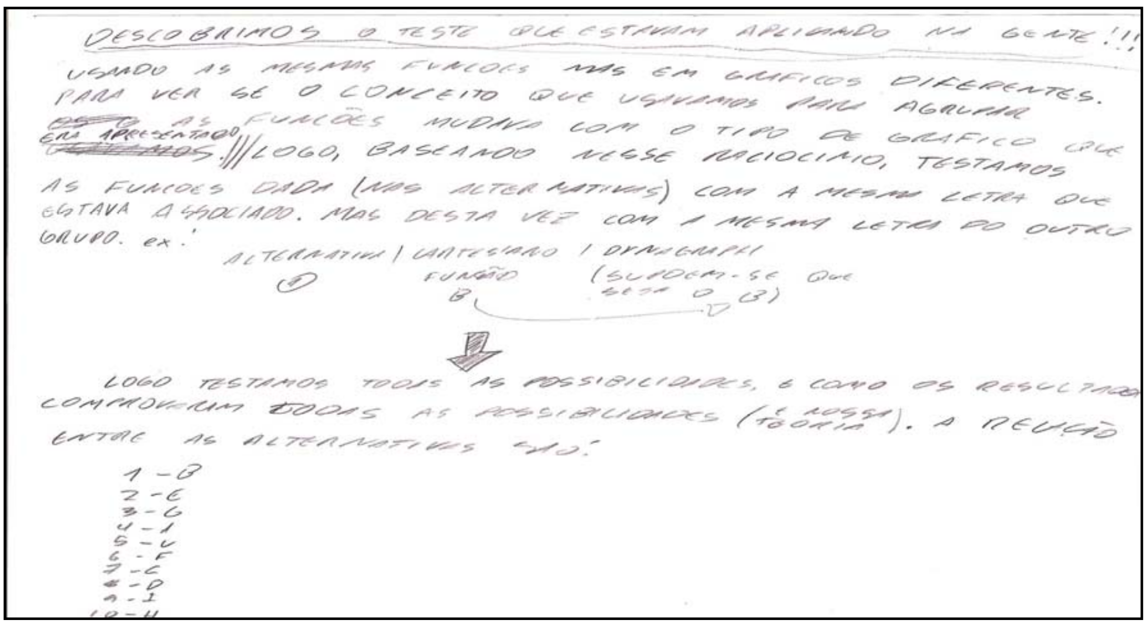
***Helio**: Os resultados vão ser sempre maiores do que 1, certo?*

***Vinicius**: É, não é ao quadrado mais 1. Não, é sim, tá certo. Veja aqui Helio (apontando para o comportamento da função $y = x^2 + 1$). Olha, essa daqui é ao quadrado sim.*

A surpresa maior aprece quando eles percebem que as associações coincidem nos dois ambientes virtuais, nas palavras do Helio: *“Olha, está coincidindo todos os resultados! Nossa! Beleza!”* E eles lidam com essa descoberta como algo que deveria ser um segredo ou um grande mistério:

> ***Vinicius****: É, parece que a gente descobriu.*
>
> ***Helio****: Descobriu o padrão deles. Estou me sentindo o esperto, cara.*

E então passam a conferir todas as funções no Dynagraph, de acordo com as associações que já feitas no Cartesiangraph. E para cada conferência uma pequena comemoração, com interjeições do tipo: *Aha... ou Yes...,* alternando o autor de tais interjeições. Ao final das atividades, escrevem um recado nos mostrando a grande descoberta que fizeram:


DESCOBRIMOS O TESTE QUE ESTAVAM APLICANDO NA GENTE!!!
USANDO AS MESMAS FUNCOES MAS EM GRAFICOS DIFERENTES.
PARA VER SE O CONCEITO QUE USAVAMOS PARA AGRUPAR
~~OS~~ AS FUNCÕES MUDAVA COM O TIPO DE GRAFICO QUE
ERA APRESENTADO ~~...MOS~~. // LOGO, BASEANDO NESSE RACIOCINIO, TESTAMOS
AS FUNCOES DADA (NAS ALTERNATIVAS) COM A MESMA LETRA QUE
ESTAVA ASSOCIADO. MAS DESTA VEZ COM A MESMA LETRA DO OUTRO
GRUPO. ex:
ALTERNATIVA | CARTESIANO | DYNAGRAPH
1 FUNÇÃO B (SUPOEM-SE QUE SEJA O B)

LOGO TESTAMOS TODAS AS POSSIBILIDADES, E COMO OS RESULTADOS
COMPROVARAM TODAS AS POSSIBILIDADES (E NOSSA TEORIA). A RELAÇÃO
ENTRE AS ALTERNATIVAS SÃO:
1 - B
2 - E
3 - G
4 - A
5 - J
6 - F
7 - C
8 - D
9 - I
10 - H

Figura 114: Recado escrito pelo Helio e Vinicius ao final das atividades da 3ª sessão de ensino

Entretanto, conforme o esperado, nem tudo são flores nessa sessão de ensino: alguns estudantes apresentam dificuldades, principalmente no início da atividade, quando se deparam com as 10 representações algébricas, que ainda não tinham visto e, portanto, não tinham uma ideia muito clara do que representava aquilo, em alguns casos.

***Adriano**: Esse (exercício 2 da ficha3) é mais complicado. O difícil é saber qual (função).*

***Geiza**: Difícil... tentar associar... não faço a mínima idéia de como fazer isso*

Todavia, com o apóio da pesquisadora, percebem que podem não só resolver como justificar suas escolhas. E no decorrer da sessão de ensino, os estudantes notam que a atividade a ser realizada não é tão complicada como pensam inicialmente, e ao se depararem com uma ficha “cheia” de expressões “desconhecidas”, afirmam:

***Carolina**: Eu achei que eu não sabia fazer isso, sabia?*

***Juliana**: Eu também.*

Alguns erros são cometidos, como a dupla Adriano e Luciano (grupo 1), que, inicia a tarefa abrindo a função y = x – 2 (representada pela letra A) no Dynagraph:

***Luciano**: A bolinha (de cima) acompanha da mesma forma (a “bolinha de baixo”).*

***Pesquisadora**: Qual a função que você acha que a bolinha acompanha?*

Luciano e Adriano: x igual a y.

***Luciano**: Eu acho que é, coloca aí x igual a y (representação nº 3). Função a.*

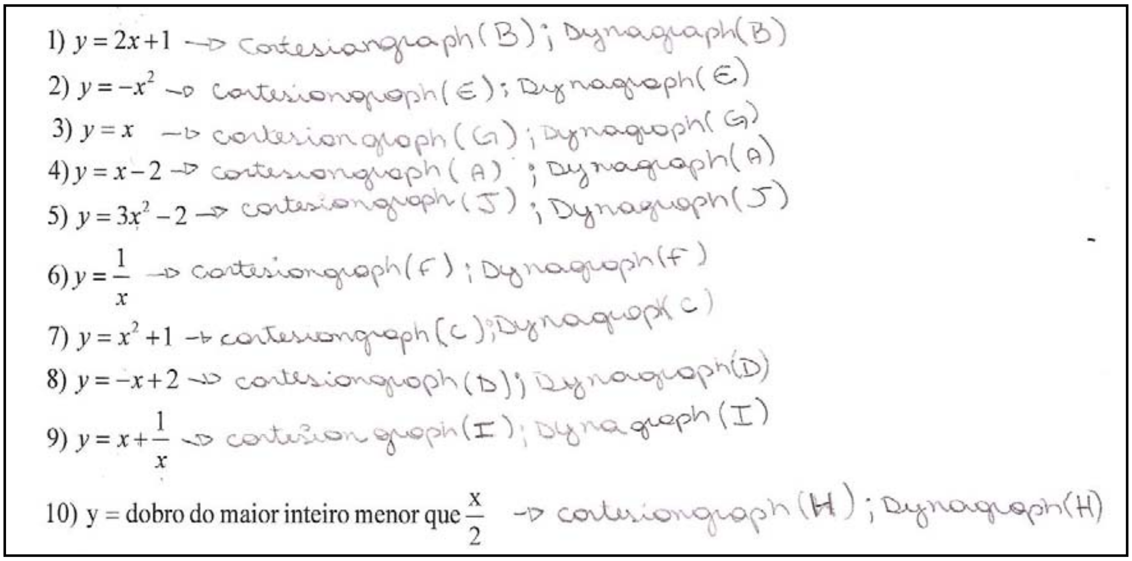
Inicialmente eles associam equivocadamente pois a função *a* deveria ser associada a função nº 4 (y = x – 2), mas o importante é que eles percebem um padrão de comportamento que os ajudará a identificar as outras funções afins. E com o desenrolar da atividade eles diagnosticam esse “erro inicial” e o “consertam” (ver a classificação final dos meninos).

***Adriano**: Então, x é igual a y está na mesma proporção que uma bolinha se movimenta a outra também se movimenta.*

Ao observar a função *d* (y = - x + 2), associando-a a representação algébrica nº 8 (y = - x + 2):

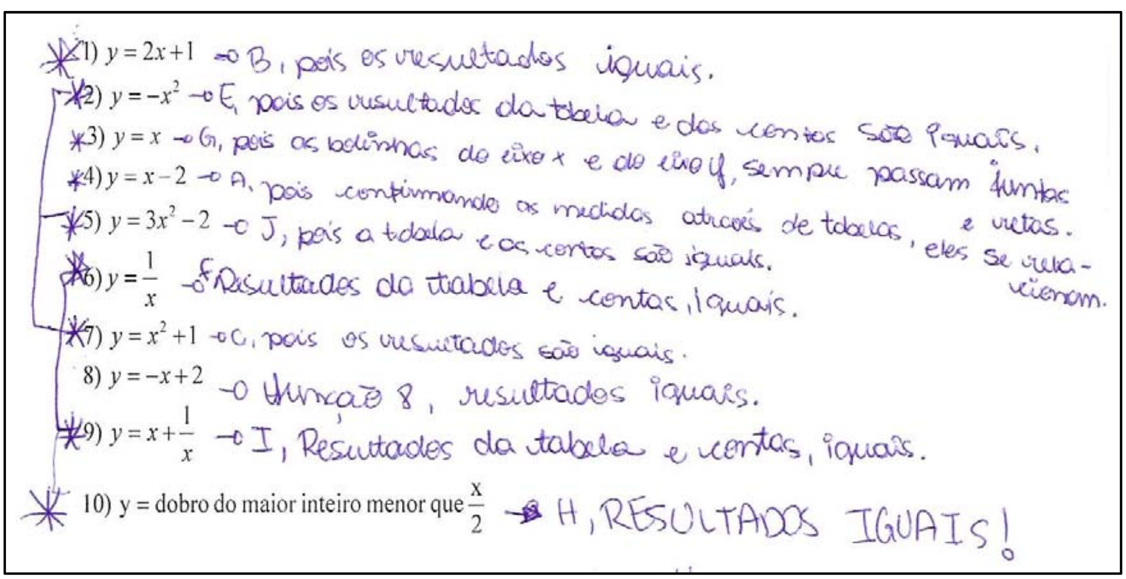
***Luciano**: A bolinha vai no outro sentido na mesma proporção. (As variáveis) x e y caminham na mesma proporção mas em direção oposta. Mas x começando em 2, na unidade 2.*

Todas as representações algébricas das funções são relacionadas corretamente com seus respectivos gráficos pelas duplas Carolina e Juliana (grupo 1), Geiza e Natália (grupo 2) e Helio e Vinícius (grupo2).



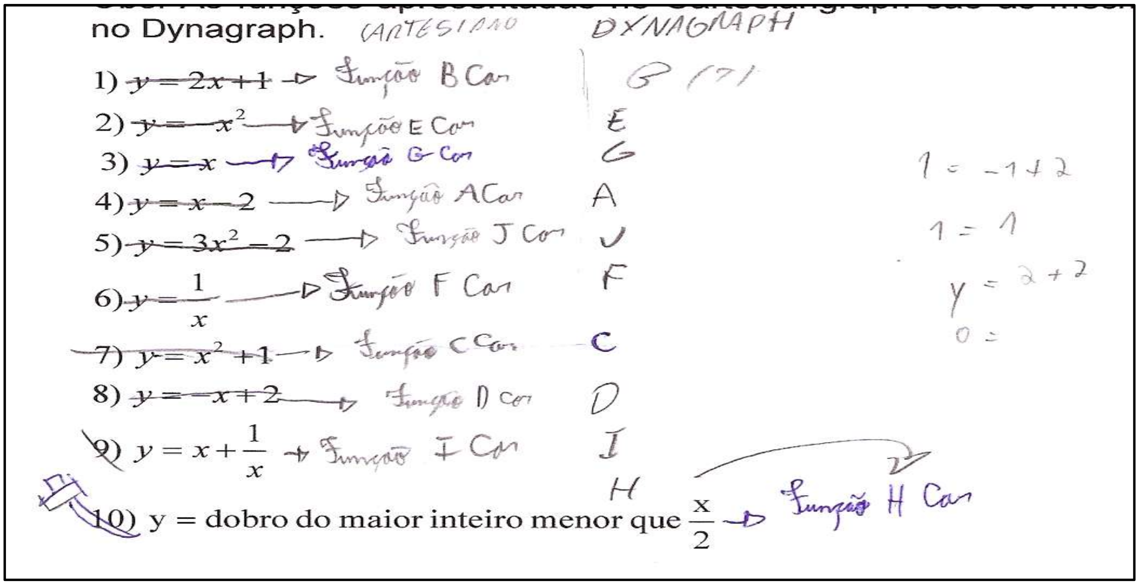
1) $y = 2x+1$ → Cartesiangraph(B); Dynagraph(B)
2) $y = -x^2$ → Cartesiongraph(E); Dynagraph(E)
3) $y = x$ → cartesiongraph(G); Dynagraph(G)
4) $y = x-2$ → cartesiongraph(A); Dynagraph(A)
5) $y = 3x^2-2$ → cartesiongraph(J); Dynagraph(J)
6) $y = \frac{1}{x}$ → cartesiongraph(F); Dynagraph(F)
7) $y = x^2+1$ → cartesiongraph(C); Dynagraph(C)
8) $y = -x+2$ → cartesiongraph(D); Dynagraph(D)
9) $y = x+\frac{1}{x}$ → cartesiongraph(I); Dynagraph(I)
10) y = dobro do maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$ → cartesiongraph(H); Dynagraph(H)

Figura 115: Ficha 3: Resposta dada pela Carolina e Juliana para a 2ª questão



1) $y = 2x+1$ → B, pois os resultados iguais.
2) $y = -x^2$ → E, pois os resultados da tabela e dos contos são iguais.
3) $y = x$ → G, pois as bolinhas do eixo x e do eixo y, sempre passam juntas
4) $y = x-2$ → A, pois confirmando as medidas através de tabelas, e retas. eles se relacionam.
5) $y = 3x^2-2$ → J, pois a tabela e as contas são iguais.
6) $y = \frac{1}{x}$ → F Resultados da tabela e contas, iguais.
7) $y = x^2+1$ → C, pois os resultados são iguais.
8) $y = -x+2$ → função 8, resultados iguais.
9) $y = x+\frac{1}{x}$ → I, Resultados da tabela e contas, iguais.
10) y = dobro do maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$ → H, RESULTADOS IGUAIS!

Figura 116: Ficha 3: Resposta dada pela Geiza e Natalia para a 2ª questão


no Dynagraph. CARTESIANO DYNAGRAPH

1) $\cancel{y = 2x+1}$ → Função B Car G (?)

2) $\cancel{y = -x^2}$ → Função E Car E

3) $\cancel{y = x}$ → Função G Car G

4) $\cancel{y = x - 2}$ → Função A Car A

5) $\cancel{y = 3x^2 - 2}$ → Função J Car J

6) $\cancel{y = \frac{1}{x}}$ → Função F Car F

7) $\cancel{y = x^2 + 1}$ → Função C Car C

8) $\cancel{y = -x + 2}$ → Função D Car D

9) $y = x + \frac{1}{x}$ → Função I Car I

10) y = dobro do maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$ → Função H Car H

1 = −1 + 2

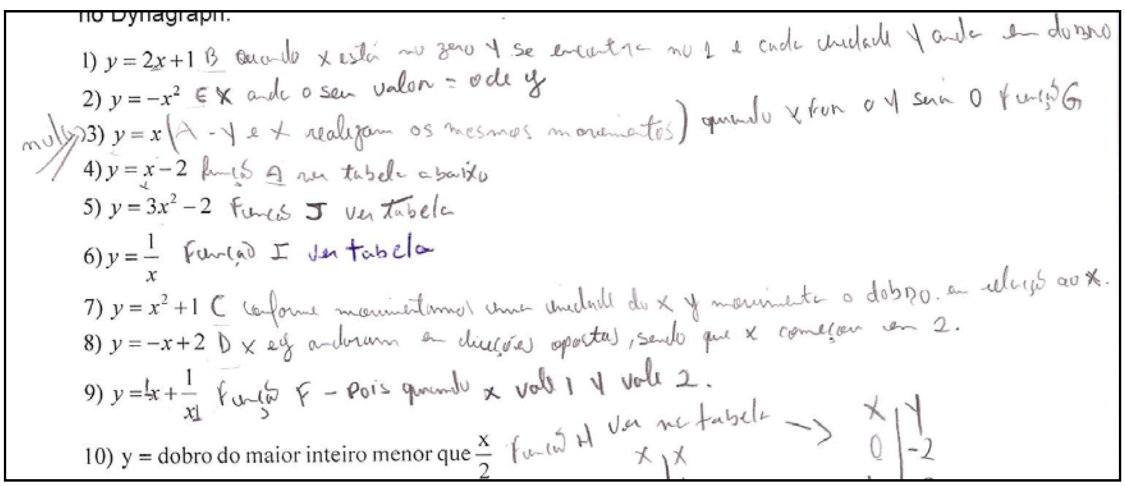
1 = 1

y = 2 + 2

0 =

Figura 117: Ficha 3: Resposta dada pelo Helio e Vinicius para a 2ª questão

Já Adriano e Luciano trocam apenas as representações algébricas das funções com assíntota, todas as outras representações são associadas corretamente.


no Dynagraph.

1) $y = 2x+1$ B Quando x está no zero y se encontra no 1 e cada unidade y anda em dobro

2) $y = -x^2$ E X anda o seu valor = o de y

nulo 3) $y = x$ (A - y e x realizam os mesmos movimentos) quando x for o y será 0 função G

4) $y = x - 2$ função A ver tabela abaixo

5) $y = 3x^2 - 2$ Função J ver tabela

6) $y = \frac{1}{x}$ Função I ver tabela

7) $y = x^2 + 1$ C conforme movimentamos uma unidade do x y movimenta o dobro. em relação ao x.

8) $y = -x + 2$ D x e y andaram em direções opostas, sendo que x começou em 2.

9) $y = x + \frac{1}{x}$ Função F - Pois quando x vale 1 y vale 2.

10) y = dobro do maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$ Função H ver na tabela →

x	y
0	-2

Figura 118: Ficha 3: Resposta dada pelo Adriano e Luciano para a 2ª questão

As associações estabelecidas entre as duas representações das 10 funções propiciam um olhar comparativo das semelhanças e diferenças, tanto na representação algébrica quanto na representação gráfica, entre as funções. E a diferença de ambiente computacional permite um olhar diferente ao comportamento observado.

3.2. RESUMO

Neste capítulo descrevemos as três sessões de ensino realizadas com quatro duplas de estudantes que participam da parte prática de nossa pesquisa. Na descrição, procuramos situar o ambiente de aprendizagem para que o leitor pudesse experimentar um pouco do que foi feito com os aprendizes nas sessões de ensino. Para cada sessão, identificamos narrativas pertinentes, raízes narrativas interessantes, estratégias utilizadas para descrever comportamentos e propriedades de função destacadas. Também apresentamos as semelhanças e diferenças entre as funções percebidas pelos estudantes ao associar a representação algébrica à representação gráfica de uma mesma função.

No próximo capítulo, voltamos à nossas questões de pesquisa, buscando fazer um paralelo entre o pensamento narrativo e o pensamento paradigmático. Apresentamos, também, as conclusões de nossa pesquisa.

CAPITULO 4

Neste capítulo apresentamos as considerações finais de nossa pesquisa, sintetizamos o caminho percorrido - com os objetivos traçados -, explicitamos a metodologia e as ferramentas teóricas utilizadas e elaboramos uma síntese dos resultados encontrados. Além disso, oferecemos as repostas para nossas questões de pesquisa, sugeridas no primeiro capítulo, e refletimos sobre as possíveis implicações dessa pesquisa para o ensino de matemática.

4.1. INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é identificar e estudar as narrativas produzidas, matematicamente, pelos estudantes em ambientes de aprendizagem que abordam funções matemáticas e investigar a contribuição de tais narrativas na construção de conhecimentos e significados matemáticos. Procuramos identificar histórias que se caracterizam como raízes narrativas e relatar como os aprendizes buscam, em seus conhecimentos anteriores e em suas experiências, sentido para compreender comportamentos e fenômenos matemáticos observados.

Inicialmente, buscando um quadro teórico que pudesse nortear nossas ideias sobre narrativa na aprendizagem matemática, encontramos no trabalho de Bruner (1997) a lente de investigação que procurávamos, visto que para ele narrativa é um modo de pensamento que procura dar um enfoque particular ao conhecimento matemático, localizando-o no tempo e no espaço. Esse modo de pensamento é contrastado ao modo paradigmático de pensamento que procura transcender os conhecimentos matemáticos do particular para níveis de abstração cada vez mais elevados.

Embora sempre haja uma valorização do pensamento paradigmático na educação matemática, algumas pesquisas sobre aprendizagem matemática atribuem um papel importante também para a narrativa (como, por exemplo, BURTON (1996), HEALY e SINCLAIR (2007); HEALY, SINCLAIR e SALES (em prelo)). Esses pesquisadores sugerem que características e conhecimentos de fenômenos matemáticos possam emergir, se os estudantes forem estimulados a explorar o significado de suas experiências, em situações de aprendizagem matemática, através de narrativas. Em nossa pesquisa, o envolvimento dos estudantes com as representações gráficas das funções apresentadas, dinamicamente, instiga os aprendizes a conectar objetos matemáticos não familiares, com suas propriedades e relações paradigmáticas, com idéias e conhecimentos anteriores através de narrativas, criando uma rede de conexões entre conhecimentos e experiências anteriores com novos conhecimentos, através de boas histórias.

Para destacar as narrativas produzidas, utilizamos as quatro características que, segundo Bruner (1997), as identificam: ter uma sequência inerente, poder ser real ou imaginária, criar conexões entre o excepcional e o ordinário e possuir uma qualidade dramática.

A partir da conjectura de que a criação de narrativas pode ser estimulada por uma situação didática instigante e bem estruturada e por um ambiente educacional que possibilite interações dos estudantes com a situação proposta, elegemos, em nossa pesquisa, trabalhar com micromundo. Segundo Hoyles e Noss (1987), o micromundo é um caminho de interação entre o estudante e o programa computacional, sendo bastante influenciado pela situação didática na qual as interações são feitas. Além disso, Healy e Sinclair (2007) destacam três recursos do micromundo que incentivam a criação de boas estórias: movimento, tempo e agência.

Os micromundos utilizados são Cartesiangraph e Dynagraph, ambos desenvolvidos em Cabri-Géomètre. O Cartesiangraph apresenta, na tela do computador, a representação gráfica de uma função no plano cartesiano, e essa representação é dinâmica, pois, à medida que o usuário mexe nos valores da variável independente, os valores da variável dependente e do ponto coordenado (x,y) mexem-se, segundo a fórmula da função que a define. Já o Dynagraph apresenta, na tela do computador, a representação gráfica de funções em que os eixos coordenados são configurados horizontalmente. Essa representação gráfica também é dinâmica, pois, à medida que o usuário mexe nos valores de x, os valores de sua imagem modificam-se ou não, segundo a função que define o gráfico da função apresentada. Em ambos os micromundos, os estudantes podem mover livremente nos valores da variável independente.

A metodologia adotada nesse trabalho foi o *Design Experiments* (STEFFE e THOMPSON, 2000). Essa escolha deve-se ao fato da metodologia ter o intuito de estudar e tentar compreender, através do que os estudantes falam ou fazem, seu entendimento dos objetos matemáticos, considerando a matemática um objeto vivo e em constante interação com os indivíduos e o meio.

O enfoque matemático de nossa pesquisa é o estudo de funções matemáticas, um conteúdo muito importante na Educação Básica, principalmente no Ensino Médio. Pesquisas na área, mostrando dificuldades no ensino de funções, citam, por exemplo, as diversas maneiras de definir ou representar uma função como um motivador para a complexidade do tema (TALL, 1992), a dificuldade em interpretar gráficos de funções e a ambiguidade entre as representações simbólicas e as representações gráficas estáticas (GOLDENBERG et al, 1992).

Na parte empírica de nossa pesquisa, buscamos descrever as observações e classificações feitas pelos estudantes da 1ª série do Ensino Médio, que não tinham experiência com funções no contexto escolar (pelo menos até as primeiras sessões de ensino). A seguir, apresentamos uma síntese destas descrições, analisando as relações entre as falas dos alunos e as classificações convencionais associadas com as funções envolvidas.

4.2. UMA SÍNTESE DOS RESULTADOS

Reunimos em tabelas as classificações feitas, por cada dupla de estudantes, nos dois ambientes computacionais (Cartesiangraph e Dynagraph), fazendo um paralelo entre os grupos sugeridos pelos alunos e a classificação convencional das funções. Em nossa análise, identificamos os fatores que motivaram tais agrupamentos, as propriedades destacadas, os possíveis modos narrativos de pensamento, as possíveis raízes narrativas, como também a relação com a classificação convencional das funções. Além disso, comparamos os resultados dos quatro duplas juntas, identificando as principais diferença e semelhança entre elas.

Função	Classificação Convencional	Carolina e Juliana		Adriano e Luciano	
		Cartesiangraph (1ª sessão de ensino)	Dynagraph (2ª sessão de ensino)	Cartesiangraph (1ª sessão de ensino)	Dynagraph (2ª sessão de ensino)
$a(x) = x - 2$	Função afim	Funções que formam uma reta	Grupo das funções proporcionais	- Formam uma reta diagonal - Não passam pelo centro	Livre proporcional
$b(x) = 2x + 1$					
$d(x) = -x + 2$			Grupo que a distância muda proporcionalmente		Bolinhas opostas
$g(x) = x$	Função linear	- Funções que formam uma reta - Funções que passam pelo zero	Grupo das funções proporcionais	- Formam uma reta diagonal - Passam pelo centro	Livre proporcional
$c(x) = x^2 + 1$	Função quadrática	- Funções que formam uma curva - Funções que formam um "V" - *Função e*: Funções que passam pelo 0	Grupo elástico	- Formam um arco - *Funções c, j*: não passam pelo centro - *Função e*: passa pelo centro	Função da bolinha de um sentido
$e(x) = -x^2$					
$j(x) = 3x^2 - 2$					
$f(x) = \frac{1}{x}$	Função com assíntota	- Funções que formam uma curva - Funções que se teletransportam	Grupo que gira	Circunferência: não passa pelo centro, nem forma reta	Movimento giratório
$i(x) = x + \frac{1}{x}$				- Formam um arco - Não passa pelo centro	
$h(x) =$ o dobro do maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$	Função descontínua	- Funções que foram uma "escada" - Funções que passam pelo 0.	Grupo coelhinho	Escada	Função escalar contínua

Tabela 11: Classificação no Cartesiangraph e no Dynagraph do grupo 1 (duplas Carolina e Juliana, Adriano e Luciano).

Função	Classificação Convencional	Geiza e Natalia		Helio e Vinicius	
		Cartesiangraph (2ª sessão de ensino)	Dynagraph (1ª sessão de ensino)	Cartesiangraph (2ª sessão de ensino)	Dynagraph (1ª sessão de ensino)
$a(x) = x - 2$	Função afim	Grupo rampa	Funções que as bolinhas sempre andam juntas uma com a outra	Grupo das réguas	Grupo da locomotiva
$b(x) = 2x + 1$			As bolinhas se distanciam conforme vão se afastando dos números.		Grupo que a partir de um certo ponto, com pequenas variações na linha de baixo haveriam grandes variações na linha de cima.
$d(x) = -x + 2$					
$g(x) = x$	Função linear (grupo particular da função afim)		Funções que as bolinhas sempre andam juntas uma com a outra		Grupo da locomotiva
$c(x) = x^2 + 1$	Função quadrática	Grupo bate e volta	Não importa se a bolinha de baixo vai para direita ou para esquerda, a bolinha de cima vai sempre na mesma direção.	Grupo dos transferidores	Grupo das funções que têm certo limite.
$e(x) = -x^2$					
$j(x) = 3x^2 - 2$					
$f(x) = \frac{1}{x}$	Função com assíntota	Grupo Montanha Russa	Quando a bolinha de baixo encosta na origem, a bolinha de cima some e depois vai para o outro lado	Grupo do teletransporte	Grupo que o resultado é nulo
$i(x) = x + \frac{1}{x}$					
$h(x) =$ o dobro do maior inteiro menor que $\frac{x}{2}$	Função descontínua	Grupo escada	A bolinha de cima fica tentando alcançar a de baixo. E a de baixo tenta "fugir".		Grupo pulo

Tabela 12: Classificação no Cartesiangraph e no Dynagraph do grupo 2 (duplas Geiza e Natalia, Helio e Vinicius)

Observando as tabelas, percebemos que os agrupamentos são parecidos nos dois ambientes computacionais para cada tipo de função (afim, quadrática, com assíntota e descontínua); com exceção do grupo de funções afins, que apresentam dois grupos distintos no Dynagraph e as funções com assíntota, que, no Cartesiangraph, são divididos em grupos distintos por Adriano e Luciano e são colocados junto com a função descontínua pelo Helio e Vinícius.

Procurando o motivo para as classificações diferentes para as funções com assíntota, encontramos na dupla Adriano e Luciano um fato curioso: eles descrevem a função *i* $\left(i(x) = x + \frac{1}{x}\right)$como aquela que faz circunferência e é parecida com a função *f* (comentário da dupla registrado no capítulo anterior), no entanto, no momento de classificar, como estão muito preocupados com as funções que passam ou não pelo ponto (0,0), deixam um pouco de lado o comportamento já observado e anotado da função *i,* classificando-a junto com as funções quadráticas *c* e *j* que também não passam pelo ponto (0,0), ou seja, eles percebem um padrão de comportamento ao descrever as funções, mas o esquecem, ao classificarem a função *i*. Já na classificação da dupla Helio e Vinícius, percebemos um grande conflito entre eles para justificar o porquê da função *h* $\left(\text{h}\ \ (\text{x}) = \text{o dobro do maior inteiro menor que } \frac{\text{x}}{2}\right)$ ser classificada com as funções com assíntota *f* e *i*, já que na descrição da função eles a identificam como a função “pulo” (como os seus colegas) e essa característica, eles têm certeza de que as funções *f* e *i* não têm. No momento da classificação, Vinicius deixa registrado em áudio (ver registro no capítulo anterior) que discorda da classificação sugerida pelo colega, ao agrupar a função *h* no mesmo grupo das funções *f* e *i,* mas não sabe justificar por que a função *h* não deve ser classificada com as funções *f* e *i*.

Refletindo sobre o conflito de Helio e Vinícius, não podemos criticar a classificação atribuída por eles, ao colocarem uma função não continua com funções não definidas em um ponto (no nosso caso, funções com assíntota), ou seja, talvez isso possa sugerir que eles considerem todas essas três funções (função *f*, função *h* e função *i*) como funções não contínuas. Em nosso modo de ver, entretanto, há duas considerações importantes: o nível de desconfiança sobre essa classificação, abrindo a possibilidade de intervenção, em outro momento, do professor e a importância de eles deixarem explícitos aspectos que julgam importantes, mesmo que estes não coincidam sempre com a classificação convencional.

E os nomes dos grupos? Em qual dos ambientes computacionais os estudantes utilizam nomes mais criativos e interessantes[27], do ponto de vista das narrativas? A criatividade dos estudantes deve estar ligada mais ao micromundo utilizado ou a ordem da sessão de ensino (primeira ou segunda)? Qual deve ser o fator que mais influencia para a criação de boas histórias? Observando a tabela com as classificações de todas as duplas, podemos dizer que das 4 duplas envolvidas, 3 são mais criativas na 2ª sessão de ensino, ou seja, a ordem das sessões de ensino parece interferir na classificação dos grupos, pois as duplas sentem-se mais à vontade para fazer seus comentários, sem preocupação excessiva com o rigor matemático a partir da 2ª sessão de ensino. A única dupla que é bastante criativa ao nomear os grupos nas duas sessões de ensino é a dupla Helio e Vinícius. O fato de serem criativos também na primeira sessão pode ser explicado pelo grande envolvimento da dupla com a proposta, sempre fazendo comentários e discutindo idéias levantadas, mas também pode estar relacionada com a interface e as possibilidades que o Dynagraph possibilita ao apresentar uma representação gráfica desconhecida dos estudantes até então.

Ao observar detalhadamente os nomes escolhidos para caracterizar ou identificar cada grupo de funções, percebemos que uns nomes estão associados a aspectos visuais e outros a aspectos comportamentais das funções, sendo que essa diferença está intimamente ligada ao ambiente computacional utilizado. As funções apresentadas no Cartesiangraph estão mais associadas a aspectos visuais das funções[28], como, por exemplo, funções que formam uma reta ou grupo das réguas para as funções afins;

---

[27] Em nosso contexto a palavra interessante é algo que desperta interesse, que tem seus encantos e que é atraente.
[28] No Cartesiangraph, também encontramos nomes de grupos associadas a comportamentos da função, como o grupo das funções que se teletransportam para as funções com assíntota, ou grupo bate e volta para funções quadráticas, por exemplo.

funções que formam uma curva, arco ou grupo dos transferidos para funções quadráticas. Já no Dynagraph, os nomes dos grupos estão geralmente associados aos aspectos comportamentais observados, como por exemplo, grupo da locomotiva ou bolinhas proporcionais para funções afins, grupo elástico ou bolinha de um sentido para funções quadráticas; grupo pulo ou coelhinho para funções descontínuas. Ao tentar descrever os comportamentos observados nas funções, as duplas buscam, em seu repertório cognitivo, ideias e conhecimentos que podem auxiliá-los a dar sentido ao comportamento observado, e desse modo, as boas histórias aparecem.

4.3. Questões de pesquisa

Voltamos às questões de pesquisa do capítulo 1:

1) *Qual o papel das narrativas na construção do conhecimento de função entre estudantes do Ensino Médio?*

Em nosso trabalho, a opção por apresentar 10 funções envolvendo vários tipos de funções (afins, quadráticas, com assíntota e descontínua), sem que os estudantes soubessem, em princípio, quais e quantas funções deveriam ser agrupadas, faz com que eles se envolvam na busca por descobrir padrões comuns de comportamento, diferenças e semelhanças entre as representações gráficas; pequenos detalhes poderiam fazer toda a diferença. A cada novo padrão identificado, uma nova história, um novo parâmetro de comparação com as funções que ainda iriam observar.

Com o desenrolar das sessões de ensino, percebemos que as narrativas possibilitam uma percepção particularizada dos tipos de funções, mas nem por isso, menos significativa, muito pelo contrário, os aprendizes envolvem-se com muito interesse na proposta de trabalho, conectando propriedades e relações paradigmáticas das funções com suas próprias histórias matemáticas. É a partir das observações dos estudantes, dos padrões por eles determinados, que as funções são agrupadas e classificadas. O *grupo da locomotiva* (nomeado pela dupla Helio e Vinicius), por exemplo, caracteriza funções afins do tipo f(x)= x + b. O *grupo bate e volta* (nomeado pela dupla Geiza e Natalia) caracteriza funções quadráticas cujos valores da imagem são repetidos depois de um determinado ponto (o vértice).

Chamar atenção de propriedades pertinentes e identificar comportamentos que caracterizam diferentes funções informalmente permite uma maior facilidade por parte dos estudantes para falar e para opinar sobre funções, antes mesmo de terem se apropriado da linguagem mais formal. Em relação a esse comentário, vale à pena destacar um outro do professor dos estudantes (de classe), alguns meses depois da nossa aplicação prática na escola: "*De modo geral, os alunos que participaram da experiência, mostram um pouco mais de interesse em compreender a matemática e não apenas conseguir nota. Apenas um aluno, dos oito que participaram, teve seu desempenho, que era ruim, inalterado.*"

2) Em quais atividades as narrativas emergem com mais freqüência?

Das atividades apresentadas nas três sessões de ensino, as que possibilitam a criação de narrativas com mais frequência na maioria das duplas envolvidas englobam dois aspectos: comportamento excepcional na representação gráfica e surpresa do estudante ao se deparar com um comportamento desconhecido ou, em princípio, que não sabe como explicar. Nesses momentos, os estudantes são desafiados a recorrer a conhecidos anteriores e a criar histórias que poderiam explicar ou tornar o comportamento observado significativo ou compreensível, ou seja, a narrativa ajuda a organizar, construir e criar conexões entre as nossas experiências (BRUNER, 1997), enfatizando um modo particular de lidar com algum fenômeno aparentemente novo.

Outra atividade, ou melhor, procedimento, que facilita a criação de histórias é ativado quando pedimos a um dos estudantes da dupla para explicar o comportamento observado da função para um colega ou para algum dos pesquisadores presentes nas sessões, sem que este visse o comportamento na tela. Ao explicar o comportamento observado, os objetos computacionais, muitas das vezes, passam a ser descritos com certa dramaticidade, dentro de uma sequência de eventos reais ou imaginários, criando conexões entre o comportamento excepcional observado e algo ordinário conhecido que fizesse sentido para tal comportamento. Essas características descrevem, segundo Bruner (1997), uma narrativa.

Não podemos deixar de registrar que as atividades de classificação e de pensar em nomes criativos e significativos para cada grupo de funções é, em alguns casos, rico de narrativas. Talvez por este razão, as duplas que participaram do primeiro dia das sessões de ensino, têm poucas narrativas. Nesse primeiro dia, os alunos são orientados a agrupar e justificar os agrupamentos feitos para as funções, sem pensar em nomes. É a partir do segundo dia de sessões de ensino (1ª sessão de ensino para duas das quatro duplas envolvidas) e das sessões seguintes que os estudantes devem pensar em nomes para os grupos. A diferença entre os nomes dos grupos escolhidos na primeira sessão de ensino e os escolhidos na segunda sessão de ensino, também pode refletir um aumento gradual no sentido de legitimar pensamento narrativo, já que na primeira sessão de ensino não é algo que os estudantes associam com comportamento esperado na aula da matemática, mas ficam mais soltos a partir da segunda sessão de ensino, utilizando um vocabulário mais pessoal e menos preocupado com termos matemáticos.

Entretanto, não são todas as funções que possibilitam o surgimento de narrativas com muita frequência. Podemos destacar as funções afins como as funções que menos possibilitam que narrativas surjam tanto na observação dos comportamentos como na discussão sobre a classificação. Isso pode ser explicado pelo comportamento observado que não apresenta nada de excepcional e não causa surpresa ao estudante. Mas mesmo nesse grupo, podemos identificar uma narrativa interessante, quando a função linear $g(x) = x$, no Dynagraph é descrita por um dos estudantes a um colega que não olha o comportamento da função como uma locomotiva que anda nos trilhos, e os trilhos são os eixos coordenados (que são apresentados paralelamente).

3) Podemos identificar estórias que representam raízes narrativas em relação ao estudo de função?

Aos poucos, os comportamentos observados das funções tomam forma e movimentos personalizados, recebendo nomes e classificações que são significativos com suas características e propriedades (do ponto de vista dos estudantes); algumas funções ou tipos de funções ficam até “batizadas” com um determinado termo. Nessas narrativas do movimento, características ou propriedades observadas das funções destacamos algumas histórias que capturam, mesmo de maneira não formal, aspectos de uma propriedade, uma relação ou uma definição matemática, ou seja, destacamos raízes narrativas relacionadas com o estudo de função.

Na função descontínua *h(x) = ao dobro do menor inteiro maior que x/2*, mais conhecida como função “coelho” para uns, função “pulo” para outros, destacamos que o movimento descontínuo da função é caracterizado pelos estudantes como *pulos* de um coelho. Nesse exemplo, pode ser que o movimento de *pulos* sirva como raiz narrativa que caracteriza determinadas funções descontínuas.

Nas funções com assíntota (no nosso caso, não definidas para x = 0), os estudantes percebem o rompimento de um movimento para o outro, os valores da função *“somem porque estão se teletransportando*”. Na raiz narrativa “teletransporte”, podemos identificar algumas funções não definidas para um valor determinado da abscissa, no nosso caso quando x = 0.

As funções quadráticas, apesar de receberam descrições variadas para o movimento observado, é o único grupo classificado igualmente por todos os estudantes, ou seja, todas as duplas caracterizam as funções quadráticas como pertencentes ao mesmo grupo, não há divergência entre as duplas. Sobre a descrição desse tipo de função destacamos a fala: “... *esse grupo elástico parece na verdade aquele joguinho da bolinha na raquete (faz o movimento com as mãos), que ela vai e volta, sabe? Que* *faz tum, tum, tum"*. Nessa fala, temos um bom exemplo do modo narrativo de pensamento, com suas quatro características. A *seqüência inerente* do movimento da bolinha presa a raquete. Esse movimento de vai e vem, com um limitador (raquete) cria uma *conexão entre o* movimento *excepcional* observado da função *e o simples* movimento da bolinha na raquete. O movimento mencionado *pode ser real*, fazendo o barulho tum, tum, tum *ou não* e toda a história apresentada possui uma *qualidade dramática* acompanhada pelos gestos das mãos da estudante, enquanto a verbaliza. O destaque dessa história é a palavra *elástico* que pode ser identificada como uma raiz narrativa para determinadas funções quadráticas.

4.4. SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

O trabalho de pesquisa não termina com a apresentação desse trabalho. Novas possibilidades surgem à medida que refletimos sobre nossos acertos, erros, novas ferramentas e novas abordagens.

O trabalho inicial de funções, apresentando uma série de funções com diferentes tipos de funções, sugere que o estudante tenha uma visão mais globalizada das funções e perceba que existem características pertinentes que podem determinar a classificação das funções, ou seja, a percepção dos diferentes tipos de função é construída junto com o aprendiz e não comunicada a cada nova classificação apresentada. Assim, é preciso que os professores aceitem o desafio de experimentar novas formas de abordar um assunto tão importante na Educação Básica. Sugerimos, ainda, que esse trabalho inicial de explorar, de modo mais livre, as relações e propriedades existentes entre as funções seja experimentado no último ano do Ensino Fundamental.

Na apresentação gráfica das funções no plano cartesiano, percebemos uma dificuldade em focar as observações no ponto coordenado (x,y). Os estudantes, muitas vezes, descrevem o comportamento no eixo x ou no eixo y. O fato de existir 3 pontos dificulta, um pouco, as observações. Ao utilizar o plano cartesiano, sugerimos, então, que seja escolhido ou o valor do y ou o valor do ponto (x,y), para que os sujeitos da pesquisa concentrem suas atenções para o comportamento indicado.

O ambiente computacional Dynagraph apresenta uma representação gráfica da função diferente da representação gráfica apresentada no plano cartesiano, e isso permite algumas discussões peculiares sobre o comportamento das funções, quando apresentadas graficamente. É necessário, desta forma, legitimar o uso de outras representações gráficas no estudo sobre funções, para possibilitar novas percepções e discussões. Em nosso trabalho, utilizamos apenas uma versão visual desse ambiente, mas sugerimos uma experiência do Dynagraph com som, associando cada movimento ou intensidade do movimento a um determinado som.

O enfoque do nosso trabalho é identificar e estudar as narrativas produzidas no estudo sobre funções, entretanto acreditamos que esse modo de pensamento pode e deve ser discutido em outras abordagens matemáticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARNARD, T. e TALL, David. (1997). **Cognitive units, connections and mathematical proof**. *Proceedings of the 21st Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Finland, 2, pp. 41-48.

BRASIL. (2002). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC; SEMTEC,.

BRUNER, Jerome. (1997). ***Atos de significação***. Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas.130p.

BURTON, S. (1996). Mathematics, and its learning, as narrative – A literacy for the the twenty-first century. In BAKER, D., CLAY, J. e FOX, C. (org.). **Changing ways of knowing: in English, mathematics and science**. London: Falmer Press.

COBB, Paul; CONFREY, Jere; diSESSA, Andrea; SCHAUBLE, Leona. (2003). **Design Experiments in Education Research**. Educational Researcher, v.32.1.

DANTE, Luiz Roberto. (2007). ***Matemática: contexto e aplicações. 1 Ensino Médio***. Ática, 4ª ed, p.5-319. São Paulo.

DREYFUS, T. e EISENBERG, T. (1990). ***On difficulties with diagrams: Theorical issues***. 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Oaxtepec. México.

DRISOSTES, Carlos A. T. (2005). ***Design iterativo de um micromundo com professores de matemática do Ensino Fundamental***. São Paulo. 300 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

EVES, Howard. (1995). ***Introdução à História da Matemática***. Editora da Unicamp. pp.472-475.

GIOVANNI, José Rui e BONJORNO, José Roberto. (2000). ***Matemática: uma nova abordagem, vol 1: versão progressões***. FTD, P.7-303, São Paulo.

GOLDENBERG, Paul; LEWIS, Philip; O'KEEFE, James. (1992). Dynamic Representation and the development of a process understanding of function. In: HAREL, G e DUBINSKY, E. **The concept od Function: Aspects os Epistemology and Pedagogy**. USA: Mathematical Association of America. pp. 235-260.

HEALY, Lulu; SINCLAIR, Nathalie. (2007). **If this is our mathematics, what are our stories?**. International Journal Computer for Mathamatical Learning. Springer Science + Business Media. pp. 3-21.

HEALY, Lulu; SINCLAIR, Nathalie; SALES, Cassia (em prelo). *Time for Telling Stories: Narrative Thinking with Dynamic Geometry*.

HOYLES, Celia. (1993). Microworlds/Schoolworlds: The transformation of innovation, in KEITEL,C. e RUTHVEN, K. (org.). **Learning from computers: Mathematics education and technology**. Nato Asi Series F, vol 121, pp. 1-17. Berlin: Springer-Verlag,.

HOYLES, Celia, NOSS, Richard. (1987). Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum. International Journal of Mathematics, Science and Technology, 18/4, pp.581-595;

KLEINER, I. (1989). ***Evolution of the function concept: A brief survey***. In: The College Mathematics Journal, 20(4). pp.282-300.

MONK, G. (1990). ***A framework for describing student understanding of functions***. Annual Meeting of the American Educational Research Association. San Francisco.

PAIVA, Manoel. (1999) **Matemática: volume único**. Moderna, 1ª edição. São Paulo.pp.57-118

ROSSINI, Renata. (2006). ***Saberes docentes sobre o tema função: uma investigação das praxeologias***. São Paulo, 382f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SELDEN, A. e SELDEN, J. (1992). Research perspectives on conceptions on functions summary and overview. In: HAREL, G e DUBINSKY, E. **The concept od Function: Aspects os Epistemology and Pedagogy.** USA: Mathematical Association of America. pp.1-21

STEFFE, Leslie P.; THOMPSON, Patrick W. (2000). ***Teaching Experiments Methodology: Underlying Principles and Essential Elements.*** Research design im Mathematics and science education. Hillsdate. pp.267-306.

TALL, David. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof. In: GROUWS, D. **Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning:** A project of the National Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillan Library Reference USA.

YOUNG, R. e SAVER, J. (2001). ***The neurology of narrative***. Substance94/95, 30(1-2). pp. 72-82.